GÉOMÉTRIE

APPLIQUÉE A L'INDUSTRIE.

GÉOMÉTRIE

APPLIQUÉE A L'INDUSTRIE,

A L'USAGE

DES ARTISTES ET DES OUVRIERS ;

PAR

C. L. BERGERY,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, PROFESSEUR A L'ÉCOLE D'ARTILLERIE DE METZ, TITULAIRE DE L'ACADÉMIE ROYALE DE CETTE VILLE, CORRESPONDANT DE L'INSTITUT ET DE PLUSIEURS AUTRES SOCIÉTÉS SAVANTES ;

OUVRAGE PUBLIÉ

PAR LA SOCIÉTÉ D'ENCOURAGEMENT

POUR L'INSTRUCTION ÉLÉMENTAIRE, A LIÉGE.

PRIX : FR. 2, 50.

LIÉGE,

IMPRIMERIE DE H. DESSAIN, LIBRAIRE,

PLACE ST.-LAMBERT.

1837.

SIGNES

ABREVIATIFS ET DISTINCTIFS.

---

(19) signifie qu'il faut relire *l'article* 19.

(probl. *b*, p. 112) signifie qu'il faut recourir au problème *b* de la page 112.

(probl. *c*) renvoie au problème *c* du même numéro.

(appl. *d*, p. 9) indique qu'il faut revoir l'application *d* de la page 9.

(p. 101) renvoie à la page 101.

(P. II, F. 14) montre qu'on doit avoir sous les yeux la figure 14 de la deuxième planche.

A' se prononce *grand* A *prime*.

A'' se prononce *grand* A *seconde*.

A''' se prononce *grand* A *tierce*.

A$^{\text{IV}}$ se prononce *grand* A *quarte*.

A$^{\text{V}}$ se prononce *grand* A *quinte*.

a' se prononce *petit* a *prime*.

= remplace *égale*.

+ remplace *plus*.

− remplace *moins*.

× remplace *multiplié par*.

BB'B''..... signifie qu'outre les points B, B', B'', marqués sur la figure, il y en a beaucoup d'autres à la suite.

Les guillemets (« ») placés au commencement et à la fin d'un paragraphe de principe ou de problème, indiquent que les commençans peuvent, sans inconvénient, passer ce paragraphe.

INSTRUCTION

SUR

LE DESSIN LINÉAIRE.

Il est indubitable que des opérations géométriques dont on se borne à suivre la description dans un livre et même sur une figure, ne se gravent jamais d'une manière durable dans l'esprit. Pour parvenir à les retenir, à les exécuter sûrement et avec facilité, il faut absolument en faire soi-même tous les détails, et plusieurs fois plutôt qu'une seule. C'est d'ailleurs en répétant souvent et manuellement l'application d'un principe, qu'on se le rend propre et qu'on le met au nombre de ces idées familières qui se présentent en quelque sorte d'elles-mêmes, dès que l'esprit en a besoin.

Les élèves d'un cours de géométrie doivent donc, pour étudier cette science fructueusement, opérer sans cesse, comme font en arithmétique ceux qui veulent devenir habiles calculateurs. Jamais ils ne sauraient pratiquer la géométrie ou en appliquer les principes, s'ils n'exécutaient pas eux-mêmes, sur le tableau noir et mieux encore sur le papier, tous les *tracés* qui leur sont enseignés.

L'exécution des tracés constitue en grande partie ce qu'on est convenu d'appeler le *Dessin linéaire.* Ce genre de dessin est facile ; il faudrait même être bien malheureusement organisé, pour n'y pas réussir dès les premiers essais. Toutefois, une courte instruction propre à guider les commençans, ne peut que rendre leurs succès plus prompts et plus certains.

Le tableau noir doit être solidement fixé sur un mur et avoir 2 mètres en longueur, $1^{m},50$ en largeur. — Fait en peuplier, il coûte à Metz, tout posé, 16^{f}.

Pour dessiner sur ce tableau, il faut :

Une règle longue de 1^{m} et large de $0^{m},08$; prix ; 1^{f}.

Une équerre de $0^{m},2$ sur $0^{m},15$; prix $1^{f},50$.

Un compas en noyer, long de $0^m,60$, dont une branche soit terminée par une pointe en fer et l'autre par un porte-crayon du même métal ; prix : 6^f.

Il faut en outre des crayons de craie tendre, et une grosse éponge ou un linge, pour effacer.

Les tracés faits sur le tableau sont d'autant moins inexacts, que les crayons sont plus fins; mais à raison de ce que la craie tendre ne peut former une pointe à la fois solide et fine, il y a impossibilité de mettre une grande précision dans de tels dessins. Aussi doivent-ils être considérés seulement comme des exercices propres à bien faire saisir les tracés et à donner le moyen de les exécuter aisément, avec exactitude, sur le papier.

Lorsqu'on veut unir à la craie et en suivant la règle, deux points ou marques faites sur le tableau, on doit placer cette règle à la même distance de ces deux points et l'en tenir écartée autant que l'exige la grosseur du crayon.

Pour dessiner sur le papier, il faut :

Une règle en bois dur, de 15 pouces ; prix : 50 centimes.

Une équerre en bois dur, de 8 pouces sur 4 pouces ; prix : 50 cent.

Un double décimètre de *Kutsch* ; prix : 70 centimes.

Un tire-ligne ; prix : 2^f. (Il peut être remplacé par une plume bien taillée en fin.)

Un compas à trois fins, de 4 pouces ; prix : 5^f.

Un crayon de mine de plomb ; prix : 20 centimes.

Un morceau de gomme élastique ; prix : 10 centimes.

Un morceau d'encre de Chine ; prix : 20 centimes.

Prenez une feuille de papier entière et ouvrez-la. Sur la page de gauche, vous écrirez les énoncés des tracés et vous les numéroterez ; sur la page de droite, vous ferez ces tracés et vous leur donnerez les mêmes numéros qu'aux énoncés correspondans. Rien autre chose que ces chiffres ne sera écrit sur le dessin.

Les tracés doivent être faits d'une telle dimension, que six au plus remplissent la page. Vous les exécuterez d'abord au crayon et légèrement; puis, vous *mettrez à l'encre* en suivant exactement les traits du crayon ; enfin, vous effacerez avec la gomme élastique, les parties de ces traits que vous n'aurez pas dû couvrir d'encre.

C'est aussi en frottant le papier avec la gomme, qu'on le nettoie, quand la feuille de dessin est terminée. Si cette gomme se trouve trop dure pour bien enlever le crayon ou les souillures, on l'amollit soit en la chauffant, soit en la pétrissant entre les doigts.

Taillez le crayon en *langue de chat*, pour qu'il casse moins souvent et qu'il produise des lignes très-fines.

Marquez légèrement, avec une pointe de crayon ou de compas, les points que vous devrez unir par un trait au crayon.

Pour préparer l'encre, vous mettrez dans une soucoupe trois ou quatre gouttes d'eau et vous frotterez le morceau d'encre de Chine sur le fond du vase, jusqu'au moment où il formera un sillon qui permette d'apercevoir ce fond; alors seulement l'encre sera suffisamment noire.

Vous mettrez l'encre entre les *lèvres* du tire-ligne, au moyen d'une plume, après avoir desserré la vis qui unit ces lèvres. Quand vous aurez introduit trois ou quatre plumées d'encre, vous resserrerez la vis et vous essaierez l'instrument sur un morceau de papier, pour voir si les lignes qu'il tracera sont trop grosses ou trop fines.

Lorsqu'un tire-ligne qui contient de l'encre et qui n'est pas trop serré, vient à ne pouvoir plus marquer, il faut le passer légèrement sur le doigt, pour enlever l'encre sèche qui se trouve à l'extrémité du bec.

Le grand tire-ligne doit être tenu presque d'aplomb; vous le pencherez seulement un peu vers la droite, en l'appuyant contre l'arête supérieure de la règle. Cette règle est conséquemment placée à une petite distance du trait au crayon qu'il s'agit de mettre à l'encre.

Le tire-ligne du compas doit avoir, en tournant, la même position que l'autre. Vous aurez soin de ne pas trop appuyer sur la *pointe sèche* qui reste fixe, autrement vous perceriez le papier.

Dès que vous n'aurez plus à vous servir d'un tire-ligne, vous l'essuierez en dedans, avec soin, pour prévenir la rouille. On peut toujours éviter de mettre de l'encre en dehors; mais lorsqu'il y en a, il faut l'enlever, après l'avoir mouillée un peu, si elle est sèche.

Un dessin dépourvu d'explication doit se faire comprendre par lui-même. Pour qu'il en soit ainsi :

Les *lignes données*, droites ou courbes, sont très-fines et continues, comme celle-ci ————.

Les *lignes de résultat*, droites ou courbes, sont un peu moins fines et continues, comme celle-ci ————.

Les *lignes de construction*, c'est-à-dire toutes les autres, droites ou courbes, sont très-fines et coupées par des intervalles, comme celle-ci — — — — —. Lorsqu'elles se trouvent en grand nombre, on distingue celles d'une opération de celles d'une autre, en mettant un, deux, trois points dans les intervalles.

Exemples : —.—.—, —..—..—..—, —...—...—...—. Les parties d'une ligne coupée doivent être à peu près égales entre elles; les intervalles blancs doivent être très-petits et aussi à peu près égaux entre eux.

Il importe de s'exercer beaucoup au tracé de ces différentes sortes de lignes, soit avec le grand tire-ligne ou la plume, soit avec le compas; c'est le seul moyen de parvenir promptement à dessiner vite et bien.

On relève beaucoup un dessin, quand on entoure la feuille, d'un cadre composé de deux traits, l'un intérieur et fin, l'autre extérieur et large ; mais l'exécution d'un pareil cadre coûte beaucoup de temps, et mieux vaut s'en abstenir.

GÉOMÉTRIE

APPLIQUÉE

A L'INDUSTRIE.

NOTIONS GÉNÉRALES.

Tous les objets qu'on exécute dans les arts, sont terminés par des faces et les faces sont terminées par des arêtes. C'est ce qu'on reconnaît aisément sur une pièce de bois de charpente. Elle a 6 paremens ou faces : 4 grandes, et 2 petites qui forment les bouts. Ces 6 faces sont renfermées entre 12 arêtes : 4 grandes et à chaque bout 4 petites.

On peut voir aussi que le *fût* d'une colonne, c'est-à-dire la partie comprise entre le chapiteau et les moulures d'en bas, n'a que 3 faces : une qui va d'un bout à l'autre, qui s'étend tout autour et sur laquelle on ne peut appliquer une règle que dans un seul sens ; deux autres qui forment les bouts et sur lesquelles une règle peut être appliquée dans tous les sens. Ces trois faces sont renfermées entre deux seules arêtes qui se trouvent aux extrémités et qui sont rondes.

Une boule n'a qu'une seule face, sur laquelle une règle ne peut s'appliquer dans aucun sens, et l'on n'y voit aucune arête, parce que pour former une arête, il faut, ainsi qu'on le sent bien, deux faces qui se rencontrent.

Les objets produits par les arts, comme ceux que présente la nature, sont appelés *corps*. L'ensemble de leurs faces est souvent nommé *surface*. Les arêtes sont dites *lignes*, et leurs extrémités, quand elles en ont, comme dans une pièce de bois écarie, portent le nom de *points*.

Si vous couchez deux planches l'une sur l'autre, vous jugez tout de suite que celle de dessous a plus ou moins de longueur que celle de dessus, ou que leurs longueurs sont égales ; vous jugez pareillement que l'une a plus ou moins de largeur que l'autre ; ou que leurs largeurs sont égales ; et en les couchant l'une à côté de l'autre, vous voyez que leurs épaisseurs sont égales ou différentes. C'est en comparant ainsi les longueurs, les largeurs et les épaisseurs de ces planches, que vous les comparez entre elles. Ces planches ont donc chacune, longueur, largeur et épaisseur. Voilà ce qu'il faut entendre par les trois *dimensions* d'un corps. Ces trois dimensions sont par fois inégales, comme dans les planches qui sont plus longues que larges, et plus larges qu'épaisses, ou bien elles se trouvent égales, comme dans les dés à jouer.

On ne considère pas toujours l'épaisseur des corps. Par exemple, si je veux savoir combien je puis placer de chaises sur un parquet, je mesure sa longueur, pour connaître le nombre des rangs de chaises que je pourrai faire, puis sa largeur, pour connaître le nombre des chaises que je pourrai mettre sur un même rang; mais je ne m'occupe pas du tout de l'épaisseur qu'a le parquet. Ainsi, bien que les faces n'existent réellement que sur les corps, souvent notre esprit les considère seules et sans faire attention aux corps qui les portent. Il peut même aller jusqu'à se représenter une face qui n'existe pas: par exemple, la face que formerait le prolongement du dessus d'une table, étendu de manière à rencontrer les quatre murs d'une salle.

Vous venez de voir que, considérer les faces d'un corps, sans faire attention à ce corps, c'est laisser de côté son épaisseur. Il s'ensuit que les faces n'ont que deux dimensions: longueur et largeur.

On ne considère pas toujours la largeur des faces. Si je veux savoir, par exemple, combien je puis placer de tonneaux, de canons sur des chantiers, je ne mesure pas leur largeur; je n'y songe même pas. Je me contente de mesurer leur longueur, en suivant une arête. Ainsi, quoique les arêtes ou les lignes n'existent réellement que sur la surface des corps, nous les considérons souvent seules et sans faire attention aux faces qu'elles terminent. Notre imagination peut même nous représenter des lignes qui n'existent pas: par exemple, le prolongement de l'une des arêtes d'une règle.

Puisqu'en considérant une ligne sans faire attention à la face qu'elle termine, on laisse tout-à-fait de côté la largeur de cette face, il est clair que la ligne n'a qu'une seule dimension: longueur.

La ligne n'ayant que de la longueur, on comprend facilement que l'une quelconque de ses extrémités ou le point, ne peut être mesuré dans aucun sens. Le point est donc plus petit que tout ce qu'on peut imaginer.

Les faces sur lesquelles une règle peut s'appliquer dans tous les sens, sont dites *faces planes* ou *plans*; les autres sont des *faces courbes*.

Les lignes qui peuvent se confondre avec l'une des arêtes d'une bonne règle, sont appelées *lignes droites*; celles qui ne le peuvent pas sont des *lignes courbes*.

Tracer des lignes; former avec des lignes, les faces des corps; former les corps avec leurs faces; comparer et mesurer les lignes, les faces et les corps; telles sont les choses dont s'occupe la Géométrie. Elle tire ses moyens de principes qu'elle pose, qu'elle démontre ou qu'elle déduit; elle les applique à l'aide de deux instrumens: la règle et le compas. On se sert encore de quelques autres instrumens pour tracer, mais à la rigueur on peut s'en passer.

TRACÉ DES LIGNES.

On ne peut tracer des lignes que sur quelque chose, que sur les faces des corps. C'est ordinairement sur une face plane que se font les tracés, et on l'appelle le *Tableau*.

Toute ligne marquée sur un tableau a nécessairement de la largeur: elle présente en réalité une petite face. Mais cette largeur, nécessaire pour que les yeux voient la ligne, doit être considérée comme n'existant pas. Il est même très-important de la rendre aussi petite qu'il est possible, ou de faire les lignes très-fines; car si deux lignes un peu grosses, représentant deux arêtes, se coupent et qu'on ait besoin de marquer le lieu de la rencontre, de l'*intersection*, on ne saurait le faire avec précision, et ce n'est que par la précision, qu'on arrive dans les arts à la perfection.

Les lignes ne représentent pas toujours des arêtes de corps: un grand nombre de celles qu'on trace, ne servent qu'à faire parvenir au résultat qu'on a en vue; celles-là s'appellent *lignes de construction.*

Les lignes qu'il s'agit de tracer sont isolées ou combinées entre elles. Dans le premier cas, elles sont droites ou courbes; dans le second, les droites sont combinées soit avec des droites, soit avec des courbes, ou bien les courbes sont combinées entre elles.

Des droites combinées avec des droites, les coupent ou ne les rencontrent jamais. Des droites combinées avec des courbes, peuvent les couper ou seulement les toucher, et ces droites sont isolées, ou se coupent, ou ne se rencontrent pas. Des courbes combinées avec des courbes, les coupent, les touchent, ou ne les rencontrent jamais.

« Nous pouvons donc former le tableau suivant des divisions du tracé géométrique des lignes. »

TRACÉ DES LIGNES.
- *isolées:*
  - DROITES.
  - COURBES.
- *combinées:*
  - DROITES *avec*
    - droites
      - qu'elles coupent.
      - qu'elles ne rencontrent pas.
    - courbes
      - qu'elles coupent:
      - qu'elles touchent:
      - *Ces* DROITES *peuvent*
        - être isolées.
        - se couper.
        - ne pas se rencontrer.
  - COURBES *avec*
    - courbes
      - qu'elles coupent.
      - qu'elles touchent.
      - qu'elles ne rencontrent pas.

« L'ordre indiqué par ce tableau sera toujours suivi, excepté pour un seul chapitre, qu'afin de rendre les démonstrations plus simples, nous placerons avant son rang. »

TRACÉ DE LA LIGNE DROITE.

1. Rien ne paraît plus facile que de *tracer une ligne droite.* Il ne s'agit en effet que d'appliquer une règle sur le papier ou en général sur le tableau, et de faire glisser un crayon, une pointe à tracer, le long de l'une des deux grandes arêtes qui touchent la surface. Mais il faut avoir bien soin de maintenir la règle toujours dans la même position, de n'en jamais écarter le crayon ou la pointe, et c'est à quoi l'on ne réussit qu'après s'être exercé.

Si l'on doit unir par une droite deux *points* donnés, c'est-à-dire deux marques faites par deux piqûres d'une pointe de compas très-fine ou d'un poinçon très-aigu, il faut placer la règle de manière que l'une de ses longues arêtes passe par chaque point.

2. *La droite tracée ainsi entre deux points, est le plus court chemin pour aller de l'un à l'autre. Sa longueur est, par conséquent, la vraie distance qui sépare ces deux points.*

On peut toujours concevoir ou se représenter entre deux points, une droite qui les unisse, bien que cette droite ne soit pas tracée et lors même qu'elle ne peut l'être.

3. *Toute ligne terminée par deux points n'est qu'une portion de la ligne qu'on peut concevoir passer par ces deux points.* Une ligne considérée dans toute son étendue, n'a vraiment pas d'extrémités. La ligne droite par exemple, peut être prolongée par les deux bouts aussi loin que l'imagination peut aller, quand il n'y a pas de raison pour s'arrêter. On verra, par la suite, que les lignes courbes aussi n'ont au fond ni commencement ni fin. Toutes les fois donc qu'on parlera d'une droite ayant une longueur bornée, il faut entendre qu'il ne s'agit que d'une portion de cette droite.

C'est par les lettres de l'alphabet qu'on distingue les différentes parties d'une figure géométrique. Un point est toujours désigné par une seule lettre; ainsi l'on dit: le point A, le point B, le point C (P. I, F. 1). Toute droite est désignée par deux lettres, qu'on place aux extrémités quand elle en a; ainsi l'on dit: la droite AB.

« Moins les points sont gros, et plus il y a d'exactitude dans les dessins géométriques ou dans les tracés qu'on exécute sur les corps. On sent, en effet, que s'il s'agit de prendre avec un compas, l'écartement de deux points un peu gros, il est impossible de savoir où précisément doivent être posées les pointes, et qu'on ne sait pas davantage comment placer la règle, s'il s'agit d'unir ces points par une droite. Il faut donc, afin d'arriver à des constructions parfaites, tendre toujours à faire des points pour ainsi dire *nuls* et des lignes pour ainsi dire *sans largeur.* »

Application (*a*) : Les règles sont souvent mal faites, ou bien avec le temps elles se courbent. On doit donc les vérifier avant de s'en servir. Ordinairement, les ouvriers se contentent de placer l'œil dans le prolongement de l'arête ou de la face qu'ils veulent employer. Si la première est bien droite, elle ne produit sur l'œil que l'effet qu'y produirait un seul point. Si la seconde est vraiment plane, on n'en voit que l'arête qui la commence. Mais ce moyen n'est sûr qu'autant que les yeux sont exercés à bien voir. Pour en trouver un autre indépendant de la justesse du coup d'œil, considérons que si, après avoir tracé une droite avec une bonne règle, on appliquait une seconde règle contre la face qu'a suivie le crayon, l'arête de cette deuxième règle couvrirait aussi toute la droite. Par conséquent, une ligne vraiment droite doit être entièrement recouverte par l'arête qui l'a tracée, de quelque côté qu'on la lui présente.

« Voici, d'après cela, comment il faut s'y prendre pour *vérifier une règle*. Tracez une ligne sur un tableau, en employant la règle qu'il s'agit de vérifier. Retournez ensuite cette règle bout pour bout, et présentez à la ligne, l'arête qu'a suivie le crayon. Si cette ligne est alors recouverte par l'arête dans toute son étendue, elle est droite et la règle est juste. Si le recouvrement n'a pas lieu sur toute la longueur, la règle est fausse, et il faut ne pas s'en servir, car un instrument défectueux nuit toujours à la bonté ou à la beauté de l'ouvrage. »

« La perfection des instrumens et des outils, est une chose à laquelle tout bon ouvrier doit fortement tenir. Si les uns sont faux, si les autres sont mauvais, son adresse et son savoir-faire n'ont aucun succès ; il fabrique mal, sa réputation en souffre et ses bénéfices décroissent. »

Appl. (*b*) : Il est peu d'arts et de métiers où les lignes droites ne soient employées. Dans la plupart, on les trace à la règle ; mais dans quelques-uns, les droites ont une telle longueur, qu'il faut d'autres instrumens.

« Les jardiniers, les terrassiers, les maçons, les paveurs, etc., se servent d'un cordeau attaché à deux piquets ou à deux pierres qu'ils placent aux extrémités de la droite à figurer. Il est à observer, en procédant ainsi, que si le cordeau ne repose pas dans toute sa longueur, sur une *face réglée*, c'est-à-dire sur une face contre laquelle une bonne règle puisse s'appliquer par tous ses points, il ne donne jamais une véritable droite, à cause de son poids qui le rend d'autant plus courbe qu'il est plus considérable ; mais plus on tend le cordeau fortement, et plus on en diminue la courbure. »

Appl. (*c*) : Les charpentiers font usage aussi d'un cordeau pour tracer de longues droites, et ils le frottent avec du blanc d'Espagne, ou avec de l'ocre, ou avec du noir de fumée délayé dans de l'huile. Ce cordeau est appliqué sur deux points de la droite, fortement tendu et maintenu à ses deux extrémités ; on le pince ensuite, pour l'élever au-dessus de la pièce de bois, puis on le laisse retomber. Il en

2

résulte qu'il frappe la face de la pièce dans toute sa longueur et qu'il y fait une empreinte colorée. Mais cette empreinte n'est rigoureusement une droite, que dans le cas où l'on élève le cordeau dans l'aplomb de sa première position ; nous en dirons la raison quand nous parlerons des faces planes qui se coupent.

Appl. (*d*) : Dans le lever des plans et dans l'arpentage, on ne marque que les extrémités des droites, et c'est en visant l'une de ces extrémités, au moyen d'une lunette ou de l'équerre d'arpenteur placée à l'autre bout, qu'on prend l'alignement et qu'on parvient à faire planter sur la droite, bien qu'elle ne soit pas figurée, autant de piquets ou de jalons qu'il en est besoin ; mais quand l'œil est exercé, il n'a pas absolument besoin d'instrument, pour prendre un alignement. Nous voyons, par exemple, les officiers d'infanterie aligner parfaitement un bataillon et même un régiment, sans autre secours que quelques fusils qu'ils font tenir sur la ligne de bataille, en guise de jalons.

Appl. (*e*) : Enfin, on suit à peu près une ligne droite, quand on marche vers un objet, en le regardant fixement. La ligne parcourue serait droite, en toute rigueur, si l'objet était un point, si les yeux ne se dérangeaient pas et que le corps suivît parfaitement la direction du regard.

Loi géométrique de la nature. (*a*) : C'est parce que la lumière nous arrive en ligne droite, que les yeux peuvent nous conduire directement vers un objet. Cet objet n'est visible pour nous, qu'à cause de la lumière qu'il reçoit et qu'il nous renvoie en ligne droite, puisqu'il cesse d'être visible dès qu'il n'est plus éclairé ; par conséquent, si les yeux, une fois dirigés directement devant le corps et sur l'objet, ne bougent plus par rapport à l'un ni à l'autre, ils continuent de recevoir le même rayon de lumière pendant toute la marche, et l'on doit cheminer selon ce rayon ou selon une ligne droite.

« Ce qui prouve que la lumière suit la ligne droite, c'est qu'il suffit qu'un objet soit placé entre la flamme d'une lampe et l'un des yeux, sur la droite qui joint les milieux de ces deux choses, pour que cet œil cesse d'apercevoir la flamme. »

Loi géom. (*b*) : Cette petite expérience que chacun peut faire, montre clairement comment sont produites les éclipses du Soleil et de la Lune. Pour que les premières arrivent, il faut qu'un corps intercepte une forte partie des rayons du Soleil, et comme il n'y a que la Lune qui puisse produire un tel effet, c'est la Lune qui nous cache la partie du Soleil que nous ne voyons pas. De même pour qu'il y ait éclipse de la Lune, c'est-à-dire, pour qu'une portion ou la totalité de la Lune cesse de nous renvoyer la lumière du Soleil, il faut qu'un corps l'empêche de la recevoir, en se plaçant sur quelques-unes des droites qui vont du Soleil à la Lune. Or, il n'y a que la Terre qui puisse se placer ainsi. C'est donc l'ombre de la Terre qui obscurcit la Lune.

Loi géom. (*c*) : La chaleur se propage aussi en ligne droite, et c'est ce que montre bien l'effet des écrans qu'on emploie pour se préserver de l'ardeur du feu.

Loi géom. (*d*) : Tout corps inanimé dont toutes les parties ont le même mouvement, tend toujours à cheminer en ligne droite : il ne change de direction, il ne tourne même que lorsqu'il y est forcé par des obstacles ou par des entraves. C'est ainsi qu'une pierre qui tourne d'abord avec la fronde où elle est retenue, s'échappe en ligne droite dès qu'on la rend libre ; elle continuerait même de se mouvoir toujours ainsi, sans son poids qui la force à descendre vers la Terre en suivant une courbe. C'est ainsi encore qu'une bille placée sur une surface de niveau, sur un billard, par exemple, se meut en ligne droite dès qu'elle est frappée : elle ne cesse de le faire que dans le cas où elle rencontre soit une autre bille, soit la bande.

« Si la surface plane n'est pas de niveau, la bille y roule d'elle-même en suivant *la ligne de plus grande pente*, c'est-à-dire la plus courte des droites qu'on puisse mener du point d'où elle est partie, à une ligne de niveau tracée plus bas sur la surface. »

« Tout corps qu'on abandonne dans un air tranquille, tombe en parcourant une droite qui, si elle pouvait être suffisamment prolongée, irait passer par le point milieu de la Terre. On la nomme *verticale*. Le fil-à-plomb est aussi dirigé vers le même point, puisque c'est le plomb qui, tendant à tomber, le rend une ligne droite. »

Loi géom. (*e*) : D'après cela, une tour bâtie d'aplomb doit rester de bout tant qu'un accident ne la renverse pas. En effet, les pierres ne pourraient tomber d'elles-mêmes qu'en suivant la ligne de chute ou la verticale. Or, elles sont empilées selon cette verticale ; celles d'en haut ne peuvent donc faire aucun mouvement, qu'auparavant la première d'en bas n'ait bougé, et celle-ci, étant posée sur la terre, ne peut d'elle-même changer de place. Cela montre combien il est important de construire d'aplomb les parties d'un édifice qui sont dépourvues de *fruit* ou de *talus*.

TRACÉ DU CERCLE.

Parmi toutes les lignes courbes, il en est une qu'on appelle indifféremment *cercle*, *circonférence*, *ligne circulaire*, et qui peut être tracée avec le seul secours du compas.

4. Pour *tracer un cercle*, on appuie légèrement sur le tableau, l'une des deux pointes d'un compas ouvert, puis on fait tourner l'autre pointe autour de celle-là, de manière qu'elle ne quitte point le tableau et qu'elle y marque sa trace. C'est cette trace qui est un cercle ou une circonférence. Une fois l'opération terminée, rien n'indique le commencement ni la fin de la courbe.

Le point A marqué par la pointe fixe (P. I, F. 2), est le *centre* du cercle. On désigne quelquefois un cercle par ce seul point, et l'on dit : le cercle A.

Une droite AB tirée du centre à un point quelconque de la courbe, est le *rayon* du cercle.

« Un compas doit, pour être parfait, avoir ses pointes aussi fines que le permet la matière du tableau, et le jeu de sa charnière assez dur, pour que la pointe mobile ne puisse ni se rapprocher, ni s'éloigner de l'autre, pendant le tracé. Cette pointe mobile est ordinairement *sèche* ou semblable à la pointe fixe; mais, pour dessiner sur le papier et pour lithographier, on la remplace soit par un porte-crayon, soit par un tire-ligne rempli d'encre. »

APPLICATIONS : Les arts font un fréquent usage du cercle. Les roues des machines, les meules, la plupart des arcades et des voûtes des édifices, les colonnes, quelques meubles, une foule de vases, d'ustensiles, d'instrumens, de produits de toutes sortes, sont ronds ou présentent des parties rondes qui ont des arêtes circulaires, et pour les faire, il faut tracer des cercles.

5. *Tous les rayons* AB, AC, AD, etc. *sont égaux*; car il résulte du tracé, qu'il faut, pour prendre la longueur de l'un, la même ouverture de compas que pour prendre celle de chacun des autres.

Il s'ensuit que *tous les points de la circonférence sont également éloignés du centre* (2). C'est donc sur une circonférence dont un point donné forme le centre, que se trouvent tous les points situés à une distance déterminée du premier. Voilà ce qu'on entend, quand on dit que *la circonférence est* LE LIEU GÉOMÉTRIQUE *de tous les points également éloignés du centre.*

6. *Tracer un cercle dont le rayon est donné.*

Il est visible, d'après le n° 4, qu'il faut ouvrir le compas de manière que chaque point soit exactement sur une des extrémités du rayon.

PROBLÈME : *Trouver un point qui soit à une distance* D *d'un autre point* A *et à une distance* d *d'un point* B (P. I, F. 3).

Prenez une ouverture de compas égale à la distance D et décrivez un cercle autour de A pris pour centre (*). Le point cherché sera nécessairement sur cette circonférence, d'après le dernier des principes du n° 5. Prenez ensuite une ouverture de compas égale à *d* et décrivez un cercle dont B soit le centre. Le point cherché sera aussi sur cette circonférence. Il se trouve donc à la fois sur les deux

---

(*) Lorsque, dans la description d'un tracé ou dans une démonstration, il y a des lettres majuscules et des lettres minuscules qui portent le même nom, il est d'usage, pour les faire distinguer en parlant, de prononcer le mot *grand* avant l'énonciation des premières et le mot *petit* avant celle des dernières. Vous devez donc lire les lettres D, *d*, comme s'il y avait *grand* D, *petit d*.

courbes, et par conséquent, il est un des deux points C, E où elles se coupent.

Ainsi, le problème a généralement deux solutions. Vous prendrez le point C, si le point demandé doit être au-dessus de la droite AB, et le point E, s'il doit être au-dessous.

Le problème n'aurait qu'une solution, et le point cherché se trouverait sur la droite AB, si cette droite était précisément égale à la somme de D et de *d*. Le problème n'aurait aucune solution ou serait impossible, si la somme de D et de *d* était moindre que AB, car alors les deux circonférences seraient tout-à-fait séparées.

« Le compas ordinaire ne peut plus être employé, quand il faut tracer de grands cercles. On se sert alors d'une règle AB portant une pointe fixe A à l'une de ses extrémités (P. I, F. 4), et garnie d'un *curseur* C à pointe. Ce curseur n'est autre chose qu'un bracelet en cuivre ou en fer. Au moyen d'une vis de pression D, on le fixe dans la position qu'il doit avoir, pour que l'écartement des deux pointes soit égal au rayon du cercle à décrire. Au lieu d'une vis, on peut employer un petit ressort placé entre la règle et le curseur : le frottement qui résulte de la pression de ce ressort, est suffisant pour maintenir la pointe mobile à une distance invariable de la pointe fixe, pendant tout le tracé. »

« Si le rayon du cercle est tellement grand qu'on ne puisse faire usage du compas à curseur, on a recours au cordeau. Il doit être bouclé à chaque extrémité. Dans l'une des boucles, on engage une pointe plantée sur le tableau, au point qui doit être le centre du cercle, et de façon qu'elle ne penche ni d'un côté ni de tout autre. Dans l'autre boucle, on place une pointe à tracer, avec laquelle on fait tourner le cordeau, en observant de le tirer un peu selon sa longueur, et d'empêcher les boucles de monter le long des pointes. Sans ces précautions, le rayon pourrait varier, et si cet accident arrivait, la courbe obtenue ne serait pas une circonférence. Du reste, il est visible que le cordeau, y compris ses boucles, doit avoir une longueur telle, que la distance des deux pointes soit égale au rayon donné. Enfin, les ficelles les moins susceptibles de s'étendre, sont celles qu'il faut préférer pour faire le cordeau, afin que le rayon soit moins sujet à augmenter. »

« On conçoit qu'au lieu de faire tourner l'une des pointes du compas pour tracer le cercle, on pourrait la laisser immobile comme l'autre et faire pivoter le tableau sur le centre : il n'en résulterait pas moins une circonférence, puisque tous les points de la ligne tracée alors, seraient visiblement, comme dans la construction du n° 4, éloignés du centre d'une quantité égale à l'intervalle des deux pointes du compas. »

« On concevra tout aussi facilement que le compas peut être supprimé et que la pointe traçante, qui est la seule utile, quand le tableau pivote, peut être remplacée par un instrument traçant quelconque, établi à une distance du centre invariable et égale au rayon. »

APPLICATIONS : C'est ainsi que le tourneur et le potier de terre tracent des cercles. Il faut donc qu'ils maintiennent l'extrémité travaillante de leur outil à une distance constante du pivot. Le pivot pour le tourneur, c'est la droite qui joint les deux pointes de son tour; celui du potier est la droite d'aplomb ou verticale qui passe par le centre de la table du tour. Ces droites n'ont pas le mouvement circulaire du tableau ou du corps sur lequel on opère; elles sont fixes.

7. Toute droite fixe sur laquelle tourne un corps, est appelée *axe de rotation*, parce que le mouvement circulaire prend alors le nom de *rotation*. Les circonférences qu'on peut concevoir décrites par les divers points du corps, ont leur centre sur cet axe, et comme deux quelconques de ces points conservent toujours la distance où ils sont l'un de l'autre, les circonférences qu'ils parcourent ne se rencontrent jamais.

8. PROBL. : *Tracer une circonférence qui soit égale à une circonférence décrite* A (P. I, F. 2).

Il suffit, pour cela, d'ouvrir le compas de manière que ses deux pointes soient sur les extrémités A, B du rayon AB : la circonférence C (P. I, F. 5) décrite avec le compas ainsi ouvert, sera égale à la circonférence A.

Les deux circonférences ayant même rayon, sont égales en vertu du principe suivant :

9. *Deux circonférences de même rayon sont égales.*

Soit AB, le rayon de l'une, égal à CD, le rayon de l'autre (P. I, F. 2 et 5). Si l'on place les deux cercles l'un sur l'autre, de manière que C tombe sur A et que CD soit sur AB, D tombera nécessairement sur B. Prenons un autre point quelconque E de la circonférence C; il sera aussi éloigné de C que D; donc, puisque CD et AB sont égaux, il sera aussi éloigné de A que B; donc il tombera sur la circonférence A (5). Or, on en dirait autant de tous les autres points de la circonférence C. Donc, les deux circonférences seront l'une sur l'autre dans toute leur étendue. Donc enfin, leurs longueurs sont égales.

Il faut entendre par longueur d'une circonférence, celle d'une ficelle qui entourerait exactement le cercle sans s'étendre.

Mettre ainsi que nous venons de le faire, deux figures l'une sur l'autre, pour démontrer qu'elles sont égales, c'est ce qu'on appelle les *superposer*. Il n'est personne qui ne conçoive que deux figures sont égales, quand elles se *superposent* ou se posent l'une sur l'autre dans toute leur étendue. La *superposition* est donc un excellent moyen de prouver l'égalité ou l'inégalité des figures. Nous l'emploierons fréquemment par la suite.

APPL. (a) : On fait de même rayon, les deux roues qui, dans une voiture, ont le même essieu, afin que cet essieu ne soit pas incliné, que la voiture roule mieux et qu'elle ne soit pas versante. Ces deux roues ont donc même pourtour ou même circonférence. Il s'ensuit que les jantes étant égales entre elles, doivent se trouver en même nombre dans les roues apairées.

Appl. (*b*) : Les deux fonds d'un tonneau présentent deux circonférences égales ; le tonnelier doit donc employer exactement le même rayon pour les tracer.

Appl. (*c*) : Si après qu'on a tracé un cercle sur un carton, on découpe ce carton selon la circonférence, avec un instrument tranchant fort mince, la partie détachée présente une circonférence en relief, et le trou une circonférence en creux. Ces deux circonférences ayant même rayon, sont égales ; la première peut tourner dans la seconde, et jamais elles ne cessent de se toucher par-tout. Cette propriété du cercle, que ne possède aucune autre ligne, a, dans les arts, une foule d'applications. Nous citerons les robinets, les charnières et tous les vases ronds qui ont un couvercle ou un bouchon également rond. Les robinets bouchent d'autant mieux, le jeu des charnières reste facile d'autant plus long-temps, les vases sont d'autant plus exactement et sûrement fermés, qu'il y a moins de différence entre les rayons de leurs circonférences en relief et ceux de leurs circonférences en creux.

Appl. (*d*) : Nous citerons encore le moulage des corps ronds. Le moule ne peut reproduire avec pureté, avec exactitude, les contours du modèle, que dans le cas où ses circonférences creuses sont parfaitement égales aux circonférences en relief de ce modèle. C'est pour arriver plus sûrement à cette égalité que, dans le moulage en sable, on emploie du sable très-fin, qu'on le foule fortement, et qu'en sortant ou *dépouillant* le modèle, on le fait tourner un peu sur lui-même, d'abord d'un côté, ensuite du côté opposé. Dans le moulage en terre, on parvient à rendre égales les circonférences en relief et les creuses, en employant de la pâte très-fine et assez liquide, à la formation de la première couche, de celle qui touche le modèle.

Appl. (*e*) : Pour exécuter des pièces rondes, les tailleurs de pierres se servent assez souvent d'une *cherche* qui présente une portion de circonférence en creux, dont le rayon doit être exactement le même que celui de la portion de circonférence en relief du modèle ou du dessin.

Appl. (*f*) : Enfin dans plusieurs arts, on emploie pour vérifier les circonférences en relief, des circonférences en creux nommées *lunettes* ou *calibres*. Les premières sont d'autant mieux faites, qu'elles laissent moins de jeu, quand on les fait tourner dans les secondes.

10. *Deux circonférences* B, C *qui n'ont pas même rayon, sont inégales, et la plus grande est celle qui a le plus grand rayon* CD (P. I. F. 6 et 5).

D'abord, elles ne sont pas égales, car il est impossible de les superposer exactement. Ensuite, nous savons, par une expérience de tous les jours, qu'une ligne qui en enveloppe une autre, a plus de longueur que celle-là; or, si l'on superpose les deux centres, la circonférence qui a le plus grand rayon, enveloppera l'autre, comme on le voit (P. I, F. 7).

Appl. (*a*) : Les divers tronçons d'une colonne vont en diminuant de grosseur, du bas vers le haut, ou ce qui est la même chose, l'arête circulaire d'en bas est plus grande que l'arête circulaire d'en haut. L'appareilleur doit donc tracer ces deux cercles avec des rayons inégaux et employer le plus grand pour celui du *lit* inférieur.

Appl. (*b*) : Quand les tourneurs exécutent des corps dont la grosseur n'est pas partout la même, il faut qu'en allant du gros bout vers le petit, ils rapprochent l'outil de l'axe de rotation ou ligne des pointes, afin que les rayons diminuant, les circonférences diminuent aussi.

Loi de la nature (*a*) : L'eau tranquille, frappée par une pierre qu'on y jette, se meut en cercle, c'est-à-dire que les petites vagues produites par le choc de la pierre, sont circulaires.

Loi (*b*) : L'air qui est un fluide comme l'eau, se meut aussi en cercle, quand il est calme et qu'on le frappe : la preuve, c'est que le bruit ou le son, qui n'est que le résultat d'un choc sur l'air et qui nous est transmis aussi par de petites vagues, a la même force sur tous les points également éloignés de celui où se fait le choc, et qu'il arrive à notre oreille, bien qu'il y ait des obstacles à sa marche entre nous et l'endroit où il est produit.

Loi (*c*) : La Terre et tous les corps que nous voyons au ciel, les étoiles comprises, sont assujettis à tourner sur eux-mêmes, comme fait le jouet d'enfant qu'on appelle *sabot*. Tous les points de chacun de ces corps décrivent donc des circonférences autour d'un axe de rotation (7).

« La terre emploie vingt-quatre heures à faire un tour entier, et il en résulte que *Quito*, une des principales villes du *Pérou*, qui se trouve à la plus grande distance possible de l'axe de rotation, fait en vingt-quatre heures, un chemin circulaire de 9039 lieues. Metz, située bien plus près de l'axe, fait en vingt-quatre heures 5890 lieues. Nous ne nous apercevons pas de ce rapide tournoiement, parce qu'il se fait sans secousse et que tous les objets terrestres qui nous entourent, tournent avec nous en conservant leur position. Nous sommes à peu près dans le cas d'un homme qui se trouve placé sur un bateau rapidement emporté par le courant : il ne sent pas son mouvement, et il lui semble que ce sont les objets du rivage qui s'éloignent. De même, à nous qui tournons du couchant vers le levant, le Soleil paraît tourner autour de la Terre, du levant vers le couchant ; mais ce n'est là qu'une illusion. »

« C'est parce que nous tournons ainsi, que nous avons des jours et des nuits : le Soleil nous éclaire pendant que nous passons devant lui, et nous sommes dans l'obscurité quand la Terre a fait environ un demi-tour. »

« Il faut à peu près un mois à la Lune, pour faire un tour entier sur son axe de rotation, et la plus grande des circonférences qu'elle engendre, n'est que de 2 459 lieues. »

« Le Soleil fait son tour en 25 jours et demi de 24 heures, et dans le même temps, ceux de ses points qui sont le plus éloignés de l'axe de rotation, parcourent une circonférence de 989 604 lieues, ou 38 808 lieues par jour, 29 769 lieues de plus que *Quito*. L'imagination ne peut se représenter une telle vitesse, et cependant il existe une vitesse bien plus grande encore; c'est celle de la lumière qui ne met que 8 minutes pour parcourir la distance du Soleil à la Terre, environ 34 000 000 de lieues. »

Graduation de la circonférence.

Une portion quelconque de circonférence, se nomme *arc*. Ainsi, BC (P. I, F. 2) est un arc de cercle. Il en est de même de CD. Quand un arc a les mêmes extrémités qu'une droite BD, il est généralement désigné par trois lettres BED dont une est placée entre les deux points extrêmes.

On donne une idée suffisante de l'arc, lorsqu'on dit qu'il est la moitié, le tiers, le dixième, etc., de la circonférence dont il fait partie. Mais, si un arc était marqué sur une circonférence et qu'il s'agît de savoir quelle partie de cette circonférence il forme, ce qui est souvent fort nécessaire dans les arts, on n'y parviendrait que très-difficilement, par tout autre moyen que celui qui est ordinairement employé. Comme ce moyen résulte de la graduation conventionnelle des circonférences, il faut, avant de l'exposer, parler de cette graduation, ou plutôt de ces graduations, car il y en a deux : l'ancienne et la nouvelle. Pour le moment, nous dirons seulement ce qu'elles sont; nous n'enseignerons la manière de les faire qu'en parlant des polygones réguliers.

11. Selon l'ancienne graduation, qui est encore la plus usitée, *toute circonférence est partagée en* 360 *parties égales* qu'on appelle *degrés*; chaque degré est partagé en 60 parties égales qu'on nomme *minutes*; chaque minute contient 60 parties égales dites *secondes*; une seconde renferme 60 *tierces* égales, et ainsi de suite; mais on va rarement au-delà des secondes.

Un arc peut donc être désigné par le nombre de degrés, de minutes et de secondes qu'il comprend.

Les minutes dont il s'agit ici, sont bien différentes de celles qui se trouvent sur les cadrans des montres et des pendules : les minutes géométriques sont au nombre de 21 600 dans une circonférence, tandis que les minutes horaires n'y sont qu'au nombre de 60.

On marque qu'un nombre exprime des degrés, en écrivant un petit zéro à droite et un peu au-dessus de ce nombre. Pour les minutes, on met un accent à la même place que le zéro. Pour les secondes, on emploie deux accens, et ainsi du reste, en augmentant toujours d'un accent. D'après cela, l'arc qui contient 53 degrés, 14 minutes et 57 secondes, s'exprime comme il suit : 53° 14′ 57″.

12. Selon la nouvelle graduation, *toute circonférence est partagée en 400 parties égales* appelées *grades ;* chaque grade contient 10 *décigrades ;* chaque décigrade vaut 10 *centigrades.* Il en résulte qu'un décigrade est la dixième partie du grade, comme le grade est la dixième partie d'une dixaine de grades. Or, le grade s'écrit à la droite des dixaines de grades ; il est donc tout naturel d'écrire le décigrade à la droite du grade, en observant toutefois de les séparer par une virgule, pour qu'on puisse mieux distinguer les grades entiers de leurs parties. Par des raisons semblables, on écrit les centigrades à la droite des décigrades, comme on met les dixaines à la droite des centaines. Au reste, cette manière d'écrire les divisions du grade, est tout à fait pareille à ce qu'on fait pour les francs, les décimes et les centimes.

Pour marquer qu'un nombre exprime des grades, on met *gd* à droite et un peu au-dessus de ce nombre. Ainsi, 53 grades, 7 décigrades et 5 centigrades s'écrivent : $53^{gd},75$, ce qui se prononce aussi : 53 grades 75 centièmes.

On voit sans doute, d'après ce qui précède, qu'un arc peut être désigné par le nombre de grades et de centigrades qu'il contient, aussi bien que par des degrés, des minutes et des secondes; mais on préfère cette dernière indication, parce que les nombres 360 et 60 ont bien plus de parties exprimées en nombres entiers, que 400 et 100. Par exemple, on peut prendre en nombres entiers, le tiers, le sixième, le douzième, le trentième, etc., des premiers, et on ne le peut pour les derniers.

« Il existe des tables qui font connaître soit combien un nombre de grades et de centigrades donné, vaut de degrés, de minutes et de secondes, soit combien un nombre de degrés, de minutes et de secondes vaut de grades et de centigrades ; de sorte qu'on peut toujours passer aisément d'une graduation à l'autre. »

« Il existe aussi un instrument qu'on appelle *rapporteur*, au moyen duquel on trouve facilement combien un arc tracé contient de degrés ; mais sa description doit être renvoyée au chapitre suivant. »

« Nous pouvons néanmoins, dès à présent, établir sur les arcs de cercle, plusieurs principes qu'il est bon de connaître. »

13. « *Deux arcs de même rayon qui renferment le même nombre de degrés, de minutes et de secondes, sont égaux en longueur.* »

« En effet, les rayons étant égaux, rendent égales les circonférences dont les deux arcs font partie (9). Donc, le degré de l'une, qui en est la 360^{ième} partie, égale le degré de l'autre qui en est aussi la 360^{ième} partie. De ce que les degrés ont même longueur, il suit que les minutes sont égales et les secondes aussi. Les deux arcs sont donc composés de parties égales et en même nombre ; ils sont donc égaux. »

« Il est aussi démontré par là que, réciproquement, *des arcs de même rayon et de même longueur, contiennent autant de degrés et de parties de degré l'un que l'autre.* »

14. « Mais, *de deux arcs qui ont le même nombre de degrés et des rayons différens, celui qui a le plus grand rayon est le plus long.* »

« En effet, les rayons étant inégaux, rendent inégales les circonférences (10), et c'est celle de l'arc auquel appartient le plus grand rayon, qui est la plus grande. Donc, les degrés de cet arc sont plus longs que ceux de l'autre, et puisque le nombre des degrés est le même dans les deux, c'est celui qui a le plus grand rayon qui est le plus long. »

Réciproquement, *de deux arcs qui ont même longueur et des rayons différens, celui qui a le plus grand rayon contient moins de degrés que l'autre.* Cela résulte de la démonstration précédente.

15. Supposons maintenant que le nombre des degrés contenus dans un arc marqué sur une circonférence, par exemple dans l'arc BC (P. I, F. 2), soit 40, et qu'il s'agisse de découvrir quelle partie de la circonférence A est l'arc BC. Nous dirons : si BC était la moitié de la circonférence A, il y serait contenu 2 fois ; s'il en était le tiers, il y serait contenu 3 fois ; s'il en était le dixième, il y serait contenu 10 fois et ainsi de suite. La question est donc de savoir combien BC est contenu de fois dans la circonférence A. Or, cette circonférence renferme 360 degrés égaux, BC renferme 40 de ces mêmes degrés ; donc en partant de B, on pourra, avant d'y revenir, porter BC autant de fois sur la circonférence, que 40° sont contenus de fois dans 360°, c'est-à-dire 9 fois, puisque 360 divisé par 40 donne 9 pour quotient. Donc, BC est contenu aussi 9 fois dans la circonférence A ; donc enfin, BC est la neuvième partie de cette circonférence.

Le nombre de fois qu'une chose en contient une autre de même espèce, de même nom, est ce qu'on nomme le *rapport* de la première à la seconde. Le rapport de la circonférence à l'arc BC est donc 9, ainsi que le rapport des nombres 360 et 40 qui marquent combien de degrés sont renfermés dans ces courbes. De là, le principe suivant :

16. *Le rapport des longueurs de deux arcs d'une même circonférence, est égal à celui de leurs nombres de degrés, ou de minutes, ou de secondes.*

En effet, on peut dire de deux arcs tout ce que nous avons dit d'un seul arc et de toute la circonférence ; si les arcs contiennent des degrés et des minutes, on peut réduire les degrés en minutes, en multipliant leur nombre par 60, puisque chaque degré vaut 60', et ensuite on pourra dire des arcs indiqués en minutes, ce qu'on aurait dit des arcs indiqués en degrés seulement ; si les arcs contiennent des degrés, des minutes et des secondes, on convertira les degrés en minutes, puis les minutes en secondes, en multipliant leur nombre par 60; ensuite, ayant fait la somme de toutes les secondes, on dira des arcs indiqués en secondes, ce qu'on aurait dit des arcs indiqués en minutes ou en degrés.

17. On doit bien sentir que le principe du numéro 16, s'étend à deux arcs pris l'un sur une circonférence quelconque, l'autre sur une circonférence égale à celle-là; et comme les circonférences sont égales quand les rayons sont égaux (9), il s'ensuit ce principe plus étendu :
Le rapport des longueurs de deux arcs de même rayon, est égal à celui de leurs nombres de degrés, ou de minutes, ou de secondes.

18. Le *rapport* est une chose si importante et dont nous ferons bientôt un si grand usage, qu'il est nécessaire de développer la notion que nous en avons donnée page 19.

D'après cette notion, *rapport* et *quotient* sont deux mots qui sembleraient avoir la même signification. Mais on ne se sert du mot *quotient* que pour désigner le résultat d'une division faite avec deux nombres, *dont l'un au moins exprime des objets*; le quotient représente toujours un nombre de certaines choses. Par exemple, si l'on veut partager 36 fr. entre 12 personnes, on fait une division dont le quotient est 3 fr.; *il répond à la question* : combien revient-il de francs à chaque personne? Autre exemple : on a 72 lieues à faire, et l'on ne fait que 6 lieues par jour; combien emploiera-t-on de jours pour faire les 72 lieues? C'est le quotient de 72 divisé par 6, qui donne pour réponse 12 jours.

Rapport se dit pour les choses aussi bien que pour les nombres, et quand il s'agit de nombres, on n'a nullement égard aux choses qu'ils expriment, pour prendre leur rapport; il faut toutefois que ces choses soient de même nature. Ainsi, le rapport des longueurs de deux pièces de bois, est 4, si l'une peut être portée 4 fois sur l'autre, le rapport de 360° à 90° est aussi 4, parce que 360° contient 4 fois 90°; enfin, le rapport des nombres insignifians 360 et 90 est encore 4. Mais on ne pourrait prendre le rapport de 36 fr. à 12 personnes, parce que des personnes ne peuvent être contenues dans des francs. Il résulte de là qu'un rapport entre des choses ou entre des nombres, est un nombre qui n'est appliqué à rien, c'est tout simplement un nombre, comme 2, 5, 17, etc.

19. Le plus souvent, on ne dit pas positivement quel est le rapport de deux nombres de même nature; on se contente de l'indiquer par un signe; ce signe se compose de deux nombres écrits l'un au-dessous de l'autre et séparés par un trait : par exemple, au lieu d'écrire 9, pour le rapport de 360° à 40°, on écrit souvent : $\frac{360^\circ}{40^\circ}$, ou ce qui est bien la même chose, $\frac{360}{40}$. L'indice des degrés est en effet inutile, puisque 360 divisé par 40 donne aussi bien 9,

que 360° divisé par 40°. Les deux nombres que sépare le trait, sont nommés les deux *termes* du rapport.

Le signe des rapports est surtout utile pour indiquer celui qui ne peut être exprimé exactement par un nombre entier : par exemple, le rapport de 27 à 13. On se contente alors d'écrire $\frac{27}{13}$ qui se prononce *vingt-sept treizièmes*. Le rapport d'une chose à une chose plus grande qui la contiendrait 4 fois, serait indiqué par $\frac{1}{4}$ qui se prononce *un quart*.

Ceux qui savent comment on représente ordinairement les fractions, c'est-à-dire les parties d'une chose, telles que la moitié, le quart, les deux tiers, les cinq sixièmes de cette chose, reconnaîtront qu'on emploie le même signe pour les rapports. La moitié d'une lieue s'exprime en effet par $\frac{1}{2}$ lieue ; les cinq sixièmes d'un jour, s'écrivent : $\frac{5}{6}$ jour. Mais il y a la même différence entre une fraction et l'indication d'un rapport, qu'entre un quotient et le rapport même : la fraction désigne toujours un certain nombre de parties d'une certaine chose, et l'indication d'un rapport ne s'applique absolument à rien.

Il y a des personnes qui sont assez portées à confondre la différence des choses avec le rapport de ces choses. Il faut se tenir en garde contre cette erreur qui pourrait en faire commettre beaucoup d'autres. Pour trouver la différence qui existe entre les longueurs d'une grande et d'une petite planche, on ne porte la petite sur la grande qu'une seule fois, à partir de l'un des bouts ; ce qui reste alors est la différence. Pour trouver le rapport des mêmes longueurs, il faut porter la petite sur la grande autant de fois qu'on le peut, et le rapport est ce nombre de fois. Les différences des nombres ne s'obtiennent que par soustraction ; leurs rapports, que par division. Il n'y a parmi les nombres entiers, comme il est facile de s'en convaincre, que 4 et 2, dont la différence et le rapport soient égaux.

PROBLÈME. Afin de compléter ce que nous pouvons dire maintenant sur les rapports, nous allons montrer, par un exemple, comment il faut opérer pour *trouver le rapport de deux arcs exprimés en degrés.*

Supposons donc qu'on veuille obtenir le rapport d'un arc de 7° 13' 30", à un arc de 2° 6', ces deux arcs étant pris sur des circonférences de même rayon. Je multiplie 7° par 60, ce qui produit 420'. Ajoutant les 13' du premier arc, j'ai 433'. Je multiplie 433' par 60 et j'obtiens 25980". J'ajoute les 30" de l'arc et j'ai en tout 26010". Agissant de même pour l'arc de 2° 6', je trouve qu'il contient 126' ou 7560". Le rapport du grand arc au petit a, par conséquent (19), pour indication : $\frac{26010}{7560}$.

20. Quand on a le rapport de deux choses, on peut toujours trouver la grandeur de l'une, si l'on connaît celle de l'autre. Admettons, par exemple, que le plus petit des deux arcs précédens ait une longueur de 2 pieds ; il est clair qu'en répétant 2 pieds autant de fois que le grand arc contient le petit, nous trouverons le nombre de pieds du

premier. Or, répéter un nombre ou le multiplier, c'est la même chose. Il faut donc multiplier 2 pieds, par le rapport du grand arc au petit ou par $\frac{26010}{7560}$. Multiplions d'abord 2 pieds par 26010 ; nous obtiendrons 52020 pieds, quantité 7560 fois trop grande, puisque ce n'était qu'après division faite qu'il fallait multiplier 2 pieds. Nous devons donc rendre 52020 pieds, 7560 fois plus petit. Or, c'est visiblement ce qu'on fera, en divisant 52020 pieds par 7560. Le quotient $6^{pi},88$ sera donc la longueur du grand arc.

Ces raisonnemens nous conduisent au principe suivant, qui est de la plus grande utilité.

Si l'on a le rapport d'une chose à une autre et la grandeur de la seconde, on obtient celle de la première, en multipliant la grandeur connue, par le terme du rapport qui est au-dessus du trait, et divisant ensuite par le terme qui est au-dessous.

« Ceux qui ont vu les règles de trois, la règle d'intérêt, la règle de société, etc., reconnaîtront aisément que le principe précédent les renferment toutes. »

Applications : Bien que la division de la circonférence en degrés ou en grades soit de pure convention, elle est d'un grand secours dans plusieurs arts et même dans les sciences.

Appl. (*a*) : La plupart des instrumens qu'on emploie pour lever les plans, ont un cercle évidé nommé *limbe*, sur lequel sont marqués les degrés ou les grades, et c'est l'usage de ce cercle qui rend l'opération facile, prompte et suffisamment exacte.

Appl. (*b*) : L'artillerie se sert aussi des degrés, pour jeter ses bombes avec plus de justesse.

Appl. (*c*) : C'est au moyen de cercles gradués qu'on suit le cours des astres, qu'on a découvert leurs mouvemens, qu'on a mesuré leurs distances et leur grosseur, qu'on prédit long-temps à l'avance les éclipses, et le retour des comètes.

Appl. (*d*) : L'aiguille aimantée de la boussole, qui se dirige toujours à peu près vers le nord, indique aux marins, sur un cercle gradué, s'ils suivent bien leur route, ou de combien ils s'en écartent.

Appl. (*e*) : La Géographie ne nous représente avec tant de précision sur les cartes, les positions et les distances de tous les points de la Terre, qu'en s'aidant de deux cercles gradués : les degrés de l'un sont les *longitudes*, et les degrés de l'autre, les *latitudes*.

« Enfin, on peut dire que sans l'idée de la graduation du cercle, idée qui, toute simple qu'elle est, a bien tardé à venir aux hommes, les arts, les sciences et par conséquent la civilisation, ne seraient pas à beaucoup près ce que nous les voyons aujourd'hui. »

« C'en est bien assez pour vous faire sentir combien sont importans, les soins et l'exactitude, dans la fabrication des cercles gradués, et pour porter ceux d'entre vous qui s'en occupent, à redoubler d'attention, quand nous parlerons des procédés que suivent les artistes habiles, pour approcher d'une graduation parfaite, c'est-à-dire d'une égalité rigoureuse entre toutes les divisions. »

« D'après la méthode que nous nous sommes faite, ce serait ici le lieu d'enseigner le tracé des autres courbes; mais pour ne pas couper la géométrie de la ligne droite et du cercle, nous préférons renvoyer à la fin tout ce qui concerne ces courbes : nous en ferons même un petit traité particulier sous le titre de *Géométrie des courbes.* »

TRACÉ DES SÉCANTES ISOLÉES.

Après avoir considéré la ligne droite et la circonférence séparément, il faut les combiner ensemble, ou du moins parler des droites qui coupent la circonférence. On les appelle *sécantes*, pour abréger. Nous ne nous occuperons maintenant que des sécantes isolées.

21. Problème : Pour *tracer une sécante* quelconque ou une sécante AB passant par deux points C et D marqués sur la circonférence (P. I, F. 8), on suit les procédés du numéro 1.

S'il était proposé de tracer une droite qui passât par trois points d'une circonférence, il ne serait pas possible d'y parvenir; on en verra la raison dans le tracé d'un cercle qui coupe une droite.

La partie d'une sécante comprise entre les points où elle coupe la circonférence, est la *corde* de l'un ou de l'autre des arcs bornés par les mêmes points. Ainsi, la droite CD est la corde de l'arc CED, ou de l'arc CFD.

Un arc est souvent désigné comme sa corde; on dit, par exemple, l'arc CD, au lieu de dire l'arc CDE; mais alors il s'agit toujours du plus petit des deux arcs qui ont la même corde.

On a donné à l'arc et à sa corde, les noms qu'ils portent, parce que leur ensemble représente assez bien l'instrument au moyen duquel les hommes ont d'abord lancé des flèches.

22. La corde GH qui passe par le centre I est dite *diamètre* du cercle (P. I, F. 8). Il s'en suit que *le diamètre est le double du rayon*, car IG et IH, les deux parties de GH, sont deux rayons (4), et ces rayons sont égaux (5). Il s'ensuit encore que *tous les diamètres d'une même circonférence sont égaux.*

Problème : *Tracer un diamètre.*

Il suffit de tirer une sécante GH qui passe par le centre I et se termine des deux côtés à la circonférence.

Appl. (*a*) : L'égalité des diamètres du cercle, sert à vérifier les circonférences en creux qu'on exécute dans les arts. Les serruriers, par exemple, s'assurent que les cercles de fer qu'ils forgent, sont bien faits, en y présentant, dans un grand nombre de sens différens, une verge égale au diamètre. Il convient que cette verge soit terminée des deux côtés par une pointe, car les extrémités d'un diamètre sont des points.

Appl. (*b*) : Toutes les fois que le diamètre est connu, le rayon qui en est la moitié l'est aussi. Voilà pourquoi, lorsqu'il s'agit de tracer un cercle, on donne souvent le diamètre au lieu du rayon.

23. *Dans le même cercle, des arcs égaux ont des cordes égales;* c'est-à-dire que si l'arc ABC est égal à l'arc DEF, la corde AC est égale à la corde DF (P. I, F. 9).

Pour le faire voir, il suffit de superposer (mettre l'un sur l'autre) les deux arcs. Comme ils sont égaux en longueur, l'arc ABC devra recouvrir exactement l'arc DEF ; autrement, il y aurait des points de l'un qui seraient plus ou moins éloignés du centre G que ceux de l'autre, ce qui ne saurait être, puisque les deux arcs appartiennent à la même circonférence. La corde AC aura donc ses extrémités sur celles de la corde DF ; ces deux cordes se confondront donc dans toute leur longueur.

Puisque des circonférences de même rayon peuvent se superposer (9), il est clair que la démonstration précédente s'étend aux arcs pris sur de telles circonférences.

Donc, *des arcs égaux et de même rayon, ont des cordes égales.*

24. Réciproquement, *des cordes égales répondent à des arcs égaux, quand les rayons des cercles sont égaux.*

Ainsi, la corde AC (P. I, F. 9) étant égale à la corde HI (F. 10), et les deux cercles G et K ayant même rayon, il y a égalité entre les arcs ABC, HLI. Il suffit, pour s'en convaincre, de superposer la circonférence K sur la circonférence G (9), de manière que I tombe sur A. Alors, il faudra bien que H tombe sur C, car s'il n'y tombait pas, il se trouverait en un point de la circonférence G, qui serait visiblement plus ou moins près de A que le point C, et l'on aurait plus HI égal à AC (2). Les deux arcs HLI, ABC auront donc leurs extrémités aux mêmes points ; ils se confondront donc dans toute leur longueur, ils sont donc égaux.

Nous n'avons pas cru nécessaire de faire remarquer qu'il ne s'agit ici que des deux petits ou des deux grands arcs auxquels répondent les cordes : il est très-visible que ce n'est pas le grand arc de l'une, qui est égal au petit arc de l'autre.

Probl. (*a*) : *Marquer un arc égal à un arc donné*, soit sur la même circonférence, soit sur une circonférence de même rayon.

Si, par exemple, on veut déterminer sur la circonférence K (P. I, F. 10), un arc égal à l'arc ABC de la circonférence G (F. 9), on prend avec un compas l'écartement des extrémités A, C, et l'on pose sur la circonférence K, les deux pointes du compas ainsi ouvert. Par là, les deux points H, I, par exemple, se trouvent marqués, et l'arc HLI est alors égal à l'arc ABC, puisqu'ils ont des cordes égales.

PROBL. (*b*) : *Trouver le rapport de deux arcs de même rayon qui sont tracés.*

L'opération est analogue à celle par laquelle on obtient, en arithmétique, le plus grand commun diviseur de deux nombres et l'expression la plus simple d'une fraction. Prenez la corde du petit arc AB (P. I, F. 11) et portez-la autant de fois qu'il est possible sur le grand arc CD, 1 fois par exemple. Prenez ensuite la corde du reste DE et portez-la sur AB; elle y sera reçue, je suppose, 2 fois de A en F. Prenez alors la corde du 2ième reste BF et portez-la sur le 1er reste DE, par exemple 3 fois de E en G. Prenez encore la corde du 3ième reste DG et portez-la sur la 2ième BF. Si vous trouvez qu'elle y est reçue 2 fois tout juste, par exemple, le petit arc DG sera la commune mesure des deux arcs donnés AB, CD.

Dites donc alors :

$$BF=2DG, \qquad FG=3BF=3\times 2DG=6DG$$
$$DE=EG+DG=6DG+DG=7DG,$$
$$AF=2DE=2\times 7DG=14DG,$$
$$AB=AF+BF=14DG+2DG=16DG,$$
$$CD=CE+DE=AB+DE=16DG+7DG=23DG.$$

Vous verrez ainsi que le rapport de CD à AB est celui de 23DG à 16DG ou $\frac{23}{16}$.

Au reste, pour plus de simplicité, écrivez tous les quotiens 1, 2, 3, 2, les uns sous les autres, dans l'ordre où vous les trouvez; mettez l'unité vis-à-vis du dernier 2, et ce dernier vis-à-vis de 3 l'avant-dernier; multipliez par le quotient 3, le 2 qui est sur la ligne; ajoutez au produit, le nombre 1 qui est sous le multiplicande; écrivez la somme 7 vis-à-vis de 2, 3me quotient en remontant; multipliez 7 par le quotient 2 qui est sur sa ligne; ajoutez au produit, le nombre 2 qui est sous le multiplicande; continuez toujours ainsi, et formez une fraction avec les deux derniers résultats que vous obtiendrez. Cette fraction exprimera le rapport du petit arc au grand, ou le rapport du grand arc au petit, selon que vous prendrez pour numérateur le plus petit ou le plus grand des deux derniers résultats. Ainsi, le rapport de AB à CD est $\frac{16}{23}$ et celui de CD à AB est $\frac{23}{16}$.

	23
1	16
2	7
3	2
2	1

APPL. (*a*) : La manière de faire des arcs égaux au moyen des cordes, est fréquemment employée dans le dessin géométrique et dans le trait.

« Quand le tailleur de pierres ou l'appareilleur a besoin de tracer sur un parement, un arc de cercle d'une grandeur déterminée, et que ce parement a une étendue suffisante pour renfermer le centre de l'arc, il commence par tracer de ce centre et avec le rayon convenable, le plus grand arc de cercle possible; puis au moyen de son compas, il prend sur le dessin en grand, la longueur de la corde qui répond à l'arc dont il s'agit, et la rapporte sur l'arc du parement, en partant d'un certain point donné. Il obtient ainsi un arc égal en longueur à celui du dessin ou de l'*épure*, parce qu'il a donné au premier la corde du dernier. »

« Si le centre ne peut se trouver sur le parement, l'apareilleur découpe sur l'épure, un patron ou panneau dont les bords présentent souvent l'arc et la corde seulement, et en posant le bord droit de ce patron sur la ligne du parement qui représente la corde de l'arc, il parvient facilement à tracer cet arc. »

Appl. (*b*) : C'est encore par suite du même principe, que le tailleur de pierres qui façonne des voussoirs, fait de même longueur toutes les arêtes de douelle plate contenues dans les paremens de tête; car ces arêtes sont les cordes des arcs que doivent former les arêtes circulaires des voussoirs, et comme ces arcs sont égaux dans une épure bien faite, leurs cordes doivent être égales.

« Il serait difficile de citer tous les cas où, dans les arts, on fait des arcs égaux, au moyen de cordes égales : il n'y a peut-être pas de principe de géométrie plus souvent appliqué que celui-là. »

25. *Le diamètre partage la circonférence en deux parties égales de 180° chacune.*

Vous verrez facilement qu'il en est ainsi, si vous considérez GH comme une charnière (P. I, F. 8) et que vous fassiez tourner l'arc GEH autour de cette droite, jusqu'à ce qu'il soit rabattu sur le côté du tableau où se trouve l'arc GFH. Ce mouvement ne changera nullement la longueur de l'arc GEH, ni les distances des points de cet arc au centre I, et quand le rabattement sera terminé, ces distances seront encore égales à celles des points de GFH au même centre (5). Par conséquent, les deux arcs qui auront toujours leurs extrémités aux mêmes points G, H, se trouveront superposés dans toute leur étendue; d'où il suit qu'ils étaient égaux avant le rabattement, et qu'ils contenaient chacun la moitié de 360°.

Si nous rapprochons ce qui vient d'être dit, de ce qui l'a été dans le n° 9, nous verrons qu'il y a deux manières de superposer : l'une celle du n° 9, qu'on peut appeler *superposition par glissement*; l'autre qui peut être nommée *superposition par rabattement*. La première exige qu'on enlève l'une des figures ou qu'on la fasse glisser; la seconde nécessite un axe de rotation, une droite qu'on puisse regarder comme une charnière.

Problème : *Partager une circonférence en deux parties égales*. Il suffit de tracer une sécante qui passe par le centre, ou un diamètre.

26. *Le diamètre est la plus grande de toutes les cordes;* car en traçant une corde quelconque AB (P. I, F. 12) et en menant les rayons CA, CB aux extrémités, on a une ligne brisée ACB plus grande que la droite AB comprise entre les deux mêmes points (2); or, cette ligne brisée est égale au diamètre, puisque comme lui, elle est composée de deux rayons (22).

27. Mais il est visible que la corde AB différera d'autant moins de ACB, qu'elle se rapprochera davantage du centre C. Il s'ensuit que plus une corde se rapproche du centre, et plus elle est grande. Alors aussi, son petit arc renferme un plus grand nombre de degrés. Par conséquent, *si, lorsqu'il s'agit d'arcs moindres que 180° et de même rayon, deux cordes sont inégales, l'arc de la plus longue est le plus grand*, et réciproquement, *si deux arcs de même rayon sont inégaux, la corde du plus grand est la plus longue*. Quand l'arc dépasse 180°, il est d'autant plus grand que sa corde est plus courte.

Appl. (*a*) : On doit bien se garder de mettre la moindre différence entre les cordes qu'on emploie pour faire des arcs égaux.

Appl. (*b*) : La figure que forme la demi-circonférence combinée avec le diamètre, plaît à l'œil ; aussi est-elle très-usitée dans les arts. Les fenêtres de grenier et même celles des entresols, ont fort souvent cette forme.

Appl. (*c*) : Dans les portes et dans les fenêtres en arcades à plein cintre, les vanteaux se terminent souvent à la naissance de la voûte, et le demi-cercle restant est rempli par un panneau dormant, dont les bords présentent une demi-circonférence et son diamètre. Pour une croisée, les divisions du panneau dormant doivent figurer les rayons du cercle : il y a dans cette disposition, solidité et beauté.

Appl. (*d*) : Les serruriers exécutent aussi la même figure dans plusieurs cas, et notamment pour les grilles qui ferment les portes en arcades à plein cintre.

Appl. (*e*) : Le *rapporteur*, instrument qui est ordinairement fait en laiton, et que nous avons cité, page 32, comme servant à déterminer combien un arc renferme de degrés; est terminé intérieurement par une demi-circonférence ABC et le diamètre AC (P. I, F. 13). Les bords extérieurs présentent aussi une demi-circonférence EFG qui a même centre que l'autre et dont AC prolongé jusqu'en E et en G, forme le diamètre. La bande circulaire comprise entre les deux demi-cercles, est ce qu'on nomme le *limbe* de l'instrument. On peut donc marquer 180° sur ce limbe. (25). Il présente souvent deux graduations semblables, mais en sens contraire l'une de l'autre. Cela fait qu'on n'a pas besoin de retourner le rapporteur, pour trouver le nombre des degrés d'un arc situé à droite, quand on vient d'opérer sur un arc placé à gauche.

« Le cran qu'on voit vers le milieu du diamètre, est nécessaire pour qu'on puisse découvrir le centre de l'arc, lequel doit toujours être exactement placé sous le point D centre de l'instrument. Les deux autres crans A et C servent à bien poser le diamètre AC sur une droite tracée. »

« Nous indiquerons un peu plus loin, dans le chapitre suivant, la manière de se servir d'un rapporteur. »

Appl. (*f*) : Enfin, il existe un autre instrument appelé *graphomètre* et employé pour le lever des plans, qui présente un limbe tout pareil à celui du rapporteur. Nous le décrirons plus tard, en citant les applications des droites qui se coupent.

» On sent combien il importe dans la confection de ces instrumens, de faire passer la ligne qui représente le diamètre, exactement par le centre des demi-circonférences. La moindre négligence sur ce point rendrait la partie circulaire plus grande ou plus petite qu'une demi-circonférence, et par conséquent, chacune des 180 divisions serait plus grande ou plus petite qu'un vrai degré, ce qui jetterait dans des erreurs parfois très-graves. »

TRACÉ DES CONCOURANTES.

Deux droites qui se coupent, sont nommées *concourantes*, pour abréger. Ce nom est aussi donné à un nombre quelconque de droites qui passent toutes par le même point.

« Avant de nous occuper du tracé des concourantes, nous avons besoin d'établir les principes et les définitions suivantes. »

28. *Deux droites ne peuvent se couper ou se rencontrer qu'en un seul point ;* car si elles se coupaient en deux points ; elles auraient deux points communs, et se confondraient, puisque deux points suffisent pour déterminer une droite. Au lieu de deux droites, il n'y en aurait donc plus qu'une seule.

Deux concourantes AB, BC (P. I, F. 14) laissent entre elles, sur le tableau, un espace qu'on nomme *angle*. Les droites AB, BC sont les *côtés* de cet angle ; le point B où se coupent les côtés, est le *sommet*.

Pour désigner un angle, il suffit de trois points : celui du sommet et deux autres pris sur les côtés. On nomme donc un angle par trois lettres ; celle du sommet se place toujours entre les deux autres. Ainsi, les droites AB, BC forment, en se coupant, l'angle ABC. Quelquefois, on désigne aussi un angle par la seule lettre du sommet, et l'on dit l'angle B ; mais il faut qu'alors le sommet ne soit pas commun à plusieurs angles.

Puisque les droites ne sont jamais naturellement limitées (3), il est clair que l'angle est aussi sans limites : à mesure, en effet, que les droites augmentent en longueur, l'espace qu'elles laissent entre elles augmentent aussi. Par conséquent, toutes les fois qu'on forme un angle avec deux portions de droites qui se coupent, on ne représente vraiment aux yeux qu'une portion de l'angle. Mais, de même qu'il suffit d'une petite partie d'une droite, pour qu'on puisse tracer cette droite, jusqu'à un point pris aussi loin qu'on voudra, il suffit aussi d'une petite partie de l'angle, pour qu'on puisse lui donner telle étendue qui sera assignée ; il ne s'agirait, pour cela, que d'en prolonger les côtés autant qu'il serait nécessaire. Ainsi, un angle est toujours suffisamment déterminé par son commencement, c'est-à-dire, par la partie qui avoisine le sommet. Nous nous contenterons donc *d'amorcer*, pour ainsi dire, comme dans la figure 14, les angles dont nous parlerons.

29. On peut concevoir que la droite AB ait d'abord été sur la droite BC (P. I, F. 15), et qu'elle se soit écartée ensuite de cette seconde ligne, en tournant autour du point B, jusqu'à ce qu'elle ait eu atteint la position qu'elle a dans la figure, ou jusqu'à ce qu'elle ait eu formé l'angle ABC. Ce mouvement étant le même que celui du cordeau qu'on emploie pour tracer la circonférence, il est clair que l'extrémité A de AB n'aura pu passer de C en A, sans décrire un arc CA dont B est le centre. Il est clair encore que si l'angle augmente ou diminue, c'est-à-dire si AB s'éloigne ou se rapproche de BC, l'arc augmentera ou diminuera. Cette dépendance constante dans laquelle l'arc est de l'angle et l'angle de l'arc, fait qu'*on peut prendre pour* INDICATION *de l'angle, le nombre de degrés contenu dans l'arc décrit entre les côtés et du sommet comme centre.*

Si, par exemple, l'arc AC est de 25°, on dit que l'angle ABC est de 25°, et réciproquement, l'angle ABC étant dit de 25°, l'arc AC contient 25°. Mais il faut bien observer qu'il n'en serait plus ainsi de tout arc qui n'aurait pas le sommet B pour centre, bien qu'il fût compris entre les côtés de l'angle.

Au reste, l'indication d'un angle par les degrés de l'arc décrit entre les deux côtés et du sommet comme centre, est justifiée par le principe suivant que nous allons démontrer.

30. *Le rapport de deux angles est le même que celui des nombres de degrés, de minutes, etc., des arcs décrits de leurs sommets, entre leurs côtés, avec des rayons égaux quelconques.*

Nous ferons voir d'abord que si, par exemple, l'arc AC (P. I, F. 16) est double de l'arc DF qui a même rayon (F. 17), l'angle ABC sera aussi double de l'angle DEF.

Plaçons EF sur BC, ces droites pourront se confondre, puisqu'elles sont les rayons des arcs et que ces rayons sont égaux. DF aura alors même centre que AC et s'appliquera, par conséquent, sur ce dernier arc. Mais, comme DF n'est que la moitié de AC, D tombera en G milieu de AC, et si l'on trace la droite GB, l'angle DEF recouvrira l'angle GBC dans toute son étendue. Maintenant, nous pourrons reprendre EF et la placer sur BG; DF se confondra avec AG qui lui est égal, puisque DF est contenu deux fois dans AC; DE se confondra avec AB, et l'angle DEF recouvrira l'angle ABG dans toute son étendue. Cet angle DEF est donc contenu deux fois dans l'angle ABC, comme l'arc DF dans l'arc AC. Le rapport des angles est donc égal à celui des longueurs des arcs. Or, quand les arcs ont même rayon, le rapport de leurs longueurs est le même que celui de leurs nombres de degrés (17); par conséquent, le rapport des angles est aussi le même que celui des nombres de degrés de leurs arcs.

31. Il résulte de la démonstration précédente que *si des arcs de même rayon, compris entre les côtés de deux angles, sont égaux,*

les angles le sont aussi; et que réciproquement *l'égalité des angles entraîne celle des arcs*; car, pour les deux sortes de choses, le rapport est alors 1.

32. « *Si les arcs n'ont pas même rayon, les angles n'ont pas moins le même rapport que les arcs exprimés en degrés, ou en minutes, ou en secondes;* c'est-à-dire que le rapport de l'angle ABC (P. I, F. 16) à l'angle DEF (F. 18), est égal au rapport des nombres de degrés des arcs AC et HI dont les rayons sont différens, comme il est égal au rapport des arcs AC et DF qui ont même rayon. Il est visible que cela sera démontré, si nous faisons voir que *les arcs* DF et HI *de rayons différens et décrits du sommet* E *d'un angle* DEF, *entre les côtés de cet angle, contiennent le même nombre de degrés, minutes, etc.* »

« Supposons que l'angle DEF puisse être placé 12 fois de suite, par exemple, autour du sommet E. Les 12 angles que nous aurons alors seront égaux, et par conséquent, les 12 arcs de rayon DE qu'ils comprendront entre leurs côtés, seront aussi égaux (31). Or, ces arcs formeront en somme la circonférence. Donc, un quelconque DF sera le douzième de 360° ou 30°. Par la même raison, les 12 arcs de rayon IE compris entre les côtés des mêmes angles, seront aussi égaux, et comme leur somme sera visiblement une circonférence entière, un quelconque HI sera également le douzième de 360° ou 30°. Donc, les deux principes énoncés sont vrais. »

33. « Il s'ensuit que *si des arcs compris entre les côtés de deux angles et décrits des sommets, ont même nombre de degrés, les angles sont égaux*, et que réciproquement *si les angles sont égaux, les arcs ont même nombre de degrés.* »

Probl. (*a*) : *Trouver le nombre des degrés contenus dans un arc.*

Soit, par exemple, l'arc HI de la circonférence K (P. I, F. 19), dont on veuille connaître le nombre de degrés. On joint le centre K aux extrémités H et I de l'arc, par des droites KH, KI plus grandes que le rayon du rapporteur; puis, ayant placé le diamètre AC de l'instrument (F. 13) sur l'une KI de ces droites, de façon que le centre K de l'arc réponde au point D, il ne reste plus qu'à examiner par quelle division du limbe passe la droite KH. Le nombre des degrés compris entre la ligne CG du rapporteur et la droite KH, est celui de l'arc HI, puisque des arcs décrits du sommet d'un angle et compris entre ses côtés renferment le même nombre de degrés (32).

Probl. (*b*) : *Marquer sur une circonférence, un arc qui contienne autant de degrés qu'un arc donné.*

Cherchez d'abord, comme ci-dessus, le nombre des degrés de l'arc donné; placez ensuite le rapporteur sur le cercle L (P. I,

F. 20), *de manière que le centre L réponde au point* D (F. 13); marquez sur le tableau, et tout contre le bord circulaire de l'instrument, deux petits points, l'un M vis-à-vis de G, l'autre N vis-à-vis de la ligne qui termine le nombre de degrés; puis, joignez ces deux points avec le centre L de la circonférence, par deux droites. La courbe sera coupée par ces droites en deux points O, P, qui limiteront un arc OP du même nombre de degrés que l'arc donné (32).

« Nous pouvons maintenant nous occuper du tracé des concourantes. »

34. Quand il est question de tracer une droite qui en coupe une autre, on donne deux points de la première, ou bien l'on n'en donne qu'un seul point. Si vous avez deux points, le procédé du n° 1 suffit. Si vous n'avez qu'un seul point de la droite demandée, ce point se trouve sur la droite donnée ou bien il est hors de cette droite, et dans les deux cas, il faut que vous connaissiez l'angle que doivent former entre elles les deux concourantes; autrement, vous pourriez tirer par le point donné, une foule de droites qui rempliraient toutes la condition. Enfin, l'angle peut être donné tout formé ou seulement par son indication en degrés.

Probl. (*a*): *Par un point* A *d'une droite* AB (P. I, F. 21), *tirer une concourante qui fasse un angle* CDE *connu et tracé* (F. 22).

On peut employer pour cela une *fausse-équerre*. Cet instrument est composé de deux règles FG, HI (F. 23), réunies par une charnière, comme les branches d'un compas. Quelquefois, chaque règle est terminée par une pointe; la fausse-équerre du tailleur de pierres est ainsi faite : il en résulte que l'instrument peut aussi servir de compas.

Pour exécuter le tracé demandé, placez l'arête intérieure FG sur le côté DE de l'angle donné (F. 22), et ouvrez la fausse-équerre jusqu'à ce que l'arête extérieure HI recouvre exactement l'autre côté CD. Alors, l'angle CDE sera *levé* ou *relevé*, c'est-à-dire que les deux arêtes FG, HI feront entre elles ce même angle. Maintenant, sans déranger l'écartement des deux règles, posez l'arête FG sur AB (F. 21), de manière que l'arête HI passe par le point A; il ne s'agira plus que de tirer une droite AK le long de HI, pour avoir la concourante demandée.

Probl. (*b*): *Transporter un angle d'un lieu dans un autre.*

Il suffit pour cela, de poser, la fausse équerre sur le nouveau tableau, après qu'on a levé l'angle, et de tirer deux droites, l'une le long de l'arête FG (F. 23), l'autre le long de l'arête HI. Mais, comme l'instrument empêche ces deux droites de se rencontrer, il faut ensuite prolonger un peu la première, au moyen de l'une des règles. On peut aussi se servir des arêtes intérieures de ces règles.

PROBL. (*c*) : *Faire au compas un angle égal à un autre et de sommet différent.*

Si l'on n'a point de fausse-équerre, ou bien si les règles de l'instrument ne sont pas justes (page 23) voici comment on résout le problème (*a*). Du sommet D (P. I, F. 22) et d'un rayon quelconque, décrivez entre les côtés de l'angle donné, un arc CE. Du point donné A (F. 21) et du même rayon, décrivez, à partir de la droite AB, un arc qui soit visiblement plus grand que l'arc CE. Prenez ensuite, avec un compas, la corde de ce dernier arc, et portez-la sur l'arc de la figure 21, de B en K. Enfin, tirez par le point K et le point A, la droite AK; elle fera avec AB l'angle donné CDE; car, les cordes étant égales, les arcs qui ont même rayon, sont égaux (24), et de l'égalité de ces arcs résulte l'égalité des angles (31).

PROBL. (*d*) : *Par un point* H *d'une droite* HI (P. I, F. 24) : *tracer une concourante qui fasse un angle dont l'indication seulement soit connue* (29).

C'est le cas d'employer le rapporteur décrit page 27. Placez le diamètre AC de l'instrument sur la droite HI, de façon que le point H se trouve sous le point D. Alors, la droite CG qui répond à 0 degrés, se trouvera aussi sur HI. Comptez donc à partir de CG, en employant la graduation qui va de droite à gauche, le nombre de degrés de l'indication de l'angle, 40 par exemple; marquez sur le tableau, près du bord extérieur de l'instrument, un très-petit point K, vis-à-vis de la droite qui termine le 40ième degré; enlevez le rapporteur et tracez une droite KH qui passe par K et H; ce sera la droite demandée (29).

Si l'on employait la graduation qui va de gauche à droite, on marquerait le point L au lieu du point K, et l'on obtiendrait la droite LH, au lieu de la droite KH. Si l'on plaçait le rapporteur au-dessous de HI, comme on l'a placé au-dessus, on tracerait la droite MH ou la droite NH.

Il semble donc qu'il y ait quatre droites qui passent par le point donné H et qui coupent HI en faisant l'angle dont l'indication est donnée, et que pour savoir au juste quelle est celle qu'il faut tracer, on ait besoin de connaître si la droite demandée doit être au-dessus ou au-dessous de la droite donnée, à droite ou à gauche du point donné. Mais au fond, il n'y a que deux de ces droites qui soient différentes: KH et LH. Quant aux deux autres, NH est le prolongement de KH, et MH le prolongement de LH; c'est-à-dire que KHN est une ligne droite, ainsi que LNM. En effet, l'arc ELK donnerait 180°, si l'on y ajoutait l'arc KG de 40°. Or, l'arc EN est aussi de 40°. Donc, ELK + EN vaut 180°. Donc, NEK est une demi-circonférence. Par conséquent, KHN est un diamètre (25) et comme tel, une ligne droite. La démonstration serait la même pour LHM.

Il suit de là que pour exécuter le tracé, il suffit de placer le rapporteur d'un seul côté de la droite donnée HI, et de savoir si la concourante demandée doit se diriger à droite ou à gauche du point donné H.

PROB. (e) : *Par un point* A *situé hors d'une droite* BC (P. *I*, F. 25), *tirer une concourante qui fasse un angle* DEK *tracé* (F. 26).

On lève l'angle DEK avec la fausse-équerre (*a*, page 31); on place l'arête intérieure FG (F. 23) sur la droite BC, de façon que l'arête extérieure HI passe sur le point donné A; puis on tire le long de cette dernière arête, une droite AL qui satisfait visiblement aux conditions prescrites.

« Nous dirons comment on exécute ce tracé sans fausse-équerre, quand nous parlerons des *parallèles.* »

« PROBL. (*f*) : *Par un point* A *situé hors d'une droite* BC (P. I, F. 25), *tracer une concourante qui fasse un angle dont l'indication seulement est connue* (29). »

« Il faut, pour cela, un rapporteur en corne transparente, qui ne soit pas évidé comme le rapporteur ordinaire, et qui n'en diffère que par là. On commence par tracer à l'encre sur cet instrument, un rayon qui laisse entre lui et le diamètre EG (P. I, F. 13), le nombre de degrés indication de l'angle. Ensuite, on place EG sur la droite BC, de manière que le rayon tracé passe par A; puis, introduisant une pointe très-fine par un petit trou qui est au centre du rapporteur, on marque sur BC un second point L de la concourante demandée. Il ne reste plus qu'à enlever l'instrument et à joindre A et L par une droite; elle remplira les conditions imposées. »

« On peut aussi marquer le second point de AL près du bord circulaire du rapporteur, quand le point A s'en trouve suffisamment éloigné pour qu'il y ait exactitude dans le tracé de la concourante. »

« Si le nombre de degrés donné ne contient que des dixaines, comme 10, 20, 30, etc., on n'a besoin de faire aucune opération sur le rapporteur; car on y trouve, dans toute leur longueur, les rayons qui marquent les dixaines de degrés. Au reste, le tracé d'un trait sur la corne n'a nul inconvénient : on peut aisément effacer ce trait, avec un linge mouillé. »

« Nous indiquerons au chapitre des *parallèles*, le moyen d'exécuter le même tracé avec la rapporteur ordinaire. »

35. L'explication du problème (*d*), page 32, conduit à ce principe: *Deux lignes* EHI, KHN, (P. I, F. 24) *qui, en se croisant, font quatre angles deux à deux égaux et* OPPOSÉS PAR LE SOMMET, *sont deux lignes droites*; ou bien à cet autre : *Deux concourantes qui se croisent, font quatre angles deux à deux égaux et opposés par le sommet*; car les angles KHE, IHN sont aussi égaux, leurs indications étant toutes deux 180°—40° ou 140°.

Dorénavant, nous appellerons toujours *angles opposés par le sommet*, ceux que forment deux droites et leurs prolongemens. Ainsi, les angles ABC, DBE (P. I, F. 27) sont deux angles opposés par le sommet et conséquemment égaux. Il en est de même des angles ABD, CBE formés par les concourantes AB, BD et par les prolongemens de ces droites.

PROBLÈME : *Faire deux angles égaux.*
Il suffit de tracer deux droites qui se croisent.

APPL. (*a*): Les principes et les tracés dont nous venons de nous occuper, sont d'un usage journalier. La plupart sont continuellement employés par les ouvriers qui travaillent le bois, la pierre et les métaux, parce que tous ces ouvriers ont à transporter des angles d'un tableau sur un autre, d'une épure sur la pièce qu'ils façonnent; parce que tous ont à tracer des droites formant avec d'autres des angles connus. La fausse-équerre est leur instrument ordinaire. L'appareilleur et le tailleur de pierres s'en servent, par exemple, pour tracer et vérifier les lits des pierres destinées à former l'encoignure de deux murs qui ne sont pas d'équerre l'un sur l'autre. Le charpentier fait de la même manière le trait d'assemblage, sur les pièces de bois qui ne se rencontrent pas d'équerre, comme il arrive à quelques-unes de celles d'un comble.

APPL. (*b*) : Les dessinateurs de plans, de machines, mettent sans cesse en pratique tous les principes et les tracés précédens, parce qu'ils ont aussi à transporter des angles et à tirer des droites qui en coupent d'autres; parce qu'ils ont de plus à former des angles dont ils connaissent seulement l'indication en degrés, et que souvent ils ont besoin de déterminer le nombre des degrés contenus dans des arcs tracés. Le compas et les deux rapporteurs sont les instrumens qu'ils emploient.

APPL. (*c*) : Mais il est des angles qu'on ne peut lever ni avec la fausse-équerre ordinaire, ni avec un rapporteur : tel est, par exemple, l'angle des deux droites qui vont de la tour de notre cathédrale, au clocher de Montigny et au télégraphe de Saint-Quentin; et pourtant il faut connaître cet angle, si l'on veut faire avec quelque exactitude, la carte topographique des environs de Metz, et parvenir à une évaluation de l'étendue des terrains productifs, qui permette de répartir l'impôt avec justice. Dans des cas semblables, on prend les angles avec un instrument appelé *graphomètre* dont il a déjà été question page 27. Les bons arpenteurs s'en servent. Nos architectes-voyers en font usage aussi, pour des opérations que nécessite le pavage des rues; et il est probable que peu à peu son emploi deviendra fréquent; du moins, sa justesse et la simplicité de son jeu le font présumer. Par toutes ces raisons, je crois devoir le décrire.

« Le graphomètre n'est au fond qu'une combinaison de la fausse-équerre et du rapporteur, combinaison qui est faite de telle manière que le pivot du premier instrument se trouve au centre même du second. On conçoit, d'après cela, que, ce même centre étant placé au-dessus d'un point quelconque, il suffit de diriger les branches de la fausse-équerre vers deux autres points, pour qu'elles marquent sur le limbe du rapporteur, l'indication de l'angle formé par les droites qui lient aux deux points *visés*, le point de *station*, c'est-à-dire celui qui est à l'aplomb du centre du demi-cercle gradué. Ayant l'angle en degrés, il est facile ensuite de le tracer sur le papier, au moyen du rapporteur ordinaire. »

« Il est à observer toutefois que les angles qui sont levés pour être rapportés sur le papier, sont, non pas ceux que forment les droites menées de la station aux objets, mais ceux que font entre elles les droites de niveau qui, parties de la station, vont passer par des points situés dans l'aplomb des objets. Il en résulte (29) que le limbe du graphomètre doit être de niveau pendant qu'on lève les angles. »

« *Graphomètre à alidades :* Il existe des graphomètres, et j'en mets un de cette espèce sous vos yeux, où les branches de la fausse-équerre sont deux règles en laiton appelées *alidades*, et garnies à leurs extrémités de petites plaques qui ont une fente peu large et une mortaise à jour, selon la ligne milieu de laquelle se trouve tendu un cheveu. Une droite indiquée sur la face supérieure de chaque règle, rencontre les prolongemens de deux cheveux opposés : on peut l'appeler *ligne de mire*. C'est par la fente d'une règle et la mortaise opposée qu'on vise un objet ; il faut que cet objet soit caché à l'œil par le chevéu. Alors, la ligne de mire de la règle passerait par l'objet ou par son aplomb, si elle était prolongée. »

« L'une des deux règles est fixe, l'autre peut pivoter. La ligne de mire de la première forme le diamètre du demi-cercle gradué, et passe conséquemment par le zéro de la graduation ; à chaque extrémité de celle de la règle mobile, est figurée une fleur-de-lis ou une flèche qui marque les degrés. D'après cela, il est clair que les deux lignes de mire se croisant au centre même du demi-cercle gradué, donnent, par le nombre de degrés qui se trouve entre elles, l'indication de l'angle (29). »

« L'emboîtement, à genou qu'on voit au-dessous du demi-cercle gradué, sert à placer le graphomètre dans la position qu'il doit avoir. Il surmonte une douille, au moyen de laquelle on établit l'instrument sur un pivot à trois pieds. Mais cet instrument mis de niveau, présente un assez grave inconvénient : il n'est plus possible de viser, quand les deux points éloignés sont très-hauts ou très-bas par rapport à la station. »

« *Graphomètres à lunettes :* Voici un graphomètre qui n'a pas le défaut du précédent. Au lieu de règles, il porte deux lunettes : l'une fixe dont la ligne milieu répond au diamètre du demi-cercle gradué, l'autre qui peut pivoter sur le centre et qui en outre a un mouvement de bascule. La ligne milieu de cette dernière passe par l'aplomb du centre. En regardant par ces lunettes, on voit les objets renversés et grossis. Il serait facile de les faire voir droits ; mais le verre qu'il faudrait ajouter pour cela, affaiblirait la lumière que les objets envoient à l'œil par les lunettes ; la vision serait moins nette, et l'on ne verrait plus distinctement à une aussi grande distance, inconvénient bien autrement grave que le renversement des objets, qui, à proprement parler, n'en est pas un. »

« Pour déterminer avec précision la ligne milieu de chaque lunette, on a fait très-petit le trou près duquel s'applique l'œil, et l'on a placé dans le canon, deux fils de soie ou d'araignée qui se coupent au centre du cercle où ils se trouvent : l'intersection des deux fils doit masquer exactement le point visé. »

« Quand le demi-cercle est parfaitement de niveau, on abaisse ou l'on élève l'extrémité antérieure de la lunette mobile et l'on voit, par conséquent, les points situés plus bas ou plus haut que la station; la flèche qui répond verticalement ou d'aplomb à la ligne milieu de cette lunette, n'en reste pas moins sur le limbe; elle continue, par conséquent, de marquer le nombre de degrés indication de l'angle à rapporter sur le papier. Mais on ne peut faire basculer la lunette fixe; il faut donc qu'elle soit toujours dirigée sur un point situé à la même hauteur que la station. Il est facile de remplir cette condition, en prenant les angles que font les droites AB, AC (P. I, F. 28) allant de la station A aux deux objets B, C, avec une droite AD allant de la station à un point D quelconque de même niveau que A. Si ce point D se trouve entre les deux objets, il ne s'agit que d'ajouter les indications des deux angles BAD, DAC, pour avoir celle de l'angle BAC cherché, et dans le cas contraire, il suffit de retrancher la plus petite indication, par exemple celle de CAD, (F. 29), de la plus grande BAD, pour avoir celle de l'angle BAC qu'on veut lever. C'est donc avec raison que nous avons présenté le graphomètre à lunettes, comme exempt de l'inconvénient du graphomètre garni d'alidades. »

« *Boussole :* On trouve ordinairement dans les deux instrumens, entre le limbe et le centre, une boussole dont l'aiguille, aimentée et posée sur un pivot, prend une direction qui n'est pas toujours celle du nord-sud, mais qui n'en diffère que d'un petit nombre de degrés, publié chaque année et même chaque mois, sous le nom de *Déclinaison.* Au moyen de cette boussole, on peut trouver l'indication des angles que font avec la ligne nord-sud, les côtés de l'angle levé. Il suffit, pour cela, de mettre la lunette fixe dans la direction de l'aiguille, et l'autre dans celle de l'un des objets. Il en résulte qu'en traçant sur le papier, une droite AE qui représente la ligne nord-sud (P. I, F. 30), on peut rapporter l'angle levé, de manière que les droites AB, AC soient placées sur le plan, par rapport à cette ligne, comme elles le sont réellement dans la nature. C'est là ce qu'on appelle *orienter* le plan. »

« *Niveau à bulle d'air* : Le demi-cercle des graphomètres se place de niveau par le moyen d'un *niveau à bulle d'air* qu'on y pose dans deux sens différens. Cet instrument n'est autre chose qu'un petit tube de verre faisant légèrement la voûte, dans lequel se trouve un liquide, de l'eau, avec un peu d'air. Le graphomètre n'est bien placé qu'au moment où, dans les deux positions du niveau, la bulle d'air s'arrête au milieu du tube. »

« On comprendra sans peine le jeu du niveau à bulle d'air, si l'on a observé que tous les corps plus légers que l'eau se portent rapidement à la surface de ce liquide, dès qu'on les abandonne après les y avoir plongés, car on sentira que la bulle d'air étant beaucoup moins pesante que l'eau déplacée, doit marcher vers une des extrémités du tube, pour peu que cette extrémité vienne à s'élever par rapport à l'autre, vu qu'alors la surface du liquide se trouve plus près du bout élevé que de l'autre bout. Cela montre que le niveau à bulle d'air est d'une grande sensibilité. Nous ne saurions trop en recommander l'usage : il coûte peu cher, et son emploi conduira certainement les ouvriers à poser les pièces qui doivent être de niveau, avec une exactitude que les niveaux ordinaires, presque toujours défectueux, ne peuvent procurer que par hasard. Il faut observer toutefois que cet instrument est d'autant plus sûr que le tube a plus de longueur. »

« *Vernier* : Les limbes des meilleurs graphomètres ne montrent que les degrés et les demi-degrés : il faudrait un cercle d'un trop grand rayon, pour qu'on pût y marquer les minutes. Cependant, il serait fort inexact d'évaluer à vue les petites parties de degré que peut renfermer l'indication d'un angle. Un fragment de limbe AB (P. I, F. 31) qui tient au support de la lunette mobile et qu'on appelle *Vernier*, du nom de l'inventeur, fournit le moyen d'obtenir les minutes. Dans les graphomètres à alidades, le vernier contient 12 divisions, qui commencent au rayon A indicateur des degrés. Ces 12 divisions occupent un arc de 11°, de sorte que chacune vaut en degrés ce que donnent 11° partagés entre toutes ou en 12 parties. Or, partager 11 choses en 12 parts, ou partager une seule de ces choses en 12 parts, en douzièmes, et prendre 11 de ces douzièmes, c'est visiblement la même chose. Chaque division du vernier vaut donc 11 douzièmes de degré, ce qui s'écrit $\frac{11}{12}$ degré, et comme, pour faire un degré, il faut 12 douzièmes, le degré surpasse la division de 1 douzième de degré ou de 1 douzième de 60', c'est-à-dire de 5'. »

« Supposons maintenant que l'indicateur A de la lunette mobile tombe entre 57° et 58° ; l'angle qu'on lève aura pour indication 57° et quelques minutes. Supposons encore que ce soit la 5ième ligne B du vernier qui se trouve répondre à une des lignes des degrés ; ce sera nécessairement à celle du 61ième degré, car la 1re tombant entre 57° et 58°, la 2ième tombera entre 58 et 59, la 3ième entre 59 et 60, la 4ième entre 60 et 61, et la 5ième ne pourra aller jusqu'à 62. Or, la différence entre une division et le degré est de 5'. Par conséquent, si la 5ième ligne du vernier répond au 61ième degré, la 4ième dépassera 60 de 5', la 3ième dépassera 59 de 10', la 2ième dépassera 58 de 15' et la 1re dépassera 57 de 20'. L'indication de l'angle sera donc 57° 20', ce qui montre que si l'indicateur tombe entre deux lignes des degrés, il faut, pour former l'indication de l'angle, prendre le nombre de degrés qui précède le rayon A et y ajouter autant de fois 5' qu'il y a de divisions du vernier, depuis ce rayon, jusqu'à la ligne qui répond exactement à une de celles des degrés. »

« Mais, il peut se faire qu'aucune ligne du vernier ne réponde exactement à une de celles du limbe. Dans ce cas, on ajoute au nombre de degrés qui précède l'indicateur, autant de fois 5' qu'il y a de divisions, depuis cet indicateur, jusqu'à celle des lignes du vernier qui approche le plus de répondre à une ligne des degrés, par exemple jusqu'à la 3ème *ligne* A (P. I, F. 32), ce qui fait 10'; puis, on estime ce qu'il faut ajouter de plus, en comparant à vue les deux intervalles que laissent les lignes A et B, entre elles et les lignes du limbe avoisinantes, intervalles qui, en somme, font 5'. Si, par exemple, celui que laisse la ligne A paraît être la moitié de celui que laisse la ligne B, il vaut le tiers de 5' ou 1' 40", ce qui, joint aux 57° 10' déjà trouvés, porte l'indication de l'angle levé à 57° 11' 40". »

« Il est visible que, pour tracer ensuite avec exactitude l'angle sur le papier, il faut absolument un rapporteur garni d'un vernier; il existe de tels instrumens, mais ils sont chers. »

« Dans les graphomètres à lunettes, le vernier contient 30 divisions qui occupent un arc de 29 demi-degrés ou de 870'. Chacune de ces divisions vaut donc le quotient de 870' divisé par 30, ou 29'; il s'ensuit que sa différence au demi-degré est de 1' et que pour former l'indication de l'angle, il faut ajouter au nombre des demi-degrés qui précèdent l'indicateur, autant de minutes qu'il y a de divisions du vernier, depuis cet indicateur, jusqu'à la ligne qui répond exactement à une de celles des demi-degrés. »

« Je me suis beaucoup étendu sur l'usage du vernier, parce qu'il offre un moyen très-simple, très-prompt, très-exact dans un grand nombre de cas, d'une précision bien suffisante dans les autres, d'obtenir les subdivisions de divisions peu étendues, et que ce moyen, qui peut être d'une grande utilité pour les artistes et les ouvriers, n'est pas encore répandu à beaucoup près autant qu'il mérite de l'être. (*Voy.* le vernier du pied-de-roi au *Mesurage des lignes*). »

Appl. (*d*) : Le graphomètre n'est pas le seul instrument qui soit propre à lever les angles. Il y a encore le quart de cercle ou *quadrant*, le *sextant* qui ne porte que 60°, l'*octant* qui n'en a que 45, le *cercle répétiteur* qui renferme les 360° de la circonférence, et la *boussole* qui, entourée d'un cercle gradué et munie d'une alidade, sert aussi à trouver l'indication de l'angle que fait une droite avec la ligne nord-sud. Les quatre premiers ont des lunettes comme le graphomètre, et le dernier en porte une quelquefois.

Perpendiculaires.

« Nous avons souvent employé les expressions *d'équerre, de niveau*, sans les expliquer. Il nous a paru que nous pouvions agir ainsi, parce que ces expressions appartenant à la langue industrielle, sont parfaitement comprises des artistes et des ouvriers. Mais nous allons les définir géométriquement. »

36. Deux droites *d'équerre* font entre elles un angle dont l'indication est 90°, c'est-à-dire un angle tel que l'arc décrit du sommet entre les côtés, est le quart de la circonférence entière. En géométrie, on dit que ces droites sont *perpendiculaires* l'une sur l'autre. Si donc l'arc AB (P. I, F. 33) est de 90° ou le quart de la circonférence ABCA, le rayon DE est perpendiculaire sur le rayon DF, et réciproquement DF est perpendiculaire à DE.

Prolongez DF jusqu'en C; AC sera un diamètre (22) et l'arc ABC vaudra 180° (25). Mais l'arc AB est de 90°; l'arc BC sera donc aussi de 90°. Ainsi, l'angle CDE a même indication que l'angle EDF, et par conséquent, ces deux angles sont égaux (30).

37. Il s'ensuit qu'*une droite* DE *perpendiculaire à une autre* DF, *est aussi perpendiculaire au prolongement* CD *de cette autre* (P. I, F. 33).

Il s'ensuit encore qu'*une droite* DE *perpendiculaire à une autre* CF, *forme avec celle-ci deux angles égaux* EDF, CDE.

38. Réciproquement, *si une droite* DE *forme avec une autre* CF, *deux angles* EDF, CDE *égaux et tous deux situés d'un même côté par rapport à la dernière* CF, *ces droites sont perpendiculaires l'une à l'autre* (P. I, F. 33); car les angles étant égaux, auront même indication; les arcs AB, BC contiendront le même nombre de degrés, et comme ils composent à eux deux la demi-circonférence ou 180°, chacun vaudra 90° (31).

39. L'angle de 90° se présentant souvent dans les tracés et dans les démonstrations, on lui a donné un nom particulier : il s'appelle *angle droit*. Donc, *être perpendiculaire ou former un angle droit ou faire deux angles égaux situés du même côté d'une droite, c'est la même chose pour une concourante.*

40. Il résulte de la définition de l'angle droit, que *les angles droits* EDF (P. I, F. 33), GHI (F. 34), *formés par des droites différentes, sont des angles égaux :* car ils ont même indication, et nous avons vu (30) que le rapport des angles est égal à celui des nombres de degrés de leurs indications.

Applications : C'est ordinairement avec une *équerre* qu'on trace les perpendiculaires. Deux des arêtes de cet instrument doivent, en se rencontrant, faire un angle de 90°. Il y a plusieurs sortes d'équerres : celle des charpentiers et des tailleurs de pierres A (P. I., F. 35) présente deux règles en fer, soudées l'une au bout de l'autre, de manière que les arêtes qui se rencontrent, forment des angles droits; celle du dessinateur B (F. 36) est une planchette de même épaisseur partout, dont les grandes faces présentent trois côtés : deux de ces côtés forment un angle droit; l'équerre du menuisier C (F. 37) n'est autre chose que celle du dessinateur, renforcée d'un rebord qui lui permet de s'appliquer à la fois sur deux faces d'une pièce de bois ou d'une planche ; c'est celle des droites de ce rebord qui se trouve dans le rentrant, qu'on rend perpendiculaire à l'une des arêtes de la planchette.

« On se sert de tous ces instrumens à peu près de la même manière : il faut toujours appliquer l'une des arêtes qui forment l'angle droit, sur la droite à laquelle on veut mener une perpendiculaire, et tracer une seconde droite le long de l'autre côté du même angle. Si la perpendiculaire doit aboutir à un point marqué sur la droite donnée, le sommet de l'angle droit doit être placé sur ce point. Si la perpendiculaire est assujettie à passer par un point marqué hors de la droite donnée, il faut que le second côté de l'angle droit recouvre ce point. Si enfin la perpendiculaire est demandée plus longue que le plus grand des côtés de l'angle droit, on place l'équerre comme il vient d'être dit, puis on applique une règle le long de l'arête que devrait suivre l'instrument traçant, on élève l'équerre et l'on tire une droite le long de la règle.

« *Vérification des équerres :* Il arrive assez souvent que les équerres sont fausses, soit par mauvaise construction, soit par des altérations qu'occasionnent l'air et l'usage. On doit donc vérifier ces instrumens, avant de les employer pour des opérations qui demandent de l'exactitude ; sans cela, on s'exposerait à tracer des droites qui prolongées finiraient par s'écarter beaucoup des vraies perpendiculaires. »

« Pour vérifier une équerre, tirez sur une face plane et avec une bonne règle, une droite AB (P. II, F. 1) ; placez l'équerre comme pour tracer une perpendiculaire ; tirez une ligne CD, le long du côté CE ; retournez l'instrument et posez-le dans l'angle ACD, de manière que le côté CF se trouve en CF' (l'accent se prononce *prime*), et que le sommet de l'angle qui doit être droit se trouve sur C. Si CD est perpendiculaire à AB ou si l'équerre est juste, les deux angles BCD', ACD sont égaux entre eux (37) et égaux à l'angle ECF (40) ; donc le côté CE' doit s'appliquer sur CD, comme il s'y appliquait dans la position CE. Lorsque la superposition n'a pas lieu, l'équerre est fausse ; l'angle C qu'elle doit avoir droit, est trop grand, si CE' coupe CD ou si E' tombe à droite de CD, et trop petit, si E' tombe à gauche. »

« Puisque les équerres peuvent être fausses et les rapporteurs mal gradués, il est nécessaire qu'on sache tracer une perpendiculaire, sans autre secours que la règle et le compas ; cela est même indispensable dans le cas où la perpendiculaire doit avoir une grande longueur ; car alors le plus léger défaut dans les instrumens, conduirait à des erreurs fort graves. Le procédé repose sur les principes suivans. »

41. *Tout point d'une perpendiculaire* AB *au milieu* A *d'une droite* CD, *est également éloigné des deux extrémités* C, D *de cette droite* (P. II, F. 2).

Soit, pour le démontrer, le point E pris arbitrairement sur AB. Sa distance à C sera la longueur de la droite CE, et sa distance à D, la longueur de la droite DE. Il faut donc faire voir que ces deux droites sont égales. Regardons AB comme une charnière qui unit les deux angles BAD, BAC, et faisons tourner l'angle droit BAD, par exemple, jusqu'à ce qu'il se trouve rabattu sur l'angle droit BAC. Comme ces deux angles sont égaux (37) et qu'ils ont un côté commun AB, le côté AD de l'un se rabattra nécessairement, dans toute sa longueur, sur le côté AC de l'autre, et parce que AD égale AC, le point D tombera sur C. Or, le point E qui est sur la charnière même, n'aura pas bougé. Par conséquent, ED recouvrira exactement EC, ce qui montre que ces deux droites sont égales.

42. *Tout point* A *pris hors de la perpendiculaire* BC *au milieu d'une droite* DE, *est inégalement éloigné des extrémités* D, E *de cette droite* (P. II, F. 3); c'est-à-dire que les concourantes AD, AE ne sont pas égales.

Joignons E avec le point F où AD coupe BC; AE sera plus courte que la ligne brisée AFE terminée aux mêmes points A, E (2). Mais, FE est égale à FD, en vertu du principe précédent. Donc, AE est aussi plus courte que AFD ou AD.

43. Il suit des deux derniers numéros que *tout point marqué à égales distances des deux extrémités d'une droite, appartient nécessairement à la perpendiculaire au milieu de cette droite.* Ce principe est souvent appliqué dans la théorie et dans la pratique; on l'énonce quelquefois en disant que la *perpendiculaire au milieu d'une droite, est* LE LIEU *où se trouvent tout point également éloigné des deux extrémités de cette droite.*

Une concourante CD perpendiculaire au milieu d'une droite AB (P. II, F. 4), est l'*axe de symétrie* de cette droite. On l'appelle ainsi, parce que la moitié AE et chacun de ses points étant placés, par rapport à CD, exactement de la même manière que la moitié BE et chacun de ses points correspondans, il y a *symétrie* dans la figure.

PROBL. (*a*): *Élever une perpendiculaire au milieu d'une droite* AB (P. II, F. 4).

De chaque extrémité A, B et d'un rayon visiblement plus grand que la moitié de AB, décrivez deux petits arcs, l'un au-dessus, l'autre au-dessous de la droite donnée. Les points C, D où ces arcs se couperont deux à deux, appartiendront à la perpendiculaire au milieu de AB, et il ne s'agira plus que de les joindre par la droite CD.

Il est prescrit de prendre le rayon des arcs, plus grand que la moitié de AB, parce que s'il était égal à cette moitié, les arcs n'auraient de commun qu'un seul point qui se trouverait précisément sur la droite donnée (*Voy.* le *tracé des cercles qui se touchent*), et que si le rayon était encore moindre, les arcs entièrement séparés, ne donneraient aucun point.

PROBL. (*b*) : *Trouver le milieu* E *d'une droite donnée ou diviser une droite donnée en deux parties égales* AE, EB (P. I, F. 4).

Exécutez le tracé précédent.

Beaucoup d'ouvriers ont l'habitude de résoudre ce problème par tâtonnemens : ils écartent ou ils rapprochent les deux pointes du compas, jusqu'à ce qu'ils trouvent une ouverture qui puisse être portée sensiblement deux fois de A en B. Mais ce procédé de la routine est certainement plus long que le tracé géométrique qui précède, et le résultat n'en est jamais bien exact, parce que, impatienté de ne pas rencontrer juste, après plusieurs tentatives, on se contente d'un à peu près, pour perdre moins de temps.

PROBL. (*c*) : *Élever une perpendiculaire en un point* A *d'une droite donnée* BC (P. II, F. 5), sans faire usage de l'équerre.

Je pose une des pointes du compas en A et, avec l'autre, je marque sur BC, deux points D, E également éloignés de A ; puis, du point D, je décris, avec une ouverture de compas plus grande que la précédente, un petit arc, au-dessus ou au-dessous de BC ; du point E, avec le même rayon, je décris un autre petit arc qui coupe le premier en F ; et il ne me reste plus qu'à joindre F et A, pour avoir la perpendiculaire demandée AF.

Il est visible, en effet, que F est autant éloigné de E que de D; par conséquent, il appartient à la perpendiculaire au milieu A de DE.

PROBL. (*d*). : *D'un point* A *donné hors d'une droite* BC, *abaisser une perpendiculaire sur cette droite* (P. II, F. 6).

De A comme centre et d'un rayon quelconque, je décris un arc qui coupe BC en deux points D, E. Alors, A se trouve également éloigné de D et de E, et par suite, il appartient à la perpendiculaire au milieu de DE. Si donc je marque un second point qui soit dans le même cas, j'aurai, en le joignant avec A, la perpendiculaire au milieu de DE, laquelle sera aussi celle qu'on cherche. Or, pour trouver un deuxième point également éloigné de D et de E, il ne s'agit que d'opérer comme dans le probl. (*c*), c'est-à-dire de décrire un arc de chacun de ces points, avec un rayon plus grand que la moitié de DE. On obtiendra par là le point F, par exemple, et la perpendiculaire AF.

Il est toujours mieux de marquer le point F du côté de DE où ne se trouve pas le point donné A ; car plus les points directeurs d'une perpendiculaire sont éloignés l'un de l'autre, moins il peut y avoir de différence entre les angles qu'elle forme, ou moins elle s'écarte de la vraie perpendiculaire.

PROBL. (*e*) : *Elever une perpendiculaire à l'extrémité* A *d'une droite* AB *qu'on peut prolonger* (P. II, F. 7).

Prolongez AB d'une longueur AD, par exemple, et portez AD de A en C. Alors, le point A où doit être élevée la perpendiculaire, se trouvera le milieu de CD, et il ne restera plus qu'à suivre le procédé du probl. (c), pour trouver le point E de la perpendiculaire AE.

Il est à observer que, *dans tous ces tracés*, les petits arcs doivent se couper, à peu près comme deux droites d'équerre, afin que leur intersection pouvant être marquée très-exactement, détermine une concourante qui ne diffère pas sensiblement de la vraie perpendiculaire, quelque loin qu'on la prolonge. Or, les deux petits arcs se couperont presque d'équerre, si vous prenez leur rayon tel que la distance EC soit à peu près celle de E à leurs centres (F. 4)

Il est facile de concevoir qu'en général l'intersection de deux lignes ne peut être marquée avec précision, si vers ce point, elles sont très-rapprochées : à cause de la petite largeur qu'on est obligé de leur donner, pour les rendre visibles, elles semblent alors se confondre, jusqu'à une certaine distance, de chaque côté de leur vraie rencontre, et l'œil embarrassé pour déterminer, entre tous les points qui lui paraissent communs, le seul qui le soit en effet, peut fort bien commettre une légère erreur.

« Nous donnerons, au chapitre *des sécantes combinées*, le moyen d'élever une perpendiculaire à l'extrémité d'une droite qu'on ne peut prolonger. »

Applications : Les problèmes précédens se présentent souvent dans la pratique. On ne peut scier une pièce de bois carrément, sans tirer un trait d'équerre ou sans tracer une perpendiculaire à l'une des arêtes ; on ne peut faire une mortaise ni un tenon, sans mener deux perpendiculaires à l'une des lignes qui figurent les longs bords.

« Le tailleur de pierres est souvent obligé, pour limiter le parement qu'il vient de dégauchir, de tirer quatre droites d'équerre, avant d'exécuter de nouvelles ciselures. »

« Le serrurier a sans cesse à marquer des perpendiculaires, pour diriger sa lime. »

« Si le relieur n'a pas soin de rogner un livre selon une droite qui soit d'équerre avec le pli des feuilles, les volumes sont difformes, et, placés sur un rayon de bibliothèque, les uns penchent en avant, les autres s'envont en arrière. »

« Je ne finirais pas, si je voulais énumérer tous les cas où l'industrie a besoin de perpendiculaires. Mais c'est sur-tout dans le dessin des plans d'architecture et de machines, dans la construction des épures de charpenterie et de coupe des pierres, que les perpendiculaires jouent un grand rôle : les procédés qui précèdent, sont souvent indispensables à leur tracé. »

44. Parmi les perpendiculaires, il en est de fort remarquables : ce sont toutes celles qu'on peut mener à une verticale (page 11). On les appelle *horizontales* en géométrie, et *lignes de niveau* dans plusieurs arts. Ainsi, *toute horizontale est perpendiculaire à la*

verticale qui la rencontre; toute verticale est perpendiculaire à l'horizontale qu'elle coupe (36).

Mais, observez que toutes les droites perpendiculaires à une horizontale ne sont pas des verticales : de toutes les droites qui rencontrent l'horizontale d'équerre et au même point, il n'y en a qu'une qui ait la direction du fil-à-plomb ; cela vient de ce que toute verticale prolongée passe par le point milieu de la terre, et de ce qu'il ne peut y avoir deux droites différentes qui passent à la fois par ce point et par celui de l'horizontale, vu que des droites qui ont deux points communs, se confondent.

L'horizontale, au contraire, n'est assujettie à passer par aucun point déterminé : il suffit pour qu'une droite ait ce nom, qu'elle soit d'équerre sur le fil-à-plomb ; or, autour du même point de ce fil, on peut imaginer une foule de droites qui satisfassent à cette condition. Donc, *par un point quelconque, on peut mener autant d'horizontales qu'on veut, tandis qu'on ne peut tirer qu'une seule verticale par ce point.*

Applications : Voilà pourquoi, lorsqu'on pose une pierre de taille de manière qu'une des faces soit de niveau, on trouve sur cette face deux arêtes horizontales qui se rencontrent, tandis qu'au point de leur intersection, il n'y a et ne peut y avoir qu'une seule arête verticale.

« Il en est de même d'un poinçon de charpente et d'un montant de menuiserie qu'on place d'aplomb. Des trois arêtes qui se coupent d'équerre au même point, il y en a deux horizontales et la troisième seule est verticale. »

« Dans une roue de manège qui doit être de niveau, toutes les droites menées de l'une des arêtes circulaires au centre de cette arête, sont horizontales, et, à ce même centre, il n'y a que l'axe de rotation de l'arbre qui soit vertical ou d'aplomb. »

Lois de la nature : La nature renferme des surfaces, celles des eaux tranquilles, qui nous offrent une multitude d'horizontales ; du moins, si, en suivant une pareille surface, on en joint, par la ligne la plus courte, deux points quelconques dont la distance soit seulement de quelques toises, cette ligne ne diffère de l'horizontale en chacun des deux points, que d'une quantité tout-à-fait inappréciable. Aussi dit-on que la surface d'une eau qui ne coule point est de niveau.

« L'eau, comme tous les liquides, tend sans cesse à former une seule surface de niveau, et de là vient que si, dans son cours, elle rencontre un obstacle, elle peut s'élever contre ce barrage, jusqu'à ce qu'elle ait atteint la hauteur de sa source. C'est là le fondement de l'art du fontainier ; c'est là ce qui produit les jets d'eau de nos jardins, et ce qui permet d'amener dans les réservoirs élevés de nos fontaines publiques, l'eau que fournissent les coteaux environnans. Il suffit, pour obtenir cet important résultat, d'offrir au liquide, un conduit en tuyau, qui descende d'abord des coteaux dans la plaine, et qui remonte ensuite jusqu'au réservoir. »

« *Niveau d'eau* : L'instrument appelé *niveau d'eau* repose aussi sur le même fait. Vous voyez que sa pièce principale est un tube en fer-blanc, deux fois coudé, comme le conduit d'une fontaine (P. II, F. 8). Ce tube tient à une douille, au moyen de laquelle on peut poser le niveau sur un pivot à trois pieds. Les deux petites branches du tube portent chacune une fiole en verre, ouverte par le haut. Si vous versez dans le tube assez d'eau pour que les fioles soient en parties remplies, les deux petites faces planes qu'y formera le liquide seront de niveau, et toute droite qui s'appuiera sur l'une et sur l'autre à la fois, sera une horizontale. »

On se sert du niveau d'eau, pour déterminer de combien un point est plus élevé qu'un autre qui n'est pas situé sur la même verticale, ou qui ne se trouve pas au-dessous du premier. A cet effet, on fait tenir d'aplomb une longue règle divisée en pieds, pouces, etc., ou en décimètres, centimètres, etc, l'une des extrémités ou l'une des divisions étant sur l'un des points, sur A par exemple. Visant alors la règle, selon l'une des horizontales de l'instrument, on voit, par les divisions, la distance verticale de A à B, point où l'horizontale CD rencontre la règle, et qu'on marque au moyen d'un curseur moitié noir, moitié blanc, appelé *voyant*. Supposons que cette distance soit de 6 pieds, et que la même opération faite sur le point E, ait montré qu'une distance de 2 pieds sépare ce point, de la ligne F du voyant. La différence entre les hauteurs de A et de E au-dessus de l'horizontale CF, égalera 4 pieds, et il est clair que A sera de 4 pieds plus élevé verticalement que E.

« Si A ou E se trouvait au-dessous de l'horizontale, il faudrait ajouter les deux hauteurs, pour avoir la hauteur de l'un au-dessus de l'autre, ou *leur différence de niveau*. »

« Lorsqu'il n'est pas possible de placer le niveau en un point d'où l'on puisse voir à la fois les points A, B dont on veut prendre la différence de niveau (P. II, F. 9), on choisit, pour première *station* de l'instrument, un point N d'où l'on puisse apercevoir à la fois A et un troisième point C, et pour seconde station un point N' d'où l'on puisse découvrir à la fois B et C. Puis, ayant pris la distance verticale de A à l'horizontale du niveau d'eau, distance qui est nommée *cote verticale*, on dirige l'instrument vers C; pour prendre la distance de ce point à la même droite. Une soustraction ou une addition donne alors la différence de niveau qui existe entre A et C : supposons que C soit élevé de 2^m au-dessus de A. »

« Opérant ensuite de la même manière en N', on trouve, par exemple, que B est de $1^m,5$ au-dessous de C. Il s'ensuit que l'élévation de B au-dessus de A est $2^m - 1^m,5 = 0^m,5$. »

« Si B se trouvait, par exemple, de $0^m,3$ au-dessus de C, on aurait pour l'élévation de B au-dessus de A, $2^m + 0^m,3 = 2^m,3$. »

« Le point C, pris pour servir ainsi à la comparaison des niveaux de deux autres, est dit point de *repère*, c'est-à-dire point qui fait *retrouver* le niveau d'un autre B, par rapport à un troisième A. »

Obliques.

Tout angle plus petit que l'angle droit, est dit *aigu*; un angle plus grand que le droit, est dit *obtus*, et les droites qui forment entre elles un angle de l'une de ces deux espèces, sont *obliques* l'une par rapport à l'autre. Les obliques ont des propriétés qu'il est fort important de connaître.

45. *Une droite* AB, *oblique sur une autre* CD, *fait toujours avec elle deux angles, l'un aigu* ABD; *l'autre obtus* ABC, *dont la somme égale celle de deux angles droits* (P. II, F. 10).

Pour s'en convaincre, il suffit de décrire au-dessus de CD, une demi-circonférence CAD qui ait B pour centre. Les arcs CA et AD des deux angles formeront à eux deux cette demi-circonférence ou 180°, et, par conséquent, la somme des indications de ces deux angles sera égale à celle des indications de deux angles droits.

46. *Toute oblique* AB *menée d'un point* A *à une droite* BC, *est plus longue que la perpendiculaire* AD *abaissée du même point* A *sur* BC (P. II, F. 11).

Pour le démontrer, nous prolongerons la perpendiculaire, de manière que DE égale AD, et nous tirerons la droite BE. Alors, ABE ligne brisée, sera plus longue que AE ligne droite comprise entre les deux mêmes points. Or, si l'on rabat (25) BED sur BAD, DE s'appliquera sur DA, puisque les angles BDE, BDA sont égaux comme angles droits; le point E tombera sur A, puisque DE égale DA; et le point B qui n'aura pas bougé, sera encore commun à BE et à BA. Ces deux droites seront donc confondues dans toute leur longueur; elles sont donc égales. Il s'ensuit que AB est la moitié de ABE, comme AD est la moitié de AE. Mais, si une chose est plus grande qu'une autre, la moitié de la première est aussi plus grande que celle de la seconde; par conséquent, AB est plus longue que AD.

47. Le principe précédent revient à celui-ci : *La perpendiculaire est plus courte que toute oblique partie du même point*, ou à cet autre : *La perpendiculaire est le plus court chemin pour aller d'un point à une droite.*

Il s'ensuit que *la distance d'un point à une droite est la longueur de la perpendiculaire abaissée de ce point sur la droite.*

D'après ces principes et le n° 44, *la ligne de plus grande pente d'une face plane* (page 11), *est la perpendiculaire abaissée d'un point de cette face, sur l'une quelconque des horizontales qu'on y peut tracer.*

Application : On dépense toujours plus de bois, de fer, etc., en faisant des supports obliques, qu'en les plaçant d'équerre par rapport aux pièces qu'ils soutiennent.

48. Deux obliques CE, DE parties d'un point E (P. II, F. 2), dont les pieds C, D se trouvent également éloignés de celui de la perpendiculaire EA, abaissée du même point E, sont égales entre elles ; car A est le milieu de CD, puisque AC égale AD, et le point E est également éloigné de C et de D, puisqu'il appartient à la perpendiculaire en A (43).

Les obliques qui sont placées comme EC et DE, sont dites *également éloignées de la perpendiculaire*. Donc, *deux obliques également éloignées de la perpendiculaire, sont égales.*

49. *De deux obliques* AB, AC *qui partent du même point* A, AC *la plus éloignée de la perpendiculaire* AD, *est la plus longue* (P. II, F. 12).

On le verra facilement, si l'on élève une perpendiculaire EF au milieu de BC ; car alors FB sera égale à FC (48), AFB égalera AFC ou AC, et la droite AB sera plus courte que la ligne brisée AFB.

50. *Deux obliques égales, qui partent du même point, sont également éloignées de la perpendiculaire ;* car, si l'écartement de leurs pieds n'était pas le même, elles seraient inégales, d'après le principe précédent. Ainsi, les distances AC, AD (P. II, F. 2) sont égales, s'il y a égalité entre CE et DE.

51. La superposition par rabattement montrerait que *deux obliques égales menées d'un même point* E, *sur une droite, font avec cette droite des angles égaux* ECA, EDA, *et que les deux angles compris entre elles et la perpendiculaire sont aussi égaux.*

52. *Si deux obliques* CE, DE *sont égales et également éloignées du pied* A *d'une droite* EA *qui part du même point qu'elles, cette droite est perpendiculaire* (P. II, F. 2) ; car passant par deux points A, E également éloignés des extrémités de CD, la droite EA est nécessairement perpendiculaire au milieu de CD (43).

53. *D'un point, on ne peut mener sur une droite donnée, que deux droites égales.* Ainsi, on ne peut mener de E sur CD, que les deux droites égales EC, ED (P. II, F. 13) : une troisième EF serait moins écartée de la perpendiculaire EA, que les autres et, par conséquent, moins longue (49).

Appl. (*a*) : Les principes qui viennent d'être démontrés, font voir que, pour faire cheminer un corps B (P. II, F. 11) sur une droite BC perpendiculaire au milieu de celle AE qui unit deux treuils, deux cabestans, etc., il faut y attacher deux cordes et enrouler des cordes toujours également; car, pour que B se rapproche de D en suivant BD, il est nécessaire que les obliques BA, BE diminuent et que pourtant elles restent égales entre elles.

« Si des points A, E, on voulait éloigner de D le corps B, selon le prolongement de BD, il faudrait y fixer des barres et les rendre de moins en moins obliques, en les alongeant également. Cette application se présente dans la mécanique pratique. »

Appl. (b) : On peut, pour tracer une perpendiculaire sur le terrain, faire usage de la propriété du n° 52. Disposez quatre ficelles comme les droites de la figure 2 (P. II) ; c'est-à-dire, de manière que la ficelle CD soit partagée en deux parties égales par le nœud de BA, et que les ficelles EC, ED soient égales. Appliquez CD sur la droite donnée, en posant le nœud A sur le point où doit aboutir la perpendiculaire. Tendez enfin BA, CE et DE; BA marquera la direction de la perpendiculaire, et vous pourrez tracer cette droite. Mais, ce moyen n'est pas d'une grande exactitude, à cause des alongemens inégaux qui s'opèrent dans les cordes par un temps sec, et des raccourcissemens différens qui ont lieu par un temps humide.

Appl. (c) : La même propriété sert encore aux charpentiers, aux menuisiers, aux tailleurs de pierres, aux dessinateurs, etc, pour vérifier les perpendiculaires. Ils marquent sur l'une CD (P. II, F. 2), avec la même ouverture de compas et à partir du pied A de l'autre, deux points C, D; puis, ils prennent la distance de l'un de ces points, de C par exemple, à un point E de AB, et la portent de E en un autre point de CD. S'ils arrivent juste au point D, AB est perpendiculaire; s'ils n'y arrivent pas, l'angle BAD n'est pas droit. Mais, pour que cette vérification soit sûre, il faut ne pas prendre C, D, E très-près de A; car une différence sensible entre l'angle BAD et l'angle droit, pourrait n'en pas produire une appréciable entre EC et DE, si l'on s'écartait peu de A.

Appl. (d) : Le *niveau de maçon* est ordinairement fondé sur les propriétés des obliques. Il se compose de deux règles en bois AB, AC assemblées par une de leurs extrémités (P. II, F. 14), d'une traverse DE, et d'un fil-à-plomb attaché près du sommet A de l'angle que font les règles. Les arêtes AB, AC sont égales; les points B, F, G, C sont en ligne droite, et sur la traverse, se trouve marquée une droite K, qui prolongée passerait par le milieu de BC, par le point d'attache du fil et par le sommet A. Il s'ensuit que cette droite est perpendiculaire à BC (52); on l'appelle *ligne-de-foi*.

« D'après cette description, si l'on place de champ, sur deux points, une règle bien faite, et qu'on pose l'instrument sur la règle, ces deux points H, I sont de niveau, lorsque le fil-à-plomb couvre la ligne-de-foi; car cette ligne étant alors verticale, BC et par suite HI sont horizontales ou de niveau (44). Au contraire, H par exemple, est plus élevé que I, si le fil tombe entre I et la ligne-de-foi.

« On vérifie de la même manière, toute droite qui est donnée pour horizontale; seulement, la règle n'est pas toujours nécessaire. »

« Nous devons faire remarquer qu'il n'est pas indispensable que, dans le niveau de maçon, les arêtes AB, AC, soient égales. Il suffit que la ligne-de-foi soit perpendiculaire ou d'équerre sur la droite qui joint B et C, et que le point d'attache du fil-à-plomb se trouve sur le prolongement de la ligne K ; le sommet A n'a pas même besoin d'y être. Ainsi, l'instrument représenté par la figure 15, serait un niveau tout aussi bon, que celui de la figure 14. »

« Les pieds B et C du niveau de maçon se dégradent assez promptement et inégalement ; l'instrument a donc bientôt perdu sa justesse. Il faudrait, pour prévenir cette détérioration ou du moins pour la retarder de beaucoup, garnir les pieds de deux plaques métalliques. Malgré cette précaution, l'instrument ne serait pas encore aussi exact à beaucoup près, qu'un niveau à bulle d'air qui aurait la longueur de BC, parce que tant sec que soit le bois des trois règles, il travaille toujours par la sécheresse et par l'humidité, et il n'est guères possible que les raccourcissemens et les alongemens se fassent de manière que la ligne-de-foi et le point d'attache du fil restent sur une même perpendiculaire à BC. Un niveau de maçon en fer ou en laiton, ne donnerait guère plus de précision : ce serait alors la chaleur qui alongerait les règles, et le froid qui les raccourcirait. »

« Le niveau de maçon a donc grandement besoin d'être vérifié, avant d'être employé pour des opérations qui exigent de l'exactitude. Voici comment vous pouvez l'éprouver. Placez-le sur une règle AB posée de champ (P. II, F. 16) ; haussez ou baissez l'une des extrémités de la règle avec un coin, jusqu'à ce que le fil-à-plomb couvre la ligne-de-foi ; visez, selon le dessus de la règle, un jalon CD placé à quelque distance, et faites marquer le point E où ce jalon est coupé par le prolongement de AB. Retournez ensuite l'instrument et faites les mêmes opérations. »

« Si le niveau est juste, vous retrouverez le point E. Mais s'il est faux, si, par exemple, il vous a forcé la première fois, à élever B plus que A, la nouvelle visée vous donnera sur le jalon, un point F situé plus bas que E, parce qu'au second coup de niveau, vous serez obligé d'élever A plus que B, pour amener le fil-à-plomb sur la ligne-de-foi. »

« Voici une autre vérification plus expéditive, mais qui ne peut indiquer une légère inexactitude. Placez le niveau comme ci-dessus, retournez-le dès que le fil-à-plomb couvre la ligne-de-foi. Si dans cette nouvelle position, il la couvre encore sensiblement, le niveau est suffisamment juste pour vérifier de courtes horizontales, ou pour mettre de niveau des arêtes peu longues, par exemple, celles des pierres de taille. S'il s'agit de grandes droites, le premier procédé vaut mieux. »

« La vérification des instrumens est une chose que tout artiste, tout ouvrier doit savoir faire : sans instrumens exacts, point de précision, point d'ouvrage parfait ; on ne saurait le répéter trop souvent. »

LOI DE LA NATURE (*a*) : Vous avez vu, par ce qui a été exposé jusqu'ici, que les angles sont employés dans un grand nombre de procédés des arts. Ils ne jouent pas un rôle moins important dans les phénomènes naturels. La lumière qui chemine en ligne droite, comme je vous l'ai dit page 10, *se brise* ou change de direction, dès qu'elle rencontre obliquement un obstacle, un corps : elle suit encore une ligne droite, mais celle-ci fait un angle avec la première. Il est même plus exact de dire que la lumière suit alors deux chemins droits différens du premier : l'un, selon lequel une portion se *réfléchit*, comme fait une bille qui frappe obliquement une bande de billard; l'autre, selon lequel le reste pénètre dans le corps ; ce dernier phénomène est appelé *réfraction*.

» Il n'y a pas réfraction, quand un rayon lumineux tombe d'équerre sur la face d'un corps : une portion de ce rayon pénètre bien dans le corps, mais elle y pénètre en continuant de suivre la même ligne droite; l'autre portion se réfléchit selon une direction tout-à-fait contraire. »

« La réflexion et la réfraction de la lumière sont deux phénomènes qui en produisent un grand nombre d'autres. »

« C'est parce que la lumière est réfléchie ou renvoyée par les objets qui nous entourent, que nous voyons ces objets. »

« C'est parce que la lumière que renvoie un meuble vers un miroir, se réfléchit sur la glace, que nous y voyons l'image de ce meuble. C'est encore parce que cette lumière peut se réfléchir en faisant un angle avec sa première direction, que nous voyons la même image, lorsque le meuble ne se trouve pas placé précisément devant la glace. »

« C'est enfin parce que la lumière se réfléchit presque en totalité, quand elle frappe une surface blanche, bien unie, bien polie, que nous pouvons augmenter de beaucoup, sur un point donné, la clarté qu'y répandent nos lampes, en les garnissant de *réflecteurs* ou réverbères. »

LOI (*b*) : La chose encore inconnue qui produit la sensation de la chaleur qu'on nomme le *calorique*, est assujettie à se réfléchir comme la lumière. Voilà pourquoi les fruits des arbres plantés contre un mur, parviennent à la maturité bien avant les autres. Voilà pourquoi l'on peut au moyen de deux miroirs d'une certaine forme, incendier un corps placé à plusieurs toises de quelques charbons ardens.

« L'histoire nous rapporte même qu'Archimède, grand géomètre de l'antiquité, mit le feu aux vaisseaux des romains qui assiégeaient Syracuse, sa partie, en dirigeant vers la flotte tous les rayons du Soleil qu'il pouvait recevoir sur un vaste miroir courbe. »

« De la réflexion du calorique résulte encore qu'on doit porter des habits blancs pendant les fortes chaleurs ; car il est de fait que les corps blancs, à égalité de poli, renvoient mieux la lumière et le calorique que les autres. Il faudrait même se vêtir en blanc durant l'hiver, pour renvoyer à notre corps une plus grande portion du calorique qui s'en échappe sans cesse, et que ne saurait remplacer le peu de chaleur qu'il reçoit alors du Soleil. Les étoffes noires sont les moins favorables, soit par le chaud, soit par le froid, parce que le noir ne réfléchit presque pas la chaleur. Il ne renvoie non plus que très-peu de lumière ; si nous voyons les corps noirs, c'est plutôt parce qu'ils contrastent avec les autres et s'en détachent, que parce qu'ils réfléchissent les rayons qui leur arrivent. »

Loi (c) : Les effets produits par la réfraction de la lumière sont peut-être encore plus importans et plus admirables que ceux de sa réflexion. Vous pouvez reconnaître très-facilement par vous-mêmes, que cette réfraction n'est point une chimère, et qu'en effet la lumière change de direction ou fait un angle, en passant d'un corps dans un autre. Il ne s'agit que de plonger à moitié, dans l'eau, un bâton bien droit : il vous paraîtra brisé au point même où il entre dans le liquide, si vous le regardez de côté, ou, ce qui est la même chose, la partie plongée vous semblera plus voisine de la surface de l'eau, qu'elle ne l'est réellement. D'où cela peut-il provenir? si ce n'est de ce que la lumière renvoyée obliquement par la partie plongée, fait un angle en passant de l'eau dans l'air, et se rapproche réellement de la surface, pour aller du point où elle sort, à votre œil. »

« C'est le contraire qui doit arriver et qui arrive en effet, quand la lumière passe obliquement de l'air dans l'eau ou dans tout autre corps plus pesant que l'air : alors, elle s'écarte de la surface de ce corps aussitôt qu'elle y a pénétré. Elle se conduit donc à l'opposite d'une pierre, d'une balle ; car, si vous tiriez obliquement une balle dans l'eau, elle se relève toujours, de sorte qu'il faut viser en deçà de l'objet qu'on veut atteindre. »

« La figure 17 (P. II) montre un rayon de lumière AB qui est dans l'air et qui entre dans l'eau en B. Là, il fait l'angle ABC, en s'écartant de BE surface du liquide. La droite BC indique un rayon de lumière qui sort de l'eau en B et fait un angle CBA, en se rapprochant de BD, pour arriver à l'œil placé en A, dans l'air. »

« Il suit de la réfraction que, si les rayons du Soleil qui vont en ligne droite, de cet astre jusqu'à l'air dont la Terre est entourée, y entrent obliquement, ils s'éloignent de la surface de cet air, en se rapprochant de nous. Et comme l'air est d'autant plus pesant qu'il est pris plus près de terre, les rayons obliques du Soleil doivent se rapprocher de nous de plus en plus, à mesure qu'ils s'enfoncent dans l'air. Il en résulte qu'ils se courbent, et c'est là ce qui produit l'aurore et le crépuscule, ou ce qui fait que nous jouissons de la lumière du Soleil avant le lever et après le coucher de cet astre. Si cette lumière nous arrivait véritablement en ligne droite, nous ne verrions le jour qu'en apercevant le Soleil, et nous aurions la nuit dès que nous ne le verrions plus. »

« Toutefois, on peut, dans la plupart des circonstances, considérer la lumière du Soleil, et à plus forte raison celle que nous renvoient les corps terrestres qu'il éclaire, comme cheminant en ligne droite dans l'air, ainsi que je l'ai dit. Ce n'est guère que dans le cas où il s'agit de baser des calculs sur les lignes que suivent les rayons lumineux, qu'il n'est plus permis de regarder ces lignes comme droites. »

TRACÉ DES PARALLÈLES.

« Pour suivre le tableau que nous avons formé du tracé des lignes (page 7), nous devons considérer maintenant les droites qui ne se rencontrent pas. »

Deux lignes droites qui, placées sur le même tableau, sur le même plan, ne se rencontrent point, quelque loin qu'on les prolonge, sont dites *parallèles*.

54. *Deux droites perpendiculaires à une troisième ne se rencontrent jamais ou sont parallèles.*

Admettons, pour un moment, qu'elles puissent se rencontrer et voyons ce qui en résultera. Supposons que AB et AC (P. II, F. 18) qui se rencontrent en un point quelconque A, soient toutes deux perpendiculaires à BC. Nous pourrons toujours marquer un point D entre B et C; nous pourrons aussi porter BD de B en E, et CD de C en F; nous pourrons enfin tirer les droites AD, AE, AF. Alors, AD et AE seront deux obliques également éloignées de la perpendiculaire AB, et par conséquent égales (48). Il en sera de même de AD et AF, puisque AC est supposée perpendiculaire à EF. Ainsi, AD sera égale en même temps à AE et à AF, et l'on aura trois droites égales menées du même point A sur une droite EF, ce qui est impossible (53). Il est donc impossible aussi que deux perpendiculaires à une même droite se rencontrent.

55. La démonstration précédente fait voir encore que *d'un point, on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire à une droite.*

56. De même, *on ne peut tracer, par un point donné* A, *qu'une seule parallèle à une droite donnée* BC (P. II, F. 19).

Abaissons de A une perpendiculaire AD sur BC et prolongeons-la fort loin; puis, élevons au point A, une perpendiculaire sur AD. Cette perpendiculaire AE sera parallèle à BC (54). Il faut donc faire voir que toute autre droite AF menée par le point A, ne peut être parallèle à BC, ou bien qu'étant prolongée elle la coupe. D'abord, AF faisant un angle avec AE, entre nécessairement soit d'un côté, soit de l'autre, dans l'espace compris entre les parallèles AE, BC. Ensuite, quelque petite que soit l'indication de l'angle EAF, elle sera contenue un certain nombre de fois limité dans 90°, indication de l'angle droit EAD. Il ne faudra donc que répéter l'angle EAF ce même nombre de fois, pour couvrir l'espace de l'angle droit EAD. Maintenant, prenons CG, GH; HI, etc., égales à AC, et par les points G, H, I, etc., élevons des perpendiculaires sur AD. L'espace non terminé EACB pourra s'appliquer sur chacun des espaces non terminés BCGK, KGHL, etc. Tous ces espaces seront donc égaux séparément à EACB. Or, il est visible qu'on pourra les rendre aussi nombreux qu'on voudra, sans jamais couvrir entièrement l'espace de l'angle droit EAD : après celui auquel on s'arrêterait, on pourrait encore en faire un autre. Donc, rien ne limite le nombre de fois que l'espace EACB est contenu dans l'angle droit EAD. Il suit de là que cet espace, quelque grand qu'on le suppose, est bien plus petit que l'angle EAF, si petite que soit l'indication de cet angle. D'après cela, il faut bien que AF passe au-delà de BC ou coupe cette droite ; car autrement, l'angle EAF serait contenu tout entier dans l'espace EACB plus petit que lui, ce qui ne peut être. Donc enfin, toute droite différente de AE, qu'on tirera par le point A, ne saurait être parallèle à BC.

57. *Toute perpendiculaire* AE *à une droite* BC *est aussi perpendiculaire à la parallèle* AD *de cette droite* (P. II, F. 20).

Si AE n'était pas perpendiculaire à AD, AD ne le serait pas non plus à AE, et l'on pourrait élever au point A, une perpendiculaire sur AE. Cette perpendiculaire serait parallèle à BC (54), et l'on aurait deux parallèles à BC, passant par le même point A, ce qui est impossible (56).

58. Une droite qui *traverse* d'une manière quelconque, le système que forment plusieurs autres droites, est dite, pour plus de brièveté, *transversale* de ce système, par exemple, AB est la transversale du système des deux parallèles CD, EF (P. II, F. 21).

Il est fort utile de comparer les angles que deux parallèles font avec une transversale. Pour rendre la comparaison plus facile, on a imposé à ces angles, des noms qui en indiquent les positions. Ainsi, les angles CGB, AHF sont appelés *alternes-internes*, ce qui signifie qu'ils se trouvent l'un d'un côté de la transversale AB, l'autre du côté opposé, et que tous deux commencent entre les parallèles.

Les angles alternes-internes sont égaux.

Pour le faire voir, menons par le point I, milieu de GH, IK perpendiculaire à CD ; elle sera aussi perpendiculaire sur EF, en vertu du principe précédent. Enlevons la figure d'équerre HIL et posons-la sur la figure IGK, de façon que IH recouvre IG qui lui est égale et que H tombe sur G. La droite IL prendra la direction de IK, puisque les angles LIH, GIK sont égaux, comme étant opposés par le sommet (35) ; LH prendra la direction de KG, puisqu'alors elles seront toutes deux perpendiculaires à IK, et que, d'un même point, on ne peut abaisser deux perpendiculaires différentes sur une droite (55). Par conséquent, le sommet et les deux côtés de l'angle IHL ou AHF, se trouveront confondus avec le sommet et les côtés de l'angle KGI ou CGB ; d'où il suit que ces deux angles sont égaux.

59. Réciproquement, *si les angles alternes-internes* CGB, AHF

sont égaux, les droites CD, EF *coupées par la transversale, sont parallèles.*

Car, si elles ne l'étaient pas, on pourrait mener par G, une droite GI qui fût parallèle à EF (P. II, F. 22). Alors, l'angle IGB serait égal à AHF, d'après le dernier principe, et, par conséquent, IGB serait égal aussi à CGB, ce qui est visiblement impossible, puisque IGB n'est qu'une partie de CGB.

60. On appelle *angles correspondans*, ceux qui commencent l'un en dehors, l'autre en dedans des parallèles, et se trouvent du même côté, par rapport à la transversale AB, comme AGD, AHF (P. II, F. 21).

Les angles correspondans sont égaux; Car AGD est égal à CGH son opposé par le sommet (35), et CGH est égal à AHF, parce qu'ils sont alternes-internes (58).

On démontrerait, en suivant une marche semblable à celle du n° 59, que *si les angles correspondans sont égaux, les droites coupées par la transversale, sont parallèles.*

61. On appelle angles *alternes-externes*, ceux qui commencent tous deux en dehors des parallèles, l'un d'un côté de la transversale AB, l'autre du côté opposé, comme AGD, BHE (P. II, F. 21).

Les angles alternes-externes sont égaux; car BHE est égal à l'angle AHF son opposé par le sommet, AGD est égal à AHF son correspondant, et deux choses qui sont égales chacune à une troisième, sont égales entre elles.

Réciproquement, *si les angles alternes-externes sont égaux, les droites* CD, EF *coupées par la transversale, sont parallèles.* La démonstration serait encore la même qu'au n° 59.

62. Des angles tels que AHF, DGH (P. II, F. 21), qui commencent tous deux entre les parallèles et qui se trouvent du même côté par rapport à la transversale AB, sont nommés *angles internes du même côté.*

Les angles internes du même côté valent en somme deux angles droits; car DGH est égal à l'angle AHE, puisqu'ils sont alternes-internes (58), et AHE plus AHF valent deux angles droits (45).

La réciproque est également vraie; c'est-à-dire que *si les angles internes du même côté valent en somme deux angles droits, les droites coupées par la transversale, sont parallèles.* On le démontre en suivant la marche du n° 59.

63. Enfin, les angles tels que AGD, BHF (P. II, F. 21), qui commencent tous deux en dehors des parallèles et qui se trouvent du même côté par rapport à la transversale AB, sont dits angles *externes du même côté.*

Les angles externes du même côté valent en somme deux angles droits; car BHF est égal à l'angle AGC, parce qu'ils sont alternes-externes (61), et AGD plus AGC valent deux angles droits (45).

Il est vrai aussi que, *si les angles externes du même côté valent en somme deux angles droits, les droites coupées par la transversale, sont parallèles.*

PROBL. (*a*) : C'est sur le principe 60, que repose le procédé à employer, pour résoudre, sans fausse-équerre, le problème (*e*) de la page 33, c'est-à-dire pour *mener, par un point* A *situé hors d'une droite* BC, *une concourante qui fasse un angle* DEF *tracé* (P. II, F. 23).

Faites en un point quelconque G de BC, un angle HGC égal à DEF (prob. *c*, p. 32), et tirez par A, une droite AI parallèle à GH. L'angle AIC sera égal à AGC son correspondant, et par suite, à l'angle donné DEF (*Voyez* plus bas le prob. *c*).

Si le sommet E ne pouvait être marqué, vous meneriez, par un point quelconque de EF, une parallèle KL à l'autre côté; vous auriez alors l'angle KLF qui serait égal à DEF, et vous termineriez comme ci-dessus.

PROBL. (*b*) : C'est encore le principe 60 qui fournit le moyen de résoudre, avec le rapporteur évidé, le problème (*f*) de la page 33, dont l'énoncé est : *Mener, par un point* A *situé hors d'une droite* BC, *une concourante qui fasse un angle dont l'indication seulement est connue* (P. II, F. 24).

Placez le diamètre du rapporteur évidé sur BC (page 27); le centre se trouvera, par exemple, en D. Marquez le point E contre la ligne du limbe qui termine l'indication de l'angle, indication que nous supposerons de 50°. Enlevez l'instrument; joignez D, E; et par le point A, tirez AF parallèlement à DE. AF sera la droite demandée, car les angles correspondans AFC, EDC sont égaux.

PROBL. (*c*): *Tracer, à l'aide de l'équerre, par un point marqué* A, *une parallèle à une droite donnée* BC (P. II, F. 25).

Placez la plus grande arête de l'équerre sur BC, de manière que l'arête moyenne DE soit du même côté que A; appliquez une règle le long de DE, et, en portant les deux instrumens, soit à droite, soit à gauche, agissez de façon que l'arête appliquée de cette règle, passe par A, en même temps que la grande arête de l'équerre couvre BC; faites ensuite glisser l'équerre le long de la règle, jusqu'à ce que le sommet D soit sur A; Enfin, tracez une droite le long de la grande arête AF. Cette droite sera parallèle à BC, puisque les angles correspondans FAD, CDE étant égaux chacun à l'angle D de l'équerre, seront égaux entre eux.

Si l'on voulait une parallèle plus longue que AF, il faudrait, dès que le sommet D serait en A, enlever la règle, sans déranger l'équerre; placer cette règle le long de AF, et s'en servir dans cette position, pour tracer une droite par A, après avoir enlevé l'équerre.

« Ces procédés sont employés par les dessinateurs. Ils montrent qu'on n'a pas besoin d'une équerre juste, pour tracer une parallèle. Il suffit que les arêtes en soient parfaitement droites ; encore n'y aurait-il aucun inconvénient à ce que l'arête DE formât un ou plusieurs creux, et à ce que la troisième arête fût courbe. »

« On peut donc en toute sécurité tracer les parallèles d'un dessin, à l'aide de l'équerre ; mais, comme elle ne mérite pas la même confiance pour le tracé des perpendiculaires, il convient de s'en tenir aux procédés exposés dans les problèmes (*c*), (*d*), (*e*), du n° 43. »

Probl. (*d*) : *Tracer par un point donné* A, *une parallèle à une droite donnée* BC, *quand on n'a point d'équerre ou quand on ne peut en employer* (P. II, F. 26).

D'un point C, pris arbitrairement sur la droite, décrivez un arc qui aille de A à BC ; avec la même ouverture de compas, décrivez de A, un second arc qui parte de C et soit visiblement plus grand que le premier AB ; prenez la corde de AB et portez-la de C en un point D ; enfin, joignez D avec A, et vous aurez la droite AD qui sera parallèle à BC.

Il est facile de s'en convaincre : les arcs AB et CD sont égaux, ayant même rayon et des cordes égales (24) ; par conséquent, les angles alternes-internes ACB, CAD sont aussi égaux (31), et les droites AD, BC coupées par la transversale AC, sont parallèles (59).

Observez que la distance AC doit être bien plus grande que celle du point A à la droite BC, si cette dernière distance est petite ; autrement, on trouverait D très-près de A, et pour peu qu'en traçant AD, on ne plaçât pas la règle précisément sur les points A, D, on obtiendrait une droite qui prolongée finirait par s'écarter beaucoup de la vraie parallèle à BC.

Appl. (*a*) : Le procédé que nous venons de donner, est employé dans le dessin géométrique. On peut même s'en servir pour tracer des parallèles sur un terrain uni. C'est d'un cordeau qu'il faut faire usage alors, pour décrire l'arc CD ; quant à l'arc AB, on peut se contenter d'en marquer l'extrémité B.

Appl. (*b*) : Si le terrain n'était pas uni, il ne serait plus possible d'opérer par arcs de cercle, parce que ces arcs ne se trouvant plus sur le même tableau, ne donneraient pas, par leur égalité, un point B appartenant à la parallèle demandée. On peut, pour ce cas, se servir d'un instrument propre à lever les angles (page 35), ou si l'on n'en possède point, d'une fausse-équerre qu'il est très-facile de construire, dans le lieu même de l'opération. Il suffit, en effet, de pratiquer sur la tête d'un gros piquet, deux entailles droites qui se coupent d'une manière quelconque, ou de fixer en croix, sur le bout d'un bâton, deux morceaux de bois, qui fassent un angle quelconque et qui portent trois épingles plantées perpendiculairement, une au point de croisement, les deux autres vers les extrémités des côtés d'un des quatre angles formés.

« Quant à la manière d'opérer, elle est très-simple aussi. On plante le bâton verticalement, sur la droite donnée BC (P. II, F. 26), en un point C tel, que l'une des droites formées par les épingles passe par le jalon A, l'autre étant dirigée sur un jalon B planté le plus loin possible. Dès qu'on est parvenu à trouver ce point C, on enlève l'instrument, on le remplace par un jalon et l'on se transporte en A. Là, le bâton doit être planté verticalement, de manière qu'une des droites formées par les épingles se trouve dirigée en sens contraire de CB, l'autre passant par le jalon C. Il ne s'agit plus alors que de placer un jalon D verticalement et le plus loin possible, sur le prolongement de la première droite des épingles; l'alignement AD est parallèle à BC, parce que les deux angles alternes-internes ACB, CAD ont été faits égaux. »

Appl. (c) : On peut, dans la pratique, considérer comme parallèles, sans erreur sensible, deux droites de peu de longueur, qui vont se couper fort loin; car il n'y aurait pas de différence appréciable entre l'écartement de ces droites, pris à un bout, et leur écartement pris à l'autre bout.

« Si donc la droite ou l'alignement BC se trouve dirigée vers une étoile facile à remarquer (P. II, F. 26), vous obtiendrez la parallèle à mener par A, en dirigeant de ce point un alignement sur la même étoile. Les deux directions seraient même parallèles aussi loin qu'elles pourraient être prolongées sur terre, car elles ne se couperaient réellement qu'à plus de 7 trillions de lieues, distance des étoiles les plus voisines de notre globe. »

« Vous aurez encore une parallèle à BC, si au moment où l'ombre d'un jalon mince B tombe sur BC, vous tracez une droite AD selon l'ombre d'un autre jalon mince A. »

« Enfin, lorsque AD doit avoir seulement quelques mètres, elle se trouve sensiblement parallèle à BC, si elle est dirigée sur un clocher ou tout autre objet remarquable, éloigné de plusieurs lieues et placé sur l'alignement BC. »

64. *Deux angles sont égaux, quand les côtés de l'un sont parallèles aux côtés de l'autre et dirigés soit dans les mêmes sens, soit en sens contraires.*

Considérons d'abord les deux angles ABC, DEF (P. II, F. 27) qui se trouvent tels, que le côté AB de l'un est parallèle au côté DE de l'autre, que le côté BC du premier est parallèle au côté EF du second, et que les directions sont les mêmes. Pour démontrer que ces deux angles sont égaux, nous prolongerons AB, EF jusqu'à ce que ces droites se rencontrent en un point G. Alors, AG sera transversale par rapport aux deux parallèles BC, GF, et les angles correspondans ABC, AGF seront égaux; FG sera transversale par rapport aux parallèles DE, AG, et il y aura égalité entre les angles correspondans DEF, AGF. Ainsi, les angles ABC, DEF se trouveront égaux chacun à AGF, d'où il suit qu'ils sont égaux entre eux.

Les angles ABC, GEH dont les côtés sont parallèles et dirigés en sens contraires, ont aussi même indication, car GEH, DEF sont égaux, étant opposés par le sommet (35).

Mais, si deux côtés parallèles AB, DE sont dirigés dans le même sens, tandis que les deux autres côtés parallèles BC, EG sont dirigés en sens contraires, les angles ABC, DEG ne se trouvent pas égaux ; seulement, ils valent en somme deux angles droits, attendu que DEG et DEF font ensemble 180° (45). Il en est de même des angles ABC, FEH, puisque la somme de FEH et de FED est aussi de 180°.

Problème : Les dessinateurs emploient souvent, pour *faire un angle égal à un autre et de sommet différent*, un procédé fondé sur le principe précédent, et plus expéditif que celui du prob. (*c*) page 32, lorsqu'on peut se servir de l'équerre.

Si, par exemple, il s'agit de faire au point E (P. II, F. 27), un angle égal à l'angle déjà tracé ABC, on mène par E, une parallèle ED au côté AB, puis une parallèle EF au côté BC, et l'on a l'angle DEF qui est égal à l'angle donné.

65. Nous avons encore à démontrer que *des parties de parallèles comprises entre parallèles, sont égales*, vérité géométrique dont les arts font de fréquentes applications.

Soient les parallèles AB, CD et les parallèles AC, BD (P. II, F. 28). Je dis que les parties de parallèles AB et CD sont égales. Prenons la figure ABD ; retournons bout pour bout la droite AD, et plaçons-la sur A'D', droite correspondante de la figure ACD. Le point A étant posé sur D', le point D devra tomber nécessairement sur A'. Mais, l'angle BAD est égal à l'angle A'D'C, puisqu'ils sont alternes-internes (58) ; par conséquent, AB s'appliquera sur D'C. L'angle ADB est égal à l'angle CA'D', pour la même raison ; et, par conséquent, DB s'appliquera sur A'C. Le point B où se coupent AB et DB, devra donc tomber sur le point C où se coupent D'C et A'C ; ce qui montre bien que AB égale CD, et même que BD égale AC.

66. Réciproquement, *si deux droites* AB, CD (P. II, F. 29) *sont égales et parallèles, celles qui joignent leurs extrémités, sont aussi égales et parallèles ;* car, si AC, BD n'étaient pas parallèles, on pourrait mener, par le point A, une droite AE parallèle à BD, et alors, AB se trouverait à la fois de même longueur que CD et DE (65), ce qui est impossible.

67. Il suit encore du n° 65 que toutes les perpendiculaires AB, CD, EF, GH, etc. (P. II, F. 30), qu'on peut mener à deux parallèles AG, BH (57), sont égales entre elles (54). Or, les longueurs de ces perpendiculaires sont les vraies distances des points A, C, E, G, etc. de AG à BH (47). Donc, tous ces

points sont également éloignés de BH. Donc aussi, *des parallèles sont partout à la même distance l'une de l'autre.*

Voilà ce qui fait dire que tous les points situés à une distance donnée d'une droite, se trouvent sur une parallèle à cette droite ou que, *de deux parallèles, l'une est le lieu de tous les points égalment éloignés de l'autre.*

PROBLÈME : *Marquer un point qui soit à deux distances données de deux droites tracées.*

Supposons que le point cherché doive être à une distance D de la droite AB (P. II, F. 31) et à une distance *d* de la droite CE. En un point quelconque F de AB, j'élève une perpendiculaire, sur laquelle je porte D, de F en G, et par G, je trace une parallèle à AB. Cette parallèle contiendra nécessairement le point cherché.

Je trace, de la même manière, le lieu HI de tous les points situés à une distance *d* de CE. Cette autre parallèle contiendra aussi le point demandé, et par conséquent, ce point sera le concours K des deux parallèles de construction.

APPLICATION. L'instrument appelé *trusquin* par les uns et *té* par les autres, dont les ouvriers en bois se servent, pour tracer des parallèles, est fondé sur le principe du n° 67. Vous voyez qu'il est composé d'un plateau et d'une règle portant, à l'une de ses extrémités, une pointe à tracer. La règle traverse le plateau, en passant dans une mortaise à jour où elle est fixée, soit par un coin nommé *clef*, soit par une vis de pression. Cette clef donne la facilité d'écarter ou de rapprocher du plateau la pointe à tracer, et de la maintenir constamment à une distance donnée. Or, il est visible que, si vous faites glisser le plateau AB, le long d'une face plane bien dressée CDEF (P. II, F. 32), la pointe restera toujours à la même distance de l'arête CF, et tracera, par conséquent, sur la face supérieure CFGH, une parallèle IK à cette arête.

« La règle du trusquin est toujours placée d'équerre sur le plateau; mais cette disposition n'est pas nécessaire (66) : toute autre permettrait de tracer des parallèles avec la pointe, moyennant que la règle ne pût glisser dans la mortaise. »

« Il faut souvent donner plusieurs coups de marteau, avant de parvenir à établir la distance voulue, entre la pointe et le plateau. Mais, cet inconvénient disparaît, si on loge, dans une coulisse pratiquée sur la règle, une vis à filets serrés, dont l'écrou mobile, façonné en tiroir, porte la pointe traçante. On évite aussi de perdre sa distance en frappant la clef, si l'on fixe le plateau au moyen d'une vis de pression qui le traverse de manière à rencontrer la règle perpendiculairement. Mais, il est alors nécessaire de placer une lame métallique entre la face de la règle et la face correspondante de la mortaise du plateau, pour empêcher que la vis ne se creuse des logemens, sur les bords desquels elle ne pourrait se maintenir.

Enfin, il convient d'avoir une seconde vis de pression, pour interdire tout mouvement à la grande vis de la coulisse. »

« Outre la pointe à tracer dont nous venons de parler, le trusquin en porte, presque toujours, deux autres plus courtes. Leur écartement est égal à la largeur des mortaises que font ordinairement les menuisiers, et c'est pour tracer d'un seul coup les longs bords de ces mortaises, qu'on les emploie. Dans ce cas, la grande pointe déborde la face CFGH, sur laquelle s'appuient les deux petites pointes. »

« Les longs bords des mortaises ainsi tracés, sont parallèles chacun à l'arête CF, et par suite, ils sont parallèles entre eux. »

68. En effet, *deux droites* AB, CD *parallèles à une troisième* EF, *sont parallèles entre elles* (P. II, F. 33).

Il suffit, pour s'en convaincre, de tracer une transversale quelconque GH. Puisque AB est parallèle à EF, les angles GIB, GKF sont égaux comme correspondans (60). Puisque CD est aussi parallèle à EF, les angles GLD, GKF sont égaux comme correspondans. Par conséquent, les angles GIB, GLD sont égaux chacun à un troisième angle GKF; ils sont donc égaux entre eux, et comme de plus ils sont correspondans, les droites AB, CD, sont parallèles.

Appl. (*a*): On trouve des parallèles dans un grand nombre de produits industriels, dans une foule de machines et d'instrumens employés à la fabrication de ces produits.

« Les pièces de bois de menuiserie et de charpente présentent des arêtes parallèles; il en est de même de leurs mortaises et de leurs tenons. Les portes et les fenêtres, les pierres des montans qui les forment, ont aussi des arêtes parallèles. ».

Appl. (*b*) : Les échelons d'une échelle sont deux à deux également écartés dans toute leur longueur et se trouvent, par conséquent, parallèles. Il est nécessaire qu'il en soit ainsi, pour que tous se trouvent horizontaux, quand l'échelle est placéce, et que par suite, le pied de celui qui monte ne puisse glisser. Si ces échelons ont en outre la même longueur, les deux limons de l'échelle sont aussi parallèles.

Appl. (*c*) : Le laboureur fait ses sillons parallèles, afin de ne laisser par-tout entre eux que l'écartement nécessaire, et que la terre soit uniformément travaillée. C'est aussi pour cette dernière raison, que les dents de la herse sont toutes placées à la même distance les unes des autres; car la herse cheminant en ligne droite, trace par ses dents des parallèles et réduit, conséquemment, les mottes à la même largeur.

Appl. (*d*) : Les lignes de l'écriture, celles d'un livre sont parallèles, pour qu'entre deux il y ait autant de blanc à un bout qu'à l'autre, que les lettres n'empiètent pas les unes sur les autres, et que la lecture soit plus facile. Pour les mêmes raisons, les jambages des lettres sont aussi parallèles. Dans le caractère d'imprimerie nommé *romain* et dans l'écriture appelée *bâtarde*, ces parallèles sont perpendiculaires à celles que forment les lignes; dans le caractère *italique* et dans la *coulée*, les jambages parallèles sont obliques sur les lignes et penchées vers la droite; enfin, dans la *ronde*, ces mêmes jambages sont, par rapport aux lignes, des obliques penchées à gauche On écrit mal et l'impression est défectueuse, quand les lignes ne sont pas parallèles et quand la distance entre deux quelconques d'un paragraphe, n'est pas la même qu'entre deux autres.

Appl. (*e*) : Dans les cahiers de musique, on voit des droites parallèles groupées par cinq. Elles sont *équidistantes* dans chaque groupe, comme les échelons d'une échelle, les sillons du laboureur, et les lignes d'un livre; c'est-à-dire que la distance des deux premières, est la même que celle de la seconde à la troisième, que celle de la troisième à la quatrième, que celle des deux dernières. Chaque groupe est coupé par d'autres parallèles, perpendiculaires aux précédentes. Celles-là indiquent la mesure; c'est-à-dire que toutes les notes renfermées entre deux quelconques, doivent être exécutées dans le même temps, que celles qui se trouvent entre deux autres. Pour tracer rapidement les longues lignes musicales, on fait usage d'un tire-ligne à cinq branches, qui marque d'un seul coup, les cinq parallèles d'un même groupe. Ces cinq branches doivent être également écartées, puisque les parallèles doivent être équidistantes.

Appl. (*f*) : Les graveurs font aussi des droites parallèles qu'ils nomment *hachures*; quelquefois ces parallèles sont équidistantes, et dans ce cas, il s'agit de représenter une surface plane qui s'étend en s'éloignant du spectateur, les hachures diminuent de largeur ou deviennent moins noires à mesures qu'elles s'éloignent. D'autres fois, les hachures ont toutes la même largeur, mais alors elles ne sont plus équidistantes : les plus éloignées sont plus écartées que les autres. C'est en réunissant ces deux moyens qu'on parvient à représenter dans les gravures, un ciel sans nuage et les eaux tranquilles d'une grande étendue. Ils servent aussi, soit aux graveurs, soit aux dessinateurs, pour figurer les surfaces courbes réglées; car il y a toujours sur de telles surfaces, des parties moins éclairées que les autres, et des premières aux dernières, la lumière va en augmentant par gradation insensible; d'où il suit que les hachures parallèles, qui représentent l'ombre ou la partie la plus obscure, doivent aller soit en s'écartant, soit en diminuant de largeur, depuis l'endroit le plus sombre, jusqu'à l'endroit le plus brillant.

Appl. (*g*) : Les tuiles *courbes* et non pas *creuses*, qu'on emploie dans ce pays-ci pour couvrir les maisons, forment des rigoles parallèles qui sont équidistantes, parceque les tuiles, supposées bien faites, ont, aux deux bouts, pour arêtes, des arcs qui ont même corde dans toutes. Si donc on traçait les lignes milieux des rigoles, ces droites seraient des parallèles équidistantes. La direction de ces parallèles n'est pas indifférente : il faut qu'elle soit telle que l'eau de pluie ou de neige s'écoule le plus facilement et le plus rapidement possible. Les lignes milieux des rigoles doivent donc se confondre avec le chemin que suit naturellement l'eau, quand elle coule sur une face plane et inclinée. Or, ce chemin est le même que celui d'une bille abandonnée sur une pareille face; car tous les corps qui roulent comme la bille ou glissent comme l'eau, en vertu de leur poids, suivent tous la même direction sur un plan incliné. Les lignes milieux des rigoles doivent donc former autant de lignes de plus grande pente du toit (page 11 et n° 47). Aussi, les bons couvreurs ont-ils attention de les placer perpendiculairement à l'arête supérieure du *faîte*, pièce de bois qui termine le toit par le haut, et qui, dans une bonne charpente, est toujours horizontale ou de niveau.

Appl. (*h*) : Quand on couvre un édifice en tuiles plates ou en ardoises, les joints des tuiles ou des ardoises d'une même rangée, doivent être dirigés selon les lignes de plus grande pente, afin que l'eau, séjournant moins longtemps sur ces joints, s'y infiltre moins facilement. Comme les autres arêtes des tuiles et des ardoises, sont perpendiculaires ou d'équerre sur celles qui se trouvent aux joints, leur position est horizontale, ou de niveau, quand les joints sont sur des lignes de plus grande pente. Il en résulte que ces arrêtes sont plus promptement abandonnées par les gouttes d'eau qui restent sur les toits après la pluie, que ces gouttes ont moins de facilité pour remonter entre les tuiles ou entre les ardoises qui se recouvrent, et que les lattes, les chevrons, les pannes, les arêtiers, etc. sont moins exposés à l'humidité et à la pourriture.

« Déjà vous pouvez apercevoir, par cet exemple, que la Géométrie est une source de moyens conservateurs, pour les produits de l'homme et pour sa fortune. Nous trouverons, par la suite, plus d'une occasion de vous répéter cette vérité. »

Appl. (*i*) : Ce qui augmente beaucoup le tirage sur nos routes ferrées, ce sont d'abord les graviers, les pierres, les trous qui se forment vis-à-vis ou à côté des pierres, puis les zig-zags que font les ornières; car, si les chevaux cheminent dans une direction et que les ornières viennent à s'écarter de cette direction, les roues mordent sur les parois latérales. Des chemins qui présenteraient aux roues, une surface toujours unie et qu'elles pussent y rouler toujours dans la même direction, du moins d'un coude de la route à l'autre, offriraient donc de grands avantages pour la célérité et l'économie des transports. On a de semblables chemins : ce sont les *chemins de fer* composés de deux rangées de pièces en fonte bombées. Le cheval marche entre ces deux rangées, sur lesquelles s'appliquent des roues dont les jantes ont une gorge, comme les poulies. Or, les arêtes de ces pièces de fonte doivent être parallèles, puisqu'elles sont droites et que les roues sont toujours à la même distance l'une de l'autre. Cette application des parallèles, très-usitée en Angleterre, ne fait que commencer chez nous, bien qu'elle soit peut-être plus avantageuse que les canaux.

Appl. (*k*) : Dans le filage mécanique du coton, où plusieurs bobines A, A, A (P. II, F. 34) ont leurs axes plantés sur la même tringle BC (7), il faut que les fils AD qui s'enroulent sur ces bobines, diminuent également de longueur, ou qu'ils augmentent également quand les bobines les alongent; car, sans cela, il y aurait des fils plus tendus que les autres, et comme ils se tordent tous avec la même vitesse, il y en aurait qui casseraient et d'autres qui se vrilleraient, qui feraient des coques. Ainsi, les fils doivent toujours rester de même longueur, soit que les bobines les alongent, en s'éloignant du coton *en laine*, placé en E, E, E, soit qu'elles les raccourcissent, en se rapprochant de EE et en les enroulant. Or, ces fils sont parallèles; ce sont donc des parallèles de longueurs toujours égales; par conséquent, les deux droites qui unissent les extrémités de ces parallèles, doivent toujours être parallèles elles-mêmes. Il suit de là que la tringle BC qui est parallèle à l'une des deux droites, doit rester constamment parallèle à l'axe de rotation FG commun aux petits laminoirs D, D, D, sur lesquels passent les fils à leur origine, puisque cet axe est parallèle à la seconde des deux droites. Pour satisfaire à cette condition, on fait porter la tringle BC par quatre roulettes qui sont obligées de cheminer sur deux barres HI, KL parallèles entre elles et perpendiculaires à l'axe FG des laminoirs. Les roulettes d'un côté ne peuvent alors aller plus vite que celles de l'autre; les extrémités de la tringle BC restent toujours, par conséquent, à la même distance de l'axe FG des laminoirs, et ces deux lignes sont constamment parallèles. Ainsi, ces chariots ou *mull-jenny* qui confectionnent chacune de 40 à 60 fils et plus, et qui les rendent si égaux en grosseur, si uniformes dans toute leur longueur, ces *mull-jenny* auxquelles les classes pauvres doivent de pouvoir se bien vêtir à bon marché, sont fondées sur les propriétés des parallèles.

Appl. (*l*) : Quand un corps quelconque A (P. II, F. 35) est poussé ou tiré dans le sens d'une ligne droite BC, il est clair que tous ses points parcourent des lignes droites DE, s'il ne tourne pas en même temps sur lui-même, et comme la distance de l'un de ces points à tous les autres ne varie pas, toutes les droites parcourues sont toujours à la même distance les unes des autres, ou bien sont parallèles entre elles et à BC. Donc, pour qu'un corps en relief A puisse se mouvoir ou cheminer en ligne droite dans un corps creux F en le touchant par quelques points G, H, etc., il faut que les droites GH soient parfaitement égales, dans les deux corps, et qu'on puisse tracer sur la surface en creux, par les points G, H du corps en relief, des droites IK, parallèles à BC directrice du mouvement. Si, pendant ce mouvement, les deux corps doivent se toucher par des faces (F. 36), il faut de plus que ces faces soient réglées parallèlement à BC.

« Les tiroirs des tables, des commodes, etc.; les pistons des pompes à eau, à air, à vapeur, ceux des presses hydrauliques, les vannes des moulins à eau, les pênes des serrures, les étuis, etc., etc., offrent des exemples de cette application des parallèles. Les tiroirs sont des corps en relief qui ont des arêtes parallèles et qu'on peut, par conséquent, soit en les poussant, soit en les tirant, faire cheminer en ligne droite, dans des emboîtemens creux de même largeur, de même hauteur, qui présentent des arêtes aussi parallèles dirigées dans le sens du mouvement. Les faces d'un tiroir peuvent toucher sans cesse et partout celles de l'emboîtement, sans que le jeu soit gêné en rien. »

« Les pistons sont des corps en relief qui se meuvent dans des tuyaux nommés *corps de pompe* ; les surfaces qui se touchent, pendant le mouvement, sont réglées selon la direction de ce mouvement, et les dimensions du piston, la longueur exceptée, sont égales aux dimensions intérieures correspondantes du corps de pompe. »

« Les vannes présentent des arêtes droites, parallèles à la direction du mouvement qu'elles prennent quand on les lève ou qu'on les baisse, et ces arêtes glissent le long de celles d'un encadrement formé dans la tête d'eau, lesquelles sont aussi droites et parallèles à la direction du mouvement. »

« Il en est de même d'un pêne de serrure et du creux de la gâche dans laquelle il s'engage. Enfin, les étuis sont dans le même cas que les pistons. Mais, c'est surtout pour ceux-ci, qu'il est important de remplir toutes les conditions que prescrit la Géométrie : si, dans le piston d'une machine à vapeur, par exemple, la surface qui touche celle du corps de pompe, était telle, que les droites qui la règlent, ne fussent pas très-exactement parallèles entre elles et à la direction du mouvement, il en résulterait de graves inconvéniens et une grande perte de force. »

Appl. (*m*) : Ce qui nuit à la beauté et à la bonté des produits dans la fabrication des toiles et des étoffes ordinaires, c'est sans doute le défaut d'uniformité dans les fils, mais c'est aussi le défaut d'un rigoureux parallélisme et d'une rigoureuse équidistance entre tous les fils de la chaîne et entre tous ceux de la trame; car il en résulte que le tissu se trouve plus serré en certains endroits qu'en d'autres, et qu'il n'a pas la même souplesse ni la même force partout. Pourquoi nos fabricans de draps et de toile n'introduisent-ils pas dans leurs machines, la perfection de celles qu'on emploie pour faire les cachemires d'Europe? Dans ces dernières, les fils de la chaîne sont exactement parallèles, dès qu'ils sont tendus ; le *peigne* est exécuté avec une telle précision, que deux de ces fils parallèles sont toujours et partout à la même distance l'un de l'autre, et que cette distance est constante pour tous les couples de fils ; enfin, le mouvement du peigne se fait avec une telle régularité, que tous les fils de la trame, c'est-à-dire ceux que la navette croise sur les fils de la chaîne, sont toujours refoulés les uns sur les autres avec la même force et selon la même direction, de manière qu'ils forment aussi des parallèles équidistantes. Voilà pourquoi les fonds de nos schalls façon cachemires, sont si supérieurs, pour l'égalité du tissu, à ceux qui se fabriquent dans l'Inde, bien que cette branche d'industrie ne soit introduite en Europe que depuis à peu près vingt ans; les Indiens, qui l'exploitent depuis des centaines d'années, n'y peuvent rivaliser avec nous, parce que leurs connaissances en géométrie et en mécanique sont extrêmement bornées; ce qui vous prouve, encore une fois, que la perfection des arts repose sur les applications rigoureuses des principes de ces deux sciences.

Appl. (*n*) : On vous enseignera, dans le cours qui suivra le mien, que si plusieurs hommes tirent ou poussent un corps selon des directions parallèles, ils exercent sur ce corps une action qui, étant égale à la somme de toutes celles qu'ils exercent séparément, est aussi grande qu'il est possible; tandis que s'ils agissent selon des directions concourantes, ils produisent une action moindre : il y a perte d'une partie de leurs forces, et cette perte est d'autant plus grande, que les angles formés par les directions de leurs efforts, sont plus ouverts.

« Il suit de là que les fils ou les brins d'une corde, peuvent supporter d'autant plus de poids, qu'ils sont plus près d'être parallèles, ou qu'il y a moins de torsion dans la corde. Les cordes molles sont donc préférables, pour la force, aux cordes dures et serrées; elles sont aussi plus flexibles, plus maniables, et moins sujettes à faire des *coques*; c'est ce que confirment un grand nombre d'expériences. Observez pourtant qu'il faut que la mollesse ne provienne pas de l'usure des cordes. »

Appl. (*o*) : C'est dans les *propriétés des parallèles* qu'est le *germe* de la géométrie descriptive, et cette application n'est pas la moins importante de toutes celles qu'on a faites des vérités exposées dans ce chapitre. Il en est résulté une *langue* pour les arts, pour les constructions de toutes sortes; sans cette langue, il serait à peu près impossible à l'artiste, à l'ouvrier, d'exécuter l'idée d'un architecte, d'un ingénieur, d'un mécanicien : vous en serez convaincus tout à l'heure.

« Nous avons dit (appl. *l*) que tous les points d'un corps qui se meut en ligne droite, suivent des parallèles. Or, un corps qui tombe, se meut en ligne droite, selon la verticale; par conséquent, tous ses points engendrent, pendant la chute, des parallèles à la verticale. Supposez une face plane et de niveau, un plancher, par exemple, au-dessous de ce corps tombant; n'est-il pas vrai que toutes les parallèles engendrées par les différens points du corps, viendront percer la face ou le plan chacune en un point? Hé bien! l'ensemble de tous ces points est ce qu'on nomme *la projection horizontale* du corps, et les parallèles qui unissent ces points à ceux du corps remis dans sa première position, sont appelées *lignes projetantes*. »

« Pour comprendre maintenant l'usage qu'on fait d'une projection horizontale, représentez-vous toutes les parallèles projetantes, et supposez que vous en connaissiez les longueurs; il vous sera facile de voir que, si le corps venait à disparaître, vous en retrouveriez aisément tous les points, en partant de leurs projections particulières sur le plan de niveau, et en vous élevant le long de chacune des parallèles jusqu'à son extrémité : cette extrémité serait précisément le point cherché, celui qu'occupait l'un des points du corps, avant que ce corps disparût. Vous pourriez donc par ce moyen, vous procurer les positions des extrémités des arêtes du corps, celles de tous les points de ses faces, et, par conséquent, replacer le corps dans sa première position, s'il le fallait. C'est précisément pour placer ainsi les corps dans une position donnée, qu'on fait leur projection horizontale. »

« Supposons, par exemple, qu'on veuille que je place des arêtiers de charpente, pièces de bois qui se trouvent sous les arêtes inclinées des toits de nos maisons, et qui sont inclinées elles-mêmes. Si l'on trace sur le plancher du grenier la projection horizontale ABCDEFGH d'un de ces arêtiers (P. II, F. 37), et qu'on me donne les longueurs des parallèles AA', AA'' (deux accens se prononcent *seconde*), EE', FF', GG' qui projettent les extrémités de ses longues arêtes, je placerai d'aplomb des arêtes de pièces de bois, sur les projections particulières A, E, F, G, de ces extrémités; je donnerai à ces arêtes, les longueurs des lignes projetantes qu'elles représentent; et leurs extrémités A', A'', E', F', G' seront visiblement aux points que doivent occuper celles des longues arêtes de l'arêtier. Je pourrai donc alors placer cette pièce de bois dans la position désirée, A'B'E'F'G'A''. Remarquez que, dans une charpente, il y a des pièces de bois qui doivent s'assembler avec l'arêtier et qui tiennent lieu de celles que j'ai supposé, pour me faire comprendre. »

« Les épures de charpenterie et de coupe des pierres, les plans d'architecture et de machines présentent toujours la projection horizontale des pièces de bois, des pierres, des murs, des colonnes, des roues, des lanternes, des arbres, etc. Ces dessins fournissent aussi les longueurs des parallèles projetantes. Pour y marquer ces longueurs, on suppose que le corps et ses lignes projetantes, se meuvent de manière qu'un des points suive une droite horizontale; alors, tous les autres suivent des horizontales parallèles à celle-là, et si le corps vient à passer au travers d'une face plane et d'aplomb, d'un mur bien uni et bien dressé, par exemple, ses points y marquent d'autres points qu'on nomme *leurs projections verticales*, et les lignes projetantes, qui sont d'aplomb comme le plan traversé, s'y appliquent dans toute leur longueur. »

« Il suit de là, que si l'on a la projection verticale d'un corps, et que des points de cette projection, on mène sur le plan d'aplomb et jusqu'au plan de niveau, des parallèles à la verticale, ces parallèles sont égales en longueur aux parallèles correspondantes qui projettent les corps horizontalement. Ainsi, deux projections, l'une horizontale, l'autre verticale, suffisent pour placer les corps dans les positions qu'ils doivent avoir, et pour leur donner la forme et les dimensions qui leur sont particulières. La première de ces projections est ce qu'on nomme *plan par terre* ou simplement le *plan*; la seconde est connue sous le nom *d'élévation*. Pour *écrire* brièvement et clairement quelle est la position, la forme et chacune des dimensions d'un corps, il faut donc un plan et une élévation. C'est dans ce sens que nous avons appelé la géométrie descriptive, *la vraie langue des constructions.* »

« Je suppose, comme exemple, que je commande un meuble; j'en donnerai l'élévation, pour montrer à l'ébéniste les moulures et les ornemens que je désire; mais cela ne sera pas suffisant: je devrai ajouter le plan, pour indiquer la profondeur et les divisions de l'intérieur; et dans le cas où ces divisions n'iraient pas du haut en bas, il faudrait que je fournisse encore une élévation de l'intérieur, ou, comme on dit, une *coupe*, afin de faire voir où elles doivent s'arrêter. »

« Je suppose encore qu'un particulier de Metz ait fait dresser à Paris, le plan, la coupe et l'élévation d'une maison; son entrepreneur pourra construire le bâtiment avec exactitude; car il trouvera sur ces dessins la position de chaque partie par rapport aux autres, et les vraies dimensions qu'elle doit avoir. Qu'au lieu de cela, l'architecte de Paris veuille transmettre ses idées à l'entrepreneur de Metz, en langage ordinaire; il faudra qu'il écrive un volume; malgré tous ses efforts pour être clair, il ne sera certainement pas toujours bien compris, et la maison se trouvera fort différente de ce qu'elle aurait dû être. Si, *dépourvu d'une description écrite ou de dessins* géométriques, l'entrepreneur n'avait, pour se guider, qu'une vue perspective de la maison, semblable à celles du dessin d'un paysage, il lui serait impossible de construire; car, vous le verrez aisément, ces perspectives changent la forme et les dimensions des corps qu'elles représentent. »

APPL. (p): L'étude des corps, troisième partie de ce cours, vous initiera dans la méthode des projections; mais en attendant, et pour vous faire sentir davantage l'importance de cette méthode, je vais vous exposer quelques-unes de ses applications, et d'abord, comment on s'en sert, pour tracer sur un corps, une courbe quelconque tracée sur le papier.

« Soit donc la courbe ABC (P. III, F. 1). Je tire au-dessus ou au-dessous une droite quelconque DE; puis, je projette la courbe sur cette droite, c'est-à-dire que, par ses extrémités A, C et par un grand nombre d'autres points intermédiaires, je trace des perpendiculaires à DE, qui la coupent en A', F', G'.... B'.... C'. Ces points sont respectivement les projections de A, F, G.... B.... C, puisque les perpendiculaires sont parallèles; A'C' peut être regardée comme la projection horizontale de ABC; cette courbe est elle-même sa projection verticale, et AA', FF'.... BB'.... CC' sont les lignes projetantes dans leurs vraies longueurs. Vous concevez qu'en effet une courbe qui serait dessinée sur un mur d'aplomb, laisserait une ligne droite pour trace, sur un plancher de niveau qu'elle viendrait à traverser, en descendant le long du mur.

« Maintenant, sur la surface du corps où doit être transportée la courbe, je tire une droite *de* (F. 2). Je prends un point *a'* sur cette droite; à partir de ce point, je porte les distances A'F', F'G'..., par les points *a'*, *f'*, *g'*... *b'*... *c'* qui en résultent, j'élève sur *de*, des perpendiculaires visiblement plus longues que celle de la figure 1; je porte, avec le compas, la longueur de A'A, sur la perpendiculaire *a'*, celle de F' F, sur la perpendiculaire *f'*, et ainsi de suite, ce qui me donne les points *a*, *f*, *g*... *b*... *c*; enfin, je joins tous ces points par une courbe que je trace à la main, et si j'ai projeté un grand nombre de points de ABC, j'aurai une courbe *abc* qui aura même forme et même longueur que ABC, ce dont on se convaincra facilement, en opérant la superposition (page 14). »

« C'est ainsi que souvent les appareilleurs tracent, d'après l'épure, les cherches et les patrons qu'ils donnent aux tailleurs de pierres, pour les guider (voyez page 15 et page 26). »

Appl. (*q*) : Voici un tracé qui se déduit du précédent et qu'emploient parfois les charpentiers de vaisseaux, pour faire leurs *gabarits* ou patrons; ils le nomment *Tricage*. Ils posent une planche mince sur l'épure, de façon à ne pas couvrir la courbe qu'ils veulent lever. Puis, à partir de cette courbe ABC (P. III, F. 3), ils mènent un grand nombre de parallèles AA'...BB'...CC'... qu'ils prolongent sur la planche, et ils donnent à toutes la même longueur. Ils obtiennent par là les points A'...B'...C'..., qu'ils joignent par une courbe A'B'C', puis ils découpent la planche selon ce contour.

« Pour se convaincre que les courbes A'B'C', ABC ont même forme et même longueur, il suffit de mener par un point D de AA', une droite quelconque DE, et par un point F tel que A'F soit égale à AD, une droite FG parallèle à DE. Alors, EG et DF sont égales comme parallèles comprises entre parallèles. Mais, DF est égale à AA', puisqu'on a retranché d'un côté, sur A'A, ce qu'on a ajouté de l'autre. Donc, EG est égale à A'A et, par suite, à CC'. Retranchant la partie CG commune à ces deux droites, il reste EC égale à GC'. On démontrerait de même que toutes les portions de parallèles comprises entre DE et ABC, sont égales aux portions correspondantes, comprises entre FG et A'B'C'; par conséquent, on peut superposer exactement la figure ABCED sur la figure A'B'C'GF, d'où il suit que A'B'C' a même courbure et même longueur que ABC. »

Appl. (*r*) : C'est aussi, par l'un ou l'autre de ces procédés, qu'on obtient la figure d'une cavité, dans laquelle doit s'emboîter une pièce en relief d'une figure donnée. Seulement, le tracé étant fait, on découpe de façon à former un creux, au lieu d'un relief. La figure 4 de la planche III indique suffisamment les opérations.

Appl. (*s*) : Le tracé d'un contour *rampant*, d'après un type ou modèle qui ne rampe point, se fait au moyen de projections perpendiculaires et de projections obliques. Qu'il s'agisse, par exemple, de déformer un balustre AB (P. III, F. 5), pour en faire un balustre rampant destiné à la rampe d'un escalier. Je projette le contour donné sur l'axe AB, en abaissant des perpendiculaires de divers points C, D, E, etc.; puis, ayant pris A'B' de même longueur que AB, je porte sur cet axe du balustre rampant, les projections A*c*, *cd*, *de*, etc. du type; par les points *c'*, *d'*, *e'*, etc. qui en résultent, je tire des droites parallèles à la ligne de rampe, et je prends sur ces obliques projetantes, des longueurs *c'*C', *d'*D', *e'*E' respectivement égales aux perpendiculaires projetantes *c*C, *d*D, *e*E, etc. Il ne me reste plus alors qu'à joindre les points C', D', E', etc., par une courbe, pour obtenir le contour rampant demandé.

« Vous voyez par là que tout contour rampant a pour projection oblique sur FG, parallèle aux axes, la projection perpendiculaire de son type sur la même droite, et que le changement de lignes projetantes n'altère point les longueurs des parties du contour qui se trouvent parallèles à l'axe. »

Appl. (*t*) : La méthode des projections sert encore à figurer des courbes qui n'existent pas, mais dont on connaît et la projection sur une droite tracée dans le même plan, et les lignes projetantes.

« Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de figurer la courbe qui se projette sur une droite AB de 3 mètres (P. III, F. 6) et dont les lignes projetantes, prises de millimètre en millimètre, selon la droite, à partir de A, soient toutes connues. Supposons, en outre, que celle de A soit de 1 mètre, celle de B de 2 mètres, et que les autres aillent en augmentant à partir de la première, mais de façon que les augmentations soient de moins en moins grandes. On divisera AB en millimètres; on élèvera, par les points de division, des perpendiculaires à AB; on portera sur chacune de ces perpendiculaires, leur longueur; et il en résultera des points tels que C, D, E, F, qu'on joindra à la main, ce qui produira la courbe CDEF. »

« On parviendrait ainsi à figurer la ligne courbe que suit le point milieu d'un boulet, d'une balle; celle que décrit le point milieu de la Lune en tournant autour de la Terre, pendant que la Lune tourne sur elle même; celle selon laquelle le point milieu de la Terre tourne autour du Soleil, pendant que la Terre tourne sur elle-même; enfin, celles selon lesquelles cheminent tous les corps célestes qui tournent autour du même astre : il faudrait mesurer ou calculer les longueurs des droites sur lesquelles elles se projettent, et calculer aussi les longueurs des lignes projetantes d'un grand nombre de leurs points. »

« Quand, dans les dessins d'une machine, il est nécessaire de montrer les mouvemens, le jeu de quelques-unes de ses parties, on a recours à la même méthode. On l'emploie encore, pour représenter la forme qu'aura le fonds d'un terrain, lorsqu'il sera excavé d'une façon convenue; pour figurer la direction des couches et des filons de minérais cachés dans la terre, souvent à de grandes profondeurs; pour faire connaître la forme du fond d'un canal, d'un fleuve, d'un lac, et des mers. Enfin, on peut dire que la méthode des projections s'applique à presque tous les travaux de l'homme. Vous devez donc vous rendre familière une méthode si simple, si facile, si rapide, si puissante; vous y parviendrez en suivant avec assiduité le cours de dessin géométrique. Une fois ce genre de dessin répandu dans les ateliers, l'industrie s'élèvera à un degré de perfection qu'il est impossible de prévoir. »

Loi de la nature. (*a*) : Ces parallèles dont vous venez de voir de si importantes applications, sont rares dans la nature. On ne les y trouve guère, à parler exactement, que sur quelques cristaux. Le sel de cuisine, par exemple, quand il se forme dans de l'eau salée et tranquille, qui se dissipe peu à peu dans l'air, prend la forme d'un dé à jouer et nous offre, par conséquent, sur chaque face, deux arêtes parallèles.

Loi (*b*) : Nous considérons ordinairement les verticales ou les directions de plusieurs fils à plomb, comme parallèles; mais elles ne le sont jamais à la rigueur, puisque suffisamment prolongées elles iraient toutes passer à peu près par le point milieu de la Terre. Le parallélisme des verticales ne peut être admis, sans erreur sensible, que dans l'étendue de quelques toises.

Loi (*c*) : Nous considérons aussi comme parallèles, les rayons de lumière qui nous viennent du Soleil; mais au fond ils ne le sont pas; car s'ils étaient suffisamment prolongés, tous passeraient à peu près par le point milieu de l'astre. Néanmoins, il n'y a pas d'erreur appréciable à regarder comme parallèles, des droites qui vont se couper à plus de 33,000,000 de lieues, surtout quand les points où ces rayons aboutissent sur la Terre, ne sont écartés que de quelques toises.

Loi (*d*) : Enfin, si l'on dit que toutes les positions prises par l'axe de rotation de la Terre, pendant la révolution de ce globe autour du Soleil, sont parallèles entre elles, c'est qu'ordinairement on ne fait pas attention au léger balancement de cet axe. Ce balancement qui explique plusieurs phénomènes intéressans, ne produit jamais un angle de plus de 3°, entre la vraie position de l'axe et celle que d'ordinaire on lui suppose; mais ce faible écartement suffit pour qu'il n'y ait pas un parallélisme rigoureux.

COMBINAISONS DES CONCOURANTES ET DES PARALLÈLES.

« Vous avez étudié plusieurs propriétés des concourantes et plusieurs propriétés des parallèles; vous avez appris à exécuter un grand nombre de tracés qui reposent sur ces deux combinaisons des lignes droites; mais il en existe encore une troisième : celle des parallèles avec les concourantes. Nous nous en occuperons, après que vous aurez acquis une notion suffisante des proportions. »

Proportions.

69. On nomme *proportion géométrique* ou simplement *proportion*, l'égalité de deux rapports (19). Ainsi, $\frac{36}{6}=\frac{12}{2}$ est une proportion, car cette expression numérique indique que le rapport de 36 à 6 *égale* le le rapport de 12 à 2. Cependant, elle se lit ordinairement comme il suit; 36 *divisé par* 6 *égale* 12 *divisé par* 2.

Si les nombres 36, 6, 12, 2, représentaient en mètres, par exemple, les longueurs de quatre droites AB, CD, EF, GH, on exprimerait aussi qu'il y a proportion entre ces lignes, ou que le rapport des deux premières égale celui des deux dernières, en écrivant $\frac{AB}{CD}=\frac{EF}{GH}$. Réciproquement, lorsque quatre droites sont proportionnelles ou forment deux rapports égaux, elles donnent une proportion numérique, si aux lettres qui les indiquent, on substitue les nombres qui en expriment les longueurs. *Il est donc toujours facile de transformer une proportion de lignes en une proportion de nombres, et une proportion numérique en une proportion de lignes indiquées par des lettres.*

Les proportions sont rarement écrites comme ci-dessus, dans les livres et surtout dans ceux dont les lignes sont serrées : la forme de fraction donnée aux rapports forcerait à écarter plus que les autres les lignes où se trouveraient des proportions, et il en résulterait un désagréable défaut d'uniformité, de régularité. Pour l'éviter on remplace par deux points, le trait qui indique la division. Le signe d'égalité $=$ pourrait être conservé sans inconvénient ; mais l'usage est d'y substituer quatre points. Les proportions $\frac{36}{6}=\frac{12}{2}$, $\frac{AB}{CD}=\frac{EF}{GH}$ s'écrivent donc ordinairement 36 : 6 :: 12 : 2, AB : CD :: EF : GH, et alors elles se lisent comme il suit : 36 *contient* 6, *comme* 12 *contient* 2 ; AB *contient* CD, *comme* EF *contient* GH. On peut dire aussi, selon la coutume des écoles, 36 *est à* 6, *comme* 12 *est à* 2 ; AB *est à* CD, *comme* EF *est à* GH pourvu qu'on se rappelle que *est à* signifie *contient* ou *est contenu dans.*

Les nombres 36 et 2, les lignes AB, GH qui se trouvent aux extrémités des proportions écrites comme dans les livres, sont appelés *termes extrêmes* ou simplement *extrêmes.* Les nombres 6 et 12, les lignes CD, EF qui se trouvent entre les autres, sont nommés *termes moyens* ou simplement *moyens.*

70. La proportion géométrique jouit d'une propriété bien utile, dite *fondamentale : Le produit des extrêmes égale celui des moyens.* On voit effectivement, dans la proportion 6 : 2 :: 9 : 3, que 3 fois 6 et 2 fois 9 donnent le même produit 18. Mais, il est facile de démontrer qu'il en est toujours ainsi. Mettons la proportion sous la première forme $\frac{6}{2}=\frac{9}{3}$. Si j'efface le 2, le premier rapport qui n'était que 3, deviendra 6, ou 2 fois plus grand. Donc, pour ne pas détruire l'égalité, il faut rendre le second rapport $\frac{9}{3}$, 2 fois plus grand, ou le multiplier par 2. Mais, $\frac{9}{3}$ c'est 9 tiers, et pour multiplier un nombre de choses, on ne multiplie que le nombre, on ne multiplie pas le nom des choses. Il faut donc simplement multiplier 9 par 2, et conserver au produit, le nom des choses multipliées. Cela donne 18 tiers, ou $\frac{18}{3}$, et l'on a $6=\frac{18}{3}$. Maintenant, j'efface le trois. Alors, le second rapport qui est 6 devient 18, le produit des moyens, ou 3 fois plus grand.

Donc, pour ne pas détruire l'égalité, je dois rendre le premier rapport 6, 3 fois plus grand, ou le multiplier par 3, ce qui donne aussi 18, produit des extrêmes 6 et 3. Or, le raisonnement qui vient d'être fait, s'appliquerait visiblement à toute proportion numérique, et une proportion de lignes peut toujours être convertie en une autre dont les termes soient des nombres.

71. Réciproquement, *lorsque deux produits formés chacun de deux facteurs, sont égaux, les quatre membres font une proportion, dont les deux facteurs d'un produit sont les extrêmes, et les deux facteurs de l'autre, les moyens.*

Par exemple, le produit de 6 par 3 étant égal au produit de 9 par 2, il y a nécessairement entre ces quatre nombres, la proportion $6 : 2 :: 9 : 3$. En effet, si dans l'égalité $6 \times 3 = 9 \times 2$, on efface le chiffre 2, le second produit devient 2 fois plus petit; il faut donc, pour qu'il y ait encore égalité, rendre le premier produit 2 fois plus petit ou le diviser par 2. Alors, on a $\frac{6 \times 3}{2} = 9$. Si ensuite, dans le premier produit, on efface le chiffre 3, ce produit devient 3 fois plus petit, et pour que l'égalité continue d'avoir lieu, il faut rendre la seconde partie 9 de cette égalité, 3 fois plus petite ou la diviser par 3. On obtient par là $\frac{6}{2} = \frac{9}{3}$ ou $6 : 2 :: 9 : 3$. Il en est de même pour quatre droites, puisqu'elles peuvent toujours être représentées par des nombres.

72. Cela nous montre qu'*on peut faire subir à une proportion, tous les changemens qui n'empêchent pas le produit des extrêmes d'être égal au produit des moyens.* Les rapports ne sont plus les mêmes, il est vrai, mais il restent toujours égaux. Par exemple dans la proportion $6 : 2 :: 9 : 3$, on peut changer les moyens de place, ce qui donne $6 : 9 :: 2 : 3$, car on a toujours 18 pour les deux produits. On peut aussi changer les extrêmes de place, ce qui donne $3 : 2 :: 9 . 6$; on peut enfin mettre les moyens à la place des extrêmes, ce qui donne $2 : 6 :: 3 : 9$, nouvelle proportion qui peut subir les mêmes transformations que la première.

73. Il est facile de voir qu'on obtient encore une égalité de rapports, en multipliant le premier rapport d'une proportion par le premier rapport d'une autre et le second par le second; car si deux quantités sont égales, les produits qu'on obtiendra en les multipliant par un même nombre, seront égaux, et c'est multiplier les deux rapports d'une proportion par un même nombre, que de multiplier l'un par un troisième rapport, l'autre par un quatrième égal au troisième. Mais, il est clair que pour multiplier deux rapports tels que $\frac{6}{2}$ et $\frac{12}{3}$, il suffit de multiplier les deux premiers termes 6 et 12 l'un par l'autre, puis les deux seconds 2 et 3; car cela donne $\frac{72}{6}$ ou 12, comme si l'on multipliait, 3, valeur de $\frac{6}{2}$, par 4, valeur de $\frac{12}{3}$. Nous pouvons donc établir ce principe qui nous sera

fort utile par la suite : *Les produits des termes correspondans de deux proportions, forment une troisième proportion.* Il en est de même des quotiens de ces termes.

Qu'on multiplie, par exemple, les termes correspondans des deux proportions suivantes :

$$6:2::9:3$$
$$12:3::16:4;$$

on obtient $$72:6::144:12,$$

résultat qui est bien une proportion, puisque $72\times12=144\times6$.

74. *On peut, sans détruire l'égalité de deux rapports, ajouter le second terme de chacun au premier.*

Par exemple, la proportion $8:2::12:3$ donne cette autre $8+2.2::12+3:3$ ou $10:2::15:3$. Effectivement, le premier terme du premier rapport étant augmenté du second terme, le contient une fois de plus et le rapport se trouve plus grand de 1 ; mais il en est de même aussi pour le deuxième rapport, et par conséquent, l'égalité ou la proportionnalité n'est pas détruite.

75. *On peut aussi, sans détruire l'égalité de deux rapports, ajouter le premier terme de chacun au second.*

Ainsi, la proportion $14:7::6:3$ donne cette autre $14:7+14::6:3+6$ ou $14:21::6:9$. En effet, le produit des extrêmes qui était 14×3, est maintenant $14\times3+14\times6$ et se trouve augmenté de 6 fois 14. Mais le produit des moyens a éprouvé la même augmentation, car il était 7×6, et il est maintenant $7\times6+14\times6$. Ces deux produits sont donc encore égaux.

76. Des raisonnemens analogues montreraient que *les soustractions opérées entre les deux termes de chaque rapport, ne détruisent pas non plus la proportionnalité.*

De la proportion $15:5::24:8$, par exemple, on tire cette autre $15-5:5::24-8:8$ ou $10:5::16:8$, et cette autre $15:15-5::24:24-8$ ou $15:10::24:16$.

La proportion $7:21::3:9$ pourrait donner $7:21-7::3:9-3$ ou $7:14::3:6$, et $21-7:21::9-3:9$ ou $14:21::6:9$.

77. Enfin, *on n'altère nullement la proportionnalité, en multipliant ou en divisant par le même nombre, les deux termes de l'un des rapports ;* car c'est comme si l'on multipliait ou divisait par ce nombre, le produit des extrêmes et celui des moyens, opération qui ne les empêcherait pas de rester égaux.

De la proportion $12:2::36:6$, par exemple, nous pouvons tirer cette autre $24:4::36:6$, en multipliant par 2 les deux termes 12 et 2 du premier rapport, attendu que 12 est facteur du produit des extrêmes et que 2 est facteur de celui des moyens.

Nous pouvons aussi obtenir cette proportion 12 : 2 : : 6 : 1, en divisant par 6, les deux termes 36 et 6 du second rapport de la première.

Probl. (*a*) : *Trouver l'un des extrêmes d'une proportion dont l'autre extrême et les moyens sont connus.*

Si, par exemple, on a la proportion incomplète 6 : 2 : : 9 : X, dans laquelle X représente un extrême qui n'est pas connu et qu'il faut déterminer, on fait le produit des moyens 9 et 2, ce qui donne 18, produit qui est aussi celui des extrêmes (70). Or, un de ces extrêmes est connu, et l'on a vu, en apprenant à faire la preuve de la multiplication, que si l'on divise le produit par le multiplicande, on retrouve le multiplicateur. Si donc on divise 18, le produit des extrêmes, par 6, l'extrême connu qui peut être regardé comme le multiplicande, on devra obtenir pour quotient, l'autre extrême. Or, 18 divisé par 6 donne 3 qui est en effet le quatrième terme de la proportion prise pour exemple.

Probl. (*b*) : *Trouver l'un des moyens d'une proportion dont l'autre moyen et les extrêmes sont connus.*

Il faut faire le produit de ces extrêmes et le diviser par le moyen connu; c'est ce que montre suffisamment le raisonnement précédent. Si, par exemple, on a la proportion incomplète 6 : X : : 9 : 3, on fait le produit de 6 par 3, ce qui donne 18 qu'on divise par 9. Le quotient 2 est précisément le moyen que représentait X.

Ces règles pour trouver l'un des extrêmes ou l'un des moyens d'une proportion numérique, reviennent, comme vous voyez, à la *règle de trois.*

La Géométrie a aussi sa règle de trois, c'est-à-dire qu'au moyen des principes qui vont être posés et démontrés, on peut trouver une droite qui soit un des termes d'une proportion dont trois droites connues sont les trois autres termes. Cette droite de résultat est ce qu'on appelle une *quatrième proportionnelle* aux trois droites données.

Proportionnalité des droites.

La proportionnalité qui résulte, pour les droites, de certaines combinaisons, donne lieu à des principes qu'on doit compter parmi les plus importans. C'est sur ces principes que repose notamment la *division des droites en parties proportionnelles*, et cette division est souvent nécessaire dans les applications de la Géométrie.

L'expression *parties proportionnelles* ne signifie pas seulement des parties inégales dont les longueurs peuvent former une proportion. Des parties égales sont aussi des parties proportionnelles; seulement les rapports seraient 1, dans les proportions qu'elles formeraient.

78. *Si de deux concourantes, l'une* AB *est divisée en parties égales, par des parallèles, il en est de même pour l'autre* CD

(P. III, F. 7); c'est-à-dire que si AF et FB sont égales, CG et GD le sont aussi entre elles.

De A et de F, abaissons sur les parallèles, les perpendiculaires, AH, FI, et plaçons la figure BFI sur la figure FAH, de façon que BF recouvre exactement FA. Puisque les angles AFH, FBI sont égaux comme correspondans (60), BI s'appliquera sur FH. Mais, AH et FI sont parallèles, étant toutes deux perpendiculaires à FG (57 et 54), et par suite, les angles BFI, BAH sont égaux comme correspondans; donc FI s'appliquera sur AH; donc FI et BI se rencontreront au même point que AH et FH; donc I tombera sur H, et par conséquent, FI égale AH.

Ainsi, les parallèles AC, FG, BD sont équidistantes (page 75). Il s'ensuit que les perpendiculaires CK, GL ont même longueur (67); que la figure CKG, dont les angles sont égaux à ceux de la figure GLD (40 et 60), peut couvrir exactement cette dernière; et que CG est égale à GD. On démontrerait de même l'égalité des autres parties de ED, quel que fût le nombre des parallèles qui divisassent EB en parties égales, et la réciproque serait facile à établir.

Problème : *Diviser une droite donnée* AB *en un certain nombre de parties égales*, en cinq par exemple, (P. III, F. 8).

Premier procédé: par l'une des extrémités A, tirez une droite quelconque, et portez sur cette droite, à partir de A, cinq fois une ouverture de compas arbitraire. Cela vous donnera les points C, D, E, F, G. Joignez le dernier G avec B, par une droite GB; menez par les autres, des parallèles à GB; vous marquerez les points H, I, K, L qui seront tels, que les cinq parties AL, LK, KI, IH, HB se trouveront égales entre elles.

Mais, pour obtenir de ce tracé une grande exactitude, ou pour que les parties de AB, prises au compas, soient parfaitement égales, il faut que l'angle BAG, soit au plus d'environ 60°; plus grand, il pourrait rendre les parallèles trop obliques sur AB, et causer, par suite de l'incertitude, sur les positions des points L, K, etc. Il faut encore que les parties de AG soient visiblement aussi grandes, au moins, que celles qui doivent être marquées sur AB, ou que AG égale au moins la droite AB, sans la surpasser de beaucoup; autrement, les parallèles seraient trop obliques sur cette droite, même dans le cas où l'angle BAG serait de 60°. Il faut enfin que les divisions de AG soient faites avec un compas à pointes très-fines, que les parallèles soient très-déliées, qu'elles passent exactement par les points de AG, et qu'elles soient tracées avec une règle et une équerre dont les arêtes soient parfaitement droites (appl. *a*, p. 9).

L'emploi de l'équerre, dans le tracé des parallèles BG, FH, etc., cause assez souvent des erreurs, par suite du dérangement insensible qui peut survenir dans la position de la règle. Employer le procédé du problème (*d*), page 56, pour éviter ces erreurs, ce serait compliquer singulièrement l'opération, et d'ailleurs, la multiplicité des tracés qu'on fait pour parvenir à un résultat, est encore une autre source d'erreurs. Mais voici, pour diviser une droite en parties égales, un tracé exempt de tout inconvénient, qui a de plus le grand avantage de pouvoir être employé aussi facilement sur le terrain que sur le papier (*).

Deuxième procédé : Par l'une des extrémités de la droite AB qu'il s'agit de diviser, par exemple, en trois parties égales (P. III, F. 9), tracez une droite quelconque AC et portez dessus la longueur arbitraire AG, une fois de plus que AB doit avoir de parties, c'est-à-dire quatre fois, dans le cas actuel. *Joignez ensuite les extrémités* C, B, et sur le prolongement de CB, prenez BH=BC. La droite IH tirée du second point de division de CA, à partir de C, coupera AB de manière que BL en sera le tiers, et si vous portez cette partie BL de L en K, les parties BL, LK, KA seront égales.

En effet, la droite BE menée de B au premier point de division de AC, serait parallèle à IH, puisque ces deux lignes diviseraient en parties égales, les concourantes HC et IC (78). Tirant donc CK parallèlement à IH, on aurait trois parallèles qui diviseraient AE en trois parties égales. La concourante AB, serait, par conséquent, divisée de la *même manière*, aux *points* L et K ; *d'où il suit que* BL est bien le tiers de AB.

Afin de pouvoir marquer le point L très-exactement, il faut faire en sorte que HI soit presque d'équerre sur AB. Or, il en sera ainsi, lorsqu'on prendra la longueur arbitraire AG assez grande pour que AE *surpasse un peu* AB, *l'angle* BAC *étant d'environ* 60°.

App. (*a*) : C'est au moyen du tracé précédent, qu'on divise l'échelle d'un plan. Cette échelle est nécessaire, pour qu'on puisse dessiner en petit, les objets qui doivent être ou qui sont exécutés en grand, et les représenter, de façon que le plan fasse connaître leurs vraies dimensions.

« On convient de prendre une certaine longueur, pour chaque toise ou chaque mètre : par exemple, une ligne dans le premier cas, un millimètre dans le second, et quand un objet à 3 mètres de hauteur, *on lui donne sur le dessin* 3 *millimètres*. Si, pour opérer ainsi, on veut faire une échelle qui représente 100 mètres, on tire sur le papier une droite à laquelle on donne 100 millimètres de longueur ou 1 décimètre. Il faut ensuite la diviser en 10 ou en 20 parties, pour qu'on puisse y prendre aisément des longueurs de 10 ou de 5 mètres. Il faut aussi diviser une au moins de ces parties, en 10 ou en cinq autres, pour qu'on puisse prendre 1, 2, 3, 4 mètres, et la partie d'un mètre doit encore être subdivisée en 10 parties, etc. Or, on ne pourrait obtenir toutes ces divisions avec exactitude, en appliquant un décimètre sur la droite qui représente 100 mètres, et marquant des points

(*) Ce procédé m'a été communiqué par M. Chenou, proviseur du collége royal de Metz, et ancien professeur des cours industriels de Douai.

vis-à-vis des lignes de la mesure. Les tracés du n° 78 sont donc indispensables ; il est également indispensable de prendre, en les exécutant, toutes les précautions que nous avons indiquées ; car, pour peu que les divisions d'une échelle soient inexactes, il est impossible de parvenir à construire avec précision, l'objet représenté par le dessin ; des erreurs très-graves peuvent même en résulter. »

Appl. (*b*) : Les ouvriers de toute espèce ont souvent besoin aussi, dans leurs tracés, de diviser une droite en un certain nombre de parties égales. La plupart n'y parviennent que par un tâtonnement, et souvent, impatientés de ne pouvoir, avec le compas, réussir à tomber juste sur une extrémité de la droite, en partant de l'autre, ils se contentent d'un à-peu-près. Cette manière de travailler est extrêmement préjudiciable à l'industrie : il y a parfois dans les machines, des frottemens, des à-coups, des arêts, etc. ; qui n'ont pas d'autre cause. Nous ne pouvons donc trop recommander l'usage du dernier des deux procédés qui viennent d'être exposés.

79. Le principe le plus général que fournisse la combinaison des parallèles et des concourantes, est celui-ci : *Si de deux concourantes, l'une est divisée par des parallèles, en parties qui soient dans un certain rapport, les parties correspondantes de l'autre sont dans le même rapport.*

Supposons, pour le démontrer, les concourantes AB CD (P. III, F. 10) et les parallèles AC, FG, BD qui divisent la première AB en deux parties BF, AF, telles que leur rapport soit 3. Il faudra faire voir que les parties DG correspondante de BF, et CG correspondante de AF, ont aussi 3 pour rapport. Or, nous pourrons porter AF trois fois sur BF (15), ce qui nous donnera les points H, I ; nous pourrons aussi mener par ces points, des parallèles à BD, ce qui nous donnera sur CD, les points K, L. Alors, CG, GK, KL, LD seront égales, puisque AF, FH, HI, IB le sont (78). Donc, GD contient CG trois fois, autant de fois que BF contient AF. Donc, le rapport des deux parties de AB, est égal au rapport des deux parties de CD, et ces 4 droites forment la proportion, BF : AF : : DG : CG.

Il est aisé de voir qu'au moyen du même raisonnement, on démontrerait la justesse de la proportion AE : AB : : CE : CD. Conséquemment, *deux concourantes sont toujours divisées en parties proportionnelles, par leur intersection et des parallèles.*

80. Réciproquement, *si deux concourantes* AB, AC *sont divisées en parties proportionnelles par leur intersection* A *et des transversales* DE, BC, *ces transversales sont parallèles entre elles* (P. III, F. 11).

D'après cet énoncé, on a AD : DB : : AE : EC. Mais, si BC n'était pas parallèle à DE, on pourrait mener par B, une droite BF parallèle à DE, ce qui donnerait AD : DB : : AE : EF. La droite AE contiendrait donc la droite EF, autant de fois qu'elle contient EC qui est plus petite que EF. Cela ne peut être, et, par conséquent, on ne peut mener par B, une droite qui soit parallèle à DE et qui ne se confonde pas avec BC. Donc, BC est vraiment parallèle à DE.

S'il y avait trois transversales, on démontrerait d'abord que FG (F. 10) est parallèle à AC, en vertu de la proportion AE : AF : : CE : CG, et ensuite que BD est aussi parallèle à AC, en vertu de la proportion AE : AB : : CE : CD.

PROBL. (*a*): Ce principe fournit un moyen fort simple de *tracer une parallèle, par un point donné sur le terrain*, quand toutefois ce terrain est exempt d'obstacles et que les parallèles ne doivent pas être fort écartées.

Mesurez une droite AC dirigée du point marqué A, à la droite donnée CD (P. III, F. 12); puis prenez sur AC, une partie CE qui en soit la moitié ou le tiers, le quart, le dixième, etc. Tracez ensuite par E, une concourante DE qui fasse avec AC le plus grand angle possible, et portez DE sur son prolongement EB, autant de fois que CE est contenue dans AE; vous obtiendrez ainsi un point B tel que la droite AB sera parallèle à CD, car les concourantes AC, BD se trouveront divisées en parties proportionnelles, par les transversales AB, CD, et le concours E.

PROBL. (*b*) : *Trouver une quatrième proportionnelle à trois droites données* A, B, C (P. III, F. 13); c'est-à-dire, déterminer la longueur d'une droite inconnue X qui soit telle qu'on ait A : B : : C : X.

Je tire deux concourantes quelconques DE, DF; je porte sur l'une des deux, la droite A de D en G, et la droite B de G en H; je porte la troisième droite C sur DF, de D en I; je joins G et I; je mène par H une parallèle à GI, et IK est la droite cherchée, représentée par X; car en vertu du principe 79, le rapport de DG à GH ou de A à B est égal à celui de DI à IK ou de C à X.

Le procédé est le même, quelle que soit la place de la droite inconnue X dans la proportion. Il ne s'agit que d'avoir l'attention de porter sur la même droite DE, les deux termes du rapport connu, et de joindre l'extrémité du premier terme de ce rapport à l'extrémité du premier terme de l'autre, ou de joindre les extrémités des deux seconds termes, s'ils sont connus tous deux. Au reste, si X est un moyen, on peut mettre les moyens à la place des extrêmes, afin de retomber dans le cas précédent (72).

PROBL. (*c*) : *Trouver une troisième proportionnelle à deux droites données* A, B (P. III, F. 14).

Il est sous-entendu, pour un tel tracé, que l'une des droites données, celle qui est désignée la dernière, doit être répétée dans la proportion et former soit les deux moyens, soit les deux extrêmes. La droite cherchée X devra donc avoir une longueur qui convienne à la proportion A : B : : B : X, par exemple. Le procédé précédent suffit pour déterminer cette longueur.

Tirez deux concourantes CD, CE; portez A de C en F et B de F en D; portez encore B de C en G; tirez FG, puis une parallèle DE, et GE sera la droite demandée, car CF : FD : : CG : GE (79), proportion qui donne cette autre A : B : : B : GE.

Si l'on devait avoir B : A : : X : B, on ferait retomber ce cas dans le précédent, en mettant les moyens à la place des extrêmes (72).

Applications : Vous verrez par la suite, que les deux derniers tracés font partie de plusieurs autres : ils sont élémentaires, comme les tracés des perpendiculaires et des parallèles. On peut aussi employer le premier pour imiter, en petit ou en grand, une figure géométrique, quand les longueurs des lignes de cette figure ne sont pas données en nombres, et que, par suite, on ne peut se servir d'une échelle. Mais cette opération se fait plus brièvement, à l'aide d'un instrument nommé *compas de proportion*. Nous le ferons connaître, après que nous aurons démontré le principe suivant sur lequel il est fondé.

81. *Les parallèles comprises entre deux concourantes, sont proportionnelles aux distances du concours à leurs extrémités correspondantes*; c'est-à-dire que AB : CD : : AE : CE ou : : BE : DE (P. III, F. 15).

Traçons par C, la droite CF parallèle à BE; nous aurons (79) AF : FB : : AC : CE ou (74) AF + FB : FB : : AC + CE : CE. Mais AF + FB = AB, AC + CE = AE. Donc, AB : FB : : AE : CE. Or, FB = CD, ce sont des parallèles comprises entre parallèles (65). Donc enfin, AB : CD : : AE : CE.

On a aussi AB : CD : : BE : DE, puisque le rapport de BE à DE égale celui de AE à CE.

Il en serait encore de même, si l'intersection E se trouvait entre les parallèles, comme dans la figure 12 : on aurait toujours AB : CD : : AE : CE; car, CF parallèle à BD donnerait AB : BF : : AE : CE, et BF = CD.

Problème 1. *Diviser une droite donnée* AC *en deux parties qui aient un rapport déterminé* (P. III, F. 12).

Menez par les extrémités A, C, deux parallèles quelconques AB, CD, et si le rapport est un nombre, 2 par exemple, prenez sur l'une des parallèles une partie quelconque CD, puis portez-la deux fois de A en B. Tirez alors BD; le point E où elle coupera AC, sera tel, que AE se trouvera double de CE.

En effet, si l'on regarde CD comme étant 1 pied, 1 mètre, etc., AB sera 2 pieds, 2 mètres, etc., et puisque (81) AB : CD : : AE : CE, on aura 2 : 1 : : AE : CE ou (70) AE = 2CE.

Dans le cas où le rapport serait exprimé par deux nombres, comme $\frac{3}{2}$, vous porteriez trois fois une ouverture de compas quelconque sur CD, quatre fois la même ouverture sur AB, et alors CE serait les $\frac{5}{4}$, de AE. Enfin, si le rapport devait être celui de deux droites données, il faudrait porter l'une de ces droites sur CD et l'autre sur AB, pour avoir les extrémités de BD.

« Ce tracé nous servira par la suite, pour diviser une circonférence, un arc, un angle, en un nombre quelconque de parties égales. »

Appl. (*a*) : Copier en petit, un tracé exécuté en grand, et dessiner un objet géométriquement, en diminuant les dimensions, seraient des opérations fort longues, s'il fallait, pour réduire chaque droite, chercher une 4ième proportionnelle à trois droites dont deux du modèle et une de la copie. La réduction serait encore longue et fastidieuse, si l'on mesurait exactement toutes les droites du tracé ou de l'objet, afin de pouvoir employer une échelle. D'ailleurs la construction de cette échelle ne serait pas sans difficulté, si les divisions devaient être petites. Il est donc très-avantageux d'avoir un procédé qui n'oblige ni au tracé du problème (*b*), p. 78, ni à l'emploi d'une échelle : c'est le principe 81 qui le donne.

«*Angle de réduction :* Tracez une droite quelconque AB (P. III, F. 16), et si vous voulez *tiercer*, par exemple, c'est-à-dire *réduire au tiers* ou ne donner aux lignes de la copie, que le tiers de la longueur des lignes du modèle, portez trois fois sur AB une ouverture de compas arbitraire. Vous marquerez par là un point C. De ce point comme centre, et avec la même ouverture de compas, décrivez un arc de cercle au-dessus ou au-dessous de AB. De A et avec le rayon AC, décrivez un arc qui coupe le premier en D. Enfin, tirez AD : vous aurez l'*angle de réduction* BAD. »

« Maintenant, soit EF une droite du modèle ; vous la prendrez pour rayon, et du point A, vous décrirez, avec ce rayon, un arc GH dont la corde sera précisément la droite qui, dans la copie, devra correspondre à EF. »

« Pour faire voir qu'il en est ainsi, il faut démontrer que la droite GH est le tiers de AG. Or, GH est parallèle à la corde CD, puisque AC égale AD et que AG égale AH (80) ; on a donc GH : CD : : AG : AC (81), ou, en échangeant les moyens de place, GH : AG : : CD : AC. Mais CD a été pris égal au tiers de AC ; par conséquent, GH est aussi le tiers de AG. »

« Pour toute autre droite du modèle, on ferait ce qu'on a fait pour EF, et le dessin en petit ne contiendrait que des droites égales chacune au tiers de la droite correspondante du dessin en grand ou de l'objet copié. »

Appl. (*b*) : Le procédé qui vient d'être indiqué pour réduire, est certainement plus long à démontrer qu'à mettre en pratique. Néanmoins, on l'abrége encore en se servant du *compas de proportion*. Cet instrument, dont doit être muni tout dessinateur, est ordinairement en laiton ; et sa forme est absolument celle d'un pied-de-roi, c'est-à-dire qu'il se compose de deux règles réunies par une charnière. Sur chaque règle est tracée une droite exactement divisée en parties égales, numérotées par dixaines, et chacune de ces droites AB, AC passe par l'extrémité A de l'axe de la charnière (P. III, F. 17).

« Veut-on, à l'aide d'un tel compas, réduire au sixième, on prend une des parties égales, avec un compas ordinaire; on pose l'une des pointes sur le point qui termine la sixième partie de AB, et l'on écarte ou l'on rapproche les deux règles, jusqu'à ce que l'autre pointe puisse se placer sur le point qui termine la sixième partie de AC; ou bien on prend dix parties égales et l'on pose les pointes du compas sur les deux points marqués 60 : comme 10 est $\frac{1}{6}$ de 60, l'écartement des deux points se trouve encore $\frac{1}{6}$ de la distance 60. A. »

« L'instrument est alors ouvert convenablement, et il doit conserver la même ouverture pendant toute la réduction. Pour l'opérer, cette réduction, il suffit de prendre avec le compas ordinaire, une droite du modèle, de la porter sur AB, de A en un point que je supposerai numéroté 20, et de prendre avec ce même compas, l'écartement des deux points 20 marqués sur les règles. »

« Il est visible, d'après cela, qu'on agit en se servant du compas de proportion, comme en se servant de l'angle de réduction. La démonstration faite sur la figure 16 suffit donc. »

« Si, au lieu d'indiquer par un rapport numérique, quelle doit être la réduction, on l'indiquait par le rapport de deux droites tracées, une grande et une petite, il faudrait porter la grande de A en un autre point D de AB, prendre la petite avec le compas ordinaire, et ouvrir ou fermer le compas de proportion, jusqu'à ce que, l'une des pointes étant sur D, l'autre se plaçât sur E, point de AC portant le même numéro que D. »

« Pour copier en grand, ce serait le contraire: la plus petite des deux droites devrait être portée sur AB, à partir de A, et la plus grande déterminerait l'ouverture de l'angle BAC. Mais, on ne peut pas toujours se servir du compas de proportion, pour copier en grand: il est impossible, par exemple, qu'il donne une ligne triple d'une autre, puisque, pour en donner une double, il doit être tout à fait ouvert. Au reste, ce compas n'est utile pour le dessin des copies en grand, que dans le cas où le rapport est exprimé par l'unité suivie d'une fraction, comme une fois et demie, une fois et tiers, etc. S'il s'agit de doubler, il est plus court de porter chaque ligne du modèle deux fois de suite, sur la ligne correspondante de la copie; s'il faut tripler, on l'y porte trois fois. »

Appl. (c) : Le *compas à quatre pointes* n'a pas l'inconvénient du compas de proportion : il convient à tous les cas qui peuvent se présenter dans la pratique; en outre, il abrège les opérations, attendu que des deux compas opposés qu'il présente, l'un donne la ligne réduite ou augmentée, dès que l'autre a ses pointes sur les extrémités de la ligne du modèle.

« La charnière peut être déplacée, c'est-à-dire que le pivot A

(P. III, F. 18) peut glisser dans une mortaise à jour, pratiquée sur chacune des branches BC, DE; on le rend fixe, au moyen d'un écrou de pression semblable à celui des compas ordinaires, et des divisions marquées sur l'une des branches, indiquent les positions que doit avoir ce pivot, par exemple, pour la réduction à moitié, au tiers, au $\frac{1}{10}$ etc. Un taquet qui empêche les branches de glisser l'une sur l'autre, permet d'opérer le changement de position, sans détruire l'égalité des branches du grand compas, ni celle des branches du petit.»

« Supposons qu'il s'agisse de réduire au tiers; vous placerez l'indicateur F sur la ligne portant le n° 3. Alors, le pivot partagera BC, DE chacune en deux parties dont l'une sera le tiers de l'autre. Les droites BD, CE que vous pouvez vous imaginer d'une pointe à l'autre, dans chaque compas, se trouveront donc parallèles (80), et conséquemment CE sera le tiers de BD (81). Ouvrez plus ou moins l'instrument, ces droites ne cesseront pas d'être parallèles, ni d'avoir le même rapport. Vous voyez donc qu'il vous suffira, pour réduire, de prendre, avec le grand compas, les lignes du modèle, et de faire, avec le petit, les lignes correspondantes de la copie. Pour tripler, ce serait le contraire : le petit compas servirait pour le modèle, et le grand, pour la copie.

Appl. (*d*) : Quand une échelle qui représente un certain nombre de mètres, offre pour chaque mètre, une longueur qui ne permet pas d'y marquer distinctement et avec exactitude, les décimètres ou dixièmes on trace ce qu'on appelle l'*échelle des parties*, au moyen de laquelle les décimètres peuvent être pris exactement et facilement.

« Soit AC (P. III, F. 19) une échelle de 4 mètres, telle que A. I, le mètre, soit d'une longueur trop petite pour qu'on puisse le diviser en dix parties bien distinctes. On enlève au point A, sur AC, une perpendiculaire AB, et sur cette perpendiculaire, on porte dix fois, une ouverture de compas arbitraire, assez grande pour qu'on puisse bien distinguer les uns des autres, les points 1, 2, 3.... 9, 10. par les points I, II, III, IV, on mène parallèlement à AB, les droites équidistantes I.o, II.I, III.II, IV.III, C.IV. Enfin, on tire les obliques Ao, I.I, II.II, III.III, IV.IV, et l'on trace dix parallèles à AC, par les points 1, 2.... 10. Ces parallèles sont coupées en parties égales, par les parallèles I.o II.I, etc. (65), ce qui rend 3E.... 9D, DF, IV.C égales entre elles et chacune égale à 1 mètre. »

« De plus, les parties de AB, comprises entre A et les points de division, sont proportionnelles aux portions de parallèles comprises entre AB et Ao (81), ce qui donne A1 : A.10 : : 1G : 10.o. Or, A1 est la dixième partie de A.10; donc, 1G est aussi la dixième partie de 10.o ou d'un mètre, c'est-à-dire un décimètre. On a de même A3 : A.10 : : 3 H : 10.o, et puisque A3 vaut 3 dixièmes de A.10, 3H vaut aussi 3 dixièmes de 10.o ou 3 décimètres. »

« Remarquons encore que, d'après l'égalité des parties de AC et de celles de 10.IV, les obliques Ao, I.I, II.II.... sont parallèles (66), et que, par conséquent, 1K, KL.... valent chacune un mètre

Il sera visible alors que les mètres peuvent être pris entre les perpendiculaires ou entre les obliques, soit sur AC, soit sur 10.IV, soit sur l'une quelconque des parallèles qui coupent AB; que si, par exemple, on a besoin d'une longueur de 3 mètres 6 décimètres, il faudra, pour l'obtenir, poser l'une des pointes du compas sur K, point de l'oblique III.III, et l'autre pointe sur 6; enfin, que n'étant pas obligé de poser ces pointes toujours sur la même droite AC, on est moins exposé à faire des trous, aux points de division, ou à mettre l'échelle hors de service. »

« L'échelle des parties a donc deux propriétés importantes : celle de donner des subdivisions très-petites, aussi exactement qu'il est possible, et celle d'offrir constamment des divisions exemptes d'altération. On sent, d'après cela, qu'un dessinateur ne peut se passer d'une semblable échelle, quand il exécute sur le papier, des tracés dont les longueurs lui sont données en nombres; aussi la trouve-t-on souvent toute faite, sur la règle qui termine le rapporteur. »

« Il est à peine nécessaire de dire, que si les divisions de AC représentaient des décimètres, 1G serait 1 centimètre; 3H, 3 centimètres, etc.; et que si ces mêmes divisions représentaient des pieds, il faudrait couper AB, par 12 parallèles à AC pour que 1G valût 1 pouce; 3H, 3 pouces, etc. En général, *une échelle des parties doit avoir autant de parallèles à l'échelle* AC *des divisions principales, que chacune des parties est contenue de fois dans l'une des divisions.* »

APPL. (*e*) : Le principe du n° 81 est propre encore à montrer l'*influence de l'écartement des points sur la direction des droites.*

« Lorsque nous avons exposé le tracé géométrique d'une parallèle à une droite (p. 56), nous avons prescrit de ne pas marquer le second point directeur de cette parallèle, très-près du point donné, par la raison qu'une légère erreur dans le placement de la règle, donnerait une droite qui, si elle était prolongée, finirait par s'écarter beaucoup de la vraie parallèle. La même précaution doit être prise toutes les fois qu'il s'agit de faire passer une droite par deux points à déterminer : on sera d'autant moins exposé à s'écarter de la vraie position de la droite, que les deux points seront plus éloignés l'un de l'autre. »

« Supposons que vous ayez à mener une droite par deux points A, B écartés seulement d'un pouce (P. III, F. 20), et que vous placiez la règle à un quart de ligne au-dessus de l'un B de ces points; vous obtiendrez une droite telle que AC, au lieu de la droite AD qu'il s'agissait de tracer. Marquons sur AD, des parties égales à AB ou d'un pouce, et par les points B, E, F, G, D qui en résultent, élevons des perpendiculaires à AD. Ces perpendiculaires seront parallèles; par suite, proportionnelles à leurs distances au point A (81), et l'on aura EI : BH : : EA : BA. Or, EA est double de BA; donc, EI est aussi double de BH et vaut une demi-ligne. Vous trouverez de la même manière que FK est de trois quarts de ligne, que GL est d'une ligne, et que DC vaut cinq quarts de ligne. »

« Si donc votre droite doit avoir un pied de long, l'extrémité de celle que vous tirerez, se trouvera écartée de 3 lignes de celle qui aurait dû être tracée (47); au lieu que si vous eussiez pris pour points directeurs, A et G distans de 4 pouces, et que vous eussiez fait une erreur, comme ci-dessus, en plaçant la règle à un quart de ligne au-dessus de G, l'erreur à un pied n'eût été que de trois quarts de ligne. »

82. Du principe 81 on déduit cet autre: *Des parallèles* AB, CD, *etc., sont divisées en parties proportionnelles, par des transversales* GC, GE, GE, *etc., qui partent du même point* G (P. III, F. 21); c'est-à-dire que CE : AH : : EF : HI.

On sait déjà que CE : AH : : GE : GH et que EF : HI : : GE : GH. Donc, à cause du rapport commun GE : GH auquel chacun des deux autres est égal, les deux premiers rapports sont égaux entre eux, et l'on a CE : AH : : EF : HI.

Problème : *Diviser à la fois un nombre quelconque de droites* a, k, m, *etc., en un même nombre de parties égales* (P. III, F. 21).

Portez sur une droite CD, une longueur arbitraire CE autant de fois que *a*, *k*, *m* doivent avoir de parties chacune, trois fois par exemple. Marquez un point G qui soit à une distance CD de C et de D (6), puis, tirez CG; DG. Prenez ensuite successivement la longueur *a*, pour la porter de G en A et en B; la longueur *k*, pour la porter de G en K et en L; la longueur *m*, pour la porter de G en M et en N. Tracez enfin les droites AB, KL, MN et les concourantes GE, GF, par les points de division de CD. Les droites AB, KL, MN seront respectivement égales à *a*, *k*, *m* et se trouveront divisées chacune en trois parties égales, par les concourantes.

D'abord, CD, AB, KL, MN sont parallèles, puisque ces droites divisent de la même manière GC et GD (80); ensuite AB=AG=*a*, KL=KG=*k*, MN=MG=*m*, puisque CD=CG (81); enfin AB, KL, MN sont divisées, par les concourantes, en trois parties égales, comme leur parallèle CD (82).

« Il est aisé de sentir que le tracé précédent donne le moyen d'abréger beaucoup, dans certains cas, les opérations géométriques. »

83. Tous les principes qui résultent de la combinaison des concourantes et des parallèles, peuvent être résumés en un seul que voici : *Lorsqu'un système de concourantes et un système de parallèles se traversent, les concourantes sont divisées en parties proportionnelles, il en est de même des parallèles, et les parties de ces dernières droites sont proportionnelles aux distances du concours à leurs extrémités correspondantes.*

« Probl. (*a*) : *Par un point* A *donné dans un angle* BCD, *tracer une droite qui se terminant aux deux côtés, soit divisée en deux parties égales par le point* (P. III, F. 22). »

« Menez par A, une parallèle AE à l'un CD des côtés de l'angle;

portez CE de E en F ; joignez F et A par une droite; prolongez cette droite jusqu'en G ; FG sera telle, que vous aurez AF=AG, car les concourantes FC, FG se trouveront divisées de la même manière, par les parallèles. »

« PROBL. (*b*) : *Dans un angle* BAC *dont les côtés sont égaux, tracer une droite qui se terminant à ces côtés, soit égale à chacune des parties formées à l'opposite du sommet* (P. III, F. 23). »

« Joignez B, C, par une droite que vous prolongerez, jusqu'à ce que CD soit égale à CA; menez AD, et par C, tracez une parallèle CE à cette ligne; enfin, par E, tracez une parallèle à BC; cette parallèle EF sera égale à BE et à CF, comme il est prescrit. »

« D'abord, BE=CF, car BE : EA : : CF : FA (79), ou bien BE : BE + EA : : CF : CF+FA (75), ou encore BE : CF : : BA : CA, et comme le dernier de ces deux rapports est 1, le premier est 1 aussi. »

« Pour faire voir ensuite que EF=CF, nous mènerons FG parallèlement à AD. Cela donnera une partie CG égale à CF, puisque CD=CA. Or, CG, EF sont égales, comme parallèles comprises entre parallèles; donc EF et CF ont chacune même longueur que CG ; donc elles sont égales entre elles. »

« APPL. (*a*) : Le premier des deux tracés précédens pourrait servir, par exemple, dans le cas où l'on voudrait faire sur l'angle BCD d'un mur (P. III, F. 22), un pan coupé, et qu'une porte, de position donnée, par suite de quelque convenance, dût se trouver au milieu de ce pan. Si le point A était la position de l'axe ou ligne milieu de la porte, FG serait la direction et la longueur du pan coupé.

APPL. (*b*) : Voici à quoi le dernier des deux tracés précédens peut être employé. Si AB et AC (P. III, F. 23) sont en plan (p. 65) deux murs de façade, deux murs qui forment l'encoignure A d'une maison donnant sur deux rues, et si B, C sont les projections horizontales des arêtes verticales de deux fenêtres, on pourra désirer de faire un pan coupé EF qui laisse la même longueur de mur entre soi et chacune des fenêtres, et qui de plus ait cette longueur ; car une telle disposition aurait certainement plus de grace que toute autre. Dans ce cas, il faudrait exécuter sur le dessin ou sur l'épure en grand, le tracé que nous avons décrit, et la figure BEFC représenterait le plan ou projection horizontale du pan coupé et des parties restantes des deux murs. On pourrait donc, d'après ce plan, savoir au juste où devraient être faites les nouvelles encoignures E, F, pour remplir les conditions qu'on se serait imposées.

COMBINAISONS GENERALES DES DROITES.

Parmi les droites que nous avons considérées jusqu'ici, les unes sont assujetties à se couper sous des angles parfois déterminés ; les autres ne se rencontrent jamais. De telles combinaisons ne sont que des cas particuliers : la propriété démontrée dans le n° 79, par exemple, convient seulement à un système de droites dont quelques-unes sont parallèles. Il nous reste donc à étudier les *Combinaisons générales* des lignes droites tracées sur un tableau, c'est-à-dire les combinaisons dans lesquelles rien n'est prescrit, relativement aux positions de ces lignes les unes par rapport aux autres.

84. Quatre droites AB, BC, CA, DE (P. III, F. 24) qui, tracées au hasard, se coupent deux à deux, d'une manière quelconque, forment un système qu'il faut bien se garder de croire dénué de propriétés; il en a de constantes qui sont d'une grande importance, puisqu'elles fournissent les moyens les plus simples d'opérer géométriquement sur le terrain. Pour bien saisir ces propriétés, vous devez remarquer que chaque droite, DE par exemple, est une transversale, par rapport au système des trois autres considérées comme illimitées (p. 53); que sur chacune de ces dernières, elle forme deux parties comprises entre son intersection et celles des deux droites restantes: EA, EB sur AB; FC, FA sur AC; DB, DC sur BC; que de ces six parties, il en est qui ont une extrémité commune : telles sont EA, EB, et EB, DB; enfin, que d'autres sont *séparées* ou n'ont pas d'extrémité commune: EA est séparée de DB par EB, FC est séparée de FA par FA, DB est séparée de FC par DC, et chacune des parties EB, FA, DC est séparée de celle qui la suit dans ce groupe, par une de celles du groupe EA, FC, DB.

Pour former facilement les deux groupes de parties séparées, il convient de partir successivement des trois points E, F, D de la transversale. Les parties comprises entre ces points et les intersections *différentes* des droites coupées, composent un groupe de parties séparées; les parties restantes font l'autre groupe.

Ainsi, partant de E, je prends EA; puis partant de F, je prends FC, parce que C est une intersection différente de l'intersection A à laquelle je viens de m'arrêter; enfin, partant de D, je prends DB, parce que B est différent de A et de C. Je trouve de la sorte, pour les parties séparées relatives à la transversale ED,

1er *groupe :* EA, FC, DB, 2^{e} *groupe :* EB, FA, DC.

Pour les parties séparées relatives à AB, considérée comme transversale du système des trois autres droites, on a :

1er *groupe :* AF, ED, BC, 2^{e} *groupe :* AC, EF, BD.

Pour les parties séparées relatives à la transversale AC, on a:

1er *groupe :* AE, FD, CB, 2^{e} *groupe :* AB, FE, CD.

Enfin, pour les parties séparées relatives à la transversale BD, on a :

1er *groupe :* BE, CA, DF, 2^{e} *groupe :* BA, CF, DE.

85. *Toute transversale* DE *d'un système de trois droites illimitées*

qui se coupent deux à deux, forment sur ces droites six parties telles, qu'il y a égalité entre le produit de trois parties séparées et celui des trois autres; c'est-à-dire que DE considérée comme transversale de AB, BC, CA (P. III, F. 24), donne ce qui suit :

$$EA \times FC \times DB = EB \times FA \times DC.$$

Menons CG parallèlement à AB. Nous aurons (81).

$$EA : FA :: CG : FC$$
$$DB : DC :: EB : CG;$$

et si nous multiplions les termes correspondans, il viendra (73)

$$EA \times DB : FA \times DC :: CG \times EB : FC \times CG.$$

Donc (70)

$$EA \times DB \times FC \times CG = FA \times DC \times CG \times EB.$$

Mais on peut diviser les deux *membres* d'une égalité, par un même nombre, sans l'altérer. Supprimant donc la longueur CG, il restera

$$EA \times DB \times FC = FA \times DC \times EB,$$

ce qui revient à ce qui a été annoncé.

« Cette propriété singulière existe aussi bien pour une des trois autres droites, regardée comme transversale, que pour DE. Des raisonnemens analogues aux précédens montreraient en effet

que pour AB, $AF \times ED \times BC = AC \times EF \times BD$;
que pour AC, $AE \times FD \times CB = AB \times FE \times CD$,
et que pour BD, $BE \times CA \times DF = BA \times CF \times DE$.

« N'est-il pas fort remarquable qu'on ne puisse tracer au hasard, sur un tableau, quatre droites qui se coupent deux à deux, sans qu'il y ait égalité entre le produit de certaines parties et celui des autres? »

« Ce qui prouve bien que ces relations sont les plus générales qu'un système de quatre droites puisse présenter, c'est que celle du nº 79 s'y trouve renfermée. Supposons en effet que la transversale DE devienne parallèle à BC; l'intersection D n'aura plus lieu; on pourra supprimer DB, DC dans l'égalité

$$EA \times FC \times DB = EB \times FA \times DC,$$

et l'on aura seulement

$$EA \times FC = EB \times FA,$$

d'où l'on tirera (71) EA : EB :: FA : FC; c'est-à-dire que DE devenant parallèle à BC, coupe les deux autres droites en parties proportionnelles. »

86. Voici d'autres relations générales qui ne sont pas moins remarquables que les précédentes.

Trois concourantes illimitées et quelconques, menées par les intersections de trois droites illimitées qui se coupent deux à deux, forment sur ces *droites six parties telles, que le produit de trois parties séparées égale celui des trois autres.*

Par exemple, les concourantes illimitées AD, BD, CE (P. III, F. 25) menées par les intersections A, B, C des trois droites AB, BC, CA forment deux parties sur chacune de ces droites, et

$$EA \times GC \times FB = EB \times FC \times GA.$$

Pour démontrer qu'il y a effectivement égalité entre les deux produits, je considérerai d'abord quatre droites seulement : AB, BF, FA et leur transversale CE. Je trouverai, en vertu du principe 85, que

$$EA \times DF \times CB = EB \times DA \times CF.$$

Ensuite, je considérerai les trois droites AC, CF, FA et leur transversale BG. L'égalité fournie par ce système sera la suivante :

$$GC \times DA \times BF = GA \times DF \times BC.$$

Mais il est clair que j'obtiendrai une troisième égalité, en multipliant les membres correspondans des deux premières. Par conséquent,

$$EA \times DF \times CB \times GC \times DA \times BF = EB \times DA \times CF \times GA \times DF \times BC.$$

Divisant de chaque côté par DF, DA, CB ou BC, je vois que

$$EA \times GC \times BF = EB \times CF \times GA,$$

égalité tout à fait pareille à celle qui a été annoncée.

« Une démonstration analogue ferait voir que les trois droites qui concourent en A, coupent les trois autres de manière à donner

$$FB \times EC \times GD = FC \times ED \times GB;$$

que les trois droites qui concourent en B, fournissent

$$GA \times EC \times FD = GC \times ED \times FA;$$

et que les trois droites qui concourent en C, donnent

$$EA \times GB \times FD = EB \times GD \times FA. »$$

87. Mais ces relations sont moins utiles par elles-mêmes que par leurs conséquences.

Supposons que le point G soit le milieu de AC (P. III, F. 25); GA=GC et l'égalité

$$EA \times GC \times FB = EB \times FC \times GA,$$

démontrée dans le numéro précédent, devient

$$EA \times FB = EB \times FC,$$

puisqu'en supprimant GC à gauche et GA à droite, on divise les deux membres par un même nombre d'unités de longueur. Or (71), la dernière égalité donne la proportion

$$EA : EB :: FC : FB$$

qui montre que si l'on trace EF, cette droite se trouve parallèle à AC (80).

De là ce principe : *Si après avoir tiré deux concourantes quelconques* AB, CB, *par les extrémités d'une droite donnée* AC, *et une troisième* GB, *par le milieu* G, *on en mène, par les mêmes extrémités, deux autres* AF, CE *qui se croisent sur celle du milieu, les intersections* E, F *des deux premières et des deux dernières, déterminent une parallèle à la droite donnée.*

La réciproque est également vraie, c'est-à-dire que *les concours* B, D *des deux groupes de transversales qui joignent les extrémités de deux parallèles* AC, EF, *déterminent une droite* BD *dont le prolongement passe par le milieu* G *de la plus grande.*

PROBL. (*a*) : *Tracer, par alignemens, une droite qui soit parallèle à une autre* AC *et qui passe par un point donné* E (P. III, F. 25).

Prenez, avec un cordeau ou avec une perche, une longueur arbitraire ; portez-la sur AC, à partir d'un point quelconque A et deux fois de suite ; plantez verticalement des jalons aux points G, C qui en résultent ; plantez-en aussi sur A et sur E ; mettez un cinquième jalon en D, point quelconque de EC, un sixième en B concours des alignemens AE, GD, et un septième en F, rencontre des alignemens AD, BC. La direction EF sera celle de la parallèle demandée.

Vous voyez que ce tracé, applicable à toute espèce de localité, n'exige que des jalons et une perche ou un cordeau de longueur quelconque. Si le terrain est accidenté, les parties égales AG, GC doivent être portées sur AC, horizontalement, c'est-à-dire qu'il faut tenir la perche de niveau, en portant la longueur arbitraire deux fois de suite sur la droite donnée. Du reste, ce qui a été démontré (p. 83) touchant l'influence de l'écartement des points sur la direction d'une droite, fait voir qu'il importe de placer les jalons, à la plus grande distance possible les uns des autres.

PROBL. (*b*) : *Élever une perpendiculaire au milieu d'une longue droite* AB *donnée sur le terrain* (P. III, F. 26).

Il n'y a pas possibilité d'opérer comme dans le probl. (*a*) de la p. 41, à cause de la grandeur du rayon qu'il faudrait prendre pour décrire les petits arcs. A la vérité, on pourrait déterminer le milieu I de AB, par le tracé du probl. de la p. 79 et recourir ensuite au probl. (*c*) de la p. 42, pour élever la perpendiculaire demandée. Mais, si le milieu I était inaccessible ou si ses abords présentaient des obstacles au tracé des arcs, il y aurait nécessité d'employer le procédé suivant.

Choisissez la partie de la droite dont les abords soient le plus libres, AC par exemple ; élevez une perpendiculaire au milieu de cette partie, ou bornez-vous à décrire, des extrémités A, C, deux petits arcs de même rayon, qui se coupent en D ; menez par B une parallèle à CD ; marquez le concours E de cette parallèle et de AD ; marquez aussi la rencontre F de BE avec FG, parallèle à AB menée par un point quelconque G de AE ; marquez enfin le croisement H de AF et de BG. La droite EH se trouvera perpendiculaire au milieu I de AB.

La réciproque du n° 87 montre d'abord que le prolongement de EH doit passer par le milieu I de AB. Mais le point E est aussi également éloigné de A et de B, car BE=EA, puisque CD=DA (81). La droite EH a donc deux points E, I, situés chacun à la même distance de A et de B ; elle est donc en effet perpendiculaire au milieu de AB (43).

Si KL était la partie choisie sur AB, vous marqueriez le point M comme il a été prescrit pour D ; vous meneriez par A, AE parallèle à KM, et par B, BE parallèle à LM ; puis vous achèveriez comme précédemment.

Les concourantes AE, BE seraient encore égales, car l'égalité KM=ML donne cette autre KN=NB, et de celle-ci résulte que AE=EB.

88. *Les milieux de deux parallèles* AC, EF *et les concours* B, D *des deux groupes de transversales qui en joignent les extrémités, sont toujours en ligne droite* (P. III, F. 25).

D'abord, la droite BD passe par le milieu G de AC, en vertu du principe précédent. Ensuite, elle passe par le milieu de EF, puisque des parallèles sont divisées de la même manière par des concourantes (82).

Il s'ensuit qu'on peut d'un point de BE, mener une parallèle à EF, en tirant de E et de F, deux nouvelles concourantes qui se croisent sur BG. Ainsi, une fois qu'on a tracé par alignemens, une parallèle à une droite donnée, il n'y a plus besoin de mesure, pour mener autant d'autres parallèles à la même droite, qu'il est nécessaire.

PROBLÈME : *Tracer par un point* A, *au moyen d'alignemens, une parallèle à deux parallèles* BC, DE *données sur le terrain* (P. III, F. 27).

Vous planterez verticalement un premier jalon en un point quelconque F ; un second en A ; un troisième B sur BC, dans l'alignement AF ; un quatrième D sur DE, dans l'alignement BAF ; un cinquième C en un point quelconque de BC ; un sixième E sur DE, dans l'alignement FC ; un septième G à l'intersection des alignemens BE, CD ; un huitième H à l'intersection des alignemens GF, AC ; enfin, un neuvième I à l'intersection des alignemens ECF et BH, ce qui vous donnera l'autre extrémité de AI parallèle à BC et à DE.

Remarquez que le point A pourrait être donné entre les parallèles BC, DE, sans que le tracé changeât.

Si la droite BC présentait deux points remarquables B, C, et qu'un point E de DE fût aussi très-visible, on pourrait exécuter l'opération sans aller à ces points, ou quoiqu'ils ne fussent pas accessibles. Dans ce cas, vous planteriez le jalon D sur l'alignement BA, le jalon F à l'intersection des alignemens DBA, EC, et vous terminerez comme précédemment.

Il est possible que l'angle DFE se trouve trop aigu pour qu'il soit très-facile de planter exactement le jalon F, à l'intersection des alignemens DBA, EC. Mettez alors un jalon f au point où les objets B, C commencent à vous masquer le jalon D et l'objet E; puis un autre jalon f' au point où les mêmes objets cessent de masquer D, E; et plantez le jalon F au milieu de ff' : il se trouvera assez exactement sur l'intersection des deux alignemens DBA, EC. C'est ainsi qu'il faut agir toutes les fois qu'on doit placer un jalon à l'intersection de deux alignemens qui font un angle très-aigu; mais il convient d'éviter de tels cas.

Les personnes qui ne sont pas habituées à opérer sur le terrain, trouveront peut-être quelque difficulté à planter un jalon G, dans un alignement BE dont les extrémités sont inaccessibles. Voici comment il faut s'y prendre. On place près de l'alignement BE, deux hommes K, L qui tiennent chacun un jalon devant soi; K fait face à l'objet B, L au jalon K, et l'alignement KL passe par B. Les choses ainsi disposées, l'homme L marche vers la droite BE, en regardant toujours le jalon K; l'autre suit le mouvement, de manière à rester toujours sur l'alignement BL, et tous deux s'arrêtent, dès que le jalon K cache l'objet E à l'œil de l'homme L. Ils se trouvent alors l'un en L', l'autre en K', sur l'alignement BE, et ils y plantent leurs jalons, il devient facile de trouver l'intersection G des alignemens CD, BE. Pour cela, un observateur se place en D; un autre en K', et ils dirigent par des signaux ou à la voix, l'homme qui est chargé de planter le jalon G.

Si l'on opérait seul, on planterait deux jalons auxiliaires, l'un M sur l'alignement DC, l'autre N sur l'alignement BE; puis on placerait le jalon G, par le moyen employé pour F.

89. Quatre droites illimitées AB, BC, CD, DA qui se coupent deux à deux (P. III, F. 28), fournissent en général six intersections A, B, C, D, E, F; ces points joints deux à deux donnent trois transversales AC, BD, EF qui, suffisamment prolongées, se rencontrent en G, G', G''; et un pareil système jouit constamment de la propriété qu'exprime le principe suivant :

Chacune des trois transversales fournies par les six intersections de quatre droites illimitées qui se coupent deux à deux, est divisée en quatre parties proportionnelles par les deux autres; c'est-à-dire que, par exemple, GE : GF : : G'E : G'F.

Considérons d'abord les trois droites AE, EF, FA et leur transversale BG'. En vertu du principe 85,

$$BA \times DE \times G'F = BF \times DA \times G'E.$$

Considérons ensuite les mêmes droites AE, EF, FA, et les trois concourantes illimitées AC, EC, FC menées par leurs intersections.

En vertu du principe 86,

$$BF \times DA \times GE = BA \times DE \times GF$$

Multipliant les membres correspondans de ces deux égalités, nous trouverons que

$$BA \times DE \times G'F \times BF \times DA \times GE = BF \times DA \times G'E \times BA \times DE \times GF.$$

Mais, nous pouvons supprimer de chaque côté les facteurs BA, DE, BF, DA, sans détruire l'égalité, puisque cela revient à diviser les deux membres, par les mêmes nombres d'unités de longueur. Conséquemment,

$$G'F \times GE = G'E \times GF.$$

et cette égalité fournit la proportion annoncée

$$GE : GF :: G'E : G'F \ (71)$$

Des raisonnemens analogues montreraient que sur la transversale BG',

$$G''D : G''B :: G'D : G'B,$$

et que sur la transversale AG,

$$G''C : G''A :: GC : GA.$$

90. Lorsque deux points G, G' (P. III, F. 28), placés l'un sur une droite EF, l'autre sur le prolongement, sont tels qu'on a la proportion GE : GF : : G'E : G'F, ils sont dits *conjugués* : ce nom signifie que ces deux points dépendent l'un de l'autre, de manière que si l'on marque G arbitrairement sur EF, la position de G' est tout à fait déterminée.

C'est qu'en effet il n'y a qu'une seule position du point G' qui puisse rendre le rapport de G'E à G'F égal au rapport de GE à GF. Si vous prenez, par exemple, la position g plus voisine de E, vous retranchez la même longueur G'g à G'E et à G'F; une position g' plus éloignée de E que G', ajouterait une même longueur G'g' à G'E et à G'F. Or, on change un rapport, lorsqu'on diminue ou qu'on augmente d'un même nombre les deux termes : par exemple, le rapport $\frac{3}{4}$ n'est pas égal au rapport $\frac{3-2}{4-2}$ ou $\frac{1}{2}$, ni au rapport $\frac{3+2}{4+2}$ ou $\frac{5}{6}$. Le rapport de gE à gF ou celui de g'E à g'F ne serait donc pas le même que le rapport de G'E à G'F, et par conséquent, il n'y a que le point G', concours des deux transversales BG', FG', dont les distances aux extrémités de EF soient proportionnelles aux parties GE, GF.

Ainsi, *deux points conjugués sont placés l'un sur une droite et l'autre sur le prolongement, de telle façon que le rapport des distances du premier aux deux extrémités de la droite, égale le rapport des distances du second aux mêmes extrémités.*

Bien entendu que, si la plus petite des deux distances de l'un des points, forme le premier terme d'un rapport, le premier terme de l'autre rapport doit être formé aussi par la plus petite des deux distances de l'autre point.

Il s'ensuit que le conjugué d'un point situé plus près de F que de E, serait placé du côté de F, à l'opposite de G'. *Le conjugué d'un point se trouve toujours du côté de la plus petite des deux parties que forme ce point sur la droite donnée.*

Du reste, il est visible que le point milieu G d'une droite AC n'a pas de conjugué (P. III, F. 25); car tant loin qu'on aille du côté de A ou de C, on ne trouvera jamais un point dont les distances à A et à C soient égales, comme celles de G : elles différeront toujours de toute la longueur AC.

Faisons observer enfin que, d'après ce qui précède, G' est aussi le conjugué de G'' (F. 28); que les points G, G'', sont conjugués entre eux, et qu'il en est de même des points E, F, pour la droite GG'; des points B, D, pour la droite G'G'', des points A, C; pour la droite GG''.

PROBL. (*a*) : *Trouver le conjugué d'un point* G *donné sur une droite* EF (P. III, F. 28).

Des extrémités E, F et du point donné G, tirez trois concourantes quelconques EA, GA, FA; des mêmes extrémités E, F, menez deux autres concourantes qui se croisent sur GA, celle du milieu : puis joignez les points B, D où les concourantes extrêmes EA, FA sont rencontrées par les concourantes croisées. L'intersection G' de EF et de BD prolongées, sera le conjugué cherché.

En effet, la figure faite ainsi, présentera toujours quatre droites AB, BC, CE, DA qui seront dans le cas du n° 89, et par conséquent, on aura toujours la proportion

$$GE : GF :: G'E : G'F.$$

PROBL. (*b*) : *Prolonger une droite* EF *au-delà d'un obstacle qui ne permet pas de s'aligner sur deux points de cette droite* (P. III, F. 29).

L'opération consiste à faire d'abord deux fois le tracé précédent, pour un point G, afin d'obtenir deux droites qui, passant par le conjugué de G, concourent précisément en un point du prolongement de EF; puis à faire deux fois encore le même tracé, pour un point de EF autre que G, afin d'avoir deux nouvelles droites qui concourent aussi en un second point du prolongement de EF.

Voici au reste, en détail, comment il faut procéder. Plantez verticalement des jalons en E, F, et deux autres en D, B, points pris arbitrairement, mais plus rapprochés que E, F et tels que l'alignement BD passe de quelque peu au-delà de l'obstacle; placez ensuite un sixième jalon au concours A de ED, FB et un septième au croisement C de EB, FD. L'alignement AC coupera EF en un point G dont le conjugué se trouvera à la rencontre de BD et du prolongement de EF.

Mais, pour déterminer le conjugué de G, par le tracé du problème précédent, on peut faire le croisement en un point quelconque de AG. Plantez donc un huitième jalon en C', par exemple, un neuvième à la rencontre B' des alignemens EC', BF, et un dixième à la rencontre D' des alignemens FC', DE; l'alignement B'D' passera par le conjugué de G, et comme ce conjugué doit être aussi sur BD, il sera au concours G' de BD, B'D'. Si donc vous placez un onzième jalon en G', il se trouvera nécessairement sur le prolongement de EF.

Maintenant, faites absolument les mêmes opérations de l'autre côté de EF, en choisissant deux points *b*, *d* plus rapprochés que E, F et tels que leur alignement passe au-delà de G'. Vous obtiendrez un second point *g'* du prolongement de EF, et par conséquent, l'alignement G'*g'* sera ce prolongement.

Il est à remarquer que le procédé qui vient d'être exposé, convient également au cas où E, F, sont des objets remarquables dont on ne peut approcher; il serait même possible de remplacer le jalon A, par un arbre, un clocher, etc. inaccessible aussi.

Probl. (*c*) *Trouver un point de l'alignement des deux points invisibles où iraient concourir deux à deux, quatre droites données, si elles étaient prolongées.*

Soient les droites AB, CD qui concourraient au point invisible Y (P. III, F. 30), et les droites FF, GH qui concourraient en un autre point invisible Z. Il s'agit de déterminer la position d'un point qui se trouve sur l'alignement YZ.

Plantez verticalement des jalons aux quatre autres intersections A, B, I, K des droites données. L'alignement KB ira couper le prolongement de YZ, au conjugué de L, rencontre de cette droite et de l'alignement AI : cela résulte du problème (*a*). Mais ce conjugué l'est aussi de M (90). Il reste donc à trouver sur le prolongement de KB, le conjugué du point M de cette droite. Vous l'obtiendrez en plaçant un cinquième jalon au point N, pris arbitrairement sur AI, un sixième en O, rencontre des alignemens BN, IK, un septième en P, rencontre des alignemens KN, BI, et un huitième en Q, concours de OP et de KB. Le point Q ainsi déterminé se trouvera nécessairement sur l'alignement YZ des deux concours invisibles.

Probl. (*d*) : *Tracer par un point* A, *une droite qui, prolongée, aille concourir en un point invisible, avec deux droites données* BC, DE (P. III, F. 31).

Plantez des jalons verticalement et en ligne droite, au point A, au point quelconque F de BC, au point G de DE et au point H choisi arbitrairement. Plantez-en aussi au point quelconque I de DE, au point K, rencontre des alignemens BC, IH, au croisement L des alignemens BI, GK, à l'intersection M des alignemens LH, AK, et enfin à la rencontre N des alignemens KH, FM. Le point N déterminera la droite AN de telle manière que, prolongée, elle passerait nécessairement par le concours invisible O de BC, DE.

En effet, O est le conjugué de P, d'après le problème (*a*) ; P et Q ont le même conjugué, d'après le n° 90 ; conséquemment, O est aussi le conjugué de Q, et AN doit passer par O.

Si F, DE, AN étaient le point et les droites données, il faudrait, après avoir planté les jalons A, F, G, H, I, N, en placer un au croisement de AI, GN, pour déterminer l'alignement QH. Le point M serait donné par la rencontre de QH, FN, le point K, par celle de AM, NH, et KF serait la droite demandée.

Appl. (*a*) : Le problème (*b*) s'applique parfois très-utilement au tracé des routes. Supposez qu'une route dirigée selon EF (P. III, F. 29), doive traverser un bois H qui n'est pas encore percé dans cette direction, et que pour aller plus vite, on veuille attaquer ce bois des *deux côtés*. Il faudra que les deux groupes de bûcherons aillent à la rencontre l'un de l'autre, en suivant le même alignement, et pour diriger ceux qui travailleront à l'opposite de EF, on ne pourra se dispenser d'avoir deux points G', *g'* situés sur le prolongement de cette droite.

Appl. (*b*) : Le problème (*c*) peut être d'un grand secours dans l'attaque des places de guerre. Regardons YZ (P. III, F. 30) comme une portion de la face d'un bastion. Il faudra, pour détruire l'artillerie placée sur cette face, établir, dans la campagne, une batterie qui l'enfile, et cette batterie devra avoir une de ses extrémités, en un point du prolongement de YZ. Or, on ne saurait déterminer ce prolongement à l'œil seul, en raison de ce qu'on ne peut apercevoir de loin deux points, ni même souvent un seul point de la face du bastion. Il s'agira donc, en général, de déterminer le prolongement d'une droite invisible YZ. Voici comment on pourra le faire.

« L'officier d'artillerie chargé de l'opération, remarquera sur le terrain, deux sillons AB, CD de boulets partis d'un point Y de la face du bastion, et deux sillons EF, GH de boulets partis d'un autre point Z ; puis, faisant planter des jalons aux intersections de ces quatre droites, il trouvera un point Q du prolongement de YZ. Pour en avoir un autre, il devra remarquer un cinquième sillon creusé par un boulet parti de Y ou de Z, et employer cette nouvelle droite avec trois des précédentes, en répétant le problème (*c*). »

Appl. (*c*) : Si deux allées pratiquées dans un bois, concourent vers la grille d'un château, et qu'on veuille en percer une troisième qui aboutisse au même point O, on doit appliquer le problème (*d*), afin d'avoir un alignement AN qui serve à diriger les bûcherons (P. III, F. 31).

Appl. (*d*) : Le même problème est utile aussi pour le dessin géométrique, quand il s'agit de tracer par un point donné A, une droite qui passe par l'intersection O de deux autres droites BC, DE, et que cette intersection se trouve hors du tableau. Dans ce cas, il faut tirer une transversale quelconque AH, et une seconde transversale HK ; joindre les intersections F, I et G, K ; mener HL et AK ; enfin, joindre

F avec l'intersection M de HL et de AK. Le point de rencontre N de BM et de HK appartient à la droite demandée, et il ne s'agit plus que de tracer AN.

TRACÉ DU CERCLE QUI COUPE DES DROITES.

« Aux combinaisons des droites entre elles, doit succéder, d'après le tableau de la page 7, celles des droites et du cercle. Nous avons déjà exposé ce qui concerne les sécantes isolées; mais il arrive souvent qu'au lieu d'avoir à tracer une droite qui coupe la circonférence, il s'agit de décrire cette courbe de manière qu'elle rencontre une droite en des points déterminés. Nous devons donc nous occuper aussi du tracé d'un cercle assujetti à couper des droites données. »

91. Une droite qui est coupée au point B, par une circonférence (P. III, F. 32), entre nécessairement dans le cercle; il faut donc qu'elle en sorte ensuite ou qu'elle coupe la courbe en un second point C pour lequel on aura AC=AB (5). Mais, elle ne passera que par les deux points B, C de la circonférence A; car si elle pouvait passer par un troisième point de cette courbe, on pourrait mener de A, trois rayons égaux, ou trois droites égales sur la droite BC, ce que nous avons démontré impossible (53). Donc, *une droite et une circonférence ne peuvent avoir plus de deux points communs.*

Voilà pourquoi nous avons dit, en parlant des sécantes isolées (21), qu'il n'est pas possible de tracer une droite qui coupe une circonférence en trois points.

92. *La perpendiculaire abaissée du centre A sur une corde BC, est toujours plus courte que le rayon du cercle* (P. III, F. 32).

Il suffit, pour le faire voir, de prouver que ni le rayon AB, ni le rayon AC ne sont perpendiculaires à BC; car il s'ensuivra que ces rayons sont des obliques, et conséquemment plus grands que la perpendiculaire (46). Or, la droite AB ne peut être perpendiculaire à BC; car, si elle l'était, AC serait une oblique, et il n'y a point d'oblique qui soit égale à la perpendiculaire partie du même point. Comme le même raisonnement s'appliquerait à AC, le principe énoncé est vrai.

Il s'ensuit cet autre : *Pour qu'un cercle coupe une droite, la distance du centre à cette droite, doit être moindre que le rayon.*

Probl. (*a*) : *Tracer d'un point donné A, un cercle qui coupe une droite en un point B* (P. III, F. 32).

Il ne s'agit que de connaître le rayon du cercle; car, pour le tracé, on suivra ce qui est enseigné dans les numéros 4 et 6. Or, puisque la circonférence doit passer par B, son rayon est nécessairement AB.

PROBL. (*b*) : *Tracer un cercle d'un rayon connu, qui coupe une droite en deux points donnés* A, B (P. III, F. 33).

Pour exécuter ce tracé, il ne s'agit que de trouver le centre du cercle. Or, puisque la circonférence doit passer par A et par B, le centre doit être aussi éloigné de l'un de ces points, que de l'autre (5), et son éloignement doit être égal au rayon donné CD (4). Si donc des points A, B, avec une ouverture de compas égale à CD, on décrit deux petits arcs qui se coupent en E, ce point sera le centre cherché.

Comme on peut décrire les arcs soit au-dessus de AB, soit au-dessous, il y a généralement deux cercles qui satisfont aux conditions. Il faut donc, avant de commencer le tracé, savoir de quel côté doit être placé le centre. Mais, pour que l'opération soit possible, il est nécessaire que le rayon donné soit au moins aussi grand que la moitié de AB; autrement, les deux arcs n'auraient aucun point commun.

PROBL. (*c*) : *Tracer un cercle qui passe par trois points donnés* A, B, C (P. IV, F. 1).

D'après le n° 91, il est clair que le tracé ne pourrait s'exécuter, si les trois points étaient en ligne droite. Il faut donc, qu'en les joignant deux à deux, on obtienne trois droites différentes AB, AC, BC. C'est ainsi qu'on pourra toujours reconnaître si le tracé est possible. Pour l'effectuer, il y a deux choses à trouver : le centre et le rayon. Or, la circonférence devant passer par A et B, aura son centre à égales distances de ces deux points. Il sera donc sur DE perpendiculaire au milieu de AB (43). Pour les mêmes raisons, il sera sur FG perpendiculaire au milieu de BC, et, par conséquent, l'intersection H des deux perpendiculaires sera le centre cherché. Si l'on élevait une perpendiculaire au milieu de AC, elle devrait aussi passer par le centre : le tracé de cette troisième perpendiculaire est donc un moyen de vérifier l'exactitude de l'opération.

Le centre H étant trouvé, il est visible que le rayon est la droite HA, ou la droite HB, ou HC ; car HA et HB sont égales, HB et HC sont égales, et par suite HA = HC.

Ce tracé est d'un fréquent usage : il arrive, en effet, souvent, dans la pratique, que l'on connaît seulement quelques points de la circonférence qui doit être décrite. Il suffit alors d'employer trois quelconques de ces points, comme nous venons d'employer A, B, C, pour que la circonférence passe par tous les autres. Du reste, il n'est pas nécessaire de tracer les droites AB, BC, CA.

TRACÉ DES SECANTES COMBINÉES.

Une très-simple combinaison de sécantes, met à même de résoudre plusieurs problèmes dont les artistes et les ouvriers reconnaîtront aisément l'utilité, attendu qu'ils ont journellement besoin des résultats indiqués dans l'énoncé de ces problèmes.

PROBL. (*a*) : *Trouver le centre d'un cercle tracé* ABCA (P. IV, F. 1).

Le procédé du problème (*c*), pag. 97, suffit pour y parvenir. Marquez trois points quelconques A, B, C sur la circonférence; puis élevez une perpendiculaire au milieu de chacune des cordes AB, BC, qu'il est inutile de tracer. Le point H où les deux perpendiculaires se couperont sera le centre cherché.

On agit de la même manière pour trouver le centre d'un arc donné.

Notez que les deux cordes ne doivent pas être parallèles : car si elles l'étaient, la perpendiculaire à l'une serait perpendiculaire à l'autre (57), et comme deux perpendiculaires à une même droite se confondent, quand elles doivent passer par le même point (55), vous n'auriez pas d'intersection. De plus, il convient de prendre les trois points, de façon que les deux cordes soient à peu près d'équerre l'une sur l'autre, afin que les perpendiculaires fassent entre elles un angle peu différent de l'angle droit, et que le centre puisse être marqué avec plus de précision.

PROBL. (*b*) : *Partager un arc* ABC *en deux parties égales* (P. IV, F. 2).

Élevez une perpendiculaire DB, au milieu de la corde AC, sans tracer cette corde; le point B où la perpendiculaire rencontrera l'arc, sera le milieu de cet arc.

En effet, chaque point de DB est également éloigné de A et de C (43); les cordes AB, BC sont donc égales, et par conséquent, leurs arcs sont égaux (24).

93. Comme le problème (*c*), pag. 97, nous a fait voir que la perpendiculaire au milieu d'une corde passe par le centre du cercle, nous pouvons dire maintenant que *le centre, le milieu de la corde et le milieu de l'arc sont trois points qui se trouvent sur une droite perpendiculaire à la corde.*

Or, si l'on tire la corde EF parallèle à AC (P. IV, F. 2), BD sera perpendiculaire aussi sur EF (57), et parce qu'un de ses points, le centre, est à la même distance de E et de F, G sera le milieu de EF (50), comme H est le milieu de AC. La perpendiculaire BD partage donc en deux parties égales, toutes les cordes qui peuvent être menées dans l'arc ABC, parallèlement à AC, par conséquent, tout point du demi-arc AEB est à la même distance de BD, que le point correspondant du demi-arc CFB, ou en d'autres termes, *la perpendiculaire au milieu de la corde* AC *d'un arc* ABC, *est l'axe de symétrie de cet arc* (43).

Il s'ensuit que le diamètre BI est à la fois l'axe de symétrie des arcs ABC, AIC; conséquemment, *tout diamètre partage la circonférence en deux parties symétriques, et cette courbe a une infinité d'axes de symétrie.*

Nous avons vu (25) qu'un rabattement exécuté autour d'un diamètre, opère la superposition exacte des deux parties de la circonférence. Il en est toujours ainsi, quand une charnière est axe de symétrie; car, par suite de l'égalité des angles droits BHC, BHA, HC se rabat sur HA; le point C tombe sur A, puisque HC = HA; et la même chose arrive pour tous les autres points symétriquement placés. Donc, *la superposition par rabattement peut toujours se faire, quand il y a symétrie*, et réciproquement, *il y a symétrie, toutes les fois que la superposition s'effectue par rabattement.*

Probl. (*a*) : *Diviser un angle* ABC *en deux parties égales* (P. IV, F. 3).

Du sommet B, décrivez un arc AC entre les côtés, et partagez cet arc en deux parties égales, par la sécante BD (probl. *b*, p. 98). Les angles ABD, CBD seront égaux, puisqu'ils auront pour indications, des arcs de même rayon et de même longueur (31).

Probl. (*b*) : *Diviser un arc ou un angle en quatre parties égales.*

Il faut d'abord diviser en deux et partager chacune des parties en deux autres, toujours par les points milieux.

Si l'on demande huit parties égales, vous en marquerez quatre et vous chercherez le milieu de chacune. Enfin, vous suivrez toujours la même marche, pour former sur un arc ou dans un angle, autant de parties égales que l'indiquera l'un quelconque des nombres 2, 4, 8, 16, 32, etc., qui sont tels que chacun est double du précédent.

Nous décrirons, au chapitre des *tangentes*, un instrument simple, nommé *Trisecteur*, qui donne le moyen d'opérer très-aisément la division d'un arc ou d'un angle en trois parties égales, et nous exposerons, à l'article des *polygones réguliers*, le procédé général de la division en un nombre quelconque de parties égales. Jusque là, il faut bien se garder de croire qu'on obtienne des parties égales sur un arc, en marquant des parties égales sur la corde et en joignant les points de division au centre, ou en élevant par ces points des perpendiculaires à la corde : de pareils tracés sont absolument faux.

Application : Les menuisiers ont souvent à réunir des pièces de même largeur qui se rencontrent d'équerre. Ils coupent alors chaque pièce en *biseau*, en *chanfrein*, en *onglet*, termes qui signifient tous la même chose, puis ils appliquent les deux chanfreins l'un contre l'autre. Or, il est visible que les deux pièces ne peuvent être alors d'équerre l'une sur l'autre, sans que les deux chanfreins réunis forment un angle droit (36), et que ces chanfreins doivent être égaux, pour que l'une des pièces ne soit pas plus affaiblie que l'autre. Il s'ensuit que chaque chanfrein doit faire un angle de 45° moitié de 90°. Les menuisiers ont donc très-souvent à partager l'angle droit en deux parties égales. Mais, pour ne pas répéter à chaque instant le tracé du probl. (*a*), ils se servent d'un instrument nommé *équerre à onglet* ou à *chanfrein.* La partie A de la fig. 4 (P. IV), représente la face de dessous, qui est garnie d'un talon dont une des arêtes passe par le sommet B commun aux deux angles CBD, EBF. Chacun de ces angles est de 45°, ou moitié d'un angle droit. Par conséquent, ils forment à eux deux, un angle droit, et l'angle DBF est droit aussi ; car tous les angles qu'on peut faire du même côté d'une droite CE, valent en somme deux angles droits (45).

« La partie G de la fig. 4 représente l'autre face de l'instrument, et c'est cette face qui est en dessus quand on trace des chanfreins. Voici comment s'exécute l'opération : l'ouvrier applique le talon contre la face HI de l'une des pièces qu'il veut assembler (P. IV, F. 5); il place le sommet B en H ; puis il trace le long de BD, une droite HK qui doit répondre à l'une des arêtes du tenon HKL. Il en fait autant sur la face opposée à HKI. Appliquant ensuite le talon contre la face MN de l'autre pièce, de manière que B soit sur M, il trace le long de BF, une droite MO, selon laquelle il fait passer la scie, pour enlever la partie MOP. De là résulte une petite face en biseau, sur laquelle on trace la mortaise où doit s'engager le tenon HKL.

Si les pièces qu'on veut assembler d'équerre et seulement par chanfreins, n'ont pas même largeur, et qu'il soit nécessaire de placer l'un sur l'autre, les points M, H, l'équerre à onglet ne peut plus servir. Dans ce cas, on trouve le point K du trait HK, en prenant LK égale à la largeur de la pièce MN, et le point O du trait MO, en prenant PO égale à la largeur de la pièce HI.

On peut cependant chanfreiner encore à 45° ou avec l'équerre à onglet, lorsque les deux pièces qui doivent être assemblées d'équerre, ont des largeurs inégales ; mais alors, en supposant HI la pièce la plus large, il faut prendre HK égale à MO, et tracer par K, un trait qui soit d'équerre sur HI et qui aille rencontrer l'arête parallèle à cette droite, comme dans l'assemblage marqué Q.

94. La droite qui divise un angle en deux parties égales, étant fréquemment employée soit dans les tracés, soit dans les démonstrations, a reçu un nom particulier : on l'appelle *bisectrice de l'angle* ou simplement *bisectrice.*

La bisectrice BD *est l'axe de symétrie de l'angle* ABC (P. IV, F. 3); car, sa perdendiculaire AC est divisée en deux parties égales au point E (93), et par suite, un rabattement fait autour de BD, opérerait la superposition de ABD sur CBD.

La bisectrice BD *est aussi le lieu de tout point également éloigné des deux côtés de l'angle* (47). Il est visible, en effet, que le rabattement superposerait exactement EF perpendiculaire à BA, sur EG perpendiculaire à BC, puisque le point E ne bougerait pas pendant le mouvement et que BA tomberait sur BC ; il est visible aussi qu'il en serait de même pour les deux perpendiculaires abaissées de tout autre point de BD, sur AB et sur BC.

PROBLÈME : *Tracer la bisectrice d'un angle.*

On peut marquer le sommet de l'angle ou bien on ne le peut pas, et dans chacun de ces deux cas, l'opération se fait sur un tableau bien uni ou sur le terrain.

Premier cas : Si l'angle est sur un tableau uni et que le sommet puisse être marqué, vous porterez sur chaque côté, à partir de ce sommet B, une même longueur arbitraire (P. IV, F. 3) ; des points A, C qui en résulteront, vous décrirez avec un même rayon quelconque, deux petits arcs dont l'intersection H soit au-delà ou en-deçà de AC ; puis vous tirerez BH qui sera la bisectrice demandée.

Il est aisé de voir que ce tracé est au fond celui de la division d'un angle en deux parties égales (probl. *a*, p. 99); par conséquent BH est bien la bisectrice de ABC.

Deuxième cas : Si l'angle est sur un tableau uni et que le sommet ne puisse pas être marqué, tirez une transversale quelconque AB (P. IV, F. 6) ; puis tracez les bisectrices AC, AD, BC, BD des quatre angles qu'elle formera sur les droites données EF, GH. La droite CD menée par les concours C, D de ces bisectrices, sera celle qui est demandée.

Effectivement, C est également éloigné de AE et de AB, puisqu'il appartient à la bisectrice AC de l'angle EAB ; il est aussi également éloigné de AB et de BG, comme point de la bisectrice de l'angle ABG. Ce point C est donc également éloigné de AE et de BG ; par conséquent, il appartient à la bisectrice de l'angle dont EF, GH sont les côtés. On démontrerait d'une manière analogue que D est un second point de cette bisectrice.

Troisième cas : Si l'angle est sur le terrain, les tracés des deux cas précédens ne sont pas applicables ordinairement, parce que plusieurs circonstances empêchent de tracer des arcs de cercle ou s'opposent à ce que ces arcs déterminent les points avec quelque précision.

Lors donc que le sommet B d'un angle ABC, donné sur le terrain, pourra être marqué (P. III, F. 25), prenez BA, BC de même longueur, plantez des jalons en A, C et aux points E, F d'une parallèle à AC, dont vous déterminerez l'alignement à une distance quelconque ; placez enfin un cinquième jalon au croisement D de AF, CE ; la droite BD sera la bisectrice cherchée.

D'abord, BD prolongée passera par le milieu G de AC (88) et sera perpendiculaire à cette droite (43). Ensuite, elle divisera l'angle ABC en deux parties égales, puisque AC serait la corde d'un arc décrit de B avec AB pour rayon, et que BD couperait cet arc par le milieu (93 et 31).

Quatrième cas : Si le sommet d'un angle donné sur le terrain, ne peut être marqué, menez par un point A, pris arbitrairement sur le côté BC, une parallèle AD à l'autre côté EF (P. IV, F. 7) ; portez une longueur quelconque de A en C et en D ; marquez par un jalon le point F où CD va rencontrer EF ; marquez aussi par d'autres jalons, les rencontres G, B, E, H des côtés avec deux parallèles à CF ;

placez enfin un jalon au croisement I de CH, FG et un dernier jalon au croisement K de GE, BH. L'alignement IK sera la bisectrice demandée.

Pour rendre la démonstration plus facile, nous prolongerons BC, EF jusqu'à leur concours inconnu X. Alors nous verrons que XF=XC, puisque AD=AC (81), et nous en conclurons, d'après les raisons données pour le cas précédent, que le point I appartient à la bisectrice de l'angle CXF. Mais, puisque CF et GH sont parallèles, XG=XH, comme XC=XF (79); donc, encore par les mêmes raisons, le point K appartient aussi à la bisectrice.

Application : On s'approche d'une place assiégée, au moyen de fossés qu'on nomme *tranchées*. Ces chemins creux sont dirigés selon la *capitale* ou bisectrice du bastion attaqué Y, parce que c'est sur le prolongement de cette droite qu'il y a le moins de danger. Les officiers du génie doivent donc, dès le début d'un siége, déterminer ce prolongement. Ils peuvent à cet effet, opérer comme il vient d'être dit, après avoir trouvé deux points B et C, E et F du prolongement de chaque face du bastion (appl. *b*, p. 95).

95. Passons maintenant aux sécantes parallèles et démontrons que *deux sécantes parallèles* AB, CD *renferment entre elles deux arcs égaux* AC, BD (P. IV, F. 8).

Pour cela, nous abaisserons du centre E, une perpendiculaire sur CD; elle sera aussi perpendiculaire sur AB, passera par les milieux F, G de ces deux cordes (93), et sera, par conséquent, leur axe de symétrie (43). Si donc nous exécutons un rabattement autour de EF, le point B tombera sur A, et le point D sur C. Or, deux arcs d'une même circonférence dont les extrémités se confondent, se superposent dans toute leur étendue (5). Les arcs AC, BD sont donc égaux.

Probl. (*a*) : *Tracer deux sécantes parallèles.*

Avec une ouverture de compas arbitraire, marquez sur la circonférence, les extrémités d'un arc AC (P. IV, F. 8). Avec la même ouverture, marquez deux autres points B, D. Joignez A et B, C et D; les cordes ou sécantes AB, CD seront parallèles. Car, si elles ne l'étaient pas, on pourrait mener, par exemple, CH parallèle à AB, ce qui donnerait BH=AC, et par conséquent BH=BD; or, cette dernière égalité est impossible tant que H n'est pas sur D.

Probl. (*b*) : *Mener par un point* C *de la circonférence, une parallèle à une sécante* AB (P. IV, F. 8).

Il suffit de prendre, avec le compas, la corde AC, de la porter de B en un point D, de mener CD; car, les cordes étant égales, les arcs AC, BD sont égaux (24), et par conséquent, les sécantes AB, CD sont parallèles.

Il n'est donc pas nécessaire, pour tracer une parallèle, quand la droite donnée est une sécante, et que le point donné se trouve sur la circonférence, d'employer les procédés décrits dans les problèmes (*c*), (*d*), du n° 63.

96. L'indication de l'angle que forment deux sécantes qui se coupent, peut être déterminée, sans qu'on ait besoin de décrire du sommet, un arc entre les côtés : les arcs du cercle coupé par ces côtés suffisent. Comme cette manière de trouver l'indication des angles, est souvent fort utile, soit pour des tracés, soit pour comparer des angles entre eux, il faut la bien connaître.

L'angle formé par deux sécantes qui se coupent, peut avoir son sommet ou au centre, ou entre le centre et la circonférence, ou sur la circonférence, ou hors du cercle; mais aucun autre cas ne peut se présenter. Considérons donc ces diverses positions du sommet ou du concours des sécantes.

L'angle IKG dont le sommet est au centre, est dit *angle au centre* (P. IV, F. 9). Son indication est comme on sait, le nombre des degrés contenus dans l'arc IG (29). Or, l'angle FKH formé par les prolongemens des côtés, est égal à IKG, puisqu'il est son opposé par le sommet (35), et quand les angles sont égaux, les arcs de même rayon décrits des sommets, entre les côtés, sont égaux et du même nombre de degrés (31). Par conséquent, l'arc FH contient autant de degrés que IG, et l'on peut trouver l'indication de IKG, en prenant la moitié des degrés de IG, plus la moitié des degrés de FH. Donc, *l'indication d'un angle au centre est aussi la moitié des degrés contenus dans les arcs compris entre les côtés et leurs prolongemens.*

97. « L'angle ABC qui a son sommet entre le centre et la circonférence, est dit *angle excentrique* (P. IV, F. 9). Comme celle du précédent, *l'indication de l'angle excentrique se forme de la moitié des degrés contenus dans les arcs* AC, DE *compris entre les côtés et leurs prolongemens.* »

« Traçons par le centre, FG parallèlement à CD, et HI parallèlement à AE. Les angles ABC, IKG ayant leurs côtés parallèles et leur ouverture dans le même sens, sont égaux (64); ils ont donc même indication. Mais, l'indication de IKG est la moitié des degrés contenus dans IG et dans FH. Reste donc à démontrer que IG+FH=AC+DE. Or, Pour faire AC avec IG, il faut augmenter ce dernier de GC et le diminuer de IA; pour faire DE avec FH, il faut diminuer ce dernier de FD et l'augmenter de HE. De plus, IA=HE, ce sont des arcs compris entre sécantes parallèles (95), et pour la même raison, GC=FD. Ainsi, IG doit augmenter et diminuer, autant que FH doit diminuer et augmenter. La somme de ces deux arcs est donc encore la même, quand ils sont devenus AC et DE. Donc aussi, la moitié de AC plus la moitié de DE, vaut la moitié de IG plus la moitié de FH. Donc enfin, ABC a pour indication, la moitié des degrés contenus dans AC et dans DE. »

98. L'angle ABC qui a son sommet sur la circonférence et des cordes pour côtés, est dit *angle inscrit* (P. IV, F. 10). *L'indication de l'angle inscrit est la moitié des degrés de l'arc* AC *compris entre les côtés.*

Menons par le centre D, des parallèles à BA et à BC. Nous formerons l'angle EDF qui sera égal à ABC (64), et ces deux angles auront chacun pour indication, la moitié des degrés contenus dans EF et dans GH (96). Reste donc à démontrer que AC=EF+GH. Traçons HI parallèlement à BC, nous aurons IC=BH (95), BH=AE et par suite, IC=AE, AF+IC=EF. Comme de plus, FI=GH, il est clair que AC =EF+GH. Donc, l'indication de ABC est aussi la moitié des degrés contenus dans AC.

99. « Un angle ABK qui a son sommet sur la circonférence et dont un seul côté AB forme corde, n'est pas un angle inscrit (P. IV, F. 10). *L'indication de cet angle est la moitié des degrés contenus dans les deux arcs* AGB, BC *qui ont pour cordes le côté* AB *et le prolongement du côté* KB. »

« Effectivement, la somme des deux angles ABC, ABK ayant pour indication 180° ou la moitié de toute la circonférence (45), et l'indication de ABC étant la moitié des degrés de AC, il reste pour celle de ABK, la moitié de l'excès de la circonférence sur AC, c'est-à-dire la moitié de l'arc AGBC. »

100. L'angle ABC qui a son sommet hors du cercle, est dit *angle extérieur* (P. IV, F. 11). *L'indication d'un angle extérieur est la demi-différence des nombres de degrés contenus dans les deux arcs* AC, DE *compris entre les côtés.*

Soit menée la droite DF parallèle à BC; les angles ABC, ADF seront égaux (60) et auront pour indication, la moitié des degrés de AF (98). Or, AF=AC—CF, et CF=DE (95). Donc, AF est la différence entre AC et DE; donc l'angle ABC a aussi pour indication, la moitié du nombre de degrés que donne cette différence.

Probl. (*a*) : *Tracer par le point* B *où une sécante* AB *coupe la circonférence, une autre sécante assujettie à faire avec la première, un angle dont l'indication est connue* (P. IV, F. 12).

Ce problème revient au problème (*d*) de la page 32; mais au lieu de le résoudre en plaçant le rapporteur comme il a été prescrit, ce qui n'est pas toujours possible, on peut placer le centre de l'instrument sur le centre E du cercle, de manière que le diamètre passe par A; marquer un point D à l'extrémité de l'arc d'un nombre de degrés double de celui de l'indication (98); joindre D avec le centre E, et tirer la droite BC, par le point donné et par celui C où DE rencontre la circonférence.

Probl. (*b*) : *Tracer par trois points donnés* A, B, C, *un arc de cercle, sans employer le centre* (P. IV, F. 13).

Il arrive parfois qu'on ne peut se servir du procédé décrit p. 97, probl. (c), pour faire passer un arc de cercle par trois points donnés : un obstacle empêche de marquer le centre, ou bien le rayon est tellement grand qu'on ne saurait songer à employer ni perche, ni cordeau. Voici comment il faut opérer dans un tel cas.

Tirez une droite quelconque AD, au-dessous de AB, par exemple ; puis une autre droite CD qui fasse avec BC et en-dessus, un angle BCD égal à BAD. Le point D concours de ces deux droites appartiendra à l'arc de cercle que déterminent A, B, C.

Vous trouverez de la même manière, un cinquième point E, un sixième point, etc., observant toutefois de tirer au-dessous de BC, les droites qui doivent aller couper celles que vous aurez tracées au-dessus de AB ; et lorsque les points ainsi déterminés seront assez nombreux, assez rapprochés pour vous donner le *sentiment* de l'arc demandé, vous les joindrez les uns aux autres, par une ligne courbe qui sera cet arc.

Ce tracé se trouvera justifié, si nous faisons voir que le point D doit être effectivement sur l'arc de cercle ABC. Or, les angles BAC, BCA ont en somme, pour indication, la moitié de cet arc (98) ; DAC+DCA=ABC+BCA, puisque BAD retranché de BAC, pour faire DAC, a été ajouté à BCA, pour former DCA. Donc en somme, DAC, DCA ont aussi pour indication la moitié de ABC. Mais, puisqu'ils sont tous deux inscrits, l'indication de leur somme doit être la moitié des parties de ABC qu'ils comprennent entre leurs côtés ; par conséquent, ces parties réunies forment l'arc entier, et nécessairement le concours D se trouve sur cet arc.

Il est visible qu'une droite AF qui fait avec AB, un angle égal à BCA, est la dernière qu'on ait à tirer au-dessus de AB ; et qu'elle ne donne que le point A. Une droite CG qui fait avec BC, un angle égal à BAC, est aussi la dernière qu'on puisse tirer au-dessus de BC.

Quand on a l'habitude du dessin linéaire, il est facile de tracer à la main, sur le papier, une ligne courbe dont plusieurs points sont connus : on la fait d'abord au crayon, de manière qu'elle ne présente aucun jarret, puis on tire un trait de plume sur la trace du crayon. S'il s'agit d'un tracé sur le bois ou sur le terrain, on peut placer une règle ployante, de façon qu'une des arêtes passe par trois points de la courbe, au moins ; on la maintient dans cette position au moyen de clous ou de piquets plantés de chaque côté ; on tire un trait entre les deux points extrêmes, le long de la règle ; enfin, on la place sur d'autres points, ayant soin qu'elle s'applique en même temps, sur une portion de l'arc déjà obtenu.

« Plusieurs praticiens se servent d'un procédé bien différent de celui qui vient d'être exposé, pour trouver les points D, E, etc. de l'arc de cercle ABC ; mais outre que leur tracé exige la connaissance du point milieu de l'arc demandé, il est fautif, et la courbe qu'il donne diffère d'autant plus d'une ligne circulaire, que le nombre des degrés de l'arc diffère moins de 90. »

PROBL. (*c*) : *Tracer par deux points donnés* A, C, *un arc de cercle dont l'indication est connue* (P. IV, F. 13).

Retranchez de 360°, le nombre de degrés donné, le reste sera l'indication de l'autre arc de la corde AC. Si donc vous prenez la moitié de ce reste, vous aurez l'indication de tout angle inscrit à l'arc demandé, qui comprendra la corde AC (98).

Tracez alors une droite quelconque AB, et par le point C, une concourante CB qui fasse un angle CBA dont l'indication soit celle que vous venez de déterminer (probl. *b*, p. 55). Le sommet B sera sur l'arc cherché ; vous connaîtrez trois points de cet arc, et vous pourrez appliquer le tracé du probl. (*b*).

PROBL. (*d*) : *Tracer d'un mouvement continu, sans employer le centre, un arc dont trois points* A, B, C *sont donnés* (P. IV, F. 13).

Placez deux règles selon AB, BC, liez-les l'une à l'autre, de manière à rendre invariable leur angle ABC ; puis, faites-les glisser contre deux pointes plantées en A, C. Un crayon tenu en B, concours des arêtes qui toucheront les pointes, décrira l'arc demandé ; car il est visible (98) *que tous les angles égaux qui comprennent une droite* AC, *sont inscrits à un même arc dont cette droite est la corde.*

Bien entendu que chaque règle doit avoir au moins la longueur de AC, quand on veut que la pointe traçante aille de A en C, par l'arc.

PROBL. (*e*) : *Tracer par deux points* A, C *et d'un mouvement continu, un arc dont l'indication est donnée* (P. IV, F. 13).

Cherchez un troisième point B, comme dans le probl. (*c*) ; puis employez le procédé du probl. (*d*).

PROBL. (*f*) : *Tracer par un point* A *situé hors d'une droite* BC, *une concourante qui fasse un angle donné, dans lequel on ne peut décrire aucun arc d'indication* (P. IV, F. 14 et 15).

Supposons que l'angle donné soit celui que font les arêtes DE, FG (F. 15) de deux pièces de bois élevées qui vont se terminer dans un mur, à une certaine distance l'une de l'autre. On ne pourra ni marquer le sommet, ni mener une parallèle à l'un des côtés de l'angle, par un point pris sur l'autre : en un mot, il sera impossible de décrire entre les côtés, aucun arc d'indication.

Dans un semblable cas, marquez un point quelconque H sur l'une FG des arêtes, ou plutôt sur une droite parallèle, tirée dans la face supérieure de la pièce de bois. Décrivez de ce point, une demi-circonférence qui coupe une parallèle à DE tracée sur la face supérieure de l'autre pièce de bois, ou ce qui revient au même, marquez les quatre points I, K, L, M, intersections de cette demi-circonférence et des parallèles aux arêtes. Ensuite, d'un point quelconque N de la droite donnée BC (F. 14), décrivez une demi-circonférence, avec le rayon HL ; portez la corde MI, de O en P, la corde LK, de Q en R, ou la corde IK, de P en R, et joignez les points P, R. Vous formerez par là un angle extérieur RSC qui aura pour indication, la demi-différence du nombre de degrés contenu dans QR ou LK (24), au nombre de degrés contenu dans OP ou MI (100). Cet angle sera donc égal à celui que font les droites DE, FG comme ayant même indication. Il ne restera plus alors qu'à tracer par le point donné A, une droite AT parallèle à RS.

Nous avons prescrit de tracer sur la face supérieure de chaque pièce de bois, une parallèle à l'arête intérieure, à cause de la difficulté de poser exactement les pointes d'un compas sur les arêtes, soit pour marquer les quatre points I, K, L, M, soit pour prendre les deux cordes IK, IM.

101. *Tout angle inscrit* ABC *qui comprend un diamètre* AC, *est un angle droit* (P. IV, F. 16).

L'angle inscrit renferme alors entre ses côtés une demi-circonférence ADC, et conséquemment (98) son indication est la moitié de 180° ou 90°.

De là cet autre principe : *La circonférence est le lieu des sommets de tous les angles droits qui comprennent un diamètre.*

Problème : *Élever une perpendiculaire à l'extrémité* A *d'une droite* AB *qui ne peut être prolongée* (P. IV, F. 17).

Marquez un point C entre A et B, mais au-dessus ou au-dessous de AB. Décrivez de ce point et avec le rayon CA, une circonférence que vous pourrez ne pas achever vers A. Joignez C avec D, point où la circonférence coupe AB la seconde fois. DE sera un diamètre, et si vous tracez AE, cette droite sera perpendiculaire sur AB.

Applications : Ce tracé doit être employé toutes les fois qu'il s'agit de rogner perpendiculairement à ses arêtes, une pièce droite, dont on ne veut perdre que le moins possible, et qu'on ne peut se servir d'une équerre, soit parce que la nature du tableau ne le permet pas, soit parce que celles qu'on possède sont fausses.

Le même procédé sert encore pour le cas où il faut, sur le terrain, élever une perpendiculaire de peu de longueur à l'extrémité d'une droite qui aboutit à un mur, à une rivière.

102. *Les distances du concours de deux sécantes aux quatre intersections de la circonférence, sont* RÉCIPROQUEMENT PROPORTIONNELLES ; c'est-à-dire que les deux parties d'une sécante forment les extrêmes d'une proportion, dont les deux parties de l'autre sont les moyens.

Voilà ce que signifie, dans cet énoncé, le mot *réciproquement*. Quand il ne précède pas le mot *proportionnelles*, c'est que les deux parties d'une droite font les deux premiers termes de la proportion, ou un extrême et un moyen, et que les deux parties de l'autre forment les deux derniers termes ou le second moyen et le second extrême. Tout ce que nous avons dit sur la proportionnalité des droites (p. 65 et suiv.), se rapporte à ce dernier cas.

Le concours de deux sécantes ne peut se trouver qu'au centre, entre le centre et la circonférence, sur la circonférence, ou hors du cercle. Nous allons démontrer pour chacune de ces positions, le principe général qui vient d'être énoncé.

Premier cas : Les sécantes AB, CD dont le concours E se confond avec le centre F (P. IV, F. 18), donnent EA:ED::EC:EB. Cela est visible, car les quatre lignes qui entrent dans cette proportion sont égales, comme rayons d'un même cercle (5), et par conséquent, de quelque manière qu'on les prenne, le rapport de deux quelconques est toujours égal au rapport des deux autres (15).

Deuxième cas : Les sécantes AB, CD qui se coupent entre le centre F et la circonférence (P. IV, F. 19) donnent aussi EA:ED::EC:FB.

Menons les cordes AC, BD. Les angles inscrits A, D renfermant le même arc BC, ont la même indication (98) et sont par suite égaux. Les angles BED, AEC étant opposés par le sommet, sont égaux aussi. Par conséquent, si nous rabattons la figure BED sur la figure AEC, en faisant tourner autour du point E et en plaçant ED sur EA, la droite FB tombera sur EC, et DB devenu D'B' sera parallèle à AC (60). AE et CE seront donc alors coupées par des parallèles, et il en résultera (79) EA:ED'::EC:EB' ou EA:ED::EC:EB.

Nous n'avons pas à nous occuper du cas où les sécantes se coupent sur la circonférence ; car alors elles n'ont qu'une seule partie chacune et ne peuvent conséquemment fournir une proportion qu'en se répétant.

Troisième cas : Les sécantes AB, CD qui se coupent en E, hors du cercle F (P. IV, F. 20) donnent encore EA:ED::EC:EB.

Menons AD et BC. Des angles inscrits A, C renfermant le même arc BD, ont même indication et sont égaux. Il en est de même des angles ADE, CBE qui ont chacun pour indication, la moitié de l'arc ABDC (99). Prenons donc la figure ADE et posons-la sur la figure CBE, de manière que D soit en B et que DA s'applique sur BC. DE devra tomber sur BE, et si nous joignons les points A', E' où se trouveront les autres extrémités de DA et de DE, la droite A'E' sera parallèle à CE, puisque l'angle A ou A' est égal à l'angle C. Nous aurons donc, d'après le principe 81, E'A':EC::E'B:EB. Mais, par suite de la superposition, E'A'=EA, E'B=ED. La proportion obtenue devient donc EA:EC::ED:EB ou EA:ED::EC:EB, les moyens étant changés de place (72).

103. Il résulte du principe qui vient d'être démontré pour tous les cas, que *la demi-corde* AB, *perpendiculaire au diamètre* CD (P. IV, F. 21), *est* MOYENNE PROPORTIONNELLE *entre les deux parties qu'elle y forme ;* c'est-à-dire que la perpendiculaire AB cons-

titue les deux moyens d'une proportion, dont les parties du diamètre sont les extrêmes, et qu'on a BD : BA : : BA : BC.

Pour le faire voir, nous prolongerons AB jusqu'à ce qu'elle rencontre la circonférence une seconde fois, en E. Alors, nous aurons BD : BA : : BE : BC. Mais, CD étant un diamètre perpendiculaire à AE, coupe cette corde en deux parties égales (93), ce qui donne BE=BA. La proportion devient donc BD : BA : : BA : BC, ainsi que nous l'avons annoncé.

PROBLÈME. *Trouver une moyenne proportionnelle à deux droites données* F, G (P. IV. F. 22).

Tirez une droite HI, visiblement plus longue que ces deux droites ensemble; portez F de C en B, G de B en D; cherchez le milieu de CD (43, *probl. b*); décrivez une demi-circonférence sur cette droite considérée comme diamètre; puis, élevez au point B, une perpendiculaire sur HI, jusqu'à la rencontre de la demi-circonférence. La droite BA trouvée ainsi, sera la moyenne proportionnelle cherchée, puisqu'on aura

BD : BA : : BA : BC ou G : BA : : BA : F.

Ce tracé est de la plus grande utilité; la suite du cours vous en convaincra.

104. Une même droite peut traverser plusieurs cercles placés sur le même tableau, et être ainsi *sécante commune* à tous ces cercles.

Les sécantes communes à deux cercles, qui joignent les extrémités de rayons parallèles et DIRIGÉS DANS LE MÊME SENS, *concourent toutes en un même point* A *du prolongement de la droite* BC *des centres* (P. IV, F. 23).

En effet, la sécante AE donne la proportion BD : CE : : BA : CA, si les rayons BD, CE dirigés dans le même sens, sont parallèles (81); et puisque les rayons d'un même ~~cercle~~ ont tous la même longueur, deux autres points quelconques D', E' donneront aussi BD' : CE' : : BA : CA. Dans le cas donc où D', E' sont les extrémités de rayons parallèles BD', CE', il faut que la sécante D'E' passe aussi par le point A, attendu que, d'après le nº 81, la dernière proportion exige alors que A soit le point de rencontre des droites BC, D'E' qui renferment entre elles les parallèles.

Il suffit de répéter ce raisonnement, pour démontrer cet autre principe: *Les sécantes communes à deux cercles, qui joignent les extrémités de rayons parallèles* ET DIRIGÉS EN SENS CONTRAIRES, *concourent toutes en un même point* A *situé entre les centres et sur la droite* BC *qui les unit* (F. 24).

« D'ailleurs, on peut voir facilement que *le concours* A *des sécantes communes qui joignent les extrémités de rayons parallèles et* DIRIGÉS EN SENS CONTRAIRES, *reste entre les deux cercles, tant que ces cercles sont séparés par un certain intervalle.* »

« Considérons les deux rayons BD'', CE'' qui sont en ligne droite et dirigés en sens contraires ; nous devons avoir BD'' : CE'' : : BA : CA. Or, si le point A pouvait se trouver, par exemple, en *a* sur la circonférence B, BA serait égal à BD'' et la proportion deviendrait BD'' : CE'' : : B*a* : C*a* ou : : BD'' : C*a*. Il faudrait donc que C*a* fût égal à CE'', puisque les deux rapports égaux auraient le même premier terme; c'est-à-dire que la circonférence C devrait passer par *a*, ce qui ne peut avoir lieu, quand il y a un intervalle entre les deux cercles. »

105. Si dans la figure 24 (P. IV), nous prolongeons DB jusqu'en F les rayons CE, BF seront parallèles et dirigés dans le même sens. Le point A, où EF rencontrera la droite CB des centres, sera donc le point de concours d'un système de sécantes communes pareil à celui de la figure 23. Il s'ensuit que BF : CE : : BA' : CA', Mais BD : CE : : BA : CA, et BD=BF ; voilà donc deux proportions qui ont le même premier rapport. Par conséquent, les deux seconds sont égaux, et l'on a BA : CA : : BA' : CA'. Cela nous montre que *les deux concours* A, A' *des sécantes communes à deux cercles, déterminées par des rayons parallèles, sont des points conjugués* (90), qui forment chacun, sur la droite des centres, deux parties proportionnelles aux rayons.

Le concours A' est ordinairement nommé *centre de similitude directe* des deux cercles, et le concours A est dit *centre de similitude inverse.* Nous verrons sur quoi sont fondées ces dénominations, quand nous étudierons les *polygones semblables.*

Problème : *Trouver les centres de similitude de deux cercles donnés* B, C (P. IV, F. 24).

Tracez, dans l'un des cercles, un diamètre DF, et dans l'autre un rayon parallèle CE ; tirez, par les centres, la sécante illimitée CB ; puis joignez l'extrémité E du rayon, aux extrémités D, F du diamètre. Le concours A des sécantes communes CB, DE sera le centre de similitude inverse des cercles A, B, et le concours A' des sécantes communes CB, EF sera le centre de similitude directe.

Appl. (*a*) : Les principes qui précèdent, peuvent fournir le moyen d'imprimer à plusieurs roues le même mouvement qu'à une autre. Supposons que B, C, D, etc. (P. IV, F. 25), représentent les bouts des arbres parallèles de quelques roues. On marquerait sur le prolongement de la droite DCB, un point A quelconque, pour l'emplacement de l'essieu d'une bielle AE, présentant une grande mortaise à jour, on introduirait dans cette mortaise, l'extrémité E d'une manivelle EB portée par l'arbre B ; on y introduirait aussi les extrémités des manivelles CF, DG, etc., après qu'on aurait déterminé les longueurs de ces manivelles, par les proportions BA : CA : : BE : CE, BA : DA : : FE : DG. Alors, BE, CF, DG se trouveraient parallèles et resteraient telles pendant toute la rotation de l'arbre D ou de sa roue ; les extrémités E, F, G, etc. des manivelles décriraient donc, dans le même temps, les circonférences que présente la figure, et par conséquent, les roues auraient absolument le même mouvement, quels que fussent leurs diamètres, et sans qu'il soit besoin de recourir aux engrenages, ni aux courroies de communication. Bien entendu que la mortaise de la bielle devrait avoir la longueur de AH, ou que si l'on faisait trois mortaises à jour, au lieu d'une seule, chacune devrait être égale au double de la manivelle correspondante.

Appl. (*b*) : Le même système pourrait être employé aussi pour transformer un mouvement rectiligne de va et vient, en un mouvement circulaire que plusieurs roues exécutassent dans le même temps. Il suffirait d'attacher, par articulation, à la bielle AG, une autre bielle IK que le moteur de la machine fît monter et descendre alternativement.

Appl. (*c*) : Enfin, si l'on voulait imprimer à une roue, un mouvement *égal* et *contraire* à celui d'une autre, il faudrait placer l'essieu de la bielle, en un point A situé entre les deux arbres B, C (F. 24).

TRACÉ DES TANGENTES.

L'ordre de notre tableau du tracé des lignes, nous conduit à nous occuper des droites qui ne font que toucher le cercle : elles n'ont jamais qu'un seul point de commun avec la circonférence, et pour abréger, on les nomme *tangentes*. Le point D commun au cercle C et à la tangente EF (P. IV, F. 26), est appelé *point de contact* ou simplement *contact*.

106. *Toute droite* EF *perpendiculaire à l'extrémité* D *d'un rayon* CD, *est tangente en* D *à la circonférence* (P. IV, F. 26), c'est-à-dire que D est le seul point commun à EF et au cercle.

Il est impossible, en effet, que ces deux lignes aient un second point commun G, situé aussi près de D qu'on voudra ; car pour ce point G du cercle C, il y aurait un rayon CG oblique sur EF, qui serait égal au rayon CD perdendiculaire sur la même droite, et jamais une perpendiculaire et une oblique parties du même point, ne peuvent être également longues (46).

107. *Une droite* HI *qui passe par l'extrémité* D *d'un rayon* CD, *sans le couper à angle droit, n'est pas tangente au cercle* (P. IV, F. 26) ; c'est-à-dire qu'elle rencontre nécessairement la circonférence en un autre point et qu'elle est sécante.

Effectivement, le rayon CD est alors oblique sur HI, et du centre C, on peut abaisser une perdendiculaire CI. Comme cette perpendiculaire est plus courte que toute oblique, le point I est plus près de C que D ; il se trouve donc entre la circonférence et le centre, ce qui prouve que la droite HI est entrée dans le cercle. Or, pour en sortir, elle devra couper une seconde fois la circonférence.

Il résulte de là et du n° 106, *que toute tangente est perpendiculaire à l'extrémité du rayon qui aboutit au contact.*

PROBL. (*a*) : *Tracer une tangente par un point* D *donné sur une circonférence* C (P. IV, F. 26).

Menez du centre C, un rayon au point D, et à l'extrémité de ce rayon, élevez une perpendiculaire EF (p. 42 ou p. 107); cette droite sera la tangente demandée, et D sera son contact.

Vous sentirez aisément qu'il ne suffirait pas d'appliquer une règle contre la circonférence et sur le point D : rien n'indiquant alors avec précision, la direction que devrait avoir cette règle ; ce serait par hasard, si elle se trouvait perpendiculaire au rayon CD, si elle était véritablement tangente.

PROBL (*b*) : *Tracer une tangente, par un point* B *donné hors d'un cercle* A (P. IV, F. 27).

On peut se contenter de tirer une droite BD, le long d'une bonne règle appliquée à la fois sur le point B et contre la circonférence, d'un côté ou de l'autre de la direction AB. Si, après avoir opéré ainsi, on veut obtenir le contact D, il faut abaisser du centre A, une perpendiculaire AD sur la tangente. Vouloir marquer ce point à vue, ce serait s'exposer à commettre une erreur; car aux environs du contact, la circonférence se confond, en apparence, avec la tangente, et parmi le grand nombre de points qui semblent appartenir en même temps à ces deux lignes, il est difficile de distinguer celui qu'elles ont réellement de commun.

Mais les procédés ci-dessus ne sont pas usités; on préfère le suivant qui donne à la fois les contacts des deux solutions du problème.

Joignez B au centre A et cherchez le milieu C de AB (prob. *b*, p. 42); puis, de ce point comme centre et d'un rayon égal à CA moitié de AB, décrivez une circonférence; elle entrera nécessairement dans le cercle donné, puisqu'elle doit passer par le centre A de ce cercle; elle sortira ensuite du même cercle, puisqu'elle doit passer par B, après avoir passé par A; elle coupera donc la circonférence A en deux points D, E. Joignez chacun de ces points avec B; les droites BD, BE qui en résulteront, se trouveront tangentes au cercle donné, et D, E seront leurs contacts.

Il est visible qu'au lieu de décrire la circonférence C toute entière, on peut se contenter d'en tracer deux très-petits arcs dont D, E, soient à peu près les milieux.

Nous démontrerons la justesse du tracé en faisant voir que BD et BE sont perpendiculaires, l'une à l'extrémité du rayon AD, l'autre à l'extrémité du rayon AE. Or, les angles BDA, BEA sont des angles inscrits dans le cercle B, qui comprennent le diamètre AB de ce cercle. Ces angles sont donc droits (101), et par suite, les côtés de chacun sont perpendiculaires entre eux, en D et en E.

108. Les deux rayons AD, AE, perpendiculaires sur les tan-

gentes (P. IV, F. 27), sont les distances du centre A aux côtés de l'angle DBE. Par conséquent (94), la droite AB est bisectrice, et la figure ABE, rabattue sur la figure ABD, la couvrira exactement. Il s'ensuit que la longeur BD=BE, que A est le milieu de l'arc DAE, et que AB est perpendiculaire au milieu de la corde DE qui joint les contacts (93).

Ainsi, 1° *La bisectrice de l'angle de deux tangentes concourantes, passe par le centre ;*

2°. *Cette bisectrice est perpendiculaire au milieu de la corde des contacts ;*

3°. *Les parties de tangentes concourantes, comprises entre le concours et les contacts, sont de même longueur.*

Ce sont les parties BD, BE que l'on considère, quand on parle de *tangentes égales.*

109. Les combinaisons des tangentes ne se bornent pas au cas où ces droites sont concourantes. On a souvent à tracer des tangentes parallèles, des tangentes assujetties à couper des droites données, sous des angles déterminés, et même des tangentes à plusieurs cercles placés d'une manière quelconque sur un tableau. Nous devons donc étudier ces différens cas, avant de passer aux applications.

Probl. (*a*) : *Tracer deux tangentes parallèles, dont l'une passe par un point* A *marqué sur une circonférence* B *donnée* (P. IV, F. 28).

Menez par A, un diamètre AC ; élevez aux deux extrémités de ce diamètre, des perpendiculaires DE, FG (p. 42 ou p. 107), et vous aurez les tangentes demandées. D'abord, DE, FG sont tangentes, puisqu'elles sont tracées perpendiculairement aux rayons BA, BC et par les extrémités de ces rayons (106). Ensuite, elles sont parallèles, parce qu'elles sont perpendiculaires à la même droite AC (54).

Prob. (*b*) : *Tracer parallèlement à une droite donnée* AB, *une tangente à un cercle donné* C (P. IV, F. 29).

Du centre C, abaissez une perpendiculaire CD sur AB, et par le point E où cette perpendiculaire coupe la circonférence, menez soit une parallèle à AB, soit une perpendiculaire à CD. La droite FG ainsi tracée, sera la tangente demandée, puisqu'elle se trouvera perpendiculaire à l'extrémité du rayon CE (106).

Probl. (*c*) : *Tracer une tangente qui fasse avec une droite donnée* AB, *un angle connu* DEF (P. IV, F. 30).

Par un point quelconque G de AB, menez une droite GH qui fasse un angle BGH égal à DEF (probl. *c*. p. 32). Il ne vous restera plus qu'à exécuter le tracé précédent, c'est-à-dire à mener une tangente IK parallèle à GH ; car l'angle BIK sera égal à son correspondant BGH (60) et par suite, égal à DEF.

PROBL. (d) : *Tracer une tangente qui soit perpendiculaire à une droite donnée* AB (P. IV, F. 31).

Il suffit de mener par le centre C, un rayon CD parallèle à AB, et d'abaisser du point D, une perpendiculaire DA, sur la droite donnée; cette perpendiculaire est la tangente cherchée.

PROB. (e) : *Tracer une tangente à deux cercles donnés* A, B. (P. IV, F. 32).

Première solution : Tirez la droite des centres AB; tirez encore deux rayons AC, BD parallèles et dirigés dans le même sens; joignez leurs extrémités C, D; par le point E où CD rencontrera AB, tracez une droite EF qui soit tangente à l'un des deux cercles, au cercle B, par exemple (prob. b, p. 112); cette droite prolongée sera tangente aussi au cercle A.

Pour reconnaître que cela est vrai, menons un rayon BF au point de contact du petit cercle, ce rayon sera perpendiculaire à EF (107). Par A, menons le rayon AG perdendiculaire aussi à EF prolongée; AG sera parallèle à BF (54). Or, les extrémités G, F de deux rayons parallèles quelconques, sont en ligne droite avec le point E (104); EF passera donc par G; cette droite sera donc perpendiculaire à l'extrémité du rayon AG; elle sera donc tangente au cercle A (106).

Nous aurions pu, au reste, nous contenter de renvoyer au n° 104, après avoir fait observer qu'une tangente n'est autre chose qu'une sécante dont les deux points d'intersection avec la circonférence sont confondus en un seul.

Afin de déterminer avec plus de précision, le point E, centre de similitude directe (105), on doit mener les rayons AC, BD le plus près possible de AG et de BF dont on voit toujours à peu près quelle sera la direction; car CD est d'autant moins oblique sur AB, qu'elle s'écarte moins de la tangente, et le vrai point d'intersection des deux premières droites, est alors plus facile à saisir.

Nous avons vu (p. 112) que par le point E, on peut tracer deux droites tangentes au cercle B. Il y a donc aussi deux droites passant par E, qui sont tangentes à la fois aux deux cercles. D'ailleurs, au lieu de mener les rayons parallèles AC, BD dans le même sens, on pourrait les mener en sens contraires, ce qui donnerait un point H situé entre les deux cercles, ou le centre de similitude inverse de ces cercles (105). Or, de ce point H, il y aurait deux tangentes HI, HK à mener au petit cercle, et ces droites seraient tangentes aussi au grand cercle. On peut donc tracer quatre droites qui soient à la fois tangentes à deux cercles donnés. Il en résulte qu'avant d'exécuter le tracé précédent, on a besoin de savoir si la tangente demandée doit passer entre les cercles ou les laisser du même côté, et de plus, dans quel sens elle doit être dirigée.

Deuxième solution : L'emploi du centre de similitude présente un grave inconvénient, quand les rayons sont presque égaux et que la tangente doit laisser les cercles du même côté ; car alors la droite CD allant couper AB fort loin et sous un angle très-aigu, il faudrait un tableau d'une immense étendue et une opération particulière, pour qu'on pût marquer l'intersection E. Voici un tracé qui n'a pas cet inconvénient.

Portez le plus petit rayon BC sur le plus grand, de D en E (P. IV, F. 33). Du centre A et d'une ouverture de compas égale à AE, décrivez une circonférence. Du centre B, menez une tangente au cercle dont le rayon est AE (p. 112). Par le point de contact F, tirez le rayon AG, et par l'extrémité G de ce rayon, tracez une parallèle à BF. Cette parallèle GH sera tangente aux deux cercles donnés A, B.

D'abord, GH sera tangente au cercle A, puisqu'elle passe par l'extrémité du rayon AG, et qu'étant parallèle à BF, elle est, comme cette droite, perpendiculaire sur AG (106). Ensuite, GH sera tangente au cercle B ; car, si nous menons BI perpendiculairement sur BF et jusqu'à la rencontre de GH, BI sera aussi perpendiculaire à GH (57); de plus, BI et FG seront égales, comme parallèles comprises entre parallèles (65), et puisque FG est égale à DE ou à BC, BI sera le rayon du cercle B. La droite GH se trouvera donc perpendiculaire à l'extrémité du rayon BI ; elle sera donc aussi tangente au cercle B.

Le tracé relatif au cas où la tangente doit passer entre les deux centres, est représenté par la figure 34. Portez le plus grand rayon AD sur le prolongement du plus petit, de C en E. Du centre B et d'une ouverture de compas égale à BE, décrivez une circonférence. Du centre A, menez une tangente au cercle dont le rayon est BE (p. 112). Par le point de contact F, tirez le rayon BG, et par l'extrémité G de ce rayon, tracez une parallèle à AF. Cette parallèle GH sera tangente aux deux cercles donnés A, B : on le démontrerait absolument de la même manière que pour le cas de la figure 33.

PROBL. (*f*) : *Tracer une tangente à deux cercles égaux* (P. IV, F. 35).

Si la tangente doit laisser les deux cercles du même côté, son tracé devient celui d'une parallèle à AB, qui passe par l'extrémité du rayon AC perpendiculaire sur AB. Il est visible en effet que l'égalité des rayons réduit à un seul point A, le cercle du rayon AE (F. 33) ; que BF se confond avec BA, et que AG perpendiculaire à BF, devient AC (F. 35) perpendiculaire à AB.

Quant aux tangentes qui passent entre deux cercles égaux, leur concours D se trouve au milieu de la droite des centres AB, puisqu'on doit avoir AF:BE::AD:BD (81), et que AF=BE. Par conséquent, il suffit, pour tracer ces tangentes, de chercher le milieu de la droite des centres (p. 42) et de mener par ce point deux tangentes à l'un des cercles (p. 112) : elles seront nécessairement tangentes à l'autre.

» Il est à observer qu'on ne peut pas toujours tracer une droite qui soit tangente à la fois à trois cercles donnés : les positions des centres et les rayons doivent être tels, que l'un des cercles se trouve tangent à la droite menée tangentiellement aux deux autres. Cela vient de ce qu'il suffit de deux conditions pour déterminer la position d'une droite : par exemple, qu'elle doive passer par deux points donnés (1) ; qu'elle soit assujettie à passer par un point et à être perpendiculaire ou parallèle à une autre droite ; que passant par un point, elle doive être tangente à un cercle donné ; qu'on exige qu'elle soit tangente à la fois à deux cercles donnés, etc. Si donc on impose encore quelqu'autre condition, en même temps que deux des précédentes, il n'est pas toujours possible d'y satisfaire ou de tracer la droite demandée. »

Appl. (*a*) Les arts font un fréquent usage de la tangente au cercle.

« Dans les arcades circulaires et isolées, les arêtes AB, CD des piédroits ou jambages, doivent être tangentes à l'arête circulaire AEC (P. IV, F. 36), pour que le poids supporté par l'arcade ait moins de tendance à écarter les piédroits. Or, AB, CD sont ordinairement parallèles et verticales ; par conséquent, la corde AC qui joint les contacts, est un diamètre horizontal (44), et AEC est une demi-circonférence. On dit, dans ce cas, que l'arcade est en pleincintre. »

Appl. (*b*) : Lorsqu'en architecture on relie deux murs parallèles, par un mur circulaire, les arêtes horizontales des murs droits sont tangentes aux arêtes horizontales de la partie bâtie en demi-cercle, et sur le plan, les droites parallèles AB, CD (P. IV, F. 37) qui représentent la projection horizontale d'un des murs en ligne droite, doivent être tangentes aux demi-circonférences qui forment la projection horizontale du mur circulaire (appl. *o*, p. 65).

Appl. (*c*) : Les moulures des colonnes, des corniches, etc., tant celles qu'exécutent les tailleurs de pierres, que celles qui sont faites par les menuisiers et par les serruriers, présentent ordinairement dans leur profil, des lignes droites tangentes à des arcs de cercle ; pour profiler, il est donc nécessaire de savoir tracer des tangentes.

Appl. (*d*) : Quand le tourneur veut donner un contour circulaire à une face plane, il doit tenir son outil dans la direction d'une tangente au cercle qu'il a dessein de produire, et faire agir cet outil constamment au point de contact, pendant que la face plane tourne sur son axe de rotation (7). Il y parvient, en maintenant l'outil sur un support dont l'élévation au-dessus de l'axe de rotation est égale au rayon, et qui en est assez écarté dans le sens horizontal, pour permettre à la surface de tourner (P. V, F. 1). Bien entendu que l'ouvrier ne fait avancer l'outil que peu à peu, vers le point de contact A ; car il faut que d'abord il abatte les angles de la face. Tout ce qu'il fait tomber alors est plus éloigné de l'axe de rotation, que le point de contact, et par conséquent, n'appartient pas au cercle ; tout ce qui reste est autant ou moins éloigné que le même point, et l'arête formée se trouve une circonférence. Cela tient à la propriété qu'a le cercle de pouvoir tourner sur son centre, sans s'écarter d'une droite fixe qui aurait été placée tangentiellement avant le mouvement, et sans jamais repousser cette droite : en d'autres termes, *une droite fixe tangente à un cercle, reste constamment telle, pendant que ce cercle tourne sur son centre.* Toute autre courbe abandonnerait ou repousserait sa tangente, et ferait parfois les deux choses successivement.

Appl. (*e*) : Si l'on fait rouler le cercle sur sa tangente, le centre reste constamment à la même distance de cette droite, puisque cette distance est mesurée par le rayon du point de contact (47) et que tous les rayons sont égaux. Ce centre suit donc (67) une droite AB parallèle à la tangente CD (P. V, F. 2) Voilà pourquoi l'essieu de nos voitures reste toujours à la même hauteur au-dessus du chemin sur lequel roulent les roues, et c'est pour obtenir ce résultat qu'on fait ces roues circulaires. Si elles avaient toute autre forme, tantôt la voiture devrait être élevée, tantôt elle s'abaisserait d'elle-même ; dans le premier cas, les chevaux seraient obligés d'exercer un très-grand effort; dans le second, ils seraient forcés de courir, et ces continuelles variations de travail les fatigueraient extrêmement.

Appl. (*f*) : Pour faire mouvoir une tringle AB parallèlement à une autre CD (P. V, F. 3), il faut placer entre elles, deux roulettes E, F de même rayon et à essieux fixes. Les tringles étant tangentes dans une position des roulettes, le seront dans toute autre (appl. *d*), et comme les tangentes à deux cercles de rayons égaux, sont parallèles à la droite des centres (probl. *f*, p. 115), les tringles seront toujours parallèles entre elles (68).

Appl. (*g*) : Une corde ABCD (P. V, F. 4.), qui embrasse un arc de poulie fixe E, est tangente des deux côtés à la circonférence de la *gorge*, et reste telle (appl. *d*) pendant que la poulie tourne. Ce simple appareil permet de faire monter un fardeau en tirant de haut en bas, ce qui est bien moins pénible que de tirer de bas en haut.

Appl. (*h*) : Si vous placez une règle tangentiellement à un cercle qui puisse tourner sur son centre rendu fixe, le mouvement circulaire du cercle fera marcher la règle en ligne droite, moyennant qu'il y ait assez de frottement, et en poussant la règle soit dans un sens, soit dans l'autre, vous ferez tourner le cercle. Tel est le fondement de l'engrenage d'une crémaillère AB avec une roue dentée C (P. V, F. 5), engrenage qu'on emploie soit pour changer un mouvement circulaire en mouvement rectiligne; soit pour changer un mouvement rectiligne en mouvement circulaire.

Appl. (*i*) : Lorsque deux poulies A, B (P. V, F. 6 et 7) sont en partie enveloppées par une chaîne ou par une courroie sans fin CDEFGHC, cette courroie est tangente aux deux gorges, et les poulies peuvent tourner sans que les points de contact changent de position, sans que les parties droites CD, FG aient besoin de s'alonger ou de se raccourcir ; de sorte que si la courroie est d'abord tellement tendue, qu'une des poulies ne puisse tourner, sans que l'autre tourne aussi, il n'y aura pas de raison pour que le second mouvement cesse, tant que le premier continuera. Ces appareils sont d'un usage fréquent : celui de la figure 6, pour faire tourner deux poulies dans le même sens ; celui de la figure 7, pour changer le sens du mouvement circulaire, et tous les deux quand il s'agit de transmettre le mouvement circulaire à des distances qui ne permettent pas l'emploi des engrenages.

Appl. (*k*) : Le *trisecteur* dont nous avons parlé page 99, ne partage un angle en trois parties égales ou n'en donne le tiers qu'au moyen de la tangente du cercle. Depuis que cet instrument a été perfectionné par des ouvriers messins, auditeurs des *Cours industriels*, il est composé d'une règle AB terminée par une équerre CBD (P. V, F. 8), d'une autre règle BE qui s'assemble à angle droit dans la précédente, et d'une portion d'anneau circulaire qui s'assemble d'un bout avec la première règle, de l'autre avec la seconde. Les deux arcs de l'anneau ont pour centre, le milieu F de AB ; le côté BC de l'équerre est égal à BF, et la plus longue arête CD est dirigée tangentiellement à l'arc extérieur. On peut même renforcer l'assemblage de l'anneau et de la règle BE, en remplaçant une portion de l'arc supérieur, par une arête droite tangente qui soit le prolongement de CD.

« Pour montrer comment on se sert du trisecteur, nous supposerons qu'il s'agisse de partager en trois parties égales, l'angle GHI. L'instrument doit d'abord être placé dans cet angle, de façon que le point C soit sur l'un des côtés, sur GH par exemple, et qu'en même temps l'arête droite BE passe par le sommet H. Si alors le côté HI ne se trouve pas tangent à l'arête circulaire extérieure, on fait glisser le trisecteur en avant ou en arrière, jusqu'à ce que cette troisième condition soit remplie, et dès que les trois le sont à la fois, comme dans la figure, l'angle GHB est le tiers de GHI, BHF en est le second tiers et FHI le troisième. »

« Cela est vrai, si les trois angles GHB, BHF, FHI sont égaux. Or, d'après l'égalité de BC, BF, les obliques CH, FH sont de même longueur (48), et par conséquent, les angles GHB, BHF qu'elles forment avec la perpendiculaire BH, sont égaux (51). De plus, BH est tangente en B à l'arête circulaire extérieure (106), et par suite, FH divise l'angle BHI en deux parties égales (108). Donc GHB=BHF=FHI. »

« Le trisecteur des ouvriers messins peut donner le tiers des angles les plus obtus ; mais, comme la distance entre B et H est d'autant plus grande que l'angle GHI est plus aigu, et comme la règle BE ne doit pas être fort longue, pour que le trisecteur soit maniable, on ne peut avec cet instrument, diviser directement en trois parties égales, les angles très-aigus. Il faut dans ce cas, prendre une voie détournée. Voici comment on procède. »

« Ayant élevé au sommet H, sur le côté HI de l'angle donné

(P. V, P. 9), une perpendiculaire IHK, on divise l'angle GHK en trois parties égales : le trisecteur peut fort bien servir pour cette opération, puisque GHK étant la différence d'un angle très-aigu à l'angle droit IHK, est un angle assez ouvert. Soit KHL le tiers de GHK; soit encore KHM le tiers de l'angle droit IHK, tiers que peut donner le trisecteur ou le rapporteur. L'angle LHM, différence entre KHM et KHL, c'est le tiers de GHI. »

« Il en doit être ainsi, puisque GHI étant la différence entre l'angle droit IHK et l'angle GHK, a pour tiers, le tiers de la différence de ces deux angles, ou ce qui est bien la même chose, la différence des tiers de ces mêmes angles. Si, par exemple, vous avez deux nombres tels que 93 et 54, leur différence est 39 dont le tiers est 13. Mais, le tiers du premier est 31, et celui du second 18, et la différence de ces deux tiers est encore 13. Le tiers de la différence de deux nombres est donc égal à la différence des tiers de ces nombres. Or, ce qui a lieu pour des nombres, doit avoir lieu pour des angles qu'on peut toujours exprimer en degrés, minutes, etc. »

« Le trisecteur donne aussi bien le tiers d'un arc AC (P. IV, F. 18) que celui d'un angle. Il suffit, en effet, pour pouvoir appliquer l'instrument, de tirer deux rayons AE, CE par les extrémités de l'arc et par le centre E. On cherche alors le tiers de l'angle AEC, et la droite qui le fournit, marque sur l'arc AC, le tiers de cet arc. Si AC ne contenait qu'un petit nombre de degrés ou si l'angle AEC se trouvait très-aigu, les deux droites HL, HM (P. V, F. 9) qui, en se coupant, formeraient le tiers de cet angle, marqueraient sur la circonférence dont AC fait partie, un petit arc qui serait le tiers demandé. »

Lois de la nature : J'ai dit (loi *d*, p. 11) que tout corps qui entre en mouvement, tend à suivre un chemin droit, et qu'il s'échapperait selon une ligne droite, s'il devenait tout à fait libre, après avoir été quelque temps forcé de tourner autour d'un axe. Cette droite que parcourrait un point quelconque d'un corps non pesant, échappé à un mouvement circulaire, serait précisément une tangente à la circonférence que ce point était obligé de décrire autour de l'axe, et le contact de cette tangente serait le point même de la circonférence, sur lequel se trouverait le point du corps au moment où il deviendrait libre. Ainsi, l'on peut dire que *chaque petite partie d'un corps qui tourne, tend sans cesse à s'échapper par les tangentes de la circonférence qu'elle parcourt.*

« Les parties d'un corps animé d'un mouvement de rotation, font donc continuellement effort pour se séparer des points qui sont sur l'axe et près de l'axe, points qui n'ont pas de vitesses ou qui n'en ont qu'une très-petite. Il s'ensuit que pour qu'il n'y ait pas désunion, il faut un lien entre toutes les parties des corps. Ce lien existe : c'est la force qui presse les parties vers le point milieu de leur ensemble. Pour la Terre, c'est le poids de tout ce qui la compose; pour les corps terrestres, pour une meule, par exemple, c'est cette adhérence des parties d'où provient la ténacité. Mais il y a telle meule qui, dans certains points, n'est pas assez tenace pour résister à l'effort d'écartement qu'une rapide rotation fait exercer aux différentes parties, aux parties situées près des bords sur-tout. Il arrive alors que la meule se brise, et que ses éclats volent au loin. C'est ce qui malheureusement n'est que trop fréquent dans les manufactures d'armes où les canons de fusils sont émoulus, les bayonnettes et les sabres aiguisés sur des meules qui tournent extrêmement vite : souvent, les ouvriers sont dangereusement blessés et quelquefois ils sont tués par les fragemens qui se détachent des meules avec impétuosité. Il faut pour éviter ces dangers autant qu'il est possible, encastrer des cercles de fer sur les faces planes des meules, près des bords ; monter ces meules sur des arbres en fer et les assujettir avec des coins du même métal. Si l'on emploie un arbre et des coins en bois, l'humidité les gonfle, et cela suffit par fois pour faire éclater une meule qui aurait résisté au mouvement de rotation. »

110. Nous devons remarquer une propriété singulière du point P (P. V, F. 10) où la bisectrice AB de l'angle formé par deux tangentes concourantes BD, BE, coupe d'équerre et par le milieu, la corde DE des contacts : en ce point se croisent toutes les cordes de contact que donnent les couples de tangentes menées au cercle A, de tous les points de la droite $p'p''$ tracée par le concours B, parallèlement à DE.

Ainsi, D'E', corde des contacts pour le couple p', passe par P ; il en est de même de D''E'', corde des contacts pour le couple p'' ; il en est de même de toutes les cordes analogues. On peut donc dire que la corde des contacts *pivote* sur le point P, quand le concours des tangentes parcourt la droite $p'p''$. Pour exprimer brièvement ce fait, on a donné au point P, un nom qui signifie *pivot de rotation* : il s'appelle *pôle* de la droite $p'p''$; cette droite est dite, par réciprocité, la *polaire* du point P.

« La relation qui lie une polaire et un pôle relatifs au cercle, sera complètement démontrée, si nous faisons voir que le point P, intersection de AB et de sa perpendiculaire DE, corde du couple B, appartient aussi à D''E'', corde du couple qui part d'un point quelconque p'' de la droite Bp'', parallèle à DE. »

« Or, GP : PD :: PD : PF (103) et cette proportion donne

$$GP \times PF = PD \times PD \ (70).$$

De même,

$$AP \times PB = PD \times PD,$$

puisque, d'après le probl. (*b*), p. 112, les trois points A, B, D sont sur une circonférence dont AB est diamètre. Par conséquent,

$$AP \times PB = GP \times PF \quad \text{ou} \ (71) \quad AP : GP :: PF : PB.$$

On tirera de là

$$AP : GP - AP :: PE : PB - PF, \quad \text{ou} \quad AP : AG :: PF : BF,$$

ou encore (72) $\quad AP : PF :: AF : BF,$

car $AF = AG$; puis

$$AP : AP + PF :: AF : AF + BF \quad \text{ou} \quad AP : AF :: AF : AB ;$$

d'où il résulte que

$$AP \times AB = AF \times AF. »$$

« Ainsi, l'on peut établir ce principe, que *le rayon du cercle est moyen proportionnel, entre les distances du centre* A *au concours* B *d'un couple quelconque de tangentes et au milieu* P *de la corde des contacts.* »

« Nous aurons donc aussi

$$AH : AI :: AI : Ap'' \quad \text{ou} \quad AH \times Ap'' = AI \times AI,$$

puis $\quad AP \times AB = AH \times Ap''$,

attendu que $AI = AF$, et enfin

$$AP : AH :: Ap'' : AB. »$$

« Maintenant, plaçons la figure ABp'' sur la figure AHP, de manière que AB devienne AB' et que Ap'' devienne Ap. La dernière proportion, qui n'en aura pas moins lieu, deviendra

$$AP : AH :: Ap : AB'$$

et nous montrera que HP est parallèle à $B'p$ (80). Or, $B'p$ est d'équerre sur AB', comme Bp'' l'est sur AB ; conséquemment HP est aussi perpendiculaire sur AB', et la corde D''HE'' passe nécessairement par le point P (55). »

Probl. (*a*) : *Tracer la polaire d'un pôle donné* P (P. V, F. 10).

Menez par le pôle P, deux cordes quelconques DE', D''E'' ; tirez des tangentes par leurs extrémités (probl. *a*, p. 112), et joignez les concours p', p'' des deux couples : la droite $p'p''$ sera la polaire demandée.

Probl. (*b*) : *Déterminer le pôle d'une polaire donnée* p'p'' (P. V, F. 10).

Il ne s'agit que de mener quatre tangentes, par deux points quelconques p', p'' de cette droite (probl. *b*, p. 112), et de tirer les cordes de contact D'E', D''E'' des deux couples. L'intersection P de ces cordes sera le pôle cherché.

On pourrait aussi abaisser du centre A, une perpendiculaire AB sur $p'p''$, mener de B deux tangentes, et tirer la corde de contact DE ; car la bisectrice AB étant perpendiculaire à cette corde, doit l'être aussi sur la polaire $p'p''$ qui est parallèle à DE (57).

Application : Les propriétés des pôles et des polaires fournissent un moyen de produire, sans engrenage, un mouvement circulaire, au moyen d'un mouvement rectiligne. Supposez deux cercles A égaux et superposés (P. V, F. 10), une barre DE engagée dans la mortaise à jour qu'ils laissent entre eux, deux tringles BD, BE qui glissent l'une dans l'autre en B et qui tiennent à DE par une articulation à curseur, enfin deux ressorts qui, placés sur DE, pressent constamment les deux tringles contre les cercles. Il est clair que si vous forcez l'intersection de ces tringles à parcourir $p'p''$, la barre DE pivotera sur le point P. Réciproquement, si vous faites pivoter DE sur le pôle, l'intersection des tringles parcourra la polaire.

111. *La partie* AB *de la tangente comprise entre le contact et le concours d'une sécante, est moyenne proportionnelle entre les deux parties* AC, AD *de la sécante limitée par la circonférence* (P. V, F. 11); c'est-à-dire que AC : AB : : AB : AD.

Ce principe n'est au fond qu'une suite de celui du n° 102 ; car si nous menons la secante AE, nous aurons AC : AE : : AF : AD, et cette égalité de rapports subsistera, quelle que soit la position que prenne AE en tournant autour de A, quelque voisins que soient les points E, F ; elle subsistera donc encore quand AE, à force de s'écarter de AC, sera devenue AB, ou quand les points E, F, à force de se rapprocher, se trouveront confondus en B. Mais alors, AE, AF seront égales et chacune sera égale à AB ; la proportion deviendra donc, pour ce cas particulier, AC : AB : : AB : AD.

Problème : *Diviser une droite donnée* AB, en moyenne et extrême raison (P. V, F. 12), c'est-à-dire, en deux parties telles, que la plus grande soit moyenne proportionnelle entre la droite entière et l'autre partie.

Je divise AB en deux parties égales (probl. *b*, p. 42) ; je mène une parallèle à la perpendiculaire de division, par l'une B des extrémités de la droite donnée ; je porte la moitié de AB sur cette parallèle, de B en C ; du point C, avec BC pour rayon, je décris une circonférence ; je joins A et C ; puis je porte AD sur AB, de A en E. Alors, la droite donnée se trouve divisée au point E, comme il est prescrit ; c'est-à-dire qu'on a AB : AE : : AE : EB.

D'abord, il est clair qu'en vertu du principe précédent, AF : AB : : AB : AD. Or, AD=AE ; DF qui vaut deux fois BC, est égale à AB qui est aussi double de BC. La dernière proportion devient donc AF : DF : : AB : AE. Retranchant le second terme du premier dans chaque rapport (76), nous obtiendrons A—DF : DF : : AB—AE : AE ou AE : AB : : EB : AE. Mais nous pouvons mettre les extrêmes à la place des moyens (72). Il vient donc enfin AB : AE : : AE : EB.

C'est en exécutant ce tracé, qu'on parvient à diviser une circonférence en dix parties égales, ainsi que nous le verrons plus tard.

Il n'est pas inutile de remarquer que la sécante AF se trouve divisée aussi en moyenne et extrême raison, au point D, ou que AF : DF : : DF : AD. Cela résulte de ce que AF : AB : : AB : AD et de ce que AB=DF.

112. *L'angle* ABC *formé par une tangente* AB *et par une sécante* BC *qui se rencontrent sur la circonférence* (P. V, F. 13), *a pour indication, la moitié des degrés de l'arc* BC *renfermé dans cet angle.*

Traçons CD parallèlement à la tangente; les angles alternes-internes ABC, BCD seront égaux (58). Ils auront donc chacun pour indication, la moitié des degrés contenus dans l'arc BD, car BCD est un angle inscrit (98). Or, l'arc BD est égal à l'arc BC, puisqu'ils sont compris entre parallèles (95) et que la tangente n'est au fond qu'une sécante dont les deux points d'intersection sont confondus (111). Donc, l'angle ABC a aussi pour indication, la moitié des degrés de l'arc BC.

Remarquez que le principe a lieu aussi pour l'angle CBE: puisque la somme des angles ABC, CBE est de 180° (45), ou la moitié de la circonférence, l'angle CBE a nécessairement pour indication, la moitié de l'arc BDC.

Réciproquement, *si l'indication d'un angle* ABC *qui a son sommet sur la circonférence, est la moitié de l'un des deux arcs dont un* BC *des côtés est la corde, l'autre côté* AB *est tangent au sommet* B; car si AB n'était pas une tangente, on pourrait tracer, par B, du côté de BA, une autre droite qui fût tangente, et l'angle qu'elle formerait avec la corde BC, aurait pour indication, la moitié de l'arc BC. Il serait donc égal à ABC, ce qui est impossible.

PROBLÈME : *Tracer un arc qui ait pour corde, une droite donnée* AB, *et qui soit tel, que tous les angles inscrits, comprenant cette corde, soient égaux chacun à un angle connu* CDE (P. V, F. 14).

Menez de l'une des extrémités de la droite donnée, de A par exemple une droite AF qui fasse avec AB, un angle égal à CDE (p. 32); élevez en A une perpendiculaire AG sur AF; élevez aussi une perpendiculaire HI au milieu de AB; puis, du point K où les deux perpendiculaires se rencontrent, décrivez avec le rayon KA, l'arc ALB. Tous les angles AMB, ANB, etc., qui, inscrits dans cet arc, en comprendront la corde AB, auront même indication que CDE et seront égaux à cet angle (probl. *b*, p. 104).

D'abord, tous ces angles inscrits renfermant le même arc AOB, ont même indication (98) et sont égaux entre eux. Mais, l'angle BAF qui est formé par une sécante AB et par une tangente AF (106), a pour indication, la moitié des degrés contenus dans l'arc AOB. Il est donc égal à chacun des angles inscrits, et par conséquent, l'un quelconque de ces angles est égal à CDE.

Si l'on connaissait seulement l'indication de CDE, on procéderait de la même manière, excepté qu'il faudrait se servir du rapporteur, pour faire l'angle BAF du nombre de degrés donné (probl. *c*, p. 106).

APPLICATION : Nous supposerons, pour présenter une application de ce tracé, que nous ayons une carte, un plan où soient marqués le clocher de Montigny A, celui de Longeville B, celui de la cathédrale de Metz C, et que nous voulions indiquer sur ce plan, la position d'une maison D nouvellement construite dans le ban Saint-Martin (P. V, F. 15).

Nous nous transporterons en D avec un graphomètre, et nous leverons les angles que forment entre elles, les droites horizontales menées par un point E, choisi très-près de la maison, et par chacun des trois clochers. Soient 50° l'indication de l'angle AEB, 70° celle de l'angle AEC et 120° celle de l'angle BEC. Sur la droite A'B' du plan (P. V, F. 16), nous décrirons un arc A'FB', tel que tous les angles inscrits, comprenant la corde, soient chacun de 50°, et sur A'C', nous décrirons un arc A'GC', tel que l'angle inscrit, comprenant la corde, y soit de 70°. Ces deux arcs se couperont en un point E' qui sera sur le plan, la position de la station E prise très-près de la maison neuve; car l'angle A'E'B' aura pour indication 50° et l'angle A'E'C' aura pour indication 70°.

Si l'on veut vérifier l'opération, il faut décrire sur la droite B'C', un arc B'HC', tel que l'angle inscrit, comprenant la corde, y soit de 120°: cet arc devra passer par le point E' où se coupent les deux premiers.

TRACÉ DES CERCLES TANGENS A DES DROITES.

113. Quand une droite est tangente à un cercle, ce cercle est aussi *tangent à la droite.* Or, de même qu'on a besoin de tracer des tangentes à des cercles, on se trouve souvent dans la nécessité de tracer des cercles qui ne fassent que toucher des droites, qui n'aient qu'un seul point de commun avec elles. Comme il faut, pour déterminer un cercle, trois points (p. 97) ou trois conditions qui en tiennent lieu, plusieurs cas peuvent se présenter. Lorsque le rayon n'est pas donné, par exemple, le cercle qu'il s'agit de décrire, peut devoir passer par deux points et toucher une droite, ou passer par un point et toucher deux droites, ou enfin toucher trois droites.

PROBL. (*a*) : *Décrire une circonférence d'un rayon connu, qui passe par un point donné et soit tangente à une droite tracée.*

Premier cas : Le point donné C est sur la droite tracée AB (P. V, F. 17).

Le point C sera conséquemment le contact. J'élève alors par ce point, une perpendiculaire sur AB, je porte le rayon de C en D, et de ce dernier point, avec une ouverture de compas égale à DC, je décris un cercle qui passera par C et n'aura que ce seul point de commun avec la droite donnée ; car AB sera tangente à ce cercle (106), et par suite, le cercle sera tangent à AB.

Il y a deux solutions, le point D pouvant être pris au-dessous de AB, sur le prolongement de DC.

Deuxième cas : Le point donné C se trouve hors de la droite tracée AB (P. V, F. 18).

Il est visible que le centre doit être à la même distance de C et de AB, distance qui est égale au rayon donné. J'abaisse donc de C une perpendiculaire CD ; je porte le rayon de D en E ; par ce dernier point, je tire une parallèle à AB, et j'ai le lieu de tous les points situés à une distance DE de la droite donnée (67); de C, avec une ouverture de compas égale à DE, je décris une circonférence, pour avoir le lieu de tous les points situés à une distance DE du point C (5) ; et les intersections F, F' de ces deux lieux géométriques, seront les centres de deux cercles, qui, décrits avec le rayon donné, passeront par C et toucheront AB en des points G, G' pieds des perpendiculaires abaissées de F, F'.

Le problème a donc généralement deux solutions ; il n'en aurait qu'une, si CD, distance du point donné à la droite, était double du rayon ; il n'en aurait point, si cette distance était plus grande.

Application : C'est le premier de ces tracés qu'emploient les architectes, pour former les profils des quarts de ronds et des cavets.

Probl. (*b*) : *Décrire une circonférence qui passe par deux points donnés et soit tangente à une droite tracée.*

Premier cas : L'un C des deux points est sur la droite donnée AB ; l'autre D est hors de cette droite (P. V, F. 19).

Le point C sera le contact, et par conséquent, le centre se trouvera sur CE perpendiculaire à AB. Joignons C, D, puis élevons une perpendiculaire FG au milieu de CD ; elle sera le lieu de tous les points également éloignés de C et de D (43). L'intersection H de CE et de FG, donnera donc le centre du cercle demandé. Le rayon sera aussi déterminé, car il devra être de même longueur que HC ou HD.

Deuxième cas : Les deux points donnés C, D sont sur une parallèle à la droite tracée AB (P. V, F. 20).

Si vous élevez une perpendiculaire EF au milieu de CD, elle passera par le centre cherché et sera perpendiculaire à AB (57). Donc, le point F où elle rencontrera cette dernière droite, sera le contact (106) ; le cercle demandé passera par F, et son centre se trouvera aussi sur une perpendiculaire au milieu de FC ou de FD. Il sera, par conséquent, à l'intersection G de cette perpendiculaire HI et de EF, ce qui rendra le rayon égal à GF, à GC, à GD.

Troisième cas : Les deux points donnés C, D sont sur une droite qui coupe AB (P. V, F. 21).

Prolongez CD jusqu'en E. Ce point sera l'intersection d'une tangente EA et d'une sécante EC du cercle demandé, conséquemment, la distance de E au contact de AB, sera une moyenne proportionnelle entre EC, ED (111). Cherchez donc cette moyenne et portez-la de E en F ou en F' ; vous pourrez alors trouver le centre du cercle et le rayon, comme dans le premier cas, ou comme dans le probl. (c) de la page 97.

Le problème comporte, comme vous voyez, deux solutions ; il n'en a aucune, si CD est perpendiculaire sur AB.

Il y a du reste un moyen bien simple de trouver, sur la figure même, la moyenne proportionnelle nécessaire ; décrivez une circonférence dont CD soit diamètre, et menez par E, une tangente EG à cette circonférence (probl. *b*, p. 112). Vous pourrez rapporter EG sur AB, des deux côtés de E, en décrivant de ce point, un arc de cercle FGF', et vous marquerez ainsi les points F, F'.

Probl. (c) : *Décrire une circonférence d'un rayon connu, qui soit tangente à deux droites données.*

Premier cas : Les droites données AB, CD sont concourantes (P. V, F. 22).

Le centre n'en doit pas moins se trouver à la même distance de l'une et de l'autre (108). Élevez donc sur AB, une perpendiculaire AE égale au rayon, et par le point E, tirez EF parallèle à AB ; le centre sera sur cette parallèle (67). Faites la même opération pour CD ; le centre devra être sur GH parallèle à cette droite. C'est donc de l'intersection I, avec le rayon donné, que vous décrirez la circonférence demandée.

Si les droites AB, CD se rencontrent sur le tableau, vous pourrez employer la bisectrice de l'angle, soit pour remplacer une des droites EF, GH, soit pour vérifier si la position de I est bien exacte.

Deuxième cas : Les droites données AB, CD sont parallèles (P. V, F. 23).

Si le rayon était en outre assigné, il faudrait que sa longueur fût égale à la demi-distance des deux parallèles (109) ; autrement le tracé serait impossible. Il suffit donc de donner les deux droites.

Élevez une perpendiculaire en un point quelconque E de AB, par exemple ; elle rencontrera CD en F et d'équerre (57). Cherchez le milieu G de EF (p. 42) ; ce point sera le centre, et CE ou CF, le rayon du cercle demandé.

Comme le point E a été pris arbitrairement, le problème a une infinité de solutions.

Appl. (*a*) : Le premier de ces deux tracés est utile notamment dans le dessin des machines. Si, par exemple, pour satisfaire à certaines conditions, une chaîne ou une courroie sans fin doit embrasser un arc donné sur une poulie, les directions des deux parties droites de cette courroie seront déterminées, et il faudra recourir au tracé du premier cas, pour trouver dans l'angle qu'elles formeront, l'emplacement de l'essieu de l'autre poulie dont on connaît le rayon et qui doit être, comme la première, tangente aux parties droites de la courroie.

Appl. (*b*) : Le second tracé est d'un usage fréquent dans l'architecture : on l'y emploie pour former les profils des baguettes et des tores qui font partie des moulures.

Probl. (*d*) : *Décrire une circonférence qui passe par un point donné et soit tangente à deux droites tracées.*

Premier cas : Les droites données AB, CD sont concourantes (P. V, F. 24).

Tracez la bisectrice de l'angle qu'elles forment (p. 101); le centre cherché se trouvera sur cette droite (108). D'un point quelconque G de la même droite, abaissez une perpendiculaire GH sur AB, puis décrivez le cercle dont G est le centre et GH le rayon. Ce cercle sera tangent à CD, comme à AB (94). Conséquemment, le point de concours de AB, CD, sera celui des sécantes communes qui passeront par les extrémités de rayons parallèles, appartenans au cercle G et au cercle cherché (p. 114). Si donc vous menez par le point donné I, une droite IK dirigée vers ce point de concours (probl. *d*, p. 94), IK sera une sécante commune aux deux cercles, et le rayon qui doit aboutir au point I, sera parallèle au rayon GL ou bien au rayon GL'. Il reste alors, pour avoir le centre cherché, à mener par I, une parallèle à GL ou à GL', jusqu'à la rencontre de EF.

Ainsi, vous trouverez deux centres M, M', ce qui vous prouve que le problème a généralement deux solutions. Les rayons seront MI, M'I.

Deuxième cas : Le point donné I' se trouve sur la bisectrice EF.

Élevez sur EF, au point I', une perpendiculaire I'N; elle sera tangente au cercle demandé (106). Si donc vous portez NI' de N en H et en H', vous aurez les contacts des deux solutions (108), et des perpendiculaires élevées sur AB, en H, H', détermineront les deux centres G, G'.

Troisième cas : Les droites données sont parallèles.

Il s'ensuit que le rayon est déterminé, car il est la moitié de la distance des parallèles (109). Ce cas retombe donc absolument dans le deuxième du probl. (*a*).

Probl. (*e*) : *Décrire une circonférence qui touche trois droites données.*

Deux des droites peuvent être parallèles, mais la troisième doit les couper; autrement, le problème serait impossible.

Tracez les bisectrices des deux angles ABC, BCD (P. V, F. 25) que forment les droites données AB, BC, CD (p. 101). Le point E où elles se couperont, sera le centre du cercle demandé (108); les trois perpendiculaires EF, EG, EH seront égales (94), et par conséquent, la circonférence que vous décrirez de E, avec EF pour rayon, touchera les droites données en F, G, H.

Ce problème a quatre solutions, quand les droites ne sont point limitées, et qu'il n'y en a pas de parallèles, car en faisant les opérations indiquées, dans chacun des autres angles que forment ces droites, vous trouverez trois autres centres E', E'', E'''.

La position des centres E, E', E'', E''' peut être vérifiée ; car, par exemple, la bisectrice de l'angle AID doit passer aussi par E.

Il s'ensuit ce principe : *Les six bisectrices des douzes angles que peuvent former trois droites, concourent trois à trois en quatre points qui sont les centres de cercles tangens à la fois aux trois droites.*

Si AB, CD, des deux droites données, étaient parallèles, il n'y aurait que huit angles, quatre bisectrices, deux centres de cercles tangens, et l'une des bisectrices qui concourent en E, par exemple, deviendrait une parallèle à AB, CD, qui passerait par le milieu de BC.

Observez qu'il n'est pas toujours possible de décrire une circonférence tangentiellement à quatre droites qui se coupent d'une manière quelconque, attendu que les conditions sont alors au nombre de quatre, et qu'il n'en faut que trois pour déterminer complètement le centre et le rayon d'un cercle.

TRACÉ DES CERCLES QUI SE COUPENT.

Les cercles ayant été combinés avec les droites, il faut maintenant les combiner entre eux et considérer d'abord ceux qui se coupent.

114. *Deux circonférences ne peuvent se couper qu'en deux points*; car si elles avaient trois points communs, leurs centres se superposeraient, leurs rayons seraient égaux (probl. *a*, p. 98), et l'une se confondrait absolument avec l'autre. On n'aurait donc plus qu'une seule circonférence, au lieu de deux.

Mais, si deux circonférences se coupent en un point, il faut nécessairement qu'elles se coupent en un second point ; car l'une étant entrée dans l'autre, elle est obligée d'en sortir pour se fermer.

115. *La droite* AB *des centres de deux circonférences qui se coupent, est perpendiculaire au milieu de la corde commune* CD (P. V, F. 26).

Puisque C et D appartiennent à la circonférence A, ces deux points sont également distans du centre, ou bien le point A est à la même distance de C et de D (5). Puisque ces mêmes points appartiennent à la circonférence B, le centre B est à la même distance de C et de D. La droite AB a donc deux points aussi éloignés chacun de l'une des extrémités de CD, que de l'autre ; cette droite est donc perpendiculaire au milieu de CD (43).

116. *La distance des centres* A, B, *de deux circonférences qui se coupent, est toujours moindre que la somme des rayons* AC, BC, *et chaque rayon est plus petit que l'autre augmenté de la distance des centres* (P. V, F. 26).

D'abord, AB, ligne droite, est plus petite que ACB ligne brisée, terminée aux mêmes points. Pour des raisons semblables, le rayon AC est plus petit que ABC, et le rayon BC est moindre que BAC.

117. Réciproquement, *deux circonférences se coupent, toutes les fois que la distance des centres est plus petite que la somme des rayons, et qu'en même temps, chaque rayon est moindre que l'autre augmenté de la distance des centres.*

Chacune de ces conditions, prise séparément, ne suffit pas pour que deux circonférences se coupent. La première est satisfaite, quand l'un des deux cercles est tout entier dans l'autre. On voit, en effet, sur la figure 27, qu'alors AB plus petite que le rayon AC, est à plus forte raison moindre que la somme des deux rayons AC, BD. La seconde condition est remplie à son tour, quand les deux cercles sont tout à fait séparés, comme dans la figure 28; car alors le rayon AC, par exemple, qui est plus petit que la distance AB, est à plus forte raison moindre que AB augmentée de l'autre rayon BD.

Mais, si les positions des centres et les rayons satisfont à la fois aux deux conditions, les deux circonférences se couperont nécessairement, comme dans la figure 26.

118. Donc, *pour que deux circonférences ne se coupent pas, il faut ou que la distance* AB *des centres soit plus grande que la somme des rayons* AC, BD (F. 28), *ou que l'un* AC *des rayons soit plus grand que la distance* AB *des centres, augmentée de l'autre rayon* BD (F. 27).

PROBLÈME : *Tracer une circonférence d'un rayon donné* CD, *qui en coupe une autre* F, *en deux points indiqués* A, B (P. V, F. 29).

Ce tracé est absolument le même que celui du probl. (*b*), p. 97; car si l'on mène la sécante AB, et qu'avec le rayon CD, on décrive une circonférence qui la coupe en A et en B, les conditions imposées seront remplies. Tout se réduit donc à trouver le centre E de cette circonférence, ce qui se fait en décrivant de A et de B, avec le rayon CD, de petits arcs qui se coupent au-dessus ou au-dessous de AB, en E par exemple. Si alors on mène EF, la droite des centres, et les rayons AE, AF, il devient visible qu'on a satisfait aussi aux conditions du n° 117.

En général, ce problème a, comme on voit, deux solutions; mais il n'en aurait qu'une, si le rayon donné était la moitié de AB : le centre E serait alors au milieu de cette corde.

119. *Deux cercles inégaux* A, B *qui se coupent* (P. V, F. 30), *ont un centre* C *de similitude directe et un centre* D *de similitude inverse*, qu'on détermine comme dans le cas où les circonférences ne se coupent pas (p. 110). Mais le dernier, situé dans l'intérieur des deux cercles, n'est plus le concours des tangentes communes.

Si les cercles étaient égaux, le centre de similitude directe ne pourrait être marqué, puisque les tangentes communes seraient parallèles à la droite AB des centres, et le centre de similitude inverse se trouverait au milieu de cette droite, attendu que les distances AD, BD sont toujours proportionnelles aux deux rayons (81).

« Supposons constantes la position du centre B, celle du point E où le cercle A coupe la droite des centres, et la longueur du rayon BF. Vous verrez aisément que, si le rayon EA augmente, C se rapprochera de C' et D de D'. Mais, tant grand que devienne EA, jamais C n'entrera dans le cercle B; car AC étant toujours plus grand que AE, rendra BC toujours plus grand que BC', autrement la proportionnalité des distances AC, BC et des rayons AG, BF ou AE, BC' n'existerait plus. De même, tant grand que devienne EA, jamais D ne sortira du cercle B; car AD étant toujours moindre que AE, rendra BD toujours moindre que BD', à cause de la proportion constante AG:AD::BF:BD ou AE:AD::BD':BD. »

« Lors donc que EA sera devenu plus grand que toute longueur imaginable ou lorsque A sera infiniment éloigné de E, la différence entre le rayon AE et la distance de A au centre de similitude inverse, sera tout au plus ED'. Or, cette différence n'est rien, en comparaison des distances infiniment grandes EA, D'A. On pourra donc regarder la distance de A au centre de similitude inverse comme égale au rayon AE, et par conséquent, celle de B au même centre sera égale au rayon BD', c'est-à-dire qu'alors ce centre se trouvera au point D'. »

« La différence entre le rayon AE et la distance de A au centre de similitude directe, ne sera guère plus grande que EC', quand A sera infiniment éloigné de E; cette différence ne pourra donc pas empêcher de regarder comme de même longueur, le distance et le rayon AE. Par conséquent, la distance de B au centre de similitude directe sera égale au rayon BC', c'est-à-dire que ce centre se trouvera au point C'. »

« Mais une portion quelconque d'un cercle dont le rayon est infiniment grand, peut être assimilée à une ligne droite, car la courbure en est insensible, inappréciable, nulle, pour ainsi dire. De plus, tout rayon d'un cercle est perpendiculaire sur la portion de circonférence que, dans le voisinage de son extrémité, on peut considérer, sans erreur sensible, comme une ligne droite. »

« Si donc vous tirez par le point E, une sécante HI perpendiculaire à la droite AB des centres, cette sécante, prolongée aussi loin que vous voudrez, sera une portion du cercle A devenu infiniment grand.

Il s'ensuit qu'*un cercle* B *et une sécante* HI *ont, comme deux cercles qui se coupent, deux centres de similitude situés aux extrémités du diamètre* C'D' *perpendiculaire à la sécante.*

Mais, *chacun de ces deux points est à la fois centre de similitude* *directe et centre de similitude inverse ;* car le cercle infiniment grand dont HI est une portion, peut avoir son centre aussi bien à droite de B qu'à gauche.

120. Parmi les cercles qui en coupent un autre, on doit distinguer les *cercles radicaux.* Un cercle est dit *radical*, lorsque son rayon est moyen proportionnel entre les distances de son centre aux deux extrémités du diamètre d'un second cercle. Si, par exemple, on décrivait de B (P. IV, F. 21), une circonférence qui eût BA pour rayon, elle serait radicale de la circonférence F, parce que la droite BA est moyenne proportionnelle entre les distances BC, BD (103). Si, du point A d'une tangente AE (P. V, F. 31), vous décrivez un cercle qui ait AE pour rayon, vous aurez le cercle radical du cercle B, parce que AE est moyenne proportionnelle entre les distances AD, AC (111).

Le centre d'un cercle radical peut donc être situé à l'intérieur ou à l'extérieur de celui qu'il coupe. Le second cas est le seul qui offre des principes et des tracés utiles à l'industrie ; ainsi nous ne considérons pas le premier.

Tout cercle radical A *dont le rayon est une tangente* AE, *a pour cercle radical, celui* B *qu'il coupe au contact* E (P. V, F. 31).

Effectivement, BE, rayon de B, est perpendiculaire à l'extrémité de AE, puisque cette dernière droite est tangente (107) ; BE est donc tangent au cercle A ; les deux circonférences se trouvent tout à fait dans les mêmes circonstances, l'une par rapport à l'autre, et par suite, B est cercle radical de A, comme A l'est de B.

Lorsque deux cercles ont ainsi des tangentes d'équerre, en leurs points d'intersection E, E', on dit qu'ils sont *radicaux l'un de l'autre* ou qu'*ils se coupent perpendiculairement.* C'est quand deux cercles se coupent ainsi, qu'on peut marquer leurs points communs avec précision.

Probl. (*a*) : *Décrire d'un point donné* A, *un cercle qui en coupe un autre* B *perpendiculairement* (P. V, F. 31).

Menez par A une tangente AE au cercle B, et prenez la longueur AE pour rayon.

Probl. (*b*) : *Décrire un cercle qui en coupe perpendiculairement un autre* B, *en deux points donnés* E, E' (P. V, F. 31).

Tirez les rayons BE, BE', puis élevez des perpendiculaires à leurs extrémités. Le concours A de ces tangentes au cercle B, sera le centre du cercle cherché, et la longueur AE ou AE' en sera le rayon.

121. La sécante AB qui passe par les intersections A, C de deux cercles, est nommée *sécante d'intersection* (P. V, F. 32).

La sécante d'intersection AB *de deux cercles* F, G, *est le lieu* *des centres de tous les cercles radicaux communs aux deux premiers.*

Il est vrai d'abord qu'il y a égalité entre les tangentes BE, BE' menées aux deux cercles, d'un point quelconque B de la sécante d'intersection ; car chacune est moyenne proportionnelle entre BA et BC (111). D'ailleurs, aucun point pris hors de AB ne pourrait jouir de la même propriété.

On nomme *axe radical*, une droite dont tous les points sont, comme ceux de AB, centres de cercles radicaux communs à deux autres cercles, ou bien, ce qui revient au même, *l'axe radical* de deux cercles est une droite de chaque point de laquelle peuvent être menées à ces cercles des tangentes d'égales longueurs (108).

Par conséquent, *l'axe radical de deux cercles qui se coupent, est leur sécante d'intersection ;*

Autrement, *l'axe radical de deux cercles qui se coupent, passe par les deux points d'intersection, et est perpendiculaire à la droite des centres* (115).

122. Le concours de deux arcs radicaux fournis par trois cercles, est appelé *centre radical*. De ce point peut être décrit un cercle qui soit à la fois radical des trois auxquels appartiennent les deux arcs, ou bien, de ce point peuvent être menées à ces trois cercles des tangentes d'égales longueurs.

Trois cercles A, B, C *qui se coupent deux à deux, ne donnent qu'un seul centre radical* D, *concours des trois axes radicaux* (P. V, F. 33).

Regardons d'abord D comme le concours des deux seuls axes radicaux EF, GH. Le cercle radical décrit de ce point, sera commun à A et à B, à A et à C ; il le sera donc aussi à B et à C. Par conséquent, son centre D doit se trouver sur l'axe radical IK de B et de C.

Ainsi, *les sécantes d'intersection que donnent trois cercles qui se coupent deux à deux, concourent toutes trois au même point.*

123. Parmi les cercles qui en coupent deux autres, nous avons à distinguer les *cercles réciproques*. J'ai adopté le mot *réciproque*, pour désigner une circonférence telle que CDEF (P. V, F. 34) qui passe par deux points d'entrée E, F et par deux points de sortie D, C de deux sécantes communes ID, IC parties d'un des centres de similitude des cercles A, B. Cette dénomination va être justifiée, et il sera démontré en même temps que les quatre points C, D, E, F appartiennent réellement à une même circonférence, ou, ce qui est la même chose (102), que ID : IC :: IF : IE.

Une telle proportion résulte, en effet, de ce principe général : *Sont réciproquement proportionnelles, les distances d'un centre de similitude à deux points d'entrée et à deux points de sortie de deux sécantes communes, parties de ce centre, l'entrée et la sortie de chaque sécante n'étant pas prises sur le même cercle.*

Ainsi, non seulement ID : IC : : IF : IE, mais encore

IG : IH : : IL : IK;

ID : IL : : IH : IE;

IG : IF : : IC : IK.

Nous nous contenterons de démontrer la première de ces quatre proportions; car il suffirait, pour démontrer les autres, de répéter, sur de nouvelles longueurs, le raisonnement que nous allons faire.

D'après le n° 104, les rayons BG, AD sont parallèles, puisque la sécante DI passe par le centre de similitude I, et IG : ID : : IB : IA (79); il en est de même des rayons BH, AC, et IH : IC : : IB : IA. Donc, à cause du rapport commun IB : IA, on a la proportion IG : ID : : IH : IC, ou IG : IH : : ID : IC. Mais le principe (102) appliqué au cercle B, donne cette autre proportion IG : IH : : IF : IE. Donc enfin, ID : IC : : IF : IE, ainsi que nous l'avons annoncé.

On démontrerait de la même manière, que de semblables relations sont données par les *sécantes communes qui concourent au centre de simulitude inverse* des cercles A, B.

124. « Il suit du principe précédent, qu'il y a, pour chaque centre de similitude, quatre séries de cercles réciproques. »

« La première comprend tous les cercles réciproques qui passent par une entrée E, une sortie D, une sortie C et une entrée F (P. V, F. 34) : elle peut être représentée au moyen des quatre lettres [*e s s' e'*], initiales des mots *entrée* et *sortie*, placées dans le même ordre que les quatre points désignés; les accens distinguent les points de la sécante de droite. »

« La deuxième série est celle des cercles réciproques qui passent par une sortie G, une entrée K, une entrée L et une sortie H : son indice sera [*s e e' s'*]. »

« La troisième série renferme tous les cercles réciproques qui passent par une entrée E, une sortie D, une entrée L et une sortie H : son indice sera [*e s e' s'*]. »

« Enfin, la quatrième série se compose de tous les cercles réciproques qui passent par une sortie G, une entrée K, une sortie C et une entrée F : son indice sera [*s e s' e'*]. »

« Mais, il existe un cercle réciproque des deux cercles A, B, qu'on peut regarder comme appartenant à chacune des quatre séries; c'est celui où se trouvent les quatre contacts des deux tangentes communes qui concourent au centre de similitude : la tangente étant au fond une sécante dont les deux points communs au cercle, sont réunis en un seul, il est clair que les distances du centre de similitude aux quatre contacts, doivent être aussi réciproquement proportionnelles. D'ailleurs, ces distances étant égales deux à deux (108), forment aussi bien des proportions réciproques, que des proportions ordinaires. »

125. « Si maintenant vous observez qu'outre le cercle réciproque CDEF (P. V, F. 34) il en passe un grand nombre d'autres de la même série, par les points D, E, ou par les points C, F, et qu'on peut en dire autant, pour chacune des sécantes communes à A et à B, menée par I, vous comprendrez aisément que tous les cercles réciproques d'une même série, se coupent deux à deux, et que leurs sécantes d'intersection ou leurs axes radicaux concourent au centre de similitude: ce point est donc centre radical de tous les cercles réciproques d'une série (122), y compris celui qui passe par les quatre contacts des tangentes communes à A et à B. Mais ce dernier appartenant aux quatre séries, a même cercle radical que chacune. Par conséquent, il y a, pour les quatre séries, un cercle radical commun et unique dont le centre est le centre de similitude. »

Donc enfin, *le centre de similitude directe ou inverse de deux cercles, est le centre radical de tous les cercles réciproques qu'il détermine.*

Problème : *Tracer un des cercles réciproques de deux cercles donnés* A, B, (P. V., F. 34).

Supposons que le cercle demandé soit un de ceux qui ont, pour centre radical, le centre de similitude directe de A et B. Vous marquerez ce centre de similitude I (p. 110) ; puis, ayant tiré une sécante commune ID, vous décrirez, avec un rayon quelconque, un cercle M qui coupe cette sécante en un point d'entrée E et en un point de sortie D (probl. *b*, p. 97). Ce cercle coupera A et B en deux autres points C, F, situés sur une sécante commune IC ou sur une tangente commune; et divisera les droites IC, ID en parties réciproquement proportionnelles.

Le tracé serait absolument le même, si le cercle réciproque demandé devait être un de ceux qui ont, pour centre radical, le centre de similitude inverse.

TRACÉ DES CERCLES SÉPARÉS.

Il nous reste à considérer les circonférences qui se touchent et celles qui n'ont aucun point commun. Mais, comme les procédés les plus simples qu'on puisse employer pour tracer les premières, reposent sur des principes relatifs aux dernières, nous étudierons d'abord celles-ci.

Deux circonférences qui n'ont aucun point commun, sont dites *séparées ;* la distance AB de leurs centres est plus grande que la somme de leurs rayons AC, BD (P. V, F. 28), ou bien cette distance est moindre que la différence des mêmes rayons (F. 27). Dans le premier cas, les deux circonférences sont *séparées extérieurement ;* dans le second, elles sont *séparées intérieurement :* l'une B des circonférences se trouve entièrement renfermée dans l'autre A, puisque le rayon BD ajouté à AB, ne peut faire le rayon AC.

126. Tout ce qui a été dit des cercles qui se coupent, au sujet des centres de similitude, convient aux cercles séparés, sauf de légères modifications. Ainsi, *deux cercles séparés ont toujours deux centres de similitude* (119) qu'on détermine comme il a été dit, page 110; mais, si les cercles sont séparés intérieurement, aucun de ces centres n'est le concours des tangentes communes.

Un cercle B *et une droite* HI *séparés* (P. IV, F. 28) *ont aussi deux centres de similitude situés aux extrémités du diamètre* AC *perpendiculaire à la droite, et chacun de ces points est à la fois centre de similitude directe et centre de similitude inverse :* A est un centre de la première espèce, si l'on considère le cercle dont HI fait partie, comme enveloppant le cercle B; dans le cas contraire, c'est le point C qui est un centre de la première espèce.

Probl. (*a*) : *Placer un cercle de rayon connu, de manière qu'un point donné* E *soit centre de similitude directe de ce cercle et d'un autre* A (P. IV, F. 32).

Tirez un rayon quelconque AC et une sécante CE; portez de A en L, le rayon du cercle à placer; menez par L une parallèle à AE; cette parallèle rencontrera la sécante CE en un point D, et si par ce point vous tracez DB parallèlement à AC, le point B que vous trouverez sur AE, sera précisément la position à donner au centre du second cercle.

Effectivement, BD égale à AL (65) sera un rayon du cercle placé en B; la sécante commune CE passera par les extrémités de rayons parallèles AC, BD; par conséquent, en E, concours de cette sécante et de la droite AB des centres, se trouvera le centre de similitude directe des cercles A, B (p. 110).

Probl. (*b*) : *Placer un cercle de rayon connu, de manière qu'un point donné* H *soit centre de similitude inverse de ce cercle et d'un autre* A (P. IV, F. 32).

Vous agirez comme dans le problème précédent, si ce n'est que le rayon du cercle à placer devra être porté de A en L', sur le prolongement de AC.

127. *Deux cercles séparés extérieurement ont un axe radical perpendiculaire à la droite des centres.*

La vérité de ce fait sera démontrée, si nous faisons voir qu'une ligne droite perpendiculaire à celle des centres, est le lieu où se trouve tout point duquel on peut mener des tangentes égales à deux cercles tels que A, B (P. V, F. 35).

D'abord, aucun point pareil ne saurait être situé en dehors des deux tangentes CD, EF perpendiculaires à AB; car s'il en existait un à droite de EF ou à gauche de CD, il y en aurait nécessairement un autre sur l'une de ces droites, puisque dans leur intervalle, il s'en trouve au moins deux, qui sont les milieux G, H des tangentes communes.

Or, il est impossible de mener, d'un point quelconque D de CD, par exemple, deux tangentes égales aux cercles A, B : l'une DI serait une oblique qui, coupant AB, aurait plus de longueur que la tangente perpendiculaire DC.

Ainsi, tous les centres des cercles radicaux communs à A et à B, sont situés entre les parallèles CD, EF, quelque rapprochés que soient les deux cercles. Mais des points qui ne peuvent sortir de l'intervalle de deux parallèles, quelque voisines qu'elles soient, se trouvent nécessairement sur une droite parallèle à celles-là. Donc, le lieu des centres des cercles radicaux communs à A et à B, est un axe perpendiculaire à la droite AB des centres (57).

PROBL. (*a*) : *Tracer l'axe radical de deux cercles séparés* A, B (P. V, F. 36).

Décrivons d'un centre quelconque C et d'un rayon arbitraire, un cercle qui coupe à la fois A et B. La corde DE sera l'axe radical de A et de C (121) ; la corde FG sera l'axe radical de B et de C ; conséquemment, l'intersection H de ces deux axes, sera le centre d'un cercle radical commun à A et à B ; ce point appartiendra donc à l'axe radical des cercles A, B, et il ne nous restera plus qu'à mener de H, une perpendiculaire sur la droite AB des centres. Cette perpendiculaire HI sera l'axe demandé ; c'est-à-dire que d'un point quelconque de HI, on pourra mener des tangentes égales aux deux cercles A, B, ou décrire un cercle qui coupe ces deux-là perpendiculairement.

PROBL. (*b*) : *Décrire un cercle qui soit séparé d'un autre* A *et tellement placé, qu'une droite donnée* HI *forme l'axe radical des deux* (P. V, F. 36).

Le centre du cercle demandé doit être un point de AB, perpendiculaire abaissée de A sur HI. Pour le déterminer, je décris arbitrairement une circonférence C qui coupe A en deux points D, E, et du point H où la corde DE rencontre HI, je tire une sécante quelconque HG'F' de la circonférence C ; puis, j'élève une perpendiculaire au milieu de la corde F'G', et le point B' où cette perpendiculaire coupe AB, est le centre du cercle demandé ; le rayon est B'G'.

Vous voyez par là qu'une infinité de couples de cercles différens peuvent avoir le même axe radical, et même qu'une droite HI est l'axe radical d'un cercle A et d'une infinité de cercles B, B', etc., différens.

128. *Deux cercles* B, B' *séparés intérieurement ont un axe radical perpendiculaire à la droite* BB' *des centres* (P. V, F. 36).

Coupons les deux cercles donnés par une circonférence arbitraire C. Les sécantes d'intersection FG, F'G' concourront en un point H. Tirons par ce point, une sécante quelconque HD dans le cercle C ; puis élevons une perpendiculaire au milieu de la corde DE, le point

A où elle rencontrera le prolongement de B'B, sera le centre d'un cercle qui pourra passer par les points D, E.

Alors, le point H concours des trois sécantes d'intersection, est un centre radical, pour les cercles A, B, B'. Si donc nous abaissons de H une perpendiculaire sur AB, cette droite HI sera l'axe radical des cercles A, B séparés extérieurement (probl. *a*, p. 136) et même celui des cercles A, B'. Par conséquent, HI perpendiculaire à la droite BB' des centres, qui laisse du même côté les deux cercles B, B' séparés intérieurement, est l'axe radical de ces cercles.

Il est visible, d'après cela, que les tracés des problèmes (*a*) et (*b*) du n° 127, conviennent au cas où les cercles sont séparés intérieurement, tout aussi bien qu'à celui où ils sont séparés extérieurement.

129. « *L'axe radical d'un cercle et d'une droite est la droite elle-même.* »

« En effet, toute droite peut être considérée comme une partie d'un cercle infiniment grand ; par suite, une droite et un cercle placés sur le même tableau, ont un axe radical. Mais, les tangentes à la portion de cercle que représente la droite, se confondent avec elle et la touchent partout. Si donc on mène d'un point quelconque de cette droite, une tangente au cercle, il suffira de la rapporter sur la même droite, pour avoir une tangente au cercle infiniment grand, qui lui soit égale. »

« En outre, la droite sera toujours coupée perpendiculairement, par un cercle radical décrit d'un quelconque de ses points, avec un rayon égal à la tangente menée de ce point au cercle donné ; car il y aura toujours un rayon du premier cercle, qui sera dirigé selon cette droite. Ainsi, elle jouira de toutes les propriétés d'un axe radical. »

130. « Dans tout ce qui a été dit jusqu'au numéro précédent, sur les axes radicaux, il *n'a* nullement *été* question de la grandeur des rayons. Cette grandeur n'exerce donc aucune influence ni sur l'existence de l'axe radical, ni sur sa position relative à la droite des centres. Par conséquent, cet axe existe encore, avec toutes ses propriétés ; il est encore perpendiculaire à la droite des centres, lorsqu'un des rayons est devenu tellement petit que le cercle s'est réduit à son centre. Ainsi, *un cercle et un point ont un axe radical, perpendiculaire au diamètre qui passe par le point.* »

« Du reste, il est clair qu'une des deux tangentes égales qu'on peut mener de chaque point d'un tel axe, est tout simplement une droite qui se termine au centre du cercle dont le rayon est nul. »

Probl. (*a*) : *Tracer l'axe radical d'un cercle* A *et d'un point extérieur* B (P. V., F. 37).

Menez par B, deux tangentes BC, BD au cercle A ; cherchez les milieux E, F de ces tangentes, et tirez EF ; cette droite sera l'axe radical demandé.

Les points E, F jouissent, en effet, de la propriété de ceux d'un

18

axe radical, puisque EC=EB, FD=FB. De plus, EF et la corde de contact CD sont parallèles, puisqu'elles divisent en parties égales, les concourantes BC, BD (78). Or, CD est perpendiculaire à AB (108); donc, EF l'est aussi (57).

PROBL. (*b*) : *Tracer l'axe radical d'un cercle* A *et d'un point intérieur* B' (P. V, F. 37).

« Supposons que EF soit l'axe demandé. La distance B'G au point B' devra être égale à une tangente menée de G au cercle A ; elle sera donc, comme cette tangente, moyenne proportionnelle aux deux parties GH, GI d'une sécante tirée de G. Il s'en suivra la proportion

$$GH : B'G :: B'G : GI, \quad \text{ou} \quad GH : B'G :: B'G : B'G + B'I,$$

puisque $GI = B'G + B'I$,

ou (76) $$B'H : B'G :: B'I : B'G + B'I,$$

puisque $B'G - GH = B'H$,

ou (72) $$B'H : B'I :: B'G : B'G + B'I,$$

ou enfin $$B'H : B'I - B'H :: B'G : B'I;$$

ce qui montre que la distance B'G du point donné B' à l'axe radical est une quatrième proportionnelle à la différence des distances de B' aux extrémités du diamètre, et à ces deux distances. »

« Il faut donc, pour résoudre le problème, tirer un diamètre par le centre A et le point B' donnés ; prendre la différence des distances du point B' aux extrémités I, H de ce diamètre ; chercher une quatrième proportionnelle à cette différence et aux deux distances B'I, B'H ; porter cette quatrième proportionnelle sur le diamètre, à partir du point B' et à l'opposite du centre A ; puis, élever au point G qui en résulte, une perpendiculaire sur AB' ; cette perpendiculaire sera l'axe radical demandé ; c'est-à-dire que les tangentes menées au cercle A, d'un point quelconque de EF, seront égales chacune à la distance de ce point au point B' donné. »

131. Deux cercles séparés intérieurement peuvent se trouver dans une position relative fort remarquable : celle où les deux centres sont confondus. On dit alors que les circonférences sont *concentriques :* telles sont celles qui ont le point C pour centre commun (P. V, F. 38).

Une ligne AB, *égale à la différence des rayons* AC, BC *de deux circonférences concentriques, est la plus courte droite qui puisse être menée d'un point de l'une à un point de l'autre ;* c'est-à-dire que toute droite BD dont la direction n'est pas celle d'un rayon, se trouve plus grande que AC—BC.

Tirons DC. Nous verrons que la ligne brisée DBC surpasse la droite DC, et qu'à cause des parties égales CB, CE, la droite DB surpasse DE différence des rayons. D'ailleurs, cette différence est partout la même ; donc le principe est vrai, quel que soit le point D ou B du quel on mène une ligne telle que BD.

132. Il suit de là que *la différence des rayons est la vraie distance d'une circonférence à sa concentrique.*

Il s'ensuit aussi que *deux circonférences concentriques sont partout à la même distance l'une de l'autre.* C'est pour cela qu'on les appelle parfois *circonférences équidistantes :* elles sont parmi les cercles, ce que les parallèles sont parmi les droites.

Probl. (*a*) : *Décrire une circonférence de rayon donné, qui soit concentrique à une autre* C *dont le centre peut être marqué* (P. V, F. 38).

Il suffit d'exécuter le tracé du n° 4, avec une ouverture de compas BC égale au rayon donné, et en prenant pour centre, celui de la circonférence C déjà décrite.

Probl. (*b*) : *Tracer une circonférence qui ait un rayon donné* AB *et qui soit concentrique à une autre* CDEFGH *dont on connaît le rayon* IK, *mais dont le centre ne peut être marqué* (P. V, F. 39).

Prenez deux points quelconques C, D sur la circonférence donnée; puis élevez une perpendiculaire LM au milieu de la corde CD; cette perpendiculaire passerait par le centre, si elle était prolongée (93); elle fait donc partie d'un rayon. Portez AB, sur IK, de I en B' ; prenez B'K différence des deux rayons, et portez-la sur LM, à partir du point N de la circonférence tracée. Le point O où tombera l'autre extrémité, appartiendra à la circonférence concentrique demandée.

Prenez ensuite deux autres points D, E ; faites pour ceux-là, les mêmes opérations que pour les premiers, et vous obtiendrez un second point P de la circonférence cherchée. Vous pourrez donc, en continuant toujours ainsi, vous procurer autant de points que vous en aurez besoin, pour pouvoir tracer à la main, avec quelque exactitude, la circonférence OPQRST concentrique à CDEFGH.

Si AB était plus grand que IK, ce serait en dehors de la circonférence tracée, qu'il faudrait porter la différence de ces rayons, pour obtenir des points de la concentrique. Du reste, il est visible que les perpendiculaires au milieu des cordes, peuvent faire trouver chacune deux points de la circonférence cherchée ; il ne s'agit que de les prolonger, s'il est possible, jusqu'à ce qu'elles coupent une seconde fois la circonférence donnée, et de porter B'K, par exemple de U en V, sur le prolongement de LM.

Application : Le principe 132 fournit le moyen de tracer sans compas, des circonférences concentriques au bord d'une face circulaire qu'on doit craindre d'endommager. Cette utile application n'est au fond que le dernier tracé exécuté mécaniquement.

« Il faut une espèce de trusquin (p. 59) dont la règle porte une pointe, si l'on ne veut qu'un trait, ou porte une gouge, si l'on a besoin d'une rainure. Le plateau doit avoir deux pieds égaux, arrondis par le bout, également écartés de la ligne milieu de la règle, et saillans du côté de l'instrument traçant. »

« Lorsque les pieds sont appliqués contre un bord circulaire, ils y marquent un arc AB (P. V, F. 40) dont la corde est parallèle aux longues arêtes du plateau (66); la ligne milieu de la règle se trouve perpendiculaire au milieu de cette corde et dirigée selon un rayon; cette position est conservée, pendant le mouvement circulaire des deux pieds, et par conséquent, la pointe ou la gouge trace une circonférence concentrique au bord circulaire. »

133. *Dans deux circonférences concentriques, les arcs* AD, BE *renfermés entre deux rayons* CA, CD *de la plus grande, sont l'un et l'autre dans le même rapport avec leurs circonférences.* (P. V, F. 38).

Ces deux arcs étant décrits du sommet C de l'angle ACD, entre les côtés, donnent chacun l'indication de cet angle, et renferment par conséquent le même nombre de degrés. Ils sont donc contenus autant de fois l'un que l'autre dans les circonférences dont ils font partie, puisque toutes les circonférences ont 360°.

PROBLÈME : *Diviser en arcs proportionnels, deux circonférences* C, K *de rayons différens* (P. V, F. 38).

Décrivez une circonférence qui soit égale à K et concentrique à C; puis tirez les rayons CA, CD, CG, etc. Les arcs qui en résulteront formeront des proportions telles que celle-ci :

$$AD : DG :: BE : EH.$$

En effet, d'après le principe précédent,

AD : cir. C :: BE : cir. K ou bien (72) AD : BE :: cir. C : cir. K;

de même DG : EH :: cir. C : cir. K.

Donc, à cause du rapport commun cir. C : cir. K, on a

$$AD : BE :: DG : EH \quad \text{ou} \quad AD : DG :: BE : EH.$$

134. *Deux circonférences concentriques n'ont qu'un seul centre de similitude qui se confond avec le centre commun* C (P. V, F. 38).

Les rayons parallèles CA, CB ou CA, CI ayant même direction, ne donnent effectivement que AI, quand on joint leurs extrémités (104), et AI ne peut rencontrer qu'en C, la droite des centres réduite à ce seul point.

135. *Deux cercles concentriques n'ont point d'axe radical*, attendu qu'ils ne peuvent avoir des tangentes égales et concourantes.

Supposons qu'il y ait égalité entre les tangentes AB, AD (P. V, F. 41), menées d'un point quelconque, aux deux cercles qui ont C pour centre commun. Si nous plaçons la figure CAD sur la figure CAB, de manière que AD couvre AB, le rayon DC prendra la direction du rayon BC, puisque les angles D et B sont droits (107). Mais, en raison de ce que DC est moindre que BC, le point C tombera quelque part en C', et l'oblique AC' sera égale à l'oblique AC. Or, cette égalité est impossible, car AC est plus éloignée que AC' de la perpendiculaire AB (49). Donc il est impossible aussi que les tangentes concourantes AB, AD soient égales.

136. *Les centres de similitude directe de trois cercles* A, B, C *séparés et pris deux à deux, sont toujours en ligne droite* (P. V, F. 42).

Soient D le centre de similitude directe des cercles A, B; D' celui des cercles A, C; D'' celui des cercles B, C. Si nous traçons les tangentes communes de chaque couple, elles passeront par D, D', D'' (p. 114); les rayons menés aux contacts de la même tangente seront parallèles (54); et nous aurons (81),

$$DA : DB :: AE : BF$$

$$D'C : D'A :: CG : AE.$$

Multipliant l'un par l'autre, les termes correspondans de ces deux proportions (73), nous trouverons

$$DA \times D'C : DB \times D'A :: AE \times CG : BF \times AE,$$

et si nous supprimons AE dans les deux termes du dernier rapport (77), il viendra

$$DA \times D'C : DB \times D'A :: CG : BF.$$

Mais

$$CG : BF :: D''C : D''B.$$

Donc, à cause du rapport commun CG : BF, nous pouvons écrire

$$DA \times D'C : DB \times D'A :: D''C : D''B,$$

ce qui donne (70)

$$DA \times D'C \times D''B = DB \times D'A \times D''C.$$

Ainsi, le produit des trois parties séparées que forment les points D, D', D'' sur les droites AB, AC, BC, est égal au produit des trois autres, et ces points ne sont pas entre les intersections des droites, comme dans le n° 86; par conséquent (85), D, D' D'' appartiennent à une même transversale du système des trois droites; cette droite DD'D'' est appelée *axe de similitude directe*.

On démontrerait d'une manière analogue que *chaque centre de similitude directe est en ligne droite avec deux des centres de similitude inverse*. Ainsi, D est sur la droite I'I'', D' sur la droite II'', D'' sur la droite II', et ce qu'il y a de remarquable, c'est qu'il est impossible de tracer sur un tableau trois cercles séparés quelconques, sans que les six centres de similitude se trouvent placés trois à trois sur quatre droites.

Il est vrai que si les trois cercles ont même rayon, les points

D, D', D'' ne peuvent plus être marqués, puisque la tangente ED, par exemple, devient parallèle à AB (p. 115); mais alors les centres de similitude directe étant situés tous trois infiniment loin des cercles, peuvent être regardés comme étant sur une même droite infiniment éloignée. Au reste, un autre fait singulier a lieu : les droites qui joignent deux à deux les centres de similitude inverse, sont parallèles aux lignes qui joignent deux à deux les centres des cercles : II' est parallèle à BC, II'' est parallèle à AC, et I'I'' est parallèle à AB.

On a nommé *axes de similitude inverse* les trois droites II', II'', I'I''. Ainsi, *trois cercles séparés ont trois axes de similitude inverse et un seul axe de similitude directe.*

Il en est de même pour trois cercles qui se coupent et pour deux cercles combinés avec une droite. Mais des modifications faciles à trouver, doivent être faites à ce principe, lorsqu'un des trois cercles est réduit à un point, ou que deux cercles sont devenus soit des droites, soit des points, ou qu'un seul cercle se trouve combiné avec une droite et un point.

PROBLÈME : *Décrire un cercle qui ait avec deux autres* A, B, *deux points donnés* D', D'' *pour centres de similitude* (P. V, F. 42).

Le tracé n'est possible que dans les cas où D', D'' forment une ligne droite, avec D centre de similitude directe des cercles A, B. S'il en est ainsi, le centre du cercle demandé est le concours C de AD', BD'', et son rayon a pour longueur, celle de la perpendiculaire abaissée de C, sur une tangente menée de D' au cercle A, ou de D'' au cercle B.

Dans le cas où l'on donnerait les centres de similitude inverse I', I'', il faudrait aussi qu'ils fussent en ligne droite avec D, et la construction du rayon se ferait d'une manière analogue à la précédente. Au reste, cette construction est générale; il n'est pas nécessaire de savoir à l'avance si les points donnés sont centres de similitude directe ou de similitude inverse : ce sont leurs positions qui les rendent centres d'une espèce ou de l'autre, et le tracé place toujours le cercle demandé de la manière qu'exigent ces positions.

137. *Trois cercles séparés ont un centre radical*; en d'autres termes, les trois axes radicaux de trois cercles séparés concourent en un seul point.

La démonstration est la même que pour les cercles qui se coupent, et le principe est encore vrai, soit lorsqu'un des trois cercles est devenu point ou droite, soit quand deux cercles ont subi l'une ou l'autre transformation, soit enfin lorsqu'un cercle a éprouvé la première, et un autre, la seconde.

PROBLÈME : *Trouver le centre radical de trois cercles séparés.*

Il suffit, dans tous les cas, de tracer deux axes radicaux ; leur concours est le centre radical demandé.

TRACÉ DES CERCLES TANGENS.

On dit que deux cercles *se touchent* ou *sont tangens l'un à l'autre*, quand ils n'ont qu'un seul point commun : ce point est le *contact* des deux circonférences.

138. *Le contact de deux cercles est toujours sur la droite des centres.*

Considérons, pour le faire voir, les deux circonférences A, B qui se coupent aux points C, D (P. V, F. 43). Ces points seront également éloignés de E, lieu où la droite AB des centres rencontre la circonférence A, et ils seront aussi également éloignés de F, lieu où AB rencontre la circonférence B (115). Si nous éloignons B de A selon AF, C et D se rapprocheront de plus en plus de E et s'en rapprocheront également, puisque dans toutes les positions de B, les arcs CE, DE doivent être égaux. C et D arriveront donc en même temps sur E, et alors les deux cercles n'auront que le point E de commun. Ils se toucheront donc et leur point de contact sera sur la droite des centres.

Si l'on faisait cheminer le centre B vers A, selon BA, les points C, D s'écarteraient d'abord de E; mais ils s'en rapprocheraient ensuite, le rayon de B étant supposé plus petit que celui de A, et ils finiraient, comme ci-dessus, par arriver en même temps sur le point E. Alors, le cercle B aurait la position B'' et le contact serait encore sur la droite des centres.

139. Quand deux cercles sont dans les positions A et B' (P. V, F. 43), on dit qu'*ils se touchent extérieurement*, parce que l'un des cercles est alors tout à fait hors de l'autre. Dans ce cas, *la distance* AB' *des centres est égale à la somme des rayons* AE, B'E.

Lorsque deux cercles ont les positions A et B'', le plus grand est *touché intérieurement*, et le plus petit, *extérieurement*. Alors, l'un B'' des deux cercles est entièrement renfermé dans l'autre, et *la distance* AB'' *des centres est égale à la différence des rayons* AE, B''E.

140. *Il suffit que la distance* AB *des centres soit égale à la somme des rayons* AC, BC, *pour que deux cercles se touchent extérieurement* (P. V, F. 44).

On voit d'abord que le point C leur est commun. Reste à montrer que nul autre ne peut appartenir à la fois aux deux circonférences. Prenons pour exemple le point D. Si ce point était à la fois sur les deux circonférences, la ligne ADB serait la somme des rayons et par suite égale à AB, ce qui est impossible ; car, puisqu'il ne peut y avoir deux droites différentes entre A et B, ADB est une ligne brisée et nécessairement plus longue que AB.

Quant aux points de AB, s'il y en avait un autre que C qui se trouvât à la fois sur les deux circonférences, les cercles auraient même diamètre et se confondraient, puisque AB passe par les centres.

141. *Il suffit que la distance* AB *des centres soit égale à la différence des rayons* AC, BC, *pour que l'un des cercles soit touché intérieurement*, ou pour que les deux cercles n'aient que le point C de commun (P. V, F. 45).

En effet, si tout autre point D pris hors du rayon AC, pouvait appartenir à la fois aux deux circonférences, AD serait rayon de la grande, et BD, rayon de la petite. AD diminué de BD devrait donc égaler AB, et par conséquent BD augmenté de AB devrait faire AD; or ici, cette somme donne une ligne brisée ABD, nécessairement plus grande que la droite AD. Donc, le point D ne peut appartenir à la fois aux deux circonférences.

Pour les points de AC, autres que C, on dirait ce qui a été dit de ceux de AB (F. 44), dans la démonstration du numéro précédent.

142. *Il suffit que deux cercles* AB *aient une tangente commune* CE, *en un point commun* C, *pour qu'ils se touchent en ce point* (P. V, F. 44 et 45).

On voit effectivement que AC et BC étant perpendiculaires à CE au même point C (107), forment une seule ligne droite, et que par suite, la distance AB des centres est égale soit à la somme, soit à la différence des rayons AC, BC (140 et 141).

Réciproquement, *deux cercles qui se touchent, ont une tangente commune dont les contacts se confondent avec le leur.* Cela tient à ce que les rayons qui aboutissent au contact des cercles, sont en ligne droite, et à ce que les tangentes qu'on peut mener en ce point aux deux cercles, se confondent, par suite, avec la perpendiculaire à la droite des centres.

143. *Le contact de deux cercles est un centre de similitude*, car la droite des centres et une tangente commune concourent en ce point (probl. *e*, p. 114).

Si les deux cercles se touchent extérieurement (P. V, F. 44), la tangente commune DE passe entre eux, et par conséquent, le contact C est centre de similitude inverse.

Si l'un des deux cercles est touché intérieurement (F. 45), la tangente commune CE laisse les centres du même côté, et en conséquence, le contact C est centre de similitude directe.

Dans l'un et l'autre cas, deux cercles tangens ont un second centre de similitude, comme les cercles séparés et ceux qui se coupent.

144. *Trois cercles dont un touche les deux autres ou qui sont tangens deux à deux, ont trois axes de similitude inverse et un seul axe de similitude directe*, comme les cercles séparés et ceux qui se coupent; car la démonstration du n° 136 étant absolument indépendante des positions des cercles, s'applique à tous les cas.

145. *La droite des contacts de deux cercles touchés de la même manière par un troisième, passe toujours par le centre de similitude directe des deux premiers.*

Ces contacts étant centres de similitude directe ou de similitude inverse (143), doivent effectivement se trouver en ligne droite avec le troisième centre de similitude directe que fournissent les trois cercles (126 et 136).

146. *La droite des contacts de deux cercles qui en touchent différemment un troisième, passe toujours par le centre de similitude inverse des deux premiers*; car ces contacts étant centres de similitude d'espèces différentes (143), déterminent un axe de similitude inverse (126 et 136).

147. *La tangente commune* CE *de deux cercles* A, B *qui se touchent, est leur axe radical* (P. V, F. 44 et 45).

La vérité de ce principe peut se reconnaître aisément. Considérons d'abord deux cercles F, G, qui se coupent (F. 32). Si les centres s'écartent, les intersections A, C se rapprochent, puis finissent par se confondre. Alors les deux cercles. n'ayant plus qu'un seul point commun, se touchent extérieurement, et la sécante d'intersection AB qui n'a pas cessé d'être axe radical, devient tangente commune.

Si le centre G du plus petit cercle se rapproche de F centre du plus grand, les intersections A, C s'écartent d'abord; la corde AC augmente jusqu'à devenir un diamètre du cercle G; puis A, C se rapprochent et finissent par se confondre. Alors, le petit cercle se trouvant tout entier dans le grand, le touche intérieurement, et la sécante d'intersection AB qui n'a pas cessé d'être axe radical est devenue tangente commune.

Ainsi, *la tangente commune est le lieu de tout point d'où l'on peut mener des tangentes égales à des cercles qui se touchent.*

Vous voyez, en effet, que la tangente EC menée du point E, par exemple, aux deux cercles tangens A, B (F. 44 et 45), a toujours même longueur, soit qu'on la considère comme appartenant au cercle A, soit qu'on la rapporte au cercle B.

148. *Trois cercles* A, B, C *dont un* A *touche les deux autres, ont pour centre radical, le concours des deux tangentes communes.*

Une de ces tangentes est axe radical de A et de B, l'autre est axe radical de A et de C. On pourra donc, de leur concours, décrire un cercle radical commun à A, B, C. Par conséquent, ce concours appartient aussi à l'axe radical des cercles B, C.

Le même raisonnement pouvant être appliqué au cas des trois cercles tangens deux à deux, il s'ensuit que *les trois tangentes communes de trois cercles qui se touchent deux à deux, concourent en un seul point, centre radical de ces cercles.*

149. *Tout cercle tangent à deux autres est un de leurs réciproques.*

Supposons d'abord un cercle touché intérieurement par deux autres. Les contacts se trouveront en ligne droite avec le centre de similitude directe des deux derniers (145) ; de sorte que si D, E, par exemple, sont ces contacts (P. V, F. 34), la droite DE passera par I centre de similitude directe des cercles A, B.

Ainsi, les contacts d'un cercle touché intérieurement par deux autres, forment une entrée E et une sortie D d'une sécante ID, ou bien *la première entrée et la deuxième sortie de toute sécante menée par le centre de similitude directe de deux cercles, sont les contacts d'un cercle touché intérieurement par ces deux-là.*

Maintenant, augmentons de plus en plus le rayon du cercle réciproque EDCF (123), en continuant de le faire passer par les points E, D. Les deux autres intersections F, C se rapprocheront de ces points, mais ils resteront constamment sur une sécante commune, puisque le cercle EDCF ne cessera pas d'être réciproque. Donc, C se confondra avec D, dès que F arrivera sur E. Alors, le cercle réciproque n'aura plus qu'un seul point commun tant avec le cercle A, qu'avec le cercle B, et il sera touché intérieurement par ces cercles.

Il s'ensuit que tout cercle touché intérieurement par deux autres, peut être regardé comme un cercle réciproque dont le rayon a été modifié ou dont les quatre intersections se sont réduites à deux points communs. Un pareil cercle tangent appartient à la première série des cercles réciproques, à celle dont l'indice est [*e s s' e'*].

Nous verrions de même que *la première sortie* G *et la deuxième entrée* K *d'une sécante commune à deux cercles* A, B, *sont les contacts d'un troisième cercle qui les touche extérieurement*, et nous en conclurions que tout cercle qui en touche deux autres extérieurement, est un réciproque de la même série que celui qui passe par GKLH ; c'est-à-dire la seconde dont l'indice est [*s e e' s'*].

Quant aux cercles réciproques de la troisième série et de la quatrième, ils ne fournissent point de cercles tangens ; car les points tels que E, D, L, H ou G, K, C, F, par lesquels ils passent, se trouvent en ligne droite et distincts, sur une sécante commune, lorsque les deux sécantes IC, ID qui les déterminent, viennent à se confondre.

Mais, la marche employée précédemment ferait reconnaître avec facilité que toute sécante commune qui passe par le centre de similitude inverse de deux cercles, donne par ses entrées et ses sorties, les contacts de cercles réciproques touchés différemment par les deux premiers.

Donc, *tout cercle touché de la même manière par deux autres, est un des réciproques qui ont leur centre radical au centre de similitude directe des derniers.*

Tout cercle touché différemment par deux autres, est un des réciproques qui ont leur centre radical au centre de similitude inverse des derniers.

150. *Trois cercles A, B, C placés d'une manière quelconque sur le même tableau, ont une infinité de cercles réciproques communs.*

Ces *trois* cercles peuvent en toucher intérieurement un quatrième qui sera réciproque de A, B, de A, C, et de B, C, en vertu du principe précédent. Il sera donc à la fois réciproque des trois cercles A, B, C.

Le cercle qui se trouverait touché extérieurement par A, B, C serait aussi réciproque commun à ces trois cercles, pour les mêmes raisons, et l'on en dirait autant de trois autres cercles tangens qui seraient touchés d'une façon par deux des cercles A, B, C, d'une autre par le troisième.

Le problème suivant va d'ailleurs faire voir que les cercles A, B, C ont une infinité d'autres cercles réciproques communs.

PROBLÈME : *Tracer un cercle qui soit à la fois réciproque de trois cercles* A, B, C *placés d'une manière quelconque* (P. VI, F. 1).

Je détermine d'abord les trois centres de similitude D, D', D'' ; puis je tire une droite DE, sécante commune de deux des trois cercles, de A, B par exemple. Libre de faire passer le cercle demandé par la sortie E ou par l'entrée de la sécante dans le cercle A, j'adopte le premier de ces deux points. L'entrée F, dans le cercle B, sera donc un second point d'un cercle réciproque de A, B (123). Je mène alors FD'', sécante commune de B, C. Afin que le cercle qui passera par E, F soit réciproque aussi de B, C, il doit passer en outre par l'entrée G de FD'' dans C, puisque F est la sortie de la même sécante, pour le cercle B. Mais trois points suffisent à la détermination d'un cercle. Appliquant donc aux points E, F, G, le tracé du problème (*c*) de la page 97, j'obtiendrai le cercle EFGH qui sera réciproque de A, B, C à la fois.

« La construction rend déjà le cercle EFGH réciproque de A et de B, de B et de C. Reste donc à démontrer qu'il est aussi réciproque de A et de C. Représentons-nous un des deux cercles qui sont touchés de la même manière par A, B, C. Ce cercle tangent est réciproque des trois autres (150), et comme D est centre radical de tous les réciproques de A, B, relatifs à ce centre de similitude (125), on pourra mener de D des tangentes égales au cercle tangent et au cercle EFGH. Pour des raisons analogues, il en sera de même du point D''. Conséquemment, l'axe de similitude DD'' sera l'axe radical du cercle tangent et de EFGH, et du point D' qui est sur cet axe, on pourra mener des tangentes égales au cercle tangent et à EFGH. »

« Tirons maintenant la sécante D'G et admettons qu'au lieu de passer par H, elle sorte de EFGH en I. Une des tangentes égales menées de D' sera moyenne proportionnelle entre D'G et D'I (111). Mais celle qui appartiendra au cercle tangent, égalera celle du réciproque de A et de C, tracé par la sortie G et l'entrée K de la sécante D'I, puisque D' est centre radical de tous les réciproques de A, C, relatifs à ce centre de similitude. Cette tangente sera donc moyenne proportionnelle entre D'G et D'K. Par conséquent, les produits D'G$\times$D'I et D'G$\times$D'K doivent être égaux (70). Or, leur égalité ne peut avoir lieu que dans le cas où les points K et I se confondent, et pour que ces points se confondent, il faut que D'G passe par H. Donc, les points G, H, où le cercle EFGH coupe C, A, sont l'un la sortie, l'autre l'entrée d'une sécante commune tirée du centre de similitude ; donc, le cercle EFGH est réciproque de A, C, comme il l'est de A, B, et de B, C; donc enfin, il est réciproque commun des trois cercles A, B, C. »

Les mêmes raisonnemens pouvant être faits par toutes les autres sécantes communes menées comme ED, FD'', il est clair que *trois cercles ont une infinité de cercles réciproques communs, relatifs à leurs centres de similitude directe.*

On ferait voir d'une manière analogue, que *trois cercles ont une infinité de cercles réciproques communs relatifs à un quelconque des centres de similitude directe et aux deux centres de similitude inverse situés sur le même axe de similitude.*

151. *Tout axe de similitude est axe radical des cercles réciproques communs relatifs aux centres de similitude qu'il contient.*

D'après la démonstration précédente, l'axe de similitude directe DD'', par exemple (P. VI, F. 1), est axe radical du cercle tangent et de chaque cercle réciproque commun relatif aux trois centres de similitude directe. Il est donc aussi axe radical de tous les cercles réciproques communs relatifs aux mêmes centres de similitude.

152. Nous pouvons maintenant nous occuper du tracé d'un cercle qui doit en toucher d'autres. Pour rendre les figures plus simples, nous supposerons que les cercles donnés soient séparés extérieurement; mais nos constructions seront applicables à tous les cas où le problème sera possible. Ainsi, soit que les cercles donnés se touchent, soit qu'ils se coupent, soit que les uns se trouvent entièrement renfermés dans les autres, on pourra toujours, s'il y a lieu, tracer un cercle qui les touche tous, en employant les procédés que nous allons exposer. Il est trop facile de reconnaître si des cercles tracés peuvent ou ne peuvent pas être touchés à la fois par un autre, pour que nous entrions dans de longs détails à ce sujet.

Le tracé d'un cercle tangent à d'autres présente un grand nombre de cas : les cercles donnés sont au nombre de trois, ou bien il n'y en a que deux, ou bien l'on donne un seul cercle. Si le cercle demandé doit en toucher trois, on peut exiger en outre que les contacts soient de même espèce ou d'espèces différentes ; si nous n'avons que deux cercles, celui que nous chercherons aura un rayon déterminé, ou bien il devra, soit passer par un point donné, soit toucher une droite tracée. Si enfin nous n'avons qu'un seul cercle, le rayon et un point du cercle demandé seront assignés, ou bien le rayon et une tangente au même cercle seront donnés, ou bien ce cercle devra, soit passer par deux points, soit passer par un point et toucher une droite, soit toucher deux droites.

Il n'est pas toujours possible de tracer un cercle qui en touche quatre autres, parce que, trois des tangentes suffisent pour fournir le centre et le rayon du cercle demandé, comme on va le voir, il faudrait que le quatrième cercle fût dans telle position et de tel rayon, qu'il se trouvât tangent à la circonférence décrite.

PROBL. (*a*) : *Décrire un cercle qui soit touché de la même manière, par trois autres* A, B, C (P. VI, F, 2).

Marquez le centre de similitude directe D de A, B, et D' celui de B, C (p. 110); tirez DD', axe de similitude directe des trois cercles donnés (136); tirez aussi la sécante quelconque DE, et par son entrée F, menez FD'. Cette sécante coupera C en deux points; marquez son entrée G, si F est sa sortie dans B; puis, faites passer une circonférence *o* par les trois points E, F, G; elle coupera A, B, C, en d'autres points H, I, K qui vous donneront les cordes EH, FI, GK. Marquez les concours L, L', L'' de ces cordes avec l'axe DD'; menez par L deux tangentes à A ou marquez seulement leurs contacts M, N (probl. *b*, p. 112); marquez aussi les contacts M', N' des deux tangentes de B qui se coupent en L', et ceux M'', N'' des tangentes de C qui se croisent en L''. Les points M, M', M'' seront les contacts du cercle que A, B, C peuvent toucher intérieurement; N, N', N'' seront ceux du cercle que A, B, C peuvent toucher extérieurement. Si donc vous tirez les rayons MA, M'B, M''C, ils se couperont en un point O centre du cercle touché intérieurement, et si vous menez les rayons AN, BN', CN'', ils se couperont en un point O' centre du cercle touché extérieurement. Mais, il n'est pas nécessaire de distinguer à l'avance les contacts qui appartiennent au cercle O, de ceux qui concernent le cercle O'; il suffit de tirer les six rayons que déterminent ces contacts; les points O, O' sont ceux où ils se coupent trois à trois.

Voici comment on peut démontrer la justesse de cette élégante construction due à M. *Poncelet*. Les deux cercles tangens O, O' et le cercle *o* sont réciproques communs de A, B, C et réciproques relatifs aux trois centres de similitude directe (149); donc l'axe de similitude DD' est axe radical de O, O', *o* (151). Mais HE est l'axe radical des cercles A, *o* (121). donc L est le centre radical des quatres cercles A, O, O', *o*; d'où il suit que l'axe radical de A et de O ou leur tangente commune (147) doit passer par L, et que la tangente commune de A et de O' doit aussi passer par ce point. Conséquemment, les contacts des tangentes menées par L, au cercle A, doivent être ceux des cercles O, O'.

On verrait de même que les tangentes menées de L' au cercle B et de L'' au cercle C, donnent les contacts de ces deux cercles avec O et O'.

Le tracé porte avec soi sa vérification; car, DD' étant axe radical des cercles O, O', o, doit être perpendiculaire à la droite des centres, ou bien si l'on tire OO', cette droite doit passer par o et couper d'équerre DD'. On peut aussi examiner si les droites MM', NN' passent par D, si les droites MM'', NN'' passent par D'', si les droites M'M'', N'N'' passent par D' (145).

Remarquez que si vous changez la position de DE, par exemple, en la faisant pivoter sur D, D'F pivotera sur D', HE sur L, IF sur L', KG sur L''. Vous verriez aussi, en menant GH, que cette droite pivoterait sur D'', centre de similitude directe de A, C. Cela tient à ce que les centres de similitude, ni les contacts, ni par suite les tangentes communes ne peuvent changer, en quelque endroit que soit pris le point E, tant que les trois cercles A, B, C conservent leurs rayons et leurs positions.

Probl. (*b*) : *Décrire un cercle qui soit touché extérieurement par trois cercles donnés, ou un cercle qui soit touché intérieurement par trois autres.*

La seule différence qu'il y ait entre ce problème et le précédent, c'est que la nature des contacts est spécifiée. Le même tracé doit donc être employé. Vous obtiendrez généralement deux cercles, mais il est facile de reconnaître lequel est celui qu'on a demandé.

Observez cependant que si le cercle C, par exemple, se trouve tout entier entre les deux autres A, B et entre leurs tangentes communes menées de D, il est impossible de décrire un cercle qui soit touché intérieurement par A, B, C : les deux circonférences que donne alors le tracé, sont touchées extérieurement. Si C, encore tout entier entre les tangentes menées de D à A, B, laisse ces deux cercles du même côté, il est impossible de décrire un cercle qui soit touché extérieurement par A, B, C : les deux circonférences qu'on obtient, sont touchées intérieurement. Si C étant entre les tangentes menées D à A, B, est touché par l'une de ces droites, le tracé ne donne qu'un seul cercle. Si enfin C est touché par les deux tangentes, le problème est tout à fait impossible.

Probl. (*c*) : *Décrire un cercle qui soit touché de la même manière par trois cercles de rayons égaux.*

Le procédé du probl. (*a*) est encore applicable, mais il se modifie de telle sorte, qu'il devient extrêmement simple. On ne peut plus tracer DD'; EF est parallèle à AB; FG est parallèle à BC; les trois centres o, O, O' se confondent, et l'on détermine les six contacts, en menant à chacun des trois cercles, des tangentes parallèles à EH, FI, GK, ou plutôt en joignant o aux trois centres donnés.

On peut aussi se borner à chercher le centre d'un cercle passant par les trois points A, B, C (p. 97), et à joindre ce point O où se trouvent aussi o et O' (F. 3), avec chacun des trois centres donnés A, B, C. Alors, les droites OA, OB, OC sont égales, et puisque les rayons donnés sont égaux, il y a aussi égalité entre OM, OM', OM'', entre ON, ON', ON''. Les points M, M', M'' sont donc les contacts du cercle touché intérieurement, et N, N', N'', ceux du cercle touché extérieurement (140 et 141).

PROBL. (*d*) : *Décrire un cercle qui soit touché d'une façon par un cercle* A, *et d'une autre par deux cercles* B, C (P. VI, F. 4).

Premier cas : La seule différence qu'il y ait entre la solution de ce problème et celle du probl. (*a*), c'est qu'au lieu d'employer les trois centres de similitude directe, il faut prendre seulement celui des deux cercles B, C qui doivent toucher de la même manière le cercle demandé, et se servir des deux centres de similitude inverse qui se trouvent en ligne droite avec ce point.

Ayant donc marqué D, centre de similitude inverse de A, B, et D' celui de A, C, vous tirerez l'axe de similitude inverse DD' et la sécante quelconque DE dont vous marquerez la sortie E et l'entrée F. Menez ensuite la sécante ED' et marquez son entrée G dans le cercle C; décrivez une circonférence *o* qui passe par E, F, G; tirez les trois cordes EH, IF, GK, qui joignent deux à deux ses six intersections; des points L, L', L'' où ces cordes coupent DD', menez des tangentes aux trois cercles donnés, et tracez des rayons par six contacts M, M', M'', N, N', N''; ces rayons se couperont trois à trois en O, en O', et chacun de ces points sera le centre d'un cercle qui pourra être touché d'une façon par A, d'une autre par B, C. Il vous sera d'ailleurs facile de voir que O appartient au cercle touché intérieurement par A, extérieurement par B, C, et s'il y a impossibilité dans le problème, la construction vous en avertira.

Ce tracé se vérifie absolument de la même manière que le précédent, c'est-à-dire que la perpendiculaire abaissée de O sur DD', doit passer par O' et par *o*, et que le principe 146 doit s'appliquer.

Deuxième cas : La marche est la même pour que les deux autres cas que peut présenter le tracé d'un cercle tangent à trois cercles donnés. Ainsi, quand on voudra *décrire un cercle qui soit touché d'une façon par* B *et d'une autre par* A, C, on emploiera la droite qui passe par le centre de similitude directe de A, C, et par les deux centres de similitude inverse de B combiné avec A, C, comme on a employé DD'. Il y aura généralement aussi deux solutions : un cercle touché intérieurement, et un cercle touché extérieurement par A, C.

Troisième cas : Lorsqu'on voudra *décrire un cercle qui soit touché d'une façon par* C *et d'une autre par* A, B, on se servira de la droite qui passe par le centre de similitude directe de A, B et par les deux centres de similitude inverse de C combiné avec A, B. Généralement, l'une des solutions donnera un cercle touché intérieurement par A, B; l'autre, un cercle touché intérieurement par C.

Si vous rapprochez le probl. (*a*), des trois cas de celui-ci, vous verrez que le tracé d'un cercle tangent à trois autres, peut avoir huit solutions différentes qu'on obtient par quatre opérations analogues. Mais, il n'y a plus qu'une seule solution, quand on spécifie la nature des trois contacts, et quelquefois le problème est impossible.

Il peut arriver que le cercle *o* coupe les cercles donnés en des points trop voisins, pour qu'on puisse tracer avec exactitude les cordes EH, FI, GK; il peut se faire aussi qu'une de ces cordes, EH par exemple, aille couper fort loin l'axe de similitude DD'. Dans de semblables cas, on doit mener une autre sécante ED, pour obtenir un autre cercle *o* qui soit exempt de ces inconvéniens; mais on peut aussi se dispenser de tracer la corde EH, puisqu'on peut trouver les contacts du cercle A, une fois qu'on a les centres O, O', et que pour obtenir ces derniers points, les contacts M', M'', N', N'' suffisent. On pourrait même se servir de la perpendiculaire abaissée de *o* sur DD', pour déterminer O, O', s'il était impossible de marquer les contacts de B ou de C, au moyen de L' ou de L''.

PROBL. (*e*) : *Décrire un cercle d'un rayon connu* AB *qui soit touché extérieurement par deux cercles donnés* C, D (P. VI, F. 5).

Portez le rayon du cercle C au bout de AB, de B en C', et avec AC' pour rayon, décrivez de C, un petit arc. Portez ensuite le rayon du cercle D au bout de AB, de B en D', et avec AD' pour rayon, décrivez de D, un autre petit arc qui coupe le premier. L'intersection E de ces deux arcs, sera le centre du cercle demandé; car si vous menez EC, ED, ces droites, qui sont les distances de E aux deux centres donnés, seront égales l'une à AB plus CF, l'autre à AB plus DG, et il suffit, pour qu'un cercle en touche un autre extérieurement, que la distance des centres soit égale à la somme des deux rayons (140).

Cette construction montre que le tracé ne peut plus être exécuté, si les rayons des cercles donnés, joints au diamètre du cercle demandé ou au double de AB, forment une droite plus petite que la distance des centres C, D; car, dans ce cas, les petits arcs dont l'intersection doit donner le centre cherché, n'ont plus de point commun.

On voit aussi que le point E peut être marqué soit d'un côté de CD, soit du côté opposé, et qu'il y a, par conséquent, deux cercles de positions différentes, qui satisfont aux conditions. Ce n'est que dans le cas où les petits arcs se touchent sur la droite CD, que le cercle demandé est unique.

PROBL. (*f*) : *Décrire un cercle d'un rayon connu* AB, *qui soit touché intérieurement par deux cercles donnés* C, D (P. VI, F. 6).

Portez le rayon du cercle C, de B en C', et avec AC', pour rayon, décrivez de C, un petit arc. Portez ensuite le rayon du cercle D, de B en D', et avec AD' pour rayon, décrivez de D, un autre petit arc qui coupe le premier. L'intersection E de ces deux arcs sera le centre du cercle demandé; car si vous menez par les centres, les droites EF, EG qui se terminent aux deux circonférences données, EF se composera de EC=AC' et de CF=BC', ou bien

EF sera égale à AB, rayon du cercle demandé ; EG se composera de ED=AD' et de DG=BD' ou bien EG sera aussi égale à AB ; ce qui rend visible que EC est la différence entre AB et le rayon CF du cercle C, et que ED est la différence entre AB et le rayon DG du cercle D. Or, c'est ce que veut le principe 141, pour que le cercle décrit de E, avec un rayon EF ou EG ou AB, soit touché intérieurement par chacun des cercles donnés.

Cette construction nous apprend que le tracé ne peut plus être exécuté, si la distance des centres C, D est plus grande que CED, le double de AB, diminué des rayons CF et DG ; car alors les petits arcs dont l'intersection doit donner le centre cherché, n'ont plus de point commun.

Il est facile de voir en outre, que le point E s'obtient soit d'un côté de la droite des centres, soit du côté opposé, et qu'il y a deux cercles de positions différentes, qui satisfont aux conditions. Dans un seul cas, le cercle demandé est unique : lorsque les deux petits arcs se touchent sur la droite CD.

PROBL. (*g*) : *Décrire un cercle d'un rayon connu* AB, *qui soit touché extérieurement par un cercle donné* C, *intérieurement par un second cercle* D (P. VI, F. 7).

Portez le rayon du cercle C, sur le prolongement de AB, de B en C', et avec AC' pour rayon, décrivez de C, un petit arc. Portez le rayon du cercle D, de B vers A, en D', et avec AD' pour rayon, décrivez de D, un autre petit arc qui coupe le premier. L'intersection E de ces deux arcs sera le centre cherché, et les points de contact seront en F et en G, sur EC, ED droites des centres, ce qui se démontre comme pour les deux tracés précédens.

Il est visible que le tracé n'est plus possible, quand la distance CD des centres donnés, est plus grande que CED, ou plus grande que la droite formée avec le rayon du cercle C et le double de celui du cercle demandé, diminué de DG.

Enfin, il y a comme ci-dessus, excepté dans un seul cas, deux cercles qui satisfont aux conditions.

Il est à peine nécessaire de faire observer que, pour appliquer les trois derniers tracés, lorsqu'on veut *décrire un cercle quelconque qui en touche deux autres*, il suffit de se donner le rayon AB arbitrairement, de manière pourtant qu'il ait une longueur qui convienne à la distance des centres et rende possible l'opération.

PROBL. (*h*) : *Décrire un cercle qui soit touché de la même manière par deux autres* A, B, *et qui passe par un point donné* C (P. VI, F. 8).

La construction du probl. (*a*) est applicable au cas présent ; il ne s'agit que de regarder le cercle C de la figure 2, comme réduit à son centre. Les points D', D'' se confondent alors avec C ; DD' devient la droite DC (F. 8) ; FD' se change en FC ; et le cercle *o* passe par E, F, C.

D'après cela, il est clair que pour exécuter le tracé, il faut marquer le centre de similitude directe D des cercles donnés ; mener une sécante quelconque DE ; marquer son entrée F et sa sortie E ; faire passer un cercle *o* par les trois points C, E, F ; tirer les cordes HE, IF, jusqu'à la rencontre de DC ; mener par L deux tangentes au cercle A, ou marquer simplement leurs contacts M, N ; marquer aussi les contacts des tangentes qu'on pourrait mener de L' au cercle B ; enfin, joindre M et N avec A, M' et N' avec B. Les rayons MA, M'B se couperont en un point O qui sera le centre du cercle touché intérieurement en M, M', par A, B ; les rayons AN, BN' se couperont en un point O' qui sera le centre du cercle touché extérieurement en N, N', par A, B ; les trois points O, *o*, O', devront se trouver sur une perpendiculaire à CD, et le principe 145 s'appliquera.

Il y a, comme dans le cas de trois cercles, des positions du point C qui changent le cercle O en un autre touché extérieurement ; parfois aussi les deux cercles O, O' sont touchés intérieurement ; enfin, il arrive que le tracé ne donne qu'un seul cercle, et même qu'il n'en donne pas du tout. On peut prévoir ces accidens, si l'on applique convenablement au cas qui nous occupe, les remarques faites dans le probl. (*b*).

PROBL. (*i*) : *Décrire un cercle qui soit touché différemment par deux autres* A, B, *et qui passe par un point donné* C (P. VI, F. 9).

Ce tracé ne diffère du précédent qu'en ce qu'il exige l'emploi du centre de similitude inverse des cercles donnés, au lieu du centre de similitude directe.

Remarquez que dans la figure 9, comme dans la figure 8, les cercles O, O', *o* se coupent tous trois en deux points de CD. Il en doit être ainsi, quand ces cercles ne se touchent pas en C, puisque CD est leur axe radical commun (121 et 147). De là, un autre moyen de vérifier si l'opération est exacte.

PROBL. (*k*) : *Décrire un cercle qui soit touché extérieurement par deux autres* A, B *et par une droite donnée* CC (P. VI, F. 10).

Vous pouvez encore employer le procédé général du probl. (*a*), puisqu'il est permis de regarder la droite CC comme un cercle dont le rayon est plus grand que toute longueur imaginable (119). Commencez donc par déterminer les trois centres de similitude directe D, D', D'' (126) ; joignez ensuite D' à l'entrée F de la sécante DE, pour avoir le point G ; décrivez un cercle *o* qui passe par G, F et par la sortie E de DE ; marquez enfin les points L, L', en tirant les cordes EH, FI. Ils vous serviront à obtenir les quatre contacts N, *n*, N', *n*', et ces contacts vous feront trouver deux centres O', *o*', sur la perpendiculaire à DD'', menée par *o*.

Le problème a donc deux solutions. Le point *o*' ne se trouve pas sur la figure ; mais les droites qui doivent s'y couper, ont une de leurs extrémités marquée *o*'.

PROBL. (*l*) : *Décrire un cercle qui soit touché par une droite* CC *et intérieurement par deux cercles* A, B (P. VI, F. 11).

L'énoncé ne désigne pas la nature du contact de la droite, parce qu'une droite ne peut toucher une circonférence qu'extérieurement. Ainsi, A, B toucheront d'une façon le cercle demandé, et CC le touchera d'une autre. Il faut donc employer le centre de similitude directe D de A, B, et les centres de similitude inverse D', D'' de CC combinée avec les deux cercles (126). Du reste, le tracé s'exécute comme le précédent, et l'on trouve encore deux centres O, *o'*, sur la perpendiculaire à DD'', menée par *o*.

PROBL. (*m*) : *Décrire un cercle qui soit touché par une droite* CC, *extérieurement par un cercle* A *et intérieurement par un cercle* B (P. VI, F. 12).

Premier cas : Puisque les deux cercles A, B doivent avoir des contacts d'espèces différentes, il faut marquer leur centre de similitude inverse D. Pour la même raison, on prendra le centre de similitude inverse D' de CC et de B. Mais, comme le cercle A et la droite toucheront de la même manière, c'est leur centre de similitude directe D'' qu'on doit employer. Tirez donc EDF, FD'G ; décrivez le cercle *o*, par les trois points E, F, G, et achevez comme dans les cas précédens. Vous trouverez encore deux centres O, O', sur la perpendiculaire à DD'', menée de *o*.

Deuxième cas : Enfin, il y aurait aussi deux cercles qui seraient touchés par la droite CC, intérieurement par A et extérieurement par B. Vous les obtiendrez en faisant pour B et pour A, ce qui vient d'être fait pour A et pour B. Ainsi, le tracé d'un cercle tangent à deux autres et à une droite, conduit généralement à huit solutions, comme le problème général (*a*).

PROBL. (*n*) : *Décrire un cercle de rayon connu* AB, *qui touche un autre cercle* C, *en un point donné* D (P. VI, F. 13).

Joignez C et D par une droite ; portez AB, de D en E, sur le prolongement de CD, si les deux cercles doivent se toucher extérieurement ; portez le même rayon de D en E', si l'un des cercles doit être touché intérieurement. Le point E ou le point E' sera le centre du cercle demandé (140 et 141). Il n'y a pour chaque espèce de contact, qu'une seule solution.

PROBL. (*o*) : *Décrire un cercle de rayon connu* AB, *qui touche un autre cercle* C *et passe par un point* D *donné hors de la circonférence* P. VI, F. 14).

Premier cas : Si le cercle demandé doit être touché extérieurement, portez de B en C' le rayon R de C ; puis décrivez un arc, du point C, avec AC', et un autre arc, du point D, avec AB. Les intersections E, E' seront les centres de deux cercles qui rempliront les conditions.

Effectivement, le centre du cercle demandé doit être sur le premier arc, puisque la nature du contact exige que la distance des centres soit la somme des rayons ; il doit être aussi sur le second arc, lieu des points éloignés de D, d'une distance AB.

Il n'y aurait qu'une solution, si la distance CD égalait R + 2AB ; il n'y en aurait point, si elle était plus grande.

Deuxième cas : Le procédé est le même, lorsque le cercle demandé doit être touché intérieurement, à cela près qu'il faut retrancher de AB, le rayon R de C, en le portant de B en C'', et décrire le premier arc avec AC''.

Il n'y a qu'une solution pour ce cas, si la distance CD=2AB—R ; il n'y en a point, si elle est plus grande.

Troisième cas : Le cercle donné doit être touché intérieurement.

Alors D est dans l'intérieur de ce cercle, et AB est moindre que R ; mais on suit toujours le même procédé, si ce n'est qu'il faut retrancher AB de R pour avoir le rayon du premier arc.

Il n'y a qu'une solution, quand la distance de D au centre C égale la différence de R, et du double de AB ; il n'y en a point quand cette distance est moindre que R—2AB ou plus grande que 2AB—R ; il y en a une infinité quand elle est nulle.

PROBL. (*p*) : *Décrire un cercle de rayon connu* AB, *qui touche à la fois un cercle* C *et une droite* DE *donnés* (P. VI, F. 15).

Le centre du cercle demandé doit être à une distance AB de la droite DE qui sera, comme tangente, perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon. Élevez donc une perpendiculaire en un point quelconque de DE ; portez-y AB, de D en F, et menez du point F, une parallèle à AB ; elle passera par le centre cherché (67).

Premier cas : Le cercle demandé doit être touché extérieurement par C.

Décrivez un arc du point C, avec la somme AC' des rayons ; il coupera la parallèle à DE, en des points G, G', centres de cercles qui satisferont aux conditions.

Comme on peut mener deux parallèles à une distance AB de DE, il y a quatre solutions, lorsque la distance CH du centre C à la droite, est moindre que R, rayon du cercle donné. Si CH=R, il y a trois solutions ; tant que CH est compris entre R et R + 2AB, il y a deux solutions ; si CH=R+2AB, il n'y a plus qu'une seule solution, et si cette distance est plus grande encore, toute solution est impossible.

Deuxième cas : Le cercle demandé doit être touché intérieurement par C.

Décrivez un arc du point C, avec la différence AC'' des rayons.

On ne peut mener qu'une seule parallèle à une distance AB de DE, du moins il n'y en a qu'une qui puisse avoir un ou deux points communs avec l'arc. Les solutions seront donc au nombre de deux tout au plus, encore faudrait-il pour cela que la distance CH soit comprise entre R et 2AB—R. Egale à l'une où à l'autre de ces longueurs, elle ne permet qu'une seule solution ; plus grande que la dernière, elle rend toute solution impossible. D'ailleurs, elle ne peut être moindre que R, sans que DE coupe les deux cercles.

Troisième cas : Le cercle C doit être touché intérieurement par le cercle demandé.

Alors AB est moindre que R, et c'est R — AB qui est le rayon à prendre pour décrire l'arc. Mais, si 2AB est plus grand que R, cet arc n'a de points communs qu'avec une des parallèles à DE, attendu que son diamètre 2R—2AB étant moindre que R, est aussi moindre que 2AB. Il ne peut donc y avoir au plus que deux solutions, encore faut-il pour cela que CH soit compris entre R et 2AB—R : égale à l'une ou à l'autre de ces longueurs, la distance CH ne permet plus qu'une solution; plus grande que la première, elle rend toute solution impossible. D'ailleurs, elle ne peut être moindre que la dernière, sans couper le cercle demandé.

Si 2AB=R, la distance CH ne saurait varier qu'entre zéro et R : pour chacune de ces deux valeurs, il n'y a qu'une solution ; pour une valeur intermédiaire, il y en a deux.

Si 2AB est moindre que R, la distance CH a pour limites R et zéro. Pour CH=R, il y a une solution ; quand CH est comprise entre R et R—2AB, il y a deux solutions; pour CH=R—2AB, il y en a trois; si CH est moindre, il y en a quatre.

PROBL. (*q*) : *Décrire un cercle qui en touche un autre* A *en* B *et passe par un point donné* C (P. VI, F. 16).

Menez la droite AB, elle passera par le centre cherché (138); joignez B, C, et au milieu de la droite BC, élevez une perpendiculaire DE; le centre du cercle demandé se trouvera aussi sur cette perpendiculaire (43); il sera, par conséquent, au point E, rencontre de AE et de DE. Le rayon à prendre pour décrire le cercle demandé, est visiblement BE ou BC.

Faisons remarquer qu'ici le cercle qu'on doit tracer, est unique, parce qu'il y a trois conditions précises d'imposées : être tangent au cercle A en un point déterminé, passer par B et passer par C. Ces trois conditions sont tellement suffisantes pour le tracé, qu'il pourrait devenir impossible, si l'on prescrivait en outre que le cercle E touchât le cercle donné extérieurement ou intérieurement : la manière dont se fait le contact, dépend absolument de la position de C par rapport à B et à A.

PROBL. (*r*) : *Décrire un cercle qui en touche un autre* A *et passe par deux points donnés* B, C (P. VI, F. 17).

Élevez une perpendiculaire au milieu de la droite BC ; d'un point quelconque *o* de cette perpendiculaire, décrivez une circonférence qui passe par B, C et qui coupe le cercle donné ; tirez la corde commune HE, jusqu'à la rencontre du prolongement de BC; marquez les contacts M, N de deux tangentes qu'on peut mener de L, au cercle A; les points O, O' où les rayons MA, AN couperont la perpendiculaire à BC, seront les centres de deux cercles qui passeront par les points donnés et qui toucheront le cercle A aux points M, N.

C'est à cela que se réduit le tracé général du probl. (*a*), quand deux des cercles de la figure 2 se réduisent à leurs centres : l'axe de similitude DD' devient BC ; au lieu des trois points E, F, G, il faut prendre B, C et un point quelconque E de la circonférence A ; le centre *o* se trouve toujours sur la perpendiculaire au milieu de BC (43).

Le tracé qui nous occupe a généralement deux solutions ; mais la manière dont les deux cercles sont touchés par A, dépend de la position des points B, C : les contacts peuvent être tous deux intérieurs ou tous deux extérieurs, ou d'espèces différentes comme dans la figure.

Probl. (*s*) : *Décrire un cercle qui passe par un point* B *et touche à la fois une droite* CC *et un cercle donné* A (P. VI, F. 18).

Premier cas : Le cercle demandé doit être touché extérieurement. Marquez le centre de similitude directe D du cercle donné et de la droite (126) ; tirez ensuite DB et une corde quelconque DE qui aille rencontrer CC en G ; faites passer un cercle *o* par G, E, B ; tracez la corde EH jusqu'à la rencontre de BD en L ; marquez les contacts M, N des tangentes qu'on peut mener de L, au cercle A ; les rayons AM, AN iront couper la perpendiculaire abaissée de *o* sur BD, en deux points O, O' centres de deux cercles qui seront touchés extérieurement par A, en M, N, qui passeront par B et toucheront aussi la droite CC.

Deuxième cas : Le cercle demandé doit être touché intérieurement. Il faut agir comme il vient d'être dit, en employant le centre de similitude inverse D' de la droite et du cercle donné, au lieu de leur centre de similitude directe D. Il y a aussi deux solutions pour ce cas.

Troisième cas : Le cercle donné A doit être touché intérieurement. Alors le point B se trouvera sur la circonférence ou dans l'intérieur du cercle A, la droite CC sera tangente ou sécante du même cercle, et la distance des centres égalera, comme dans le deuxième cas, la différence des rayons. Cette dernière circonstance exige que vous employiez encore le centre de similitude inverse de la droite et du cercle A.

Probl. (*t*) : *Décrire un cercle qui touche à la fois un cercle donné* A *et deux droites* BB, CC (P. VI, F 19).

Premier procédé : Ce problème qui termine l'énumération du n° 152 se divise comme le précédent, en trois autres, parce que les cercles peuvent se toucher extérieurement ou intérieurement.

Premier cas : Le cercle demandé doit être touché extérieurement. Il faut marquer les centres de similitude directe D, D' du cercle A et des deux droites (126) ; mener par un point quelconque E de la circonférence donnée et par D, une droite qui aille rencontrer

BB en F ; mener par le même point E et par D', une seconde droite, jusqu'à *la rencontre* de CC en G ; faire passer un cercle *o* par les trois points E, F, G ; tirer la corde commune EH, jusqu'à son intersection L avec DD' ; marquer les contacts M, N des tangentes qu'on peut mener de L, au cercle A, et tirer les rayons AM, AN. Ces rayons iront couper la bisectrice de l'angle formé par BB, CC, en des points O, O', centres *de deux cercles* qui seront touchés extérieurement par A et qui toucheront les droites données. Le centre *o* se trouvera aussi sur la bisectrice, avec laquelle doit se confondre la perpendiculaire menée de *o* sur DD', puisque cette perpendiculaire passe par les centres O, O' de cercles tangens aux côtés de l'angle (108).

Deuxième cas : Le cercle demandé doit être touché intérieurement. La construction est tout à fait la même, si ce n'est qu'on doit employer les centres de similitude inverse au lieu des points D, D'. Il y a aussi deux solutions.

Troisième cas : Le cercle donné A doit être touché intérieurement. Opérez comme pour le second cas, bien que les droites données soient alors sécantes ou tangentes du cercle A.

Si, dans l'un quelconque des trois cas, le centre A se trouvait sur la bisectrice de l'angle formé par BB, CC, la corde EH serait perpendiculaire à cette bisectrice qui se confondrait avec la droite A*o* (115). EH deviendrait donc parallèle à DD', et l'on ne pourrait plus marquer L. Mais alors ce seraient des tangentes menées au cercle A, parallèlement à DD', qui donneraient les contacts M, N ; les centres O, O' se trouveraient sur la bisectrice, et pour les déterminer, il n'y aurait qu'à tracer les bisectrices des angles formés sur BB ou sur CC, par les tangentes parallèles à DD' (p. 101).

DEUXIÈME PROCÉDÉ : Voici un tracé bien simple qui convient aux trois cas et fait obtenir d'un seul coup, les quatre solutions des deux premiers. Il a de plus l'avantage de ne point exiger le concours des *tangentes* au cercle A, lequel se trouve fort éloigné, lorsque le centre de A est voisin de la bisectrice de l'angle formé par les droites BB, CC.

Menez au cercle A (F. 20), parallèlement aux deux droites BB, CC, quatre tangentes *ab*, *bc*, *cd*, *da* (p. 113), et joignez leurs intersections *a*, *c*, avec le point *e* où se coupent les droits données. Il en résultera deux sécantes *ea*, *en* qui rencontreront la circonférence A, aux points de contacts cherchés M, N, *m*, *n*, et vous achèverez comme ci-dessus.

« Il est facile de se rendre raison de ce fait : le point *m*, par exemple, est le centre de similitude directe des deux cercles A, O" (143), et par conséquent, les droites qui joindront les extrémités de rayons parallèles, dirigés dans le même sens, c'est-à-dire deux points *correspondans* des circonférences, passeront toutes par *m*. Mais il en est de même des droites qui joindront chacune deux points correspondans, situés à l'intérieur ou a l'extérieur des cercles : par exemple, les points milieux de deux rayons parallèles dirigés dans le même sens, les points placés sur ces rayons à des distances des centres doubles des mêmes rayons, etc., ce dont on peut s'assurer aisément. Si donc les points $\acute{e}$, e sont des points correspondans, la droite $e\acute{e}$ devra passer par m. »

« Or, l'angle BeC qui embrasse le cercle O'', est égal à bcd (64), et sa moitié $BeO''=bcA$, moitié de bcd; donc, puisque Be est parallèle à bc, eO'' doit être parallèle à cA. Ainsi, e, c, sont situés sur des rayons parallèles, dirigés dans le même sens, et comme de plus ils sont déterminés l'un et l'autre de la même manière par rapport aux deux cercles O'', A, c'est-à-dire au moyen de tangentes parallèles, ce sont de vrais points correspondans. »

« On verrait, par un raisonnement analogue, que les points a, $\acute{e}$ inversement placés, mais situés sur des rayons parallèles, dirigés en sens contraires, forment une droite qui passe par M, centre de similitude inverse des cercles A, O. »

Appl. (a): Le tracé des cercles qui se touchent, est d'un usage fréquent dans la construction et le dessin des machines: c'est sur ce tracé que repose celui des roues dentées qui engrènent soit avec d'autres roues dentées, soit avec des pignons, soit avec des lanternes.

« Il est visible, en effet, que deux cercles qui se touchent extérieurement, peuvent tourner sur leurs centres A, B (P. VI, F. 21), sans cesser de se toucher au point C de la droite AB, et que si l'on fait mouvoir A de C vers D, comme l'indique la flèche, le mouvement de B se fera de C vers E, en sens contraire du précédent, supposé toutefois que les deux cercles frottent assez l'un contre l'autre pour que la rotation se communique. Cette disposition de deux cercles, permet donc de transformer un mouvement circulaire, en un autre qui ait lieu dans un sens opposé. Pour passer de là aux engrenages, il n'y a qu'à placer des dents sur la circonférence A et d'autres dents ou des fuseaux sur la circonférence B. »

« Il faudrait tracer deux cercles A, B (F. 22), dont l'un fût touché intérieurement, pour faire un engrenage propre à changer le mouvement circulaire qui aurait lieu autour d'un centre A, en un autre qui se fît dans le même sens, autour d'un centre B. Mais ordinairement, au lieu de cette disposition qui aurait des inconvéniens, on trace trois cercles dont deux sont touchés extérieurerement par l'autre, comme le montre la figure 23. Le cercle C tournant en sens contraire de B, tourne dans le même sens que A. »

« Enfin, l'on peut avoir à faire tourner deux ou trois roues, en imprimant le mouvement à une quatrième, et il faut parfois dans ce cas, tracer un cercle tangent à deux ou trois autres cercles donnés »

« Le dessin d'une montre ou d'une pendule offre plusieurs roues, tangentes extérieurement les uns aux autres, parce qu'elles engrènent; quelques-unes sont même tangentes intérieurement à un cercle où toutes se trouvent renfermées, et qui représente le plateau de support. »

Appl. (*b*) : Les profils des talons et des doucines de l'architecture peuvent se faire au moyen du tracé propre au probl. (*n*) ; mais comme l'exécution d'un quelconque de ces profils, revient à décrire deux arcs qui se touchent extérieurement au milieu d'une droite AB et qui aient pour rayons la moitié AC de cette même droite (P. VI, F. 24), on peut aussi décrire, des points A, C, avec une ouverture de compas égale à AC, deux petits arcs qui se coupent en D, par exemple, et des points B, C, deux autres arcs qui se coupent en E : les intersections D, E seront les centres d'arcs AFC, BGC dont l'ensemble formera ce qu'on appelle une *doucine renversée.*

« Pour démontrer que AFC et BGC se touchent en C, il suffit de faire voir que la manière dont on a déterminé le centre E, revient à prolonger DC et à porter sur le prolongement, le rayon donné AC (138). Cela est vrai, si de cette dernière construction résulte aussi que BE=CE. Or, AG : CB :: DC : CE, puisque ces quatre longueurs sont égales; donc AD, BE sont parallèles (80); donc AD : BE :: AC : BC (81); et puisque AC=BC, la droite BE = AD = CE. »

Appl. (*c*) : La construction des jambages d'une cheminée de cuisine, exige parfois le tracé de cercles tangens ou d'arcs *qui se raccordent*, comme disent les ouvriers (P. VI, F. 25).

« Le point I est l'extrémité inférieure d'une arête de la plate-bande que soutiennent les jambages; K est la tablette; CE représente une arète du corps de cheminée en *hotte renversée ;* M'B figure une arête du *pied de chèvre*, et G est le socle sur lequel repose ce pied. Certaines convenances peuvent exiger que M'B ait une inclinaison et une longueur déterminées, et dans un tel cas, il faut lier le point I au point M' par une *console* composée de deux arcs raccordés. »

« Menez par I, une parallèle aux arêtes de la tablette K, et marquez-y arbitrairement le centre A du premier arc, que vous décrirez avec le rayon AI. Si rien ne s'y oppose, vous prendrez AI de manière que l'arc passe à peu près par le milieu de M'F. Alors il s'agira de décrire un second arc qui touche extérieurement le cercle A quelque part, et la droite BM' en M'. »

« Marquez le centre D de similitude directe de A et BM', puis tirez DM'; cette sécante coupera le cercle A au contact M des deux arcs, car les contacts de même espèce et le centre de similitude directe sont en ligne droite (145). Le centre O du second arc se trouvera donc au concours de AM et de M'O perpendiculaire à BM'. »

Appl. (*d*) : Ce sont aussi des cercles tangens les uns aux autres qui forment ces courbes que les ouvriers nomment *ovales*, quand elles sont complètes ou fermées, et *anses de panier*, lorsqu'une moitié manque. Elles sont composées de plusieurs arcs de cercle AG, GDK, KB, etc. (P. VI, F. 26), qui se touchent deux à deux en G, K, etc. On les emploie principalement pour les cintres des arcades qui doivent être surbaissées, comme celles de la plupart des ponts, comme celles des alcoves.

« Les anses de panier les plus simples sont celles qu'on appelle aussi *courbes à trois centres*. Ce nom leur vient de ce qu'il n'entre que trois arcs de cercle AG, GDK, KB dans leur composition. »

« Le premier et le dernier de ces arcs ont même rayon et même longueur; en outre, ils sont tangens aux arêtes AM, BN des *piédroits* de l'arcade. »

« La plus usitée des courbes à trois centres est celle dont les arcs ont chacun 60°. La manière la plus simple de la construire consiste à élever une perpendiculaire DI au milieu de la *ligne de naissance* AB; à marquer un point E qui soit éloigné de A et de C, autant que ces deux points le sont l'un de l'autre (6); à porter de C en F, la *hauteur sous clef* CD qui doit être donnée; à joindre D, F, par une droite prolongée jusqu'à sa rencontre G avec AE, et à mener GI parallèlement à CE. Le point H est le centre et HA le rayon du petit arc AG; le point I est le centre et IG le rayon du grand arc GDK. Il ne s'agit plus, pour avoir le centre L du troisième arc BK, que de porter CH, de C en L. »

« La démonstration n'est pas plus compliquée que le procédé. Si vous faisiez passer une circonférence par les trois points A, C, E, elle serait divisée en trois arcs égaux de 120° chacun, puisque les cordes AC, AE, CE seraient égales (24). Les trois angles inscrits A, C, E auraient donc chacun 60° d'indication (98). Mais, à cause du parallélisme de GI et de CE, l'angle AHG=ACE, l'angle GID=ECD (60); donc l'arc AG est de 60°, et l'arc GD est de 30°, puisque ECD=ACD−ACE=90°−60°=30°. Or, d'après l'égalité de AC et de CB, de AH et de BL, ce qui a lieu à gauche de DI a lieu aussi à droite. Par conséquent, BK=60°, KD=30° et GDK=60°. Il est aisé de voir d'ailleurs que le petit arc passe réellement par G et le grand par D, car à cause des parallèles; HG=HA, comme CE=CA, et ID=IG, comme CD=CF (81). »

« On achèverait aisément l'ovale, en portant CI, de C en un point I', sur le prolongement de CD, et en traçant des arcs, des centres H, L, I', avec les rayons HA et IG. La courbe entière serait composée de quatre arcs : deux qui auraient H, L pour centres et 120° d'indication; deux autres qui auraient I, I' pour centres et 60° d'indication. L'ovale contiendrait donc en tout 360°. Il en doit être ainsi de toute courbe fermée et composée d'arcs de cercle, puisqu'elle borne, comme la circonférence, les quatre angles droits qu'on peut former autour d'un point C. »

Appl. (c) : Voici un moyen plus simple encore d'obtenir une ovale composée d'arcs de 120° et de 60°; mais il n'est applicable que dans le cas où la plus grande largeur n'est pas donnée, à moins pourtant qu'elle ne le soit convenablement.

« Partagez la longueur AB, en trois parties égales (P. VI, F. 27), et des points de division C, D décrivez deux circonférences qui passent par D, C. Les intersections E, F de ces courbes, seront les centres d'où il faudra décrire les arcs qui devront raccorder les deux cercles, et pour avoir les rayons, il suffira de tirer EC, FC, jusqu'à la rencontre de la circonférence C, en G et en H.

« D'après la construction, les circonférences C, D ont même rayon CD, et il s'ensuit que les droites CD, CE, DE sont égales. Si donc on faisait passer une circonférence par les trois points C, D, E, ils la diviseraient en trois arcs égaux de 120° chacun. Par conséquent, les trois angles inscrits C, D, E sont chacun de 60°. Il en est de même des trois angles formés par CD, CF, DF. Ainsi, les arcs GI, HK, indications des angles E, F, renferment chacun 60°. Mais l'angle ACH=DCF son opposé par le sommet, et l'angle ACG=ECD, pour la même raison. Donc, les arcs AH, AG contiennent chacun 60°, et l'arc GAH en contient 120. On verrait de même que l'arc KBI est de 120°. »

Appl. (*f*) : Si au lieu de partager la longueur AB en trois parties égales, on la partage en quatre (P. VI, F. 28), l'ovale sera plus alongée. Les points de divisions extrêmes C, D seront deux centres; pour avoir les deux autres, on tirera par le milieu de AB, la perpendiculaire EF et l'on prendra GE, GF égaux chacun à GD. De cette construction résultera que les arcs HAI, IK, KBL, LH seront chacun de 90°, puisque les angles C, F, D, E seront inscrits à la circonférence qui a G pour centre, GD pour rayon, et que chacun comprendra un diamètre (101).

Appl. (*g*) : Les courbes dont nous venons d'enseigner le tracé, ne sont pas d'un aspect agréable pour un œil exercé : elles ne font point de *jarret*, il est vrai ; mais les rayons des arcs qui se touchent, sont trop différens l'un de l'autre, par rapport à la longueur du plus petit, pour qu'on n'aperçoive pas, à la première vue, que ces courbes ne sont point décrites d'un mouvement continu. Nous croyons donc devoir donner un procédé général, au moyen duquel on puisse éviter ce défaut, quand on le voudra.

« Supposons, pour prendre un exemple, qu'il s'agisse de former par des arcs de cercles, un cintre surbaissé dont AB soit la demi-longueur, et BC la hauteur sous clef, mesure prise à partir de la ligne de naissance AB (P. VII, F. 1). Je décris de B, deux quarts de cercle, entre AB et BC, l'un avec BA pour rayon, l'autre avec BC, et je divise ces deux arcs en un même nombre quelconque de parties égales. Par les points de divisions de chaque arc ; je mène des parallèles au rayon de l'autre, ce qui me donne les points D, E, F de la courbe demandée. Elevant alors une perpendiculaire au milieu de la droite AD, je prends le point G, où elle coupe AB, pour centre de l'arc de cercle qui doit joindre A et D. La rencontre de DG et de la perpendiculaire au milieu de la droite DE, me donne le centre H de l'arc DE. L'intersection I de EH et de la perpendiculaire au milieu de la droite EF, est le centre de l'arc EF. Enfin, à l'intersection K de FI et de CB prolongée, se trouve le centre de l'arc FC, c'est-à-dire que FK=KC ou que la perpendiculaire au milieu de la droite FC passe par le point K. »

« Vous comprendrez facilement qu'il suffit d'augmenter le nombre des divisions de chaque quart de cercle, pour rendre encore plus faible la différence de deux rayons consécutifs, tels que HE, IF, et pour obtenir une courbe encore plus agréable à l'œil que celle ADEFC que je viens de tracer. Nous verrons dans la géométrie des courbes, que les points D, E, F et tous ceux qu'on trouverait de la même manière, appartiennent à la portion d'ovale qui serait tracée d'un mouvement continu, entre A et C; de sorte que c'est seulement à cause de ses arcs de cercle, que la courbe ADEFC diffère de celle-là. »

« Vous verrez bien aussi que si j'achevais l'ovale, je trouverais six nouveaux centres placés deux à deux, dans les trois autres angles droits que forment AB, CB et les prolongemens de ces droites, comme le sont H, I dans l'angle droit ABK. Mais, je n'obtiendrais qu'un centre analogue à G, qu'un centre analogue à K. J'aurais donc en tout douze centres différens et douze arcs, tandis que les deux circonférences B contiendraient seize parties égales chacune. En général, le nombre d'arcs de cercle dont se compose l'ovale entière, tracée d'après ce procédé, est toujours de quatre unités au-dessous du nombre des divisions qu'on fait dans chacune des circonférences entières décrites avec les rayons AB, BC. Si, par exemple, vous divisez chaque quart de cercle en six parties égales, les circonférences entières en contiendront vingt-quatre, et l'ovale sera composée de vingt arcs différens. »

Appl. (*h*) : La ligne de naissance d'un cintre n'est pas toujours perpendiculaire aux arêtes des piédroits, même quand ces arêtes sont verticales ou quand les piédroits n'ont pas de talus. Dans les arcades destinées à soutenir des rampes, par exemple, la ligne de naissance est inclinée sur l'horizontale, et de telles arcades ne peuvent pas être faites en plein cintre, parce qu'il serait impossible de tracer une demi-circonférence qui eût à la fois, pour points de contacts sur les arêtes parallèles des piédroits, les deux extrémités de la ligne de naissance qui leur est oblique (probl. *a*, p. 113). La courbe convenable est une espèce d'anse de panier; elle prend le nom d'arc *rampant*.

« L'arc rampant le plus simple ne se compose que de deux arcs de cercles raccordés; les trois données nécessaires à son tracé, varient selon les circonstances de construction où l'on se trouve. »

« *Premier cas :* La ligne de naissance AB est donnée de position et de grandeur; le raccordement doit se faire sur l'axe ou ligne milieu CF de l'arcade (P. VII, F. 2).

« La position de AB résulte de l'angle qu'elle fait avec AD, BE, arêtes verticales des piédroits. La grandeur de la même droite détermine l'écartement de ces piédroits. Ainsi la figure DABE est tout à fait connue. »

« Marquez le milieu C de AB; menez par ce point, CF parallèle à AD; prenez CF égale à CA; abaissez de F, une perpendiculaire sur AB, et des points A, B, des perpendiculaires sur CF. Les points G, H où les dernières couperont la première, seront les centres de deux arcs qui se raccorderont en F et toucheront les piédroits en A, B (141 et 106).

« Menons FI, parallèle à AB, jusqu'à la rencontre du prolongement de AD. Cette droite FI égalera AC (65), et comme AI=CF=AC, FI et AI seront égales. Or, si l'on voulait décrire un cercle tangent en A, F, aux droites AI, FI, il suffirait d'élever en ces points des perpendiculaires AG, FG : leur concours G déterminerait le centre, car les principes 106 et 108 (3°) seraient satisfaits. D'ailleurs, ce qui se dit du point G, peut se dire aussi du point H. »

« *Deuxième cas :* La *ligne de sommité* IK est donnée de grandeur et de position, par rapport aux piédroits ID, KE; le point F de raccordement est connu aussi (F. 3). »

« On appelle *ligne de sommité*, la tangente FI commune aux deux arcs (F. 2). Cette droite n'est plus parallèle à la ligne de naissance, lorsque le raccordement ne se fait pas au milieu. »

« Rapportez IF en IA et KF en KB (F. 3); les points A, B seront les contacts des arêtes des piédroits, puisque les tangentes IF, IA doivent être égales (108). La droite AB sera donc la ligne de naissance, et vous pourrez achever comme dans le premier cas; mais alors IH doit être perpendiculaire à IK et non à AB. »

« *Troisième cas :* La ligne de naissance AB est donnée de position et de grandeur; la direction de la ligne de sommité IK est connue : on sait, par exemple, qu'elle doit faire un angle de 45° avec l'un AD des piédroits (F. 4). »

« Tracez par un point quelconque I' du prolongement de DA, une droite I'K' qui fasse avec I'D, l'angle donné; rapportez I'A en I'F' et K'B en K'F''; puis, tirez AF', BF''. L'intersection F de ces droites sera le point de raccordement, et vous pourrez achever comme dans le premier cas. »

« Il est clair, en effet, que si vous menez IK parallèle à I'K', KF=KB, comme K'F''=K'B (81); que IF=IA, comme I'F'=I'A, et que, par conséquent, les piédroits et la ligne de sommité IK pourront toucher en A, B, F, les arcs décrits des centres G, H. »

« *Quatrième cas :* La ligne de naissance AB', *m* la ligne de sommité IB' et l'un des piédroits AD sont donnés de position (F. 5). »

« Rapportez IA en IF; le point F sera le lieu du raccordement; FG perpendiculaire sur IB' et AG perpendiculaire sur ID, donneront par leur concours G, le centre du premier arc. Rapportez GF en GL, sur le prolongement de AG; le concours B de FL et de AB' sera l'autre extrémité de la ligne de naissance; BE parallèle à AD sera l'arête intérieure du second piédroit; BH parallèle à AL, déterminera le centre H du deuxième arc. »

« Effectivement, HB=HF, comme GL=GF. (*Voyez* un procédé général, aux applications des polygones réguliers.) »

Appl. (*i*) : Il ne faut ajouter que peu de chose au premier de ces tracés, pour en tirer un procédé propre à la formation d'un ovale, sur deux droites égales AB, F*f* qui se coupe par le milieu, en faisant un angle quelconque (F. 2). On voit effectivent, que les quatre centres G, H, *g*, *h*, se trouvent aux intersections de perpendiculaires abaissées de chacune des extrémités, A, B, F, f des deux droites données, sur l'une et l'autre de ces droites.

Appl. (k) : Comme l'architecture et plusieurs autres arts font un grand usage de la volute ionique, et que cette courbe se compose d'arcs de cercle, je crois utile de joindre son tracé aux applications qui précèdent.

« On se donne la distance du point de départ A au centre B de l'*œil* (P. VII, F. 6). Cet œil est un cercle que l'inventeur de la volute ionique y a placé, pour éviter la difficulté de la terminer par un point. Le rayon BC a pour longueur $\frac{1}{9}$ de AB. Après avoir décrit l'œil, tirez perpendiculairement au diamètre CD qui passe par A (F. 7), un second diamètre EF; tirez aussi les cordes CE, ED, DF, FC; menez par le centre B, des parallèles à ces cordes; numérotez leurs intersections, en allant de gauche à droite et en commençant à celle de CE; divisez les droites 1.3, 2.4 en six parties égales chacune et numérotez les premiers points de division, puis les deuxièmes, en suivant l'ordre précédent et en commençant par 5 sur B1; enfin, du point 1 (F. 6), avec la distance 1.A pour rayon, décrivez un arc qui se termine en G, sur le prolongement de la droite 1.2; du point 2, avec 2.G, décrivez un arc qui se termine en H, sur le prolongement de la droite 2.3; du point 3, avec 3.H, décrivez un arc qui se termine en I, sur le prolongement de 3.4; du point 4, avec 4.I, décrivez un arc qui se termine en K, sur le prolongement de la droite 4.5; du point 5, avec 5.K, décrivez un arc qui se termine en L, sur le prolongement de 5.6, et continuez toujours ainsi. La volute sera terminée, quand vous aurez décrit un arc du point 12, avec 12.R pour rayon. Ce dernier arc rencontre la circonférence de l'œil; mais la rencontre a lieu en un point qui précède C de très-peu, et elle se fait de telle sorte qu'elle ne diffère pas beaucoup d'un raccordement ou d'une tangence. C'est pour qu'il en soit ainsi et pour que la volute ne se resserre pas trop rapidement, qu'on discontinue de prendre les points 1, 2, 3, 4 pour centres (F. 7), après la première révolution, c'est-à-dire quand on est revenu à la droite 1.A : la courbe ferait à peu près une révolution de moins, si l'on n'employait pas les points 5, 6, 7, etc., et le dernier arc couperait la circonférence de l'œil de telle façon que les tangentes de ces deux courbes, au point d'intersection, feraient entre elles un assez grand angle. »

« Si l'on veut donner un filet à la volute, il faut marquer des points a, b, c, d, aux quarts des divisions 1.5, 2.6, 3.7, 4.8; des points e, f, etc., aux quarts des divisions 5.9, 6.10, etc.; un point T, au quart de AV; puis décrire, comme précédemment, une nouvelle volute qui commence en T et qui ait pour centres, les points a, b, c, d, e, f, etc. Cette courbe se rapprochera de plus en plus de la première, le filet diminuera continuellement de largeur, et il finira par se réduire, pour ainsi dire, à un trait, vers le point C. (*Voyez* un procédé général, aux applications des polygones réguliers.) »

APPL. (*l*) : Nous terminerons ces applications, par le tracé de la courbe que les architectes appellent *ove*, à cause de sa ressemblance avec le profil d'un œuf, et dont ils font souvent usage pour l'ornement des corniches.

« Soit AB la plus grande largeur de l'ove (P. VI, F. 29). Vous élèverez une perpendiculaire au milieu C de cette droite ; vous diviserez l'une des moitiés, en deux parties égales, pour avoir AD longueur des $\frac{5}{4}$ de AB ; puis, vous porterez cette longueur de A en E et de B en F, sur le prolongement de AB. Décrivez alors une circonférence du point C, avec CA pour rayon ; marquez les milieux G, H des quarts de cercle AI, BI ; des points E, F avec EB pour rayon, décrivez des arcs BK, AK' qui se terminent aux droites EG, FH prolongées ; des points G, H, avec GK pour rayon, décrivez deux arcs qui se coupent en L, sur le prolongement de CI ; marquez le milieu M de IL, menez les droites GN, HO qui se croisent en M et s'arrêtent aux deux derniers arcs. Enfin, du point M, avec MN pour rayon, décrivez l'arc NO ; l'ove AK'ONKBPA sera terminée. »

FORMATION ET COMBINAISON

DES FACES.

153. Il a été dit, dans les notions générales, page 6, que les faces des corps sont planes ou courbes. Les dernières sont ordinairement appelées *surfaces courbes*, probablement parce que chacune peut être considérée comme l'ensemble d'une multitude de petites faces planes extrêmement étroites (p. 5) : la face courbe de l'intérieur d'un seau, par exemple, est formée des faces planes et étroites de plusieurs planchettes.

Il est des surfaces courbes sur lesquelles une règle peut s'appliquer dans un sens : on les appelle *surfaces courbes réglées* : telle est la surface courbe d'un tuyau de poêle. Il existe aussi des surfaces coubes réglées, sur lesquelles une règle ne peut jamais prendre deux positions soit parallèles, soit concourantes : on les nomme *surfaces gauches* : telles sont celles de certaines planches déjetées.

Les faces des corps sont limités par les arêtes, mais rien n'empêche de les concevoir étendues au-delà de leurs limites. Notre imagination nous représente fort bien la face ou le plan que donnerait le dessus d'une table prolongé dans tous les sens ; elle nous représente tout aussi bien la surface courbe réglée d'une colonne prolongée par les deux bouts. Quand on considère ainsi une face ou une surface dans toute l'étendue qu'elle pourrait avoir, on dit qu'elle est *illimitée*. Nous aurons donc à étudier les *faces limitées* et les *faces illimitées* ; nous les considérerons d'abord isolément, afin d'apprendre comment elles se forment ou *s'engendrent* ; puis, nous les combinerons, comme nous avons fait pour les lignes.

Le tableau suivant indique les principales divisions de la formation et de la combinaison des faces. La lettre F. signifie *face* et les lettres S. F. signifient *surface*.

FACES
- *isolées :*
  - F. PLANES.
  - S. F. COURBES.
    - réglées par des
      - droites parallèles.
      - droites concourantes.
      - droites ni parallèles, ni concourantes.
    - non réglées :
      - S. F. de révolution.
      - S. F. enveloppe.
- *combinées :*
  - F. PLANES *avec*
    - lignes droites
      - qu'elles coupent.
      - qu'elles ne coupent pas.
    - F. planes
      - qu'elles coupent.
      - qu'elles ne coupent pas.
    - S. F. courbes
      - qu'elles coupent.
      - qu'elles touchent.
  - S. F. COURBES *avec*
    - lignes droites.
    - S. F. courbes
      - qu'elles coupent.
      - qu'elles touchent.
      - qu'elles ne rencontrent pas.

« Pour procéder d'une manière à la fois simple et uniforme, nous combinerons chaque espèce de face, avec les lignes droites et les espèces précédentes, dès que nous connaîtrons sa *génération* et ses propriétés particulières. »

FACES PLANES.

154. Nous avons appelé face plane ou plan, la face sur laquelle une règle bien faite peut s'appliquer d'un bout à l'autre, dans tous les sens (p. 6); mais le nom de *plan* indique plus particulièrement une face plane considérée comme illimitée.

Il suit de la définition du plan, que si une des arêtes d'une bonne règle passe par deux points d'un plan, cette arête s'y applique dans toute sa longueur; car deux points suffisent pour déterminer la position d'une droite. Donc, *quand une droite a deux de ses points sur un plan, elle est toute entière dans ce plan.*

155. On conçoit qu'un plan peut tourner sur une droite qui s'y trouve tracée, comme font des feuillets de papier sur leur pli commun. La droite ne suffit donc pas pour déterminer la position du plan. Mais, si en dehors de cette droite, on marque un point, la position qu'aura le plan quand il renfermera ce point, sera différente de toutes les autres, c'est-à-dire que le plan aura une position fixe qui pourra toujours être indiquée et retrouvée. Ainsi *une droite et un point pris hors de cette droite, suffisent pour former un plan.*

Si l'on observe qu'une droite est entièrement déterminée, quand on connaît deux de ses points, on verra qu'*il suffit de trois points, non en ligne droite, pour former un plan.*

Or, deux concourantes fournissent trois points non en ligne droite : celui du concours et deux autres ; deux parallèles sont toujours tracées sur une face plane (p. 52) ; tous les points d'un arc de cercle se trouvent aussi sur un même tableau. Par conséquent, *il suffit, pour déterminer un plan, de deux concourantes ou de deux parallèles ou d'un arc de cercle.*

Cela nous montre qu'on peut engendrer un plan en promenant une droite ou une règle sur les deux côtés d'un angle, sur deux arêtes parallèles, et même sur un arc de cercle, pourvu que la règle s'appuie sur deux points de cet arc.

Appl. (*a*) : Les briques et en général tous les carreaux de terre cuite se font par le premier de ces procédés. Ayant renfermé la terre molle dans un cadre, on fait glisser une règle sur deux arêtes concourantes de ce cadre, et l'on enlève ainsi toute la terre qui se trouve au-dessus du plan de ces deux arêtes. Ce qui reste dans le cadre présente donc alors une face plane. La face opposée est plane aussi, parce qu'on a soin de placer le cadre sur un plan, par exemple, sur une table bien dressée. Enfin, les quatre autres faces du carreau sont planes, comme les deux précédentes, parce que les faces internes du cadre sont planes elles-mêmes.

« On sent en effet que deux plans doivent pouvoir se superposer dans toute leur étendue, et que si de deux faces superposées, l'une est plane, l'autre doit l'être aussi. Cela résulte d'ailleurs de ce que toutes les droites qu'on peut tracer sur la première, appartiendront à la seconde. »

Appl. (*b*) : Les tailleurs de pierres emploient indifféremment l'un ou l'autre des deux premiers procédés, pour *dégauchir* les paremens dont ils ont formé deux arêtes au moyen de ciselures, et comme ces ciselures qui se font au ciseau, sont elles-mêmes de petites faces planes, on les vérifie en y appliquant une règle : elle doit les toucher par-tout.

Appl. (*c*) : Quand on vend du grain à mesure rase, le mesureur doit, après avoir rempli la quarte par-dessus les bords, abattre tout ce qui excède le plan de la circonférence formée par l'arête supérieure. Il y parvient aisément, en poussant selon le diamètre, une règle ou un rouleau réglé qui s'appuie constamment sur deux points de l'arête circulaire.

Appl. (*d*) : Le scieur de long ayant à débiter une pièce de bois en planches planes, trace une droite sur l'une des faces planes de la pièce, et une parallèle à cette droite, sur une face opposée ; puis il fait jouer la scie, qui peut être regardée comme une règle, de manière que le *trait* se confonde constamment avec les deux parallèles. Les dents de la scie doivent donc engendrer un plan.

« On obtient le même résultat dans une scierie mécanique, en assujettissant la scie à monter et à descendre selon une droite fixe, et en plaçant la pièce de bois sur un chariot propre à la faire cheminer selon une autre droite qui coupe la première. »

Appl. (*e*) : Le charpentier emploie pour *dresser* les faces des pièces de bois, le procédé du scieur de long : il enlève avec la hache, le bois qui excède le plan de deux lignes marquées au cordeau sur la pièce (appl. *c*, p. 9). Pour que ces lignes déterminent un plan, on fait passer chacune par les extrémités supérieures ou inférieures de deux droites tracées, au moyen du fil à plomb, sur les deux bouts de la pièce de bois, de manière qu'elles soient dans un même plan vertical, c'est-à-dire dans un plan qui contienne la verticale. Il est clair que les lignes qui les coupent toutes deux, sont alors dans ce plan (154).

Appl. (*f*) : Le menuisier forme un plan, au moyen d'un autre plan, car la face du rabot où se trouve le fer, est parfaitement plane, et ce fer enlève du bois jusqu'à ce que le plan du rabot s'applique exactement : alors la planche se trouve nécessairement plane elle-même.

« C'est ainsi que se font les faces des règles ; mais pour être sûr d'arriver à une grande exactitude, il faut en faire au moins deux à la fois, et surtout raboter en même temps les petites faces qui doivent servir à tracer les lignes droites. Quand on les croit planes, on les applique l'une contre l'autre, et en les plaçant entre l'œil et une fenêtre, on juge si elles laissent des jours entre elles. Dans le cas où il y a quelques jours, on doit raboter de nouveau. Dans le cas contraire, les deux faces sont parfaitement planes, puisque si elles étaient courbes en creux ou en relief, les courbes se regarderaient et ne pourraient entrer l'une dans l'autre. Lorsque les petites faces sont bien planes, il suffit que les deux grandes le deviennent aussi, pour que les longues arêtes soient parfaitement droites ; nous en verrons la raison à l'article des *plans qui se coupent*.

Faces planes limitées.

L'étude des faces planes considérées isolément, ne se borne pas à ce que nous venons de voir sur la formation du plan. Il faut étudier encore les faces planes qu'offrent les corps, et qui sont limitées par des arêtes. Ces arêtes peuvent être toutes soit des droites, soit des courbes, ou bien les unes peuvent être droites et les autres courbes.

156. Nous nous occuperons d'abord des faces planes renfermées entre des droites : on les appelle *polygones*.

La face plane comprise entre deux concourantes, n'est pas limitée de toutes parts (28), et il en est de même de la face comprise entre deux parallèles. *Il faut donc au moins trois droites qui se coupent deux à deux, pour limiter un plan de tous côtés.*

Triangles.

157. On nomme *triangle rectiligne* ou simplement *triangle* le plus simple des polygones, c'est-à-dire une face plane limitée par trois droites. La figure ABC est donc un triangle (P. VI, F. 30); un triangle a donc trois côtés, AB, BC, CA, trois angles A, B, C, et trois sommets.

La somme des trois angles de tout triangle, est égale à celle de deux angles droits (P. VI, F. 30).

Prolongeons BC jusqu'en un point quelconque D, et menons CE parallèlement à AB. Les trois angles qui ont leurs sommets au point C, valent deux angles droits, puisque la somme de leurs indications ferait le nombre de degrés contenu dans une demi-circonférence ou 180°. Or, l'angle ACB est un des angles du triangle ABC; l'angle ACE = A, puisqu'ils sont alternes-internes (58); l'angle DCE = B, puisqu'ils sont correspondans (60). Par conséquent, la somme des angles qui ont leurs sommets en C, est la même que celle des angles du triangle; donc, cette dernière est égale aussi à deux angles droits.

PROBLÈME : *Trouver l'indication de l'angle* C *d'un triangle dont les deux autres angles* A, B *sont connus* (P. VI, F. 30).

Soient 95° l'indication de l'angle A et 45° celle de l'angle B. Je fais la somme des indications des deux angles connus, et j'ai 95° + 45° = 140°; puis, retranchant cette somme de 180°, je trouve que 180° − 140° = 40°, nombre demandé.

L'indication de l'angle C est bien de 40°; car ce nombre est précisément ce qui manque à 140°, pour faire 180° ou la somme des trois angles.

APPLICATION : Il arrive souvent dans la pratique, qu'on a besoin de connaître un angle A (P. VI, F. 30) dont le sommet est inaccessible ou très-éloigné. Le moyen d'y parvenir aisément consiste à planter un jalon en un point B quelconque du côté AB, à placer un graphomètre en un point C quelconque de AC, à lever l'angle ACB, à lever de la même manière l'angle ABC, à faire la somme des deux indications et à retrancher cette somme de 180°: le reste est l'indication de l'angle A.

158. La démonstration du n° 157, montre que *l'angle* EXTÉRIEUR ACD *d'un triangle* (P. VI, F, 30), *vaut la somme des deux intérieurs* A, B *qui ont des sommets différens du sien*; car cet angle ACD, formé par un des côtés AC et le prolongement d'un autre BC, se compose de ACE = A et de DCE = B.

159. Il suit du principe 157 *qu'un triangle ne peut jamais avoir plus d'un angle qui soit droit*; pour qu'il eût deux angles droits, il faudrait

que le troisième fût nul, ce qui ne peut jamais avoir lieu sans que la figure cesse d'être un triangle.

Le triangle dont un des angles est droit, se nomme *triangle rectangle* : les équerres des figures 35 et 36 (P. I) sont donc des triangles rectangles.

Il suit encore du n° 157, que, *dans un triangle rectangle, les deux angles qui ne sont pas droits, sont aigus et valent en somme un angle droit.*

Enfin, il ne peut y avoir dans un triangle qu'un seul angle qui soit obtus, et dans ce cas encore, chacun des deux autres angles est aigu, puisque leur somme ne doit pas même faire un angle droit.

160. Outre le triangle rectangle, il existe encore deux triangles remarquables : celui qui a deux de ses côtés égaux et celui dont les trois côtés sont égaux. Le premier est nommé *triangle isocèle* ou *symétrique* ; tel est BAC dont les côtés AB, AC ont même longueur (P. VI, F. 31). Le second est appelé *triangle équilatéral* ; tel est DEF (F. 32), dont les trois côtés DE, EF, FD ont même longueur.

Le triangle ABC est dit symétrique, parce que la perpendiculaire AD abaissée de A sur BC, le partage en deux parties ADB, ADC superposables par rabattement (93), ce qui vient de ce que BD=CD (50). *La perpendiculaire abaissée de l'intersection de deux côtés égaux, sur le troisième côté d'un triangle, est donc axe de symétrie de ce triangle.*

Donc, *un triangle équilatéral* DEF *a trois axes de symétrie* : DG, EH, FI.

Comme les deux angles B, C opposés aux côtés égaux d'un triangle symétrique ont même indication (51), *les trois angles d'un triangle équilatéral sont nécessairement égaux, et chacun vaut le tiers de* 180° *ou* 60° (157).

161. Il est facile de démontrer que, réciproquement, *si deux angles* B, C *d'un triangle* ABC *sont égaux, les côtés* AC, AB *opposés à ces angles, ont même longueur* (P. VI, F. 33).

Les deux angles B, C étant égaux, sont nécessairement aigus (159), et par suite, la perpendiculaire AD passera entre B et C. Si le rabattement opéré au moyen d'une charnière AD, faisait tomber C en C', par exemple, l'angle AC'D qui égalerait l'angle C, vaudrait l'angle B augmenté de BAC' (158), et non l'angle B tout seul ; si C tombait en C'', l'angle B du triangle BAC vaudrait la somme de l'angle C'' et de BAC'', et non l'angle C'' tout seul. On voit par là, que C ne pouvant tomber ni entre B et D, ni au-delà de B, doit nécessairement tomber sur B, par suite de l'égalité des deux angles B et C. Donc AC=AB.

Il résulte de là qu'*un triangle qui a ses trois angles égaux est équilatéral.*

Appl. (*a*) : Le triangle symétrique est une figure qu'on donne à plusieurs produits de l'industrie. Je citerai seulement les *fermes* de charpente ou le profil des toits de nos maisons, les *croupes* droites qui les terminent et les *frontons* d'architecture.

« Le triangle symétrique que forme le profil d'un toit, n'est pas le même partout : les deux angles égaux sont plus grands dans les régions du nord que dans celle du midi, parce que l'humidité des premières ne permettrait pas aux toits de sécher assez promptement, si une pente un peu roide ne favorisait l'écoulement des eaux ; d'ailleurs, comme il y tombe une grande quantité de neige, la charpente se trouverait en hiver chargée d'un poids fort lourd, si elle formait un comble aplati. »

« L'indication de chacun des angles égaux d'un profil de toit, dépend de deux choses : de la latitude du lieu (p. 22) et de l'espèce de couverture qu'on emploie. Pour la tuile courbe, cette indication est égale à la latitude diminuée de 23° 30' : elle est donc à Metz de 25° 37', puisque notre latitude est de 49° 7'. Il faut ajouter à la différence entre la latitude et 23° 30', le tiers de cette différence, pour trouver l'indication relative aux tuiles plates, et un quart pour avoir celle qui convient à l'ardoise. Ici, par exemple, la pente d'un toit en tuiles plates serait de 34° 9' et celle d'une couverture en ardoise devrait être de 32°. »

« Le triangle symétrique des frontons, suit les mêmes règles, parce que, dans le fond, un fronton n'est qu'un bout de toit. Les Grecs, nos maîtres en architecture, ne l'ont imaginé que pour terminer la toiture de leurs édifices et mettre le pignon en harmonie avec le reste. Ils se gardaient bien de placer, comme nous, un fronton au milieu d'un mur en ligne droite. Jamais ne leur est venue cette idée bizarre de faire des avant-corps saillans de trois à quatre pouces, pour se mettre dans la prétendue nécessité de construire un fronton. C'est que les Grecs s'occupaient avant tout, de satisfaire aux convenances de solidité, d'usage et d'économie : ils avaient compris que la décoration qui convient le mieux à un édifice, résulte tout naturellement et sans qu'on y songe, d'une construction solide et parfaitement appropriée à l'usage auquel on la destine. »

Appl. (*b*) : Les propriétés que nous venons de reconnaître aux triangles, nous mettent à même d'exposer et de démontrer un moyen de diviser un angle en trois parties égales, sans le secours du trisecteur (p. 118). Il suffit de marquer sur une règle, une longueur quelconque AB (P. VI, F. 34) ; de décrire du sommet C de l'angle donné DCE, une demi-circonférence EDB qui ait AB pour rayon, et de placer la règle, de façon que le point A soit sur le prolongement de EC, le point B sur la ligne circulaire, et que l'arête AB passe par le point D où la demi-circonférence coupe le côté CD de l'angle donné. L'angle A est alors le tiers de DCE.

« Les raisons en sont simples : DCE étant angle extérieur, par rapport au triangle ACD, vaut A + D (158), ou A + DBC, puisque le triangle BCD est symétrique. Mais, DBC étant extérieur par rapport au triangle ABC, vaut A + ACB, ou A + A, puisque BC = BA ; par *conséquent*, l'angle DCE = A + A + A ou trois fois l'angle A.

Tout ce qu'on peut dire contre l'emploi de la règle pour obtenir le tiers d'un angle, c'est qu'il ne donne pas ce tiers dans l'angle même, et qu'il faudra souvent, après avoir formé l'angle A, le reporter sur DCE, en tirant par C une parallèle à AD ; mais ce n'est pas là un grand inconvénient.

162. *Si dans un triangle* ABC (P. VII, F. 8), *un angle* A *est plus grand qu'un autre* B, *le côté* BC *opposé au premier, est plus grand que le côté* AC *opposé au second.*

Puisque l'angle A est plus grand que B, nous pouvons mener par le point A, une droite AD qui fasse avec AB, un angle DAB = B. Il en résulte un triangle symétrique ADB, et AD = DB (161). Donc, la ligne brisée CDA = CB. Or, CDA est plus grande que CA. Donc, le côté CB est aussi plus grand que le côté CA.

163. Réciproquement, *si dans un triangle, un côté* BC *est plus grand qu'un autre* AC, *l'angle* A *opposé au premier, est plus grand que l'angle* B *opposé au second* (P. VII, F. 8).

En effet, si A était moindre que B, le côté BC devrait être plus court que AC, d'après le principe précédent, et si A égalait B, les côtés BC, AC seraient de même longueur (161). Or, une chose qui ne peut être moindre qu'une autre, ni l'égaler, la surpasse nécessairement. Donc, l'angle A est plus grand que l'angle B.

164. On a souvent besoin dans les arts, de faire un triangle égal à un autre. Vous allez voir qu'il n'est pas nécessaire, pour cela, de connaître toutes les parties du triangle donné.

PROBLÈME : *Tracer un triangle dont on connaît seulement les trois côtés* A, B, C (P. VII, F. 9).

Assurons-nous d'abord que chaque côté est moindre que la somme des deux autres ; car il n'y a pas de solution possible, s'il en est autrement, attendu que deux côtés quelconques d'un triangle forment toujours une ligne brisée plus longue que le troisième. Tirons ensuite une droite DE = C, par exemple ; avec A pour rayon, décrivons un arc qui ait son centre en D ; du point E, décrivons un second arc dont B soit le rayon ; joignons à D, E, l'intersection F de ces deux arcs ; le polygone DEF sera le triangle demandé.

Le tracé serait le même, si le triangle devait être symétrique ou équilatéral, c'est-à-dire, si deux côtés A, B, ou les trois étaient égaux. Seulement, les arcs auraient même rayon.

Comme les deux arcs se coupent au-dessous de DE, ainsi qu'au-dessus, on peut toujours former deux triangles qui aient pour côtés, les trois droites A, B, C ; mais ces deux triangles sont égaux.

En effet, si l'on fait tourner DF'E sur DE, les parties d'arc qui ont D pour centre, se superposeront (93), et il en sera de même de celles qui ont leur centre en E. Le point F' tombera donc sur F.

De là ce principe : *Deux triangles sont égaux quand les côtés de l'un égalent les côtés de l'autre ;* car en employant les trois côtés du premier ou du second de ces triangles, pour en construire un troisième par le tracé précédent, on obtiendrait toujours le même triangle, sur lequel pourrait se superposer chacun des triangles donnés.

165. Problème : *Tracer un triangle dont on connaît deux côtés A, B et l'angle C formé par ces côtés* (P. VII, F. 10).

Faites un angle D égal à l'angle C, en traçant deux droites visiblement plus longues que A et B (probl. *c*, p. 32) ; portez A sur un des côtés de cet angle, de D en E ; portez B sur l'autre côté, de D en F ; tirez EF, et DEF sera le triangle demandé.

Donc, *deux triangles sont égaux, quand un angle de l'un est égal à un angle de l'autre, et que les côtés du premier angle égalent ceux du second ;* car en se servant des trois parties qui sont les mêmes dans les deux triangles, on ne pourrait faire, par le tracé précédent, que le même polygone de trois côtés, sur lequel se superposerait chacun des triangles donnés.

166. Problème : *Tracer un triangle dont on connaît deux angles A, B et le côté C qui joint les sommets de ces angles* (P. VII, F. 11).

Tirez une droite DE visiblement plus longue que C ; portez-y le côté connu, de D en E ; faites au point D, un angle égal à A, et au point E, un angle égal à B. Les côtés DF, EF de ces angles se couperont en F, si la somme de A et de B est moindre que deux angles droits, et le polygone DEF sera le triangle demandé.

Dans le cas où les deux angles donnés seraient en somme soit égaux à 180°, soit plus grands, le tracé serait impossible, puisque le troisième angle devrait être nul (157).

Donc, *deux triangles sont égaux, quand un côté de l'un est égal à un côté de l'autre, et que les angles formés par le premier côté, égalent ceux que forme le second.* La raison de ce principe est analogue à celles des deux précédens.

167. Problème : *Tracer un triangle dont on connaît deux côtés et l'angle opposé à l'un de ces côtés.*

Il y a deux cas : celui où le côté opposé à l'angle donné, est plus petit que l'autre, et celui où il est plus grand ; ce dernier cas a toujours lieu, quand l'angle donné est droit ou obtus, puisqu'alors les deux autres angles doivent être moindres, et qu'au plus grand angle se trouve opposé le plus grand côté (162).

Premier cas : On donne les côtés A, B, l'angle C opposé au côté B, et ce côté est plus petit que A (P. VII, F. 12). Il s'ensuit que l'angle C est nécessairement aigu, car il doit être moindre que l'angle opposé au côté A (163), et quel que soit ce dernier angle, tout angle plus petit ne peut pas même être droit (159).

Pour exécuter ce tracé dans ce cas, vous tirerez une droite DE; en un point D de cette droite, vous ferez un angle égal à C; sur le côté DF de cet angle, vous porterez de D en F, A le plus grand des côtés donnés; de F comme centre et avec B pour rayon, vous décrirez un arc qui, si les données sont telles que le tracé soit possible, devra couper DE en un point G; enfin, vous mènerez FG, pour former le triangle DFG.

Mais, observez que l'arc décrit de F, coupant DE en un point G, la coupera nécessairement en un second point G' (91); que FG' sera égale à FG, et que le triangle DFG' satisfera aux conditions imposées, tout aussi bien que DFG. Ces conditions ne suffisent donc pas: il faut en effet connaître encore la nature de l'angle opposé au côté A ou DF, pour savoir lequel des deux triangles DFG, DFG', on doit regarder comme résultat du tracé. Si cet angle est aigu, DFG sera le triangle demandé; s'il est obtus, c'est le triangle DFG' qu'on devra former: car l'angle FG'G est aigu comme l'angle FGG', puisque le triangle GFG' est symétrique (51), et par conséquent, l'angle FG'D opposé à DF est obtus (45).

Deuxième cas: On donne les côtés A, B, l'angle C opposé au côté B, et ce côté est plus grand que A (P. VII, F. 13).

Agissez comme dans le premier cas. L'arc décrit de F, avec B pour rayon, coupera toujours DE en deux points; mais comme FG est plus grand que FD, le point G' ne se trouvera plus entre D et G, et le triangle FDG' ne pourra pas être pris pour résultat du tracé, puisqu'il ne renfermera pas l'angle donné C.

Donc, *deux triangles sont égaux, quand deux côtés de l'un égalent deux côtés de l'autre, et que l'angle opposé au plus grand des deux premiers côtés, est égal à l'angle opposé au plus grand des deux seconds.*

Si les deux angles sont droits, il n'est pas nécessaire d'exprimer leur égalité, puisqu'elle existe nécessairement, et comme d'ailleurs le côté opposé à l'angle droit d'un triangle se nomme *hypothénuse*, nous pouvons dire que *deux triangles rectangles sont égaux*, lorsque *l'hypothénuse et un petit côté de l'un, égalent l'hypothénuse et un petit côté de l'autre.*

Les conditions d'égalité de deux triangles, doivent être retenues; car elles font éviter, dans les démonstrations, les superpositions que jusqu'ici nous avons été obligés d'opérer à chaque instant, et elles abrègent, par conséquent, ces démonstrations. En outre, elles procurent des vérifications faciles et promptes, pour une foule de tracés.

168. Deux triangles cessent d'être égaux, lorsqu'aucun côté de l'un n'a son égal parmi les côtés de l'autre, puisque les conditions d'égalité précedemment posées, exigent qu'au moins un côté ait

la même longueur dans les deux figures. Toutefois, deux triangles inégaux peuvent encore avoir les mêmes angles, comme ABC, *abc* (P. VII, F. 14), dans lesquels l'angle A = *a*, B = *b*, C = *c*, sans que le polygone *abc* puisse couvrir le polygone ABC.

Nous nommerons *côtés correspondans*, ceux qui, comme AB, *ab*, sont opposés à des angles égaux: *ac* correspondra à AC, et *bc* sera le correspondant de BC.

On appelle *triangles semblables*, pour abréger, les triangles inégaux qui se ressemblent en tout, qui sont exactement copiés l'un de l'autre. Or, il est visible que deux triangles ne peuvent se ressembler, qu'autant qu'ils ont les mêmes angles, et d'après ce qui a été dit page 80, sur la réduction des dessins, il faut, pour qu'une figure soit une copie en petit ou en grand qui puisse faire retrouver les vraies dimensions du modèle, que toutes ses lignes soient dans le même rapport avec les lignes correspondantes de ce modèle. Conséquemment, *des triangles semblables ont les mêmes angles, et leurs côtés correspondans sont proportionnels.* Par exemple, si les deux triangles ABC, *abc* sont semblables, l'angle A = *a*, B = *b*, C = *c*, et AB : *ab* :: BC : *bc* :: CA : *ca*.

Il suit de là que l'égalité des triangles n'est qu'un cas particulier de leur *similitude* ou *ressemblance ;* c'est simplement le cas où le rapport entre les côtés correspondans est 1. Ainsi, nous aurions pu nous dispenser de parler des triangles égaux, avant d'indiquer les caractères auxquels on reconnaît que deux triangles sont semblables; nous ne l'avons fait que pour décrire les tracés particuliers auxquels donne lieu l'égalité des triangles.

Il n'est pas nécessaire qu'on sache que deux triangles ont les mêmes angles et tous leurs côtés correspondans proportionnels, pour affirmer qu'ils sont semblables. Il suffit parfois de reconnaître qu'ils sont dans une certaine position, l'un à l'égard de l'autre, ou bien qu'ils ont tels angles égaux et tels côtés correspondans proportionnels. C'est ce que les principes suivans vont faire voir.

169. *Si les angles d'un triangle sont égaux à ceux d'un autre, les deux figures sont semblables.*

Cela est vrai, si de l'égalité des angles résulte que les côtés correspondans sont proportionnels (168). Soient donc les deux triangles ABC, *abc* (P. VII, F. 14), tels que l'angle A = *a*, B = *b*, C = *c*. Nous pourrons placer *bc* sur BC, de C en *b'*. Le côté *ca* prendra alors la direction CA; le point *a* tombera quelque part en *a'*, et le triangle *a'*C*b'* sera égal au triangle *abc* (165). Donc, son angle *b'* égalera B, et la droite *a'b'* se trouvera parallèle à AB (60). Il s'ensuit qu'on aura AB : *a'b'* :: AC : *a'*C ou :: BC : *b'*C (81). Or, *a'b'* = *ab*, *a'*C = *ac*, *b'*C = *bc*. On a donc aussi

AB : *ab* :: AC : *ac* :: BC : *bc*.

Puisque l'indication d'un des angles de tout triangle résulte de celle des deux autres (p. 171), il est clair que deux triangles ont les mêmes angles, quand il est reconnu que deux angles de l'une des figures égalent deux angles de l'autre. On peut donc dire que *deux triangles sont semblables, quand deux angles du petit égalent deux angles du grand.*

170. *Deux triangles sont semblables, lorsque les trois côtés de l'un sont parallèles aux trois côtés de l'autre.*

Soient les deux triangles ABC, *abc* (P. VII, F. 14 et 15), tellement placés que AB se trouve parallèle à *ab*, AC à *ac*, BC à *bc*. Les angles A et *a* ayant leurs côtés parallèles et dirigés dans le même sens (F. 14), ou en sens contraire (F. 15), sont de même indication (64). On en dira autant de B et de *b*, de C et de *c*. Par conséquent, les deux triangles ont les mêmes angles, et d'après le principe qui précède, ils sont semblables.

Remarquez que les côtés parallèles sont les côtés correspondans ou proportionnels.

171. *Deux triangles sont semblables, lorsque les trois côtés de l'un sont perpendiculaires aux trois côtés de l'autre.*

Supposons que *ab* soit perpendiculaire sur AB, *bc* sur BC, *ac* sur AC (P. VII, F. 16), et prolongeons les côtés du petit triangle, jusqu'à la rencontre de ceux du grand, en D, E, F, G, H. Les triangles FG*b*, FDB ont un angle commun F et chacun un angle droit; par conséquent, le troisième angle B de l'un égale le troisième angle *b* de l'autre (169). Les triangles EH*c*, EDC ont un angle commun E et chacun un angle droit; par conséquent, l'angle C égale l'angle E*c*H. Mais E*c*H $=c$, puisqu'ils sont opposés par le sommet (35). Donc, $C=c$, et les deux triangles ABC, *abc* renfermant deux mêmes angles, sont semblables.

172. *Deux triangles sont semblables, quand les trois côtés de l'un sont proportionnels aux trois côtés de l'autre.*

Supposons qu'on ait $AB:ab::AC:ac::BC:bc$ (P. VII, F. 14). Nous pourrons prendre sur AC, $Ca'=ac$, et sur BC, $Cb'=bc$. Nous aurons alors $AC:Ca'::BC:Cb'$, ce qui montre que la droite $a'b'$ est parallèle à AB (80). Donc, $AB:a'b'::AC:a'C$ ou $AB:a'b'::AC:ac$, puisque $a'C$ a été pris égal à *ac*. En comparant cette dernière proportion avec $AB:ab::AC:ac$, nous verrons que $a'b'=ab$. Le triangle $a'b'C$ a donc des côtés de même longueur que ceux de *abc*; ces deux figures sont donc égales (164), et par suite, elles sont les mêmes angles. Donc, $C=c$, $a'=a$, $b'=b$. Mais $A=a'$, $B=b'$ (60); donc aussi, $A=a$ et $B=b$. Ainsi, les deux triangles ABC, *abc* ont les mêmes angles et leurs côtés proportionnels; ils sont donc semblables (168).

173. *Deux triangles sont semblables, s'ils ont le même angle compris entre côtés proportionnels.*

Supposons que $C=c$ et qu'on ait $AC:ac::BC:bc$ (P. VII, F. 14).

Nous placerons bc sur BC, de C en b' ; ca prendra alors la direction CA ; le point a tombera quelque part, en a', et l'on aura AC : a'C : : BC : b'C. Donc, $a'b'$ sera parallèle à AB (80). Donc, l'angle $a' = $ A et $b' = $ B. Mais, les triangles a'Cb', abc sont égaux (165) et ont, par suite, les mêmes angles. Donc aussi, $a = $ A, $b = $ B. Ainsi, les angles du triangle ABC sont égaux à ceux de abc ; ces deux figures sont donc semblables.

Les principes relatifs aux triangles semblables doivent être comptés au nombre des plus féconds, parce que tous les polygones peuvent comme nous le verrons plus loin, se décomposer en triangles, et que cette décomposition rend plusieurs propriétés des premières figures, dépendantes de celle des secondes.

PROBLÈME : *Construire un triangle qui soit semblable à un triangle donné.*

Il suffit d'appliquer un des cinq principes précédens. D'après celui du n° 169, il faut faire sur une droite arbitraire, à l'aide du tracé décrit dans le probl. (c), page 32, deux angles qui soient égaux à deux angles du triangle donné.

D'après le principe 170, vous tirerez, à l'aide de la règle et de l'équerre, parallèlement aux trois côtés du triangle donné, des droites qui ne concourent pas toutes trois au même point.

D'après le principe 171, vous élèverez, sur les trois côtés donnés, en opérant comme dans le probl. (c), page 42, des perpendiculaires qui ne concourent pas toutes trois au même point.

D'après le principe 172, vous réduirez les côtés (appl. a, p. 80) ou vous en multiplierez la longueur, et vous opérerez comme dans le problème du n° 164, pour former le nouveau triangle.

D'après le principe 173, vous réduirez ou vous multiplierez deux des côtés donnés, puis vous recourrez au problème du n° 165, pour exécuter la nouvelle figure.

174. *La perpendiculaire* AD *à l'hypothénuse* BC, *abaissée du sommet de l'angle droit, partage tout triangle rectangle* BAC *en deux autres qui lui sont semblables* (P. VII, F. 17).

Le triangle rectangle ADB est effectivement semblable au grand triangle BAC, puisqu'ils ont l'angle B commun et chacun un angle droit (169). Il en est de même des deux triangles ADC et BAC qui ont chacun un angle droit et l'angle C commun. De plus, les deux petits triangles formés par la perpendiculaire AD, sont semblables entre eux, puisqu'ils sont semblables chacun au grand triangle BAC.

175. Delà suit que *la perpendiculaire* AD *abaissée du sommet de l'angle droit, sur l'hypothénuse, est moyenne proportionnelle entre les deux parties* BD, DC *de cette hypothénuse* (P. VII, F. 17).

Les triangles ADB, ADC étant semblables, ont leurs côtés correspondans proportionnels (168). Or, l'angle B du premier est égal à l'angle CAD du second, et l'angle C = BAD, car B n'égale ni C, ni D. Les côtés correspondans sont donc BD et DA, DA et DC, ce qui donne BD : DA : : DA : DC.

176. Il résulte encore du n° 174, que *chacun des deux petits côtés d'un triangle rectangle, est moyen proportionnel entre l'hypothénuse entière et la partie voisine, formée par la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit;* c'est-à-dire que BC : BA : : BA : BD et que CB : CA : : CA : CD (P. VII, F. 17).

Il suffit de démontrer la vérité de l'une de ces proportions. Or, le triangle ADB est semblable au triangle BAC, et les côtés correspondans sont BC et BA, BA et BD, puisque les angles égaux sont les angles droits, l'angle C et l'angle BAD. On a donc effectivement la proportion BC : BA : : BA : BD (168).

177. « Ce n'est pas à ce qui vient d'être dit sur les triangles semblables, que se bornent leurs propriétés ni les principes qu'elles fournissent; mais, comme ce que je dois ajouter est commun aux autres polygones semblables, il convient, pour éviter les répétitions et pour abréger, d'en faire le sujet d'un article particulier qui sera convenablement placé à la fin du chapitre. Je terminerai donc ce qui concerne uniquement les triangles, par quelques combinaisons de ces figures et des lignes droites, plus générales que les précédentes. »

La figure 32 (P. VI) fait voir que les axes de symétrie du triangle équilatéral (160) se coupent tous trois au même point. Nous pouvons démontrer qu'il en doit être ainsi, et qu'en général *les perpendiculaires abaissées des sommets d'un triangle quelconque* ABC, *sur les côtés, se croisent toutes trois au même point* D (P. VII, F. 18).

Les triangles CEA, CFB sont semblables, puisque leurs angles E, F sont droits et que l'angle C leur est commun; par conséquent, les côtés correspondans sont AC et BC, CE et CF et l'on a

$$CE : CF : : AC : BC.$$

Pour des raisons analogues, les triangles rectangles BGC, BEA donnent

$$BG : BE : : BC : AB,$$

et des triangles rectangles AFB, AGC, on obtient

$$AF : AG : : AB : AC.$$

Multipliant ces trois proportions (73), on trouve

$$CE \times BG \times AF : CF \times BE \times AG : : AC \times BC \times AB : BC \times AB \times AC.$$

Mais, puisque les deux termes du dernier rapport sont égaux, ceux du premier le sont aussi; on a donc

$$CE \times BG \times AF = CF \times AG \times BE,$$

c'est-à-dire que le produit de trois parties séparées, formées par les perpendiculaires, sur les côtés du triangles, est égal au produit des trois autres parties. Or, cette égalité exige que les trois perpendiculaires se croisent toutes trois au même point ; puisqu'en chacun des points A, B, C passent trois droites (86).

178. *Les droites menées des sommets d'un triangle quelconque* ABC, *aux milieux des côtés, se croisent toutes trois au même point* D (P. VII, F. 19).

Les six droites de cette figure doivent effectivement se couper trois à trois, comme celles du nº 86, puisque donnant BE = EC, CF = FA, AG = GB, elles donnent aussi

$$AG \times BE \times CF = GB \times EC \times FA,$$

produits formés chacun de trois parties séparées.

« Nous verrons au chapitre des *prismes*, une très-intéressante application de cette propriété du triangle. »

179. *Les bisectrices des angles d'un triangle quelconque* ABC, *se croisent toutes trois au même point* D (P. VII, F. 20).

Ce principe est un cas particulier de celui du probl. (*e*), p. 127.

180. Les trois points D des figures 18, 19, 20, se confondent en un seul, quand le triangle ABC est équilatéral comme DEF (P. VI, F. 32) ; car, à cause de l'égalité des obliques DE, DF, de la perpendiculaire DG, par exemple, passe par le milieu de EF et se trouve bisectrice de l'angle D (50 et 51). Par conséquent, *les perpendiculaires abaissées des sommets d'un triangle équilatéral, sur les côtés, divisent ces côtés et les angles en deux parties égales.*

181. Il résulte de là que les deux triangles rectangles DHK, DIK sont égaux (167), et que par suite, KH = KI (P. VI, F. 32). Pour une raison semblable KH = KG.

Les trois triangles DHK, FHK, EGK sont aussi égaux (165) ; conséquemment DK = FK = EK.

Vous voyez donc que les trois droites menées du point K, perpendiculairement sur les côtés d'un triangle équilatéral, sont égales entre elles, et qu'il en est de même de celles qui aboutissent aux trois sommets. C'est pour cela qu'on dit que *l'intersection des axes de symétrie d'un triangle équilatéral, est le* CENTRE DE FIGURE *de ce triangle.*

En général, *le centre de figure d'un polygone, est le centre de la circonférence qui passerait par tous les sommets ;* de sorte qu'un polygone n'a point de centre de figure, quand les sommets ne peuvent se trouver tous sur une même circonférence.

Quadrilatères.

182. Les polygones qui ont quatre côtés, sont nommés *quadrilatères.* Chacun de ces quatre côtés coupant celui qui le suit à

droite, il en résulte quatre angles : ainsi, un quadrilatère ABCD (P. VII, F. 21), a autant de sommets que de côtés.

Les droites AC, BD qui joignent les sommets opposés, sont appelées *diagonales*. Il s'ensuit que chacune des deux diagonales divise le quadrilatère en deux triangles.

Les quatre angles d'un quadrilatère font en somme quatre angles droits; car les angles des deux triangles ABC, ACD forment les angles du quadrilatère, et la somme des angles de chaque triangle vaut deux angles droits (157).

Pour qu'on puisse déterminer complètement un quadrilatère, pour qu'il ne reste rien d'arbitraire dans la construction d'un tel polygone, il faut connaître cinq des choses qu'il présente : côtés, angles, diagonales, et parmi les cinq choses connues, doivent se trouver deux côtés au moins.

183. Plusieurs quadrilatères sont remarquables pour leur forme: aussi leur a-t-on donné des noms particuliers.

TRAPÈZE : Quand un quadrilatère ABCD a deux de ses côtés parallèles (P. VII, F. 22), on l'appelle *trapèze*. Les côtés parallèles AB, CD sont dits les *bases* du trapèze: AB est *la base supérieure*, CD est *la base inférieure*. Une perpendiculaire AG abaissée d'un point quelconque de l'une des bases, sur l'autre, est la hauteur du trapèze.

La droite EF *menée parallèlement aux bases d'un trapèze et à la même distance de l'une et de l'autre, est égale à la demi-somme de ces bases.*

Puisque EF est autant éloignée de AB que de CD, les trois parallèles sont équidistantes (p. 61), et par conséquent, si l'on tire AG, BK perpendiculairement à l'une d'elles, on aura GH = AH, BI = IK (47). Il s'ensuit que EH est la moitié de DG et IF la moitié de KC, comme AH est la moitié de AG et BI la moitié de BK (81). Mais, HI est égale à AB et à GK ; ces trois droites sont des parallèles comprises entre parallèles (65). HI est donc la moitié de la somme des lignes AB, GK, et par suite, EF est égale à la demi-somme des bases AB, CD.

Nous ferons remarquer que EF passe par le milieu de chacun des côtés non parallèles du trapèze ; ce qui résulte de la division des concourantes AD et AG, BC et BK en parties proportionnelles, par les parallèles EF, CD (78).

184. *Dans tout trapèze* ACFE (P. III, F. 25), *les milieux des bases, le croisement* D *des diagonales et le concours* B *des côtés non parallèles, sont quatre points en ligne droite.*

Ce principe est absolument le même que celui du n° 87 ; les énoncés seuls diffèrent.

185. Le trapèze est dit *rectangulaire*, lorsqu'un des côtés non parallèles est perpendiculaire sur les bases, comme AD (P. VII, F. 23).

Le trapèze est *symétrique*, si les deux côtés non parallèles font des angles égaux avec chacune des deux bases. Ainsi le quadrilatère ABCD (P. VII, F. 24), dont les angles A et B, C et D sont égaux, est un trapèze symétrique, parce que la perpendiculaire EF menée par le milieu E de AB, partage la figure en deux parties superposables par rabattement (93). En effet, si nous faisons tourner EBCF sur EF, B tombera sur A, BC sur AD, FC sur FD, et par conséquent, C sur D.

Il s'ensuit que *l'axe de symétrie d'un trapèze symétrique, est la perpendiculaire abaissée du milieu de l'une des bases, sur l'autre.*

Il s'ensuit encore qu'*il y a égalité entre les côtés non parallèles d'un trapèze symétrique.*

PROBLÈME : *Tracer un trapèze symétrique.*

Trois choses suffisent, pour particulariser un trapèze symétrique, tandis qu'il en faut généralement cinq, pour déterminer un quadrilatère; c'est que deux conditions à remplir résultent du nom même de la première figure : les bases doivent être parallèles, et les deux autres côtés, égaux.

Si, par exemple, les bases et la hauteur sont données, élevez une perpendiculaire au milieu de l'une CD (P. VII, F. 24); portez la hauteur de cette perpendiculaire, de F en E; menez par E, une parallèle à CD; portez la moitié de l'autre base de E en A et en B; puis tirez AD, BC.

Si vous connaissez une base, la longueur des côtés égaux et la hauteur, vous agirez comme tout-à-l'heure, jusqu'au tracé de la parallèle, puis vous la couperez par deux arcs décrits de C et de D, avec la longueur des côtés égaux.

Si l'on donne les deux bases et la longueur des côtés égaux, cherchez le milieu F de l'une des bases; portez la moitié de l'autre de chaque côté de ce milieu; élevez des perpendiculaires par les points qui en résultent, et coupez ces droites par deux arcs décrits comme précédemment.

APPL. (*a*) : Les *mansardes*, toits qu'on appelle ainsi parce qu'ils ont été inventés par l'architecte *Mansard*, présentent du côté de la croupe, un trapèze symétrique ABCD (P. VII, F. 25), surmonté d'un triangle symétrique CDE. Le profil ou la coupe en travers de ces toits, a aussi cette forme : le trapèze et le triangle y ont le même axe de symétrie.

APPL. (*b*) : Les tenons et les mortaises *en queue d'aronde* sont taillés selon le contour d'un trapèze symétrique.

APPL. (*c*) : Les *clavaux* d'une plate-bande en pierres de taille ont des trapèze pour parement de tête et pour parement de queue, afin que ces clavaux fassent *coins* et qu'ils ne puissent glisser les uns sur les autres. Les deux clavaux extrêmes ou *coussinets* présentent des trapèzes rectangulaires A, A (P. VII, F. 26); celui du milieu ou la *clef* B, a pour parement, un trapèze symétrique ; les trapèzes des autres n'ont rien de remarquable.

Appl. (*d*) : Il y a de nouveaux violons, inventés par M. Félix *Savart*, dont les deux tables sont des trapèzes symétriques. Cette simplicité de forme les rend bien moins difficiles à construire que les violons ordinaires, et il en résulte qu'ils coûtent moins cher.

186. Parallélogramme : Le quadrilatère qui a ses quatre côtés parallèles deux à deux, se nomme *parallélogramme*. Si donc AB est parallèle à CD, et AD à BC, ABCD est un parallélogramme (P. VII, F. 27). D'après cette définition, *les angles opposés* A *et* C, B *et* D *d'un parallélogramme, sont égaux entre eux* (64). De plus, *les angles* A, B *qui ont leurs sommets sur le même côté, valent en somme deux angles droits*; car ce sont des angles internes du même côté (62). Enfin, *les côtés parallèles sont égaux*, puisque ce sont des parallèles comprises entre parallèles (65), et par conséquent, *une diagonale* AC *ou* BD *partage le parallélogramme en deux triangles égaux* (164 ou 165).

187. *Les diagonales* AC, BD *d'un parallélogramme, se coupent en deux parties égales, autrement leur point de rencontre* F *est le milieu de chacune d'elles* (P. VII, F. 27).

Dans les deux triangles AFD, BFC, AD = BC; l'angle DAF = BCF, ce sont des angles alternes-internes (58) ; l'angle ADF = CBF pour la même raison. Ainsi, un côté et deux angles sont les mêmes dans les deux figures ; les triangles sont donc égaux (166), et par conséquent, les côtés correspondans ont même longueur. Donc AF = CF et BF = DF.

188. *Les deux diagonales d'un parallélogramme sont généralement inégales, et la plus grande est celle* BD *qui est opposée aux angles obtus* A *et* C (P. IV, F. 27).

Puisque le point F est le milieu de BD, FG parallèle à BC passera par le milieu G de DC (78), et comme l'angle FGC, l'égal de ADC (60), sera aigu, la droite FH perpendiculaire sur CD, la rencontrera entre G et C. DH sera donc plus grande que HC ; par conséquent, l'oblique FD est plus grande que l'oblique FC (49). Donc, BD double de FD, est plus longue que AC double de FC.

189. Trois choses suffisent pour déterminer complètement un parallélogramme, attendu que le parallélisme des côtés opposés impose deux autres conditions à remplir (182) ; mais au nombre des choses connues, doivent se trouver deux côtés concourans.

Il s'ensuit que *deux parallélogrammes sont égaux, lorsqu'un angle ou une diagonale et deux côtés concourans sont les mêmes dans les deux polygones*.

Il est d'ailleurs facile de voir que la superposition se fait alors exactement. Supposons l'angle C = G, CD = GH, CB = GF

(P. VII, F. 28). Si nous mettons GH sur CD, GF prendra la direction CB et le point F tombera sur B ; HE parallèle à GF, comme DA l'est à CB, s'appliquera sur DA ; EF parallèle à GH, comme AB l'est à CD, s'appliquera sur AB ; et par suite, le sommet E se trouvera sur A.

L'égalité des côtés ne suffit pas, pour que celle des parallélogrammes ait lieu ; car si des sommets A, B (P. VII, F. 29), on décrit deux arcs, avec les côtés AD, BC pour rayons, tous les rayons parallèles de ces arcs donneront des parallélogrammes qui auront des côtés de même longueur, sans avoir les mêmes angles, et qui, par conséquent, ne pourront pas se superposer. En effet, AE, BF rayons égaux et parallèles, rendent EF égal et parallèle à AB (66) ; donc, AEFB est un parallélogramme (186) qui a mêmes côtés que ABCD, sans avoir les mêmes angles.

Il ne suffit pas non plus qu'un côté et deux angles soient les mêmes dans deux parallélogrammes, pour que ces polygones soient égaux ; car les deux parallélogrammes ABCD, ABEF (P. VII, F. 30) ont le même côté AB et les mêmes angles, bien que le dernier soit tout-à-fait renfermé dans le premier.

Problème : *Tracer un parallélogramme dont on connaît un angle* A *et les deux côtés* B, C *qui forment cet angle* (P. VII, F. 31).

Tirez une droite DE=C, par exemple ; à l'une D des extrémités, faites sur DE un angle égal à l'angle donné A (probl. c, p. 32) ; sur le second côté de cet angle, portez B de D en F ; du point F comme centre d'un rayon C, décrivez un arc ; du point E avec B pour rayon, décrivez un second arc qui coupe le premier en G, dans l'angle EDF ; enfin, joignez G à E et à F. La figure DEGF sera le parallélogramme demandé ; car, si l'on mène EF, le triangle DEF=GFE (164) ; d'où il suit que l'angle FEG=DFE, que l'angle EFG=DEF, et que EG, FG sont parallèles à DF, DE (59). Or, le polygone qui a ses côtés parallèles deux à deux, est un parallélogramme (186).

190. Deux polygones peuvent renfermer le même espace, peuvent avoir la même *superficie*, sans être superposables. On dit dans ce cas, qu'ils sont *équivalens*. Ainsi, deux parallélogrammes peuvent être équivalens et pourtant inégaux. Mais, afin de saisir le caractère auquel on reconnaît cette équivalence, il faut savoir qu'on entend par *base* d'un parallélogramme, le côté sur lequel on abaisse une perpendiculaire, d'un point appartenant au côté parallèle. La perpendiculaire a elle-même un nom particulier : elle s'appelle *la hauteur* du parallélogramme. Ainsi, la base du parallélogramme ABCD est CD (P. VII, F. 32), quand on prend EF pour hauteur.

Deux parallélogrammes de même base et de même hauteur sont équivalens.

En effet, quels que soient les deux parallélogrammes, nous pourrons mettre la base de l'un sur la base CD de l'autre. Alors, le côté opposé HI se trouvera parallèle à CD, et comme les hauteurs EF, IK sont égales, HI sera sur le prolongement de AB. Les deux parallélogrammes seront donc placés comme ABCD ; CDHI. Cela posé, les triangles ADH, BCI sont égaux (165) ; car AD=BC, DH=CI et l'angle ADH=BCI (64). Retranchant de chaque triangle, le triangle BLH qui leur est commun, on a les polygones ADLB, CLHI qui se trouvent équivalens. Or, si l'on ajoute à chacun, le triangle CDL, les deux sommes seront équivalentes aussi, et comme l'une de ces sommes est le parallélogramme ABCD, que l'autre est le parallélogramme CDHI, ces deux parallélogrammes sont équivalens.

191. *On peut toujours construire sur un triangle donné* ABC, *un parallélogramme qui ait même base* BC *et même hauteur* AD (P. VII, F. 33).

Il suffit pour cela de mener par le sommet C, une droite parallèle à BA, et par le sommet A, une parallèle à BC. Ces deux parallèles se rencontrent en un point E, et forment le polygone ABCE qui est un parallélogramme (180) de même base BC et de même hauteur AD que le triangle.

Il suit de là et du n° 186, que *tout triangle est la moitié d'un parallélogramme de même base et de même hauteur.*

192. *Deux triangles de même base et de même hauteur sont équivalens ;* car ils sont chacun la moitié d'un parallélogramme de même base et de même hauteur, et comme ces deux parallélogrammes ont des bases égales et des hauteurs égales, ils sont équivalens ; or, les moitiés de deux choses équivalentes doivent être équivalentes.

Deux triangles ABC, FBC (P. VII, F. 33) qui ont même base BC et dont les troisièmes sommets A, F se trouvent sur une parallèle EF à cette base ; ont nécessairement aussi même hauteur ; car celle de chacun est la distance des deux parallèles (67). On peut donc dire aussi que *deux triangles de même base, compris entre parallèles, sont équivalens.*

Problème : *Faire un triangle qui soit équivalent à un autre donné* ABC (P. VII, F. 33).

Menez par un sommet A, une parallèle AF au côté opposé BC, et joignez les extrémités B, C de ce côté à un point quelconque F de la parallèle. Les triangles FBC, ABC seront équivalens, parce qu'ils auront même base BC et seront compris entre parallèles.

Si les triangles devaient être séparés, il faudrait abaisser une perpendiculaire AD du sommet A, sur le côté opposé ; puis, en un point quelconque d'une droite égale à BC, élever une perpendiculaire égale à AD, pour avoir le troisième sommet du triangle demandé.

APPL. (*a*) : Le parallélogramme joue un grand rôle dans la mécanique. Si deux efforts sont exercés sur un même point A (P. VII, F. 34), selon deux directions différentes AB, AC, et qu'ils soient proportionnels à deux parties AD, AE de ces directions, l'effort total est dirigé selon la diagonale AF du parallélogramme ADFE construit sur DAE, et de plus le rapport de cet effort total à chaque effort particulier, est le même que celui de la diagonale AF au côté correspondant du parallélogramme ; de sorte que l'effort total : l'effort selon AB, par exemple :: AF : AD, proportion qui permet de déterminer l'effort total, quand on connaît les efforts particuliers (p. 74).

APPL. (*b*) : Le parallélogramme est employé lorsqu'il s'agit de transformer un mouvement de va-et-vient, selon une ligne droite, en mouvement de va-et-vient circulaire, ou réciproquement. Dans ces cas, on attache un parallélogramme ABCD (P. VII, F. 35) à un balancier AE dont l'axe de rotation est E. Les angles de ce parallélogramme peuvent changer à mesure que AE tourne autour de E, ou pendant que A et B décrivent des arcs de cercle, car il y a des articulations aux quatre sommets. Il est vrai que le mouvement circulaire de AE tend à écarter le point D, de la direction DF ; mais le sommet C étant lié à un point fixe G, au moyen d'une barre GC, se trouve obligé de tourner autour de G, ce qui tend à écarter D de la droite DF, dans un sens contraire au premier écartement, et il en résulte que D peut suivre FF' pendant un certain temps. Si donc la tige d'un piston de machine à vapeur est attachée en D et dirigée suivant FF', l'extrémité du balancier pourra parcourir un arc AA'' et le piston une longueur DD'', sans que cette tige dévie de sa direction.

« Ordinairement, on sait quelles doivent être la course verticale du piston et la longueur du balancier EA. Il reste à trouver la longueur du contre-balancier CG et la position de l'axe G ; on y parvient en construisant l'épure du mécanisme, soit en grand, soit d'après une échelle. »

« Pour faire cette épure, vous tirerez deux droites EH, EF' qui se coupent d'équerre en I ; de chaque côté de I, vous porterez la moitié de la course du piston, et par les points *d*, *d'* qui en résulteront, vous tirerez deux parallèles à EH. Ensuite, il faudra marquer le centre d'oscillation E, à une distance de I un peu plus grande que EA, et décrire de ce point, avec le rayon EA, un arc qui coupe les deux parallèles à EH. Par là seront déterminées les positions extrêmes AE, A''E du balancier. Prenez alors une longueur arbitraire, pour chaque petit côté du parallélogramme, et décrivez, avec cette longueur et du point A, un arc qui coupe FF', afin d'avoir la position la plus élevée du sommet D. Une parallèle à AD, menée par A'', vous donnera le point D'' qui sera la position la moins élevée du sommet D. »

« En effet, le rabattement de la figure I*d'*A''E sur la figure I*d*AE, montre que la charnière IE passe par le milieu de l'arc AA'A'' et par le milieu de la corde AA''; cette corde est donc perpendiculaire sur IE (93) et parallèle à *dd'* (54). Conséquemment AA''D''D est un parallélogramme (186), A''D'' = AD, et DD'' = AA'' = *dd'*. »

« Prenez maintenant une longueur quelconque AB, pour chaque grand côté du parallélogramme, et achevez cette figure (p. 185); vous obtiendrez les deux positions extrêmes C, C'' du quatrième sommet. Mais il en faut encore une intermédiaire; vous la trouverez en construisant, par exemple, le parallélogramme A'B'C'D', comme vous avez construit ABCD. Cherchez enfin le centre d'un cercle qui passe par C, C', C'', ce centre sera la position de l'axe G, et CG, la longueur du contre-balancier. Vous pourrez même mesurer l'horizontale EH, la verticale GH, et vous en servir pour placer convenablement le point G, en montant la machine. »

Appl. (*c*) : Il existe un instrument nommé *Pantographe*, qu'on a inventé pour copier mécaniquement les dessins de toute sorte, soit en petit, soit en grand, et qui est fondé sur le parallélisme constant des côtés opposés du parallélogramme. Réduit à sa plus grande simplicité, il est composé de deux grandes règles dont les arêtes intérieures sont représentées par les droites concourantes AB, AC (P. VII, F. 36), et de deux petites règles dont les arêtes DE, DF forment les deux autres côtés d'un parallélogramme AEDF qui a des articulations à ses quatre sommets.

« Supposez qu'avec cet instrument, on veuille réduire un dessin de telle façon, que toutes les lignes de la copie soient moitié des lignes correspondantes du modèle. On marque sur l'une des règles, sur AB par exemple, un point B tel que BE soit la moitié de BA, et l'on fixe ce point sur le tableau, de manière que l'instrument puisse tourner autour de B. Le crayon qui doit tracer la copie en petit, se place en un point quelconque G de DE, et la pointe qui doit suivre les traits du modèle, se met à l'intersection H de AC et de la droite BG, intersection qu'on peut trouver en appliquant une règle sur B et sur G ou en tendant un fil qui passe par ces deux points. Les choses ainsi disposées, si, en poussant convenablement la règle AC, on fait parcourir à la pointe, je suppose, la droite HH', le crayon tracera une droite GG' qui se trouvera parallèle à HH' et en sera la moitié. »

« En effet, décrivons un arc, de B, avec un rayon BA; décrivons de H', avec un rayon HA, un second arc qui coupe le premier en A'; BA'H' sera la nouvelle position du pantographe. Or, dans le passage de la première position à celle-ci, les angles seuls auront changé : les côtés du parallélogramme n'auront pas cessé d'être parallèles et les longueurs ne se seront point altérées. Par conséquent, BE' est la moitié de BA'; E'G' qui vaut EG, est la moitié de A'H', comme EG est la moitié de AH (81), et l'on a E'G' : A'H' :: BE' : BA', ce qui nécessite que B, G' H' soient en ligne droite et que BG' soit moitié de BH' (79). Mais, puisque BE est la moitié de BA, BG est la moitié de BH, les droites BH, BH' sont donc coupées en parties proportionnelles par GG' et

HH'; conséquemment, ces deux dernières droites sont parallèles, et GG' est la moitié de HH'. »

« Il est visible d'après cette démonstration, que si la pointe H suivait un arc de cercle, le crayon G tracerait un arc de cercle équidistant (132), qui serait moitié du premier, et qu'en général la ligne tracée par le crayon, est équidistante avec la ligne suivie par la pointe, ou que ces deux lignes ont même forme et que le rapport de leurs longueurs est égal à celui de BE à BA. Si donc on veut réduire au tiers, au quart, au dixième, etc., il faudra que BE soit le tiers, le quart, le dixième, etc., de BA. »

« On comprendra sans doute fort aisément que pour copier en grand, pour doubler par exemple, il faudrait que la pointe fût placée en G et le crayon en H : la ligne HH' que tracerait ce crayon, pendant qu'on ferait suivre à la pointe directrice la ligne GG', se trouverait équidistante avec cette dernière et en serait le double. »

« Ordinairement, le pivot B du pantographe est implanté dans une masse de plomb qui se place sur le tableau et que le jeu de l'instrument ne peut jamais faire changer de position. Ce jeu est d'ailleurs rendu facile au moyen de trois petites roulettes pivotantes, placées sous les règles, une en A, une autre vers B et la troisième près de H. Le porte-crayon est façonné en bilboquet, afin qu'on puisse le charger d'un petit poids qui force le crayon à marquer d'une manière continue, et il y a des poulies de renvoi, sur lesquelles passe un fil qu'il suffit de tirer, pour soulever ce crayon et l'empêcher de tracer. »

« Enfin, on trouve sur BE et sur DE des divisions numérotées qui servent à placer le pivot et le crayon convenablement, pour opérer dans les cas ordinaires. Celles de BE ont été faites comme il suit : on a pris BE égale à la moitié de BA et l'on a écrit 2 sur la ligne B, ce qui signifie que BE est contenue 2 fois dans BA ; on a pris B'E égale au $\frac{1}{3}$ de B'A, et l'on écrit 3 sur la ligne B', ce qui signifie que B'E est contenue 3 fois dans B'A ; ainsi de suite. En outre, on a retranché de BA, la dixième partie de AE ou de BE, pour avoir la ligne B'' sur laquelle on a écrit $\frac{1}{10}$, ce qui signifie que B''E vaut $\frac{9}{10}$ de AE et B''A $\frac{19}{10}$ de AE ou que le rapport de B''E à B''A est $\frac{9}{19}$; on a retranché de BA, un neuvième de BE, pour avoir la ligne B''' sur laquelle on a écrit $\frac{1}{9}$, ce qui signifie que B'''E vaut $\frac{8}{9}$ et B'''A $\frac{17}{9}$, ou que le rapport de ces deux longueurs est $\frac{8}{17}$; ainsi de suite, jusqu'à la soustraction de $\frac{1}{3}$, qui donne le rapport $\frac{2}{5}$. »

« Pour diviser DE, on a déterminé H, en menant une droite par B et par un point G voisin de D. Ce point H a été pris pour position invariable de la pointe directrice ; des droites ont été menées par H et par les divisions de BE ; puis les points d'intersection de ces droites avec DE, ont été marqués des mêmes numéros que les points correspondans de BE. Il en résulte que s'il s'agit de copier un dessin au cinquième, il faut placer le pivot sur la division

5 de BE, et le crayon sur la division 5 de DE, la pointe directrice étant toujours en H. »

193. Losange : Le parallélogramme qui a ses quatre côtés égaux entre eux, deux angles obtus et deux angles aigus, est nommé *losange*. Ce mot était anciennement féminin; mais les géomètres ont pris l'habitude de dire *un losange*.

Puisque dans le losange ABCD (P. VII, F. 37), AB=BC, et que d'après le n° 187, AE=EC, BE est perpendiculaire sur AC (52). Donc, *les diagonales d'un losange se coupent à angles droits*.

Puisque les obliques AB, BC sont égales et que BE est perpendiculaire sur AC, les angles EBA, EBC *sont égaux* (51). On verrait de même que ECB=ECD, que EDC=EDA et que EAD=EAB. Donc, *les diagonales d'un losange sont les bisectrices de ses angles*.

Enfin, comme il suit de ce qui vient d'être, que le triangle BCD peut couvrir BAD, par rabattement, et qu'il en est de même de ABC à l'égard de ADC, *les diagonales d'un losange sont ses axes de symétrie* (93).

D'après le principe 187, les axes de symétrie d'un losange se coupent mutuellement en deux parties égales. La même chose a lieu pour toutes les droites qui passent par E et se terminent aux côtés du losange : par exemple, le point E est le milieu de la droite quelconque FG.

Pour démontrer qu'il en est ainsi, nous mènerons EH de manière que l'angle DEH=DEF; cette droite couvrira EF, si l'on opère le rabattement, au moyen de la charnière BD. Donc EF=EH. Mais, puisque les angles DEH, DEF sont égaux, leurs différences à 90° sont égales, ce qui donne CEH=AEF ou CEH=CEG (35). Si donc on fait tourner ABC sur AC, EG viendra couvrir exactement EH. Par conséquent, EF, EG ont même longueur que EH, et sont égales.

Ainsi, *l'intersection des axes de symétrie du losange est un* CENTRE DE SYMÉTRIE, c'est-à-dire qu'en ce point, il y a symétrie pour toutes les droites du polygone qui s'y croisent.

194. En général, *il faut, pour que l'intersection des axes de symétrie d'un polygone soit centre de symétrie, que ces axes se coupent d'équerre deux à deux*; car c'est seulement alors que les deux parties de l'un peuvent se superposer exactement, quand on fait tourner sur l'autre, pour opérer un rabattement.

Le centre de symétrie n'est pas toujours centre de figure, comme le montre l'exemple du losange dont les quatre sommets ne peuvent se trouver à la fois sur une circonférence décrite de E (P. VII, F. 37).

Le centre de figure n'est pas non plus toujours centre de symétrie. Dans le triangle équilatéral, par exemple, le centre de figure K (P. VI, F. 32), n'est pas centre de symétrie, attendu que les axes ne s'y coupent pas par le milieu, et qu'ils ne se rencontrent pas d'équerre.

Probl. (*a*) : *Tracer un losange dont le côté est donné* (P. VII, F. 38).

Marquez deux points A, B dont la distance soit moindre que le double du côté donné C. Puis de chacun de ces points, avec C pour rayon, décrivez un arc, et joignez A, B aux intersections D, E des deux arcs. La figure ADBE sera un losange, parce que ses quatre côtés seront égaux.

Ce tracé montre qu'une foule de losanges différens peuvent avoir le même côté. Mais vous ne pourriez plus former qu'un seul losange qui satisfît aux conditions imposées, si l'on vous donnait un angle et la longueur du côté : dans ce cas vous emploieriez le procédé du problème de la page 185.

La solution est alors unique, par la raison que le parallélisme des côtés opposés et l'égalité des côtés concourans, joints aux deux conditions du problème, font les cinq qu'exige la détermination complète d'un quadrilatère (182).

Probl. (*b*) : *Tracer un losange dont les diagonales sont données* (P. VII, F. 37).

Tirez une droite AC égale à l'une des diagonales ; élevez une perpendiculaire au milieu de AC ; menez par C, une parallèle à cette perpendiculaire ; portez-y l'autre diagonale, de C en I ; tirez AI, pour trouver le point B ; rapportez ED de E en D, et joignez deux à deux les quatre points A, B, C, D ; vous aurez l'unique solution du problème.

La figure ABCD sera un losange, parce que ses diagonales se couperont d'équerre et par le milieu. D'ailleurs, BD = CI diagonale donnée, puisque BE est moitié de CI, comme AE est moitié de AC (81).

Remarquez que ce tracé remplit réellement cinq conditions : les diagonales ont chacune la longueur voulue, elles sont d'équerre, et le milieu de l'une est sur l'autre.

Appl. (*a*) : Le losange est fréquemment employé dans les arts, pour sa régularité et sa grace : on le rencontre souvent dans les boiseries des appartemens, sur les meubles, dans les treillis des jardins, dans les grilles en fer, etc., etc. Les Romains donnaient quelquefois la figure du losange à leurs pierres et à leurs briques ; ils appelaient *ouvrages en filet*, les murs qu'ils contruisaient avec de tels matériaux.

Appl. (*b*) : En mécanique, on se sert du losange pour changer un mouvement rectiligne de va-et-vient qui se fait dans un sens, en un mouvement pareil dans un sens perpendiculaire au premier. Il existe un jouet d'enfant qui présente cette application. Supposez une articulation ou charnière à chacun des quatre sommets A, B, C, D (P. VII, F. 39). Si vous rapprochez les points E, F situés à la même distance de C, sur les prolongemens des côtés BC, DC du losange ABCD, et si vous les rapprochez également de G milieu de EF, de manière qu'ils arrivent en E', F' sur la droite EF, le sommet C se transportera en un point C' du prolongement de GC, et le sommet A, en A' sur le même prolongement, par suite de la diminution des angles C, A et de l'augmentation des angles B, D. En remettant les points E, F dans leur première position, vous ramenerez A' en A. »

« Il est aisé de reconnaître qu'il en doit être ainsi. Puisque CE=CF et que EG=GF, CG est perpendiculaire au milieu de EF (52) et divise l'angle ECF en deux parties égales (51). Mais, la diagonale CA du losange divise aussi BCD ou ECF en deux parties égales; donc CG est le prolongement de AC. Cela posé, il est visible que la perpendiculaire au milieu de E'F' se confondra avec CG, puisqu'elles auront le point G commun; donc, CG divisera en deux parties égales, comme cette perpendiculaire, le nouvel angle E'C'F'; donc, le sommet C' sera sur le prolongement de CG, ainsi que la nouvelle diagonale A'C' qui divise aussi E'C'F' en deux parties égales. Donc enfin, A et C chemineront sur la droite A'G perpendiculaire à la direction EF des mouvemens qu'on imprime aux points E, F. »

Appl. (*c*) : Le même appareil peut aussi être employé pour changer de petits mouvemens circulaires alternatifs, c'est-à-dire qui ont lieu tantôt dans un sens et tantôt dans un autre, en petits mouvemens rectilignes pareillement alternatifs et perpendiculaires à la corde EF du plus grand arc d'oscillation. Il suffit, pour cela, de rendre fixe le point C: alors E, F décriront des arcs de cercle dont le centre sera en C, et le point A n'en cheminera pas moins selon CA'.

195. Rectangle. Le parallélogramme dont les quatre angles sont droits et les côtés concourans, inégaux, est nommé *rectangle*. Ainsi, le quadrilatère ABCD est un rectangle (P. VIII, F. 1), parce que les angles A, B, C, D sont droits et que le côté AB est plus grand que le côté BC qu'il rencontre.

Les diagonales AC, BD *d'un rectangle sont de même longueur;* car les triangles rectangles ADC, BCD sont égaux (165), et par suite l'hypothénuse AC de l'un égale l'hypothénuse BD de l'autre.

Problème : *Construire un rectangle dont les côtés sont donnés* (P. VIII, F. 1).

Tirez deux droites qui se coupent d'équerre; à partir de leur intersection A, portez sur l'une, AB le plus grand des côtés connus, et sur l'autre, AD le plus petit; puis par les points B, D, tracez des parallèles à AD, AB. Les quatre angles du quadrilatère ABCD seront droits et cette figure sera un rectangle.

On peut suivre aussi le procédé qui a été donné pour la construction du parallélogramme (p. 185).

Deux choses suffisent, comme vous voyez, pour déterminer un rectangle, et en effet, le parallélisme des côtés opposés et la perpendicularité des concourans, sont trois conditions à remplir qui complètent les cinq conditions nécessaires à la détermination d'un quadrilatère (182).

196. *Un rectangle a deux axes de symétrie parallèles à ses côtés concourans :* ce sont les droites EF, HI (P. VIII, F. 1) qui joignent les milieux des côtés opposés (80). Effectivement, ADFE, CDIH sont des rectangles et peuvent se rabattre sur BCFE, BAIH (93).

Le point G, intersection des diagonales, est aussi celle des axes de symétrie ; car G est le milieu de chaque diagonale (187), et les deux axes de symétrie passent nécessairement par ce point, puisqu'ils passent l'un par le milieu E de AB, l'autre par le milieu H de BC (78).

L'intersection G *des axes de symétrie et des diagonales d'un rectangle, est à la fois centre de symétrie et de figure :* Elle est centre de symétrie, parce que les axes se coupent d'équerre, comme les côtés concourans (194) ; elle est centre de figure, parce que l'égalité de GA, GB, GC, GD fait qu'une circonférence décrite de G, avec GA, passerait par les quatre sommets du rectangle (5).

197. *Le rapport de deux rectangles* ABCD, EFGH *qui ont même hauteur* AD *ou* EH, *est égal à celui de leurs bases* CD, GH (P. VIII, F. 2).

Supposons qu'on ait CD : GH :: 3 : 2 ; si l'on partage CD en trois parties égales et GH en deux parties égales, les premières auront même longueur que les secondes. Par les points de division I, K, L, soient élevées IM, KN, LO perpendiculairement sur les bases CD, GH ; il en résultera les rectangles ADIM, IKNM, CKNB, HLOE, LOFG dont les bases seront égales et qui auront même hauteur. Ces cinq rectangles seront donc équivalens (190). Or, ABCD en contiendra trois, EFGH en contiendra deux ; le petit rectangle sera donc les deux tiers du grand, et l'on aura ABCD : EFGH :: 3 : 2. On sent bien qu'il en serait de même pour tout autre rapport des bases.

198. Nous concluons de là que *le rapport de deux parallélogrammes ou de deux triangles de même hauteur, est égal à celui de leurs bases ;* car le parallélogramme est équivalent au rectangle de même base et de même hauteur ; le triangle est la moitié d'un rectangle, quand les bases sont égales ainsi que les hauteurs, et les moitiés de deux choses ont le même rapport que ces choses.

199. *Le rapport de deux rectangles quelconques* ABCD, DEFG (P. VIII, F. 3) *est égal à celui des produits de leurs bases* DC, DG

multipliées chacune par la hauteur correspondante; c'est-à-dire que ABCD : DEFG : : CD $\times$ AD : DG $\times$ DE, ces lignes étant exprimées en nombres, au moyen d'une même mesure.

On peut toujours placer les deux rectangles, de manière que la hauteur DE de l'un soit le prolongement de la base CD de l'autre. On peut aussi prolonger les côtés AB, EF, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent; il en résulte un troisième rectangle ADEH qui a même hauteur AD que ABCD et aussi même hauteur DE que DEFG, car il est visible qu'on peut prendre, pour hauteur d'un rectangle, indifféremment l'un ou l'autre de ses côtés inégaux. D'après cela et en vertu du n° 197, on aura

$$\text{ABCD : ADEH :: CD : DE}$$
$$\text{ADEH : DEFG :: AD : DG}$$

Multipliant, nous obtiendrons (73)

$$\text{ABCD} \times \text{ADEH : ADEH} \times \text{DEFG :: CD} \times \text{AD : DE} \times \text{DG.}$$

Divisant les deux termes du premier rapport par ADEH, ce qui ne le change pas, on obtient enfin

$$\text{ABCD : DEFG :: CD} \times \text{AD : DG} \times \text{DE.}$$

200. Le raisonnement du n° 198 s'applique encore ici, et par conséquent, *le rapport de deux parallélogrammes quelconques ou de deux triangles, est égal à celui des produits de leurs bases multipliées chacune par la hauteur correspondante.*

PROBLÈME : *Tracer sur une droite donnée* AB, *un rectangle qui soit équivalent à un rectangle donné* CDEF (P. VIII, F. 4).

Cherchez une quatrième proportionnelle aux droites AB, CD et DE (probl. *b*, p. 78); elle sera la hauteur du rectangle demandé. Il ne s'agira plus que d'élever, par les extrémités de AB, deux perpendiculaires AG, BH à cette droite; de les faire égales à la hauteur trouvée, et de joindre leurs deux autres extrémités par une droite GH. Le rectangle ABHG sera équivalent au rectangle CDEF.

En effet, AB : CD : : DE : AG, puisque le côté AG est égal à la quatrième proportionnelle; faisant le produit des extrêmes et celui des moyens, on obtient AB$\times$AG$=$CD$\times$DE (70). Mais, le rapport de deux rectangles est égal à celui de leurs bases multipliées chacune par la hauteur correspondante (199). On a donc aussi ABHG : CDEF : : AB$\times$AG : CD$\times$DE, et parce que le second rapport est 1, le premier est 1 aussi, d'où il suit que la superficie de ABHG équivaut à celle de CDEF.

Si la position du rectangle demandé est indifférente; on peut résoudre le problème sur le rectangle donné CDEF (F. 5). Prolongez un des côtés, EF par exemple, et portez-y la droite donnée, de F en B; joignez B à C, et menez par E, une parallèle à BC. Vous trouverez ainsi FG, pour la quatrième proportionnelle nécessaire, car FB : FE : : FC : FG (79); vous n'aurez donc plus qu'à tracer GH parallèle à FB, et BH parallèle à FG, pour achever le rectangle demandé BFGH.

Appl. (*a*): *Le rectangle est la figure qu'on donne ordinairement aux* faces des pierres taillées, des briques, des pièces de charpenterie, d'une foule de produits en fer, en bois, en verre, en carton, en tissu, etc., etc. Une maison régulière ou chacune de ses parties principales, présente presque toujours un rectangle pour projection horizontale, pour son plan par terre. Une route bien droite, une portion rectiligne de canal sont de grands rectangles. Il est donc très-nécessaire d'étudier les propriétés dont nous venons de nous occuper.

Appl. (*b*) : En faisant passer un trait de scie selon l'une des diagonales d'un rectangle, on obtient deux équerres qui sont très-justes ou dont les angles sont vraiment droits, si les petits côtés du rectangle ont été tracés avec exactitude, perpendiculairement aux grands. C'est ainsi que se font presque toujours les équerres de dessinateur.

201. Carré : Le parallélogramme ABCD (P. VIII, F. 6) dont les quatre angles sont droits, comme ceux du rectangle, et dont les quatre côtés sont égaux, comme ceux du losange, est appelé *carré*. Les propriétés du carré doivent donc participer de celles du rectangle et de celles du losange. Ainsi, nous pouvons établir sans autre démonstration, les principes suivans :

Les droites FG, HI qui joignent les milieux des côtés opposés d'un carré, ou plus simplement *les lignes milieux d'un carré, sont des axes de symétrie* (196).

L'intersection E *des diagonales d'un carré, est un centre de symétrie et de figure.*

Les diagonales AC, BD *d'un carré, ont même longueur, se coupent à angles droits et sont des axes de symétrie* (193).

Donc, *le carré a quatre axes de symétrie qui le divisent en huit triangles rectangles égaux* (167).

Probl. (*a*) : *Construire un carré.* (P. VIII, F. 6).

Tracez deux droites AC, BD qui se coupent d'équerre; portez sur chacune, à partir de l'intersection E et des deux côtés, une même longueur arbitraire, puis joignez deux à deux les quatre points A, B, C, D que vous obtiendrez ainsi. Le quadrilatère ABCD sera un carré, puisqu'il aura des diagonales égales qui se couperont d'équerre et par le milieu.

Probl. (*b*) : *Construire un carré dont la longueur* L *des côtés est donnée* (P. VIII, F. 7).

Tracez deux droites qui se coupent d'équerre en A; décrivez de ce point et d'un rayon arbitraire, un quart de circonférence, dans un des angles droits formés; tirez la corde BC de cet arc, et portez la longueur L de B en D ; menez par D, une parallèle à BA ; la partie AE qu'elle déterminera sur AC, sera la moitié de la diagonale du carré. Vous n'aurez donc plus qu'à porter AE de A en F, en G, en H, et à joindre deux à deux, les points E, F, G, H.

Le quadrilatère EFGH sera un carré, parce que ses diagonales seront égales et se couperont d'équerre, par le milieu. D'ailleurs, le côté EF est parallèle à BD, parce que AE=AF comme AC=AB (80), et conséquemment, EF=BD ou L (65).

202. Pour entendre ce qui va suivre, il faut savoir que le produit d'un nombre multiplié par lui-même, est dit le *quarré* de ce nombre. Ainsi 7×7 ou 49 est le *quarré* de 7. Ce produit porte le nom de *quarré*, parce que, comme on le verra bientôt, il représente dans la comparaison des superficies, celle du carré qui aurait pour côté une droite contenant autant de mesures qu'il y a d'unités dans le nombre qu'on multiplie par lui-même. Mais, pour qu'il n'y ait jamais équivoque entre le *quarré* numérique et le *carré* quadrilatère, nous écrirons le premier par *qu* et le second par *c*.

Ceux qui possèdent bien le livret ou la table de multiplication, savent par cœur les carrés des 12 premiers nombres. Nous allons néanmoins les écrire, parce qu'il importe que tous ceux qui pratiquent la géométrie, puissent trouver le carré d'un petit nombre, sans la moindre hésitation.

Nombres :	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12.
Quarrés :	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100,	121,	144.

Quant aux nombres qui surpassent 12, on obtient leurs quarrés en multipliant, comme à l'ordinaire, chacun de ces nombres par lui-même.

On ne peut connaître le carré numérique d'une ligne qu'après l'avoir mesurée ; il faut donc convenir d'un signe, pour représenter le quarré d'une ligne qui n'est pas encore mesurée ou dont on ne peut, pour le moment, exprimer la longueur par un nombre. L'usage est d'écrire le chiffre 2 vis-à-vis et à droite d'un petit trait qu'on place au-dessus des lettres qui indiquent la ligne. Ainsi, le quarré de la droite AB est représenté, d'après cette convention, par $\overline{AB}^2$, ce qui se prononce : AB *quarré* ou AB *deux*. Le chiffre 2 montre qu'on pourrait écrire $AB\times AB$.

Loi de la nature (*a*) : La notion des quarrés des nombres est bien plus importante qu'il ne semble au premier aperçu, et pour le faire sentir, il nous suffira de dire que la plupart des grandes lois de la nature sont de vrais *rapports de quarrés*. Ainsi, la force qui précipite les corps vers le point milieu de la Terre, qui les fait tomber sur la surface, qui produit leurs poids, cette force qu'on nomme la *pesanteur* ou la *gravité*, agit, à l'extérieur du globe, en *raison inverse* (rapport inverse) des quarrés des distances ; c'est-à-dire qu'elle produit d'autant moins d'effet sur un corps, que ce corps est plus éloigné du point milieu de la Terre ; que le poids d'un corps extérieur deviendrait quadruple, si sa distance à ce point diminuait de moitié ; que le même poids serait neuf fois plus grand, si la distance était réduite au tiers, et ainsi de suite.

« Mais, dans l'intérieur de la Terre, la loi n'est plus la même : la gravité y agit en raison directe des distances au point milieu ; de manière qu'un corps placé à mi-chemin de la surface à ce point, pèse moitié moins qu'il ne peserait ici, et que le corps situé précisément au centre du globe, n'a aucun poids. »

Loi (*b*) : La puissance d'un aimant est aussi en raison inverse du quarré de la distance : si vous présentez à cet aimant, une aiguille de fer ou d'acier, d'abord à une certaine distance, puis à une distance quadruple, cette aiguille sera, dans le second cas, attiré 16 fois moins fortement que dans le premier.

Loi (*c*) : La clarté que répand un corps enflammé, et celle que nous devons aux astres, dépendent aussi du rapport inverse des quarrés des distances. Décuplez la distance d'une lampe à un certain objet que vous voulez éclairer, la clarté y sera cent fois plus faible qu'auparavant. Réduisez cette même distance au tiers de ce qu'elle est, une clarté neuf fois plus grande sera répandue sur l'objet.

« Il en est encore de même de plusieurs autres lois naturelles ; mais nous ne pourrions les exposer sans sortir tout-à-fait de notre sujet. Revenons donc aux propriétés du quadrilatère nommé *carré*. »

203. *Le rapport des superficies de deux carrés égale celui du quarré du côté de l'un au quarré du côté de l'autre*, ces côtés étant exprimés par des nombres, au moyen d'une commune mesure.

En effet, le rapport de deux rectangles est égal à celui des produits de leurs bases multipliées chacune par la hauteur correspondante (199), et le carré est un rectangle dont la base et la hauteur ont même longueur. Ainsi, les deux carrés de la figure 6 (P. VIII), donnent la proportion $ABCD : EFGH :: \overline{AB}^2 : \overline{EF}^2$, qui apprend que si le nombre $\overline{AB}^2$ contient neuf fois, par exemple, le nombre $\overline{EF}^2$, le grand carré contient aussi neuf fois le petit.

Le même raisonnement montre encore que *le rapport d'un rectangle et d'un carré, égale celui qui existe entre le produit de la base multipliée par la hauteur du rectangle, et le quarré du côté de l'autre quadrilatère.* Donc, pour le rectangle ABCD de la figure 2, et le carré EFGH de la figure 6, on a la proportion $ABCD : EFGH :: AB \times AD : \overline{EF}^2$.

Il est visible qu'*il en est de même pour le rapport d'un parallélogramme quelconque et d'un carré* ; car, deux parallélogrammes de même base et de même hauteur sont équivalens, le rectangle est un cas particulier du parallélogramme, et, par suite, on peut, dans la proportion ci-dessus, remplacer le rectangle par un parallélogramme de même base et de même hauteur.

204. Comme un triangle est la moitié d'un parallélogramme de même base et de même hauteur (191), on a (P. VII, F. 33).

$$ABCE : ABC :: BC \times AD : \frac{BC \times AD}{2} \text{ ou } ABCE : BC \times AD :: ABC : \frac{BC \times AD}{2}.$$

Mais, si l'on compare le carré EFGH (P. VIII, F. 6), au parallélogramme ABCE, le principe précédent donnera

$$ABCE : EFGH :: BC \times AD : \overline{EF}^2 \text{ ou } ABCE : BC \times AD :: EFGH : \overline{EF}^2.$$

Donc, à cause du rapport commun ABCE : BC×AD, il vient

$$EFGH : \overline{EF}^2 :: ABC : \frac{BC \times AD}{2} \text{ ou } EFGH : ABC :: \overline{EF}^2 : \frac{BC \times AD}{2};$$

ce qui montre que *le rapport d'un carré à un triangle, est égal au rapport qui existe entre le quarré numérique du côté de ce carré, et la moitié du produit de la base du triangle, multipliée par la hauteur*, cette base et cette hauteur étant exprimées en nombres, au moyen de la mesure employée pour trouver la longueur du côté du carré.

Si, par exemple, le côté EF est de 2 pieds, la base BC du triangle, de 4 pieds, et la hauteur AD de 5 pieds, on aura $\overline{EF}^2 = 4$, $\frac{BC \times AD}{2} = \frac{4 \times 5}{2} = \frac{20}{2} = 10$, EFGH : ABC :: 4 : 10 ; et le carré sera les quatre dixièmes ou les deux cinquièmes du triangle.

Probl. (*a*) : *Tracer un carré qui soit équivalent à un parallélogramme* ABCD (P. VIII, F. 8).

Vous trouverez le côté du carré en cherchant une moyenne proportionnelle à la base CD et à la hauteur CE du parallélogramme (p. 109). Ayant ce côté CF, vous construirez d'après le probl. *b*, (p. 195), le carré GHIK. Cette figure sera équivalente au parallélogramme ABCD; car CF étant moyenne proportionnelle à CD et à CE, donne CD : CF :: CF : CE, ou $CD \times CE = \overline{CF}^2$, et par conséquent, GHIK = ABCD, puisque le carré GHIK : ABCD :: $\overline{CF}^2$: CD×CE (203).

Probl. (*b*) : *Tracer un carré qui soit équivalent à un triangle* ABC (P. VIII, F. 9).

Partagez la base ou la hauteur du triangle, la hauteur AD par exemple, en deux parties égales; cherchez une moyenne proportionnelle à la moitié de AD et à la base BC (p. 109); puis construisez sur cette moyenne CI ou EF, le carré EFGH. Vous aurez BC : EF :: EF : $\frac{1}{2}$AD ou $BC \times \frac{1}{2} AD = \overline{EF}^2$, et par conséquent EFGH = ABC, puisque (204) EFGH : ABC :: $\overline{EF}^2$: BC × $\frac{1}{2}$AD.

PROBL. (*c*) : *Convertir un carré* ABCD *en triangle* (P. VIII, F. 10).

Prolongez un des côtés, BC par exemple ; portez BC de C en E, et tirez AE. Le triangle ABE renfermera la même superficie que le carré donné, puisque sa base BE sera double de BC base du carré, et qu'il aura même hauteur AB (204).

APPL. (*a*) : Le carré se trouve, comme le rectangle, dans une foule de produits des arts. Les deux petites faces des règles qu'on appelle *carrelets*, sont des carrés égaux. Il s'ensuit que les huit petites arètes des deux bouts sont égales entre elles et que les quatre grandes faces ont même largeur, ce qui fait qu'on peut tracer des parallèles équidistantes, en faisant tourner un carrelet sur chacune de ses longues arêtes successivement.

APPL. (*b*) : Les dés à jouer présentent un carré sur chaque face ; il en résulte que toutes les arêtes d'un dé sont égales et que ce petit corps n'a pas plus de propension à tomber sur une face que sur une autre, quand toutefois il n'est pas *pipé*, c'est-à-dire quand une de ses moitiés n'est pas plus pesante que l'autre.

APPL. (*c*) : Les cases d'un damier ou échiquier sont des carrés égaux, placés à côté les uns des autres, entre des droites parallèles AB, CD, etc., AE, FG, etc., (P. VIII, F. 11). Comme la diagonale AH partage l'angle CHF en deux parties égales (201 et 193), elle partage de la même manière l'angle IHK qui est l'opposé au sommet de CHF ; par conséquent, le prolongement de AH fait la diagonale du carré KHIL, et par suite, la diagonale de chacun des carrés qu'il traverse.

« D'après cela, la diagonale FI passe par M et par N ; de sorte que FIMN est une parallèle à AO, puisque ces lignes sont droites et qu'en outre AF est égal et parallèle à PN (66). Les droites GQ et KR sont aussi parallèles, pour la même raison ; il en est de même de GQ et de AK ; par conséquent, AK et KR ne forment qu'une seule droite. On en dirait autant des diagonales des rectangles composés de trois carrés, de celle des rectangles composés de quatre carrés, et ainsi de suite. »

« Lors donc qu'on veut planter des arbres de manière qu'ils forment des allées dans tous les sens, il faut les disposer en échiquier, en *quinconce* ; c'est-à-dire qu'il faut tracer sur le terrain, des parallèles équidistantes qui coupent à angles droits des parallèles équidistantes aussi, et autant écartées que les premières, puis planter un arbre à chaque intersection. C'est ainsi qu'ont été formées les belles allées de notre esplanade. »

APPL. (*d*) : Les cardes planes sont composées de pointes égales, implantées en quinconce sur une planchette. Il en est de même des herses, afin qu'elles divisent mieux les mottes.

APPL. (*e*) : Si vous tracez à la suite l'un de l'autre, deux carrés égaux ABCD, CDEF (P. VIII, F. 12), et que vous décriviez quatre arcs AE, BF, AB, EF qui aient pour centres, les points C, D et les intersections G, H des diagonales, vous formerez une ovale composée d'arcs de 90° (201) qui sera moins alongée que celle de la figure 28 (P. VI et page 163). Cela tient à ce que les arcs extrêmes sont plus grands, par rapport aux arcs du milieu, dans l'ovale ABFE que dans l'ovale AIKBLH.

APPL. (*f*) : Si vous tracez trois carrés de suite et que vous tiriez les diagonales non parallèles des deux carrés extrêmes, le trapèze symétrique ABCD qui en résultera, sera le plan d'une cheminée à la Rumfort (P. VIII, F. 13).

APPL. (*g*) : Le cas peut se présenter où vous ayez à entourer d'un cercle, un espace évidé ou rempli d'eau, ou présentant tout autre obstacle qui empêche soit de marquer le centre, soit de faire circuler un compas à curseur, un cordeau, etc. Voici comment vous pourrez alors tracer à fort peu près une circonférence.

« Construisez un carré ABCD (P. VIII, F. 14) dont le côté égale le diamètre du cercle, et qui renferme l'espace donné. Divisez chaque côté en douze parties égales; numérotez celles de AB, CD, en allant des extrémités au milieu, et celles de AD, BC, en allant du milieu aux extrémités; joignez ensuite chaque point de division d'un demi-côté, à celui qui porte le même numéro sur le demi-côté suivant : joignez; par exemple, le point 6 de A6, au point 6 de A1 et de B1; le point 4 de A6, au point 4 de A1; etc. Les intersections des droites 1.1 et 2.2, de 2.2 et 3.3, de 3.3 et 4.4, etc., seront les points d'une courbe très-peu différente de la circonférence qui aurait son centre au centre du carré (201) et qui toucherait les quatre côtés aux points milieux 1, 1, 6, 6. Vous n'aurez donc plus qu'à joindre ces points à la main; vous pourriez aussi y planter des pointes, des piquets, les uns un peu en dedans, les autres un peu en dehors, et faire usage d'une règle ployante engagée de champ entre ces piquets. »

Polygones.

Après les quadrilatères, viennent le *pentagone*, face limitée par cinq lignes droites qui se coupent deux à deux; l'*hexagone*, face limitée par six côtés; l'*heptagone* qui a sept côtés; l'*octogone* qui en a huit; le *décagone* qui en a dix; le *dodécagone* qui en a douze et le *pentédécagone* qui en a quinze. Les autres polygones n'ont pas de noms particuliers qui soient usités; on les distingue ordinairement, en exprimant par un nombre, combien ils ont de côtés : on dit, par exemple, *le polygone de treize côtés.*

Nous allons d'abord considérer, d'une manière générale, les polygones qu'il nous reste à étudier; ce que nous en dirons conviendra même au triangle et au quadrilatère. Viendront ensuite les tracés particuliers et les propriétés les plus importantes de quelques polygones employés dans les arts.

205. *Un polygone a toujours autant d'angles que de côtés.*

Cela résulte de ce que deux extrémités de côtés se trouvent réunies au même sommet d'angle, chaque angle étant formé par deux côtés qui se coupent; car il suit de là que le nombre des angles est égal à la moitié des extrémités des côtés, et comme chaque côté a deux extrémités, le nombre des angles doit être le même que celui des côtés.

206. *Tout polygone est partagé en autant de triangles, moins deux, qu'il a de côtés, par des diagonales menées d'un des sommets A, à tous les autres* (P. VIII, F. 15).

Il est visible, en effet, que les triangles extrêmes ABC, AEF renferment chacun deux côtés du polygone, et que tout autre triangle n'en renferme qu'un. Par conséquent, si l'on ne compte pas les côtés AB, AF, il y aura autant de triangles que de côtés restans, ou bien il y en aura autant, moins deux, que le polygone a de côtés. Ainsi, le polygone ayant six côtés, est partagé en quatre triangles.

207. *La somme de tous les angles intérieurs d'un polygone est égale à autant de fois deux angles droits, qu'il reste de côtés quand on ôte 2 de leur nombre total* (P. VIII, F. 15).

L'angle A du polygone se trouve partagé entre tous les triangles, l'angle B appartient au triangle extrême ABC, l'angle C est partagé entre les triangles ABC et ACD; il en est de même des angles suivans, à l'égard de ACD et des autres triangles; enfin, l'angle F fait partie du triangle extrême AEF. Donc, la somme des angles du polygone, est égale à la somme des angles des triangles. Or, la somme des angles de chaque triangle vaut deux angles droits (157), et il y a autant de triangles moins deux, que de côtés (206). Donc, pour avoir la somme des angles du polygone, il faut prendre deux angles droits autant de fois qu'il reste de côtés, quand on ôte 2 de leur nombre total. Ainsi, le polygone ABCDEF ayant 6 côtés, a pour somme de ses angles, 4 fois 2 angles droits ou huit angles droits ou 720 degrés.

D'après cela, la somme des angles d'un quadrilatère, est 2 fois 2 angles droits, ou 4 angles droits, comme nous l'avons déjà établi (182).

Toutefois, il faut observer que le principe qui vient d'être démontré, concerne seulement les polygones à *angles saillans*. Pour qu'il fût applicable à ceux qui ont des angles saillans et des *angles rentrans*, comme ABCDEFG dont l'angle AGF est *rentrant* (P. VIII, F. 16), il faudrait admettre qu'un angle pût avoir pour indication plus de 180°. Mais, nous ne considérerons jamais de tels polygones sans en prévenir. Dans ceux dont nous nous occuperons ordinairement, tous les angles seront saillans; ou bien, ce qui est la même chose, une ligne droite ne pourra jamais rencontrer le contour en plus de deux points.

208. *La somme de tous les angles extérieurs d'un polygone quelconque, formés par les côtés prolongés dans le même sens, est égale à quatre angles droits*; car à chaque sommet A (P. VIII, F. 15), il y a un angle intérieur et un angle extérieur BAG qui valent en somme deux angles droits (157), et comme un polygone a autant de sommets que de côtés, la somme de tous les angles, tant intérieurs qu'extérieurs, vaut autant de fois deux angles droits qu'il y a de côtés. Or, les intérieurs font autant de fois deux angles droits, que l'indique le nombre de côtés, diminué de deux (207); il ne reste donc pour les angles extérieurs, que deux fois deux angles droits ou quatre angles droits.

PROBLÈME : *Convertir un polygone quelconque* ABCDE *en un triangle équivalent* (P. VIII, F. 17).

Formez un des triangles extrêmes du polygone, en menant la diagonale AC; tirez par le sommet B, une parallèle à AC, qui aille rencontrer en F le prolongement de DC; joignez A, F, et vous aurez le triangle AFC qui sera équivalent au triangle ABC, puisqu'ils auront même base AC et seront compris entre parallèles (192). Supprimant donc ABC et ajoutant AFC, vous obtiendrez le polygone AFDE qui sera équivalent au polygone ABCDE et aura un côté de moins, attendu que les deux côtés AB, BC se trouveront remplacés par AF. Maintenant, tirez la diagonale suivante AD; menez par F, une parallèle à AD, qui aille rencontrer en I le prolongement de ED; vous formerez le triangle AID qui sera équivalent au triangle AFD. Vous pourrez donc, au quadrilatère AFDE, substituer le triangle AIE, et avoir pourtant la même superficie.

Il est visible au reste, que cette construction pourra toujours être continuée jusqu'à la dernière diagonale du polygone, et qu'on finira conséquemment dans tous les cas, comme dans le précédent, par trouver un triangle équivalent au polygone donné.

On pourrait aussi mener par E, une parallèle AD jusqu'à la rencontre du prolongement de CD. Le triangle AKF ainsi formé, serait équivalent aussi au polygone ABCDE.

POLYGONES RÉGULIERS : Un polygone d'espèce quelconque peut avoir tous ses angles égaux et tous ses côtés égaux : dans ce cas il est dit *régulier*. Les polygones réguliers ont des propriétés fort importantes pour l'industrie. Nous avons déjà étudié deux de ces polygones : le triangle équilatéral et le carré; ce qui va être dit leur est applicable comme à ceux qui ont un plus grand nombre de côtés.

Nous appellerons *polygones réguliers pairs*, ceux dont le nombre de côtés est exactement divisible par deux, et nous nommerons les autres, *polygones réguliers impairs*. Ainsi, le carré, l'hexagone, etc., seront des polygones pairs, et le triangle, le pentagone, etc., seront des polygones impairs.

209. *La circonférence qui passe par trois sommets consécutifs*

A, B, C *d'un polygone régulier, passe nécessairement par le suivant* D (P. VIII, F. 18).

En effet, les angles B, C sont égaux et tous deux inscrits; ils doivent donc comprendre entre leurs côtés, des arcs de même longueur (98). Or, l'angle B comprend toute la circonférence, moins les arcs AB, BC; l'angle C comprendra donc toute la circonférence moins deux arcs égaux à AB, BC. Mais déjà le côté BC de l'angle C est corde de l'arc BC; par conséquent, une partie de l'autre côté formera la corde d'un arc égal à l'arc AB, ou bien cette partie sera de même longueur que AB, côté du polygone; en d'autres termes, la circonférence qui passe par A, B, C, passe aussi par le sommet D, seul point de CD qui soit autant éloigné de C, que A l'est de B.

On démontrerait de la même manière que la circonférence qui passe par A, B, C, D, passe aussi par le sommet suivant E.

Conséquemment, *la circonférence qui passe par trois sommets consécutifs d'un polygone régulier, passe aussi par tous les autres.*

Une circonférence qui prend tous les sommets d'un polygone quelconque, est dite *circonscrite* à ce polygone, et le polygone est dit *inscrit* à cette courbe.

PROBLÈME: *Circonscrire une circonférence à un polygone régulier.*

Cherchez, en employant le tracé du problème c (p. 97), le centre et le rayon de la circonférence qui passe par trois sommets consécutifs A, B, C (P. VIII, F. 18); cette circonférence étant décrite, passera par tous les autres, et sera conséquemment circonscrite au polygone.

210. *La circonférence qui touche en leurs milieux* G, H, *deux côtés consécutifs* AB, BC *d'un polygone régulier, est nécessairement tangente au milieu du côté suivant* CD (P. VIII, F. 18).

Nous commencerons la démonstration, en faisant observer que la circonférence tangente aux milieux des côtés AB, BC, est concentrique à la circonférence circonscrite; car le centre de l'une, comme celui de l'autre, est déterminé par le concours O des perpendiculaires au milieu de AB et au milieu de BC (107). Ainsi, OB, OC, OD, rayons de la circonférence circonscrite, peuvent être considérés comme concourant au centre de la circonférence tangente en G et en H.

Or, les triangles BOC, COD sont égaux (164), et par suite, l'angle OCD = OCB. Si donc nous abaissons de O, une perpendiculaire OI, sur CD, les deux triangles rectangles CIO, CHO seront égaux (166), parce que le troisième angle COI de l'un égalera le troisième angle COH de l'autre (p. 171). Il s'ensuit que OI = OH, que la circonférence tangente en G, H, passe par le point I, et qu'elle y touche le côté CD (106). D'ailleurs, I est le milieu de ce côté qui forme une corde de la circonférence circonscrite (93).

On démontrerait de la même manière, que la circonférence qui touche les trois côtés AB, BC, CD, en leurs milieux, est au tangente au milieu de DE. Conséquemment, *la circonférence qui touche en leurs milieux, deux cotés consécutifs d'un polygone régulier, est tangente aux milieux de tous les autres.*

Une circonférence tangente à tous les côtés d'un polygone quelconque, est dite *inscrite* à ce polygone, et le polygone, est dit *circonscrit* à cette courbe.

Donc, d'après la démonstration précédente *la circonférence circonscrite et la circonférence inscrite à un polygone régulier, sont concentriques.* Le centre commun est aussi celui du polygone (181).

PROBLÈME : *Inscrire une circonférence à un polygone régulier.*

Il s'agit au fond de décrire une circonférence qui touche deux concourantes AB, BC, en leurs milieux (P. VIII, F. 18). Ce cas particulier du problème *d* (p. 127), se résout au moyen de la première opération du problème *b* (p. 125), qu'il suffit de faire deux fois ; ou plus simplement, élevez une perpendiculaire au milieu de AB, élevez-en une autre au milieu de BC ; leurs concours O sera le centre de la circonférence demandée, et OG ou OH en sera le rayon (107).

211. Certains sommets d'un polygone régulier pair sont dits *opposés* ; ce sont ceux entre lesquels se trouve la moitié des côtés. Par exemple, A, D sont des sommets opposés, dans l'hexagone de la figure 18 (P. VIII), parce qu'il y a entre eux trois côtés : AB, BC, CD.

Un polygone régulier pair a aussi des *côtés opposés* : ce sont ceux qui sont séparés, comme AB, DE, par la moitié des autres côtés.

Un polygone régulier impair n'a ni sommets opposés, ni côtés opposés ; mais dans cette sorte de polygone, un sommet A est dit *opposé* à un côté, ou le côté est *opposé* au sommet, lorsque la moitié des autres côtés se trouve entre eux. Par exemple, le sommet A du pentagone de la figure 19 (P. VIII) est opposé au côté EF et réciproquement ce côté est opposé au sommet A, attendu qu'il y a entre eux, deux côtés AC, CE, moitié des quatre autres côtés du polygone.

212. *Les diagonales qui joignent les sommets opposés d'un polygone régulier pair, sont diamètres de la circonférence circonscrite* (P. VIII, F. 18).

Il y a effectivement autant de côtés du polygone à droite qu'à gauche de la diagonale AD (211) ; ces côtés sont égaux et il en est de même des arcs dont ils forment les cordes. Par conséquent, AD partage la circonférence circonscrite en deux parties composées d'un même nombre d'arcs égaux ; ces deux parties sont donc égales, et AD est un diamètre.

Il s'ensuit que *les diagonales qui joignent les sommets opposés d'un polygone régulier pair, sont axes de symétrie et bissectrices* *des angles qu'elles divisent ;* car la superposition par rabattement, des deux moitiés de la circonférence circonscrite, opère visiblement celle des deux parties du polygone formées par AD (93).

Remarquez que le nombre des axes de symétrie qui forment diagonales, égale la moitié de celui des sommets ou des côtés, puisque chacun joint deux sommets opposés.

213. *Les côtés opposés* AB, DE *d'un polygone régulier pair, sont parallèles* (P. VIII, F. 18) ; car les angles alternes-internes BAD, EDA sont égaux, puisque la diagonale AD est bisectrice des angles A, D, et qu'il y a égalité entre tous les angles d'un polygone régulier.

214. On appelle *lignes milieux* d'un polygone régulier pair, les droites qui joignent les milieux des côtés opposés.

Les lignes milieux d'un polygone régulier pair sont diamètres de la circonférence inscrite.

En effet, les perpendiculaires abaissées du centre O, sur les côtés opposés AB, DE (P. VIII, F. 18), forment une seule ligne droite, puisque ces côtés sont parallèles (57). D'ailleurs, ces perpendiculaires passent par les milieux de AB, DE, et sont rayons de la circonférence inscrite, puisque cette circonférence est tangente aux milieux de tous les côtés (107).

Il s'ensuit que *les lignes milieux d'un polygone régulier pair sont axes de symétrie ;* car la superposition par rabattement, des deux moitiés de la circonférence inscrite, opère visiblement celle des deux parties du polygone formées par une ligne milieu.

Si vous remarquez que le nombre des lignes milieux est moitié de celui des côtés du polygone ; si vous rapprochez de cette remarque, celle qui termine le n° 212, et si vous observez qu'un polygone régulier pair ne peut avoir pour axes de symétrie, que ses lignes milieux et les diagonales qui joignent les sommets opposés, vous conclurez que *tout polygone régulier pair a autant d'axes de symétrie que de côtés.*

Il est facile de voir que le rabattement opéré autour d'une ligne milieu GK, superposerait OC sur OF ; par conséquent, les angles COG, FOG sont égaux, et GK est d'équerre sur CF (38). Ainsi, les lignes milieux sont perpendiculaires, chacune sur un des axes de symétrie qui forment diagonales ; et par suite, *le centre d'un polygone régulier pair est centre de symétrie* (194).

215. *Les perpendiculaires abaissées des sommets, sur les côtés opposés d'un polygone régulier impair, passent toutes par le centre de la circonférence circonscrite* (P. VIII, F 19).

En effet, ACE=AGF, puisque les deux parties AC, CE du premier de ces arcs, sont égales aux deux parties AG, GF du second. Les cordes AE, AF ont donc même longueur, et le point A est autant éloigné de E que de F. Or, une perpendiculaire AI dont un point est à égales distances des deux extrémités d'une droite EF, doit passer par le milieu de cette droite (43). Conséquemment, et en vertu du principe 93, la perpendiculaire AI passe par le centre O de la circonférence circonscrite et du polygone.

Il s'ensuit que *les perpendiculaires abaissées des sommets, sur les côtés opposés d'un polygone régulier impair, sont axes de symétrie et bisectrices des angles qu'elles divisent*; car la superposition des deux moitiés de la circonférence circonscrite, produite par un rabattement exécuté autour de AI, opère visiblement celle des deux parties correspondantes du polygone (93).

On reconnaît facilement que les perpendiculaires qui peuvent être abaissées des sommets, sur les côtés opposés d'un polygone régulier impair, sont en nombre égal à celui des côtés, et que le polygone ne peut avoir d'autres axes de symétrie. Par conséquent, *tout polygone régulier impair a autant d'axes de symétrie que de côtés.*

Ce principe combiné avec son analogue du n° 214, fournit cet autre qui est bien plus général : *Tout polygone régulier a autant d'axes de symétrie que de côtés.* Mais, il convient d'observer, en l'employant, que les axes de symétrie d'un polygone régulier impair sont tous de même espèce, tandis que la moitié de ceux d'un polygone régulier pair sont des diagonales égales, et l'autre moitié, des lignes milieux plus courtes; mais égales aussi.

Les axes de symétrie d'un polygone régulier impair sont tous de même longueur; car tous se composent, comme AI, d'un rayon AO de la circonférence circonscrite et d'un rayon OI de la circonférence inscrite.

Un polygone régulier impair n'a point de centre de symétrie; en d'autres termes, aucun de ses axes de symétrie n'est d'équerre sur un autre, car si l'angle IOH pouvait être droit, l'angle opposé F du quadrilatère FHOI devrait l'être aussi; puisque les deux autres angles H, I le sont (182). Or, de tous les polygones réguliers, le carré est le seul dont les angles soient droits.

216. Tout angle tel que AOB (P. VIII, F. 18), qui, dans un polygone régulier, est formé par des rayons de la circonférence circonscrite, menés aux extrémités d'un côté, s'appelle *angle au centre*.

Les angles au centre d'un même polygone régulier sont égaux entre eux.

Ainsi, AOB=BOC=COD, etc. Cela tient à ce qu'ils comprennent, sur la circonférence circonscrite, des arcs AB, BC, CD, etc., qui sont égaux, ayant pour cordes, les côtés du polygone régulier (31).

Probl. (*a*) : *Trouver l'indication de l'angle au centre d'un polygone régulier.*

Puisqu'il y a autant d'angles au centre que de côtés, la somme de leur indication fait 360°, et puisqu'ils sont égaux, l'indication d'un seul est le quotient de 360° divisés par leur nombre ou par celui des côtés.

Par exemple, l'angle au centre du triangle équilatéral a pour indication $\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$, le double d'un des angles intérieurs (160) ; l'indication de l'angle au centre du carré est $\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$, la même que celle de l'angle intérieur (201) ; l'angle au centre du pentagone régulier est de $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$, et celui de l'hexagone régulier est de $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$.

Probl. (*b*) : *Trouver l'indication de l'angle intérieur d'un polygone régulier.*

Comme tous les angles intérieurs d'un polygone régulier sont égaux, on obtient l'indication d'un seul, en divisant par leur nombre, la somme des indications de tous. Multipliez donc 180°, somme des indications de deux angles droits, par le nombre des côtés diminué de 2 (207), et divisez le produit par ce même nombre des côtés, qui est égal à celui des angles.

Vous trouverez ainsi que l'indication de l'angle d'un triangle équilatéral est de $\frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$; que celle de l'angle du carré est $\frac{180^\circ \times 2}{4} = \frac{180}{2} = 90^\circ$; que l'angle d'un pentagone régulier a pour indication $\frac{180^\circ \times 3}{5} = \frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$; et que l'angle d'un hexagone régulier vaut $\frac{180^\circ \times 4}{6} = \frac{720^\circ}{6} = 120^\circ$, double de l'angle au centre.

Ces exemples suffisent, pour vous mettre à même de trouver facilement l'indication de l'angle intérieur de toute autre polygone régulier.

Probl. (*c*) : *Trouver l'indication de l'angle extérieur d'un polygone régulier* (P. VIII, F. 18).

Tous les angles extérieurs d'un polygone régulier sont égaux, car chacun, CBN par exemple, est l'excès de 180° sur l'indication d'un angle intérieur ABC (45). On obtiendra donc l'indication d'un seul angle extérieur, en divisant par leur nombre ou celui des côtés, la somme des indications de tous. Or, cette somme est de 360° (208). Il faut donc diviser 360°, par le nombre des côtés du polygone, comme pour avoir l'angle au centre.

Ainsi, *l'angle extérieur et l'angle au centre d'un polygone régulier sont égaux.*

217. *Le rapport de l'angle intérieur d'un polygone régulier, à l'angle extérieur et à l'angle au centre, est toujours la moitié du nombre des côtés diminué de 2.*

« Représentons le nombre des côtés par n. L'indication de l'angle intérieur pourra, d'après le probl. *b* (p. 207), être exprimé par $\frac{180^\circ \times (n-2)}{n} = \frac{180^\circ}{n} + (n-2)$; celle de l'angle extérieur et de l'angle au centre sera, d'après le problème *c* qui précède, $\frac{360^\circ}{n} = \frac{180^\circ \times 2}{n} = \frac{180^\circ}{n} \times 2$. On aura donc, pour le rapport de ces deux indications et pour celui des angles, $\frac{180^\circ}{n} \times (n-2) : \frac{180^\circ}{n} \times 2$.

Mais, on peut diviser les deux termes d'un rapport par un même nombre, sans l'altérer (19). Divisant donc les deux termes de celui-ci, par $\frac{180^\circ}{n}$, on obtient $n-2 : 2 = \frac{n-2}{2}$, c'est-à-dire la moitié du nombre des côtés diminué de 2, pour le rapport de l'angle intérieur d'un polygone régulier, à l'angle extérieur et à l'angle au centre. »

Ainsi, le rapport de ces angles, dans le triangle équilatéral, est $\frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}$, ce qui signifie que l'angle intérieur est la moitié de l'angle extérieur ou de l'angle au centre. Le même rapport, dans le carré, est $\frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1$, ce qui indique que les trois angles sont égaux; dans le pentagone régulier, il est $\frac{5-2}{2} = \frac{3}{2}$, c'est-à-dire que l'angle extérieur ou l'angle au centre est les $\frac{2}{3}$ de l'angle intérieur. Pour l'hexagone régulier, le rapport est $\frac{6-2}{2} = \frac{4}{2} = 2$, ce qui montre que l'angle intérieur ABC (P. VIII, F. 18) est double de l'angle extérieur CBN et double de l'angle au centre AOB.

218. Un grand nombre de produits des arts ont pour faces, des polygones réguliers, et notamment des triangles équilatéraux, des carrés, des pentagones, des hexagones, des octogones et des décagones. Il est donc nécessaire de savoir tracer ces figures. On peut employer deux procédés généraux : l'un ne sera exposé qu'à l'article de la *similitude des polygones ;* l'autre est fondé sur la définition même des polygones réguliers.

PROBLÈME : *Tracer un polygone régulier.*

Tirez une droite AB égale en longueur au côté du polygone (P. VIII, F. 20); faites à l'extrémité B de cette droite, un angle égal à l'angle intérieur (p. 32), dont vous déterminerez l'indication comme il a été dit dans le probl. *b* (p. 207); portez la longueur donnée AB sur le second côté de cet angle; à l'extrémité C qui en résultera, faites encore un angle égal l'angle intérieur, et continuez toujours ainsi, jusqu'à ce que vous ayez le nombre de côtés exigé.

Mais, cette méthode a l'inconvénient de ne pas ramener toujours exactement au point de départ A, ou de donner un polygone qui ne se *ferme* pas avec précision, ce qui provient des petites erreurs que l'on commet dans le tracé des angles. Il existe des procédés particuliers plus courts et plus exacts, pour le tracé des polygones employés dans les arts. Déjà vous connaissez ceux qui sont relatifs au *triangle équilatéral* et au *carré* (p. 174 et 195). Nous allons exposer les autres, et nous enseignerons en même temps, comment on inscrit dans un cercle donné, les polygones usités ; pour plusieurs, l'opération dépend des principes suivans.

219. *La corde d'un arc de 60° égale le rayon.*

Soit DE la corde d'un arc de 60° (P. VIII, F. 18). En menant les rayons OD, OE, nous formerons un triangle symétrique DOE dont l'angle O sera de 60°. Il restera donc $180° - 60° = 120°$, pour la somme des indications des deux autres angles D, E (157). Or, ces deux angles sont égaux, et chacun est, par conséquent, de 60°. Le triangle DOE est donc équilatéral (161), et $DE = DO$.

220. *La corde d'un arc de 36° est la plus grande partie du rayon divisé en moyenne et extrême raison* (p. 122).

Soit AB cette corde (P. VIII, F. 19). Elle forme avec les rayons AO, BO, un triangle symétrique dont l'angle O est de 36°. Par conséquent (160 et 157), les deux autres angles sont égaux ; leur somme $A + B = 180° - 36° = 144°$, et chacun est de $\frac{144°}{2} = 72°$.

Maintenant, menons BK bisectrice de l'angle B. L'angle ABK est de 36°, comme l'angle O; l'angle A est commun aux triangles ABK, AOB, et ces deux triangles sont semblables (169). Il est d'ailleurs visible que les côtés correspondans sont AK opposé à l'angle ABK de 36° et AB opposé à l'angle O de 36°, AB opposé à l'angle AKB de 72° et AO opposé à l'angle ABO de 72°. Ces côtés forment donc la proportion (168) $AK : AB :: AB : AO$.

Mais, puisque l'angle KBO est de 36°, comme l'angle O, le triangle BKO est symétrique; puisque ABK est semblable à AOB, le premier triangle est symétrique comme le second. Conséquemment, $AB = BK = KO$.

Nous pouvons donc mettre KO à la place de AB, dans la proportion. Elle devient par là $AK : KO :: KO : AO$, et celle-ci montre que le rayon AO est partagé, au point K, en moyenne et extrême raison. Ainsi, KO ou son égale AB, corde d'un arc de 36°, est bien la plus grande partie du rayon divisé en moyenne et extrême raison ; car KO est plus grand que AK, puisque AO est plus grand que KO, et qu'il y a proportion.

221. *Si deux polygones réguliers ont un côté commun* FG, *et que le nombre des côtés de l'un soit double de celui de l'autre, le centre du grand est sur la circonférence* O *circonscrite au petit, à l'extrémité* C *du diamètre* HC *perpendiculaire au côté commun* (P. VIII, F. 19).

« Puisque le grand polygone a un nombre de côtés double de celui du petit, le nombre des parties formées par les sommets, sur la circonférence circonscrite au premier, est double du nombre des parties de la circonférence circonscrite au second. Chaque arc de la grande circonférence contient donc seulement moitié des degrés d'un arc FG de la petite O. L'angle au centre du grand polygone ne vaut donc que moitié de celui du petit, et par conséquent (98), le premier angle est inscrit à la circonférence O. Comme d'ailleurs le côté d'un polygone régulier et les côtés de l'angle au centre forment un triangle symétrique, le sommet de cet angle du grand polygone doit se trouver sur la perpendiculaire au milieu du côté commun FG (43). Ce sommet ou le centre du grand polygone est donc en C, le plus éloigné des deux points où le diamètre HC, perpendiculaire au côté commun (93), rencontre la petite circonférence circonscrite O. »

Lors donc que l'on connaîtra le côté FG d'un polygone régulier et le centre O d'un autre polygone régulier qui, avec le même côté, aurait un nombre d'angles moitié moindre, on trouvera le centre C du grand polygone, en élevant une perpendiculaire HO au milieu de FG et portant le rayon OF de O en C, sur cette perpendiculaire. La droite CF donnera ensuite le rayon de la grande circonférence circonscrite.

PROBL. (*a*) : *Inscrire un triangle équilatéral dans un cercle donné* (P. VIII, F. 21).

Décrivez d'un point A quelconque de la circonférence, avec une ouverture de compas égale au rayon, un arc qui coupe la courbe en deux points B, C; portez la corde BC de B en D, et joignez deux à deux, les trois points B, C, D. Le triangle BCD ainsi formé, est équilatéral; car les arcs AB, AC sont de 60° chacun (219); l'arc BAC et l'arc BD sont, par suite, chacun de 120° il reste 120°; pour l'arc CD, et les trois cordes sont égales (23).

PROBL. (*b*) : *Inscrire un carré dans un cercle donné* (P. VIII, F. 22).

Tracez un diamètre AB; élevez par le centre, un second diamètre CD perpendiculaire au premier; joignez enfin les extrémités de ces diamètres, en tirant les cordes AC, BC, BD, AD. Le quadrilatère inscrit ACBD est un carré, puisque les diagonales se coupent d'équerre par le milieu, et sont de même longueur (201).

PROBL. (*c*) : *Tracer un hexagone régulier* (P. VIII, F. 18).

De chaque extrémité du côté AB donné ou pris à volonté, décrivez avec ce côté pour rayon, deux petits arcs de cercle qui se coupent en O ; décrivez ensuite de O, avec la même ouverture de compas, une circonférence ; vous pourrez porter cette ouverture cinq fois de suite sur la courbe, en partant de A pour aller à B, suivant le plus grand arc, et si vous tirez les cordes des arcs que vous marquerez ainsi, vous obtiendrez un polygone fermé ABCDEF qui sera l'hexagone demandé (219 et 98).

Probl. (*d*) : *Inscrire un hexagone régulier dans un cercle donné.*

Il faut prendre le rayon de ce cercle ; le porter six fois de suite, comme corde, sur la circonférence ; et joindre chaque point ainsi marqué, aux deux points les plus voisins (219 et 98).

Probl. (*e*) : *Tracer un octogone régulier* (P. VIII, F. 23).

Élevez au milieu du côté AB, donné ou arbitraire, une perpendiculaire CD ; portez EB, de E en F, puis FA, de F en D, et du point D ainsi trouvé, décrivez une circonférence, avec une ouverture de compas égale à DA. Le côté AB pourra être porté huit fois de suite, comme corde, sur la courbe ; de manière que si l'on est parti de A, par exemple, on reviendra exactement à ce point.

Le point D est effectivement le centre de l'octogone régulier dont AB est le côté, si F est le centre du carré qui a aussi AB pour côté (221). Or, la figure 22 montre bien que la distance EF du centre E au côté BD d'un carré, est précisément égale à la moitié BG ou BF du côté (201).

Probl. (*f*) : *Inscrire un octogone régulier dans un cercle donné* (P. VIII, F. 22).

Tracez deux diamètres perpendiculaires AB, CD, puis deux autres HI, KL parallèlement aux cordes qui uniraient les extrémités des premiers, et joignez aux deux points voisins, chacun des huit points ainsi marqués sur la circonférence. Le polygone AKDHBLCI que vous formerez, sera l'octogone régulier qui peut être inscrit dans le cercle E.

En effet, HI parallèle à BC est perpendiculaire à AC et passe par le milieu de l'arc de cette corde (101 et 93). Mais l'arc AIC = CLB = BHD = DKA : ce sont des quarts de cercle. Leurs moitiés AI, CL, etc. sont égales aussi, et par suite, les côtés AI, IC, CL, etc., du polygone ont même longueur (23). D'ailleurs, les angles de ce polygone sont égaux, étant tous inscrits et comprenant le même nombre de parties de la circonférence (98).

Probl. (*g*) : *Tracer un octogone régulier dans un carré donné* ABCD (P. VIII, F. 24).

On pourrait y parvenir en inscrivant une circonférence au carré (p. 204) : les contacts et les points où la courbe se trouverait coupée par les diagonales, seraient les sommets de l'octogone régulier ; mais ce procédé ferait perdre beaucoup de matière.

Pour tirer du carré le plus grand octogone régulier qu'il puisse fournir, il faut tracer les deux diagonales AC, BD, puis porter AE, la moitié de l'une, de A en F et en G, de B en H et en I, de C en K et en L, enfin de D en M et en N.

» Le polygone FKIMLGNH ainsi obtenu, est effectivement un octogone régulier. D'abord, les côtés du carré étant égaux, doivent donner des restes égaux, quand on en retranche des longueurs égales. Donc, AH, BF, BK, CI, etc, sont égales; les triangles rectangles NAH, FBK, etc., sont symétriques; les angles ANH, AHN, BFK, etc., sont chacun de 45° (159 et 51), et il reste 135°. indication de l'angle intérieur de l'octogone régulier (p. 207), pour chacun des angles intérieurs de l'octogone formé. »

« Mais, le triangle EDN est symétrique aussi, puisque DN=DE, et son angle D est de 45°, puisque la diagonale du carré est bisectrice. Il reste donc 135° pour la somme des deux angles DNE, DEN, et 67° 30' pour chacun. Par conséquent, l'angle ENH est aussi de 67° 30'. Il en est de même pour les angles NHE, EHF, EFH, etc. Ainsi, les angles du triangle NEH sont égaux à ceux du triangle FEH, et comme ces triangles ont un côté commun EH, ils sont égaux (166); d'où il suit que NH = HF. On démontrerait de la même manière, que HF=FK, que FK = KI, etc.; conséquemment, l'octogone obtenu est régulier. »

Probl. (*h*) : *Tracer un décagone régulier* (P. VIII, F. 25).

A l'une des extrémités du côté AB, donné ou arbitraire, élevez une perpendiculaire BC égale à la moitié de AB; de C comme centre, avec CB pour rayon, décrivez une circonférence; menez par le centre, la sécante AF; décrivez une circonférence, avec cette sécante pour rayon, et vous pourrez porter AB dix fois de suite, comme corde, sur cette courbe.

Cette construction étant absolument la même que celle du problème de la page 122, divise la sécante AF en moyenne et extrême raison au point D; de sorte que AF : DF :: DF : AD. Or, DF = AB; par conséquent, AB se trouve être la plus grande partie du rayon AF divisé en moyenne et extrême raison. Si donc vous rapportez AB ou FD de F en G, la corde FG sera celle de 36° (220) et le côté du décagone régulier qui peut être inscrit dans le cercle A.

Probl. (*i*) : *Inscrire un décagone régulier dans un cercle donné* (P. VIII, F. 26).

Tracez deux rayons perpendiculaires AB, AC; décrivez une circonférence D dont AC soit le diamètre; tirez BD qui coupera la circonférence D en E, et rapportez BE de B en F et en G. Les arcs BF, BG seront de 36° (220), parce qu'ils auront pour cordes, la plus grande partie BH du rayon AB divisé en moyenne et extrême raison (p. 122); donc cette droite BH pourra être portée dix fois de suite dans le cercle A, et donnera le décagone régulier inscrit.

PROBL. (*k*) : *Tracer un pentagone régulier* (P. VIII, F. 25).

Décrivez la circonférence pour laquelle le côté AB, donné ou arbitraire, du pentagone est corde de 36° (probl. *h*), et après avoir rapporté AB ou FD, de F en G, abaissez du centre A du décagone régulier inscrit, une perpendiculaire AH sur FG. Le centre du pentagone qui doit avoir aussi FG pour côté, sera sur AH, à égales distances de A et de G (221). Si donc vous élevez une perpendiculaire IK sur le milieu de AG, le point K où elle coupera AH, sera le centre de la circonférence circonscrite au pentagone demandé. Ainsi, il ne restera plus qu'à décrire cette circonférence et à y porter cinq fois de suite la corde FG.

PROBL. (*l*) : *Inscrire un pentagone régulier dans un cercle* A *donné* (P. VIII, F. 26).

Cherchez la corde BH de 36° (probl. *i*), et après l'avoir rapportée de B en F et en G, joignez ces deux points. La corde FG sera celle de l'arc de 72°, et par conséquent, le côté du pentagone régulier inscrit (216). Vous tracerez donc ce pentagone, en portant FG quatre autres fois de suite, sur la circonférence A.

PROBL. (*m*) : *Tracer un dodécagone régulier* (P. VIII, F. 27).

Élevez une perpendiculaire DE au milieu du côté AB, donné ou arbitraire; puis marquez-y le point C, en décrivant un arc BC, de l'une des extrémités de AB, avec cette droite pour rayon. Ce point C sera le centre de l'hexagone régulier qui aurait aussi AB pour côté (219). Si donc vous décrivez de C, avec CA, un arc de cercle, le point D où il rencontrera DE, sera le centre du dodécagone régulier demandé (221). Ainsi, vous pourrez porter AB douze fois de suite, sur la circonférence décrite de D, avec DA pour rayon.

PROBL. (*n*) : *Inscrire un dodécagone régulier dans un cercle* B *donné* (P. VIII, F. 28).

Tracez deux diamètres AD, CE perpendiculaires; décrivez de A, avec AB, un arc qui coupe en deux points, la circonférence donnée; faites la même opération aux points C, D, E; tirez les cordes des douze arcs ainsi obtenus, et vous aurez le dodécagone régulier inscrit.

Il suffit de démontrer que chaque arc est de 30°; car il s'ensuivra que les côtés sont égaux et les angles aussi. Or, l'arc AC est de 90°, l'arc AF est de 60°, et $CF = AC - AF = 90° - 60° = 30°$. On verrait de même que AG contient 30°. Quant à FG, cet arc vaut $AC - CF - AG = 90° - 30° - 30° = 90° - 30° \times 2 = 90° - 60° = 30°$. Ainsi des autres.

PROBL. (*o*) : *Tracer un pentédécagone régulier.*

Si le côté est donné, il faut avoir recours au procédé général qui a été exposé page 208, ou mieux, à celui qui résulte de la *similitude des polygones*. (*Voyez* plus loin cet article.)

Si le côté du pentédécagone n'est pas donné, décrivez une circonférence quelconque A (P. VIII, F. 26) ; cherchez la corde BH de 36° (probl. *i*), et après l'avoir rapportée de B en F, rapportez de B en I, le rayon BA qui est la corde de 60°. La droite FI sera précisément le côté du pentédécagone régulier qu'on peut inscrire dans le cercle A, et pour tracer ce polygone, vous n'aurez plus qu'à porter FI quatorze autres fois de suite, sur la circonférence A.

Effectivement, l'arc FI = BI — BF = 60° — 36° = 24°, arc qui est la quinzième partie de la circonférence.

PROBL. (*p*) : *Inscrire un pentédécagone dans un cercle donné.*

Faites les mêmes opérations que pour le problème précédent.

PROBL. (*q*) : *Tracer un polygone régulier d'un nombre de côtés quelconque, au moyen d'un autre dont le nombre de côtés est moitié moindre.*

Circonscrivez une circonférence au polygone donné (p. 203) ; divisez en deux parties égales (p. 98), un des arcs égaux AC, CE, etc. compris entre deux sommets (P. VIII, F. 19.) ; puis employez, par exemple, AB, corde de la moitié de l'arc AC, pour marquer les milieux des autres arcs, et joignez chacun de ces milieux, aux sommets voisins du polygone donné.

Le grand polygone ABCDE..... ainsi formé, aura un nombre de côtés double de celui du petit polygone ACE.... ; de plus, il sera régulier, car tous ses côtés seront égaux (23) et ses angles aussi, puisqu'ils comprendront le même nombre de parties égales de la circonférence (98).

L'application du tracé qui précède, aux polygones que nous savons construire et inscrire exactement, nous permettra d'opérer le tracé et l'inscription d'un grand nombre d'autres. Ainsi, l'octogone régulier nous fournira le polygone régulier de 16 côtés ; au moyen de ce dernier, nous obtiendrons le polygone régulier de 32 côtés, et par suite, les polygones réguliers de 64, 128 côtés, etc.

Du décagone régulier, nous déduirons les polygones réguliers de 20, 40, 80, 160 côtés, etc.

Le dodécagone régulier donnera successivement les polygones réguliers de 24, 48, 96, 192 côtés, etc.

Enfin, avec le pentédécagone régulier, nous tracerons les polygones réguliers de 30, 60, 120, 240 côtés, etc.

PROBL. (*r*) : *Tracer un polygone régulier d'un nombre de côtés quelconque, au moyen d'un autre qui a un nombre de côtés double.*

Joignez par une droite, les extrémités différentes A, C, de deux côtés AB, BC qui se rencontrent (P. VIII, F. 19) ; faites la même opération sur le couple des côtés suivans CD, DE, et sur tous les autres couples.

Il est clair que le polygone ACE.... ainsi formé, aura moitié moins de côtés que le polygone régulier donné ABCD.... D'ailleurs, il sera régulier aussi; car si vous circonscrivez une circonférence au grand polygone, les côtés du petit seront cordes d'arcs égaux (23), et ses angles, tous inscrits, comprendront le même nombre de parties égales de la circonférence (98).

PROBL. (s): *Tracer un des polygones réguliers qu'on ne sait pas inscrire géométriquement.*

Si le côté est donné, vous serez obligé d'employer le procédé de la page 208. Si le côté est arbitraire, vous pourrez décrire une circonférence quelconque, et essayer une ouverture de compas, puis une autre, puis une troisième, etc., jusqu'à ce que vous en ayez trouvé une qui puisse être portée comme corde, sur la courbe, exactement autant de fois que le polygone doit avoir de côtés.

On peut agir de même pour *inscrire, dans un cercle donné, un polygone régulier autre que les précédens.*

Mais un procédé qui consiste en essais incertains, en vrais tâtonnemens, est bien loin de valoir un tracé géométrique : il exige presque toujours beaucoup de temps; il gâte le dessin, s'il s'agit d'une opération sur le papier, et le plus souvent il ne donne qu'un *à peu près* assez grossier, parce que le dessinateur, impatienté de ne pas réussir, prend le parti de partager l'erreur, comme le lui indiquent ses yeux.

Vous devez donc préférer le tracé géométrique suivant, qui, tout approximatif qu'il est, conduit toujours à un résultat d'une exactitude bien suffisante : on le connaît sous le nom de *procédé des deux erreurs contraires.*

Soit proposé, pour exemple, d'inscrire un heptagone régulier dans le cercle A (P. VIII, F. 29). Faites une première *supposition*, en regardant comme le côté cherché, une droite qui vous semble un peu trop grande pour être reçue sept fois dans la circonférence A; cette première supposition sera, si vous voulez, le côté de l'hexagone régulier inscrit. Essayez-la, en la portant sept fois comme corde, à partir d'un point quelconque B. Au lieu de revenir juste à ce point, vous le dépasserez, vous commettrez une *erreur totale* en plus qui sera l'arc BC et vaudra sept fois l'arc d'erreur simple en plus. Tirez alors une droite B'E égale à la première supposition, et au point B', élevez une perpendiculaire B'C' égale à la corde de l'erreur totale BC.

Faites ensuite une deuxième *supposition*, en regardant comme le côté cherché, une droite qui vous semble un peu trop petite pour être reçue sept fois dans la circonférence A; cette seconde supposition sera, par exemple, le côté de l'octogone régulier inscrit. Essayez-la, en la portant sept fois comme corde, à partir du point B. Il vous sera impossible de revenir à ce point; vous commettrez une *erreur totale* en moins qui sera l'arc BD et vaudra sept fois l'arc d'erreur simple en moins. Portez alors la seconde supposition de E en B''; puis par le point B'', tracez parallèlement à B'C' et en sens contraire, une droite B''D' égale à la corde de l'erreur totale en moins BD.

Enfin, tirez la droite C'D' ; le point F où elle coupera B'E, partagera la différence B'B'' des suppositions en deux parties B'F, B''F proportionnelles aux cordes B'C', B''D' des erreurs totales (81).

Or, si les droites tracées étaient les longueurs des arcs de supposition et des arcs d'erreur totale, au lieu d'être celles des cordes, B'B'' serait la somme des erreurs simples en plus et en moins, et comme les arcs d'erreur simple sont proportionnels aux arcs d'erreur totale, dont ils forment les septièmes parties, on trouverait les premiers en partageant leur somme proportionnellement aux seconds, de sorte que B'F serait l'arc d'erreur simple en plus, B''F l'arc d'erreur simple en moins, et par conséquent, EF l'arc vrai de l'heptagone régulier inscrit.

Que faudrait-il pour qu'employant les cordes des arcs de supposition et d'erreur totale, au lieu de ces arcs, on eût dans EF le vrai côté de l'heptagone? que les cordes d'arcs porportionnels fussent aussi proportionnelles. Or, c'est ce qui n'est pas, puisqu'au delà de 180°, les cordes diminuent en même temps que les arcs augmentent, tandis qu'en deçà, elles croissent, si les arcs croissent.

Il est donc fort probable que EF ne pourra pas être reçue exactement sept fois dans la circonférence. Si cette corde est trop grande, vous la prendrez pour première supposition; vous la mettrez à la place de EB'; vous substituerez à B'C', la corde de l'erreur totale en plus que donnera EF, et en conservant EB'', B''D', vous déterminerez un nouveau point F, un nouveau côté approximatif EF de l'heptagone demandé. Il différera moins du véritable, que le précédent. Si pourtant il en diffère et qu'il soit trop petit, vous le prendrez pour seconde supposition, vous conserverez la première de la deuxième opération et vous obtiendrez un troisième point F, un troisième côté approximatif de l'heptagone, moins différent encore du véritable.

Il faudrait même que les deux premières suppositions eussent été bien mal choisies, fussent fort différentes, pour qu'il y eût une différence manifestée par le compas, aperçue par nos yeux, entre le troisième côté approximatif et le vrai côté de l'heptagone régulier inscrit. Ordinairement, la différence se trouvera si faible, si peu sensible, que dans l'état actuel de nos instrumens, une solution exacte ne serait pas préférable, sous le rapport de la justesse du tracé, à celle du procédé des erreurs contraires. On peut donc employer ce procédé en toute confiance; il l'emporte d'ailleurs, par sa généralité et sa simplicité, sur tous ceux qu'enseignent les praticiens pour inscrire approximativement des polygones réguliers, et il est loin d'être inférieur, quant à la précision.

PROBL. (*t*) : *Circonscrire à un cercle donné* A, *un polygone régulier dont les côtés soient parallèles à ceux d'un polygone régulier inscrit et de même nom* (P. VIII, F. 30).

Abaissez une perpendiculaire AB, du centre A, sur le côté CD du polygone inscrit; menez par B, une parallèle à CD; tirez AC, jusqu'à la rencontre de cette parallèle, en E; puis, décrivez de A, avec AE, une circonférence; elle coupera EB une seconde fois en F, et il ne vous restera plus qu'à porter EF comme corde, sur cette circonférence, autant de fois que le polygone inscrit a de côtés. Le polygone EFGHIK qui en résultera, sera régulier, de même nom que l'autre et circonscrit au cercle donné.

D'abord, il sera régulier et de même nom que le polygone inscrit, si en effet la corde EF peut être reçue dans la grande circonférence, autant de fois que CD l'est dans la petite. Or, l'angle FAB $=$ BAE, comme DAB, puisque les obliques AF, AE sont égales, comme les obliques AD, AC (51). Par conséquent, FAB $=$ DAB; les trois points A, D, F sont en ligne droite; FAE $=$ DAC; les arcs CBD, EF renferment le même nombre de degrés (32) et sont contenus le même nombre de fois dans leur circonférence respective.

Ensuite, le polygone EFGHIK sera circonscrit au cercle donné; car il a même centre que ce cercle, son côté EF le touche en B, et par suite tous les autres côtés sont aussi tangens (210).

PROBL. (*u*) : *Circonscrire à un cercle donné* A, *un polygone régulier de nom connu, dont un des contacts soit en un point indiqué* B (P. VIII, F. 30).

Cherchez le côté du polygone régulier inscrit et de même nom; portez-en la moitié de chaque côté du centre A sur une perpendiculaire au rayon AB; tracez par les points L, M qui en résulteront, deux parallèles à AB, et joignez les points C, D qu'elles marqueront sur la circonférence donnée. La corde CD égalera LM, et il ne s'agira plus que de résoudre le problème précédent (*t*).

En effet, si l'on fait tourner BAMD sur AB, cette figure se superposera exactement sur BALC. Donc, B est le milieu de l'arc CD, la corde CD est perpendiculaire à AB (93), parallèle et égale à LM (65), côté du polygone régulier inscrit et parallèle à la tangente en B.

PROBL. (*v*) : *Circonscrire à un cercle donné* A, *un polygone régulier de nom connu, qui ait un de ses sommets sur le prolongement d'un rayon indiqué* AC (P. VIII, F. 30).

Cherchez le côté du polygone régulier inscrit et de même nom, portez-le de C en D, par exemple; puis résolvez le problème (*t*).

PROBL. (*x*) : *Circonscrire à un cercle donné* A, *un polygone régulier dont les côtés soient perpendiculaires aux bisectrices d'un polygone régulier inscrit et de même nom* (P. VIII, F. 31).

Élevez une perpendiculaire à l'extrémité B d'une bisectrice AB; abaissez-en une autre du centre A, sur le côté BC du polygone inscrit; prenez, pour rayon, la distance de A à la rencontre D des deux perpendiculaires; décrivez, avec cette distance, une circonférence concentrique à celle qui est donnée; puis portez la corde DE, sur cette grande circonférence; elle y sera reçue autant de fois que le polygone inscrit a de côtés, et vous formerez ainsi le polygon demandé DEFGHI.

« Effectivement, le polygone DEFGHI est régulier et de mêm nom que le polygone donné, si son angle intérieur DAE = BAC angle intérieur de l'autre. Or, BAE = BAD, puisque les oblique DA, EA sont de même longueur (51)); pour une raison semblable CAD = BAD; par conséquent, les deux moitiés de l'angle DAI égalent celles de BAC, et ces deux angles sont égaux. »

« En outre, le polygone régulier DEFGHI est circonscrit au cercl donné, car il a même centre que ce cercle, et son côté DE est tangent en B (210). »

« Maintenant, je dis que le côté EF du polygone circonscrit es perpendiculaire à la bisectrice correspondante AK. Cela sera vrai si l'angle K du quadrilatère BAKE, se trouve droit. Or, l'angle BAK = BAC = DAE, angle au centre du polygone circonscrit. Donc BAK + BEK forment 180° (p. 207), ABE + AKE doivent donne aussi 180° (182), et comme ABE est droit, AKE l'est aussi. »

« On démontrerait de même, successivement, que tous les autre côtés du polygone circonscrit sont perpendiculaires aux bisectrice correspondantes du polygone inscrit. »

PROBL. (y): *Diviser une circonférence en un nombre déterminé de parties égales.*

Puisque tout polygone régulier inscrit partage la circonférence en autant d'arcs égaux, qu'il a de côtés, la division d'une circonférence en un nombre déterminé de parties égales, revient à l'inscription d'un polygone régulier qui ait autant de côtés qu'on veu de parties. Les problèmes précédens donnent donc les moyens de diviser une circonférence en autant de parties égales, que le marque un quelconque des nombres suivans:

2, 4, 8, 16, 32, 64 et ainsi de suite, en doublant toujours
3, 6, 12, 24, 48, 96 et ainsi de suite, en doublant toujours
5, 10, 20, 40, 80, 160 et ainsi de suite, en doublant toujours
15, 30, 60, 120, 240, 480 et ainsi de suite, en doublant toujours

Mais, avec le secours d'un bon trisecteur (p. 118), on peut partager un angle au centre en trois parties égales, et par conséquent l'arc de cet angle en trois arcs égaux. La circonférence étant donc divisée en 3 parties, on pourra la diviser en 9, et par suite, en 18 36, 72, 144, 288, etc., en doublant toujours. Si elle est divisée en 15 arcs égaux, on pourra la diviser en 45, et par suite, en 90 180, 360, etc. On voit par là comment il a été possible de diviser les limbes gradués, en 360 parties égales ou degrés.

PROBL. (z): *Diviser un arc de cercle* ABC *en un nombre déterminé de parties égales* (P. VIII F. 19).

Si le nombre des parties est pair, on peut, en recourant au problème *b* (p. 98), diviser en deux parties égales, d'abord l'arc donné, puis une des moitiés, puis un des quarts, un des huitièmes et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait obtenu la partie marquée par le nombre proposé. Il ne reste plus qu'à porter cette partie sur l'arc, autant de fois que l'indique le même nombre.

S'il s'agit d'obtenir le tiers de l'arc, on peut faire usage du trisecteur, quand le centre est marqué ou après l'avoir trouvé.

Mais si le nombre des parties est impair et autre que 3, il faut employer le procédé des erreurs contraires (p. 215). On fait deux suppositions : l'une étant portée sur l'arc, à partir de l'extrémité A et autant de fois qu'on veut de parties égales, doit dépasser un peu l'extrémité C ou produire une erreur en plus ; l'autre étant portée de la même façon, doit donner une erreur en moins.

Probl. (*s'*) : *Diviser un angle en un nombre déterminé de parties égales*. Vous décrirez un arc entre les côtés, et du sommet comme centre; vous diviserez cet arc en autant de parties égales que l'angle doit en avoir, et vous joindrez les points de division au sommet (31).

Loi de la nature (*a*) : Un grand nombre des corps de la nature ont pour faces planes, des polygones irréguliers; mais d'autres, appelés *cristaux*, et nombreux aussi, présentent des polygones réguliers, tels que le triangle équilatéral, le carré, et le pentagone. Cependant, les faces de quelques cristaux sont des rectangles et des losanges, polygones qui n'ont qu'une demi-régularité. C'en est assez pour vous montrer que l'étude de la Géométrie est nécessaire à ceux qui s'occupent de minéralogie, soit par besoin, soit par plaisir.

Loi (*b*) : Il y a certaines productions animales où l'on trouve les polygones : les toiles des araignées de jardin en sont un exemple; les cellules hexagonales des abeilles en sont un autre. Ainsi, la Géométrie s'insinue jusques dans l'histoire naturelle des minéraux et des animaux. Celle des végétaux ne lui est pas non plus étrangère : la position habituelle de la tige des plantes, sa forme, celle des feuilles, des fleurs, des parties sexuelles, des fruits et de leurs pulpes, la disposition des branches, peuvent souvent être décrites d'une manière exacte et claire, en phrases mathématiques ; il y a même des cas où les botanistes sont forcés d'employer les termes de la Géométrie, et d'autres où ils feraient très-bien de ne pas les remplacer par des mots barbares.

Appl. (*a*) : Les polygones d'une irrégularité bizarre, ne sont guères exécutés dans les arts. Toutefois, au sein de nos anciennes cités où les rues se trouvent tortueuses, où les maisons sont bâties en quelque sorte au hasard et sans nulle symétrie, les architectes sont assez souvent forcés d'adopter des polygones très-irréguliers, pour leurs plans. L'arpenteur qui lève une propriété, est parfois obligé de tracer aussi des polygones irréguliers.

« Enfin, il existe des ruines qui montrent que les anciens donnaient quelquefois à leurs matériaux des faces irrégulières, afin de profiter de toute la grosseur des pierres et d'en perdre le moins possible par la taille. Ils devaient ne les façonner qu'à mesure qu'ils les posaient, et il fallait que le saillant d'une pierre couvrît au rentrant d'une autre. Cette méthode a été suivie pour les revêtemens de la fameuse jetée qui protège la rade de Plymouth en Angleterre. Il en résulte que les vagues qui vont se briser contre cette masse, ne pourraient ébranler un des énormes blocs de marbre dont elle est composée, sans en ébranler plusieurs autres en même temps, et que l'ensemble est en quelque sorte indestructible. »

Appl. (*b*) : Les divisions de la circonférence sont nécessaires dans un grand nombre d'arts et notamment dans la fabrication des machines ; on ne peut tracer les roues dentées, les pignons et les lanternes des engrenages, les cylindres cannelés dont on fait usage dans plusieurs fabrications ; on ne peut même exécuter les roues d'eau, ni les roues de voiture, sans diviser la circonférence en un certain nombre de parties égales. C'est de l'exactitude de cette opération que dépendent la solidité d'une machine, la facilité et la régularité de son jeu. Si l'on divise par tâtonnement et conséquemment sans précision, on court risque d'occasionner des à-coups, des arrêts, des pertes de force, et d'accélérer la destruction des roues.

Appl. (*c*) : Les machines qu'on emploie pour diviser promptement et facilement les limbes gradués des instrumens de mathématiques et d'astronomie, renferment des cercles qui ont été divisés avec le plus grand soin, au moyen des méthodes que nous venons d'exposer, et l'on ne peut établir ces utiles machines, sans opérer préalablement une division géométrique de la circonférence, fondée sur les propriétés des polygones réguliers. C'est de la sorte que M. *Savart* père, artiste de Metz, a construit ses excellens *diviseurs*.

Appl. (*d*) : Les verres dont on compose les vitrages gothiques, sont des polygones réguliers : on les fait ainsi, non seulement pour rendre les vitres agréables à la vue, mais encore pour que la quantité de plomb qui doit être employée, soit la moindre possible ; car *de deux faces planes, équivalentes et d'un même nombre de côtés, celle qui est régulière, a le plus petit contour.*

Appl. (*e*) : Un architecte doit, autant que les localités le permettent, donner à tout édifice, la forme d'un polygone régulier, afin qu'avec le même développement de murs, avec la même dépense en maçonnerie, il puisse renfermer le plus grand espace possible; car *de deux surfaces planes qui ont même contour et même nombre de côtés, c'est la régulière qui est la plus grande.*

» Il faut même multiplier les côtés du polygone autant que le comporte la destination de l'édifice, parce que *de deux faces planes dont les contours sont égaux, celle qui a le plus de côtés, est la plus grande.* Ainsi, un édifice rond est plus spacieux que tout autre qui offrirait le même contour, sous une forme différente car une circonférence peut être considérée comme composée d'une multitude de lignes droites extrêmement courtes. »

« C'est en vertu de ces principes, que les ingénieurs militaires disposent les fortifications selon des polygones réguliers, et qu'ils donnent à ces polygones d'autant plus de côtés, que l'intérieur de la place de guerre doit avoir plus d'étendue. »

« C'est aussi pour se conformer aux mêmes principes, qu'on fait circulaires un grand nombre de vases et notamment les tuyaux de conduite, destinés soit à l'eau, soit au gaz d'éclairage. Ces vases, ces tuyaux absorbent alors moins de matière première, que si, sous toute autre forme, ils offraient la même *capacité* ou laissaient passer la même quantité de fluide. Il y a donc économie à se rapprocher le plus qu'il est possible de la forme circulaire, pour les objets creux ou évidés, et s'en écarter autant qu'on le peut, pour les objets en relief ou pleins. »

Appl. (*f*) : Le pavage des rues et du sol des édifices, la confection des parquets, la vitrerie, la marqueterie et l'art de faire la mosaïque, reposent aussi sur les propriétés des polygones. Ce qu'on se propose dans ces travaux, c'est de *couvrir l'espace autour d'un point, au moyen de polygones*. Il y a une infinité de manières d'y parvenir, si l'on peut se servir de polygones quelconques; car il suffit de les appliquer l'un contre l'autre, selon leurs côtés, et de placer un de leurs sommets au point donné : l'espace sera exactement couvert, quand la somme de tous les angles qui auront leurs sommets au même point, formera précisément 360°. C'est une pareille disposition que montre la figure 32 (P. VIII) : l'espace autour du point A est couvert par un triangle B, un rectangle C, un trapèze D, un hexagone, E, et un pentagone F.

« Mais il n'y a plus qu'un petit nombre de manières de couvrir l'espace autour d'un point, quand tous les polygones doivent être réguliers et de même nom. En effet, il faut au moins trois angles pour former 360°, car, quelque grand que soit un angle, il est moindre que 180°; et répété deux fois, il ne peut faire le double de ce nombre. Or, l'angle intérieur de l'heptagone régulier surpasse 128° (p. 207), et trois fois 128° donnent 384°. On ne peut donc employer de polygones réguliers qui aient plus de six côtés. En outre, le pentagone régulier ne peut servir, car son angle intérieur est de 108°, trois fois cet angle ne font que 324°, et quatre fois produisent 432°. Mais, on peut placer autour d'un point, six triangles équilatéraux dont l'angle intérieur est de 60° (F. 34), quatre carrés dont l'angle intérieur est de 90°, enfin trois hexagones réguliers dont l'angle intérieur est de 120° (F. 35). »

« Il n'y a donc que trois espèces de polygones réguliers qu'on puisse employer seuls, pour couvrir l'espace autour d'un point. Encore, le triangle équilatéral présente-t-il un grave inconvénient dans le carrelage : les six angles aigus réunis autour du même sommet, s'enfoncent bien plus aisément dans le sol, que les parties intérieures des triangles, et l'ouvrage est bientôt détérioré, quand une pression un peu forte vient à s'opérer sur un des points de réunion. Cet effet est bien moins à craindre avec des carrés, et toutefois, pour le prévenir plus sûrement, on ne donne point aux quatre angles droits le même sommet, si ce n'est dans le parquetage; quand il s'agit de pavés ou de carraux de terre cuite, il est d'usage de disposer les carrés en rangées parallèles, de manière que le joint de deux pièces d'une même rangée, réponde au milieu d'une pièce des deux rangées voisines : cette pose représentée dans la figure 34, est absolument la même que celle des pierres de taille dont se compose un mur.

« Probl. (*a*) : *Tracer un carrelage composé de triangles équilatéraux* (P. VIII, F. 33). »

« Faites un grand triangle équilatéral ABC, afin d'avoir deux concourantes AB, AC qui se coupent sous un angle de 60°. Portez des parties égales sur ces deux droites, à partir du concours A; par les points de division de chacune, menez des parallèles à l'autre; puis joignez entre eux les points de division correspondans. Les droites de jonction passeront par les intersections des parallèles et achèveront des triangles équilatéraux qui auront deux à deux un côté commun. »

« Probl. (*b*) : *Tracer un carrelage composé de carrés* (P. VIII, F. 34). »

« Tirez deux droites d'équerre AB, AC; portez sur l'une AB, des parties égales à la moitié du côté que doit avoir le carré; portez sur AC, des parties égales à ce même côté; menez au crayon, par les points de division de chacune des droites, des parallèles à l'autre. Vous aurez des rangées de rectangles accolés qui, pris deux à deux, formeront des carrés. Tracez enfin ces carrés à l'encre, de manière que les côtés parallèles à AC, dans une rangée, répondent aux milieux des côtés parallèles à AB, dans les deux rangées voisines. »

« Probl. (*c*) : *Tracer un carrelage composé d'hexagones réguliers.* »

« Tirez deux concourantes AB, AC qui se coupent sous un angle de 60° (P. VIII, F. 33); portez sur chacune, des parties égales au côté de l'hexagone régulier, et faites au crayon, toutes les autres opérations du problème (*a*). Vous aurez, autour de chaque intersection des parallèles, un groupe de 6 triangles équilatéraux égaux, qui formera un hexagone régulier tel que *defghi* (219). Passez donc à l'encre, de manière à tracer seulement les contours des hexagones qui ont deux à deux un côté commun, laissant au crayon les diagonales *dg*, *eh*, *fi*, pour les effacer ensuite, vous formerez la figure 35. »

« PROBL. (*d*) : *Tracer un carrelage composé d'hexagones réguliers et de triangles équilatéraux.* »

« Vous opérerez comme dans le problème précédent ; seulement, vous aurez soin, en mettant à l'encre, de former des hexagones qui aient deux à deux un sommet commun. Il en résultera autour de chacun, une auréole de triangles équilatéraux, et l'ensemble produira le joli appareil de la figure 36. »

« PROBL. (*e*) : *Tracer un carrelage composé d'hexagones réguliers et de losanges.* »

« Opérez d'abord comme dans le problème (*c*); puis, en passant à l'encre, tracez les contours d'hexagones réguliers qui aient deux à deux un sommet commun, dans les rangées parallèles à AB, et un côté commun dans les rangées perpendiculaires. Vous formerez ainsi un autre joli appareil que représente la figure 37.. »

« PROBL. (*f*) : *Tracer un carrelage composé d'octogones réguliers et de carrés* (P. VIII, F. 38). »

« Tirez deux lignes d'équerre AB, AC ; portez plusieurs fois, sur chacune, la longueur d'une ligne milieu AD de l'octogone régulier à employer, et menez par les points de division de l'une, des parallèles à l'autre. Vous formerez ainsi des rangées de carrés égaux. Prenez la moitié AE de la diagonale d'un de ces carrés, et portez-la sur AB, AC, des deux côtés de chaque sommet de carré qui se trouve sur ces droites. Vous marquerez ainsi des points 1, 2, 3, 4, 5, etc., qui seront des sommets d'octogones égaux à l'octogone donné (prob. *g*, p. 211) Menez alors par tous ces points, des parallèles à une droite AF diagonale d'une suite de carrés ; elles marqueront sur les parallèles à AB, AC, les sommets d'octogones qui auront deux à deux un côté commun, et laisseront entre quatre un petit carré. Il en résultera donc le bel appareil que présente la figure. »

« PROBL. (*g*) : *Tracer un carrelage composé de dodécagones réguliers et de triangles équilatéraux* (P. VIII, F. 39). »

« Tirez deux droites AB, AC qui fassent un angle de 60° ; élevez une perpendiculaire AD sur AB et une perpendiculaire AE sur AC ; portez sur AD, AE, de chaque côté de A, la moitié du côté du dodécagone à employer ; par les points de AE qui en résultent, menez des perpendiculaires à cette droite, ou plus simplement, des parallèles à AC ; de même, par le point marqué sur AD, menez une parallèle à AB. Ces parallèles coupent AB en *a*, *b* et AC en *c*; portez sur AB, le côté du dodécagone, de *a* en *d* et de *b* en *e*, portez-le aussi sur AC, de *c* en *f*, et par les points obtenus, tirez des parallèles. Ces parallèles coupent AE en *g*, *h*, et AD en *i*, portez deux fois de suite, la moitié du côté, sur AE, à partir de *g*, *h*, et sur DA, à partir de *i*, puis tirez des parallèles. Continuez toujours de même, en portant alternativement le côté sur AB, AC, et la moitié, deux fois de suite, sur AD, AE. »

« Quand tout l'espace à carreler sera couvert de parallèles, vous ferez un triangle équilatéral *klm*, dans le losange qu'auront formé près de A, deux des groupes pour lesquels l'écartement est un demi-côté, et joignant, de proche en proche, les intersections des parallèles, à partir des sommets du triangle *klm*, vous finirez par obtenir des dodécagones réguliers qui auront deux à deux un côté commun et seront entourés chacun d'une auréole de six triangles équilatéraux. »

« Pour démontrer la justesse de cette construction, j'observerai l'abord que $mn = no$. Le triangle *mno* est donc symétrique, et comme on angle n est de 60°, les deux autres ont aussi chacun 60° pour ndication, c'est-à-dire que *mno* est équilatéral et que $mo = no = ad$ ôté du dodécagone. »

« Ensuite, je ferai voir qu'*un triangle* AEB *est rectangle, quand l a un angle de* 60° *compris entre deux côtés dont l'un est double le l'autre.* Soient en effet AB double de BE et l'angle B de 60°. En menant EF par le milieu de AB, on forme un triangle symétrique EBF dont les deux angles E, F sont de 60° chacun. Par conséquent, ce triangle est même équilatéral, EF = BF = AF, le triangle AFE est symétrique, l'angle AEF a 30° d'indication, puisque A + AEF = BFE = 60°, et l'angle AEB est droit, puisqu'il vaut BEF + AEF = 60° + 30° = 90°. »

« Réciproquement, *dans tout triangle rectangle* AEB *qui a un angle de* 60° *ou de* 30°, *l'hypothénuse est double du plus petit côté;* car si l'on mène EF de manière à faire, dans l'angle droit, un angle de 60° et un angle de 30°, le triangle BEF sera équilatéral, et le triangle AFE, symétrique; ce qui donnera AF = FE = FB = BE. »

« Maintenant, il est fort aisé de reconnaître l'égalité des deux petits triangles rectangles dont A*a* et A*c* sont les hypothénuses. Donc A*a* = A*c*, et *dp* est double de *do*. Or l'angle *pdo* a 60° d'indication. Par conséquent, *op* est perpendiculaire à *do* et $op = gq$ côté du dodécagone. »

« On verrait de même que le triangle *fmk* est rectangle en *m*, et que *km* égale le côté du dodécagone. »

« La droite *rs* est diagonale d'un losange; elle est donc bissectrice de l'angle de 60° de ce losange, et forme un angle de 60° avec *rt* parallèle à AE. Donc, puisque le triangle *rts* est rectangle, *s* est double de *rt* moitié du côté du dodécagone.

« On arriverait facilement à démontrer, par les mêmes moyens, que chacun des autres côtés vaut aussi celui du dodécagone. »

« Quant aux angles, *srp* est de 150° comme celui du dodécagone régulier, puisque *sr*F est de 30°; *rpo* est de 150°, puisque *opd* est de 30°; $pom = pos + som$, or *pos* est de 30° et *som* de 120°; *mk* se compose d'un angle droit et d'un angle de 60°; enfin, on verrait par les mêmes moyens, que tous les angles de la figure de 12 côtés sont égaux. Ainsi, cette figure est bien un dodécagone régulier. »

« Probl. (*h*) : *Tracer un carrelage en losanges rangés parallèlement.* »

« Le losange qu'on emploie ordinairement dans le carrelage, est divisé en deux triangles équilatéraux, par sa plus courte diagonale. Il a donc deux angles de 60° et deux angles de 120°. »

« Ainsi, vous tirerez deux concourantes AB, AC (P. IX, F. 1) qui se coupent sous un angle de 60° (probl. *a*, p. 222); vous porterez plusieurs fois le côté du losange sur ces droites, à partir de A, et par les points de division de chacune, vous menerez des parallèles à l'autre. »

« Il est clair que l'espace sera couvert, comme avec des polygones réguliers, puisqu'à chaque intersection, il y aura deux angles de 60° et deux angles de 120° qui feront ensemble 360°. »

« Mais, souvent on dispose les losanges comme le montre la figure 2 : les angles de 60° sont assemblés six à six, et ceux de 120°, trois à trois ; les grandes diagonales sont en ligne droite, et chaque petite se trouve sur le prolongement d'un côté, tandis que dans la première disposition, les petites diagonales se suivent en ligne droite, comme les grandes. »

« L'appareil de la figure 2 est moins solide que celui de la figure 1, à cause de la réunion des angles aigus autour du même point ; mais on le préfère, parce qu'il donne le moyen de former des rosaces à six pointes, avec des losanges de trois teintes. »

Probl. (*i*) : *Tracer un carrelage en rosaces composées de losanges* (P. IX, F. 2). »

« Il suffit d'opérer comme dans le probl. *c* (p. 222) et de diviser chaque hexagone *abcdef* en trois losanges, au moyen de trois rayons *gb*, *gd*, *gf*, de manière que les trois rayons d'un polygone soient parallèles à ceux de tous les autres. »

Probl. (*k*) : *Tracer un carrelage en rectangles rangés parallèlement.* »

« Opérez comme dans le probl. *b* (p. 222), en observant de porter le plus petit côté du rectangle sur l'une des droites d'équerre, et la moitié du plus grand sur l'autre. Les lignes de joints d'une rangée devront correspondre aux lignes milieux des rangées voisines, comme dans le carrelage en carrés de la figure 34 (P. VIII). »

« Les rectangles sont surtout usités pour la confection des parquets. On les dispose souvent alors en zigzags d'équerre, de manière que le petit côté d'un rectangle fasse le prolongement du grand côté du suivant. Il en résulte un appareil assez agréable à l'œil, qui est représenté par la figure 3 (P. IX) et qu'on nomme *parquet en capucine*, dans plusieurs contrées. »

« Probl. (*l*) : *Tracer un parquet en capucine.*

« Tirez deux droites d'équerre AB, CD (P. IX, F. 3) ; portez plusieurs fois, sur ces droites, la largeur du rectangle, à partir de l'intersection E et de chaque côté ; puis, par les points de division de chacune, menez, au crayon, des parallèles à l'autre, et passez à l'encre de façon que tous les sommets correspondans des rectangles placés parallèlement, soient sur des intersections formant une ligne droite telle que FG. »

« Si vous récapitulez les problèmes qui précèdent, vous verrez qu'on a onze manières différentes de couvrir l'espace autour d'un point, en employant cinq polygones réguliers, le losange, le rectangle, et en les combinant entre eux. »

Appl. (*g*) : Le tracé de la volute ionique, donné page 166, n'est qu'un cas particulier de l'imitation, par arcs de cercle, d'une courbe, nommée *spirale*, qui s'écarte graduellement et de plus en plus d'un point où elle commence (*voyez* la Géométrie des courbes). La théorie complète de cette imitation a été renvoyée aux applications des polygones réguliers, parce que les tracés qui en dérivent nécessitent ceux de ces polygones. Ce n'est pas qu'on ne puisse imiter aussi la spirale en employant des polygones irréguliers : on le peut même sans polygones, avec le seul secours d'une ligne droite ; mais ces tracés sont fort peu usités. Nous offrirons toutefois, pour premier exemple, la spirale qui se décrit au moyen d'une ligne droite, attendu qu'elle est seule de son espèce.

« Probl. (*a*) : *Tracer une spirale par arcs de cercle, en développant une droite donnée* AB (P. IX, F. 4). »

« Pour s'expliquer le développement dont parle l'énoncé du problème, il faut supposer deux pointes plantées aux extrémités A, B, de la droite, et un fil qui, ployé autour de ces pointes, va plusieurs fois de l'une à l'autre. Il est clair que saisissant l'extrémité A du fil et le tirant, en tournant autour de la pointe B, on arrivera au point C, après avoir décrit une demi-circonférence. Si l'on continue ensuite le mouvement, en tournant autour de la pointe A, l'extrémité du fil décrira une autre demi-circonférence d'un rayon AC=2AB et arrivera en D ; un nouveau demi-tour sur B, donnera une troisième demi-circonférence qui finira en E et dont le rayon sera BD=3AB. Continuant toujours de même, on obtiendra une suite de demi-circonférences tangentes ou raccordées (141) dont les rayons consécutifs se surpasseront de AB, et l'ensemble formera une sorte de spirale. «

» Mais c'est là une description purement mécanique, que nous avons donnée uniquement pour justifier l'énoncé du problème et bien faire saisir l'esprit des tracés suivans. L'opération géométrique consiste d'abord à décrire de B, avec BA pour rayon, un arc qu'on arête au point C du prolongement de AB ; ensuite, il faut décrire de A, avec AC, un autre arc qui se termine au point D du prolongement de BA ; puis décrire de B, avec BD, un troisième arc qui se termine en E ; puis décrire de A, avec AE, un quatrième arc qui se termine en F ; puis continuer de prendre ainsi successivement pour centres A et B, d'augmenter de AB le rayon précédent, et de décrire des demi-circonférences qui, commençant au prolongement de AB d'un côté, se terminent aussi à ce prolongement de l'autre côté. »

« Mais, bien que toutes les parties de la courbe ainsi tracée, soient parfaitement raccordées, les changemens de rayon s'y font sentir, et cela provient de ce qu'un tour complet ne se compose que de deux arcs de cercle. Pour obtenir une imitation de la spirale qui plaise autant à l'œil que cette courbe elle-même, il faut rendre bien plus nombreux les arcs dont la somme doit former 360°. »

« PROBL. (*b*) : *Tracer une spirale, par arcs de cercle, en développant un polygone régulier.* »

« Prenons pour exemple le triangle équilatéral ABC (P. IX, F. 5). Si la courbe doit partir de A, nous décrirons de B, avec BA, un arc qui se termine au prolongement de CB; puis, de C, avec CD=2BA, un arc qui se termine au prolongement de AC; puis, de A, avec AE=3BA, un arc qui se termine au prolongement de BA. Alors un premier tour se trouvera achevé; il sera composé de trois arcs de 120° chacun et tangens deux à deux en D, E, F. Si l'on veut d'autres tours, on devra décrire de B, avec BF=4BA, un cinquième arc de 120° qui se termine au prolongement de CB, et continuer d'augmenter de BA le rayon, en prenant, pour centres, successivement les trois sommets. »

« Il est trop facile de concevoir, d'après cela, comment on doit opérer dans le cas d'un autre polygone régulier et même dans celui d'un polygone irrégulier, pour que nous ayons besoin de donner d'autres exemples. »

« PROBL. (*c*) : *Tracer une spirale, par arcs de cercle, en enveloppant des polygones réguliers inégaux, mais de même nom* (P. IX, F. 6).

« L'enveloppement d'un polygone est une opération inverse du développement. Vous concevrez aisément que si un grand fil 1.A, tendu selon le prolongement de la droite 6.1 et attaché au point 1, tourne autour de ce point pour venir s'appliquer sur la droite 1.2, son extrémité A décrira un arc de cercle, indication de l'angle A.1.2; qu'on pourra ensuite faire tourner le même fil autour du point 2, en le tendant, l'amener sur la droite 2.3 et obtenir ainsi un second arc indication de l'angle D.2.3, dont le rayon sera plus court de 1.2 que celui du premier; qu'enfin la même opération pourra se répéter à chaque sommet du polygone 1.2.3.4.5.6; que le polygone se trouvera alors enveloppé par le fil, et que ce fil sera diminué d'une longueur égale au pourtour 1.2.3.4.5.6.1. »

« Pour montrer comment on imite géométriquement ce tracé mécanique, nous supposerons qu'il s'agisse de décrire une spirale qui fasse trois tours complets autour d'un hexagone régulier donné 1.2.3.4.5.6. »

« Divisez le côté 1.6 en un nombre de parties égales double du nombre de tours, en six par conséquent. Du point milieu B, menez des droites aux sommets 2, 3, 4, 5 du polygone; par les autres points de division de B.1, menez des parallèles à 1.2 jusqu'à B.2; par les intersections qui en résulteront, menez des parallèles à 2.3, jusqu'à B.3, et continuez ainsi, jusqu'à ce que vous ayez formé les deux petits polygones 7.8.9.10.11.12 et 13.14.15.16.17.18. Ces polygones seront aussi des hexagones réguliers, car, à cause des parallèles, leurs angles seront égaux à ceux du polygone donné, et les côtés de chacun se trouveront tous contenus le même nombre de fois dans ceux du même polygone. »

« Quand ces opérations préliminaires seront achevées, vous porterez 12 fois de suite 1.6 sur son prolongement, pour obtenir le point A où doit finir la courbe (*); vous décrirez de 1, avec 1.A, l'arc de l'angle A.1.2; de 2, avec 2.D, l'arc de l'angle D.2.3; de 3, avec un rayon moindre de 2.3, l'arc de l'angle extérieur suivant, et ainsi de suite. Mais, après avoir décrit de 6, l'arc du dernier angle extérieur, vous diminuerez le rayon seulement de 6.7; vous prendrez le point 7 pour septième centre, les autres sommets du polygone moyen pour les centres suivans, et vous décrirez les arcs des angles extérieurs de ce polygone. Arrivés au dernier, vous prendrez pour centres, les sommets du troisième polygone, en commençant par le point 13. L'arc du dernier angle extérieur de ce petit polygone viendra se terminer au point 1, et vous aurez une sorte de spirale composée de 18 arcs de 60° chacun. »

« Lorsqu'on veut qu'une telle spirale ait un *œil* analogue à celui de la volute ionique, on le décrit de B avec B.1 pour rayon. La courbe s'en rapproche graduellement, et la rencontre diffère peu d'une tangence. »

« Aidés des exemples qu'offrent les problèmes précédens, il vous sera facile d'en comprendre la théorie générale. Vous saurez d'abord que le point où commence la courbe, A (F. 5), est son *origine*; que le point F où on l'arrête arbitrairement, est son *terme*; que le côté du polygone régulier, qui forme la différence de deux rayons consécutifs, s'appelle *module*, et qu'une suite d'arcs AD, DE, EF dont la somme donne 360°, constitue une *révolution*. »

« Comme il importe peu que la courbe soit décrite à partir de l'origine ou à partir du terme, nous supposerons, pour plus de simplicité, que la distance de ces deux points soit le premier rayon de la première révolution. Les suivans sont plus courts et diminuent de plus en plus. Dans certains cas, la différence entre deux rayons consécutifs est toujours le module. Dans d'autres cas (F. 6), c'est

(*) Il faut supposer 1.A égale à douze fois 1.6; on n'eût pu donner à la première de ces droites, sa vraie longueur, sans rendre trop petites les autres constructions, ou sans faire une très-grande figure.

seulement pour deux rayons consécutifs de la première révolution, que la différence vaut le module. L'excès 6.7 du dernier rayon de cette révolution sur le premier de la seconde, est moindre d'une partie du module divisé en autant de parties égales que le marque le double du nombre total des révolutions qu'on veut avoir, et le module diminué de deux parties forme la différence 7.8 entre deux rayons consécutifs, jusqu'à la troisième révolution. »

« Pour obtenir les premiers rayons des autres révolutions, on supprime successivement 2, 3, 4, etc. parties du module, et le reste est retranché du dernier rayon de la révolution précédente. Pour trouver ensuite la différence qui doit exister entre deux rayons consécutifs d'une même révolution, il faut ôter du module, le double de ce qui en a été retranché, quand on a formé le premier rayon de cette révolution. »

« Lors donc que le rayon se raccourcit constamment du module, d'un arc à l'autre et d'une révolution à la suivante, la distance d du terme à l'origine doit être telle que diminuée d'autant de modules qu'il y a d'arcs, elle se réduise à rien. Or, le nombre total des arcs égale le nombre k de ceux d'une révolution, multiplié par le nombre n des révolutions, car il y en a autant dans l'une que dans l'autre. Si donc nous représentons par m la longueur du module,

$$d = m \times k \times n$$

exprimera la relation qui doit exister entre tous les élémens d'une spirale dont les rayons ont une différence constante, et lorsque trois des quantités qui entrent dans cette égalité, seront données, on pourra toujours déterminer convenablement la quatrième. »

« Mais, il faut une autre relation, pour le cas où la différence des rayons diminue d'une révolution à la suivante. Afin de montrer comment on peut l'établir, nous supposerons que la spirale doive avoir trois révolutions de six arcs chacune. La distance AV du terme à la fin de la première, sera $6m$ (P. VII, F. 6); car l'excès du premier rayon 1.A sur le dernier (P. IX, F. 6), sera $5m$, et une distance $1.6 = m$ sépare les deux centres extrêmes, comme les autres. »

« La différence de deux rayons consécutifs de la seconde révolution sera

$$m - 2 \times \frac{m}{2 \times 3} = m - \frac{m}{3} = \frac{2}{3} m,$$

car $\frac{m}{2 \times 3}$ formera une des parties du module, et l'on doit en retrancher deux. La fin U de cette révolution (P. VII, F. 6), se trouvera donc éloignée de la fin V de la première, d'une longueur $\frac{2}{3} m \times 6$. »

« Pour avoir le premier centre 13 de la troisième révolution (P. IX, F. 6), il faudra retrancher du module 6.1, deux de ses parties. Conséquemment, la différence de deux rayons consécutifs, qui est double de ce qu'on retranche, sera

$$m-4\times\frac{m}{2\times3}=m-\frac{2}{3}m=\frac{m}{3},$$

pour la troisième révolution. Et en effet, d'après le tracé du probl. (c), les côtés du petit polygone sont chacun $\frac{1}{3}$ du côté du grand, comme B.13 est $\frac{1}{3}$ de B.1. Il y aura donc une distance de $\frac{m}{3}\times6$, entre la fin U de la seconde révolution (P. VII, F. 6) et celle C de la troisième. Or cette dernière doit se terminer au point 1 (P. IX, F. 6); par conséquent, la distance A.1 du terme à l'origine, ou

$$d=6m+\tfrac{2}{3}m\times6+\tfrac{1}{3}m\times6.$$

« Multipliant et divisant par 3, le terme $6m$, et changeant l'ordre des multiplications dans les autres termes, on obtient

$$d=\tfrac{6}{3}m\times3+\tfrac{6}{3}m\times2+\tfrac{6}{3}m\times1,$$

puis $$d=\tfrac{6}{3}m(3+2+1).$$

Maintenant, pour rendre cette relation générale, nous remplacerons par k, le chiffre 6 qui indique le nombre des arcs de chaque révolution, et par n, le chiffre 3 qui marque le nombre des révolutions. D'ailleurs, la somme $3+2+1$ ou $1+2+3$ est celle des nombres entiers consécutifs, depuis 1, jusqu'au nombre 3 des révolutions. Il faut donc, pour un nombre n quelconque de révolutions, mettre à la place de cette somme numérique, la somme générale de la progression par différence dont le premier terme est 1, la différence 1, le dernier terme n, et le nombre des termes, encore n. Or, cette somme générale a pour expression

$$(n+1)\frac{n}{2}\ (*).$$

La relation générale des élémens d'une spirale dont les rayons ont une différence variable, est donc

$$d=\frac{k}{n}m(n+1)\frac{n}{2}=km\frac{n+1}{2}$$

égalité qui permet de déterminer l'une quelconque des quatre choses qu'elle renferme, quand les trois autres sont connues. »

« Supposons, pour exemple d'application, qu'on veuille tracer une spirale à cinq révolutions, composées chacune de huit arcs d'un même nombre de degrés, entre une origine et un terme distans de 72 centimètres. Vous remplacerez d par $0^m,72$, k par 8, n par 5, et vous aurez l'égalité $0^m,72=8m\frac{5+1}{2}=8m\times3=24m$, qui vous donnera $m=\frac{0^m,72}{24}=0^m,03$, pour la longueur du module. Il faudra donc construire un octogone régulier dont le côté ait trois centi-

(*) Voyez l'*Arithmétique de Reisard et Bergery*, p. 268.

mètres (probl. *e*, p. 211), diviser un des côtés en dix parties égales, faire quatre autres octogones réguliers dans l'intérieur du premier, comme le montre la figure 6 (P. IX), et se conformer pour le reste, à ce qui a été prescrit dans le probl. (*c*), p. 227. »

« Si l'on veut faire un filet à une volute ainsi tracée, il faudra répéter pour la seconde arête en spirale, toutes les opérations qu'a nécessitées la première. On se donnera d'abord la largeur A*a* du filet à son terme; retranchant cette largeur de 1.A, on aura pour reste 1.*a*, distance de l'origine commune 1, au nouveau terme *a*. Puis, l'égalité $1.a = 8m\frac{5+1}{2}$ fera connaître le nouveau module *m*. On le portera sur 1.6, à partir de 1; on construira cinq nouveaux octogones réguliers, et l'on achevera du reste, comme pour la première spirale. »

« J'ai voulu, en présentant aussi longuement l'application des polygones réguliers à l'imitation de la spirale, vous mettre à même de tracer, dans tous les cas, une des courbes les plus utiles à l'industrie. Je terminerai en faisant observer que la spirale dont les rayons ont une différence variable, est employée quand on désire que la volute se resserre moins rapidement autour de l'œil. »

APPL. (*h*) : La courbe à deux centres de l'appl. (*h*), p. 164, forme un arc rampant peu gracieux : la grande différence des deux arcs, qui se trouve inverse de celle des nombres de degrés, fait apercevoir le défaut de continuité. Mais, il existe un procédé, fondé sur le tracé des polygones réguliers, au moyen duquel on peut multiplier les arcs de cercle, au point que l'arc rampant paraisse décrit d'un mouvement continu, même aux yeux des connaisseurs.

« Soient AB la différence des deux piédroits verticaux, et BC leur distance horizontale (P. IX, F. 7). Il s'agit de tracer par arcs de cercle, une portion de courbe qui parte de A, se termine en C et soit tangente aux parallèles AB, CD. »

« L'arc rampant demandé comprendra donc 180°, et il semble, au premier aperçu, qu'on pourrait le décrire en développant la moitié d'un polygone régulier pair, construit sur AB considérée comme ligne milieu. Mais le côté du polygone dépend de la ligne milieu, et il dépend en même temps de BC, puisque le développement du demi-contour doit égaler cette droite. Les données AB, BC devraient donc avoir une relation convenable, pour qu'au moyen de l'une ou de l'autre, on obtînt le même côté de polygone. Or une telle relation aura rarement lieu, et quand elle existera, rien ne le fera connaître. »

« La solution générale du problème consiste donc dans le tracé d'un demi-polygone régulier pair dont la ligne milieu parallèle à AB, ait même longueur que cette droite et coupe BC en deux parties telles que la plus grande EC égale le développement. »

« Il faut d'abord déterminer le point E. A cet effet, vous décrirez une demi-circonférence dont AB soit le diamètre, et vous y circonscrirez la moitié d'un polygone régulier dont le nombre de côtés soit double de celui des arcs à décrire (probl. *u*, p. 217). Comme l'arc rampant de la figure est composé de quatre arcs de cercle, c'est un demi-octogone régulier qu'on a construit à gauche de AB, et pour cela, on a élevé une perpendiculaire au milieu de AB, rapporté la moitié de AB sur cette perpendiculaire, à partir de l'intersection, achevé le demi-carré ABFG, et employé le tracé du probl. (*g*), page 211, pour trouver le côté du demi-octogone régulier circonscrit à la demi-circonférence dont AB est le diamètre. »

« Vous porterez ensuite successivement et bout à bout, sur le prolongement de BC, à partir de B, les côtés du demi-polygone construit. Cela vous donnera une droite BK égale au développement. Enfin, vous éleverez une perpendiculaire EI au milieu de CH; le point E ainsi placé, rendra EC égale au développement BH+BE ou égale à BH+AI. »

« Si donc, au moyen de parallèles à FC, vous construisez à droite de EI, un contour égal à celui du demi-polygone situé à gauche de AB (appl. *p*, p. 67), il est clair qu'en développant ce contour augmenté de IA, comme pour tracer une portion de spirale qui parte de A (probl. *b*, pag. 227), vous aurez un quatrième rayon KL=KC, puisque EKL=EC. »

« Presque toujours BC est assez grand par rapport à AB, pour que le point E tombe entre B et C. Si cependant il venait à se trouver entre B et H, les conditions de tangence pourraient être remplies, tant que A serait entre I et M. »

222. Polygones étoilés : Du tracé des polygones réguliers dérive encore celui des *polygones étoilés réguliers*. On donne le nom de *polygone étoilé* à toute face limitée par des droites, dans laquelle deux quelconques des angles saillans sont séparés par un angle rentrant. Quand tous les angles saillans sont égaux entre eux, qu'il en est de même des angles rentrans, et que tous les côtés ont la même longueur, le polygone étoilé est dit *régulier*; dans tout autre cas, il est *irrégulier*.

Les polygones étoilés irréguliers n'ont aucune importance, et nous n'en parlerons pas; mais nous consacrerons quelques momens à l'étude des réguliers, attendu qu'ils sont employés dans plusieurs arts, tels que la vitrerie, la mosaïque, la marqueterie, le décor, la broderie, le jardinage, etc. On construit même des forts dont les parapets suivent les contours de polygones étoilés réguliers, et une foule de produits industriels présentent des formes ou des dessins dans lesquels figurent ces mêmes polygones.

Il y a deux manières de déduire d'un polygone régulier ordinaire, un polygone étoilé régulier : on l'obtient *par réduction*, et alors il est moindre que le polygone primitif, ou bien on l'obtient *par extension*, et alors il est plus grand que le polygone qui a servi à le former.

PROBLÈME : *Tracer par réduction, un polygone étoilé régulier.*

Construisez un polygone régulier ordinaire qui ait autant de sommets ou de côtés, que le polygone étoilé doit avoir de pointes, et joignez chaque sommet avec le second des suivans (P. IX, F. 8). Lorsque le polygone primitif a plus de six côtés, on peut aussi joindre chaque sommet avec le troisième des suivans (F. 11), et l'on obtient un polygone étoilé à pointes plus saillantes. Les pointes sont encore plus prononcées, si, quand le polygône primitif a plus de huit côtés, on joint chaque sommet avec le quatrième des suivans. Enfin, les pointes ont d'autant plus de saillie, que le sommet avec lequel on en joint un autre, porte un numéro plus élevé.

Supposons qu'il s'agisse de tracer un polygone étoilé régulier à cinq pointes. Vous construirez un pentagone régulier ABCDE (F. 8), et vous tirerez la diagonale AC, en passant le sommet B, puis la diagonale CE, en passant le sommet D, puis les diagonales EB, BD, DA qui retranchent chacune un sommet. Vous formerez ainsi un polygone étoilé à cinq pointes et régulier, AFBGCHDIEKA.

D'abord les côtés sont égaux. En effet, la corde AC = la corde AD, puisque l'arc ABC = l'arc AED, et BE est parallèle à CD, puisque l'arc BC = l'arc DE (95). Par conséquent AF = AK, comme AC = AD (79). De plus, AC = BE, AB est parallèle à CE, et par suite AF = BF. On ferait voir de même que BF = BG, que BG = CG, etc.

En second lieu, les angles saillans KAF, FBG, etc., sont égaux, puisqu'ils sont tous inscrits et qu'ils comprennent des arcs égaux (98). Les angles rentrans AFB, BGC, etc., sont aussi égaux, par la raison que les triangles ABF, BGC, etc. sont égaux (164).

Il est visible d'ailleurs que cette démonstration peut s'appliquer à tous les cas.

223. *Les sommets des angles rentrans d'un polygone étoilé régulier, construit par réduction, forment un polygone régulier de même nom que le polygone primitif*; c'est-à-dire, par exemple, que la figure FGHIK est un pentagone régulier, comme la figure ABCDE (P. IX, F. 8).

Il résulte effectivement de la démonstration précédente, que le triangle FAK = FBG = GCH = etc. (165); donc KF = FG = GH = etc., et puisque l'angle rentrant AFB = BGC = etc., leurs opposés par le sommet KFG, FGH, etc., sont aussi égaux. Enfin, les côtés de la figure FGHIK, en même nombre que les pointes du polygone étoilé, sont aussi en même nombre que les sommets ou les côtés du polygone primitif ABCDE.

Cette démonstration convient visiblement à tous les cas, comme la précédente.

PROBLÈME : *Tracer par extension, un polygone étoilé régulier.*

Construisez un polygone régulier ordinaire qui ait autant de côtés que le polygone étoilé doit avoir de pointes ; puis prolongez tous les côtés, et marquez l'intersection de chaque couple de côtés séparés par un troisième (P. IX, F. 8).

Lorsque le polygone primitif a plus de six sommets, les côtés du couple dont on marque l'intersection, peuvent être séparés par deux autres (F. 11), et lorsqu'il y a plus de huit sommets, les côtés de chaque couple peuvent être séparés par trois autres. On obtient des pointes d'autant plus prononcées, que les côtés de chaque couple dont se marque l'intersection, sont séparés par un plus grand nombre d'autres côtés.

Soit, pour exemple, à construire par extension, un polygone étoilé régulier, à cinq pointes. Vous tracerez le pentagone régulier ordinaire FGHIK (F. 8), et après en avoir prolongé tous les côtés, vous marquerez les intersections A, B, etc., de chaque couple de concourans. Il en résultera le polygone étoilé à cinq pointes et régulier AFBGCHDIEK.

Ce tracé est une conséquence nécessaire du principe 223. Si cependant on en voulait une démonstration particulière, il serait facile de faire voir que les triangles FAK, FBG sont égaux (166), puis d'en déduire l'égalité des côtés et celle des angles saillans du polygone étoilé. Quant aux angles rentrans, ils sont opposés par le sommet aux angles du polygone primitif.

224. On peut aussi conclure du principe 223 ou démontrer directement, que *les sommets des angles saillans d'un polygone étoilé régulier, construit par extension, forment un polygone régulier* ABCDE, *de même nom que le polygone primitif* FGHIK (P. IX, F. 8).

225. Enfin, les tracés qui précèdent, font voir que *toup olygone étoilé régulier a les mêmes axes de symétrie, que le polygone régulier ordinaire duquel il est déduit.*

226. *Le polygone étoilé pentagonal est le plus simple des polygones étoilés réguliers qu'on puisse tracer ;* le carré n'en peut donner un : on n'obtient que les deux diagonales, si l'on joint chaque sommet avec le second des suivans. Quant au triangle équilatéral, il n'a point de diagonales.

227. *Le nombre des polygones étoilés qui peuvent être déduits d'un polygone ordinaire impair, est la moitié du nombre de côtés de ce polygone diminué de trois.*

« Il est visible, en effet, qu'il y a égalité entre le nombre des polygones étoilés qui peuvent être déduits d'un polygone ordinaire, et le nombre des diagonales inégales qu'on peut mener d'un même sommet, dans le polygone primitif. Or, si ce polygone est impair, il faut pour trouver le nombre des diagonales inégales, ôter d'abord du nombre des côtés ou des sommets, le sommet A de départ

(P. IX, F. 8); puis prendre seulement la moitié du reste, pour supprimer les sommets D, E; et retrancher enfin le sommet B qu'on doit passer au moins. Si donc nous représentons par n le nombre des sommets du polygone primitif et que nous fassions sur n les opérations qui viennent d'être indiquées, nous trouverons pour le nombre des diagonales inégales et des polygones étoilés différens,

$$\frac{n-1}{2}-1=\frac{n-1}{2}-\frac{2}{2}=\frac{n-1-2}{2}=\frac{n-3}{2}.\text{»}$$

« Il s'ensuite que le pentagone ne peut donner qu'un seul polygone étoilé; car, pour le pentagone, $n=5$ et $\frac{n-3}{2}=\frac{5-3}{2}=\frac{2}{2}=1$.

Il est clair effectivement que, si, au lieu de passer seulement le sommet B, vous passez B et C, vous joignez alors A à D; que cela revient à passer le sommet E, en suivant une marche inverse, et qu'il doit en résulter la même figure. »

« L'heptagone donne deux polygones étoilés (F. 10 et 11); car, dans ce cas, $\frac{n-3}{2}=\frac{7-3}{2}=\frac{4}{2}=2$. Si l'on voulait passer les trois sommets B, C, D (F. 11.), on aurait la diagonale AE, comme en passant seulement les deux sommets F, G. »

228. *Le nombre des polygones étoilés qui peuvent être déduits d'un polygone ordinaire pair, est la moitié du nombre de côtés de ce polygone diminué de quatre.*

« En effet, pour obtenir le nombre des diagonales inégales qui, n'étant pas axes de symétrie, peuvent être tirées d'un même sommet A (P. IX, F. 9), il faut d'abord ôter du nombre n des sommets ou des côtés, A et D, extrémités d'un axe de symétrie, ce qui donne $n-2$; puis prendre la moitié du reste, afin de supprimer E, F, ce qui donne $\frac{n-2}{2}$, et retrancher enfin le sommet B qu'on doit passer au moins. On a donc, pour le nombre des polygones étoilés différens fournis par un polygone pair,

$$\frac{n-2}{2}-1=\frac{n-2}{2}-\frac{2}{2}=\frac{n-2-2}{2}=\frac{n-4}{2}.\text{»}$$

Ainsi, l'hexagone ne peut produire qu'un seul polygone étoilé; car, dans ce cas, $\frac{n-4}{2}=\frac{6-4}{2}=\frac{2}{2}=1$. Effectivement, on n'obtiendrait que l'axe de symétrie AD, si l'on voulait passer les deux sommets B, C. »

« L'octogone peut donner deux polygones étoilés différens (F. 12 et 13); car, pour ce cas, $\frac{n-4}{2}=\frac{8-4}{2}=\frac{4}{2}=2$. Si l'on passait les trois sommets B, C, D (F. 12), on obtiendrait seulement l'axe de symétrie AE. »

« Vous verrez tout aussi facilement que le polygone de neuf côtés donne trois polygones étoilés différens, que le décagone n'en fournit pas davantage, et qu'on peut en déduire quatre seulement, des polygones de onze et de douze côtés. »

Donc, *un polygone pair ne donne pas plus de polygones étoilés, que le polygone impair qui a un côté de moins.*

Enfin, il faut observer que dans certains cas (F. 9 et 12), le tracé par réduction, d'un polygone étoilé, exige qu'on prenne deux points de départ A, B, tandis que dans d'autres (F. 8, 10, 11, 13), un seul point de départ A est suffisant.

Il est bon de remarquer aussi que les côtés d'un polygone étoilé de seconde espèce (F. 11 et 13), forment en se coupant, un polygone étoilé de première espèce (F. 10 et 12).

Égalité des polygones : Nous avons assigné les caractères auxquels on reconnaît que deux triangles sont égaux ; nous avons fait connaître aussi les conditions nécessaires pour que deux parallélogrammes puissent se superposer. C'est de l'égalité des autres polygones, que nous allons maintenant nous occuper.

229. *Deux polygones réguliers sont égaux, quand l'angle intérieur et le côté de l'un, sont égaux à l'angle intérieur et au côté de l'autre;* car il est visible qu'alors les deux figures peuvent se superposer dans toute leur étendue : les côtés de l'une prennent les directions des côtés de l'autre et se terminent aux mêmes points. Or, quand deux polygones réguliers ont un même nombre de côtés ils ont le même angle intérieur (p. 107). On peut donc dire que *deux polygones réguliers sont égaux, lorsqu'ils portent le même nom et qu'en même temps le côté de l'un égale le côté de l'autre.*

230. *Deux polygones réguliers sont encore égaux, quand ils portent le même nom, et que les rayons des circonférences circonscrites sont de même longueur.*

En effet, chaque circonférence sera partagée en parties égales par les sommets, et comme il y aura le même nombre de parties dans les deux courbes, les arcs de l'une contiendront autant de degrés que les arcs de l'autre. Or, puisque les rayons sont égaux les premiers arcs auront la même longueur que les seconds (17); par conséquent, le côté AB (P. IX, F. 14), sera égal au côté A'B' (23) et en vertu du principe qui précède, les deux polygones seront égaux.

Problème : *Construire un polygone régulier qui soit égal à un polygone régulier donné* ABCDEF (P. IX, F. 14).

Cherchez le centre G de la circonférence circonscrite au polygone donné (p. 203); décrivez avec le rayon GA, une circonférence G prenez le côté AB et portez-le comme corde, sur cette circonférence autant de fois qu'il pourra y être contenu. Vous obtiendrez le poly gone A'B'C'D'E'F' qui aura autant de côtés que le polygone donné et pourra le couvrir exactement.

231. Le moyen le plus simple de reconnaître si *deux polygones irréguliers sont égaux*, c'est d'examiner *s'ils peuvent être partagés en un même nombre de triangles et si les triangles de même rang sont égaux*; car lorsque les triangles ABC, ACD, ADE (P. IX, F. 15) égalent les triangles de même rang A'B'C', A'C'D', A'D'E', les deux polygones sont exactement superposables, puisque chaque triangle du second peut couvrir exactement son égal dans le premier. Or, de l'égalité des triangles de même rang, résulte qu'ils ont des côtés égaux, et réciproquement l'égalité des côtés entraîne celle des figures triangulaires (164). On peut donc dire aussi que *deux polygones quelconques sont égaux, quand les côtés et les diagonales tirées d'un sommet, dans l'une des figures, ont même longueur que les côtés et les diagonales de même rang, appartenant à l'autre.*

PROBL. (*a*) : *Construire par triangles, un polygone qui soit égal à un polygone quelconque donné* ABCDE (P. IX, F. 15).

Faites le triangle A'B'C' égal au triangle ABC dont vous pouvez prendre les côtés (164); tracez sur A'C', le triangle A'C'D' égal à ACD; formez sur A'B', le triangle A'D'E' égal au triangle ADE, et continuez toujours ainsi, jusqu'à ce que vous ayez construit tous les triangles qu'on pourrait faire dans le polygone donné, en tirant des diagonales d'un sommet à tous les autres.

Observez qu'il serait superflu de tracer les droites AC, A'C' et AD, A'D' : les distances AC, AD peuvent être prises sans cela, et il suffit de marquer les sommets C', D', pour les joindre aux autres.

Lorsqu'on veut vérifier l'opération, ce qui est toujours convenable, il faut examiner s'il y aurait égalité entre les diagonales qui seraient menées par un des sommets voisins de A et A' : si, par exemple, les droites E'B', E'C' sont égales aux droites EB, EC.

Le tracé qui vient d'être enseigné, est simple et rapide; mais dans le cas où quelques-uns des triangles ont des angles fort aigus et des angles très-obtus, il devient difficile de déterminer exactement les troisièmes sommets, au moyen d'arcs de cercle. Si, par exemple, l'angle A du triangle ADE était très-aigu et l'angle D très-obtus, les arcs décrits pour trouver le troisième sommet E' du triangle A'D'E', seraient presque tangens, et l'on ne pourrait marquer avec précision leur intersection. Le procédé suivant n'a pas cet inconvénient.

PROBL. (*b*) : *Construire un polygone égal à un autre, au moyen de projections sur une diagonale* (P. IX, F. 16).

Tirez, dans le polygone donné, la plus grande diagonale possible AB; projetez tous les côtés sur cette droite, en y abaissant une perpendiculaire de chacun des autres sommets; puis tirez une droite A'B' égale à AB; portez-y les projections des côtés : AD de A' en D', DF de D' en F', etc.; élevez par les points D', F', etc. qui en résultent, des perpendiculaires sur A'B'; prenez D'C' = DC, F'E' = FE, etc.; joignez A' et C', C' et E', etc., et vous aurez un polygone A'C'E'...B'... qui sera parfaitement égal à ACE...B...

Vous avez dû reconnaître le procédé donné page 67, pour reporter une courbe, d'une épure sur la face d'un corps, et vous verrez sans peine, que la figure qu'il donne, peut couvrir exactement celle que vous deviez copier. Mais, quand les perpendiculaires sont longues, la moindre erreur dans leurs directions, peut en causer de fort grandes sur les positions des sommets du polygone demandé. C'est pourquoi l'on doit préférer, dans ce cas, de projeter sur trois droites et même sur quatre : les perpendiculaires en deviennent plus courtes et les erreurs moins graves.

Probl. (c) : *Construire un polygone égal à un autre, au moyen de projections sur les côtés d'un triangle* (P. IX, F. 17).

Choisissez trois sommets A, B, C, tels qu'en les joignant deux à deux, vous obteniez un des triangles les plus grands et les moins irréguliers que puisse fournir le polygone donné. Des sommets qui avoisinent chaque côté du triangle, abaissez des perpendiculaires sur ce côté. Construisez un triangle A'B'C' égal au triangle ABC (164), et faites sur chaque côté de cette figure, ce qu'il a été prescrit de faire sur A'B' (probl. *b* et F. 16).

Les côtés du triangle ABC (F. 17) doivent différer le moins qu'il est possible, afin que cette figure ne renferme pas d'angles très-aigus; qu'elle soit pour cela même, plus susceptible d'être copiée avec précision, et qu'il puisse y avoir exacte superposition de A'B'C' sur ABC; car, de cette superposition des deux triangles, dépend celle du polygone construit et du polygone donné, ou leur égalité.

Probl. (d) : *Construire un polygone égal à un autre, au moyen de projections sur les côtés d'un rectangle.*

Tracez un rectangle qui renferme le polygone donné (195), et faites pour les côtés de ce rectangle, ce qui est prescrit pour les côtés du triangle, dans le problème précédent.

On doit employer le rectangle ou le carré, au lieu de tout autre quadrilatère, parce qu'une figure à angles inégaux est, dans certains cas, plus difficile à tracer avec précision.

Probl. (e) : *Construire un polygone égal à un autre* ABCDEF, *au moyen du tricage* (P. IX, F. 18).

Tracez par tous les sommets du polygone ABCDEF, des droites parallèles entre elles (p. 68, appl. *q*); portez sur toutes, une même longueur arbitraire AA', et parmi les points qui en résultent, joignez ceux dont les correspondans sont unis par les côtés du polygone donné. Vous formerez ainsi le polygone A'B'C'D'E'F' qui sera égal au polygone ABCDEF; car des droites qui joignent les extrémités de parallèles égales, sont parallèles et égales (66); donc A'B'=AB, B'C'=BC., etc, l'angle A' = A, B' = B, etc. (64), et les deux polygones peuvent se superposer exactement.

L'emploi du tricage est., comme vous voyez, bien plus expéditif que les procédés précédens. Il faut donc le préférer, toutes les fois que le polygone demandé peut être placé sur le tableau où se trouve le polygone donné.

Appl. (*a*) : *Méthode des carreaux.* Les dessinateurs de plans, de cartes, et plusieurs autres artistes emploient le procédé du probl. (*d*), de la manière suivante. Sur une droite AB (P. IX, F. 19), ils portent autant de parties égales qu'il en faut, pour que cette droite soit plus grande que la plus longue parallèle à AB, qui puisse être tracée dans le polygone donné CDEF..... Aux extrémités A, B, ils élèvent des perpendiculaires AM, BN, sur lesquelles ils portent des parties égales à celles de AB, jusqu'à ce que le polygone soit dépassé. Joignant M, N, ils ont un rectangle ABNM qu'ils divisent en bandes par des droites, en joignant les points de division de AB, avec ceux de MN, et les points de division de AM, avec ceux de BN. Les premières de ces droites sont perpendiculaires aux secondes, et le rectangle ABMN se trouve partagé en carrés. Pour se reconnaître facilement dans ce grand nombre de carrés, les artistes numérotent les parallèles qui les forment. Ensuite, ils construisent un rectangle A'B'N'M' égal au rectangle ABNM (195); ils portent A1 sur A'B' et sur M'N', sur A'M' et sur B'N', autant de fois qu'il peut y être contenu, et ils numérotent les parallèles de la seconde figure comme celles de la première.

« Tout est alors disposé pour que la copie du polygone donné puisse être facilement exécutée. Veut-on marquer, par exemple, le sommet C, dans le rectangle A'B'N'M'; on prend avec le compas, la distance de C à la droite I.I de ABNM et on la porte sur 2.2 de A'B'N'M', de P en Q; on prend la distance de C à 2.2 de ABNM, et on la porte perpendiculairement à 2.2 de l'autre figure, de Q en C'. Le point C' est la position de C sur la copie. »

« Les distances dont nous venons de parler, peuvent toujours être prises et portées, sans qu'on ait besoin de tracer des perpendiculaires, à cause de leur peu de longueur. »

« Pour avoir D', on prend sur 3.3, la distance de D à I.I, et on la porte de R en D'. En voilà bien assez pour montrer comment on obtient sur la copie, la position de chacun des autres sommets. Quand ils y sont tous marqués, on les unit deux à deux par des droites, et l'on obtient le polygone C'D'E'F'..... qui peut couvrir exactement le polygone donné, si les rectangles et les parallèles, ont été tracés avec beaucoup de soin, et si les distances des sommets aux parallèles, ont été prises et portées par quelqu'un dont l'œil soit exercé. »

« Cette méthode de carreaux a cela d'avantageux sur les autres, qu'elle permet de tracer à vue, sans prendre de mesures, les sinuosités que pourrait présenter le plan ou la carte, entre deux sommets du polygone : les côtés des petits carrés sont des limites qui ne permettent pas qu'on s'écarte sensiblement du vrai contour de ses sinuosités.»

« Quand le dessin qu'il s'agit de copier, est précieux, on forme avec un châssis et des fils de soie, les traillis ABNM et on l'applique fixement sur le modèle. Un pareil treillis peut aussi être employé pour la copie, si l'on veut éviter de tracer les carrés ou carreaux. »

Appl. (*b*) : Dans plusieurs métiers et même dans quelques arts, la copie d'une figure s'obtient par des procédés qui se rattachent encore plus directement que le précédent, à ce principe, que deux figures égales sont superposables.

« Les tailleurs, les couturières, les chaudronniers, les ferblantiers, les tailleurs de pierres, les charpentiers, les serruriers, etc., posent un patron sur le tissu, sur la tôle, sur la pierre, sur le bois, sur le fer, etc., et abattent tout ce qui dépasse ce patron, soit avant de l'enlever, soit après en avoir tracé le contour. »

« Les dessinateurs appliquent par fois leur modèle sur une feuille de papier, puis avec une pointe très-fine, ils piquent tous les points dont ils ont besoin pour tracer la figure donnée; ou bien ils appliquent le modèle après en avoir piqué tous les contours, puis, ils frappent dessus avec un *poncif* ou sachet rempli de charbon pulvérisé, ce qui produit une copie entière. C'est ainsi qu'on trace sur les tissus, les dessins des broderies ; seulement, on emploie une poudre qui s'attache beaucoup plus fortement que celle du charbon. Mais, les deux derniers moyens gâtent tout-à-fait les dessins. Il en existe encore trois autres : celui que nous allons décrire d'abord nuit aussi au modèle ; les deux autres ne l'endommagent nullement. »

« On barbouille une feuille de papier avec du crayon noir ou rouge; on applique sur une feuille blanche, le côté mâchuré ; on place le modèle sur le tout, et l'on en suit tous les traits avec une pointe un peu émoussée, qu'on appuie suffisamment pour produire une empreinte sur le papier blanc. C'est là ce qu'on appelle *calquer.* »

« Pour avoir une copie qu'on puisse facilement multiplier, sans recourir au modèle, il faut imbiber d'huile une feuille de papier, l'appliquer sur le dessin quand elle est bien sèche, et suivre avec un crayon, les traits de la figure donnée. Comme le papier huilé est transparent, il permet de bien distinguer tous les contours de cette figure.»

« Appliquez sur une vitre, la copie huilée ; placez par-dessus, une feuille blanche et mince, vous pourrez, avec un crayon, suivre tous les traits de la figure donnée et la copier de nouveau. C'est là ce qu'on appelle *calquer à la vitre.* »

232. Il y a des faces qui peuvent se superposer exactement soit par application, soit par rabattement (25) ; d'autres, quoiqu'égales, ne sauraient se superposer que par rabattement. Dans la première classe sont toutes les faces qui ont de la symétrie. Ainsi, deux

triangles symétriques, deux trapèzes symétriques, deux losanges, deux rectangles, deux portions de cercle et deux polygones réguliers quelconques se superposent, s'ils sont égaux, quand on fait confondre les axes de symétrie, soit en appliquant les deux figures l'une sur l'autre, soit en opérant un rabattement. Cela vient de ce que la partie située, par exemple, à droite de l'axe de symétrie dans l'une des figures, est égale à la partie de droite, et à la partie de gauche de l'autre.

Il résulte de cette propriété que le panneau propre à fermer une ouverture qui a un axe de symétrie, peut s'y placer ou en glissant dans des coulisses, ou en tournant sur une charnière : tels sont les battans de portes rectangulaires, les croisées, les couvercles des boîtes, etc.

Mais, les deux moitiés d'un triangle symétrique, ou celles d'un trapèze symétrique, par exemple, ne peuvent être placées exactement l'une sur l'autre, si l'on n'en renverse aucune; car ces moitiés n'ont point d'axe de symétrie, et par suite, les parties de droite dans l'une ne sont pas égales aux parties de droite dans l'autre ; elles sont égales seulement aux parties de gauche, à cause de la symétrie du triangle ou du trapèze total, et le rabattement opère la superposition (160 et 185).

Quand un rabattement est indispensable pour opérer la superposition, on dit que les figures sont *égales par symétrie*, pour les distinguer de celles qui peuvent être placées l'une sur l'autre sans renversement, et qu'on appelle *figures égales* tout simplement. Les arts font un fréquent usage des figures égales par symétrie : il faut donc apprendre à les tracer. On y parvient au moyen du principe suivant.

233. *Deux polygones* ABCDE, A'B'C'D'E', *sont égaux par symétrie, quand les droites qui joignent les sommets de l'un à des sommets de même rang dans l'autre, ont un axe de symétrie commun* FG (P. IX, F. 20); car, puisque les angles F, H, I, K, G sont alors droits (43), toutes les parallèles de la figure FA'B'C'D'G se rabattront sur celles de la figure FABCDG si l'on fait tourner sur FG, et comme les premières sont égales aux secondes, les points A', B', C', D', E' tomberont sur A, B, C, D, E; les deux polygones se superposeront donc par rabattement.

PROBLÈME : *Tracer un polygone qui soit égal par symétrie à un polygone donné* ABCDE (P. IX, F. 20).

Menez des parallèles quelconques par tous les sommets du polygone ; coupez-les par une perpendiculaire FG ; portez AF de F en A', BH et II en B', EI de I en E', etc.; joignez A' avec B' et E', B' avec C', etc. ; vous formerez le polygone A'B'C'D'E' qui sera égal par symétrie, au polygone donné ; ou, ce qui revient au même, les deux figures seront symétriquement placées par rapport à l'axe FG.

Appl. (*a*) : Il y a plusieurs métiers où l'on est obligé de forme des figures égales par symétrie : tels sont en général ceux qui concernent les vêtemens, parce que le corps humain est composé de parties égales et symétriquement placées. S'agit-il, par exemple, d couper dans une étoffe les dessus des deux manches d'un habit ; l tailleurs plie l'étoffe de façon que l'endroit se trouve en-dessus e en-dessous ; puis, il trace un seul dessus de manche et coupe selon c tracé, les deux morceaux de drap placés l'un sur l'autre ; enfin il dédouble, ce qui est l'opération inverse du rabattement, et il a deu figures égales qui peuvent être placées symétriquement, en présentan l'endroit du même côté.

« Le cordonnier, pour former les deux semelles d'une paire de souliers ; le gantier, pour tailler les dessus ou les dessous d'une paire d gants ; la lingère, pour couper les passes d'un bonnet, emploient l procédé du tailleur, et il en est de même de plusieurs autres ouvriers. »

Appl. (*b*) : On peut encore se servir du même procédé, pou former un carré dans un rectangle d'une matière susceptible d'êtr pliée. Formez le pli de manière qu'il passe exactement par le sommet A (P. IX, F. 21), et que le petit côté AB du rectangle s'applique sur le grand côté AC ; marquez la nouvelle position B' d sommet B, et l'autre extrémité D du pli AD ; ramenez le triangl ABD dans sa première position et tracez la droite B'D ; le quadrilatère ABDB' sera un carré, puisqu'il se trouvera composé de deu triangles rectangles égaux et symétriquement placés par rapport à l diagonale AD (201).

Appl. (*c*) : Toutes les figures qu'on obtient par impression, son égales par symétrie à celles que présentent les planches, les caractères, les cachets, etc., puisqu'elles sont des empreintes de figure renversées. Il en résulte qu'il faut écrire de droite à gauche sur un planche, pour que les mots soient reproduits de gauche à droite c'est de cette manière que les graveurs écrivent sur le cuivre, l'acier le bois, et les lithographes sur la pierre.

« Les caractères d'imprimerie doivent aussi se présenter à l'envers Pour les obtenir, on coule l'alliage dont ils sont formés, dans de moules qui offrent les lettres en creux et tournées dans le sens ordinaire ; de sorte que les lettres du moule sont simplement égales au lettres de l'alphabet, et que leur égalité avec celle des caractères est une égalité de symétrie. La même chose arrive, quand on lithographie, on écrit de gauche à droite, sur un papier préparé qu'o applique ensuite sur la pierre : il y laisse des caractères égaux pa symétrie à ceux qu'il porte, et la pierre reproduit ces derniers sur l papier blanc qu'on y presse. C'est encore ce qui a lieu dans l'opération du *cliché* : un dessin est appliqué renversé, sur une planche ; i y laisse une empreinte égale par symétrie à la figure qu'il contient on sculpte cette planche selon l'empreinte, et elle devient propre à reproduire le dessin, par impression. »

Appl. (*d*) : Enfin, les miroirs plans présentent pour image d'un figure plane, une figure qui lui est égale par symétrie; car si vous mettez l'objet tout contre la glace, il ne s'applique sur son image, que renversé. De là vient que les mots écrits de droite à gauche sur un papier, se lisent facilement, quand on les place devant un *miroir*.

234. Division des polygones en parties équivalentes : L'équivalence des polygones n'est pas moins importante pour la pratique, que leur égalité (190)..L'arpenteur, par exemple, est souvent appelé à partager un terrain polygonal en portions de même étendue, en un certain nombre de polygones équivalens. Il peut procéder de deux manières : sur le terrain même ou d'après un plan de ce terrain. La première méthode est bien plus sûre que la seconde; mais nous ne pourrons l'exposer qu'à l'article des *mesurages*. C'est donc de la division en parties équivalentes, d'un polygone quelconque, tracé sur le papier, que nous allons nous occuper.

Probl. (*a*) : *Diviser un triangle* ABC, *en un nombre donné de portions équivalentes, par des droites qui partent d'un des sommets*, de A par exemple (P. IX. fig. 22).

L'opération consiste à diviser le côté BC, opposé à l'angle A, en autant de parties égales qu'on veut avoir de parts, par exemple en trois (p. 75), à joindre le point A aux points de division D, E.

Les trois triangles ABD, ADE, AEC ont la même superficie, parce que leurs bases BD, DE, EC ont même longueur et que la hauteur de chacun est la perpendiculaire abaissée de A sur BC (192).

Si vous voulez reporter sur le terrain, la division faite sur le papier, vous aurez à voir combien BD contient de parties de l'échelle du plan; à porter deux fois le nombre de mesures correspondantes, sur la droite B'C' du terrain, en partant de B' ou de C' et à joindre le point A' avec les deux points D', E' que vous aurez marqués ainsi.

Cette manière de reporter sur le terrain, la division faite sur un plan, convient à tous les cas que nous allons examiner; vous devrez donc y recourir toujours.

Probl. (*b*) : *Tracer dans un quadrilatère quelconque* ABCD, *un parallélogramme équivalent au reste* (P. IX, F. 23).

Marquez les milieux E, F, G, H des quatre côtés; puis joignez-les deux à deux, de manière à former un autre quadrilatère EFGH. Cette figure sera un parallélogramme et vaudra la somme des quatre triangles restans.

« En effet, FG est parallèle à BD, puisqu'elle divise les concourantes BC, CD en parties égales (78). La droite EH est aussi parallele à BD, pour la même raison, et par suite FG, EH sont parallèles (68). Un raisonnement analogue montrerait que EF est parallèle à GH. Donc, premièrement, le quadrilatère EFGH est un parallélogramme. »

« En second lieu, le triangle AEH vaut la moitié du parallélogramme EIKH (191); car ils ont même base EH, et même hauteur, puisque la perpendiculaire abaissée de A sur BD, serait divisée en deux parties égales par EH, comme AB, AD (79). Ce raisonnement répété fait voir que DGH$=\frac{1}{2}$GHLM, CFG$=\frac{1}{2}$FGKI, BEF $=\frac{1}{2}$ EFML. Conséquemment, AEH $+$ CFG $=\frac{1}{2}$ EFGH, DGH $+$ BEF $=\frac{1}{2}$ EFGH, et la somme des quatre triangles équivaut au parallélogramme EFGH. »

Ainsi, *tout quadrilatère est double du parallélogramme formé par la jonction des milieux de ses côtés.*

Probl. (*c*): *Diviser un polygone quelconque* ABCDE, *en un nombre donné de parties équivalentes, par des droites qui partent d'un sommet* A (P. IX, F. 24).

Il faut d'abord changer le polygone en un triangle équivalent ABE (216). Diviser ensuite la base BF en autant de parties égales que vous voulez de portions; par les points de division H, I, K, etc., menez des parallèles à la première diagonale AC, jusqu'à la rencontre du second côté CD ou de son prolongement; joignez le point A aux points L, M, etc. où ces parallèles coupent le côté CD, et par ceux N, O, etc., où elle coupent le prolongement, tirez des parallèles à la seconde diagonale AD, jusqu'au troisième côté DE ou jusqu'à son prolongement; joignez A aux points P, etc. où DE est rencontré par ces nouvelles parallèles; et de ceux où elles coupent le prolongement, menez des parallèles à la quatrième diagonale; enfin, continuez toujours de même, jusqu'à ce que vous soyez parvenus à rapporter ainsi, sur les côtés du polygone donné, tous les points de division de la base BF du triangle équivalent. Les droites AG, AL, AM, AP partageront la superficie comme il est demandé.

« Il est clair que ABG est le cinquième du polygone, puisque ce triangle est le cinquième du triangle ABF (probl. *a*) Les triangles ALC, AHG sont équivalens, attendu qu'ils ont même base AC et que leurs sommets L, H sont sur HL parallèle à AC (192); ajoutant donc ACB à chacun, nous aurons ALCB $=$ AHB. Or, AHB vaut $\frac{2}{5}$ de ABF; par conséquent, ALCB vaut $\frac{2}{5}$ de ABCDE, ou bien ALCG est $\frac{1}{5}$ de ce polygone. Un raisonnement analogue montrerait que AML est $\frac{1}{5}$ de la superficie donnée. »

« Quant à la droite AP, elle forme le triangle APD qui équivaut à AND (192). Ajoutant de part et d'autre ADCB, nous aurons APDCB$=$ANCB. Mais le triangle ANC$=$AKC, ou ANCB$=$AKB qui vaut $\frac{4}{5}$ de ABF. Donc, APDCB vaut $\frac{4}{5}$ de ABCDE, APDM est le quatrième cinquième de cette superficie, et AEP en est le dernier cinquième. »

« Il est visible du reste que, si le nombre des parties demandées était plus grand que 5, il ne s'agirait que de répéter les raisonnemens qui précèdent. »

« Enfin, on doit tomber sur le sommet E, en menant de F, une parallèle à AC, et de O, une parallèle à AD, puisque c'est par la marche contraire qu'on a construit ABF. »

Probl. (*d*) : *Diviser un polygone quelconque* ABCDE *en portions équivalentes, par des droites qui partent d'un point* F *marqué sur un des côtés* CD (P. IX, F. 25).

Il faut d'abord convertir le polygone en un triangle AGH dont un des côtés soit dirigé suivant CD (p. 202). Ensuite, divisez GH en autant de parties égales qu'on demande de portions; des points de division I, K, L, etc., menez des parallèles à AF, et joignez F aux points M, N, O, etc. où ces parallèles rencontrent AB, AE. Les droites FM, FN, FO feront le partage voulu, comme dans le cas précédent.

« Pour le démontrer, menons AL, AK, AC, AI. Nous aurons AOF = ALF, ANF=AKF (192), et par suite ANFO=AKL, le quart de AGH ou du polygone donné (probl. *a*, p. 243). »

« D'un autre côté, AMF=AIF; ajoutons AOF au premier triangle et ALF au second, il viendra AMFO=AIL=$\frac{2}{4}$ de AGH, et comme ANFO en est $\frac{1}{4}$, il restera $\frac{1}{4}$ de AGH ou du polygone, pour la superficie de MNF. »

« En troisième lieu, ABC=AGC, puisque pour la conversion du polygone en triangle, il a fallu mener BG parallèlement à AC. Ajoutant ACF aux deux parties de l'égalité, nous aurons ABCF=AGF; ajoutant AOF à la première partie de cette nouvelle égalité et ALF à la seconde, nous trouverons que ABCFO = AGL = $\frac{3}{4}$ de AGH. Mais, AMFO vaut $\frac{2}{4}$ de AGH ou du polygone; donc, BCFM en est le troisième quart, et DEOF, le quatrième. »

Application : Il est visible que les trois problèmes *a*, *c*, *d* qu'on vient d'étudier, sont applicables aux cas où l'on doit partager un terrain par des chemins qui aboutissent tous à une maison, à un pont, à un puits, etc. Mais, il peut se faire aussi que les chemins doivent aboutir à des points différens ou à un point situé dans l'intérieur du polygone; voici les tracés qu'il faut exécuter dans ces deux cas.

Probl. (*e*) : *Diviser un polygone quelconque* ABCDE *en portions équivalentes, par des droites qui partent de plusieurs points* F, G *marqués sur un côté* (P. IX, F. 26).

Après avoir converti le polygone en un triangle AHI et divisé la base HI en quatre parties égales, par exemple, vous joindrez A aux points F, G; par les points de division K, etc., vous menerez autant de parallèles à FA, que vous voudrez de droites partant de F, et par les autres points K', etc., vous tirerez des parallèles à GA; enfin, vous joindrez F, G aux points L, M, etc., où les parallèles couperont les côtés AB, AE du polygone, et les droites FL, GM, GN, etc. feront le partage demandé. Ce tracé se démontre comme le précédent.

Probl. (*f*) : *Diviser en parts équivalentes un polygone quelconque* ABCDE, *par des droites qui partent d'un point intérieur* F *et dont une soit assujettie à quelque condition* (P. IX, F. 27).

Supposons que FD doive être une des droites demandées, et qu'il faille en tracer encore trois autres. Vous convertirez le polygone en un triangle AGH; puis, vous menerez FG et sa parallèle AI, FH et sa parallèle AK. Le triangle FIK aura autant de superficie que AGH, parce que le triangle FKH remplacera FAH et que FIG remplacera FAG (192). Cherchez le quart de IK, puisqu'on veut quatre portions équivalentes; portez ce quart de D en L; DFL sera le quart de FIK (probl. *a*, p. 243); menez FC et sa parallèle LM; CMF remplacera CLF, et par conséquent, CDFM sera le quart de FIK ou du polygone donné.

Portez un quart de IK, de D en N, et tracez NO parallèle à FD; FOD sera un second quart du polygone, pour des raisons analogues aux précédentes. Prenez NP=DN et tirez PQ parallèlement à FD, jusqu'à la rencontre de DE prolongé. FQD sera équivalent à FPD, moitié de FIK, et si vous menez QR parallèle à FE, FRE pourra remplacer FQE; d'où suit que FRED sera aussi la moitié de FIK. Donc, FREO sera le troisième quart du polygone, et FRABM, le quatrième.

Il est aisé de voir que par la même méthode, on opérerait le partage en 5, 6, etc., portions égales. Si QR rencontrait le prolongement de AE, on menerait de l'intersection, une parallèle à AF, jusqu'au côté AB, et l'on joindrait le point F au nouveau point de rencontre, pour avoir la quatrième des droites demandées.

Probl. (*g*) : *Diviser un polygone régulier, en un nombre donné de portions équivalentes, par des droites qui partent du centre.*

Il faut diviser un côté en autant de parties égales qu'on veut de portions; puis tirer les lignes de partage, de manière que les extrémités différentes de celles qui se suivent, soient séparées par autant de parties de côté, que le polygone a de sommets.

Supposons, pour exemple, qu'il s'agisse de diviser l'hexagone régulier ABCDEF en cinq portions équivalentes (P. IX, F. 28), par des droites qui partent du centre G. Vous diviserez un côté AF en cinq parties égales; puis vous en porterez une de F en H et de B en L, deux de E en I et de C en K, afin que les lignes brisées AFH, HEI, IDK, KCL, LBA en contiennent chacune six, autant que l'hexagone a de sommets. Enfin, vous tirerez les droites GA, GH, GI, GK, GL qui partageront le polygone en cinq portions équivalentes.

Effectivement, chaque portion se trouverait composée comme AGHF, de six triangles équivalens (192 et 210), si l'on marquait les cinq parties égales de chaque côté et qu'on joignît les points de division au centre G; de plus, les triangles d'une portion équivaudraient à ceux de toute autre.

235. Similitude des polygones : Les propriétés des figures sem-

blables sont très-souvent utiles dans l'industrie : bien des cas se présentent où ce n'est pas une face égale à une autre qu'il faut produire, mais une face plus petite ou plus grande qui soit pourtant l'exacte copie de cette autre. Nous connaissons déjà les caractères auxquels on reconnaît que deux triangles sont semblables (169 et suivans) ; nous devons maintenant étudier ceux de la *similitude* ou ressemblance des autres polygones.

Puisque deux polygones semblables sont copies l'un de l'autre, *les angles du grand sont égaux aux angles de même rang dans le petit, et le rapport entre deux côtés correspondans est le même pour tous* (168).

236. Il s'ensuit que *deux polygones semblables sont composés d'un même nombre de triangles, tels que ceux de même rang ou de même position sont semblables.*

En effet, si les deux polygones ABCDE, *abcde* sont semblables (P. IX, F. 29), l'angle B est égal à l'angle *b* et l'on a AB : *ab* : : BC : *bc*; donc (173) les deux triangles ABC et *abc* sont semblables. Par conséquent, l'angle ACB=*acb* et BC : *bc* : : AC : *ac*. Or, l'angle C du grand polygone est égal à l'angle *c* du petit ; donc, l'angle ACD =*acd*; et puisque BC : *bc* : : CD : *cd*, on a aussi AC : *ac* : : CD : *cd*; ainsi (173), les deux triangles ACD et *acd* sont semblables. On démontrerait de même que les triangles ADE et *ade* sont semblables, et ce raisonnement conduirait à de pareilles conclusions, quel que fût le sommet d'où partissent les diagonales.

237. *Pour que deux polygones soient semblables, il suffit qu'ils se trouvent composés d'un même nombre de triangles, tels que ceux de même rang ou de même position soient semblables.*

Si ABC est semblable à *abc* (P. IX, F. 29), l'angle B=*b*, BAC=*bac*, ACB=*acb* (168). Si les triangles ACD, *acd* sont semblables, l'angle ACD=*acd* ; par conséquent, l'angle total C est égal à l'angle total *c*. En continuant ainsi, on démontrerait que les angles du grand polygone sont égaux aux angles correspondans du petit.

Maintenant, la similitude des triangles donne BC : *bc* : : AC : *ac* et AC : *ac* : : CD : *cd*. Donc, BC : *bc* : : CD : *cd*. On verrait de même que CD : *cd* : : DE : *de*, et par suite, que tous les côtés correspondans des deux polygones, sont proportionnels, ou que le rapport de deux d'entre eux égale celui de deux autres quelconques.

Il est fort important de faire observer que *l'égalité des angles ne suffit pas pour rendre semblables deux polygones qui ont plus de trois côtés.* Les angles de même rang peuvent effectivement être égaux dans ce cas, sans que les côtés soient proportionnels. Prolongeons BC, par exemple, jusqu'en un point quelconque F, et par ce point, menons FG parallèlement à CD, jusqu'à la rencontre du prolongement de ED. Les angles F, G seront égaux aux angles C, D, et par conséquent, il y aura égalité entre les angles du polygone ABFGE et ceux de *abcde*. Mais, puisque le rapport de BC à *bc* est le même que celui de AB à *ab*, le rapport de BF à *bc* différera de ce dernier ; il en serait de même des rapports de FG à *cd*, de GE à *de*.

La proportionnalité des côtés ne suffit pas non plus pour rendre semblables deux polygones qui ont plus de trois sommets ; car si nous rapprochions AD de AC, nous pourrions conserver la longueur de CD, en ouvrant convenablement l'angle ACD, et construire sur la nouvelle diagonale AD, un triangle qui eût AE, DE pour ses deux autres côtés. Les points D, E quitteraient les positions qu'ils occupent dans la figure ; les angles C, D, E, A changeraient d'indication ; ils ne seraient plus égaux aux angles *c*, *d*, *e*, *a*, et pourtant le rapport des côtés de même rang ne serait point altéré.

Probl. (*a*) : *Tracer sur une droite* ab, *donnée de grandeur et de position, un polygone semblable à un autre* ABCDE (P. IX, F. 29).

On partage en triangles le polygone donné, et l'on construit sur *ab*, un triangle *abc* semblable à ABC (p. 179) ; sur *ac*, un triangle *acd* semblable à ACD, et ainsi de suite. Le polygone *abcde* qu'on obtient ainsi, est semblable au polygone ABCDE, en vertu du principe précédent.

Probl. (*b*) : *Tracer un polygone qui soit semblable à un autre* ABCDE *et dont un côté ait une longueur donnée* (P. IX, F. 30).

Supposons que le côté connu soit le correspondant de AB.

D'un point quelconque F pris arbitrairement, menez des droites à tous les sommets ; portez de A en B', la longueur donnée ; tirez de B', une parallèle à AF, jusqu'à la rencontre de BF, et par cette rencontre *b*, menez *ba* parallèlement à BA. La droite *ba* sera égale à AB' (65). Cela fait, tracez par *b*, *bc* parallèle à BC ; par *c*, *cd* parallèle à CD ; par *d*, *de* parallèle à DE ; enfin par *e*, *ea* parallèle à EA.

Les angles de *abcde* sont égaux à ceux du polygone donné (64) et les côtés correspondans sont proportionnels : on a, par exemple, CD : *cd* : : DF : *df*, DE : *de* : : DF : *df* (81), et par conséquent, CD : *cd* : : DE : *de*. Les deux polygones sont donc semblables (235), et comme le petit a la droite donnée pour un de ses côtés, il est le polygone demandé.

Si le côté donné était plus grand que AB, le point B' se trouverait sur le prolongement de AB et B'*b* irait rencontrer FB au-dessous de B.

Le point F, concours des droites qui joignent les extrémités de côtés ou de diagonales CE, *ce*, parallèles et de même sens, a été nommée *centre de similitude directe.*

Vous voyez qu'on peut choisir le centre de similitude directe, de telle manière que le polygone demandé soit tout-à-fait hors du polygone donné. Ce point pourrait aussi se trouver dans l'intérieur des deux figures, et alors l'une envelopperait l'autre entièrement ;

ou bien il pourrait être placé à l'un A des sommets du polygone donné (F. 29), et dans ce cas les deux figures semblables ABCDE, Ab'c'd'e', auraient l'angle A de commun.

PROBL. (c) : *Tracer un polygone semblable à un autre* ABCDE, *quand on connaît seulement le rapport des côtés correspondans* (P. IX, F. 30).

Supposons que ce rapport soit $\frac{2}{3}$. Vous tirerez par un sommet A une droite AF de direction quelconque. Vous y porterez, à partir de A, *trois fois* une longueur arbitraire ; cela vous donnera un point F que vous prendrez pour centre de similitude. Vous joindrez donc ce point à tous les autres sommets du polygone donné ; puis par *a*, deuxième point de division de AF, à partir de F, vous menerez des parallèles à AB, AE, et enfin vous tirerez *bc*, *cd*, *de*, parallèlement à BC, CD, DE.

Le polygone *abcde* sera semblable à ABCDE, et de plus *ab*, par exemple, se trouvera *les* $\frac{2}{3}$ de AB, puisque *ab* : AB : : *a*F : AF (81) *et* que *a*F contient deux fois A*a*, tandis que AF contient *trois fois* cette même longueur.

PROBL. (*d*) : *Tracer un polygone qui soit semblable à un autre* ABCDE *et qui ait une position* INVERSE (P. IX, F. 31).

Si la longueur d'un côté est connue, celle du correspondant de AB, par exemple, marquez arbitrairement un point F; faites croiser à ce point des droites menées à tous les sommets du polygone donné ; portez la longueur connue sur le prolongement de AB, de A en B' ; tirez B'*b* parallèlement à AF, jusqu'à la rencontre de BF prolongée, et achevez comme dans le probl. (*b*).

Si l'on connaît seulement le rapport de deux côtés correspondans, et que ce rapport soit $\frac{2}{3}$, par exemple, il faut marquer le point F comme dans le probl. (*c*) ; porter deux parties sur le prolongement de AF, de F en *a* ; puis mener *ab* parallele à AB, *bc* parallèle à BC, etc.

Le côté *ab* sera les $\frac{2}{3}$ de AB, à cause de la proportion *ab* : AB : : *a*F : AF (81).

D'ailleurs, il est visible que la position du petit polygone est tout-à-fait *inverse* de celle du grand : A est au-dessus de CD et *a* est au-dessous de *cd* ; D est à droite de C et *d* est à gauche de *c*.

Le point F, croisement des droites qui joignent les extrémités de côtés ou de diagonales paralleles, de sens contraires, est appelé *centre de similitude inverse*.

238. Ainsi, *Quand deux polygones semblables ont leurs côtés parallèles, leur système a un centre de similitude soit directe, soit inverse où concourent toutes les droites qui joignent les extrémités correspondantes des lignes parrallèles dirigées dans le même sens* (F. 29 et 30), *ou en sens contraire* (F. 31).

239. *Deux polygones réguliers de même nom, sont semblables*; car l'angle intérieur de l'un est alors égal à l'angle intérieur de l'autre (p. 207), et puisque les côtés du premier sont égaux, ainsi que ceux du second, le rapport entre deux côtés correspondans est le même pour tous les autres (235).

240. On peut, en répétant suffisamment le tracé du probl. *q* (p. 214), inscrire dans un cercle un polygone régulier d'un fort grand nombre de très-petits côtés, et l'on peut aussi, au moyen du tracé donné dans le probl. *t* (p. 216), circonscrire au même cercle un polygone régulier d'un fort grand nombre de très-petits côtés, parallèles à ceux du polygone régulier inscrit. Or, les milieux de ces derniers côtés seront extrêmement près de la circonférence et des contacts de ceux du polygone circonscrit. Il est même aisé de concevoir un nombre de côtés et un degré de petitesse, tels que les milieux et les contacts paraissent se confondre. Alors, il n'y a plus de différence sensible entre la longueur du côté du polygone inscrit et celle du côté correspondant du polygone circonscrit. Cependant, un arc du cercle est toujours compris entre ces deux côtés parallèles. A plus forte raison donc, il n'y a plus de différence sensible entre cet arc et le côté du polygone inscrit. Conséquemment, le contour de ce polygone régulier semble se confondre avec la circonférence et cette courbe peut être prise pour le contour. Il s'ensuit qu'*une face circulaire est en réalité un polygone régulier d'un fort grand nombre de très-petits côtés.*

Nous avons jusqu'ici employé indifféremment les mots cercle et circonférence, pour désigner la courbe dont tous les points sont également distans d'un autre. Mais, quand les géomètres veulent s'exprimer avec précision, ils ne donnent le nom de *cercle* qu'aux faces circulaires, qu'à l'espace limité par une circonférence. Ainsi, nous pouvons dire, en les imitant : *Le cercle doit être mis au nombre des polygones réguliers ; il jouit des propriétés communes à ces polygones.*

Donc, *les cercles sont des figures semblables*; car ce sont des polygones réguliers de même nom (239).

241. *Le système de deux polygones réguliers, pairs et de même nom*, ABCD, abcd, *dont les côtés sont parallèles, a toujours un centre de similitude directe et un centre de similitude inverse* (P. IX, F. 32)

Cette propriété provient de ce que les côtés opposés d'un polygone régulier pair sont parallèles (213) ; car il s'ensuite que *ab*, *ad*, par exemple, sont parallèles à CD, CB, comme à AB, AD, et que les droites qui joignent les points *b*, *a*, *d*, aux points D, C, B, doivent, en se croisant, déterminer un centre de similitude inverse E', de même que les droites qui joignent les points *b*, *a*, *d*, aux points B, A, D, déterminent, par leur concours E, un centre de similitude directe.

Il serait facile d'ailleurs, en employant un raisonnement analogue à celui du nº 104, de faire voir que *les deux centres de similitude* E, E' *du système de deux polygones réguliers, pairs et de même nom dont les côtés sont parallèles, se trouvent sur la droite des centres de symétrie* F, f.

242. *Le système de deux polygones réguliers impairs et de même nom, dont les côtés sont parallèles, n'a qu'un seul centre de similitude*, comme le système de deux polygones irréguliers et semblables, dans la même circonstance; car chaque côté du petit polygone ne peut être parallèle qu'à un seul côté du grand, attendu que ni l'un ni l'autre n'ont de côtés opposés et parallèles.

Cependant, *le système de deux parallélogrammes semblables, dont les côtés correspondans sont parallèles, a deux centres de similitude*, puisque les côtés opposés d'un parallélogramme sont parallèles, comme ceux d'un polygone régulier pair.

Dans ce cas, les centres de similitude sont sur la droite qui joint les croisemens des diagonales.

243. *Le système de deux polygones égaux*, ABCD, A'B'C'D', *dont les côtés correspondans sont parallèles, n'a point de centre de similitude directe* (P. IX, F. 33).

Du moins, le centre de similitude directe ne peut être marqué, puisque ce sont des parallèles qui joignent les extrémités des côtés correspondans AB et AB', AD et AD', dirigés dans le même sens (66).

Mais, *le système de deux polygones égaux dont les côtés correspondans sont parallèles et inversement placés, a toujours un centre de similitude inverse;* car l'égalité des polygones n'est qu'un cas particulier de leur similitude (168 et 231).

Il est visible du reste que *l'unique centre de similitude* E' *du système de deux polygones égaux, est au milieu de chacune des droites* AC', A'C, etc., *qui joignent les extrémités opposées des côtés parallèles.*

244. Les principes des nos 241 et 243 sont applicables aux cercles placés d'une manière quelconque sur le même tableau; car en raison du très-grand nombre des lignes droites extrêmement petites dont se composent les circonférences (240), on peut toujours regarder deux cercles comme des polygones réguliers pairs et de même nom, dont les côtés correspondans sont parallèles.

Par là se trouve justifié le nom de *centre de similitude* que nous avons donné, dans le nº 105, aux concours des sécantes communes, menées par les extrémités de diamètres parallèles, lesquels sont, pour les cercles, de véritables diagonales. L'existence de ces concours se trouve aussi expliquée et démontrée tout autrement que dans le nº 104.

PROBL. (*a*) : *Tracer un polygone qui soit semblable à un polygone régulier donné.*

Si un côté du polygone demandé est donné de position et de grandeur, vous pourrez employer, dans tous les cas, le procédé du probl. *a* (p. 248)

Lorsque vous connaîtrez seulement la longueur du côté, vous pourrez, dans tous les cas, vous servir des tracés des problèmes *b* et *d* (p. 248 et 249).

Ne vous donne-t-on que le rapport des côtés des deux figures, vous imitez le procédé du probl. *c* (p. 249) ou le second tracé du probl. *d*.

S'il faut que les deux polygones soient concentriques, vous recourrez aux mêmes problèmes, en prenant le centre du polygone donné ABCDEF, pour centre de similitude directe (P. IX, F. 34). Ainsi, par exemple, vous tirerez les droites AH, BH, CH, etc.; vous porterez de D en I, le côté G donné, et vous menerez IC' parallèle à DH, C'D', parallèle à CD, D'E' parallèle à DE, etc.

Puisque cette construction donne une figure régulière A'B'C'D'E'F', la droite HC' qu'elle détermine, est le rayon de la circonférence circonscrite au polygone demandé, comme HC est celui de la circonférence circonscrite au polygone donné (209). Par conséquent, vous pourrez aussi décrire de H, avec HC', une circonférence, et porter G comme corde, sur cette courbe, autant de fois que le polygone donné a de côtés. Les cordes des arcs ainsi déterminés formeront le polygone demandé.

Il est bon de remarquer que si le polygone donné est un hexagone, le rayon HC' est tout trouvé : dans ce cas, HC' = G (219).

PROBL. (*b*) : *Tracer un polygone régulier dont le côté est donné.*

Inscrivez dans une circonference quelconque, un polygone régulier qui ait autant de côtés que celui qu'on demande ; puis tracez un polygone semblable à celui-là, avec le côté donné et en employant un des procédés du numéro précédent.

Cette méthode qui est de beaucoup préférable à celle du n° 218, convient aussi à tous les cas et peut remplacer les procédés particuliers exposés page 211 et suivantes.

245. La première construction du probl. (*a*) donnant la proportion C'D' : CD :: C'H : CH (81), conduit à ce principe : *Le rapport des côtés de deux polygones réguliers de même nom, égale celui des rayons des circonférences circonscrites.*

APPL. (*a*) : *Lever un plan*, c'est tout simplement construire sur le papier, un polygone semblable à celui que forment les différents points remarquables d'un terrain, supposés liés entre eux par des droites ; ou ce qui revient au même, c'est tracer sur le papier, des triangles semblables à ceux qu'on formerait en unissant chaque point remarquable du terrain, avec les deux extrémités d'une droite prise arbitrairement; car cette construction de triangles semblables, ne peut manquer de produire un polygone semblable à celui des points remarquables (237).

« Il faut donc, pour lever un plan, marquer sur le sol les extrémités A, B d'une droite, prise aussi grande qu'il est possible (P. IX, F. 35); mesurer avec exactitude, cette *base* du plan; prendre, au moyen d'un graphomètre, les angles CAB, DAB, EAB, FAB que font avec AB, les droites qui vont de l'extrémité A aux objets C, D, E, F, et prendre de la même manière, les angles ABC, ABD, ABE, ABF formés par AB et les droites qu'on peut se représenter allant de B aux objets C, D, E, F. Cela fait, on trace sur le papier une droite *ab* contenant autant de lignes que AB contient de toises, ou autant de millimètres que AB contient de mètres, selon que l'échelle du plan est d'une ligne pour une toise, ou d'un millimètre pour un mètre; puis avec un bon rapporteur, on fait au point *a*, des angles égaux à ceux du point A; au point *b*, des angles égaux à ceux du point B. Les côtés de ces angles se rencontrent en des points *c*, *d*, *e*, *f* qui se trouvent placés par rapport à *ab* et entre eux, comme le sont C, D, E, F par rapport à AB et entre eux; c'est-à-dire que la figure *acdebf* est la copie exacte de ACDEBF : cela doit être, puisque les triangles *abc*, *abd*, etc., sont semblables aux triangles ABC, ABD etc. (169). Il s'ensuit (173) que les triangles *acd*, ACD sont semblables aussi; que *cd* : CD :: *ac* : AC :: *ab* : AB, ou que *cd* contient autant de millimètres, qu'il y a de mètres dans CD. Ainsi, avec un plan bien fait, on peut obtenir, au moyen de l'échelle, la vraie distance des points qui s'y trouvent marqués. »

App. (*b*) : Voici pour lever les plans, un procédé plus simple que le précédent, et qui, dans bien des cas, est d'une exactitude suffisante. Couvrez d'un papier bien tendu, une petite planche carrée et parfaitement plane; tracez sur ce papier (P. IX, F. 36), une droite *ab* contenant autant de parties de l'échelle adoptée pour le plan, que la base AB renferme de mètres; placez le pied ou pivot de la planchette, de façon que le point *b* soit dans l'aplomb de B, que *ab*, AB aient la même direction, et que la planche soit de niveau; plantez une aiguille fine en *b*; appuyez une alidade (p. 35) contre cette aiguille en la dirigeant sur le point C du terrain, et tracez une droite *bc* le long de la règle; faites de même pour le point D et pour tous les autres; établissez ensuite la planchette à la station A, de telle manière que A et *a* soient sur la même verticale et que *ab* se trouve dans l'alignement AB; plantez l'aiguille en *a* et faites les mêmes opérations qu'à la station B. Vous obtiendrez des droites qui couperont les autres en *c*, *d*, etc., et le polygone *abcd* sera semblable au polygone ABCD.

Voilà ce qu'on appelle *lever un plan à la planchette*. Par cette méthode, on trace les triangles semblables, en même temps qu'on prend les angles, ce qui est plus simple, plus court, je dirai même plus exact, que de chercher les indications des angles avec le graphomètre, pour les rapporter ensuite sur le papier, au moyen d'un rapporteur qui n'a pas de vernier.

Appl. (*c*) : On peut encore lever un plan, avec une exactitude suffisante, par un simple mesurage de longueurs. Il faut d'abord faire un *croquis*, en dessinant à vue, tant bien que mal, le polygone ACDEBF des points remarquables du terrain (P. IX, F. 35); puis *mesurer les côtés AC, CD, DE, EB, BF, FA et les diagonales* AD, AE, AB, au moyen de la chaîne d'arpenteur, qui contient 10m; inscrire les longueurs trouvées, sur les côtés correspondans du croquis, et construire enfin, sur le papier et à l'échelle, des triangles *acd*, *ade*, *aeb*, *abf* semblables aux triangles ACD, ADE, AEB, ABF dont on connaît les côtés. Le polygone *acdebf* qu'on obtient ainsi, est nécessairement semblable à celui du terrain (237).

246. La somme des côtés d'un polygone est ce qu'on nomme le *contour*. Ainsi, les côtés AB, BC, CD, DE, EA (P. IX, F. 29), mis les uns au bout des autres, formeraient une ligne droite égale au *contour du polygone* ABCDEA. Il importe de connaître le rapport des contours de deux polygones semblables, afin de pouvoir les déduire l'un de l'autre et se dispenser d'opérer un des deux mesurages.

Les contours de deux polygones semblables, sont dans le même rapport que les lignes correspondantes de ces polygones.

En effet, si ABCDE est semblable à *abcde*, AB : *ab* :: BC : *bc* ou AB : BC :: *ab* : *bc* (235 et 72), ce qui donne

$$AB+BC : BC :: ab+bc : bc \quad (74).$$

Donc $\quad AB+BC : ab+bc :: BC : bc,$

ou bien $\quad AB+BC : ab+bc :: CD : cd.$

Traitant cette proportion comme la première, on obtient

$$AB+BC+CD : ab+bc+cd :: CD : cd \text{ ou } :: DE : de.$$

Il est facile de voir qu'en continuant toujours de transformer ainsi les diverses proportions, on finira par trouver que

$$AB+BC+CD+DE+EA : ab+bc+cd+de+ea :: AE : ae,$$ ou

comme deux côtés correspondans quelconques sont entre eux. Mais, puisque les triangles de l'un des polygones, sont semblables aux triangles qui ont même rang ou même position dans l'autre (236), le rapport des diagonales correspondantes, égale celui des côtés correspondans : on a par exemple AE : *ae* :: AD : *ad*. Donc aussi

$$AB+BC+CD+DE+EA : ab+bc+cd+de+ea :: AD : ad.$$

Remarquez que les raisonnemens qui viennent d'être faits, établissent ce principe : *Dans une suite de rapports égaux* AB : *ab* :: BC : *bc* :: CD : *cd* :: etc., *la somme des premiers termes de tous les rapports, est à la somme des seconds, comme un premier terme quelconque est au second terme du même rapport.*

247. Une des conséquences les plus fécondes du principe 246 est celle-ci : *Les circonférences de deux cercles ont pour rapport celui des diamètres, et, en général, celui des cordes de deux arcs d'un même nombre de degrés ;* car les circonférences sont les contours des cercles; les cercles sont des polygones semblables (240), et ces polygones ont pour diagonales correspondantes, les cordes des arcs d'un même nombre de degrés.

On peut dire aussi que *les circonférences sont dans le même rapport que les rayons*, puisque le rapport des rayons égale celui des diamètres. Donc, pour qu'une circonférence soit double ou triple d'une autre, il faut la décrire avec un rayon double ou triple de celui de la circonférence donnée.

248. Ainsi, *le même rapport existe entre les côtés correspondans de deux polygones réguliers inscrits et semblables, entre leurs contours, entre les rayons des cercles qui les renferment, et entre les circonférences de ces cercles* (246 et 245).

Probl. (*a*) : *Décrire une circonférence égale à la somme de deux autres*

Portez le rayon de l'une, de B en A, sur le prolongement du rayon CB de l'autre (P. V, F. 38), et décrivez de C, une circonférence qui ait pour rayon AC, somme des deux rayons donnés. La longueur de cette troisième circonférence (9) vaudra précisément la somme des deux premières.

Soient C et C' les circonférences données. Nous aurons la proportion C : C' : : CB : AB (247), et par suite, C : C + C' : : CB + BC ; ce qui fait voir que AC ou AB + BC, somme des rayons donnés, est rayon d'une circonférence égale à C + C', somme des courbes données, comme CB est rayon de C.

Probl. (*b*) *Décrire une circonférence égale à la différence de deux autres.*

Vous porterez le rayon de la plus petite sur le rayon de la plus grande, de A en B (P. V, F. 38); la circonférence que vous décrirez du centre C, avec une ouverture de compas égale à CB, différence des deux rayons, aura pour longueur (9) la différence des deux circonférences données.

Appelons C' la circonférence dont le rayon est AC, nous aurons C : C' : : AC : AB (247), et par conséquent (76),

C — C' : C' : : AC — AB : AB ;

ce qui montre que BC ou AC — AB, différence des rayons donnés, est rayon d'une circonférence égale à C — C', différence des courbes données, comme AB est rayon de C'.

Probl. (*c*) : *Trouver le rapport de deux circonférences données.*

Soient AB, CD les rayons (P. IX, F. 37). Vous porterez le plus petit CD, sur le plus grand, autant de fois qu'il sera possible, 2 fois, par exemple, et vous écrirez ce nombre. Le reste BE devra être porté ensuite sur CD, et s'il y est reçu 3 fois, par exemple, vous écrirez ce nombre 3 au-dessous du nombre 2 déjà trouvé. Le rayon CD fournit-il un reste DF, vous le portez sur le premier reste BE. Supposons qu'il y soit reçu 2 fois tout juste.

	16
2	7
3	2
2	1

Après avoir écrit le toisième quotient 2 *sous les précédens*, mettez l'unité vis-à-vis, à droite, et le troisième quotient lui-même, vis-à-vis du second ; multipliez le nombre 2 par le quotient 3 qui se trouve sur la même ligne ; ajoutez au produit 6, le nombre 1 placé au-dessous du multiplicande, et mettez la somme 7 vis-à-vis du premier quotient. Multipliez 7 par 2 ; ajoutez au produit 14, le nombre 2 placé au-dessous de 7, puis écrivez la somme 16 au-dessus de la précédente.

Formant alors une fraction dont le numérateur soit l'avant-dernière somme 7, et le dénominateur, la dernière 16, vous trouverez $\frac{7}{16}$ pour le rapport $\frac{CD}{AB}$ des rayons, et vous en conclurez que celui des circonférences données est aussi $\frac{7}{16}$, ou que la petite est les $\frac{7}{16}$ de la grande (247).

Le procédé qui vient d'être employé pour obtenir le rapport de deux droites données, n'a pas besoin de démonstration, car il est absolument le même que celui dont on se sert en Arithmétique, pour trouver l'expression la plus simple d'une fraction ou d'un rapport numérique.

249. Les deux premiers des trois problèmes précédens établissent ces principes :

Une circonférence égale à la somme de deux autres, a pour rayon, la somme de leurs rayons.

Une circonférence égale à la différence de deux autres, a pour rayon, la différence de leurs rayons.

250. Il est aisé de pressentir que le rapport des superficies de deux polygones semblables, dépend de celui des côtés correspondans, comme le rapport des contours ; seulement on ne peut dire à l'avance, s'il en dépend ou non de la même manière.

Nous démontrerons d'abord que *le rapport des superficies de deux triangles semblables, égale celui des quarrés de deux côtés correspondans.*

Soient les triangles semblables ABC, *abc* (P. IX, F. 38). Si nous prenons BC, *bc* pour bases, les hauteurs seront les perpendiculaires AD, *ad*, et nous pourrons écrire la proportion.

$$ABC : abc :: BC \times AD : bc \times ad \ (200).$$

Mais, les triangles rectangles ADC, *adc* sont semblables (169) et donnent

$$AD : ad :: AC : ac :: BC : bc.$$

Multipliant les deux proportions, nous obtiendrons

$ABC \times AD : abc \times ad :: BC \times BC \times AD : bc \times bc \times ad$ (73),

ou

$ABC \times AD : BC \times BC \times AD :: abc \times ad : bc \times bc \times ad$ (72),

ou $ABC : BC \times BC :: abc : bc \times bc$ (77).

ou enfin $ABC : abc :: \overline{BC}^2 : \overline{bc}^2$ (202).

Comme on peut prendre pour base d'un triangle, un côté quelconque, le principe énoncé est vrai. La démonstration permet même de l'étendre, car établissant la proportionnalité des côtés et des hauteurs ou de droites AD, *ad* qui font des angles égaux D, *d*, elle montre que *le rapport des superficies de deux triangles semblables, égale celui des quarrés de deux lignes correspondantes.*

251. Les polygones semblables suivent la même loi que les triangles semblables ; ainsi le *rapport des superficies de deux polygones semblables quelconques, égale celui des quarrés de deux lignes correspondantes* ; ces lignes étant exprimées en nombres, au moyen d'une commune mesure.

La démonstration de ce principe est fondée sur ce que des polygones semblables sont composés d'un même nombre de triangles semblables, pareillement placés (236) ; car d'après cela (P. IX, F. 29), les triangles ABC, *abc* des polygones semblables ABCDE, *abcde*, sont semblables, et

$$ABC : abc :: \overline{BC}^2 : \overline{bc}^2.$$

Pour la même raison,

$$ACD : acd :: \overline{CD}^2 : \overline{cd}^2, \text{ etc.}$$

Mais les quarrés de nombres proportionnels, le sont aussi (73); puis donc que les cotés correspondans de deux polygones semblables forment proportion,

$$\overline{BC}^2 : \overline{bc}^2 :: \overline{CD}^2 : \overline{cd}^2,$$

et par conséquent,

$$ABC : abc :: ACD : acd :: ADE : ade.$$

Cette suite de rapports égaux donne (246)

$$ABC + ACD + ADE : abc + acd + ade :: ADE : ade :: \overline{AE}^2 : \overline{ae}^2 :: \overline{AD}^2 : \overline{ad}^2.$$

Donc enfin,

$$ABCDE : abcde :: \overline{AE}^2 : \overline{ae}^2 :: \overline{AD}^2 : \overline{ad}^2.$$

252. *Deux cercles ont pour rapport de leurs superficies, celui des quarrés de leurs diamètres ou celui des quarrés de leurs rayons* ;

car deux cercles sont deux polygones semblables (240), les diamètres, sont les diagonales correspondantes, et leurs quarrés sont proportionnels à ceux des rayons.

APPL. (*a*) : Les principes que nous venons de découvrir, servent à éviter des mesurages longs et pénibles ; car supposons que la superficie du polygone *abcde*, plan ou copie du polygone ABCDE, soit mesurée (P. IX, F. 29) ; on pourra connaître la grande superficie sans l'arpenter : il suffira d'en mesurer un côté, CD par exemple, puis d'établir la proportion $\overline{cd}^2 : \overline{CD}^2 :: abcde : ABCDE$, et d'appliquer la règle de trois (p. 74) ; elle fera connaître le quatrième terme, si *cd* et CD sont exprimés en nombres, au moyen de la même mesure, et si *abcde* a été mesuré comme on veut que le soit ABCDE.

APPL. (*b*) : Les mêmes principes servent encore à déterminer le rapport de la superficie d'une copie plane à celle du modèle, sans qu'on ait besoin de les mesurer. Si par exemple, on a réduit au tiers les lignes d'un objet, un côté quelconque de la copie est le tiers du côté correspondant du modèle, ou bien quand le premier est représenté par 1, le second égale 3, et par conséquent, la superficie de la copie est contenue dans celle du modèle, comme le quarré de 1 est contenu dans celui de 3 ou comme 1 : 9 ; c'est-à-dire que la première est la neuvième partie de la seconde. Ainsi, lorsqu'on réduit les lignes d'un dessin à la moitié, au tiers, au quart, etc., on réduit la superficie au quart, au neuvième, au seizième, etc., et réciproquement.

253. Voici une conséquence fort importante du principe 251 : *Un polygone quelconque ayant pour côté ou pour diagonale l'hypothénuse d'un triangle rectangle, vaut la somme de deux autres polygones qui lui sont semblables et qui sont construits sur les côtés de l'angle droit, considérés comme lignes correspondantes de l'hypothénuse.*

En effet, les trois polygones étant semblables, sont entre eux comme les quarrés des trois côtés du triangle rectangle ABC (P. IX, F. 39). Mais, si du sommet de l'angle droit A, on abaisse la perpendiculaire AD, les trois triangles BAC, BDA, ADC sont semblables (169) et se contiennent, par conséquent, comme les quarrés de leurs côtés correspondans, comme les quarrés des trois côtés de ABC, car ces côtés sont les hypothénuses des trois triangles rectangles. Donc, les trois polygones semblables sont entre eux comme les trois triangles. Or, l'un ABC de ces triangles, est la somme des deux autres ; conséquemment, le polygone qui a BC pour côté ou pour diagonale, est la somme des deux polygones semblables qui ont pour côtés correspondans ou pour diagonales correspondantes de BC, les côtés AB, et AC de l'angle droit.

De là ces principes si utiles : *Le carré* BCEF *fait sur l'hypothénuse d'un triangle rectangle, vaut la somme des carrés* ACGH, ABIK *construits sur les deux autres côtés.*

Le quarré numérique de l'hypoténuse égale la somme des quarrés numériques des deux autres côtés du triangle rectangle.

PROBL. (*a*) : *Construire un polygone semblable à deux autres, qui soit équivalent à leur somme.*

Tirez une droite AC (P. IX, F. 39) égale à l'un des côtés du plus grand des deux polygones ; par l'une des extrémités, élevez une perpendiculaire AB égale au côté correspondant du plus petit ; joignez B et C ; la droite BC sera le côté correspondant du polygone semblable équivalent à la somme de ceux qui sont donnés (253).

Si les polygones sont réguliers, vous achèverez le tracé, en suivant le procédé général du probl. *b* (p. 252), ou un des procédés particuliers décrits pages 210 et suivantes. Si les polygones ne sont pas réguliers, il faudra recourir au probl. *a* (p. 252).

PROBL. (*b*) : *Construire un polygone semblable à deux autres, qui soit équivalent à leur différence.*

Tracez deux droites d'équerre AB, AC (P. IX, F. 39) ; portez sur l'une, de A en C, un des côtés du plus petit des deux polygones donnés ; du point C et d'un rayon égal au côté correspondant du plus grand, décrivez un arc qui coupe l'autre droite en B. AB sera le côté correspondant du polygone semblable équivalent à la différence des deux autres ; car le polygone fait sur BC, serait la somme des polygones semblables faits sur AC et sur AB (253).

Voyez pour le reste du tracé, ce qui a été dit à la fin du problème précédent.

PROBL. (*c*) : *Construire un polygone semblable à plus de deux autres, qui soit équivalent à leur somme.*

Exécutez le tracé du probl. (*a*), avec les côtés correspondans des deux premiers polygones semblables donnés ; vous trouverez le côté correspondant du polygone semblable équivalent à leur somme. Faites le même tracé, avec ce côté et le côté correspondant du troisième des polygones donnés ; vous obtiendrez le côté correspondant du polygone semblable équivalent à la somme des trois premiers polygones donnés. Agissez encore de même en employant ce nouveau côté et le côté correspondant du quatrième des polygones donnés, et continuez ainsi jusqu'à ce que vous ayez employé un côté de chacun de ces polygones ; le dernier côté que vous obtiendrez du tracé, sera celui du polygone demandé, et vous construirez cette figure comme il a été dit dans le probl. (*a*).

Supposons, pour exemple, qu'il s'agisse de faire un carré équivalent à la somme des quatre carrés A, B, C, D (P. IX, F. 40). Au sommet E du carré A, j'élève une perpendiculaire sur le côté EF ; je prends cette perpendiculaire égale au côté du carré B ; je joins F et G, pour avoir le côté du carré équivalent à la somme de A et de B. Au point G, j'élève sur FG une perpendiculaire GH égale au côté de C. FH est alors le côté d'un carré équivalent à la somme de C et du carré qu'on ferait sur FG, ou équivalent à la somme de A, B, C. Mais, si au point H, j'élève sur FH une perpendiculaire HI égale au côté de D, FI sera le côté d'un carré équivalent à la somme de D et du carré qui serait fait sur FH, ou équivalent à la somme de A, B, C, D. Le carré FIKL construit sur FI, vaut donc la somme des quatre carrés donnés.

Probl. (*d*) ; *Construire un carré dont le rapport à un carré donné* ABCD *soit* $\frac{2}{3}$ *par exemple* (P. IX, F. 41).

Portez cinq parties égales arbitraires, sur une droite EF, et décrivez une demi-circonférence qui ait la somme de ces cinq parties pour diamètre. Au point G qui partage EF en deux parties EG, GF dont le rapport est $\frac{2}{3}$, élevez une perpendiculaire GH ; menez HE, HF, portez sur HF, de H en I, le côté du carré donné qui doit être plus grand que l'autre ; tirez IK parallèle à EF ; HK sera le côté du carré demandé, car le carré HKLM vaudra les $\frac{2}{3}$ de ABCD.

En effet, IHK est un triangle rectangle, puisque l'angle H est un angle inscrit qui comprend le diamètre EF (101) ; de plus, HG est perpendiculaire sur IK qui est parallèle à EF ; par conséquent (176).

$$\overline{HK}^2 = KI \times KN, \overline{HI}^2 = KI \times IN.$$

Mais, d'après le n° 251,

$$HKLM : ABCD :: \overline{HK}^2 : \overline{HI}^2;$$

donc, $$HKLM : ABCD :: KI \times KN : KI \times IN.$$

Divisant les deux termes du second rapport par KI, ce qui ne le change pas, on obtient

$$HKLM : ABCD :: KN : IN \text{ ou } :: EG : FG \text{ (82) ou } :: 2 : 3.$$

Il est visible que cette construction serait applicable au cas où il s'agirait de polygones semblables autres que des carrés. Seulement, après avoir trouvé HK côté du polygone demandé, correspondant à HI côté du polygone donné, il faudrait tracer la figure, comme il a été dit dans le probl. (*a*)

Si le rapport au lieu d'être $\frac{2}{3}$, était $\frac{4}{5}$, $\frac{4}{3}$, etc., on porterait sur EF, 9, 7, etc. parties égales ; le nombre des parties de EF doit toujours être égal à la somme des deux termes du rapport assigné, pour que la perpendiculaire GH puisse diviser EF en deux parties qui soient entre elles dans le même rapport. Enfin, c'est sur celle des deux droites HE, HF qui se trouve du côté de la perpendiculaire où EF a le plus de parties, que doit être pris le côté du plus grand des deux polygones semblables.

Applications : Il est impossible d'étudier et de pratiquer la Géometrie, sans faire de continuelles applications des propriétés qui viennent d'être reconnues au triangle rectangle : ces propriétés sont en quelque sorte pour les superficies, ce qu'est pour le tracé des lignes, la proportionnalité des concourantes et des parallèles qui se coupent.

« Ce n'est pas toutefois que le triangle rectangle ne puisse fournir aussi des tracés de lignes : on s'en sert avec avantage, par exemple, pour élever ou abaisser des perpendiculaires, dans les opérations qui s'exécutent sur le terrain. Il faut à cet effet, disposer un cordeau ABC (P. IX, F. 42) de telle manière que les deux brins AB, BC, noués en B, soient unis encore par un troisième brin DE; que la partie BD soit les $\frac{3}{5}$ de la partie DE, et que BE en soit les $\frac{4}{5}$; car si les trois brins sont alors tendus de façon que chacun forme une ligne droite, AB se trouve perpendiculaire sur BC. »

« Pour démontrer qu'il en est ainsi, nous supposerons que DE ait été pris de 5 mètres. BD contiendra 3 mètres et BE, 4 mètres. Le quarré de DE sera donc 25, celui de BD, 9, et celui de BE, 16; de sorte que le premier se trouvera égal à la somme des deux autres. Par conséquent, DE sera une hypothénuse et ABC, un angle droit (253). »

« Il est visible que pour tracer une perpendiculaire à une droite FG, par un point marqué H, en employant le cordeau à une seule oblique DE, il faut placer le brin BC sur la droite donnée et faire passer le brin AB par le point H. Il est visible aussi que cette appareil est plus simple et moins embarrassant, que le cordeau à deux obliques décrit page 48, appl. (*b*). »

Faces circulaires.

Il ne nous reste plus, pour terminer ce qui concerne les faces planes limitées, qu'à nous occuper de celles dont les limites sont courbes en tout ou en partie. Mais, comme la Géométrie élémentaire ne considère pas d'autres courbes que la ligne circulaire, les faces dont il s'agit, se réduisent au cercle et à celles que bornent des arcs de circonférence. Or, les propriétés de la première ont été étudiées en même temps que les polygones réguliers.

254. Les faces planes entièrement limitées par plusieurs arcs de cercle qui se coupent ou qui se touchent, n'ont point de propriétés particulières; elles jouissent de celles de leurs parties : un polygone et des portions de cercle. Si par exemple, dans la figure ABCD formée par quatre arcs de rayons égaux ou inégaux (P. X, F. 1), on mène les cordes AB, BC, CD, DA de ces arcs, on obtiendra quatre portions de cercles et le quadrilatère ABCD.

Appl. (*a*) : On construisait autrefois, je ne sais par quel motif, des fenêtres dont les arêtes étaient trois arcs de cercle, formant par leurs cordes un triangle équilatéral ABC (P. X, F. 2). Il s'en trouve encore de cette forme dans l'église St.-Eucaire, à Metz.

Appl. (*b*) : Aujourd'hui, on n'exécute plus guère que les faces circulaires limitées par des ovales à plusieurs centres (p. 161 et suiv), et celle qui est renfermée entre deux arcs de même rayon et de 60° chacun : c'est cette dernière que présente chacune des branches d'une rosace.

PROBLÈME : *Tracer une rosace.*

« Décrivez une circonférence C (P. X , F. 3); prenez un point A quelconque sur cette courbe, et avec le même rayon, décrivez l'arc BCD; du point B, toujours avec le même rayon, décrivez l'arc ACE; du point E, décrivez l'arc BCF; de F, décrivez l'arc ECG; de G, décrivez l'arc FCD; enfin de D, décrivez l'arc ACG. Vous obtiendrez six branches formées chacune par deux arcs de 60°, puisque la corde commune AC, par exemple, est égale au rayon (219). Les arcs AB, BE, etc. qui séparent les extrémités des branches, sont aussi de 60°, pour la même raison. »

« Les six branches d'une rosace sont toutes égales entre elles; car la corde AC peut être appliquée sur BC, de manière que leurs extrémités se confondent, et les arcs de la branche A se superposent alors sur ceux de la branche B, puisqu'ils ont le même rayon. On démontrerait très-facilement aussi l'égalité des faces AHCIB, BKCLE, etc. comprises entre les branches de la rosace et les arcs de la circonférence circonscrite. »

255. Les faces planes terminées par des droites et des arcs de cercle, n'ont pas non plus de propriétés particulières; elles peuvent toujours, comme les précédentes, se décomposer en portions de cercle et un polygone.

APPL. (*a*) : La plus simple et la plus employée des faces limitées par des arcs et des droites, est celle qui est renfermée entre un demi-cercle et son diamètre ; tels sont les panneaux dormans en bois ou en verre qu'on place dans la partie ronde d'une arcade; tel est, quand on ajoute un rectangle, le plan ordinaire des amphithéâtres où le public se rassemble pour écouter un orateur. Les auditeurs se placent sur des gradins en demi-cercle et concentriques; celui qui parle se tient au centre, et de cette façon tous ceux qui sont sur le même banc, entendent et voient également bien.

« Les théâtres des grecs et des romains avaient intérieurement la même forme, parce que, selon les anciens et selon le bon sens, la première convenance à observer dans ces sortes d'édifices, c'est que tous les spectateurs soient placés de façon à bien voir et à bien entendre. »

« Les mêmes peuples possédaient, pour les courses de chevaux, des *hippodromes* qui présentaient un long rectangle terminé par deux demi-cercles. Les chars devaient passer entre chaque circonférence et une borne placée au centre. »

APPL. (*b*) : Les croisées gothiques offrent des figures composées d'un rectangle ABCD (P. X , F. 4) et d'une partie limitée par deux arcs de même rayon, dont les centres sont en A et en D. Le contour AED est ce qu'on appelle un cintre *en tiers-point.*

APPL. (c) : Dans l'architecture des Maures, les arcades avaient souvent la forme que présente la figure 5 de la planche X. Le contour se composait d'une horizontale BD, de deux verticales AB, CD tangentes à deux petits arcs très-courbes, et de deux autres droites EF, EG tangentes aux mêmes arcs et formant un angle obtus. Les panneaux qui fermaient des portes ou des fenêtres de cette forme, étaient donc des faces limitées par cinq droites et deux arcs de cercle.

APPL. (d) : Enfin, pour fermer une arcade en arc rampant (p. 164), en anse de panier (p. 161), il faudrait employer une face terminée par trois droites et deux, trois ou un plus grand nombre d'arcs (p. 163 et 231).

« Nous ne pousserons pas plus loin ces applications : les formes qu'on peut donner aux produits de l'industrie, en combinant la ligne droite et le cercle, sont tellement variées, qu'il serait impossible de citer seulement celles qui ont été exécutées. Si j'ai parlé des combinaisons imaginées par les Goths et les Maures, c'est qu'on peut avoir à les reproduire, soit dans la peinture des décorations de théâtre, soit dans ces petits édifices antiques dont on décore les jardins d'agrément. »

Combinaisons du plan et de la ligne droite.

Maintenant que l'étude des faces planes limitées est terminée, nous devons reprendre celle des faces planes illimitées, et combiner le plan avec la ligne droite (*).

256. Un plan coupe une droite ou bien il ne la rencontre jamais. La droite que coupe un plan, peut lui être *perpendiculaire* ou *oblique*.

Plaçons le sommet de l'angle droit d'une équerre sur un plan, de façon que l'un des petits côtés s'y applique et que l'autre ne s'y applique pas. Si autour de ce dernier considéré comme fixe, l'équerre peut pivoter, sans que le premier abandonne le plan et sans que le sommet de l'angle droit quitte sa position, le petit côté qui fait pivot est *perpendiculaire* à ce plan.

Ainsi, la perpendiculaire à un plan forme des angles droits, avec toutes les droites qui peuvent y être menées par le point où elle le perce. Ce point est dit la *trace* de la perpendiculaire. Donc enfin, *une droite est perpendiculaire à un plan, quand elle l'est à toutes les droites qu'on peut y mener par sa trace.*

Réciproquement, *un plan est perpendiculaire à une droite, lorsqu'il renferme toutes les perpendiculaires qui peuvent être menées à cette*

(*) Pour comprendre facilement ce qui va être dit sur les plans combinés avec les droites et entre eux, il convient de les représenter par des planchettes ou des cartons, et de figurer par des fiches implantées, les droites qui les rencontrent.

droite, par la trace. Mais, il suffit que le plan contienne deux de ces perpendiculaires, pour qu'il les contienne toutes, puisque deux concourantes déterminent la position d'un plan (155); par conséquent, *un plan est perpendiculaire à une droite, s'il renferme deux perpendiculaires au même point de cette droite.*

Comme alors la droite est aussi perpendiculaire au plan, *il suffit qu'une droite soit perpendiculaire à deux autres menées sur un plan, par sa trace, pour qu'elle soit perpendiculaire à ce plan.*

PROBLÈME : *Planter une tige perpendiculairement sur un plan et de manière qu'elle passe par un point donné.*

Il faut pour cela une équerre à trois branches (P. X, F. 6), dans laquelle l'arête AB soit perpendiculaire aux arêtes BC, BD. On applique les deux dernières sur le plan, de façon que la première passe par le point donné, et l'on place la tige le long de celle-ci.

A défaut d'une équerre à trois branches, on peut employer deux équerres ordinaires, qu'on dispose de manière que l'un des petits côtés de l'une se confonde avec l'un des petits côtés de l'autre. La figure 7 représente déformé, cet appareil : ABC et ABD sont les deux équerres; leur côté commun est AB; AC et AD sont les hypothénuses ou les grands côtés.

257. *On ne peut mener par un point donné, qu'une seule perpendiculaire à un plan.*

Que le point soit donné sur le plan ou en dehors, l'équerre à trois branches (P. X, F. 6) pourra toujours être placée de manière que AB passe par ce point, BC et BD étant sur le plan, et alors AB satisfera aux conditions. Si une autre droite pouvait y satisfaire aussi, il y aurait une certaine position de l'équerre où le plan ABC, par exemple, contiendrait cette autre droite qui serait, par conséquent, perpendiculaire sur BC, comme AB (256). Ainsi, dans le même plan ABC, on aurait deux droites passant par le même point et perpendiculaires à la même droite, ce qui a été démontré impossible (55).

APPL. (*a*) : Il suit du n° 256 que si une équerre tourne autour de l'un de ses petits côtés, l'autre engendre un plan perpendiculaire au premier. Or, le battant d'une porte est terminé à sa partie inférieure, par une arête perpendiculaire à la droite des gonds. Si donc cette droite est perpendiculaire au plancher, l'arête inférieure du battant s'appuiera sur ce plancher dans toutes ses positions, le battant jouera facilement et la porte pourra être exactement fermée.

« On voit par là que tout battant de porte doit satisfaire aux conditions suivantes : être parfaitement rectangulaire, du moins dans sa partie inférieure, et avoir ses gonds ou ses fiches placées selon une perpendiculaire au plancher. Alors, il n'y aura pas de jour par le bas, quand la porte sera fermée. Il est vrai qu'on pourrait obtenir le même résultat en inclinant la ligne des gonds vers le montant opposé ; mais dans ce cas, il faudrait que l'arête inférieure du battant fît avec cette ligne, un angle aigu ; le battant serait un parallélogramme ou un trapèze ; il n'y aurait plus aucune sorte de régularité, ni cette apparence de solidité qui plaît aux yeux, et il faudrait un grand effort pour ouvrir. »

APPL. (*b*) : Lorsqu'un point A (P. X, F. 8) est attaché à une droite BC qui pivote sur ses deux extrémités, la distance du point à la droite, est la même dans toutes les positions. Or, cette distance, c'est la perpendiculaire AD abaissée de A sur BC (47) ; par conséquent, la longueur de cette perpendiculaire ne change pas pendant le mouvement, et comme celle du lien AE ne peut pas changer non plus, il s'ensuit que le triangle rectangle ADE conserve toujours la même grandeur (167), que la longueur de DE est invariable, et que les perpendiculaires abaissées sur BC, de toutes les positions de A, aboutissent au même point D. Le point A décrit donc une circonférence qui a pour rayon AD, pour centre D et dont le plan est perpendiculaire à la droite pivotante (256). Cela nous montre que si un plan attaché à une droite perpendiculairement, tourne autour de cette droite ; chaque point du plan décrit une circonférence qui s'y trouve contenue toute entière.

« Ainsi, un cercle perpendiculaire à un axe de rotation (7) qui passe par son centre, peut tourner ou pivoter sur cet axe, en décrivant sans cesse sa propre circonférence. Voilà pourquoi deux roues dentées qui sont montées sur des *arbres*, engrènent toujours de la même manière pendant leur rotation. Voilà pourquoi, dans certaines manufactures, on lime ou l'on *fraise* au moyen d'un plateau circulaire, taillé en lime, qui tourne sur un axe au bout duquel il est fixé. Voilà pourquoi enfin, les scies rondes peuvent débiter les bois. L'emploi de cette sorte de scies est fort avantageux, car elles coupent constamment et avec une grande rapidité : il en est qui ont 12 à 18 pouces de diamètre, font 700 tours par minute et n'emploient que 40 secondes pour former un trait de 9 pieds de long, sur 4 pouces et demi de large ; les faces qu'elles produisent sont parfaitement planes, très-unies et très-lisses. »

APPL. (*c*) : Une face plane peut être exécutée au tour, aussi bien qu'à la scie et au rabot : il suffit de maintenir l'outil tranchant, dans une direction perpendiculaire à l'axe de rotation qui est la ligne des pointes, et de le faire avancer par degrés vers cet axe, sans changer sa direction ; car il trace alors des circonférences concentriques, toutes situées dans un même plan perpendiculaire à la droite qui joint les deux pointes du tour, et par conséquent, la face unie qui renferme ces circonférences, est plane. C'est ce procédé qu'on emploie communément dans les grandes manufactures de machines, pour former des plateaux et pour dresser les extrémités de certaines pièces d'assemblage

268. Quand une droite qui perce un plan, ne satisfait pas aux conditions du n°. 256, elle est *oblique* sur ce plan. Ainsi, AI

qui est oblique sur BC (P. X, F. 7), le serait aussi par rapport au plan sur lequel BC et BD se trouveraient appliquées, parce que AC ne serait pas perpendiculaire à toutes les droites qui pourraient être menées par sa trace C, dans le plan.

L'angle ACB que fait l'oblique AC avec la droite CB qui joint sa trace à celle de la perpendiculaire, est *l'inclinaison* de cette oblique sur le plan ; de sorte que si cet angle est de 40°, on dit que l'oblique est inclinée de 40° sur le plan.

Mais, comme il serait assez incommode, dans la pratique, de déterminer au moyen d'un angle, la position d'une droite AC oblique ou *inclinée* sur un plan, on emploie de préférence à l'inclinaison, ce qu'on appelle la *pente*, c'est-à-dire la longueur de la perpendiculaire EF élevée sur BC, en un point E placé à l'unité de distance de C, jusqu'à la rencontre de AC.

Si par exemple, EF=2m, quand CE=1m, on dit que la pente de l'inclinée AC est de 2 mètres pour un mètre, ou plus simplement que cette pente est de 2 mètres; car le mot *pente* suffit pour faire entendre que le pied E de la perpendiculaire EF, est à 1 mètre du pied C de AC. Si EF se trouvait de 4 centimètres, CE étant toujours de 1 mètre, nous dirions que AC a une pente de 0m,04.

Lorsque BC et BD sont égales, les deux triangles rectangles ABC, ABD sont égaux (165), et par suite les hypothénuses AC, AD sont égales. Il en serait de même pour celles de toutes les équerres qui pourraient être placées autour de AB, ainsi que le sont les deux de la figure. Donc, *pour un plan, comme pour une droite, les obliques également éloignées de la perpendiculaire, sont égales; celles qui sont inégalement éloignées sont inégales; la plus éloignée est la plus longue, et les obliques égales sont également inclinées tant sur le plan que sur la perpendiculaire.*

Il s'ensuit que si l'on fait tourner autour d'un point A pris hors d'un plan (P. X, F. 9), une droite AC dont l'extrémité C reste constamment sur le plan, cette extrémité décrira une circonférence dont le centre sera la trace B de la perpendiculaire abaissée de A sur le même plan.

La figure présente inégales, les obliques AC, AC', AC'', AC''', etc.; cela tient à ce que la perpendiculaire AB et les obliques, au lieu d'être couchées sur le papier où la circonférence se trouve tracée, devraient s'élever au-dessus. On ne peut représenter autrement les choses qui ne se trouvent pas dans un même plan, à moins de recourir à la méthode des projections (p. 65). Mais, puisqu'il ne s'agit pas de corps, il est plus facile pour les commençans, de relever en imagination, les lignes droites de la figure, au-dessus du cercle. Ils concevront alors que les obliques AC, AC', etc, peuvent être égales.

Au reste, un moyen sûr de bien voir et de bien comprendre les figures qui offrent, comme celle-ci, une sorte de perspective, c'est de les construire en relief. Plantez perpendiculairement sur un carton, une tige droite en fil de fer; attachez à son extrémité supérieure A, des fils égaux ; fixez au carton, les autres bouts C, C', etc. de ces fils, et vous pourrez tracer une circonférence qui ait son centre en B et passe par tous les points C, C', etc. ; ou bien décrivez un cercle sur un carton, et plantez au centre une tige perpendiculaire ; tous les fils qui joindront l'extrémité de cette tige ou tout autre de ses points à ceux de la circonférence, seront de même longueur.

Problème : *Abaisser d'un point donné hors d'un plan, une perpendiculaire à ce plan, sans équerre à trois branches.*

Avec le compas à curseur (6), ou avec un cordeau, marquez sur le plan, trois points qui soient à la même distance du point donné ; cherchez le centre de la circonférence où se trouvent ces trois points (p. 97) ; la droite ou la tige qui unira ce centre et le point indiqué, sera la perpendiculaire demandée, et sa longueur donnera la courte ou *la vraie distance* du point au plan.

259. *Le plan qui partage une de ses perpendiculaires en deux parties égales, est le lieu de tout point situé à égales distances des extrémités de cette droite.*

Pour démontrer ce principe et les suivans, nous représenterons par un parallélogramme, tout plan différent de celui du papier, et nous le désignerons par deux lettres seulement, afin de bien indiquer qu'il ne s'agit pas d'une face limitée.

Soient donc le plan MN (P. X, F. 10) et la perpendiculaire AB, coupée en deux parties égales au point C où elle perce le plan. Il est clair d'abord que tout point D pris sur le plan, est également distant de A et de B ; car, si nous menons DC, cette droite sera perpendiculaire à AB (256), et puisque AC=BC, les obliques DA, DB seront égales (48).

De plus, tout autre point E pris en dehors du plan, sera inégalement éloigné de A et de B. Joignons E à A et à B. La droite EB, par exemple, percera le plan en un certain point F, pour lequel on aura BF=FA, ce qui rendra la ligne brisée AFE égale à la ligne droite BE. Or, AE sera nécessairement plus courte que AFE. Donc, AE sera plus courte aussi que BE ; par conséquent, tout point situé à égales distances de A et de B, est nécessairement sur le plan MN.

260. *Deux perpendiculaires à un même plan sont parallèles.*

Si AB, CD sont perpendiculaires au plan MN (P. X, F. 11), elles sont aussi perpendiculaires à la droite BD qui joint leurs traces sur ce plan (256). Reste donc à démontrer que les trois droites AB, BD, CD sont dans un même plan ; car s'il en est ainsi, CD sera parallèle à AB, en vertu du principe 54. Menons par le milieu de BD, une perpendiculaire à cette droite, sur le plan MN, et prenons EF = EG. La distance BF sera égale à BG (48), et AF, AG, obliques sur le plan, auront même longueur (258). Le point

D sera aussi à la même distance de F et de G, et par suite, CF sera égale à CG. Donc, les quatre points A, B, C, D appartiennent au plan qui coupe FG perpendiculairement en deux parties égales (259), et les droites AB, CD, BD sont dans un même plan.

261. *Quand une droite* AB (P. X, F. 11) *est perpendiculaire à un plan* MN, *toute parallèle* CD *à cette droite est aussi perpendiculaire au plan*; car, si CD n'était pas perpendiculaire à MN, on pourrait élever au point D, sur ce plan, une perpendiculaire DH qui se trouverait aussi dans le plan ABCD des deux parallèles (260). On aurait donc sur ce dernier plan, deux parallèles à AB, passant par le même point D, ce qui est impossible (56).

262. *Deux droites* AB, CD *parallèles à une troisième* EF (P. X, F. 12), *sont parallèles entre elles, bien que ces trois lignes ne soient pas situées sur un même plan*; car, si nous concevons un plan MN auquel EF soit perpendiculaire, AB sera aussi perpendiculaire au même plan (261); il en sera de même de CD, et par conséquent, AB et CD seront parallèles (260).

263. Parmi tous les plans qu'on peut concevoir par un point, il en est deux sortes fort remarquables.

1°. Les plans *verticaux*; on appelle ainsi, comme nous l'avons déjà dit page 170, les plans qui contiennent la verticale donnée par le fil-à-plomb. Puisqu'une ligne droite ne suffit pas pour déterminer un plan (155), on comprend qu'une foule de plans verticaux peuvent passer par la direction d'un même fil-à-plomb.

2°. Les plans *horizontaux*; ce sont ceux qui se trouvent perpendiculaires à une verticale. *Un plan est donc horizontal quand* (256) *il contient deux perpendiculaires à la verticale ou deux horizontales* (44); *il n'y a donc qu'un seul plan horizontal, pour chaque point d'une verticale.*

Tout plan qui n'est ni vertical, ni horizontal, est dit *incliné*.

Appl. (*a*) : C'est sur le principe 261 qu'est fondé le moyen employé par les menuisiers, pour placer verticalement les montans du chambranle d'une porte, ceux du châssis dormant d'une fenêtre, etc. Ils se servent, comme on sait, d'un instrument nommé *niveau de côté* (P. X, F. 13). Ce niveau est composé d'une planchette dont les bords AB, CD sont parallèles à la ligne milieu EF, et d'un fil-à-plomb fixé en un point E de cette dernière droite. Quand le fil-à-plomb librement suspendu, couvre la *ligne-de-foi*. EF, cette droite est verticale ou perpendiculaire au plan horizontal; il en est de même des parallèles AB, CD, et par conséquent, l'arête GH du montant, avec laquelle se confond AB, est elle-même perpendiculaire au plan horizontal.

Appl. (*b*) : Il résulte du numéro 363 que pour placer de niveau un plan ou une des faces d'un corps, il faut rendre horizontales deux droites de cette face qui se coupent ; c'est-à-dire qu'il faut donner deux *coups* de niveau (p. 36), l'un dans une direction quelconque, l'autre selon une droite qui, pour plus d'exactitude, doit couper cette direction sous un angle à peu près droit.

« Si l'on donnait les deux coups de niveau selon des parallèles, le plan ou la face passerait bien par deux horizontales, mais ces horizontales ne coupant point la même verticale, ne détermineraient pas un plan de niveau. Si l'on plaçait l'instrument selon deux droites qui fissent un angle très-aigu ou très-obtus, une légère inexactitude dans cet instrument pourrait faire paraître les droites horizontales, bien que le plan ne fût pas vraiment de niveau. »

Appl. (c) : Les plans verticaux et les plans horizontaux sont fréquemment employés dans plusieurs arts et notamment dans ceux qui ont rapport à la construction des édifices. Les pièces de bois d'une charpente sont placées de manière que deux de leurs faces au moins soient verticales : ainsi, les quatre grandes faces d'un poinçon sont verticales ; deux des grandes faces d'un arrêtier, d'une noue, d'un chevron sont verticales. Les cloisons de nos appartemens forment aussi des plans verticaux, pour plus de solidité (p. 11, loi *e*). Quant aux gros murs, leurs faces extérieures sont des plans un peu inclinés vers l'intérieur de l'édifice, afin qu'ils résistent mieux à la poussée que leur fait éprouver la charge des planchers et des toits : ces faces ont ce qu'on appelle du *fruit* ou du *talus ;* mais les faces intérieures sont verticales, comme celles des cloisons.

« Les plans horizontaux se trouvent dans les planchers, dans les plafonds. Les faces supérieures et inférieures des pierres de taille et des briques qu'on pose par assises, sont aussi horizontales ; les autres joints sont verticaux, excepté pourtant dans les plates-bandes (p. 183, appl. *c*). »

App. (*d*) : *L'élévation* ou *la projection verticale* d'un bâtiment (p. 76), est le dessin de tout ce que présente l'une des faces extérieures ; car on ne tient pas compte alors du léger talus de ces faces. La *coupe* ou *le profil* est le dessin de tout ce que renfermerait un plan vertical qui couperait le bâtiment selon sa longueur ou selon sa largeur : ce dessin montre les dispositions intérieures, depuis le faîte jusqu'au sol des caves. Enfin, *le plan par terre* ou *la projection horizontale* est le dessin de tout ce qui se trouverait sur un plan horizontal qui couperait l'édifice à une certaine hauteur : par exemple, un peu au-dessus des tablettes des fenêtres, soit du rez-de-chaussée, soit d'un étage quelconque ; car, lorsque les étages ne se ressemblent pas, il faut une projection horizontale pour chacun.

Loi de la nature (*a*) : puisqu'une droite et un point situé hors de cette droite, suffisent pour déterminer un plan (155), on conçoit que le point milieu du Soleil et l'axe de rotation de la Terre (7) se trouvent continuellement dans un même plan. Ce plan est vertical parce que passant par le point milieu de la Terre, il contient tout au moins la verticale qui aboutit au point milieu du Soleil. Quand, par suite du mouvement circulaire de notre globe, nous venons à passer dans ce plan, il est midi chez nous; c'est-à-dire qu'il s'est écoulé autant d'heures depuis le moment où le Soleil s'est levé pour nous, qu'il s'en écoulera jusqu'à celui de son coucher. Autrement, il est midi quand le plan passant par l'axe de la Terre et par notre verticale, vient à passer aussi par le point milieu du Soleil. Ce plan est notre *méridien*.

« Le même méridien ne peut être commun à tous les lieux, par conséquent, midi ne sonne pas au même moment partout : à Metz par exemple, il est midi un peu plus tôt qu'à Paris, parce que le plan méridien de notre ville passe par le point milieu du Soleil, un peu plus tôt que celui de la capitale, attendu que Metz est à l'orient de Paris et que la Terre tourne sur son axe d'occident en orient. Mais, nous avons midi un peu plus tard que Strasbourg. De sorte que si vous régliez votre montre à un bon méridien de Metz, avant de partir pour Paris ou pour Strasbourg, elle avancerait quand vous seriez arrivé dans la première de ces villes, ou retarderait lorsque vous vous trouveriez dans la seconde, supposé toutefois qu'elle ne se dérangeât pas en route. »

Loi (*b*) : Nous avons dit, page 44, que la surface des eaux tranquilles est de niveau : cette surface nous présente donc un plan horizontal; mais pour que cela soit vrai, il faut qu'on n'en considère pas une grande étendue; car, ainsi que nous le verrons plus loin, elle ne peut être regardée comme plane, qu'entre des limites assez rapprochées. Quoi qu'il en soit, la direction du fil-à-plomb est toujours perpendiculaire à la surface des eaux tranquilles, et il s'ensuit que des verticales sont parallèles (263), quand elles ne sont éloignées l'une de l'autre que de quelques toises (p. 70, loi *b*).

264. Une droite qui ne rencontre jamais un plan ou qui n'en est jamais rencontrée, est dite *parallèle à ce plan*.

La droite qui est parallèle à un plan, est toujours parallèle à une certaine droite située dans ce plan, et menée par un point donné; car elle ne peut rencontrer aucune des droites du plan, et parmi toutes celles qui passent par le point, il y en a toujours une qui se trouve dans le même plan que l'autre. Or, deux droites qui, placées dans le même plan, sur le même tableau, ne se rencontrent pas, sont parallèles (p. 52).

265. *Il suffit qu'une droite* AB (P. X, F. 14) *soit parallèle à une droite* CD *contenue dans un plan* MN, *pour qu'elle soit parallèle au plan;* car AB ne pouvant sortir du plan AD qui renferme les deux parallèles (155), ne pourrait rencontrer MN sans rencontrer en même temps CD.

266. On peut conclure de là et du n° 262, que *des droites parallèles entre elles, le sont toutes au même plan.* Mais, la réciproque n'est pas vraie : des droites parallèles au même plan, peuvent se

couper, ou se croiser sans se rencontrer ; ce dernier cas a lieu, quand elles ne sont pas à la même hauteur au-dessus du plan.

PROBLÈME : *Placer une droite ou l'une des arêtes d'un corps, parallèlement à un plan donné* MN (P. X, F. 14).

Tracez une droite CD sur ce plan ; plantez en deux points C, D de cette droite, deux tiges CA, DB de *même longueur, perpendiculaires* au plan, ou verticales, s'il est possible ; puis, placez l'arête de manière qu'elle passe par leurs extrémités A, B. La droite AB sera parallèle à CD, puisque ces lignes renfermeront entre elles des parallèles égales (66) ; par conséquent, AB sera parallèle au plan MN (265).

APPL. (*a*) : C'est d'après ce procédé qu'on pose un garde-fou ou le couronnement d'un parapet, le long d'une rampe qui n'est autre chose qu'un plan incliné : on plante verticalement des poteaux de même hauteur ou bien l'on trace sur le mur du parapet, des verticales de même longueur.

APPL. (*b*) : Quand un plan est horizontal, toutes les droites qu'il contient sont des horizontales (263). Une parallèle à un plan horizontal est donc horizontale (264). Il s'ensuit qu'une telle parallèle peut être placée avec le niveau (p. 58). Mais, elle peut l'être aussi par le procédé précédent : c'est ainsi que les serruriers posent la barre d'appui d'un balcon, que les menuisiers placent des tringles, des *cymaises* parallèles à un plancher ou à un plafond, etc., etc.

Combinaisons des plans entre eux.

Deux plans se coupent ou ne se rencontrent jamais. La ligne où se trouvent tous les points communs à deux plans qui se coupent, est appelée l'*intersection* de ces plans ou la *trace* de l'un sur l'autre.

267. *L'intersection de deux plans est une ligne droite* ; car, si parmi tous les points communs à ces plans, il s'en trouvait un seul qui ne fût pas sur la droite formée par deux autres, les plans se confondraient, puisqu'il suffit de trois points non en ligne droite, pour déterminer la position d'un plan (155).

APPL. (*a*) : Les ouvriers en bois, en fer, en pierre, etc., n'ont jamais à s'occuper de rendre droites les arêtes des corps qu'ils façonnent : ces arêtes sont des lignes droites, dès que les faces dont elles sont les intersections, se trouvent parfaitement planes. Ainsi, comme nous l'avons dit page 170, les arêtes d'une règle sont vraiment droites, quand les petites et les grandes faces ont été dressées avec soin.

APPL. (*b*) : Les plis qu'on forme dans une feuille de papier, dans la tôle, dans une étoffe, etc., sont aussi des lignes droites, parce que les faces qui se coupent selon ces plis, sont des plans.

Appl. (c) : Le cordeau des charpentiers marque une droite sur la face plane d'une pièce de bois, quand il la choque sans dévier du plan qu'il forme étant élevé en ligne brisée (p. 9). Il faut donc que ce plan soit vertical ; car toutes les parties du cordeau tendent à retomber selon des verticales (263 et p. 11). Si le plan de l'angle que fait le cordeau étant pincé, différait sensiblement du plan vertical, les deux côtés de cet angle, quoique peu pesans et fortement tendus, ne retomberaient pas selon un même plan, et l'empreinte faite par le cordeau se trouverait une ligne brisée ou courbe.

App. (d) : Les lignes projetantes d'une droite (p. 65) forment un plan, et la projection de la droite n'est autre chose que l'intersection de ce plan et du plan de projection. Il s'ensuit que les projections d'une droite sont aussi des droites.

Appl. (e) : Les rayons de lumière qu'interrompt une droite, une arête, forment aussi un plan, et par conséquent, l'espace qui se trouve privé de lumière derrière la droite, est un plan. Si donc l'ombre d'une droite est portée sur un plan, cette ombre est nécessairement une droite.

268. *L'intersection de deux plans verticaux est une verticale ;* car si par un des points de cette intersection, nous menons une verticale, elle devra se trouver contenue toute entière dans l'un et dans l'autre plan (263), et se confondra, par conséquent, avec la droite commune à ces deux plans.

Appl. (a) : On fait usage du dernier principe dans plusieurs arts, pour placer verticalement des jalons, des tiges, des supports, etc. Il faut d'abord mettre une des arêtes, dans un plan qui contienne l'œil et le fil-à-plomb. Prenant ensuite une seconde position, on amène la même arête dans un second plan vertical déterminé comme le premier, faisant en sorte qu'elle ne quitte pas celui-ci. Si elle l'a quitté, on l'y replace, puis on vérifie si elle est encore dans le second. Lorsque, après quelques vérifications, l'arête se trouve enfin dans les deux plans verticaux, elle est verticale. Pour plus d'exactitude, il convient que les deux positions de l'observateur soient à environ 90° l'une de l'autre.

Appl. (b) : S'agit-il de tracer une verticale sur un plan vertical donné ; on fait marquer sur ce plan, deux points de la trace d'un plan qui passe par l'œil et par le fil-à-plomb, puis on joint ces deux points par une droite, et cette droite se trouve verticale.

269. *L'intersection d'un plan horizontal et d'un plan quelconque, est une horizontale.* Cela résulte de ce que l'intersection de deux plans est une droite (267) et de ce que toutes les droites d'un plan horizontal sont des horizontales (263).

Application : Lorsqu'une des faces d'une pièce de bois, d'une pierre de taille, d'un corps quelconque, est de niveau, toutes les arêtes qui terminent cette face, toutes les traces des plans qui la rencontrent, sont aussi de niveau.

270. Deux plans MN, MP qui se coupent comme deux feuillets d'un livre (P. X, F. 15), laissent entre eux un espace illimité dans deux sens différens. Cet espace est dit *l'angle des deux plans ;* on le nomme aussi *coin*. Nous désignerons le coin par quatre lettres, au nombre desquelles seront celles de l'instersection ; nous dirons, par exemple, le coin NOPM. Toutefois, nous pourrons aussi nommer un coin par les deux seules lettres de son arête OM, quand il n'y aura pas plusieurs coins autour de cette droite.

Supposons que le plan MP ait été d'abord appliqué sur MO, qu'il ait eu la position MP', et que NO soit perpendiculaire sur MO. Pendant que MP a tourné sur MO, pour venir prendre sa position actuelle, tous ses points ont décrit des arcs de cercle dont les centres sont sur MO et dont les plans sont perpendiculaires à cette même droite (p. 265, appl. *b*). P', par exemple, a décrit l'arc P'P dont le plan P'OP est perpendiculaire à MO et dont le centre est O. Il s'ensuit que OP est perpendiculaire sur MO, comme OP' (256). De même, A' a décrit l'arc A'A dont le centre est B et dont les rayons A'B, AB sont perpendiculaires à MO; C' a décrit l'arc C'C dont les rayons C'D, CD sont aussi perpendiculaires à l'arête du coin.

Il est visible au reste que les rayons OP, BA, DC s'écarteront des rayons OP', BA', DC', à mesure que le plan MP s'écartera du plan MN ; que si MP a fait un quart de révolution, une demi-révolution, une révolution entière sur MO, les rayons OP, BA, DC auront décrit un quart de circonférence, une motié de circonférence, une circonférence entière, autour des centres O, B, D. Ainsi, quand l'écartement des deux plans ou le coin sera doublé, triplé, quadruplé, etc., les angles POP', ABA', CDC' seront aussi doublés, triplés, quadruplés, etc. Un quelconque de ces angles peut donc servir d'*indication* pour le coin.

Par conséquent, l'*indication de l'angle de deux plans, est la même que celle de l'angle formé par deux droites perpendiculaires à l'intersection, l'une dans un plan, l'autre dans l'autre.* Si l'angle NOP est aigu, le coin NOPM est aigu ; s'il est droit, le coin est droit ou bien *les deux plans sont perpendiculaires entre eux.*

APPL. (*a*) : La manière dont on se sert du graphomètre (p. 34), montre que les angles levés sont les coins formés par les plans verticaux qui contiennent les points remarquables du terrain et l'axe de l'instrument ; car cet axe est vertical, puisque le limbe est horizontal, et les lignes de niveau qui donnent l'angle, sont perpendiculaires à l'intersection des plans verticaux.

« Dessiner un plan revient donc à marquer sur le papier, considéré comme plan horizontal, les traces des plans verticaux qui passent par les points remarquables de terrain et par les stations.

Ces traces donnent en se coupant deux à deux, les projections horizontales dès points remarquables, projections dont l'ensemble forme le plan (p. 65). »

« Si au lieu de lever l'angle ABC (P. X, F. 16) des deux horizontales AB, BC ou des deux plans verticaux BM, BN, on prenait l'angle DBE donné par les droites qui vont de la station B aux objets D, E, on ne pourrait pas rapporter cet angle sur le plan horizontal du papier, sans y faire une correction ; car l'angle DBE est visiblement plus petit que l'angle horizontal ABC, puisque BD, BE étant plus rapprochées de la verticale BF, que BA et BC, sont moins écartées l'une de l'autre que les dernières droites. En faisant sur le plan l'angle DBE, sans l'augmenter convenablement, on n'obtiendrait pas les véritables positions des points D, E du terrain, par rapport à la base (p. 252, appl. *a*). Dans d'autres cas, il faudrait opérer une diminution : la droite BE, par exemple, pourrait se trouver tellement au-dessous de BC, que l'angle DBE surpassât ABC. »

Appl. (*b*) : La position d'un plan incliné MN (P. X, F. 17) pourrait se déterminer au moyen du *coin aigu qu'il forme* avec un plan horizontal PQ ; l'indication de ce coin serait celle de l'angle ABC que ferait sur le plan horizontal, une droite AB tracée dans le plan incliné, perpendiculairement à la trace horizontale MP ; car (258) l'horizontale BC d'équerre sur MP, rencontrerait la verticale AC, puisque le plan ABC étant perpendiculaire à l'horizontale MP (256), prendrait la verticale B et par suite AC (155).

« Mais, comme il serait incommode, dans la pratique, d'employer l'indication d'un angle pour déterminer la position d'un plan incliné, on fait ordinairement connaître cette position en donnant la pente AC de la droite AB (p. 266). Cette droite et toutes celles du plan MN qui coupent d'équerre, comme elle, l'horizontale MP, sont des *lignes de plus grande pente* (p. 11), c'est-à-dire que de toutes les droites inclinées qui peuvent être tracées sur le plan MN, ce sont celles dont la pente est la plus grande. »

« Soit en effet l'horizontale B*c* égale à un mètre, comme BC ; soit aussi la verticale *ca* élevée jusqu'au plan MN. Cette verticale sera la pente de la droite inclinée *a*B, tracée sur MN. Mais, puisque Bc est plus longue que B'*c* perpendiculaire à MP, le point C est plus éloigné de MP que *c*, et par suite, il en est de même de A relativement à *a*. Conséquemment A est plus élevé que *a*, et la pente AC plus grande que la pente *ac*. »

« Ainsi, 1° *Les lignes de plus grande pente d'un plan incliné sont perpendiculaires à ses horizontales ;* »

« 2° *C'est la pente d'une ligne de plus grande pente, qui détermine la position d'un plan incliné.* »

« Voilà pourquoi l'on dit qu'une rampe est *au cinquantième*, lorsque ses lignes de plus grande pente ont une pente de deux centimètres, pour une distance horizontale d'un mètre. »

« PROBLÈME : *Tracer une ligne de plus grande pente, sur un plan incliné* MN (P. X, F. 17). »

« Il suffit de tracer une horizontale quelconque AD, dans le plan MN, et une droite AB qui la coupe d'équerre. Cette perpendiculaire AB est alors une des *droites de plus vite descente*, c'est-à-dire qu'elle est le chemin le plus rapide et le plus court qu'on puisse suivre pour aller de A à l'horizontale MP qui termine le plan incliné. »

APPL. (*c*) : Si l'on veut indiquer en degrés la position d'un plan incliné, par rapport au plan horizontal, il faut y tracer une ligne de plus grande pente AB (P. X, F. 18); appliquer sur cette droite, l'un des petits côtés d'une équerre ADC ; placer contre l'autre, l'une des arêtes droites d'un quart de cercle DFE gradué et garni d'un fil-à-plomb attaché au centre E ; puis prendre l'indication de l'angle DEG formé par ED, perpendiculaire au plan incliné, et par la verticale EG.

« L'angle DEG ou DEH est effectivement égal à l'angle ADI, formé par AB et par l'horizontale DI contenue dans le plan vertical ADF, car chacun de ces deux angles ajouté à EDH, donne 90°. Or, l'angle ADI est bien celui que fait le plan incliné sur le plan horizontal, puisque le plan vertical ADI est nécessairement perpendiculaire à l'horizontale du plan incliné, que AB rencontre d'équerre au point D (appl. *b*).

« A défaut de quart de cercle, on applique sur AB une règle un peu large, on place un fil-à-plomb au sommet K, et l'on trace sur la règle la verticale KL. Le rapporteur donne ensuite l'indication de l'angle MKL, qui est égal à KBD, si les grandes arêtes de la règle sont parallèles; et il ne s'agit plus que de retrancher KBD de 90°, pour obtenir l'angle cherché DBO. »

APPL. (*d*) : Tailler les pierres, c'est former des faces ou paremens qui se coupent en faisant des coins déterminés, tantôt droits, tantôt aigus, tantôt obtus. Si donc on a déjà un parement MN (P. X, F. 19) auquel doive être perpendiculaire l'intersection des deux faces d'un coin, c'est sur ce parement qu'il faut rapporter avec la fausse équerre, l'angle ABC de ce coin : les droites AB, BC qu'on y tracera, seront perpendiculaires à l'intersection BD, quand les faces ABD, CBD seront exécutées convenablement (256), et ces faces feront l'angle ou le coin donné (270).

271. *Un plan* MN *qui contient une droite* AB *perpendiculaire à une autre* OP, *est aussi perpendiculaire à ce plan* (P. X, F. 20).

Puisque AB est perpendiculaire sur OP, elle l'est aussi sur CN, intersection de MN et de OP, et sur BD menée dans OP perpendiculairement à CN (256). Ainsi, l'angle ABD est droit et il en est de même du coin des deux plans (270).

Donc, *tout plan vertical est perpendiculaire au plan horizontal qu'il rencontre ;* car le plan vertical contient la verticale (263), droite qui est perpendiculaire au plan de niveau.

272. *Si deux plans* MN, OP *sont perpendiculaires à un troisième* QR, *l'intersection* AB *des deux premiers est perpendiculaire au dernier* (P. X, F. 21).

Elevons au point A dans le plan MN, une perpendiculaire AC à sa trace ND, et menons sur le plan QR, AE perpendiculaire à la même trace. L'angle CAE sera droit, puisque MN est perpendiculaire sur QR (270), par conséquent, AC sera aussi perpendiculaire sur QR (256). Elevons au même point A dans le plan OP, une perpendiculaire AF à la trace PG; AF sera perpendiculaire sur QR, comme AC. Or, on ne peut élever par un point donné, qu'une seule perpendiculaire à un plan (257). Donc, AC et AF se confondent, et comme ces droites appartiennent à des plans différens, elles se confondent aussi avec l'intersection AB de ces plans. Donc enfin, AB est perpendiculaire au plan QR.

Appl. (*a*): C'est en appliquant le principe 271, que le tailleur de pierres exécute un parement d'équerre sur un autre MN (P. X, F. 19). Après avoir tiré une droite BC sur le parement terminé, il fait en un point E de BC, une *plumée* ou *ciselure* droite, sur la face brute NP. Cette ciselure doit être telle qu'en y plaçant l'une des règles d'une équerre ouverte, et la faisant pivoter, on voie l'autre règle s'appliquer exactement sur MN, dans toutes ses positions. Alors, le fond de la ciselure est perpendiculaire sur MN (256). Si donc on enlève la pierre qui dépasse le plan de CEF ou de BEF, le parement qui en résultera, contiendra une perpendiculaire à MN et sera lui-même d'équerre sur cette face plane.

Appl. (*b*): Le principe 272 montre qu'il suffit aux tailleurs de pierres, et aux charpentiers, de former deux paremens ABD, CBD qui soient d'équerre sur un troisième MN (P. X, F. 19), pour obtenir une arête BD perpendiculaire à ce troisième parement.

Loi de la nature (*a*): Le rayon de lumière AB qui vient frapper un miroir, un plan DE (P. X, F. 22), est dit *rayon incident;* le rayon BC que renvoie le miroir, est dit rayon *réfléchi* (p. 50): le point B où se brise le premier, est nommé point *d'incidence*. Le plan ABC est toujours perpendiculaire à celui du miroir; les rayons font des angles égaux, avec la perpendiculaire BF élevée au point B, sur ce miroir.

« Comme l'angle ABF est appelé *angle d'incidence, et* FBC, *angle de réflexion*, on dit, en physique, que *la lumière est réfléchie par un miroir plan, de manière que l'angle de réflexion égale l'angle d'incidence*. Cette loi de la réflexion de la lumière, est commune à la réflexion de tous les corps parfaitement élastiques; aussi fait-elle le fondement des principes du jeu de billard. »

Loi (*b*): Le rayon incident AB et le rayon *réfracté* BC (P. X, F. 23) forment aussi un plan perpendiculaire à la face plane DE du corps où se fait la réfraction (p. 50). Si vous prenez BF et BG égales et que vous meniez les droites FH, GI d'équerre sur HI, perpendiculaire au plan DE, élevée par le point d'incidence B, le rapport des pentes FH, GI sera toujours le même, pour toutes les positions de AB, tant que le corps qui a DE pour face, ne changera pas. Voilà pourquoi l'on dit que *les sinus de l'angle d'incidence et de l'angle de réfraction, sont dans un rapport constant pour le même milieu*, c'est-à-dire pour le même corps; car la pente FH est appelée le *sinus* de l'angle ABH, et GI, le *sinus* de l'angle CBI. Quand le *milieu* change, le rapport des sinus change aussi; ce rapport, par exemple, n'est pas dans l'eau, le même que dans le verre.

273. Deux plans qui ne se rencontrent jamais sont dits *plans parallèles.*

Deux plans MN, OP *perpendiculaires à une droite* AB, *sont parallèles* (P. X, F. 24); car s'ils se rencontraient quelque part, on pourrait joindre un point C de leur intersection aux extrémités de AB; cette droite serait perpendiculaire à AC et à BC (256), et par conséquent, il y aurait deux perpendiculaires AC, BC abaissées d'un même point C sur la droite AB, ce qui a été démontré impossible (55).

Donc *tous les plans horizontaux sont parallèles*, puisqu'ils sont tous perpendiculaires à la verticale (263).

274. *Un plan qui contient deux concourantes parallèles à un autre, lui est parallèle*; car si ces plans pouvaient se rencontrer, leur intersection couperait au moins une des concourantes situées comme elle dans le premier plan. La concourante coupée rencontrerait donc le second plan, ce qui est impossible, puisqu'elle lui est parallèle.

Donc, *deux plans verticaux sont parallèles, quand l'un contient une droite horizontale ou inclinée parallèle à l'autre.* Alors, en effet, le premier renferme deux concourantes parallèles au second, puisque les verticales qu'on y peut tracer sont parallèles à tous les plans verticaux (263 et 265).

275. *Les intersections de deux plans parallèles, coupés par un troisième, sont des droites parallèles*; car ces droites étant toutes deux dans le plan coupant, se rencontreraient si elles n'étaient pas parallèles, et par suite, les deux plans coupés se rencontreraient aussi. Or, il n'en peut être ainsi, puisque ces plans sont parallèles.

276. *Une droite* AB *perpendiculaire à un plan* MN *est aussi perpendiculaire à tout plan parallèle* OP (P. X, F. 24).

Faisons passer deux plans quelconques par AB. Les traces AD, BE de l'un seront parallèles (275), et il en sera de même des traces AF, BG de l'autre. Mais, AB étant perpendiculaire à MN, l'est aussi sur AD, AF (256), et par suite, sur leurs parallèles BE, BG (57). La droite AB est donc perpendiculaire à deux droites du plan OP, et par conséquent, à ce plan.

277. *Des droites parallèles* AB, DE *comprises entre des plans parallèles* MN, OP, *sont égales* (P. X, F. 24).

Faisons passer un plan AE par ces droites (155); il coupera MN et OP selon deux parallèles AD, BE (275). Alors AB, DE seront des parallèles comprises entre parallèles. Elles ont donc effectivement même longueur (65).

278. *Deux plans parallèles sont partout à la même distance l'un de l'autre;* car les distances des points du plan MN au plan OP (P. X, F. 24), sont les longueurs des perpendiculaires abaissées de ces points sur OP (p. 267); or, ces perpendiculaires sont parallèles entre elles (260) et, par conséquent, de même longueur (277).

Appl. (*a*): Les deux meules d'un moulin à farine sont placées de manière que les faces planes extérieures se trouvent perpendiculaires à l'axe de rotation de la meule supérieure. Ces faces sont donc parallèles, et comme la rotation autour d'un axe ne peut altérer en rien la position d'un plan perpendiculaire à cet axe (p. 265), les mêmes faces restent parallèles pendant le mouvement. Il s'ensuit que les faces qui se regardent, bien qu'elles ne soient pas planes, sont toujours placées de la même manière, l'une par rapport à l'autre, et que les grains sont écrasés également sur tous les points.

« Cet exemple est propre à montrer l'importance de la précision géométrique dans la construction des machines; car si les faces planes extérieures n'étaient pas rigoureusement perpendiculaires à l'axe de rotation; si pendant le mouvement la perpendicularité de l'axe et le parallélisme des meules pouvaient être troublés, les distances des deux faces écrasantes ne seraient pas constantes: il y aurait des endroits où les meules trop rapprochées échaufferaient la farine, et d'autres où trop écartées elles ne pourraient moudre. »

Appl. (*b*): Il résulte du n° 277 que si une droite AB (P. X, F. 24), est attachée à un plan MN, l'extrémité B ne pourra jamais quitter le plan parallèle OP, quels que soient les mouvemens qu'on fasse faire au plan MN sans changer sa position; car toutes les positions que prendra AB par suite de mouvemens rectilignes, seront parallèles entre elles, et par conséquent, toutes les positions de B devront former un plan parallèle à MN; s'il s'agit de mouvemens circulaires et que la droite soit oblique sur le plan, elle gardera toujours la même inclinaison et la même longueur; la perpendiculaire abaissée de l'extrémité B sur le plan MN, ne variera donc pas (160) et le résultat précédent sera encore obtenu.

« De même, la droite BC qui joint les extrémités de deux parallèles égales AB, FG, peut engendrer le plan OP, si le plan MN se meut sans changer de position, emportant dans son mouvement les parallèles AB, FG. »

« Voilà deux conséquences du principe 277 qui fournissent d'autres procédés pour la formation des plans. Toutes deux ont leur application dans le rabot mécanique qu'a établi en Angleterre M. *Brunel*, ingénieur français. »

« La pièce principale du rabot mécanique est une roue A (P. X, F. 25) montée perpendiculairement sur un arbre vertical, et pouvant, par conséquent, tourner dans un plan horizontal (p. 265); elle porte vers chacune des extrémités d'un de ses diamètres, seize gouges B parallèles et de même longueur. Derrière chaque groupe de gouges, se trouve un fer à rabot C. Le madrier D qu'il s'agit de dresser, d'aplanir, est porté par un chariot que pousse vers l'arbre A, une presse hydraulique. Ce chariot avance d'une longueur égale à la longueur des fers C, pendant que la roue fait un demi-tour. Il s'ensuit que les gouges forment à chaque demi-tour, sur toute la largeur du madrier, seize rainures circulaires très-serrées et placées sur un même plan. Aussitôt après, les rabots enlèvent les languettes qui séparent ces rainures, et achèvent ainsi d'aplanir. »

« Comme les pièces à dégrossir n'ont pas toutes la même épaisseur et que le bois n'a pas toujours la même dureté, une seconde presse hydraulique élève ou abaisse la roue A, autant qu'il est nécessaire pour que les gouges et les rabots puissent mordre de la quantité convenable. Enfin, c'est une machine à vapeur qui fait marcher la roue et les presses. »

Appl. (c) : La scie à recéper les pieux sous l'eau présente l'application d'une droite qui se mouvant à une distance constante d'un plan, en forme un autre. Cette droite, c'est la scie proprement dite, AB (P. X, F. 26); elle est attachée par deux tringles de même longueur, à une barre CD qui peut glisser sur un cadre MN formant un plan horizontal; et par conséquent, elle coupe les pieux EF selon un plan horizontal OP placé à une distance donnée du cadre. Un mécanisme situé hors de l'eau, imprime à la scie le mouvement convenable.

279. *Si deux plans parallèles* MN, OP (P. X, F. 24) *sont coupés par deux autres plans non parallèles* AE, AG, *l'angle* DAF *des traces sur l'un des plans parallèles, égale l'angle* EBG *des traces sur l'autre.*

En effet, si nous donnons la même longueur aux parallèles AD, BE (275), AB et DE seront des droites parallèles et égales (66). De même, si nous faisons AF=BG, AB et FG seront des droites parallèles et égales. DE et FG seront donc aussi égales et parallèles. Par conséquent, DF et EG auront même longueur; les deux triangles ADF, BEG seront égaux (164), et les angles A, B de ces triangles auront même indication.

On tire de là les deux principes suivans:

Deux angles DAF, EDG *situés dans des plans différens, sont égaux, quand les côtés de l'un sont parallèles aux côtés de l'autre et dirigés soit dans les mêmes sens, soit en sens contraires* (64).

Si trois droites AB, DE, FG *non situées sur le même plan*, *sont égales et parallèles, les triangles* ADF, BEG *formés par leurs extrémités, ont même superficie et des côtés parallèles.*

280. *Des droites coupées par plus de deux plans parallèles, sont divisées en parties proportionnelles.*

Prenons pour exemple, les trois plans MN, OP, QR (P. X, F. 27) qui coupent en A, E, B et en C, G, D les deux droites AB, CD situées ou non dans un même plan. Nous pourrons joindre A et D; le plan BAD coupera OP et QR selon deux parallèles BD, EF (275), et nous aurons (79) AE : EB : : AF : FD. Mais, le plan ADC coupera MN et OP aussi selon deux parallèles, ce qui donnera AF : FD : : CG : GD. Donc, à cause du rapport commun AF : FD, nous obtiendrons AE : EB : : CG : GD.

281. *Trois plans qui ne passent pas par une même droite, ne peuvent avoir de commun qu'un seul point;* car deux de ces plans se coupent selon une droite, et cette droite ne perce le troisième qu'en un point. A plus forte raison, quatre, cinq plans, etc. ne peuvent se rencontrer qu'en un point ou selon une ligne droite.

Quand plusieurs plans qui se coupent deux à deux, ont un seul point commun, ils forment ce qu'on nomme *un angle solide.* Ainsi, les plans MN, NO, OP, PM (P. X, F. 28) font en se coupant deux à deux, l'angle solide A. L'intérieur d'un clocher à plusieurs faces et terminé en pointe, est un véritable angle solide.

Donc, *un angle solide est un espace non terminé, compris entre trois plans au moins qui forment pointe.* D'après cela, il y a deux choses à considérer dans un angle solide; les angles plans MAN, NAO, etc., qui sont les faces, et les coins dont AM, AN, etc., intersections des plans, sont les arêtes.

282. *Dans un angle solide formé par trois plans, un quelconque des angles plans est moindre que la somme des deux autres;* car les angles MAN, NAO (P. X, F. 29) ne pourraient pas se rabattre sur MAO, en tournant autour de AM et de AO, sans empiéter l'un sur l'autre.

283. *La somme de tous les angles plans qui forment un angle solide, est toujours moindre que quatre angles droits;* car si l'on relève les angles MAN; NAO. OAP, PAM (P. X, F. 28), jusqu'à ce qu'ils se trouvent sur un même plan passant par A, ils cesseront de se joindre et ne couvriront pas l'espace autour du point A, espace qui est égal à quatre angles droits.

Nous n'en dirons pas davantage sur les angles solides; ce qui vient d'être exposé suffit pour l'intelligence du reste de la géométrie élémentaire.

SURFACES COURBES.

Nous avons étudié les faces planes limitées et les plans considérés isolément. Ces plans ont été combinés ensuite avec les lignes droites et entre eux. Voici donc le moment de nous occuper des *surfaces courbes*.

La première chose à faire, c'est d'apprendre à représenter les surfaces exactement sur le papier, ou, ce qui revient au même, à dessiner les corps de manière qu'au moyen d'une échelle, on puisse en trouver les vraies dimensions ; car on ne saurait montrer aux yeux une surface courbe complète, sans donner une idée exacte du corps qu'elle limite. Il n'en est pas de même d'une face plane : comme elle peut appartenir à un grand nombre de corps dont les formes diffèrent essentiellement, elle n'en rappelle aucun, lorsqu'elle est considérée seule.

Dessin des corps.

284. Pour que le dessin d'un corps en donne exactement les dimensions, il doit être *complet*.

Le dessin complet d'un corps se compose de deux parties au moins : *le plan* et *l'élévation* (app. *o*, p. 65 et appl. *d*, p. 269).

Le plan est l'ensemble des pieds des perpendiculaires abaissées de divers points du corps, sur un plan horizontal.

On peut dire aussi que le plan est l'ensemble des lignes qu'on aperçoit en promenant l'œil au-dessus du corps ; de manière à le placer successivement sur toutes les verticales de ce corps ; ou bien, le plan est la figure qu'on verrait, si l'on pouvait regarder de haut en bas et à la fois, tous les points visibles du corps. Généralement, ces points sont unis sur le plan, par des droites ou des courbes, selon qu'ils le sont dans le corps par des droites ou des courbes.

Placez votre équerre de façon que ses faces triangulaires soient horizontales, et attachez des fils-à-plomb aux trois sommets. Ces fils marqueront trois points sur un plan horizontal situé au-dessous de l'équerre, à une distance quelconque. Unissez ces points par trois droites ; vous aurez un triangle parfaitement égal aux faces triangulaires de l'équerre. En effet, les fils-à-plomb sont parallèles, et les droites horizontales qu'ils comprennent entre eux sont égales, puisqu'elles sont aussi parallèles (54) ; par conséquent, les côtés du triangle fait sur le plan horizontal, sont égaux aux côtés correspondans des faces triangulaires de l'équerre, et il s'ensuit que ce triangle égale chaque face (164). Un tel triangle est le plan de l'équerre ; il en fait connaître toutes les dimensions, l'épaisseur exceptée.

Il est clair, d'après cela, qu'une pièce de bois coupée carrément, dont les deux bouts seraient des carrés et qui se trouverait placée verticalement, aurait un carré pour son plan ; les côtés de ce carré et donneraient la largeur l'épaisseur de la pièce ; la longueur serait la seule dimension que vous ne pourriez prendre sur le plan.

Si une des longues faces de la même pièce était horizontale, le plan serait un rectangle précisément égal à cette face et à la face opposée; il ferait connaître la longueur et la largeur de la pièce, mais il ne donnerait pas l'épaisseur.

285. L'élévation d'un corps n'est autre chose que son plan fait sur un plan vertical. *Elle est donc l'ensemble des pieds des perpendiculaires abaissées de divers points du corps, sur le plan vertical.*

On peut dire aussi que l'élévation est la figure qu'on verrait, si l'on pouvait, en dirigeant les regards perpendiculairement au plan vertical, découvrir à la fois tous les points du devant du corps. Généralement, ces points sont unis sur l'élévation, par des droites ou des courbes, selon qu'ils le sont dans le corps, par des droites ou des courbes.

Notez bien que la position du corps pendant qu'on fait son élévation, doit être absolument la même que celle qu'il avait pendant la construction du plan : le plan et l'élévation sont deux dessins inséparables qui se rapportent à une seule position du corps.

Lors donc qu'une équerre est horizontale et que son plan est un triangle égal à celui de ses grandes faces, son élévation est un rectangle dont les grands côtés sont horizontaux et dont les petits côtés sont des verticales égales à l'épaisseur.

La pièce de bois verticale à laquelle nous avons reconnu un carré pour plan, a pour élévation un rectangle dont les grands côtés sont verticaux et d'une longueur égale à celle de cette pièce.

Quand la même pièce, placée horizontalement, a pour plan un rectangle, son élévation est un carré, si les longues arêtes sont perpendiculaires au plan vertical, et les côtés de ce carré donnent l'épaisseur.

Vous voyez par là, que l'élévation peut faire connaître la dimension que ne fournit point le plan.

286. Afin de pouvoir faire sur une même feuille de papier, le plan et l'élévation d'un corps, on y trace parallèlement au bord inférieur ou supérieur, une droite un peu forte, comme les *lignes* de résultat. Cette droite, nommée *ligne de terre,* est censée l'intersection d'un plan horizontal et d'un plan vertical : on suppose que la partie du papier située au-dessous, est le plan horizontal du terrain, et que la partie située au-dessus, est un plan vertical, celui d'un mur, par exemple. Il faut s'habituer à considérer la feuille comme si elle était pliée selon la ligne de terre, de manière que la partie inférieure fût horizontale et la partie supérieure, verticale.

Il faut s'habituer aussi à la langue des Géomètres. Nous donnerons donc, comme eux, au plan d'un objet, le nom de *projection horizontale*, et à l'élévation, celui de *projection verticale;* nous appellerons même quelquefois *plans de projection*, le plan vertical et le plan horizontal qui ont la ligne de terre pour intersection, et *lignes projetantes*, les perpendiculaires à cette droite, par lesquelles sont unis les points correspondans des deux projections.

« Effectivement, la verticale qui projette un point sur le plan horizontal MN (P. X, F. 12) et la perpendiculaire qui projette ce même point sur le plan vertical, doivent être représentées dans le tableau où ces deux plans n'en forment réellement qu'un, par une seule droite AB perpendiculaire à la ligne de terre MO et comprise entre les deux projections A, B du point; car elles forment un plan perpendiculaire aux deux plans de projection (271), et conséquemment, perpendiculaire à la ligne de terre (272); par réciproque, cette ligne est perpendiculaire à leur plan et aux traces de ce plan sur les plans de projection (256), lesquelles la rencontrent au même point. »

Ainsi, *les deux projections* A, B *d'un point doivent se trouver sur une même perpendiculaire* AB *à la ligne de terre* MO. Cette perpendiculaire se fait toujours en ligne de construction.

287. Voici quelques autres principes tout aussi nécessaires que le précédent, au dessin des corps ou des surfaces courbes.

Une verticale a pour projection horizontale, un point D, *et pour projection verticale, une droite* CG *perpendiculaire à la ligne de terre* MO (P. X, F. 12).

En effet, les fils-à-plomb qui projetteraient les divers points de la droite sur le plan horizontal, se confondraient tous avec elle et perceraient ce plan en un même point D. Les perpendiculaires qui projeteraient la droite sur le plan vertical, formeraient un autre plan vertical, qui couperait le premier selon une verticale CG (268) nécessairement d'équerre sur la ligne de terre (44).

288. *Une horizontale, perpendiculaire au plan vertical de projection, a pour projection horizontale, une droite* FH *perpendiculaire à la ligne de terre* MO, *et pour projection verticale, un point* E (P. X, F. 12).

En effet, l'horizontale et ses lignes projetantes forment un plan vertical perpendiculaire aux deux plans de projection et perpendiculaire à la ligne de terre MO (272). Donc cette ligne doit être perpendiculaire à la trace du plan sur le plan horizontal MN (256), c'est-à-dire à la projection horizontale FH de l'horizontale.

D'ailleurs, les lignes qui projeteraient les divers points de l'horizontale sur le plan vertical, se confondraient toutes avec elle et perceraient ce plan précisément au point E.

289. *Une horizontale oblique au plan vertical de projection, a pour projection verticale, une parallèle à la ligne de terre;* car les lignes qui la projettent sur le plan vertical, forment un plan horizontal, dont la trace est horizontale (269).

290. *Une horizontale parallèle au plan vertical, a pour projections, deux parallèles à la ligne de terre.*

La démonstration du principe précédent fait voir d'abord que la projection verticale doit être parallèle à la ligne de terre. Quant à la projection horizontale, elle est l'intersection du plan horizontal de projection et du plan vertical des lignes projetantes. Ce dernier est parallèle au plan vertical de projection (274), et, par conséquent, le plan horizontal doit les couper selon deux parallèles (275).

291. *Toute droite parallèle au plan vertical de projection, a pour projection horizontale, une parallèle à la ligne de terre*; car ses verticales projetantes forment un plan vertical, parallèle au plan vertical de projection (274 et 275).

292. *Toute droite parallèle à un des plans de projection, s'y projette dans sa vraie grandeur;* c'est-à-dire que la longueur de la droite est aussi celle de sa projection sur le plan parallèle.

En effet, la droite est parallèle à sa projection, puisqu'elle ne peut la rencontrer, quoique située, comme elle, dans le plan des lignes projetantes (p. 52). Ces lignes projetantes sont parallèles, et il y en a deux qui joignent les extrémités de la droite à celles de sa projection. Conséquemment, cette droite et sa projection sont deux parallèles comprises entre parallèles (65).

Cette démonstration rend visible qu'*une droite inclinée sur un des plans de projection, s'y projette selon une droite plus courte qu'elle.*

293. *Deux parallèles ont des projections parallèles;* car les plans de leurs lignes projetantes étant parallèles (265 et 274), doivent avoir des traces parallèles sur le plan de projection (275).

294. *Un cercle horizontal a pour projection horizontale, un cercle de même rayon, et pour projection verticale, une parallèle à la ligne de terre, de même longueur que le diamètre.*

Cela provient de ce que les rayons étant horizontaux, se projettent dans leur vraie grandeur, sur le plan horizontal (292); de ce que toutes les perpendiculaires qui projettent le cercle sur le plan vertical, forment un plan horizontal (263), et de ce que les deux plus écartées partent des extrémités du diamètre parallèle au plan vertical.

295. *Un cercle parallèle au plan vertical, a pour projection verticale, un cercle de même rayon, et pour projection horizontale, une parallèle à la ligne de terre, de même longueur que le diamètre.*

La démonstration est analogue à la précédente, car les rayons sont parallèles au plan vertical.

296. Pour rendre les projections plus intelligibles, pour qu'elles expriment mieux la forme des corps ou des surfaces, on fait, *en petits points*, la projection horizontale de toute ligne qui existe, mais qu'on ne voit point, quand on regarde le corps de haut en bas, et la projection verticale de toute ligne qui existe, mais qu'on n'aperçoit pas en regardant le corps horizontalement et par devant. Ainsi, *les lignes ou arêtes du dessous d'un corps doivent être* PONCTUÉES *dans la projection horizontale, et les lignes ou arêtes cachées par le devant du corps, doivent être ponctuées dans la projection verticale.* Par conséquent, une ligne a l'une de ses projections ponctuée et l'autre *continue*, si elle appartient à la fois, par exemple, au dessous et au devant d'un corps.

PROBL. (*a*) : *Construire les deux projections d'une équerre dont les grandes faces sont horizontales, et dont l'un des petits côtés est parallèle au plan vertical.* On suppose que ce petit côté est éloigné de $0^m,1$ du plan vertical, que la face inférieure de l'équerre se trouve à $0^m,2$ du plan horizontal, que l'épaisseur est de $0^m,02$, que le côté parallèle au plan vertical a $0^m,4$, que l'autre petit côté a $0^m,3$ et que l'échelle est au dixième.

Élevez en un point quelconque A de la ligne de terre YZ (P. X, F. 30), une perpendiculaire AB; portez $0^m,04$ de A en C, et par le point C, menez une parallèle à AB; prenez AD et CE de $0^m,01$, puis tirez DE; prenez DF de $0^m,03$, puis tirez FE. Le triangle EDF sera la projection horizontale de l'équerre, car le côté DE doit être parallèle à la ligne de terre, comme le côté correspondant de l'objet (291), et autant éloigné de cette droite, que le côté l'est du plan vertical.

Maintenant, portez $0^m,02$ de A en G et de C en H, puis $0^m,002$ de G en I et de H en K. Les droites GH, IK achèveront le rectangle qui doit former la projection verticale de l'équerre (289); car il faut évidemment que le côté GH de ce rectangle soit éloigné de la ligne de terre, autant que la face inférieure du corps est éloignée du plan horizontal.

Vous voyez par là que sur le dessin complet d'un corps, les distances au plan vertical sont données par les perpendiculaires à la ligne de terre, tracées dans le plan horizontal, comme AF, CE, et que les distances au plan horizontal doivent être mesurées sur les perpendiculaires à la ligne de terre, tracées dans le plan vertical, comme AI, CH.

Ainsi, non-seulement le dessin complet d'un corps fournit toutes les dimensions dont on peut avoir besoin, pour construire ce corps, mais en outre il donne les moyens de le placer comme il était placé, ou comme il doit l'être. Effectivement, il suffirait de faire sur le terrain ou sur un plancher, un triangle égal à EDF, d'après l'échelle, et de planter verticalement, aux sommets de ce triangle, trois tiges égales à AG, pour poser l'équerre horizontalement et à une distance de $0^m,2$ du plan horizontal.

C'est parfois uniquement pour donner les vraies dimensions d'un corps et indiquer les positions exactes de ses parties, les unes par rapport aux autres, qu'on fait des projections. Dans ce cas, on ne tient aucun compte des distances de ces parties au plan vertical ou au plan horizontal; ces deux plans n'existant pas, et ne devant servir qu'à l'intelligence du dessin, sont placés arbitrairement par rapport au corps. Quelquefois même, afin de simplifier le tracé, on substitue aux plans, deux faces du corps, s'il en a deux qui soient perpendiculaires entre elles.

La figure 31 (P. X), par exemple, présente aussi bien que la figure 30, les dimensions et la forme de l'objet dont elle contient les projections, quoique ce soit la grande face inférieure de l'équerre qui serve de plan horizontal, et une des petites faces qui serve de plan vertical.

Probl. (*b*) : *Construire les projections d'une pièce de bois carré, longue de* 6^m, *large de* $0^m,5$, *épaisse de* $0^m,2$.

Puisqu'on peut prendre arbitrairement les plans de projection, nous supposerons que le plan horizontal soit parallèle aux larges faces et que le plan vertical soit parallèle aux faces étroites. Il s'ensuivra (264) que les longues arêtes seront parallèles à la ligne de terre YZ (P. X, F. 32). Faites donc un rectangle ABCD, dont les grands côtés aient 6^m ou six parties de l'échelle, et soient parallèles à YZ ; donnez $0^m,5$ aux petits côtés AD, BC et prolongez-les sur le plan vertical ; tracez EF parallèlement à YZ (291); prenez EG et FH de $0^m,2$, puis tirez GH. Le rectangle ABCD sera la projection horizontale de la pièce de bois, et le rectangle EFHG en sera la projection verticale.

Surfaces cylindriques.

Les premières surfaces que nous devions étudier après les plans, sont celles sur lesquelles une règle ne peut s'appliquer dans toute sa longueur, que selon des directions parallèles. On les appelle *surfaces cylindriques*. Ainsi, toute surface cylindrique est courbe et réglée par des parallèles. Comme ces parallèles sont naturellement sans limites, la surface cylindrique n'est terminée par les deux bouts, que dans le cas où l'on en considère seulement une portion.

297. *Il y a deux principales manières d'engendrer ou de produire une surface cylindrique* : 1° en faisant cheminer une droite AB (P. X, F. 33) le long d'une courbe AA'A'', de façon qu'elle reste toujours parallèle à sa première direction ; 2° en promenant la courbe le long de la droite AB, de façon que le point A de cette courbe ne quitte jamais la droite et que les autres points tracent des parallèles à AB. Il est visible que ces deux générations donnent une surface courbe réglée par des parallèles.

Les parallèles AB, A'B'..... sont appelées *génératrices droites* de la surface; les courbes équidistantes AA'A'', BB'B'', CC'C''..... en sont les *génératrices courbes*.

Comme toutes les courbes imaginables peuvent servir à former des surfaces cylindriques, on conçoit qu'il peut exister une infinité de ces surfaces qui diffèrent par la nature de leurs génératrices courbes; et comme la génératrice droite est susceptible de prendre une infinité de positions différentes, par rapport au plan de la courbe, on comprend qu'une foule de surfaces cylindriques peuvent différer, quoiqu'ayant la même génératrice courbe.

298. De toutes les surfaces cylindriques, nous ne considérerons que celles qui ont pour génératrice courbe, la circonférence. Cette espèce est la seule dont s'occupe la géométrie élémentaire, et celle qu'on exécute le plus ordinairement dans les arts; elle est une des limites des corps qu'on appelle *cylindres*, parmi lesquels se trouvent les tuyaux des poêles, les gouttières en fer-blanc et en plomb, les rouleaux, les meules, les pistons, etc.

La surface cylindrique est dite *droite*, quand les génératrices droites sont perpendiculaires au plan de la circonférence; elle est *oblique* dans le cas contraire.

Une surface cylindrique est *complète*, quand elle est terminée par des circonférences dont les plans sont parallèles; s'il n'en est pas ainsi, elle est *incomplète* ou *tronquée*

Les circonférences parallèles qui terminent une surface cylindrique complète, en sont les *bases*. Lorsque la surface est incomplète, elle a une base et une troncature.

La droite que suit le centre d'une circonférence qui engendre une surface cylindrique, est l'*axe* de cette surface; par conséquent, *l'axe est parallèle aux génératrices droites.*

299. On peut appliquer le premier mode de génération du nº 297, à la surface cylindrique, circulaire et droite, en faisant tourner un rectangle ABCD, sur un BC de ces côtés (P. X, F. 34); car alors le côté AD chemine le long de la circonférence décrite par le point A, et reste constamment parallèle à sa première position.

Ainsi, *la surface cylindrique droite peut être engendrée par une* RÉVOLUTION *ou rotation complète d'un rectangle*. C'est pour cela qu'elle est souvent appelée *surface cylindrique de révolution*.

300. Les rayons et les diamètres de la circonférence génératrice, sont aussi ceux de la surface. *Il y a donc égalité entre tous les rayons et entre tous les diamètres d'une surface cylindrique.*

Par conséquent, *la surface cylindrique de révolution est le lieu de tous les points également éloignés d'une droite :* elle joue, par rapport à son axe, le même rôle qu'une ligne droite joue sur un plan, relativement à sa parallèle (67).

Il n'en est pas ainsi de la surface cylindrique oblique, par la raison que le même cercle n'y a que deux rayons qui soient perpendiculaires à des génératrices droites; les autres étant obliques, sont plus longs que les distances de leurs extrémités à l'axe.

PROBL. (*a*) : *Dessiner une surface cylindrique droite et complète dont la longueur* L *et le rayon* R *sont donnés* (P. X, F. 35).

Comme rien n'indique la position de la surface, par rapport aux plans de projection, nous pouvons placer l'axe verticalement, pour plus de simplicité. Alors, la projection horizontale est un cercle égal à l'une des bases, et l'élévation, un rectangle égal à celui que forment les diamètres tracés dans les bases parallèlement à ligne de terre, avec les deux génératrices droites qui joignent les extrémités de ces diamètres (294).

Décrivez donc sur le plan horizontal, un cercle A, avec le rayon R; abaissez du centre, une perpendiculaire AA'' sur la ligne de terre; menez deux tangentes parallèles à AA'' (p. 113); portez-y la longueur L, de B' en B'' et de C' en C''; puis tirez enfin la droite B''C''.

Vous pourrez prendre le diamètre de la surface, sur la ligne de terre, de B' en C', et la longueur, sur les grands côtés du rectangle B'C'C''B'' ou sur la projection verticale A'A'' de l'axe. La projection horizontale de cet axe est le point A (287).

Les projections d'un axe de surface sont toujours en ligne de construction, parce que l'axe est une droite qui n'existe pas.

PROBL. (*b*) : *Dessiner une surface cylindrique oblique et complète, dont la longueur* L, *la pente des génératrices droites et le rayon* R *sont donnés* (P. X, F. 36).

Plaçons la surface de manière que la base inférieure repose sur le plan horizontal et que ses génératrices droites soient parallèles au plan vertical. La projection horizontale présentera d'abord un cercle A tracé avec le rayon R (294). Le diamètre BC, parallèle à la ligne de terre, se projetera verticalement en B'C', et le centre A en A', comme dans le cas de la surface cylindrique droite.

Portez donc plusieurs unités de longueur sur la ligne de terre, de A' en D, et autant de fois la pente donnée, de D en E, sur une perpendiculaire élevée au point D. La droite A'E sera parallèle aux génératrices droites et formera la projection verticale de l'axe (258).

Portez alors la longueur L de A' en F', pour avoir la projection verticale du centre de la base supérieure; menez par F', une parallèle à la ligne de terre, et par B', C', des parallèles à A'F'. Le parallélogramme B'C'G'H' sera la projection verticale de la surface.

Vous terminerez la projection horizontale en tirant AF parallèlement à la ligne de terre (291); abaissant de F', une perpendiculaire sur cette dernière droite; décrivant de F, un cercle de rayon R (286), et menant parallèlement à AF, deux tangentes communes aux cercles A, F.

La base supérieure est entièrement visible, quand on regarde la surface de haut en bas; mais il n'en est pas de même de la base inférieure : on n'en voit qu'une moitié, formée par le diamètre perpendiculaire à la ligne de terre; l'autre est totalement cachée, et c'est pour cela qu'elle est ponctuée (296).

APPL. (*a*) : Les procédés qu'emploient les artistes et les ouvriers pour exécuter les surfaces cylindriques, se rapportent à la première ou à la seconde des générations du n° 297, selon qu'il importe que ces surfaces soient parfaitement réglées ou exactement rondes.

« Dans le premier cas, on trace un polygone régulier d'un grand nombre de côtés, sur l'une des faces du corps qui doit devenir cylindrique; on forme ensuite autant de rectangles ou de trapèzes rectangulaires, que le polygone a de côtés; après quoi, l'on abat les arêtes, intersections de toutes les facettes planes, en s'efforçant d'*arrondir* le plus qu'il est posible. »

« C'est ainsi que les charpentiers exécutent les mâts de vaisseaux et que les tailleurs de pierres font des cylindres. Les scies qui débitent en rond, forment aussi des facettes étroites. »

APPL. (*b*) : Quand les architectes ont à construire des voûtes cylinques, ils font placer sur des cintres à demi-circulaires, exécutés en bois, des madriers dont les petites arêtes forment un demi-polygone régulier, et dont les grandes arêtes sont les génératrices de la voûte. Les maçons posant les moellons sur ces madriers, produisent une surface bien réglée, composée de facettes planes, et presque cylindriques.

APPL. (*c*) : Lorsque l'exactitude doit porter principalement sur les génératrices courbes, on travaille le corps à un tour, en conservant, le plus qu'il est possible, la distance de l'outil à l'axe de *rotation*, chaque fois qu'on passe d'une circonférence à une autre.

APPL. (*d*) : Les Anglais confectionnent des cylindres en bois, au moyen d'un rabot circulaire qui a la forme d'un entonnoir. Avant d'être engagée dans le rabot, la pièce est taillée de manière à présenter quatre ou huit longues faces planes, égales et rectangulaires. Pendant qu'on pousse cette pièce, en ligne droite, autant qu'il est possible, le rabot tourne sur lui-même et produit une surface exactement ronde.

APPL. (*e*) : Le procédé de la *filière* qu'on emploie pour fabriquer les fils métalliques, est analogue au précédent. La filière est un trou circulaire, dans lequel une petite barre de fer ou de laiton est forcée de passer, ce qui diminue sa grosseur en augmentant sa longueur. Plusieurs trous pareils, de plus en plus petits, donnent le moyen de convertir ou d'*étirer* la barre en un fil cylindrique aussi fin que le permet la nature de la matière.

APPL. (*f*) : Si la surface cylindrique doit être parfaite dans les deux sens, il faut employer à la fois les deux moyens de génération du n° 297. C'est ce qu'on fait souvent. Pour fabriquer des cylindres en treillis ou à claire-voie, les épingliers et les vanniers attachent un certain nombre de circonférences à autant ou à un plus grand nombre de génératrices droites.

Appl. (*g*) : Le tourneur de métaux fixe l'outil sur un chariot qui roule *selon* des parallèles à l'axe de rotation et avance dès qu'une petite bande cylindrique est achevée.

« Il en est à peu près de même pour la confection des cylindres creux, au moyen du forage : le foret est poussé en ligne droite, par un cric, pendant que le corps qui doit être évidé *tourne* sur lui-même. La direction de l'outil et de l'axe de rotation doivent se confondre. Mais une foule d'accidens provenant de la mauvaise construction des forets et de la conduite actuelle du travail, occasionnent si souvent des déviations, qu'il faut un heureux hasard pour que le forage produise un vrai cylindre creux dont l'axe se confonde avec celui de la rotation, qui est le même que l'axe de la surface extérieure. C'est ce qu'a prouvé complètement M. le capitaine d'artillerie *Munier*, de Metz, dans un excellent mémoire inédit sur les foreries de canons. »

Appl. (*h*) : Le moyen le plus sûr d'obtenir des corps creux dont la surface intérieure soit vraiment cylindrique, c'est de les mouler sur un *cylindre* exécuté avec précision. Les moules en sable ou en terre sont confectionnés ainsi, quand ils doivent convertir en cylindres, le métal liquide qu'on y verse. On établit solidement sur une table, le cylindre modèle qui est ordinairement en laiton ; on l'entoure d'un cadre ; on foule du sable très-fin dans l'intervalle, et l'on obtient en retirant le modèle, un cylindre creux de mêmes dimensions. Si le moule doit être en terre, on couvre le cylindre de laiton, d'une couche peu épaisse de terre réduite en bouillie, puis on applique par-dessus, un grand nombre d'autres couches de plus en plus épaisses et de moins en moins liquides.

Appl. (*i*) : C'est aussi en employant un cylindre modèle, qu'on parvient à étirer à la filière, des cylindres creux de dimensions données. On coule du plomb autour d'un cylindre plus court que le modèle, mais de même rayon, et l'on forme ainsi un cylindre creux bien moins long et beaucoup plus épais que celui qu'il s'agit d'obtenir. Le cylindre modèle est ensuite introduit dans le cylindre de plomb, et le tout est forcé de passer par une filière circulaire d'un diamètre un peu moindre que celui de la circonférence extérieure du dernier corps. Le plomb s'amincit et s'alonge ; une seconde filière plus étroite que la première, l'amincit et l'alonge encore davantage ; il en est de même d'une troisième, et la dernière est telle qu'elle ne laisse aux parois du cylindre de plomb, que l'épaisseur requise.

Appl. (*k*) : Les ventilateurs qu'on *emploie*, soit pour aérer les galeries des mines, soit pour forcer l'air à passer au travers des amas de grains qu'on veut sécher, soit enfin pour transporter d'un lieu dans un autre, les parties les plus fines d'un corps réduit en poussière, les ventilateurs sont fondés sur le principe 299.

« Un cylindre creux de révolution, en maçonnerie ou en bois, forme une cage dont ABCD (P. X, F. 37) est le plan et dont B'D'EF est la coupe faite selon le diamètre BD (p. 67). Un arbre en fer G et G'H est placé selon l'axe de la cage et terminé par une manivelle I qu'un homme ou une machine quelconque met en mouvement. A cet arbre sont attachées quatre ailes rectangulaires K et K' formant deux plans qui se coupent à angles droits : elles sont séparées les unes des autres, de sorte qu'il existe un espace libre entre elles et l'arbre. Le fond de la cage est percé en G', d'un trou dont le diamètre égale l'intervalle des deux ailes qui forment un même plan. Enfin, un conduit ou une porte A se trouve placée sur le pourtour du cylindre creux, de telle façon que l'arête AL, intersection du sol et d'une face de cette porte, est tangente à la circonférence intérieure du fond de la cage. »

« Supposez maintenant que vous fassiez mouvoir la manivelle; le rectangle que forment les deux ailes d'un même plan, pourra tourner dans le cylindre creux, bien que les côtés de ce rectangle touchent presque les parois de la cage; les quatre ailes, en tournant dans le sens de la flèche, chasseront devant elles, l'air qui se trouve entre deux, et cet air sera forcé de prendre un mouvement circulaire. Or, les parties d'un corps qui tourne, tendent sans cesse à s'échapper par les tangentes des circonférences qu'elles parcourent (p. 119). A mesure donc que l'air chassé par les ailes, arrivera vers la porte A, il s'échappera par cette ouverture et produira un courant, un vent d'autant plus fort que le mouvement de la manivelle sera plus rapide. Mais il faut remplacer l'air expulsé de la cage, si l'on veut produire un courant continu. Le trou G' est fait pour cela : il entre autant d'air par ce trou, qu'il en sort par le conduit A. »

301. Une propriété très-utile de la surface cylindrique, propriété qu'elle partage avec plusieurs autres surfaces réglées, c'est de pouvoir être *développée*, c'est-à-dire étendue sur un plan, après qu'on l'a fendue, selon une génératrice droite. On concevra en, effet, si l'on considère une surface cylindrique quelconque comme composée d'une multitude de facettes planes, qu'en faisant tourner ces facettes sur leurs intersections, on peut parvenir à les amener toutes sur un même plan.

Comme, sur un plan, l'ensemble de facettes rectangulaires qui ont deux à deux un côté commun, doit former un rectangle, il est clair que *le développement d'une surface cylindrique droite est un rectangle dont la base égale en longueur celle de la surface, et dont la hauteur égale une des génératrices droites.*

Il n'en est pas de même d'une surface cylindrique oblique : la génératrice courbe ne rencontrant pas d'équerre les génératrices droites, ne saurait former une ligne droite sur le développement.

PROBLÈME : *Tracer le développement d'une surface cylindrique droite et limitée* (P. X, F. 35 et 38).

Divisez l'un des quarts de la circonférence A, base de la surface, en deux parties égales et faites la même opération sur le huitième, sur le seizième, etc., jusqu'à ce que vous parveniez à un arc assez petit pour qu'il puisse être considéré comme égal à sa corde, sans grande erreur. Portez cet arc sur une droite, à partir d'un point D, autant de fois qu'il est contenu dans la circonférence A. Par le point E qui en résulte, et par le point D, élevez des perpendiculaires à DE, développement de la circonférence A ; donnez-leur pour longueur, celle B'B'' des génératrices droites, et joignez les points F, G ainsi obtenus.

Le rectangle DEFG sera le développement de la surface cylindrique dont la figure 35 présente les projections, et sa superficie approchera d'autant plus d'être égale à celle de la surface courbe, que la circonférence A contiendra un plus grand nombre de fois l'arc porté sur DE.

302. *Le rapport de deux surfaces cylindriques droites, limitées par deux circonférences parallèles, est le même que celui des produits de leurs génératrices courbes multipliées chacune par la génératrice droite ;* car chaque surface développée formera un rectangle équivalent qui aura pour base la génératrice courbe, pour hauteur la génératrice droite, et le rapport des deux rectangles, sera celui des produits de leurs bases multipliées chacune par la hauteur correspondante (199).

Appl. (*a*) : Puisqu'une surface cylindrique droite peut se développer en rectangle, il est possible de la former en ployant un rectangle DEFG (P. X, F. 38), de manière que deux côtés parallèles EF, DG se confondent. C'est ainsi que le boisselier, le chaudronnier, le ferblantier et le plombier construisent les cylindres droits et creux. Le premier emploie des planches rectangulaires exactement planes et de même épaisseur partout ; il en forme la paroi ronde des mesures qu'il confectionne. Le fond de ces mesures est un cercle, comme les fonds des tonneaux. Le bord supérieur est ordinairement garni en tôle et maintenu par deux diamètres en fer qui se croisent à angles droits, afin que tout changement de forme soit impossible. Cela est fort important : un boisseau, un double-décalitre qui cesserait d'être cylindrique, n'aurait plus la même *capacité*, ne contiendrait plus autant de grains ; il en serait visiblement de même, si les génératrices droites venaient à diminuer de longueur, par suite de l'usure du bord.

Appl. (*b*) : Le plombier qui, pour faire des gouttières ou d'autres conduits cylindriques, emploie des rectangles assez épais, doit avoir le soin de rogner en biseau les bords qu'il veut souder ensemble *par rapprochement*, afin que la face plane destinée à devenir la surface cylindrique intérieure, soit moins large que celle qui doit former la surface extérieure du cylindre creux. Cette dernière surface cylindrique aura en effet plus de tour que la première, puisqu'elle l'enveloppera ; si donc les deux rectangles avaient la même largeur, les deux bords de l'un se confondraient, que les bords de l'autre seraient encore séparés.

« Problème : *Couper une feuille de manière qu'elle puisse former une surface cylindrique droite, de longueur et de rayon connus.* »

« Tracez une circonférence avec le rayon donné; développez-la en ligne droite DE (P. X, F. 38), comme l'a été la circonférence A de la figure 35; construisez sur DE, un rectangle qui ait pour hauteur DG, la longueur donnée. La feuille découpée selon le contour de ce rectangle DEFG, formera la surface cylindrique demandée; étant ployée de façon que EF se confonde avec DG. »

« S'il s'agit d'un tuyau de poêle, la longueur DE du rectangle devra être augmentée de la largeur des deux *lèvres* de l'agrafe. »

Combinaisons des surfaces cylindriques et du plan.

303. *L'intersection d'une surface cylindrique et d'un plan parallèle à celui de la génératrice courbe, est une circonférence égale à cette génératrice ;* car, pour produire la surface courbe, la circonférence serait obligée de cheminer selon une droite, de manière que son plan prît des positions parallèles (297); il y aurait un moment où ce plan se confondrait avec le plan coupant, et la circonférence serait alors le lieu de tous les points communs à la surface et au plan donné.

Problème : *Tracer une circonférence sur une surface cylindrique limitée.*

Le même procédé convient à la surface droite et à la surface oblique. Il suffit de porter une certaine longueur sur les génératrices droites, à partir d'une des bases, et de joindre tous les points ainsi marqués. Ces points seront en effet dans un plan parallèle à celui de la base (277) et sur l'intersection de ce plan avec la surface.

Application : Les tonneliers emploient ce procédé pour former sur une cuve, la rainure circulaire destinée à recevoir le fond; ils se servent dans ce cas, d'un instrument à gouge, analogue au trusquin, et l'appuient contre la tranche du bord (p. 59).

304. *Un plan qui entre par une génératrice droite, dans l'espace que renferme une surface cylindrique, en sort nécessairement par une autre ;* car ce plan passera toujours par un certain point d'une seconde génératrice droite, et par conséquent, il la contiendra toute entière, puisqu'elle est parallèle à la première (155).

Il s'ensuit que *tout plan coupant, parallèle à l'axe d'une surface cylindrique, passe par deux génératrices droites ;* car ce plan entrera nécessairement par une de ces lignes, dans l'espace que renferme la surface courbe, puisque l'axe est parallèle à toutes les génératrices droites (298).

Le plan coupant qui passe par l'axe d'une surface cylindrique, contient aussi un diamètre de la génératrice courbe et on l'appelle, pour cela, *plan diamétral*.

305. *Tout plan coupant qui n'est ni parallèle à l'axe, ni parallèle à la génératrice circulaire d'une surface cylindrique droite, rencontre cette surface selon une courbe nécessairement fermée dont les diamètres ne sont pas tous égaux.*

Si par exemple B'C''(P. X, F. 35) est une droite qui, située dans le plan coupant, rencontre l'axe A'A'' d'une surface cylindrique droite, B'C'' sera plus grande que B'C' perpendiculaire sur l'axe et sur la génératrice parallèle C'C'' (46). Mais, dans le plan coupant, on peut toujours mener une perpendiculaire au milieu de B'C''; cette perpendiculaire étant aussi diamètre d'une génératrice circulaire, égalera B'C' et se terminera à l'intersection du plan et de la surface. Donc, cette intersection n'a pas tous ses diamètres égaux et n'est pas une circonférence : on l'appelle *ellipse*; sa forme est analogue à celle d'une ovale à quatre centres (p. 162).

Généralement parlant, il en est de même quand la surface cylindrique est oblique (P. X, F. 36). Mais si le plan coupant, perpendiculaire au plan vertical de projection, comme ceux des bases, est autant incliné que ceux-là sur l'axe A'F', la projection verticale de son intersection ou d'un diamètre de cette courbe, sera une droite qui, menée du point H', par exemple, fera avec A'F' et C'G' le même angle que H'G'. Ce diamètre oblique sur C'G', égalera donc l'oblique H'G', et dans ce cas, l'intersection du plan coupant sera une circonférence égale à celle des bases.

Ainsi, *toute surface cylindrique droite et tronquée est terminée d'un côté par une circonférence, et de l'autre par une ellipse.* Mais une surface cylindrique oblique et tronquée peut être terminée soit par une circonférence et une ellipse, soit par deux circonférences non parallèles.

Probl. (*a*) : *Dessiner une surface cylindrique droite et tronquée dont on connaît le rayon, la plus grande et la plus petite génératrice droite* (P. X, F. 39).

Puisque la position de la surface est arbitraire, il faut, pour plus de simplicité, la rendre telle que le plan de la troncature soit perpendiculaire au plan vertical de projection. Alors, la projection verticale de l'ellipse est une ligne droite B''C'', qui joint les extrémités supérieures des projections B'B'', C'C'', de la plus grande et de la plus petite génératrice droite. Le reste du dessin se fait comme s'il s'agissait d'une surface cylindrique complète (p. 288).

Lorsqu'on place la surface autrement, en laissant la base sur le plan horizontal; lorsque, par exemple, la plus courte génératrice C'C'' est par devant, la projection verticale de l'ellipse est généralement une autre ellipse, et l'exécution du dessin devient bien plus compliquée.

PROBL. (*b*) : *Tracer le développement d'une surface cylindrique droite et tronquée* (P. X, F. 39 et 40).

Développez d'abord la circonférence A de la base, comme dans le problème de la page 291 ; vous obtiendrez une ligne droite DE. Élevez des perpendiculaires par les points de division, et numérotez-les en partant des extrêmes. Marquez aussi les points de division correspondans de la circonférence A ; menez par ces points, des parallèles à l'axe A'A", et numérotez leurs intersections avec la ligne de terre, en partant de la génératrice par laquelle vous voulez ouvrir la surface, en partant de la plus courte par exemple. Si vous avez divisé la circonférence A, en prenant le contact B ou le contact C pour point de départ, deux points de division se trouveront sur la même parallèle à l'axe, et neuf parallèles seulement, par exemple, couperont la ligne de terre, tandis que dix-sept partiront de DE.

Ces dispositions terminées, prenez sur la projection verticale, la longueur commune des deux génératrices droites d'une même couple, et portez-la sur les parallèles de même numéro, dans la figure 40. La plus courte génératrice C'C" fournira ainsi deux points F, G ; la plus grande B'B" donnera le seul point H ; les autres donneront chacune deux points, comme C'C". Joignant chacun de ces points avec les deux voisins, par de petites droites tirées au crayon, puis traçant, à la main, des arcs qui aient ces droites pour cordes et soient tangens entre eux, vous obtiendrez la courbe FHG pour développement de l'ellipse de la troncature, et la face plane DEFHG pour celui de la surface cylindrique tronquée.

APPL. (*a*) : La surface cylindrique tronquée est souvent exécutée par les tailleurs de pierre. Il arrive en effet assez fréquemment que les demi-surfaces cylindriques appelées *voûtes en berceau*, se trouvent terminées par des plans qui ne sont parallèles ni à l'axe, ni à la génératrice courbe. Les appareilleurs sont alors obligés de tracer une épure analogue à la figure 39 (P. X), pour déterminer les dimensions des *panneaux* ou patrons nécessaires à l'application du trait sur la pierre.

APPL. (*b*) : On peut obtenir la projection d'un cercle sur un plan, en abaissant de tous les points de la circonférence, des perpendiculaires sur ce plan (284). Comme les perpendiculaires à un même plan sont parallèles (260), un cercle pourrait donc se projeter au moyen d'une surface cylindrique dont il formerait la génératrice courbe et dont les génératrices droites seraient les lignes projetantes. Il en résulte que si le cercle est parallèle au plan, sa projection, intersection de ce plan et de la surface, est un cercle de même rayon, et que s'il est oblique, sa projection est en général une ellipse.

APPL. (*c*) : Si deux parties d'un tuyau de poêle doivent faire entre elles un angle de 130°, par exemple, il faut, pour tracer le patron de la moitié du coude, faire, dans sa vraie grandeur, la projection horizontale A de la surface cylindrique du tuyau (P. X, F. 39) ; tracer, dans la projection verticale, une droite B"C" qui fasse avec une génératrice droite B'B'', un angle de 65°; puis exécuter le développement de la figure 40, et le découper selon le contour DEFHG. Deux feuilles de tôle taillées sur ce patron et ployées en cylindres, pourront s'accoler par les troncatures et former le coude complet.

Appl. (*d*) : Le poêlier a parfois aussi à tracer le contour d'un trou elliptique qui doit être pratiqué dans une face de cheminée ou dans une feuille de tôle destinée à remplacer un carreau de vitre. Ce cas se présente, quand un tuyau de poêle doit traverser obliquement une face plane (305). Pour obtenir un patron du trou elliptique, l'ouvrier doit construire, de grandeur réelle, les projections de la surface cylindrique ; y tracer une droite B''C'' (F. 29) qui fasse avec une génératrice droite B'B'', l'angle sous lequel cette génératrice rencontrera le plan ; tracer des parallèles à l'axe, qui coupent la circonférence A et B''C''; porter les parties de cette droite sur une autre DE (F. 41); élever des perpendiculaires à DE, par les points de division ; prendre sur les parallèles, les demi-cordes de la circonférence A ; les porter sur les perpendiculaires correspondantes, de chaque côté de DE ; et joindre par une courbe DFEG, les points qui en résultent. La figure plane DFEG étant découpée selon son contour, formera le patron à l'aide duquel on pourra tracer le contour du trou elliptique, avec assez d'exactitude pour que le tuyau le remplisse entièrement.

Loi de la nature : Les principes de la Géométrie régissent à la fois de petites et de grandes choses. Cette courbe que le poêlier forme toutes les fois que ses tuyaux se rencontent obliquement, le Soleil la trace tous les jours; car tous les jours il éclaire des cercles, et quand ces cercles empêchent sa lumière d'arriver jusqu'au sol ou jusqu'à tout autre plan qui ne leur est pas parallèle, le contour de l'ombre qu'ils jettent ou qu'ils portent sur ce plan, est une ellipse. Cela vient de ce que les rayons solaires sont parallèles (p. 70): ceux qui passent par tous les points d'une circonférence, produisent une surface cylindrique dont cette circonférence est génératrice courbe, et le contour de l'ombre portée par un cercle sur un plan, n'est autre chose que l'intersection de cette surface cylindrique et du plan.

Si donc un cylindre se trouve exposé au Soleil, de telle façon que ses bouts ne soient pas parallèles au plan qui reçoit l'ombre, cette ombre sera terminée par quatre droites, quand le centre de l'astre se trouvera dans les plans des cercles extrêmes ; par une ellipse entière, quand le même centre se trouvera sur le prolongement de l'axe du cylindre ; par deux droites et deux portions d'ellipse dans toute autre circonstance. Mais si le plan est parallèle aux cercles, l'ombre portée sera nulle ou terminée soit par une circonférence entière, soit par deux droites et deux portions de circonférence.

Ceux qui dessinent l'architecture ou les machines, doivent connaître la nature des contours de toutes les ombres qu'ils peuvent avoir à représenter, et les méthodes simples qu'enseigne la géométrie descriptive pour tracer ces contours. De telles connaissances sont même très-utiles aux peintres : elles deviennent pour eux, des guides sûrs qui les empêchent de violer les lois de la nature.

306. Tout plan MN (P. X, F. 42) qui renferme une seule AB des génératrices droites d'une surface cylindrique CD, est dit *tangent* à cette surface. Il est visible, en effet, qu'il ne la coupe pas et qu'il la touche dans toute la longueur de la génératrice droite par laquelle il passe. Par conséquent, *tout plan tangent à une surface cylindrique, coupe le plan d'une génératrice courbe* E, *selon une droite* FG *qui n'a qu'un seul point de commun avec cette ligne ou qui est tangente à cette génératrice.*

Il suit de là que le rayon EL de la génératrice courbe d'une surface cylindrique droite, est perpendiculaire au plan tangent passant par L (256); car EL est perpendiculaire à FG (107) et à AB (298).

307. Si l'on suppose le plan MN lié avec l'axe CD de la surface cylindrique droite (P. X, F. 42), de manière que leur distance AC soit invariable (p. 267), il est clair que pendant le mouvement circulaire de MN autour de CD, AB parallèle à CD, engendrera une surface cylindrique droite à laquelle ce plan sera tangent dans toutes ses positions.

La droite AB engendrerait une surface cylindrique oblique, à laquelle MN serait aussi tangent dans toutes ses positions, si ce plan tournait en s'appuyant sur les points correspondans de deux circonférences parallèles, aux plans desquelles la droite CD des centres ne fût pas perpendiculaire ; mais la distance de CD à MN ne serait pas constante, comme dans le cas précédent.

Ainsi, *toute surface cylindrique peut être engendrée par un plan qui se meut autour d'une droite.*

APPL. (*a*) : De là un autre procédé pour rendre un corps cylindrique. Décrivez sur chaque bout d'une pièce de bois, par exemple, une circonférence égale à celle qui doit être la génératrice courbe de la surface ; circonscrivez à ces deux circonférences, des polygones réguliers d'un assez grand nombre de côtés, et tels que les côtés correspondans soient parallèles entre eux ; taillez la pièce selon les parallélogrammes HH'I'I, II'K'K, etc., qui seront tangens à la surface demandée (P. X, F. 42) ; enfin, abattez les arêtes intersections de ces plans, en arrondissant le plus qu'il sera possible. Ce procédé est analogue au premier de la page 289 ; mais il a l'avantage de produire une surface cylindrique dont la génératrice courbe est donnée, tandis que l'autre convient seulement au cas où l'on peut prendre pour cette génératrice, une circonférence quelconque.

Appl. (*b*) : Quand une scie débite en rond, la surface bombé qu'elle produit, est composée de petites facettes planes, tangentes une surface cylindrique. Un garde du génie, nommé *Ségard*, inventé un mécanisme très-simple et très-ingénieux, au moyen du quel un madrier est débité en jantes de roue, par des scies droite qui ne font que monter et descendre. Cette machine est en activit à Metz, dans l'usine des Pucelles.

Appl. (*c*) : De même que le plan tangent à la surface ronde d'un cylindre, peut tourner tout autour de ce corps en le touchant constamment, le cylindre peut rouler sur un plan, sans cesser de le toucher par une de ses génératrices droites. Si donc un corps quelconque vient à se trouver entre une surface cylindrique et le plan sur lequel elle roule, et qu'un certain effort tende à mettre les deux surfaces en contact, le corps sera *forcé* de s'enfoncer ou de former, en s'étendant, un plan parallèle à l'autre.

« C'est ainsi que le laboureur et le jardinier aplanissent l'un son champ, l'autre ses allées et ses gazons : ils y font rouler un cylindre droit et pesant qui fait disparaître les mottes et les bosses. Le pâtissier se sert aussi d'un rouleau sur lequel il fait effort, pour étendre la pâte et l'aplanir. »

Appl. (*d*) : La surface cylindrique droite peut tourner sur son axe, sans cesser d'être tangente à un plan, selon la même droite, ce qui est analogue à ce que nous avons dit page 117, du cercle et de sa tangente. On fait usage de cette propriété dans l'aiguisage et le polissage ; la meule est un cylindre droit qui tourne sur son axe, et l'on y applique tangentiellement la face d'un coin qu'il faut rendre tranchant, ou la face plane qu'il s'agit de polir.

« Dans les scieries que le vent met en action, et dans plusieurs autres usines, on trouve des lanternes cylindriques A qui engrènent avec des rouets ou roues B dont les dents sont perpendiculaires au plan de la circonférence (P. X, F. 29), et ce plan est constamment tangent à une surface cylindrique qui a même axe que la lanterne. Un tel mécanisme sert à transporter dans un plan A, le mouvement circulaire qui a lieu dans un plan B perpendiculaire au précédent. »

Combinaisons des surfaces cylindriques et de la ligne droite.

308. Toutes les lignes droites qui peuvent être tracées sur un plan tangent à une surface cylindrique, d'un point quelconque de la génératrice de contact, sont dites *tangentes* à cette surface courbe. Si par une de ces droites, on fait passer des plans qui donnent des courbes, pour intersections, la droite est tangente à toutes ces courbes, car elle n'a de commun avec elles, que le seul point où elle coupe la génératrice de contact.

309. Toutes les perpendiculaires qui peuvent être élevées sur le plan tangent d'une surface cylindrique, par les points de la

génératrice de contact, sont dites *normales* de cette surface courbe. *Les rayons de toute génératrice circulaire d'une surface cylindrique droite, sont donc des normales* (306).

310. Le plan qui contient une normale, est perpendiculaire au plan tangent (271) et *normal* à la surface cylindrique. Quand cette surface est droite, le plan normal qui passe par la génératrice de contact, passe aussi par l'axe ; car il contient tous les rayons qui aboutissent à cette génératrice : on l'appelle *plan méridien*, pour le distinguer des autres plans normaux.

Ainsi, *tous les plans diamétraux d'une surface cylindrique droite, sont des plans méridiens* (304).

Mais notez que les surfaces de révolution seules ont des plans méridiens. Ce nom n'est pas donné aux plans diamétraux de la surface cylindrique oblique, attendu qu'il n'y en a que deux qui soient normaux.

APPLICATION : Deux des arêtes de chaque palette plane d'une roue d'eau, sont ordinairement normales à la surface cylindrique du tambour ou des *courbes*. La face qui les contient et contre laquelle agit le liquide, est un plan méridien et passe conséquemment par l'axe. Il en est de même de tout plan de joint dans une voûte en plein cintre.

LOI DE LA NATURE : Le rayon de lumière qui frappe une surface cylindrique, ou toute autre surface courbe, forme, avec le rayon réfléchi ou avec le rayon réfracté (p. 50 et 51), un plan qui est normal à cette surface, et les angles que font les deux rayons avec la normale au point d'incidence, sont égaux, dans le cas de la réflexion. Pour la réfraction, il y a rapport constant entre les sinus, c'est-à-dire entre les deux perpendiculaires abaissées sur la normale, de points pris sur les deux rayons à égales distances de leur intersection. Le jeu de la lumière sur les surfaces courbes est donc le même que sur les plans.

« De là se déduisent les tracés de ces peintures hideuses, appelées *anamorphoses*, qui prennent les formes les plus agréables, quand on les regarde dans un miroir courbe placé sur le cercle autour duquel elles se trouvent disposées. C'est ordinairement avec un miroir cylindrique, en métal bien poli, qu'on fait cette expérience sur la réflexion de la lumière. Voici comment, pour ce cas, doit être tracée l'anamorphose. »

« Faites les projections du miroir cylindrique, en grandeur réelle (P. XI, F. 1) et son développement (F. 2). Tracez sur ce développement, les génératrices droites qui répondent aux points de division de la base et numérotez-les (p. 291). Divisez la hauteur du rectangle en un certain nombre de parties égales assez petites ; menez des parallèles à la base, par les points de division, et numérotez-les aussi. Ces parallèles seront les développemens de génératrices courbes, et partageront le rectangle en un certain nombre de petits rectangles égaux. Dessinez alors sur le développement, ou du moins sur la partie qui répond à la moitié antérieure du cylindre, un objet quelconque, un portique, par exemple. Ce sera l'image qu'on devra voir dans le miroir, et il faudra la rapporter sur le carton qui forme le plan horizontal de projection, de manière qu'elle puisse se reproduire par réflexion, quand le miroir sera placé sur sa projection horizontale. »

« A cet effet, vous tirerez des rayons, par les points de division marqués précédemment sur la base de la surface cylindrique (F. 1) et vous donnerez à ces rayons les numéros qu'ont les génératrices droites correspondantes du développement. Vous tracerez des circonférences concentriques à la même base, équidistantes entre elles, et vous leur donnerez les mêmes numéros qu'aux circonférences correspondantes du développement. »

« Le carton, plan horizontal, présentera alors des espèces de trapèzes dont les bases seront des arcs de cercle et qui répondront aux petits rectangles du développement. Placez les lignes et les points du portique, par rapport aux côtés de ces trapèzes, comme ils sont placés par rapport aux côtés des rectangles correspondans, en imitant ce qui a été prescrit dans la *méthode des carreaux* (p. 239). Les colonnes se trouveront dirigées selon des rayons; la frise horizontale du fronton prendra la forme d'un arc de cercle; les deux côtés égaux du triangle symétrique, deviendront deux arcs de courbe; et l'ensemble de toutes ces parties constituera l'anamorphose ou l'image déformée du portique. »

Combinaisons des surfaces cylindriques entre elles.

311. Les surfaces cylindriques combinées se coupent, ou se touchent, ou confondent leurs axes.

Deux surfaces cylindriques qui ont leurs axes parallèles, ne peuvent se couper que selon deux génératrices droites.

Supposons un plan quelconque qui coupe les deux surfaces selon des courbes. Ces courbes auront deux points communs, puisque l'une des surfaces est obligée de sortir de l'autre, après y être entrée. Concevons par les deux points, des parallèles aux axes; ces droites appartiendront nécessairement chacune aux deux surfaces cylindriques, et il est visible que tout point situé hors de ces génératrices ne peut faire partie des intersections.

Appl. (*a*) : Les cylindres qu'on emploie dans plusieurs fabrications, présentent des cannelures formées par des surfaces cylindriques qui se coupent et dont les axes sont parallèles. Il faut qu'il en soit ainsi, afin que les arêtes qui séparent ces cannelures se trouvent des lignes droites.

Appl. (*b*) : Les voûtes gothiques en tiers-point sont formées par deux portions de berceaux dont les axes sont parallèles (p. 262, appl. *b*). Voilà pourquoi les deux faces courbes de chaque clef se coupent selon une ligne droite qui se prolonge d'un bout à l'autre de la voûte.

312. Lorsque les axes de deux surfaces cylindriques qui se coupent, ne sont pas parallèles, il y a *pénétration totale*, si toutes les génératrices droites de l'une rencontrent des génératrices de l'autre ; il y a *pénétration partielle*, autrement dit *arrachement*, si une partie seulement des génératrices droites se rencontrent.

Dans la pénétration partielle, l'intersection de deux surfaces cylindriques, est une courbe fermée et A DOUBLE COURBURE, c'est-à-dire une courbe analogue à celle qu'offrirait une circonférence dont le plan serait ployé en surface cylindrique.

313. La pénétration totale présente plusieurs cas : les deux surfaces cylindriques s'arrêtent mutuellement, ou bien l'une seulement est arrêtée par l'autre, ou bien elles se dépassent réciproquement. Le premier cas suppose l'égalité des rayons ; mais pour les deux autres, les rayons peuvent être inégaux.

Si de deux surfaces cylindriques inégales, la plus petite est arrêtée par la plus grande, l'intersection est une seule courbe, fermée et à double courbure.

Si deux surfaces cylindriques inégales se dépassent réciproquement, l'intersection se compose d'une courbe d'entrée et d'une courbe de sortie, toutes deux fermées et à double courbure.

314. *Lorsque deux surfaces cylindriques droites et de rayons égaux, s'arrêtent mutuellement, l'intersection est une ellipse.*

Il suffit, pour le démontrer, de faire voir que toutes les génératrices correspondantes se rencontrent dans le plan AB (P. XI, F. 3) qui contient les concours A, B des génératrices extrêmes, et coupe perpendiculairement le plan CDE des axes (305). Or, deux génératrices correspondantes ont pour projections horizontales, des parallèles FG, FH également distantes des axes et des génératrices extrêmes. Les perpendiculaires FI, FK sont donc égales, et à cause du côté commun AF, les triangles rectangles AIF, AKF sont égaux. Il s'ensuit que AF est bisectrice de l'angle IAK. Mais, puisque les diamètres BL, BM sont de même longueur, AB est aussi bisectrice de l'angle IAK. Par conséquent, le concours F de deux génératrices correspondantes est dans le plan AB.

Ainsi, non-seulement deux surfaces cylindriques droites, de même rayon et tronquées par des plans également inclinés sur les axes, peuvent s'appliquer exactement l'une contre l'autre selon leurs troncatures (p. 294); mais encore deux surfaces cylindriques droites et de même rayon, qui s'arrêtent mutuellement, se tronquent réciproquement, comme les tronqueraient deux plans de même inclinaison.

315. *Lorsque de deux surfaces cylindriques droites et de même rayon, l'une est arrêtée par l'autre, l'intersection se compose de deux demi-ellipses terminées aux mêmes points.*

Supposons verticale celle qui est arrêtée, et l'autre, horizontale (P. XI, F. 4). La moitié de gauche de la première, arrête à moitié la partie de gauche de la seconde, et il doit en résulter une demi-ellipse A"D", terminée à l'horizontale menée par la rencontre A" des axes, perpendiculairement au plan vertical (314). Mais la moitié de droite de la surface verticale, arrête aussi à moitié la partie de droite de la surface horizontale, et il en résulte une deuxième moitié d'ellipse A"E", nécessairement terminée par la droite qui termine la première.

Les deux demi-ellipses sont égales, quand les surfaces cylindriques se rencontrent d'équerre; elles sont inégales dans le cas contraire.

316. *Lorsque deux surfaces cylindriques droites et de même rayon, se dépassent réciproquement, l'intersection se compose de deux ellipses entières qui se divisent mutuellement en deux moitiés* (P. XI, F. 5).

Celle dont l'axe est perpendiculaire au plan vertical, peut être considérée comme ayant sa partie antérieure arrêtée par celle dont l'axe est parallèle à la ligne de terre. L'intersection de cette partie antérieure se composera donc de deux demi-ellipses AC, AE, terminées à la verticale A du croisement des axes (315). Mais la partie postérieure pourra aussi être considérée comme arrêtée par l'autre surface, et son intersection présentera deux nouvelles demi-ellipses AB, AD, terminées aux mêmes points que les premières. Il est visible d'ailleurs que les quatre demi-ellipses donnent deux ellipses entières ou ne forment que deux plans différens; car les demi-troncatures AB, AC, par exemple, sont également inclinées sur l'axe EF, puisque les génératrices qui concourent en B, font le même angle que celles qui concourent en C.

Appl. (*a*): Les pénétrations des surfaces cylindriques ont de nombreuses applications dans la coupe des pierres. Les appareilleurs sont très-souvent obligés de construire, en projections, l'intersection de pareilles surfaces, pour déterminer la forme des pierres qui doivent faire partie des deux à la fois.

« Il faut, par exemple, tracer une courbe d'arrachement, quand une voûte de cave, en berceau, est traversée par une partie du cylindre d'un puits (312). »

Appl. (*b*): Une porte et une fenêtre cintrées, un œil de bœuf, à pratiquer dans une tour ronde ou dans une galerie voûtée en berceau, produisent des courbes à double courbure (313).

Appl. (*c*): La rencontre de deux galeries en berceau donne une demi-ellipse ou deux quarts d'ellipse, selon les cas (314 et 315).

Appl. (*d*): Dans une *voûte d'arêtes* que forment deux berceaux qui se dépassent réciproquement, les intersections ou arêtes de la voûte sont deux demi-ellipses croisées (316).

Appl. (*e*) : Les arcs rentrans d'une voûte *en arcs de cloître*, sont aussi deux demi-ellipses croisées. Cette voûte est formée par deux berceaux qui se bornent mutuellement : les génératrices extrêmes de l'un, sont les diamètres des bases de l'autre. Le plan serait un carré BDCE, avec ses deux diagonales (P. XI, F. 5) ; la projection verticale se composerait d'un demi-cercle ponctué et de la moitié du carré circonscrit. La seule différence de ce cas à celui de la voûte d'arêtes, c'est que la surface cylindrique dont l'axe est parallèle à la ligne de terre, se trouve dans les angles BAD, CAE, et que la surface dont l'axe est perpendiculaire au plan vertical, occupe les angles CAD, BAE ; mais ce changement de position ne peut influer sur la nature de l'intersection.

Appl. (*f*) : Les robinets cylindriques qu'on place d'équerre sur des conduites de même forme, s'y ajustent selon des courbes rondes, fermées et à double courbure (313).

« Les trous pratiqués dans les instrumens à vent, cylindriques, pour le doigter, ont la même forme. »

Appl. (*g*) : Vous avez appris (p. 295) comment se fait le patron selon lequel on doit découper deux feuilles destinées à former des surfaces cylindriques qui s'arrêtent mutuellement. Mais il peut arriver qu'on ait besoin de réunir en coude, deux tuyaux déjà façonnés. Dans un tel cas, vous décrirez, sur un tableau, une circonférence égale à la génératrice courbe commune ; vous la partagerez en quatre parties égales, au moyen de deux diamètres d'équerre ; puis vous y appliquerez le bord de chaque tuyau, afin de marquer les extrémités des quatre génératrices droites de deux plans méridiens perpendiculaires entre eux.

« Après avoir tracé sur les tuyaux, les quatre génératrices, faites sur un tableau, la projection horizontale du coude (P. XI, F. 3), de manière que CDE égale l'angle sous lequel les surfaces cylindriques doivent se rencontrer, et que NO, PQ aient même longueur que les diamètres, puis portez BN sur l'une des génératrices de chaque tuyau, OA sur la génératrice diamétralement opposée, ED sur les deux autres ; coupez enfin chaque surface selon un plan qui passe par les quatre points ainsi obtenus ; vous produirez les deux ellipses par lesquelles les tuyaux pourront s'ajuster. »

« Si le coude devait présenter un angle droit, il ne serait pas nécessaire d'en tracer la projection horizontale. Vous n'auriez qu'à diminuer une génératrice d'une longueur égale au diamètre, et à retrancher de celles du second plan méridien, une longueur égale au rayon ; car alors BN=AO−BM et DE=AO−CQ. »

Appl. (*h*) : Les tuyaux disposés en *té*, comme dans les systèmes de poêle et dans les embranchemens des conduites d'eau, se rapportent au cas des surfaces cylindriques droites, de même rayon, dont l'une arrête l'autre ou la croise (P. XI, F. 4).

« Si l'on veut assembler ainsi deux tuyaux déjà faits, on peut employer le procédé des quatre génératrices droites. Pour former les troncatures de la surface arrêtée, il faut diminuer d'une longueur égale au rayon, les génératrices d'un même plan méridien, et couper de manière à former des plans qui passent tous deux par les extrémités A'' des génératrices B, C sur lesquelles on n'a pas opéré, et chacun par un des points D'', E'' marqués sur les autres. »

« Le trou du tuyau croisant se fait comme il suit : Deux points B, C sont marqués à égales distances d'une des bases, sur deux génératrices BF, CG d'un même plan méridien ; un point A est marqué aussi à la même distance, sur l'une DH des deux autres génératrices ; de chaque côté de ce point A, on porte le rayon, de A en D et en E ; puis l'on coupe de façon à former deux plans BEC, BDC. »

« Lorsque les tuyaux ne sont pas formés, il convient d'en tracer les patrons et de découper les feuilles selon ces patrons, avant de les rouler en cylindres. L'opération, analogue à celle de l'appl. c (p. 295), repose aussi sur le développement des surfaces cylindriques. »

Probl. (*a*) : *Tracer le développement d'une surface cylindrique droite, arrêtée par une autre de même diamètre.*

Agissez comme dans le probl. *b* (p. 295). Après avoir développé la circonférence A (P. XI, F. 4) et tracé les directions des génératrices droites, vous porterez sur ces lignes, leurs longueurs prises entre D'E' et D''A''E''. Il en résultera la figure 6, si la surface a été ouverte par l'une de ses plus longues génératrices.

Probl. (*b*) : *Tracer le développement d'une surface cylindrique droite qui en croise une autre de même diamètre.*

Développez la circonférence A qui est égale à la base de la surface cylindrique horizontale (P. XI, F. 4), et faites sur la droite obtenue, un rectangle dont la hauteur soit la génératrice droite H''I'' de cette surface. La droite H'I' (F. 7) menée parallèlement à la hauteur, par le point milieu de H''H'', représentera sur le développement, la génératrice H'I' (F. 4), et les parallèles G'K', F'L' (F. 7), menées par les milieux de H'H'', représenteront les génératrices GK, FL (F. 4) dont G'K' est la projection verticale. Portez G'A'' sur G'K', F'L' (F. 7) et H'E'', H'D'' (F. 4) sur H'I' (F. 7). Vous aurez quatre points A'', A'', D'', E'' du contour du trou selon lequel la surface cylindrique verticale doit s'ajuster dans la surface horizontale qui la croise. Pour en avoir d'autres, vous tracerez des parallèles à H''I'', par les points de division de G'H', H'F', puis des parallèles à H''I'' (F. 4), par les points de division de A''D''; ces dernières passeront aussi par les points de division de A''E', et vous donneront les distances de la base circulaire H'H'' aux demi-ellipses A''D'', A''E''. Prenez ces distances et portez-les sur les génératrices correspondantes du développement (F. 7), sur celles qui ont les mêmes numéros. Chacune fournira deux nouveaux points du contour du trou, et vous aurez le développement de ce trou, en joignant, par une courbe, tous les points obtenus.

317. Deux surfaces cylindriques sont tangentes l'une à l'autre lorsqu'elles n'ont qu'un point de commun et quand elles ont une seule génératrice droite commune. Dans le premier cas, une génératrice droite de l'une des surfaces est tangente à l'autre (308) et les deux cylindres ont pour plan tangent commun, le plan que forment les deux génératrices droites qui se coupent. Dans le second cas, le plan tangent à l'une des surfaces suivant la génératrice de contact, est tangent aussi à l'autre surface; les axes sont parallèles, et *leur distance est la somme ou la différence des rayons, si les cylindres sont droits.*

La distance des axes est la somme des rayons, lorsque deux surfaces cylindriques droites n'ont qu'un point de commun; car si, par ce point, on mène une normale à l'une, elle sera aussi normale à l'autre et perpendiculaire aux deux axes (309). Or, *la distance de deux droites non situées dans un même plan, doit se mesurer comme celle de deux parallèles, selon une perpendiculaire commune.*

Appl. (*a*) : Il résulte de ce qui précède, que deux cylindres droits, placés de manière que leurs axes soient parallèles et que la distance de ces axes soit la somme des rayons, peuvent tourner sur eux-mêmes sans cesser de se toucher selon une droite de position constante, ce qui est analogue à ce que nous avons dit, page 160, des cercles tangens. L'un des cylindres peut donc faire tourner l'autre, si le frottement est assez grand pour que le mouvement se communique. C'est ce qui a lieu dans les petits laminoirs des filatures de coton (p. 63) : ils sont composés d'un cylindre métalique cannelé et d'un cylindre recouvert en drap, qui tournent dans des sens contraires, et ne laissent passer entre eux qu'une quantité constante de matière. Deux laminoirs parallèles sont nécessaires pour le même fil, et l'une des paires de cylindres, celle qui est du côté des bobines, tourne plus vite que l'autre. Il en résulte que le coton placé entre les deux, est forcé de s'alonger proportionnellement à la différence des vitesses, et qu'en faisant varier cette différence, on peut obtenir des fils de divers degrés de finesse.

Appl. (*b*) : Puisque deux cylindres droits mis dans la position qui vient d'être indiquée, peuvent tourner sur leurs axes, sans cesser de se toucher selon une droite constante, il est clair que leur plan tangent commun ne change pas pendant le mouvement. Si donc un corps se trouve engagé entre deux surfaces cylindriques droites qui, en tournant, fassent effort pour se rapprocher jusqu'au contact, ce corps sera forcé de s'étendre et de former deux surfaces planes parallèles, tangentes chacune à l'un des cylindres.

« Tel est l'effet des laminoirs qu'on emploie pour convertir en feuilles minces et planes, les barres de fer, les lingots de cuivre, etc. Ces barres, ces lingots font effort pour écarter les cylindres, et il en résulte une réaction de ces corps ronds dont la distance ne peut s'accroître. »

Appl. (c) : C'est aussi au moyen d'un laminoir qu'on produit ce papier d'une longueur extraordinaire, qui est appelé *papier sans fin*. Le chiffon réduit en bouillie, est pressé entre deux cylindres revêtus de drap, et peut se prendre entièrement, par cela seul, en une feuille mince unique.

Appl. (d) : Il y a des journaux pour l'impression desquels on se sert de laminoirs. Les caractères du recto sont placés dans une forme cylindrique d'un grand diamètre, et les caractères du verso dans une forme pareille, peu distante de la première. Deux feuilles de papier séparées par une espèce de matelas, passent à la fois entre les deux cylindres, ce qui accélère singulièrement le tirage. La feuille de dessous est ensuite mise en dessus et l'autre en dessous. Pour économiser le temps encore davantage, on met en contact les cylindres-formes et des cylindres couverts d'une substance élastique, qui d'eux-mêmes se chargent de l'encre étendue sur une table.

Appl. (e) : Enfin, l'impression en taille douce se fait aussi au laminoir. La planche en cuivre qui est gravée et la feuille de papier qui doit recevoir l'empreinte du dessin, passent ensemble entre les deux cylindres.

318. Deux surfaces cylindriques droites qui ont le même axe, sans avoir la même génératrice circulaire, sont *équidistantes* : alors les génératrices courbes ont même centre; les génératrices droites de l'une des surfaces, sont parallèles à celles de l'autre, et la distance de ces deux surfaces est partout égale à la différence des rayons; car cette distance se mesure selon la normale commune (309).

Il suit de là que *deux surfaces cylindriques équidistantes peuvent tourner et glisser sur leurs axes, sans que leur distance augmente ou diminue.*

Appl. (a) : D'après le n° 318, un cylindre droit en relief, peut tourner et glisser dans un cylindre creux de même rayon. De cette propriété, provient le jeu des lorgnettes d'opéra, des lunettes de longue-vue, des pistons, des étuis ronds et des tabatières circulaires. Mais, pour que ce jeu soit facile et qu'en même temps il y ait un frottement doux qui produise une fermeture exacte ou qui empêche la désunion des parties, il faut que les cylindres emboîtés les uns dans les autres, soient parfaitement exécutés.

Appl. (b) : Le chapelier applique la même propriété, quand il façonne des feutres sur une forme cylindrique.

Appl. (c) : Si l'on établit de longues lignes de tuyaux de conduite en fonte, soit pour les eaux, soit pour le gaz d'éclairage, il convient de placer de distance en distance, des manchons cylindriques; d'y souder les parties aboutissantes du tuyau, en laissant un petit intervalle entre elles, ou bien, comme aux conduites des fontaines de Metz, de forcer des rondelles de plomb entre les surfaces équidistantes. La fonte peut être alors alongée par la chaleur ou raccourcie par le froid, sans qu'il puisse en résulter rupture ou désunion, parce que, malgré la soudure ou la rondelle, les deux bouts du tuyau peuvent glisser dans le manchon cylindrique, en se rapprochant ou en s'écartant.

« Les ponts des portes de plusieurs places fortes présentent quelque chose d'analogue : les barres rondes en fer des garde-fous, jouent librement par un bout, dans les mortaises cylindriques à jour de leurs supports, afin que le système n'éprouve aucun dérangement par suite de la dilatation ou de la contraction qu'y causent les variations de température. »

APPL. (*d*) : Enfin, c'est au moyen de cylindres creux appelés *lunettes* ou *calibres*, qu'on vérifie les cylindres en relief qui ont besoin d'être exécutés avec précision : la lunette doit pouvoir cheminer d'un bout à l'autre du cylindre, sans laisser de jour.

Surfaces coniques.

319. Toute surface courbe sur laquelle une règle peut s'appliquer dans toute sa longueur et selon des directions qui concourent au même point, est une *surface conique*. Ainsi, les surfaces coniques sont réglées par des droites qui se coupent toutes en un seul point.

Le concours de toutes les droites d'une surface conique en est le *sommet*. Quelquefois les géomètres le nomment aussi *centre*, parce qu'ils regardent la surface comme s'étendant indéfiniment, de chaque côté du sommet, ainsi que ses lignes droites (P. X, F. 8), et qu'alors ce point se trouve au milieu. Mais attendu qu'on fait rarement usage, dans les arts, de surfaces coniques à deux *nappes*, nous ne considérerons ordinairement qu'une des parties séparées par le centre C : pour nous, la surface sera terminée au sommet, à moins que le contraire ne soit formellement exprimé.

320. Deux manières d'engendrer la surface conique se déduisent de sa définition. On peut d'abord faire tourner une droite autour d'un point, de façon qu'elle passe successivement par tous ceux d'une courbe dont le plan ne contienne pas le pivot. On peut ensuite faire cheminer la courbe parallèlement à sa première position, en la diminuant de telle sorte que ses divers points suivent des concourantes situées dans des plans différens.

La surface conique a donc, comme la surface cylindrique, des *génératrices droites* et des *génératrices courbes*. Il s'ensuit que les surfaces coniques diffèrent, et par la nature de leur génératrice courbe, et par la position du sommet relativement à trois points pris sur cette courbe.

321. La Géométrie élémentaire ne considère que les surfaces coniques dont la génératrice courbe est une circonférence. Cette espèce forme la limite ronde des corps appelés *cônes* : le pain de

sucre qui fait bien la pointe, est un de ces corps; il en est de même d'un clocher rond et pointu.

La surface conique est *droite*, quand la perpendiculaire abaissée du sommet sur le plan de la circonférence, passe par le centre; elle est *oblique*, lorsque le centre se trouve hors de cette perpendiculaire. L'industrie ne produit guère que la première espèce.

Une surface conique terminée d'une part au sommet et de l'autre à une circonférence, est *complète;* elle se trouve *tronquée*, si le sommet manque.

La circonférence qui termine une surface conique, en est la *base*.

La droite qui joint le sommet au centre de la base se nomme *axe*.

L'axe d'une surface conique droite est donc perpendiculaire au plan de la base.

322. On applique le premier mode de génération du n° 320, à la surface conique circulaire et droite, en faisant tourner un triangle rectangle ABC, sur un AB des petits côtés (P. XI, F. 9); car alors l'hypothénuse AC pivote sur le point A situé hors du plan de la circonférence que décrit C, et passe successivement par tous les points de cette courbe.

Ainsi, *la surface conique droite peut être engendrée par la révolution d'un triangle rectangle* C'est là ce qui la fait appeler quelquefois *surface conique de révolution.*

323. Il est visible que les génératrices droites de la surface conique de révolution, sont, par rapport au plan de la base, des obliques également éloignées du pied de la perpendiculaire abaissée de leur concours. Par conséquent (258), *toutes les génératrices droites d'une surface conique droite et circulaire, sont égales et forment le même angle avec l'axe.*

Il s'ensuit que *la surface conique de révolution est le lieu de toutes les droites qui font avec une autre, un angle déterminé.*

La surface conique oblique ne jouit pas des mêmes propriétée, attendu que ses génératrices sont des obliques inégalement éloignées de la perpendiculaire abaissée de leur concours, sur le plan de la base.

Probl. (*a*) : *Dessiner une surface conique droite et complète dont la génératrice droite* G *et le rayon* R *de la base sont donnés* (P. XI, F. 10).

Si nous plaçons la surface de manière que l'axe soit vertical, la projection horizontale se composera d'un cercle égal à celui de la base, et d'un point S situé au centre, pour représenter le sommet. Ce point sera aussi la projection horizontale de l'axe. Une perpendiculaire abaissée de S, sur la ligne de terre, donnera la projection verticale CS' de cet axe.

Comme les génératrices extrêmes, dans le sens de la ligne de terre, aboutissent aux extrémités d'un diamètre parallèle à cette ligne, il faut, pour avoir les projections verticales de leurs pieds A, B, mener des tangentes au cercle, parallèlement à SC.

Enfin, on obtient la projection verticale S' du sommet et, par suite, celles des génératrices extrêmes A'S', B'S', en décrivant de A', avec G, un arc qui coupe CS'; car ces génératrices étant parallèles au plan vertical, comme le plan ABS' qui les contient, s'y projettent dans leur vraie longueur (292).

Ainsi, le dessin complet d'une surface conique droite, se compose d'un cercle S, du centre de ce cercle, d'un triangle symétrique A'S'B' et de l'axe de symétrie CS' de ce triangle.

Prob. (*b*) : *Dessiner une surface conique oblique et complète dont on connaît le rayon* R *de la base, la longueur g et la pente de la plus courte des génératrices droites* (P. XI, F. 11).

Nous pouvons placer la surface de manière qu'elle repose par sa base, sur le plan horizontal, et que sa plus courte génératrice droite soit parallèle au plan vertical. La projection horizontale de la base sera un cercle C de rayon R, et sa projection verticale, une droite A'B' égale à 2R, comprise entre deux tangentes perpendiculaires à la ligne de terre.

Si la surface s'incline à droite, le contact B sera le pied de la plus courte génératrice droite On aura la projection verticale de cette génératrice, en portant un certain nombre d'unités de longueur de B' en D, menant par D une parallèle à BB', prenant DE égale à autant de fois la pente donnée, qu'il y a d'unités dans B'D, tirant B'E et portant g sur cette droite, de B' en S'.

Le point S' ainsi déterminé, est la projection verticale du sommet, et CS' celle de l'axe. Mais cet axe est parallèle au plan vertical, comme le plan ABS' de la plus longue et de la plus courte génératrice où il est contenu. Il faut donc, pour en avoir la projection horizontale, mener par C, une parallèle à la ligne de terre (291). La projection horizontale du sommet se trouve alors à la rencontre S de cette parallèle et d'une perpendiculaire abaissée de S' sur la ligne de terre.

On achève la projection verticale en tirant A'S' projection de la plus longue génératrice, et la projection horizontale en menant par S, deux tangentes au cercle C : ces tangentes sont effectivement les projections des deux génératrices par lesquelles est terminée l'image de la surface vue d'en haut. Mais les génératrices qui ont leurs pieds sur le plus grand des arcs compris entre les contacts des deux tangentes concourantes, passent au dessus du plus petit de ces arcs et le cachent. Cette partie de la circonférence C doit donc être ponctuée.

Appl. (*a*) : Si l'on inscrit un polygone régulier dans une circonférence, et qu'on joigne tous les sommets avec un point situé hors du plan, il est visible qu'on formera des triangles dont l'ensemble approchera d'autant plus d'une surface conique, que le polygone aura un plus grand nombre de côtés. Si donc on trace la circonférence sur l'un des bouts d'une pièce de bois, par exemple, et qu'on marque le sommet du cône sur l'autre bout, il ne s'agira que d'exécuter les triangles et d'abattre les arêtes d'intersection en arrondissant, pour produire une surface réglée par des droites concourantes, ou une surface conique dont la génératrice courbe serait une circonférence de rayon arbitraire. Ce procédé est employé par les charpentiers et par les tailleurs de pierres.

Appl. (*b*) : Pour construire les voûtes coniques appelées *trompes*, on place des madriers triangulaires sur des cintres inégaux dont les centres sont en ligne droite; ces madriers se touchent par des côtés qui concourent au même point, et les moëllons dont on les recouvre, forment une surface réglée qui est composée de facettes planes, étroites, et diffère très-peu d'une surface conique.

Appl. (*c*) : Le cône est souvent exécuté au tour; mais, comme dans ce cas l'outil tranchant AG (P.XI, F. 12) doit se rapprocher de l'axe SB, quand il passe d'une circonférence à une circonférence plus voisine du sommet, il faut que cet outil ait pour support, une tringle CD parallèle à la génératrice horizontale SE du cône, et de plus, que sa partie FG soit toujours de même longueur.

« C'est par un semblable procédé qu'on donne aux canons, une surface extérieure composée de plusieurs surfaces coniques tronquées. Mais alors, au lieu d'une tringle, c'est un chariot qui porte l'outil, ou plutôt c'est un écrou que fait cheminer une vis dont l'axe est parallèle à la génératrice droite et horizontale de la surface. »

Appl. (*d*) : Un moulage analogue à celui de la page 290, produit des cônes creux dans lesquels une matière, un métal ou un alliage quelconque se prend en cône. C'est ainsi qu'on ébauche les surfaces coniques tronquées qui limitent les canons extérieurement. Les formes dans lesquelles le sirop cristallise et se convertit en pains de sucre, sont des cônes creux entiers ou des moules coniques.

Appl. (*e*) : Puisque la révolution d'un triangle rectangle autour de l'un des petits côtés, engendre une surface conique, il est visible qu'un corps ayant ce petit côté AB pour axe de rotation (P. XI. F. 9), peut être taillé en cône par une lame tranchante placée selon l'hypothénuse AC et rendue fixe. Tel est le procédé dont se sert le potier de terre, pour confectionner des cônes creux : il place un cône droit AB (F. 13) sur sa table tournante CD, de manière que l'axe de rotation du tour et celui du cône se confondent; il entoure de terre grasse ce modèle; puis, au moyen d'une règle fixe EF qu'il tient parallèlement à la génératrice droite, il rend conique la face extérieure de la terre, et donne partout la même épaisseur au vase. La règle forme en effet l'hypothénuse du triangle rectangle EBF.

Appl. (*f*) : Les rais des roues de voiture sont dirigés selon les génératrices droites d'une surface conique qui a pour circonférence, la courbe que forment les jantes, et pour sommet un point de l'axe du moyeu. La longueur de l'axe de cette surface conique est ce qu'on appelle *l'écuanteur*. On donne une pareille forme aux roues pour empêcher que la jante qui porte sur le sol, ne soit rejetée par les cahots, vers le milieu de la voiture; car il faudrait pour que cet effet fut produit, que les rais inférieurs se redressassent en soulevant toute la charge. L'écuanteur s'oppose aussi à ce que la même jante soit repoussée en dehors par les cahots; cela effectivement ne pourrait avoir lieu sans que la jante opposée se raprochât de la voiture, ou sans que les rais supérieurs devinssent presque verticaux, et pour prendre cette position, il faudrait qu'ils agrandissent la circonférence des jantes.

« L'écuanteur est donc conservatrice des roues: si les rais étaient perpendiculaires à l'axe du moyeu, les cahots les feraient osciller d'un côté et de l'autre d'un plan vertical perpendiculaire à l'axe de l'essieu, et bientôt l'assemblage de ces rais dans les jantes et dans le moyeu, n'aurait plus aucune solidité. »

324. *Toutes les surfaces coniques sont développables* (301); car elles peuvent être regardées comme composées de facettes planes et triangulaires, puisque le cercle est un polygone régulier d'un très-grand nombre de petits côtés (240), et l'on conçoit qu'en faisant tourner successivement ces facettes sur leurs intersections, on peut parvenir à les amener toutes sur un même plan.

Il est visible d'ailleurs qu'à cause de l'égalité de ses génératrices droites, *une surface conique de révolation a pour développement un* SECTEUR *de cercle*, c'est-à-dire une portion de cercle renfermée entre un arc et deux rayons : l'arc a même longueur que la base, et les rayons sont égaux aux génératrices droites.

Il n'en est pas de même d'une surface conique oblique. L'inégalité des génératrices droites fait que la base ne peut se developper selon un arc de circonférence.

PROBLÈME : *Tracer le développement d'une surface conique droite et complète, dont on a les projections* (P. XI, F. 10 et 14).

Décrivez une circonférence ou seulement un grand arc BD (F. 14), avec S'A' pour rayon (F. 10); divisez la circonférence S, comme dans le problème de la page 291; portez ses parties sur l'arc BD, de B en C, et joignez ces points au centre A. Le secteur de cercle ABC sera le développement demandé.

325. *Le rapport de deux surfaces coniques droites et complètes, est le même que celui des produits de leurs bases multipliées chacune par la génératrice droite correspondante.*

« En effet, les deux surfaces sont entre elles, comme leurs développemens ABC, ADE (P. XI, F. 15). Or, si nous prolongeons la génératrice AE jusqu'à l'arc BC, les deux secteurs ADE, ABF seront contenus le même nombre de fois dans les cercles dont ils font partie (32). Ils seront donc entre eux comme ces cercles, c'est-à-dire comme les quarrés des rayons AD, AB (262), et l'on aura la proportion

$$ADE : ABF :: \overline{AD}^2 : \overline{AB}^2.$$

« Mais on pourra écrire aussi la proportion

$$ABF : ABC :: BF : BC;$$

car deux secteurs de même rayon doivent se contenir comme les longueurs de leurs arcs (30). De plus, l'arc BF et l'arc DE sont entre eux comme les circonférences dont ils font partie, et ces circonférences sont comme leurs rayons AB, AD (247). Donc,

$$BF : DE :: AB : AD, \qquad BF = \frac{DE \times AB}{AD}$$

et

$$ABF : ABC :: \frac{DE \times AB}{AD} : BC. »$$

« Multipliant la dernière proportion par la première, nous obtiendrons

$$ABF \times ADE : ABC \times ABF :: \frac{DE \times AB}{AD} \times \overline{AD}^2 : BC \times \overline{AB}^2,$$

puis $\quad ADE : ABC :: DE \times AB \times AD : BC \times \overline{AB}^2$

et enfin $\quad ADE : ABC :: DE \times AD : BC \times AB,$

proportion qui n'est autre chose que le principe avancé. »

PROBLÈME : *Tracer, sans projections, le développement d'une surface conique de révolution dont les génératrices droites soient d'une longueur déterminée et dont la base ait un rayon connu.*

Supposons, pour exemple, que la longueur des génératrices droites doive être de 16 centimètres, et celle du rayon, de 5 centimètres. Vous tracerez une circonférence entière A (P. XI, F. 14), avec un rayon de 16 centimètres; vous la partagerez en 16 parties égales; vous y marquerez un arc BC qui contienne 5 de ces parties; puis, après avoir tiré les rayons AB, AC, vous découperez le secteur BAC et le roulerez en cône.

La circonférence que produira l'arc BC après le roulement, sera contenue dans la circonférence A, autant de fois que 5 l'est dans 16, et parce que les circonférences se contiennent comme leurs rayons, celui de la petite aura 5 centimètres, puisque celui de la grande est de 16 centimètres.

Vous voyez par là qu'en général il faut, pour résoudre le problème, décrire une circonférence avec la génératrice droite donnée; la partager en autant de parties égales qu'il y a d'unités dans la longueur de cette génératrice, et prendre pour former le développement de la surface conique, autant de ces parties, qu'il y a d'unités dans le rayon de la base.

APPL. (a) : Le développement de la surface conique droite, fournit, pour la construction du cône creux, un moyen très-simple qu'emploient le ferblantier, le cartonnier, etc. Ils tracent sur une feuille de fer-blanc ou de carton, un secteur de cercle, découpent ce secteur, le roulent de façon que les deux rayons extrêmes se confondent, et soudent ou collent ces deux bords.

Appl. (*b*) : Quant à la manière de rouler un secteur en cône, nous dirons que le ferblantier se sert, pour cette opération, d'une enclume conique ou bigorne, sur laquelle il bat sa feuille plane à coups de maillet; ce qui tient encore à ce que la surface ronde du cône est développable. Dans d'autres arts, on forme les cônes creux, en forgeant des faces planes sur des enclumes qui présentent des *gouttières* coniques.

Combinaisons des surfaces coniques et du plan.

Pour que la combinaison des surfaces coniques et du plan, présente toutes ses circonstances et les présente complètement, il faut considérer les deux parties ou *nappes* (319) ASBO, A'S'B'O' de ces surfaces (P. XI, F. 16).

326. Le plan qui coupe une surface conique, peut avoir deux positions essentiellement différentes : il passe par le sommet ou bien il n'y passe pas ; c'est seulement dans le second cas, que son intersection est une courbe.

Lorsqu'un plan passe par le sommet S *d'une surface conique* (P. XI, F. 16), *sans contenir aucune génératrice droite, son intersection n'est qu'un point* S; car il coupe toutes les génératrices droites précisément au sommet.

Le plan coupant qui contient une génératrice droite, de la surface conique, a pour intersection deux droites qui se croisent; car entrant par une génératrice, il doit sortir par une autre, puisqu'il passe nécessairement par le sommet.

Le plan qui contient, comme ASB, deux génératrices droites et un diamètre de génératrice courbe, se nomme en général *plan diamétral*, et si la surface conique est droite, on l'appelle *plan méridien* (310).

327. Quand un plan ne passe point par le sommet de la surface conique, il est parallèle soit à la génératrice courbe, soit à la génératrice droite, ou bien il n'est parallèle ni à l'une, ni à l'autre.

Tout plan parallèle aux génératrices courbes d'une surface conique, a pour intersection une circonférence dont le centre est sur l'axe. Cela résulte d'une des générations de la surface (320).

Dans une surface conique ainsi tronquée, la troncature prend aussi le nom de *base*, et l'axe joint les centres des deux bases.

Lorsqu'un plan contient une parallèle CD à l'une des génératrices droites AA' (P. XI, F. 16), il ne peut rencontrer celle-là, mais il coupe toutes les autres et les coupe en des points d'autant plus éloignés du sommet S, qu'elles sont plus voisines de AA'. De là résulte une courbe qui commence en E, s'étend sur la seule nappe où pénètre le plan coupant, et s'ouvre de plus en plus. Donc, *l'intersection d'une surface conique et d'un plan parallèle à l'une des génératrices droites, est une courbe ouverte qui s'étend indéfiniment, et dont les cordes parallèles augmentent de plus en plus:* elle est nommée *parabole.*

328. Si le plan coupant n'est parallèle à aucune des génératrices droites ou courbes de la surface conique, il ne traverse qu'une seule nappe ou bien il pénètre dans les deux.

La position du plan CD perpendiculaire au plan ASB (P. XI, F 17), se rapporte au premier cas. Son intersection est une courbe fermée qui commence en C et se termine en D, après avoir fait le tour de la surface conique. Cette courbe n'est pourtant pas une circonférence, quand la surface est droite.

« Concevez par le milieu E de CD, une corde perpendiculaire au plan ASB; elle sera aussi corde du cercle qui a son centre en N et dont FG parallèle à AB, est diamètre. Cette corde est donc moindre que FG. Mais FE=DL moitié de sa parallèle DI, EG=CK moitié de sa parallèle CH (81), et par conséquent FG=DL + CK. D'un autre côté, l'oblique DM est plus longue que DL perpendiculaire à OS, et CM est aussi plus longue que CK; ou bien CD, diamètre de la courbe, est plus grand que DL+CK. Donc, CD a plus de longueur que FG et surpasse, à plus forte raison, la corde menée perpendiculairement, par son milieu E. Or CD égalerait cette corde, si la courbe était une circonférence, puisque tous les diamètres d'un cercle sont égaux. »

Conséquemment, *l'intersection d'une surface conique droite, terminée à son sommet, et d'un plan qui la traverse en coupant l'axe obliquement, est une courbe fermée non circulaire :* cette troncature est analogue à celle qu'un plan forme sur une surface cylindrique, dans les mêmes circonstances, et porte aussi le nom d'*ellipse* (305).

Il en est de même généralement pour une surface conique oblique; mais, si le plan diamétral ASB, perpendiculaire au plan de la base (P. XI, F. 18), l'est aussi au plan coupant CD, et si la génératrice SA fait en C, sur ce plan, le même angle que SB fait en B, sur celui de la base, l'intersection est une circonférence.

« Alors effectivement, C'D' menée par le milieu E de CD, parallèlement à AB, formerait un angle C'=C, et le triangle SCD tournant sur SE, viendrait couvrir exactement le triangle SC'D', puisque EC s'appliquerait sur EC'. Ces deux figures seraient donc égales et CD aurait même longueur que C'D'. Mais la perpendiculaire élevée au milieu E de CD, dans le plan coupant, serait aussi perpendiculaire au plan ASB et se trouverait dans celui de la génératrice courbe dont C'D' est diamètre; elle serait donc aussi diamètre de cette circonférence et égale à CD, comme C'D'. Or deux cordes égales qui se coupent réciproquement d'équerre et par le milieu, ne peuvent appartenir qu'au cercle. Donc enfin, l'intersection de la surface conique oblique et du plan CD est une circonférence, dans les circonstances énoncées. »

329. *Un plan* FG (P. XI, F. 16) *pénétrant dans les deux nappes d'une surface conique, a pour intersection une courbe à deux branches ouvertes, séparées par un intervalle* HH', *qui s'étendent indéfiniment en sens contraires, et dont les cordes parallèles augmentent de plus en plus.* Cette courbe est nommée *hyperbole.* La forme de ses branches, fort différente de celle des paraboles, ne permet pas de la considérer comme le système de deux de ces dernières courbes.

Appl. (*a*) : Le numéro 327 nous apprend qu'on trace une circonférence sur une surface conique droite et circulaire, si l'on y fait cheminer une pointe maintenue à une distance constante d'une génératrice courbe. Ce moyen est employé par le tonnelier, pour faire la rainure où doit se loger le fond d'une baratte à beurre, dont la paroi courbe présente tant extérieurement qu'intérieurement une surface conique tronquée à deux bases; il se sert à cet effet d'une espèce de trusquin (appl., p. 59).

Appl. (*b*) : Les architectes construisent quelquefois des voûtes coniques qu'ils appellent *trompes :* les unes servent à supporter les constructions qui recouvrent des angles rentrans formés par des murs, et sont dites *trompes dans l'angle ;* les autres soutiennent des coins dont la partie inférieure est supprimée, et prennent le nom de *trompes sur le coin.*

« Les arêtes que forment les dernières sur les faces extérieures des deux murs, ne sont pas des arcs de cercle, parce que ces faces AB, AC (P. XI, F. 19) étant obliques par rapport à l'axe AS du cône, ne sont pas parallèles au plan BC de la génératrice circulaire, qui est perpendiculaire au même axe. »

« Ordinairement, les génératrices droites et horizontales SB, SC sont perpendiculaires aux faces du coin A. Si donc ce coin est droit, le plan AB est parallèle à la génératrice droite SC, et l'arête courbe qui va de B en A est un arc de parabole; il en est de même de l'arête AC. Quand le coin A est aigu, les plans AB, AC ne peuvent rencontrer les génératrices SB, SC sur la même nappe, parce que l'angle S est alors obtus, et les deux arêtes courbes sont des arcs d'hyperbole. Enfin, elles deviennent arcs d'ellipse, lorsque le coin A est obtus, attendu que, dans ce cas, les plans AB, AC rencontrent sur la même nappe, les génératrices SB, SC qui font un angle aigu. »

Appl. (*c*) : Un point éclairé réfléchit des rayons dans toutes les directions. L'œil qui le regarde, ne le voit que parce qu'il reçoit un de ces rayons. Si donc nous voyons un objet, c'est que nous recevons un des rayons réfléchis par chacun de ses points. Or, les rayons de lumière qui entrent dans l'œil, se croisent tous en un point situé derrière la prunelle; par conséquent, ceux qui nous viennent d'une courbe A (P. XI, F. 20) forment une surface conique OA (320). Concevez sur cette surface, une autre courbe *a* qui rencontre toutes les génératrices droites ou tous les rayons réfléchis vers l'œil. Vous comprendrez aisément que vous éprouveriez la même sensation ou que vous auriez la même vision, soit que vous regardassiez cette seconde courbe, soit que votre attention se portât sur la première.

« Ainsi, deux courbes différentes produisent le même effet, quand elles se trouvent sur une même surface conique OA dont le sommet est dans l'œil O, ou quand se confondent les surfaces coniques OA, O*a* formées par ceux de leurs rayons réfléchis que nous recevons. Deux courbes qui sont dans ce cas, sont dites *perspectives* l'une de l'autre. Elles peuvent être toutes deux planes, toutes deux à double courbure (312), ou bien l'une d'elles seulement est contenue toute entière dans un plan. Il y a donc, pour un même objet, des *perspectives planes* et d'autres qui ne le sont pas. »

« On voit aussi que la perspective plane d'une courbe quelconque A, n'est autre chose que la section *a* faite par le plan MN choisi pour tableau, sur une surface conique OA dont la courbe est génératrice et qui a son sommet dans l'intérieur de l'œil. La perspective plane d'un cercle est donc un autre cercle ou une ellipse (327 et 328), selon la position qu'on donne au tableau, et celle d'une ellipse peut être un cercle ou une autre ellipse. »

« Une droite BC ne peut avoir pour perspective plane, qu'une autre droite *bc*, parce que les rayons qu'elle réfléchit vers l'œil, forment un triangle plan BOC qui coupe le tableau ou qui en est coupé selon une droite *bc* (267). »

Un point A ne peut avoir pour perspective qu'un autre point *a*, parce que le tableau, quel qu'il soit, ne peut être percé qu'en ce point *a*, par l'unique rayon AO que reçoit l'œil (154). »

C'est en étudiant la géométrie descriptive, qu'on apprend les procédés à suivre pour dessiner exactement la perspective d'un objet quelconque. »

Appl. (*d*) : La *silhouette* du profil humain est l'ombre que porte ce profil sur un plan, quand il est éclairé par une lampe. Elle est donc la section faite par le plan, dans un cône privé de lumière, dont le profil est la génératrice courbe et dont le sommet est un point A (P. XI, F. 21) situé en arrière de la flamme. Cela nous montre que le tableau MN sur lequel on dessine une silhouette, doit être exactement parallèle au plan qui divise la tête en deux parties égales par symétrie, si l'on veut que le profil ne soit pas altéré, ou pour qu'il y ait ressemblance parfaite, entre la copie B' et le modèle B.

« La même précaution est nécessaire pour les ombres chinoises et pour les ombres de la fantasmagorie, qui ne sont que les silhouettes de profils en carton, plus ou moins grossies, soit par l'effet de leur distance au sommet du cône lumineux, soit par celui de loupes placées entre l'objet et le tableau. Les spectateurs voient ces silhouettes au travers d'un transparent sur lequel elles se peignent.»

APPL. (*e*) : Il existe un instrument appelé *physionotrace*, fondé aussi sur le principe 327, dont on se sert pour copier un profil plus exactement que par le procédé de la silhouette. Une tige droite AA' (P. XI, F. 22) est mobile autour d'un point fixe S. Le bout A s'applique constamment sur le contour du profil B, et le bout A' qui porte un crayon s'appuie toujours contre le plan MN que forme une feuille de papier tendue. La partie SA' s'alonge ou se raccourcit d'elle-même, au moyen d'un ressort très-doux qui pousse le crayon ; de sorte que la copie B' qu'elle trace renversée sur le papier, est parfaitement ressemblante au modèle, si le plan MN est parallèle à celui du profil.

LOI DE LA NATURE (*a*) : La lumière solaire est un physionotrace bien supérieur au précédent : elle ne se borne pas à dessiner le contour d'un objet ; elle en peint tous les détails, mieux que ne le ferait le plus habile coloriste.

« Fermez les fenêtres d'une chambre, de manière que le jour n'y entre que par un petit trou S (P. XI, F. 23) ; un des rayons réfléchis par chaque point d'un objet extérieur A, pénétrera dans la chambre par ce trou et ira éclairer un point du mur opposé. Le cône des rayons qui se croiseront en S, formera donc sur ce mur, un tableau où tous les objets extérieurs se trouveront représentés ombrés et coloriés, comme ils le seraient dans un paysage ; bien plus, ce tableau est animé : les animaux et les choses y conservent leurs mouvemens. Il est vrai que tout y est peint renversé ; mais il est facile de redresser l'image A', en la recevant sur un miroir incliné M qui la renvoie sur une feuille de papier A'' placée horizontalement.»

« C'est un tel appareil qu'on appelle *chambre noire* ou *chambre obscure*. Ordinairement, le trou S est garni d'un verre qui rend l'image bien plus nette, parce que le petit cône de rayons qu'envoie, par exemple, le point B à l'orifice S, se réfracte dans ce verre, de telle façon qu'il ne produit qu'un seul point sur le tableau (p. 299) ; il n'y aurait pas besoin du verre, si l'orifice pouvait ne laisser entrer qu'un seul des rayons réfléchis par le point B. »

LOI (*b*) : Notre œil A (P. XI, F. 24) est une vraie chambre obscure dont la prunelle B forme l'orifice. Le tableau où se peint l'image, est une surface courbe C d'une blancheur éblouissante, qui ne se voit pas : on l'appelle *la rétine*. Derrière la prunelle, se trouve un corps transparent D, nommé le *cristallin*, qui force tous les rayons partis d'un point E, à se réunir en un point E' de la rétine. Le reste de l'intérieur de l'œil est tapissé d'une membrane très-noire, dont la fonction est d'absorber (p. 51) les rayons qui ne tombent pas sur la rétine, après avoir traversé le cristallin.

« Comme l'œil est lié au cerveau par des nerfs très-sensibles, le choc de la lumière contre la surface blanche, nous avertit de la présence des objets et nous force à les regarder. Alors, nous rapportons le point E' de l'image, à un point E de la droite E'E, parce que nous savons bien que les corps sont hors de nous, et cela fait que nous voyons les objets droits, quoiqu'ils soient peints renversés sur le fond de l'œil. »

« Chez les myopes, c'est-à-dire chez les personnes qui ont la vue courte, le point E' où se réunissent tous les rayons partis d'un point éloigné E et admis par la prunelle, se trouve entre le cristallin et la rétine. Ils sont donc écartés de nouveau, quand ils atteignent la surface blanche, ce qui produit plusieurs images du même point et rend la vision confuse. On corrige ce défaut en portant des lunettes dont les verres concaves augmentant l'écartement des rayons qu'ils reçoivent, les forcent de se réunir plus en arrière du cristallin. »

« Les presbytes ou ceux qui, comme les vieillards, ne voient que de loin, ont des yeux où le point E' se trouverait derrière la rétine, si les rayons partis d'un point E très-rapproché, étaient prolongés après leur réfraction dans le cristallin. Il en résulte encore une vision confuse qu'on rend nette au moyen de lunettes à verres bombés, dont la propriété est de diminuer l'écartement des rayons qu'ils reçoivent. »

330. Les surfaces coniques tronquées sont trop fréquemment employées, pour qu'on n'entre pas dans quelques détails à leur sujet.

Nous rappellerons d'abord qu'il y en a de deux sortes : la troncature des unes forme un plan parallèle à ceux des génératrices courbes, et celles-là ont deux bases circulaires; la troncature des autres forme un plan incliné sur la base et présente une ellipse.

PROBLÈME : *Dessiner une surface conique droite, tronquée, à deux bases, dont on connaît les rayons extrêmes* R, r *et l'axe* A (P. XI, F. 25).

Supposons la surface posée sur le plan horizontal, par sa grande base. La projection horizontale se composera de deux circonférences concentriques C, décrites avec les rayons R, *r*, puisque les centres des bases sont joints par l'axe et que cet axe est vertical.

La projection verticale sera un trapèze symétrique formé par les diamètres des bases et les deux génératrices droites extrêmes qui sont également inclinées. Pour le tracer, abaissez de C une perpendiculaire à la ligne de terre ; portez A, longueur de l'axe, de C' en C'' ; menez par C'' une parallèle à la ligne de terre; prenez C'B' et C'D' égales à R, C''E et C''F égales à *r;* puis joignez E à B' et F à D'.

331. *Le rapport des circonférences extrêmes d'une surface conique tronquée, à deux bases, égale celui de la génératrice*

droite entière SB' *à la partie enlevée* SE (P. XI, F. 25); c'est-à-dire que la grande circonférence C contient la petite, comme SB' contient SE.

En effet, la grande circonférence contient la petite, comme le rayon B'C' contient le rayon EC'' (247); mais B'C' : EC'' :: SB : SE (81), donc, les deux circonférences se contiennent comme SB' et SE.

Ce raisonnement montre que le principe s'applique aux troncs de surfaces coniques obliques, aussi bien qu'à ceux des surfaces coniques droites.

PROBL. (*a*) : *Tracer le développement d'un tronc de surface conique droite dont on a les projections* (P. XI, F. 25).

Prolongez l'axe et l'une des génératrices droites jusqu'à leur rencontre S; faites (F. 26) le développement SB'B'' de la surface entière (p. 311 ou 312); puis décrivez dans ce secteur, un arc EE', avec SE pour rayon (F. 25). La portion d'anneau plan B'B''E'E (F. 26) sera le développement demandé.

Il est visible d'abord que B'E, E'B'' (F. 26) égalent la génératrice B'E du tronc (F. 25). Comme d'ailleurs l'arc B'B'' est le développement de la grande circonférence C, il reste à montrer que l'arc EE' est celui de la petite. Or ces deux circonférences se contiennent comme SB', SE (F. 25), et les deux arcs B'B'', EE' d'un même nombre de degrés, se contiennent comme les mêmes droites qui sont leurs rayons. Les deux circonférences sont donc entre elles comme les deux arcs, et puisque la grande égale B'B'' en longueur, la petite égale EE'.

PROBL. (*b*): *Tracer, sans projections, le développement d'un tronc de surface conique droite, dont on connaît l'axe et les rayons des bases* (P. XI, F. 26).

Tirez une droite indéfinie SC'; élevez en un point quelconque C', une perpendiculaire C'B' égale au rayon de la grande circonférence; prenez C'C'' égale à l'axe du tronc; menez par C'', une parallèle C''E à C'B' et donnez-lui la longueur que doit avoir le rayon de la petite circonférence; joignez B' à E, par une droite que vous prolongerez jusqu'à la rencontre de C'C''; SB' sera la génératrice droite entière, et SE la partie enlevée. Décrivez donc deux circonférences, du point S, avec les rayons SB', SE, et terminez comme dans le problème de la page 312.

PROBL. (*c*): *Tracer, sans projections, le développement d'un tronc de surface conique droite, dont on connaît la génératrice droite et les rayons des bases* (P. XI, F. 26).

Il faut faire un angle droit G, prendre GB' égal à la différence des rayons donnés; décrire de B', avec la génératrice droite du tronc, un arc qui coupe GE en un point E; porter le grand rayon de B' en C', et mener par C', une parallèle à GE, jusqu'à la rencontre de B'E.

Alors, SB' est la génératrice entière, SE la partie enlevée ; et l'on peut achever comme dans le cas précédent.

PROBL. (*d*) : *Tracer, sans projections, le développement d'un tronc de surface conique droite, dont on connaît l'axe, la génératrice droite et le rayon d'une des bases* (P. XI, F. 26).

Si, par exemple, c'est le grand rayon qui se trouve connu, faites un angle droit C'; portez l'axe sur l'un des côtés, de C' en C'', et le rayon sur l'autre côté, de C' en B'; menez C''E parallèlement à C'B'; de B', avec la génératrice droite, décrivez un arc qui coupe C''E en E; tirez B'E jusqu'à la rencontre de C'C'' et terminez comme dans le problème de la page 312.

APPL. (*a*) : Les tuyaux d'orgue, les seaux et un grand nombre d'autres vases, les voûtes dites *canonnières*, les bonnets que portent les prêtres pendant l'office, les chapeaux d'homme, les deux parties des entonnoirs en verre ou en fer blanc, une foule d'autres produits présentent des troncs de surfaces coniques droites, à deux bases, et quand un tel tronc doit être formé d'une feuille flexible, on l'exécute au moyen de son développement.

APPL. (*b*): La surface extérieure d'un canon de fusil est celle d'un tronc de cône. On le confectionne en *roulant* une lame de fer plus épaisse à un bout qu'à l'autre, dont la forme est à peu près celle d'un trapèze. Cette opération se fait sur une enclume portant une gouttière conique. On soude *par rapprochement* et non *par superposition*, les bords qui ne sont pas parallèles. Il résulte de là que le tronc de cône ne peut avoir des circonférences pour arêtes; mais quand le canon est forgé et dressé, on le rogne par les deux bouts, selon des plans perpendiculaires à son axe. Le forage rend ensuite cylindrique la surface intérieure.

332. Les surfaces coniques à troncatures elliptiques sont souvent employées dans l'art du poêlier. Il faut donc savoir les représenter et les développer.

PROBL. (*a*) : *Dessiner une surface conique droite, à troncature elliptique* (P. XI, F. 27).

Supposons que l'on connaisse l'axe, le diamètre de la base, l'inclinaison de la troncature sur l'axe, la plus grande et la plus petite génératrice droite.

Vous placerez le tronc de manière qu'il repose par sa base sur le plan horizontal, et que le plan de la troncature soit perpendiculaire au plan vertical. Cette position donnera, pour projection horizontale, un cercle A égal à celui de la base. Abaissez de A une perpendiculaire sur la ligne de terre; portez-y l'axe de A' en A''; tirez par A'', une droite BC qui fasse avec A'A'', l'angle que l'axe fait avec le plan de la troncature; menez des tangentes au cercle A, parallèlement à AA'; du point D', décrivez, avec la plus courte génératrice droite, un arc qui coupe BC, et opérez de même en E', avec la plus longue génératrice. Le quadrilatère BCD'E' sera la projection verticale du tronc.

C'est pour que l'ellipse se projette toute entière sur son diamètre BC, qu'il faut en rendre le plan perpendiculaire au plan vertical. Le dessin est ainsi beaucoup plus simple. A la rigueur, la projection horizontale du tronc devrait présenter celle de l'ellipse ; mais comme elle n'est pas utile, on peut se dispenser de la déterminer.

PROBL. (*b*) : *Tracer le développement d'une surface conique droite, à troncature elliptique, dont on a les projections* (P. XI, F. 27 et 28).

Prolongez l'une BE' des génératrices extrêmes, jusqu'à ce qu'elle coupe l'axe A'A''. L'intersection S serait le sommet de la surface conique complète, dont le tronc donné fait partie. Tracez le développement SD'D'' de cette surface, d'après le problème de la page 311, ayant soin de diviser la circonférence A à partir d'un des contacts D, E. Les points de division seront deux à deux sur des perpendiculaires au diamètre DE et à la ligne de terre (93 et 57). Tirez ces perpendiculaires FF'', etc. ; joignez les points F'', etc. au sommet S ; menez, par les intersections G.... de BC et des droites SF''......, des parallèles à D'E' ; prenez les distances SG'...... et portez-les sur les génératrices correspondantes SF''...... du développement, de S, en G..... Les points G appartiendront au développement de l'ellipse, et ce développement sera la courbe CGA''BA''GC', si d'ailleurs vous avez porté SC (F. 27) de S en C et de S en C' (F. 28), puis SB (F. 27) de S en B (F. 28). Par conséquent, le développement du tronc, ouvert selon sa plus courte génératrice CD', présentera la figure plane D'E'D''C'GBA''CD'.

« Voici maintenant les raisons du procédé. Le plan qui passe par FF'' (F. 27) et par le sommet S, coupe le plan vertical perpendiculairement, selon la droite SF'' (271), et prend les deux génératrices droites dont F, F' sont les pieds. Ces deux génératrices ont donc SF'' pour projection verticale. Mais étant égales à SD', SE', elles sont plus longues que SF'', et de même leurs parties comprises entre le sommet S et la troncature BC, sont plus longues que SG. Ce n'est donc pas SG qu'il faut prendre, pour avoir la vraie distance de S aux points G de l'ellipse qui se trouvent sur les génératrices F, F'. »

Concevons par les deux points G un plan horizontal ; il coupera le tronc selon une circonférence dont la projection verticale sera G'G'' parallèle à D'E'. Or, toutes les parties de génératrices droites, comprises entre ce cercle et le sommet S seront égales, et SG', SG'' seront celles de SE', SD', dans leur vraie grandeur. Donc, SG' est bien la distance des deux points G au sommet, et c'est effectivement cette longueur SG' qu'il faut porter sur SF'' (F. 28), de S en G, pour marquer, dans le développement, la position de chaque point G de l'ellipse. »

PROBL. (*c*) : *Dessiner une surface conique droite, à deux troncatures, l'une circulaire, l'autre elliptique.*

La seule différence entre ce cas et celui du probl. *a* (p. 320), c'est que la projection horizontale de la circonférence qui limite le tronc et dont le diamètre est, par exemple, *de* (P. XI, F. 27), se trouverait renfermée dans la projection horizontale de l'ellipse, au lieu de l'entourer. La projection verticale serait le quadrilatère BC*de* et se tracerait comme le quadrilatère BCD'E'.

PROBL. (*d*) : *Tracer le développement d'une surface conique droite, à deux troncatures, l'une circulaire et l'autre elliptique, dont on a les projections.*

Vous suivrez le procédé du problème *b* (p. 321) ; seulement, au lieu de développer une circonférence plus grande que l'ellipse, vous en développerez une qui sera plus petite, telle que celle dont *de*, par exemple, serait diamètre (P. XI, F. 27) ; vous prolongerez les génératrices du développement de la surface conique S*de*, pour y porter les longueurs SB, SC, SG'..., et vous obtiendrez la figure plane *d*CBC'*ed* (F. 28), pour développement du tronc BC*de* (F. 27).

APPLICATIONS : Les problèmes *a* et *b* servent à tracer le contour d'une feuille propre à former un tronc de surface conique droite, qui puisse s'appliquer par sa partie la plus étroite, contre un plan incliné sur l'axe, ou s'ajuster en coude à un tuyau cylindrique et tronqué, d'un diamètre moindre que celui de la circonférence du tronc conique.

« Les problèmes *c* et *d* doivent être employés pour tracer le contour d'une feuille propre à former un tronc de surface conique droite, qui puisse s'appliquer, par sa partie la plus large, contre un plan incliné sur l'axe, ou s'ajuster en coude, à un tuyau cylindrique et tronqué, d'un diamètre plus grand que celui de la circonférence du tronc conique. »

« Les poêliers ont donc besoin de recourir à ces quatre problèmes, pour exécuter les coudes qui leur servent à raccorder des tuyaux cylindriques de diamètres inégaux. (*Voy.* p 326 et 327).

333. Ce qui a été dit du plan tangent à la surface cylindrique, peut se dire aussi de celui de la surface conique (306). Donc, *tout plan tangent à une surface conique renferme une seule génératrice droite et coupe le plan d'une génératrice courbe, selon une tangente à cette ligne.*

Mais, dans le cône droit circulaire, le rayon d'une circonférence n'est jamais perpendiculaire au plan tangent, puisqu'il ne rencontre aucune des génératrices droites sous un angle droit. Néanmoins, le plan qui tournerait autour de l'axe AB (P. XI, F. 9), de manière à le couper toujours au point A, et à faire constamment le même angle BAC avec cet axe, pourrait façonner un corps selon une surface conique droite à laquelle il serait tangent dans toutes ses positions; car il contiendrait toujours une droite qui ferait avec l'axe, l'angle BAC (258), et toutes les génératrices droites d'un cône droit, font aussi un angle constant avec l'axe (323).

Appl. (*a*) : Il suit de là que pour produire une surface conique, on peut employer le procédé de la page 309 (appl. *a*), en circonscrivant à la circonférence un polygone régulier. Tous les triangles qu'on exécutera seront tangens à la surface demandée, et si l'on abat les arêtes en arrondissant, cette surface se trouvera formée et limitée par la circonférence tracée. Ce nouveau moyen est propre à l'exécution d'une surface conique limitée par une circonférence de rayon donné; il est suivi par les charpentiers, les tailleurs de pierres, les serruriers, etc.

Appl. (*b*) : Le cône peut rouler sur un plan, sans cesser de le toucher par une génératrice droite et sans que le sommet change de position, comme le plan peut tourner autour d'une surface conique, sans cesser d'être tangent et de passer par le sommet.

• Ainsi, les meules d'huilier qui, placées de champ sur une table, roulent autour d'un arbre vertical, pourraient être coniques. Les faces planes AB, CD (P. XI, F. 29) seraient alors inclinées et l'axe EF serait oblique sur l'arbre vertical FG. Mais, cette disposition prendrait beaucoup d'emplacement, attendu que la circonférence AB ayant un grand diamètre, il faudrait que la meule fût très-éloignée de l'arbre, pour que le sommet du cône se trouvât en F, sans que l'angle ABD fut très-aigu. D'ailleurs, le point F serait nécessairement le pivot de l'arbre, si la table BF était horizontale; le poids de la meule augmenterait le frottement dans la crapaudine, si l'angle ABD différait beaucoup d'un angle droit; enfin, l'essieu EF ne pourrait pas être assemblé solidement, même quand on placerait le pivot plus bas que le point F. Pour toutes ces raisons, les meules d'huilier sont cylindriques. Il en résulte même un autre avantage : l'arête circulaire HI est obligée, pendant qu'elle roule, de rétrograder en glissant sur la table, vu qu'elle a moins de chemin à faire que l'autre arête circulaire KL et qu'elle possède la même vitesse; de là un frottement de la meule sur la table, lequel est favorable à la trituration des graines.•

Appl. (*c*) : Le cône droit peut tourner sur son axe sans cesser d'être tangent au même plan, selon une droite de position constante (309). Il est donc possible d'aiguiser des tranchans en forme de coin et de polir des surfaces planes sur des meules coniques, aussi bien que sur des cylindres (appl. *d*, p 298).

Appl. (*d*) : L'arbre qui porte les ailes d'un moulin à vent est incliné, et il faut transporter dans un plan horizontal, le mouvement circulaire qui se fait dans un plan incliné perpendiculaire à cet arbre. On emploie pour cela une lanterne conique C (P. X, F. 43) dont l'axe est vertical et qu'on fait engrener avec un rouet D perpendiculaire à l'axe de l'arbre. Le plan de la circonférence du rouet est constamment tangent à une surface conique qui a même axe que la lanterne.

Appl. (e) : Quand les dimensions du tronc de cône droit, terminé par deux circonférences parallèles, ne permettent pas de l'exécuter sur le tour, et que la nature de la matière s'oppose à l'emploi du développement, on le façonne en construisant un grand nombre de plans tangens, comme pour une surface conique entière. Mais il faut qu'avant tout, les centres des deux circonférences données soient placés sur une perpendiculaire à leurs plans.

« Supposons pour exemple qu'il s'agisse de transformer une pierre en tronc de cône. Vous dégauchirez d'abord un parement MN (P. XI, F. 30), puis un autre parement MO perpendiculaire sur MN, puis un troisième parement OP d'équerre sur MO et parallèle à MN. Tracez alors sur MN la grande circonférence A, tangentiellement à l'arête MB; par le point C de contact menez sur MO, une perpendiculaire CD au plan MN, c'est-à-dire une perpendiculaire à l'arête MB et au rayon AC (256); tirez sur OP, par le point D, une perpendiculaire à DO; enfin prenez DE égale à AC. »

« La droite qui joindrait les points E, A, serait parallèle à CD et par suite perpendiculaire aux deux plans MN, OP (261). Si donc du point E, vous décrivez sur OP, la plus petite des circonférences données, et qu'à partir des points F et C vous circonscriviez aux circonférences E, A, des polygones réguliers d'un même nombre de côtés, vous n'aurez plus qu'à former les trapèzes plans contenant les côtés correspondans et parallèles de ces polygones, puis à faire disparaître les arêtes en arrondissant. »

« C'est ainsi que les tailleurs de pierres exécutent les tronçons des colonnes et que les charpentiers construisent les trones des cônes dont sont composés les mâts : c'est aussi de cette manière que les serruriers procèdent, quand les circonférences de la surface conique tronquée doivent avoir des rayons déterminés. »

Combinaisons des surfaces coniques et de la ligne droite.

334. Toute droite tracée dans un plan tangent à une surface conique, par un point de la génératrice droite de contact, est *tangente* à cette surface; elle est aussi tangente à la courbe intersection de la surface et de tout plan coupant qui la contient. Il s'ensuit que le plan tangent renferme les tangentes de toutes les courbes qui peuvent être tracées sur une surface conique, par un des points du contact.

335. Les *normales* d'une surface conique sont les perpendiculaires élevées sur le plan tangent, par les points de la génératrice droite de contact.

Le plan normal est celui qui contient une normale ou qui, perpendiculaire au plan tangent, renferme un des points de contact.

Tout plan qui passe par l'axe d'une surface conique droite, est normal et MÉRIDIEN (310). Cela est vrai, si la tangente au point A de la circonférence B (P. XI, F. 31) est perpendiculaire à la génératrice droite SA ; car la normale AC étant perpendiculaire à cette tangente DE, le plan normal CAS se trouvera perpendiculaire à DE (256); il contiendra, par conséquent, le rayon AB et se confondra avec le plan ASB. Or, SA est en effet perpendiculaire à DE. Soit AD = AE; BD égalera BE (48), et puisque SB est perpendiculaire sur le plan B, SD égalera SE (258). Donc, les angles DAS, EAS sont droits (52).

On doit conclure de là que *toutes les normales d'une surface conique droite coupent l'axe.* Observez toutefois qu'elles ne sont pas, comme dans la surface cylindrique droite, rayons des génératices courbes.

APPLICATIONS : Il faut tracer des normales à une surface conique, pour construire les *anamorphoses* propres à montrer le jeu de la lumière sur les miroirs de cette forme (p. 299, loi), il faut exécuter des plans normaux, quand on façonne les voussoirs d'une trompe dans l'angle ou d'une trompe sur le coin (appl. *b*, p. 315).

Combinaisons des surfaces coniques et des surfaces cylindriques.

Une surface conique et une surface cylindrique peuvent se couper ou se toucher. Quand elles se coupent, leurs axes se confondent, ou se rencontrent, ou se trouvent dans des plans différens, c'est-à-dire qu'ils se croisent sans se couper (266).

336. *Une surface conique et une surface cylindrique qui sont droites et dont les axes se confondent, ont une circonférence pour intersection.*

Si par le point B où se coupent les génératrices droites AS, BC (P. XI, F. 32), on conçoit un plan perpendiculaire à l'axe commun SD, il coupera chacune des surfaces selon une circonférence (327 et 303), et les deux courbes auront même centre E, même rayon EB ; elles se confondront donc, ou plutôt le plan ne donnera qu'une seule circonférence située à la fois sur la surface conique, sur la surface cylindrique, et passant par les intersections de toutes les autres génératrices droites SF, GH, etc.

APPLICATIONS : L'ame d'un fusil est cylindrique, la surface extérieure est conique et ces deux surfaces ont le même axe. Il s'ensuit que si elles étaient prolongées au-delà du plan qui forme la bouche, elles se couperaient selon une circonférence. Il en est de même dans les canons et dans les tours rondes dont la face extérieure a du talus.

« Les bouchons de liége ou de cristal sont coniques. Le goulot d'une bouteille ou d'un flacon est cylindrique, du moins par le haut. La circonférence interne qui termine ce goulot doit donc s'appliquer exactement sur le bouchon, dans tout son pourtour. C'est là ce qui produit une fermeture hermétique. »

337. Dans les deux autres circonstances où une surface conique et une surface cylindrique se coupent, *l'intersection présente une ou deux courbes à double courbure* (312) que la géométrie descriptive apprend à tracer et à développer. Un cas cependant doit être excepté: les axes peuvent se couper de telle manière et le diamètre du cylindre peut être en même temps de telle grandeur, que l'intersection soit une ellipse.

Appl. (*a*) : Les architectes ont à construire des intersections à double courbure, toutes les fois qu'ils font une porte ou une baie cylindrique, dans une tour dont la face extérieure a du talus.

Appl. (*b*) : Les mêmes intersections font aussi partie du travail des peintres de *panoramas*; car cette sorte de peinture n'est autre chose que la perspective des objets de la nature, sur un tableau cylindrique dont l'axe est vertical et passe par la position de l'observateur. Si, par exemple, il s'agit de peindre sur la toile cylindrique, un objet terminé par des courbes, il faut tracer l'intersection d'un cylindre creux et de surfaces coniques qui ont ces courbes pour génératrices et dont le sommet commun se trouve sur l'axe du cylindre, à la hauteur des yeux de l'observateur.

Appl. (*c*) : Les robinets appelés *canelle*, présentent un trou conique qui traverse un canal cylindrique. Les axes des deux surfaces sont d'équerre et les intersections ont double courbure. On donne la forme d'un tronc de cône aux clefs de ces robinets, afin qu'elles ferment bien, sans qu'on ait besoin d'en soigner beaucoup la confection: une légère pression, opérée en tournant, suffit effectivement pour obtenir une bonne fermeture, tandis que la forme cylindrique ne peut empêcher tout *écoulement*, que dans le cas où elle est exécutée avec une extrême précision. Néanmoins, cette dernière forme est employée dans certaines machines à vapeur, dans les pompes à air, et en général pour tous les robinets dont le jeu doit être doux.

« Probl. (*a*) : *Tracer un cylindre droit qui puisse s'ajuster en coude à la troncature d'un tronc de cône droit donné.*

« Faites la projection verticale ABCD du tronc de cône (P. XI, F. 33), et marquez le milieu E de CD, projection de la troncature. C'est à ce point, centre de l'ellipse, que doit aboutir l'axe du cylindre, et le diamètre perpendiculaire à CD, égale celui de ce cylindre. »

« Menez donc par E, FG parallèle à AB; projetez horizontalement la circonférence dont FG est diamètre, puis tirez EH, parallèle à l'axe IS. La demi-corde HK sera le rayon du cylindre demandé, car elle appartient à la fois au cercle FG et à la courbe de troncature.

Il vous restera, par conséquent, à décrire de E, avec HK, un arc de cercle ; à mener par D, une tangente DL à cet arc, et à tirer par E, C, des parallèles EM, CN à cette tangente. Le trapèze CDLN sera la projection du cylindre, et s'il s'agit d'un système de tuyaux, vous pourrez exécuter les développemens des deux parties, au moyen du probl. (*b*), page 295, et du probl. (*d*), page 322. »

« PROBL. (*b*) : *Tracer les projections d'un tronc de cône et d'un tronc de cylindre droits qui puissent s'ajuster en coude, lorque l'on connaît les positions et les rayons des bases.* »

« Soient AB, LN ces bases en projections verticales (P. XI, F. 33). Les axes seront leurs perpendiculaires IS, ME, élevées au milieu, et il s'agira de déterminer le sommet S du cône, de manière que l'ellipse, intersection des deux surfaces, ait son diamètre horizontal égal au diamètre du cylindre, car cette égalité est la condition de l'ajustage. »

« Or, quelle que soit l'ellipse, elle se projette selon un cercle, sur le plan de la base du cylindre, et le cône tout entier se projette sur le même plan, selon un angle dont les côtés sont tangens à ce cercle. Il suffira donc de projeter ainsi, pour déterminer le sommet du cône ; mais comme le plan de la base du cylindre est perpendiculaire au plan vertical, il faudra de plus faire tourner le premier autour de LN, pour le rabattre sur le second et pouvoir y tracer la projection du cône. »

« Décrivez d'abord de M, avec le rayon du cylindre, une circonférence ou seulement la moitié ; vous aurez le rabattement de la courbe d'intersection. Abaissez IO, perpendiculaire sur LN, et portez IP de O en Q ; OQ sera le rabattement de la demi-corde IP, rayon de la base du tronc de cône. Agissez de même pour la demi-corde RT et pour plusieurs autres, perpendiculaires sur AB, comme IP, RT ; vous trouverez autant de points Q, U..... du rabattement de la base du tronc de cône, projetée sur le plan de celle du cylindre. D'ailleurs, les points A, B se projettent en A', B', et par conséquent, la demi-ellipse A'QB' est la projection de la demi-circonférence APB, moitié de la base du tronc de cône. »

« Tracez maintenant une droite qui soit à la fois tangente à la demi-circonférence M et à la demi-ellipse A'QB' ; elle sera la projection de l'une des génératrices droites contenues dans le plan diamétral PIS, et comme LO est la projection de l'axe indéfini du cône, le concours S' de ces deux droites, sera celle du sommet sur le plan de la base du cylindre. Ramenez donc S' sur le plan vertical, en tirant S'S parallèle à IO ; l'intersection de cette parallèle et de l'axe indéfini IS, sera la vraie position du sommet du cône sur le plan vertical ; SA, SB seront les projections verticales des génératrices extrêmes, et leurs intersections D, C avec celles du cylindre, détermineront convenablement la projection CD de l'ellipse commune aux deux surfaces. »

« Les opérations seraient absolument les mêmes, si le diamètre donné AB était moindre que FG. Seulement, on trouverait S' au-dessous de O, et S au-dessous de I. Ce cas se présente dans les tuyaux des poêles en fonte à étages. L'orifice par lequel la fumée sort du dernier compartiment, offre un cylindre plus étroit que le tuyau vertical en tôle, et pour les réunir, il faut employer un cône doublement tronqué qu'on trace au moyen du problème qui vient d'être résolu. »

338. *Une surface conique et une surface cylindrique peuvent ne se toucher qu'en un point.* Ce cas qui se présente rarement dans les arts, a lieu quand une génératrice droite de chacune des surfaces est tangente à une courbe tracée sur l'autre.

Un cylindre en relief ou creux peut être touché selon une génératrice droite par un cône en relief ou creux. Il suffit pour cela que le sommet du cône se trouve sur une génératrice droite du cylindre et qu'une courbe tracée sur la première surface, soit tangente extérieurement ou intérieurement à une courbe tracée dans le même plan, sur la seconde.

Appl. (*a*) : L'émoulage des canons de fusil sur des meules cylindrique, offre un exemple d'un cône tangent extérieurement à un cylindre, selon une génératrice droite commune aux deux surfaces.

Appl. (*b*) : Lorsque les chaudronniers, les ferblantiers et les poêliers ploient une feuille métallique en cylindre, ils frappent à coups de maillet sur une enclume appelée *bigorne* qui est conique et ils parviennent à obtenir ainsi une surface cylindrique, parce que cette surface peut être touchée intérieurement par un cône selon une de ses génératrices droites. Ils pourraient employer aussi une enclume cylindrique; mais comme il leur faut une bigorne pour fabriquer des cônes et pour plusieurs autres travaux, ce serait un instrument de plus et une mise de fonds inutile.

Combinaisons des surfaces coniques entre elles.

Deux surfaces coniques à une seule nappe peuvent se couper ou se toucher ou se contenir sans avoir aucun point de commun.

339. *Quand deux surfaces coniques se coupent, ayant le même sommet* S *et des axes différens* SA, SA', *l'intersection se compose de deux droites* SB, SC, *génératrices de l'une et de l'autre surface* (P. XI, F. 34).

Coupons les deux surfaces coniques par un même plan; nous obtiendrons deux courbes qui se rencontreront nécessairement en deux points B, C, puisque l'un des cônes sort de l'autre après y être entré, et si nous joignons B, C au sommet S, par des droites, ces droites BS, CS se trouveront à la fois sur chacune des surfaces.

Application : Comme une colonne est un tronc de cône, les cannelures qu'on y fait, sont des surfaces coniques creuses et tronquées, dont les sommets se confondent avec celui de la colonne. Lors donc que ces cannelures se coupent, elles forment des arêtes droites, génératrices de la grande surface conique, et il en est encore de même quand elles ne coupent que cette surface.

340. *Si deux surfaces coniques droites se coupent, ayant le même axe, leur intersection est une circonférence.* Cela se démontre comme le principe 336.

Appl. (*a*): Deux surfaces coniques se trouvent dans les circonstances spécifiées ci-dessus, quand on construit une tour qui a du talus à l'intérieur comme à l'extérieur. Alors, l'intersection ABCA est située entre les sommets S, S' (P. XI, F. 35).

Appl. (*b*) : Les faces qui se regardent dans les deux meules d'un moulin à farine, sont ordinairement des surfaces coniques droites qui ont pour axe commun, celui de l'arbre sur lequel tourne la meule supérieure, et qui se couperaient selon une circonférence, si elles étaient prolongées au-delà des bords des deux pierres. Il faut qu'il en soit ainsi pour la mouture du blé; car les grains tombent entre les meules A, B (P. XI, F. 36), par un trou pratiqué dans la meule supérieure A, autour de l'arbre CD; arrivés là, ils roulent sur la surface inclinée de la meule inférieure, et l'écartement des pierres leur permet de s'étendre en couche mince circulaire d'un assez long rayon ; d'où il suit qu'un grand nombre de grains sont écrasés à la fois.

« Si la face supérieure de la meule fixe B était horizontale, ou si les pierres étaient suffisamment rapprochées pour que le blé se trouvât comprimé, au moment même de sa chute, il resterait autour de l'arbre jusqu'à ce qu'il fût concassé ; l'écrasement n'aurait d'abord lieu que sur une très-petite circonférence; le moulin ferait peu de travail, et la farine, qui mettrait beaucoup de temps pour arriver au bord de la meule fixe, pourrait s'échauffer. »

« Ce qui pousse constamment vers le bord, la farine et les grains, c'est *la force centrifuge* que leur communique la rotation de la meule supérieure : cette force tend toujours à écarter un corps tournant, du centre du mouvement circulaire. Comme elle est d'autant moins grande que la rotation est moins rapide, elle produit peu d'effet vers l'arbre, et la farine cheminerait d'abord fort lentement, si elle était produite à l'endroit même où tombent les grains. Il y aurait donc alors deux raisons pour qu'elle s'échauffât : plus de chemin à parcourir et moins de vitesse au commencement du trajet. »

« Ainsi, pour rendre le travail d'un moulin aussi grand qu'il peut être et pour en obtenir de bonne farine, il est nécessaire de disposer les choses de telle façon que les grains puissent d'abord cheminer librement, et qu'ils entrent ensuite dans un espace de plus en plus resserré où ils soient écrasés peu à peu. Cela fait voir qu'il ne faut pas tailler les meules à blé, de manière qu'une règle s'applique sur les faces écrasantes, dans toute la longueur des diamètres : l'application ne doit avoir lieu que des centres E, F, à tous les points des bords circulaires, par exemple selon les rayons EG, FH. »

341. *Quand les sommets ni les axes ne se confondent, deux surfaces coniques droites se coupent généralement selon une ou deux courbes à double courbure* (312), que la géométrie descriptive apprend à tracer et à développer.

Mais, *si deux surfaces coniques droites sont superposables et que les axes se coupent à la même distance de chaque sommet, la courbe commune est plane.* Ce cas en présente trois autres :

1° *L'intersection est une ellipse, lorsque les axes se coupent entre les bases et les sommets, et qu'il n'y a point de génératrices droites parallèles.* La courbe se projette sur le plan des axes, selon une droite BC (P. XI, F. 37) dont l'extrémité B est le croisement des génératrices SD, S'D', et l'extrémité C, celui des génératrices SC, S'C. Quant à SD, S'C, elles ne se coupent point, n'étant pas dans le même plan : S'C passe derrière la surface conique S, et sa partie ponctuée est celle qui se trouve invisible. Il en est de même pour S'D, et SC.

2° *L'intersection* BC *est une parabole, lorsque les axes se coupent entre les bases et les sommets, et qu'en même temps deux génératrices droites opposées sont parallèles* (F. 38); car SD, S'D' ne pouvant se rencontrer, doivent être parallèles au plan de l'intersection (327).

3° *L'intersection* BC *est une hyperbole, lorsque les axes sont parallèles* (F. 39), *ou lorsque les sommets se trouvent entre les bases et le concours des axes* (F. 40). Dans aucune de ces deux circonstances, les génératrices opposées SD, S'D' ne sauraient être parallèles, ni se rencontrer entre les bases et les sommets (323). Leurs concours a lieu nécessairement en un point commun aux deux autres nappes des surfaces coniques, et c'est l'intersection de ces nappes qui forme la seconde branche de l'hyperbole (329).

Ces principes trouvent parfois leur application, dans la coupe des pierres, la ferblanterie et la chaudronnerie.

342. *Deux surfaces coniques peuvent se toucher par un seul point ou par une génératrice droite.* Ces cas se présentent dans les mêmes circonstances que ceux du n° 338.

Applications : La première espèce de ces contacts est peu usitée dans les arts; c'est le contraire quant à la seconde. On s'en sert pour transmettre à un axe, par frottement ou par engrenage, le mouvement circulaire qui se fait autour d'un second axe, dans le cas où celui-ci n'est ni parallèle ni perpendiculaire au premier.

« Si par exemple, les axes des arbres AB, AC de deux roues coniques (P. XII ; F. 1), se rencontrent en un certain point A, et que ces roues D, E frottent ou engrènent l'une sur l'autre, selon la génératrice de contact FG, la rotation imprimée à la roue D se communiquera à la roue E. Cette sorte de transmission du mouvement circulaire, se rencontre très-fréquemment dans les machines : les roues coniques y portent le nom de *roues d'angle*.

343. *Deux surfaces coniques droites à une seule nappe, dont les génératrices droites sont parallèles et dont les axes se confondent, sont à la même distance dans tous leurs points, les sommets exceptés, et l'une est entièrement contenue dans l'autre.*

La distance des points B, C, par exemple (P. XII, F. 2), est la différence BC des deux normales AB, AC, et il est assez visible que cette différence est partout la même, puisqu'il s'agit de surfaces de révolution (322). Quant à la distance SS' des sommets, qui est oblique sur SB, elle doit être plus grande que la perpendiculaire S'D, différence des normales (46).

Il suit de là que, si une surface conique droite, en relief, a même axe et même sommet qu'une autre surface conique droite et creuse, la première pourra tourner dans la seconde, sans cesser de la toucher par tous ses points, si de plus les deux génératrices droites font le même angle avec l'axe.

Appl. (*a*) : Les chapeliers appliquent cette propriété, quand ils façonnent des feutres sur des formes en tronc de cône.

Appl. (*b*) : Le jeu des robinets coniques repose sur la même propriété. Un tronc de cône plein A (P. XII, F. 3) est logé dans un tronc de cône creux de même sommet S, de même axe SB et de même génératrice courbe B. Un canal CD est interrompu par le tronc de cône creux dans lequel il débouche par les orifices E, F. Enfin, le cône plein est percé d'un trou G, selon le diamètre de l'une de ses génératrices courbes. Quand ce trou a la position que présente la figure ; c'est-à-dire quand son axe est perpendiculaire à celui du canal, la liqueur contenue dans la partie CE ne peut s'écouler, puisque les deux surfaces coniques s'appliquent exactement l'une sur l'autre, dans tous leurs points. Mais, si l'on fait faire un quart de tour à la *clef* A, le trou G se trouve alors dans la direction du canal CD, il continue ce canal, et la liqueur sort par l'orifice H.

Appl. (*c*) : Les soupapes coniques qui parfois remplacent les robinets, sont fondées sur ce que deux surfaces coniques droites peuvent s'appliquer l'une sur l'autre dans tous leurs points, quand elles ont même sommet, même axe et les mêmes circonférences. Le tronc de cône plein A (P. XII, F. 4) ayant la position BCDE remplit le tronc de cône creux qui établit communication entre les deux parties du tuyau FG, et rien ne peut plus passer alors de la partie inférieure G dans la partie supérieure F. Mais si, par un moyen quelconque, on élève un peu la *clef* A, l'air ou l'eau qui tend à passer de G dans F, s'élève par l'intervalle que laissent entre eux le cône plein et le cône creux. Il ne faut ensuite qu'abandonner la clef à l'action de son propre poids, pour refermer de nouveau l'orifice BCDE.

Surfaces développables.

344. Toute surface courbe qui peut devenir plane ou s'étendre sur un plan, sans se rompre et sans former aucun pli, est dite *surface développable*. Une surface courbe ne saurait jouir de cette propriété ou ne saurait être développable, si sa génération ne permet pas de la regarder comme composée de facettes planes extrêmement étroites qui aient deux à deux un côté commun ; car le développement exige que chaque portion de cette surface se rabatte sur le plan de la portion voisine, en tournant autour d'une droite considérée comme charnière (301). Or, il faut pour cela, que la surface courbe soit réglée et que ses génératrices droites soient parallèles ou concourent au moins deux à deux.

Les surfaces cylindriques sont dans le premier cas et les surfaces coniques dans le second : il est vrai que les génératrices droites de ces dernières concourent toutes au même point, mais ce n'est là qu'une circonstance particulière.

Toutes les fois qu'une surface est engendrée par une droite qui chemine de manière que deux positions voisines quelconques se coupent, et en s'appuyant constamment sur deux lignes courbes non situées dans le même plan, cette surface est développable, puisqu'elle peut être regardée comme composée de triangles accolés et très-étroits. Réciproquement, une surface plane s'y applique en se courbant et la couvre dans toute son étendue.

Applications : Il n'est pas rare que le chaudronnier, le cartonnier, le carossier, etc., aient à construire des surfaces développables autres que celles des cylindres et des cônes. Supposons pour reconnaître la manière dont ils doivent opérer, qu'il s'agisse de limiter par une surface développable, un corps auquel on veut donner une circonférence A pour arête supérieure (P. XII, F. 5) et une courbe BCD pour arête inférieure.

« Il faut d'abord circonscrire deux polygones d'un même nombre de côtés, l'un à la circonférence A, l'autre à la courbe BCD, et tels que tout côté du premier se trouve dans un même plan avec le côté de même rang du second ; on exécute ensuite les quadrilatères plans EFGH, etc. formés par ces côtés et par les droites qui joignent leurs extrémités correspondantes ; puis, on abat les arêtes EF, GH, etc., intersections de ces quadrilatères, ce qui en produit d'autres qu'on abat encore, et l'on continue ce travail, jusqu'à ce que le nombre des plans tangens à la surface développable, soit assez grand, pour que leur ensemble puisse être regardé, sans erreur sensible, comme une surface courbe. »

» Il est visible, d'après cela, que pour exécuter la même surface avec des feuilles métalliques ou autres, il faudrait les découper en quadrilatères étroits et tels que ceux de leurs côtés qui s'appliqueraient tangentiellement à la courbe BCD, enveloppassent tout-à-fait cette courbe, quand les côtés opposés envelopperaient la circonférence A. »

345. *Un plan qui entre dans une surface développable par une génératrice droite, n'en sort pas toujours par une autre*, puisque ces génératrices peuvent ne se couper que deux à deux ou ne se trouver que deux à deux dans un même plan.

Un plan est tangent à une surface développable, quand il n'a de commun avec elle qu'une seule génératrice droite. Une droite qui rencontre celle-là, est tangente à la surface, si elle est contenue dans le plan tangent, et normale, si elle est perpendiculaire à ce même plan.

Surfaces gauches.

346. Pour terminer l'étude des surfaces courbes réglées, nous n'avons plus à nous occuper que du cas où les génératrices droites ne sont ni parallèles ni concourantes, c'est-à-dire du cas où deux positions voisines quelconques de la génératrice droite ne sont point dans un même plan. On dit alors que la surface est *gauche*.

Une surface gauche est engendrée par une droite qui se meut sur trois lignes quelconques, telles pourtant qu'un même plan ne puisse les couper chacune en deux points très-voisins, de manière que les six intersections se trouvent sur deux lignes droites. La droite mobile porte le nom de *génératrice*; les lignes qui dirigent le mouvement sont appelées *directrices*; elles ne peuvent pas toujours engendrer la surface.

Ainsi, les génératrices d'une surface gauche sont des droites qui se croisent sans se rencontrer (266). Quant aux directrices, elles peuvent être toutes des droites, toutes des courbes, ou bien les unes sont droites et les autres sont courbes. Quelquefois aussi, une condition à laquelle doit satisfaire la position de la génératrice, remplace une des directrices qui ne sont plus alors qu'au nombre de deux. Enfin, des surfaces peuvent être substituées aux courbes, pour diriger le mouvement.

Appl. (*a*) : Les ailes des moulins à vent seraient des exemples de surfaces gauches à trois directrices droites, si d'ordinaire elles n'étaient légèrement courbées vers le vent, comme on le voit en A (P. XII, F. 6). Mais pour un moment, supposons nulle cette petite courbure. L'aile est alors une surface gauche dont les directrices sont les trois droites BC, DE, FG, ou bien une échelle à trois montans qui ont cessé d'être parallèles, ainsi que les échelons. Ces derniers en outre ne sont plus tous de même longueur; mais ils continuent d'être perpendiculaires à DE qu'on appelle le *volant* de l'aile, et pris à la même distance des points D, E, ils sont encore égaux deux à deux.

« Les échelons extrêmes BF, CG ont des positions déterminées d'où résultent celles des autres : le premier fait un angle de 60° avec la direction du vent ou avec celle de l'arbre HI ; le second, un angle de 84° avec la même direction, et leur distance DE est de 13 mètres, environ 40 pieds. De là suit que le courant d'air tend à exercer d'autant plus d'effort sur l'aile, qu'il agit selon un échelon plus éloigné de l'arbre. Mais comme d'un autre côté, l'extrémité CG tournant bien plus rapidement que BF, échappe davantage à l'action du vent, il en résulte à peu près compensation et l'air fait le même effort partout, ce qui préserve le volant de toute rupture dans les cas ordinaires. Ainsi, cette application des surfaces gauches, est loin d'être de pure fantaisie : elle est nécessitée par la nature des choses, elle donne bien plus de force à la machine. »

« L'aile de moulin à vent est un exemple bien propre à faire sentir la supériorité de la méthode des projections sur la perspective (p. 316). La figure BFGC ne montre qu'un quadrilatère qui peut être la perspective d'une surface plane et dans lequel rien n'indique qu'il est celle d'une surface gauche. Si au contraire on fait les projections de l'aile, on aura par exemple, pour projection horizontale, le rectangle ABCD (P. XII, F. 7), et pour projection verticale, les deux triangles A'B'E, C'D'E, figures que ne peut donner à la fois aucune autre surface. Ainsi, le dessin ne saurait déterminer, ou décrire rigoureusement les formes des corps, qu'en présentant leurs projections. »

Appl. (*b*) : Les versoirs ou oreilles des charrues sont des surfaces gauches analogues à celles des ailes de moulin à vent : elles ont pour directrices une horizontale perpendiculaire à la direction du sillon, et une droite inclinée, située dans un plan vertical parallèle à l'horizontale. La génératrice reste constamment parallèle à un plan incliné qui coupe le sol parallèlement au sillon.

Appl. (*c*) : Certaines corbeilles, certains vases nous présentent une surface gauche (P. XII, F. 8) engendrée par une droite AB qui se meut sur trois circonférences parallèles C, C', C''. La première et la dernière peuvent avoir même rayon ; celui de la seconde C', est plus petit que chacun des deux autres. Les trois centres sont sur une même droite CC'' qui est perpendiculaire aux plans des cercles, que la génératrice ne rencontre jamais et autour de laquelle chacun de ses points décrit une circonférence parallèle aux directrices : CC'' est donc l'axe de la surface gauche.

« On peut supprimer la directrice C' et la remplacer par cette condition, que la distance de la génératrice à l'axe, soit toujours la même, ou par cette autre équivalente, que la génératrice fasse un angle constant sur le plan du cercle C, par exemple. »

« Une propriété qui est particulière à la surface engendrée de l'une ou de l'autre manière, c'est qu'elle peut être produite par deux droites différentes assujetties aux mêmes conditions. Seulement, l'une AB s'incline dans un sens en tournant autour de l'axe, tandis que l'autre *ab* s'incline dans le sens opposé. La plus courte distance de chacune de ces génératrices à l'axe CC'' est la même, d'où il résulte qu'il y a toujours deux de leurs positions qui se coupent en un point D de la plus petite des circonférences qu'on puisse tracer sur la surface. Cette circonférence C' peut donc être regardée comme engendrée par le point d'intersection D des deux génératrices : on l'appelle *la gorge.*»

« Les vanniers, dans leurs corbeilles à surface gauche, figurent par des baguettes d'osier, les deux systèmes de génératrices droites, la gorge et au moins deux des autres cercles parallèles.»

« Enfin, la même surface gauche qui, comme on voit, est réglée dans deux sens différens, peut être engendrée aussi par une branche d'hyperbole (329) tournant autour de l'axe, de manière que le point d'origine H (P. XI, F. 16) décrive la gorge et que HH' soit perpendiculaire à CC'' (P. XII, F. 8). C'est pour cela qu'on l'appelle *hyperboloïde de révolution.* »

« Un hyperboloïde de révolution a donc trois génératrices : deux droites qui diffèrent de position et la courbe AEF. Il pourrait être encore engendré par un cercle C dont le centre s'élevât le long de l'axe, qui restât toujours perpendiculaire à cet axe et dont le rayon diminuât, puis augmentât selon une certaine loi. Il serait donc possible d'exécuter un hyperboloïde sur le tour; mais il faudrait pour cela que le guide de l'outil fût une hyperbole placée dans le même plan que la ligne des pointes et de telle sorte que EC' se trouvât perpendiculaire à cette ligne. »

Appl. (*d*) : La petite voûte qu'on forme au-dessus de l'ébrasement ABCD (P. XII, F. 9) dans lequel s'ouvrent les portes rondes, et qu'on appelle *arrière-voussure de Marseille*, est une surface gauche dont les directrices sont la demi-circonférence (AB, A'EB'), un arc de cercle (CD, C'FD') et l'axe de la voûte cylindrique, axe qui est horizontal et dont les projections sont (GH, G'). Cette sorte de surface gauche est nommée *conoïde*, et il en est de même de toutes celles qui ont une seule directice droite, parce qu'elles ont quelque analogie avec la surface conique.

« Nous ferons remarquer que les deux génératrices qui passent par des points tels que I, K, situés à la même hauteur sur la demi-circonférence, vont se couper au même point de l'axe directeur; cela n'empêche pas la surface d'être gauche, attendu que ces points I, K sont séparés par un grand nombre d'autres. Il y a bien dans la voûte une petite facette plane, partagée en deux parties égales par EF, mais elle est la seule et extrêmement étroite. »

Appl. (*e*) : La halle au blé de Paris est une tour formée par deux murs cylindriques à l'intérieur, coniques à l'extérieur (P. XII, F. 10), et cette tour est percée de plusieurs arcades qui vont en se rétrécissant du dehors au dedans. Comme ces arcades devaient avoir la même hauteur dans toute leur longueur, on n'a pu les faire coniques : ce sont des conoïdes qui ont tous pour directrice droite, une verticale passant par le centre A du plan de l'édifice, pour génératrice, une horizontale AB, AB', et pour directrice courbe, une demi-circonférence verticale et perpendiculaire à l'axe AC de la voûte. La droite DE représente la projection horizontale de cette demi-circonférence.

Appl. (*f*) : Le dessous d'un escalier tournant à *noyau* ou à *jour* est souvent encore un conoïde ; car cette surface gauche a ordinairement pour génératrice, une horizontale qui s'appuie constamment sur une verticale et sur une courbe particulière, laquelle s'élève en tournant. Cette courbe est nommée *hélice*, ses propriétés et son tracé seront exposés dans la géométrie des courbes. On l'appelle aussi *spirale cylindrique* et de là vient que le conoïde de l'escalier est dit *surface spirale gauche*.

Appl. (*g*) : Quelquefois, la génératrice d'une surface gauche d'escalier, au lieu de couper une verticale, doit toucher un cylindre dont l'axe est vertical. On n'a plus alors un conoïde, mais on n'en a pas moins une surface gauche spirale.

Appl. (*h*) : La vis d'Archimède qu'on emploie pour élever les eaux, est une surface gauche de la même espèce que la surface spirale d'un escalier *en tour ronde*, à directrice droite, c'est-à-dire d'un escalier dont le noyau ou le jour est un cylindre circulaire.

« On en doit dire autant des deux surfaces gauches que présente une vis à filet carré. Quant à celles d'une vis à filet triangulaire, ce sont des surfaces spirales gauches d'une autre nature, attendu que la génératrice n'est pas perpendiculaire à la directrice droite qui est l'axe de la vis : elle fait toutefois un angle constant avec cet axe. »

Appl. (*i*) : Le cône sur lequel s'enroule la chaîne d'un montre, offre une sorte de rampe tournante qui est encore une surface spirale gauche, ayant pour génératrice une perpendiculaire à l'axe du cône. Cet axe est la directrice droite, et la directrice courbe est une *spirale conique*, c'est-à-dire une hélice tracée sur le cône.

« Il y a bien d'autres surfaces gauches que celles qui viennent d'être citées, mais elles n'ont pas autant d'intérêt pour l'industrie. »

347. *Deux surfaces gauches peuvent se couper selon une droite.* Considérons deux conoïdes dont les directrices soient deux demi-circonférences ABC, A'B'C' (P. XII, F. 11), concentriques ou non, mais n'ayant aucun point de commun, quoique situées sur le même plan. Soit DE, parallèle à ce plan, la directrice droite commune des deux surfaces gauches, et supposons que les génératrices soient constamment perpendiculaires à DE. Des plans perpendiculaires à cette droite couperont les deux surfaces, selon quatre génératrices, par exemple, le plan passant par AC, donnera les droites AD, CD, A'D, C'D qui se couperont au point D, trace de DE sur le plan; un plan qui passerait par FG, donnerait les droites FH, GH, F'H G'H, aboutissant toutes au point H. Il est visible d'après cela, que

les deux surfaces gauches se couperaient selon la droite DE, et que la vraie longueur de l'intersection serait DI, comprise entre D et le point où DE est rencontrée par la perpendiculaire abaissée de B'.

Nous nous bornerons à cet exemple, parce que les intersections des surfaces gauches ne sont pas très-utiles aux arts et que la géométrie descriptive enseigne à les construire dans tous les cas.

348. *Deux surfaces conoïdes ne se trouvent pas équidistantes, quand leurs directrices courbes le sont* (P. XII, F. 11); car les deux génératrices FH, KL qui passent par les extrémités F, K de deux rayons correspondans, ont pour plus courte distance HL (317); d'où il suit qu'à partir de la directrice, DE, elles vont en s'écartant de plus en plus. Il en résulte que dans une voûte conoïde, *l'extrados* ne peut pas être un autre conoïde, quand tous ses points doivent se trouver à la même distance des points correspondans de *l'intrados*.

349. Il est visible que *deux surfaces gauches peuvent être appliquées l'une sur l'autre dans toute leur étendue, ou placées de façon qu'elles soient équidistantes*, si les directrices se trouvent égales, si elles sont placées de la même manière les unes par rapport aux autres dans les deux surfaces, et que les mouvemens des génératrices se fassent selon la même loi.

Or, les conditions ci-dessus sont remplies, quand on trace sur un cylindre creux, une spirale parfaitement égale à celle qui se trouve tracée sur un cylindre plein de même rayon; que les deux axes de ces cylindres sont pris pour directrices droites, et que les génératrices sont assujeties à faire un seul et même angle avec chacun de ces axes, pendant tout leur mouvement.

Par conséquent, la surface de vis qui sera produite en saillie autour du cylindre en relief (p. 336), pourra s'appliquer dans toute son étendue, sur la surface de vis qu'on formera en creux dans l'autre cylindre. Le filet saillant d'une vis peut donc s'appliquer sur le filet rentrant de l'écrou. De plus, l'un peut tourner sur l'autre, si les spirales sont telles qu'une partie quelconque puisse se superposer sur toutes les parties restantes des deux courbes; car alors où passera, où s'appliquera cette partie, les autres pourront passer et s'appliquer, pendant la rotation, et il en sera de même des portions correspondantes de filet saillant ou rentrant.

Surface sphérique.

350. La plus simple de toutes les surfaces courbes non réglées, c'est celle de la boule ou *sphère*, comme disent les géomètres. On la nomme *surface sphérique*. Elle est engendrée par une demi-circonférence ABC (P. XII, F. 12) qui tourne autour de son diamètre AC.

Comme tous les points de la génératrice sont à la même distance du centre D (5), et que ces distances ne pouvent changer pendant la rotation, *les points d'une surface sphérique sont tous également distans d'un point* D *qui pour cela est nommé* CENTRE *de la sphère.*

Donc, *il y a égalité entre tous les rayons menés du centre* D *à des points de la surface sphérique.*

Il s'ensuit que la droite qui va d'un point de la surface à un autre, en passant par le centre, est double du rayon. Cette droite étant nommée diamètre, comme pour le cercle, il est clair que *tous les diamètres d'une sphère sont égaux.*

PROBLÈME : *Dessiner une sphère de rayon donné* R (P. XII, F. 12).

Les deux projections doivent être des cercles de rayon R, car les lignes projetantes formeraient évidemment des cylindres droits, qui auraient ce rayon et seraient coupés selon des génératrices courbes par les plans de projection (303).

Décrivez donc d'un point D quelconque, pris sur le plan vertical, une circonférence dont R soit le rayon ; abaissez DC perpendiculairement à la ligne de terre, et d'un point D' de cette perpendiculaire décrivez sur le plan horizontal, une seconde circonférence, avec le même rayon. L'ensemble des circonférences égales D, D' et de la droite DD' formera le dessin complet de la sphère dont il s'agit.

351. Tous les points B, E, F, etc. de la génératrice d'une sphère (P. XII, F. 12) décrivent, pendant la rotation de ABC, des circonférences dont les centres se trouvent sur l'axe AC, et dont les diamètres inégaux sont BG, EH, FI perpendiculaires à AC (p. 265). Ainsi la surface sphérique est composée de circonférences parallèles et inégales. La plus grande a son centre au centre même de la sphère, son rayon BD est le même que celui de la génératrice, et par conséquent, elle est égale à cette génératrice. Les autres deviennent de plus en plus petites, à mesure que leurs centres se rapprochent des extrémités de l'axe de rotation ; elles finissent même par se réduire à deux points A, C.

On voit donc que la surface sphérique peut être engendrée par un cercle BDG qui se meuve perpendiculairement à une droite AC, de manière que son centre ne quitte jamais cette directrice et que son diamètre BG décroisse selon une loi telle qu'il se trouve réduit à un point, quand le centre a parcouru de chaque côté de D, une longueur égale à la moitié de BG.

APPL. (*a*) : Voici comment le tourneur pourrait mettre à profit cette seconde génération. Il placerait entre les deux pointes du tour, le corps A, dont il veut former une boule (P. XII, F. 13) ; puis il disposerait un guide en demi-cercle BFC, de manière que le diamètre BC fût parallèle à l'axe de rotation DE et que le plan de ces deux parallèles contînt la demi-circonférence. Il appliquerait l'outil d'abord en B et le dirigerait perpendiculairement à DE, jusqu'à ce que l'extrémité fût arrivée très-près de D : il ne laisserait autour de ce point que ce qu'il faudrait de matière pour que la pointe soutînt le corps A. Plaçant ensuite l'outil en un second point

F voisin du premier, il le dirigerait comme précédemment et s'arrêterait quand cet outil dépasserait F d'une longueur FG égale à la distance de BC à DE. Enfin, il opérerait de la même manière, à tous les autres points du guide circulaire, et il ne lui resterait plus qu'à enlever ce qu'il aurait laissé de matière autour des points D, E.

« Un tel procédé est analogue au tricage (p. 68) : comme les droites BD, FG, HI, KL, etc. sont des parallèles égales, la courbe DGILE est égale et semblable à la demi-circonférence du guide. De plus, puisque FG égale F'G', GG' est de même longueur que FF', et par conséquent, la circonférence de rayon GG' tracée par l'outil sur le corps, égale celle que décrirait F autour de BC. Les circonférences parallèles exécutées croissent donc et décroissent, comme feraient celles d'une sphère engendrée par la révolution du guide autour de son diamètre. Le corps A est donc transformé en boule »

Appl. (*b*) : Il est encore une autre manière d'exécuter une sphère sur le tour : elle est fondée sur les principes du n° 350. Prenez pour guide une demi-circonférence quelconque ABC (P. XII, F. 14) et placez-la de façon que son diamètre se confonde avec la ligne AC des pointes. Posez l'outil en un point B, par exemple; puis dirigez-le perpendiculairement au guide, c'est-à-dire perpendiculairement à la tangente DE : il ne faut pour cela qu'attacher à cet outil, une règle DE qui le croise à angle droit, et appliquer le point commun B contre le guide. La direction BF de l'outil passera alors par le centre G de ABC (106), et quand l'extrémité F dépassera B d'une longueur égale à la différence du rayon de ABC, au rayon de la sphère demandée, cette extrémité décrira, par suite du mouvement du tour, un cercle perpendiculaire à AC, dont tous les points seront à la distance requise du centre G de la surface sphérique. Opérant de la même manière au point B' et à tous les autres points du guide, vous couvrirez le corps de circonférences perpendiculaires à AC et toutes situées à une distance FG du centre G; par conséquent, ce corps sera rendu sphérique.

Appl. (*c*) : L'industrie produit des sphères au moyen de moules. Les balles de plomb, les boulets, les obus, les bombes, qui sont des sphères pleines ou creuses, se font ainsi. Le plomb qu'il s'agit de convertir en balles, est coulé dans des moules à deux branches renfermant chacune une rangée de demi-sphères creuses : les branches étant rapprochées jusqu'au contact, les demi-sphères forment des sphères entières. Observez toutefois que ces sphères doivent avoir un diamètre de quelque peu plus grand que celui des balles, attendu que le plomb prend du retrait en se figeant.

« Pour fabriquer les boulets, on coule de la fonte liquide ou dans des moules en sable formés sur un modèle, ou dans des moules en fer composés de deux *coquilles*, qui sont à peu près des demi-sphères creuses. Mais les moules en sable sont aujourd'hui presque abandonnés, parce qu'ils produisent une surface sphérique très-raboteuse qui ne peut pas toujours être rendue suffisamment lisse, par le *battage* que subissent les boulets à leur sortie du moule. »

« Les diamètres d'une coquille ne sont pas égaux : celui qui répond au trou par lequel la fonte est introduite, est plus petit que les autres, bien qu'il soit un peu plus grand que le diamètre du boulet refroidi. Il en doit être ainsi, parce qu'il est de fait que la fonte prend un peu plus de retrait dans le sens horizontal, que dans le sens vertical. »

« On coule les bombes et les obus dans des moules en sable, au milieu desquels se trouve soutenu un *noyau* en terre, destiné à former le creux et l'*œil* de cette sorte de projectiles. »

« Les balles de fer qui composent ce qu'on appelle vulgairement la *mitraille*, sont des sphères forgées. On bat le fer rouge sur une étampe en acier trempé qui présente une demi-sphère creuse, d'un diamètre un peu plus grand que celui de la balle, et le marteau frappe sur une seconde étampe emmanchée. Le creux de celle-ci n'est pas une demi-sphère complète, afin que le forgeron puisse saisir la balle et la tourner dans tous les sens : sans cela, elle ne deviendrait pas parfaitement sphérique.

LOIS DE LA NATURE : La température primitive de la Terre était si élevée, que toutes les matières s'y trouvaient fluides. Aujourd'hui même la partie centrale est encore plus chaude qu'il n'est besoin, pour maintenir en fusion les pierres et les métaux. Les particules de la surface ont donc dû, dès le principe, se placer toutes à la même distance du point unique vers lequel les poussait la gravité (p. 196), et par conséquent, la Terre a pris une forme sphérique (350).

« Mais, de ce que tout corps tournant tend à s'échapper par la tangente de la circonférence qu'il parcourt (p. 319), il résulte que des corps mobiles, placés sur une sphère, qui ne peuvent fuir et qui se meuvent rapidement autour d'un axe, s'arrangent de telle sorte que la sphère s'aplatit un peu vers les extrémités de l'axe et se renfle dans le milieu. Ce fait est assez facile à vérifier : il ne faut pour cela que faire tourner avec rapidité un cercle flexible, autour d'une broche servant de diamètre ; on verra bientôt le cercle se déformer en s'aplatissant vers son axe. »

« Or, la Terre tourne, et certains points de sa surface tournent fort vite (p. 16) ; chacune de ses particules fluides est retenue par la gravité et ne peut s'échapper ; ce globe a donc dû devenir une sphère aplatie dans le sens de son axe de rotation, et renflé dans tous les sens perpendiculaires à celui-là. Telle est en effet sa forme, comme le prouve une multitude d'observations. »

« Peut-être aurez-vous quelque peine à vous représenter rond, un corps couvert de si hautes montagnes ; mais apprenez que la plus élevée de ces montagnes n'a pas en hauteur la millième partie du diamètre de la Terre, qui est de 3,000 lieues, et qu'elle n'est pas pour notre globe, ce que sont pour une orange, les inégalités qu'on voit sur l'écorce : la Terre, malgré ses montagnes, est donc pour le moins aussi ronde qu'une orange. »

« Il résulte de la forme du globe terrestre, que les corps placés à la surface, vers les extrémités de l'axe, extrémités qu'on nomme les *pôles*, sont plus voisins que les autres, du point milieu ou centre. Ces corps doivent donc y tendre plus fortement, que s'ils étaient en tout autre lieu (p. 194) : notre kilogramme, par exemple, y serait plus lourd pour le bras de l'homme, qu'il n'est ici. »

« La forme sphérique n'est pas particulière à la Terre : le Soleil, la Lune et toutes les étoiles sont aussi des sphères un peu déformées, parce que ces corps ont en eux la gravitation et qu'ils tournent sur un axe (p. 16).

Combinaisons de la surface sphérique, du plan et de la ligne droite.

352. *L'intersection d'une surface sphérique et d'un plan est toujours une circonférence.*

Soit un plan qui passe par la droite EH (P. XII, F. 12) ; nous pourrons abaisser du centre D de la sphère, une perpendiculaire DK sur ce plan, et regarder la surface sphérique comme engendrée par la révolution de la demi-circonférence ABC autour de AC prolongement de DK (350). Or, tous les points de cette courbe décriront des cercles perpendiculaires à AC, et un de ces cercles se trouvera nécessairement dans le plan EH. Donc, la section faite par ce plan, est une circonférence qui a pour centre, la trace de la perpendiculaire abaissée du centre de la sphère.

353. On appelle *grand cercle* d'une sphère, toute circonférence tracée sur la surface et d'un rayon égal à celui de la génératrice. Les circonférences d'un rayon moindre qui peuvent être décrites sur la même surface, sont nommés *petits cercles.*

Donc, d'après le principe 350, *tout plan qui passe par le centre d'une sphère, en coupe la surface selon un grand cercle.*

Quand le plan coupant ne passe pas par le centre, il donne un cercle d'autant plus petit, qu'il en est plus éloigné.

354. *Deux grands cercles se coupent en parties égales*, car deux plans quelconques, menés par AC et par LM (P. XII, F. 12), se couperont selon une droite qui, passant par D, sera tout à la fois diamètre de la sphère et diamètre de chacun des grands cercles sections des plans (25).

Il suit de là que *tout grand cercle partage la surface sphérique en deux parties égales qui peuvent se superposer.*

On nomme *méridiens* les grands cercles qui se coupent aux extrémités d'un diamètre de la sphère, pris pour axe. Donc, *tous les méridiens sont égaux, se partagent réciproquement en deux parties égales et divisent la surface de la même manière.*

355. *Le plus court chemin pour aller d'un point* E *à un autre* F, *sur la surface sphérique, c'est l'arc* ENF *d'un grand cercle* (P. XII, F. 15).

Supposons d'abord qu'on suive un arc EOF de petit cercle; EF sera sa corde, comme celle de l'arc ENF. Or, ce dernier ayant un rayon plus grand que celui du premier, surpasse la corde EF en longueur, moins que l'arc EOF ; donc ENF est un chemin plus court que tout arc de petit cercle.

Si l'on suit deux arcs EPO, OQF de petits cercles différens, il y aura entre E et O, un arc ERO de grand cercle, plus court que EPO, et de O en F, un arc OSF de grand cercle, plus court que OQF. Le chemin EROSF sera donc moindre que le chemin EPOQF. Mais les plans des trois arcs ENF, ERO, OSF passent par le centre D de la sphère, et s'y coupent. Ils forment donc un angle solide (281), et l'un EDF des angles ordinaires ou plans est moindre que la somme des deux autres EDO, ODF (282). Or, les arcs ENF, ERO, OSF qui ont D pour centre, comme appartenant à de grands cercles, sont les indications des trois angles plans; par conséquent, l'arc ENF est plus petit que la somme des deux arcs ERO, OSF, et à plus forte raison, moindre que le chemin EPOQF.

Enfin, si pour aller de E en F, on suivait plus de deux arcs de petits cercles différens, il est visible que le même raisonnement conduirait à démontrer que ce chemin tortueux serait plus long que l'arc ENF.

Probl. (*a*) : *Trouver le diamètre d'une sphère donnée.*

Décrivez sur la surface sphérique une circonférence, en appuyant la pointe fixe d'un compas courbe, sur un point A quelconque (P. XII, F. 16) ; marquez sur cette circonférence, trois points B, C, D; faites sur le papier, un triangle B'C'D' égal au triangle BCD (164); circonscrivez une circonférence à B'C'D' (p. 97) et tracez-y un diamètre E'F'; construisez sur ce diamètre, un triangle symétrique E'A'F' dont les côtés égaux soient de même longueur que AE (164); circonscrivez une circonférence à cet autre triangle; le diamètre A'G' sera précisément le diamètre AG de la sphère donnée.

En effet, le diamètre EF de la circonférence BCD, rencontre AG celui des diamètres de la sphère qui est perpendiculaire au plan de cette courbe, et il le rencontre au centre H (350 et 258). Le plan du triangle symétrique EAF passe donc par le centre I de la sphère, ou ce qui revient au même, les trois points E, A, F sont sur le même grand cercle (353). Par conséquent, la circonférence E'A'F'G' est celle d'un grand cercle, et son diamètre A'G' est celui de la sphère.

Probl. (*b*) : *Tracer un grand cercle sur une surface sphérique.*

Tirez, sur un tableau, deux droites AB, CE qui se coupent d'équerre en deux parties égales (P. XII, F. 17) et qui aient chacune même longueur que le diamètre de la sphère. Si vous prenez la droite AC avec un compas courbe, vous aurez le rayon qu'il faudra employer pour décrire un grand cercle sur la surface sphérique, en appuyant l'une des pointes du compas sur un point quelconque de cette surface.

Probl. (c) : *Tracer un cercle par trois points* A, B, C *donnés sur une surface sphérique* (P. XII, F. 18).

Le cercle demandé aura son centre sur un diamètre de la sphère perpendiculaire au plan passant par les trois points A, B, C (258) ; conséquemment la perpendiculaire au milieu de la corde BC rencontrera ce diamètre (93). Comme en outre les deux points B, C appartiennent à un certain grand cercle, la droite qui serait menée du milieu de la corde BC au centre de la sphère, se trouverait perpendiculaire à cette corde.

Ainsi, la droite BC est perpendiculaire à deux droites d'un plan passant par son milieu et par un diamètre de la sphère ; elle est donc perpendiculaire à ce plan (256), et par conséquent, ce même plan est le lieu de tous les points également distans de B et de C (259). Or, un tel plan coupe la surface sphérique selon un grand cercle (353) ; donc, le milieu de l'arc BC, et deux points marqués à égales distances des extrémités de cet arc, déterminent un grand cercle dont tous les points sont également distans de B, C.

Il faut d'après cela, pour résoudre le problème proposé, décrire de B et de C, avec un rayon quelconque, deux arcs qui se coupent en deux points D, E ; tracer le long d'une règle ployante, un arc qui passe par D, E, et faire la même opération pour les points A, B. Le point H, intersection des deux arcs DE, FG de grands cercles, sera à égales distances de A, B, C, et la circonférence que vous décrirez sur la sphère, de ce point, avec HA pour rayon, passera par les trois points donnés.

Appl. (a) : En géographie, on se sert des grands et des petits cercles de la sphère terrestre, pour désigner sûrement, et même pour marquer sur des globes de carton ou sur les cartes, les positions des divers lieux. A cet effet, on a imaginé, par l'axe AB de la Terre (P. XII, F. 17), un cercle ADBA qui passe par un certain point de la surface : ce point est chez nous, l'observatoire de Paris ; en Angleterre, il est l'observatoire de Greenwich ; pour les autres nations, il est l'un ou l'autre de ceux-là, ou bien l'Ile-de-Fer qui se trouve dans la mer par laquelle l'Amérique est séparée de l'Afrique et de l'Europe. Le grand cercle dont la position se trouve ainsi fixée, est nommé *premier méridien* (354), et l'on appelle *équateur*, un autre grand cercle CDEC perpendiculaire à l'axe AB et au premier méridien.

L'équateur est regardé comme divisé par des méridiens, en 360° du couchant au levant, à partir du point D où il coupe le premier méridien dans la demi-sphère que nous habitons : ce sont les degrés de *longitude*. Les deux quarts AD, BD du premier méridien, sont supposés divisés par des cercles parallèles à l'équateur, en 90° chacun, à partir du même point D : ce sont les degrés de *latitude*. »

« Si, d'après cela, on me dit qu'une ville, que Metz par exemple, a pour longitude 3° 51' et 49° 7' pour latitude septentrionale, c'est-à-dire au nord de l'équateur, je cherche sur le globe ou sur la carte, le méridien ABC (F. 19) qui passe par le 4^{me} degré de longitude, à partir du méridien de Paris; je suis ce méridien ABC en remontant vers le pôle nord A, jusqu'à ce que j'arrive à DE celui des petits cercles parallèles à l'équateur, qui répond au 49^{me} degré de latitude, et près de l'intersection F de ces deux cercles, je trouve la position que Metz a véritablement sur la Terre, par rapport à toutes les villes qui l'entourent. »

Appl. (*b*) : C'est aussi en disposant un certain nombre de cerceaux égaux, de façon qu'ils se coupent tous en deux points A, C (P. XII, F. 19), et en les maintenant à des distances fixes les uns des autres, au moyen de cercles parallèles inégaux DE, GH, etc., auxquels ils sont attachés, qu'on exécute dans plusieurs arts, la charpente d'une sphère.

« Lorsque les architectes construisent une voûte sphérique qu'ils nomment *dôme*, ils placent des cintres égaux selon les méridiens de la surface. »

356. Un plan est tangent à une surface sphérique, quand il n'a qu'un seul point de commun avec elle. Donc, *tout plan perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon de la sphère, est tangent à la surface.*

La démonstration de ce principe est absolument la même que celle du n° 106, si l'on substitue le mot *plan* au mot *droite* et *surface sphérique* à *circonférence.*

Il s'ensuit que *deux plans tangens aux extrémités d'un diamètre de la sphère, sont parallèles* (273).

357. *Toute droite tracée sur le plan tangent, par le point de contact, est tangente à la surface sphérique et à toutes les circonférences qui contiennent ce point*, car elle n'a que ce même point de commun avec ces courbes, comme avec la surface.

358. La normale d'une surface courbe étant la perpendiculaire menée au plan tangent, par le point de contact (309), il est clair que *tous les rayons de la sphère sont des normales* ou que *toutes les normales de la surface sphérique passent par le centre.*

Conséquemment, le *plan normal*, c'est-à-dire celui qui contient une normale, *passe par le centre et coupe la sphère selon un grand cercle.*

Appl. (*a*) : Quand le tourneur fait une boule à vue, il dirige son ciseau plan de manière à le rendre constamment tangentiel à la surface qu'il veut produire. Au milieu du morceau de bois, la large face de ce ciseau doit être parallèle à la ligne des pointes; près de ces pointes, elle doit être dirigée perpendiculairement à la même ligne; entre ces deux positions, il faut qu'elle en prenne une plus ou moins inclinée, toujours sensiblement perpendiculaire à la droite que l'ouvrier se représente allant du point qu'il attaque, au centre futur de la boule. Ainsi se trouve enlevé tout le bois que laissent au-dessus d'eux les divers plans tangens à la surface sphérique, et cette surface est formée.

Appl. (*b*) : Si l'on met une sphère en contact avec deux plans parallèles, ils sont tangens aux extrémités d'un diamètre et leur écartement égale la longueur de cette droite. Il est donc possible de mesurer exactement le diamètre d'une sphère, au moyen d'une espèce de compas semblable à celui qu'emploie le cordonnier pour prendre la longueur du pied, ou analogue au compas à curseur (p. 13). Mais les petites branches parallèles de l'instrument doivent être un peu plus longues que le rayon de la boule, et toucher la surface par leurs lignes milieux perpendiculaires à la grande branche.

Appl. (*c*) : Une lampe dont la flamme se trouverait au centre d'un miroir courbé en portion de sphère, jetterait sa lumière sur ce miroir selon les rayons, et d'après la loi de la réflexion (p. 276), cette lumière reviendrait sur elle-même, en suivant encore ces rayons. Un miroir sphérique est donc propre à augmenter en un point donné la clarté que produit en ce point un corps enflammé. Or, la chaleur se réfléchit comme la lumière (p. 11, loi *c*); par conséquent on peut, pour ainsi dire, doubler la chaleur d'un corps en combustion, en le plaçant au centre d'une sphère creuse dont la surface intérieure ait un beau poli.

Appl. (*d*) : Les verticales ou les directions du fil-à-plomb sont les normales de notre globe (p. 70.) Les plans méridiens ou les plans qui passent par l'axe de rotation, sont des plans normaux. Tout plan horizontal situé à la surface de la Terre, est tangent à cette surface (263), et toute horizontale tracée sur un tel plan, par le point de contact, est une tangente des cercles grands ou petits qui contiennent le même point (44). Remarquez toutefois que les verticales ne peuvent avoir un concours unique, attendu que la Terre est un peu aplatie aux pôles et renflée à l'équateur (p. 340). »

Appl. (*e*) : Ce qui vient d'être dit, rend visible que le plan horizontal n'est pas le même pour divers points de la Terre : rigoureusement parlant, il change de position, dès qu'on change le point de contact. Mais de même que dans la pratique de plusieurs arts, deux verticales peu éloignées l'une de l'autre, peuvent être regardées comme parallèles, sans erreur sensible, les plans horizontaux dont les contacts sont très-voisins, peuvent être censés se confondre.

Appl. (*f*) : C'est la surface de l'eau tranquille qui a donné aux hommes l'idée des niveaux : ils ont senti que les corps placés sur une surface équidistante à celle-là, ne pourraient prendre d'eux-mêmes aucun mouvement et resteraient en repos, comme toutes les parties du liquide. Or, ces parties pouvant glisser facilement les unes sur les autres, ne sauraient rester immobiles, si celles de la surface ne se trouvaient pas toutes à la même distance du centre de la Terre. Ainsi l'eau tranquille forme une surface courbe et la vraie surface du globe terrestre (p. 340).

« Il faudrait donc, pour que les corps ne pussent glisser, qu'on les plaçât sur une surface sphérique concentrique à celle de la Terre; il faudrait donc, pour que deux points fussent vraiment de niveau, qu'ils se trouvassent sur une circonférence du globe, ou à la même distance du centre. Mais, comme il nous est impossible de former une pareille surface, de tracer une telle circonférence, nous nous contentons, pour poser les corps de manière qu'ils ne puissent changer de position, de les placer sur un plan horizontal, et nous regardons comme points de niveau, ceux qui se trouvent sur une même horizontale. Cela revient à bien peu près au même dans la pratique, parce que le plan et la droite n'y ont jamais beaucoup d'étendue, et qu'en raison de la grande longueur du rayon terrestre, on peut regarder le plan tangent à la surface du globe et la tangente à une des circonférences, comme se confondant avec cette surface et avec cette circonférence, entre deux points peu éloignés l'un de l'autre. »

« Voilà pourquoi nous avons dit (p. 44 et 270) qu'une droite peu longue, joignant deux points de la surface d'une eau tranquille est horizontale, et qu'une petite portion de cette surface est un plan horizontal. »

« Néanmoins, il est nécessaire de distinguer le *niveau vrai*, du niveau des arts : le premier est l'égalité de distance au centre de la terre, et dans le second, cette égalité n'existe réellement pas. »

« Supposons un point A (P. XII, F. 20) placé sur la surface de la Terre; tous les points de la circonférence ABC et ceux de toute autre circonférence ADE tracée sur le globe, par le point A, seront dans un niveau vrai avec ce point. Mais il n'en sera pas de même pour F, situé sur l'horizontale AF tangente en A, puisque FG est plus grande que le rayon AG. Le sommet F d'une tour élevée en H, nous paraîtra pourtant de niveau avec le point A, puisque nous jugeons du niveau par une horizontale (p. 44.) »

« Le niveau *apparent* est donc bien différent du niveau vrai, quand les deux points sont très-éloignés l'un de l'autre. La différence est telle, qu'un point qui se trouve supérieur à un autre en niveau vrai, peut être inférieur en niveau apparent. Les points I, K sont dans ce cas : leur différence de niveau vrai est KL, différence entre les deux normales IG, KG, et leur différence de niveau apparent est KM, distance verticale de K à l'horizontale passant par I. Cet exemple est bien propre à faire sentir pourquoi, dans les nivellemens importans, on doit donner les coups de niveau entre deux points peu éloignés l'un de l'autre. Sans cette précaution, les différences de niveau trouvées au moyen d'horizontales, s'écarteraient trop des différences de niveau vrai, et pourraient jeter dans des erreurs d'une grande conséquence.

LOIS DE LA NATURE : Puisque les corps placés d'aplomb sur la Terre, sont les seuls qui ne tombent pas lorsqu'on les abandonne à eux-mêmes, le corps d'un homme qui se tient debout, est dirigé selon une verticale, une normale, un rayon du globe. Deux hommes placés aux extrémités d'un diamètre de la Terre, ont donc leurs corps sur la même ligne droite, et les pieds de l'un regardent les pieds de l'autre. Chacun de nous est dans cette situation par rapport à un des hommes qui habitent la partie opposée de la Terre. Nous appelons ces hommes nos *antipodes*, et nous sommes les leurs. S'ils nous semblent avoir la tête en bas, ils doivent nous croire aussi dans cette position ; elle n'est qu'apparente des deux côtés, comme il est aisé de le sentir.

« On comprendra tout aussi bien que deux antipodes ne peuvent pas plus l'un que l'autre quitter la Terre et s'en aller dans l'air : la gravité (p. 119), leur poids les retient sur le sol qu'ils habitent. Quand nous avons midi, nos antipodes ont minuit ; nous jouissons de l'été, pendant que l'hiver règne chez eux ; certaines étoiles que nous voyons, ils ne les apperçoivent jamais, et il y a réciprocité entière sur tous ces points. »

Combinaisons de la surface sphérique et des surfaces cylindriques.

359. *La surface sphérique ne peut être coupée par une surface cylindrique droite, selon une courbe plane, sans que cette courbe soit une circonférence et que l'axe du cylindre passe par le centre de la sphère.*

D'abord, la courbe est une circonférence, si elle est plane, puisqu'une sphère ne peut être coupée par un plan que selon un cercle (352). Ensuite, la perpendiculaire AB (P. XII, F. 21) abaissée du centre A de la sphère sur le plan d'un cercle dont CD est le diamètre, passe par le centre B de ce cercle (258) ; si le même cercle appartient à un cylindre droit, il en est nécessairement la génératrice courbe ; l'axe BE de ce cylindre lui est aussi perpendiculaire et contient B ; conséquemment, AB et BE ne forment qu'une seule ligne droite (257), ou bien BE passe par le centre A.

Ainsi, *dans le cas où l'axe d'un cylindre droit passe par le centre d'une sphère, la courbe d'entrée et la courbe de sortie sont deux circonférences égales.*

360. Un cylindre oblique peut aussi pénétrer dans une sphère, par la circonférence d'un petit cercle ; mais il faut pour cela que l'axe ne passe pas par le centre de la surface sphérique, et qu'il fasse avec la courbe AB (P. XII, F. 22), un angle égal à l'un de ceux qu'il fait avec les diamètres de ses circonférences ; autrement, les intersections seraient deux courbes à double courbure. D'ailleurs, *si la courbe d'entrée est une circonférence de petit cercle, la courbe de sortie est une circonférence égale à celle-là ;* car (305) la corde AB diamètre de la première, égale la corde CD diamètre de la

seconde, puisque les arcs AEB, CFD compris entre deux parallèles, sont égaux (95 et 23).

361. *Si le cylindre oblique a pour circonférence*, AB *celle d'un grand cercle de la sphère* (P. XII, F. 23), *cas dans lequel son axe* CD *passe par le centre* E, *il entre par deux demi-grands cercles* AE, EF *et sort par les deux autres moitiés* BE, GE.

Il suffit pour le démontrer, de faire voir que la droite FG menée par les intersections opposées de deux génératrices droites FB, AG contenues dans le même plan diamétral, est un diamètre de la sphère. Or, l'arc AF = BG, puisque AG et BF sont parallèles (95); donc AF + AG = AG + BG ou FAG = AGB, et puisque AGB est un demi-grand cercle, FAG en est un autre.

Dans une semblable pénétration, les points E où se coupent les circonférences d'intersection, sont les extrémités d'un diamètre de la sphère, et les génératrices droites qui passent par ces points, se trouvent tangentes à la surface sphérique.

Appl. (*a*) : Quelquefois, un tuyau de poêle débouche dans une sphère qui le *couronne* ou le termine; l'orifice de la sphère est alors une circonférence de même rayon que le cylindre. Pour tracer cette circonférence, il faut décrire sur un tableau, le grand cercle A de la sphère (P. XII, F. 21); mener un diamètre AF, puis une perpendiculaire C'D' à AF; prendre AC', AD' égales chacune au rayon du cylindre; tirer par C' et D' des parallèles à AF, ce qui donne la corde CD égale au diamètre de ce cylindre; enfin, joindre C et F. La droite CF est le rayon à employer pour décrire sur la sphère, du point où doit aboutir l'axe du cylindre, la circonférence intersection des deux surfaces; car toutes les droites menées de F aux divers points de la circonférence qui aurait CD pour diamètre, seraient égales (258).

Appl. (*b*) Le tourneur qui veut faire une boule avec quelque précision, confectionne d'abord un cylindre creux d'un diamètre un peu moindre. Il exécute ensuite la sphère à vue (app. *a*, p. 344), ayant soin de lui donner un peu plus de grosseur qu'elle ne doit en avoir; puis il l'enchâsse dans le cylindre, en l'y pressant avec un peu de force. L'autre extrémité de ce cylindre est alors adaptée à la poupée d'un tour en l'air, et l'ouvrier travaille de nouveau la boule, qu'il retourne de temps en temps, jusqu'à ce qu'elle ait le diamètre requis, et qu'elle s'applique exactement, dans tous les sens, contre le bord circulaire du cylindre creux. C'est seulement lorsqu'il en est ainsi, qu'elle est parfaitement sphérique.

Appl. (*c*): Quand on fait une baie, porte ou fenêtre, dans un dôme, l'axe de l'arcade est assez ordinairement dirigé vers le centre de la voûte sphérique. Les deux arêtes du cintre sont donc des demi-circonférences, et les arêtes courbes de la douelle de chaque voussoir, sont des arcs de cercle. Mais, si l'axe horizontal du cylindre ne passe point par le centre de la sphère, les mêmes arêtes sont des courbes à double courbure et plus difficiles à bien exécuter.

APPL. (*d*) : Enfin, si l'on combine les principes précédens avec ce que nous avons dit de l'ombre d'un cercle (p. 296), on pourra facilement tracer sur une sphère, le contour de l'ombre qu'y jette une arête circulaire. Par exemple, l'ombre que porte le cintre d'une niche, sur la partie sphérique, a pour contour un arc de grand cercle, parce que le cylindre oblique formé par les rayons lumineux, a pour génératrice courbe, ce même cintre qui est un demi-grand cercle.

362. Si l'on fait croître le diamètre du cylindre dont l'axe est BE (P. XII, F. 21), l'intersection de la surface et de celle de la sphère continuera d'être une circonférence, et il ne pourra cesser d'y avoir intersection qu'au moment où les génératrices CG, DH, seront tangentes au grand cercle A. Mais alors il y aura contact, la courbe commune sera encore une circonférence, et cette courbe aura pour diamètre, C''D'' perpendiculaire aux tangentes parallèles C''G', D''H', qui passe par le centre de la sphère (109). Conséquemment, *une surface cylindrique droite est tangente à une surface sphérique, selon une grande circonférence, quand les diamètres sont égaux, et que l'axe de la première passe par le centre de la seconde.*

Un cylindre oblique ne peut jamais être touché intérieurement par une sphère, selon une circonférence, parce que ses génératrices droites ne sont pas perpendiculaires à sa génératrice courbe.

Un cylindre quelconque peut être touché extérieurement ou intérieurement par la surface sphérique, en un seul point : ces contacts ont lieu quand une génératrice droite AB (F. 24) est tangente à la sphère, et que deux courbes C, D situées dans le même plan, l'une sur la surface sphérique, l'autre sur la surface cylindrique, se touchent extérieurement ou intérieurement ; car ces courbes ont alors une tangente commune ; et le plan qui contient cette tangente et la génératrice droite AB, est tangent aux deux surfaces.

APPL. (*a*) : Les niches que construisent les architectes pour y placer des statues, des poêles, etc., sont souvent des portions de cylindres droits et creux, tangentes à des portions de sphères creuses. Les diamètres des deux surfaces doivent donc être égaux, et le centre de la partie sphérique doit se trouver sur l'axe du cylindre. La circonférence de contact est horizontale, comme celle que la surface cylindrique trace sur le sol.

APPL. (*b*) : Puisque toutes les grandes circonférences de la surface sphérique sont égales (353), une sphère en relief peut rouler dans un cylindre creux et droit qui lui est tangent, sans que le contact cesse d'avoir lieu sur toute la circonférence de la surface cylindrique. Un cylindre creux bien exécuté, est donc propre à vérifier les sphères en relief, lorsqu'il a le même rayon.

« L'Artillerie, avant de recevoir les boulets, les fait rouler dans un cylindre creux de calibre ou de même diamètre. Comme le cylindre droit peut aussi tourner dans tous les sens autour de la sphère qu'il touche, sans que la tangence soit troublée en rien, on emploie des lunettes, qui sont de courts cylindres creux, pour vérifier une seconde fois les mêmes boulets ; car la première vérification est insuffisante, attendu qu'une sphère aplatie vers les extrémités d'un de ses diamètres, peut très-bien rouler dans un cylindre qui la touche par sa plus grande circonférence. »

Appl. (c) : Si, sur une sphère (P. XII, F. 19), on trace des méridiens ADGC, AIKC, etc., tellement près les uns des autres qu'ils divisent l'équateur LBM en arcs qui puissent être regardés, sans erreur sensible, comme des lignes droites, les arcs KN, DI, etc., des cercles parallèles à l'équateur, pourront être aussi confondus avec leurs cordes, et ce ne sera pas s'écarter beaucoup de la vérité que de considérer les portions ADGCIA, etc., de la surface sphérique, comme appartenant à une surface cylindrique, tangente à la sphère selon le méridien qui partagerait DI en deux parties égales. Or, la surface cylindrique peut être formée par une surface plane convenablement ployée (p. 292) ; l'étroite bande méridienne ADGCIA peut donc être coupée sur une feuille plane ou sur un tissu plan quelconque.

« Pour parvenir aisément à *exécuter le développement d'une bande méridienne de sphère*, il faut d'abord faire les projections A, A' de ce corps (F. 25) et un angle BAC d'autant de degrés qu'en doit renfermer la partie de l'équateur comprise dans la bande : un côté AB de cet angle sera tracé parallèlement à la ligne de terre, afin que le grand cercle du plan A'AB ait même projection verticale que la sphère. »

« Coupez ensuite la surface sphérique par des plans horizontaux très-rapprochés B'A', D'E, F'G, etc. ; avec les rayons ED', GF', etc. des cercles qu'ils donnent, décrivez les arcs DH, FI, etc., interceptés par les plans A'AB, A'AC qui comprennent la bande méridienne ; tracez la bissectrice AK de l'angle BAC, et développez sur une ligne droite, le demi-grand cercle du plan A'AK. Comme ce cercle égale celui de la projection verticale de la sphère, il s'agira seulement de porter les petites parties B'D' de *b* en *d* et *d'*, D'F' de *d* en *f* et de *d'* en *f'*, F'L de *f* en *l* et de *f'* en *l'*. »

« Tirez alors par les points *f*, *d*, *b*, etc., des perpendiculaires à *ll'* ; portez la moitié KC de l'arc BC, de *b* en *c*, *c'* ; puis la moitié de l'arc DH, de *d* en *h*, *h'* et de chaque côté du point *d'* ; puis la moitié de l'arc FI, de *f* en *i*, *i'* et de chaque côté du point *f'* ; joignez enfin par deux courbes, les points ainsi marqués ; la figure *lcl'c'l* sera le développement de la bande LBL'CL, et en découpant cette figure, vous formerez un patron au moyen duquel vous taillerez toutes les bandes planes qui, courbées cylindriquement peuvent composer la surface sphérique. »

« C'est ainsi que sont confectionnés les globes terrestres ou célestes dont on se sert dans l'enseignement ; c'est ainsi que l'on couvre les dômes avec des feuilles planes. Les grands et les petits ballons, les balles du jeu de paume, les parapluies, les garde-vue des lampes, s'exécutent par un procédé analogue. Le ferblantier peut suivre aussi ce procédé pour former des surfaces qui approcheront d'autant plus de celle de la sphère, que les bandes méridiennes seront plus étroites. Enfin, le tailleur de pierres peut produire une surface sphérique, en façonnant un certain nombre de surfaces cylindriques telles que ALCOA (F. 19) et en abattant les arêtes courbes qu'elles forment par leurs intersections. »

Combinaisons de la surface sphérique et des surfaces coniques.

363. *La surface sphérique ne peut être coupée par une surface conique droite, selon une courbe plane, sans que cette courbe soit une circonférence et que l'axe du cône passe par le centre de la sphère.* La démonstration de ce principe est la même que celle du n° 359. On doit en conclure que *si l'axe d'un cône droit passe par le centre de la sphère, la courbe d'entrée est une circonférence.*

Un cône oblique peut aussi entrer dans la sphère par une circonférence; mais il faut pour cela que les points A, B (P. XII, F. 26) où deux génératrices opposées et quelconques SB', SA' sont coupées par un diamètre AB d'une des circonférences du cône, s'appliquent en même temps sur la sphère. Alors, l'axe SC ne peut passer par le centre D, puisqu'il n'est pas perpendiculaire à tous les diamètres d'une des circonférences. Lorsque la condition ci-dessus n'est pas remplie, la courbe d'entrée a deux courbures, attendu qu'elle ne peut être une circonférence et qu'aucune autre courbe plane ne saurait être tracée sur la sphère. Par conséquent, *toutes les fois que l'axe d'un cône oblique passe par le centre de la surface sphérique, l'intersection est à double courbure.*

364. *Si un cône quelconque pénètre dans la sphère par une circonférence, il sort par une autre.*

Quand le cône est droit (P. XII, F. 27), l'axe SC passe par le centre D de la sphère (363); comme il est d'ailleurs perpendiculaire à la corde AB, diamètre d'une des génératrices courbes (322), il la coupe en deux parties égales (93). Conséquemment, SA, SB sont deux obliques égales (48) et les angles SAB, SBA sont égaux (51). Mais, les angles SBA et SA'B' ont aussi même indication (99). Donc, l'angle SAB = SA'B'; donc (60), A'B' est parallèle à AB, et cette corde est diamètre d'une circonférence commune au cône et à la sphère.

La fin du n° 328 fait voir que le principe est vrai pour le cône oblique (F. 26), si les deux triangles SAB, SA'B' sont semblables. Or, l'angle SAB égale l'angle inscrit SA'B', et l'angle S est commun aux deux triangles (169). Donc, A'B' est diamètre d'une circonférence commune au cône et à la sphère, quand il en est ainsi de la corde AB.

Vous voyez par là que, réciproquement, *si la courbe de sortie est une circonférence, celle de l'entrée en est une autre.*

365. *La circonférence d'un grand cercle de la sphère ne peut jamais être la courbe d'entrée d'un cône, mais elle peut être la courbe de sortie*, comme le montre la figure 28 (P. XII) pour le cône droit, et la figure 29 pour le cône oblique. Dans les deux cas, la courbe d'entrée est une circonférence de petit cercle, d'après le numéro précédent.

Il est possible qu'alors, comme dans tous les autres cas, une SA des génératrices droites du cône oblique, soit tangente à la sphère, parce que l'angle B' ayant pour indication la moitié de l'arc AB, se trouve encore égal à l'angle SAB, quand ce dernier est formé par une tangente et une corde (112).

L'entrée et la sortie d'un cône oblique peuvent encore être composées chacune d'un arc de grand cercle et d'un arc de petit cercle, comme le montre la figure 30; car les deux triangles SAB, SA'B' sont semblables, et une surface conique qui aurait son sommet au point S, pourrait passer par les deux circonférences dont AB et A'B' sont les diamètres. Alors, l'entrée dans la sphère se ferait par les arcs AE, EB', et la sortie, par les arcs A'E, BE. Il y aurait donc deux génératrices droites qui seraient tangentes à la surface sphérique, aux points E où se croisent les deux circonférences.

Enfin, il est visible que la pénétration peut encore avoir lieu de la même manière, lorsque les deux circonférences croisées appartiennent à de petits cercles (F. 31), et qu'elle ne se fait jamais de la sorte quand le cône est droit.

Appl. (*a*) : Si l'on veut terminer un tronc de cône par une sphère, comme dans la figure 32 (P. XII), il faut se donner le diamètre de la petite circonférence du tronc; en porter la moitié, de A en C', en D'; tracer les deux perpendiculaires C'C, D'D, et joindre C, D au point F où le grand cercle de la sphère est rencontré par AB, parallèle à C'C. La distance FC sera l'ouverture du compas courbe avec laquelle on pourra tracer sur la sphère, d'un point quelconque, la circonférence intersection de la surface conique et de la surface sphérique.

« Quelquefois, la boule doit être surmontée d'une pointe conique; on la place sur un cercle parallèle au précédent, qu'on décrit de la même manière. Ces tracés sont analogues à celui de la page 348, appl. (*a*). »

Appl. (*b*) : Certains édifices présentent des lunettes ébrasées, pratiquées dans un dôme. Comme de telles lunettes sont des voûtes coniques, des voûtes en canonnières (p. 320), que leurs demi-cônes sont droits et que les axes passent par le centre de la surface sphérique du dôme, les courbes de pénétration ou les arêtes courbes de ces lunettes, sont des demi-circonférences; de sorte que l'appareil est analogue à celui d'un plein cintre.

Appl. (c) : Les tableaux peints sur une coupole ou demi-sphère creuse, doivent produire le même effet que produirait le sujet représenté sur un plan. Ces peintures sont donc les perspectives sphériques des diverses parties du sujet (p. 316); leurs courbes sont donc les intersections d'une surface sphérique et de surfaces coniques, obliques ou droites. Les principes qui viennent d'être exposés sont, d'après cela, de la plus grande importance pour les peintres.

366. *Une sphère peut toujours être touchée extérieurement selon une circonférence, par un cône droit et creux.* Cela résulte de ce qui a été dit de l'intersection des deux surfaces (363) ; car le cas de la tangence n'est que celui où les génératrices SA', SB', (P. XII, F. 27) se sont écartées également de l'axe SC, jusqu'au moment où elles sont devenues tangentes au grand cercle contenu dans leur plan. Alors, A et A', B et B' sont confondus et forment les points de contact; alors aussi, les deux circonférences AB, A'B' n'en font plus qu'une seule.

Il est visible au reste, qu'un demi-cercle ABC (F 33) et sa tangente BS tournant autour du même axe SC, engendrent l'un une surface sphérique, l'autre une surface conique qui touche celle de la sphère selon une circonférence dont le diamètre est BD, perpendiculaire sur SC.

Enfin, quelle que soit la sphère, on peut toujours lui trouver une position E où elle soit touchée extérieurement selon une circonférence, par un cône droit et creux non limité : cela revient au probl. (c), p. 126, dans lequel il s'agit de décrire un cercle de rayon donné, tangentiellement à deux droites qui se coupent.

Le cône oblique et creux ne peut jamais toucher une sphère extérieurement selon une circonférence ; car pour que le cône S pût être oblique, quoique touchant la sphère E selon une circonférence d'un diamètre BD, il faudrait que les tangentes SB, SD pussent être inégales, et quel que soit le grand cercle E que l'on considère, ses tangentes issues d'un même point S seront toujours de même longueur (108).

Une surface sphérique peut toucher en un seul point, extérieurement ou intérieurement, une surface conique quelconque.

Il suffit pour que ces contacts aient lieu, qu'une génératrice droite soit tangente à la sphère et que deux courbes situées dans le même plan, l'une sur la surface sphérique, l'autre sur la surface conique, se touchent extérieurement ou intérieurement; car ces courbes auront une tangente commune, et le plan qui passera par cette tangente et par la génératrice droite, sera tangent aux deux surfaces.

Appl. (a): Si, à partir d'un diamètre AB (P. XII, F. 34), on divise le demi-grand cercle d'une sphère O, en parties égales assez petites pour qu'elles puissent être regardées, sans grande erreur, comme des lignes droites, et que par les points de division C, D, etc., on mène des plans perpendiculaires au grand cercle, la surface sphérique se trouvera partagée en bandes CDEF, etc., appelées *zônes*, qui pourront être considérées comme des surfaces coniques droites et tronquées, tangentes à la sphère.

« De là un autre moyen de couvrir une sphère avec des bandes planes. Tracez un de ses grands cercles; tirez le diamètre AB; partagez la demi-circonférence ADB en petites parties égales; il ne s'agira plus que de faire le développement des surfaces coniques tronquées et limitées par les circonférences dont les rayons sont AO, CG, DH, etc. Comme vous pouvez obtenir le sommet S en prolongeant les cordes CD, EF, il vous sera facile, au moyen du probl. *a* (p. 319), de tracer le développement du tronc CDEF, par exemple, lequel sera aussi celui du tronc IKLM. Des bandes circulaires coupées sur les patrons ainsi formés, s'appliqueront sur la sphère avec d'autant plus d'exactitude, qu'elles seront plus étroites. »

« Les ferblantiers, les cartonniers, etc., peuvent aussi confectionner des sphères avec des bandes coniques coupées sur des feuilles minces. Les charpentiers et les tailleurs de pierres exécutent une sphère pleine, s'ils forment des troncs de cônes droits qui se coupent selon des cercles, et dont les courtes génératrices composent un polygone régulier inscrit dans le grand cercle de la sphère. »

Appl. (*b*) : Les chapeliers emploient des formes composées d'un tronc de cône et d'une portion de sphère : les deux surfaces sont tangentes l'une à l'autre, selon une des petites circonférences de la sphère.

Lois de la nature : L'ombre portée par une sphère n'est jamais bien tranchée, bien arrêtée; il y a toujours vers le bord, une partie moins noire que le reste, dont le contour ne peut être saisi par l'œil. Il en est de même au reste pour tous les corps, quelle que soit leur forme, ce qui fait que le peintre et le dessinateur sont obligés de *fondre* les ombres portées, ou de les adoucir vers le bord, de manière à finir par une teinte très-faible et sans contour marqué. On nomme *pénombre* cette partie affaiblie. Elle provient de ce que les corps lumineux n'envoient pas seulement des rayons qui concourent à leur centre : tous les points de leur surface versent de la lumière dans toutes les directions; de sorte que la limite de la masse de lumière reçue par un corps éclairé, est en général une surface conique tangente à la fois à ce corps et à celui qui l'éclaire.

« Si, pour exemple, nous considérons la Terre et le Soleil ou deux sphères inégales T, S (P. XII, F. 35), dont la plus grande soit le corps lumineux, la limite de tous les rayons que pourra recevoir le globe T, sera une surface conique qui aura pour sommet le point de rencontre A des tangentes extérieures menées à deux grands cercles. L'espace entièrement privé de lumière en arrière de la Terre, sera donc le cône BAC Mais, si l'on mène les tangentes intérieures des deux grands cercles, et qu'on chemine sur une droite HI, il est clair qu'entre H et K, on recevra tous les rayons qu'envoie le

Soleil sur cette ligne ; qu'au-delà de K, on n'en recevra plus autant ; qu'en L, par exemple, on ne verra plus que la partie NMF de l'astre ; que la lumière reçue diminuera de plus en plus, à mesure qu'on s'approchera de AB, et qu'entré dans le cône BAC, on ne verra plus le Soleil, on sera tout-à-fait dans l'ombre. »

« L'espace non limité KOBACPI où l'on reçoit moins de rayons lumineux qu'en H, sans cesser de voir le Soleil, est ce qu'on appelle la *pénombre* de la Terre. Lorsque la Lune entre dans cet espace, elle s'obscurcit peu à peu, comme si elle était voilée par un léger nuage. Mais, arrivée dans le cône BAC, elle ne reçoit plus de rayons directs et n'est plus visible : il y a dans ce cas *éclipse* de lune (p. 10). Ces circonstances prouvent bien que la Lune n'est pas lumineuse par elle-même, qu'elle ne fait que réfléchir une partie de la lumière qui lui vient du Soleil. »

« Puisque les rayons solaires reçus par un corps, ne concourent pas tous au centre de l'astre, on devrait terminer l'ombre pure que ce corps porte sur un autre, par l'intersection de ce dernier avec une surface conique telle que EAG. C'est en effet ce qu'il faudrait faire, si le corps qui reçoit l'ombre était un peu éloigné de celui qui la porte, puisque pour une distance plus grande que AQ, par exemple, l'ombre portée serait nulle et qu'il n'y aurait plus qu'une légère pénombre souvent invisible pour nos yeux. Mais, comme l'ombre que l'on dessine ou que l'on peint, n'est jamais portée que sur des corps voisins de celui qui l'occasionne ; comme en outre le point A est toujours fort éloigné de Q, pour le cas des ombres solaires, la pénombre ne diffère guère de l'ombre pure, dans l'étroit intervalle qui sépare le cône BAC d'un cylindre de même axe, enveloppant tangentiellement le corps T, et l'on peut, sans grande erreur, déterminer le contour des ombres par l'intersection d'une surface cylindrique (p. 296), moyennant qu'ensuite on adoucisse les bords. »

Combinaisons des surfaces sphériques entre elles.

Il faudrait maintenant combiner les surfaces développables, considérées en général, et les surfaces gauches, avec celle de la sphère. Mais, comme il n'y a rien de bien intéressant à dire sur ces combinaisons, nous passons à celles des surfaces sphériques entre elles. Trois cas sont à considérer : les sphères se coupent, se touchent ou n'ont de point commun que le centre.

367. *L'intersection des surfaces de deux sphères qui se coupent, forme toujours une circonférence dont le plan est perpendiculaire à la droite* AB *des centres* (P. XII, F. 36).

Faisons passer un plan par les centres ; il coupera les surfaces selon deux grands cercles qui se rencontreront en deux points C, D, et dont la corde commune CD sera perpendiculaire à la droite AB des centres (115). Nous pourrons donc mener par CD, un plan perpendiculaire à AB. Ce plan coupera la surface de la sphère

A, selon une circonférence qui aura E pour centre et CD pour diamètre (352). Mais, il coupera aussi l'autre surface sphérique B, selon une circonférence dont le centre sera en E et dont le diamètre sera CD. Les deux circonférences n'en feront donc qu'une seule située sur les deux surfaces et dans un plan perpendiculaire à la droite AB. D'ailleurs, elle renfermera tous les points d'intersection, car il est visible qu'un point pris sur l'une des sphères, hors de cette circonférence, se trouverait au-dehors ou au-dedans de l'autre corps.

Application : Il peut arriver que la partie sphérique d'une niche commence à la naissance d'un dôme : ce cas se présente quand le cylindre de la niche et celui qui supporte le dôme se terminent à la même hauteur. Alors, l'arête courbe commune aux deux surfaces sphériques creuses, est une circonférence, et le plan de cette arête se trouve vertical, parce que la droite des centres est horizontale.

368. *Deux sphères de centres différens ne peuvent se toucher qu'en un seul point ;* car si elles avaient plusieurs points de contact, on pourrait par deux quelconques de ces points et par chacun des centres, mener un plan qui donnerait un grand cercle pour intersection ; les circonférences des deux cercles auraient deux points communs ; elles se couperaient donc (114), et par conséquent, l'une des surfaces sphériques pénétrerait dans l'autre.

369. *Le point de contact* C *de deux sphères est toujours sur la droite* AB *des centres* (P. XII, F. 37), *et il suffit que la distance de ces centres soit égale à la somme ou à la différence des rayons* AC, BC, *pour que les deux surfaces sphériques se touchent extérieurement ou intérieurement.* Ces principes se démontrent comme les principes analogues relatifs aux contacts des cercles (138, 140 et 141).

370. *Une sphère ne saurait être touchée par plus de douze autres de même rayon qu'elle, sans que ces dernières se coupent.*

En effet, si nous formons un hexagone régulier ABCDEF (P. XII, F. 38) dont le côté soit double du rayon de la sphère donnée et dont le centre G soit celui de cette sphère, les sommets pourront devenir les centres de six sphères égales à G, qui la toucheront en se touchant elles-mêmes deux à deux ; car AG=AB=BG dans un hexagone régulier (219).

Mais, le centre H d'un triangle équilatéral est à la même distance des trois sommets A, B, G (210). Si donc on élève par H une perpendiculaire au plan de ABG, on pourra trouver sur cette droite un point dont les distances aux trois sommets égalent toutes AG (258) et qui, par conséquent, soit le centre d'une septième sphère tangente aux sphères G, A, B. Agissant de même aux points I, K, centres des triangles CGD, EGF, on aura neuf sphères tangentes à G. Or, les trois dernières H, I, K seront tangentes entre elles; car les axes de symétrie BF, CE des triangles équilatéraux sont perpendiculaires à AD (160) et conséquemment parallèles; BH=CI, parce que les triangles ABG, DCG sont égaux, et il s'en suit que HI=BC (66). On ne pourra donc trouver que trois centres au-dessus du plan de l'hexagone. Du reste, il est visible qu'on en trouverait également trois au-dessous et qu'il n'y aurait que ces trois-là. Le nombre des sphères qui peuvent toucher G, ayant le même rayon, n'est donc que de douze, si elles doivent ne pas se couper.

Appl. (*a*) : Les piédroits de certaines portes cochères portent parfois quatre sphères C, D, G, I égales et tangentes les unes aux autres (P. XII, F. 38).

Appl. (*b*) : Les piles de boulets, de bombes ou d'obus sont fondées sur la tangence des sphères : on fait une première assise de projectiles qu'on enterre aux trois quarts, dans un sol horizontal bien ferme, et qu'on dispose en rangées parallèles, de manière que les diamètres des sphères d'un même rang forment une ligne droite non interrompue (P. XII, F. 39). Sur cette assise, et au-dessus des intervalles que laissent entre eux les projectiles, on en pose d'autres qui se trouvent tangens chacun à quatre des précédens, et l'on continue toujours ainsi, jusqu'à l'unique sphère ou l'unique rangée qui doit terminer la pile, selon que cette pile a pour base un triangle équilatéral, un carré ou un rectangle. Il en résulte que chaque projectile de l'intérieur est tangent à douze autres dont quatre sont dans la même assise que lui, quatre dans l'assise inférieure et quatre dans l'assise supérieure. Ceux des deux derniers groupes se touchent deux à deux; mais ceux du premier n'ont aucun point commun.

371. *Deux surfaces sphériques qui ont le même centre, sont équidistantes et leur distance est égale à la différence des rayons;* car on démontrerait, comme pour deux circonférences (131), que la différence des rayons est la plus courte droite qui puisse être comprise entre les deux surfaces. Donc, *deux surfaces sphériques de même centre et de même rayon, se touchent dans toute leur étendue.*

372. *Deux sphères concentriques peuvent, sans que leurs surfaces cessent d'être équidistantes, tourner sur leurs centres dans tous les sens;* car ces mouvemens ne changent rien à la longueur de chaque rayon. Il en résulte que *deux sphères concentriques de même rayon, dont l'une est en relief et l'autre creuse, ne cessent pas de se toucher par tout, quels que soient les mouvemens qu'on leur imprime, sans déranger les centres.*

Application : L'emboîtement *à genou* qui se trouve dans la plupart des instrumens propres au lever des plans et dans plusieurs machines, est une fort utile application des surfaces sphériques superposées. Deux portions de sphère creuse A, A' (P. XII, F. 40) tiennent à la partie fixe de l'instrument ou de la machine, à la douille B du graphomètre par exemple ; elles enveloppent aux trois quarts une sphère pleine C, de même rayon, qui supporte le limbe D, et qui peut se mouvoir dans le creux formé par les deux calottes. Le cercle D se met donc facilement dans le plan de l'angle qu'il s'agit de lever, sans que son centre s'écarte ou se rapproche de celui de la sphère creuse. Une fois qu'il s'y trouve, on rend fixe sa position, au moyen d'un écrou de pression E qui serre les calottes contre le bouton C. Ainsi, avec un graphomètre à genou, on peut lever un angle vertical aussi bien qu'un angle horizontal. Dans certaines machines, c'est le bouton sphérique qui est fixe et les calottes qui pivotent.

Surfaces annulaires.

373. La surface sphérique n'est qu'un cas particulier des surfaces courbes que peut engendrer une circonférence par sa révolution autour d'un axe. On conçoit en effet que cet axe peut fort bien ne point rencontrer la génératrice et qu'il peut en même temps se trouver hors du plan de cette courbe. Dans les deux cas, la surface engendrée est dite *annulaire*, parce que les anneaux ronds ont la même génération. La surface annulaire est donc produite, en général, par une courbe quelconque qui tourne autour d'un axe, sans le rencontrer.

L'hyperboloïde de révolution (p. 335) n'est pourtant pas une surface annulaire, bien que l'hyperbole génératrice ne rencontre pas l'axe de rotation : cela provient de ce que, l'axe passant néanmoins par le centre même de la courbe, il ne peut y avoir d'espace libre entre cette droite et le corps terminé par la surface.

La plus employée des surfaces annulaires est celle qui a pour génératrice, une circonférence C (P. XIII, F. 1) et dont l'axe AB est situé dans le plan de cette courbe. Tous ses plans méridiens, c'est-à-dire les plans AB'C', etc., qui passent par l'axe, la coupent selon une circonférence. Il en est de même des plans DE, etc., perpendiculaires à l'axe puisque chaque point de la courbe génératrice ou méridienne décrit autour de cet axe, une circonférence perpendiculaire (p. 265, appl. *b*). Mais, ce n'est pas ici comme sur la sphère : les méridiennes n'ont pas leurs centres sur l'axe ; ils sont placés sur une circonférence dont le rayon est B'C'. Cela n'empêche pas que plusieurs des principes relatifs à la surface sphérique, ne soient applicables à la surface annulaire dont il s'agit.

Appl. (*a*) : Les bagues nommées *alliances* offrent des surfaces annulaires engendrées par une circonférence qui tourne autour d'un axe situé dans son plan, à une distance du centre plus grande que le rayon.

Appl. (*b*) : La gorge d'une poulie est ou doit être une demi-surface annulaire creuse (P. XIII, F. 2).

« Ce que les marins appellent *cosse* est un demi-anneau qui en dehors a une gorge comme la poulie : la cosse sert à maintenir ouvertes les ganses dans lesquelles doit glisser un cordage. »

Appl. (*c*) : Le *tore* qu'on voit autour des colonnes, vers leurs bases, est une demi-surface annulaire en relief AB (F. 3). Toutes celles des autres moulures d'une colonne, qui ont un arc de courbe pour profil, sont aussi des portions de surfaces annulaires en relief ou creuses.

« La figure 4 qui est le profil d'une *scotie* ou *piédouche*, offre un exemple de deux surfaces annulaires qui se touchent selon une circonférence représentée en projection verticale par AB; elles sont engendrées par deux arcs tangens en A, dont les centres sont C, D. »

« Un piédouche peut aussi être formé par la révolution d'une ellipse (305) ou plutôt d'un arc d'ellipse qui remplace les deux arcs de cercle AE, AF : la surface annulaire qui en résulte est alors fort différente de celles des trois premières figures. »

Appl. (*d*) : Quand les menuisiers et les ébénistes poussent autour d'un cintre, des moulures dont le profil renferme des courbes, ils font des surfaces annulaires.

Appl. (*e*) : Enfin, dans la halle au blé de Paris, qui est un vaste cylindre FIK recouvert d'une voûte sphérique ABC (F. 5) et entouré d'un autre cylindre équidistant, une voûte annulaire ADE...A'D'E' couvre l'espace compris entre les deux surfaces cylindriques. C'est pour traverser cet espace qu'on fait des voûtes conoïdes telles que FGHI (p. 335 ; appl. *e*).

Surfaces de révolution.

374. La sphère et les anneaux ne sont pas les seuls corps qui soient terminés par des surfaces courbes de révolution non réglées. Comme on peut tracer une infinité de courbes différentes et les faire tourner autour d'un axe qu'elles rencontrent, il y a une infinité de surfaces de révolution qui ne sont ni cylindriques, ni coniques, ni sphériques, ni annulaires.

Une surface de révolution peut être engendrée par une courbe à double courbure, comme par une courbe plane; car il n'est pas nécessaire que les points de départ de toutes les circonférences décrites autour de l'axe, se trouvent dans un même plan. Seulement, si la génératrice n'est pas plane, elle n'est pas méridienne de la surface, puisqu'alors elle ne peut se trouver toute entière dans un plan passant par l'axe.

Toute surface de révolution peut être exécutée sur le tour, au moyen d'un guide convenable, puisqu'elle peut être couverte de circonférences ayant leurs centres sur un axe (p. 265, appl. *b*). Comme deux quelconques de ces circonférences sont par tout à la même distance l'une de l'autre, on peut en tracer une sur la surface, en employant une sorte de trusquin, ainsi qu'on le fait pour le cylindre et le cône droit (p. 293 et 315).

APPL. (*a*) : Les cloches, les sonnettes, une foule de vases ronds sont des surfaces de révolution dont la génératrice est une courbe plus ou moins gracieuse, qui dépend du goût des fabricans. Les cloches et les sonnettes sont coulées dans des moules que le fondeur obtient au moyen d'un modèle et dans lesquels il place un noyau en terre. Les vases ronds en faïence et en porcelaine sont exécutés sur un tour de potier de terre, qui porte un profil générateur (p. 310, appl. *e.*).

APPL. (*b*) : Les tonneaux sont des surfaces de révolution engendrées par un arc de circonférence ou d'une autre courbe ABC (P. XIII, F. 6) tournant autour de la corde DE d'un arc plus grand DAE, ce qui permet de maintenir les *douves* par des cercles parallèles. Ces douves sont des planchettes dont la plus grande largeur correspond au milieu B. Les plus petites largeurs se trouvent aux extrémités A, C et sont égales. Les grandes arêtes sont des courbes telles qu'elles deviennent des arcs ABC, quand les planchettes ont été courbées, et les petites faces ABC sont des biseaux.

« Le tonnelier n'a d'autres guides que ses yeux pour former les arêtes courbes des douves ; aussi ne parvient-il que difficilement à les faire de manière que la surface de révolution soit bien ronde et bien fermée. Il n'aurait pas autant de mal et ne consommerait pas autant de bois, s'il se formait, au moyen du procédé de la page 350 (appl. *c*), un patron de douve plane pour chaque espèce de tonneau. La confection d'une sphère par bandes méridiennes, peut en effet s'appliquer à toute autre surface de révolution, comme la confection par zones, de la page 353 (appl. *a*). »

« Il existe en France une machine qui façonne les douves exactement ; elle renferme un fer à rabot qui se meut constamment dans un plan passant par une droite fixe DE. La planche qu'il faut convertir en douve, est courbée convenablement et maintenue à l'égard de DE, dans la position qu'elle doit avoir par rapport à l'axe du tonneau. Le fer forme donc à la fois les faces de joint en biseaux et les arêtes courbes de ces faces.

APPL. (*c*) : Il y a des scieries qui produisent des surfaces de révolution non réglées. Un grand levier tournant A (P. XIII, F 7) est terminé d'un côté par une fourche B. Entre les deux branches de cette fourche, passe un arc d'acier C dont les extrémités sont liées à celles d'une lame de scie D courbée en arc de cercle. Un boulon E traverse les deux branches de la fourche, ainsi que l'arc qu'elles embrassent, et la scie peut osciller circulairement autour de ce boulon. L'essieu F du levier porte à l'une de ses extrémités, une manivelle G, et de cette manivelle part une tringle H qui va rejoindre le bout correspondant de la scie. Un moteur quelconque fait tourner l'essieu, soit au moyen d'une seconde manivelle I, soit au moyen d'un engrenage. Alors, la tringle se meut à peu près en ligne droite, tantôt dans un sens, tantôt dans le sens contraire, ce qui fait pivoter l'arc d'acier, et par suite la scie, autour du boulon E, de droite à gauche et de gauche à droite. Le trait de scie est donc un arc de cercle qui a son centre en E. Or, à mesure que le sciage avance, le levier A tourne sur son essieu, par le seul effet de son poids, ce qui fait décrire au boulon E un arc dont le centre se trouve en K. La voie est donc composée d'arcs de cercles qui ont même rayon et dont les centres sont situés sur une circonférence perpendiculaire à l'axe de rotation F ; par conséquent, cette voie est une surface de révolution.

« Il est visible d'ailleurs qu'au moyen des trous percés sur le grand levier, de ceux qui le sont sur la tringle, des crans de l'arc d'acier et d'un nombre suffisant de scies courbes, on peut faire varier le rayon EK du cercle directeur et celui ED du cercle générateur. Si la distance EK est telle, que l'essieu F rencontre la circonférence D, le bois L est scié selon une surface de révolution analogue à celle des tonneaux. Dans le cas contraire, la voie est une portion de surface annulaire (373). On obtiendrait une surface sphérique, s'il était possible de faire passer l'essieu F par le point E, puisqu'alors cet essieu serait diamètre de l'arc D (350). »

Surfaces enveloppes.

375. Il nous reste, pour terminer l'étude des surfaces, à considérer celles qui sont courbes sans être réglées et qui ne peuvent être engendrées par la révolution d'une courbe autour d'un axe. Pour nous faire une idée de ces surfaces, il convient d'en examiner une espèce particulière.

Supposons donc une courbe plane quelconque AA'A'' (P. XIII, F. 8), une droite BC tangente à cette courbe et une circonférence qui ait A pour centre, et pour diamètre, DE perpendiculaire à BC ou *normale* à la courbe AA'A''; car on appelle *normale* d'une courbe, la perpendiculaire élevée dans son plan, sur sa tangente et par le point de contact.

Si le centre A se meut sur AA'A'', sans que BC cesse d'être tangente et sans que le diamètre DE cesse d'être normal, la circonférence engendrera une certaine surface courbe qui ne sera point réglée, dont la génération se fera non par révolution, mais par un cheminement quelconque, et qui aura deux courbures : celle du cercle et celle de la *directrice* AA'A''.

La même surface pourrait être produite aussi par une sphère qui eût DE pour diamètre et dont le centre A suivit la courbe directrice; car cette sphère ayant la circonférence génératrice pour grand cercle, la présenterait toujours perpendiculairement à la courbe ou aux tangentes, comme le fait la génération précédente. Ainsi, la surface dont il s'agit, peut être formée indifféremment par le cheminement d'une circonférence ou par celui d'une surface sphérique.

Une telle surface enveloppe nécessairement la sphère dans toutes les positions que prend ce corps, ou bien elle enveloppe toutes les positions de la génératrice; aussi l'a-t-on nommée *surface enveloppe*. Qu'on se représente un cylindre creux et droit, touché selon des circonférences (362), par un grand nombre de sphères, dont les centres, liés entre eux par un fil placé selon l'axe, soient très-voisins les uns des autres ; si l'on ploie le fil suivant la courbe AA'A'' (F. 9) et que les génératrices droites du cylindre conservent leur équidistance à ce fil, la surface cylindrique deviendra la surface enveloppe à génératrice circulaire.

Il y a bien d'autres surfaces enveloppes que celle dont nous venons de nous occuper, car toutes les courbes imaginables peuvent servir de directrice et de génératrice. La directrice peut même se trouver une droite. Quand dans ce cas la génératrice est une circonférence constante, la surface enveloppe est celle d'un cylindre droit (297), et si le rayon est variable, la surface devient celle d'un cône droit (320) ou celle d'un hyperboloïde de révolution (p. 335), ou toute autre, selon la loi de la variation. Lorsque la directrice et la génératrice sont des circonférences, la surface enveloppe est annulaire (373). Mais, comme toutes ces espèces ont été suffisamment étudiées sous d'autres noms, nous n'avons à nous occuper que des surfaces enveloppes produites par une courbe plane soit constante, soit variable, dont le centre ou tout autre point est assujetti à parcourir une courbe autre qu'une circonférence, de manière que le plan de la génératrice reste toujours perpendiculaire à la directrice ou aux tangentes ; encore supposerons-nous que la génératrice soit une circonférence.

376. Deux cas peuvent se présenter : ou bien la directrice est une courbe plane, ou bien elle a deux courbures. Dans le premier, une circonférence d'un rayon constant engendre une *surface de canal*. On appelle ainsi cette surface enveloppe, parce qu'en effet les portions non cylindriques des canaux, ont une pareille génération, afin que la même quantité d'eau qui passe dans un certain temps, par une section plane perpendiculaire à la directrice, passe dans le même temps, par toute autre section : aucun engorgement ne peut alors avoir lieu, et l'écoulement est aussi rapide que le permet la pente.

Observons toutefois que les canaux n'ont pas tous une circonférence ou une portion de circonférence pour génératrice ; mais cela n'empêche pas que les sections qu'y font des plans perpendiculaires à la directrice, ne soient toujours égales et de même forme.

Les siphons, les baromètres à plusieurs branches, ceux qui sont contournés à la façon des spirales planes, etc., offrent des exemples d'une surface de canal circulaire. L'exécution d'une pareille surface est assez difficile, soit qu'on la forme au ciseau ou au foret, soit qu'on la forme en roulant des feuilles minces : les ferblantiers de Lyon excellent, dit-on, dans cette dernière opération ; mais leur procédé est purement manuel et ne comporte aucun tracé géométrique.

Si la directrice est à double courbure, si par exemple elle est une spirale cylindrique (p. 336), la génératrice restant toujours une circonférence de rayon constant, on a encore une surface de canal, mais celle-ci est à triple courbure ; on la nomme *surface de canal* *spiral*. C'est celle des serpentins d'alambic : on contourne ainsi ces canaux, pour que la vapeur ait le temps de se condenser, de devenir liquide, avant de sortir de l'appareil distillatoire. La voûte circulaire qui couvre parfois un escalier tournant, présente une demi-surface de canal spiral ; chaque toron d'une corde en offre une entière.

La surface enveloppe dont la directrice est une courbe plane et dont la génératrice circulaire augmente ou diminue constamment, est celle des cornes de certains animaux, celle d'un grand nombre de coquillages, celle du cor de chasse, celle du serpent d'église. Si la génératrice suit la même loi et que la directrice devienne spirale cylindrique ou conique, la surface enveloppe est semblable à celle des tire-bouchons à jour.

Nous n'entrerons pas dans de plus grands détails ; ce qui vient d'être dit des surfaces enveloppes, suffit pour vous apprendre à les distinguer des autres et pour vous guider dans leur formation. Ainsi, vous êtes en état de considérer géométriquement toutes les surfaces qui s'offriront désormais à vos regards. En les comparant à celles que je vous ai fait connaître, vous devinerez leur génération et vous trouverez les moyens d'en exécuter de pareilles. Tel est le but que je me proposais, en vous parlant des surfaces dont on ne s'occupe pas ordinairement dans la Géométrie élémentaire.

FORMATION ET COMPARAISON

DES CORPS.

Tout ce que nous avons vu jusqu'ici concerne uniquement les limites des corps, c'est-à-dire leurs arêtes et leurs faces. Il faut maintenant former les corps avec ces limites et les comparer les uns aux autres.

Les faces d'un corps peuvent être toutes planes, toutes courbes, ou bien les unes sont planes et les autres courbes. Si dans le premier cas, on considère un polygone quelconque comme première face, comme *base* du corps, comme la face qui doit servir à former toutes les autres ; il arrivera ou que toutes les arêtes partant des sommets de cette face seront parallèles entre elles, ou qu'elles se couperont toutes en un seul point du corps, ou qu'elles ne seront ni parallèles, ni concourantes en un point de la surface. On peut donc classer les corps comme il suit.

CORP A FACES	PLANES :	*Arêtes*	parallèles.
			concourantes
			ni parallèles ni concourantes.
	COURBES :	*Il y en a*	une seule.
			plusieurs.
	PLANES ET A FACES COURBES.		

« Tel est l'ordre que nous mettrons dans l'étude des corps, et comme pour les surfaces, nous comparerons toujours celui dont il s'agira, avec tous ceux qui le précéderont, du moins quand de cette comparaison pourra résulter quelque chose d'utile.»

PRISMES.

377. Lorsque toutes les arêtes qui partent des sommets de la base d'un corps, sont parallèles, ce corps prend le nom de *prisme*. Une règle est donc un prisme.

Le prisme est *complet*, si les arêtes parallèles sont égales; il est incomplet et *tronqué*, si elles sont inégales et terminées par un plan.

C'est par leurs bases qu'on distingue les prismes : quand la base est un triangle, un quadrilatère, un pentagone, etc., le prisme est dit *triangulaire*, *quadrangulaire*, *pentagonal*, etc.

La position des arêtes parallèles relativement à la base, sert aussi à distinguer les prismes : ils sont *droits* ou *obliques*, selon que les arêtes sont perpendiculaires ou inclinées sur la base.

378. *La face opposée à la base d'un prisme complet, est toujours parallèle à cette base*; car s'il n'en était pas ainsi, les arêtes parallèles ne pourraient être égales (277).

La face opposée à la base d'un prisme complet, est un polygone égal à cette base (231). Leurs côtés correspondans sont effectivement parallèles (275) et égaux (65); de plus, leurs angles correspondans ont même indication (279).

A cause de l'égalité des deux faces qui limitent les arêtes parallèles d'un prisme complet, on appelle l'une *base inférieure* et l'autre *base supérieure*.

Les faces comprises entre les deux bases sont dites *latérales*. Elles forment des *parallélogrammes*, dans le prisme oblique, et des rectangles dans le prisme droit.

Pour désigner un prisme par des lettres, on énonce d'abord celles des sommets d'une base, puis celles des sommets de l'autre.

Probl. (*a*) : *Dessiner un prisme droit et complet.*

On peut supposer, pour simplifier le dessin, que le prisme repose par sa base inférieure sur le plan horizontal. Alors, la projection horizontale est le polygone ABCDE de cette base (P. XIII, F. 10), et la projection verticale est formée par des perpendiculaires abaissées des sommets A, B, C, D, E sur la ligne de terre A'D', si les parties A'A'', D'D'' des deux extrêmes sont rendues égales à la longueur des arêtes parallèles, et qu'on tire la droite A''D''. Cette droite est la projection verticale de la base supérieure.

Probl. (*b*) : *Dessiner un prisme droit et tronqué.*

Suppons la base sur le plan horizontal et la troncature perpendiculaire au plan vertical. Vous tracerez le polygone ABC de la base au-dessous de la ligne de terre (P. XIII, F. 11); vous abaisserez de chaque sommet, une perpendiculaire sur cette ligne; vous prendrez A'A'', C'C'' égales aux longueurs de la plus grande et de la plus petite des arêtes parallèles; puis vous tirerez A''C''. Cette droite sera la projection verticale de la troncature.

Probl. (c) : *Dessiner un prisme oblique et complet.*

Faites sur le plan horizontal, un polygone ABCD semblable à celui de la base inférieure, d'après l'échelle (P. XIII, F. 12); supposez les arêtes parallèles; dirigées parallèlement au plan vertical, afin qu'elles se projètent verticalement dans leur vraie grandeur; projetez, sur la ligne de terre, le polygone ABCD; prenez A'I égale à l'unité de longueur; portez la pente des arêtes parallèles, de I en K, sur une perpendiculaire à A'I; menez la droite indéfinie A'K et portez-y la longueur A'F' des arêtes parallèles. Les projections verticales de ces arêtes seront A'F' et ses parallèles égales B'G', D'E', C'H'; leurs projections horizontales seront des parallèles à la ligne de terre, menées par A, B, C, D (291); la base supérieure se projetera verticalement sur F'H', parallèle à A'C', et pour avoir la projection horizontale de cette même base, il faudra abaisser sur la ligne de terre, les perpendiculaires F'F, G'G, E'E, H'H, jusqu'à leurs rencontres avec AF, BG, DE, CH.

Ainsi, la figure ABCDEFGH formera la projection horizontale du prisme, et le parallélogramme A'C'H'F' en sera la projection verticale.

Appl. (a): Dans une maison qui a deux pignons et dont le plan forme un rectangle, le toit est un prisme droit, triangulaire et creux. Quand l'édifice n'a pas de pignons, le toit a deux croupes (P. XIII, F. 13) et présente un prisme triangulaire tronqué ABCDEF, terminé aux deux bouts par des triangles égaux qui sont également inclinés sur les arêtes parallèles.

« Il en est de même des tas de pierres qu'on place le long des grandes routes pour les réparer, et de la plupart des piles de bombes, d'obus ou de boulets. »

Appl. (b) : Il y a des doubles-décimètres qui sont des prismes triangulaires droits et complets, dont les bases forment des triangles symétriques. Les deux rectangles égaux sont divisés en centimètres, millimètres, et les lignes de division aboutissent aux arêtes de la grande face : cette disposition rend plus facile le mesurage exact d'une ligne droite.

Appl. (c): On trouve dans tous les cabinets de physique, des prismes droits triangulaires, en verre. La lumière blanche ou ordinaire qui travers ces corps, s'y réfracte de telle manière (p. 276), qu'elle se décompose en sept rayons principaux, présentant les couleurs de l'arc-en-ciel : le rouge, l'orangé, le jaune, le vert, le bleu, l'indigo et le violet. Voilà pourquoi les objets qu'on regarde au travers de ces prismes, paraissent si singulièrement colorés.

APPL. (*d*) : La pièce de bois nommée *arêtier*, qui, dans une charpente, se trouve à l'intersection de deux latis, est un prisme pentagonal. Il en est de même des *noues*, mais dans ce cas les bases ont chacune un angle rentrant. Nous ne considérerons jamais de tels prismes, parce qu'ils peuvent toujours être décomposés en deux autres dont les bases n'aient que des angles saillans.

APPL. (*e*) : Les charpentiers et les tailleurs de pierres exécutent les prismes droits comme il suit : ils coupent le corps par un plan ou, en terme de l'art, ils font un *parement*; puis ils tracent sur ce plan, le polygone de la base et forment d'équerre des faces qui passent chacune par un des côtés, elles se coupent selon des arêtes perpendiculaires à la base (272). Pour exécuter ces faces, on pousse des *plumées*, c'est-à-dire qu'on enlève la matière par entailles faites selon des perpendiculaires au plan du polygone (271 et 256).

APPL. (*f*) : Les menuisiers, les ébénistes, les cartonniers, etc., emploient des moyens tout différens, pour exécuter des prismes creux et droits. Ils façonnent séparément les bases et les faces latérales, de manière que les premières soient égales et que les dernières soient des rectangles de même longueur, ayant pour largeur le côté correspondant de l'une des bases. Quand toutes ces pièces sont assemblées, leur ensemble forme nécessairement un prisme droit.

379. Il y a dans tous les corps, un point qu'il est fort important de connaître et de savoir déterminer; on l'appelle *centre de gravité*; parce qu'il serait l'intersection de tous les prolongemens d'un fil auquel on suspendrait un corps par un point quelconque de la surface, puis par un autre, puis par un troisième, etc.

PROBLÈME : *Déterminer le centre de gravité d'un prisme triangulaire quelconque, uniformément pesant.*

Marquez sur chaque base, le point où se croisent les trois droites menées des sommets aux milieux des côtés (178); joignez les deux points ainsi obtenus; le milieu de la droite de jonction sera le centre de gravité du prisme, si toutes les portions égales de ce corps ont absolument le même poids.

« En effet, le prisme peut être considéré comme formé d'une suite de tranches triangulaires égales aux bases; les centres de gravité de ces tranches également pesantes, sont placés de la même manière dans toutes, et forment une droite parallèle aux faces latérales; le centre de gravité de leur ensemble doit être évidemment au milieu de cette droite; reste donc à faire voir qu'elle passe par le croisement des trois droites menées des sommets d'un triangle aux milieux des côtés, ou que ce croisement est le centre de gravité d'une tranche triangulaire très-mince. »

« Or, un triangle peut être considéré comme formé de lignes droites parallèles à un côté. Le centre de gravité de chacune de ces droites est à son milieu, et par conséquent, celui de leur ensemble est sur la ligne qui passe par tous les milieux, c'est-à-dire sur la droite menée du milieu du côté au sommet opposé. Pour les mêmes raisons, le centre de gravité du triangle est aussi sur la droite menée d'un autre sommet au milieu du côté opposé. Il se trouve donc au croisement des deux droites.

Appl. (*a*) : Lorsqu'un prisme triangulaire ou tout autre corps s'appuie sur une pointe par son centre de gravité, il est en équilibre et y reste quelle que soit la position qu'on lui fasse prendre, parce que son poids est toujours alors entièrement supporté par la pointe. On dit dans ce cas que l'équilibre est *constant*; c'est celui de la plupart des balanciers de machines.

Appl. (*b*) Si la pointe dépasse le centre de gravité, l'équilibre est simplement *stable* : le corps ne peut plus rester dans toutes les positions qu'on lui fait prendre ; mais il revient toujours à celle où le centre et le point d'appui se trouvent sur la même verticale. Cela tient à ce que dans toute autre position, la pointe ne supporte plus entièrement le poids du corps : la partie de ce poids qui n'est pas soutenue, fait tourner le prisme autour du point d'appui, et le centre est forcé de revenir sur la verticale de ce point où il s'arrête après un certain nombre d'oscillations.

« Un pareil effet a lieu pour les balances dont les plateaux sont bien également chargés, pour les balanciers des pendules et des horloges, pour ces petites figures qu'on fait tenir sur la pointe d'un pied, au moyen de deux boules de plomb dont on les charge et qui descendent plus bas que le support. Dans tous ces cas, le centre de gravité du système, est plus bas que le point de suspension ou d'appui. Il en est de même pour un *pèse-liqueur* enfoncé dans un liquide et pour un vaisseau qui flotte sur la mer; aussi les vaisseaux ne chavirent-ils jamais, à moins qu'on ne laisse les voiles en prise à la violence du vent. »

Appl. (*c*) : Quand le centre de gravité se trouve plus élevé que l'extrémité de la pointe, il y a encore équilibre, si ces points sont sur la même verticale; mais cet équilibre est *précaire* : il n'a lieu que pour une seule position du prisme. Dans toute autre, le poids n'est plus entièrement supporté par la pointe; il y a rotation autour du point d'appui et le prisme glisse.

« Cela explique comment il se fait qu'on a d'autant plus de facilité à renverser un corps, que son centre de gravité est plus élevé au-dessus des appuis. C'est qu'il faut alors une moindre inclinaison, pour faire dépasser au centre de gravité, la verticale du point d'appui autour duquel on fait tourner le corps, et qu'une fois cette inclinaison donnée, la chute est un effet du poids. »

« Ainsi, les pièces de bois de même base, de même écarrissage, sont des supports d'autant moins sûrs, qu'elles ont plus de longueur. Ainsi, une voiture est plus exposée à verser, quand la partie la plus pesante de son chargement est très-élevée, que dans le cas où elle se trouve presque au niveau de l'essieu. »

380. *Les sections faites dans tout prisme par deux plans parallèles quelconques, sont des polygones égaux.* Cela se démontre comme l'égalité des deux bases (378). On doit en conclure qu'un prisme oblique peut avoir pour bases, toutes sortes de polygones, inégaux quoique d'un même nombre de côtés. Mais, si le prisme doit être droit, il n'y a que des polygones perpendiculaires à ses arêtes parallèles qui puissent être pris pour ses bases, et ces polygo ne sont tous égaux.

381. *Deux prismes complets sont égaux, quand les trois faces d'un angle solide de l'un égalent les trois faces correspondantes de l'autre.*
Soient les faces CDEAB, CDD'C', CBB'C' (P. XIII, F. 14) égales à leurs correspondantes d'un autre prisme. Les angles DCC', BCC' égaleront leurs correspondans. Or, il n'y a qu'une seule position au-dessus d'un plan, dans laquelle une droite CC' puisse former deux angles déterminés, avec deux droites CD, CB de ce plan : cette position est l'intersection des surfaces coniques dont CD, CB seraient les axes et CC' la génératrice droite (339). Par conséquent, l'arête CC' s'appliquera sur sa correspondante, si l'on superpose les bases inférieures des deux prismes, et par suite, toutes les autres faces se couvriront exactement.

Lors donc que deux prismes, l'un plein et l'autre creux, satisfont à la condition d'égalité, le premier peut se loger dans le second, et le remplir exactement, sans le déborder. Le prisme en relief peut aussi se mouvoir dans le sens des arêtes parallèles, sans cesser de toucher l'autre par tous les points de toutes ses faces latérales (appl. *l*, p. 63).

382. Le principe qui a été démontré dans le n° 233, pour les polygones, a lieu aussi pour les corps. Ainsi, *deux prismes* AD' ad' *sont égaux par symétrie, quand les droites qui joignent les sommets de l'un aux sommets de même rang dans l'autre, ont un plan de symétrie commun* FG (P. XIII, F. 14).

Deux prismes ainsi placés par rapport à un plan FG, sont égaux, s'il y a égalité entre leurs bases, entre leurs faces latérales correspondantes, et entre les coins que forment ces faces soit en se coupant, soit en coupant les bases.

1° Les bases sont égales, même quand elles sont dans des plans différens.

Les parallèles A*a*, E*e* étant divisées en deux parties égales, aux points H, I, forment un trapèze symétrique AE*ea*, et AE $=$ *ae* (185). Pour une semblable raison, EC $=$ *ec*, AC $=$ *ac*. Conséquemment, le triangle ACE $=$ *ace* (164). On verrait de même que ABC $=$ *abc*, et que CDE $=$ *cde*. Donc, les deux polygones ABCDE, *abcde* sont égaux (231).

2° Chaque face latérale de l'un des prismes est égale à la face correspondante de l'autre.

Prenons pour exemple, les deux parallélogrammes AEE'A', *aee'a'*. Un raisonnement pareil au précédent montrera que le triangle AEA' = *aea'*, que le triangle EA'E' = *ea'e'*, et nous en conclurons, comme ci-dessus, que les polygones AEE'A', *aee'a'* sont égaux. On démontrerait de la même manière que tout autre face latérale du prisme AD', est égale à la face correspondante du prisme *ad'*.

3° Un coin quelconque DD' est égal au coin correspondant *dd'* (270).

Élevons sur DD' une perpendiculaire KL, dans le plan DC', et une perpendiculaire KM, dans le plan DE'; menons par K une parallèle à D*d*; enfin, élevons au point *k*, sur *dd'*, une perpendiculaire *kl*, dans le plan *dc'*, et une perpendiculaire *km*, dans le plan *de'*. Les angles LKM, *lkm* seront ceux des coins. Or, DK = *dk*, puisque DD' = *dd'* et que les trois droites D*d*, K*k*, D'*d'* sont parallèles (79); par conséquent, les deux trapèzes CDKL, *cdkl* sont superposables, et KL = *kl*; les deux trapèzes EDKM, *edkm* sont aussi superposables, et KM = *km*. Mais, il en résulte encore que CL = *cl*, et que EM = *em*. Donc, les deux trapèzes CEML, *ceml* sont superposables, puisque par la seconde partie de la démonstration, on ferait voir aisément que les deux parallélogrammes CEE'C', *cee'c'* sont égaux. Ainsi, LM = *lm*; par suite, le triangle KLM = *klm*, et les deux angles LKM, *lkm* sont égaux.

Il est du reste très-visible qu'il ne faudrait que répéter ces constructions et ces raisonnemens, pour se convaincre que tous les autres coins correspondans des deux prismes, même ceux des bases, sont égaux. Chaque partie de l'un de ces prismes a donc son égale dans l'autre.

Mais l'égalité par symétrie pour deux corps, ne permet pas toujours, comme celle du n° 301, la superposition par introduction de l'un dans l'autre, et elle ne permet jamais la superposition par rabattement (232) : les faces du prisme *ad'* ne pourraient pas en effet se rabattre sur celles de AD', sans se désunir pendant le mouvement.

383. Les corps ont des *plans de symétrie*, comme les polygones ont des axes de symétrie : on nomme ainsi tout plan qui partage un corps ou un système de corps en deux parties égales et symétriquement placées. Le plan FG est donc un plan de symétrie pour le système des deux prismes AD', *ad'* (P. XIII, F. 14).

Tout prisme ABCDEF *dont les bases sont des triangles symétriques* (F. 15) *et dont la plus grande face est un rectangle, a un plan de symétrie* DG : c'est le plan qui passe par les axes de symétrie CG, DH des deux triangles (160).

Les sommets A, B et les sommets E, F des deux prismes formés par le plan DG, sont effectivement aux extrémités de droites que ce plan coupe d'équerre et par le milieu (256). La même condition est remplie par rapport aux sommets communs C, D, puisqu'ils sont dans le plan DG.

Si vous tronquez le prisme, de manière à conserver le rectangle ABET, DG sera encore un plan de symétrie pour le nouveau corps.

384. *Tout prisme droit dont les bases sont des triangles symétriques a deux plans de symétrie.*

Si nous supposons que le prisme ABCDEF soit droit (P. XIII, F. 15), il aura DG pour premier plan de symétrie (383); le second sera le plan IKL qui, parallèle aux bases, coupe par le milieu les arêtes parallèles (377).

Remarquez que les deux prismes formés par le plan IKL, se trouvant dans le cas du n° 381, sont à la fois égaux par symétrie et superposables.

Le prisme de la figure 13, qui est terminé par deux triangles symétriques égaux, non parallèles, a aussi deux plans de symétrie, comme le précédent; et celui KL qui coupe les arêtes parallèles, donne deux prismes superposables. C'est que le corps ABCDEF peut être considéré comme provenant d'un prisme droit qu'on a tronqué symétriquement par les deux bouts.

On appelle *axes de symétrie* d'un corps, les droites selon lesquelles se coupent ses plans de symétrie. En conséquence, le prisme droit que représente la figure 15, a pour axe de symétrie, celui du triangle IKL. Il en est de même du prisme de la figure 13. *Chacun de ces axes de symétrie contient le centre de gravité du corps* (379).

385. *Le prisme droit qui a pour bases des triangles équilatéraux, a quatre plans de symétrie* : trois qui passent par les lignes de symétrie des triangles, un qui coupe par le milieu les arêtes parallèles. Il en résulte quatre axes de symétrie : un qui est parallèle aux faces latérales et passe par les centres de figure des bases (181); trois qui sont parallèles à ces bases et se trouvent dans le plan de symétrie IKL (P. XIII, F. 16). Ces quatre axes se coupent en un seul point M qu'on appelle *centre de symétrie* du corps et qui *est aussi le centre de gravité* (379).

Applications : On compose de deux portions égales et symétriquement placées par rapport à un plan, tous les corps, toutes les machines qui doivent pouvoir exécuter les mêmes mouvemens de deux côtés : cela est nécessaire pour que la mobilité soit la même dans un sens que dans l'autre.

« Ainsi, nos voitures ont un plan de symétrie qui coupe l'essieu perpendiculairement en deux parties égales; les bateaux et les vaisseaux ont un plan de symétrie qui va de l'avant-bec à l'arrière-bec, ou de la proue à la poupe, et qui passe par les axes de tous les mâts; les balanciers des machines se trouvent divisés en deux parties égales dans toutes leurs positions, par un plan contenant l'axe de rotation : ce plan de symétrie se meut comme le corps. »

« C'est probablement l'étude de la structure des animaux qui a porté le constructeur à former symétriquement les corps auxquels il doit donner une grande mobilité; car l'homme, les quadrupèdes, les oiseaux et les poissons ont tous un plan de symétrie dans le sens de leur mouvement ordinaire. »

386. La distance des deux bases d'un prisme complet, est nommée sa *hauteur*. Cette hauteur est par conséquent égale à la perpendiculaire abaissée d'un point de la base supérieure, sur la base inférieure (278). Il s'en suit que deux prismes de même hauteur peuvent toujours être placés entre deux plans parallèles qui les terminent.

Deux prismes qui ont des bases équivalentes (190) *et même hauteur, sont équivalens;* c'est-à-dire qu'ils renferment ou qu'ils occupent des espaces égaux, c'est-à-dire qu'ils ont même *volume*, sans être superposables, sans être égaux par symétrie, sans même se ressembler en rien.

Plaçons les bases ABCD, EFG sur un même plan (P. XIII, F. 17); les bases supérieures A'B'C'D', E'F'G' se trouveront alors dans un plan parallèle, dans un plan équidistant (278). Par conséquent, si l'on conçoit entre les deux bases de chacun des corps autant de plans parallèles à ces bases, qu'il est possible d'en mener, il y aura autant de sections dans l'un des prismes que dans l'autre. Or, l'ensemble de toutes les sections de EFGG'F'E', c'est ce corps même; chacune d'elles est égale à la base EFG, et il en est ainsi dans l'autre prisme (380). Les deux corps sont donc composés d'un même nombre de sections équivalentes, ils sont donc équivalens.

Parallélipipèdes.

387. Parmi les prismes quadrangulaires, il en est qui méritent d'être remarqués : ce sont ceux dont les bases sont des parallélogrammes, comme les autres faces. On les nomme *parallélipipèdes*. Quand ils se trouvent droits, ils sont dits *rectangles* ou *carrés*, selon que la base est un rectangle ou un carré. On peut aussi désigner ces corps par les noms de *prismes rectangles*, *prismes carrés* qui sont plus courts et plus faciles à prononcer.

APPLICATIONS : Les piliers, les poteaux, les barres de fer, sont ordinairement des prismes carrés; les pilastres, les pierres de taille brutes, les planches, les fers plats, les chambranles de marbre, les carreaux de vitre, les feuilles de papier même, sont des prismes rectangles.

« Autrefois, la plupart des pièces d'une charpente étaient des prismes carrés; mais aujourd'hui, on ne donne plus cette forme qu'aux *poinçons* qui, placés debout, doivent n'avoir pas plus de tendance à fléchir dans un sens, que dans le sens perpendiculaire à celui-là. Quant aux chevrons, aux pannes, aux poutres, etc., qui doivent résister dans le sens vertical et ne supportent aucun effort horizontal, ce sont maintenant des prismes rectangles. Il résulte de cette forme une grande économie de bois, et il n'y a aucune diminution dans la solidité de l'édifice, puisqu'on place verticalement les faces les plus larges. »

« Les languettes d'assemblage et les tenons droits sont aussi des prismes rectangles; il en est de même des rainures et des mortaises droites, mais ces derniers prismes rectangles sont creux, comme ceux des serrures et des boîtes de toute espèce. Les tenons et les mortaises qui présentent du biais, sont de simples parallélipipèdes complets ou tronqués. »

388. *Les faces latérales opposées d'un prisme rectangle sont égales et parallèles.* D'abord, le rectangle ABCD (P. XIII, F. 18) est parallèle au rectangle opposé EFGH, car les arêtes AE, BF, DH, CG sont égales et parallèles (277). Ensuite ces faces sont égales, puisque ce sont des rectangles qui ont des bases égales CD, GH et des hauteurs égales DA, HE (189).

Dans un parallélipipède non rectangle, les faces latérales opposées sont aussi égales et parallèles. On démontre qu'elles sont parallèles comme précédemment; on démontre qu'elles sont égales en disant que les angles BCD, FGH (P. XIII, F. 19) sont égaux, puisque les côtés de l'un sont parallèles aux côtés de l'autre (279); car les parallélogrammes ABCD, EFGH se trouvent alors dans le cas du n° 189: un angle et ses côtés sont les mêmes dans les deux figures.

On voit par là que *dans tout parallélipipède, deux faces opposées quelconques peuvent devenir les bases du corps ou peuvent être considérées commes telles.* Ainsi, les bases sont aussi bien ABCD, EFGH que ABFE, CDHG (F. 18 et 19).

389. *Un prisme rectangle a trois plans de symétrie, et chacun de ces plans est parallèle à deux faces opposées.*

Si, par le point I, milieu de AD (P. XIII, F. 18), nous menons un plan perpendiculaire à cette arête, il sera parallèle aux bases ABFE, CDHG (273), perpendiculaire à toutes les arêtes qu'il rencontrera (261), et il les divisera en deux parties égales, comme il divise AD (280). Ainsi, IKLM sera bien un plan de symétrie (383), et il en sera de même, pour de semblables raisons, des plans NOPQ, RSTU menés perpendiculairement à AB et à AE par les points N, R milieux de ces arêtes. *Il y a donc trois manières différentes de diviser un prisme rectangle en deux parties égales, superposables et symétriquement placées.* (381).

Vous devez en conclure que le prisme rectangle a trois axes de symétrie; ils joignent les centres de symétrie des faces opposées (196). *Le point Y où se coupent ces trois axes, est en même temps le centre de symétrie et le centre de gravité du corps.*

390. *Un prisme carré a cinq plans de symétrie.*

Il a d'abord les trois plans de symétrie du prisme rectangle dont il est un cas particulier, et si nous supposons que la fig. 18 (P. XIII) représente un prisme carré, nous verrons aisément que les plans ADGF, BCHE qui passent par les diagonales des bases carrées, sont aussi des plans de symétrie (383).

En effet, ADGF, par exemple, passant par AD perpendiculaire aux bases, est lui-même perpendiculaire à ces bases (271). Les diagonales BE, CH se trouvent donc dans des plans perpendiculaires à ADGF. Mais, comme diagonales de carrés, elles sont perpendiculaires à AF, DG (201); par conséquent, en vertu de la démonstration du nº 272, elles sont aussi perpendiculaires au plan ADGF. En outre, ce plan les coupe en deux parties égales, puisque l'intersection des diagonales d'un carré est à leur milieu (187). *Il y a donc cinq manières différentes de diviser un prisme carré en deux parties égales, superposables et symétriquement placées* (381).

Le même prisme a cinq axes de symétrie, au nombre desquels sont les diagonales IL, KM du carré formé par le plan de symétrie parallèle aux bases. Ces cinq axes se coupent au point Y, centre de symétrie et de gravité du corps. Ainsi, *le centre de gravité d'un prisme rectangle ou carré est au milieu de la droite* VX *qui joint les centres de symétrie des deux bases*. Il en est de même dans le cas suivant.

391. *Un prisme droit dont la base est un losange, a trois plans de symétrie, ou peut être divisé de trois manières différentes, en deux parties égales, superposables et symétriquement placées.* Un de ces plans est celui qui partage en deux parties égales, les arêtes perpendiculaires aux bases ou qui est également éloigné de ces bases; les deux autres passent par les diagonales parallèles des losanges, car les diagonales d'une telle figure se coupent à angle droit (193). Les démonstrations seraient les mêmes que pour les deux cas précédens.

392. De tout ce que nous avons dit jusqu'ici sur la position du centre de gravité des prismes, vous pouvez conclure par analogie, que dans un parallélipipède qui n'a pour bases, ni des rectangles, ni des carrés, ni des losanges, *le centre de gravité est au milieu de la droite par laquelle sont jointes les intersections des diagonales de deux faces opposées*. Mais, attendu qu'un tel parallélipipède n'a aucun plan de symétrie quand il n'est pas droit, le centre de gravité n'est pas toujours un centre de symétrie, comme dans les cas précédens.

Vous sentirez bien aussi que dans les prismes qui ont pour bases, des polygones réguliers de 5, 6, etc. côtés, *le centre de gravité se trouve au milieu de la droite qui joint les centres de figures des deux bases* (181).

Enfin, il vous sera facile, après l'étude de ce qui précède, de reconnaître les plans, les axes et le centre de symétrie des prismes à bases régulières, ayant plus de quatre côtés.

APPLICATIONS : Toutes les fois qu'un corps doit tourner sur un axe horizontal, il faut que cet axe passe par le centre de gravité, afin qu'on n'éprouve pas plus de difficulté dans un moment que dans un autre à entretenir le mouvement ; en d'autres termes, afin qu'il n'y ait pas de *points morts*. Lorsque l'axe est vertical, il est nécessaire de remplir la même condition, pour rendre aussi faible qu'il est possible, le frottement de l'arbre dans son collier et prévenir les oscillations.

« Si donc le corps est un prisme carré, dans le premier cas, un parallélipipède carré ou rectangle ou à losanges dans le second, l'axe de rotation devra traverser les deux bases précisément aux centres de symétrie. Ce principe est très-important à observer dans la pose des pivots et des tourillons. On doit aussi l'appliquer dans la construction du *pétrin-mobile*, grande caisse dont la forme est celle d'un prisme carré et qu'on fait tourner sur un axe horizontal, pour battre ou pétrir la pâte qu'elle renferme. Cette machine simple mérite d'être employée : elle donne de beau pain et le fait plus promptement, plus proprement que le boulanger. »

393. *Tout parallélipipède est divisé en deux prismes triangulaires équivalens, par le plan* ADGF *qui contient une diagonale de chaque base* (P. XI.1, F. 19) ; car les triangles CDG, DHG qui composent le parallélogramme CDHG, sont égaux (186) et par suite, les deux prismes triangulaires ABFGDC, AEFGDH ont des bases égales ; de plus, ils ont même hauteur, parce qu'ils sont compris entre deux plans parallèles (278).

Remarquez que les deux prismes triangulaires d'un prisme rectangle (F. 18) peuvent se loger exactement l'un dans l'autre, et qu'ils ne sont pas symétriquement placés par rapport au plan de division. La superposition tient à la perpendicularité des arêtes sur les bases (381), et le défaut de symétrie vient de ce que les diagonales d'un rectangle ne se coupent pas à angle droit.

394. *Tout prisme triangulaire est la moitié d'un parallélipipède de base double et de même hauteur* ; car en construisant un parallélogramme sur le triangle de chaque base, on double cette base (191), et les faces menées par les nouveaux côtés des parallélogrammes, achèvent un parallélipipède de même hauteur que le prisme, et composé de deux prismes triangulaires équivalens (386).

395. Il est une espèce de prisme carré qui mérite une attention particulière : c'est celle dont les faces sont des carrés, comme les bases ; on l'appelle *cube*. Tel est le corps que représente en perspective la figure 20 (P. XIII) ; tels sont les dés à jouer. Les faces ABCD, EFGH sont des carrés, comme les bases ABGH, CDEF, et il en est de même des deux faces ADEH, BCFG. Le cube a donc six faces égales et douze arêtes de même longueur.

Un cube a neuf plans de symétrie différens : IKLM parallèle aux deux bases ; NOPQ parallèles à la face de droite et à celle de gauche ; RSTU parallèle aux deux autres faces ; AGFD, BCEH qui passent par les diagonales des bases ; CDHG, ABFE qui passent par les diagonales de la face de droite et de la face de gauche ; enfin, ACFH, BDEG qui passent par les diagonales des deux faces restantes. *Tout cube peut donc être divisé en deux parties égales, de neuf manières différentes* : trois des divisions donnent des prismes carrés, et les six autres des prismes triangulaires.

Les quatre plans de symétrie qui coupent les bases, ont pour intersection commune, l'axe de symétrie VX ; celle des quatre plans qui coupent BCFG, est l'axe V'X', et celle des quatre plans qui coupent ABCD, est l'axe V''X''. Or, VX et V'X' étant tous deux dans le plan RSTU, se rencontrent au point Y où VX perce le plan IKLM ; VX et V''X'' étant tous deux dans le plan NOPQ, se rencontrent aussi au point où le premier perce le plan IKLM qui contient le second. Y est donc l'intersection des trois axes de symétrie, ou le centre de symétrie, ou le centre de gravité. (390). Ce point étant le milieu de VX, est à la rencontre des diagonales du rectangle BCEH, qui sont aussi diagonales du cube ; les diagonales AF, DG se coupent de même en Y, puisque ce sont celles du rectangle ADFG. Donc, *le centre de symétrie ou de gravité du cube est à l'intersection de ses quatre diagonales*. Il est aisé de voir que ces quatres diagonales sont égales, ainsi que les trois axes de symétrie VX, V'X', V''X''.

396. *Deux cubes sont égaux, quand une arête de l'un est égale à une arête de l'autre* ; car alors chaque face du premier égale chaque face du second (189), et les conditions du n° 381 se trouvent remplies.

397. Si l'on place plusieurs cubes, 4 par exemple, l'un à côté de l'autre sur un plan, on forme un prisme carré AB (P. XIII, F. 21) qui contient autant de cubes que sa longueur AB contient de fois l'arête du cube, et ce nombre de fois est le rapport des deux corps (18). Si à côté de cette première rangée, on en place une seconde CD contenant aussi 4 cubes, le prisme ABCD sera rectangle, et renfermera 8 cubes, c'est-à-dire 4, nombre des cubes d'une rangée, multiplié par 2, nombre des rangées ; ou bien encore 4, nombre de fois que l'arête du cube est contenue dans la longueur AB du prisme rectangle, multiplié par 2, nombre de fois que l'arête du cube se trouve dans la largeur BE du prisme. Ainsi, pour ce second cas, le rapport des deux corps est le produit des nombres de fois que l'arête du petit est contenue dans la longueur et dans la largeur du grand. Du reste, il est visible qu'il en serait de même, quel que fût le nombre des rangées.

Maintenant, sur l'assise ABCD plaçons-en une autre tout-à-fait égale ; nous aurons un nouveau prisme rectangle ABGF qui sera double du précédent et renfermera 16 cubes, c'est-à-dire 8, nombre de cubes qu'il y a dans une assise, multiplié par 2, nombre des assises ou nombre de fois que l'arète du cube est contenue dans la hauteur AF du prisme. *Le rapport du prisme rectangle à un cube, est donc le produit des trois nombres qui marquent combien de fois l'arête du cube est contenue dans la longueur, dans la largeur et dans la hauteur du prisme rectangle*, ou bien *ce rapport est le produit des rapports qui existent entre les trois dimensions du prisme rectangle et l'arête du cube.*

398. Il suit de là que si au lieu de comparer un prisme rectangle et un cube, on compare deux cubes tels que l'arête de l'un contienne trois fois, par exemple, l'arête de l'autre, le rapport des deux corps sera $3\times3\times3=27$, c'est-à-dire que le plus grand contiendra vingt-sept fois le plus petit, ou qu'on aura la proportion $C:c::27:1$, en représentant les deux cubes par C et c.

Le produit d'un nombre rendu ainsi trois fois facteur, a été nommé le *cube* de ce nombre, parce que dans la proportion précédente, il représente un cube. Il y a donc la même distinction à faire entre un cube géométrique et un cube numérique, qu'entre un carré et un quarré (202).

Il faut savoir par cœur les cubes des dix premiers nombres; les voici :

Nombres	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.
Cubes	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729,	1000.

Quant aux nombres qui surpassent 10, on obtient leurs cubes, en les multipliant par leurs quarrés : le cube de 12, par exemple, est $144\times12=1728$.

Lorsqu'on veut exprimer le cube numérique d'une ligne qui n'a pas encore été mesurée, on emploie un signe analogue à celui qui sert à représenter le quarré : le cube numérique de la droite AB, par exemple, s'écrit $\overline{AB}^3$, ce qui se prononce AB *trois*. Le chiffre 3 indique qu'il faudrait écrire $AB\times AB\times AB$, si l'on n'employait pas une abréviation.

399. Observons maintenant, en reprenant l'exemple des deux cubes C et c, que l'arête du premier sera représentée par 3, si celle du second l'est par 1 ou si elle est prise pour mesure. Le rapport des deux corps sera donc le produit des rapports égaux $3:1$, $3:1$, $3:1$ (397), ou $3\times3\times3:1\times1\times1$ (73), ou $27:1$ comme précédemment. Cela nous fait voir que 1 le quatrième terme de la proportion $C:c::27:1$, doit être considéré comme le cube numérique de 1, et que *le rapport de deux cubes est celui du cube numérique de l'arête de l'un, au cube de l'arête de l'autre.*

Application : D'après ce principe, nous aurons la proportion $C:c::A^3:a^3$, entre deux cubes dont les arêtes non mesurées seront A et a. Si donc on connaît la mesure du plus petit, par exemple, on obtiendra celle du plus grand, par une simple règle de trois, après avoir mesuré une arête du premier et une arête du second. Cette remarque est utile : elle simplifie souvent les calculs qu'exige le mesurage des corps.

« Supposons, pour exemple, qu'un cube de terre *c*, ayant des arêtes de 2 pieds, ait rempli trois tombereaux, et que vous vouliez savoir combien de tombereaux remplia un autre cube de la même terre, qui a des arêtes de 6 pieds. Vous écrirez la proportion $C : 3^t :: (6)^3 : (2)^3$. Mettant à la place des deux derniers termes, 216 cube de 6, et 8 cube de 2 (398), vous trouverez que $C : 3^t :: 216 : 8$ ou (p. 74) que $C = \frac{3^t \times 216}{8} = \frac{648^t}{8} = 81^t$. Ainsi, sans avoir mesuré le grand cube en tombereaux, vous serez sûrs qu'il contient 81 voitures de terre. »

400. *Le rapport de deux prismes rectangles égale celui des produits de leurs trois dimensions exprimées en nombres, au moyen d'une mesure commune.*

Pour le démontrer, représentons par L la longueur du plus grand P des deux corps, par L' sa largeur et par H sa hauteur. En le comparant à un cube C dont l'arête soit A, nous aurons pour leur rapport,

$$(L : A) \times (L' : A) \times (H : A) \qquad (397),$$

ou (73) $$L \times L' \times H : A^3 \qquad (398),$$

ce qui donnera $$P : C :: L \times L' \times H : A^3.$$

Soient l, l', h les dimensions du plus petit p des prismes, nous trouverons aussi

$$C : p :: A^3 : l \times l' \times h.$$

Multipliant les termes correspondans de ces deux proportions, on obtient (73)

$$P \times C : C \times p :: L \times L' \times H \times A^3 : A^3 \times l \times l' \times h.$$

Divisant les deux termes du premier rapport par C, et ceux du second par A^3, ce qui ne change rien à ces rapports (77), on a enfin

$$P : p :: L \times L' \times H : l \times l' \times h.$$

401. Désignons par B, b les bases rectangulaires de deux prismes, et soient L et L', l et l' les côtés inégaux de ces rectangles ou leurs bases et leurs hauteurs; nous aurons

$$B : b :: L \times L' : l \times l' \qquad (199).$$

Multipliant les termes de cette proportion, par ceux de cette autre :

$$H : h :: H : h,$$ nous obtiendrons

$$B \times H : b \times h :: L \times L' \times H : l \times l' \times h,$$ et par

conséquent (400), $P : p :: B \times H : b \times h$, ce qui nous apprend que *deux prismes rectangles ont aussi pour rapport, celui des produits de leurs bases multipliées par leurs hauteurs*, ces bases étant exprimées en nombres, au moyen d'une mesure commune, ainsi que les hauteurs.

402. Considérons maintenant deux prismes quelconques P', p' dont les bases soient B' b' et les hauteurs, H, h. Nous pourrons tracer deux rectangles B, b équivalens aux polygones B' b' (p. 202, probl. et p. 198, probl. b). Sur ces rectangles, nous pourrons construire deux prismes droits P, p qui seront équivalens aux prismes quelconques P', p', s'ils ont H et h pour hauteurs (386). Or, on aura pour ces prismes rectangles,

$$P : p :: B \times H : b \times h \qquad (401),$$

et en substituant aux termes de cette proportion, leurs équivalens, on obtiendra

$$P' : p' :: B' \times H : b' \times h.$$

Donc, *deux prismes quelconques ont pour rapport, celui des produits de leurs bases multipliées par leurs hauteurs*, ces bases et ces hauteurs étant exprimées en nombres, au moyen d'une commune mesure.

Vous en conclurez facilement que *si deux prismes ont des bases égales ou équivalentes, leur rapport est celui de leurs hauteurs*, et *que s'ils ont même hauteur, leur rapport est celui des bases*.

Appl. (*a*) : Vous savez qu'une pile de bois de chauffage, haute de 2 mètres, contient 10 cordes, et vous avez besoin de connaître promptement combien il y a de cordes de bois dans une autre pile haute de 5 mètres, qui a même longueur que la première.

« Comme la largeur est aussi la même, les deux piles ont des bases égales (189) ; elles sont donc entre elles, comme leurs hauteurs, leur forme étant supposée celle d'un prisme rectangle, et vous pouvez écrire la proportion $P : 10^c :: 5 : 2$; elle donne (p. 74),

$P = \frac{10^c \times 5}{2} = \frac{50^c}{2} = 25^c$. Ainsi, sans avoir cordé la grande pile, vous êtes sûrs qu'elle contient 25 cordes de bois. »

Appl. (*b*) : Une pille de bois haute de 4 pieds et longue de 16^{pi}, contient 2 cordes. Combien renferme de cordes une autre pille haute de 9^{pi} et longue de 24^{pi}, les deux piles étant supposées des prismes rectangles.

« Vous regarderez la longueur des bûches comme hauteur des prismes, et les grandes faces verticales comme bases. Vous écrirez alors la proportion (402) $P : 2^c :: 24 \times 9 : 16 \times 4$, et vous en

déduirez $P = 2^c \times \frac{24 \times 9}{16 \times 4} = 2^c \times \frac{6 \times 9}{16} = 2^c \times \frac{54}{16} = \frac{108^c}{16} = 6^c\,\frac{3}{4}$. »

Appl. (*c*) : Il est entré trois voitures de pierres dans un mur long de 5 toises, large de $\frac{1}{3}$ de toise, et haut de $1^t\,\frac{1}{2}$. Combien faudra-t-il de voitures des mêmes pierres, pour bâtir un mur long de 25^t; large de $\frac{1}{2}^t$ et haut de 2^t?

Vous poserez la proportion (400) $P : 3^v :: 25 \times \frac{1}{2} \times 2 : 5 \times \frac{1}{3} \times 1\frac{1}{2}$

ou $P : 3^v :: 25 : \frac{5}{2}$, et vous trouverez $P = 3^v \times \frac{25 \times 2}{5} = 30^v$ »

403. Deux prismes sont *semblables* quand toutes les faces de l'un forment des polygones semblables aux faces correspondantes de l'autre. Alors les arêtes correspondantes sont toutes dans le même rapport, et ce rapport est aussi celui des hauteurs; car si l'on pose les deux prismes sur le même plan, le principe 280 est applicable.

Deux prismes semblables ont pour rapport celui des cubes numériques de deux arêtes correspondantes.

Soient B, H, A, la base, la hauteur et une arête de la base du prisme P; b, h, a, la base, la hauteur et l'arête correspondante du prisme p. Nous pourrons écrire

$$P : p :: B \times H : b \times h \qquad (402).$$

Mais $\qquad B : b :: A^2 : a^2$ (251) $\qquad$ et $\qquad H : h :: A : a.$

Multipliant ces deux dernières proportions, on obtient

$$B \times H : b \times h :: A^2 \times A : a^2 \times a,$$

et par conséquent, $\qquad P : p :: A^3 : a^3.$

Or, si A', a' sont deux autres arêtes correspondantes quelconques,

$$A : a :: A' : a' \qquad \text{et} \qquad A^3 : a^3 :: A'^3 : a'^3,$$

puisqu'il suffirait de multiplier la première proportion deux fois par elle-même, pour obtenir la seconde. Conséquemment

$$P : p :: A'^3 : a'^3.$$

PYRAMIDES.

404. Un corps dont la forme est telle que toutes les arêtes qui partent de la base se coupent en un point de la surface, est appelé *pyramide* : les clochers pointus et à faces planes sont donc des pyramides. La pyramide n'a qu'une seule base. Le sommet de l'angle solide opposé à la base, est le *sommet* du corps. Les triangles qui forment cet angle solide, sont les *faces latérales*. La perpendiculaire abaissée du sommet sur la base, est la *hauteur*.

Pour désigner une pyramide par des lettres, on énonce celle du sommet la première et ensuite celles de la base.

C'est au moyen des bases qu'on distingue les pyramides. Si le polygone est un triangle, un quadrilatère, un pentagone, etc., la pyramide est dite *triangulaire*, *quadrangulaire*, *pentagonale*, etc.

Il y a aussi des pyramides *régulières* et des pyramides *irrégulières* : dans les premières, la base est un polygone régulier, et la perpendiculaire abaissée du sommet, sur ce polygone, passe par le centre;

cette ligne est *l'axe* du corps. Il suffit que ces deux circonstances n'aient pas lieu à la fois, pour que la pyramide soit irrégulière.

PROBL. (*a*) : *Dessiner une pyramide régulière.*

Pour que le dessin soit plus simple et plus utile, il faut poser la base ABCDEF sur le plan horizontal (P. XIII, F. 22) et placer SA, une des arêtes concourantes, parallèlement au plan vertical. Alors cette arête se projète verticalement dans sa vraie grandeur S'A' (292), et il en est de même de l'axe S'G qui est vertical.

Tracez donc sur le plan horizontal et d'après l'échelle, un polygone régulier ABCDEF semblable à la base, et tirez les rayons SA, SB, etc. pour avoir les projections horizontales des arêtes concourantes. La figure qui en résultera, sera la projection horizontale de la pyramide. Projetez ensuite les points S, A, B, etc., sur la ligne de terre; prenez GS' égale à la hauteur, et joignez S' aux points A', B', etc. La figure A'S'D' sera la projection verticale, dans laquelle S'B' représentera en raccourci les deux arêtes SB, SF, et S'C', les deux arêtes SC, SE.

PROBL. (*b*) : *Dessiner une pyramide irrégulière.*

Faites le polygone ABCD de la base sur le plan horizontal (P. XIII, F. 23) et projetez-en les sommets sur la ligne de terre; portez l'unité de mesure de A' en E; prenez la perpendiculaire EF égale à la pente d'une des arêtes concourantes, et portez la longueur de cette arête sur A'F de A' en S'. Vous exprimerez par là que l'arête qui a pour projection verticale A'S', est parallèle au plan vertical (292); sa projection horizontale sera AS parallèle à la ligne de terre, si ABCD est convenablement tourné; le sommet se projetera en S', S, et pour achever les projections de la pyramide, vous n'aurez plus qu'à joindre S' aux points D', B', C', puis S aux points D, B, C.

Les droites CB, CD, CS sont pointillées, parce que l'ensemble des faces ASB, ASD forme un toit qui les cache, lorsque l'œil regarde le corps verticalement, de haut en bas. La droite S'G, perpendiculaire à la ligne de terre, est la hauteur de la pyramide. Enfin, les arêtes concourantes, excepté celle du point A, sont toutes en raccourci dans les deux projections; mais le dessin fourni les moyens d'en obtenir les vraies longueurs.

Voulez-vous connaître la longueur de l'arête qui aboutit en C, par exemple? Il suffira de porter la projection horizontale SC, sur la ligne de terre, de G en C'', et de tirer S'C''; car l'arête du point C est l'hypothénuse d'un triangle rectangle dont les deux autres côtés sont S'G et SC : cela se voit aisément, si l'on place, par la pensée, la verticale S'G en S et le point C' en C.

APPL. (*a*) : La pyramide régulière dont la base repose sur un plan horizontal, est beaucoup plus difficile à renverser qu'un prisme de même base et de même hauteur (p. 367, appl. *c*). Voilà pourquoi l'on a donné la forme pyramidale à ces mases isolées dont la base a peu d'étendue et qui s'élèvent comme monumens, sur les places publiques ou à certains embranchemens de grandes routes : on les nomme *obélisques*. Les fameuses pyramides d'Égypte doivent surtout à la même forme, cette stabilité qui leur fait braver le temps depuis vingt-six siècles. La base d'une de ces montagnes factices est un carré dont le côté à 600 pieds ; sa hauteur qui est de 500 pieds, permet de l'apercevoir de plus de dix lieues.

Appl. (*b*) : Les toits des tours sont parfois des pyramides creuses, comme ceux de certains clochers. Un édifice à base carrée, est ordinairement couvert par quatre lattis égaux formant une pyramide quadrangulaire et régulière : c'est là ce qu'on appelle un *pavillon*. On donne la même forme à quelques piles de boulets, de bombes, d'obus.

Appl. (*c*) : Il y a des marteaux composés d'une pyramide régulière et d'un prisme droit qui se tiennent et ne font qu'un même corps : les deux parties ont une base commune. D'autres marteaux présentent deux pyramides appliquées l'une contre l'autre par leurs bases. Enfin, on trouve dans les cristaux, des pyramides combinées entre elles ou avec des prismes.

Appl. (*d*) : Deux cas se présentent dans la construction d'une pyramide : ou bien l'on connaît la base et les angles que font les faces avec cette base, ou bien l'on a la hauteur, la base et le point qui doit être la trace de la perpendiculaire abaissée du sommet.

« Dans le premier cas, il faut tracer sur un parement dégauchi ou face plane d'un corps donné, un polygone égal à la base; puis à partir des côtés, pousser d'équerre des *plumées* ou entailles, selon des lignes droites qui fassent avec des perpendiculaires à ces côtés, les angles que doivent faire les faces correspondantes avec la base (270) : on emploie à cet effet la fausse-équerre. Il ne reste plus qu'à exécuter des faces qui passent par le fond des plumées ; ces faces forment en se coupant, les arêtes de la pyramide (267). »

« Il est facile de faire retomber le second cas dans le premier. Du point S, trace de la perpendiculaire S'G (P. XIII, F. 22), abaissez une perpendiculaire SH, sur le côté AB de la base ; puis construisez un triangle rectangle S'SH qui ait pour côtés de l'angle droit, cette perpendiculaire et la hauteur S'G ; l'angle en H sera celui que la face triangulaire correspondante devra faire avec la base et qu'il faudra lever avec la fausse-équerre (p. 31, probl. *a*). »

405. Si, par le sommet S d'une pyramide quelconque (P. XIII, F. 24) et par les diagonales AC, AD, etc. de la base, on fait passer des plans, le corps se trouvera décomposé en autant de pyramides triangulaires SABC, SACD, etc., qu'il y aura de triangles dans la base, ou que cette base aura de côtés moins deux (206), et la pyramide totale sera la somme de toutes ces pyramides partielles.

406. *Tout plan parallèle à la base d'une pyramide quelconque, y fait une section* abcde *semblable à cette base* (P. XIII, F. 24).

D'abord, ab, bc, etc., sont parallèles à AB, BC, etc. (275), et par conséquent, les angles b, etc., de la section, sont égaux aux angles, B, etc., de la base (279). Ensuite, les parallèles donnent

$$ab : AB :: Sb : SB \quad \text{et} \quad Sb : SB :: bc : BC \quad (81).$$

Il s'ensuit $\qquad ab : AB :: bc : BC,$

et l'on démontrerait de même la proportionnalité des autres côtés. Les deux figures $abcde$, ABCDE sont donc dans le cas des polygones semblables (235).

On voit par là que le sommet d'une pyramide peut être considéré comme le centre de similitude directe de toutes les sections parallèles à la base (238).

407. *Les sections parallèles d'une pyramide sont comme les quarrés numériques des distances du sommet à leurs points correspondans.*

Ce principe qui est pour les polygones, ce qu'est celui du n° 81 pour les droites, se déduit aisément du précédent; car ABCDE, $abcde$ étant semblables (P. XIII, F. 24), donnent

$$ABCDE : abcde :: \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2 \ (251). \quad \text{Or}, \quad \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2 :: \overline{SB}^2 : \overline{Sb}^2 \quad (73),$$

puisque $\qquad AB : ab :: SB : Sb;$

par conséquent, $\qquad ABCDE : abcde :: \overline{SB}^2 : \overline{Sb}^2.$

Application : Les rayons lumineux qui, partis d'un point, éclairent un polygone, forment une pyramide. La section faite dans cette pyramide, à une distance du sommet triple de celle de la base, donnerait un polygone neuf fois plus grand, en chaque point duquel la clarté serait nécessairement neuf fois moins forte. Donc le polygone transporté dans cette section, y recevrait neuf fois moins de lumière que dans sa première position. Par là se trouve démontré la loi (c) de la page 197.

408. Lorsqu'il a été enlevé d'une pyramide, la partie comprise entre le sommet et une section parallèle à la base, il reste ce qu'on appelle un *tronc de pyramide à bases parallèles.* Un tel corps a donc deux faces parallèles, inégales, semblables (406), et les arêtes qui partent de l'une ou de l'autre, concourent en un seul point situé hors de la surface. Le tronc est régulier, quand il provient d'une pyramide régulière : alors toutes les arêtes concourantes sont égales.

Les cercueils sont des troncs irréguliers à bases parallèles et pentagonales. Les mitres des cheminées sont des troncs réguliers ou irréguliers à bases quadrangulaires.

Probl. (a) : *Dessiner un tronc de pyramide à bases parallèles.*

Nous supposerons un tronc régulier, parce que c'est celui qui se présente le plus souvent dans les constructions. En le plaçant de manière que ses bases soient horizontales, on a pour projection horizontale, deux polygones réguliers, d'un même nombre de côtés et concentriques ABCDE, *abcde* (P. XIII, F. 26). Pour déterminer la distance de deux côtés parallèles AB, *ab*, il faut placer une règle sur la base supérieure, perpendiculairement à l'arête *ab*, et prendre la partie de cette règle comprise entre *ab* et un fil-à-plomb tenu au-dessus de AB. Les projections horizontales des arêtes concourantes sont les droites A*a*, B*b*, etc., qui joignent les sommets correspondans des deux polygones.

Si vous prenez pour projection verticale de la base inférieure, la partie A'D' de la ligne de terre, la base supérieure se projetera sur une parallèle *a'd'* tirée à une distance donnée par la hauteur du tronc. Abaissez donc des perpendiculaires des points A, B, etc., sur la ligne de terre, et des points *a*, *b*, etc., sur la parallèle; puis joignez les points correspondans A' et *a'*, B' et *b'*, etc.; vous tracerez ainsi les projections verticales des arêtes concourantes, et le trapèze A'D'*d'a'* sera la projection verticale du tronc.

PROBL. (*b*) : *Trouver la hauteur de la pyramide dont provient un tronc donné.*

Les côtés correspondans des bases du tronc sont entre eux comme les distances de leurs extrémités au sommet de la pyramide totale (81); donc,

$$ab : AB :: Sa' : SA'.$$

Les arêtes concourantes et la perpendiculaire de hauteur SE' sont coupées proportionnellement par les bases (280); donc,

$$Sa' : SA' :: Se' : SE' \qquad \text{et} \qquad ab : AB :: Se' : SE'.$$

Mais de cette dernière proportion, on déduit que

$$AB - ab : AB :: SE' - Se' : SE' \qquad (76),$$

et parce que $SE' - Se' = e'E'$ hauteur du tronc, on a

$$AB - ab : AB :: e'E' : SE'.$$

Donc,

$$SE' = \frac{e'E' \times AB}{AB - ab},$$

c'est-à-dire que *pour trouver la hauteur de la pyramide totale, il faut multiplier celle du tronc, par un côté quelconque de la grande base, et diviser le produit par l'excès de ce côté sur le côté correspondant de la petite base.*

409. Les plans de symétrie d'une pyramide doivent passer par le sommet, car nul plan ne pourrait diviser en deux parties égales et perpendiculairement, les arêtes concourantes ni une de ces arêtes et celles de la base ou les diagonales. De plus, ils doivent être

perpendiculaires à ce polygone et passer par ses lignes de symétrie. Si ces conditions ne sont pas remplies, il est impossible que les sommets de la base soient symétriquement placés à l'égard d'un plan. D'après cela, *une pyramide régulière a autant de plans de symétrie, qu'il y a de côtés dans la base* (215).

Tous les plans de symétrie d'une pyramide régulière, passant par le sommet et par le centre de la base, se coupent tous selon la perpendiculaire S'G (P. XIII, F. 22) et ne produisent qu'*un seul axe de symétrie*. Donc, *une pyramide n'a point de centre de symétrie* (385). Mais elle a comme tous les corps, un centre de gravité (379) : il est situé sur l'axe S'G, dans la pyramide régulière, *et se trouve au quart de cette droite à partir de la base.*

Le tronc à bases parallèles a les mêmes plans et le même axe de symétrie que la pyramide dont il provient ; mais son centre de gravité est autrement situé.

410. Après avoir considéré les pyramides isolément et les avoir combinées avec le plan, nous allons les comparer entre elles. Nous parlerons d'abord de l'égalité des pyramides les plus simples : elle se reconnaît à plusieurs caractères, comme celle des triangles (164 et suivans).

1° *Deux pyramides triangulaires sont égales, quand trois faces de l'une égalent trois faces de l'autre.* Si, par exemple (P. XIII, F. 27), ABC=A'B'C', SAC=S'A'C', SBC = S'B'C', la superposition des deux premiers triangles, opérera celle des deux angles solides C, C', d'après la démonstration du n° 381 ; S' tombera donc sur S ; les quatre sommets d'une des pyramides se trouveront placés en même temps sur ceux de l'autre, et les surfaces des deux corps se confondront.

2° *Deux pyramides triangulaires sont égales, quand leurs arêtes correspondantes ont même longueur ;* car alors les quatre faces de l'une égalent les faces correspondantes de l'autre (164).

3° *Deux pyramides triangulaires sont égales, quand une face de l'une est égale à une face de l'autre et que les trois coins formés par la première face, sont égaux à ceux que forme la seconde.* Si, par exemple, SAB=S'A'B', que le coin SA=S'A', que le coin SB = S'B' et que le coin AB = A'B', la superposition des triangles SAB, S'A'B' et celle des coins SA et S'A', SB et S'B', placera nécessairement l'arête S'C' sur l'arête SC. Ensuite, la superposition des coins AB et A'B', mettra A'C' sur AC, B'C' sur BC, et produira par conséquent celle des sommets C' et C.

Il existe encore d'autres caractères d'égalité pour les pyramides triangulaires ; mais ils ne sont pas assez utiles pour que nous les fassions connaître.

411. *Deux pyramides régulières quelconques* (404) *sont égales, lorsqu'elles ont des polygones égaux pour bases, et même hauteur ;* car si l'on superpose les bases, les axes se confondent et les sommets aussi.

412. *Deux pyramides irrégulières quelconques sont égales, quand il y a égalité entre les bases, entre deux des coins correspondans formés par ces bases et entre les secondes faces de ces coins, disposées d'ailleurs de la même manière.*

Nous pouvons prendre pour exemple, les deux pyramides de la figure 27 (P. XIII), car ce qui sera dit de deux pyramides triangulaires, pourra l'être de deux pyramides quelconques. Or, les bases ABC, A'B'C' étant égales, se superposeront ; comme le coin A'B' a même indication que le coin AB, la face A'B'S' s'appliquera sur le plan ABS, et comme ces deux triangles sont supposés égaux, ainsi que leurs angles A, A', ils se superposeront aussi, ce qui mettra le sommet S' sur le sommet S.

413. *Deux pyramides quelconques qui ont des bases équivalentes et même hauteur, sont équivalentes.*

Soient pour exemple, les deux pyramides SABCDE, TFGH (P. XIII, F. 24 et 25); nous pourrons toujours placer les bases ABCDE, FGH sur un même plan. Les sommets S, T se trouveront alors autant élevés l'un que l'autre au-dessus de ce plan, et si nous menons entre le sommet S et la base ABCDE, autant de plans coupans, parallèles à cette base, qu'il est possible d'en mener, nous obtiendrons le même nombre de sections dans les deux pyramides. Or, l'ensemble des sections de chacun des corps équivaudra à ce corps. Tout se réduit donc à démontrer que les sections faites par un même plan parallèle à celui des bases, sont équivalentes ; car alors il sera démontré que les deux pyramides sont composées d'un même nombre de sections équivalentes, et l'on devra en conclure qu'elles occupent le même espace, qu'elles ont le même volume.

Considérons les deux sections *abcde*, *fgh* faites à la même distance des bases, et soit SI la perpendiculaire de hauteur dans la première pyramide ; elle percera en *i* le plan coupant, et nous aurons (407)

$$abcde : ABCDE :: \overline{Si}^2 : \overline{SI}^2.$$

De même,

$$fgh : FGH :: \overline{Tk}^2 : \overline{TK}^2,$$

si TK est la perpendiculaire de hauteur dans l'autre pyramide. Or, $TK = SI$, $Tk = Si$. Donc,

$$abcde : ABCDE :: fgh : FGH ;$$

d'où il suit que *abcde* est équivalent à *fgh*, puisque ABCDE équivaut à FGH.

414. *Deux pyramides sont équivalentes, quand elles se trouvent symétriquement placées par rapport à un plan.*

Il vous suffira d'appliquer la démonstration du n° 382, pour vous convaincre qu'effectivement les bases ABC..., A'B'C'.., sont égales (P. XIII, F. 28), et que les perpendiculaires SF, S'F' abaissées des sommets sur ces bases, ont même longueur (413); car, puisqu'il y a symétrie, le plan DH doit aussi couper d'équerre et par le milieu, la droite FF' qui joint les pieds de SF, S'F'. Vous pourriez même démontrer que toutes les autres faces correspondantes sont égales et qu'elles forment des coins égaux ; d'où vous concluriez que *les pyramides sont égales par symétrie.*

Deux pyramides placées symétriquement par rapport à un plan, ne peuvent pas toujours se superposer ou se loger exactement l'une dans l'autre. Vous devez même noter qu'en général, la symétrie exclut la superposition, pour les corps. Il est, par exemple, impossible d'introduire la main droite dans le gant de la main gauche, sans le déformer. L'égalité par symétrie n'est au fond, pour les corps irréguliers, qu'une équivalence de volume, sauf quelques exceptions que nous avons signalées dans le chapitre des prismes.

Ajoutons qu'on peut superposer les deux pyramides égales que donne chaque plan de symétrie d'une pyramide régulière (409), dans le cas où la base a un nombre pair de côtés, mais qu'il n'en est plus ainsi, quand le nombre des côtés est impair : il n'y a plus alors qu'une égalité de symétrie.

415. Deux pyramides sont semblables, quand elles sont copies exactes l'une de l'autre, ou ce qui est la même chose, *lorsque les faces correspondantes sont semblables et que les coins correspondans sont égaux.*

Il s'ensuit que *si l'on coupe une pyramide quelconque* SABCDE (P. XIII, F. 24), *par un plan parallèle à la base*, *la pyramide retranchée* Sabcde *est semblable à la pyramide totale ;* car alors les coins sont les mêmes, les bases sont semblables (406), et les angles du triangle SAB, par exemple, sont égaux à ceux de *Sab* (275).

416. On reconnaît à plusieurs caractères que deux pyramides triangulaires sont semblables.

1° *Deux pyramides triangulaires sont semblables, quand les arêtes correspondantes sont parallèles.*

D'abord, tous les triangles de la pyramide SABC (P. XIII, F. 29) sont semblables aux triangles correspondans de la pyramide *sabc* (169), puisque tous les angles SAC, BSC, etc., sont égaux aux angles *sac*, *bsc*, etc. (279). On doit en conclure que les arêtes correspondantes des deux pyramides sont proportionnelles. Maintenant, prenons $Sa' = sa$, et par le point a', menons un plan parallèle à la base ABC. Les arêtes de $Sa'b'c'$ seront aussi proportionnelles à celles de SABC (280); elles auront donc mêmes longueurs que celles de *sabc*; par suite, les pyramides $Sa'b'c'$, *sabc* seront égales (410) et offriront les mêmes coins. Or, ceux de $Sa'b'c'$ appartiennent aussi à SABC. Donc enfin, SABC et *sabc* sont des pyramides semblables. (415).

2° *Deux pyramides triangulaires sont semblables, si le rapport entre les arêtes correspondantes, est toujours le même ;* car alors les triangles correspondans sont semblables (172), et comme dans le cas précédent, les coins correspondans sont égaux.

Les autres caractères de la similitude des pyramides triangulaires, sont peu utiles. Quant aux rapports qui dirivent de cette similitude, ils seront faciles à établir, lorsque l'on connaîtra ceux des prismes et des pyramides.

417. *Tout prisme triangulaire* ABCDEF *peut être décomposé en trois pyramides triangulaires équivalentes* (P. XIII, F. 30).

Faites passer par D et par AB, un plan coupant; vous détacherez une pyramide triangulaire DABC qui aura même base et même hauteur que le prisme, et il restera la pyramide quadrangulaire DABFE.

Par D et par BE, faites passer un second plan coupant; vous obtiendrez une seconde pyramide triangulaire DBEF ou BDEF, car chaque face étant un triangle comme la base, peut la remplacer. Or, cette nouvelle pyramide a même base DEF que le prisme et même hauteur, puisque son sommet B est un point de la base inférieure de ce prisme; elle a donc une base et une hauteur égales à celles de DABC; par conséquent, ces deux pyramides sont équivalentes (413).

Mais, le triangle ABE=BEF, puisque la face ABFE du prisme est un parallélogramme (191). Ainsi, la pyramide triangulaire restante DABE a une base et une hauteur égales à celles de DBEF, et par conséquent, ces deux corps sont équivalens

Concluez de là que *toute pyramide triangulaire* DABC *est le tiers d'un prisme triangulaire de même base et de même hauteur;* car en menant par A, B, des parallèles à CD, puis par D, des parallèles à CA, CB, jusqu'aux premières, et en joignant les intersections E, F, on construirait effectivement un tel prisme.

418. *Le prisme triangulaire tronqué* ABCDEF *vaut trois pyramides qui ont pour base, la base* ABC *du prisme et pour sommets, ceux de la troncature* DEF (P. XIII, F. 31).

Faites passer un plan coupant par D et par AB; vous détacherez une pyramide triangulaire DABC qui remplira les conditions, et il restera une pyramide quadrangulaire DABFE.

Faites passer un second plan coupant, par D et par BE; vous formerez une seconde pyramide triangulaire DABE, équivalente à celle qui aurait son sommet en C et ABE pour base; car, puisque CD est parallèle à la face ABFE du prisme, CABE aurait même hauteur que DABE (413). Or, CABE peut avoir pour base, ABC et pour sommet, le point E; elle remplit donc aussi les conditions.

Quant à la pyramide triangulaire restante DBEF, elle peut avoir BDF pour base et le point E pour sommet. Considérée ainsi, elle équivaut à la pyramide ABDF, car AE est parallèle à BDF. Mais, ABDF a aussi ABF pour base, si D est regardé comme le sommet, et la pyramide DABF équivaut à celle qui aurait son sommet en C et pour base, ABF. Enfin si l'on retourne cette dernière, F devient son sommet et ABC sa base.

419. *Deux pyramides triangulaires quelconques ont même rapport que les produits de leurs bases multipliées par leurs hauteurs.*

En effet, SABC (P. XIII, F. 29) est le tiers d'un prisme P de même base ABC et de même hauteur SD; *sabc* est le tiers d'un prisme *p* qui aurait *abc* pour base et *sd* pour hauteur (417). Par conséquent,

$$\mathrm{SABC} : sabc :: \mathrm{P} : p,$$

puisque deux entiers se contiennent comme leurs tiers. Mais (402)

$$\mathrm{P} : p :: \mathrm{ABC} \times \mathrm{SD} : abc \times sd,$$

Donc, $\mathrm{SABC} : sabc :: \mathrm{ABC} \times \mathrm{SD} : abc \times sd.$

420. *Deux pyramides triangulaires semblables ont même rapport que les cubes numériques de leurs lignes correspondantes.*

Si les pyramides SABC, *sabc* sont semblables (P. XIII, F. 29), les prismes P, *p* dont elles forment les tiers sont semblables aussi (415 et 403), et

$$\mathrm{P} : p :: \overline{\mathrm{AB}}^3 : \overline{ab}^3. \qquad \text{Mais} \qquad \mathrm{SABC} : sabc :: \mathrm{P} : p.$$

Par conséquent, $\mathrm{SABC} : sabc :: \overline{\mathrm{AB}}^3 : \overline{ab}^3.$

Les mêmes raisonnemens conduiraient à un semblable résultat, pour deux autres arêtes quelconques, et même pour les hauteurs SD, *sd*. Ainsi, quand on connaît le volume d'une pyramide triangulaire, on peut trouver par une simple règle de trois, celui d'une pyramide semblable, si l'on a les longueurs de deux des lignes correspondantes.

Application : Je supposerai, pour montrer l'importance du rapport établi dans le dernier numéro, qu'une pyramide triangulaire de bronze, haute de 10 pieds, pèse 1200 livres, et qu'afin de connaître le prix d'une pyramide du même bronze, tout-à-fait semblable, qui aurait 50 pieds d'élévation, on veuille savoir quel en serait le poids. Il suffira de représenter ce poids par une lettre, P par exemple ; d'écrire la proportion $\mathrm{P} : 1200\text{℔} :: (50)^3 : (10)^3$; de calculer le cube de 50 et celui de 10 (398) ; puis, de faire une règle de trois ; car les poids de deux corps d'une même matière, sont entre eux comme les volumes. On obtiendra successivement $\mathrm{P} : 1200\text{℔} :: 125000 : 1000$;

$$\mathrm{P} = \frac{1200\text{℔} \times 125000}{1000} = 1200\text{℔} \times 125 = 150\,000 \text{ livres}.$$

POLYÈDRES.

Les prismes, les pyramides et en général tous les corps dépourvus de faces courbes, portent un nom commun : on les appelle *polyèdres*. Mais, ce nom est aussi donné en particulier, aux corps à faces planes, qui ne sont ni des prismes, ni des pyramides, c'est-à-dire aux corps dans lesquels les arêtes qui partent d'une face, ne sont ni toutes parallèles, ni toutes concourantes en un seul sommet. L'étude des polyèdres embrasse donc généralement tous les corps à faces planes, et en particulier, tous ceux qui diffèrent des prismes et des pyramides.

421. Un polyèdre a au moins quatre faces, y compris sa base; car trois plans qui se coupent deux à deux, ne peuvent embrasser que cet espace non terminé qui a été appelé angle solide (281). C'est par le nombre de leurs faces qu'on distingue les polyèdres : ils s'appellent *tétraèdres*, s'ils en ont quatre, *hexaèdres*, s'ils en ont six, *octaèdres*, s'ils en ont huit, *dodécaèdres*, s'ils en ont douze, *icosaèdres*; s'ils en ont vingt. Les autres sont dits *polyèdres à cinq faces, à sept faces*, etc. Les tétraèdres sont nécessairement des pyramides.

Application : Les opticiens exécutent des verres plans d'un côté et à facettes planes de l'autre, qui sont de véritables polyèdres; ils en portent même le nom. L'objet qu'on regarde au travers d'un pareil verre, paraît être situé en autant d'endroits différens, qu'il y a de facettes. Cette multitude d'images du même corps est due à la réfraction des rayons de lumière qu'il réfléchit sur les divers plans du verre.

On fait aussi des miroirs polyèdres qui multiplient les images par réflexion. »

422. *Deux polyèdres sont égaux, quand toutes les faces de l'un et ses coins sont égaux aux faces correspondantes et aux coins correspondans de l'autre;* car la superposition pourrait alors avoir lieu.

Deux polyèdres sont égaux par symétrie, lorsque leurs sommets correspondans se trouvent à la même distance d'un plan qui coupe à angles droits, les droites terminées par ces sommets. Ce principe se démontrerait absolument comme celui du n° 382.

423. *Deux polyèdres sont semblables, si leurs faces correspondantes sont semblables et si leurs coins correspondans sont égaux :* il est visible qu'alors ils sont copies exactes l'un de l'autre.

On doit en conclure que *deux polyèdres semblables peuvent être partagés en un même nombre de pyramides triangulaires semblables* (415 et 416). Pour former ces pyramides, il faut diviser les faces semblables des polyèdres, en un même nombre de triangles (236) et joindre les sommets de tous ces triangles avec un de ceux du polyèdre; cela produira d'autres triangles qui seront les faces latérales de pyramides dont les sommets se confondront.

424. *Deux polyèdres semblables ont pour rapport, celui des cubes numériques de leurs lignes correspondantes;* car ils sont entre eux comme leurs pyramides triangulaires correspondantes,

et le rapport de ces pyramides est précisément celui qui vient d'être indiqué. (420).

Polyèdres réguliers.

425. Un polyèdre est régulier, quand toutes ses faces sont des polygones réguliers égaux et qu'en même temps tous ses angles solides sont composés d'un même nombre d'angles plans : il y a aussi égalité entre ces angles solides, puisqu'il sont formés d'un même nombre d'angles plans égaux.

Les polyèdres réguliers appartiennent soit à la classe des prismes, soit à celle des pyramides, soit à celle des corps à faces planes, dans lesquelles les arêtes qui partent d'une face, ne sont ni parallèles, ni concourantes en un seul sommet.

Il y a cinq polyèdres réguliers et il ne peut y en avoir davantage : cela tient à ce que la somme des angles plans d'un angle solide, doit être moindre que 360° (283).

Il résulte de là, en effet, qu'on peut faire un angle solide avec trois, avec quatre, avec cinq angles de triangles équilatéraux, et qu'on ne saurait en employer six, attendu que ces angles valent chacun 60° et que $60^\circ \times 6 \quad 360^\circ$.

Un angle solide peut aussi renfermer trois angles de carrés; mais il ne peut en contenir quatre, puisque $90 \quad 4 = 360^\circ$.

Trois angles de pentagones réguliers, de 108°, donnent un angle solide, lorsqu'ils sont convenablement réunis ; mais quatre de ces mêmes angles font en somme 432°.

Enfin, il est impossible d'assembler en angle solide, des angles d'hexagones réguliers, parce que chacun vaut 120°, que $120^\circ \quad 3 = 360^\circ$ et qu'il faut au moins trois angles plans pour faire un angle solide (281). Quant aux autres polygones réguliers, leur angle intérieur est encore plus grand que celui de l'hexagone.

Lorsque les angles solides d'un polyèdre régulier sont formés par trois triangles équilatéraux égaux, le corps n'a que quatre faces : on l'appelle *tétraèdre régulier.* De quelque manière qu'il soit jeté sur le sol, il se place toujours sur une face ; la pointe opposée se trouve en l'air, comme le sommet d'une pyramide régulière posée sur sa base. C'est qu'en effet le tétraèdre régulier est une pyramide triangulaire et régulière dont les faces latérales sont égales à la base, ou dont toutes les arêtes ont même longueur.

La figure 32 (P. XIII) est le développement d'un tétraèdre régulier : trois faces ABC, CDE, BEF sont rabattues sur le plan de la quatrième BEC, et il suffit de relever ces trois faces de manière à confondre les trois points A, D, F en un seul, pour former un tétraèdre creux.

Si chaque angle solide d'un polyèdre est produit par trois carrés égaux, le corps a six faces : on l'appelle *hexaèdre régulier* ou cube (395). La figure 33 est le développement d'un cube creux. Il suffit pour former le corps, de relever les faces ABCD, CEFG, DHIK, GHLM ; de façon qu'elles fassent des coins droits avec CDHG ou que les droites AB, EF, IK, LM donnent un carré sur lequel vienne s'appliquer LMNO.

Lorsqu'il y a quatre triangles équilatéraux à chaque angle solide, le polyèdre prend le nom d'*octaèdre régulier*, parce qu'il a huit faces égales. Il se compose de deux pyramides régulières de même hauteur, qui ont un carré pour base commune. La figure 34 est le développement d'un octaèdre creux et régulier.

Un polyèdre dont chaque angle solide est produit par trois pentagones égaux et réguliers, a douze faces et porte le nom de *dodécaèdre régulier*. La figure 35 est son développement.

Enfin, quand chaque angle solide d'un polyèdre est formé par cinq triangles équilatéraux et égaux, le corps est un *icosaèdre régulier*, c'est-à-dire qu'il a vingt faces égales et régulières Son développement est représenté par la figure 36. Les triangles 1, 2, 3, 4, 5 réunis en angle solide, forment une pyramide pentagonale; il en est de même des triangles 16, 17, 18, 19, 20, et les deux pyramides sont liées entre elles par les triangles 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, qui deux à deux font dix coins.

426. *Tous les sommets d'un polyèdre régulier sont sur une même surface sphérique dont le centre est aussi celui du polyèdre.*

Il est facile de reconnaître la vérité de ce principe pour le cube (P. XIII, F. 37). Le quadrilatère ABCD est un rectangle, puisque les arêtes AB, CD sont perpendiculaires sur la base BECF (377); les diagonales AC, BD de ce rectangle, qui sont deux diagonales du cube, ont même longueur et se coupent par le milieu (187) au centre G de symétrie (196). Or, le rectangle EFHI est égal à ABCD, puisque BC=EF et que AB=FH; donc, ses diagonales EH, FI, qui sont aussi diagonales du cube, et qui se coupent aussi par le milieu, en G, ont même longueur que AC, BD. Donc enfin, les huits sommets du cube appartiennent à la surface sphérique qui aurait son centre en G et GA pour rayon. (350).

Quant aux autres polyèdres, leur peu d'importance doit nous dispenser d'une démonstration.

427. *Une surface sphérique concentrique à un polyèdre régulier et tangente à une des faces, touche toutes les autres à leurs centres.*

Dans le cube (P. XIII, F. 20), l'axe de symétrie VX étant l'intersection de plans perpendiculaires à la base ABGH (395), est perpendiculaire aussi sur cette base, et il en est de même des autres axes de symétrie, par rapport aux faces qu'ils rencontrent. D'ailleurs, Y, centre de symétrie, est le milieu de chacun de ces axes, et tous sont égaux. Conséquemment, une sphère qui aurait son centre en Y et YV pour rayon, toucherait les six faces du cube aux extrémités des axes de symétrie ou aux centres de symétrie de ces faces (356).

428. *Tout polyèdre régulier est composé de pyramides égales et*

régulières qui ont leurs sommets au centre, et dont les bases sont les faces du polyèdre. Ce principe résulte du précédent (411).

Enfin, deux polyèdres réguliers qui portent le même nom, qui ont le même nombre de faces, sont des corps semblables (423).

CORPS A FACES COURBES.

Les corps qui n'ont qu'une seule face courbe sont la sphère (350), l'anneau rond (373), le *fuseau* dont la surface est produite par un arc de cercle DBE tournant autour d'un axe DE qui le coupe (P. XIII, F. 6), et en général, tous les corps que termine une surface de révolution engendrée par une courbe quelconque qui rencontre deux fois l'axe de rotation. Nous n'avons à nous occuper que du premier; encore n'en dirons-nous que quelques mots, attendu que la plupart des propriétés de la sphère appartiennent à sa surface.

Sphère.

429. Puisque tout plan qui passe par le centre d'une surface sphérique, la divise en deux parties égales et superposables (354), il divise aussi en deux parties égales, le corps limité par cette surface, et ces deux parties sont symétriquement placées. Conséquemment, *la sphère a une infinité de plans de symétrie et d'axes de symétrie.* Ces axes étant diamètres, sont égaux, et puisqu'ils se coupent tous au centre, là est le centre de symétrie. *Le même point est encore le centre de gravité* (379). Aussi, quand une boule tombe, son centre suit une droite verticale, soit qu'elle tourne, soit qu'elle ne tourne pas.

430. Une sphère peut être considérée comme un polyèdre d'un très-grand nombre de petites faces planes, appliquées sur la surface sphérique et se confondant avec elle à très-peu près. Il s'ensuit que deux sphères de rayons différens, sont deux corps semblables (423). Par conséquent, *le rapport des volumes de deux sphères égale celui des cubes numériques des diamètres ou des rayons* (424); car les cubes des diamètres et des rayons sont proportionnels, comme ces lignes.

431. On nomme *sphère creuse* le corps compris entre deux surfaces sphériques concentriques. Chacune de ses projections présente deux circonférences concentriques dont la plus petite est pointillée. Ses plans et ses axes de symétrie, ainsi que son centre de gravité, sont les mêmes que dans le cas où la sphère serait pleine.

Appl. (*a*) : La sphère est un corps fréquemment employé. Nous avons déjà cité plusieurs de ses usages, en parlant de sa surface; nous ajouterons que plusieurs ouvriers se servent de globes de verre remplis d'eau, pour augmenter la clareté qu'une lampe répand sur leur ouvrage.

« Supposons une lumière L destinée à éclairer un point A (P. XIII, F. 38). Ce point ne recevra qu'un très-petit nombre des rayons que L envoie dans toutes les directions, et sera en général faiblement éclairé. Mais, plaçons une sphère d'eau entre L et A; le rayon LB qui n'arrivait pas sur A, va se réfracter en entrant dans le liquide, et prendre une direction BC plus rapprochée de la normale BD (p. 276). A sa sortie du globe, le même rayon s'écartera de la normale CG, et sa nouvelle direction CA passera par le point qu'il s'agit d'éclairer ou du moins dans le voisinage. Il en sera de même de tous les rayons contenus dans le cône de lumière ELF tangent à la sphère, si cette sphère est placée à une distance convenable du point A, et par conséquent, ce point se trouvera environné d'une grande clarté. »

APPL. (*b*) : On sait que le diamètre du Soleil vaut 110 fois celui de la Terre, ou que si le diamètre de la Terre est représenté par 1, celui du Soleil doit l'être par 110. Or, le cube de 1 est 1, celui de 110 est 1 331 000. Le volume du Soleil contient donc le volume de la Terre 1 331 000 fois.

« Si vous représentez le diamètre de la Terre par 11, celui de la Lune sera 3. Les cubes de ces deux nombres sont 1331 et 27. Par conséquent, le volume de la Terre est à celui de la Lune, comme 1331 est à 27; c'est-à-dire que la Terre est environ 49 fois aussi grosse que la Lune. »

« Ainsi, vous voyez qu'au moyen du principe 430, on peut trouver le rapport de deux sphères, sans avoir besoin d'en calculer les volumes. »

APPL. (*c*) : Les globes de carton et de verre, ceux qu'on fait en feuilles métalliques, les bulles de savon, les grelots, etc., sont des sphères creuses. Les bombes et les obus seraient aussi dans cette classe de corps, sans le trou nommé *œil* et le *culot*, portion de sphère pleine, limitée par un plan et opposée à l'œil. Ce culot est destiné à empêcher les projectiles de heurter les corps par le côté de la fusée : il marche toujours en avant, comme partie la plus dense.

LOIS DE LA NATURE : Le nuage qui se résout en pluie, verse une immense quantité de gouttes d'eau sphériques très-voisines les unes des autres, et quand le Soleil luit en même temps, les rayons qui frappent chaque gouttelette, s'y réfractent. Il en résulte une décomposition de la lumière tout-à-fait semblable à celle qui a lieu dans le prisme (p. 365), et chaque rayon solaire SA (P. XIII, F. 39) produit un rayon rouge, un rayon orangé, un jaune, un vert, etc. Tous ces rayons colorés vont frapper la concavité de la surface sphérique, en des points B, etc, opposés à A; une partie de chacun sort de la gouttelette en se réfractant de nouveau selon BC, etc.: mais une autre partie se réfléchit suivant BD, etc., parce que la concavité de la surface d'une sphère transparente produit, jusqu'à un certain point, les mêmes effets qu'un miroir sphérique (p. 345). Aux points D, etc., les rayons colorés réfléchis se réfractent en

50

sortant de la gouttelette, et il est aisé de voir que les nouvelles directions DO, etc., doivent concourir ou se couper.

« Si donc vous êtes placé entre la pluie et le Soleil, votre œil pourra recevoir ou le faisceau de rayons colorés provenant du rayon SA, ou celui que donnera un autre rayon SA'; et si derrière la pluie, se trouve une nuée obscure, le contraste vous fera distinguer parfaitement les sept couleurs d'une goutte d'eau. »

« Mais, parmi toutes les gouttelettes, il s'en trouve d'autres qui sont aussi dans des positions propres à produire pour vous un faisceau de rayons colorés. Comme ces positions doivent être par rapport au Soleil et à votre œil, les mêmes que celle de la gouttelette ABD, il est clair qu'elles se trouvent sur l'intersection de la surface cylindrique droite qui a SE pour génératrice, et de la surface conique droite dont la génératrice est OE, ces deux surfaces ayant pour axe commun ST, parallèle à SA, menée par l'œil. Or, cette intersection est une circonférence (336). Par conséquent, les points colorés que vous apercevrez sur la nuée obscure, formeront un arc de cercle d'autant plus grand que la droite ST sera plus élevée au-dessus du sol ou que vous serez placé à une plus grande hauteur : il est même possible que l'*arc-en-ciel* ou l'*Iris* forme un cercle entier. »

« On aperçoit quelquefois deux arcs-en-ciel en même temps. Le second provient de gouttelettes situées au-dessus de celles du premier. Un rayon S*a* s'y réfracte selon *ab*, se réfléchit une première fois selon *bd*, une seconde fois selon *df*, et sort en se réfractant suivant *f*O. Ainsi, le second arc-en-ciel est dû à deux réflexions, tandis que le premier provient d'une seule. Comme à chaque réflexion une partie de chaque rayon coloré sort de la gouttelette, il est clair que le second arc doit être moins vif que le premier, et qu'il peut même arriver qu'on ne l'aperçoive pas. »

« Dans des cas fort rares, un troisième arc-en-ciel paraît au-dessus des deux précédens; mais il est très-faible, attendu qu'il est produit par trois réflexions. »

« Pour vous convaincre que cette explication du phénomène de l'arc-en-ciel est la vraie, il me suffira de vous dire, que placé sur un lieu un peu élevé, quelques instans après le lever du Soleil, on aperçoit un arc aux sept couleurs, sur les prairies couvertes de rosée. D'ailleurs, les jets d'eau qui s'éparpillent dans l'air, offrent assez souvent le même phénomène. »

« La lune peut aussi produire un arc-en-ciel, mais il est très-pâle. Enfin, les vagues de la mer brillent quelquefois des couleurs de l'Iris, et il en résulte un arc tourné en sens contraire de celui des nuages pluvieux. »

Polyèdres à faces courbes.

432. Les corps que terminent plusieurs faces courbes, peuvent toujours être décomposés en parties de corps dépourvus d'arêtes; par exemple, le corps qui aurait pour limites plusieurs surfaces sphériques coupées les unes par les autres, serait formé au fond de plusieurs parties de sphères. Ainsi, nous n'avons rien de particulier à dire sur les polyèdres à faces courbes.

APPL. (*a*): Les *verres ardens*, qu'on appelle aussi *lentilles*, parce que les plus usités ont la forme de la graine qui porte ce nom, présentent deux portions de sphère accolées (P. XIV, F. 1). La lumière s'y réfracte de telle manière, que la plupart des rayons solaires qu'ils reçoivent d'un côté, vont se couper à peu près au même point de l'autre côté. Il en résulte que vers ce point, la lumière et la chaleur sont fort vives; aussi l'appelle-t on foyer.

« Quand les deux portions de sphères ont le même rayon, le foyer de la lentille est à peu près au point F centre de la calotte sphérique ABC; si les rayons sont différens, la distance BF égale leur demi-somme. »

« Il existe à Paris, une lentille de douze pieds de tour dont les calottes ont huit pieds de rayon; elle fond presque subitement l'argent et l'or qu'on place au foyer; le fer forgé peut même y devenir liquide. »

« C'est encore à la réfraction de la lumière dans les lentilles, que sont dus les effets de la lanterne magique et de la fantasmagorie; c'est enfin au moyen de ces verres, que certaines lunettes, les télescopes et les microscopes doublent, triplent, centuplent, etc., les dimensions des corps sur lesquels on les dirige. Il y a même des lentilles qui rendent les objets 512 millions de fois plus gros qu'ils ne sont réellement. »

APPL. (*b*): D'autres lentilles, concaves des deux côtés, offrent deux portions de surface sphérique ABC, A'B'C' et une surface cylindrique dont les droites AA' et CC' sont génératrices (P. XIV, F. 2). L'effet de ces verres est d'augmenter l'angle de rayons émanés d'un point. Ainsi, les rayons DE, DF partis d'un point D, se dirigent, après avoir traversé le verre, selon GH, IK, et l'angle HLK qu'ils forment alors, est plus grand que EDF. C'est pour cela que les verres à double concavité conviennent aux myopes. Les presbytes au contraire, font usage des verres à double convexité (p. 318, loi *b*).

APPL. (*c*): On connaît sous le nom de *ménisques*, des lentilles formées par une surface sphérique convexe et une surface sphérique concave qui se coupent selon une circonférence ou que sépare une surface cylindrique. Les ménisques à bord tranchant sont analogues, pour leurs propriétés, aux lentilles doublement convexes, et les ménisques à bord large le sont aux lentilles doublement concaves.

CORPS A FACES PLANES ET A FACES COURBES.

La nature et l'industrie produisent un grand nombre de corps limités à la fois par des faces planes et par des faces courbes; mais nous considérerons seulement les cylindres, les cônes et les portions de sphère, parce que les autres peuvent être décomposés en parties de ceux-là ou ne donnent lieu à aucune application importante des principes de la Géométrie.

Cylindres.

433. La surface cylindrique n'est pas limitée dans le sens de son axe; mais le cylindre qui est un corps, doit nécessairement avoir une longueur bornée. Quand il est complet, comme celui de la figure 35 (P. X), il est terminé par deux cercles parallèles qu'on appelle ses *bases ;* ces cercles ont pour circonférences, des génératrices courbes de la surface cylindrique et sont par conséquent égaux. S'il est tronqué et droit, comme le cylindre de la figure 39, il a pour faces planes, un cercle A et la face elliptique B"C" (305). S'il est tronqué et oblique, il peut avoir pour faces planes, deux cercles égaux, mais non parallèles.

Appl. (*a*) : Plusieurs architectes font maintenant les tuyaux des cheminées en cylindre creux. Cette forme convient beaucoup mieux que celle du prisme rectangle; elle rend le tirage très fort : elle est exempte de ces coins dans lesquels la chaleur du foyer se fait à peine sentir, et où s'établissent en conséquence, des courans d'air descendans qui contrarient l'ascension de la fumée et la refoulent par fois dans l'appartement.

Appl. (*b*) : On fait usage dans quelques manufactures, de cylindres cannelés. Ils peuvent l'être de plusieurs façons. Dans la partie A (P. XIV, F. 3) les cannelures sont des demi-cylindres creux dont les axes sont génératrices droites du cylindre principal B; elles sont séparées par des portions de la surface courbe de ce grand cylindre. Le corps est alors terminé par plusieurs surfaces cylindriques et par deux faces planes festonnées.

« Les cannelures peuvent se toucher ou se couper deux à deux, selon une génératrice droite, comme en C. Quelquefois, elles sont formées par des plans méridiens du cylindre principal, et dans ce cas le corps D a plus de deux faces planes; mais il n'a qu'une surface courbe ou tout au plus deux : celle dont les parties séparent les cannelures et celle qui forme les fonds. »

« Enfin, les cannelures peuvent être des prismes triangulaires: alors le corps n'a que des faces planes, si les prismes E ont deux à deux une arête commune, ou bien il a plusieurs faces planes et une seule surface courbe, si les cannelures F sont séparées. »

434. Le cylindre droit a une infinité de plans de symétrie qui se coupent selon l'axe. Le plan par lequel cet axe est coupé perpendiculairement et en deux parties égales, est aussi un plan de symétrie. Donc, tous les diamètres de la section que fait ce dernier plan dans le cylindre, sont des axes de symétrie, comme l'axe même du corps; *le centre de cette section, est le centre de symétrie et de gravité du cylindre* (379).

Un cylindre oblique n'a ni plans, ni axes, ni centre de symétrie. Cependant, tout plan qui passe par l'axe, divise le corps en deux parties égales et superposables. Il en est de même du plan parallèle aux bases qui coupe l'axe par le milieu. Pour superposer la moitié de droite sur la moitié de gauche (P. X, F. 36), il suffit de la renverser en la retournant, puisque l'angle G' = B' et que l'angle H' = C'. Pour superposer le demi-cylindre d'en haut sur le demi-cylindre d'en bas, on n'a qu'à le faire glisser selon l'axe commun F'A'.

D'après cela, *le centre de gravité d'un cylindre oblique est au milieu de son axe*, comme celui d'un cylindre droit.

435. Puisqu'un cercle n'est au fond qu'un polygone régulier d'un très-grand nombre de petits côtés, le cylindre peut être considéré comme un prisme d'un très-grand nombre de faces latérales fort étroites. Il s'ensuit que *le rapport des volumes de deux cylindres, est égal à celui des produits de leurs bases multipliées par leurs hauteurs* (402), les hauteurs étant mesurées comme celle des prismes, selon des perpendiculaires abaissées d'un point de chaque base supérieure, sur le plan de la base inférieure.

Donc, *si les cylindres ont même base, leur rapport est celui des hauteurs, et s'ils ont même hauteur, leur rapport est celui des bases.*

APPLICATIONS : Le fût d'une colonne monumentale, qui peut être considéré comme cylindrique, se trouve déjà élevé de 5 pieds et doit en avoir 50. On voudrait connaître combien coûtera la pierre qui entrera dans cette colonne; sachant que les cinq premiers pieds en renferment pour 95f. Il suffit de multiplier 95f par le rapport 10 de 50 à 5; le produit 950f sera le prix de toute la pierre qu'on doit employer.

« Vous pouvez aussi trouver le rapport des volumes et celui des poids de deux cylindres de même base ou de même hauteur, sans avoir besoin de calculer ces volumes.

436. Pour que deux cylindres droits soient copies l'un de l'autre ou semblables, il faut et il suffit que le rapport de leurs axes soit le même que celui de leurs diamètres. Si les cylindres sont obliques, il faut de plus que les génératrices droites de l'un, soient inclinées sur la base, comme celles de l'autre. *Deux cylindres semblables sont dans le même rapport que les cubes numériques de leurs axes ou de leurs diamètres* (435 et 403).

437. Les corps creux, cylindriques à l'intérieur et à l'extérieur, portent le nom de *manchons cylindriques*. Ces manchons sont *réguliers*, quand les deux surfaces courbes, droites et complètes, ont le même axe. Tel est le cas des tuyaux de conduite, des anneaux plats, des verres à boire, etc.

PROBLÈME : *Dessiner un manchon cylindrique régulier et vertical.*

Tracez sur le plan horizontal, deux circonférences concentriques A, avec les rayons des surfaces cylindriques (P. XIV, F. 4); l'intervalle sera la projection horizontale du manchon; elle égale chacune des bases. Abaissez du centre une perpendiculaire AA'' sur la ligne de terre; prenez A'A'' égale à la longueur ou hauteur du corps; menez quatre tangentes parallèles à AA'', et par A'' tirez B''C'' parallèle à B'C'. Le rectangle B'C'C''B'' sera la projection verticale du manchon, dans laquelle les droites pointillées D'D'', E'E'' formeront, avec D'E', D'E'', celle du cylindre creux.

APPLICATIONS : Un grand nombre de manchons cylindriques, nommés *tubes*, sont confectionnés dans les verreries. On emploie la plupart de ces tubes comme tuyaux de conduite, dans les laboratoires de chimie; les autres sont convertis en thermomètres et en baromètres.

« Le thermomètre est un tube terminé dans le bas par une sphère creuse, fermé à l'autre bout, rempli en partie de mercure ou d'esprit de vin coloré, et tout-à-fait purgé d'air. Plus il fait chaud et plus le liquide monte dans le tube; plus il fait froid et plus le liquide descend. On divise en 80 ou en 100 parties de même volume, la portion de cylindre que parcourt le liquide, quand après avoir placé l'instrument dans la glace fondante, on le met dans l'eau bouillante. Ces parties sont les degrés du thermomètre; ils mettent à même de comparer la chaleur, la température d'une journée, à la température d'une autre. C'est aussi par l'observation du thermomètre, qu'on parvient à régler la température d'une chambre, d'un atelier qu'échauffe un poêle; l'économie et la salubrité veulent qu'elle ne dépasse point 12 degrés et qu'elle soit toujours à-peu-près la même. »

« Le tube du baromètre a environ 30 pouces de longueur et n'est fermé que par un bout. On le remplit de mercure, puis on le renverse dans une cuvette pleine du même métal liquide. Il se vide sur-le-champ, en partie : une portion de mercure tombe dans la cuvette; mais tout n'y tombe pas à beaucoup près, parce que la pression de l'air sur le liquide de la cuvette, soutient celui du tube et le soutient à une hauteur de 27 à 28 pouces, ce qui est dû à ce qu'il n'y a point d'air dans la partie vide de ce tube. »

« Le vent s'élève-t-il, le mercure du baromètre descend; le temps est-il à l'orage, à la tempête, le mercure descend encore davantage : son niveau supérieur n'est plus qu'à 26 pouces et quelques lignes au-dessus de celui de la cuvette. Au contraire, le métal liquide s'élève lorsque le ciel est pur et sec, et il dépasse 28 pouces de quelques lignes ; mais ordinairement, il descend quand le temps est à la pluie. Je dis ordinairement, parce que cela n'arrive pas toujours, quoi qu'en dise le vulgaire qui prétend que les prédictions du baromètre sont infaillibles. »

« N'allez pas vous imaginer que ces mouvemens du mercure tiennent à sa nature : il serait possible de faire des baromètres avec toute sorte de liquides. L'eau même pourrait servir ; mais l'instrument se trouverait alors fort incommode : il faudrait un tube d'environ 32 pieds, hauteur à laquelle la pression de l'air peut faire monter l'eau dans les pompes aspirantes. »

« Une expérience très-facile vous convaincra d'ailleurs que la suspension et les mouvemens du mercure dans les baromètres, sont produites par la pression variable de l'air. Montez à la tour de la Cathédrale, avec l'instrument à la main ; vous verrez le mercure descendre à mesure que vous vous éleverez. Il s'ensuit que le baromètre peut servir au mesurage des hauteurs ; nous verrons plus loin, la manière de l'employer à cet usage. »

Cônes.

438. Le cône a pour limites, une surface conique et un cercle qui est la base du corps. S'il est tronqué, il a deux faces planes : sa base et la troncature. La première est toujours un cercle, lorsque le cône est circulaire ; la seconde est un cercle ou une face elliptique (327 et 328).

Appl. (*a*) : Quand un corps tourne autour d'un axe vertical, il est ordinairement porté par un pivot. Ce pivot est un véritable cône, si le corps tournant a peu de poids ; il offre un cône arrondi vers le sommet, si le corps est très-pesant.

« La forme conique donnée aux pivots diminue considérablement la perte de force qui résulte de leur frottement contre les parois des crapaudines. Cependant, d'après la théorie et l'expérience, le frottement d'un corps sur un autre ne dépend que de la pression occasionnée par le poids : en général, l'étendue, ni la forme des faces frottantes, n'exercent aucune influence ; mais ici ce n'est pas le frottement qui diminue, c'est seulement son effet qui devient moindre et presque nul, à raison de la très-petite distance qui existe entre l'axe de rotation et les points en contact. »

Appl. (*b*) : Une des plus belles applications du cône, c'est la construction des *paratonnerres*. On appelle ainsi des barres cylindriques de fer placées sur un édifice, terminées en pointe et mises en communication avec la terre, ou mieux avec l'eau, au moyen d'une corde en fils de fer ou de plusieurs verges qui se tiennent. La pointe est un véritable cône d'or ou de *platine* : comme ces métaux ne se rouillent pas à l'air, le cône ne s'émousse jamais. »

« Il faut absolument qu'il en soit ainsi, pour que *l'aiguille* conserve sa propriété préservatrice. Cette propriété lui vient de celle qu'ont les pointes d'attirer, de *soutirer* la foudre. Quand un nuage orageux arrive au-dessus d'un paratonnerre, la foudre passe peu à peu, sans éclairs, sans éclats, dans l'aiguille et va se perdre dans la terre : le nuage se décharge et devient moins dangereux. Si dans ce moment on essayait de toucher la corde, l'approche de la main en ferait sortir une étincelle, un véritable éclair qui pourrait donner la mort. »

« Il arrive quelquefois que l'action d'un paratonnerre sur un nuage, occasionne une explosion et fait tomber la foudre sur l'édifice; mais il n'y a rien à redouter de cet événement à 10 mètres (30 pieds) de l'aiguille : la foudre ne peut tomber dans un cercle de ce rayon, sans se diriger sur le paratonnerre qui aussitôt la conduit dans le sol. On se donne donc toute sécurité, en restreignant à 20 mètres l'intervalle de deux aiguilles et à 10 au plus les distances de la première et de la dernière aux extrémités du bâtiment. »

Appl. (*c*) : Les colonnes de l'architecture sont des troncs de cônes droits à bases parallèles. Ces colonnes sont quelquefois cannelées : elles ont alors plusieurs faces coniques, séparées par des portions de la surface courbe du tronc de cône plein, comme on le voit en A (P. XIV, F. 3). Les axes des demi-cônes creux qui forment les cannelures, sont des génératrices droites de la colonne (339, appl.).

« Il n'y a que des tailleurs de pierres très-habiles, qui puissent canneler des colonnes, car il faut une grande précision dans la division des circonférences de chaque *tambour* en parties égales, pour que les cannelures d'un de ces troncs de cône, se raccordent avec celles des deux troncs voisins, de manière à former des surfaces courbes parfaitement réglées, du chapiteau jusqu'à la base. »

439. Le cône droit et son tronc à bases parallèles ont une infinité de plans de symétrie, mais tous se coupent selon l'axe (409). Chacun de ces corps n'a donc qu'un seul axe de symétrie.

Le centre de gravité du cône complet, qui n'est pas un centre de symétrie, est sur la droite menée du sommet au centre de la base, et *au quart de cette droite à partir du cercle sur lequel elle se termine.* Il en est de même pour le cône oblique, bien qu'il n'ait ni plans, ni axe de symétrie.

440. Un cône complet peut être considéré comme une pyramide d'un très-grand nombre de faces latérales fort étroites. Il en résulte que *le rapport des volumes de deux cônes, est égal à celui des produits de leurs bases multipliées par leurs hauteurs* (405 et 419). La hauteur d'un cône se mesure selon la perpendiculaire abaissée du sommet sur le plan de la base.

Donc, *si deux cônes ont des bases égales, leur rapport est celui des hauteurs, et s'ils ont même hauteur, ils sont entre eux comme les superficies de leurs bases.*

441. Deux cônes droits sont semblables, lorsque le rapport de leurs axes est le même que celui des diamètres de leurs bases. La similitude des cônes obliques exige de plus que les axes aient la même inclinaison sur les bases. *Deux cônes semblables sont dans le même rapport que les cubes numériques de leurs axes ou des diamètres de leurs bases* (440 et 424).

Dans les cônes droits semblables, les génératrices droites sont proportionnelles aux axes, et dans les cônes obliques semblables, il y a proportion entre les axes et les hauteurs : il est aisé de voir en effet que dans les deux cas, les lignes données ici pour être proportionnelles, sont les côtés de triangles semblables (168).

442. On appelle *manchons coniques*, des corps creux qui présentent deux surfaces coniques tronquées, l'une intérieure et l'autre extérieure. Ces manchons sont *réguliers*, quand les surfaces courbes se trouvent droites, équidistantes, à bases parallèles et terminées aux mêmes plans. Tel est le cas des dés de tailleur, des seaux coniques, des barattes à beurre, des schakos, des chapeaux d'homme et de certains garde-vue en papier dont on entoure la flamme des lampes.

PROBLÈME : *dessiner un manchon conique régulier*.

L'axe étant supposé vertical, il faut tracer au-dessous de la ligne de terre B'C' et du même point A (P. XIV, F. 5), deux circonférences, avec les rayons des bases inférieures des surfaces coniques, puis deux autres circonférences, avec les rayons des bases supérieures ; abaisser de A, une perpendiculaire sur B'C' ; prendre A'A'' égale à la hauteur du corps ; tirer par A'' une parallèle à la ligne de terre ; mener jusqu'à B'C', parallèlement à AA'', des tangentes aux projections horizontales des deux circonférences inférieures ; mener de la même manière et jusqu'à D'E', des tangentes aux projections horizontales des deux circonférences supérieures ; joindre les extrémités B' et D', C' et E' des tangentes aux circonférences de la surface conique extérieure ; enfin, joindre les extrémités F' et H', G' et I' des tangentes aux circonférences de la surface conique intérieure.

L'intervalle des deux circonférences BC, HI est la projection horizontale du manchon, et le trapèze B'C'E'D' en est la projection verticale. Les génératrices extrêmes de la surface conique intérieure, F'H', G'I', étant cachées, doivent être pointillées, et il en est de même de la circonférence inférieure FG de cette surface.

Corps sphériques.

443. Les portions de sphères déterminées par un ou deux plans, sont appelées *corps sphériques ;* ils n'ont qu'une face courbe, lorsqu'ils sont pleins.

Un seul plan F'M produit un *segment sphérique* (P. XII, F. 25), dont les projections sont le segment de cercle F'LMF' et le cercle de rayon AF. Ce corps peut présenter une demi-sphère; dans tous les cas, sa face courbe est appelée *calotte sphérique*.

Deux plans parallèles F'M, D'N donnent une *tranche sphérique* dont les projections sont la portion de cercle D'F'MND', et le cercle de rayon AD : la circonférence qui a AF pour rayon, doit aussi figurer sur la projection horizontale. La face courbe de la tranche sphérique est nommée *zône* (p. 353, appl. *a*).

Deux plans méridiens LAB, LAC renferment entre eux un *onglet sphérique* qui a pour face courbe une *bande méridienne* (p. 350, appl. *c*). La projection horizontale de l'onglet est le secteur de cercle BACKB (324). La projection verticale est le *croissant* LB'L'H'I'L compris entre le demi-cercle LB'L' et la demi-ellipse LI'H'L' : les points H', I', etc., sont les projections verticales de ceux qui ont H, I, etc., pour projections horizontales.

Les mêmes sections faites dans une sphère creuse (431), produisent des corps sphériques qui ont deux faces courbes : le segment sphérique creux, la tranche sphérique creuse et l'onglet sphérique creux.

Appl. (*a*) : Les culots des bombes et des obus (p. 393, appl. *c*), les verres de lunettes plans d'un côté et convexes de l'autre (P. XIV, F. 6), sont des segmens sphériques. Ces verres conviennent aux vieillards et produisent sur les rayons de lumière, les mêmes effets que les lentilles à double convexité, quand les rayons de leurs calottes ne sont que les moitiés des rayons de ces lentilles (p. 395, appl. *a*).

Appl. (*b*) : D'autres verres sont plans d'un côté et concaves de l'autre; ils appartiennent à la classe des corps qui ont à la fois des faces planes et des faces courbes; leur concavité est formée par une calotte sphérique ABC (F. 7) qui coupe un cylindre dont DE est le diamètre, et dont les droites AD, CE sont génératrices. L'effet du verre à une seule concavité est le même que celui du verre qui en a deux, lorsque le rayon de la calotte du premier est la moitié du rayon des calottes du second (p. 395, appl. *b*).

Appl. (*c*) : Nous citerons pour exemples de segmens sphériques creux, les calottes dont les prêtres se couvrent la tête, les capsules de verre ou de porcelaine en usage dans les laboratoires de chimie, les dômes de certains édifices et les *chapeaux* métalliques qui abritent les vis au moyen desquelles sont élevées et abaissées les grilles destinées à la fermeture des arches de ponts dans les places fortes.

« Les verres dépolis dont on entoure la lumière des lampes, offrent des tranches sphériques creuses : ce sont des sphères ou des demi-sphères creuses, auxquelles il manque deux ou un petit segment. »

« Les dômes qu'on laisse ouverts par le haut, pour permettre l'entrée de la lumière dans les édifices, se rapportent au second cas des verres dépolis. »

« La partie sphérique d'une niche ronde intérieurement et extérieurement, est un onglet creux qui forme un quart de sphère creuse. »

« Si une voûte cylindrique extradossée recouvrait la nef d'une église terminée par une demi-tour ronde de même diamètre, il faudrait raccorder ces cylindres au moyen d'une voûte sphérique, et si cette voûte était aussi extradossée, elle formerait un onglet creux, égal à un quart de sphère creuse, comme celle d'une *niche*. »

MESURAGES.

444. Les mesurages ne sont pas moins utiles pour les artistes et les ouvriers, que les tracés, la formation des surfaces et des corps, leurs combinaisons et leur comparaison. Les bénéfices d'un fabricant peuvent devenir nuls ; si, par ignorance des mesurages, il paie plus de matière première qu'il n'en reçoit, ou s'il en met dans un ouvrage plus qu'il ne s'en fait payer.

Mesurer, c'est encore comparer ; c'est prendre le rapport d'une chose à une autre de même nature. Mesurer une longueur, par exemple, c'est chercher le rapport de cette longueur à une longueur bien connue.

Il serait impossible de se faire une juste idée de l'étendue des choses, si on ne les comparaît pas ainsi à d'autres qu'on apprécie bien, par suite de l'habitude qu'on a de les voir, de s'en servir, de les parcourir. Nous irions vingt fois à Paris, que nous n'aurions aucune notion précise sur la longueur de la route ; mais nous apprécions très-bien cette longueur, dès que nous savons qu'elle contient 79 lieues ou que son rapport à la longueur appelée *lieue*, est 79, parce que nous avons le sentiment de cette mesure. Il en serait de même, si l'on nous disait qu'un mur a 20 toises de long, qu'une pièce de toile contient 60 aunes, parce que nous avons souvent manié la toise et l'aune.

La chose à laquelle on en compare d'autres, est dite *mesure* ou *unité*; elle est tout-à-fait arbitraire, mais une fois que le choix en est fait et qu'elle est adoptée de toute la nation, il est fort important de n'en pas changer ; ce serait jeter une grande confusion dans le commerce, que d'imposer tantôt une mesure et tantôt une autre.

Il y a divers mesurages, parce que les choses à mesurer ne sont pas toutes de même nature. La Géométrie ne s'occupe que du mesurage des lignes, de celui des superficies, de celui des volumes, et elle exécute les deux derniers au moyen du premier. Cependant, elle fournit aussi les moyens de déterminer les poids des corps qu'on ne peut peser.

MESURAGE DES LIGNES.

445. On se sert de plusieurs unités pour mesurer les lignes ou les longueurs ; il y en a d'anciennes et de nouvelles. Les premières sont *le pied-de-roi ;* ses parties : *le pouce*, *la ligne*, *le point ;* et ses composés ; *l'aune*, *la brasse*, *la toise*, *la lieue*.

Le pouce est $\frac{1}{12}$ du pied, la ligne est $\frac{1}{12}$ du pouce, et le point, $\frac{1}{12}$ de la ligne.

L'aune de Paris a 3 pieds 7 pouces 10 lignes 10 points ou 44 pouces à peu près.

La brasse est ordinairement de 5 pieds.

La toise vaut 6 pieds.

Il y a trois espèces de lieue : la *lieue marine* qui contient 2 850 toises, qui est contenue 20 fois dans un degré de l'équateur (p. 343), et sert à mesurer la route d'un vaisseau ; la *lieue terrestre* ou *géographique*, de 2 280 toises, contenue 25 fois dans un degré et 9 000 fois dans la plus grande circonférence de la terre ; enfin, la *lieue de poste* qu'on a faite de 2 000 toises.

Les nouvelles mesures de longueur sont le *mètre* ; ses parties : le *décimètre* ou $\frac{1}{10}$ de mètre, le *centimètre* ou $\frac{1}{100}$ le *millimètre* ou $\frac{1}{1000}$; et ses composés : le *décamètre* ou 10^{m}, l'*hectomètre* ou 100^{m}, le *kilomètre* ou $1\,000^{m}$, le *myriamètre* ou $10\,000^{m}$.

Le mètre remplace la toise, l'aune, la brasse, etc. Le décimètre remplace le pied ; le centimètre remplace le pouce, et le millimètre, la ligne. Le décamètre tient lieu de l'ancienne chaîne d'arpenteur : on l'appelle aussi *chaîne métrique*. Enfin, la lieue nouvelle ou métrique vaut 4 kilomètres.

Cependant, la loi qui abolit les anciennes mesures, permet l'usage d'une nouvelle toise de 2 mètres et d'une nouvelle aune de $1^{m},2$: elles se divisent comme celles qu'elles ont remplacées.

Le mètre n'est pas une mesure sans fondement comme le pied-de-roi : cette longueur est la dix-millionième partie du quart d'un des méridiens de la terre, ou de la distance du pôle à l'équateur (p. 343). Comme cette distance est invariable, le mètre ne saurait éprouver aucune altération ; du moins, on pourra toujours le vérifier et le corriger. Les mesurages les plus exacts ont montré que le mètre vaut 3 pieds 11 lignes 296 millièmes de ligne, ou que le pied vaut 32 484 cent-millièmes de mètre. Au moyen de ces rapports, on peut toujours convertir des mètres en pieds, pouces et lignes, ou des pieds en mètres et parties du mètre. Au reste, il existe des tables où les mesures anciennes se trouvent réduites en mesures nouvelles, et les mesures nouvelles, en mesures anciennes.

446. Les droites à mesurer sont ou ne sont pas susceptibles d'être parcourues dans toute leur longueur, et celles qui présentent la seconde circonstance, se trouvent horizontales ou verticales ou inclinées.

Chacun sait mesurer grossièrement une ligne droite, quand la mesure peut y être appliquée d'un bout à l'autre ; mais peu de personnes se font une juste idée de la difficulté qu'on éprouve à faire un pareil mesurage très-exactement. Cette difficulté est telle, que rarement on obtient la même longueur, en commençant l'opération. Aussi, dans tous les cas où une grande exactitude est nécessaire, faut-il ne s'en tenir ni à un seul mesurage, ni même à deux : *on doit mesurer trois, quatre et jusqu'à cinq fois, avec toute la précision possible ; additionner toutes les longueurs trouvées, et* *diviser leur somme par leur nombre* Le quotient donne une *longueur moyenne* souvent moins inexacte qu'aucune des autres, parce que toutes les erreurs ne sont pas de même nature, qu'on en commet en moins comme en plus, et que, par l'effet du calcul, les premières détruisent une grande partie des secondes.

Supposez que la vraie longueur d'une droite soit de 4 toises nouvelles et que vous l'ayez trouvée de $4^t 2^l$, par un premier mesurage, de $3^t 5^{pi} 11^p 10^l$, par un deuxième, de $4^t 3^l$ par un troisième. La somme de ces trois longueurs est $12^t 3^l$. Divisant par trois, vous obtenez $4^t 1^l$, et vous n'avez plus qu'une seule ligne d'erreur, tandis que l'erreur serait de 2 ou de 3 lignes en plus, si vous adoptiez comme juste le premier ou le troisième mesurage, et de 2 lignes en moins, si vous les rejetiez, pour adopter le second.

A la vérité, toutes les erreurs pourraient être de même nature, en plus, par exemple : vous auriez pu trouver $4^t 2^l$ la première fois, $4^t 1^l \frac{1}{2}$ la deuxième fois, $4^t 1^l \frac{1}{3}$ la troisième fois; pour ce cas, la longueur moyenne $4^t 1^l \frac{11}{18}$ serait plus inexacte que les deux dernières; mais elle le serait moins que la première; et dans l'ignorance où vous êtes de la vraie longueur, il est possible que vous regardiez comme le meilleur, le mesurage le plus mauvais. Mieux vaut certainement s'exposer à faire une erreur de quelque peu supérieure aux plus faibles, que de risquer d'en commettre une égale à la plus forte. Ainsi, lors même que toutes les erreurs sont en plus ou en moins, ce qu'on ignore tout-à-fait, c'est encore un parti sage que de prendre la moyenne des longueurs trouvées.

Pour n'avoir pas à faire des marques, toujours causes d'inexactitude, il convient d'employer deux mesures rigoureusement égales. On les pose bout à bout en évitant de les heurter l'une contre l'autre, car le choc pourrait produire un intervalle imperceptible. Si l'unité, le pied par exemple, n'est pas contenu un nombre exact de fois dans la ligne droite, on mesure la partie restante avec le pouce, avec la ligne et même avec le point.

447. Les pieds-de-roi ne présentant pas les points, il faut, pour les obtenir, se faire un *vernier droit* (p. 37). Ce vernier AB (P. XIV, F. 8) doit avoir 11 lignes de longueur et 12 parties égales; c'est-à-dire que chacune des parties vaut $\frac{11}{12}$ de ligne ou que sa différence à une ligne est d'un point.

Supposons qu'en mesurant une droite CD, on ait trouvé 3 pieds, et que l'extrémité D tombe entre le 8^e et le 9^e trait du 10^e pouce. A 3 pieds, il faudra d'abord ajouter 9 pouces 8 lignes. Pour avoir les points, on posera l'une des extrémités du vernier sur l'extrémité D de la droite, l'autre bout étant placé du côté de 10. Si alors c'est le 5^e trait du vernier qui réponde à un trait du pied, il y aura quatre points entre le bout D de la droite et la 8^e ligne du 10^e pouce, c'est à-dire autant de points qu'il se trouve de parties du vernier entre D et le 5^e trait. La vraie longueur de CD sera donc de 3 pieds 9 pouces 8 lignes 4 points.

Il peut se faire qu'aucun trait du vernier ne corresponde à aucun des traits du pied : on se conduit dans ce cas, comme dans le cas analogue du lever des angles (p. 38).

La construction et l'usage du *vernier métrique* sont faciles à déduire de ce qui vient d'être dit. Si l'on veut qu'il indique les dixièmes de millimètre, par exemple, on lui donne 9 millimètres de longueur et on le divise en 10 parties égales.

448. *Il y a des droites qu'on ne peut pas mesurer exactement, au moyen d'une unité donnée* Si, par exemple, les côtés d'un carré contiennent un certain nombre de toises, pieds, pouces, lignes et points, il est impossible d'obtenir exactement la longueur de la diagonale de ce carré en toises, pieds et parties du pied, parce que le côté du carré n'est pas contenu un nombre exact de fois et de parties de fois dans la diagonale; ces deux droites n'ont point de commune mesure; l'une ne peut être mesurée au moyen de l'autre; en un mot, nous ne saurions exprimer avec exactitude leur rapport.

Prenez le côté du carré pour unité, son quarré numérique sera 1 et celui de la diagonale sera 2 (253). La longueur de cette diagonale devra donc être exprimée par le nombre qui, élevé au quarré, donne 2. Or, il est impossible de trouver ce nombre exactement.

Mesurage des horizontales.

449. Il y a deux cas principaux à considérer, dans le mesurage des horizontales sur lesquelles la mesure ne saurait être appliquée: on peut cheminer dans le plan vertical des deux extrémités ou on ne le peut pas, et lorsque cette dernière circonstance se présente, une seule des extrémités a des abords qui permettent d'y opérer, ou bien ni l'une ni l'autre n'en laissent la facilité.

PROBL. (*a*) : *Mesurer la distance horizontale de deux points* A, B *situés sur une pente qu'on peut parcourir* (P. XIV, F. 9).

Trois personnes sont nécessaires pour cette opération: deux placent et maintiennent la mesure, le quadruple mètre par exemple; la troisième manie le niveau de maçon (p. 48).

Plantez un jalon en A et un autre en B; posez un des bouts de la mesure en A et dirigez cette mesure dans l'alignement AB: puis haussez ou baissez l'autre bout, jusqu'à ce que le niveau montre que le quadruple mètre est horizontal. Appliquez alors à ce bout un fil-à-plomb; marquez sur le terrain, le point C qu'il indique; placez en C l'extrémité qui était en A; dirigez la mesure dans l'alignement ACB; placez-la de niveau, comme précédemment; appliquez de nouveau le fil-à-plomb à l'autre extrémité, et continuez toujours ainsi, jusqu'au point B. Le nombre de fois que la mesure pourra être portée horizontalement sur la pente, donnera la distance horizontale AB' ou BA' des deux verticales AA', BB'.

Il peut arriver, si le terrain est accidenté, qu'un des points marqués par le fil-à-plomb, se trouve dans un creux, comme en D. On doit alors planter un jalon en D, le rendre vertical (p. 272, appl. *a*), et appliquer un des bouts de la mesure contre ce jalon, afin de pouvoir la placer horizontalement au-dessus de la saillie E et dans l'alignement ACDB.

Si une grande exactitude n'est pas nécessaire, on peut se contenter du coup d'œil, pour mettre la mesure de niveau, et remplacer le fil-à-plomb par un petit caillou qu'on laisse tomber de l'extremité d'où doit être abaissée une verticale. Ceux qui mesurent avec la chaîne d'arpenteur, agissent ainsi; seulement, au lieu d'employer une pierre, ils laissent tomber une fiche qu'ils plantent ensuite. Mais auparavant, la chaîne doit être fortement tendue, afin que l'erreur causée par la courbure que produit le poids, soit très-faible.

Applications : Ce sont ces moyens qu'il faut employer pour mesurer les distances horizontales qu'on peut parcourir, soit quand le terrain monte ou descend, soit quand il est simplement raboteux, couvert d'aspérités. On commettrait de graves erreurs dans l'arpentage, si l'on prenait autrement les longueurs nécessaires au calcul des superficies.

Probl. (*b*) : *Mesurer une distance horizontale dont une extrémité n'est point accessible.*

Supposons qu'il s'agisse de connaître la distance horizontale EG' (P. III, F. 28), à l'extrémité G' de laquelle on ne peut ou l'on ne veut pas se transporter.

Plantez verticalement un 1er jalon en E, un 2e F dans l'alignement EG', un 3e C entre E, F, mais à droite ou à gauche de la droite EF, un 4e D sur l'alignement CF, un 5e B au concours des alignemens CE, DG', un 6e au concours des alignemens DE, BF, un 7e au concours des alignemens EG', CA; et mesurez horizontalement les distances GE, GF.

Le point G ainsi déterminé est le conjugué de G' (90) et

$$GE : GF :: G'E : G'F \text{ ou } GE : GF-GE :: G'E : G'F-G'E \ (76).$$

Représentant par p le nombre de mètres contenu dans la petite partie GE de EF, par P celui de la grande partie GF, et par d la distance EG' cherchée; on a

$$p : P-p :: d : P+p,$$

car $G'F-G'E=EF=P+p$. Conséquemment (p. 74, probl. *b*), la formule qui donne immédiatement la solution du problème est

$$d=p\times\frac{P+p}{P-p}:$$

elle signifie qu'*il faut multiplier la plus petite partie de la distance horizontale* EF *prise en arrière, par la somme des deux parties et diviser le produit par leur différence.*

Il existe plusieurs autres procédés pour déterminer la longueur d'une horizontale dont une seule extrémité est accessible ; mais ils exigent des instrumens chers ou une grande étendue de terrain libre et des mesurages pénibles.

APPLICATION : L'emploi du mesurage fondé sur les transversales, permet à l'artilleur de trouver rapidement la distance de sa batterie au but qu'il veut atteindre. Si, par exemple, $p=25^m$ et $P=26^m,6$, la formule lui donne $d=25^m\times\frac{26,6+25}{26,6-25}=25^m\times\frac{51,6}{1,6}=\frac{12900^m}{16}$ $=806^m,25$.

PROBL. (*c*) : *Mesurer la largeur d'une rivière.*

Choisissez un point remarquable G', sur le bord qui vous est opposé (P. XIV, F. 10), puis un point E, sur le bord où vous êtes, de manière que la droite EG' soit sensiblement d'équerre avec les deux rives et surtout avec la rive EH. Vous n'aurez plus qu'à planter un 1^er^ jalon en E, 6 autres comme il a été prescrit dans le problème (*a*), et à faire application de la formule précédente.

PROBL. (*d*) : *Mesurer la distance horizontale de deux points* A, B, *dont l'un est invisible de l'autre* (P. XIV, F. 11).

Plantez verticalement un 1^er^ jalon en un point d'où vous puissiez voir à la fois A et B, un 2^e^ et un 3^e^ sur l'alignement A1, un 4^e^ sur l'alignement B2, un 5^e^ au concours des alignemens B1 et 3.4, un 6^e^ au croisement des alignemens 1.4 et 2.5 (p. 91), un 7^e^ au croisement des alignemens 3.6 et A5, un 8^e^ au concours de 1.7 et 3.5, enfin un 9^e^ à la rencontre des alignemens 3.7 et A8, puis mesurez A9, 9.8 et appliquez la formule du probl. (*a*).

Il résulte en effet du n° 90, que B est le conjugué du point C où se coupent les alignemens B5 et 3.6; mais en vertu du croisement 7, C et 9 sont conjugués l'un de l'autre ; donc B est aussi le conjugué de 9, et ce dernier point, ainsi que le jalon 8, se trouvent nécessairement sur l'alignement BA prolongé.

APPLICATIONS : On mesure facilement ainsi la longueur ou la largeur d'un bois, d'un village, d'une ville, de la base d'une montagne, et en général la distance de deux points séparés par un obstacle élevé.

PROBL. (*e*) : *Mesurer une distance* AB *horizontale et inaccessible* (P. XIV, F. 12).

Vous pourrez vous placer en un point C de l'alignement AB ou vous ne le pourrez pas. Dans le premier cas, mesurez CB et CA, en recourant au problème (*a*). L'excès de la première longueur sur la seconde sera la distance cherchée.

Si un obstacle quelconque s'oppose à ce qu'on opère en un point du prolongement de AB, plantez verticalement un jalon D, sur un point d'où vous puissiez voir à la fois A et B ; mesurez DA, DB comme dans le problème (a); plantez sur ces alignemens, des jalons E, F, de manière que DE, DF forment la même fraction de DA, DB, le centième par exemple; mesurez alors EF parallèle à AB (80), et multipliez par 100, la longueur trouvée; le produit sera exactement la distance AB (81).

APPLICATIONS : Le premier cas de ce mesurage se présente quand il s'agit de mesurer soit la distance de deux clochers entourés de maisons, soit celle d'une position militaire à une ville attaquée ou à une ligne ennemie, et qu'on ne peut, sans courir de grands dangers, opérer sur cette position même.

« Le second cas s'applique au mesurage de la distance des sommets de deux montagnes, de deux villages situés sur les versans opposés d'une côte, de deux points très-éloignés de l'endroit où l'on se trouve, et de deux positions occupées par l'ennemi. »

Mesurage des verticales.

450. Lorsque la mesure ne saurait être appliquée sur une verticale, le pied est visible ou invisible, accessible ou inaccessible, et l'on peut opérer au niveau de ce pied ou on ne le peut pas.

PROBL. (a) : *Mesurer une verticale* AB, *quand le pied* B *est accessible et qu'on peut opérer au niveau de ce pied* (P. XIV, F. 13).

Plantez verticalement deux jalons CD, EF sur l'horizontale CB contenue dans un plan vertical ABC; visez le sommet A, par l'extrémité D du plus petit; faites marquer le point G où l'alignement DA coupe le grand jalon; mesurez les verticales CD, EG et les horizontales CE, EB; cherchez l'excès GH de EG sur CD et la somme CB de CE, EB; divisez GH par CE, pour avoir la pente de DA, la quantité dont cette droite s'élève au-dessus de l'horizontale DI, à une mesure de D (258); multipliez la pente par CB, pour connaître AI; enfin ajoutez CD au produit; la somme sera la hauteur AB.

A l'effet de formuler ce mesurage, nous représenterons la longueur du petit jalon par l, celle EG du grand par L, leur distance horizontale CE par d, la distance CB par D et AB par h. Les calculs à faire seront alors indiqués par l'égalité

$$h = \frac{L - l}{d} \times D + l.$$

Bien entendu que toutes ces lettres devront être remplacées par des nombres d'une même unité, telle que le mètre ou la toise.

La main d'un homme ne pouvant pas toujours atteindre à la hauteur du point G, il convient d'adapter au grand jalon, un objet quelconque qui serve *d'indicateur*, qu'on puisse faire monter ou descendre, à l'aide d'une perche terminée en crochet, et qui conserve bien sa position : une feuille de carton ou de papier traversée par le jalon, suffit pour former un tel indicateur.

Applications : Ce moyen simple, prompt et suffisamment exact, est propre au mesurage de la hauteur d'une tour, d'un clocher, d'un édifice quelconque, d'un arbre, etc., lorsqu'on peut cheminer en ligne droite jusqu'au pied et que le terrain environnant est de niveau.

« S'il s'agit d'un édifice, il faut se placer de manière que l'horizontale CB traverse la porte d'entrée. S'il y a impossibilité, on mesure la distance de C au mur, l'épaisseur de ce mur et la distance de sa face interne au pied B de la verticale ; ou bien l'on calcule, en appliquant les principes convenables, la distance de B au contour soit du polygone, soit du cercle qui forme la base de l'édifice. Pour un arbre, il faut mesurer, à l'aide d'une ficelle, la circonférence du tronc à fleur de terre, et en déduire le rayon, par les moyens qui seront indiqués au mesurage des lignes du cercle. »

« Supposons qu'on ait trouvé $l = 1^m,66$, $L = 3^m,16$, $d = 3^m$ et $D = 280^m,68$. La formule donnera $h = \frac{3,16 - 1,66}{3} \times 280^m,68 + 1^m,66 = \frac{1,50}{3} \times 280^m,68 + 1^m,66 = \frac{421^m,02}{3} + 1^m,66 = 140^m,34 + 1^m,66 = 142^m$. Cette hauteur est précisément celle du clocher de Strasbourg, l'édifice le plus élevé de l'Europe. »

Probl. (b) : *Mesurer une verticale* AB, *quand le pied est inaccessible et qu'on peut opérer au niveau de ce pied* (P. XIV, F. 14.)

Le procédé à suivre se compose de celui qui précède et de celui du problème b (p. 407). Il faut d'abord planter verticalement deux jalons CD, EF, et faire marquer le point G, pour connaître EG ; puis mesurer la distance EB, au moyen des transversales, en se servant de EC pour distance prise en arrière, et en s'alignant sur A, comme sur l'extrémité supérieure d'un jalon.

Puisque pour avoir EB, on doit mesurer CE, il ne s'agit que de faire la somme de ces deux distances, pour déterminer CB ou D de la formule.

La figure présente sur son plan vertical, les opérations du problème précédent, et sur son plan horizontal, celles du probl. b (p. 407).

Applications : C'est ainsi qu'on peut mesurer l'élévation du sommet d'une montagne au-dessus du niveau d'une plaine, celle de la flèche d'une vaste église au-dessus du pavé d'une place, et la hauteur de tout objet dont on ne saurait approcher ou dans l'intérieur duquel il est impossible de pénétrer. Mais observez que c'est toujours sur l'extrémité supérieure de la verticale à mesurer qu'on doit s'aligner, pour le mesurage de CB, par la méthode des transversales. Tout alignement qui, au lieu de contenir la verticale AB, prendrait une arête visible de l'édifice, conduirait à un résultat faux.

Probl. (c) : *Mesurer une verticale* AB, *quand on ne peut opérer qu'à un niveau inférieur à celui du pied* (P. XIV, F. 15).

Soit H un point situé dans l'aplomb de AB, sur le terrain horizontal où vous pouvez opérer. S'il est possible de cheminer tout le long de CH, vous mesurerez les hauteurs HA, HB d'après le problème (*a*); dans le cas contraire, vous recourrez au problème (*b*). Il ne s'agira plus que de retrancher HB de HA, pour avoir la longueur de AB.

Applications : On trouve ainsi de combien la pointe d'un clocher surpasse le toit de l'église, la hauteur d'une tour placée sur un coteau, l'élévation d'une cime de montagne au-dessus d'un col ou d'un mamelon inférieur, etc.

Probl. (*d*) : *Mesurer la hauteur d'un point au-dessus du niveau de la mer.*

Pour peu que le point dont il s'agit se trouve éloigné d'une côte, le pied de la verticale à mesurer est invisible, inaccessible et au-dessous du plan horizontal sur lequel on peut opérer. La Géométrie élémentaire n'a pas de procédé pour un tel cas; mais l'instrument de physique nommé *Baromètre* fournit le moyen de résoudre le problème (p. 398).

Supposons d'abord qu'ordinairement les hauteurs du baromètre et du thermomètre au point donné, diffèrent peu de celles qui ont lieu au niveau de la mer ; en d'autres termes, supposons le point peu élevé au-dessus de ce niveau. Si vous connaissez en outre la hauteur moyenne du baromètre en ce point, pour la température 0°, et qu'elle soit, par exemple, $758^{mi},53$, comme à Paris sur les bords de la Seine, prenez la différence de ce nombre de millimètres à $761^{mi},32$, hauteur moyenne de la colonne de mercure sur les bords de la mer, à 0°, et multipliez $10^{m},8$ par cette différence 2,79 ; vous obtiendrez $30^{m},132$ pour la hauteur cherchée : elle est seulement de $0^{m},698$ moindre que l'élévation vraie.

Mais, lorsque la hauteur paraît devoir être grande, on ne peut plus supposer que chaque millimètre d'abaissement du mercure réponde à 108 décimètres d'élévation dans l'air : le résultat serait trop faible. Il faut, dans ce cas, si l'on veut une appréciation exacte, tenir compte de la différence des températures aux deux extrémités de la verticale et de la variation de la pesanteur (p. 196). Le calcul devient alors fort compliqué. Cependant, voici une formule d'un emploi facile qui donne en mètres, à peu près la vraie hauteur, pour toutes les latitudes pareilles à celles de la France (p. 343).

$$H = 15\left[(265+t)\frac{(6196-T)B}{(6196-t)b}-(265+T)\frac{(6196-t)b}{(6196-T)B}+T-t\right].$$

La lettre B est en *millimètres*, l'indication du baromètre au niveau du pied de la verticale ; *b* est l'indication du même instrument à l'extrémité supérieure ; T est en degrés et fraction *décimale* de degré, l'indication du thermomètre *centigrade* au niveau du pied ; *t* est celle qu'on trouve à l'autre extrémité, 15 et 265 sont des nombres invariables convenablement déterminés; 6196 est le dénominateur de la fraction qui indique la dilatation ou la contraction qu'éprouve une colonne de mercure, quand le thermomètre monte ou descend de 1° (*).

Pour trouver, à l'aide de cette formule, la hauteur d'un point au-dessus du niveau de la mer, il faut donc substituer à b, t, les hauteurs moyennes du baromètre et du thermomètre en ce point, et B, T, les hauteurs moyennes sur les bords de l'Océan : ces dernières sont $762^{mi},9$ et $12^\circ,8$ à la latitude de Paris.

Si l'on ne connaît pas les premières, on cherche la distance verticale du point donné, à un niveau pour lequel les hauteurs moyennes ont été déterminées, puis la distance de ce niveau à celui de la mer. La formule suffit encore dans ce cas.

Supposons deux personnes placées l'une à Genève, l'autre sur le sommet d'une des montagnes environnantes. A un signal convenu, elles observent leurs instrumens ; celle de Genève trouve $B = 775^{mi}$ et $T = 16,7$; celle du sommet trouve $b = 592^{mi}$ et $t = 5^\circ$. La formule indique que pour trouver la hauteur de la montagne au-dessus du sol de la ville, il faut ôter 16,7 de 6196 et multiplier le reste par 775; ôter 5 de 6196 et multiplier le reste par 592 ; diviser le 1er produit par le 2e; multiplier la somme de 265 et de 5, par le quotient; diviser la somme de 265 et de 16,7 par le même quotient; retrancher l'un de l'autre les deux derniers résultats ; ajouter à la différence, l'excès de 16,7 sur 5, et multiplier la somme par 15. On obtient ainsi $2235^m,87$ pour la hauteur verticale H.

Il reste alors à déterminer la hauteur de Genève au-dessus de l'Océan. Or, la hauteur moyenne du baromètre y est de $726^{mi},6$ et celle du thermomètre de 12°. On répétera donc les opérations précédentes, en faisant $B = 762,9$, $T = 12,8$, $b = 726,6$, $t = 12$, et l'on ajoutera le nouveau résultat à $2235^m,87$: la somme sera la hauteur du sommet de la montagne au-dessus du niveau des mers.

Applications. Tels sont les moyens à employer pour déterminer les positions des divers points de la surface terrestre, par rapport au centre de la terre. Elles sont importantes, car le climat en dépend : de deux villes de même latitude, celle qui est le moins élevée dans l'atmosphère ou le moins éloignée du centre du globe, jouit d'une température plus chaude. Le climat de Paris, est plus agréable que celui de Metz, par exemple, et pourtant la première de ces villes se trouve seulement de 16 56" moins au nord que la seconde ; mais le niveau des basses eaux de la Moselle, à son entrée dans Metz, est à 162^m au-dessus de l'Océan, tandis que celui de la Seine n'en est qu'à 31^m environ.

« L'emploi du baromètre peut-être substitué au procédé du pro-

(*) La variation du mercure est réellement de $\frac{1}{5550}$; mais l'échelle métallique s'allonge ou se raccourcit de $\frac{1}{53324}$, et l'on ne doit compter que $\frac{1}{6196}$, fraction de très-peu inférieure à la différence des deux autres.

blème (*a*), quand on veut économiser le temps et qu'il est possible de monter jusqu'à l'extrémité supérieure de la verticale. Il faut alors opérer comme il a été prescrit pour trouver la hauteur du sommet d'une montagne au-dessus du sol de Genève. Si l'on est seul, on observe le baromètre et le thermomètre au pied de la montagne ou de l'édifice ; on prend note des hauteurs du mercure dans les deux instrumens ; puis on monte le plus rapidement possible, afin de diminuer les chances d'un changement dans la pression atmosphérique et la température de la première station. »

Nivellement.

451. Il ne suffit pas, pour bien connaître un terrain, d'en lever le plan par l'un des procédés de la page 253 ou par celui de la page 254. Il faut encore y marquer les *cotes verticales* des points importans, c'est-à-dire les distances de ces points au plan horizontal qui passe par un d'eux, ou qui est au-dessous de celui-là d'une certaine quantité.

Le plan horizontal choisi est dit *plan de comparaison*. Déterminer les élévations des divers points d'un terrain au-dessus d'un plan de comparaison, c'est *faire un nivellement*. Les cotes s'inscrivent entre parenthèses, près de chaque point du plan.

Le nivellement revient donc au mesurage des verticales; mais comme elles sont nombreuses, on emploie, pour en obtenir les longueurs, un procédé autre que ceux du n° 450.

PROBLÈME : *Faire le nivellement d'un terrain* ABC.... (P. XIV, F. 16).

Soient A, B, C, D, etc., les points dont il faille déterminer les cotes et supposons que le plan de comparaison doive contenir A. La cote de ce point sera zéro. Pour avoir celle de B, placez un niveau d'eau entre B et A (p. 45); prenez les distances de l'horizontale NN' à A et à B, et retranchez la seconde de la première; le reste sera la verticale BB'. Transportez ensuite l'instrument entre B et C; notez les distances B*b*, C*c*; retranchez la seconde de la première, pour obtenir l'élévation de C au-dessus de B, et ajoutez le reste à la cote de ce dernier point; vous aurez celle de C ou la verticale CC'.

Si d'une station vous pouvez voir plusieurs points remarquables qui n'en soient pas très-éloignés (p. 346), il faut les comparer tous au point en arrière, à B par exemple, afin de déterminer leurs cotes, comme celle de C : moins on fait de stations, plus on va vite.

Il se pourrait qu'un point en avant de B fût moins élevé ; alors la distance de ce point à l'horizontale du niveau serait plus grande que B*b*, vous en retrancheriez cette dernière, pour avoir l'abaissement du nouveau point au-dessous de B, et vous ôteriez cet abaissement de BB', pour trouver la cote cherchée.

On peut être forcé de placer l'instrument en un point D dont la cote est nécessaire. Dans ce cas, c'est la hauteur DN du niveau qui doit être retranchée de la distance Cc' de l'horizontale au point en arrière C.

Enfin, si le plan de comparaison devait passer à 10^m, par exemple au-dessous de A, pour rattacher le nouveau nivellement à un autre, la cote de A, serait 10^m, et toutes les suivantes devraient être augmentées d'autant.

D'autres circonstances peuvent encore se présenter dans le nivellement ; mais elles sont indiquées, avec les moyens qu'elles nécessitent, à l'article du niveau d'eau (p. 45).

Mesurage des droites inclinées.

452. Le mesurage des droites inclinées, sur lesquelles l'unité de longueur ne peut être appliquée, dépend de celui des horizontales et des verticales, et les procédés exposés depuis le n° 449 suffisent à tous les cas qui peuvent se présenter.

PROBLÈME : *Mesurer la longueur d'une pente* AB *qu'on ne peut parcourir* (P. XIV, F. 17).

Premier procédé : Mesurez d'abord la distance horizontale BA', et la distance verticale AA'; elles seront, je suppose, la première de 425^m et la seconde de 40^m. Tracez ensuite, sur un terrain plan, deux droites *aa'*, *a'b* qui se coupent d'équerre (p. 261) ; portez de *a'* en *a*, par exemple 4^m, dixième de AA', et de *a'* en *b*, $42^m,5$, dixième de A'B; enfin, mesurez *ab*; vous trouverez $42^m,6878$, et en multipliant cette longueur par 10, vous obtiendrez 426,878 pour la pente AB.

Effectivement, les triangles AA'B, *aa'b* sont semblables (173), et *ab* est le dixième de AB, comme *aa'* est le dixième de AA' (168).

Mais, pour arriver ainsi à un résultat exact, il faut tracer le triangle *aa'b* et mesurer *ab*, avec une extrême précision, que le terrain et les instrumens ne permettent pas toujours, à beaucoup près. En opérant comme il suit, on ne commet jamais d'autre erreur que celle qui peut être occasionnée par le mesurage de l'horizontale et de la verticale.

Deuxième procédé : Mesurez BA' et AA' ; faites le quarré de chacune des longueurs trouvées, de 425^m et de 40^m, par exemple (202); additionnez ces quarrés 180625 et 1600; leur somme 182225 sera le quarré de l'hypothénuse AB (253), et il ne vous restera plus qu'à déterminer le nombre qui, multiplié par lui-même, produit 182225. Cela se fait au moyen d'une opération de calcul que je crois devoir décrire, attendu qu'elle ne se trouve pas exposée dans les arithmétiques élémentaires et qu'elle est indispensable à la pratique de la Géométrie.

L'opération dont il s'agit, s'indique par le signe $\sqrt{}$ dont on accole et l'on recouvre le quarré donné. Si donc L représente la longueur de la pente AB, D la distance horizontale A'B, et H la hauteur AA', la formule qui donne immédiatement la solution, est

$$L = \sqrt{D^2 + H^2}.$$

Extraction de racine.

453. Le nombre qui, multiplié par lui-même, en produit ou en produirait un autre, est dit la *racine quarrée* ou simplement la *racine* de cet autre. Par exemple, la racine de 81 est 9, parce que 9 fois 9 font 81, ou parce que 81 est le *quarré* de 9. Or, tout nombre peut être considéré comme le quarré d'un autre; tout nombre a donc une racine. L'opération qu'on doit faire pour la trouver, se nomme *extraction de racine*, et le signe $\sqrt{}$ qui l'indique, remplace les mots *racine de*.

Problème : *Extraire la racine d'un nombre de 23425, par exemple*

		Preuve.
2.34.25	153,0522 . .	0
13	25	
92	303	
1 600.00.00.00	30605	
69750	306102	
852960	3061042	
2407516	. . . .	7

Je partage le nombre de 23425 en groupes de deux chiffres chacun, en allant de droite à gauche. Le 1er groupe à gauche peut conséquemment contenir un ou deux chiffres. Je prends la racine quarrée 1 du plus grand quarré 1 contenu dans le 1er groupe 2, et j'écris cette racine 1 à droite du nombre 23 425, comme le diviseur d'une division. De 2, je retranche le plus grand quarré 1 qu'il contient, et j'écris au-dessous le reste 1.

A côté de ce reste, j'abaisse le 1er chiffre 3 du 2e groupe et j'ai 13 Je double le chiffre 1 de la racine et j'obtiens 2 que j'écris au-dessous, à la place ordinaire du quotient d'une division. Je divise 13 par ce nombre 2. Le quotient 6 peut être trop grand pour la racine. Je l'essaie en le supposant écrit à la suite du diviseur 2 et multipliant le nombre 26 qui en résulte, par ce même quotient 6. Pour qu'il convienne à la racine, il faut que le produit puisse se retrancher du reste 1 du premier groupe, suivi de tout le second 34, c'est-à-dire du nombre 134. Tout cet essai, qui consiste en une multiplication et une soustraction dont on n'a pas besoin de connaître le reste, se fait par la pensée, sans rien écrire, comme l'essai d'un quotient, quand le diviseur a plusieurs chiffres. Je vois ainsi que 6 est trop grand. Je le diminue donc d'une unité et j'essaie 5 de la même manière. Trouvant le chiffre 5 bon pour la racine, je l'y écris à côté du chiffre 1. Je l'écris aussi à côté du diviseur 2, ce qui donne 25. Je multiplie 25 par le 5 de la racine, et je retranche de 134, en écrivant successivement les chiffre du reste, comme si je faisais une division. Je trouve ainsi que le reste est 9.

A côté du reste 9, j'écris le 1^{er} chiffre 2 du 3^e groupe 25 et j'ai 92. Je double le nombre 15 de la racine, et j'obtiens 30 que j'écris vis-à-vis de 92, au-dessous de 15. Je divise 92 par 30 et j'essaie le quotient 3, comme j'ai essayé tout-à-l'heure 6 et 5. Trouvant le chiffre 3 bon pour la racine, je l'y écris à la suite de 15 et je l'écris aussi à la suite du diviseur 30, ce qui donne 303. Multipliant 303 par le chiffre 3 de la racine et retranchant le produit à mesure que je le forme, du reste du 2^e groupe, suivi de tout le 3^e, c'est-à-dire du nombre 925, j'ai pour reste 16.

L'opération est alors terminée, si l'on ne veut pour racine qu'un nombre entier. Cette racine est 153; le reste 16 montre que le nombre 23 425 excède d'autant le quarré de 153. Si au lieu de 23 425, nous eussions eu 23 409, nous aurions trouvé 153 pour racine, sans aucun reste. Mais, quoique incomplète, la racine 153 ne diffère pas d'une unité de la vraie racine, puisque 4 mis à la place de 3 dans 153, serait trop fort, même pour la division de 92 par 30. D'ailleurs, 154 a pour quarré 23 716, nombre bien plus grand que 23 425.

Il en est donc des racines comme des quotiens : elles ne sont pas toujours complètes. Dans tous les cas, leur recherche se fait, ainsi que vous venez de le voir, au moyen de la division, de la multiplication et de la soustraction; ceux qui savent bien exécuter ces opérations, n'éprouveront donc aucune difficulté à pratiquer l'extraction de racine.

Il est souvent nécessaire d'avoir une racine moins différente de la véritable, que celle qui est exprimée par un nombre entier. La même opération suffisamment continuée, permet d'approcher aussi près qu'on veut de la racine exacte. Il suffit d'écrire à la suite du dernier reste, autant de groupes de deux zéros, qu'on désire de décimales.

Supposons qu'on veuille obtenir la racine de 23 425 à moins de 1 dixmillième près. Je devrai pousser l'extraction jusqu'aux dixmillièmes, ou trouver les quatre premières décimales de la racine, et par conséquent, j'écrirai quatre groupes de deux zéros à la suite du reste 16.

Cela fait, je continuerai de diviser chaque reste suivi du 1^{er} chiffre du groupe suivant, par le double du nombre déjà écrit à la racine, jusqu'à l'épuisement de tous les groupes de zéros; mais je séparerai du nombre entier 153, par une virgule, les nouveaux chiffres que je mettrai à la racine. Ainsi, je diviserai 160 par 306, puis j'écrirai le quotient 0 à la suite de la virgule et à la suite de 306. Si je multipliais 3 060 par 0, et que je fisse la soustraction du produit, j'obtiendrais évidemment pour reste 1 600. Je passe donc ces deux opérations, et je divise tout de suite 1 600 suivi du 1^{er} zéro du 2^e groupe, ou 16 000, par 3 060. Cela me donne 5 à la racine, et 6 975 pour reste. A côté de ce reste, j'écris le 1^{er} zéro du 3^e

groupe ; je divise 69 750 par 30 610 ; j'obtiens 2 à la racine et 85 296 pour reste. Enfin, je divise 852 960 par 306 104 ; j'obtiens 2 à la racine et 0,024 075 16 pour dernier reste.

La racine de 23 425 est donc alors 153,052 2. Elle se trouve encore moindre que la vraie ; mais n'en différant pas d'un dixmillième, elle peut bien être regardée comme exacte.

Si au lieu du nombre entier 23425, on avait le nombre 234,25, la recherche de la racine se ferait absolument de la même manière ; seulement, il faudrait former les groupes de deux chiffres à partir de la virgule, et mettre une virgule à la racine, dès qu'on aurait employé tous les chiffres de la partie entière 234. La racine serait alors 15,305 22.

La preuve par 9 de la multiplication, fournit un moyen facile et expéditif de vérifier une extraction de racine. Additionnez les chiffres de la racine et ôtez 9 à mesure que vous le pourrez ; formez le quarré du reste ; additionnez les chiffres de ce quarré, en ôtant tous les 9 ; ajoutez le nouveau reste aux chiffres du reste de l'extraction, en ôtant les 9 ; vous obtiendrez un reste qui, si l'opération a été bien faite, sera égal à celui que donnera le nombre proposé, quand vous en aurez additionné les chiffres et ôté les 9.

Ici, le reste de la racine est 0 ; le quarré de 0 est 0 ; le reste de l'extraction donne 7, et le nombre 23 425 donne 7 aussi. Par conséquent, l'opération est très-probablement bonne.

Il faut observer toutefois que la preuve par 9 ne fait point apercevoir l'erreur qui provient d'un trop petit quotient ; cette preuve réussit, lors même qu'un ou plusieurs chiffres de la racine sont trop faibles. Il faut donc faire en sorte qu'ils ne le soient pas. Or, rien n'est plus facile, il suffit de prendre les divers quotiens aussi grands qu'ils peuvent l'être, comme pour la division ordinaire. Dans cette opération, on est averti de l'insuffisance des quotiens, par les restes qui surpassent alors le diviseur, tandis qu'ils devraient être moindres. Dans l'extraction de racine, il n'en est pas ainsi ; mais on est certain que le quotient ou *le chiffre mis à la racine n'est pas trop petit, quand le reste est moindre que le double de la racine déjà trouvée, augmenté d'une unité.*

Par exemple, dans la racine 153,05 obtenue après la quatrième division, le dernier chiffre 5 est suffisamment grand, parce que le reste, 6 975 est moindre que le double de 15 305 augmenté de 1 ou moindre que 30 611. Si je mettais 4 au lieu du dernier 5, j'aurais 37 584 pour reste, 15304 pour racine, et comme 37 584 est plus grand que 1 + 2 fois 15 304 ou 30 609, j'en conclurais que la racine 15304 est trop petite d'une unité au moins.

Mesurage des lignes du cercle.

454. Il y a dans le cercle, trois lignes dont on a souvent besoin de déterminer la longueur : la circonférence entière, l'arc et le diamètre.

Les circonférences ne peuvent pas être mesurées avec une unité de même nature, comme les droites ; car cette unité serait un arc, son rayon devrait égaler celui de la courbe à mesurer, et l'on aurait besoin d'autant de mesures différentes qu'il se présenterait de circonférences inégales. Si l'unité était une circonférence invariable, elle ne serait pas en harmonie avec les autres unités de longueur.

Les unités ordinaires de longueur sont donc employées pour la courbe du cercle et ses parties, comme pour les lignes droites. Mais attendu qu'elles ne peuvent être appliquées sur des courbes, on opère d'une autre maniére.

Le procédé exige la connaissance du rapport de la circonférence au diamètre. Ce rapport doit être le même pour tous les cercles; car, si C, c représentent deux circonférences dont les diamètres soient D, d, le n°247 donne $C : c :: D : d$, ou (72) $C : D :: c : d$, ou (69) $\frac{C}{D} = \frac{c}{d}$.

Afin de rendre plus simples, les formules dans lesquelles entre le rapport général $\frac{C}{D}$, on le représente habituellement pour une seule lettre ; celle qui a été choisie, est grecque et s'appelle *pi* (π) : elle offre un V renversé, surmonté d'une espèce de S couchée et retournée. Rappelez-vous donc que π est le nombre de fois que toute circonférence contient son diamètre.

La vraie valeur de π n'est pas connue et il est même assez probable que jamais elle ne le sera ; mais on a des nombres qui en approchent tellement qu'en vérité il n'y aurait aucun avantage à les remplacer, dans la pratique, par le rapport exact $\frac{C}{D}$.

Les ouvriers font assez souvent $\pi = 3$; ils ont tort : ce rapport trop faible nuit à la précision de l'ouvrage ou à l'exactitude du toisé. Si l'on calculait la superficie d'un cercle dont la circonférence fût 3, le diamètre étant 1, on la trouverait moindre que celle du polygone régulier inscrit de 16 côtés.

Lorsqu'on n'a pas besoin d'une grande exactitude, on peut prendre $\pi = \frac{22}{7} = 3,142$ à moins de 1 millième près : on suppose alors la circonférence presque égale au contour du polygone régulier circonscrit de 128 côtés, ce qui la rend un peu trop grande.

Dans quelques livres $\pi = 3,14$; cette valeur est trop petite : elle rend la superficie du cercle un peu moindre que celle du polygone régulier inscrit de 128 côtés.

Si l'on veut de la précision, il faut adopter $\pi = \frac{355}{113} = 3,141592$ à moins de 1 millionième près. Cela revient à supposer la circonférence un peu plus petite que le contour du polygone régulier circonscrit de 16 384 côtés. Or un pareil polygone se confond sensiblement avec le cercle.

Le rapport $\frac{355}{113}$ est facile à retenir : chacun de ses termes offre une moitié de chiffres du nombre formé avec les trois premiers chiffres impairs 1, 3, 5, écrits deux fois de suite : 113 | 355.

On a un rapport extrêmement rapproché de la vérité, lorsqu'on fait $\pi = 3{,}141\,592\,6$; car le contour du polygone régulier circonscrit de 32768 côtés est alors pris pour la circonférence.

Enfin, la vraie valeur du rapport $\frac{C}{D}$ ne serait pas préférable à $\pi = 3{,}141\,592\,653\,589\,793\,238\,46$ qui n'en diffère pas d'une dixaine de sextillionièmes.

Les praticiens peuvent se contenter de $\pi = 3{,}1416$, rapport trouvé dans l'Inde, il y a fort long-temps. Ce nombre rendant la circonférence à fort peu près égale au contour du polygone régulier circonscrit de 1024 côtés, ne fait pas commettre d'erreurs appréciables. Pour le retenir facilement, il faut le prononcer ainsi : *trois, quatorze, seize.*

Probl. (*a*) : *Mesurer une circonférence.*

Puisque π exprime le nombre de fois qu'une circonférence quelconque C contient son diamètre D, ont peut écrire $\frac{C}{D} = \pi$. Cette égalité donne

$$C = \pi \quad D,$$

pour formule générale du calcul de la longueur d'une circonférence dont on connaît le diamètre.

Mesurez donc le diamètre avec une des unités de longueur, et multipliez le nombre obtenu, par 3,1416 valeur de π.

Applications : Le point d'attache d'un cheval de manège est à 8 pieds de l'axe de l'arbre vertical ; quel chemin fait ce cheval à chaque tour?

« La piste est une circonférence qui a 8 pieds de rayon. Son diamètre est donc 16 pieds, et sa longueur $C = 3{,}1416 \times 16^{pi}$ $= 50^{pi}{,}2656 = 50^{pi}\,\frac{2656}{10000} = 50^{pi}\,3^{pou}\,2^{li}\,2^{poi}\,\frac{598}{625}$. »

« Le diamètre interne d'un tonneau, pris à la bonde, est $1^m{,}25$. Quel est le pourtour dans œuvre ? »

« La réponse est donnée par l'égalité $C = 3{,}1416 \times 1^m{,}25$ $= 3^m{,}927$. »

Probl. (*b*) : *Rectifier une circonférence.*

La *rectification* d'une circonférence consistant dans le tracé d'une droite égale à la courbe, est aussi une sorte de mesurage.

Tirez deux diamètres d'équerre AB, CD (P. XIV, F. 18) ; menez par A, une droite AE parallèle à CD ; marquez l'arc CG de 60^{σ} (219) ; tracez FG jusqu'à la rencontre de AE en H ; portez le rayon trois fois de H en I, et joignez ce point I à l'autre extrémité du diamètre AB. La droite BI égalera la demi-circonférence ADB, et en la doublant, vous aurez une droite de même longueur que la circonférence entière ADBCA.

« Il faut, pour qu'il en soit ainsi, que $BI = \frac{\pi \times D}{2} = \pi \times R = 3,141592\, R$, si R désigne le rayon. Or (253) $\overline{BI}^2 = \overline{AB}^2 \times \overline{AI}^2$, $AB = 2R$, $AI = HI - AH$ et $HI = 3R$; donc

$$\overline{BI}^2 = 4R^2 + (3R - AH)^2. »$$

« Pour obtenir AH, nous mènerons GL parallèle à HE. L'arc AL égalera AG (93), et comme $AG = AC - CG = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ l'arc GAL contiendra 60°, GL sera le rayon, et GM vaudra $\frac{1}{2}$ R. »

« Mais AH : GM : : AF : FM (81), et $\overline{FG}^2 = \overline{GM}^2 + \overline{FM}^2$ ou $\overline{FM}^2 = \overline{FG}^2 - \overline{GM}^2 = - \frac{1}{4} R^2 = \frac{3}{4} R^2$. Donc (453)

$$FM = \sqrt{\frac{3R^2}{4}} \text{ et } AH = \frac{\frac{1}{2} R \times R}{\sqrt{\frac{3R^2}{4}}} = \frac{\frac{1}{2} R^2}{\frac{1}{2} R \sqrt{3}} = \frac{R}{\sqrt{3}}. »$$

« Il s'ensuit $\overline{BI}^2 = 4R^2 + \left(3R - \frac{R}{\sqrt{3}}\right)^2$. Or $\sqrt{3} = 1,732\,051$ et $\frac{R}{1,732\,051} = 0,577\,350\,2R$. Donc $\overline{BI}^2 = 4R^2 + (3R - 0,577\,350\,2R)^2 = 4\,R^2 + (2,422\,649\,8\,R)^2 = 4\,R^2 + 5,869\,223\,053\,44\,R^2 = 9,869\,232\,053\,44\,R^2$ et $BI = \sqrt{9,869\,232\,053\,44\,R^2} = 3,141\,533\,R$. Ainsi, la demi-circonférence 3,141 592 R ne surpasse pas la droite BI de 6 centmillièmes du rayon, différence fort négligeable dans la pratique »

PROBL. (c) : *Mesurer un arc donné en degrés.*

Il faut qu'on donne en outre le rayon, car une infinité d'arcs de longueurs différentes peuvent contenir le même nombre de degrés (32).

Calculez donc la longueur $\pi \times D$ de la circonférence entière; divisez-la par 360, pour avoir la longueur d'un de ses degrés, et multipliez le quotient par le nombre N des degrés de l'arc. Le produit sera la longueur de cet arc.

Il s'ensuit la formule

$$A = \pi \times D \times \frac{N}{360}.$$

S'il s'agit, par exemple, d'un arc de 35° 40' pris sur une circonférence d'un rayon de $0^m,3$, $A = 3,1416 \times 0^m,6 \times \frac{35\frac{2}{3}}{360} = 1^m,88496 \times \frac{107}{1080} = \frac{201^m,69072}{1080} = 0^m,187$.

PROBL. (d) : *Mesurer un arc dont on connaît seulement le rayon.*

Achevez la circonférence ; cherchez par le procédé de la page 2[illegible] (probl. *b*), le nombre de fois N' que cette courbe contient l'arc ; calculez la longueur de la circonférence, et partagez-la en autant de parties égales que l'exprime N' ; une de ces parties, quotient de la division, sera la longueur de l'arc.

La formule, pour ce cas, est donc

$$A = \frac{\pi \times D}{N'}.$$

Supposons que l'arc soit les $\frac{7}{15}$ de la circonférence, ou que cette courbe le contienne $\frac{15}{7}$ de fois et que le diamètre soit $0^m,25$; nous aurons $A = \frac{3,1416 \times 0^m,25}{\frac{15}{7}} = \frac{0^m,7854}{\frac{15}{7}} = \frac{5^m,4978}{15} = 0^m,36652.$

Probl. (*e*) : *Mesurer le diamètre d'une circonférence tracée, dans l'intérieur de laquelle on ne peut opérer.*

Appliquez par petites parties, une ficelle sur cette circonférence, abandonnant la partie appliquée, pour placer la suivante. La ficelle qui aura été employée, quand vous serez revenu au point de départ, donnera, étant mesurée, la longueur de la courbe. Vous connaîtrez donc C et π dans la formule $C = \pi \times D$, et en divisant le produit C par le facteur π, vous obtiendrez nécessairement l'autre facteur D.

Ainsi, la formule qui donne le diamètre d'une circonférence de longueur connue, est

$$D = \frac{C}{\pi}.$$

Soit $4^m,7124$ la longueur de la circonférence. On a $D = \frac{4^m,7124}{3,1416} = 1^m,5$.

MESURAGE DES SUPERFICIES.

455. Puisqu'on ne saurait mesurer une chose qu'en la comparant à une autre de même nature (444), la mesure des superficies, leur unité, doit être une superficie limitée ou illimitée, selon qu'elles se trouvent dans l'un ou l'autre de ces cas.

Mesurage des angles.

456. Les angles ont deux unités : l'angle d'un degré et l'angle droit ; mais la dernière est plus employée que la première, parce que, la voyant souvent, on est familiarisé avec sa grandeur, on en a le sentiment.

Probl. (*a*) : *Mesurer un angle avec l'angle d'un degré.*

Il suffit de trouver combien l'angle donné peut renfermer de degrés du rapporteur entre ces côtés (p. 30, probl. *a*). Le nombre de ces degrés est aussi le nombre de fois qu'il contient l'angle d'un degré (30).

PROBL. (*b*) : *Mesurer un angle* BAC *avec l'angle droit* (P. IV, F. 17).

Elevez une perpendiculaire AE sur l'un des côtés ; décrivez du sommet A, l'arc d'indication du plus grand des deux angles CAB, EAB ; cherchez le nombre de fois que l'arc de CAB contient l'arc DE de l'angle droit EAB (p. 25) ; ce nombre exprimera aussi combien le premier angle contient le second (30).

Si, par exemple, l'arc de CAB est les $\frac{3}{7}$ de l'arc DE, l'angle CAB sera aigu et vaudra $\frac{3}{7}$ d'angle droit ; si l'arc de CAB est les $\frac{13}{8}$ de l'arc DE, l'angle CAB sera obtus et vaudra $\frac{13}{8}$ d'angle droit.

Mesurage des polygones.

457. L'unité de mesure des superficies limitées, est la superficie d'un carré qui a pour côté une unité de longueur. Si ce côté est d'un pouce, l'unité de superficie est dite *pouce carré*, ce qui signifie carré d'un pouce de côté ; si le côté est d'un pied, on a le *pied carré* ; s'il est d'une toise, d'une lieue, etc., il donne la *toise carrée*, la *lieue carrée*, etc.

Puisque la lieue ancienne ordinaire vaut 2 280 toises, la lieue carrée contient la toise carrée, comme 5 198400, quarré de 2 280, contient 1, quarré de 1 (203). La lieue carrée égale donc 5 198400 toises carrées.

Puisque la toise vaut 6 pieds, la toise carrée contient le pied carré, comme 36, quarré de 6, contient 1, quarré de 1. La toise carrée égale donc 36 pieds carrés. On verrait de même que le pied carré vaut 144 pouces carrés, que le pouce carré vaut 144 lignes carrées, et que la ligne carrée vaut 144 points carrés.

458. Une autre unité dite *perche carrée* était en usage autrefois pour les superficies de terrain. Elle présentait un carré dont le côté valait la *perche linéaire* ou des longueurs, laquelle avait 22 pieds.

Il s'ensuit que la perche carrée contient le pied carré, comme 484, quarré de 22, contient 1 (203) ; elle vaut donc 484 pieds carrés.

L'*arpent* de l'administration des eaux-et-forêts était de 100 perches carrées. Le carré qu'il formait, contenait donc celui de la perche carrée, comme 100 contient 1. Par conséquent, le côté de ce carré contenait la perche linéaire, comme 10, racine de 100, contient 1, racine de 1 ; c'est-à-dire qu'il valait 10 perches linéaires ou 220 pieds.

459. On se sert aussi de rectangles pour mesurer les superficies. Le plus grand des côtés inégaux est une certaine unité de longueur, la toise par exemple, et le plus petit est une autre unité moindre, telle que le pied, le pouce, etc. Le rectangle qui a 1 toise de base et 1 pied de hauteur, se nomme *toise-pied* ; celui qui a 1 toise de base et 1 pouce de hauteur, est dit *toise-pouce* ; la *toise-ligne* est un rectangle dont la base est d'une toise, et la hauteur, une ligne ; enfin *toise point* a une toise de base et un point de hauteur.

Il est visible que la toise carrée peut être partagée en 6 toise pieds, puisque les bases sont égales et que la hauteur du carré contient 6 fois celle du rectangle. D'ailleurs la toise carrée doit contenir la toise-pied, comme 36, quarré de 6 pieds, contient 6, produit des 6 pieds de la base du rectangle multipliés par la hauteur 1 pied (203). La toise carrée vaut donc 6 toise-pieds.

Vous reconnaîtrez de la même manière, et en employant le principe 197 ou celui du n° 199, que la toise-pied vaut 12 toise-pouces, que la toise-pouce vaut 12 toise-lignes, et que la toise-ligne vaut 12 toise-points. Les relations de la toise carrée et de ces mesures rectangulaires sont donc pareilles à celles qui existent entre la toise, le pied, le pouce, etc.

Enfin, le partage en parties égales ou le second des principes du n° 203 fait voir qu'il y a 6 pieds carrés dans la toise-pied, 72 pouces carrés dans la toise-pouce, 864 lignes carrées dans la toise-ligne, et 10368 points carrés dans la toise point.

460. Les mesures des superficies, dans le système métrique, sont aussi des carrés et des rectangles. Le carré unité se nomme *millimètre carré*, si son côté est d'un millimètre; *centimètre carré*, si son côté est d'un centimètre; *décimètre carré*, si le côté est d'un décimètre; *mètre carré* ou *centiare*, si le côté, est d'un mètre; *décamètre carré* ou *are* ou *perche métrique*, si le côté à 10^m; *hectomètre carré* ou *hectare* ou *arpent métrique*, si le côté a 100^m; *kilomètre carré* ou *myriare*, si le côté à 1000^m; enfin *myriamètre carré*, si le côté a $10\,000^m$. Mais les noms terminés en *are* ne s'employent que dans l'arpentage des terres.

Il est clair que le myriamètre carré vaut 100 myriares, puisque son côté contient 10 kilomètres (203). Le myriare vaut 100 hectares, parce que son côté contient 10 hectomètres; l'hectare vaut 100 ares, attendu que son côté est de 10 décamètres, et pour des raisons analogues, l'are vaut 100 centiares, le mètre carré vaut 100 décimètres carrés; le décimètre carré, 100 centimètres carrés; le centimètre carré, 100 millimètres carrés; de sorte que chaque unité carrée et métrique vaut 100 fois celle qui la suit en descendant, et le centième de celle qui la précède.

Les unités métriques rectangulaires ne portent point de noms particuliers; chacune forme le dixième ou le centième ou le millième d'une des unités carrées. Ainsi, le dixième de l'hectare est un rectangle qui a 100^m de base et 10^m de hauteur; le centième de l'hectare est un rectangle qui a 100^m de base et 1^m de hauteur; le millième porte 100^m de base et 1 décimètre de hauteur: c'est ce qu'on reconnaît aisément en partageant le côté de l'hectare en 10, 100, 1000 parties égales, et menant par les points de division, des parallèles à l'autre côté, on forme ainsi 10, 100, 1000 rectangles égaux (189).

On voit de même que le dixième du mètre carré est un rectangle de 1^m sur 1 décimètre. Le centième est un rectangle de 1^m sur

1 centimètre, et le millième, un rectangle de 1_m sur 1 millimètre.

Ainsi, les relations d'une unité métrique carrée et de ses parties rectangulaires, sont les mêmes que celles des unités linéaires et de leurs décimales; de là le grand avantage des nouvelles mesures.

Mesurage des parallélogrammes.

461. Tous les mesurages de superficie ont pour fondement celui du rectangle; ce dernier doit donc être établi d'abord.

Soient b et h les unités de longueur qui forment la base et la hauteur de l'unité u de superficie, rectangulaire ou carrée. Représentons par B le nombre de fois que b est contenue dans la base d'un rectangle quelconque R; la longueur de cette base sera $b \times B$. Représentons par H le nombre de fois que h est contenue dans la hauteur du même rectangle; la longueur de cette hauteur sera $h \times H$. Or, d'après le principe 199, $\frac{R}{u} = \frac{(b \times B) \times (h \times H)}{b \times h}$

$$= \frac{b \times h \times B \times H}{b \times h} = B \times H\ (77), \text{ et comme } u = 1,$$

$$R = B \times H.$$

Donc, le nombre de fois qu'un rectangle contient l'unité de superficie, ou la contenance de ce rectangle, est le produit des nombres qui expriment les longueurs de sa base et de sa hauteur, mesurées respectivement avec la base et la hauteur de l'unité de superficie. Pour énoncer brièvement ce principe, on dit qu'*un rectangle égale le produit de sa base par sa hauteur.*

PROBL. (*a*) : *Mesurer un rectangle en mètres carrés et parties décimales du mètre carré.*

La base et la hauteur de l'unité de superficie sont chacune égale au mètre. Mesurez donc en mètres et parties du mètre, la base et la hauteur du rectangle, et appliquez la formule $R = B \times H$.

Si par exemple $B = 3^m 455$ et $H = 2^m,32$, vous aurez $R = 3^m,455 \times 2^m,32 = 8^{mm},0,156$, c'est-à-dire que le rectangle contient 8 mètres carrés et 156 dixmillièmes de mètre carré; car les mètres carrés s'indiquent par *mm*.

Observez, en faisant les mesurages des côtés inégaux d'un rectangle, de mettre encore plus de soin à celui du petit côté, qu'à celui du grand. Si vous faisiez une erreur dans le premier, elle se trouverait répétée au produit, autant de fois que le grand côté contient de mesures, et l'erreur qui en résulterait pour la superficie, serait plus considérable que celle qui proviendrait d'une erreur pareille à la première, faite sur le grand côté, puisque celle-ci ne serait multipliée que par le nombre de mesures du petit côté.

PROBL. (*b*) : *Mesurer un rectangle en mètres carrés et parties carrées.*

Mesurez la base et la hauteur en mètres et parties du mètre ; puis appliquez la formule, et partagez les décimales du produit en groupes de deux chiffres chacun, à partir de la virgule. Si le dernier groupe à droite n'a qu'un chiffre, vous le compléterez en écrivant un zéro à la suite. Le 1er groupe à gauche exprimera des décimètres carrés ; le suivant, des centimètres carrés, le 3e, des millimètres carrés, etc. (460).

Soient, comme tout-à-l'heure, $B=3^m,455$ et $H=2^m,32$. La formule donnera $R=3^m,455\times 2^m,32=8^{mm},0156=8^{mm}\ 1^{dd}\ 56^{cc}$; c'est-à-dire que la superficie du rectangle est de 8 mètres carrés, un décimètre carré et 56 centimètres carrés.

Soient encore $B=15^m,6$ et $H=20^m,72$. Vous trouverez $R=323^{mm},232=323^{mm},2320=323^{mm}23^{dd}20^{cc}$.

PROBL. (*c*) : *Mesurer un rectangle en hectares.*

Il convient d'employer la chaîne métrique (445), quand la superficie est grande. Cette chaîne a 10^m, mesure prise depuis l'extrémité intérieure de l'une des *poignées* en fer qui la terminent, jusqu'à l'extrémité intérieure de l'autre. Comme les chaînons dont elle est formée, ont 5 décimètres chacun, et que les mètres y sont marqués par des anneaux de laiton, elle permet de compter les mètres et même d'apprécier les décimètres que contient une longueur, en sus d'un nombre de décamètres.

Mesurez donc la base et la hauteur du rectangle avec la chaîne métrique ; réduisez en décimètres les longueurs trouvées ; multipliez l'un par l'autre les deux nombres qui en résultent ; séparez six décimales et barrez les deux dernières. Dans le produit ainsi modifié, la partie entière exprimera des hectares ; les deux premières décimales donneront des ares, et les deux dernières, des centiares. C'est parce que l'on néglige ordinairement les fractions de centiare, qu'il est prescrit de barrer la 5e et la 6e décimale.

Supposons qu'on ait trouvé 15 décamètres, $4^m\ 5^d$ pour la base du rectangle et 9 décamètres, $3^m\ 2^d$ pour la hauteur. $B=1545^d$, $H=932^d$, $R=1\,545^d\times 932^d=1\,439\,940^{dd}=1^{ha},4399$ $=1^{ha}\,43^a\,99^{ca}$.

En effet, le nombre $1\,439\,940^{dd}$ peut se décomposer comme il suit : 40 décimètres carrés, 99 mètres carrés ou centiares, 43 décamètres carrés ou ares et 1 hectomètre carré ou hectare ; car le mètre carré est centaine, par rapport au décimètre carré (460) ; le décamètre carré est centaine, par rapport au mètre carré, et l'hectomètre carré est centaine, relativement au décamètre carré. Or, si l'on supprime les 40^{dd}, qui forment seulement des centièmes de centiare, et qu'on renverse l'ordre, il vient 1 hectare, 43 ares et 99 centiares, ou 1 hectare 4 399 dixmillièmes d'hectare.

PROBL. (*d*) : *Mesurer un rectangle en toises carrées et parties carrées de la toise carrée.*

Supposons que la base du rectangle soit de $5^t\ 4^{pi}$ et que la hauteur ait $2^t\ 0^{pi}\ 8^{po}\ 10^{li}$. Vous convertirez ces deux longueurs en unités de la plus petite des espèces qu'elles renferment, en lignes par conséquent. Elles donneront, la première $4\,896^l$, la seconde $1\,834^l$. Multipliant l'un par l'autre ces deux nombres de lignes, vous trouverez $8\,979\,264^{ll}$ pour la superficie du rectangle, et il vous restera à chercher combien ce nombre de lignes carrées forme de pouces carrés, de pieds carrés et de toises carrées. A cet effet, vous diviserez $8\,979\,264^{ll}$ par 144^{ll} valeur d'un pouce carré; le quotient donne exactement $62\,356^{pp}$; il n'y a donc pas de lignes carrées dans le rectangle proposé. Divisant ensuite le nombre de pouces carrés par 144^{pp} valeur d'un pied carré, vous obtiendrez 4^{pp} pour reste et 433^{pp} pour quotient. Divisant enfin le nombre de pieds carrés par 36^{pp} valeur d'une toise carrée, vous trouverez pour reste 1^{pp} et pour quotient 12^{tt}. Ainsi, le nombre $8\,979\,264^{ll} = 12^{tt}\ 1^{pp}\ 4^{pp}$, c'est-à-dire que la superficie du rectangle vaut 12 toises carrées, 1 pied carré et 4 pouces carrés.

PROBL. (*e*) : *Mesurer un rectangle en toises carrées et parties rectangulaires de la toise carrée.*

Supposez que la base du rectangle soit, comme dans le cas précédent, $5^t\ 4^{pi}$ et que la hauteur ait aussi $2^t\ 0^{pi}\ 8^{po}\ 10^l$. Vous ferez le produit de ces deux longueurs, par une multiplication complexe, en considérant le multiplicande $2^t\ 0^{pi}\ 8^{po}\ 10^l$, par exemple, comme exprimant des toises carrées, des toise-pieds, des toise-pouces, des toise-lignes, et en observant que la toise-pied vaut $\frac{1}{6}$ de la toise carrée, que la toise-pouce vaut $\frac{1}{12}$ de la toise-pied, que la toise-ligne vaut $\frac{1}{12}$ de la toise-pouce (459). Voici l'opération :

	2^{tt}	0^{tpi}	8^{tpo}	10^{tl}
	5^t	4^{pi}		
Pour 5 toises.	10^{tt}	3^{tpi}	8^{tpo}	2^{tl}
Pour 3^{pi} ou $\frac{1}{2}$ toise.	1	0	4	5
Pour 1^{pi} ou $\frac{1}{3}$ de 3^{pi}.		2	1	$5\ \frac{2}{3}$
	12^{tt}	0^{tpi}	2^{tpo}	$0^{tl}\ \frac{2}{3}$

Le résultat est exactement égal au précédent $12^{tt}\ 1^{pp}\ 4^{pp}$; car une toise-ligne vaut 864^{ll} dont les $\frac{2}{3}$ font 576^{ll} ou 4^{pp}; 1^{tpo} vaut 72^{pp}, et 2^{tpo} valent 144^{pp} ou 1^{pp}.

PROBL. (*f*) : *Mesurer un rectangle en arpens et perches carrées.*

A l'aide de la perche linéaire, ancienne chaîne d'arpenteur, longue de 22^{pi}, vous trouverez, par exemple, 23 perches 5^{pi} dans la base et 12^{p} 18^{pi} dans la hauteur. Faites une multiplication complexe avec ces deux nombres, en regardant le multiplicande comme exprimant des perches carrées et des perche-pieds, observant qu'il y a 22 perche-pieds dans une perche carrée, et décomposant les pieds en 11, plus un certain nombre de fois 2, plus 1. Vous trouverez ainsi 297^{pp} 15^{ppi} $\frac{13}{42}$.

Ayant le nombre des perches carrées, il ne s'agit plus que de séparer les deux premiers chiffres à droite, dans la partie entière, pour avoir le nombre des arpens (458). Ainsi, la superficie demandée est à peu près 2^{arp} $97^{pp},69$ ou $2^{arp},9769$.

PROBL. (g) : *Trouver l'un des côtés inégaux d'un rectangle, lorsque l'on connaît l'autre et la superficie de la figure.*

Convertissez la superficie donnée en unités carrées d'une seule espèce, et divisez-la par le côté connu, exprimé au moyen de l'unité linéaire correspondante. Le quotient sera l'autre côté exprimé au moyen de la même unité ; car de ce que $R = B \times H$, il suit que

$$B = \frac{R}{H} \quad \text{et que} \quad H = \frac{R}{B}.$$

APPL. (a) : Lorsque des sphères égales, des boulets par exemple, sont placées tangentiellement les unes aux autres et de manière que les lignes des centres forment un rectangle (P. XII. F. 39), on obtient leur nombre total en multipliant le nombre de celles d'un des grands côtés, par le nombre de celles qui se trouvent sur un des petits côtés. On aurait ici $4 \times 3 = 12$.

« Il en est de même pour des arbres plantés en quinconce rectangulaire (p. 199). »

APPL. (b) : Pour faire une salle rectangulaire qui contînt $263^{mm},925$ et qui eût $10^{m},35$ de largeur, il faudrait lui donner en longueur

$$\frac{263^{mm},925}{10^{m},35} = 25^{m}5.$$

« Si l'on veut prendre dans une pièce de terre, un rectangle de $1^{ha},4399$ qui ait en longueur $154^{m},5$, il faut convertir les hectares en centiares ou mètres carrés et diviser par $154^{m},5$. On a ainsi

$$\frac{14399^{mm}}{154^{m},5} = 93^{m},197 \text{ (probl. } c\text{).} »$$

« Soit à trouver la hauteur d'un rectangle qui renferme 12^{tt} 2^{tpou} et dont la base ait 5^{t} 4^{pi}. Le premier nombre converti en toises carrées devient $\frac{866}{72}{}^{tt}$; le second converti en toises donne $\frac{34}{6}{}^{t}$. Divisant les toises carrées par les toises simples, on obtient $\frac{5\,196^{t}}{2\,448}$ $= 2^{t}$ 8^{pou} 9^{li} 9^{poi}, pour la hauteur cherchée. »

« Soit encore à déterminer la hauteur d'un rectangle qui ait une base de 5^{t} 4^{pi} et une superficie de 12^{tt} 1^{pp} 4^{pp}. Il faut réduire le second nombre en pouces carrés et le premier en pouces ; c'est encore ce qui devrait être fait, si la base contenait des pouces ; et la superficie, seulement des toises carrées et des pieds carrés. On trouve $62\,356^{pp}$ et 408^{po}. La division des pouces carrés par les pouces simples, donne 152^{po} ou $12^{pi}\,8^{po}$ ou $2^{t}\,8^{po}$, et il reste 340^{pp}. On aurait alors à multiplier ce reste par 144, pour le convertir en lignes carrées, et le diviseur par 12, pour le convertir en lignes; mais comme le dividende n'a pas de lignes carrées, on peut multiplier 340 par 12 seulement et conserver le diviseur 408 : le quotient 10^{li} n'en est pas changé. Par conséquent, la hauteur cherchée contient $2^{t}\,8^{po}\,10^{li}$ (probl. *d*). »

Probl. (*h*) : *Mesurer un carré.*

Le carré étant un rectangle dont la base égale la hauteur, a pour superficie le produit de son côté multiplié par lui-même (461). Si donc L représente la longueur du côté d'un carré C, la formule du mesurage est

$$C = L^2.$$

Elle se traduit ainsi : *la superficie d'un carré égale le quarré numérique du côté.*

Soit $L = 18^{m},15$. On aura $C = (18^{m},15)^2 = 329^{mm},4225$.

Probl. (*i*) : *Trouver le côté d'un carré dont la superficie est connue.* Puisque la superficie est le quarré numérique du côté, ce côté est la racine quarrée de la superficie (453). Donc $L = \sqrt{C}$.

Si $C = 329^{mm},4225$, on trouve pour le côté, $L = \sqrt{329^{mm},4225} = 18^{m},15$.

App. (*a*) : Le nombre total de sphères égales qui remplissent un carré en se touchant, égale le quarré du nombre de celles qui forment un côté.

« Il en est de même du nombre total des cases d'un damier et de celui d'arbres plantés en quinconce carré (p. 199). »

Appl. (*b*) : Le plan d'un pavillon carré doit renfermer $21^{tt}\,6^{tl}$, quel sera le pourtour des fondations dans œuvre ? Il faut d'abord réduire la superficie en lignes carrées. A cette fin, multipliez 21^{tt} deux fois par 6, pour avoir les pieds carrés (457) ; puis le produit deux fois par 12, pour avoir des pouces carrés ; puis le nouveau produit deux fois par 12, pour avoir des lignes carrées. Ajoutez au résultat, le produit de 6^{tl} par 864, nombre des lignes carrées d'une toise ligne (459) ; vous obtiendrez $15\,681\,600^{ll}$. Il faut ensuite extraire la racine de ce nombre ; elle est de 3960^{l}. Divisant cette racine par 12, pour avoir des pouces ; puis le quotient par 12, pour avoir des pieds ; puis le nouveau quotient par 6, pour avoir des toises, vous trouverez que le côté du carré interne des fondations doit être de $2^{t}\,3^{pi}\,6^{po}$. Multipliant enfin ce nombre par 4, vous obtiendrez $10^{t}\,2^{pi}$ pour le pourtour cherché.

PROBL. (*k*) : *Mesurer un parallélogramme.*

Les mesurages du parallélogramme se font absolument comme ceux du rectangle, et la formule est

$$P = B \quad H;$$

car la superficie de cette figure égale celle du rectangle de même base et de même hauteur (190).

Soient 6^t la longueur de CD, base du parallélogramme ABCD (P. VII, F. 32), et 16^t la longueur de EF, perpendiculaire abaissée sur CD, d'un point quelconque de AB. Vous aurez $P = 6t \times 16^t = 96^{tt}$.

On pourrait aussi prendre pour base, le côté AD, et pour hauteur, la perpendiculaire abaissée sur AD, d'un point quelconque de BC. Elles seraient différentes de CD, EF, mais leur produit donnerait encore 96^{tt}.

APPL. (*a*) : On aurait un parallélogramme à mesurer, s'il s'agissait de toiser un mur vertical bâti selon une des lignes de pente d'un terrain; car le faîte et la ligne de terre seraient deux droites parallèles inclinées, et formeraient des angles aigus ou obtus avec les deux arêtes verticales du mur.

APPL. (*b*) : Si des boulets égaux sont placés tangentiellement les uns aux autres et de manière que les lignes des centres forment un parallélogramme (P. XIV, F. 19), on obtiendra le nombre total des projectiles, en multipliant le nombre de ceux d'un seul rang AB, par le nombre de ceux qui se trouvent dans la hauteur du parallélogramme, ou ce qui revient au même, par le nombre des rangs, ou encore par le nombre de boulets d'un AC des deux autres côtés parallèles du parallélogramme. Si, par exemple, AB contient 5 projectiles et que AC en contienne 5 aussi, le nombre total sera 5×5 ou 25.

« Il entre donc le même nombre de boulets dans un parallélogramme et dans un carré (p. 428, appl. *a*), quand les côtés de l'une des figures, en renferment autant que les côtés de l'autre. Toutefois, les deux superficies occupées sur le terrain par les projectiles, ne sont pas équivalentes : celle du carré est plus grande que celle du parallélogramme, parce qu'il résulte de l'arrangement des boulets dans les deux figures, que la hauteur du carré contient plus de pieds, par exemple, que celle du parallélogramme, bien qu'il y ait le même nombre de rangs dans ces deux hauteurs. »

« Ainsi, pour obtenir le nombre total de boulets, d'arbres, etc., également espacés, contenus dans un parallélogramme dont les côtés non parallèles en renferment le même nombre, *il faut faire le quarré de ce dernier nombre*, comme si la figure était un carré. »

Équerre d'arpenteur.

462. Le dernier des mesurages de superficies qui précèdent et la plupart de ceux qui vont suivre, exigent souvent le tracé de longues

perpendiculaires sur le terrain. Le cordeau-équerre (p. 261) ne peut jamais être très-juste, à cause des variations que l'humidité et la sécheresse font éprouver aux longueurs des cordes; il l'est même fort peu pour les grandes perpendiculaires. D'ailleurs on ne peut s'en servir que sur un terrain plan, uni.

Un autre instrument est donc nécessaire; celui qu'on emploie se nomme *équerre d'arpenteur* (P. XIV, F. 20). Figurez-vous un prisme droit, octogonal et creux, en laiton, que porte un bâton ferré en pointe à l'autre bout, et placé selon l'axe. Les octogones des bases sont réguliers. Il y a des fentes sur les faces latérales, dans les plans de symétrie qui coupent ces faces perpendiculairement. Chaque fente est divisée en deux parties dans sa longueur : l'une étroite et l'autre large qui est séparée en deux par un fil de soie parallèle aux arêtes du prisme. C'est à la partie étroite qu'on applique l'œil. Quand le fil de la fente opposée couvre un jalon planté au loin verticalement, ce jalon et le pied P de l'instrument sont dans un même plan vertical.

L'équerre d'arpenteur reçoit plusieurs autres formes; mais dans tous les cas, elle présente deux plans de mire AB, A'B' d'équerre l'un sur l'autre: c'est là ce qui fait l'essence de cet instrument. On peut donc aisément le remplacer, lorsqu'on en est dépourvu : il suffit de tracer sur une petite planchette, sur le fond d'un chapeau, deux droites qui se coupent perpendiculairement, de manière que leur croisement réponde à l'axe du bâton qui forme le pied.

PROBL. (*a*) : *Déterminer la hauteur d'un parallélogramme à l'aide de l'équerre d'arpenteur.*

Plantez verticalement deux jalons C, D sur la base (P. VII, F. 32), plantez l'équerre en F, de façon que le plan de mire AB (P. XIV, F. 20) contienne les deux jalons : ce plan sera vertical et passera par l'horizontale CD; faites planter un troisième jalon E dans le plan de mire A'B' : ce jalon et le pied P détermineront un second plan vertical d'équerre sur le premier. Par conséquent, l'horizontale EF se trouvera perpendiculaire sur CD et formera la hauteur du parallélogramme ABCD (270).

Vous voyez que le problème revient à celui-ci : *Élever à l'aide de l'équerre d'arpenteur, une perpendiculaire sur une droite donnée* CD, *en un point* F *choisi ou désigné.*

PROBL. (*b*) : *Déterminer la hauteur d'un triangle, à l'aide de l'équerre d'arpenteur.*

Plantez verticalement deux jalons B, C, sur le côté pris pour base (P. VII, F. 17); placez ensuite l'instrument de manière que le plan de mire AB (P. XIV, F. 20) contienne les deux jalons, et voyez, en visant par la fente A', si le fil de la fente B' couvre le jalon planté au sommet A. Estimez-vous que le plan de mire A'B' laisse le sommet A de deux mètres à droite? vous portez de deux mètres à droite le pied de l'équerre, et vous opérez comme dans la première position. Le sommet A vous paraît-il alors d'un décimètre à gauche du plan de mire A'B' ? vous rapportez l'instrument d'un décimètre à gauche ; puis vous recommencez les observations.

Après quelques semblables tâtonnemens, après le second ou le troisième quand on a un peu d'habitude, on parvient enfin à donner au pied P, une position D telle que le plan A'B' passe par le sommet A, en même temps que le plan AB contient les jalons B, C. Alors l'horizontale AD est perpendiculaire sur l'horizontale BC et forme la hauteur du triangle ABC.

Vous avez reconnu, sans doute, que le problème est absolument celui-ci : *Abaisser d'un point indiqué* A, *à l'aide de l'équerre d'arpenteur, une perpendiculaire sur une droite donnée* BC.

Mesurage des triangles.

463. Tout triangle T dont la base est B et la hauteur H, vaut la moitié du parallélogramme qui a cette base et cette hauteur (191). Or, la superficie de cette dernière figure est B $\times$ H. La formule du mesurage d'un triangle est donc

$$T = \frac{B \times H}{2};$$

elle se traduit ainsi : *Un triangle égale la moitié du produit de sa base multipliée par sa hauteur.*

PROBL. (*a*) : *Mesurer un triangle dans l'intérieur duquel on peut opérer.*

Mesurez la base et la hauteur avec la même unité ; faites le produit des deux longueurs trouvées et prenez la moitié de ce produit.

Soient $B = 3^m,75$ et $H = 4^m,125$. Vous aurez $T = \dfrac{3^m,75 \times 4^m,125}{2}$ $= \dfrac{15^{mm},46875}{2} = 7^{mm},7343$ à moins de 1 centimètre carré.

On aurait absolument le même résultat, en prenant tout autre côté pour base : si la nouvelle base surpassait B, la hauteur serait plus petite que H ; si elle était moindre que B, la hauteur surpasserait H, et il se ferait une compensation telle que le produit ne changerait pas.

PROBL. (*b*) : *Mesurer un triangle* ABC *dans l'intérieur duquel on ne peut opérer* (P. VII, F. 33).

Menez par le sommet A, une parallèle à la base BC, et d'un point E de cette parallèle, abaissez une perpendiculaire sur le prolongement de BC. Cette perpendiculaire sera égale à la hauteur AD (65), et vous pourrez appliquer la formule.

PROBL. (*c*) : *Mesurer un triangle dont on ne peut connaître la hauteur.*

Mesurez avec la même unité, les trois côtés c, c', c'' du triangle T ; faites la somme s de ces longueurs et prenez-en la moitié; puis multipliez la demi-somme $\frac{s}{2}$ par son excès sur c, et le produit par l'excès de $\frac{s}{2}$ sur c', et le second produit par l'excès de $\frac{s}{2}$ sur c''; enfin, extrayez la racine quarrée du troisième produit ; cette racine exprimera en unités carrées, la superficie du triangle.

La formule est

$$T = \sqrt{\frac{s}{2} \times \left(\frac{s}{2} - c\right) \times \left(\frac{s}{2} - c'\right) \times \left(\frac{s}{2} - c''\right)}.$$

Voici comment il convient de disposer le calcul :

$$c = 15^{m} \qquad \frac{s}{2} = 35^{m},125$$

$$c' = 23 \qquad \frac{s}{2} - c = 35,125 - 15^{m} = 20,125$$

$$c'' = 32,25 \qquad \frac{s}{2} - c' = 35,125 - 23 = 12,125$$

$$s = 70,25 \qquad \frac{s}{2} - c'' = 35,125 - 32,25 = 2,875$$

$$\frac{s}{2} \times \left(\frac{s}{2} - c\right) = 35,125 \times 20,125 = 706,890\,625$$

$$\frac{s}{2} \times \left(\frac{s}{2} - c\right) \times \left(\frac{s}{2} - c'\right) = 706,890\,625 \times 12,125 = 8\,571,048\,828$$

$$\frac{s}{2}\left(\frac{s}{2} - c\right)\left(\frac{s}{2} - c'\right)\left(\frac{s}{2} - c''\right) = 8571,048\,828 \times 2,875 = 23\,741,765\,38$$

$$T = \sqrt{23741,765\,380} = 154^{mm},084$$

Il suffit de conserver 6 décimales dans les produits qui en ont davantage, si l'on veut se borner aux millièmes de mètre carré pour la superficie; car 6 décimales en donnent 3 à la racine. Mais alors on doit avoir soin d'augmenter de 1 la 6^{e} décimale, quand ce qu'on néglige surpasse le chiffre 5.

Si vous mesurez le même triangle par ce procédé et par celui du problème (*a*), vous trouverez absolument la même superficie, et vous ferez ainsi une vérification de la dernière formule, qui tiendra lieu de la démonstration qu'on ne peut donner ici.

PROBL. (*d*) : *Sommer des objets également espacés et disposés en triangle équilatéral.*

Supposons des boulets placés tangentiellement les uns aux autres, de manière que les lignes des centres forment le triangles ABC (P. XIV, F. 19). Ce triangle est la moitié du parallélogramme ABDC; mais il contient de plus que cette moitié, les 5 demi-boulets situés en dehors, dans la rangée BC. Donc, pour avoir la somme des boulets du triangle équilatéral, il faut ajouter à la moitié de ceux du parallélogramme, la moitié du nombre des boulets d'un côté.

Soit n le nombre des projectiles de chaque côté. Le parallélogramme ABCD en contiendra n^2 (p. 429, appl. b), et par conséquent, il y en aura dans le triangle ABC,

$$\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}=\frac{n^2+n}{2}.$$

Ainsi, pour sommer des objets, sphères, arbres, etc., également espacés et disposés en triangle équilatéral, *il faut faire le quarré du nombre de ceux d'un côté, y ajouter ce même nombre et prendre la moitié du total.*

Si, par exemple, chaque côté du triangle contient 5 objets, comme dans la figure, ce triangle en renfermera $\frac{25+5}{2}=\frac{30}{2}=15.$

Mesurage des quadrilatères.

464. Le mesurage d'un quadrilatère quelconque revient à celui des deux triangles qu'y forme une diagonale; il n'y a donc pas de procédés à donner pour le cas général; mais il existe deux cas particuliers, pour lesquels on a des formules qui doivent être connues.

PROBL. (a) : *Mesurer un trapèze* ABCD (P. XIV, F. 21).

Mesurez les deux bases AB, CD; faites-en la somme; multipliez cette somme par la hauteur BE, et prenez la moitié du produit; cette moitié exprimera en unités carrées, la superficie du trapèze.

Si donc B est la grande base, b la petite et H la hauteur, on a pour formule, en désignant le trapèze par Tp,

$$Tp=\frac{(B+b)\times H}{2}.$$

Effectivement, le triangle BCD $=\frac{B\times H}{2}$; le triangle ABD qui a même hauteur, vaut $\frac{b\times H}{2}$, et leur somme ou

$$Tp=\frac{B\times H}{2}+\frac{b\times H}{2}=\frac{B\times H+b\times H}{2} \quad \frac{(B+b)\times H}{2}$$

car on a le même produit soit qu'on multiplie B et b par le même nombre et qu'on additionne les deux résultats, soit que la multiplication se fasse après l'addition de B et b.

PROBL. (b) : *Mesurer un quadrilatère dans lequel on ne peut opérer.*

Le mesurage est analogue à celui du probl. c (p. 432), quand une circonférence peut être circonscrite au quadrilatère. Dans le cas contraire, il faut recourir au *mesurage des polygones irréguliers.*

Or, voici comment on reconnaît qu'une circonférence peut ou ne peut être circonscrite à un quadrilatère ABCD (P. XIV, F. 22). Prenez deux longueurs égales AE, AF sur les prolongemens des côtés d'un des angles, et mesurez AE, EF; portez AE sur l'un des côtés de l'angle opposé C, de C en G, et sur le prolongement de l'autre, de C en H. Si GH $=$ EF, les triangles EAF, GCH seront égaux (164), l'angle A égalera l'angle GCH, et la somme des angles opposés A, BCD du quadrilatère, donnera 180° (45). Par conséquent, il en sera de même des deux autres angles opposés B, D, et la circonférence qui passera par B, A, D, prendra aussi le point C.

En effet, l'angle inscrit A aura pour indication, la moitié de l'arc BCD (98); mais la somme des indications des angles A, BCD fait 180°, moitié de la circonférence. Donc, l'indication de BCD doit être la moitié du reste BAD de la circonférence; donc cet angle BCD est inscrit aussi, et le point C est sur la courbe.

Dès que vous aurez reconnu que GH $=$ EF, mesurez les quatre côtés c, c', c'', c''' du quadrilatère Q; faites-en la somme s; prenez la moitié de cette somme; cherchez la différence de chaque côté à cette moitié; multipliez la première différence par la seconde; puis le produit par la troisième; puis le nouveau produit par la quatrième; la racine quarrée du dernier produit sera en unités carrées la superficie du quadrilatère.

Tous les calculs sont indiqués par la formule

$$Q = \sqrt{\left(\frac{s}{2} - c\right) \times \left(\frac{s}{2} - c'\right) \times \left(\frac{s}{2} - c''\right) \times \left(\frac{s}{2} - c'''\right)}.$$

Elle devient celle du probl. c (p. 432), si l'on y fait $c''' = 0$, c'est-à-dire si le quadrilatère est réduit à un triangle. Pour la vérifier, il suffit de l'appliquer à un quadrilatère inscrit, préalablement mesuré comme l'indique le n° 464.

Mesurage des polygones réguliers.

465. Tout polygone régulier peut être décomposé en triangles égaux AOB, BOC, etc. (P. VIII, F. 18) qui ont le centre pour sommet commun, les côtés pour bases, et le rayon OG de la circonférence inscrite, pour hauteur. La superficie du polygone égale donc celle d'un de ces triangles, multipliée par leur nombre qui est le même que celui des côtés.

Soient AB c, OG $= r$, et n le nombre des côtés. La superficie du triangle AOB est $\frac{c \times r}{2}$ (463), et par conséquent le polygone

$$P = \frac{c \times r}{2} \times n \quad \frac{c \times n \times r}{2}.$$

Comme le produit $c \times n$ est la somme des côtés, le contour du polygone, on peut dire qu'*un polygone régulier égale la moitié du produit de son contour multiplié par le rayon de la circonférence inscrite.*

PROBL. (a) : *Mesurer un polygone régulier* ABC... (F. VIII, F. 18).
Cherchez le centre O ; abaissez de O une perpendiculaire sur un côté AB ; mesurez cette perpendiculaire et le côté ; faites le produit des deux longueurs ; multipliez-le par le nombre des côtés et prenez la moitié du résultat, conformément à la formule $P = \frac{c \times r \times n}{2}$.

Si, par exemple, $c = 4$, $r = 3^m,46$ et $n = 6$, on a
$$P = \frac{4^m \times 3^m,46 \times 6}{2} = \frac{13^{mm},84 \times 6}{2} = \frac{83^{mm},04}{2} = 41^{mm},52.$$

PROBL. (b) : *Déterminer, sans mesure, le rayon* OG *de la circonférence inscrite à un hexagone régulier.* (P. VIII, F. 18).
Le rayon OA de la circonférence circonscrite, forme un triangle rectangle avec OG et la moitié de AB ; en outre OA = AB = c. Si donc OG est représenté par r, on a

$$c^2 = r^2 + \frac{c^2}{4} \text{ (253)} \quad \text{ou} \quad r^2 = c^2 - \frac{c^2}{4} = \frac{4c^2 - c^2}{4} = \frac{3c^2}{4}.$$

Par conséquent,

$$r = \sqrt{\frac{3c^2}{4}} = \frac{c}{2}\sqrt{3} = \frac{c}{2} \times 1,732\,051.$$

Soit $c = 4^m$, comme dans l'exemple précédent ; $r = \frac{4^m}{2} \times 1,732051$ $= 3^m,464\,102$.

Mesurages du cercle.

466. Le cercle pouvant être considéré comme un polygone régulier d'un fort grand nombre de très-petits côtés, a pour superficie, la moitié du produit de sa circonférence multipliée par son rayon (240) ; car la circonférence est son contour, et la circonférence inscrite se confond avec ce contour. Si donc nous désignons par C' la superficie du cercle, par C la circonférence et par R le rayon, nous pourrons écrire $C' = \frac{C \times R}{2}$. Mais C $\pi \times D = \pi \times 2R$.
Donc

$$C' = \frac{\pi \times 2R \times R}{2} = \pi \times R^2,$$

ce qui signifie que *la superficie d'un cercle égale le quarré numérique du rayon, multiplié par le rapport* 3,1416 *de la circonférence au diamètre.*

Le mesurage de la superficie d'un cercle n'est, comme vous voyez, qu'un *à-peu-près*, ainsi que celui de la circonférence. Pour qu'il fût exact, il faudrait que l'unité égalât la superficie d'un cercle dont le rayon valût l'unité de longueur : la superficie de tout autre cercle contiendrait celle-là, autant de fois que l'exprimerait le quarré numérique du rayon (252). Mais un tel mesurage ne serait pas en harmonie avec celui des autres superficies.

Au reste, l'approximation, de π pouvant être rendue aussi grande qu'on veut, il n'y aurait aucun avantage pour la pratique, à employer un mesurage exact, au lieu de la formule $C' = \pi \times R^2$. La *quadrature du cercle*, c'est-à-dire l'évaluation précise de sa superficie en mesures carrées, est donc une de ces recherches puériles auxquelles un homme de bon sens ne doit pas se livrer, même dans la supposition qu'il y ait possibilité d'arriver à un résultat vrai.

Probl. (*a*) : *Mesurer la superficie d'un cercle dans l'intérieur duquel on peut opérer.*

Cherchez le centre ; tirez un rayon et mesurez-le ; puis appliquez la formule $C' = \pi \times R^2$.

Soit $R = 2^m,15$. Vous trouverez $C' = 3,1416 \times (2^m,15)^2 = 3,1416 \times 4^{mm},6225 = 14^{mm},522\,046$.

Probl. (*b*) : *Mesurer la superficie d'un cercle dans lequel on ne peut opérer, quand les extrémités d'un diamètre sont visibles l'une de l'autre.*

Menez par un point D (P. IV, F. 28), une droite DE tangente au cercle (p. 112, probl. *b*) ; placez l'équerre d'arpenteur au contact A ; faites marquer le point C de l'alignement AC perpendiculaire à DE (462) ; la distance AC sera la longueur du diamètre (107), et pour la mesurer, vous opérerez comme dans le probl. *b* (p. 407.) Il vous restera ensuite à faire l'application de la formule précédente.

Probl. (*c*) : *Mesurer la superficie d'un cercle dont la partie centrale est occupée par un obstacle élevé.*

Menez par un point D (P. IV, F. 28), une droite DE tangente au cercle (P. 126, probl. *b*) ; élevez au contact A et en dehors du cercle, une perpendiculaire sur DE ; recourez au probl. *b* (p. 107), pour trouver du côté de C, deux points situés sur le prolongement de la perpendiculaire. Vous pourrez alors marquer le point C, et mesurer AC, au moyen du probl. *d* (p. 408). Il vous restera ensuite à faire l'application de la formule $C' = \pi \times R^2$.

PROBL. (*d*) : *Déterminer le rayon d'un cercle dont on connaît la superficie.*

Puisque la superficie $C' = \pi \times R_2$, il est clair qu'en divisant le produit C' par π l'un des facteurs, on aura l'autre facteur R_2. Donc

$$R_2 = \frac{C'}{\pi} \quad \text{et} \quad R = \sqrt{\frac{C'}{\pi}}.$$

Divisez donc la superficie du cercle par le rapport π, puis extrayez la racine du quotient ; cette racine sera la longueur du rayon.

Soit $16o^{mm}$ la superficie du cercle. $R = \sqrt{\frac{160^{mm}}{3{,}1416}} = \sqrt{50^{mm},929463} = 7^{m},136.$

PROBL. (*e*) : *Mesurer un secteur de cercle dont l'arc est donné en degrés.*

Un secteur S (324) est contenu dans le cercle entier C', autant de fois que son arc est contenu dans la circonférence, ou autant de fois que N, nombre des degrés de l'arc, est contenu dans 360°. Donc $S : C' :: N : 360$ et $S = \frac{C' \times N}{360}$. Mettant à la place de C' sa valeur $\pi \times R^2$, on a pour formule

$$S = \frac{\pi \times R^2 \times N}{360}.$$

Supposons $R = 5^m$ et $N = 30°$. On trouve $S = \frac{3{,}1416 \times 25^{mm} \times 30}{360} = \frac{78^{mm}\,54}{12} = 6^{mm},545.$

PROBL. (*f*) : *Mesurer un secteur de cercle tracé* AFG (P. XIV, F. 18).

Cherchez par le procédé de la page 25 (probl. *b*), quelle partie de la circonférence forme l'arc AG, et prenez la même partie de la superficie C' du cercle; vous aurez la superficie du secteur S.

Représentons par N' le nombre de fois que la circonférence contient AG ; cet arc sera une fraction $\frac{1}{N'}$, de la courbe entière. Donc $S = C' \times \frac{1}{N'}$, et comme $C' = \pi \times R^2$, le secteur

$$S = \frac{\pi \times R^2}{N'}.$$

Soit $N' = \frac{37}{3}$ et $R = 1^m,5$. On a $S = \frac{3{,}1416 \times (1^m,5)^2}{\frac{37}{3}} = \frac{3{,}1416 \times 2^{mm}\,25 \times 3}{37} = \frac{7^{mm}\,0686 \times 3}{37} = \frac{21^{mm},2058}{37} = 0^{mm},573.$

PROBL. (*g*) : *Mesurer un secteur de cercle dont l'arc est donné en longueur.*

Puisque la superficie entière du cercle vaut la moitié du produit de la circonférence multipliée par le rayon (466), la superficie du secteur S doit être la moitié du produit de la longueur L de son arc, multipliée par le rayon. La formule de ce cas est donc

$$S = \frac{L \times R}{2}.$$

PROBL. (*h*) : *Mesurer un segment de cercle* BGCB (P. IV, F. 1).

La superficie du segment (443) est visiblement l'excès du secteur BGCHB sur le triangle BHC. Il faut donc calculer la superficie du secteur et celle du triangle, puis retrancher la seconde de la première, pour avoir la superficie du segment BGCB.

PROBL. (*i*) : *Mesurer un anneau de cercle* (P. V, F. 38).

L'anneau de cercle a pour limites deux circonférences concentriques, telles que celles dont les rayons sont CG, CH. Il est clair que la superficie de cette portion de cercle est l'excès de celle du grand cercle sur le petit.

Si donc R et r sont les longueurs des rayons CG, CH et que A représente la superficie de l'anneau, $A = \pi \times R^2 - \pi \times r^2$, ou ce qui est la même chose,

$$A = \pi \times (R^2 - r^2).$$

Soient $R = 5^m$ et $r = 2^m$. On trouve $A = 3{,}1416 \times (25^{mm} - 4^{mm}) = 3{,}1416 \times 21^{mm} = 65^{mm}{,}9736$.

Mesurage des polygones irréguliers.

467. L'*arpentage* n'est pas autre chose que le mesurage des superficies de terrain, et tout ce qui a été exposé depuis le n° 444 en fait partie. Mais on donne particulièrement le nom d'*arpentage* au mesurage des polygones irréguliers et des superficies terminées par des droites et des courbes, parce que c'est presque toujours sous l'une ou l'autre de ces formes que se présentent les champs limités.

PROBL. (*a*) : *Arpenter sans équerre, un polygone irrégulier dans lequel on peut opérer* (P. XIV, F. 23).

Mesurez successivement les côtés du polygone et les diagonales qui le partagent en triangles. Calculez ensuite la superficie de chaque triangle, au moyen de la formule du probl. *c* (p 432), et faites la somme de tous les résultats; cette somme sera la superficie du polygone.

Il convient, pour éviter toute erreur, de faire à vue un croquis qui représente grossièrement le polygone avec ses diagonales et d'inscrire chaque longueur mesurée, sur la ligne correspondante de ce croquis.

Il faut aussi faire tous les mesurages horizontalement et dans un ordre qui n'oblige point à revenir sur ses pas. On pourrait, par exemple, chaîner les côtés et les diagonales dans l'ordre suivant : GA, AB, BG, GF, FB, BC, CF, FE, EC, CD, DE.

PROBL. (*b*) : *Arpenter avec l'équerre, un polygone irrégulier dans lequel on peut opérer* (P. XIV, F. 24).

Prenez pour *base d'opération*, la plus grande diagonale AE du polygone, figurez sur un croquis du terrain, cette diagonale et des perpendiculaires abaissées de tous les sommets sur AE, plantez un jalon en B et cherchez le pied *b* de la perpendiculaire B*b* (probl. *b*, p. 430); mesurez la hauteur A*b* et la base B*b* du triangle rectangle A*b*B; puis inscrivez les longueurs sur les droites correspondantes du croquis, observant de placer la cote de A*b* au-dessus de cette ligne.

Il faut maintenant remplacer l'équerre par un jalon mis en *b*, planter en C le jalon B, chercher le pied *c* de la perpendiculaire C*c*, mesurer *bc*, *c*C, et inscrire ces longueurs sur le croquis, observant de placer au-dessus de *bc*, la cote de cette hauteur du trapèze B*bc*C.

Le jalon *b* doit alors être mis en *c*, et le jalon C en D, afin que vous puissiez marquer le pied de la perpendiculaire D*d*, mesurer *cd*, *d*D, *d*E, et inscrire ces cotes comme les précédentes.

Retournant ensuite de E vers A, vous devrez opérer pour la partie EFGHIA du polygone, comme vous avez opéré pour la partie ABCDE. Ainsi, vous mesurerez E*f* et la perpendiculaire *f*F, puis successivement *fg*, *g*G, *gk*, *kl*, *h*H, *l*A, *i*I, et vous inscrirez les hauteurs E*f*, *fg*, etc., au-dessous de AE.

Vous connaîtrez donc toutes les longueurs qui doivent servir au mesurage des triangles et des trapèzes dont se compose le polygone. Ayant calculé les superficies de toutes ces figures, vous en ferez la somme, sans y comprendre le triangle *l*H*k* qui ne fait point partie du terrain à mesurer. Enfin, vous retrancherez de cette somme, la superficie du même triangle *l*H*k*, attendu que vous l'aurez prise de trop, en calculant celle du trapèze *b*BC*c*.

PROBL. (*c*) : *Arpenter sans équerre, un polygone dans lequel on ne peut opérer* (P. XIV, F. 25).

Prolongez trois côtés du polygone, de manière à former un triangle ABC qui embrasse tout le terrain. Ce triangle doit n'avoir aucun de ses sommets sur ceux de la figure donnée, afin que ses côtés étant moins longs, soient plus faciles à mesurer. Appliquant la formule de la page 432 (probl. *c*), on détermine la superficie de ABC, et celles des petits triangles ADE, BFG, CHI; puis après avoir fait la somme de ces trois dernières, on la retranche de ABC. Le reste est évidemment la superficie du terrain DEFGHI.

PROBL. (*d*) : *Arpenter avec l'équerre, un polygone dans lequel on ne peut opérer* (P. XIV, F. 26).

Marquez par des jalons, les pieds A, B des perpendiculaires à un côté DI, qui passent par deux sommets E, H; marquez aussi le pied C de la perpendiculaire abaissée de G sur l'alignement BH; plantez enfin un 4e jalon à la rencontre K des alignemens AE, CG. Vous aurez alors un rectangle ABCK qui renfermera le polygone donné et dont vous calculerez aisément la superficie (461). La moitié du produit AD × AE vous donnera celle du triangle DAE; la moitié du produit BI × BH sera celle de IBH; la moitié du produit CH × CG sera celle de HCG. Abaissant la perpendiculaire FL, vous formerez un 4e triangle extérieur FLG et un trapèze EKLF que vous mesurerez aisément aussi (464); faisant enfin la somme des 4 triangles extérieurs et du trapèze, puis retranchant cette somme de la superficie du rectangle, vous obtiendrez évidemment pour reste, celle du terrain DEFGHI.

Mesurage des superficies à limites courbes.

468. Le mesurage des superficies à limites courbes quelconques repose sur trois principes fort simples, qui ne sont que des conséquences du mesurage des triangles et des trapèzes.

Supposons un polygone divisé en triangles et en trapèzes dont les bases soient perpendiculaires à la diagonale AB, et qui aient tous même hauteur AE (P. XIV, F. 27).

Vous aurez la superficie du triangle ACD en multipliant la moitié de CD par AE (463), et celle du trapèze CDFG en multipliant la moitié de CD, plus la moitié de FG, par AE (464). Conséquemment, la superficie de AFG égale le produit de CD tout entier, plus la moitié de FG, multipliée par AE. Mais la superficie du trapèze FGHI est le produit de la demi-somme de FG et de HI, multipliée par la hauteur AE. Donc, pour avoir celle de AHIA, il faut multiplier par AE, la somme des deux bases CD, FG, augmentée de la moitié de HI.

Vous verrez de même que pour obtenir la superficie de AKLA on doit multiplier par AE, la somme des bases CD, FG, HI, augmentée de la moitié de KL.

Il est clair d'ailleurs que, si le triangle KLB a même hauteur que les autres figures, sa superfice égale la moitié de KL multipliée par AE, et que pour avoir celle de tout le polygone, il faut multiplier par AE, la somme de toutes les bases.

Il est clair encore que, si le triangle ACD manquait ou qu'il n'eût pas même hauteur que les trapèzes, on trouverait la superficie de CDKLC, en multipliant par AE, la somme des bases FG, HI, augmentée des moitiés de CD, KL.

De là ces principes : 1° *Lorsqu'un triangle et des trapèzes ont même hauteur et deux à deux une base commune, on obtient la* *superficie totale* AKLA *en multipliant par cette hauteur* AE, *la somme de toutes les bases communes, augmentée de la moitié de celle* KL *qui n'appartient qu'au trapèze extrême* HIKL.

2°. *Lorsque dans une suite de trapèzes terminée par deux triangles, les figures ont toutes même hauteur et deux à deux une base commune, on obtient la superficie totale, en multipliant la somme de toutes les bases par une seule hauteur.*

3°. *Pour avoir la superficie totale* CDKLC *d'une suite de trapèzes qui ont même hauteur et deux à deux une base commune, il faut multiplier par la hauteur, la somme de toutes les bases communes, augmentée des moitiés des deux bases extrêmes* CD, KL.

Probl. (*a*) : *Mesurer une superficie limitée par des droites et des arcs de cercle.*

Décomposez-la en polygones et en portions de cercles; mesurez chacune de ces parties, et faites la somme de tous les résultats. Cette somme sera le nombre des mesures carrées contenues dans la superficie totale.

S'il s'agit, par exemple, de toiser les deux battans d'une porte gothique ABCDE (P. X, Fig. 4), vous calculerez la superficie du rectangle ABCD (461), puis celle du triangle formé par les cordes AE, DE, puis celles des deux segmens compris entre ces cordes et les deux arcs. Pour trouver ces dernières, vous observerez que d'après l'application (*b*) de la page 262, le triangle AED est équilatéral, et que par suite, les arcs AE, DE contiennent chacun 60° (p. 438 probl. *h*).

Probl. (*b*) : *Arpenter un terrain limité par une courbe quelconque qui forme deux pointes* (P. XIV, Fig. 28).

Portez sur l'alignement AB des deux pointes, des parties égales AE assez petites pour que les portions correspondantes de la courbe puissent être regardées, sans grande erreur, comme des lignes droites; plantez des piquets à tous les points de division qui en résulteront; élevez en ces mêmes points, sur AB, des perpendiculaires qui se terminent à la courbe des deux côtés (probl. *a*, p. 430), et mesurez toutes ces cordes.

Si la hauteur du dernier triangle KLB égale celle AE des autres figures que forment les cordes parallèles, vous multiplierez la somme de toutes ces cordes, par la hauteur générale AE (468, 2°). Dans le cas contraire, vous multiplierez par AE, la somme des cordes CD, FG, HI, augmentée de la moitié de KL; puis vous mesurerez à part le triangle KLB, pour en ajouter la superficie au produit précédent; vous aurez alors celle du terrain limité par la courbe GAFBH et la droite GH (468, 1°).

Mais, lorsqu'une des figures présente un rentrant ou un saillant, comme celui qu'a sur la gauche, le trapèze FGHI, il faut encore mesurer à part cette partie, pour l'ajouter, si elle est en saillie, ou la retrancher, si elle rentre. On y parvient en formant sur le côté GH

56

du trapèze, un triangle GHM, dont le côté GM laisse sensiblement en dehors, autant de terrain qu'en fait entrer le côté HM. La superficie de ce triangle égale à peu près celle du saillant ou du rentrant, et il est facile de la déterminer.

PROBL. (*c*) : *Arpenter un terrain limité par une courbe quelconque qui ne forme pas de pointes* (P. XIV, F. 29).

Plantez deux jalons A, B aux extrémités d'une des plus grandes cordes, et un piquet en C, sur l'alignement AB, près de A; portez sur AB, à partir de C, des parties égales assez petites, pour que les portions de courbe correspondantes puissent être regardées, sans grande erreur, comme des lignes droites; plantez des piquets à *tous* les points de division qui en résulteront, élevez en ces mêmes points, sur AB, des perpendiculaires qui se terminent à la courbe de chaque côté; formez, en prolongeant DG, MP, les triangles DEF qui compense ACD, GHI qui compense ACG, KLM qui compense BQM, NOP qui compense BQP; mesurez toutes les cordes, depuis FI jusqu'à KN; faites-en la somme; ajoutez-y la moitié de EH et celle de LO; puis multipliez le total par QR une des parties de CQ. Le produit sera la superficie de la figure AGINPBMKFDA à fort peu près (468, 3°.)

PROBL. (*d*) : *Arpenter un terrain à limites droites et courbes, dans lequel on peut opérer* (P. XIV, F. 30).

Agissez comme dans le probl. *b* (p. 449), pour mesurer la partie que limitent les droites; puis, à partir de la perpendiculaire AB qui passe par le premier point B de la courbe, portez, sur la base d'opération CD, des parties égales, assez petites pour que les portions de courbe correspondantes puissent être regardées, sans grande erreur, comme des lignes droites; élevez sur CD, par les points de division, des perpendiculaires jusqu'à la courbe et mesurez-les, pour calculer la superficie de la figure ABEF (468, 3°); faites ensuite le triangle DFG dont le côté DG ajoute autant qu'il retranche; enfin additionnez les superficies CHBA, ABEF, FGD, DCIKLD; vous aurez pour total, celle de tout le terrain.

PROBL. (*e*) : *Arpenter un terrain à limites droites et courbes, dans lequel on ne peut opérer.*

Il suffit de se conduire comme dans le prob. *e* (p. 440), et de mesurer les parties comprises entre la courbe et les côtés du rectangle, comme on a mesuré, dans le problème précédent, le terrain compris entre la courbe BED et la droite AD (P. XIV, F. 30).

PROBL. (*f*) : *Arpenter un terrain à limites courbes, dans lequel on ne peut opérer.*

Entourez le terrain d'un rectangle; mesurez les parties comprises entre les côtés et la courbe, comme on a mesuré, dans le probl. (*d*), la figure comprise entre la courbe et la base d'opération; puis retranchez la somme de ces parties, de la superficie du rectangle; le reste sera celle du terrain donné.

Mesurage des terrains en pente.

469. La vraie superficie d'un terrain en pente, c'est-à-dire d'un polygone situé sur un plan incliné, s'obtient comme celle d'une figure dont le plan est de niveau. Mais, sous le rapport des produits agricoles, on doit chercher seulement la superficie du polygone horizontal qui se trouverait compris entre les mêmes plans verticaux que le polygone incliné; car, si d'un côté les plantes basses peuvent s'étaler plus amplement sur ce dernier, d'un autre les plantes à tiges ou à racines pivotantes n'y viennent pas en plus grand nombre, et le sol y est toujours moins fertile que dans un champ de niveau, attendu que les grandes pluies le dépouillent peu à peu de la terre végétale.

Problème : *Arpenter un terrain en pente.*

Opérez comme dans celui des problèmes précédens qui se rapporte au cas où se trouve le terrain, observant de mesurer horizontalement, comme toujours, les lignes dont les longueurs sont nécessaires au calcul des triangles et des trapèzes qui composent le polygone donné.

Partage des champs.

470. C'est presque toujours sur le terrain même, que les arpenteurs exécutent le partage d'un champ en plusieurs portions de même superficie ou de contenances déterminées. Les petites erreurs qu'on peut commettre alors, n'ont jamais d'importance, tandis que celles qu'on fait en opérant le partage sur un plan, comme dans les problèmes du n° 234, deviennent quelquefois fort grandes, quand le tracé est reporté sur le polygone levé.

Nous commencerons par le trapèze; il est un des polygones les plus simples, et celui qu'offrent d'ordinaire les champs.

Probl. (*a*) : *Partager un trapèze* ABCD *en un nombre quelconque des trapèzes équivalens, par des droites qui aillent d'une base à l'autre* (P. XIV, F. 31).

Supposons qu'on veuille trois portions de même superficie. Mesurez la base AB, prenez le tiers de sa longueur et portez-le de A en E, puis de E en F. Mesurez ensuite la base CD et traitez-la de la même manière. Les alignemens EG, FH des piquets ou des bornes plantées aux points de division, partageront le trapèze comme il est requis.

Les trois trapèzes ACGE, EGHF, FHDB ont en effet même superficie, car ils ont même hauteur, et leurs bases, tant les supérieures que les inférieures, sont égales (p. 433, probl. *a*).

PROBL. (b) : *Partager un trapèze ABCD en un nombre quelconque de trapèzes équivalens, par des droites parallèles aux bases* (P. XIV, F. 32).

Prolongez les côtés non parallèles AD, BC, jusqu'à ce qu'ils se coupent en G; mesurez GB, GC; multipliez le quarré numérique de GB par le nombre n de portions moins une; ajoutez le résultat au quarré de GC; divisez la somme par le nombre n des portions; puis extrayez la racine du quotient; le résultat sera la distance de G au point E, par lequel doit être menée, parallèlement aux bases, la première des lignes de division.

Pour avoir l'autre extrémité F de cette parallèle, vous pourrez faire sur GA, GD, ce que vous aurez fait sur GB, GC, ou employer la proportion GB : GE : : GA : GF (79).

Alors, il vous restera à partager le trapèze EFDC en $n-1$ portions équivalentes, et pour cela vous agirez sur GE, GC, en employant $n-1$ au lieu de n et $n-2$ au lieu de $n-1$, comme vous aurez agi sur GB, GC.

« En effet, ABCD = GCD — GAB; donc la $n^{\text{ième}}$ partie du trapèze ou $\frac{ABCD}{n}$ ou $ABEF = \frac{GCD - GAB}{n}$. Mais $GAB + ABEF = GEF$; donc aussi

$$GEF = GAB + \frac{GCD - GAB}{n} = \frac{GAB \times n + GCD - GAB}{n}$$
$$= \frac{GAB \times (n-1) + GCD.}{n}$$

Or les triangles GEF, GAB, GCD étant semblables (169), se contiennent comme les quarrés numériques de leurs côtés correspondans (250). Par conséquent,

$$\overline{GE}^2 = \frac{\overline{GB}^2 \times (n-1) + \overline{GC}^2}{n} \text{ et } GE = \sqrt{\frac{\overline{GB}^2 (n-1) + \overline{GC}^2}{n}}$$

De même $$GF = \sqrt{\frac{\overline{GA}^2 \times (n-1) + \overline{GD}^2}{n}}. »$$

Si donc on désigne par d, la distance de l'une des extrémités de la petite base au concours G des côtés non parallèles du trapèze; par D, la distance du même concours à l'extrémité correspondante de la grande base; par x, la distance du même concours à l'extrémité correspondante de la ligne de division, la plus voisine de la petite base; la formule à employer sera

$$x = \sqrt{\frac{d_2 \times (n-1) + D^2}{n}}.$$

Supposons qu'on veuille partager le trapèze ABCD en 2 trapèzes équivalens, et que $d = GB = 7$, $D = GC = 20^m$. Comme

$n = 2$, $n - 1$ et $x = \sqrt{\frac{49^{mm} + 400^{mm}}{2}} = \sqrt{\frac{449^{mm}}{2}}$

$= \sqrt{224^{mm},5} = 14^m,983$. Ainsi, c'est à $14^m,983$ de G, qu'il faut planter le piquet ou la borne E

Soit maintenant d = GA = 5^m. Au lieu de mesurer GD et de calculer GF par la formule, il est plus simple d'employer la proportion GB : GE :: GA : GF. Elle donne GF $= \frac{14^m,983 \times 5}{7}$

$= \frac{74^m,915}{7} = 10^m,702$. C'est donc à $10^m,702$ de G, que doit être plantée la borne F.

Si GB, GC, GA conservent les longueurs précédentes, et qu'il faille partager le trapèze ABCD en 3 portions équivalentes, vous aurez

$d = 7^m$, $D = 20^m$, $n = 3$, $n - 1 = 2$ et $x = \sqrt{\frac{49^{mm} \times 2 + 400^{mm}}{3}}$

$= \sqrt{\frac{98^{mm} + 400^{mm}}{3}} = \sqrt{\frac{498^{mm}}{3}} = \sqrt{166^{mm}} = 12^m,884$. Le point H de la première parallèle de division sera donc à $12^m,884$ du concours G, et ABHK sera le tiers de ABCD. Donc, HKDC en sera les deux tiers, et pour avoir le point I de la 2ième parallèle de division, il faudra opérer comme s'il s'agissait de partager le trapèze KHDC en deux portions équivalentes. Alors, d = GH $= 12^m,884$, D = GC $= 20^m$ et $n = 2$.

Dans le cas où l'on voudrait 4 portions équivalentes, on chercherait la première en faisant, dans la formule, $d = 7^m$, $D = 20^m$. $n = 4$; puis le reste du trapèze ABCD serait partagé en 3 portions équivalentes, comme il l'a été tout entier précédemment.

Application : Le laboureur fait presque toujours ses sillons parallèlement aux bases du trapèze que forme son champ, et cela pour que les plus courts aient au moins la longueur de la petite base AB (P. XIV, F. 32). S'il les rendait parallèles à AD ou à BC, la charrue ne pourrait retourner la terre vers C ou D. C'est donc d'après le problème b, que doit se faire le partage d'un terrain en trapèze, quand rien ne s'y oppose : il laisse aux plus petits sillons, plus de longueur que le problème a.

Probl. (c) : *Partager un polygone quelconque* ABCDE *en plusieurs portions équivalentes* (P. XIV, F. 33).

Pour la facilité de la culture, les portions doivent être des quadrilatères. Supposons qu'on en veuille quatre. Vous arpenterez d'abord le polygone et vous trouverez, par exemple, $667^{mm},87$. Chaque quadrilatère devra contenir le quart de ce nombre de mètres carrés, ou $166^{mm},97$. Divisez cette superficie par la longueur $22^m,50$ de AF, perpendiculaire sur CB; le quotient $7^m,42$ sera la base d'un triangle égal à la moitié de $166^{mm},97$, car cette base multipliée par AF donnerait $166^{mm},97$ dont il faudrait prendre la moitié pour avoir la superficie du triangle (463). Portez donc $7^{m},42$ de B en G; le triangle BAG sera la moitié d'un des quadrilatères cherchés. Pour trouver l'autre moitié, vous diviserez $166^{mm},97$ par 25^{m}, longueur de GH, perpendiculaire sur AE; vous porterez le quotient $6^{m},68$ de A et I, et vous tirerez GI. Ce triangle AGI dont la superficie sera la moitié de $25^{m} \times 6^{m},68$, vaudra la moitié de $166^{mm},97$, et par conséquent, le quadrilatère ABGI sera le premier quart du polygone.

Si maintenant vous portez AI de I en K, le triangle IGK, qui aura aussi GH pour hauteur, vaudra AGI ou la moitié de $166^{mm},97$. Pour déterminer un autre triangle équivalent, ou pour achever le deuxième quart du polygone, vous diviserez $166^{mm},97$ par $26^{m},75$, longueur de KL, perpendiculaire sur BC; vour porterez de G en M, le quotient $6^{m},25$ et vous joindrez les points K, M. Le quadrilatère IGMK sera la seconde des portions demandées.

Vous pourriez former la troisième de la même manière; mais il serait à craindre qu'elle eût cinq côtés et que la dernière fût triangulaire. Pour être certain d'obtenir encore deux quadrilatères, vous calculerez le triangle KDE, au moyen de sa base $KE = 6^{m}$ et de sa hauteur $DN = 12^{m}$. Retranchant de $166^{mm},97$ la superficie 36^{mm} de KDE, vous trouverez $130^{mm},97$ pour celle du triangle qui ajouté à KDE formera le troisième quadrilatère. Si donc vous divisez $130^{mm},97$ par 7^{m}, moitié de la perpendiculaire DO, le quotient $18^{m},71$ sera la base KP du nouveau triangle KDP; le quadrilatère KEDP donnera le troisième quart du polygone, et le quadrilatère restant DCMP en sera la quatrième portion.

Il pourrait arriver que le triangle KDE eût une superficie plus grande que le quart du polygone donné. Alors, et s'il vous était indifférent d'avoir, pour une des parts, un triangle ou un quadrilatère, vous retrancheriez $166^{mm},97$ de la superficie de KDE; le reste serait celle d'un triangle à ôter de KDE. Pour en connaître la base vous diviseriez ce reste par la moitié de DN; puis vous porteriez le quotient de K en R, par exemple. Le triangle RDE serait la troisième portion, et le pentagone KRDCM serait la quatrième. Mais s'il fallait absolument qu'aucune des parts ne fût triangulaire, vous feriez sur tout autre triangle KEM, KCM, etc., ce qui a été fait en premier lieu sur KDE.

Il serait possible aussi qu'une des limites du polygone fût sinueuse. Vous la décomposeriez en petites parties qui pussent être regardées, sans grande erreur, comme des lignes droites, et vous agiriez sur le nouveau polygone, comme dans l'exemple précédent, formant toujours des triangles dont l'ensemble produisît une des portions. Bien entendu que, dans ce cas, deux, trois, etc. des petites parties de la limite sinueuse compteraient pour un seul côté de quadrilatère; de sorte que les parts de terrain seraient censées avoir cette figure, quoiqu'elles fussent réellement des pentagones, des hexagones, etc.

PROBL. (d) : *Partager un terrain en plusieurs portions qui aient entre elles des rapports déterminés.*

Admettons qu'une des parts doive être double d'une autre, une troisième triple de la première, etc. Vous représenterez la plus petite par 1 ; la suivante en grandeur sera représentée par 2, la troisième par 6, etc., et la somme 9 des nombres 1, 2, 6, vous indiquera que le terrain doit être partagé en neuf parties équivalentes. Opérez alors comme dans le probl. (c), pour trouver ces neuf parties ; puis joignez la deuxième à la troisième, pour former la seconde part ; les six parties restantes composeront la troisième des parts demandées.

PROBL. (e) : *Partager un terrain en parties exprimées par des fractions inégales de ce terrain.*

La somme des fractions doit égaler 1, puisque celle des parts doit former le polygone donné. Supposons donc que ces fractions soient $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{12}$. Vous les réduirez au moindre dénominateur commun, et elles deviendront $\frac{4}{12}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{5}{12}$. Ensuite, vous opérerez comme dans le probl. (c), pour diviser le polygone en douze parties équivalentes. La réunion des quatre premières formera la première part, c'est-à-dire les $\frac{4}{12}$ ou $\frac{1}{3}$ du terrain ; l'ensemble des trois parties suivantes donnera les $\frac{3}{12}$ ou $\frac{1}{4}$, et sera la deuxième part ; enfin, les cinq parties restantes composeront la 3e des parts désirées.

Mesurage de la surface des corps.

471. La surface d'un corps présente trois choses à mesurer : une des bases ou leur ensemble, la *surface latérale* et *la surface totale* ; mais nous n'avons à nous occuper que de la seconde ; car le mesurage des bases se rapporte toujours à un de ceux qui ont été exposés depuis le no 461, jusqu'au no 469, et *pour avoir la surface totale, il suffit d'ajouter les bases à la surface latérale*, c'est-à-dire à la somme des faces latérales (378).

PROBL. (a) : *Mesurer la surface latérale d'un prisme.*

Si le prisme est droit et complet (P. XIII, F. 18), mesurez le contour ABFE de l'une des bases, et multipliez-le par la hauteur AD.

En effet, les faces latérales sont des rectangles qui ont tous AD pour hauteur, et AB, BF, FE, EA pour bases. Leur somme est donc

$$AB \times AD + BF \times AD + FE \times AD + EA \times AD$$

ou

$$(AB + BF + FE + EA) \times AD.$$

Si le prisme est oblique et complet (F. 17), mesurez sur chaque face latérale une perpendiculaire aux arêtes parallèles ; faites la somme des longueurs de ces perpendiculaires et multipliez-la par la longueur d'une des arêtes parallèles AA'. Ce mesurage est fondé sur ce que les faces latérales sont des parallélogrammes dont les arêtes parallèles forment les bases (p. 429, probl. *k*).

Si le prisme est tronqué, il faut mesurer séparément chaque face latérale et faire la somme de tous les résultats.

PROBL. (*b*) : *Mesurer la surface courbe d'un cylindre.*

Calculez la longueur de la circonférence d'une des bases et multipliez cette longueur par celle de l'axe ou d'une génératrice droite.

En effet, la surface courbe du cylindre peut être considérée comme composée d'une infinité de petits rectangles qui ont tous pour hauteur une génératrice droite, et pour bases, de petits arcs pris sur une des arêtes circulaires du corps; or, la somme de tous ces rectangles égale la somme de leurs bases multipliée par la hauteur commune.

Si donc D est le diamètre du cylindre et L la longueur de l'axe, celle de la circonférence sera $\pi \times$ D, et en désignant par $S.\ Cy$, la surface courbe, nous aurons pour formule

$$S.\ Cy = \pi \times \mathrm{D} \times \mathrm{L}.$$

Soient D $= 5^{\mathrm{m}}$ et L $= 15^{\mathrm{m}}$. Vous trouverez $S.\ Cy = 3{,}1416 \times 5^{\mathrm{m}} \times 15^{\mathrm{m}} = 235^{\mathrm{mm}}{,}62$.

La formule convient aussi au cylindre droit et tronqué dont l'axe est connu; car, si l'on conçoit par A'' (P. X, F. 39), une parallèle à B'C', on verra aisément que le cylindre complet et le cylindre tronqué de même base et de même axe, ont des surfaces courbes équivalentes: l'onglet cylindrique dont le premier excède le second à droite de A'A'', égale précisément l'onglet dont le second excède le premier à gauche.

Lorsque l'axe ne peut être mesuré, il faut calculer la moyenne de la plus grande et de la plus petite génératrice droite B'B'', C'C'': cette moyenne égale A'A'' (183).

Quant au cylindre oblique, on doit, pour en avoir la surface courbe, prendre à l'aide d'une ficelle, le contour d'une section plane perpendiculaire aux génératrices droites, et le multiplier par la longueur d'une de ces génératrices, ce qui est analogue au mesurage du prisme oblique (probl. *a*).

PROBL. (*c*) : *Mesurer la surface latérale d'une pyramide.*

Si la pyramide est régulière, mesurez un côté AB de la base (P. XIII, F. 22); multipliez-le par la longueur d'une perpendiculaire abaissée du sommet S' sur ce côté; multipliez le produit par le nombre des côtés, et prenez la moitié du dernier résultat.

Soit p cette perpendiculaire; elle sera la même pour chaque triangle de la surface latérale, puisque toutes les faces triangulaires sont égales. La superficie de chacune égalera donc $\frac{\mathrm{AB} \times p}{2}$ (463), et leur somme vaudra le produit de ce nombre par n, nombre des côtés de la base ; c'est-à-dire que la surface latérale aura pour expression,

$$\frac{AB \times p \times n}{2}.$$

Si la pyramide est irrégulière, il faut mesurer chaque face latérale en particulier et faire la somme de tous les résultats.

PROBL. (*d*) : *Mesurer la surface courbe d'un cône droit et complet.*

Calculez la circonférence de la base ; multipliez-en la longueur par celle d'une génératrice droite, et prenez la moitié du produit.

En effet, la surface courbe du cône peut être considérée comme composée d'une infinité de petits triangles qui ont tous pour hauteur une génératrice droite, et pour bases, de petits arcs pris sur l'arête circulaire du corps. Or, la somme de tous ~~ces~~ triangles égale la moitié du produit fait avec la somme de leurs bases et la hauteur commune.

Si donc D représente le diamètre de la base du cône et L la longueur d'une génératrice droite, on a pour formule

$$S.\ Co = \frac{\pi \times D \times L}{2}.$$

Soient $D = 0^m,04$ et $L = 0^m,3$, vous trouverez

$$S.\ Co = \frac{3,1416 \times 0^m,04 \times 0^m,3}{2} = 0^{mm},01885.$$

PROBL. (*e*) : *Mesurer la surface latérale d'un tronc de pyramide.*

Si le tronc est régulier et à bases parallèles, mesurez un côté de la grande base et le côté correspondant de la petite; multipliez leur somme par la longueur d'une perpendiculaire abaissée d'un point de l'un sur l'autre ; multipliez le produit par le nombre des côtés d'une des bases, et prenez la moitié du dernier résultat ; car les faces latérales sont des trapèzes égaux (p. 433, probl. *a*).

Si le tronc de pyramide est irrégulier ou que la troncature ne soit pas parallèle à la base, les faces latérales sont des trapèzes ou d'autres quadrilatères inégaux ; par conséquent, on doit mesurer chaque face latérale séparément et faire la somme de tous les résultats.

PROBL. (*f*) : *Mesurer la surface courbe d'un tronc de cône droit à bases parallèles.*

Faites la somme des circonférences des deux bases ; multipliez par la longueur d'une génératrice droite du tronc, et prenez la moitié du produit.

En effet, la surface du tronc de cône peut être considérée comme composée d'une infinité de petits trapèzes qui ont tous pour hauteur une génératrice droite ; et pour bases de petits arcs pris sur les deux arêtes circulaires du corps. Or la somme de tous ces trapèzes égale la moitié du produit fait avec la somme de leurs bases tant supérieure qu'inférieures, et la hauteur commune.

Si donc D, d, L sont les diamètres des deux circonférences et la longueur de la génératrice droite, on a la formule

$$S.T.Co = \frac{(\pi \times D + \pi \times d) \times L}{2} \text{ ou } S.\,T.\,Co = \frac{\pi \times (D \times d) \times L}{2}.$$

Supposons pour exemple, qu'il s'agisse d'évaluer le crépis extérieur d'une tour ronde, dont le mur en talus forme une surface tronc-conique, et que cette tour ait extérieurement 10^m de diamètre par le bas, 9^m par le haut, 50^m de longueur ; vous écrirez

$$S.\ T.\ Co = \frac{3{,}1416 \times (10^m + 9^m) \times 50^m}{2} = \frac{3{,}1416 \times 19^m \times 50^m}{2}$$
$$= 1492^{mm}{,}26.$$

PROBL. (g) : *Mesurer la surface d'une sphère.*

Mesurez le diamètre ; faites-en le quarré, et multipliez ce quarré par le rapport de la circonférence au diamètre.

Si $S.\ S$ désigne la surface sphérique, on a pour formule,

$$S.\ S = \pi \times D^2.$$

Soit $D = 0^m{,}25$; vous trouverez $S.\ S = 3{,}1416 \times (0^m{,}25)^2 = 3{,}1416 \times 0^{mm}{,}0625 = 0^{mm}{,}19635$.

« Pour démontrer la justesse de ce mesurage, inscrivons dans le demi-grand cercle de la sphère (P. XIV, F. 34), un demi-polygone régulier ABCDEF d'un très-grand nombre de côtés. Le corps engendré par la révolution du demi-polygone autour du diamètre AF, aura même surface que la sphère engendrée par la révolution de la demi-circonférence. Menons par B, par C et par G milieu de BC, des perpendiculaires sur AF ; du point B, abaissons une perpendiculaire sur CH, et tirons le rayon GI. »

« La surface courbe du tronc de cône droit, engendrée par la révolution du côté BC, sera égale à la circonférence dont le rayon est GK, multipliée par BC (183 et probl. f). Mais, les triangles BCL, GIK sont semblables ; puisque les côtés de l'un sont perpendiculaires aux côtés de l'autre (171). Il en résulte que

$$GK : GI :: BL : BC \ (168), \quad \text{et} \quad cir.\,GK : cir.\,GI :: BL : BC,$$

puisque les circonférences ont même rapport que leurs rayons (247). Faisons le produit des extrêmes et celui des moyens ; nous aurons

$$cir.\ GK \times BC = cir.\ GI \times BL.$$

Or, la première partie de cette égalité, c'est la surface du tronc de cône ; circonférence GI est celle du grand cercle de la sphère, puisque les très-petits côtés du demi-polygone ABCD.... peuvent être regardés comme des parties de la circonférence ; BL = MH, portion du diamètre comprise entre les parallèles CH, BM ; par conséquent, la surface courbe de chacun des troncs de cônes droits, qui fait partie de la surface sphérique (p. 353, appl. *a*), égale le produit de la circonférence d'un grand cercle, multipliée par la portion de diamètre comprise entre ses bases. »

« On pourrait démontrer qu'il en est de même pour la surface de cône engendrée par la révolution de AB. Il suffirait de répéter le raisonnement qui vient d'être fait, en s'appuyant sur ce que la surface conique égale le produit de AB multipliée par la circonférence de la section faite au milieu de la hauteur, perpendiculairement à l'axe, attendu que cette circonférence est moitié de celle de la base (331). »

« Ainsi, la surface sphérique égale le produit de la circonférence de son grand cercle, multipliée par la somme des parties AM, MH, etc. ou par son diamètre D. Or, la circonférence du grand cercle a pour longueur $\pi\times D$. Donc enfin, la surface d'une sphère vaut $\pi\times D\times D$ ou $\pi\times D^2$. »

Probl. (*h*) : *Mesurer une calotte sphérique.*

Calculez la circonférence du grand cercle de la sphère dont la calotte ABN fait partie, et multipliez-en la longueur par la hauteur AM de cette calotte (P. XIV, F. 34).

La formule est donc

$$Cal = \pi\times D\times H\,;$$

elle est justifiée par la démonstration de la précédente.

Soit proposé de mesurer la couverture en cuivre d'un dôme dont le diamètre $D=10^m$. Comme ce dôme est une demi-sphère, $H=\frac{1}{2}D=5^m$ et l'on a $Cal=3{,}1416\times10^m\times5^m=157^{mm}{,}08$.

Probl. (*i*) : *Mesurer une zône.*

Calculez la circonférence du grand cercle de la sphère dont la zône BCON fait partie, et multipliez-en la longueur par la hauteur MH de cette zône (P. XIV, F. 34).

La formule et donc encore, comme pour la calotte,

$$Z=\pi\times D\times H.$$

Probl. (*k*) : *Mesurer la surface courbe d'un onglet sphérique.*

Calculez la surface courbe de la sphère dont l'onglet donné fait partie (443) ; divisez-la par 360° pour avoir la superficie de l'onglet d'un degré, et multipliez le quotient par le nombre *n* des degrés de l'arc qui coupe au milieu les méridiens LB'L', LH'L', limites de l'onglet donné (P. XII, F. 25). Ce nombre *n* est l'indication du coin des deux plans méridiens. On a donc, pour formule,

$$S.\,O=\frac{\pi\times D^2\times n}{360}.$$

Probl. (*l*) : *Mesurer la surface courbe d'un secteur sphérique.*

On appelle *secteur sphérique*, la portion de sphère CIOAC

(P. XIV, F. 34) renfermée dans une surface conique droite qui a son sommet au centre I. Il est visible qu'un tel corps se décompose en un cône droit CIO et un segment sphérique COAC (443). Donc, pour en connaître la surface, il faut calculer séparément celle du cône (p. 449) et celle du segment (probl. *h*); puis faire la somme des deux résultats. Ce mesurage est analogue à celui du segment de cercle (p. 438).

PROBL. (*m*) : *Mesurer la surface d'un anneau rond* (P. XIII, F. 1).

L'anneau rond peut-être considéré comme un cylindre droit qui a été ployé (373 et 375); les génératrices droites ont changé de longueur : les unes se sont raccourcies, les autres se sont alongées; mais l'axe qui tient le milieu, n'a point varié en devenant la circonférence dont B'C' est le rayon, et il en est de même de la génératrice courbe C. Par conséquent, le mesurage de la surface courbe du cylindre (p. 448) s'applique à celle de l'anneau rond.

Il faut donc multiplier la circonférence B'C' qui tient le milieu entre celles du plan de l'anneau, par la circonférence C dont le diamètre égale l'épaisseur de cet anneau.

Soient D le diamètre de la plus grande circonférence de la surface, *d* celui de la plus petite circonférence du vide, *e* l'épaisseur de l'anneau; on devra calculer la longueur d'une circonférence qui ait pour diamètre 2B'C', c'est-à-dire $\frac{D+d}{2}$, moyenne de D, *d*, et multiplier cette circonférence par cette autre $\pi\times e$. Or, la circonférence dont $\frac{D+d}{2}$ est le diamètre, a pour longueur $\pi\times\frac{D+d}{2}$. La superficie cherchée vaut donc $\pi\times\frac{D\times d}{2}\times\pi\times e$. D'ailleurs l'épaisseur $e=\frac{D-d}{2}$, moitié de la différence des deux diamètres. Conséquemment, la surface de l'anneau rond a pour expression $\pi\times\frac{D+d}{2}\times\pi\times\frac{D-d}{2}$, et la formule du mesurage est

$$S.\ A=\pi^2\times\frac{D+d}{2}\times\frac{D-d}{2}.$$

Ainsi, pour mesurer la surface courbe d'un anneau rond, il faut multiplier le quarré de 3,1416 par la demi-somme des deux diamètres extrêmes, et multiplier le produit par la demi-différence des mêmes diamètres.

Si, par exemple, $D=0^m,25$ et $d=0^m,15$, $\frac{D+d}{2}=\frac{0^m,5+0^m,15}{2}$ $=0^m,2$; $\frac{D-d}{2}=\frac{0^m,25-0^m,15}{2}=0^m,05$, et comme $\pi^2=(3,1416)^2$ $=9,869\,650\,56$, on a $S.\ A=9,869\,650\,56\times 0^m,2\times 0^m,05$ $=1^m,973\,930\,112\times 0^m,05=0^{mm},098\,696\,505\,6$ ou $0^{mm},0987$.

PROBL. (*n*) : *Mesurer la surface latérale d'une pièce de bois courbe.*

Les deux faces planes qui forment les bouts d'une pièce de bois courbe, d'une jante de roue, par exemple, doivent en être regardées comme les bases ; elles ne font donc point partie de la surface latérale.

Quand les faces des bouts sont d'équerre sur les arêtes concaves et convexes de la pièce, elle peut être considérée comme un prisme droit qui a été courbé. Il faut donc en mesurer la surface latérale comme celle du prisme droit (p. 447), observant toutefois d'employer pour multiplicateur, au lieu d'une des arêtes courbes, la moyenne d'une des plus grandes et d'une des plus petites, mesurées avec une ficelle ; car les seules lignes dont la longueur n'ait pas été altérée par la courbure du prisme, sont génératrices courbes de la surface cylindrique qui tient le milieu entre les deux faces cylindriques de la pièce.

Ainsi, mesurez le contour d'un des bouts de la pièce courbe et multipliez-en la longueur par la moyenne d'une des plus grandes et d'une des plus petites des arêtes courbes.

Lorsque les faces n'étant pas d'équerre sur les arêtes courbes, font les mêmes angles, la pièce doit être considérée comme un prisme oblique et complet qui a été courbé. Il faut donc, dans ce cas (p. 447), mesurer le contour de la pièce en l'entourant d'une ficelle, perpendiculairement aux arêtes courbes, et multiplier la longueur trouvée, par la moyenne d'une des plus grandes et d'une des plus petites de ces arêtes.

Dans tout autre cas, la pièce doit être regardée comme un prisme tronqué qui a été courbé. On doit alors mesurer chaque face et faire la somme des résultats (p. 448). Pour obtenir la superficie de chaque face cylindrique, vous multiplierez la longueur d'une de ses limites courbes, mesurée avec une ficelle, par l'arête droite que renferme cette face (p. 448). Pour calculer la superficie de chaque face plane latérale, vous multiplierez la moyenne de ses deux limites courbes, par la longueur d'une droite qui leur soit à la fois perpendiculaire ; car une telle face peut être regardée comme un trapèze dont les bases ont été courbées (p. 433).

PROBL. (*o*) : *Mesurer une surface de révolution* (374).

Tracez une courbe méridienne ; marquez-y des points de division également distans, et assez rapprochés pour que l'arc compris entre deux, puisse être regardé, sans grande erreur, comme une droite. Les circonférences qui contiennent ces points de division, jointes aux deux qui limitent la surface, dans certains cas, la partagent en surfaces tronc-coniques, et chacune de celles-ci a pour surperficie la demi-somme de ses bases, multipliée par l'arc méridien qu'elle renferme (p. 449). Vous pouvez donc appliquer le troisième principe du n° 468, c'est-à-dire multiplier par l'arc méridien compris entre deux points de division, la demi-somme des circonférences qui limitent la surface de révolution, augmentée de la somme de toutes les autres.

Toutes les circonférences se mesurent à l'aide d'une ficelle, quand on n'en peut connaître le diamètre, et plus elles sont nombreuses, plus le mesurage approche de l'exactitude.

Probl. (*p*) : *Mesurer une surface enveloppe* (375).

Si la génératrice est invariable, la surface enveloppe se mesure comme celle d'une pièce de bois courbe (probl. *n*). Si la génératrice augmente ou diminue constamment, d'une manière uniforme, on peut appliquer le mesurage de la surface courbe du cône (probl. *d*) ou celui de la surface courbe d'un tronc de cône (probl. *f*), selon que la surface enveloppe se termine ou non par un point. Mais, pour que ces applications aient quelque exactitude, il faut multiplier la moitié de la génératrice, ou la demi-somme des deux valeurs extrêmes de cette génératrice, par la moyenne de la plus grande et de la plus petite des courbes qui suivent le sens de la directrice.

MESURAGE DES VOLUMES.

472. Mesurer un corps ou son *volume*, c'est mesurer l'espace qu'il occupe (386); mais dans les corps creux, c'est plutôt le vide qu'ils renferment entre leurs parois, qu'on doit mesurer. Ce vide est nommé *capacité*, et il est clair que la capacité égale le volume du corps diminué du volume des parois; autrement, la capacité d'un corps creux est le volume d'un autre corps qui en remplirait le vide. Le mesurage ou *jaugeage* d'une capacité revient donc au mesurage d'un volume.

L'unité de volume doit être un volume (444); on prend ordinairement celui d'un cube qui a pour arêtes une unité de longueur (395). Si chacune de ces arêtes est d'un point, d'une ligne, d'un pouce, d'un pied ou d'une toise, l'unité de volume est dite *point cube*, *ligne cube*, *pouce cube*, *pied cube*, *toise cube*.

La toise cube contient le pied cube, comme 216, cube de 6^{pi} (398), contient 1, cube de 1 pied (399). La toise cube vaut donc 216 pieds cubes.

Le pied cube contient le pouce cube, comme 1728, cube de 12^{pou}, contient 1, cube de 1^{pou}. Le pied cube égale donc 1728 pouces cubes. Vous verriez de même qu'il y a 1728 lignes cubes dans le pouce cube, et 1728 points cubes dans la ligne cube.

473. Il y avait dans l'ancien système de mesures, et il y a encore aujourd'hui pour les mesures usuelles dérivées du mètre, la *toise-toise-pied*, la *toise-toise-pouce*, la *toise-toise-ligne* et la *toise-toise-point*; ces unités sont des prismes carrés (387) qui ont tous une toise-toise ou toise carrée de base, et respectivement un pied, un pouce, une ligne, un point de hauteur.

Il est visible que la toise cube contient la toise-toise-pied, comme 6^{pi}, hauteur du premier prisme, contient 1^{pi}, hauteur du second (402). D'après le même principe, la toise-toise-pied vaut 12 toise-toise-pouces, la toise-toise-pouce vaut 12 toise-toise-lignes, et la toise-toise-ligne vaut 12 toise-toise-points. Il y a donc entre ces unités prismatiques, les mêmes relations qu'entre les unités linéaires qui en font les hauteurs.

474. On employait encore autrefois, pour les bois de construction, l'unité appelée *solive*; elle avait 12^{pi} de longueur et 6^{pou} d'écarrissage, ce qui signifie que ses bases étaient des carrés de 6^{pou} ou $\frac{1}{2}^{pi}$ de côté. Son rapport à la toise cube égale (400)

$$12^{pi} \times \tfrac{1}{2}^{pi} \times \tfrac{1}{2}^{pi} : 6^{pi} \times 6^{pi} \times 6^{pi} = 3 : 216 = 1 : 72.$$

La toise cube vaut donc 72 solives.

La solive se partageait en 6 parties égales nommées *pieds de solive*; ce pied contenait 12 *pouces de solive*; ce pouce valait 12 *lignes de solive*, et cette ligne se divisait en 12 *points de solive*.

Il s'ensuit que la toise-toise-pied vaut 72 pieds de solive, que la toise-toise-pouce vaut 72 pouces de solive, que la toise-toise-ligne vaut 72 lignes de solive, et que la toise-toise-point vaut 72 points de solive; car le rapport des deux choses doit exister entre leurs sixièmes et entre leurs douzièmes.

475. Le bois de chauffage se mesurait à la corde, et il se mesure encore de même dans beaucoup de localités. La corde la plus usitée est un prisme carré de 4 pieds d'écarrissage, sur 8 pieds de longueur. On le divise en demi-cordes, quarts, huitièmes, seizièmes et trente-deuxièmes.

Le rapport de la corde au pied cube est, d'après le principe 397,

$$4^{pi} \times 4^{pi} \times 8^{pi} : 1^{pi} \times 1^{pi} \times 1^{pi} = 128 : 1 ;$$

il montre qu'elle vaut 128 pieds cubes.

476. Les unités des anciennes mesures de capacité dérivaient du pied cube et du pouce cube, mais elles n'étaient ni des cubes, ni des prismes carrés. Elles variaient tellement d'un lieu à un autre, et par suite le nombre en était si grand, qu'il serait à-peu-près inutile d'en citer quelques-unes. Il suffira d'ailleurs, pour pouvoir les employer avec les méthodes de mesurage qui vont être enseignées, de connaître leurs valeurs en pieds cubes ou en pouces cubes.

477. Le cube qui sert à mesurer les volumes, selon le système décimal, se nomme *millimètre cube*, si l'arête est d'un millimètre; *centimètre cube*, si l'arête a un centimètre; *décimètre cube*, si l'arête est d'un décimètre; *mètre cube*, si l'arête a un mètre.

Les dixièmes, centièmes, millièmes, etc., du mètre cube, sont des prismes carrés qui ont un mètre carré de base et un décimètre, ou un centimètre, ou un millimètre, etc., de hauteur (402).

Le mètre cube vaut 1000 décimètres cubes, car (397) leur rapport est $10^d \times 10^d \times 10^d : 1^d \times 1^d \times 1^d = 1000 : 1$. On voit de même que le décimètre cube vaut 1000 centimètres cubes, et que le centimètre cube vaut 1000 millimètres cubes.

478. Le bois de construction ou de chauffage se mesure aussi au mètre cube; mais alors cette unité prend le nom de *stère*, sa dixaine s'appelle *décastère* et son dixième, *décistère ;* ces deux dernières unités sont des prismes carrés : Le décastère a 1^{mm} de base et 10^m de longueur ; le décistère remplace la solive.

479. La nouvelle unité fondamentale des capacités est le décimètre cube ; mais on le nomme *litre*, dans ce cas. Les autres unités sont le *décalitre* qui vaut 10 litres, l'*hectolitre* qui vaut 100^l, le *kilolitre* qui vaut 1000^l ou 1 mètre cube, le *myrialitre* qui vaut $10\,000^l$, le *décilitre* ou dixième de litre, le *centilitre* ou centième de litre, et le *millilitre* ou millième de litre ou centimètre cube.

Mesurage des prismes.

480. Nous devons commencer par établir le mesurage du prisme rectangle, fondement de tous les autres mesurages de volumes.

Soient l, l', h les unités de longueur qui forment la longueur, la largeur et la hauteur de l'unité u de volume, prismatique ou cubique. Si nous représentons par L, le nombre de fois que l est contenue dans la longueur d'un prisme rectangle quelconque P. R, cette longueur se trouvera exprimée par $l \times \mathrm{L}$; de même la largeur du prisme sera $l' \times \mathrm{L'}$, et la hauteur sera $h \times \mathrm{H}$, si L', H représentent les nombres de fois que l', h sont contenus dans cette largeur et cette hauteur. Or, d'après le principe 400,

$$\frac{\mathrm{P.H}}{u} = \frac{(l\times\mathrm{L})\times(l'\times\mathrm{L'})\times(h\times\mathrm{H})}{l\times l'\times h} = \frac{l\times l'\times h\times\mathrm{L}\times\mathrm{L'}\times\mathrm{H}}{l\times l'\times h}$$
$$=\mathrm{L}\times\mathrm{L'}\times\mathrm{H} \quad (77),$$

et comme $u = 1$,

$$\mathrm{P.R} = \mathrm{L}\times\mathrm{L'}\times\mathrm{H}.$$

Donc, le nombre de fois qu'un prisme rectangle contient l'unité de volume, c'est-à-dire le volume de ce prisme, est le produit des nombres qui en expriment la longueur, la largeur et la hauteur, mesurées respectivement avec la longueur, la largeur et la hauteur de l'unité de volume. On énonce brièvement ce principe, en disant que *le volume d'un prisme rectangle égale le produit de ses trois dimensions.*

Mais le produit $\mathrm{L}\times\mathrm{L'}$ donne précisément la superficie de la face perpendiculaire aux arêtes dont H est la longueur, et cette face est la base du prisme. Nous pouvons donc dire aussi que *le volume d'un prisme rectangle égale le produit de la base multipliée par la hauteur.*

PROBL. (*a*) : *Mesurer un prisme rectangle en mètres cubes et parties décimales du mètre cube.*

La longueur, la largeur et la hauteur de l'unité de volume sont chacune égales au mètre. Mesurez donc en mètres et parties du mètre, la longueur, la largeur et la hauteur du prisme rectangle, et appliquez la formule $P. R = L \times L' \times H$.

Si, par exemple, $L = 15^m,35$, $L' = 7^m,15$ et $H = 2^m,328$, vous trouverez $P. R = 15^m,35 \times 7^m,15 \times 2^m,328 = 109^{mm},7525 \times 2^{mc}.328 = 255^{mc},50382$. L'abréviation *mc* signifie *mètres cubes.*

PROBL. (*b*) : *Mesurer un prisme rectangle en mètres cubes et parties cubiques.*

Mesurez en mètres et en parties du mètre, les trois dimensions du prisme ; puis appliquez la formule, et partagez les décimales du produit en groupes de trois chiffres chacun, à partir de la virgule. Si le dernier groupe à droite n'a qu'un ou deux chiffres, vous le compléterez au moyen du zéro. Le 1^{er} groupe à gauche exprimera des décimètres cubes ; le suivant, des centimètres cubes ; le 3^e, des millimètres cubes (477).

L'exemple précédent donne 255^{mc} 503^{dc} 820^{cc} pour le volume du prisme rectangle qu'on y considère.

PROBL. (*c*) : *Jauger un prisme rectangle en litres.*

Agissez comme si vous vouliez mesurer en mètres cubes, et multipliez le résultat par 1000. Le produit exprimera des litres (479).

Un prisme rectangle creux qui aurait $4^m,256$ de hauteur, 2^m de longueur et $1^m,004$ de largeur, présenterait une capacité de 8^{mc} 546 048 et contiendrait $8\,546^l,048$ ou environ 8 546 litres et 5 centilitres.

PROBL. (*d*) : *Jauger un prisme rectangle en hectolitres.*

Opérez comme s'il s'agissait de mesurer en mètres cubes et multipliez le résultat par 10. Le produit exprimera des hectolitres ; car le mètre cube vaut 10^{hl}, puisqu'il égale 1000^l et que $1^{hl} = 100^l$.

Le vase de l'exemple précédent dont la capacité est de $8^{mc},546\,048$, contient donc $85^{hl},460\,48$ ou environ 85 hectolitres, 46 litres et 5 centilitres.

PROBL. (*e*) : *Mesurer en stères une pile de bois disposée en prisme rectangle.*

Mesurez les trois dimensions en mètres et parties du mètre ; puis appliquez la formule $P. R = L \times L' \times H$. Le produit exprimera des stères, puisque ces unités sont des mètres cubes (478).

Soit $L = 5^m$, $L' = 1^m,33$, $H = 1,33$. Vous trouverez $8^s,8445$.

PROBL. (*f*) : *Mesurer une pièce de bois en décistères.*

Opérez comme dans le problème précédent et multipliez le résultat par 10. Le produit exprimera des dixièmes de stère. On se borne ordinairement aux millièmes de décistère, dans ce mesurage.

PROBL. (g) : *Mesurer un prisme rectangle en toises cubes et parties prismatiques de la toise cube.*

Vous mesurerez chacune des trois dimensions avec la toise linéaire et ses subdivisions, puis vous ferez le produit de ces trois nombres, au moyen de deux multiplications complexes (p. 426). Dans la première, il faudra regarder le multiplicande comme exprimant des toises carrées, toise-pieds, etc.; le produit donnera la superficie d'une des faces prise pour base (480). Dans la seconde, ce produit qui sera multiplicande, devra être considéré comme un nombre de toises cubes, toise-toise-pieds, toise-toise-pouces, etc., et le 2e produit fera connaître, en pareilles unités, le volume du prisme. Ces opérations ne présenteront aucune difficulté à ceux qui auront l'habitude de la multiplication complexe ordinaire et qui se rappelleront que les toises carrées et leurs parties rectangulaires (459), les toises cubes et leurs parties prismatiques (473) se contiennent comme les toises linéaires, les pieds, les pouces et les lignes (445).

PROBL. (h) : *Mesurer un prisme rectangle en toises cubes et parties cubiques.*

Mesurez les trois dimensions avec la toise linéaire et ses subdivisions ; réduisez ces longueurs en unités de la plus petite espèce qu'elles contiennent, en lignes par exemple ; le produit des trois nombres de lignes vous donnera en lignes cubes, le volume du prisme.

Alors, il faudra chercher par la division, combien ce nombre contient de fois 1728^{lc}, valeur d'un pouce cube (472) ; le reste donnera des lignes cubes du prisme, et le quotient exprimera des pouces cubes. Ce quotient divisé par $1728^{po.c}$, valeur d'un pied cube, donnera pour reste les pouces cubes du prisme, et pour second quotient un nombre de pieds cubes. Le 2e quotient divisé par $216^{pi.c}$, valeur d'une toise cube, donnera pour reste les pieds cubes du prisme et pour 3e quotient les toises cubes. Ecrivant donc à la suite de ce 3e quotient, successivement les trois restes, en commençant par le dernier, vous aurez le volume en toises cubes, pieds cubes, pouces cubes et lignes cubes. Cette méthode est analogue à celle du probl. d (p. 426) et n'en diffère que par les diviseurs.

PROBL. (i) : *Mesurer une pièce de bois carré en solives.*

Mesurez les trois dimensions avec la toise linéaire et ses subdivisions, multipliez-en une par 6, une autre par 6 et la 3e par 2; puis faites le produit des trois longueurs ainsi modifiées, comme s'il fallait obtenir des toises cubes et des parties prismatiques de la toise cube (probl. g). Le produit exprimera des solives au lieu de toises cubes, des pieds de solive au lieu de toise-toise-pieds, des pouces de solive au lieu de toise-toise-pouces, des lignes de solive au lieu de toise-toise-lignes et des points de solive au lieu de toise-toise-points ; car en multipliant deux dimensions par 6 et la 3e par 2, c'est comme si vous eussiez fait d'abord le produit des trois et que vous l'eussiez multiplié ensuite par 72 qui vaut $6 \times 6 \times 2$, or, il faut multiplier la toise cube et ses parties prismatiques par 72, pour les convertir en solives et parties de solive (474).

PROBL. (*k*) : *Corder une pile de bois de chauffage qui forme un prisme rectangle.*

Comme la largeur de cette pile égale la longueur des bûches, elle est la même que la largeur de la corde. Or, la largeur d'un prisme rectangle peut être prise pour sa hauteur. La pile et la corde ont donc même hauteur et se contiennent comme leurs bases (402), c'est-à-dire, comme les produits des deux autres dimensions. Mesurez donc la longueur horizontale et l'épaisseur verticale de la pile en pieds ; multipliez ces deux dimensions et divisez le nombre de pieds carrés que donne le produit, par 32 nombre des pieds carrés d'une grande face de la corde. Vous aurez pour quotient, la quantité des cordes de la pile.

Si la pile n'avait, comme la corde, que 4 pieds d'élévation, elle serait aussi un prisme carré; les deux prismes étant terminés à chaque bout par des carrés égaux, se contiendraient comme leurs longueurs, et il suffirait de prendre le huitième de la longueur de la pile, exprimée en pieds, pour connaître le nombre de cordes.

PROBL. (*l*) : *Mesurer le volume d'un cube.*

Le cube est un prisme rectangle dont toutes les arêtes sont égales. La formule du n° 480 lui est donc applicable, et si A représente la longueur des arêtes, on a $C = A \times A \times A$. Mais un produit où un nombre entre trois fois comme facteur, est le cube de ce nombre (398). Nous pouvons donc établir que *le volume d'un cube égale le cube numérique de l'arête*, ce qui s'exprime brièvement par l'égalité.

$$C = A^3.$$

Mesurez donc une des arêtes, avec une unité linéaire, le mètre, par exemple, et faites le cube numérique de la longueur trouvée ; le résultat donnera en mètres cubes, le volume cherché.

Soit $4^m,5$ l'arête d'un cube. La formule précédente vous donnera $C = (4^m,5)^3 = 4^m,5 \times 4^m,5 \times 4^m,5 = 20^{mm},25 \times 4^m,5 = 91^{mc},125$.

PROBL. (*m*) : *Mesurer le volume d'un prisme complet quelconque.*

Dans la formule $P.\ R = L \times L' \times H$, les dimensions L, L' sont la base et la hauteur de la base B du prisme rectangle, et $L \times L' = B$ (461). Conséquemment, $P.\ R = B \times H$. Or, si le prisme quelconque a même hauteur et même superficie de base que le prisme rectangle, les deux corps seront équivalens (386). Le volume du premier vaudra donc aussi $B \times H$. Mais nous pouvons mettre dans ce produit, à la place de B et de H, la base B' du prisme quelconque et sa hauteur H' : cé sont les mêmes nombres, bien que B et B' n'aient pas la même forme. Par conséquent, le prisme quelconque

$$P = B' \times H';$$

ce qui signifie que *tout prisme a pour volume le produit de sa base multipliée par sa hauteur.*

Ainsi, dans tous les cas, mesurez la superficie de la base en unités carrées ; à l'aide d'un fil-à-plomb ou autrement, mesurez la hauteur avec l'unité linéaire correspondante, et multipliez les deux résultats ; le produit sera, en unités cubiques, le volume du prisme complet.

Si, par exemple, la base ABCD du prisme oblique de la fig. 12 (P. XIII) renferme $0^{mm},75$, et que la hauteur H'L soit de 2_m, le volume $P = 0^{mm},75 \times 2^m = 1_{mc},5$.

Application : Un grenier à fourrage présente souvent la forme d'un prisme triangulaire et droit. Pour en déterminer la capacité, vous mesureriez la superficie d'un des pignons triangulaires qui bornent ce grenier, et vous la multiplieriez par la distance horizontale des deux pignons, laquelle est la hauteur du prisme.

Probl. (*n*) : *Corder une pile de bois qui s'élève de 4^{pi}, dont un bout est vertical et dont l'autre bout forme talus.*

On dispose ainsi le bois de chauffage, pour le corder à la porte de l'acheteur. Le prisme trapézoïdal qui en résulte, renferme autant de cordes, que son trapèze ABCD (P. XIV, F. 21) vaut de fois la grande face rectangulaire de la corde (402). Or cette face a 8^{pi} sur 4^{pi} (475), et la hauteur AD du trapèze est aussi de 4^{pi}. Le rapport des deux figures ou des deux prismes est donc celui de 8^{pi} à la demi-somme des bases AB, CD p. (433, probl. *a*) ou à la droite FG qui joint les milieux de AD, BC (183).

Voilà comment, d'après cela, le cordeur-juré mesure la pile. Il marque le milieu F de l'arête BC du talus, abaisse à vue une perpendiculaire FH sur la grande base CD du trapèze, mesure HD qui égale FG, et divise cette longueur par 8. Le quotient donne le nombre de cordes.

Soit $HD = 35^{pi}\ 8^{pou}$ ou $35^{pi}\ \frac{2}{3}$. La pile contient un nombre de cordes exprimé par $\frac{35}{8} + \frac{2}{3 \times 8} = 4_c + \frac{3}{8} + \frac{1}{12} = 4^c + \frac{11}{24}$.

Si la pile se terminait en talus par les deux bouts, il faudrait marquer aussi le milieu de l'arête du talus de gauche, abaisser à vue une seconde perpendiculaire sur la grande base du trapèze, et diviser par 8 la distance des pieds des deux perpendiculaires.

Mesurage des pyramides.

481. Le principe 417 rend le mesurage de la pyramide triangulaire, une conséquence de celui des prismes ; car puisqu'une telle pyramide est le tiers d'un prisme de même base B et de même hauteur H, il est clair que le tiers du produit $B \times H$, volume du prisme (p. 459, probl. *m*), doit donner le volume de la pyramide. La formule du mesurage des pyramides triangulaires est donc

$$Py = \frac{B \times H}{3}.$$

PROBL. (*a*) : *Mesurer une pyramide triangulaire.*

Mesurez le triangle de la base en mètres carrés, par exemple (p. 432, probl. *c*) ; mesurez la hauteur en mètres, au moyen d'un fil-à-plomb et d'une règle placée de niveau sur le sommet ; faites le produit des deux nombres obtenus, et prenez-en le tiers ; le résultat exprimera en mètres cubes, le volume de la pyramide.

Soient $B = 6^{mm}$ et $H = 4^{m},5$. La formule $Py = \frac{B \times H}{3}$ donne $Py = \frac{6^{mm} \times 4^{m},5}{3} = 9^{mc}$.

PROBL. (*b*) : *Sommer des sphères égales empilées en tétraèdre régulier.*

Les faces d'une telle pyramide sont des triangles équilatéraux (425), et si n est le nombre des boulets d'une arête, la base en contient $\frac{n^2 + n}{2}$ (p. 433). Mais puisqu'à chaque boulet d'une des arêtes qui aboutissent au sommet, répond une tranche horizontale de sphères, il y en a n dans la hauteur de la pyramide. Donc, le prisme de même base et de même hauteur, en contiendrait $\frac{n^2 + n}{2} \times n$. Or, la pyramide en renferme d'abord le tiers (417) ou $\frac{n^2 + n}{2} \times \frac{n}{3}$, et de plus une fraction de chacun des boulets qui se trouvent dans la face commune à cette pyramide et au prisme. Comme le tiers seulement des boulets de cette face entre dans $\frac{n^2 + n}{2} \times \frac{n}{3}$, ce sont les $\frac{2}{3}$ de ces boulets ou $\frac{2}{3} \frac{n^2 + n}{2}$ qu'il faut ajouter au tiers de ceux du prisme. Par conséquent, le nombre total des boulets d'un tétraèdre régulier, a pour expression

$$\frac{n^2 + n}{2} \times \frac{n}{3} + \frac{2}{3} \frac{n^2 + n}{2}.$$

Ainsi, calculez le nombre des boulets d'une face ; multipliez-le par le tiers des boulets d'une arête, et ajoutez au produit les $\frac{2}{3}$ des boulets de la même face.

S'il y a, par exemple, 5 boulets dans chaque arête, $n = 5$, et l'on trouve, pour le nombre des boulets de la pyramide triangulaire, $\frac{25+5}{2} \times \frac{5}{3} + \frac{2}{3}\frac{25+5}{2} = 15 \times \frac{2}{3}\, 15 = 25 + 10 \quad 35.$

« On emploie aussi cette autre formule

$$n \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}.$$

Elle donne absolument le même résultat, car au fond elle revient à la précédente; les formes seules diffèrent. Il est visible effectivement que $\frac{n^2+n}{2} \times \frac{n}{3} + \frac{n^2+n}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{n^2+n}{2} \times \frac{n+2}{3}$, et que $\frac{n^2 \quad n}{2} = n \times \frac{n+1}{2}$. »

Probl. (*c*) : *Mesurer une pyramide quelconque.*

Une pyramide dont la base a plus de trois côtés, égale la somme des pyramides de même hauteur qu'elle, qui ont pour bases, les triangles du polygone (405). Or, cette somme de pyramides triangulaires est le produit de la somme de leurs bases ou du polygone multiplié par le tiers de la hauteur commune. Donc, le *volume de toute pyramide égale le tiers du produit de la base multipliée par la hauteur*, et la *formule* du mesurage est, comme pour la pyramide triangulaire,

$$Py = \frac{B \times H}{3}.$$

Probl. (*d*) : *Sommer des sphères égales disposées en pyramide quadrangulaire et régulière* SABCD (P. XIV, F. 35).

Toutes les faces latérales d'une telle pile sont des triangles équilatéraux. Il y a donc autant de boulets dans les arêtes qui aboutissent au sommet S, que dans les côtés du carré ABCD ; de sorte que si n est le nombre des boulets de AB, AS contient aussi n boulets, la pyramide en renferme n assises horizontales, et il s'en trouve n dans la hauteur. »

« Décomposons la pyramide quadrangulaire en deux pyramides triangulaires dont l'une ait, pour sommet, le point S, et pour base, le triangle rectangle ABC. Puisque les sphères sont alignées parallèlement à AD, il y en a autant dans AC que dans AB ; seulement celles de AB se touchent, tandis que celles de la diagonale AC ne se touchent pas. Le nombre des boulets de ABC est donc $\frac{n^2+n}{2}$, comme si le triangle était équilatéral (p. 433), et celui de la pyramide triangulaire SABC est $n \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}$, comme si cette pyramide était un tétraèdre régulier (p. 462). »

« Mais, si nous enlevons la pyramide SABC, la pyramide triangulaire restante n'aura que $n-1$ boulets dans chaque arête, puisqu'elle perdra tous ceux de la face ASC. Donc, pour avoir le nombre des boulets de cette pyramide, il faut remplacer n par $n-1$. Il est donc de $(n-1) \times \frac{n}{2} \times \frac{n+1}{3}$, car $n-1+1=n$ et $n-1+2=n+1$. Conséquemment, le nombre total des boulets de la pyramide quadrangulaire SABCD, est

$$n \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} + (n-1) \times \frac{n}{2} \times \frac{n+1}{3},$$

et comme évidemment $(n-1) \frac{n}{2} \times \frac{n+1}{3} = n \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n-1}{3}$,

nous aurons pour formule,

$$n \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} + n \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n-1}{3} \text{ ou } n \times \frac{n+1}{2}\left(\frac{n+2}{3} + \frac{n-1}{3}\right)$$

$$\text{ou} \quad n \times \frac{n+1}{2} \; \frac{2n+1}{3} \quad \text{ou enfin} \quad \frac{n^2}{2} \times \frac{2n+1}{3}. »$$

Calculez donc le nombre des boulets d'une face triangulaire (p. 432, probl., *d*), multipliez-le par le double des boulets d'une arête, augmenté de 1, et prenez le tiers du produit; le résultat sera le nombre des boulets de la pyramide quadrangulaire.

Mesurage des polyèdres.

482. Le mesurage des polyèdres comprend ceux de tous les corps à faces planes qui ne sont ni des prismes complets, ni des pyramides entières. On peut toujours le réduire au mesurage d'un certain nombre de prismes et de pyramides; mais il existe pour plusieurs cas des formules qui rendent l'opération beaucoup plus simple.

PROBL. (*a* : *Mesurer un tronc de prisme triangulaire.*

Un pareil tronc vaut trois pyramides triangulaires qui ont pour bases, la base B du prisme, et pour sommet, ceux de la troncature (418). Or si nous représentons par D, D', D'', les distances de ces trois sommets au plan de la base, les volumes des pyramides seront $\frac{B \times D}{3}$, $\frac{B \times D'}{3}$, $\frac{B \times D''}{3}$ (481). Celui du tronc de prisme, somme de ces trois-là, est donc $\frac{B \times (D + D' + D'')}{3}$, et l'on a pour formule,

$$\text{T. P. T} = \text{B} \times \frac{\text{D} + \text{D}' + \text{D}''}{3},$$

ce qui signifie que *le volume d'un tronc de prisme triangulaire égale le produit de la superficie de la base, multipliée par la moyenne des distances de cette base aux trois sommets de la troncature.*

Si le tronc de prisme est droit, D, D', D'' sont les longueurs des trois arêtes parallèles ; s'il est oblique, les mêmes distances sont les longueurs des perpendiculaires abaissées des sommets de la troncature sur le plan de la base.

Soient B = 36 pouces carrés, D = 3^{pou}, D' = 18^{pou} et D'' = 2^{pi}. La formule donne $\text{T. P. T} = 36^{pp} \times \frac{3^p + 18^p + 24}{3} = 36^{pp} \times \frac{45^p}{3}$ $= 36^{pp} \times 15^p = 540$ pouces cubes.

PROBL. (*b*) : *Sommer une pile de sphères égales, qui forme un prisme triangulaire tronqué.*

La face ABEF d'une semblable pile (P. XIII, F. 13) est un rectangle et repose sur le sol ; les deux autres faces latérales ACDF, BCDE sont des trapèzes symétriques ; la base ABC et la troncature DEF sont des triangles équilatéraux également inclinés. Le tronc de prisme est donc oblique.

Mais considérons la pyramide triangulaire qui a son sommet en D, et pour base, le triangle ABC. Elle renferme autant de tranches de boulets, parallèles à ABC, qu'il y a de ces projectiles dans son arête CD, et il en serait encore de même si l'arête CD était perpendiculaire sur ABC. Donc, les trois pyramides triangulaires qui composent le tronc de prisme (418), et ce tronc lui-même contiennent précisément autant de boulets qu'ils en contiendraient, si les arêtes parallèles CD, AF, BE étaient d'équerre sur la base ABC, et par conséquent nous pouvons mesurer ce tronc de prisme comme s'il était droit.

Nommant donc n le nombre des boulets d'un côté AB de triangle, n', n'', les nombres de ceux des arêtes parallèles AF, CD, nous trouverons, pour le nombre des boulets de ABC, $\frac{n^2+n}{2}$ (p. 433), et la formule précédente nous donnera, pour le nombre total de ceux de la pile, $\frac{n^2+n}{2} + \frac{2n'+n''}{3}$, car BE contient aussi n' boulets.

Soient $n = 5$ et $n' = 50$. En comptant les boulets de CD, on trouvera nécessairement 46 pour n'', et la somme de ceux de toute la pile sera $\frac{25+5}{2} \quad \frac{100+46}{3} = 15 \times \frac{146}{3} = 5 \times 146 = 730.$

PROBL. (*c*) : *Mesurer un tronc de parallélipipède* (P. XIV, F. 36).

Nommons B la superficie de la base ABCD et D, D', D'', D''' les distances de cette base aux quatre sommets E, F, G, H de la troncature; la formule du mesurage sera

$$T.\ Pa = \mathrm{B} \times \frac{\mathrm{D}+\mathrm{D}'+\mathrm{D}''+\mathrm{D}'''}{4}.$$

Elle signifie que *le volume d'un tronc de parallélipipède égale le produit de la base, multipliée par la moyenne des quatre distances de cette base aux sommets de la troncature.*

Si le parallélipipède est droit, les quatre distances sont les longueurs des arêtes parallèles; s'il est oblique, elles sont les longueurs des perpendiculaires abaissées des sommets de la troncature sur le plan de la base.

On mesure aussi de la même manière, dans certains cas, le volume des prismes complets: multiplier la base inférieure par la hauteur du prisme (p. 460) ou par la moyenne des distances de cette base aux sommets de la base supérieure, c'est en effet absolument la même chose, puisque chacune de ces distances égale la hauteur.

« Si l'on veut une démonstration de la formule précédente, il faut tirer dans la base, la diagonale AC, et dans la troncature, la diagonale FH. Le plan de trapèze ACHF divisera le tronc de parallélipipède droit en deux troncs de prismes triangulaires ABCHFG, ACDEFH. Or, le premier de ces troncs vaut les trois pyramides triangulaires qui auraient pour base ABC et pour hauteurs AF, BG, CH (418); le triangle ABC est (191) la moitié du parallélogramme ABCD que, pour abréger, vous pouvez représenter par b; donc en vertu du probl. a,

$$\mathrm{ABCHFG} = \frac{b}{2} \times \frac{\mathrm{AF}}{3} + \frac{b}{2} \times \frac{\mathrm{BG}}{3} + \frac{b}{2} \times \frac{\mathrm{CH}}{3}.$$

Le deuxième tronc triangulaire vaut les trois pyramides qui auraient pour base ACD, moitié de ABCD, et pour hauteurs AF, CH, DE; donc,

$$\mathrm{ACDEFH} = \frac{b}{2} \times \frac{\mathrm{AF}}{3} \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{b}{2} \times \frac{\mathrm{CH}}{3} + \frac{b}{2} \times \frac{\mathrm{DE}}{3}.$$

Maintenant, tirez les deux autres diagonales BD, EG; le plan du trapèze BDEG donnera aussi deux troncs de prismes triangulaires, et pour des raisons analogues aux précédentes, vous aurez

$$\mathrm{ABDEFG} = \frac{b}{2} \times \frac{\mathrm{AF}}{3} + \frac{b}{2} \times \frac{\mathrm{BG}}{3} \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{b}{2} \times \frac{\mathrm{DE}}{3},$$

$$\mathrm{BCDEGH} = \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{b}{2} \times \frac{\mathrm{BG}}{3} + \frac{b}{2} \times \frac{\mathrm{CH}}{3} + \frac{b}{2} \times \frac{\mathrm{DE}}{3}.$$

La somme des premières parties de ces quatre égalités, sera celle des quatre prismes triangulaires et vaudra le double du tronc de parallélipipède ou 2ABCDEFGH. Dans la somme des autres parties des quatre mêmes égalités, vous trouverez

$$\frac{b}{2} \text{ multiplié 3 fois par } \frac{AF}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{b}{2} \times AF,$$

$$\frac{b}{2} \text{ multiplié 3 fois par } \frac{BG}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{b}{2} \times BG,$$

$$\frac{b}{2} \text{ multiplié 3 fois par } \frac{CH}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{b}{2} \times CH,$$

$$\frac{b}{2} \text{ multiplié 3 fois par } \frac{DE}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{b}{2} \times DE.$$

Ainsi, dans cette seconde somme, $\frac{b}{2}$ sera multiplié par AF, puis par BG, puis par CH, puis par DE; c'est-à-dire que $\frac{b}{2}$ y sera multiplié par $AF + BG + CH + DE$. Donc

$$2T.Pa = \frac{b}{2} \times (D + D' + D'' + D''') \text{ ou } T.Pa = \frac{b}{2} \times \frac{D + D' + D'' + D'''}{2}$$

ou enfin
$$T.Pa = b \times \frac{D + D' + D'' + D'''}{4}. »$$

« Il est visible d'ailleurs que la démonstration serait la même, si le tronc était oblique; seulement, on employerait les perpendiculaires abaissées des sommets de la troncature sur le plan de la base, au lieu d'employer les arêtes parallèles. »

PROBL. (*d*) : *Mesurer un tronc de pyramide à bases parallèles.* Les arêtes concourantes se couperaient toutes au même point, si elles étaient suffisamment prolongées; il en résulterait une grande pyramide qui aurait pour base la grande base du tronc, une petite pyramide qui aurait pour base la petite base du tronc, et le volume de ce tronc serait l'excès de la première sur la seconde.

Nommons H la hauteur du tronc, B la superficie de sa grande base, C la longueur d'un côté quelconque de cette base, b la superficie de la petite base, et c la longueur du côté de cette base, qui correspond à C.

« La hauteur de la grande pyramide (p. 383) sera $\frac{H \times C}{C - c}$, et le volume de cette pyramide (p. 462) aura pour expression $\frac{B \times H \times C}{3(C - c)}$. La hauteur de la petite pyramide égale celle de la grande diminuée de H; elle sera donc $\frac{H \times C}{C - c} - H = \frac{H \times C - H \times (C - c)}{C - c}$

$= \frac{H \times C - H \times C + H \times c}{C - c} = \frac{H \times c}{C - c}$, et le volume de cette pyramide vaudra $\frac{b \times H \times c}{3(C-c)}$. »

Par conséquent,

$$T.\,Py = \frac{B \times H \times C - b \times H \times c}{3(C-c)} = \frac{(B \times C - b \times c) \times H}{3(C-c)}.$$

Cette formule montre que pour calculer le volume d'un tronc de pyramide à bases parallèles, il faut multiplier la superficie de la grande base par la longueur d'un de ses côtés, et celle de la petite base par la longueur du côté correspondant; retrancher le second produit du premier; multiplier la différence par la hauteur du tronc, et diviser le résultat par trois fois l'excès du côté de la grande base sur le côté correspondant de la petite.

Soient $B = 50^{mm}$, $C = 5^{m}$, $b = 18^{mm}$, $c = 3^{m}$ et $H = 10^{m}$. La formule donne $T.\,Py = \frac{(50^{mm} \times 5^{m} - 18^{mm} \times 3^{m}) \times 10^{m}}{3(5^{m} - 3^{m})}$ $= \frac{(250^{mc} - 54^{mc}) \times 10^{m}}{3 \times 2^{m}} = \frac{196^{mc} \times 10^{m}}{3 \times 2^{m}} = \frac{196^{mc} \times 5}{3} = \frac{986^{mc}}{3} = 326^{mc},667.$

Il sera bon de vérifier le mesurage des bases, avant de procéder au calcul du tronc. Les superficies trouvées doivent être telles qu'on ait $B : b :: C^2 : c^2$ (406 et 251). Dans l'exemple précédent la proportion existe en effet, $50^{mm} : 18^{mm} :: (5)^2 : (3)^2$, car le rapport de 50 à 18 égale celui de leurs moitiés 25 et 9, et ces moitiés sont précisément les quarrés de 5 et 3.

PROBL. (e) : *Mesurer un polyèdre quelconque.*

Mesurez les distances d'un des sommets à toutes les faces qui ne le contiennent pas; multipliez chacune de ces distances par la superficie de la face correspondante; faites la somme de tous les produits et prenez-en le tiers; vous aurez la somme des pyramides qui ont pour sommet commun, le sommet choisi sur le polyèdre, et pour bases, les faces mesurées. Or, cette somme est évidemment le volume du polyèdre.

Quand le polyèdre est maniable, on doit, pour obtenir les hauteurs des pyramides, placer successivement les bases sur un plan horizontal, établir horizontalement une règle qui s'appuie sur le sommet, commun, et mesurer à l'aide d'un fil-à-plomb, la distance de cette règle au plan.

Si le polyèdre ne peut être retourné, il faut établir deux règles parallèles, l'une qui s'applique contre une base de pyramide, l'autre qui s'appuie sur le sommet commun, et mesurer l'écartement de ces deux règles.

Mesurage des corps à faces courbes.

483. Les corps à faces courbes se rapportent au cylindre, au cône et à la sphère, ou peuvent se décomposer en parties de ceux-là, ou présentent des formes qui sortent du domaine de la géométrie élémentaire. Nous allons exposer les méthodes de mesurage à employer dans chaque cas.

PROBL. (*a*) : *Mesurer un cylindre quelconque.*

Le cylindre peut être assimilé au prisme (435) ; par conséquent, la formule du probl. *m* (p. 459), peut être appliquée. Ainsi, *tout cylindre a pour volume le produit de la superficie de sa base, multipliée par sa hauteur.*

Si le cylindre est circulaire, que R soit son rayon et H sa hauteur, la base a pour superficie, $\pi \times R^2$, et la formule qui donne le volume, est

$$Cy = \pi \times R^2 \times H.$$

Lorsqu'au lieu du rayon, on veut employer le diamètre, la formule devient

$$Cy = \frac{\pi \times D^2 \times H}{4}, \quad \text{car} \quad R = \frac{D}{2} \quad \text{et} \quad R^2 = \frac{D^2}{4}.$$

APPLICATIONS : Les mesures de capacité pour les matières sèches et pour le lait, sont des cylindres creux dont la hauteur H égale le diamètre D, et ce diamètre est, pour le décalitre, par exemple, de $0^m,2335$. Il est facile de reconnaître qu'en effet cette dimension est juste à fort peu près, car la capacité est alors le quart du cube de $0^m,2335$ multiplié par 3,1416, ce qui donne 9 litres, plus 0,991 384 497 5, quantité dont la différence à 10 litres est seulement 0,008 615 502 5.

« Les mesures de capacité pour les liquides, l'huile et le lait exceptés, sont des cylindres creux dont la hauteur est double du diamètre ; celui du litre doit avoir $0^m,086$. En effet, la capacité de la mesure égale la moitié du cube de $0^m,086$ multiplié par 3,1416, ce qui donne $0^{lit},999\,116\,764\,8$, quantité dont la différence à un litre est seulement 0,000 883 235 2. »

PROBL. (*b*) : *Mesurer un tronc de cylindre droit qui a un axe.*

Les cylindres qui ont un axe sont ceux dont la base a un centre, comme le cercle et l'ellipse, c'est-à-dire un point milieu de toutes les cordes qui s'y croisent. Dans ce cas, le tronc égale le cylindre complet de même base, dont l'axe serait la hauteur : ce qu'il a de moins d'un côté, compense exactement ce qu'il a de trop de l'autre côté. Si donc B et A représentent la superficie de la base et la longueur de l'axe, la formule est

$$T.\ Cy = B \times A.$$

Lorsque l'axe ne peut être mesuré directement, on en obtient la longueur A (183) en prenant la moyenne de la plus grande génératrice droite B'B" et de la plus petite C'C" (P. X, F. 39). Si donc G et P représentent ces deux droites, la formule devient

$$T.\,Cy = B \times \frac{G+P}{2}.$$

PROBL. (*c*) : *Mesurer un manchon cylindrique* (P. XIV, F. 4).

Calculez le volume du grand cylindre dont le diamètre est B'C', et celui du petit qui a D'E' pour diamètre ; puis retranchez ce dernier volume du premier ; la différence sera le volume de la paroi cylindrique du corps.

Supposons, comme exemple, qu'un puits doive avoir $1^m,62$ de diamètre, 12^m de profondeur, des parois épaisses de $0^m,64$, et qu'on veuille savoir combien il faudra de mètres cubes de pierres pour le construire.

Le grand cylindre aura en diamètre $1^m,62 + 0^m,64 \times 2 = 2^m,9$ et en rayon $1^m,45$; son volume sera donc $3,1416 \times (1^m,45)^2 \times 12^m = 79^{mc}263$.

Le petit cylindre ou le vide aura pour rayon la moitié de $1^m,62$ ou $0^m,81$; son volume égalera donc $3,1416 \times (0^m,81)^2 \times 12^m = 24^{mc},734$.

Par conséquent, la paroi du puits contiendra $79^{mc},263^m - 24^m,734 = 54^{mc},529$.

PROBL. (*d*) : *Mesurer un cône quelconque.*

Prenez le tiers du produit de la superficie de la base, multipliée par la hauteur, car tel est le mesurage d'une pyramide (p. 462), et le cône est une pyramide dont les faces sont très-nombreuses et très-étroites, même à la base.

Représentant donc par R, le rayon de la base d'un cône circulaire, et par H, la hauteur, vous aurez (466) pour formule

$$C\hat{o} = \frac{\pi \times R^2 \times H}{3}.$$

L'emploi du diamètre donnerait

$$C\hat{o} = \frac{\pi \times D^2 \times H}{12}, \quad \text{car} \quad R = \frac{D}{2} \quad \text{et} \quad R^2 = \frac{D^2}{4}.$$

PROBL. (*e*) : *Mesurer un tronc de cône droit à bases parallèles.*

La formule du tronc de pyramide (p. 467) est applicable, seulement il faut y remplacer les deux côtés correspondans des bases, par les rayons R, r, proportionnels à ces côtés, et mettre $\pi \times R^2$, $\pi \times r^2$, à la place de ces bases elles-mêmes. On a ainsi

$$\frac{(\pi \times R^2 \times R - \pi \times r^2 \times r) \times H}{3(R-r)}, \quad \text{et} \quad T.\,C\hat{o} = \frac{(R^3 - r^3) \times \pi \times H}{3(R-r)}.$$

Mais il est quelquefois plus simple d'employer la formule

$$T.\ C\hat{o} = \frac{(R^2 + R \times r + r^2) \times H}{3};$$

elle revient à la précédente, car $R^3 - r^3 = (R^2 + R \times r + r^2) \times (R - r)$: on peut s'en convaincre en effectuant la multiplication ; et de là suit que $\frac{R^3 - r^3}{R - r} = R^2 + R \times r + r^2$.

Supposons, pour exemple, que dans une cuve en tronc de cône, $R = 3^{m}$, $r = 2^{m},75$ et $H = 2^{m},8$. La première formule donne

$$T.\ C\hat{o} = \frac{(27^{mc} - 20^{mc},797) \times 3,1416 \times 2^{m},8}{3(3^{m} - 2^{m},75)} = \frac{6^{mc},203 \times 3,1416 \times 2^{m},8}{3 \times 0^{m},25}$$

$$= \frac{54^{mc},5646}{0,75} = 72^{mc},7528 = 727^{hl},528.$$ — Par la 2^e^ formule on obtient $T.\ C\hat{o} = \frac{(9^{mm} + 8^{mm},25 + 7^{mm},5625) \times 3,1416 \times 2^{m},8}{3}$

$$= \frac{24^{mm},8125 \times 3,1416 \times 2^{m},8}{3} = 24^{mm},8125 \times 1,0472 \times 2^{m},8$$

$$= 72^{mc},75422 = 727^{hl},5422.$$

Les 142 centilitres de différence entre les deux résultats proviennent uniquement des décimales qu'on a négligées dans le premier calcul.

Probl. (*f*) : *Mesurer un arbre en grume.*

Les arbres en grume, c'est-à-dire ceux qui, dépouillés de leurs branches, se trouvent prêts à être écarris, sont des troncs de cônes, lorsqu'ils sont bien droits. Cependant, on ne les cube pas comme il vient d'être enseigné, attendu que ce mesurage ferait payer l'écorce et l'aubier qui ne sont bons qu'à brûler.

Pour connaître le nombre des décistères qui seront contenus dans la pièce de bois carré que fournira un arbre en grume, on mesure en mètres les circonférences des deux bouts de l'arbre, à l'aide d'une ficelle, et ordinairement on prend les $\frac{5}{48}$ de leur somme. Le résultat est l'écarrissage ; il faut donc le multiplier par lui-même, multiplier le quarré obtenu, par la longueur de la pièce, mesurée en mètres, et reculer la virgule d'un rang à droite (478).

L'artillerie emploie un mode de mesurage plus avantageux pour l'acheteur : au lieu de prendre les $\frac{5}{48}$ de la somme des circonférences extrêmes, elle n'en prend que le dixième ; l'écarrissage qu'elle suppose est donc moindre que celui qui est usité entre particuliers : il en diffère d'une quantité égale à la 240^ième^ partie de la somme des circonférences extrêmes.

Probl. (*g*) : *Mesurer un manchon conique* (P. XIV, F. 5).

Calculez le volume du grand tronc de cône B'C'E'D' et celui du petit F'G'I'H' (probl. *e*) ; puis retranchez ce dernier du premier. La différence sera le volume de la paroi tronc-conique.

PROBL. (*h*) : *Mesurer une sphère.*

Une sphère peut-être considérée comme composée d'une infinité de pyramides dont les très-petites bases couvrent la surface courbe, qui aient le centre pour sommet commun et le rayon pour hauteur commune. Or, la somme de toutes ces pyramides est évidemment égale au tiers du produit donné par la somme de toutes les bases multipliées par la hauteur commune (p. 462); donc *le volume d'une sphère vaut le tiers du produit de la surface multipliée par le rayon.*

Comme une surface sphérique est donnée par la formule $\pi \times D^2$ (p. 450), dans laquelle D représente le diamètre, ou par la formule $\pi\ 4R^2$, dans laquelle R désigne le rayon, le volume d'une sphère est $\frac{\pi \times 4R^2 \times R}{3}$ ou $\frac{\pi \times D^2 \times R}{3} = \frac{\pi \times D^2 \times D}{3 \times 2}$. On a donc pour formules du mesurage

$$S = \frac{\pi \times 4R^3}{3} \quad \text{et} \quad S = \frac{\pi \times D^3}{6}.$$

Ainsi, pour trouver le volume d'une sphère, il faut multiplier 3,1416 par le cube du rayon et prendre les $\frac{4}{3}$ du produit, ou bien multiplier 3,1416 par le cube du diamètre et prendre $\frac{1}{6}$ du produit.

PROBL. (*i*) : *Mesurer le volume de la paroi d'une sphère creuse.*

La paroi d'une sphère creuse égale l'excès de la sphère limitée par la surface courbe extérieure, sur la sphère limitée par la surface courbe intérieure. Si donc R et D sont le rayon et le diamètre de la première, *r* et *d* ceux de la seconde, la paroi sphérique

$$P.S = \frac{\pi\ 4R^3}{3} - \frac{\pi \times 3r^3}{3} \quad \text{ou} \quad P.S = \frac{\pi \times D^3}{6} - \frac{\pi \times d^2}{6}.$$

Par conséquent, les formules du mesurage sont

$$P.S = \frac{\pi \times 4(R^3 - r^3)}{3} \quad \text{et} \quad P.S = \frac{\pi \times (D^3 - d^3)}{6}.$$

Ainsi, calculez la différence des cubes numériques des rayons, multipliez-la par 3,1416 et prenez les $\frac{4}{3}$ du produit; ou bien calculez la différence des cubes numériques des diamètres, multipliez-la par 3,1416 et prenez $\frac{1}{6}$ du produit.

PROBL. (*k*) : *Mesurer le volume d'un secteur sphérique* CIOAC (P. XIV, F. 34).

Calculez le volume d'un cylindre droit (probl. *a*) dont le rayon soit la droite CI du secteur (p. 451, probl. *l*), et qui ait même hauteur AH que la calotte ACO de ce secteur; puis prenez les $\frac{2}{3}$ de ce volume; car la formule est

$$Sec.\ S = \frac{2}{3}\pi \times R^2 \times H:$$

R y représente le rayon CI de la sphère dont le secteur fait partie, et H désigne la hauteur AH de la calotte.

En effet, un secteur sphérique peut être regardé comme composé de pyramides très-aigues dont les bases forment la calotte et qui aient pour hauteur commune le rayon R de la sphère. La somme de ces pyramides égale le tiers du produit de la somme de leurs bases, multipliée par R (p. 462). Conséquemment, le volume du secteur égale le tiers du produit de la calotte, multipliée par R. Or (p. 451), $Cal = \pi \times D \times H$. Donc

$$Sec.\ S = \frac{\pi \times D \times H \times R}{3} = \frac{\pi \times 2R \times H \times R}{3} = \frac{2}{3}\pi \times R^2 \times H.$$

Probl. (l) : *Mesurer un segment sphérique* ACO (P. XIV, F. 34).

Calculez le volume du secteur sphérique CIOAC qui comprend le segment, et retranchez-en le volume du cône CIO; la différence sera évidemment le volume cherché.

La hauteur IH du cône CIO est R—H, R désignant toujours le rayon IA de la sphère, et H, la hauteur AH du segment. Le rayon r ou CH de la base du même cône égale $\sqrt{R^2-(R-H)^2}$, à cause du triangle rectangle CHI (253). D'après cela, quelques lignes de calcul montreraient que le mesurage du segment a pour formule

$$Seg.\ S = \frac{\pi \times r^2 \times H}{2} + \frac{\pi \times H^3}{6};$$

c'est-à-dire qu'on obtient le volume d'un segment sphérique en ajoutant le volume $\frac{\pi \times H^3}{6}$ d'une sphère dont le diamètre est la hauteur H de ce segment (probl. h), à la moitié du volume $\pi \times r^2 \times H$ d'un cylindre de même hauteur (probl. a), qui a pour rayon celui de la base du même segment.

Probl. (m) : *Mesurer une tranche sphérique* BCONB (P. XIV, F. 34).

Le volume de la tranche BCONB égale la différence des volumes des deux segmens ACO, ABN. Mais, en observant que le rayon r ou CH de la base du grand est moyen proportionnel entre les deux parties D—H et H du diamètre AF=D (103), et que le rayon r' ou BM de la base du petit est moyen proportionnel entre les deux parties D—h et h du même diamètre, on ferait voir aisément qu'il y a égalité entre la différence des deux segmens et la quantité $\frac{\pi \times r^2 + \pi \times r'^2}{2} \times (H-h) + \frac{\pi \times (H-h)^3}{6}$; la différence H — h

des hauteurs est précisément la hauteur H' ou MH de la tranche ; $\pi \times r^2$ et $\pi \times r'^2$ sont les superficies des deux bases de cette tranche ; enfin $\frac{\pi \times H'^3}{6}$ représente le volume d'une sphère dont H' est le diamètre (probl. h). Nous pouvons donc dire qu'il faut, pour obtenir le volume d'une tranche sphérique, calculer les superficies des deux bases, multiplier la moitié de leur somme par la hauteur, et ajouter au produit, le volume d'une sphère dont cette hauteur soit le diamètre.

Ainsi ; la formule à employer est

$$\text{T. S} = \frac{\pi \times r^2 + \pi \times r'^2}{2} \times H' + \frac{\pi \times H'^3}{6}.$$

Si vous remarquez que $\frac{\pi \times r^2 + \pi \times r'^2}{2} \times H' = \frac{\pi \times r^2 \times H' + \pi \times r'^2 \times H'}{2}$ et que le numérateur est la somme des deux cylindres qui ont pour bases les bases de la tranche, et H' pour hauteur commune, vous verrez que le mesurage d'une tranche sphérique est analogue à celui d'un segment : dans le premier, on emploie la demi-somme de deux cylindres formés sur les bases et la hauteur ; dans le second, on emploie la moitié d'un cylindre formé sur la base unique et la hauteur.

PROBL. (n) : *Mesurer le volume d'un onglet sphérique* (P. XII, F. 25).

L'onglet LB'L'H'L est contenu dans la sphère autant de fois que l'arc D'H', par exemple, est contenu dans sa circonférence. Calculez donc le volume de la sphère dont le diamètre égale l'arête droite LL' de l'onglet (probl. h) ; divisez ce volume par 360°, pour avoir celui de l'onglet d'un degré, et multipliez le quotient par l'indication n du coin que forment les deux plans méridiens LB'L', LH'L'. Ce mesurage converti en formule, donne

$$O = \frac{\pi \times D^3 \times n}{6 \times 360}.$$

Si $n = 5°$ et que l'arête droite de l'onglet soit de $0^m,3$, on trouve $O = \frac{3,1416 \times (0^m,3)^3 \quad 5}{6 \times 360} = \frac{15\,708 \times 0^{mc},027}{2\,160} = 0_{mc},000\,196$ $= 196$ centimètres cubes.

PROBL. (o) : *Mesurer le volume d'un anneau rond* (P. XIII, F. 1).

Puisque l'anneau rond n'est au fond qu'un cylindre droit qui a été courbé (p. 452), le mesurage du cylindre est applicable. On aura donc le volume d'un anneau, en multipliant la superficie du cercle générateur C, par la longueur de la circonférence dont le rayon est B'C' et qui est la moyenne de la plus grande et de la plus petite.

Or, vous avez vu dans le probl. m (p. 452), que le diamètre de C égale $\frac{D-d}{2}$, D et d étant les diamètres des circonférences extrêmes, et que $2B'C' = \frac{D+d}{2}$. Donc, la superficie du cercle C est $\frac{(D-d)^2}{16}$; la circonférence B'C' a pour longueur $\pi \times \frac{D+d}{2}$, et la formule du mesurage est

$$A = \frac{\pi \times (D-d)^2}{16} \quad \pi \times \frac{D+d}{2} \text{ ou plutôt } A = \frac{\pi^2 \times (D-d)^2 \times (D+d)}{32}.$$

Si l'on remplace les diamètres par les rayons R, r, elle devient

$$A = \frac{\pi^2 \times (R-r)^2 \times (R+r)}{4}.$$

Soient $R = 0^m,33$ et r $0^m,3$; vous trouverez que l'anneau

$$A = \frac{(3{,}1416)^2 \times 0^m,03)^2 \times 0^m\,63}{4} = \frac{9{,}8696\,5056 \times 0^{mm},0009 \quad 0^m,63}{4}$$

$= 0^{mc},0014$.

Probl. (p) : *Mesurer le volume d'une pièce de bois courbe dont l'un des bouts est d'équerre sur les autres faces.*

Si les bouts sont des circonférences ou des ellipses, la pièce de bois peut être regardée soit comme un cylindre droit et complet, soit comme un cylindre droit et tronqué, qui a été courbé. Calculez donc la superficie du bout d'équerre, et multipliez-la par la moyenne du plus grand et du plus petit des arcs de la surface annulaire : cette moyenne donne la longueur de l'axe du cylindre (probl. a et b).

Si les bouts sont des triangles ou des parallélogrammes, la pièce de bois peut être regardée soit comme un prisme droit et complet, soit comme un prisme droit et tronqué. Multipliez donc la superficie du bout d'equerre, par la moyenne des trois ou des quatre arêtes courbes (482, probl. a et c).

Probl. (q) : *Jauger un tonneau.*

On doit, d'après une instruction ministérielle de l'an VII, plonger un mètre divisé dans le tonneau, par la bonde, de manière à prendre exactement le plus grand diamètre intérieur, qu'on appelle diamètre du *bouge* ; doubler la longueur trouvée ; ajouter ce double au diamètre d'un des fonds ; prendre le tiers de la somme ; faire le quarré numérique de ce tiers ; multiplier ce quarré par 3,1416 ; et le produit par la longueur de la capacité du tonneau. Le quart du résultat donne cette capacité en mètres cubes, qu'il est facile de convertir en litres ou en hectolitres (p. 457).

Soient D le diamètre du bouge, d le diamètre des fonds et L leur distance. La formule à employer est

$$T = \left(\frac{2D \times d}{3}\right)^2 \times \frac{\pi \times L}{4}.$$

Observez que pour avoir la longueur L de la capacité du tonneau, il faudrait mesurer une ligne droite perpendiculaire aux deux fonds et comprise entre les faces internes de ces fonds. Comme on ne le peut pas, on mesure la perpendiculaire comprise entre les faces externes et l'on en retranche le double de l'épaisseur d'une douelle. Cette épaisseur varie de 18 à 24 millimètres.

Supposer qu'un tonneau ait pour diamètre du bouge $0^m,625$, pour diamètre des fonds $0^m,553$, et pour longueur interne $0^m,727$; vous trouverez par la formule, que la capacité du tonneau est de $0^{mc},206\,241$ ou de $2,062\,41$ hectolitres.

Si vous calculiez la même capacité, en la considérant comme composée de deux troncs de cônes accolés par leurs grandes bases (probl *e*), vous obtiendrez $0^{mc},198\,340$, nombre dont la différence à $0^{mc},206\,241$ est $0^{mc},007\,901$. Ainsi, l'erreur ne serait au plus que de 8 litres en moins.

PROBL. (r) : *Mesurer le volume d'une branche de voûte d'arêtes* (P. XI, F. 5).

Il faut mesurer le corps cylindrique qui a pour base la moitié supérieure de la circonférence E', et pour troncatures, les quarts d'ellipse AB, AD; mesurer de même le volume du vide cylindrique de la voûte; puis retrancher ce second volume du premier.

Or, on obtient le volume d'une portion de cylindre droit dont la base est une moitié de cercle et qui est doublement tronqué par deux plans d'équerre AB, BD, en multipliant la superficie $\frac{\pi \times r^2}{2}$ du demi-cercle par $\frac{1}{12}$ d'une somme faite avec sept fois la plus grande génératrice AF et cinq fois l'une des plus petites ; de sorte que si G représente la longueur de la plus grande génératrice AF, et g, celle d'une des deux génératrices qui aboutissent aux points B, D, la formule à employer est

$$\tfrac{1}{2}\ Cy.\ \grave{a}\ 2\ tron = \frac{\pi \times r^2}{2} \times \frac{7G \times 5g}{12}.$$

» En effet, pour avoir le volume du corps cylindrique dont la base est $\frac{1}{4}$ du cercle E' et dont AB forme la troncature, on doit multiplier $\frac{\pi \times r^2}{4}$ par la longueur de la droite menée du centre de gravité du quart de cercle, parallèlement aux génératrices, jusqu'à AB. Mais ce centre de gravité se trouve à une distance du prolongement de AE' égale aux $\frac{5}{12}$ du rayon, à peu près, et il s'ensuit que la distance du même point à AB, mesurée parallèlement aux génératrices, se compose de g et des $\frac{7}{12}$ de l'excès de G sur g ; elle vaut donc $g + \frac{7}{12}\,G - \frac{7}{12}\,g$ ou $\frac{7}{12}\,G + \frac{5}{12}\,g$. D'ailleurs, l'autre portion du demi-cylindre doublement tronqué, a évidemment le même volume. Par conséquent, ce demi-cylindre égale le double de $\frac{\pi \times r^2}{4}$ ou $\frac{\pi \times r^2}{2}$ multiplié par $\frac{7G + 5g}{12}$. »

Probl. (*s*) : *Mesurer un corps tronqué à base quelconque, perpendiculaire aux arêtes des autres faces.*

Soient ABCD la projection horizontale du corps (P. XIV, F. 37) et A'A''C''C' la projection verticale. Vous décomposerez la base ABCD en triangles tels que ABD et en segmens terminés par des droites et des courbes, comme BCD ; puis vous marquerez sur ces courbes des parties arbitraires, égales ou inégales, qui puissent être prises pour des droites, sans grande erreur ; des points de division *a*, *b*, C, *d* vous abaisserez des perpendiculaires sur la corde BD de la courbe, et vous menerez des parallèles *ae* à cette même corde, de manière à former des rectangles tels que *aefg* et des triangles tels que D*ag*, *aeb* ; enfin, par les sommets des rectangles et des triangles, vous tirerez des parallèles aux arêtes B'B'', C'C'', etc., jusqu'à la troncature A''C''.

Alors le corps donné se trouvera décomposé en prismes tronqués triangulaires et rectangles, dont les arêtes parallèles seront comprises entre la ligne de terre A'C' et la troncature A''C'' ; il sera facile de mesurer ces prismes, et la somme de leurs volumes donnera celui du corps.

Par exemple, le prisme triangulaire dont la base est ABD, a pour volume, le produit de la superficie ABD et de la moyenne des arêtes A'A'', B'B'', D'D'' (probl. *a*, p. 463).

Le prisme dont la base est le triangle D*ag*, a pour volume, la superficie D*ag* multiplié par la moyenne des arêtes D'D'', *a'a''*, *g'g''*.

Le prisme rectangle dont la base est *aefg*, a pour volume, la superficie *aefg* multipliée par la moyenne de ses 4 arêtes parallèles (probl. *c*, p. 464). Ainsi des autres.

Probl. (*t*) : *Mesurer la capacité d'un corps creux quelconque.*

Supposons qu'il s'agisse d'un bateau (P. XIV, F. 38). Il faut d'abord tendre un cordeau de la pointe A de l'avant-bec, à la pointe B de l'arrière-bec, et partager la profondeur en plusieurs parties égales, en 2 par exemple : si cette profondeur est de 2^{m}, chacune aura 1^{m} ; elles doivent au reste être assez petites pour qu'on puisse, sans erreur sensible, regarder comme des droites, les intersections des parois courbes du bateau, coupées par des plans perpendiculaires au cordeau, entre les plans horizontaux A'B', C'D', E'F' qui contiennent les points de division de la profondeur.

Appuyez ensuite une règle contre le cordeau, en la plaçant verticalement en un point *a* situé à une distance 1m de l'extrémité E du fond, telle d'ailleurs que l'arc E*b* de la courbe de ce fond puisse être prise pour une ligne droite ; mesurez perpendiculairement au plan vertical AB, la distance horizontale *ab* du pied de la règle à la paroi du bateau, et inscrivez cette distance sur la ligne correspondante d'un croquis fait à vue, à peu près comme la figure ; mesurez aussi, de la même manière, à 1^{m} au-dessus du fond, la distance horizontale *ac* de la règle à la paroi, et inscrivez cette distance sur le croquis ; mesurez enfin, à 2m au-dessus du fond, la distance *ad* de la règle au bord du bateau, et inscrivez.

Après avoir transporté la règle en *e*, à 1m à droite de *a*, et l'avoir placée comme tout-à-l'heure, vous ferez de nouveau toutes les opérations précédentes ; vous les recommencerez encore en *f*, point situé à 1m de *e*, et vous continuerez ainsi, jusqu'à une distance de l'extrémité F du fond qui soit de 1m ou moindre.

Placez alors la règle en E et en F, toujours verticale et appuyée contre le cordeau ; puis à 1m et à 2m du fond, mesurez ses distances horizontales à la paroi courbe. Placez-la aussi en C et en D, points situés sur les becs, à 1m au-dessous du cordeau, et mesurez ses distances au bord ; mesurez enfin les distances horizontales EC, CA, FD, DB.

Si le corps creux donné n'était pas symétrique, il faudrait à chaque station, mesurer en outre les distances horizontales de la règle à la paroi placée au-delà de AB ; mais dans le cas qui nous occupe, il est inutile de prendre ces distances, puisqu'elles sont les mêmes que leurs correspondantes mesurées en-deçà de AB.

Vous connaîtrez donc les longueurs des arêtes parallèles de prismes droits tronqués, dont les troncatures, qu'on peut regarder comme planes, font partie de la paroi courbe du bateau, et dont les bases carrées, rectangulaires ou triangulaires, situées sur le plan vertical AB, sont présentées par la projection verticale A'B'F'E'. La somme des volumes de tous ces prismes sera évidemment la demi-capacité du bateau, et en la doublant vous aurez la capacité entière.

1° Le prisme dont les projections sont ACG, A'C'G', n'a qu'une seule arête CG qui soit perpendiculaire à sa base ; il est tronqué de manière à former une pyramide. Considéré sous l'une ou l'autre forme, il a pour volume

$$\text{A'C'G'} \times \frac{\text{CG}}{3} = \frac{\text{AC} \times 1^{\text{m}}}{2} \cdot \frac{\text{CG}}{3}.$$

2° Le prisme rectangle dont les projections sont CGgE, C'G'g'h', a trois arêtes parallèles : CG, Eg, Eh ; la quatrième qui aboutit en C est nulle ; car la base se projette horizontalement sur CE, et la troncature sur CGgh. Le volume est donc

$$\text{C'G'}g'h' \times \frac{\text{CG} + \text{E}g + \text{E}h + 0}{4} = \text{CE} \times 1^{\text{m}} \times \frac{\text{CG} + \text{E}g + \text{E}h}{4}.$$

3° Le prisme triangulaire dont les projections sont CEh, C'E'h', est dans le même cas que le premier.

4° Le prisme carré dont les projections sont Eadg, $c'd'g'h'$, a quatre arêtes parallèles : Eg, Eh, ad, ac ; car sa base se projette horizontalement sur Ea, et sa troncature sur $cdgh$. Son volume est donc

$$c'd'g'h' \times \frac{\text{E}g + \text{E}h + ad + ac}{4} = 1^{\text{m}} \times 1^{\text{m}} \times \frac{\text{E}g + \text{E}h + ad + ac}{4},$$

5° Le prisme carré dont les projections sont *Ekea*, *E'h'c'a'*, est dans le même cas que le deuxième.

Les prismes carrés 6, 7, 8, 9, 10, sont analogues au quatrième; le prisme carré 11 et le prisme rectangle 12 sont analogues au deuxième; enfin les prismes triangulaires 13 et 14 sont analogues au premier.

PROBL. (*u*) : *Mesurer le volume d'un corps plein quelconque.*

Supposons qu'il s'agisse d'une masse de terre qu'on ne puisse rapporter à aucune des formes précédemment étudiées (P. XIV, F. 39). Vous devrez, comme dans le problème précédent, diviser le corps en tranches horizontales d'égales épaisseurs, puis en tranches verticales, afin de le décomposer en prismes droits tronqués ou complets, triangulaires, rectangles ou carrés.

Marquez les points A, B, les plus éloignés parmi ceux de la courbe que forme la masse sur le terrain; tracez deux droites CD, EF, à-peu-près tangentes à cette courbe en A, B, mais exactement perpendiculaires sur l'alignement AB, puis menez deux autres tangentes CE, DF d'équerre sur CD. La base se trouvera entourée d'un rectangle CDFE.

Partagez la hauteur de la masse en parties égales ou inégales, assez petites pour que les parties correspondantes A'G'', G''H'', etc. de la courbe du profil A'G''I''B' puissent être regardées comme des droites. Si cette hauteur est, par exemple, de $1^m,25$, vous pourrez la diviser en deux parties de $0^m,5$ chacune et une partie de $0^m,25$.

Portez ensuite $0^m,5$ sur le bout d'une règle; placez-la sur CE verticalement; faites maintenir une seconde règle appuyée contre la première, à l'extrémité supérieure des $0^m,5$, de manière qu'elle soit à la fois d'équerre sur le plan vertical CE, et à-peu-près tangente à la surface courbe du corps; puis plantez un petit piquet au pied L de la première règle. Déterminez de même le point R qui répond verticalement à une autre tangente élevée de $0^m,5$ au-dessus du terrain, et les points N, P qui répondent à des tangentes élevées de 1^m; portez les distances CL, LN, NP, PR, sur DF, pour obtenir les points M, O, Q, S; enfin divisez les distances NP, OQ, et même, s'il est nécessaire, les distances CL, LN, etc., en parties assez petites pour qu'on puisse regarder comme des droites, les arcs correspondans de la courbe qui forme la base.

Après ces opérations préliminaires, vous mesurerez, à l'aide de deux règles employées comme dans le problème précédent, et perpendiculairement au plan vertical CE, les distances L*a*, L*c*, *de*, P*f*, R*g* de ce plan à la courbe de la base, et vous les retrancherez de AC, pour avoir G*a*, T*c*, U*e*, I*f*, K*g* que vous coterez sur un croquis, dessiné à vue, comme l'indique la figure. Les deux courbes intérieures de ce croquis, représentent les contours des sections faites dans la masse donnée, par les plans horizontaux G''K'', H''*x*'' élevés ed $0^m,5$ et de 1^m.

Vous mesurerez aussi à $0^m,5$ du terrain, les distances du plan vertical CE, à la courbe $GhiklK$, et vous les retrancherez de AC, pour connaître Hh, Ti, Uk, Il. Enfin, vous mesurerez à 1^m au-dessus du terrain, les horizontales bm, dn, pour en déduire Tm, Un.

Alors vous ferez les mêmes opérations par rapport au plan vertical DF, et vous aurez, cotées sur le croquis, les longueurs de toutes les arêtes parallèles des prismes tronqués, ainsi que les dimensions de leurs bases; vous pourrez donc calculer les volumes de ces prismes, et obtenir, par leur total, le volume approximatif de la masse de terre.

Le prisme triangulaire 1 a AG'G'' pour base, et une seule *arête* Ga perpendiculaire à cette base. Le prisme rectangle 2 a G'G''h'H' pour base, et trois arêtes parallèles Ga, HN, Hh. Le prisme 3 a quatre arêtes parallèles HN, Hh, Tc, Ti. Le prisme 8 n'a qu'une seule arête Hh perpendiculaire à sa base. Le prisme 9 a trois arêtes parallèles Hh : Ti, Tm. Le prisme 10 en a quatre : Ti, Tm, Uk, Un. Le prisme 13 a Tm pour seule arête perpendiculaire à sa base. Le prisme 14, quoique rectangle, n'a que deux arêtes parallèles Tm, Un; son volume égale le produit du rectangle 14 multiplié par $\frac{Tm + Un}{4}$. Les autres sont analogues à ceux-là, et tous doivent être mesurés comme dans le probl. *t*.

MESURAGE DES POIDS.

484. Il existe des corps d'un tel poids qu'on ne saurait les peser ni avec des balances, ni avec une romaine. Le mesurage des poids est, en pareil cas, du ressort de la Géométrie. On cube le corps et l'on multiplie par le volume, le poids de *l'unité de ce volume*; le produit exprime évidemment le poids entier.

Ce mode d'évaluation des poids nécessite comme vous voyez, la connaissance de ce que pèse l'*unité* de volume du corps donné. On prend pour cette unité, le *décimètre cube*, et en voici la raison. Comme 1 décimètre cube d'eau pure pèse exactement 1 kilogramme, il suffit, pour avoir en kilogrammes le poids du décimètre cube d'un corps, de trouver combien ce poids contient de fois celui du décimètre cube d'eau pure. Or, ce nombre de fois est visiblement égal à celui que donneraient les poids des deux volumes quelconques, mais égaux, de mêmes substances. Donc, pour connaître en kilogrammes, le poids du décimètre cube d'un corps donné, il ne s'agit que de chercher combien le poids d'un volume quelconque de ce corps, contient de fois le poids du même volume d'eau pure, et la Physique enseigne les moyens de faire facilement une telle recherche.

Le poids d'un décimètre cube est ce qu'on nomme le *poids spécifique* du corps, c'est-à-dire le poids qui le *spécifie*, qui le caractérise, qui le distingue des autres. Une masse de plomb peut peser 50 kilogrammes comme une masse de bois ou de houille ou de fer ; mais le plomb est le seul corps dont le décimètre cube pèse $11^{kil},3523$.

Les poids spécifiques des corps les plus importans, ont été déterminés avec une grande précision. Voici ceux qu'il vous est utile de connaître : quelques-uns ne sont qu'approximatifs ; mais leur degré d'approximation est suffisant pour la pratique.

	kil.		kil.		kil.
Acier.	7,67	Glace d'eau. . . .	0,95	Pommier.	0,793
Air.	0,0013	Hêtre.	0,852	Prunier.	0,785
Argent.	10,7	Houille.	1,3292	Sable pur.	1,9
Bois d'aulne. . . .	0,8	Huile de lin. . . .	0,94	Sable terreux. .	1,7
Beurre.	7,942	Huile de navte. .	0,919	Sapin.	0,55
Brique.	2,168	Lard.	0,948	Saule.	0,685
Cerisier.	0,715	Mercure.	13,598	Sel marin.	1,92
Chêne (cœur). . . .	1,17	Meules (moul.). . .	2,484	Suif.	0,942
Cire jaune.	0,965	Noyer.	0,671	Terre argileuse. .	1,6
Cuivre rouge. . .	8,788	Or coulé	19,2581	Terre glaise. . .	1,9
Diamant.	3,531	Orme	0,671	Terre végétale. .	1,4
Eau-de-vie	0,86	Peuplier blanc. . .	0,529	Tilleul.	0,604
Esprit-de-vin. . .	0,837	Peuplier [illegible]. . .	0,383	Tuile.	2
Etain.	7,2914	Pierre à bâtir. . .	2,08	Vapeur d'eau. . .	0,0008
Fer en barre. . .	7,788	Pierre à plâtre. .	2,2168	Verre.	2,4882
Fonte de fer. . .	7,207	Plomb coulé. . . .	11,3523	Vin (bon)	0,99
Frêne.	0,845	Poirier.	0,661	Zinc.	7,191

PROBL. (*a*) : *Déterminer le poids d'un mètre cube de bon sable.*

Multipliez $1^{kg},9$ poids spécifique du sable pur, par 1000, nombre des décimètres cubes contenus dans le mètre cube (477). Vous trouverez que le poids cherché est de $1,900^{kg}$.

PROBL. (*b*) : *Déterminer le poids de $35^{mc},45$ de terre végétale.*

Convertissez le volume en décimètres cubes ; vous aurez 35450^{dc}. Multipliez ensuite par ce nombre, le poids spécifique $1^{kg},4$ de la terre végétale ; le produit 49630^{kg} sera le poids demandé.

PROBL. (*c*) : *Déterminer le poids d'une pièce de bois carré, essence de chêne, qui porte $0^{m},6$ sur 14^{m}.*

Calculez le volume du prisme carré en décimètres cubes ; vous obtiendrez $6^{d} \times 6^{d} \times 140^{d} = 5040^{dc}$ (480). Multipliez par ce nombre, le poids spécifique $1^{kg},17$ du cœur de chêne ; le produit $5896^{kg},8$ exprimera le poids de la pièce.

La plupart des corps dont on peut avoir à faire le dessin, à mesurer la surface, le volume ou le poids, se rapportent aux diverses formes que nous avons étudiées.

Un tombereau, par exemple, offre un tronc de pyramide quadrangulaire, dont les bases sont les parois de devant et celle de derrière, qui peuvent être considérées comme parallèles, sans grande erreur.

Une hotte en bois, propre au transport des liquides, doit être assimilée à un tronc de cône à bases parallèles, bien qu'elle ait une face latérale sensiblement plane.

Dans un essieu en fer, le *corps* est un prisme rectangle, et les deux *fusées* peuvent être regardées comme des troncs de cône égaux.

Un anneau plat, tel qu'on en voit dans certaines chaînes, est un vrai manchon cylindrique.

Enfin, tous les corps, pleins ou creux, sont des cylindres, des cônes, des sphères, des anneaux, des vases analogues à celui du probl. *t* (p. 476), des masses analogues à celle du probl. *u* (p. 478), ou peuvent se décomposer en parties qui présentent ces formes soit complètement, soit partiellement.

Je crois donc vous avoir mis en état de dessiner, de mesurer et de comparer toutes les surfaces et tous les corps qu'offrent la nature et l'industrie. Tel est le but de la Géométrie, comme je vous l'ai annoncé en commençant (p. 6). Vous devez être maintenant bien pénétrés de l'utilité, de l'importance de cette science pour les arts.

Ne vous laissez pas effrayer par le grand nombre des principes et des tracés que vous venez d'étudier. Savoir la Géométrie ne consiste pas à savoir par cœur tout ce livre. C'est l'esprit de la science qu'il faut posséder; c'est l'application de la proportionnalité des lignes, des surfaces limitées et des corps, qu'il faut pouvoir faire avec justesse. L'usage, des exercices nombreux, graveront peu à peu les autres principes et les tracés dans votre mémoire; l'étude de la *Géométrie des courbes*, de la *Géométrie descriptive* et de la *Mécanique*, vous en rappelera sans cesse le plus grand nombre. L'essentiel est donc que vous les compreniez bien, que vous en sentiez toute la vérité.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

NOTIONS GÉNÉRALES.

TRACÉ DES LIGNES.

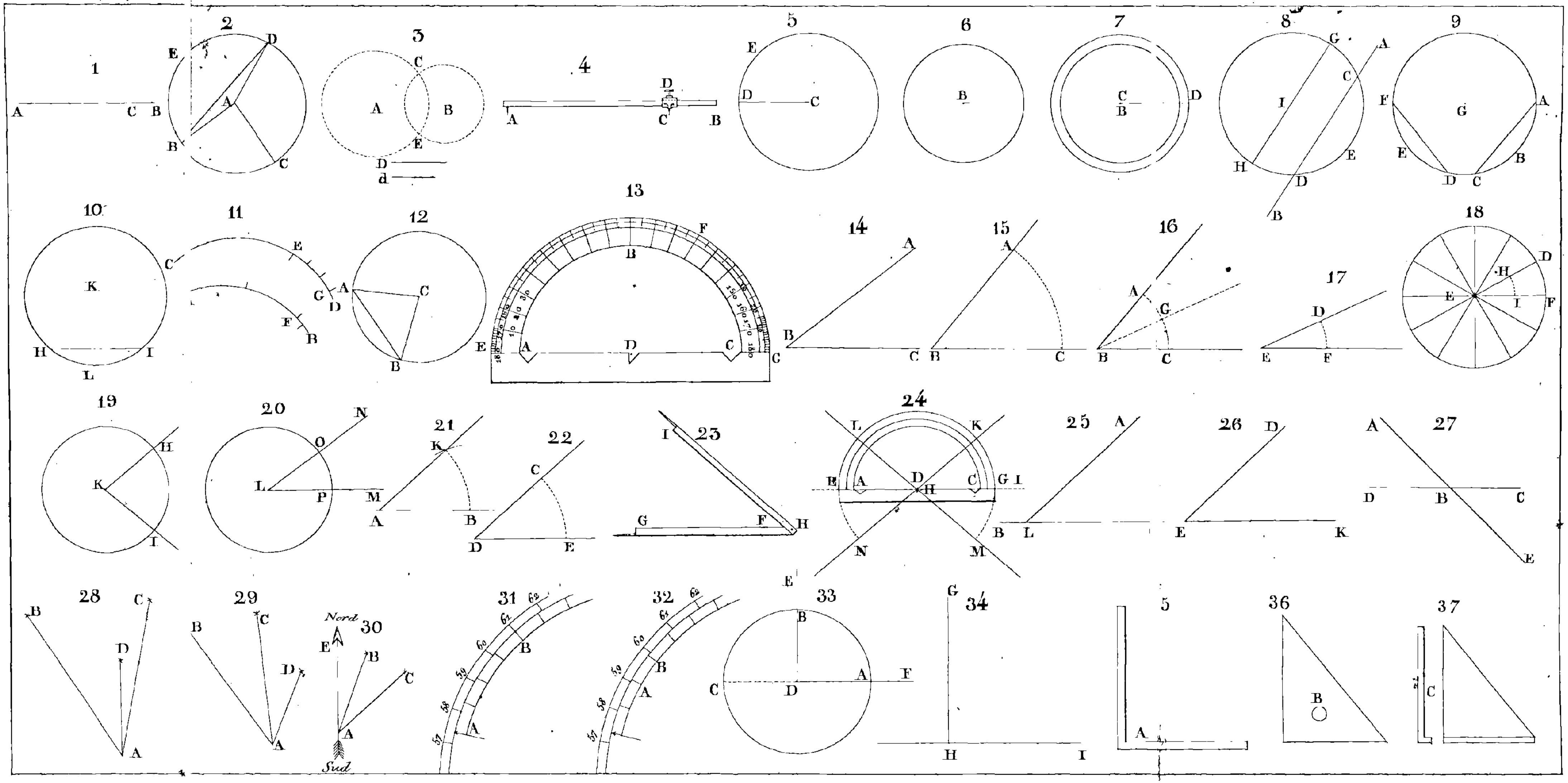
FORMATION ET COMBINAISONS

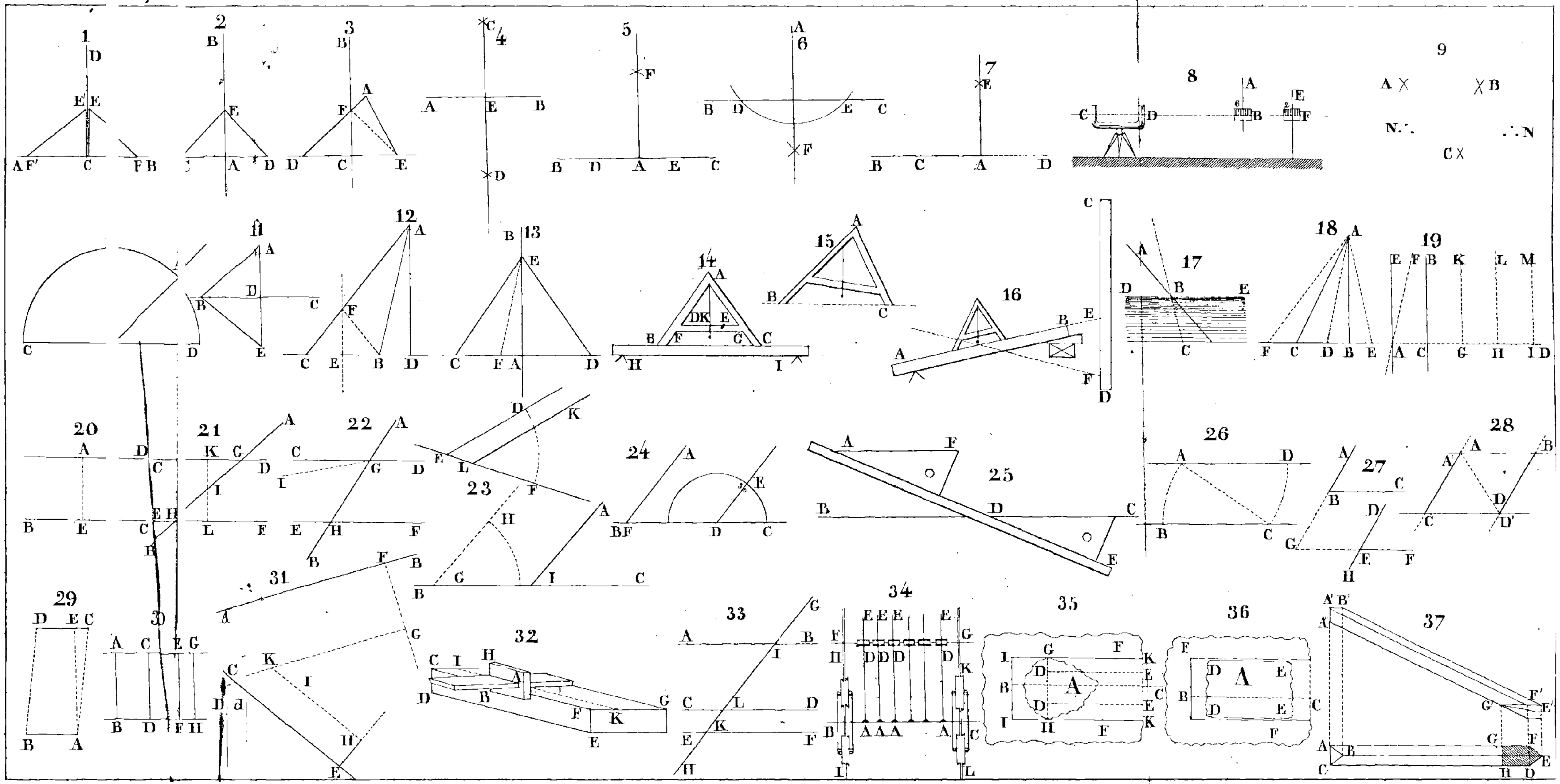
DES FACES.

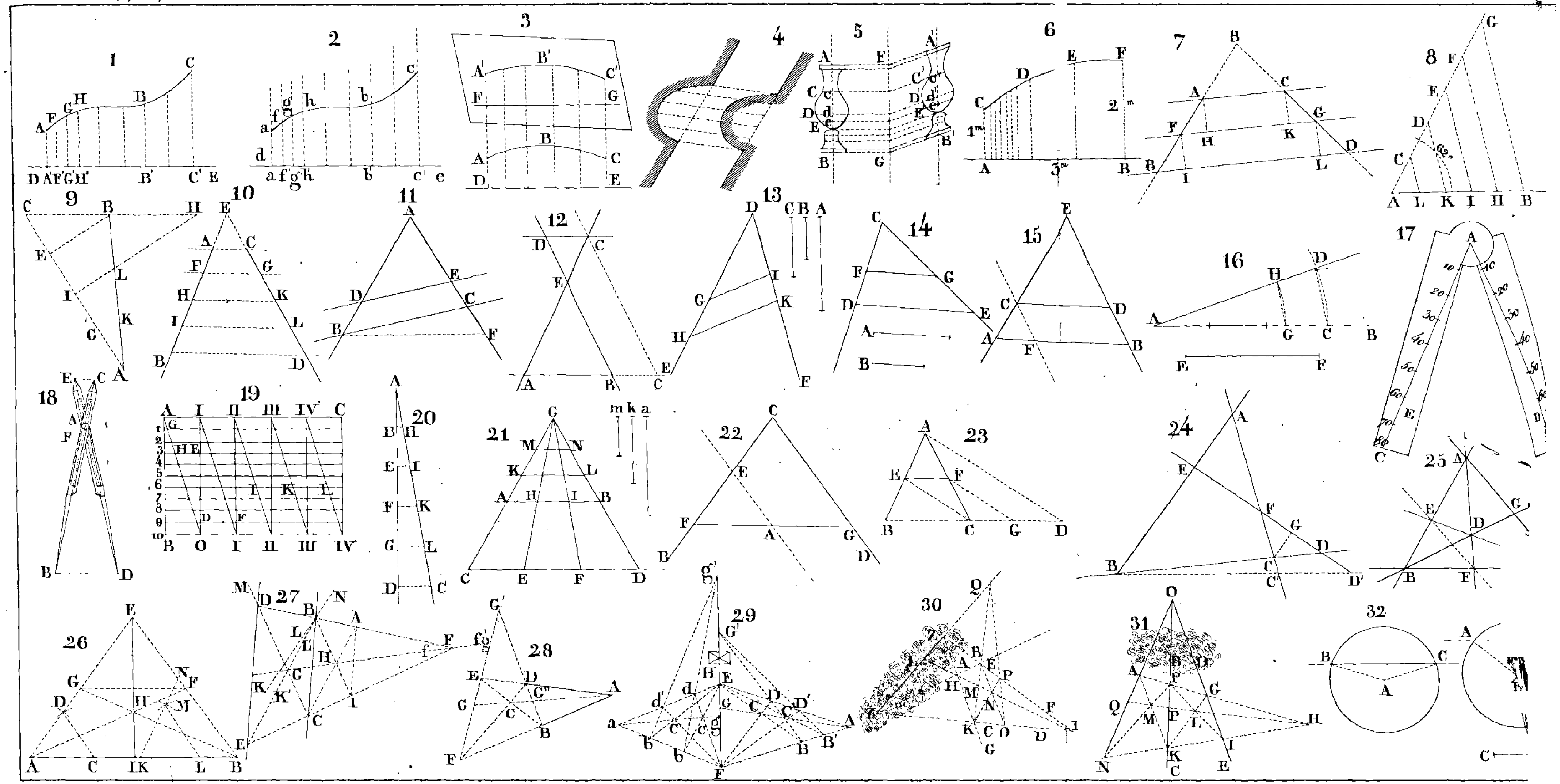
FORMATION ET COMPARAISON

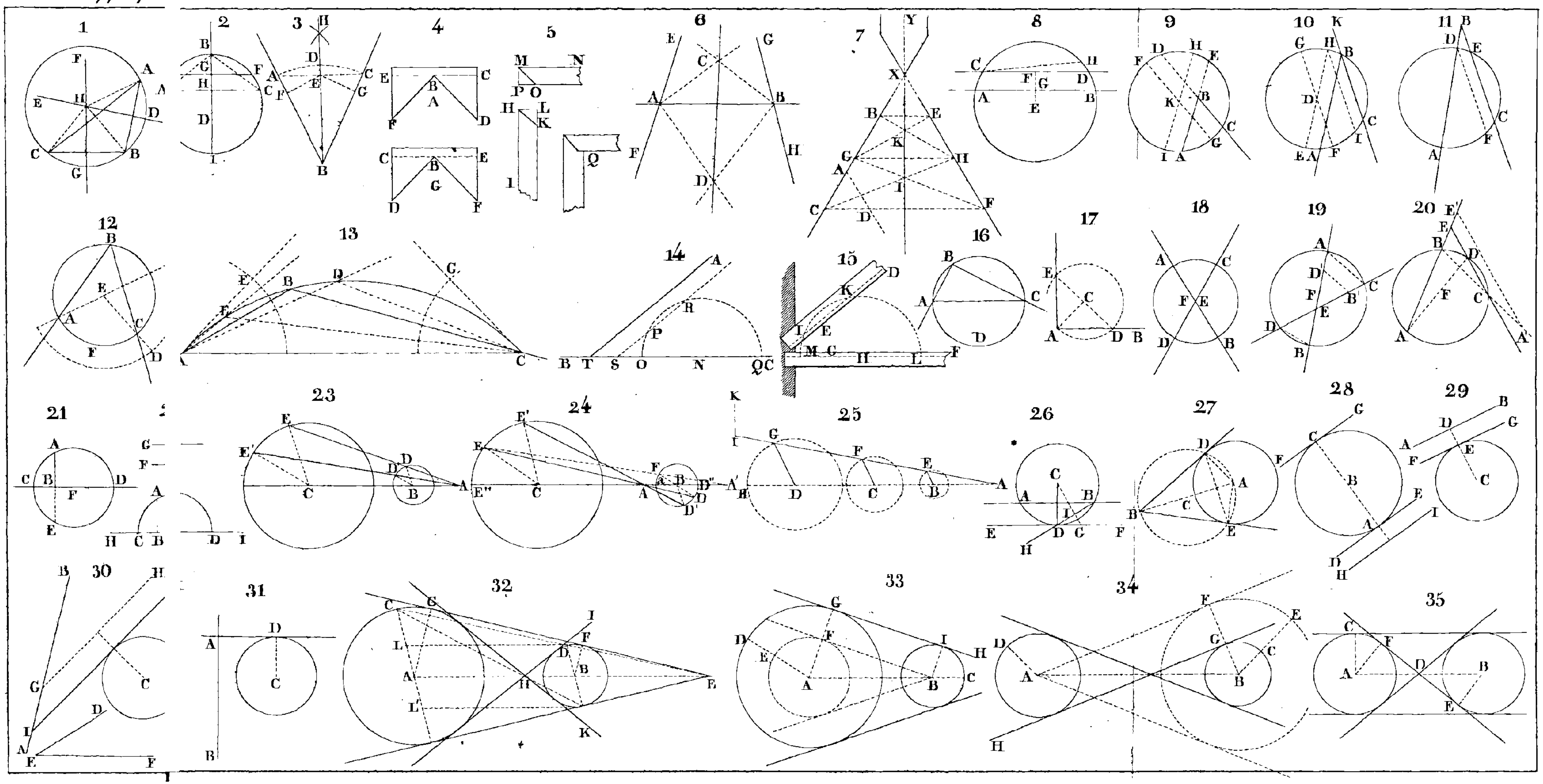
DES CORPS.

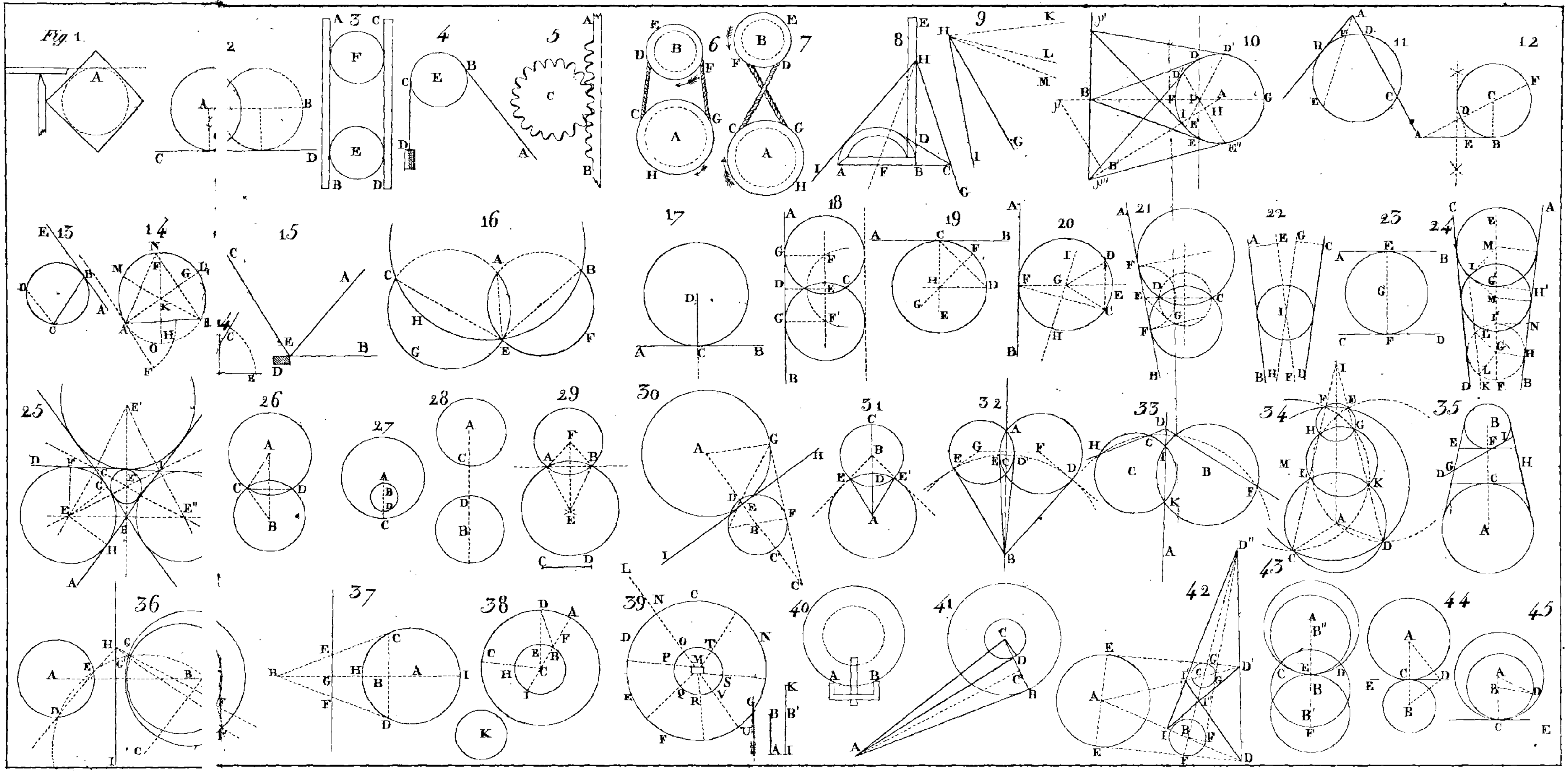
MESURAGES.

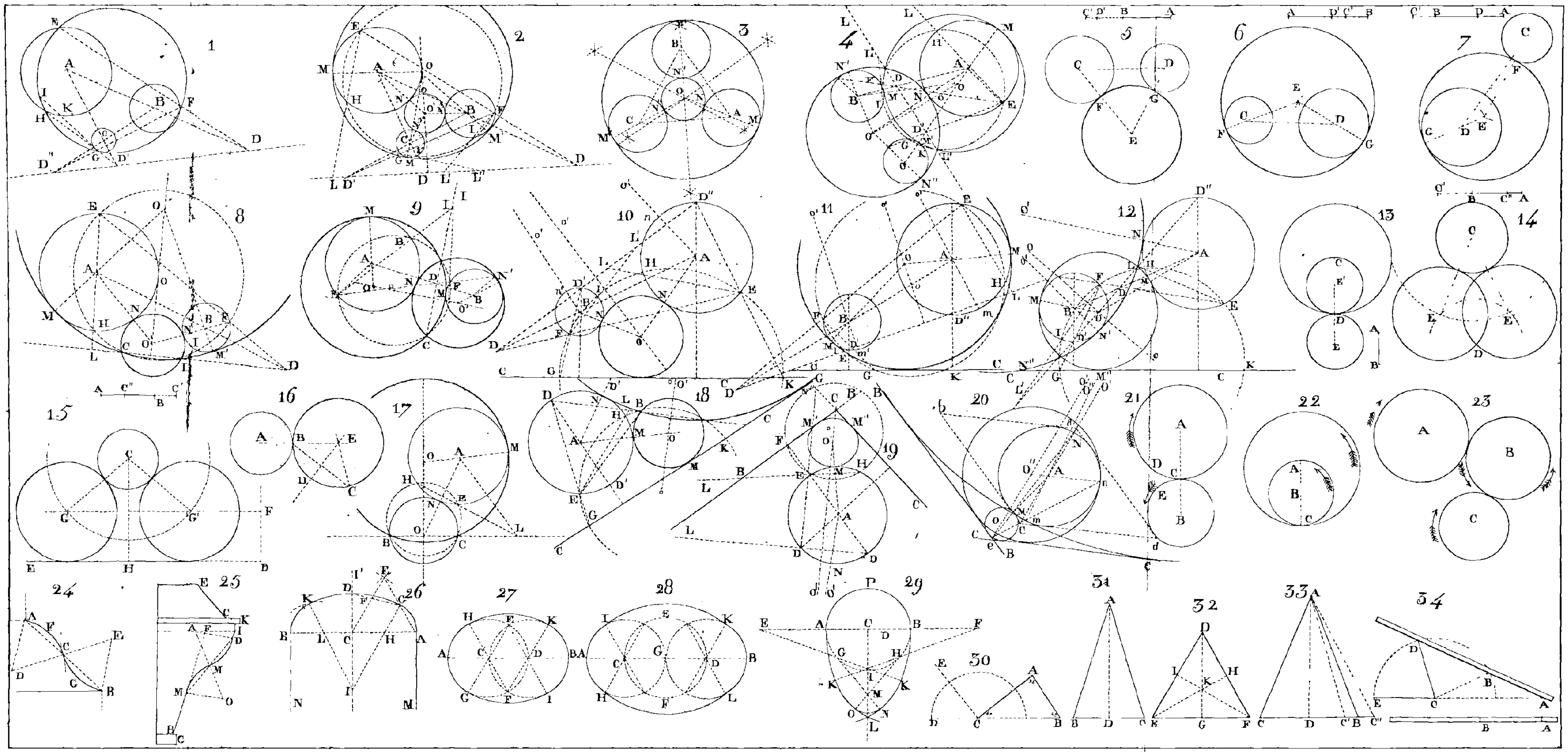

Nord
Sud

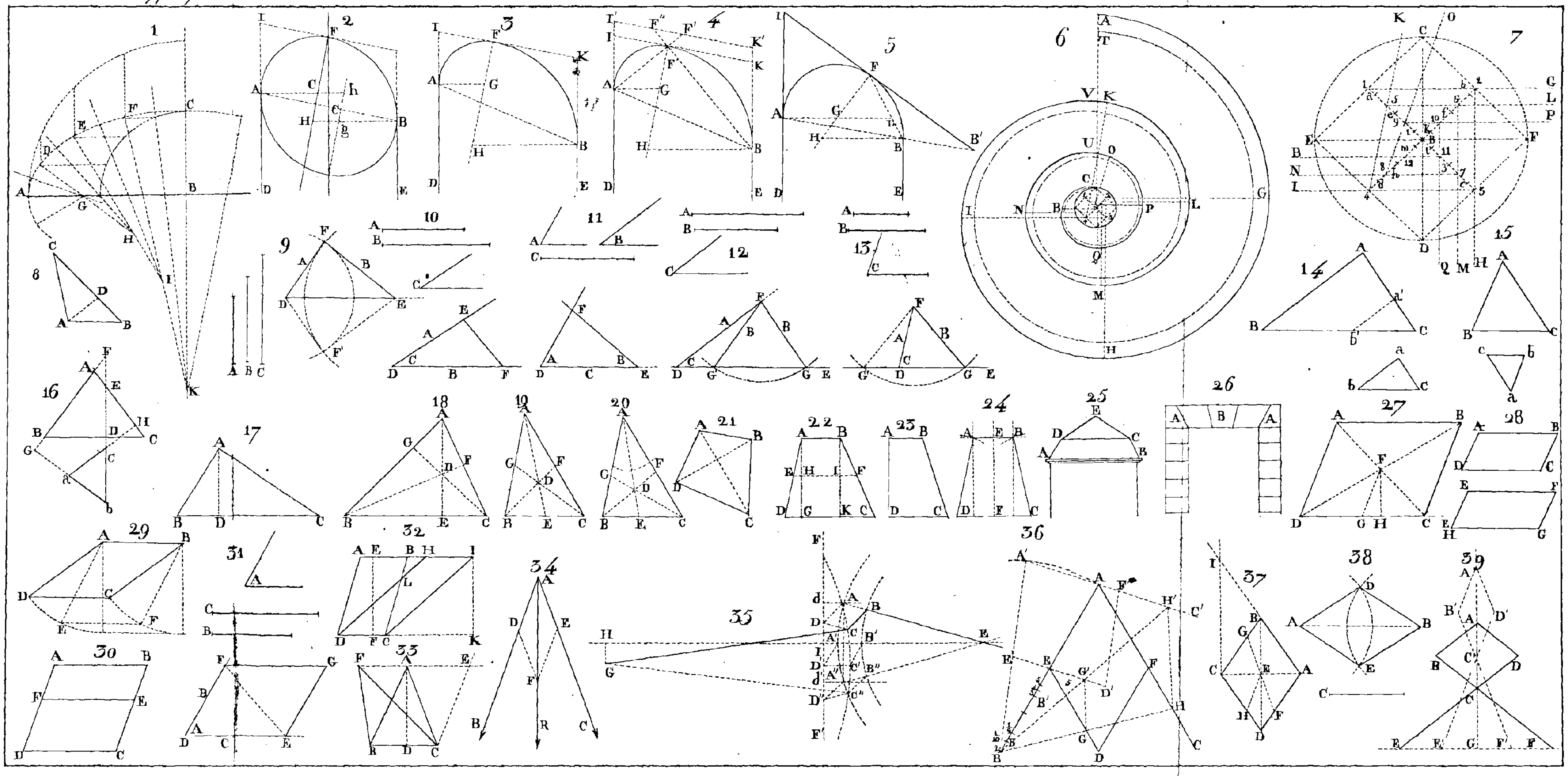

1
2
3
4
5
6
7
8
9
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37

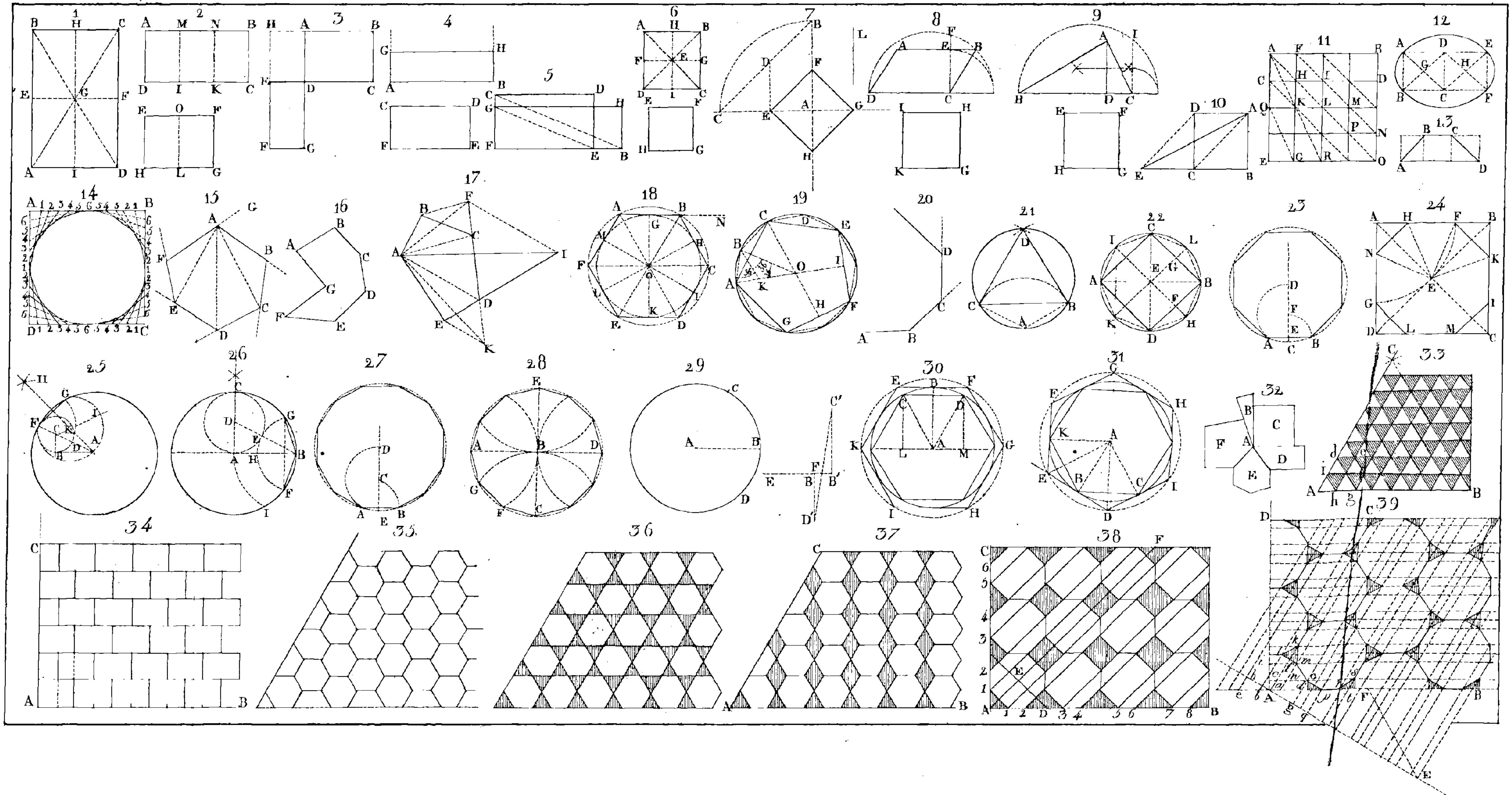

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32

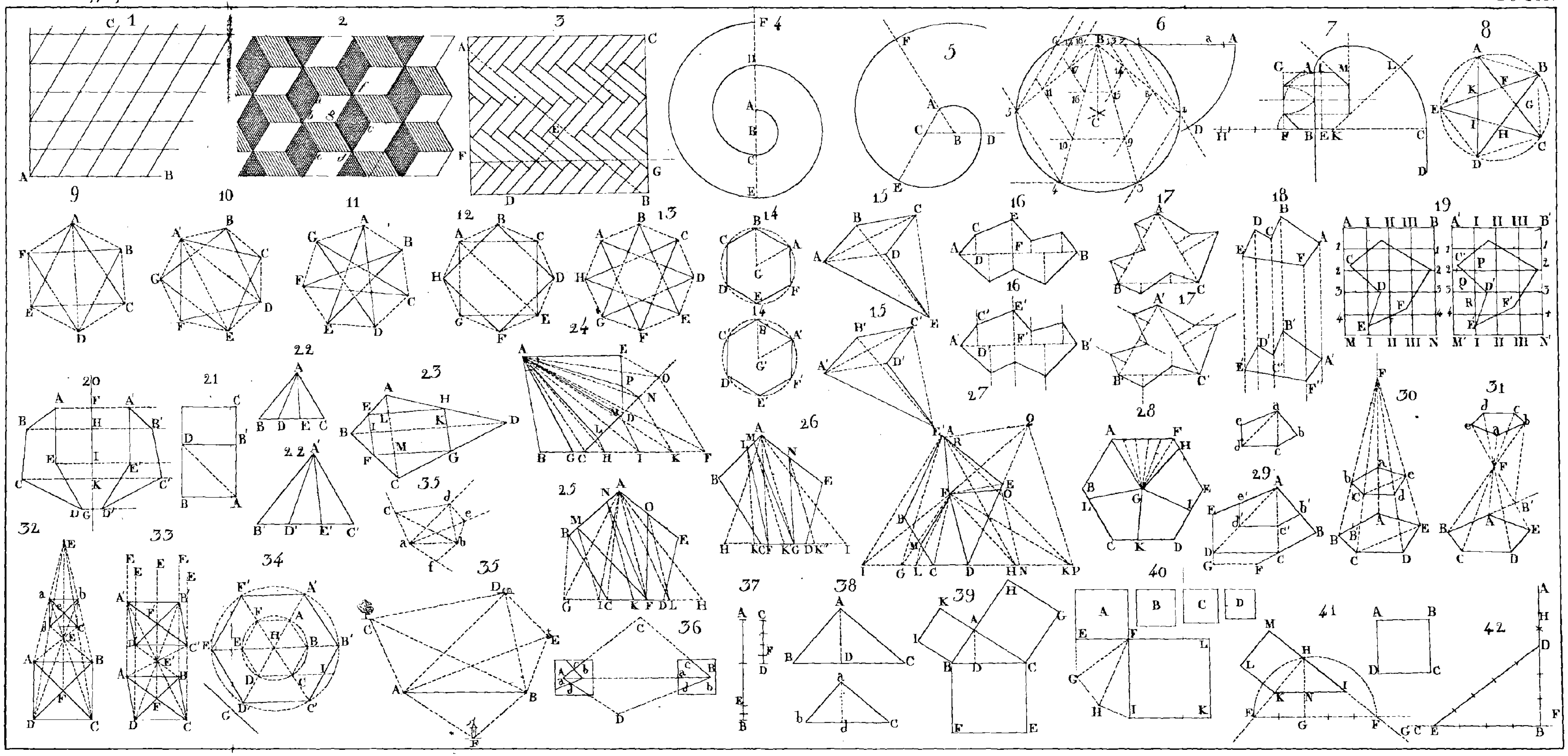

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35

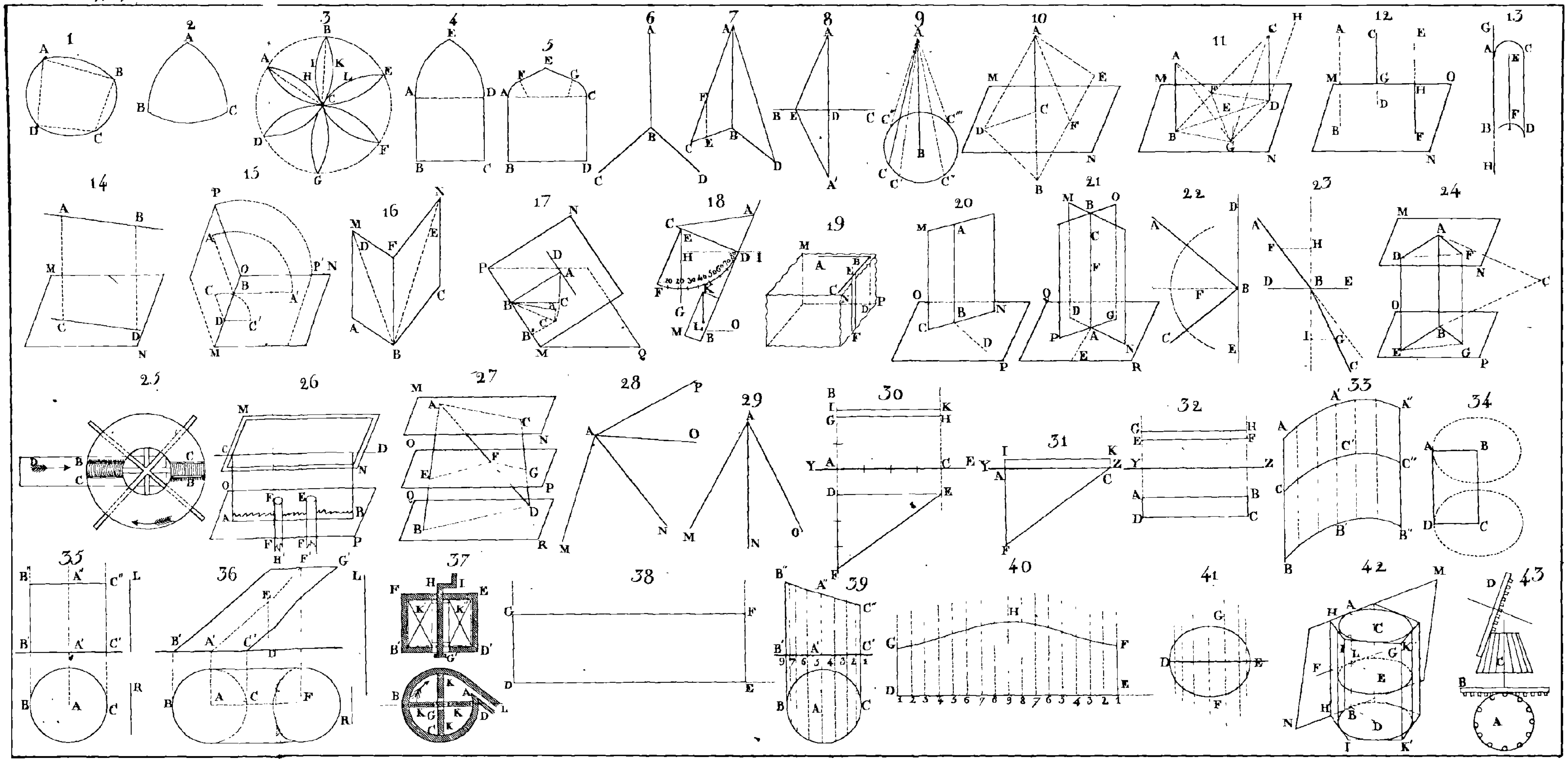


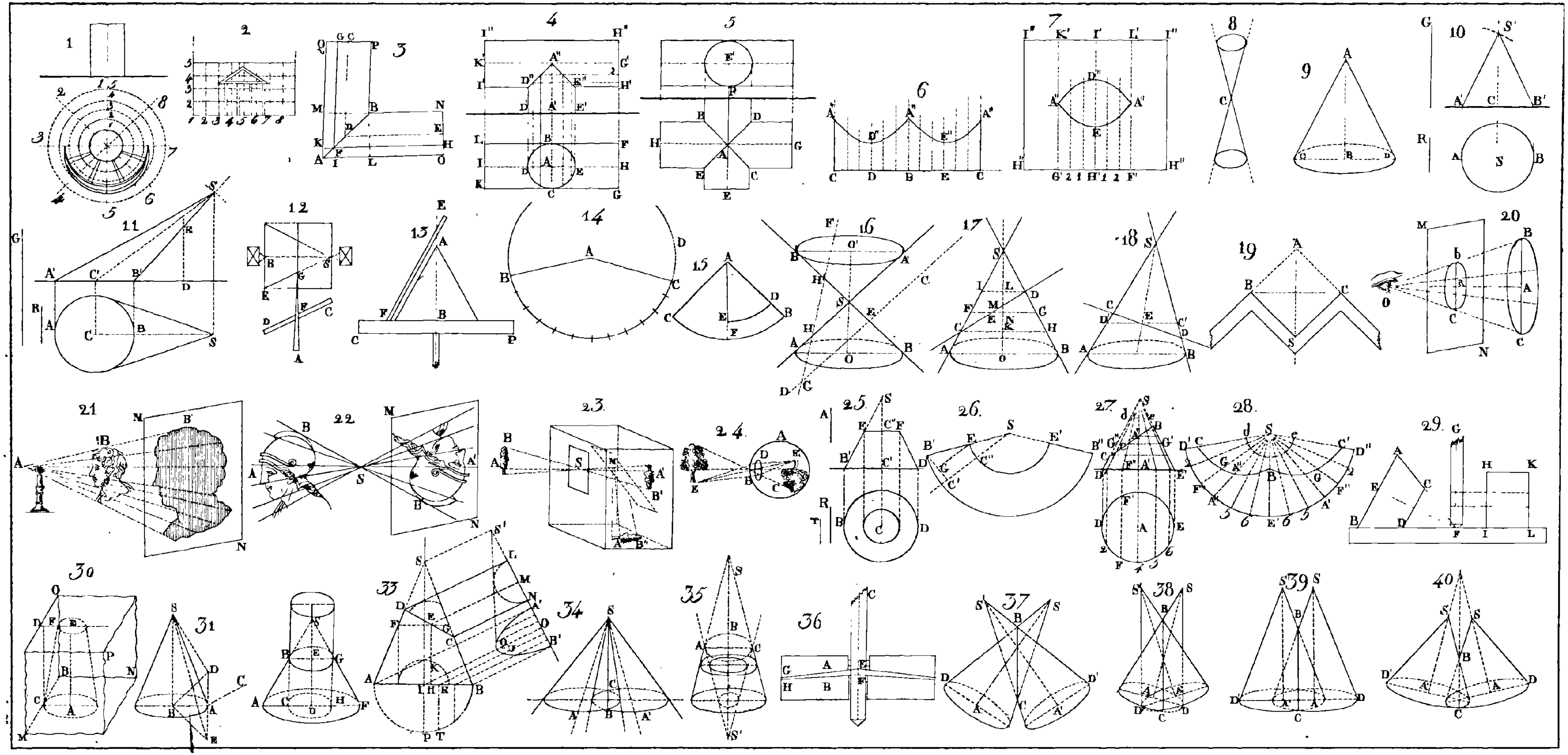

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34

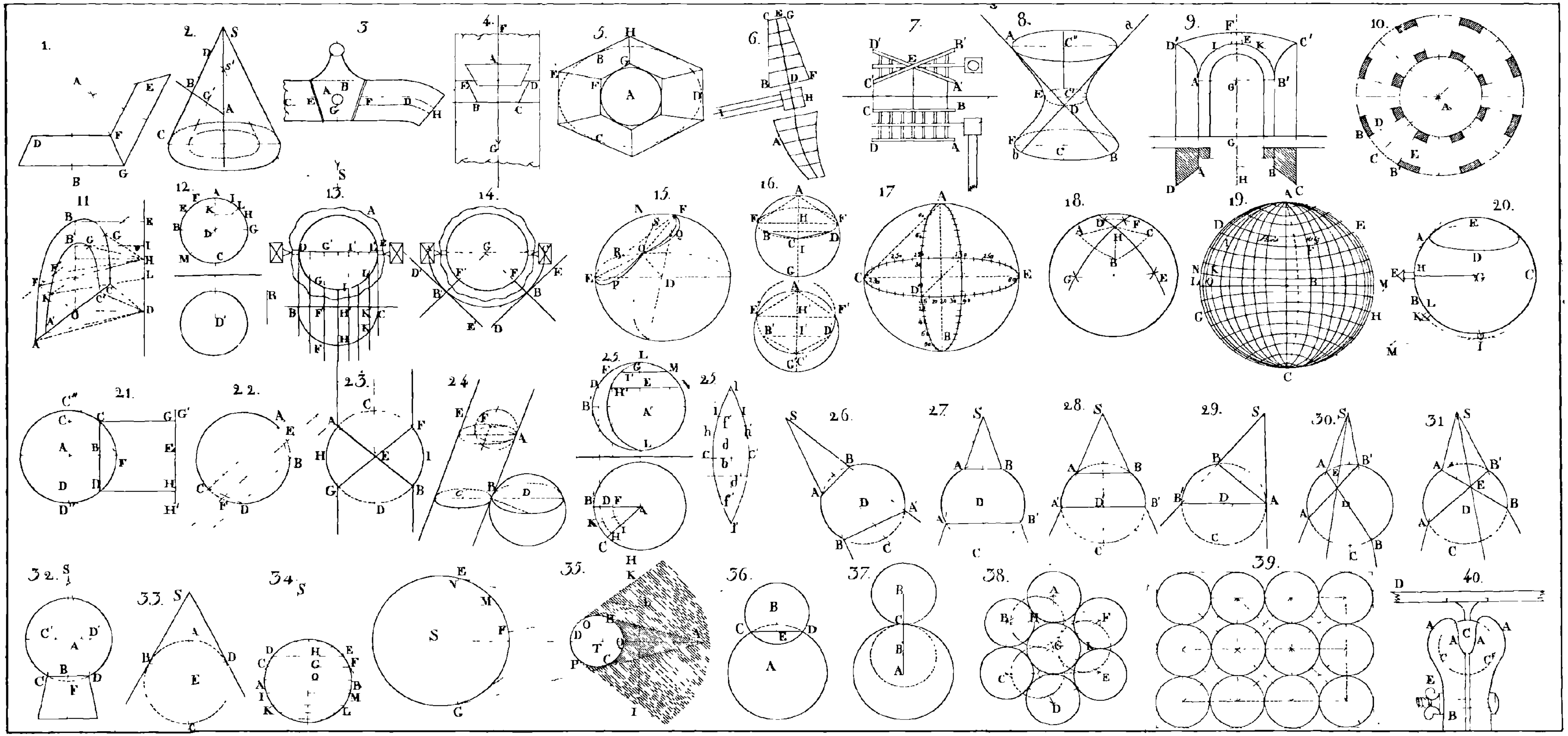

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39

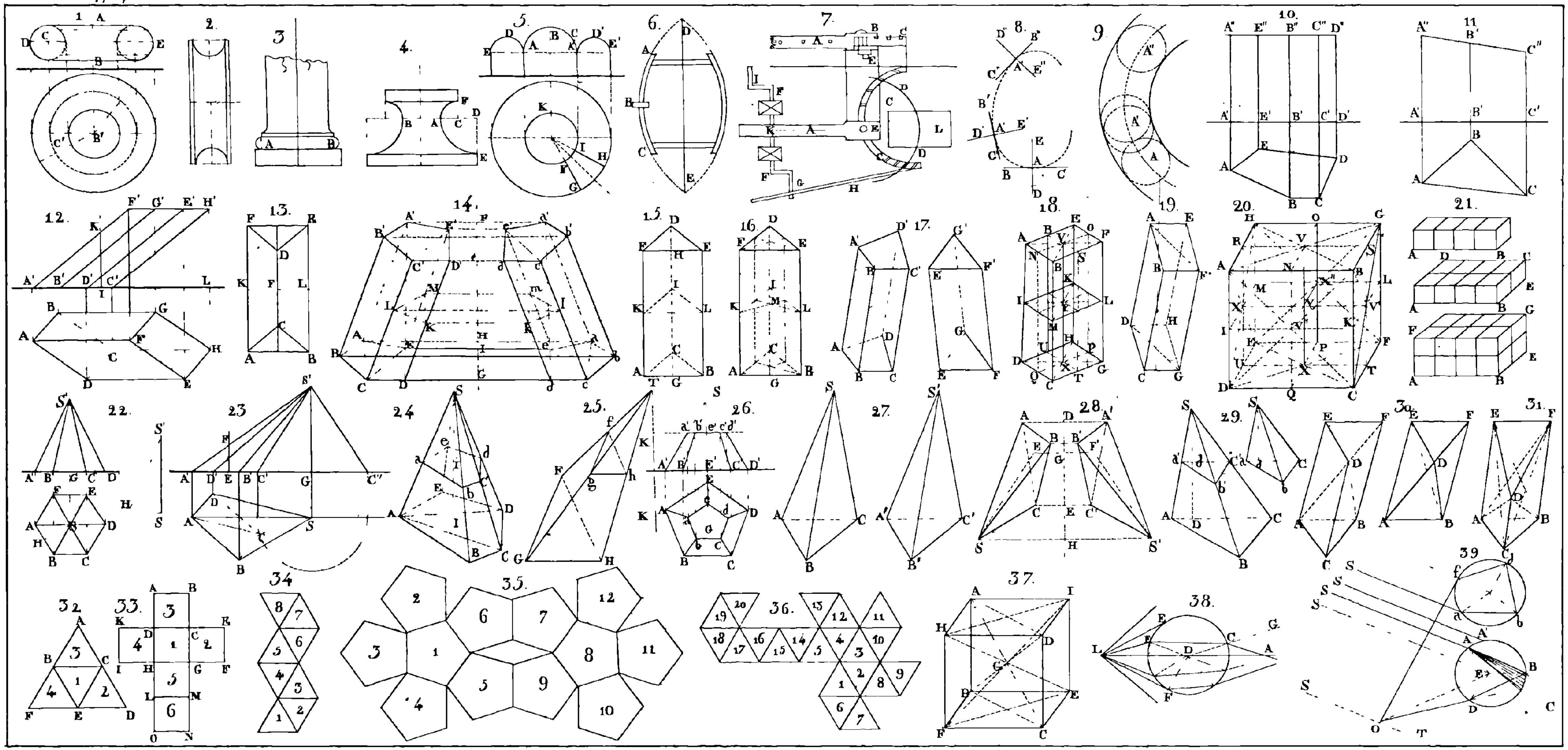



1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43






1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
13.
14.
15.
16.
17.
18.
19.
20.
21.
22.
23.
24.
25.
26.
27.
28.
29.
30.
31.
32.
33.
34.
35.
36.
37.
38.
39.