

ANNALI  
DI  
MATEMATICA  
PURA ED APPLICATA

DIRETTI DAL  
prof. Francesco Brioschi  
IN MILANO

colla cooperazione dei professori:

Luigi Cremona *in Roma* || Eugenio Beltrami *in Roma*  
Enrico Betti *in Pisa* || Ulisse Dini *in Pisa*

---

SERIE II - TOMO XIX

(dal febbraio dell'anno 1891 al febbraio dell'anno 1892)

MILANO.

---

TIPOGRAFIA BERNARDONI DI C. REBESCHINI E C.

# INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NEL TOMO XIX.<sup>o</sup> (SERIE II.<sup>a</sup>)

---

	PAG.
Le corrispondenze univoche sulle curve ellittiche di ordine $n$ normali di uno $S_{n-1}$ . (Memoria I.) — <i>Federico Amodeo</i> . . . . .	1
Sugl' integrali polidromi delle equazioni algebrico-differenziali del primo ordine. — <i>Giulio Vivanti</i> . . . . .	29
Theorie der Elemententripel einstufiger Elementargebilde. — Theil II. - Das Tripelgebiet. — <i>Benno Klein</i> . . . . .	39
Sulla generalizzazione delle frazioni continue algebriche. — <i>S. Pincherle</i> .	75
Sopra una classe di equazioni differenziali lineari riducibili. — <i>Carlo Bigiavi</i> .	97
Corrispondenze univoche singolari delle curve ellittiche armoniche ed equiarmoniche. (Memoria II.) — <i>Federico Amodeo</i> . . . . .	145
Sulle sestiche di contatto alla superficie di Kummer. (Memoria VII.) — <i>Ernesto Pascal</i> . . . . .	159
Sui sistemi tripli ortogonali che contengono una serie di superficie con un sistema di linee di curvatura piane. — <i>Luigi Bianchi</i> . . . . .	177
Sonja Kovalevsky. — <i>Anna Carlotta Leffler</i> . . . . .	201

*Indice.*

---

	PAG.
Sulla determinazione delle linee di cui il rapporto della curvatura alla torsione è una funzione nota dell'arco. — <i>Geminiano Pirondini</i> . . . . .	213
Theorie der Elemententripel einstufiger Elementargebilde. — Theil III. - Collineare Beziehung des Tripelgebietes auf den Raum und Allgemeine Theorie der Raumcurve III. Ordnung. — <i>Benno Klein</i> . . . . .	233
Alcuni teoremi sulle superficie sviluppabili. — <i>Geminiano Pirondini</i> . . . . .	247
Ricerca del rapporto fra i discriminanti di un'equazione algebrico-differenziale di 1. <sup>o</sup> ordine e della sua primitiva completa per mezzo della teoria delle curve piane razionali. — <i>Gabriele Torelli</i> . . . . .	254
Sul rapporto $\frac{\eta'}{\eta}$ considerato come funzione del rapporto $\frac{\omega'}{\omega}$ dei periodi delle funzioni ellittiche di Weierstrass. — <i>Carlo Bigiavi</i> . . . . .	261
Sulle condizioni invariantive perchè due quintiche binarie abbiano quattro radici comuni. — <i>L. Berzolari</i> . . . . .	269
Sulle funzioni a due variabili reali, le quali crescono o decrescono sempre nel verso positivo di ciascuno degli assi in un pezzo di piano a distanza finita. ( <i>Continua.</i> ) — <i>Giulio Ascoli</i> . . . . .	289

---

# Le corrispondenze univoche sulle curve ellittiche di ordine $n$ normali di uno $S_{n-1}$ .

(Memoria I di FEDERICO AMODEO, a Napoli.)

Hanno trattato delle curve ellittiche, in relazione alle corrispondenze univoche che possono esistere fra i punti delle stesse, specialmente i signori KÜPPER <sup>(1)</sup>, HARNACK <sup>(2)</sup>, HURWITZ <sup>(3)</sup>, KLEIN <sup>(4)</sup> <sup>(8)</sup>, BIANCHI <sup>(5)</sup>, WEYR <sup>(6)</sup> <sup>(7)</sup>, SEGRE <sup>(9)</sup> <sup>(11)</sup>, CASTELNUOVO <sup>(10)</sup>, SCHÖNFLIESS <sup>(12)</sup>. I quali hanno considerata la

<sup>(1)</sup> KÜPPER, *Ueber die Steiner'schen Polygone auf einer Curve dritter Ordnung, und damit zusammenhängende Sätze aus der Geometrie der Lage*. Abhandl. d. k. böhm. Gesell. d. W., 1873. Oppure Math. Ann., Bd. 24, pag. 1-41, 1884.

<sup>(2)</sup> HARNACK, *Ueber die Verwerthung der elliptischen Functionen für die Geometrie der Curven dritter Ordnung*. Math. Ann., Bd. 9, 1876, pag. 1-54.

<sup>(3)</sup> HURWITZ, *Ueber unendlich-vieldeutige geometrische Aufgaben insbesondere über die Schliessung-problem*. Math. Ann., Bd. 15, 1879, pag. 8.

<sup>(4)</sup> KLEIN, *Ueber unendlich viele Normalformen des elliptischen Integrals ersten Gattung*. Math. Ann., Bd. 17, pag. 133, 1880.

<sup>(5)</sup> BIANCHI, *Ueber die Normalformen dritter und fünfter Stufe des elliptischen Integrals erster Gattung*. Math. Ann., Bd. 17, pag. 234, 1880.

<sup>(6)</sup> WEYR, *Ueber eindeutige Beziehungen auf einer allgemein ebenen Curve dritter Ordnung*. Sitzungsberichte d. k. Akad. d. W., pag. 837-872. Wien, 1883.

<sup>(7)</sup> WEYR, *Ein Beitrag zur Gruppentheorie auf der Curve vom Geschlechte eins*. Ibid., pag. 436-482. 1884.

<sup>(8)</sup> KLEIN, *Ueber die elliptischen Normalcurven der  $N$ .<sup>ten</sup> Ordnung und zugehörige Modelfunktionen der  $N$ .<sup>ten</sup> Stufe*. Abhandl. d. kgl. Sächs. Gesell. d. W., Bd. 13, 1885.

<sup>(9)</sup> SEGRE, *Remarques sur les transformations uniformes des courbes elliptiques en elles-mêmes*. Math. Ann., Bd. 27, pag. 295. 1886.

<sup>(10)</sup> CASTELNUOVO, *Geometria sulle curve ellittiche*. Atti della r. Acc. di Torino, vol. 24, pag. 4-22. 1888.

<sup>(11)</sup> SEGRE, *Le corrispondenze univoche sulle curve ellittiche*. Atti d. r. Acc. di Torino, vol. 24. 1889.

<sup>(12)</sup> SCHÖNFLIESS, *Ueber eine specielle Classe von Configurationen auf den elliptischen Normalcurven  $n$ .<sup>ten</sup> Ordnung*. Math. Ann., Bd. 35, pag. 527-540. 1890.

questione sotto diversi aspetti, dapprima limitandosi alle curve ellittiche del terzo ordine (KÜPPER, HURWITZ, HARNACK, WEYR, BIANCHI, SEGRE), poi passando alla curva ellittica gobba del quarto ordine (HARNACK), a quella di quinto ordine dello spazio a quattro dimensioni (BIANCHI), ed infine estendendosi alle curve ellittiche normali di uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni (KLEIN, SEGRE, CASTELNUOVO, SCHÖNFLIESS). Fra tutti, solo il sig. SEGRE ha esaminate le corrispondenze univoche singolari che esistono sulle curve armoniche ed equiarmoniche di cui la rappresentazione analitica fu incidentalmente notata dal KLEIN <sup>(1)</sup>.

Lo studio delle corrispondenze univoche sulle curve ellittiche è stato per lo più fatto sulle curve del terzo ordine, quindi non sono state ancora citate molte proprietà inerenti alla maggior dimensione dello spazio in cui la curva è immersa. Fanno eccezione SEGRE, CASTELNUOVO e SCHÖNFLIESS, dei quali il primo ha specialmente considerate le rigate generate da queste corrispondenze, l'altro le involuzioni razionali od ellittiche d'ordine e dimensione qualunque, il terzo una speciale classe di configurazioni su queste curve.

Noi abbiamo cercato di completare possibilmente lo studio di queste corrispondenze dal punto di vista generale, ed abbiamo maggiormente tenuto presenti i lavori dei signori WEYR e SEGRE. I risultati in parte sono noti, altri no, e fra questi è notevole una certa estensione dei poligoni di STEINER.

Perchè il lavoro non perda la sua unità di concetto, abbiamo creduto opportuno di non omettere qualche dimostrazione, anche se fosse nota al lettore per i lavori citati.

In una seconda Memoria, che già abbiamo terminata, tratteremo specialmente delle corrispondenze singolari.

## § 1. Considerazioni generali.

1. Siano  $\Gamma^n$ ,  $\Gamma'^n$  due curve ellittiche distinte o sovrapposte normali di ordine  $n$ , di uno  $S_{n-1}$ , fra i punti delle quali sia stabilita una corrispondenza univoca qualunque, ed  $m$ ,  $m_1$  rispettivamente due loro  $[n-3]$  <sup>(2)</sup>  $(n-2)$ -secanti (che indicheremo per brevità con  $[n-3]_s$ ) scelti ad arbitrio; proiettando

<sup>(1)</sup> KLEIN, *Ueber die Auflösung gewisser Gleichungen von sieben und achten Grade*. Math. Ann., Bd. 15, pag. 279. 1879.

<sup>(2)</sup> Seguendo SCHUBERT (Acta mathematica, vol. 8, pag. 97, 1886) indicheremo con  $[n-r]$  uno spazio di dimensione  $n-r$  (per  $r > 1$ ) contenuto nello  $S_{n-1}$ .

da  $m, m_1$  rispettivamente i punti delle curve  $\Gamma^n, \Gamma'^n$  si hanno due fasci  $(m), (m_1)$  di  $[n-2]$ , ciascuno dei quali sega ulteriormente la curva in un altro punto. Nel fascio  $(m_1)$  si considerino come corrispondenti gli  $[n-2]$  che proiettano due punti  $A', B'$  di  $\Gamma'^n$  i cui omologhi  $A, B$  di  $\Gamma^n$  sono in uno  $[n-2]$  del fascio  $(m)$ ; si avrà nel fascio  $(m_1)$  una corrispondenza  $(2, 2)$ , di cui i quattro  $[n-2]$  uniti sono quelli che corrispondono agli  $[n-2]$  del fascio  $(m)$  che hanno colla curva  $\Gamma^n$  due punti comuni consecutivi fuori di  $m$ .

Quindi: *per ogni  $[n-3]_s$  di una curva ellittica  $\Gamma^n$  normale di ordine  $n$  passano soltanto quattro  $[n-2]$  tangenti alla curva.*

Se nella corrispondenza  $(2, 2)$  del fascio  $(m_1)$  oltre a quei  $[n-2]$  uniti ve ne fosse un altro, se cioè, preso ad arbitrio l'  $[n-3]_s$   $m$  di  $\Gamma^n$ , si assume per  $[n-3]_s$   $m_1$  di  $\Gamma'^n$  uno degli  $\infty^{n-3}$   $[n-3]_s$  che stanno in un medesimo  $[n-2]$  con due punti  $A', B'$ , i cui omologhi  $A, B$  di  $\Gamma^n$  stanno in un  $[n-2]$  con  $m$ , ogni  $[n-2]$  del fascio  $(m_1)$  sarà unito, cioè proietterà da  $m_1$  due punti di  $\Gamma'^n$  i cui omologhi su  $\Gamma^n$  sono in un  $[n-2]$  del fascio  $(m)$ . In tal caso i fasci  $(m), (m_1)$  sono riferiti proiettivamente fra loro.

2. Siano  $A, B, C$  tre punti di  $\Gamma^n$  ed  $A', B', C'$  i loro omologhi nella corrispondenza stabilita fra i punti delle curve  $\Gamma^n, \Gamma'^n$ , e sia  $m$  un  $[n-4]_s$  di  $\Gamma^n$  appartenente coi punti  $A, B, C$  ad uno stesso  $[n-2]$   $\alpha$ , ed  $m_1$  un  $[n-4]_s$  di  $\Gamma'^n$  appartenente coi punti  $A', B', C'$  ad uno stesso  $[n-2]$   $\alpha'$ . Se alla coppia  $AB$  si fa corrispondere la coppia  $A'B'$  assumendo come  $[n-3]$  rispettivi di proiezione dei punti corrispondenti delle curve gli  $[n-3]_s$   $mC, m_1C'$ , resta stabilita una proiettività fra i fasci  $(mC), (m_1C')$ , nella quale gli  $[n-2]$   $\alpha \equiv mABC, \alpha' \equiv m_1A'B'C'$  sono corrispondenti. Facendo invece corrispondere alla coppia  $BC$  la coppia  $B'C'$  ed assumendo come  $[n-3]$  di proiezione gli  $[n-3]_s$   $mA, m_1A'$ , fra i fasci di  $[n-2]$   $(mA), (m_1A')$  si stabilirà un'altra proiettività in cui gli  $[n-2]$   $\alpha, \alpha'$  sono pure corrispondenti; di guisa che, nelle due stelle di  $[n-2]$ , dai sostegni  $m, m_1$ , ai due fasci  $(mA), (mC)$  corrispondono nell'altra due fasci ad essi proiettivi  $(m_1A'), (m_1C')$ , in modo che all'  $[n-2]$   $\alpha$  comune ai primi due fasci corrisponde l'  $[n-2]$   $\alpha'$  comune ai secondi. Dunque le due stelle  $(m), (m_1)$  sono fra loro omograficamente riferite mediante la corrispondenza univoca fra le curve  $\Gamma^n, \Gamma'^n$ , e perciò ad ogni  $[n-2]$  che proietta una terna di punti di  $\Gamma^n$ , corrisponde nell'altra un  $[n-2]$  che proietta la terna di punti omologhi di  $\Gamma'^n$ .

Passando dalle stelle alle forme di 3.<sup>a</sup>, 4.<sup>a</sup>, ...  $(n-2)^{\text{ma}}$  specie, che hanno per sostegno un  $[n-5]_s$ , un  $[n-6]_s, \dots$ , un punto della curva, con egual ragionamento si perviene al seguente teorema:

Date due curve  $\Gamma^n$ ,  $\Gamma'^n$ , distinte o sovrapposte, ellittiche normali di ordine  $n$  di uno stesso  $S_{n-1}$ , se fra i punti di esse è stabilita una corrispondenza univoca qualunque, ai gruppi di  $r$  punti ( $r < n$ ) della curva  $\Gamma^n$ , contenuti in  $[n-2]$  che passano per un  $[n-r-1]_s$  fissato ad arbitrio sopra di essa, corrispondono nell'altra curva  $\Gamma'^n$  gruppi di  $r$  punti che sono contenuti in  $[n-2]$  che passano per uno qualunque di  $\infty^{n-r-1} [n-r-1]_s$  della curva  $\Gamma'^n$ .

I due  $[n-r-1]_s$  di  $\Gamma^n$ ,  $\Gamma'^n$  si possono dire  $[n-r-1]_s$  omologhi di proiezione; si osservi però che, viceversa, ad un  $[n-r-1]_s$  di proiezione della curva  $\Gamma'^n$  corrispondono  $\infty^{n-r-1} [n-r-1]_s$  di proiezione nella curva  $\Gamma^n$ , quindi noi diremo che le due varietà costituite da questi  $\infty^{n-r-1} [n-r-1]_s$  di  $\Gamma^n$  e  $\Gamma'^n$  sono varietà omologhe di proiezione.

In particolare per  $r = n-1$  si ha:

Date due curve  $\Gamma^n$ ,  $\Gamma'^n$  ellittiche normali di ordine  $n$  distinte o sovrapposte in uno stesso  $S_{n-1}$ , se fra i punti di esse è stabilita una corrispondenza univoca qualunque, ai gruppi di  $n-1$  punti contenuti in  $[n-2]$  che passano per un determinato punto fisso  $M$  di  $\Gamma^n$ , corrispondono in  $\Gamma'^n$  gruppi di  $n-1$  punti contenuti in  $[n-2]$  che passano per un determinato punto fisso  $M_1$  di  $\Gamma'^n$ .

I due punti si diranno analogamente centri omologhi di proiezione.

3. Per  $r = 2$  si ha pure che, alle coppie di punti della curva  $\Gamma^n$  contenute in  $[n-2]$  che passano per un  $[n-3]_s$  fissato ad arbitrio sopra di essa, corrispondono nella curva  $\Gamma'^n$  coppie di punti contenute in  $[n-2]$  che passano per uno qualunque di  $\infty^{n-3} [n-3]_s$  della curva  $\Gamma'^n$  <sup>(1)</sup>.

Assumiamo  $n-2$  diverse posizioni degli  $[n-3]_s$   $m_1, m_2, \dots, m_{n-2}$  di  $\Gamma'^n$ , gli  $n-2$  fasci  $(m_1), (m_2), (m_{n-2})$  che si otterranno saranno fra loro proiettivi; e le corde  $A'B', \dots$ , risultano come intersezioni di  $n-2$   $[n-2]$  corrispondenti, e perciò descrivono una superficie rigata  $M_2^{n-2}$  razionale dell'ordine  $n-2$  normale (cioè immersa nello  $S_{n-1}$  e non decomposta); la quale si appoggia agli  $[n-3]_s$   $m_1, m_2, \dots, m_{n-2}$ , e quindi a tutti gli  $\infty^{n-3} [n-3]_s$  che si appoggiano ad  $A'B'$ . E quindi:

*Le infinite,  $\infty^1$ , corde di una curva  $\Gamma^n$  ellittica di ordine  $n$  di uno  $S_{n-1}$ , che si appoggiano ai punti di uno  $[n-3]_s$  di  $\Gamma^n$  esternamente alla curva, costituiscono una superficie rigata  $M_2^{n-2}$  razionale normale dell'ordine  $n-2$ ,*

(1) SEGRE, *Remarques*, etc. (vedi loc. cit.).

la quale è incidente alla varietà degli  $\infty^{n-3} [n-3]_s$  che si appoggiano ad una delle sue generatrici.

Per  $n = 4$  si ha in particolare:

*Le corde di una curva gobba ellittica del 4.º ordine, che si appoggiano ad una corda fissa di questa in punti esterni alla curva, incontrano  $\infty^1$  corde di questa e costituiscono una schiera rigata del 2.º ordine; le infinite corde a cui queste si appoggiano costituiscono un'altra schiera rigata del medesimo ordine incidente alla prima.*

4. Nella proiettività considerata fra i fasci  $(m)$   $(m_1)$  di  $[n-2]$ , ai quattro  $[n-2]$  tangenti che da  $m$  si possono condurre alla curva  $\Gamma^n$  corrispondono i quattro  $[n-2]$  tangenti che da  $m_1$  si possono condurre alla curva  $\Gamma'^n$ ; cosicchè le due quaterne di  $[n-2]$  tangenti sono fra loro proiettive, cioè le due curve hanno lo stesso invariante assoluto. Fra i punti di una curva ellittica si può sempre stabilire una corrispondenza univoca (basta, per es., proiettare da un suo  $[n-3]_s$  i punti di essa su sè stessa); ne risulta che le quaterne di  $[n-2]$  tangenti che da un  $[n-3]_s$  variabile dell'ennica si possono condurre alla curva stessa sono fra loro proiettive. E quindi:

*Se fra i punti di due enniche ellittiche normali di un  $S_{n-1}$  si può stabilire una corrispondenza univoca, le quaterne di  $[n-2]$  tangenti che ad esse si possono condurre da un arbitrario  $[n-3]_s$  sono fra loro proiettive.*

5. Un'assegnata corrispondenza univoca fra i punti delle curve  $\Gamma^n$ ,  $\Gamma'^n$  fa corrispondere ad ogni gruppo di  $r$  punti  $g_r$  dell'una un determinato gruppo  $g'_r$  dell'altra, e questi gruppi individuano le due varietà di  $[n-r-1]_s$  omologhe di proiezione che fanno corrispondere fra loro i due gruppi  $g_r$ ,  $g'_r$  <sup>(4)</sup>.

Gli  $\infty^{r-1}$  gruppi di  $r$  punti  $g_r$  determinati da ciascuna varietà sopra la rispettiva curva costituiscono un'altra varietà di  $[r-1]_s$  incidente a quella di proiezione. E queste due varietà di  $[r-1]_s$  sono varietà omologhe di proiezione per un'altra corrispondenza fra i punti delle due curve in cui sono omologhi i gruppi di  $n-r$  punti determinati sulle curve dalle suddette varietà di  $[n-r-1]_s$ . Si ha quindi il teorema:

*Se  $F$ ,  $F'$  sono rispettivamente due varietà omologhe di  $\infty^{r-1} [r-1]_s$  delle curve  $\Gamma^n$ ,  $\Gamma'^n$  individuate da una data corrispondenza univoca fra i punti delle curve, esse sono pure varietà omologhe di proiezione per un'altra corrispondenza fra i punti delle curve.*

(4) Per le proprietà delle involuzioni razionali individuate dai gruppi  $g_r$  sopra ognuna delle curve cfr. CASTELNUOVO (loc. cit.).

6. Se gli  $r$  punti di un gruppo  $g_r$  divengono infinitamente vicini, anche i loro corrispondenti divengono infinitamente vicini, cosicchè agli  $[n - 2]$   $r$ -osculanti condotti dall'  $[n - r - 1]_s$   $m$  di  $\Gamma^n$  a questa curva corrispondono gli  $[n - 2]$   $r$ -osculanti che da un  $[n - r - 1]_s$   $m_1$  della omologa varietà di proiezione si possono condurre alla curva  $\Gamma'^n$ . E perciò, assegnata la corrispondenza univoca, se si vuol costruire la varietà di proiezione degli  $[n - r - 1]_s$  di  $\Gamma^n$  omologa a quella individuata da un  $[n - r - 1]_s$   $m$  di  $\Gamma^n$ , si conduca per  $m$  un  $[n - 2]$   $r$ -osculante alla curva  $\Gamma^n$ , e se  $A'$  è il punto di  $\Gamma'^n$  omologo nella corrispondenza data al punto  $A$  di osculazione di quello  $[n - 2]$ , tutti gli  $[n - 2]$  che  $r$ -osculano la curva  $\Gamma'^n$  in  $A'$  individuano gli  $\infty^{n-r-1}$   $[n - r - 1]_s$  della varietà cercata.

Se il gruppo contiene  $n - 1$  punti, con questa costruzione si trova in  $\Gamma'^n$  il centro  $M_1$  di proiezione omologo ad un centro di proiezione  $M$  di  $\Gamma^n$ .

7. Due punti  $M, M_1$  di una medesima ennica ellittica o di due enniche distinte di uno  $S_{n-1}$  si possono sempre considerare come centri omologhi di proiezione di una corrispondenza univoca fra i punti della curva.

Difatti, se  $A, A'$  sono i punti di osculazione di due  $[n - 2]$   $(n - 1)$ -osculanti, condotti alla curva rispettiva da  $M, M_1$ , assumendo  $A, A'$  come punti omologhi nella corrispondenza fra i punti della curva, saranno  $M, M_1$  due centri omologhi di proiezione di questa corrispondenza.

Due centri omologhi di proiezione, in una corrispondenza fra i punti di due curve, non sono in generale punti corrispondenti. Supponiamo che in particolare lo fossero; cioè che presi ad arbitrio su  $\Gamma^n$   $n - 1$  punti  $ABC\dots L$  ed i loro omologhi  $A'B'C'\dots L'$  su  $\Gamma'^n$ , gli  $[n - 2]$  individuati da questi gruppi segassero le curve rispettivamente in due punti omologhi  $M, M'$ ; allora ogni altra coppia, come per es.  $L, L'$ , può assumersi come coppia di centri omologhi di proiezione per la stessa corrispondenza fra i punti delle due curve; ed inoltre le corde  $ML, M'L'$ , possono assumersi come assi omologhi di proiezione. In tal caso gli elementi dello spazio  $S_{n-1}$ , in cui sono immerse le due curve, sono riferiti fra loro in modo che a due forme di  $(n - 2)^{ma}$  specie ( $M$ ), ( $L$ ) corrispondono due forme di  $(n - 2)^{ma}$  specie ( $M'$ ), ( $L'$ ) ad esse rispettivamente proiettive, e tali che la forma di  $(n - 3)^{ma}$  specie ( $ML$ ) comune alle prime corrisponde alla forma di  $(n - 3)^{ma}$  specie ( $M'L'$ ) comune alle seconde; perciò lo spazio  $S_{n-1}$  è riferito collinearmente a sè stesso. E quindi si ha il teorema:

*Una corrispondenza univoca fra i punti di due enniche normali ellittiche di uno  $S_{n-1}$ , tale che ad  $n$  punti contenuti in un  $[n - 2]$  della prima*

corrispondono nell'altra  $n$  punti pure contenuti in un  $[n - 2]$  è collineare <sup>(1)</sup>.

E quindi risulta che due centri omologhi di proiezione o sono sempre punti omologhi (quando la corrispondenza fra i punti delle due curve fa parte di una collineazione fra gli spazi delle due curve) o non lo sono mai.

In particolare:

*Una corrispondenza univoca fra due enniche tale che ad un punto singolare dell'una (punto di osculazione di un  $[n - 2]$   $n$ -osculante) corrisponde un punto singolare dell'altra è collineare.*

8. Abbiamo osservato (n.° 4) che se si può stabilire fra due enniche ellittiche normali di uno  $S_{n-1}$  una corrispondenza univoca le due curve hanno lo stesso invariante assoluto.

Reciprocamente: *Se due enniche ellittiche hanno lo stesso invariante assoluto, fra i punti di esse è possibile stabilire delle corrispondenze univoche.*

Dimostreremo questo teorema riferendoci a due quartiche di uno  $S_3$  <sup>(2)</sup>.

Si voglia che  $P, P'$  siano due punti corrispondenti delle due quartiche  $\Gamma^4, \Gamma'^4$  dello  $S_3$ ; proiettiamoli rispettivamente da due corde di  $\Gamma^4, \Gamma'^4$  sulle stesse curve in due punti singolari  $L, L'$ ; allora dalla corrispondenza voluta si passa ad una seconda corrispondenza, che ha per punti omologhi due punti singolari, e quindi deve essere contenuta in una collineazione fra gli elementi nello  $S_3$ . Siano  $l, l'$  le tangenti alle curve in  $L, L'$ , le quali, come è noto, passano rispettivamente per un vertice  $A$  del tetraedro polare di  $\Gamma^4$ , e per un vertice  $A'$  del tetraedro polare di  $\Gamma'^4$ ; siano  $MNP$  i punti di contatto della curva  $\Gamma^4$  con i tre piani tangenti  $\mu\nu\pi$  che da  $l$  le si possono condurre, e  $\mu'\nu'\pi', M'N'P'$  i piani ed i punti omologhi della curva  $\Gamma'^4$ ; e siano infine  $\lambda, \lambda'$  i piani iperosculatori in  $L, L'$ . È noto che i punti  $LMNP, L'M'N'P'$  stanno rispettivamente nelle facce  $\alpha, \alpha'$  dei tetraedri polari opposte rispettivamente ai vertici  $A, A'$ , e che essi sono tutti punti singolari delle curve  $\Gamma^4, \Gamma'^4$  e perciò le tangenti in essi alle curve passano rispettivamente per  $A, A'$ .

Per ipotesi le quaterne dei piani tangenti condotte da una corda qualunque di ciascuna curva alla curva stessa sono proiettive fra loro, perciò i due fasci di piani  $\lambda\mu\nu\pi, \lambda'\mu'\nu'\pi'$  debbono essere proiettivi: si supponga che

<sup>(1)</sup> Questo teorema fu dimostrato sinteticamente dal KÜPPER per  $n = 3$  (Math. Ann., Bd. 24, pag. 32) ed analiticamente dal SEGRE per  $n$  qualunque. (Cfr. *Remarques*, etc. Math. Ann., Bd. 27.)

<sup>(2)</sup> La dimostrazione di questo teorema è stata fatta geometricamente dal SEGRE sulle cubiche ellittiche (cfr. Atti di Torino, loc. cit.).

essi siano proiettivi nell'ordine:

$$l(\lambda\mu\nu\pi) \wedge l(\lambda'\mu'\nu'\pi'). \quad (1)$$

Un punto qualunque  $Q$  di  $\Gamma^4$  è proiettato da  $l$  secondo un piano  $\chi$  a cui corrisponde nel fascio ( $l$ ) un piano  $\chi'$  che determinerà su  $\Gamma^4$  due punti  $Q', Q''$ , armonicamente separati dal punto  $A'$  e dalla faccia  $\alpha'$  del tetraedro polare di  $\Gamma^4$ ; uno di essi si può far corrispondere a  $Q$  e sia  $Q'$ . Allora, se ai punti  $ALMNQ$  di  $S_3$  si fanno corrispondere i punti  $A'L'M'N'Q'$ , è individuata una omografia fra gli elementi di  $S_3$ ; nella quale al piano  $LMN$  corrisponderà il piano  $L'M'N'$ ; al piano  $\pi$  il piano  $\pi'$ ; alle rette  $lmn$ , le rette  $l'm'n'$ ; ed al secondo punto d'intersezione  $Q_1$  della retta  $AQ$  colla curva  $\Gamma^4$  corrisponderà il punto  $Q''$  (poichè  $A\alpha Q Q_1$ ,  $A'\alpha' Q' Q''$  sono armonici). Cosicchè in questa omografia alla curva  $\Gamma^4$ , la quale passa per  $L, M, N$ , tocca in questi punti rispettivamente le rette  $l, m, n$ , ha  $\lambda$  per piano iperosculatore in  $L$ , e passa per  $Q, Q_1$  corrisponderà la curva  $\Gamma^4$ . Dunque ogni modo di ordinare i piani  $\mu'\nu'\pi'$ , sì da soddisfare la (1), a causa della doppia scelta del punto che deve corrispondere a  $Q$ , dà luogo a due corrispondenze univoche fra i punti di  $\Gamma^4$  e  $\Gamma^4$  in cui  $L$  e  $L'$  sono punti corrispondenti, ed a  $\lambda\mu\nu\pi$  corrispondono  $\lambda'\mu'\nu'\pi'$  appunto in quell'ordine.

Si ha dunque la seguente proposizione:

*Date su due enniche ellittiche  $\Gamma^n, \Gamma^n$  normali di uno  $S_{n-1}$ , distinte o sovrapposte, due punti qualunque  $A, A'$ , si costruiscano gli altri punti di contatto  $BCD, B'C'D'$  delle curve  $\Gamma^n, \Gamma^n$  rispettivamente con le rigate razionali dell'ordine  $n-2$  individuate in ciascuna curva dalle tangenti in  $A, A'$ ; se  $m, m'$  sono due  $[n-3]$ , che si appoggiano rispettivamente a queste tangenti, saranno  $m(ABCD), m'(A'B'C'D')$  le tetradi di piani tangenti condotte da  $m, m'$  alle curve  $\Gamma^n, \Gamma^n$ . Supposto che sia:*

$$m(ABCD) \overline{\wedge} m'(A'B'C'D'), \quad (2)$$

*esisteranno due corrispondenze perfettamente determinate fra  $\Gamma^n$  e  $\Gamma^n$  in cui  $A$  ed  $A'$  ( $B$  e  $B', C$  e  $C', D$  e  $D'$ ) saranno punti corrispondenti e che saranno proiettate da  $m, m'$  secondo due fasci di  $[n-2]$  riferiti fra loro appunto nella proiettività (2).*

Se il gruppo  $m(ABCD)$  è armonico si avrà pure:

$$m(ABCD) \overline{\wedge} m'(A'B'D'C'),$$

e se il gruppo  $m(ABCD)$  è equianarmonico si avrà pure:

$$m(ABCD) \overline{\wedge} m'(A'C'D'B'), \quad m(ABCD) \overline{\wedge} m'(A'D'B'C'),$$

e quindi le curve ellittiche armoniche ed equianarmoniche si possono riferire fra loro in quattro ed in sei modi differenti. E perciò:

*Date su due curve ellittiche proiettive, distinte o sovrapposte, due punti qualunque come omologhi in una corrispondenza univoca fra i punti delle curve, il numero delle corrispondenze che restano individuate è due, se le curve non sono singolari, quattro se sono armoniche, sei se sono equianarmoniche* <sup>(1)</sup>.

## § 2. Discussione delle diverse corrispondenze univoche che possono aversi sopra una curva ellittica.

9. Pel caso in cui le due eniche sono sovrapposte possiamo pervenire al teorema del numero precedente anche nel seguente modo. Sia data una corrispondenza univoca sopra una curva  $\Gamma^n$  ellittica dell'ordine  $n$  normale di uno  $S_{n-1}$  (il che è sempre possibile, n.° 4); proiettiamola da un  $[n-3]_s$ ,  $m$  della curva e facciamo corrispondere nel fascio di  $[n-2]$ , che risulta, ad ogni  $[n-2]$  che incontri la curva in  $A, B$ , i due  $[n-2]$  che proiettano i punti  $A', B'$  ad essi omologhi nella corrispondenza; sarà nel fascio  $(m)$  individuata una corrispondenza  $(2, 2)$ , la quale avrà quattro  $[n-2]$  uniti, ciascuno dei quali o passa per una coppia di punti corrispondenti (in generale non involutoria) o per un punto unito o per due punti uniti della corrispondenza.

Qualora però si possa scegliere l' $[n-3]_s$  proiettante  $m$  in modo che si appoggi a due corde della curva  $\Gamma^n$ , l'una che congiunga due punti  $A, B$  e l'altra che congiunga i punti  $A', B'$  ad essi omologhi (come avviene, per es., quando  $A$  fosse un punto unito della corrispondenza ed  $m$  un qualunque  $[n-3]_s$ , che si appoggi alla tangente alla curva in  $A$ ; oppure come avviene quando  $A, B$  fossero due punti omologhi le cui tangenti si appoggino allo stesso  $[n-3]_s$ , oppure quando  $A, B$  fossero due punti uniti), allora a tutte le coppie di punti non omologhi giacenti in  $[n-2]$  proiettanti corrispondono (cfr. n.° 1) coppie di punti ad essi omologhi giacenti in  $[n-2]$  uscenti da  $m$ ; quindi gli  $[n-2]$  corrispondenti del fascio  $(m)$  formano una proiettività.

Nel fascio  $(m)$  si avranno solamente due  $[n-2]$  uniti, ciascuno dei quali o proietta una coppia di punti uniti, che può ridursi anche ad uno quando

<sup>(1)</sup> SEGRE, *Corrispondenze univoche*, loc. cit., n.° 4.

*Annali di Matematica*, tomo XIX.

$l'[n-2]$  è tangente alla curva, oppure proietta una coppia involutoria della corrispondenza.

In questo caso, qualunque sia la omografia che si ottiene, dovendo una coppia di punti infinitamente vicini della corrispondenza sulla curva avere per omologhi una coppia di punti pure infinitamente vicini, i quattro punti di contatto degli  $[n-2]$  tangenti del fascio  $(m)$  devono corrispondersi fra loro, e perciò nella omografia di  $[n-2]$  del fascio  $(m)$  i quattro  $[n-2]$  tangenti, che indicheremo con  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  devono formare una tetrade riferita proiettivamente a sè stessa.

10. Può accadere che ciascuno degli  $[n-2]$  tangenti  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  corrisponda a sè stesso, ed allora la omografia  $(m)$  è una identità e quindi la corrispondenza o è formata tutta di punti uniti, oppure è costituita dalla proiezione della curva su sè stessa fatta dall'  $[n-3]_s m$ , nel qual caso *le coppie di elementi corrispondenti sono tutte involutorie e sono riferite univocamente agli  $[n-2]$  del fascio, e perciò la corrispondenza è razionale. Essa avrà per punti uniti i quattro punti  $A, B, C, D$ , nei quali  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  toccano la curva.*

Viceversa: *Ogni corrispondenza univoca della curva  $\Gamma^n$  con quattro punti uniti, diversa dall'identità, è una proiezione della curva  $\Gamma^n$  su sè stessa fatta da infiniti suoi  $[n-3]_s$ .*

Infatti sia  $A$  un punto unito di una corrispondenza univoca  $\mathbf{C}$  di  $\Gamma^n$ , ed  $m$  uno  $[n-3]_s$  di  $\Gamma^n$  che si appoggia alla tangente in  $A$ ; proiettando da  $m$  questa corrispondenza si avrà in  $(m)$  una omografia binaria di  $[n-2]$ , che avrà oltre  $l'[n-2]$  unito  $mA$ , per  $[n-2]$  uniti quelli che passano per gli altri tre punti uniti della corrispondenza, e quelli possono essere almeno due; perciò l'omografia avrà almeno tre  $[n-2]$  uniti, e quindi è una identità e la corrispondenza  $\mathbf{C}$  non è che la proiezione della curva  $\Gamma^n$  fatta da  $m$  su sè stessa. Indicheremo una qualunque di queste corrispondenze razionali ed involutorie con la lettera  $\mathbf{J}$ .

*Una  $\mathbf{J}$  è individuata da una coppia di elementi corrispondenti  $AA'$ . Difatti la corda  $AA'$  determina la varietà di  $\infty^{n-3} [n-3]_s$  che ad essa si appoggiano e quindi la rigata  $M_2^{n-2}$  le cui generatrici individuano sulla curva tutte le altre coppie.*

11. Se la tetrade  $\alpha\beta\gamma\delta$  non è singolare può aversi solamente:

$$\alpha\beta\gamma\delta \overline{\wedge} \beta\alpha\delta\gamma \overline{\wedge} \gamma\delta\alpha\beta \overline{\wedge} \delta\gamma\beta\alpha.$$

Ognuna di queste tre proiettività fa corrispondere in doppio modo delle coppie di  $[n-2]$  della omografia  $(m)$ ; quindi la omografia  $(m)$  è involutoria. Ve-

dremo in seguito (n.° 20) che le corrispondenze stesse sono *involutorie* e che esse sono prive di punti uniti: queste involuzioni si dicono *involuzioni fondamentali* delle curve ellittiche; noi le indicheremo con **F**.

Oltre di queste due specie di corrispondenze involutorie non ve ne possono essere altre; perchè, se vi fosse una corrispondenza involutoria che avesse almeno un punto unito  $A$ , proiettandola da un  $[n-3]_s$  sulla curva in modo che  $A$  si proietti in un punto singolare della curva, si avrebbe una corrispondenza contenuta in una collineazione dello  $S_{n-1}$ ; la quale dovrebbe essere pure involutoria e quindi il suo asse che passa per  $A$  determinerebbe nell'incontro con  $\Gamma^n$  altri tre punti uniti e perciò la corrispondenza involutoria sarebbe una **J**.

12. Se la tetrade  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  è *equianarmonica*, oltre alle proiettività dette (10, 11), si avrebbe:

$$\alpha\beta\gamma\delta \overline{\wedge} \alpha\gamma\delta\beta \overline{\wedge} \alpha\delta\beta\gamma,$$

se  $\alpha$  è un  $[n-2]$  unito, ed altre analoghe se fossero uniti o  $\beta$ , o  $\gamma$ , o  $\delta$ .

Ognuna di queste proiettività è ciclica del 3.° ordine; quindi la corrispondenza **C** sulla curva  $\Gamma^n$  deve essere essa stessa ciclica del 3.° ordine, oppure del 6.° ordine.

La omografia ( $m$ ) avrà oltre  $\alpha$  un altro  $[n-2]$  unito, che determina nella corrispondenza **C** della curva o due altri punti uniti, oppure una coppia di punti che si corrispondono in doppio modo. Il cubo della corrispondenza **C** determina nell'omografia ( $m$ ) l'identità, e quindi **C**<sup>3</sup> deve essere l'identità, oppure una **J**: perchè fosse identità gli altri due punti d'intersezione del secondo  $[n-2]$  unito con la curva devono essere punti uniti della corrispondenza; perchè possa essere una **J**, quei punti debbono essere fra loro coniugati. Cosicchè la corrispondenza ciclica del 3.° ordine ha tre punti uniti, quella del 6.° ordine ha un sol punto unito, una coppia involutoria, ed un ciclo del 3.° ordine. Indicheremo queste corrispondenze singolari rispettivamente con le lettere **T** ed **S**.

13. Se la tetrade  $\alpha\beta\gamma\delta$  è *armonica*, oltre alle proiettività dette in 10 e 11, potrà aversi:

$$\alpha\beta\gamma\delta \overline{\wedge} \alpha\beta\gamma\delta \overline{\wedge} \beta\alpha\gamma\delta,$$

oppure:

$$\alpha\gamma\beta\delta \overline{\wedge} \gamma\beta\delta\alpha, \quad \alpha\delta\beta\gamma \overline{\wedge} \delta\beta\gamma\alpha.$$

Le prime due proiettività hanno una coppia  $\alpha\beta$  o  $\gamma\delta$  che si corrisponde in doppio modo; quindi sono involuzioni iperboliche che hanno per elementi uniti,

gli elementi dell'altra coppia  $\gamma\delta$  o  $\alpha\beta$ ; perciò la corrispondenza della curva che è proiettata da questa involuzione ha due punti uniti, ed una coppia involutoria: e poichè il suo quadrato è proiettato da  $m$  secondo la identità, senza che essa stessa possa essere identità (chè altrimenti la corrispondenza sarebbe involutoria), la corrispondenza deve essere ciclica del 4.° ordine.

Le seconde due proiettività sono cicliche del 4.° ordine, quindi le corrispondenze potrebbero essere cicliche del 4.° ordine o cicliche dell'8.° ordine, ed avrebbero nei due  $[n - 2]$  uniti dell'omografia ciclica ( $m$ ) o due coppie involutorie o una coppia involutoria ed una coppia di punti uniti, non potendo avere tutti e quattro i punti uniti.

Ma ciclica dell'8.° ordine non può essere, perchè la sua quarta potenza, che è proiettata da  $m$  secondo l'identità di  $[n - 2]$ , avendo altri punti uniti, oltre i punti di contatto di  $\alpha\beta\gamma\delta$  colla curva, deve essere essa stessa identità. Può dunque questa corrispondenza essere solamente ciclica del 4.° ordine. Il suo quadrato è proiettato da  $m$  secondo una involuzione quadratica, ed esso stesso, avendo per punti uniti i quattro punti contenuti negli  $[n - 2]$  uniti della omografia, è una involuzione razionale **J**, che ha per coppie di punti le coppie di punti di contatto degli  $[n - 2]$   $\alpha\beta, \gamma\delta$ .

Queste corrispondenze si aggruppano con quelle ottenute dalle due precedenti proiettività, e noi le indicheremo in seguito con la lettera **Q**.

14. Se **C** è una corrispondenza qualsiasi di  $\Gamma^n$  singolare o non, e **J** una qualunque delle corrispondenze razionali di  $\Gamma^n$ , diversa da quella il cui sistema di assi possa proiettare la **C** secondo una omografia di  $[n - 2]$ , proiettando da uno  $m$  degli  $[n - 3]_s$  di proiezione della **J**, tanto la **J** che la **C**, si avranno in ( $m$ ) sovrapposte una identità ed una corrispondenza (2, 2). I quattro  $[n - 2]$  uniti della corrispondenza (2, 2) proiettano o un punto unito di **C** o una coppia comune a **J** ed a **C**; quindi se gli elementi uniti di **C** sono  $k$ , le coppie comuni a **C** ed a **J** sono  $4 - k$ . Cioè:

*Le coppie di punti corrispondenti comuni a una corrispondenza univoca di  $\Gamma^n$  con  $k$  punti uniti ed a una corrispondenza razionale **J** sono  $4 - k$ .*

*E viceversa; se le coppie comuni ad una **C** ed una **J** sono  $4 - k$ , i punti uniti di **C** sono  $k$ .*

Teniamo inoltre presente che se **C**, **C**<sub>1</sub> sono due corrispondenze univoche sovrapposte, esse hanno tante coppie di elementi corrispondenti comuni, quanti sono i punti uniti del prodotto **C****C**<sub>1</sub><sup>-1</sup> o del prodotto **C**<sup>-1</sup>**C**<sub>1</sub>.

Applicando a due corrispondenze razionali **J**, poichè esse non possono avere coppie comuni, chè altrimenti coincidono, ne segue che:

*Il prodotto di due involuzioni razionali è una corrispondenza priva di punti uniti.*

Moltiplicando dunque una data corrispondenza razionale **J** per un'altra corrispondenza razionale **J** variabile si hanno infinite corrispondenze, prive di punti uniti; indicheremo una qualunque di queste corrispondenze col simbolo **E**. Vedremo (n.º 20) che le involuzioni fondamentali **F** fanno parte di questo sistema di corrispondenze.

15. Riepilogando e ricordando il n.º 8: *Sopra una curva ellittica qualsiasi si hanno sempre due sistemi di corrispondenze univoche; le involuzioni razionali **J**, le quali possono essere proiettate secondo una identità di  $[n-2]$ , o secondo una involuzione quadratica di  $[n-2]$ , e le corrispondenze prive di punti uniti **E**, che sono sempre proiettate secondo una corrispondenza  $(2, 2)$  ad eccezione di tre fra esse, le involuzioni fondamentali **F**, che possono essere proiettate in infiniti modi secondo una involuzione quadratica di  $[n-2]$ . Sulle curve armoniche, oltre questi due sistemi di corrispondenze vi sono due altri sistemi di corrispondenze **Q** cicliche del 4.º ordine, l'uno inverso dell'altro, che possono essere proiettate secondo una involuzione di  $[n-2]$ , oppure secondo una omografia ciclica del 4.º ordine. Sulle curve equianarmoniche, oltre le corrispondenze **J** ed **E**, vi sono quattro altri sistemi di corrispondenze singolari, a due a due inversi fra loro, dei quali una coppia sono di corrispondenze **T** cicliche del 3.º ordine, ed un'altra di corrispondenze **S** cicliche del 6.º ordine. Eccetto le involuzioni razionali **J**, tutte le altre corrispondenze sono ellittiche <sup>(1)</sup>.*

(1) Se per rappresentare ogni punto di una curva ellittica di ordine  $n$ , si fa uso dell'integrale ellittico di 1.ª specie, di periodi  $\omega, \omega'$ , disteso sulla curva a partire da un punto singolare sino a quel punto, le corrispondenze univoche razionali **J** sono rappresentate dalla relazione:

$$w' \equiv -u + C, \quad (1)$$

ove  $C$  è una costante qualunque; le corrispondenze univoche **E** sono rappresentate dalla relazione:

$$u' \equiv +u + C. \quad (2)$$

Sulle curve ellittiche armoniche i due sistemi di corrispondenze singolari **Q** sono rappresentati dalle relazioni:

$$u' \equiv iu + C \quad (3)$$

$$u' \equiv -iu + C. \quad (4)$$

ove  $i$  rappresenta la radice quarta dell'unità,  $\sqrt{-1}$ .

Sulle curve ellittiche equianarmoniche i due sistemi di corrispondenze **T** cicliche del

### § 3. Proprietà del gruppo di corrispondenze univoche non singolari delle curve ellittiche.

16. Dati due  $[n-3]_s$ ,  $m$ ,  $m'$  della curva  $\Gamma^n$  le generatrici delle due rigate dell'ordine  $n-2$   $M_2^{n-2}$ ,  $M_2'^{n-2}$  che passano per ogni punto  $A_1$  della curva segano la curva in due altri punti  $A$ ,  $A'$ , che sono punti corrispondenti di una corrispondenza ellittica  $\mathbf{E}$ .

Difatti, indicando con  $\mathbf{J}(AA_1)$  la involuzione razionale individuata dalla coppia di punti  $AA_1$ , il prodotto

$$\mathbf{J}(AA_1)\mathbf{J}(A, A') \equiv \mathbf{E}(A A').$$

Dalla quale relazione si ricava ancora:

$$\mathbf{J}(AA_1)\mathbf{E}(A A')\mathbf{J}(AA_1) \equiv \mathbf{J}(A, A')\mathbf{J}(AA_1) \equiv \mathbf{E}(A' A),$$

e questa mostra che ogni corrispondenza  $\mathbf{E}$  è trasformata nella sua inversa  $\mathbf{E}^{-1}$  da qualunque corrispondenza razionale  $\mathbf{J}$ .

E quindi, se si tien fissa la coppia  $AA'$ , al variare di  $m$ , essa sarà proiettata sulla curva in coppie  $B'B$ ,  $C'C$ , ... di punti corrispondenti della  $\mathbf{E}^{-1}$ ; cioè saranno  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ , ..., tutte le coppie della corrispondenza  $\mathbf{E}$ .

Da ciò si ha il seguente teorema:

*Una  $\mathbf{E}$  è individuata da una sua coppia. E quindi;*

*Ogni  $\mathbf{E}$  è in infiniti modi il prodotto di due  $\mathbf{J}$ ; poichè ogni punto arbitrario  $A_1$  della curva  $\Gamma^n$  determina con  $AA'$  rispettivamente le due involuzioni  $\mathbf{J}(AA_1)$ ,  $\mathbf{J}(A, A')$  che dànno per prodotto quella corrispondenza  $\mathbf{E}(AA')$ .*

17. Volendo distinguere fra loro le corrispondenze di uno stesso sistema, apporremo al simbolo adottato un indice diverso. Essendo  $\mathbf{J}\mathbf{J}_1 \equiv \mathbf{E}$ , si ha pure  $\mathbf{J}\mathbf{E} \equiv \mathbf{J}_1$ , ovvero  $\mathbf{E}\mathbf{J}_1 \equiv \mathbf{J}$ , e quindi:

3.º ordine, inversi fra loro, sono rappresentati dalle relazioni:

$$u' \equiv \alpha u + C \quad (5)$$

$$u' \equiv \alpha^2 u + C, \quad (6)$$

ove  $\alpha$  rappresenta una radice terza dell'unità; e i due sistemi di corrispondenze  $\mathbf{S}$  cicliche del 6.º ordine sono rappresentati da:

$$u' \equiv -\alpha u + C \quad (7)$$

$$u' \equiv -\alpha^2 u + C. \quad (8)$$

Oltre di questi sistemi di corrispondenze non ve ne sono altri (vedi KLEIN, *Mathematische Annalen*, Bd. 15, pag. 279; SEGRE, *Corrispondenze univoche*, loc. cit., pag. 4).

Il prodotto di una corrispondenza razionale  $J$  per una corrispondenza ellittica  $E$ , o di una  $E$  per una  $J$  è una corrispondenza razionale  $J$ .

Si ha pure  $J_1 J_2 J_3 \equiv J$ ,  $J_1 J_2 J_3 J_4 \equiv E$ ,  $E_1 E_2 \equiv E$ , ecc.; cioè:

Il prodotto di un numero pari di corrispondenze razionali è una corrispondenza univoca  $E$ ; il prodotto di un numero dispari di corrispondenze razionali è pure una corrispondenza razionale; il prodotto di due o più corrispondenze ellittiche  $E$  è pure una corrispondenza ellittica  $E$ .

Si ha infine: Il prodotto di più corrispondenze razionali  $J$  e di più corrispondenze ellittiche  $E$  è una  $J$  oppure una  $E$ , secondo che il numero dei fattori  $J$  compresi nel prodotto è dispari o pari (WEYR, Ueber, etc., loc. cit., n.° 15).

Difatti sia il prodotto:

$$\underbrace{EE\dots E}_{k \text{ volte}} \underbrace{JJ\dots J}_{i \text{ volte}} \underbrace{EE\dots E}_{k' \text{ volte}} \underbrace{JJ\dots J}_{i' \text{ volte}} \underbrace{EE\dots E}_{k'' \text{ volte}} \underbrace{JJ\dots J}_{i'' \text{ volte}}$$

ove per semplicità abbiamo trascurato gl'indici per distinguere le diverse corrispondenze; esso è equivalente, pel teorema precedente, a

$$\underbrace{EJJ\dots J}_{i \text{ volte}} \underbrace{EJJ\dots J}_{i' \text{ volte}} \underbrace{EJJ\dots J}_{i'' \text{ volte}}$$

il quale è pure equivalente a

$$\underbrace{J_1 J_1 \dots J_1}_{i \text{ volte}} \underbrace{J_2 J_2 \dots J_2}_{i' \text{ volte}} \underbrace{J_3 J_3 \dots J_3}_{i'' \text{ volte}} \equiv J_{\Sigma i}$$

e quindi è una  $J$  o una  $E$  secondo che  $\Sigma i$  è dispari o pari.

18. Se  $J_1, J_2$  sono due assegnate corrispondenze razionali sarà il prodotto:

$$J_1 J_1 J_2 \equiv J_2,$$

cioè equivalente ad un'altra corrispondenza razionale  $J_2$ , la quale è la trasformata di  $J_1$  mediante  $J_2$ ; quindi:

Proiettando una involuzione razionale  $J_1$  da uno  $[n-3]_s$   $p$  sulla curva si ha un'altra involuzione razionale  $J_2$ ; oppure: se più coppie di punti di una curva ellittica  $\Gamma^n$  sono contenute in  $[n-2]$  che passano per un medesimo  $[n-3]_s$   $m$  della curva, queste saranno proiettate sulla curva da un  $[n-3]_s$   $p$  in coppie di punti, che sono pure contenute in  $[n-2]$  che passano per un altro  $[n-3]_s$   $m'$  della curva.

I punti uniti della  $J_1$  devono essere proiettati nei punti uniti della  $J_2$ , e quindi:

Proiettando da un  $[n - 3]_s$  della curva i punti di contatto di una rigata razionale di ordine  $n - 2$  si hanno sulla curva quattro punti, le cui tangenti appartengono ad una medesima rigata razionale di ordine  $n - 2$ , in generale diversa dalla prima.

La corrispondenza  $\mathbf{J}_1$  può essere proiettata nella corrispondenza  $\mathbf{J}_2$  in quattro modi differenti, e quindi vi sono quattro diversi sistemi di  $[n - 3]_s$ , che proiettano le coppie di punti contenute in  $[n - 2]$  con  $m$ , nelle coppie di punti contenute in  $[n - 2]$  con  $m'$ .

Se  $A, B, C, D$  sono i punti uniti di  $\mathbf{J}_1$  e si suppone che la  $\mathbf{J}$  trasformi l'elemento unito  $A$  in uno qualunque degli altri tre, la  $\mathbf{J}_1$  sarà trasformata in sè stessa. E perciò: una corrispondenza razionale  $\mathbf{J}_1$  può essere proiettata in sè stessa da tre diversi sistemi di  $[n - 3]_s$ , cioè da quelli che si appoggiano alle tre corde che congiungono uno dei punti uniti di  $\mathbf{J}_1$  agli altri tre.

19. Se  $AA', BB'$  sono due coppie di una corrispondenza  $\mathbf{E}$ , le corde  $AB', A'B$  sono generatrici di una medesima rigata razionale  $M_2^{n-2}$ . Difatti, la corrispondenza razionale  $\mathbf{J}$ , individuata dalla coppia  $AB'$ , deve trasformare  $\mathbf{E}$  nella sua inversa  $\mathbf{E}^{-1}$ , e poichè già trasforma  $A$  in  $B'$ , dovrà trasformare  $A'$  in  $B$ ; quindi  $A'B$  è una seconda coppia di  $\mathbf{J}(AB')$ . Da ciò si ricava che ogni  $[n - 2]_s$  che passa per la corda  $AB'$  determina sulla curva un  $[n - 3]_s$  che sta in un altro  $[n - 2]$  insieme alla corda  $A'B$ . E si può anche dire:

Se  $AA', BB'$  sono due coppie qualunque di una corrispondenza univoca  $\mathbf{E}$ , gli  $[n - 2]$  che passano per un  $[n - 4]_s$  e rispettivamente per le corde  $AB', A'B$  si segano ulteriormente in un altro punto della curva, e quindi hanno in comune un  $[n - 3]_s$  della curva.

Per questa proprietà la corrispondenza ellittica  $\mathbf{E}_1$ , che è individuata dalla coppia di punti  $AB$ , avrà pure per coppia di punti omologhi  $A'B'$ ; quindi ciascuna delle due corrispondenze  $\mathbf{E}, \mathbf{E}_1$  trasforma l'altra in sè stessa, ed il loro prodotto è commutativo; si ha cioè:

$$\mathbf{E}^{-1}\mathbf{E}, \mathbf{E} \equiv \mathbf{E}_1, .$$

Il prodotto di un numero qualunque di corrispondenze ellittiche  $\mathbf{E}$  è sempre commutativo.

Dalla costruzione delle corrispondenze ellittiche  $\mathbf{E}$  risulta pure:

Se un punto della corrispondenza ellittica  $\mathbf{E}$  è unito, tutti i suoi punti sono uniti, e la  $\mathbf{E}$  è una identità.

20. Sia  $AA'$  la coppia che individua la corrispondenza  $\mathbf{E}$ ; proiettandola da uno degli  $[n - 3]_s$  che si appoggiano alla tangente in  $A'$ , se si indica

con  $A''$  la proiezione di  $A$  sulla curva, sarà  $A'A''$  un'altra coppia di  $\mathbf{E}$ , e quindi  $AA'A''$  sono elementi che si corrispondono successivamente in  $\mathbf{E}$ . Se le tangenti in  $A, A'$  si appoggiano al medesimo sistema di  $[n-3]_s$  della curva, con la costruzione precedente si troverebbe che  $A''$  coincide con  $A$ , cioè che la coppia  $AA'$  è involutoria. Applicando in tal caso la costruzione della corrispondenza  $\mathbf{E}$ , data nel n.º 16, ogni altra coppia  $BB'$  che da essa si ottiene deve pure essere involutoria. Dunque:

*Se gli elementi che individuano una  $\mathbf{E}$  sono punti di contatto di una medesima rigata razionale  $M_2^{n-2}$  colla curva  $\Gamma^n$ , questa coppia è involutoria, e tutte le coppie della corrispondenza  $\mathbf{E}$  sono involutorie.*

E siccome al punto  $A$  si possono far corrispondere ciascuno dei tre altri punti di contatto della curva  $\Gamma^n$  con la rigata  $M_2^{n-2}$  che la tocca in  $A$ , possiamo concludere ciò che abbiamo affermato al n.º 14, che *al sistema delle corrispondenze ellittiche  $\mathbf{E}$  appartengono le tre involuzioni fondamentali  $\mathbf{F}$  della curva  $\Gamma^n$  (4).*

Se  $A, B, C, D$  sono i quattro punti di contatto della curva con la rigata razionale  $M_2^{n-2}$  le tre involuzioni fondamentali sono  $\mathbf{F}(AB), \mathbf{F}(AC), \mathbf{F}(AD)$ , e per ciascuna di esse un'altra coppia è data dai rimanenti punti di contatto (n.º 11 e 18); quindi *ciascuna delle tre involuzioni fondamentali è il prodotto delle altre due.*

21. Se  $AA', BB'$  sono coppie di una  $\mathbf{F}$  non solamente le coppie  $AB', A'B$  appartengono ad una medesima corrispondenza razionale  $\mathbf{J}$  che trasforma la  $\mathbf{F}$  in sè stessa, ma anche (per la corrispondenza in doppio modo della coppia  $BB'$ )  $AB, A'B'$  appartengono ad un'altra corrispondenza  $\mathbf{J}$ , che trasforma la  $\mathbf{F}$  in  $\mathbf{F}$ . Quindi:

*Ogni involuzione fondamentale  $\mathbf{F} \equiv AA', BB'$  è trasformata in sè stessa da tutte le involuzioni razionali del tipo  $(AB', A'B)$ , e del tipo  $(AB, A'B')$ . Ovvero:*

(4) Dalla relazione che rappresenta il sistema delle corrispondenze  $\mathbf{E}$  si ottengono le tre involuzioni fondamentali quando alla costante si attribuiscono gli speciali valori:

$$\frac{\omega}{2}, \quad \frac{\omega'}{2}, \quad \frac{\omega + \omega'}{2};$$

ove  $\omega, \omega'$  rappresentano i periodi delle funzioni ellittiche, e quindi esse sono rappresentate da:

$$u' = u + \frac{\omega}{2}, \quad u' = u + \frac{\omega'}{2}, \quad u' = u + \frac{\omega + \omega'}{2}.$$

Due coppie  $AA', BB'$  di una corrispondenza ellittica  $\mathbf{E}$  individuano una involuzione razionale  $\mathbf{J} \equiv AB', A'B$  che trasforma la  $\mathbf{E}$  nella sua inversa; e due coppie  $AA', BB'$  di una  $\mathbf{F}$  individuano due corrispondenze razionali  $\mathbf{J} \equiv AB', A'B$   $\mathbf{J}_1 \equiv AB, A'B'$  che la trasformano in sè stessa.

22. Il sistema delle corrispondenze  $\mathbf{E}$  insieme all'identità ed alle tre involuzioni fondamentali, ed il sistema delle corrispondenze razionali involutorie  $\mathbf{J}$ , sono legati fra loro dalle seguenti relazioni:

Ogni  $\mathbf{E}$  trasforma un'altra  $\mathbf{E}_1$  nella stessa  $\mathbf{E}_1$ . Ogni  $\mathbf{J}$  trasforma una  $\mathbf{E}$  nella sua inversa, e trasforma una  $\mathbf{F}$  in sè stessa; ogni  $\mathbf{E}$  trasforma una  $\mathbf{J}$  in un'altra  $\mathbf{J}$ , e solamente la  $\mathbf{F}$  e la identità trasformano ciascuna  $\mathbf{J}$  nella stessa  $\mathbf{J}$ .

Perciò possiamo dire che il sistema delle  $\mathbf{E}$  ed il sistema delle  $\mathbf{J}$  sono per le curve ellittiche ciò che sono per le curve razionali un fascio di omografie unite e un fascio di involuzioni armoniche ad esse <sup>(1)</sup>.

Tutte le corrispondenze  $\mathbf{E}$  ed  $\mathbf{J}$  formano un gruppo, di cui un sottogruppo infinito è quello formato dalle sole  $\mathbf{E}$ , e di questo un sottogruppo finito è quello formato dalle tre involuzioni fondamentali  $\mathbf{F}$  <sup>(2)</sup>.

#### § 4. Teoremi diversi.

23. Se  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  è un  $n$ -gono gobbo semplice inscritto in  $\Gamma^n$  ed  $A'_1, A'_2, A'_3, \dots, A'_n$  sono i punti d'incontro della curva con gli  $[n-2]$   $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  opposti ad  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , saranno  $A_1A'_1, A_2A'_2, A_3A'_3, \dots, A_nA'_n$  coppie di punti omologhi di una medesima  $\mathbf{E}$  <sup>(3)</sup>.

Difatti proiettando la coppia  $A_1A'_1$ , che individua la  $\mathbf{E}$ , dall' $[n-3]$  individuato dai vertici  $A_3, A_4, \dots, A_n$  dell' $n$ -gono inscritto in  $\Gamma^n$  sulla curva, si hanno gli  $[n-2]$   $\alpha_2, \alpha_1$ , i quali segano la curva in  $A'_2A_2$ , e quindi sarà  $A_2A'_2$  un'altra coppia di  $\mathbf{E}$ ; così si ragionerebbe per tutte le altre coppie.

Il primo  $n$ -gono è circoscritto al secondo.

Oppure, facendo uso della rappresentazione parametrica (n.° 15, nota), se  $u_1, u_2, \dots, u_n$  sono i parametri degli  $n$  punti  $A_1, A_2, \dots, A_n$  ed  $u'_1, u'_2, \dots, u'_3$

(1) Vedi le mie *Lezioni sulle omografie binarie*, 2.<sup>a</sup> edizione. Napoli, Pellerano, 1889.

(2) Questi teoremi si possono tradurre in altrettanti teoremi sulle rigate individuate dalle corrispondenze ellittiche  $\mathbf{E}$ . (Vedi n.° 26.)

(3) Questo teorema è stato enunciato solo per  $n=3$  dal WEYR, loc. cit.

i parametri degli  $n$  punti  $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$ , si deve avere, come è noto,

$$\left. \begin{aligned} u_2 + u_3 + \dots + u_n &\equiv -u'_1 \\ u_1 + u_3 + \dots + u_n &\equiv -u'_2 \\ \dots &\dots \\ u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} &\equiv -u'_n; \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

da cui si ricava

$$u_i = u'_i + C \quad \left( i = 1, 2, \dots, n, \quad C = \frac{u'_1 + u'_2 + \dots + u'_n}{n-1} \right). \quad (2)$$

24. Se  $A_1 A'_1$  sono elementi di una coppia di una  $\mathbf{F}$ , anche  $A_2 A'_2, A_3 A'_3, \dots, A_n A'_n$  sono coppie della medesima  $\mathbf{F}$ . In tal caso deve aversi:

$$\frac{u'_1 + u'_2 + \dots + u'_n}{n-1} \equiv \frac{P}{2} \quad (P \equiv \omega, \omega', \omega + \omega'),$$

e quindi

$$u'_1 + u'_2 + \dots + u'_n = \frac{n-1}{2} P.$$

Perciò; se  $n$  è dispari, gli  $n$  punti  $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$  stanno in un  $[n-2]$ ; se  $n$  è pari, non stanno in un  $[n-2]$ ; ed allora trasformando le (1) mediante le (2) si ha pure:

$$u'_2 + u'_3 + \dots + u'_n = -u_1, \text{ ecc.},$$

cioè l'ennagono  $A'_1 A'_2 \dots A'_n$  è pure circoscritto all'ennagono  $A_1 A_2 \dots A_n$ . Si ha quindi il teorema:

*In una curva ellittica normale  $\Gamma^n$  di ordine pari gli  $n$  punti, che corrispondono ad  $n$  punti presi ad arbitrio sulla curva  $\Gamma^n$  in una involuzione fondamentale  $\mathbf{F}$ , formano un  $n$ -gono gobbo semplice inscritto e circoscritto a quello formato dai primi punti.*

In particolare per  $n = 4$ .

*Quattro punti presi ad arbitrio sopra una curva ellittica normale del 4.º ordine ed i loro coniugati in una qualunque delle tre involuzioni fondamentali sono vertici di due tetraedri di MÖBIUS.*

Sempre nell'ipotesi di  $n$  pari, indicando con  $A''_1, A''_2 \dots A''_n, A'''_1, A'''_2 \dots A'''_n$ , i coniugati dei medesimi punti  $A_1, A_2 \dots A_n$  nelle altre due involuzioni fondamentali, i quattro ennagoni gobbi che risultano sono a due a due inscritti e circoscritti l'uno all'altro, e quindi il precedente teorema si completa nel modo seguente:

Se  $A_1 \dots A_n$  sono  $n$  punti presi ad arbitrio sopra una curva ellittica normale di ordine pari, ed  $A'_1 \dots A'_n$ ,  $A''_1 \dots A''_n$ ,  $A'''_1 \dots A'''_n$  sono i loro rispettivi coniugati nelle tre involuzioni fondamentali, questi gruppi di punti sono vertici di quattro  $n$ -goni, che a due a due formano sei coppie di  $n$ -goni circoscritti ed inscritti l'uno all'altro.

25. Ritornando ad  $n$  qualunque, se i punti  $A_1 A'_1$  sono punti coniugati di una involuzione fondamentale  $F$ , e per essi tiriamo due corde che si appoggiano ad un medesimo  $[n-3]_s$ , questi incontrano la curva nei punti  $A_2 A'_2$  di un'altra coppia della  $F$  ed anche le corde  $A_1 A_2$ ,  $A'_1 A'_2$  si appoggeranno ad un sistema di  $[n-3]_s$  della curva (n.º 21). Abbiamo cioè due sistemi di  $\infty^{n-3} [n-3]_s$  individuati dalle corde  $A_1 A_2$ ,  $A_1 A'_2$ . Per un  $[n-4]_s$   $p$  della curva passa un  $[n-3]_s$  del primo ed uno del secondo sistema i quali segano la curva ulteriormente in due punti  $A_3 A'_3$  che sono punti di una coppia di  $F$ , perchè gli  $[n-2]_s$   $p A_1 A_2 A_3$ ,  $p A_1 A'_2 A'_3$  passano per l' $[n-3]_s$   $p A_1$  e proiettano la coppia  $A_2 A'_2$  sulla curva in  $A_3 A'_3$ . Cosicchè per ogni  $[n-4]_s$  arbitrario si individua una coppia  $A_r A'_r$  di  $F$ .

Quindi se indichiamo con  $A_4 A_5 \dots A_n$  gli  $n-3$  punti della curva  $\Gamma^n$  che individuano l' $[n-4]_s$  saranno  $A_3 A_4 A_5 \dots A_n$ ,  $A'_3 A'_4 A'_5 \dots A'_n$  i due  $[n-3]_s$  dei due sistemi; scambiando ora, in questi gruppi di punti, l'indice 3 rispettivamente con 4, 5, ...  $n$ , si ha che presi gli  $n-2$  punti  $A_3 A_4 \dots A_n$  che insieme ad  $A_1 A_2$  stanno in uno stesso  $[n-2]_s$ , se, per i gruppi che si ottengono escludendo ogni volta un vertice  $A_r$ , si fa passare un  $[n-3]_s$  che si appoggi alla corda  $A_1 A'_2$ , e quindi anche ad  $A_2 A'_1$ , questo segherà la curva nell'elemento  $A'_r$  coniugato di  $A_r$  nella stessa involuzione fondamentale  $F$ . E quindi:

$n-1$  coppie arbitrarie di una involuzione fondamentale  $F$ ,  $A_1 A'_1$ ,  $A_2 A'_2 \dots$ ,  $A_r A'_r, \dots A_{n-1} A'_{n-1}$ , individuano una  $n$ .<sup>ma</sup> coppia  $A_n A'_n$ , la quale è la proiezione di ciascuna delle coppie precedenti dall' $[n-3]_s$  individuato da  $n-2$  punti presi da tutte le rimanenti  $n-2$  coppie uno in ciascuno; oppure: scelti ad arbitrio  $n-3$  elementi fra gli elementi delle  $n-1$  coppie, ma in modo che due non siano coniugati, e conducendo per essi gli  $[n-3]_s$  che si appoggiano alle corde, che congiungono un punto  $A_r$  di una delle due rimanenti ai punti  $A_s$ ,  $A'_s$  dell'altra, questi segano la curva nella  $n$ .<sup>ma</sup> coppia.

Ovvero altrimenti:

$n-1$  coppie di una involuzione fondamentale  $F$ ,  $A_1 A'_1$ ,  $A_2 A'_2$ ,  $A_3 A'_3, \dots$ ,  $A_{n-1} A'_{n-1}$ , individuano una  $n$ .<sup>ma</sup> coppia  $A_n A'_n$  tale che, scelti ad arbitrio  $n-3$  punti fra gli elementi delle coppie, ma in modo che due non siano coniugati,

$l'[n-3]_s$  che passa per essi e si appoggia alla corda che congiunge un punto  $A_r$  di una delle due rimanenti coppie ad un punto  $A_s$  dell'altra, e  $l'[n-3]_s$  che passa per gli elementi coniugati di quelli e si appoggia alla corda  $A_r A'_s$  si segano ulteriormente in un punto della  $n^{\text{ma}}$  coppia. Se il primo  $[n-3]_s$  si appoggia ad  $A_r A'_s$  ed il secondo ad  $A_r A_s$ , questi si segano nel punto della curva coniugato al precedente nella corrispondenza  $F$ .

Per  $n=4$  si ha in particolare:

Se  $A_1 A'_1, A_2 A'_2, A_3 A'_3$  sono tre coppie di una involuzione fondamentale di una quartica gobba ellittica, queste ne individuano una quarta  $A_4 A'_4$ , la quale è la proiezione di ognuna delle coppie date da una corda che congiunge due punti non coniugati delle altre due coppie; ovvero è la intersezione della curva con le corde che passano per  $A_3$  (o per  $A'_3$ ) e sono direttrici delle rigate razionali di ordine  $n-2$  individuate da  $A_1 A_2, A_1 A'_2$ ; e finalmente la corda direttrice della rigata razionale individuata da  $A_1 A_2$  che passa per  $A_3$ , e quella della rigata individuata da  $A_1 A'_2$  che passa per  $A'_3$  si segano in un punto della coppia  $A_4 A'_4$ .

26. L'ordine della rigata, le cui generatrici congiungono i punti omologhi di una corrispondenza ellittica  $E$ , si può ottenere dal numero delle generatrici che si appoggiano ad un  $[n-3]_s$  della curva. Se questo ha comune colla curva i punti  $P_1, P_2, \dots, P_{n-2}$ , ad esso si appoggiano le rette che congiungono i punti  $P_i$  ( $i=1, 2, \dots, n-2$ ) ai loro corrispondenti nella  $E$  e nella inversa  $E^{-1}$ , ed inoltre le rette che congiungono le quattro coppie comuni alla corrispondenza  $E$  ed alla  $J$  di cui quell' $[n-3]_s$  è un elemento di proiezione. Quindi: *La superficie rigata  $K_2^{2n}$  formata dalle congiungenti, i punti omologhi di una corrispondenza ellittica  $E$  è dell'ordine  $2n$ .*

Questo numero si riduce alla metà quanto si tratta di una delle tre involuzioni fondamentali. Poichè le corde che congiungono i punti comuni all' $[n-3]_s$  ed alla curva  $\Gamma^n$  coi loro corrispondenti si riducono ad  $n-2$ , e la involuzione quadratica secondo cui è proiettata la  $F$  ha solamente due  $[n-2]$  doppi, e quindi vi sono solo altre due generatrici che si appoggiano all' $[n-3]_s$  di proiezione fuori della curva. Perciò: *le rigate individuate dalle tre involuzioni fondamentali sono dell'ordine  $n$*  <sup>(1)</sup>.

(1) Delle rigate individuate dalle corrispondenze sulle curve ellittiche hanno a lungo trattato il sig. SEGRE (Atti R. Acc. di Torino, vol. 21, e Math. Ann., Bd. 24) ed in particolare, per  $n=4$ , HARNACK (*Ueber Darstellung der Raumcurve 4.0, 1. S. und ihres Sekantensystem durch doppelt periodische Funktionen* (Math. Ann., Bd. 12, pag. 72) e per  $n=3$  (WEYR, *Ueber*, etc., loc. cit.).

### § 5. Poligoni inscritti in $\Gamma^n$ .

27. Siano  $1, 2, 3, \dots, 2m - 1$  degli  $[n - 3]_s$  fissi di una curva ellittica normale  $\Gamma^n$ , ed  $X_1$  un punto variabile della curva  $\Gamma^n$ ; questo punto sia proiettato dall' $[n - 3]_s$  1 in  $X_2$ , e questo da 2 in  $X_3, \dots$ , e finalmente  $X_{2m-1}$  da  $2m - 1$  in  $X_{2m}$ , sarà  $X_1 X_{2m}$  una coppia di una corrispondenza, che, essendo il prodotto di  $2m - 1$   $J$ , è pure una  $J$  (n.° 17); e perciò la corda  $X_1 X_{2m}$  sarà pure essa una generatrice di una superficie rigata  $M_2^{n-2}$  razionale dell'ordine  $n - 2$ . Cosicchè:

*Se un poligono semplice di  $2m$  vertici, inscritto nella curva ellittica normale  $\Gamma^n$  di uno  $S_{n-1}$ , varia in modo che  $2m - 1$  suoi lati si appoggiano a  $2m - 1$   $[n - 3]_s$  fissi della curva, il  $2m$ .° lato si appoggerà ad un sistema determinato di spazi siffatti della curva  $\Gamma^n$ . Oppure:*

*Se un poligono semplice di  $2m$  vertici inscritto in  $\Gamma^n$  varia in modo che  $2m - 1$  suoi lati descrivono  $2m - 1$  rigate razionali dell'ordine  $n - 2$ , il  $2m$ .° lato descriverà anch'esso una rigata razionale dello stesso ordine.*

Fra questi poligoni ve ne sono 4 per i quali il lato  $X_1 X_{2m}$  è tangente alla curva  $\Gamma^n$ , e quindi essi diventano poligoni di  $2m - 1$  vertici inscritti in  $\Gamma^n$ . Si ha quindi:

*Dati in una curva  $\Gamma^n$   $2m - 1$   $[n - 3]_s$  arbitrarii si possono inscrivere alla curva quattro  $(2m - 1)$ -goni i cui lati si appoggiano rispettivamente ai  $2m - 1$  spazi fissi.*

28. Se gli  $[n - 3]_s$  sono in numero di  $2m$ , i punti  $X_1 X_{2m+1}$  sono corrispondenti in una  $E$ , e quindi  $X_1, X_{2m+1}$  o non coincidono mai o coincidono sempre; perciò:

*Dati sopra una curva ellittica normale  $\Gamma^n$  di un  $S_{n-1}$   $2m$  spazi  $[n - 3]_s$ , in generale non vi è nessuno  $2m$ -gono semplice inscritto in essa i cui lati si appoggino rispettivamente ai  $2m$  spazi dati; ma se ve n'è uno, ve ne sono infiniti.*

Le diagonali  $X_k X_l$  (per  $k$  ed  $l$  diversi fra loro ed  $= 1, 2, 3, \dots, 2m$ ) del  $2m$ -gono, se  $k - l$  è un numero pari, descrivono una superficie rigata ellittica dell'ordine  $2n$ , e se  $k - l$  è un numero dispari, descrivono una rigata razionale dell'ordine  $n - 2$ ; e quindi di tutte le  $m(2m - 1)$  corde, che congiungono a due a due i vertici di quel  $2m$ -gono,  $m^2$  descrivono delle rigate razionali dell'ordine  $n - 2$ , ed  $m(m - 1)$  descrivono delle rigate ellittiche dell'ordine  $2n$  <sup>(1)</sup>.

(1) Per ogni punto passano  $2m - 1$  corde, delle quali  $m$  descrivono rigate razionali ed  $m - 1$  descrivono rigate ellittiche, perciò in tutto si hanno  $m^2$  corde nel primo caso ed  $m(m - 1)$  nel secondo.

29. Se i punti  $X_1 X_2 \dots X_p$  di un  $p$ -gono inscritto in  $\Gamma^n$  si considerano, nell'ordine in cui si seguono, come elementi corrispondenti di  $p - 1$  corrispondenze ellittiche  $\mathbf{E}$ , si ha:

*Se  $p - 1$  lati di un poligono semplice inscritto in  $\Gamma^n$  descrivono  $p - 1$  rigate ellittiche dell'ordine  $2n$ , anche l'ultimo lato descriverà una rigata ellittica dell'ordine  $2n$ . Se, al variare di  $X_1$ , succede che una volta  $X_{p+1}$  coincide con  $X_1$ , ciò succederà sempre.*

Tenendo conto che anche le diagonali di questo poligono descrivono delle rigate ellittiche, si ha:

*Da  $p$  punti arbitrari di una curva ellittica normale  $\Gamma^n$  di uno  $S_{n-1}$  sono determinate  $\frac{p(p-1)}{2}$  rigate ellittiche  $K_2^{2n}$ , e vi sono infiniti poligoni inscritti alla curva  $\Gamma^n$  i cui lati sono generatrici delle medesime rigate.*

Osserviamo in ultimo che se di  $p - 1$  lati di un poligono variabile inscritto in  $\Gamma^n$ , alcuni descrivono delle rigate dell'ordine  $n - 2$ , e i rimanenti delle rigate dell'ordine  $2n$ , l'ultimo lato descriverà una rigata razionale dell'ordine  $n - 2$  o ellittica dell'ordine  $2n$ , secondo che il numero delle rigate dell'ordine  $n - 2$ , descritte dai lati del poligono, sono dispari o pari.

## § 6. Corrispondenze cicliche e poligoni di Steiner.

30. Se  $X_1 X_2 \dots X_m$  sono punti distinti che si corrispondono successivamente in una corrispondenza ellittica  $\mathbf{E}$ , al variare di  $X_1$  la corda  $X_1 X_{m+1}$  descrive in generale una rigata ellittica  $K_2^{2n}$  dell'ordine  $2n$ . Quindi se una volta coincidono  $X_1$  e  $X_{2m+1}$ , coincideranno sempre ed allora la corrispondenza è ciclica dell'ordine  $m$ .

31. Ogni punto di  $\Gamma^n$  appartiene ad un unico ciclo e lo determina.

Se i punti di un ciclo si proiettano da un arbitrario  $[n - 3]_s$  della curva sulla curva stessa, si avranno i punti di un ciclo della corrispondenza inversa  $\mathbf{E}^{-1}$  (vedi n.° 16), e quindi scrivendolo nell'ordine inverso si ha un ciclo di  $\mathbf{E}$ . Si faccia variare la proiezione del primo punto del gruppo cambiando l' $[n - 3]_s$  e si otterranno tutti i cicli della corrispondenza  $\mathbf{E}$ . Qualora l' $[n - 3]_s$  proietti un punto del ciclo in un punto del ciclo stesso, tutto il ciclo si proietterà nel suo inverso.

Scelti due cicli qualunque  $X_1 X_2 \dots X_m, Y_1 Y_2 \dots Y_m$  si deve, proiettando  $X_1$  in  $Y_m$ , ottenere da  $X_2$  il punto  $Y_{m-1}$ , da  $X_3$  il punto  $Y_{m-2}$ , ecc.; ov-

vero proiettando  $X_1$  in  $Y_{m-1}$  ottenere  $Y_{m-2}, Y_{m-3}, \dots$  da  $X_2, X_3, \dots$ ; quindi in  $m$  modi diversi si può ottenere il secondo ciclo come proiezione del primo. Perciò le  $m^2$  congiungenti i punti di due cicli sono ad  $m$  ad  $m$  le generatrici di  $m$  rigate razionali dell'ordine  $n - 2$ . Ovvero:

*Le coppie di punti, presi da due cicli differenti di una medesima corrispondenza ciclica  $\mathbf{E}$  dell'ordine  $m$ , che hanno la somma degli indici congrua ad un numero costante, sono coniugati in una medesima involuzione razionale  $\mathbf{J}$ . E quindi: I punti di due cicli di una medesima corrispondenza ciclica dell'ordine  $m$  si possono considerare come coniugati in  $m$  diverse involuzioni razionali.*

32. Se scegliamo, come assi di queste  $m$  involuzioni, gli  $m [n - 3]_s$  della curva  $\Gamma^n$  che passano per un medesimo arbitrario  $[n - 4]_s$   $O$  della curva, questi segheranno ordinatamente  $\Gamma^n$  in altri punti  $Z_1, Z_2, \dots, Z_m$ , che, presi nell'ordine considerato, sono elementi di un ciclo di  $\mathbf{E}$ . Infatti per l'operazione fatta si ha il seguente quadro, in cui nella stessa colonna stanno gli elementi contenuti nello stesso  $[n - 2]$ .

$$\begin{array}{ccc}
 \overbrace{X_1 \ X_2 \dots \ X_m}^O & \overbrace{X_1 \ X_2 \dots \ X_m}^O & \overbrace{X_1 \ X_2 \dots \ X_m}^O \\
 Y_m \ Y_{m-1} \dots \ Y_1, & Y_{m-1} \ Y_{m-2} \dots \ Y_m, \dots, & Y_1 \ Y_m \dots \ Y_2, \\
 Z_1 \ Z_1 \dots \ Z_1 & Z_2 \ Z_2 \dots \ Z_2 & Z_m \ Z_m \dots \ Z_m
 \end{array}$$

cioè per l' $[n - 3]_s$   $OZ_1$  passano gli  $[n - 2]$   $OZ_1 X_1 Y_m, OZ_1 X_2 Y_{m-1}, \dots$ ; per l' $[n - 3]_s$   $OZ_2$  passano gli  $[n - 2]$   $OZ_2 X_1 Y_{m-1}, OZ_2 X_2 Y_{m-2}, \dots$  ecc.; quindi gli  $[n - 2]$   $OZ_1 X_1 Y_m, OZ_2 X_1 Y_{m-1}, \dots$  passano per l' $[n - 3]_s$   $OX_1$  e proiettano il ciclo  $Y_m Y_{m-1} \dots Y_1$  nel ciclo  $Z_1 Z_2 \dots Z_m$ . Lo stesso si dirà per gli  $[n - 3]_s$   $OX_2, OX_3, \dots$ , e per gli  $[n - 3]_s$   $OY_m, OY_{m-1}, \dots$ , ecc. Dunque, *i tre cicli sono tali che ciascuno è la proiezione in  $m$  modi di un altro mediante gli  $[n - 3]_s$  che passano per uno di  $\infty^{n-4}$   $[n - 4]_s$  della curva e per un punto del terzo ciclo.*

Si noti che al variare di  $O$  il terzo ciclo  $Z_1 Z_2 \dots Z_m$ ; varia sulla curva; sicchè la proprietà precedente si riferisce a tre cicli qualsiasi della corrispondenza in esame. Cioè dati *tre cicli arbitrari della corrispondenza  $\mathbf{E}$  vi sono  $\infty^{n-4}$   $[n - 4]_s$  che congiunti con due punti qualsiasi, presi da due differenti cicli dei tre, dànno un  $[n - 2]$  che passa per un punto del terzo ciclo*; questi appartengono ad  $m$  sistemi diversi.

Analogamente, dati i tre cicli  $X_1 \dots X_m, Y_1 \dots Y_m, Z_1 \dots Z_m$  se si scelgono

gli  $m [n-3]_s$  in modo che passino per il punto  $Z_1$  e per un medesimo  $[n-5]_s$   $P$  arbitrario, questi segheranno la curva in  $m$  punti  $V_1 V_2 \dots V_m$  che appartengono ad un altro ciclo di  $\mathbf{E}$ ; ed i quattro cicli sono tali che gli  $[n-2]_s$  che passano per tre punti presi fra tre cicli diversi e per uno di  $\infty^{n-5} [n-5]_s$   $P$ , secano la curva in un punto del rimanente ciclo.

In generale: Siano  $r-1$  cicli della corrispondenza  $\mathbf{E}$  scelti ad arbitrio, gli  $[n-2]_s$ , che passano per  $r-1$  punti presi in tutti questi cicli, uno in ciascuno, e per uno arbitrario  $[n-r-1]_s$ , secano la curva in punti che appartengono ad un  $r^{\text{mo}}$  ciclo della stessa corrispondenza  $\mathbf{E}$ . E questi cicli sono tali che gli  $[n-2]_s$ , che passano per uno di  $\infty^{n-r-1} [n-r-1]_s$  e per  $r-1$  punti presi fra cicli diversi dai primi e diversi tra loro, passano per un punto dell' $r^{\text{mo}}$  ciclo.

Questi  $r$  cicli formano un gruppo che diremo gruppo connesso di  $r^{\text{mo}}$  ordine della corrispondenza  $\mathbf{E}$ .

Per  $r = n-1$  si ha: Dati  $n-2$  cicli arbitrarii di una corrispondenza  $\mathbf{E}$  ciclica dell'ordine  $n$ , gli  $[n-2]_s$ , che passano per  $n-2$  punti presi in questi cicli, uno in ciascuno, e per un arbitrario punto, secano la curva in  $m$  punti di un  $(n-1)^{\text{mo}}$  ciclo della corrispondenza  $\mathbf{E}$ . E per  $r = n$ : Dati  $n-1$  cicli arbitrarii di una corrispondenza  $\mathbf{E}$ , ciclica dell'ordine  $m$ , gli  $[n-2]_s$ , che passano per  $n-1$  punti presi in tutti questi cicli, uno in ciascuno, secano la curva, ulteriormente in uno degli  $m$  punti di un  $n^{\text{mo}}$  ciclo.

33. Indichiamo gli  $rm$  punti di un gruppo connesso di  $r^{\text{mo}}$  ordine con numeri progressivi, come risulta dal presente quadro:

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & r+1 & 2r+1 & \dots & (m-1)r+1 & & \\
 2 & r+2 & 2r+2 & \dots & (m-1)r+2 & & \\
 3 & r+3 & 2r+3 & \dots & (m-1)r+3 & & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\
 r & 2r & 3r & \dots & mr, & & 
 \end{array}$$

nel quale gli elementi della stessa orizzontale appartengono allo stesso ciclo.  $\mathbf{E}$  inoltre  $1'$  sia l' $[n-r-1]_s$  d'intersezione colla curva di un  $[n-2]_s$  che passa per  $1, 2, 3, \dots r$ ;  $2'$  sia un altro  $[n-r-1]_s$  d'intersezione colla curva di un  $[n-2]_s$  che passa per  $2, 3, 4, \dots r, (r+1)$ ;  $3'$  sia un terzo  $[n-r-1]_s$  dato da un  $[n-2]_s$  che passa per  $3, 4, 5, \dots (r+1), (r+2)$ ; ecc., e finalmente  $r'$  sia un ultimo  $[n-r-1]_s$  dato da un  $[n-2]_s$  che passa per  $r, (r+1), (r+2), \dots (2r-1)$ . Pel teorema precedente si ha che l' $[n-2]_s$

che passa per  $1'$  e per  $(r+1), (r+2), \dots, (2r-1)$  passa per un altro punto dell' $r^{\text{mo}}$  ciclo e questo sia  $2r$ , l' $[n-2]$  che passa per  $2'$  e per  $(r+2), (r+3), \dots, 2r$  passa per un altro punto del primo ciclo, e questo sia  $2r+1$ ; e così seguitando, le facce di dimensione  $r-1$  del poligono semplice  $123\dots rm$ , che passano per  $r$  vertici consecutivi, e di cui la somma degli indici dei vertici è congrua al numero  $r^2$ , sono contenute in  $[n-2]$  che passano per un medesimo degli  $[n-r-1]_s$   $1', 2', \dots, r'$ . Ciò posto se, tenendo fissi gli  $[n-r-1]_s$   $1', 2', \dots, r'$ , si fanno variare i vertici  $1, 2, 3, \dots, r-1$  del poligono, cambia il poligono, perchè si passa da un gruppo connesso di  $r$  cicli ad un altro gruppo connesso di  $r$  cicli, ma non mutano le condizioni a cui soddisfaceva il primo. Quindi si ha il teorema: -

*Dati  $r$   $[n-r-1]_s$  della curva  $\Gamma^n$ , se esiste un poligono semplice inscritto a questa e di ordine  $rm$ , tale che le successive facce di dimensione  $r-1$  si appoggino rispettivamente a quegli spazi fissi, esisteranno  $\infty^{r-1}$  di poligoni siffatti.*

Per  $r = n-1$  si ha:

*Dati  $n-1$  punti della curva  $\Gamma^n$ , se esiste un poligono semplice inscritto a questa curva, e di ordine  $(n-1)m$ , tale che le successive facce di dimensione  $n-2$  passino costantemente per quei punti fissi, esisteranno  $\infty^{n-2}$  di poligoni siffatti.*

Per  $r = 2$ , si ha il noto teorema di STEINER, esteso ai poligoni inscritti in una curva normale ellittica di ordine  $n$  di uno  $S_{n-1}$ :

*Dati 2  $[n-3]_s$  della curva  $\Gamma^n$ , se esiste un poligono semplice di  $2m$  lati inscritti nella curva e tale che i suoi lati si appoggino rispettivamente ai 2 spazi dati, esisteranno  $\infty^1$  di questi poligoni siffatti.*

34. Se in quanto si è detto al n.º 31 si assume come  $[n-3]_s$  di proiezione un  $[n-3]_s$  che tocca la curva  $\Gamma^n$  in  $X_r$ , il gruppo  $X_r X_{r+1} X_{r+2} \dots$  sarà proiettato in  $X_r X_{r-1} X_{r-2} \dots$ , e quindi le corde  $X_{r+1} X_{r-1}, X_{r+2} X_{r-2}, \dots$  sono tutte generatrici di una medesima rigata dell'ordine  $n-2$ .

*Per  $m$  dispari, gli  $m$  punti di un ciclo si accoppiano in  $\frac{m-1}{2}$  coppie che appartengono ad una  $\mathbb{J}$ , nella quale un punto del ciclo è punto doppio. Oppure: ogni elemento del ciclo è elemento doppio di una  $\mathbb{J}$  di cui sono elementi coniugati gli elementi del ciclo equidistanti da esso.*

*Ogni punto del ciclo con la sua tangente determina una rigata razionale dell'ordine  $n-2$ , di cui la varietà degli  $[n-3]_s$  direttori proietta il ciclo in sè stesso; e quindi: Conducendo per ogni  $[n-4]_s$  della curva  $\Gamma^n$  gli  $[n-3]_s$*

che si appoggiano alle  $m$  tangenti nei punti di un ciclo si ottengono nell'intersezione colla curva tutti i cicli della **E**.

Per  $n$  pari, l'elemento opposto ad  $X_r$  si proietterà in sè stesso, e quindi sarà un altro punto di contatto della rigata di ordine  $n - 2$  colla curva  $\Gamma^n$ . Inoltre le coppie di lati opposti dell' $n$ -gono  $X_1, X_2 \dots X_m$  sono generatrici di una medesima rigata.

Quindi:

Per  $m$  pari due elementi opposti del ciclo sono elementi doppi di una **J** di cui sono elementi coniugati gli elementi che equidistano da ciascuno di essi. Oppure: gli  $m$  punti si accoppiano in  $\frac{m}{2}$  modi in  $\frac{m}{2}$  coppie di una **J**, ed in  $\frac{m}{2}$  modi in  $\frac{m-2}{2}$  coppie di un'altra **J** di cui i rimanenti punti opposti sono punti doppi.

Conducendo per ogni  $[n - 4]_s$  della curva gli  $[n - 3]_s$  che si appoggiano alle  $\frac{m}{2}$  coppie di tangenti nei punti opposti, ed alle  $\frac{m}{2}$  coppie di lati opposti del ciclo si hanno tutti gli altri cicli della **E**.

Siccome ogni potenza di una corrispondenza ciclica **E** dell'ordine  $m$  è pure una corrispondenza ciclica, e sarà dello stesso ordine, se l'esponente della potenza è primo con  $m$ , di ordine sottomultiplo per tutti gli altri esponenti si ha:

Coi punti di un ciclo di ordine  $m$  si possono fare tanti cicli diversi dello stesso ordine quanti sono i numeri primi con  $m$  e minori di  $m$ .

Gli elementi opposti di un ciclo di ordine pari sono coniugati in una medesima involuzione fondamentale.

Napoli, agosto 1890.



# Sugl'integrali polidromi delle equazioni algebrico-differenziali del primo ordine.

(Di GIULIO VIVANTI, a Mantova.)

---

1. **I**n una breve Nota: *Zur Theorie der mehrwerthigen Functionen* pubblicata nella *Zeitschrift für Math. u. Ph.*, tomo 34, pag. 382-384, ricordando alcune importanti ricerche di L. FUCHS (\*) sulle equazioni differenziali del primo ordine, ho accennato come a taluni dei risultati da esso ottenuti potesse giungersi partendo dalla considerazione di alcune semplici proprietà delle funzioni polidrome. Mi limitai allora a far vedere come tali funzioni possano dividersi in due *famiglie*, secondochè l'insieme de' valori presi dalla funzione per un valore qualunque della variabile non è od è (in tutto od in parte) condensato (\*\*), e a stabilire i due seguenti teoremi:

*Teorema A. Una funzione e la sua inversa appartengono ad una stessa famiglia.*

*Teorema B. Se l'integrale d'un'equazione algebrico-differenziale del primo ordine è una funzione della 2.<sup>a</sup> famiglia, e se i suoi punti singolari sono isolati, i valori di esso per un valore qualunque della variabile costituiscono un insieme totalmente condensato entro un campo connesso o no (\*\*\*)*.

Dell'applicazione di questi principii alla teoria delle equazioni algebrico-differenziali del primo ordine offro un primo ed incompleto saggio nelle seguenti pagine.

---

(\*) *Sitzungsberichte der Berliner Akademie*, 1884, 1885, 1886.

(\*\*) Più esattamente può dirsi: Le funzioni della 1.<sup>a</sup> famiglia sono quelle che per qualunque valore della variabile prendono un insieme non condensato di valori; tutte le altre funzioni appartengono alla 2.<sup>a</sup> famiglia.

(\*\*\*) Cioè non esiste alcun elemento dell'insieme fuori del campo di condensazione.

2. Premetto due lemmi di cui si vedrà più innanzi l'applicazione.

1.° Se con  $z$  si rappresentano gli elementi d'un insieme di valori complessi, e con  $\varphi$  si denota un ramo d'una funzione algebrica i cui punti di diramazione non coincidono con alcuno dei punti  $z$ , l'insieme dei valori  $\varphi(z)$  è o no condensato, secondochè lo è o non lo è l'insieme dei valori  $z$ .

Infatti sia l'insieme  $z$  condensato; ciò vuol dire che esiste un certo insieme continuo (rappresentabile nel piano della variabile  $z$  mediante un campo  $C$ ) di cui tutti i punti  $a$  sono punti limiti dell'insieme  $z$ . Ora è chiaro che, se un certo insieme parziale di valori di  $z$  ha un punto limite  $a$ , l'insieme dei valori corrispondenti  $\varphi(z)$  avrà per punto limite  $\varphi(a)$ ; donde segue che ogni punto del campo  $B$  costituito da tutti i valori  $\varphi(a)$  corrispondenti ai vari punti del campo  $C$  sarà punto limite dell'insieme  $\varphi(z)$ . Cioè questo insieme sarà condensato nel campo  $B$ . — Siccome poi l'inversa della  $\varphi$  è una funzione parimenti algebrica, così è chiaro che l'insieme  $\varphi(z)$  sarà condensato sempre e soltanto quando lo sia l'insieme  $z$ .

2.° Se  $y$  è una funzione di  $z$  che per un certo valore  $\bar{z}$  di  $z$  (in cui si comporta regolarmente) prende infiniti valori aventi un punto limite  $\bar{y}$ , e se la funzione inversa si comporta regolarmente per  $y = \bar{y}$ , i valori di quest'ultima funzione per  $y = \bar{y}$  avranno per punto limite  $\bar{z}$ .

Infatti, poichè fra i valori di  $y$  per  $z = \bar{z}$  ve n'hanno infiniti che differiscono da  $\bar{y}$  meno d'una quantità assegnata ad arbitrio, ciò vuol dire che la funzione  $z$  di  $y$  prende il valore  $\bar{z}$  in punti  $y$  tanto vicini quanto si vuole ad  $\bar{y}$ ; donde segue che essa prenderà nel punto  $\bar{y}$  valori vicini quanto si vuole a  $\bar{z}$ .

Come conseguenza si ha che:

Se una funzione  $y$  di  $z$  prende per ciascuno dei valori  $z$  d'un insieme continuo un insieme condensato di valori, la funzione inversa prenderà parimenti un insieme condensato di valori  $z$  per ciascuno dei valori  $y$  di un certo insieme continuo (cfr. n.° 1, teorema A).

3. Se  $y = \varphi(z)$  è una funzione polidroma, imageremo i suoi valori depositi (come ordinariamente per le funzioni algebriche) sopra una superficie connessa a più fogli o riemanniana  $R$ , che possiamo figurarci generata col processo di continuazione delle funzioni analitiche di WEIERSTRASS (\*). La  $R$

---

(\*) Cfr. VOLTERRA, *Sulle funzioni analitiche polidrome*, Rend. dell'Acc. dei Lincei, 1888, 2.° Semestre, pag. 355-361.

conterrà, oltre ai punti nel cui intorno la funzione si comporta regolarmente (punti ordinari), anche i *punti regolari di diramazione*, cioè quei punti di diramazione in cui la funzione non diviene indeterminata ossia non ha una singolarità essenziale. Tali punti devono formare *sulla R* un insieme isolato (\*); quindi potremo sempre congiungere due punti qualunque  $(z_1, y_1)$ ,  $(z_2, y_2)$  della *R* mediante una linea  $l$  avente le seguenti proprietà:

1.° Nessun punto di  $l$ , salvo tutt'al più gli estremi, è un punto di diramazione;

2.° Per ciascun punto di  $l$  può determinarsi un intorno finito non contenente alcun punto di diramazione, eccetto tutt'al più il punto stesso quando esso è uno degli estremi.

Segue da ciò che, se nel piano  $z$  si parte dal punto  $z_1$  col valore  $y_1$  di  $y$  e si segue la proiezione della linea  $l$ , si arriverà al punto  $z_2$  con un valore unico e determinato di  $y$ , se  $(z_1, y_1)$  è un punto ordinario, con un insieme enumerabile (\*\*\*) di valori di  $y$ , se  $(z_1, y_1)$  è un punto di diramazione.

4. Abbiassi un'equazione algebrico-differenziale del primo ordine:

$$\frac{dy}{dz} = f(y, z), \quad (\alpha)$$

ossia:

$$F\left(\frac{dy}{dz}, y, z\right) \equiv \psi_0(y, z)\left(\frac{dy}{dz}\right)^m + \psi_1(y, z)\left(\frac{dy}{dz}\right)^{m-1} + \dots + \psi_m(y, z) = 0, \quad (\beta)$$

dove  $f$  è una funzione algebrica contenente *effettivamente* ambe le variabili  $y, z$ , e  $F, \psi_0, \psi_1, \dots, \psi_m$  sono funzioni razionali intere dei loro argomenti; e sia  $y = \varphi(z)$  l'integrale di questa equazione che in un certo punto  $z = z_0$  prende un valore prefisso  $y_0$ . I punti  $z$  nel cui intorno la funzione  $y$  non si comporta regolarmente sono (\*\*\*):

a) Quelli in cui,  $y$  essendo finito,  $\frac{dy}{dz}$  è infinito; ossia in cui  $y$  prende due valori eguali;

(\*) Cioè intorno a ciascun punto di diramazione può descriversi sulla *R* un cerchio non contenente alcun altro punto di diramazione. Parimenti intorno a ciascun punto ordinario può descriversi un cerchio non contenente alcun punto di diramazione.

(\*\*) Poiché tale è l'insieme dei fogli della *R*. — Vedi VOLTERRA, Mem. cit.

(\*\*\*) BRIOT et BOUQUET, *Rech. sur la th. des fonctions*, Paris, 1856, pag. 50, 52. — In questi punti, che ordinariamente si comprendono sotto il nome di *punti di diramazione*, l'integrale può divenire indeterminato senza diramarsi. Per es. i punti di diramazione del-

b) Quelli in cui la  $(\beta)$ , considerata come un'equazione algebrica rispetto a  $\frac{dy}{dz}$ , ha una radice multipla.

Nei punti a) sussiste fra  $y$  e  $z$  la relazione:

$$\psi_0(y, z) = 0;$$

nei punti b) la relazione:

$$D(y, z) = 0,$$

dove  $D(y, z)$  è il discriminante della  $(\beta)$  rispetto a  $\frac{dy}{dz}$ .

5. Supponiamo che per un certo valore di  $z$ , che diremo  $\bar{z}$ , l'insieme dei valori di un integrale  $y$  (individuato da un certo valor iniziale  $y_0$  di  $y$ ) sia condensato. Allora, essendo  $y' = f(y, z)$ , anche i valori di  $y'$  per  $z = \bar{z}$  formeranno (n.º 2, lemma 1.º) un insieme condensato; e se  $\bar{z} + d\bar{z}$  è un punto vicinissimo a  $\bar{z}$ , anche l'insieme dei valori  $y'd\bar{z}$  sarà condensato, e lo sarà pure l'insieme dei valori  $y + y'd\bar{z}$ , giacchè  $y + y'd\bar{z} = y + f(y, \bar{z})d\bar{z} = \chi(y)$ ,  $\chi$  denotando una funzione algebrica. Ma  $y + y'd\bar{z}$  rappresenta i valori che prende  $y$  nel punto  $\bar{z} + d\bar{z}$ ; quindi si conclude facilmente, ripetendo il ragionamento fatto pel passaggio da ciascun punto ad un punto prossimo:

*Teorema I. Se un integrale d'una equazione algebrico-differenziale di primo ordine prende in un punto un insieme condensato di valori, la stessa cosa ha luogo per qualsiasi altro punto di cui esso si comporta regolarmente.*

E si ha pure:

*Teorema II. Nel caso del teorema precedente anche  $y'$  prende in ogni punto un insieme condensato di valori.*

Osserveremo anche che  $y'$ , considerato come funzione di  $y$ , prenderà un insieme condensato di valori per ogni valore di  $y$ ; infatti siccome (n.º 2, lemma 2.º) la funzione  $z$  di  $y$  è della 2.<sup>a</sup> famiglia, lo stesso avrà luogo (pel

l'integrale dell'equazione differenziale:

$$z^4 \left( \frac{dy}{dz} \right)^2 + y^2 - 1 = 0,$$

sono dati da  $z^4 = 0$ ; ora  $z = 0$  non è un punto di diramazione propriamente detto, ma bensì un punto singolare essenziale dell'integrale:

$$y = y_0 \operatorname{sen} \frac{1}{z} + \sqrt{1 - y_0^2} \cos \frac{1}{z},$$

il quale è una funzione uniforme.

teorema precedente) per  $\frac{dz}{dy}$  considerata quale funzione di  $y$ , e quindi anche per  $\frac{dy}{dz}$ .

Supponiamo che l'insieme dei valori presi da un integrale  $y$  in un punto  $\bar{z}$  consti d'un insieme  $I$  condensato in un certo campo  $C$  e di un insieme  $J$  di altri valori esterno a questo campo, e sia  $\bar{y}_1$  un elemento di  $I$ ,  $\bar{y}_2$  un elemento di  $J$ . Si può sempre descrivere nel piano della variabile  $z$  una linea chiusa  $l$  passante per  $\bar{z}$  e tale che, se si parte da  $z$  col valore  $\bar{y}_1$  di  $y$ , vi si ritorni col valore  $\bar{y}_2$ . Ripetendo il ragionamento fatto a proposito del teorema I pel passaggio da ciascun punto di  $l$  al punto successivo, si vede che  $\bar{y}_2$  deve far parte d'un insieme condensato. Cioè:

*Se  $y$  è una funzione della 2.<sup>a</sup> famiglia, i suoi valori per ciascun valore della variabile si distribuiscono in uno o più gruppi condensati (cfr. n.° 1, teorema B).*

6. Il numero dei punti in cui  $y$  e  $\frac{dy}{dz}$  prendono, tra gli altri, uno stesso valore determinato  $a$ , è finito; infatti quei punti sono dati dall'equazione algebrica  $F(a, a, z) = 0$ .

I punti regolari di diramazione della specie  $a$ ) sono quelli in cui,  $y$  essendo finito,  $y'$  diviene infinito. Ora, se  $y$  è della 2.<sup>a</sup> famiglia, lo sarà pure  $y'$  (teorema II) e quindi anche la sua funzione inversa (teorema I), e i punti  $z$  in cui  $\frac{dy}{dz} = \infty$  costituiranno in generale un insieme  $P$  in tutto od in parte condensato. Questo insieme non muterà di natura se da esso si tolgono i punti, in numero finito, nei quali  $y = \infty$ . Dunque i punti regolari di diramazione della specie  $a$ ) formano un insieme condensato.

Se invece  $y$  è della 1.<sup>a</sup> famiglia, l'insieme  $P$ , quindi anche l'insieme dei punti regolari di diramazione della specie  $a$ ), non sarà condensato. — Veniamo ai punti della specie  $b$ ). Se si pone  $\frac{dy}{dz} = u$ , derivando la ( $\alpha$ ) si avrà:

$$\frac{du}{dz} = \frac{\partial f}{\partial y} u + \frac{\partial f}{\partial z},$$

ed eliminando  $y$  tra questa equazione e la ( $\alpha$ ):

$$\frac{du}{dz} = f_1(u, z),$$

dove  $f_i$  è simbolo di funzione algebrica. Dunque la funzione  $u$ , che come  $y$  è (teorema II) della 1.<sup>a</sup> famiglia, è l'integrale d'un'equazione algebrico-differenziale del primo ordine. Inoltre, siccome nei punti di diramazione della specie  $b$ ) di  $y$   $u$  prende due valori eguali, questi saranno punti di diramazione della specie  $a$ ) di  $u$ , e quindi, per ciò che si è detto poc'anzi, costituiranno un insieme non condensato.

Riassumendo:

**Teorema III.** *Se  $y$  è l'integrale d'un'equazione algebrico-differenziale del primo ordine, IN GENERALE l'insieme dei suoi punti regolari di diramazione è o no condensato secondochè la funzione  $y$  di  $z$  è della 2.<sup>a</sup> o della 1.<sup>a</sup> famiglia.*

Può avvenire in qualche caso speciale che, pur essendo  $y$  della 2.<sup>a</sup> famiglia, l'insieme dei punti regolari di diramazione non sia condensato (\*). Ne vedremo un esempio più avanti.

7. Un integrale  $y$  d'un'equazione differenziale del primo ordine fra  $y$  e  $z$  è (\*\*) una funzione di  $z$  pienamente determinata, quando è stabilito che uno dei valori di  $y$  per un certo valore  $z_0$  di  $z$  sia una quantità assegnata  $y_0$ . Variando con continuità  $y_0$ , varia in generale nello stesso modo il campo di esistenza C (\*\*\*) della funzione  $y$ ; quindi potrà prendersi una serie continua di valori  $y_0$  per modo che i campi  $C$  corrispondenti abbiano una porzione comune  $P$ , la quale necessariamente conterrà  $z_0$ , e che  $(z_0, y_0)$  sia un punto ordinario per tutte le funzioni  $y$  che si considerano. Ciò posto, su ciascuna delle superficie  $R$  corrispondenti alle varie funzioni  $y$  potrà descriversi (n.º 3) intorno a  $(z_0, y_0)$  un cerchio non contenente alcun punto di diramazione, e i raggi di questi cerchi avranno un limite inferiore  $\rho_0$  diverso da zero. Descriviamo nel piano  $z$  intorno al punto  $z_0$  un cerchio di raggio  $\rho_0$ ; preso un punto qualunque  $z_1$  interno a questo cerchio ripetiamo su di esso la stessa costruzione, e così di seguito. I cerchi descritti ricopriranno una certa porzione  $Q$  dell'area  $P$ . Se ora si parte da  $z_0$  coi diversi valori iniziali  $y_0$  della serie continua considerata, e seguendo una linea  $l$  tutta contenuta entro  $Q$  si va ad un punto  $z_1$  posto nell'interno o sul contorno di  $Q$ , le linee che corrispondono ad  $l$  sulle diverse superficie  $R$  avranno la proprietà, che ciascun

(\*) Ciò può accadere soltanto quando la funzione inversa della  $y' = \varphi'(z)$ , pur essendo della 2.<sup>a</sup> famiglia, prende per  $y' = \infty$  un insieme non condensato di valori.

(\*\*) Salvo casi eccezionali. Vedi Fuchs, Sitzungsber., 1886, pag. 297.

(\*\*\*) Per *campo d'esistenza* d'una funzione intendo la proiezione sul piano della variabile indipendente della superficie  $R$  definita nel n.º 3.

punto di esse, salvo tutt'al più  $z_1$ , è un punto ordinario e possiede un intorno finito contenente soltanto punti ordinari. Da ciò segue che, per una determinata linea  $l$ , a ciascun valore  $y_0$  corrisponde, come valor finale di  $y$  pel punto  $z$ , un valore unico e determinato  $y_1$ .

Si domanda ora se, mentre  $y_0$  varia con continuità, possa  $y_1$  rimanere costante. Se ciò fosse, partendo da  $z_1$  col valore iniziale  $y_1$  e seguendo la linea  $l$  in senso inverso, si dovrebbe giungere in  $z_0$  con un'infinità di valori finali differenti  $y_0$  formanti un insieme continuo; ma ciò è impossibile (vedi n.° 3 in fine), perchè un insieme continuo non è enumerabile. Dunque, *fissata la linea  $l$  che senza uscire da  $Q$  va da  $z_0$  ad un punto  $z_1$  posto nell'interno o sul contorno di  $Q$ , il valore finale  $y_1$  dipende in modo unico dal valore iniziale  $y_0$  e varia con esso.*

Deve notarsi però che è necessario stabilire sin da principio quale fra le radici  $y'_0$  dell'equazione algebrica:

$$F(y'_0, y_0, z_0) = 0 \quad (\gamma)$$

si voglia prendere come valore iniziale di  $y'$ .

8. Le considerazioni precedenti si semplificano assai quando l'equazione differenziale è di tal natura, che i punti di diramazione dei suoi integrali non variano di posizione al variare di  $y_0$ , ossia sono *fissi*. In tal caso il campo  $C$  è identico per tutti gl'integrali e i campi  $P$ ,  $Q$  coincidono con quello; sicchè può asserirsi che *i valori di  $y$  in un punto qualunque di  $C$  dipendono da  $y_0$  e variano con esso.*

Sia in particolare  $(Z, Y)$  un punto regolare di diramazione;  $Y$  dovrà variare con  $y_0$ , mentre  $Z$  è fisso. D'altra parte, poichè  $Y$  è legato a  $Z$  da una o dall'altra delle due relazioni:

$$\psi_0(Y, Z) = 0, \quad D(Y, Z) = 0,$$

dovrebbe anche  $Y$  essere fisso. Ne segue di necessità:

- 1.° Che  $\psi_0(y, z)$  deve ridursi ad una funzione  $\mu(z)$  non contenente  $y$  (\*);
- 2.° Che solo nel caso in cui  $D(y, z)$  contiene un fattore  $\nu(z)$  indipendente da  $y$  esistono punti regolari di diramazione della specie  $b$ ), e questi sono radici della  $\nu(z) = 0$ , — mentre ogni fattore di  $D(y, z)$  contenente  $y$ , eguagliato a zero, costituisce un integrale singolare dell'equazione differenziale (\*\*).

(\*) Cfr. FUCHS, Sitzunsb., 1884, pag. 706.

(\*\*) Cfr. FUCHS, Sitzunsb., 1884, pag. 704. — POINCARÉ, Acta Math., tomo 7, pag. 3. — Come è noto, gl'integrali singolari d'un'equazione algebrico-differenziale del primo ordine annullano identicamente il discriminante di essa rispetto ad  $y'$ .

Quanto ai punti d'indeterminazione, è chiaro che anche per questi non può sussistere alcuna equazione algebrica fra  $y$  e  $z$  essendo in essi  $y$  indeterminato. Dunque i punti di diramazione (punti regolari di diramazione e punti d'indeterminazione) sono dati dalle due equazioni algebriche:

$$\mu(z) = 0, \quad \nu(z) = 0,$$

e quindi sono in numero finito; e può concludersi che ogni integrale  $y$  è una funzione determinata in tutto il piano  $z$ , fatta eccezione tutt'al più per un numero finito di punti; e che la superficie  $R$  corrispondente ricopre l'intero piano, ha un numero finito di punti di diramazione, ed ha per contorno un numero finito (o nullo) di punti (i punti d'indeterminazione).

Dopo ciò, se si descrive una linea  $l$  che vada da  $z_0$  ad un punto qualunque  $z_1$  del piano  $z$  senza passare per alcun punto di diramazione, il valore di  $y$  (e quindi anche quello di  $y'$ ) con cui si giunge in  $z_1$  lungo la  $l$  partendo da  $z_0$  col valore iniziale  $y_0$  di  $y$  sarà funzione uniforme di  $y_0$  e della radice  $y'_0$  della  $(\gamma)$  che fu scelta come valore iniziale di  $y'$  (\*).

9. Sia  $l_0$  una linea chiusa passante per  $z_0$ ,  $l_1$  una linea che va da  $z_0$  ad un altro punto  $z_1$ ; e su  $l_0$ ,  $l_1$  non stia alcun punto di diramazione. Sieno inoltre  $\overline{y_0}$ ,  $\overline{y'_0}$  i valori di  $y$ ,  $y'$  con cui si ritorna in  $z_0$  dopo aver percorso la linea  $l_0$  partendo da  $z_0$  coi valori iniziali  $y_0$ ,  $y'_0$ ; — e  $y_1$ ,  $y'_1$ ;  $\overline{y_1}$ ,  $\overline{y'_1}$  quelli con cui si giunge in  $z_1$  dopo aver percorso la linea  $l_1$  partendo da  $z_0$  rispettivamente coi valori iniziali  $y_0$ ,  $y'_0$ ;  $\overline{y_0}$ ,  $\overline{y'_0}$ . Si avrà, essendo  $\Omega$  una funzione uniforme (n.º 8):

$$y'_1 = \Omega(y_0, y'_0), \quad \overline{y'_1} = \Omega(\overline{y_0}, \overline{y'_0}).$$

Supponiamo che uno  $y'_1$  dei valori di  $y'$  in  $z_1$  sia indipendente da  $y_0$  (\*\*). Allora sarà, denotando con  $k$  una costante:

$$\Omega(y_0, y'_0) = k;$$

e, poichè questa equazione non può stabilire una nuova relazione fra le  $y_0$ ,  $y'_0$  già legate fra loro dalla  $(\gamma)$ , essa sarà soddisfatta anche da qualunque altra coppia di valori  $y$ ,  $y'$  per cui sia  $F(y', y, z_0) = 0$ . Sarà dunque  $\Omega(\overline{y_0}, \overline{y'_0}) = k$ , quindi  $\overline{y'_1} = y'_1$ ; cioè tutti i valori di  $y'$  nel punto  $z_1$  saranno eguali. Possiamo concludere:

(\*) Cfr. POINCARÉ, Acta Math., tomo 7, pag. 9.

(\*\*) Perchè ciò avvenga, è chiaro che quel valore di  $y'$  dev'essere indipendente anche da  $y$ ; cioè la  $(\beta)$  deve avere per  $z = z_1$  una radice indipendente da  $y$ .

**Teorema IV.** *Se uno dei valori di  $y'$  in un punto è indipendente da  $y_0$ , in quel punto  $y'$  prende questo solo valore.*

Alla classe di punti ora considerata appartengono i punti regolari di diramazione della specie  $a$ ), poichè in essi, qualunque sia  $y_0$ , uno dei valori di  $y'$  è  $\infty$ . In quei punti adunque  $y'$  prenderà il solo valore  $\infty$ , donde segue che:

**Teorema V.** *I punti regolari di diramazione della specie  $a$ ) sono gli stessi in tutti i fogli della superficie  $R$ .*

Sia ora  $z_1$  un punto d'indeterminazione. Siccome esso è tale qualunque sia  $y_0$ , così, se  $\Omega(y_0, y'_0)$  è indeterminato, lo sarà pure  $\Omega(\bar{y}_0, \bar{y}'_0)$ . Dunque:

**Teorema VI.** *I punti d'indeterminazione sono gli stessi in tutti i fogli della  $R$ .*

10. **Teorema VII.** *Dato un punto  $z_1$  diverso dai punti d'indeterminazione, può sempre prendersi  $y_0$  in modo che uno dei valori di  $y$  per  $z = z_1$  sia una quantità data  $y_1$ . — Infatti, prendendo  $z_1$  come punto di partenza, e considerando l'integrale della  $(\beta)$  che nel punto  $z_1$  ha il valore iniziale  $y_1$ , uno qualunque dei valori che esso prende nel punto  $z_0$  soddisfarà alle condizioni richieste per la quantità  $y_0$ .*

11. Supponiamo che ogni integrale dell'equazione  $(\beta)$  a punti di diramazione fissi sia una funzione della 2.<sup>a</sup> famiglia. Dal teorema precedente segue che i campi di condensazione corrispondenti ad un valore  $z_1$  qualunque di  $z$  per tutti i valori possibili di  $y_0$  ricopriranno (infinite volte) l'intero piano  $y$ . Dato quindi un valore  $\bar{y}$ , si potrà sempre scegliere  $y_0$  in modo che il campo di condensazione dei valori di  $y$  corrispondenti a  $z = z_1$  contenga (nel suo interno o sul contorno)  $\bar{y}$ .

12. Fatta questa semplice osservazione, riprendiamo l'equazione  $(\beta)$ , e poniamola sotto la forma seguente:

$$\Phi\left(\frac{dz}{dy}, z, y\right) \equiv \psi_m(y, z)\left(\frac{dz}{dy}\right)^m + \psi_{m-1}(y, z)\left(\frac{dz}{dy}\right)^{m-1} + \dots + \psi_0(y, z) = 0. (\delta)$$

Supponiamo che anche l'integrale  $z = \theta(y)$  della  $(\delta)$ , come quello  $y = \varphi(z)$  della  $(\beta)$ , abbia i punti di diramazione fissi; cioè che i punti di diramazione della  $\theta(y)$  sieno indipendenti dal valore iniziale  $z_0$  che si vuol assegnare come corrispondente al valore  $y_0$  di  $y$ . La cosa può anche mettersi sotto altra forma; può dirsi cioè che, fissato sin da principio un valore  $z_0$  e denotando con  $z_0, y_0$  una coppia di valori corrispondenti di  $z, y$ , i punti di diramazione  $z = Z$  dell'integrale della  $(\beta)$  e quelli  $y = Y$  dell'integrale della  $(\delta)$  sono indipendenti del valore  $y_0$ . Ammettiamo inoltre che fra i punti di diramazione della

specie  $a$ ) di ciascuno dei due integrali uno almeno sia regolare, e denotiamo più specialmente con  $Z, Y$  due punti di questa natura. Nel punto  $Z$  di tutti i fogli della superficie  $R$  corrispondente alla funzione  $y = \varphi(z)$ ,  $\frac{dy}{dz}$  diviene infinita (teorema V). Parimenti nel punto  $Y$  di tutti i fogli della superficie  $R$  corrispondente alla funzione  $z = \theta(y)$ ,  $\frac{dz}{dy}$  diviene infinita; cioè  $\frac{dy}{dz}$  si annulla per tutti i valori di  $z$  dati dalla  $z = \theta(Y)$  o, ciò che è lo stesso, dalla  $\varphi(z) = Y$ . Ora, se  $y = \varphi(z)$ , e quindi anche (teorema A)  $z = \theta(y)$ , è della 2.<sup>a</sup> famiglia, potrà (n.° 11) sempre scegliersi  $y_0$  in modo che il campo di condensazione dei valori di  $z$  dati dalla  $\varphi(z) = Y$  contenga un punto preso ad arbitrio nel piano  $z$ , per es. il punto  $Z$ . Preso  $y_0$  in tal modo, avremo nel piano  $z$  nell'intorno di  $Z$  un insieme condensato di punti in cui  $\frac{dy}{dz} = 0$ ; e, qualunque sia il modo in cui questi punti si distribuiscono sugli infiniti fogli della  $R$  corrispondente alla funzione  $y = \varphi(z)$ , siccome per  $z = Z$  si ha in tutti i fogli  $\frac{dy}{dz} = \infty$ , vi sarà sempre un'infinità di fogli in cui un posto-zero ed un punto d'infinito della  $\frac{dy}{dz}$  disteranno fra loro meno d'una quantità reale arbitrariamente piccola, il che è impossibile, perchè  $\frac{dy}{dz}$  è una funzione uniforme sulla  $R$ .

Concludendo, l'ipotesi che i punti di diramazione delle due funzioni  $y = \varphi(z)$  e  $z = \theta(y)$  sieno fissi e che queste funzioni siano della 2.<sup>a</sup> famiglia, ci conduce ad un risultato assurdo. Dunque:

**Teorema VIII.** *Se la funzione  $y$  di  $z$  e la funzione  $z$  di  $y$  definite da un'equazione algebrico-differenziale del primo ordine fra  $y$  e  $z$  hanno i punti di diramazione fissi, e se uno almeno dei punti di diramazione della specie  $a$ ) per ciascuna delle due funzioni è regolare, quelle funzioni appartengono alla 1.<sup>a</sup> famiglia almeno per qualche valore della costante arbitraria (\*).*

Mantova, 31 agosto 1890.

---

(\*) Cfr. FUCHS, Sitzungsber., 1885, pag. 11, dove però non v'ha alcuna restrizione riguardo alla natura dei punti di diramazione. Possiamo tuttavia domandarci, se la trattazione di FUCHS non escluda implicitamente i punti di diramazione non regolari; ma tale questione è estranea al nostro compito. — Riserbiamo pure ad altra occasione lo studio della questione, se possa avvenire che gl'integrali d'un'equazione algebrico-differenziale del primo ordine corrispondenti a certi valori della costante arbitraria sieno della 1.<sup>a</sup> famiglia e quelli corrispondenti a certi altri valori della medesima sieno della seconda,

# Theorie der Elemententripel einstufiger Elementargebilde.

(Von BENNO KLEIN, in Marburg in Hessen.)

---

## Theil II. — DAS TRIPELGEBIET.

In einer in dieser Zeitschrift erschienenen Arbeit: *Beitrag zur Theorie der Elemententripel einstufiger Elementargebilde* habe ich den ersten Theil der im Titel genannten Theorie abgehandelt. Er enthielt die Geometrie einer zweifachen Mannigfaltigkeit von Elemententripeln, eines Tripelnetzes. Er schloss mit einem Beweis des Satzes, dass, wenn ein Tripel  $\beta$  in einem Netze enthalten ist, dessen dreifache Punkte das Tripel  $\alpha$  bilden, dann auch  $\alpha$  ein Tripel des Netzes ist, dessen dreifache Punkte das Tripel  $\beta$  bilden. Zwei solche Tripel heissen conjugirt oder apolar. Der Beweis des Satzes war allgemein gefuehrt und gruendete sich auf die Betrachtung der projectiven Beziehung einer einfachen und einer Elementenpaarreihe, die denselben Traeger haben.

In den folgenden Ausfuehrungen § 6 *a* wird nun ein zweiter Beweis dieses Satzes gegeben; er gruendet sich auf die Lehre von den Polvierseiten eines Kegelschnitts. Durch den Satz wird es moeglich im « Tripelgebiet » wie das System aller Tripel eines Elementargebildes heissen kann, das Gesetz der Reciprocitaet zur Geltung zu bringen. Indem man naemlich die saemmtlichen Tripel, die einem gegebenen Tripel conjugirt sind und welche das Netz bilden, das die Elemente jenes Tripels zu dreifachen Elementen hat das Polarnetz des Tripels, und das Tripel das Polartripel des Netzes nennt, erkennt man, dass im Tripelgebiete zwischen Tripel und Tripelnetz dieselbe polare Beziehung besteht wie im raeumlichen Nullsystem zwischen Ebene und Punkt. Diesen Betrachtungen sind die §§ 6 *a* bis 11 gewidmet.

Zwei Tripelnetze auf demselben Traeger haben eine cubisch-involutorische Reihe, oder, wie ich sie kurz nenne, eine « Tripelreihe » gemein. Mit der Geometrie dieser Gebilde, namentlich auch ihrer Eintheilung in Arten, deren sich acht ergeben, beschaeftigen sich die §§ 12 bis 22. Die §§ 6 a bis 22 bilden den Inhalt der vorliegenden Arbeit welche als der zweite Theil der im Titel genannten Theorie aufzufassen ist. Es erscheint bemerkenswerth, dass die cubisch-involutorischen Reihen in zwei Hauptgruppen zerfallen, die sich so unterscheiden, dass zur Bestimmung einer Reihe der einen Gruppe zwei Elemententripel beliebig angenommen werden koennen, waehrend eine Reihe der zweiten Gruppe bestimmt ist, wenn drei Elemente eines Tripels und zwei Elemente eines zweiten gegeben sind. Durch eine Tripelreihe der ersten Art ist allemal eine zweite, zu ihr gehoerige, ihre « Polarreihe » (§ 16) bestimmt. Die Polarreihe einer Reihe der zweiten Art faellt mit dieser selbst zusammen. Diese Eintheilung ist, wie sich spaeter zeigt, die vollkommene Analogie der Eintheilung der Strahlen des Raumes in Bezug auf eine Raumcurve III. Ordnung und das durch sie bestimmte Nullsystem. Den Reihen der ersten Art entsprechen Strahlen, die sich nicht selbst conjugirt sind, den Reihen der anderen entsprechen die Leitstrahlen des Nullsystems.

Das Tripelgebiet irgend eines Elementargebildes ist eine geometrische Mannigfaltigkeit, welche die naemlichen Lagenverhaeltnisse besitzt, wie unser Punkt und Ebenenraum. Deshalb gilt fuer das Tripelgebiet nach einem Satze des Herrn F. KLEIN (\*) die projective Geometrie in der von Standtschen Begrueendung. Man kann daher das Tripelgebiet z. B. einer Curve II. Ordnung projectiv auf den Raum beziehen, indem man den Punkttripeln der Curve die Ebenen (oder nach Belieben die Punkte) des Raumes eindeutig zuordnet. Nun giebt es auf der Curve zweiter Ordnung, dem Traeger des Tripelgebietes, einfach unendlich viele singulaere Tripel, deren Punkte je in einen zusammenfallen, naemlich so viele, als der Traeger Punkte enthaelt. Fragt man nach dem Orte der Ebenen welche diesen singulaeren Tripeln entsprechen, so findet man die saemmtlichen Schmiegungeebenen einer Raumcurve dritter Ordnung. Auf diese Weise gelangt man auf neuem und sehr allgemeinem Wege zur Theorie dieser Curve und des mit ihr verknuepften raecumlichen Nullsystems.

Es ergiebt sich ferner hieraus, dass man auch den umgekehrten Weg einschlagen kann, um die Eigenschaften des Tripelgebiets irgend eines einstufigen Gebildes zu finden. Setzt man naemlich die Theorie der Raumcurve

---

(\*) Mathematische Annalen, Bd. 6.

dritter Ordnung als bekannt voraus, so gelangt man zu den Eigenschaften ihres Tripelgebiets und damit derjenigen aller Elementargebilde, wenn man die Tripel von Schnittpunkten betrachtet welche von allen Ebenen des Raumes auf der Curve bestimmt werden.

In diesem Theile beruehrt sich meine Arbeit mit der Abhandlung des Herrn STURM « Darstellung binaerer Formen auf der cubischen Raumcurve (\*) ».

Der Schluss-Paragraph enthaelt eine Construction der Schnittpunkte einer Ebene mit einer cubischen Raumcurve, welche sich auf die Construction der dreifachen Punkte eines Punkttripelnetzes eines Kegelschnitts reducirt in aehnlicher Weise, wie die Construction der Schnittpunkte einer Geraden mit einem Kegelschnitt auf die Auffindung der Doppelpunkte einer quadratisch-involutorischen Reihe zurueckgefuehrt wird.

Analog zu der Art, wie hier die Punkttripel eines einstufigen Gebildes mit einer cubischen Raumcurve und der Geometrie des Raumes ueberhaupt in Verbindung gesetzt wird ist von HESSE in seinen « vier Vorlesungen (\*\*) die Theorie der Punktpaare einer Geraden mit der Curve II. Ordnung und der Geometrie der Ebene in Verbindung gesetzt worden ».

Die Einfuehrung der neuen Namen, die ich mir erlaubt habe, entspringt dem Wunsche, einem auch schon von HESSE an demselben Orte (\*\*\*) kundgegebenen Beduerfnisse nach kurzen Bezeichnungen, abzuhefen.

Der im Vorigen angegebene Inhalt der §§ 23 bis 31 wird als dritter Theil der im Titel genannten Arbeit als eine Fortsetzung der hier gegebenen Ausfuehrungen sich anschliessen.

Mit den Eigenschaften eines Punkttripelnetzes, dessen Traeger eine Curve zweiter Ordnung ist, steht wie schon in der Einleitung des ersten Theils der Arbeit erwaehnt wurde, in engster Verbindung die Lehre von den Curven dritter Classe mit einer Doppeltangente.

Insofern kann die Arbeit, wenn sie auch als selbstaendige erscheinen soll, als eine Fortsetzung der vorliegenden aufgefasst werden.

Marburg (Hessen), 10 Juli 1890.

---

(\*) Crelle Borchardts Journal, Bd. 86, p. 116.

(\*\*) Vier Vorlesungen. Leipzig, 1866.

(\*\*\*) L. c., p. 57.

*Annali di Matematica*, tomo XIX.

$\alpha$ . Wir betrachten die Gesamtheit aller auf einer Curve II. Ordnung liegenden Punkttripel. Diese Gesamtheit bildet eine dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, denndurch drei Punkte ist ein Tripel eindeutig bestimmt. Diese Mannigfaltigkeit mag das « Punkttripelgebiet » der Curve  $\alpha$  heissen. Das Element derselben ist das Punkttripel. Die Gesamtheit aller in dem Punkttripelgebiet von  $\alpha$  enthaltenen Punkttripelnetze, welche ein Tripel gemein haben, soll ein « Bündel von Punkttripelnetzen » oder kurz ein « Netzbündel » heissen. Das allen Netzen desselben gemeinsame Tripel heisst das « Basistripel » des Netzbündels.

Da ein Tripelnetz durch seine drei dreifachen Punkte allemal bestimmt ist, jedes beliebige Punkttripel aber als das Tripel dreifacher Punkte eines Tripelnetzes angesehen werden kann so folgt, dass es im Tripelgebiet der Curve  $\alpha$  dreifach unendlich viele Netzbündel giebt nämlich eben so viele als es Punkttripel giebt. Durch das Basistripel ist ein Netzbündel bestimmt.

Irgend zwei Tripel bestimmen mit dem Basistripel im Allgemeinen ein Netzdesselben.

7. Polarentheorie des Tripelgebiets. Die drei dreifachen Punkte eines Tripelnetzes können wir als ein Tripel einfacher Punkte auffassen und darum soll dies Tripel das « Polartripel » des Netzes heissen, dessen dreifache Punkte mit den Punkten dieses Tripels identisch sind Jedes Tripelnetz besitzt somit ein Polartripel. Jedes Tripel ist aber auch Polartripel eines Tripelnetzes welches das « Polartripelnetz » des Tripels heissen soll, nämlich desjenigen Netzes, dessen dreifache Punkte mit den Punkten des gegebenen Tripels identisch sind. Zu jedem Tripel gehört also ein Polarnetz, zu jedem Tripelnetz ein Polartripel.

Ist ein Tripel  $A$  Polartripel eines Netzes  $\alpha$ , so ist auch das Netz  $\alpha$  Polarnetz des Tripels  $A$ .

8. Für die Beziehungen von Tripeln und Netzen ist der schon im § 5  $\alpha$  bewiesene Satz ein Hauptsatz Wir beweisen ihn hier noch einmal auf Grund gewisser Sätze über die Polvierseite einer Curve zweiter Ordnung. Der Satz kann jetzt so ausgesprochen werden.

Ist das Tripel  $ABC$  in dem Polarnetze des Tripels  $UVW$  enthalten so ist auch das Tripel  $UVW$  in dem Polarnetze des Tripels  $ABC$  enthalten.

Das Polarnetz des Tripels  $UVW$  hat die Punkte (Fig. I.)  $U, V, W$  zu dreifachen Punkten. Construiert man die Pascalsche Gerade  $p$  des Dreiecks  $UVW$  bezüglich der Curve  $\alpha$ , und bezieht man  $\alpha$  projectiv auf  $p$  so, dass den Punkten  $U, V, W$  die Punkte  $U_0, V_0, W_0$  zugeordnet sind, in denen  $p$  von den Geraden  $VW, WU, UV$  geschnitten wird, so bilden  $ABC$  ein Tripel des Polarnetzes des Tripels  $UVW$ , wenn  $p$  von den Geraden  $BC, CA, AB$  in drei Punkten geschnitten wird, die den Punkten  $ABC$  von  $\alpha$  in derjenigen projectiven Beziehung entsprechen welche durch  $\alpha(UVW) \overline{\wedge} p(U_0, V_0, W_0)$  ausgedrückt ist.

Ist  $p'$  die Pascalsche Gerade des Dreiecks  $ABC$  bezüglich der Curve  $\alpha$  und schneiden die Geraden  $BC, CA, AB$  die Gerade  $p$  in den Punkten  $A_0, B_0, C_0$ , so bilden auch  $UVW$  ein Tripel des Polarnetzes des Tripels  $ABC$ , wenn die Geraden  $VW, WU, UV$  die Gerade  $p$  in drei Punkten schneiden, die den Punkten  $U, V, W$  von  $\alpha$  in derjenigen projectiven Beziehung zugeordnet sind, welche durch  $\alpha(A, B, C) \overline{\wedge} p'(A_0, B_0, C_0)$  ausgedrückt ist. Dass dies der Fall ist, sobald die Punkte  $ABC$  ein Tripel des Polarnetzes von  $UVW$  bilden, soll nun bewiesen werden.

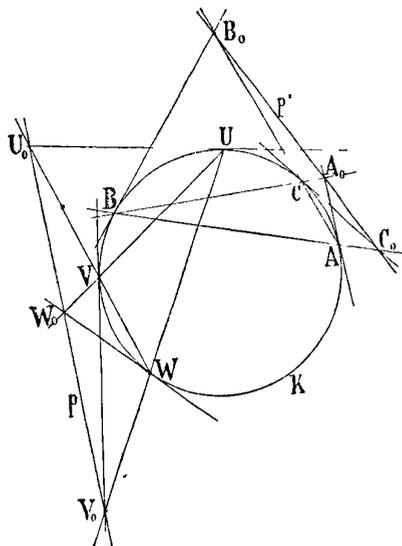


Fig. 1.

Bilden die Punkte  $ABC$  ein Tripel des Polarnetzes des Tripels  $UVW$ , so sind die Seiten der Dreiecke  $UVW$  und  $ABC$  sowie auch die Gerade  $p$  Tangenten eines und desselben Kegelschnitts  $\gamma$ .

Nun bilden die Geraden  $p, UV, VW, VU$  ein vollständiges Vierseit von der Art dass je zwei gegenüberliegende Eckpunkte  $U$  und  $U_0, V$  und  $V_0, W$  und  $W_0$  bezüglich der Curve  $\alpha$  conjugirt sind. Das Vierseit ist also ein „Polvierseit“ der Curve  $\alpha$  (\*).

Ein Polvierseit einer Curve  $\alpha$  ist durch drei seiner Seiten bestimmt. Man erhält die vierte, wenn man die Seiten des von den drei gegebenen Geraden gebildeten Dreiecks mit den Polaren der gegenüberliegenden Ecken zum

(\*) REYE, *Geometrie der Lage*, II. Aufl., I. Abth., p. 191.

Durchschnitt bringt. Die drei Durchschnittspunkte liegen auf einer Geraden, der vierten Seite des Polvierseits. Daraus folgt, dass die drei Seiten eines der Curve  $\alpha$  eingeschriebenen Dreiecks, z. B.  $ABC$  immer durch die Pascalsche Gerade  $p'$  des Dreiecks bezüglich  $\alpha$  zu vier Seiten eines Polvierseits von  $\alpha$  ergänzt werden.

Nun gilt ferner der Satz (\*):

Ist einem Kegelschnitt  $\gamma$  ein Polvierseit eines zweiten Kegelschnitts  $\alpha$  umschrieben, so bestimmen irgend drei Tangenten von  $\gamma$  ein Polvierseit von  $\alpha$ , dessen vierte Seite gleichfalls Tangente von  $\gamma$  ist.

Nun bilden  $p, UV, VW, WU$  ein Polvierseit von  $\alpha$ , das einem Kegelschnitt  $\gamma$  umschrieben ist, der auch von den Geraden  $AB, BC, CA$  berührt wird. Diese Geraden  $AB, BC, CA$  werden aber durch die Gerade  $p'$  zu einem Polvierseit von  $\alpha$  ergänzt folglich ist  $p'$  auch Tangente von  $\gamma$ .

Es sind somit die Seiten des Dreiecks  $UVW$  und  $ABC$  und die Geraden  $p$  und  $p'$  Tangenten eines und desselben Kegelschnitts  $\gamma$  woraus denn die Beziehung folgt:

$$p(VW \ WU \ UV, BC, CA, AB) \bar{\wedge} p'(VW, WU, UV, BC \ CA \ AB).$$

Aber da  $ABC$  ein Tripel des Polarnetzes von  $UVW$  ist, ist auch:

$$p(VW, WU, UV, BC, CA, AB) \bar{\wedge} \alpha(U, V, W, A, B, C),$$

und daher auch:

$$p'(VW, WU, UV, BC, CA, AB) \bar{\wedge} \alpha(U, V, W, A, B, C).$$

Die letzte Relation zeigt aber, dass die Geraden  $VW, WU, UV$  die Gerade  $p'$  in drei Punkten schneiden, die den Punkten  $UVW$  zugeordnet sind in derjenigen projectiven Beziehung die durch  $p'(A_0, B_0, C_0) \bar{\wedge} \alpha(A, B, C)$  ausgedrückt ist. Dann aber bilden die Punkte  $UVW$  ein Tripel des Polarnetzes des Tripels  $ABC$ , was wir beweisen wollten (\*\*).

9. Zwei Tripel des Tripelgebiets der Curve  $\alpha$ , von denen jedes im Polarnetze des andern liegt, können „conjugirte“ Tripel, zwei Netze des Tripelgebiets, deren jedes das Polarnetz des andern enthält „conjugirte Netze“ heissen.

(\*) L. c., p. 194.

(\*\*) Vergl. STURM, Crelles Journal, Bd. 86, p. 119.

Sind zwei Tripel conjugirt, so sind es auch ihre Polartripel. Dem Satze des vorigen Paragraphen lässt sich dann folgende Fassung geben:

Von zwei Tripeln des Tripelgebiets ist jeder oder keiner dem andern conjugirt.

Von zwei Netzen des Tripelgebiets ist keines oder jedes dem andern conjugirt.

Einem Tripel sind sämmtliche Tripel seines Polarnetzes conjugirt.

Einem Netze sind sämmtliche Netze, die durch sein Polartripel gehen, conjugirt.

Weil von zwei Tripeln keines oder jedes in dem Polarnetze des andern liegt und von zwei Netzen keines oder jedes durch das Polartripel des andern geht, so folgt weiter:

Beschreibt ein Tripel ein Netz, so dreht sich sein Polarnetz um ein festes Tripel, das Polartripel des gegebenen Netzes.

Dreht sich ein Netz um ein Tripel, so beschreibt sein Polartripel ein Netz das Polarnetz des gegebenen Tripels.

Oder auch:

Die Polarnetze des Tripels eines Netzes bilden einen Netzbündel.

Die Polartripel der Netze eines Netzbündels bilden ein Netz.

Dieser Doppelsatz zeigt dass für das Tripelgebiet der Curve  $\alpha$  das Reciprocitätsgesetz gilt, indem nämlich Tripel und Tripelnetz als reciproke Elemente des Gebiets aufgefasst werden können und dann aus jedem Satze, der von Mannigfaltigkeiten von Elementen der einen Art handelt, mittelst des obigen Satzes immer ein reciproker Satz abgeleitet werden kann, der von Elementen der anderen Art handelt.

Aus dem Vorigen ergibt sich zugleich eine zweite Definition des Netzbündels:

Ein Netzbündel besteht aus der Gesamtheit der Netze, deren dreifache Punkte die Tripel eines Tripelnetzes bilden.

Denn die drei dreifachen Punkte eines Netzes bilden dessen Polartripel.

10. In dem Polarnetz des Tripel  $UVW$ , demjenigen Netze also, dessen dreifache Punkte die Punkte  $U, V, W$  sind, ist das Tripel  $UVW$  selbst enthalten.

Also gelten die Sätze:

Jedes Tripel des Tripelgebiets ist sich selbst conjugirt.

Jedes Tripel liegt in seinem Polarnetz.

Jedes Netz geht durch sein Polartripel.

Die Reciprocität des Tripelgebiets ist also, abgesehen von der Verschiedenheit der Elemente die naemliche als die des raemlichen Nullsystems. Dass es in dieses direct ueberguehrt werden kann, soll spaeter gezeigt werden.

Drei Tripel bestimmen im Allgemeinen ein Tripelnetz. Daraus folgt nach dem Reciprocitaetsgesetz:

Drei Tripelnetze bestimmen im Allgemeinen ein Netzbuendel. In der That bestimmen die drei Polartripel der drei Netze ein Netz und die Polarnetze der Tripel dieses Netzes bilden einen Buendel, in dem die drei gegebenen Netze enthalten sind.

Man kann den Satz auch so aussprechen:

Drei Tripelnetze haben im Allgemeinen ein Tripel gemein.

11. Sieht man davon ab, ob in einem Punkttripel alle Punkte reell oder zwei conjugirt-imaginaer sind, so giebt es drei Arten von Tripeln, das Tripel mit drei discreten Punkten, dasjenige mit zwei zusammenfallenden oder einem Doppelpunkt und dasjenige mit drei zusammenfallenden Punkten oder der dreifache Punkt. Dem entsprechend kann man drei Arten von Tripelnetzen unterscheiden. Die erste Art enthaelt drei discrete dreifache Punkte, bei der zweiten fallen zwei dreifache Punkte zusammen, bei der dritten fallen alle drei zusammen, oder was auf dasselbe hinauskommt, das Polartripel der ersten Art besteht aus drei discreten Punkten, das der zweiten Art enthaelt einen Doppelpunkt, das der dritten ist ein dreifacher Punkt.

Ein Netz der letzten Art wollen wir noch genauer untersuchen. Giebt man irgend ein Tripel  $UVW$  als Polartripel eines Netzes, so ist jeder der drei Punkte ein dreifacher Punkt des Netzes, also dem Tripel  $UVW$  conjugirt. Haelt man den Punkt  $U$  fest, so kann man  $V$  und  $W$  beliebig annehmen, woraus folgt:

Jeder Punkt als dreifacher Punkt gezaehlt, ist jedem Punkttripel, dem er angehoert, conjugirt.

Folglich bildet jedes Punktpaar der Curve  $\alpha$  in Verbindung mit einem

festen Punkte  $U$  ein dem dreifachen Punkte  $U$  conjugirtes Tripel, und da alle einem Tripel conjugirten Tripel ein Netz bilden, so folgt:

Alle Punktpaare der Curve  $\kappa$  in Verbindung mit einem festen Punkt  $U$  bilden ein Tripelnetz dessen dreifache Punkte in dem Punkt  $U$  zusammenfallen.

Und wenn umgekehrt die dreifachen Punkte eines Netzes in einen Punkt  $U$  zusammenfallen, so bildet jedes Punktpaar von  $\kappa$  mit  $U$  ein Tripel des Netzes. Wir wollen ein Punkttripel mit einem Doppelpunkt ein singulaeres Tripel erster Art, ein solches das aus einem dreifachen Punkt besteht, ein singulaeres Tripel zweiter Art nennen, und ebenso ein Netz dessen Polartripel, einen Doppelpunkt enthaelt, ein singulaeres Netz erster Art, ein solches, dessen Polartripel aus einem dreifachen Punkte besteht, ein singulaeres Netz zweiter Art nennen.

Da es nun in jedem Netz drei singulaere Tripel zweiter Art, und unendlich viele erster Art giebt, so giebt es auch in einem Netzbuendel drei singulaere Netze zweiter Art und unendlich viele erster Art. Die Polartripel der singulaeren Netze sind so geordnet, dass zu jedem Punkte von  $\kappa$  zwei andere so gehoeren, dass jeder derselben als Doppelpunkt mit dem ersten Punkt das Polartripel eines singulaeren Netzes bildet. Die Doppelpunkte der Polartripel sind Punktpaare einer Punktpaarreihe und sind als solche den Punkten mit denen sie ein Tripel bilden, projectiv zugeordnet.

## 12. *Tripelreihen und Bueschel von Tripelnetzen.*

Die Punktpaare welche in einem Tripelnetze einen und denselben Punkt zum gemischten Pol haben, also durch ihn zu einem Tripel des Netzes ergaenzt werden, bilden eine Punktpaarreihe (quadratisch-involutorische Reihe). Sind nun auf der Curve  $\kappa$  zwei Tripelnetze gegeben, so gehoeren zu jedem Punkte  $A$  von  $\kappa$  zwei Punktpaarreihen, von denen die Paare der einen in dem einen Netz, die Paare der anderen in dem anderen Netz den Punkt  $A$  zum gemischten Pol haben. Die beiden Punktpaarreihen haben ein Paar  $BC$  gemein, dessen gemischter Pol in beiden Netzen der Punkt  $A$  ist. Also ist  $ABC$  ein beiden Netzen gemeinsames Tripel. Da nun  $A$  ein beliebiger Punkt ist, so folgt:

Zwei Tripelnetze des Tripelgebietes der Curve  $\kappa$  haben eine einfache lineare Mannigfaltigkeit von Tripeln gemein. Sie heisse « Tripelreihe » (cubisch-involutorische Reihe).

Zugleich ergibt sich:

Durch einen Punkt eines Tripels einer Tripelreihe ist das Tripel bestimmt.

Sind zwei Tripel gegeben, so haben ihre Polarnetze eine Tripelreihe gemein. Die Polarnetze der Tripel dieser bilden eine einfache Mannigfaltigkeit welche die gegebenen beiden Netze enthaelt und durch sie bestimmt ist. Diese Mannigfaltigkeit mag ein « Bueschel von Tripelnetzen » heissen.

Sie liegt in den beiden Netzbuendeln, deren Basistripel die gegebenen Tripel sind. Also erhalten wir den Satz:

Zwei Netzbuendel haben einen Bueschel von Tripelnetzen gemein. Zugleich folgt:

Die Polarnetze der Tripel einer Tripelreihe bilden einen Netzbueschel. Die Polartripel der Netze eines Netzbueschels bilden eine Tripelreihe. — Da irgend zwei Tripel einer Tripelreihe in den beiden Netzen, deren Schnitt die Reihe ist, liegen, die beiden Netze aber durch die beiden Tripel und je ein ihnen nicht gleichzeitig angehoerendes drittes Tripel bestimmt sind, so ist es auch ihr Schnitt, die Reihe. Also folgt:

Eine Tripelreihe ist durch irgend zwei ihrer Tripel bestimmt.

Ein Netzbueschel ist durch irgend zwei seiner Netze bestimmt.

Zwei Tripelreihen, die zwei Tripel, zwei Netzbueschel, die zwei Netze gemein haben, sind daher identisch.

Eine Tripelreihe die mit einem Netze zwei Tripel gemein hat, liegt ganz in demselben.

Ein Netzbueschel, der mit einem Netzbuendel zwei Netze gemein hat, liegt ganz in demselben.

Denn (links) das Netz welches mit der Reihe zwei Tripel gemein hat, schneidet jedes der beiden Netze deren Schnitt die Tripelreihe ist, in einer Tripelreihe welche mit der gegebenen zwei, also alle Tripel gemein hat. Wir schliessen daraus:

Die Netze eines Netzbueschels haben eine Tripelreihe gemein; der Netzbueschel liegt daher in allen Buendeln deren Basistripel der Reihe angehoeren.

Die Netzbuendel, deren Basistripel eine Tripelreihe bilden, haben einen Netzbueschel gemein; die Reihe liegt daher in allen Netzen des Bueschels.

Denn (links) zwei Netze des Bueschels schneiden sich in einer Tripelreihe, die in jedem Netze des Bueschels liegt, weil sie mit dem Netze zwei Tripel, die Basistripel der beiden Buendel, durch welche der Bueschel erzeugt wird, gemein hat. Daher liegt der Bueschel auch in jedem Buendel, dessen Basistripel der Reihe angehört.

Daher gilt nun allgemein:

Durch zwei Tripel ist eine Tripelreihe und ein durch sie gehender Netzbueschel bestimmt.

Durch zwei Netze ist ein Netzbueschel und eine in diesem liegende Tripelreihe bestimmt.

Denn (links) die beiden Tripel mit je einem nicht der Reihe angehörenden Tripel verbunden, liefern zwei Netze desjenigen Bueschels, dessen Netze die Tripelreihe gemein haben.

Eine Tripelreihe ist sich daher im Tripelgebiet selbst reciprok; sie ist sowohl Traeger von Tripeln als auch von Netzen.

13. Aus dem Vorigen ergiebt sich unmittelbar der Satz:

Drei Tripel bestimmen dann, aber auch nur dann ein Tripelnetz, wenn sie nicht einer Tripelreihe angehören.

Drei Netze bestimmen dann, aber auch nur dann einen Netzbuendel (schneiden sich in einem Tripel) wenn sie nicht durch eine und dieselbe Tripelreihe gehen (einem Netzbueschel angehören).

Weiter gelten die Saetze:

Eine Tripelreihe und ein ihr nicht angehörendes Tripel bestimmen ein Tripelnetz, in dem sie liegen.

Eine Tripelreihe und ein sie nicht enthaltendes Netz bestimmen ein Tripel, durch das sie gehen (haben ein Tripel gemein).

14. Fuer die Geometrie des Tripelnetzes und Tripelnetzbuendels gelten die folgenden Saetze, deren Richtigkeit schon aus der Analogie dieser Geometrie mit der der Ebene und des Strahlenbuendels folgt:

Zwei Tripelreihen eines Netzes haben ein Tripel gemein.

Zwei Tripelreihen eines Netzbuendels liegen in einem Netz.

Umgekehrt:

Schneiden sich zwei Tripelreihen (d. h. haben sie ein Tripel gemein), so liegen sie in einem Netze.

Liegen zwei Tripelreihen in einem Netz, so haben sie ein Tripel gemein. Durch zwei sich schneidende Tripelreihen ist also sowohl ein Netz, wie auch ein Tripel bestimmt.

Wir wollen alle Tripelreihen, die in einem Netz liegen, und ein Tripel gemein haben, einen « Bueschel von Tripelreihen » nennen.

Aus jedem Tripel eines Netzes wird eine Tripelreihe desselben der das Tripel nicht angehoert durch einen Bueschel von Tripelreihen « projecirt ».

Durch jedes Netz eines Buendels wird ein Netzbueschel desselben, dem das Netz nicht angehoert, in einem Bueschel von Tripelreihen geschnitten.

Ferner:

Zwei Tripelreihen eines Netzes bestimmen einen Reihenbueschel desselben.

Zwei Tripelreihen eines Netzbuendels bestimmen einen Reihenbueschel desselben.

Zwei Tripelreihenbueschel eines Netzes haben eine Reihe gemein. Zwei Tripelreihenbueschel eines Netzbuendels haben eine Reihe gemein.

Ein Tripelnetz enthaelt  $\infty^2$  Tripel und  $\infty^2$  Tripelreihen; ein Netzbuendel enthaelt  $\infty^2$  Netze und  $\infty^2$  Tripelreihen oder Netzbuendel.

15. Zwei beliebige Tripelreihen des Tripelgebietes haben im Allgemeinen kein Tripel gemein.

Denn sonst laegen sie in einem Netze; man kann aber die beiden Tripelpaare, durch die die Reihen bestimmt sind, so annehmen, dass dies nicht der Fall ist.

16. Die Polarnetze der Tripel einer Tripelreihe haben eine zweite Tripelreihe gemein, denn sie bilden einen Netzbueschel. Je zwei Tripel zweier solchen Reihen und je zwei durch sie gehende Tripelnetze sind conjugirt. Beschreibt ein Tripel eine der beiden Reihen, so dreht sich sein Polarnetz um die andere Reihe oder umgekehrt. Zugleich liegt jedes Tripel in seinem Polarnetz und man kann daher sagen dass jede der beiden Tripelreihen zu dem Bueschel der Polarnetze der Tripel der Reihe « perspectiv » liege.

Zwei Tripelreihen deren jede die Polartripel der durch die anderen ge-

henden Netze enthaelt, koennen « conjugirte » Tripelreihen heissen oder auch jede die « Polarreihe » der anderen.

Zwei conjugirte Tripelreihen haben im Allgemeinen kein Tripel gemein.

Denn sei  $\alpha$  ein gemeinsames Tripel derselben,  $\beta$  ein Tripel der einen Reihe, so muss  $\beta$  auch ein Tripel der anderen Reihe, also die beiden Reihen, da sie zwei Tripel  $\alpha$  und  $\beta$  gemein haben, identisch sein. Naemlich die eine Reihe enthaelt jedes Tripel das zwei und daher allen Tripeln der anderen gleichzeitig conjugirt ist. Nun ist  $\beta$  sich selbst und zweitens dem Tripel  $\alpha$  conjugirt und gehoert folglich auch der zweiten Reihe an. Es folgt daraus:

Haben zwei conjugirte Tripelreihen ein Tripel gemein, so haben sie jedes gemein und sind also identisch. Eine solche Reihe kann eine « sich selbst conjugirte » Reihe heissen.

Je zwei Tripel einer sich selbst conjugirten Reihe und je zwei durch sie gehende Netze sind conjugirt.

Durch irgend zwei conjugirte Tripel oder Netze ist eine sich selbst conjugirte Tripelreihe bestimmt. Denn sie bestimmen eine Reihe deren conjugirte die beiden Tripel oder Netze gleichfalls enthalten muss. Daher ist jede Reihe die mit jeder von zwei Polarreihen ein Tripel gemein hat, eine sich selbst conjugirte Reihe.

Da jedes Tripel in seinem Polarnetz liegt, und jedem Tripel desselben conjugirt ist, so folgt:

In jedem Tripelnetz liegt ein Bueschel von sich selbst conjugirten Reihen, dessen Basistripel das Polartripel des Netzes ist.

Durch jedes Tripel geht ein Bueschel von sich selbst conjugirten Reihen, dessen Traeger das Polarnetz des Tripels ist.

### 17. Eintheilung der Tripelreihen in Arten.

Eine Tripelreihe des Tripelgebietes kann als Schnitt zweier Tripelnetze desselben angesehen werden.

In jedem von zwei Netzen des Tripelgebiets der Curve  $\alpha$  bilden die Paare der ersten Pole der Punkte von  $\alpha$  eine zu den Punkten von  $\alpha$  projective Punkt-paarreihe. (Ein erster Pol eines Punktes  $A$  von  $\alpha$  in einem Netz ist der Doppelpunkt eines singulaeren Tripels des Netzes, dessen einfacher Punkt der

Punkt  $A$  ist.) Die beiden Punktpaarreihen sind projectiv, wenn man je zwei Paare einander zuordnet, die Pole eines und desselben Punktes in dem einen oder anderen Netze sind. Jeder entsprechend gemeinschaftliche Punkt der beiden Reihen ist erster Pol eines Punktes von  $\alpha$  in beiden Netzen, also Doppelpunkt eines beiden Netzen gemeinschaftlichen singulaeren Tripels. Daraus folgt:

Eine Tripelreihe enthaelt im Allgemeinen vier Tripel mit einem Doppelpunkt. (Doppelpunkte der cubisch-involutorischen Reihe.)

Doch ist dies nur der allgemeine Fall. Die moeglichen Specialisirungen desselben liefern ein Princip der Eintheilung der Tripelreihen in Arten; eine zweite Eintheilung ist durch die Unterscheidung von Reihen, die sich selbst conjugirt sind, oder nicht, gegeben. Endlich lassen sich die Tripelreihen noch darnach unterscheiden, ob sie eigentliche Reihen sind, oder in Reihen niederer Ordnung zerfallen.

1) Zwei beliebig anzunehmende Tripel bestimmen eine Reihe.

Nimmt man zwei Tripel  $ABC$  und  $ABD$ , welche zwei Punkte  $A$  und  $B$  gemein haben, so gehoeren  $A$  und  $B$  jedem Tripel der durch jene beiden bestimmten Reihe an.

Oder:

Zwei feste Punkte  $A$  und  $B$  bilden mit jedem dritten Punkte der Curve  $\alpha$  die Tripel einer Tripelreihe.

Denn alle Tripel, welche die beiden Punkte  $A$  und  $B$  enthalten, sind sowohl dem dreifachen Punkte  $A$  wie dem dreifachen Punkte  $B$  conjugirt (7) bilden also die Polarreihe der durch die beiden dreifachen Punkte  $A$  und  $B$  als Tripel bestimmten Reihe. Zugleich folgt hieraus:

Die Polarreihe einer Tripelreihe deren Tripel zwei feste Punkte  $A$  und  $B$  gemein haben, ist eine Reihe, welche die Punkte  $A$  und  $B$  zu dreifachen Punkten hat.

Und umgekehrt:

Eine Reihe mit zwei dreifachen Punkten  $A$  und  $B$  hat zur Polarreihe eine Reihe, deren Tripel saemmtlich die Punkte  $A$  und  $B$  enthalten.

Eine Reihe mit zwei dreifachen Punkten kann kein weiteres singulaeres Tripel enthalten; einen dreifachen Punkt deshalb nicht, weil er dann jedem Tripel der Polarreihe angeh hoeren muesste, deren Tripel schon zwei feste

Punkte enthalten, aber auch kein Tripel mit einem Doppelpunkt; denn sind  $A$  und  $B$  die dreifachen Punkte der Reihe, also die allen Tripeln der Polarreihe gemeinsamen Punkte, so sind alle Tripel der letzteren Reihe in den Polarnetzen der Tripel der ersten Reihe enthalten und somit sind  $A$  und  $B$  in jedem dieser Netze diejenigen beiden Punkte deren gemischter Pol bezueglich des Netzes unbestimmt ist (denn von drei Punkten eines Tripels eines Netzes ist jeder der gemischte Pol der beiden anderen bezueglich des Netzes und im Allgemeinen durch sie bestimmt). Enthielte nun die Reihe mit den dreifachen Punkten  $A$  und  $B$  noch ein Tripel mit einem Doppelpunkt  $U$ , so muessten auch in dem Polarnetz dieses Tripels  $A$  und  $B$  diejenigen Punkte sein, deren gemischter Pol unbestimmt ist. Aber in einem Netze, in dem zwei dreifache Punkte in einen Punkt  $U$  zusammenfallen, fallen auch die beiden Punkte, deren gemischter Pol unbestimmt ist, in den Punkt  $U$ . Also kann ein Tripel mit einem Doppelpunkt  $U$  in der gegebenen Reihe nicht enthalten sein.

Die vier Tripel mit einem Doppelpunkte, welche eine eigentliche Tripelreihe im Allgemeinen enthaelt, koennen sich also zwei Mal zu zweien zu je einem dreifachen Punkt vereinigen.

Und ferner:

Fallen von den Doppelpunkten der vier Tripel mit einem Doppelpunkt, welche eine Tripelreihe besitzt, zwei in einen Punkt  $A$  zusammen, so fallen in  $A$  auch die beiden Punkte welche zu den Doppelpunkten als dritte Tripelpunkte gehoeren, und der Punkt ist dann ein dreifacher Punkt der Reihe.

2) Haben zwei nicht conjugirte Tripel einen Punkt  $A$  gemein, so sind sie dem dreifachen Punkt  $A$  conjugirt; dieser gehoert der Polarreihe der durch die beiden Tripel bestimmten Reihe an, und folglich ist jedes Tripel dieser Reihe dem dreifachen Punkt  $A$  conjugirt, enthaelt ihn also. Daraus folgt:

Haben zwei Tripel einer Reihe einen Punkt  $A$  gemein, so ist er ein gemeinsamer Punkt aller Tripel der Reihe.

In jedem Netz das die Reihe enthaelt, ist der Punkt  $A$  der gemischte Pol von irgend zwei Punkten, die mit ihm ein Tripel der Reihe bilden. Alle Punktpaare eines Netzes aber die einen und denselben Punkt zum gemischten Pol haben, bilden eine Punktpaarreihe. Daraus folgt:

Haben die Tripel einer Tripelreihe einen gemeinsamen Punkt  $A$ , so bilden die Punktpaare, die mit  $A$  die Tripel der Reihe bilden, eine Punktpaarreihe.

Die Doppelpunkte der Punktpaarreihe bilden mit dem Punkt  $A$  zwei singuläre Tripel der Tripelreihe. Auch gilt der Satz:

Die Paare einer Punktpaarreihe bilden mit einem festen Punkt  $A$  die Tripel einer Tripelreihe.

Die Polarreihe einer Reihe, deren Tripel einen Punkt  $A$  gemein haben, hat  $A$  zum dreifachen Punkt. Sie hat ausserdem zwei Tripel mit je einem Doppelpunkt, die nicht in einem dreifachen Punkt sich vereinigen koennen, weil sonst die Polarreihe noch einen zweiten, allen Tripeln gemeinsamen Punkt enthalten muesste. Auch das Umgekehrte findet statt.

3) Bestimmen zwei nicht conjugirte Tripel eine Reihe, welche vier Tripel mit je einem Doppelpunkt enthaelt, so ist die Polarreihe derselben in genau demselben Falle. Denn haette diese einen dreifachen Punkt so muessten die Tripel der ersteren einen Punkt gemein haben.

4) Zwei Tripel  $ABC$  und  $ABD$ , welche zwei Punkte  $A$  und  $B$  gemein haben, sind nicht conjugirt, denn die durch sie bestimmte Tripelreihe faellt mit ihrer Polarreihe nicht zusammen (vergl. 1.) Fallen aber  $A$  und  $B$  in einen Doppelpunkt  $A$  zusammen, so ist dem Tripel jedes andere Tripel conjugirt, das gleichfalls  $A$  zum Doppelpunkt hat, denn in dem Netze, von dem zwei dreifache Punkte in  $A$  zusammenfallen, ist der gemischte Pol des Doppelpunktes  $A$  unbestimmt, also bildet der Doppelpunkt  $A$  mit jedem anderen Punkt ein Tripel des Netzes. — Daraus folgt:

Ein doppelt gezaehlter Punkt  $A$  wird durch jeden anderen Punkt zu einem Tripel einer sich selbst conjugirten Tripelreihe ergaenzt.

5) Sollen zwei Tripel mit einem gemeinschaftlichen Punkt  $A$  conjugirt sein, so muss das eine z. B.  $AB_1C_1$  in dem Polarnetz des anderen  $ABC$  enthalten sein, also  $B_1C_1$  ein Punktpaar der im Polarnetz von  $ABC$  zu  $A$  gehoerigen Punktpaarreihe sein, deren Punktpaare naemlich  $A$  zum gemischten Pol haben. Nun ist  $A$  ein dreifacher Punkt des Netzes, faellt also mit einem seiner ersten Pole, das ist einem Doppelpunkt der ihm zugehoerigen Punktpaarreihe zusammen, folglich besteht die durch  $ABC$  und  $AB_1C_1$  bestimmte sich selbst conjugirte Tripelreihe aus dem Punkt  $A$  und der durch  $BC$  und  $B_1C_1$  bestimmten Punktpaarreihe, deren einer Doppelpunkt aber mit  $A$  zusammenfaellt. Also:

Eine Punktpaarreihe bildet mit einem festen Punkt  $A$  eine sich selbst conjugirte Tripelreihe, wenn von den beiden Doppelpunkten der Punktpaarreihe der eine mit  $A$  zusammenfaellt.

6) Zwei conjugirte Tripel, die keinen Punkt gemein haben, bestimmen eine sich selbst conjugirte Reihe, welche vier Tripel mit je einem Doppelpunkt besitzt. Sie kann keinen dreifachen Punkt besitzen, denn dieser ist nur dann einem anderen Tripel conjugirt, wenn er ein Punkt desselben ist. Aber die Annahme war, dass die beiden bestimmenden Tripel keinen Punkt gemein haben sollen.

Eine sich selbst conjugirte Reihe kann also keinen dreifachen Punkt besitzen, ohne zu zerfallen (5).

Wir zaehlen somit folgende *acht Arten von Tripelreihen*.

A) Reihen, die mit ihren Polarreihen nicht identisch sind:

1) Eine Reihe enthaelt vier Tripel mit einem Doppelpunkt; die Polarreihe ist von derselben Art.

2) Eine Reihe enthaelt zwei Tripel mit einem Doppelpunkt und einem dreifachen Punkt *A*.

3) Die Polarreihe der Reihe 2) zerfaellt in eine Punktpaarreihe und den festen Punkt *A*, durch welchen jedes Paar der Punktpaarreihe zu einem Tripel ergaenzt wird. Von den Doppelpunkten der Punktpaarreihe faellt keiner mit dem Punkt *A* zusammen.

4) Eine Reihe hat zwei dreifache Punkt *A* und *B*.

5) Ihre Polarreihe besteht aus saemmtlichen Tripeln, welchen die beiden Punkte *A* und *B* angehoren.

B) Sich selbst conjugirte Reihen.

6) Eine Reihe enthaelt vier Tripel mit einem Doppelpunkt.

7) Die Reihe zerfaellt in eine Punktpaarreihe und einen festen Punkt *A*, der zugleich ein Doppelpunkt der Punktpaarreihe ist.

8) Die Tripel der Reihe bestehen aus einem festen Doppelpunkt in Verbindung mit jedem anderen Punkte.

Die Polarnetze der Tripel einer Reihe, welche zwei dreifache Tripel enthaelt, schneiden sich in der Polarreihe der Reihe. Die Tripel dieser Polarreihe haben zwei Punkte *A* und *B* gemeinschaftlich und deshalb sind *A* und *B* in jedem der Netze diejenigen beiden Punkte deren gemischter Pol bezueglich des Netzes unbestimmt ist. Sind diese beiden Punkte eines Netzes reell, so sind zwei von den dreifachen Punkten des Netzes, oder was dasselbe ist, zwei Punkte des Polartripels des Netzes conjugirt-imaginaer; sind jene beiden Punkte aber imaginaer, so sind die Punkte des Polartripels reell. Daraus folgt:

Besitzt eine Tripelreihe zwei dreifache Punkte, so enthalten die Tripel derselben je drei reelle, oder nur je einen reellen Punkt, je nachdem die beiden dreifachen Punkte imaginaer oder reell sind. Und umgekehrt.

Oder:

Enthalten die Tripel einer Reihe zwei feste Punkte  $A$  und  $B$ , so bestehen die Tripel der Polarreihe aus drei reellen oder einem reellen und zwei imaginaeren Punkten je nachdem die Punkte  $A$  und  $B$ , die gleichzeitig die dreifachen Punkte der zweiten Reihe sind, imaginaer oder reell sind.

18. Fallen in einem Tripelnetz zwei dreifache Punkte in einen zusammen, so fallen in ihm auch die beiden Punkte, deren gemischter Pol unbestimmt ist, zusammen, und daher ist dieser Punkt auch ein erster Pol jedes Punktes bezueglich des Netzes. Jeder Punkt hat daher nur noch einen ersten Pol. Sind zwei Tripelnetze dieser Art auf dem Traeger  $\alpha$  gegeben und fallen in  $A$  zwei dreifache Punkte des einen Netzes, in  $B$  zwei ebensolche des anderen zusammen, so entsprechen je zwei erste Pole eines Punktes von  $\alpha$  bezueglich der beiden Netze, wenn sie von  $A$  und  $B$  verschieden sind, einander projectiv (\*).

Es seien nun  $AAA_1$  und  $BBB_1$  zwei singulaere Tripel einer Tripelreihe, also  $A$  und  $B$  die Doppelpunkte der Tripel. Im Polarnetz des Tripels  $AAA_1$  sei  $B_2$  der von  $A$  verschiedene erste Pol von  $B$ , so ist das Tripel  $BBB_2$  dem Tripel  $AAA_1$  conjugirt; es ist aber auch dem Tripel  $BBB_1$  conjugirt, denn je zwei Tripel, die einen Doppelpunkt gemein haben, sind conjugirt, also ist das Tripel  $BBB_2$  ein Tripel der Polarreihe, der durch die Tripel  $AAA_1$  und  $BBB_1$  bestimmten Reihe. Da  $BBB_1$  ein beliebiges singulaeres Tripel der Reihe ist, so folgt:

Die Doppelpunkte der vier singulaeren Tripel einer Tripelreihe sind zugleich die Doppelpunkte der singulaeren Tripel der Polarreihe.

Umgekehrt:

Wenn zwei singulaere Tripel einer Tripelreihe mit je einem von zwei singulaeren Tripeln einer zweiten Tripelreihe einen Doppelpunkt gemein haben, so haben auch die uebrigen beiden Paare singulaerer Tripel je einen Doppelpunkt gemein und die beiden Reihen sind conjugirt.

(\*) *Theorie der trilinear-symmetrischen Verwandtschaft*, § 21.

Sind nun  $AAA_1, BBB_1, CCC_1, DDD_1$  die singulären Tripel einer Reihe,  $AAA_2, BBB_2, CCC_2, DDD_2$  diejenigen der Polarreihe, so sind die Tripel  $BBB_1, CCC_1, DDD_1$  dem Tripel  $CCC_2$  conjugirt, also  $B, C, D$  die ersten Pole von  $B_1, C_1, D_1$  bezüglich des Polarnetzes von  $CCC_2$ . — Da nun zwei dreifache Punkte des letzteren in  $C$  zusammenfallen, so sind  $B$  und  $B_1, C$  und  $C_1, D$  und  $D_1$  projectiv einander zugeordnet in der Beziehung die zwischen den Punkten des Trägers und ihren von  $A$  verschiedenen ersten Polen bezüglich des Polarnetzes von  $AAA_2$  besteht. In letzterem sind aber  $A$  und  $A_2$  als dreifache Punkte ihre eigenen ersten Pole und daher die entsprechend gemeinschaftlichen Punkte der projectiven Reihen.

Sind also  $ABCD$  die gemeinschaftlichen Doppelpunkte der singulären Tripel zweier conjugirter Reihen,  $A_1 B_1 C_1 D_1$  und  $A_2 B_2 C_2 D_2$  die zugehörigen einfachen Punkte in beiden Reihen, so gelten die Relationen:

$$ABCD A_2 \bar{\wedge} A B_1 C_1 D_1 A_2$$

$$ABCD B_2 \bar{\wedge} A_1 B C_1 D_1 B_2$$

$$ABCD C_2 \bar{\wedge} A_1 B_1 C D_1 C_2$$

$$ABCD D_2 \bar{\wedge} A_1 B_1 C_1 D D_2,$$

und

$$ABCD A_1 \bar{\wedge} A B_2 C_2 D_2 A_1$$

$$ABCD B_1 \bar{\wedge} A_2 B C_2 D_2 B_1$$

$$ABCD C_1 \bar{\wedge} A_2 B_2 C D_2 C_1$$

$$ABCD D_1 \bar{\wedge} A_2 B_2 C_2 D D_1 (*).$$

Sind  $AAA_1, BBB_1, CCC_1, DDD_1$  die vier singulären Tripel einer sich selbst conjugirten Tripelreihe, also je zwei der vier Tripel conjugirt, so gelten die Relationen:

$$ABCD A_1 \bar{\wedge} A B_1 C_1 D_1 A_1$$

$$ABCD B_1 \bar{\wedge} A_1 B C_1 D_1 B_1$$

$$ABCD C_1 \bar{\wedge} A_1 B_1 C D_1 C_1$$

$$ABCD D_1 \bar{\wedge} A_1 B_1 C_1 D D_1.$$

(\*) Vergl. E. WEYR, *Ueber die projectivische Beziehung zwischen den singulären Elementen der cub. Involutions*. Sitz-Bericht der Wiener Academie, Bd. 78, Mai 1876.

*Annali di Matematica*, tomo XIX.

19. Mit der Eintheilung der Tripelreihen in Arten ist zugleich die der Netzbueschel, deren Traeger die Tripelreihen sind, gegeben. Jede Tripelreihe kann naemlich als der Ort der Polartripel der Netze desjenigen Bueschels angesehen werden, welcher die Polarreihe der gegebenen zum Traeger hat. Da nun das Polarnetz eines singulaeren Tripels ein singulaeres Netz ist, so giebt es zu jeder Art von Tripelreihe eine Art des Netzbueschels. Die Tripel jener Reihe sind die Polartripel der Netze des Bueschels, und diese schneiden sich in der Polarreihe jener. Ein Netzbueschel enthaelt daher im Allgemeinen vier singulaere Netze erster Art, denn die Reihe der Polartripel enthaelt im Allgemeinen vier Tripel mit einem Doppelpunkt.

20. Drei Tripel bestimmen im Allgemeinen ein Netz von nicht singulaerer Art, zwei Tripel im Allgemeinen eine Reihe von nicht singulaerer Art. Fuer ein singulaeres Netz zweiter Art gilt offenbar der Satz:

Drei Tripel bestimmen ein singulaeres Netz zweiter Art wenn sie einen Punkt gemein haben und wenn ausserdem die drei Punktpaare, die durch denselben dritten Punkt zu einem Tripel ergaenzt werden, nicht einer Punktpaarreihe angehoren.

Eine Punkttripelreihe nicht singulaerer Art liegt in vier singulaeren Netzen erster Art, denn sie ist den vier Tripeln mit einem Doppelpunkt ihrer Polarreihe conjugirt. Nimmt man noch zwei Punkte beliebig an, und bestimmt deren gemischten Pol in einem der vier singulaeren Netze, so bildet dieser mit jenen beiden Punkten ein Tripel, das ebenso, wie die gegebene Punkttripelreihe in dem singulaeren Netz enthalten ist. Da die Tripelreihe durch zwei Tripel bestimmt ist, so folgt:

Durch zwei Tripel und zwei Punkte eines dritten, das der durch die ersten beiden bestimmten Reihe nicht angehört, sind vier singulaere Netze erster Art bestimmt.

Tripelreihen, deren Tripel zwei oder einen Punkt gemein haben, sind bestimmt durch zwei Tripel, die zwei oder einen Punkt gemein haben.

Eine sich selbst conjugirte Reihe ist durch ein Tripel und zwei Punkte eines zweiten bestimmt. Der gemischte Pol der beiden Punkte im Polarnetz des ersten Tripels ergaenzt die Punkte zu einem Tripel der Reihe. Soll eine Tripelreihe einen dreifachen Punkt enthalten, und ist  $\alpha$  ein Tripel derselben,

sind  $A$  und  $B$  zwei Punkte eines zweiten Tripels, so ist durch  $A$  und  $B$  eine Tripelreihe bestimmt, deren Tripel die Punkte  $A$  und  $B$  gemein haben. Diese Reihe bestimmt mit dem Tripel  $\alpha$  ein Netz. Jedes der dreifachen Punkte desselben bestimmt mit  $\alpha$  eine Tripelreihe, welche auch ein Tripel der durch  $A$  und  $B$  bestimmten Reihe enthaelt, denn die beiden Reihen als in einem Netz liegend, haben ein Tripel gemein.

Daraus folgt:

Durch ein Tripel und zwei Punkte eines zweiten, von denen keiner dem ersten Tripel angehoert, sind drei Tripelreihen mit einem dreifachen Punkt bestimmt.

Endlich gilt der Satz:

Eine Tripelreihe mit zwei dreifachen Punkten ist durch ein Tripel bestimmt.

Denn da die Polarreihe aus Tripeln mit zwei festen Punkten  $A$  und  $B$  besteht, die jedem Tripel  $\alpha$  der ersten Reihe conjugirt sind, so sind  $A$  und  $B$  die beiden Punkte, deren gemischter Pol im Polarnetz des Tripels  $\alpha$  unbestimmt ist. Ist also ein Tripel  $\alpha$  gegeben bestimmt man die Punkte  $A$  und  $B$ , deren gemischter Pol im Polarnetz von  $\alpha$  unbestimmt ist, so ist die Polarreihe derjenigen Reihe, deren Tripel die Punkte  $A$  und  $B$  gemein haben, eine Reihe mit zwei dreifachen Punkten und enthaelt das Tripel  $\alpha$ . Mit einer Reihe ist aber auch ihre Polarreihe gegeben. Wir schliessen aus dem Vorigen noch:

Alle Netze in welchen dasselbe Punktpaar einen beliebigen Punkt zum gemischten Pol hat, bilden einen Netzbueschel. Die Reihe der Polartripel enthaelt die Punkte des Punktpaars als dreifache Punkte.

### 21. Constructionen. (Figur II.)

Sind auf der Curve II. Ordnung  $z$  zwei Punktripel  $ABC$  und  $DEF$  gegeben, so liegt die durch diese bestimmte Tripelreihe in jedem Tripelnetz, dem die beiden Tripel gleichzeitig angehoeren. Nimmt man zwei beliebige von den sechs gegebenen Punkten, z. B.  $A$  und  $C$  an, so kann man diese als diejenigen Punkte eines Netzes auffassen, deren gemischter Pol unbestimmt ist. Ein Netz, in welchem der

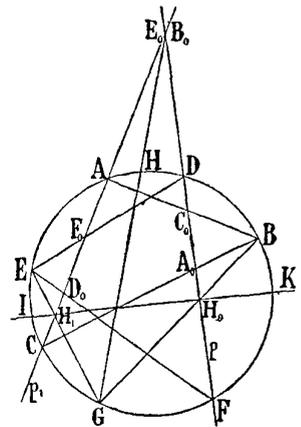


Fig. II.

gemischte Pol von  $A$  und  $C$  unbestimmt ist, ist festgelegt, wenn noch ein Tripel desselben gegeben ist. Sei  $DEF$  dieses Tripel, so sind in dem Netze die beiden Tripel  $DEF$  und  $ABC$  enthalten, das letztere, weil  $A$  und  $C$  in dem Netze durch jeden beliebigen Punkt zu einem Tripel ergaenzt werden. Nehmen wir ein zweites Paar Punkte von den sechs gegebenen, z. B.  $D$  und  $F$  beliebig an, so ist durch sie als Punkte, deren gemischter Pol unbestimmt sein soll, und das Tripel  $ABC$  ein Netz bestimmt, in welchem die Tripel  $DEF$  und  $ABC$  liegen. Folglich ist die durch  $ABC$  und  $DEF$  bestimmte Tripelreihe der Durchschnitt der beiden Netze, in derem einen der gemischte Pol von  $A$  und  $C$ , in derem anderen der von  $D$  und  $F$  unbestimmt ist. Nun ist die Gerade  $\overline{AC}$  die Involutionensaxe der involutorischen Reihe der ersten Polpaare der Punkte von  $\alpha$  bezueglich des ersten Netzes und wird daher von den Geraden welche die drei Punkte eines Tripels des Netzes verbinden, also auch von  $EF$ ,  $\overline{FD}$ ,  $\overline{DE}$  in drei Punkten  $D_0$ ,  $E_0$ ,  $F_0$  geschnitten, die den Punkten  $DEF$  des Tripels in derjenigen projectiven Beziehung von  $AC$  und  $\alpha$  entsprechen, welche man erhaelt, wenn man jedem Punkt von  $\alpha$  das auf  $\overline{AC}$  liegende Involutionenscentrum derjenigen involutorischen Reihe auf  $\alpha$  zuordnet, deren Punktpaare den Punkt zum gemischten Pol haben. Ebenso ist die Gerade  $\overline{DF}$  die Involutionensaxe der involutorischen Reihe der ersten Polpaare von  $\alpha$  bezueglich des zweiten Netzes. Daher wird  $\overline{DF}$  von  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$ ,  $\overline{AB}$  in drei Punkten  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $C_0$  geschnitten, die den Punkten  $ABC$  von  $\alpha$  projectiv entsprechen, in derjenigen Beziehung von  $\overline{DF}$  und  $\alpha$  welche man erhaelt, wenn man den Punkten von  $\alpha$  die auf  $\overline{DF}$  liegenden Involutionenscentren der ihnen im zweiten Netze zugehoerigen involutorischen Reihen auf  $\alpha$  zuordnet.

Es ist also  $\alpha$  sowohl projectiv auf  $AC = p_1$ , als auch auf  $DF = p$  bezogen, und daher auch  $p$  und  $p_1$  projectiv auf einander, wenn man je zwei Punkte einander zuordnet, die demselben Punkt von  $\alpha$  entsprechen. Ist nun  $H$  ein Punkt von  $\alpha$  dem die Punkte  $H_{10}$  von  $p_1$  und  $H_0$  von  $p$  entsprechen, so schneidet die Verbindungslinie von  $H_0$  und  $H_{10}$  die Curve  $\alpha$  in zwei Punkten, welche mit dem Punkte  $H$  ein gemeinsames Tripel der beiden Netze, also ein Tripel der durch  $ABC$  und  $DCF$  bestimmten Reihe bilden.

Die Construction geschieht in einfacher Weise so:

Entspricht dem gemeinschaftlichen Punkt  $B_0E_0$  von  $p$  und  $p_1$  auf  $\alpha$  als einem Punkt von  $p_1$  der Punkt  $E$  von  $\alpha$ , als einem Punkt von  $p$  der Punkt  $B$  von  $\alpha$ , so schneide eine beliebige durch  $pp_1$  gelegte Gerade die Curve  $\alpha$  in  $H$  und  $G$ .

Dann schneiden die Verbindungslinien von  $B$  und  $C$  mit  $G$  die Geraden  $p$  und  $p_1$  in zwei Punkten,  $H_0$  und  $H_{10}$ , deren Verbindungslinien die  $C^2$  in zwei Punkten  $I$  und  $K$  schneiden die mit dem Punkte  $H$  ein Tripel der Reihe bilden. Ebenso schneiden die Geraden  $\overline{BH}$  und  $\overline{EH}$   $p$  und  $p_1$  in zwei Punkten deren Verbindungslinien die  $C^2$  in zwei Punkten schneiden, die mit  $G$  ein Tripel der Reihe bilden.

Damit ist die Aufgabe geloest:

In einer durch zwei Tripel bestimmten Tripelreihe sollen die beiden Punkte  $I$  und  $K$  construirt werden, die einen beliebig gegebenen Punkt  $H$  zu einem Tripel der Reihe ergaenzen.

Die Construction kann, wie aus dem Vorigen hervorgeht, mit dem Lineal allein ausgefuehrt werden, wenn die Curve  $\alpha$  gezeichnet vorliegt.

Da  $H_0$  und  $H_{10}$  homologe Punkte zweier projectiver Punktreihen auf  $p$  und  $p_1$  sind, die Gerade  $H_0H_{10}$  aber zwei Punkte  $I$  und  $K$  eines als beliebig gewaehlt anzusehenden Tripels  $IKH$  der Tripelreihe verbindet, so folgt:

Die Seiten der von den Punkttripeln einer auf der Curve  $\alpha$  liegenden Punkttripelreihe gebildeten Dreiecke umhuelen eine Curve II. Ordnung.

Und umgekehrt.

Die Eckpunkte aller Dreiecke, die einer Curve II. Ordnung  $\alpha$  eingeschrieben, einer zweiten umschrieben sind, bilden die Tripel einer auf  $\alpha$  liegenden Punkttripelreihe.

(Die Seiten der Dreiecke bilden die Strahlentripel einer Strahlentripelreihe, deren Traeger die zweite Curve ist.)

Denn zwei dieser Dreiecke bestimmen auf  $\alpha$  eine Punkttripelreihe. Die Seiten der Tripeldreiecke umhuelen aber eine Curve II. Ordnung, die mit der zweiten gegebenen identisch ist.

Wir haben im Vorigen die beiden Tripel welche eine Tripelreihe bestimmen, als aus reellen Punkten bestehend angenommen. Es aendert aber nichts, wenn in einem oder beiden Tripeln zwei Punkte conjugirt-imaginaer sind.

Denn wenn im letzteren Falle  $B$  der reelle Punkt des einen Tripels  $\alpha$ ,  $p$  die Verbindungslinie der beiden anderen Punkte,  $E$  der reelle Punkt des zweiten Tripels  $\beta$ ,  $p_1$  die Verbindungslinie der beiden anderen Punkte ist und

man schneidet die  $C^2\alpha$  durch eine durch den Punkt  $pp_1$  gehende Gerade (Fig. III.) in  $H$  und  $G$ , zieht  $\overline{BG}$  und  $\overline{EG}$ , schneidet mit diesem  $p$  und  $p_1$  in  $H_0$  und  $H_{10}$ , so schneidet  $\overline{H_0H_{10}}$  die Curve in den Punkten  $I$  und  $K$ , die mit  $H$  ein Tripel der durch die beiden Tripel bestimmten Reihe bilden. Denn

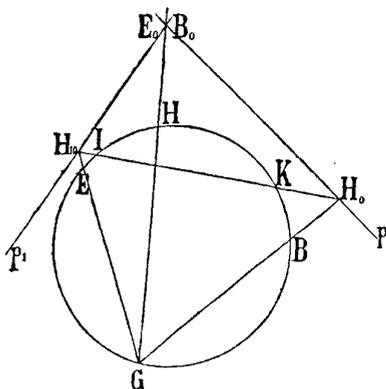


Fig. III.

in dem Netz in welchem  $p_1$  die beiden Punkte verbindet deren gemischter Pol unbestimmt ist, und von dem  $\beta$  ein Tripel ist, schneidet  $p$  die Gerade  $p_1$  in einem Punkt  $E_0$  der dem Punkt  $E$  von  $\alpha$  entspricht, so dass je zwei mit  $E_0$  in Gerader liegende Punkte  $H$  und  $G$  von  $\alpha$   $E$  zum gemischten Pol haben. Und man erhaelt die  $H$  und  $G$  entsprechenden Punkte von  $p_1$  als Schnittpunkte mit den Geraden  $\overline{EG}$  und  $\overline{EH}$ , so dass die projective Beziehung von  $p_1$  und  $\alpha$  vollkommen bestimmt ist, wenn  $p_1$  und ein Paar homologer Punkte  $E_0$  und  $E$  gegeben sind. Analoges gilt von

dem zweiten Netze, in dem  $p$  die Punkte verbindet, deren gemischter Pol unbestimmt ist und von dem  $\alpha$  ein Tripel ist. Die beiden Netze sind also bestimmt und daher kann ihre gemeinsame Tripelreihe nach dem obigen Verfahren construirt werden.

Einem auf einem Gebilde  $\alpha$  liegenden Tripelnetz entspricht in jedem zu  $\alpha$  projectiven Gebilde ein Tripelnetz. Daher entspricht auch jeder Tripelreihe als Schnitt zweier Netze in dem projectiven Gebilde eine Tripelreihe.

Mit der Construction einer Tripelreihe, welche auf der Curve II. Ordnung  $\alpha$  liegt, reicht man daher aus, um in beliebigen Gebilden Tripelreihen herzustellen. Will man z. B. die Strahlen eines Strahlenbueschels I. Ordnung zu Tripeln einer Tripelreihe gruppieren, so beziehe man den Bueschel perspectiv auf eine Curve II. Ordnung. Die beiden Strahlentripel des Bueschels, die die Reihe bestimmen, schneiden die Curve in zwei Punkttupeln einer Reihe deren Punkttupel in den gesuchten Strahlentupeln des Bueschels liegen.

Ist  $ABC$  irgend ein Tripel einer Tripelreihe, so liegt es nach dem vorher Gesagten auch in einem Netze, in welchem  $A$  und  $B$ , oder  $B$  und  $C$ , oder  $C$  und  $A$  die Punkte sind, deren gemischter Pol unbestimmt ist. Liegt das Netz auf der Curve  $\alpha$  und nehmen wir die Punkte  $A$  und  $B$ , so ist  $\overline{AB}$  die Involutionenaxe der involutorischen Reihe der ersten Pole der Punkte von  $\alpha$  in dem Netze. Jede Gerade welche zwei Punkte eines Tripels der Tripelreihe

auf  $\alpha$  verbindet, ist eine solche Gerade bezueglich eines derjenigen Netze, die die Tripelreihe gemein haben.

Es folgt daher:

Ist auf der Curve  $\alpha$  ein Bueschel von Punkttripelnetzen gegeben, so gehoert zu jedem Netz eine Gerade, die Involutionsaxe der involutorischen Reihe der ersten Pole der Punkte von  $\alpha$  bezueglich des Netzes. Alle diese Geraden umhuelen eine Curve II. Ordnung. Dieser Curve sind unendlich viele Dreiecke umschrieben, die  $\alpha$  eingeschrieben sind, und sie bilden auf  $\alpha$  die Tripelreihe, in der die Netze des Bueschels sich schneiden.

Zu einer Tripelreihe auf  $\alpha$  gehoert eine Polarreihe und ist durch jene mit bestimmt. Die Tripel der letzteren sind saemmtlichen Tripeln der ersteren conjugirt, also in allen Netzen enthalten, deren dreifache Punkte die Tripel der ersten Reihe bilden. Sind  $UVW$  und  $ABC$  zwei Tripel der ersten Reihe, sind ferner  $p$  und  $p_1$  die Pascal'schen Geraden der Dreiecke  $UVW$  und  $ABC$  bezueglich der Curve  $\alpha$  und bezieht man  $\alpha$  projectiv auf  $p$  so, dass den Punkten  $UVW$  die Schnittpunkte mit  $\overline{VW}$ ,  $\overline{WU}$ ,  $\overline{UV}$  entsprechen, und ebenso auf  $p_1$  so dass den Punkten  $ABC$  die Schnittpunkte mit  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$ ,  $\overline{AB}$  entsprechen, so sind auch  $p$  und  $p_1$  projectiv, und die Verbindungslinie zweier homologer Punkte von  $p$  und  $p_1$  schneidet  $\alpha$  in zwei Punkten, die mit dem entsprechenden Punkt von  $\alpha$  ein Tripel bilden, das in jedem der Netze, deren dreifache Punkte  $UVW$  und  $ABC$  sind, enthalten ist, also den Tripeln  $UVW$  und  $ABC$  gleichzeitig conjugirt ist. Alle diese Tripel sind, da die Verbindungslinien ihrer Punkte die Geraden  $p$  und  $p_1$  in je zwei homologen Punkten schneiden, einer Curve II. Ordnung umschrieben, wie es sein muss.

Man sieht also, wie man zu einer durch zwei Tripel  $ABC$  und  $UVW$  gegebenen Reihe auch die Polarreihe construiren kann, indem man die Geraden  $p$  und  $p_1$  construirt und ihre projective Beziehung bestimmt. Diese Construction kann genau auf die frueher angegebene einer Tripelreihe zurueckgefuehrt werden, wenn man zu den Punkten, in denen  $p$  die Curve  $\alpha$  schneidet, den gemischten Pol bezueglich des Polarnetzes von  $ABC$  und zu den Punkten in denen  $p_1$  die Curve schneidet, den gemischten Pol bezueglich des Polarnetzes von  $UVW$  bestimmt. In der That erhaelt man so zwei Tripel, die in beiden Polarnetzen enthalten sind, also die Polarreihe der durch  $UVW$  und  $ABC$  bestimmten Reihe ihrerseits bestimmen. Die Gerade  $p$  verbindet die beiden Punkte, deren gemischter Pol im Polarnetz von  $UVW$  unbestimmt

ist, und da  $UVW$  als ein beliebiges Tripel der gegebenen Tripelreihe betrachtet werden kann, und diese Reihe die Reihe der Polartripel eines Netzbueschels ist, so folgt aus dem vorhin aufgestellten Satze:

Steht eine Curve II. Ordnung  $\lambda$  zu einer Curve II. Ordnung  $\alpha$  in der Beziehung, dass der Curve  $\lambda$  unendlich viele Dreiecke umschrieben sind die der Curve  $\alpha$  eingeschrieben sind, und construirt man die Pascalsche Gerade jedes dieser der Curve  $\alpha$  eingeschriebenen Dreiecke bezueglich  $\alpha$ , so umhuellen diese Geraden im Allgemeinen eine dritte Curve II. Ordnung  $\mu$  der gleichfalls unendlich viele Dreiecke umschrieben sind, die der Curve  $\alpha$  eingeschrieben sind. Die vier gemeinschaftlichen Tangenten von  $\lambda$  und  $\mu$  beruehren  $\alpha$  in den naemlichen Punkten (18). Die Pascalschen Geraden der der Curve  $\mu$  umschriebenen und  $\alpha$  eingeschriebenen Dreiecke bezueglich  $\alpha$  sind wieder die Tangenten der Curve  $\lambda$ .

Der letzte Theil des Satzes ergiebt sich aus der Bemerkung, dass von zwei polaren Tripelreihen die eine so aus der anderen hergeleitet werden kann, wie die zweite aus der ersten.

Enthaelt eine Reihe zwei conjugirte Tripel, so faellt sie mit ihrer Polarreihe zusammen. Ist  $UVW$  ein Tripel einer Reihe und enthaelt ein zweites Tripel der Reihe die beiden Punkte  $A$  und  $B$ , deren gemischter Pol in dem Polarnetz von  $UVW$  unbestimmt ist, so ist die Reihe sich selbst conjugirt, denn das Tripel, das die Punkte  $A$  und  $B$  enthaelt ist dem Tripel  $UVW$  conjugirt.

Als Ergaenzung des vorigen Satzes folgt daher:

Die Curven  $\lambda$  und  $\mu$  fallen zusammen, sobald die Pascalsche Gerade bezueglich  $\alpha$  irgend eines der Dreiecke, die  $\alpha$  eingeschrieben und einer der beiden Curven, etwa  $\lambda$  umschrieben ist, die Curve  $\lambda$  selbst beruehrt.

Oder:

Giebt es ein Dreieck, das einer Curve  $\alpha$  umschrieben ist und dessen Seiten gleichzeitig mit der Pascalschen Geraden des Dreiecks bezueglich  $\alpha$  eine zweite Curve II. Ordnung  $\lambda$  beruehren, so giebt es unendlich viele Dreiecke die  $\alpha$  eingeschrieben,  $\lambda$  umschrieben sind und deren Pascalsche Gerade bezueglich  $\alpha$  gleichfalls  $\lambda$  beruehren. Da die Seiten jedes  $\lambda$  umschriebenen Dreiecks mit der Pascalschen Geraden desselben ein Polvierseit von  $\alpha$  bilden, so ist der letzte Satz derselbe, den wir fruher (§ 8) schon benutzt haben.

Sind zwei Netze durch ihre dreifachen Punkte gegeben, so haben wir schon oben in der Construction der Polarreihe einer gegebenen Reihe das Verfahren kennen gelernt, ihre gemeinschaftliche Tripelreihe zu construiren.

Sind zwei Netze durch je drei Tripel gegeben, so kann man zunachst in jedem die beiden Punkte construiren, deren Pol in dem Netze unbestimmt ist. Verbindet  $p$  die beiden derartigen Punkte des einen Netzes und ist  $\alpha$  ein Tripel des Netzes, so sind die Punkte des Tripels als Punkte von  $\alpha$  den Schnittpunkten der Geraden, welche die Tripelpunkte verbinden, mit  $p$  projectiv zugeordnet und dadurch die projective Beziehung von  $p$  und  $\alpha$  bestimmt, durch die man zu allen Tripeln des Netzes kommt. Analoges gilt, wenn  $p_1$  die beiden besonderen Punkte des anderen Netzes verbindet fuer  $p_1$  und  $\alpha$ . Aus der projectiven Beziehung von  $p$ ,  $p_1$  und  $\alpha$  ergibt sich dann die beiden Netzen gemeinschaftliche Tripelreihe.

Sind drei Netze durch je drei Tripel gegeben, so bestimme man zur Construction des den drei Netzen gemeinschaftlichen Tripels, die beiden Tripelreihen, welche das eine Netz mit den beiden anderen gemein hat. Diese beiden Reihen, als in einem Netz liegend, haben dann ein Tripel, das gesuchte, gemein.

Da eine Curve II. Ordnung durch fuenf Tangenten bestimmt ist und ihr unendlich viele Dreiecke umschrieben sind, die einer zweiten Curve II. Ordnung  $\alpha$  eingeschrieben sind, wenn dies mit einem Dreieck der Fall ist, so kann man den Satz aussprechen:

Durch ein Tripel und zwei Punktpaare von zwei anderen ist eine Tripelreihe bestimmt.

Denn die Verbindungslinien der Tripelpunkte bestimmen eine Curve II. Ordnung.

Aus den Beziehungen der Tripelreihen auf einer Curve II. Ordnung  $\alpha$  zu den Curven II. Ordnung denen Dreiecke umschrieben sind, die  $\alpha$  eingeschrieben sind, ergibt sich noch eine Ableitung des Satzes, dass im Tripelgebiet die Tripelreihen eine quadratische Mannigfaltigkeit vierter Stufe bilden.

Sei naemlich die Curve  $\alpha$  und seien ausserdem vier Gerade gegeben, von denen die eine die Curve  $\alpha$  in  $A$  und  $A_1$  schneiden mag; dann bestimmen die vier Geraden eine Schaar von Curven II. Ordnung, und nach einem bekannten Satze entsprechen die Tangenten, die vom Punkte  $A$  an die Curven der Schaar gehen, denen die von  $A_1$  an sie gehen, projectiv. Die projectiven Bueschel  $A$  und  $A_1$  schneiden  $\alpha$  in projectiven Reihen. Ist  $B$  ein entsprechend gemeinschaftlicher Punkt derselben, so sind  $\overline{AB}$  und  $\overline{A_1B}$  zwei Tangenten

einer und derselben Curve der Schaar, der unendlich viele Dreiecke umschrieben sind, die  $\alpha$  eingeschrieben sind. Diese Dreiecke bilden also auf  $\alpha$  die Tripel einer Tripelreihe. Durch vier Strahlen sind also zwei Curven bestimmt, denen Dreiecke umschrieben sind, die  $\alpha$  eingeschrieben sind. Diese Curven bilden daher eine quadratische Mannigfaltigkeit vierter Stufe und ebenso die Tripelreihe des Tripelgebiets auf  $\alpha$ . Zugleich folgt:

Durch vier Punktpaare von vier Tripeln einer Tripelreihe sind zwei Tripelreihen bestimmt.

22. Die Tripelreihe mit zwei dreifachen Punkten verdient noch eine Betrachtung fuer sich.

Wir wissen schon, dass sie durch ein Tripel bestimmt ist. Sie ist naemlich in allen Polarnetzen derjenigen Tripel enthalten, welche ihre Polarreihe bilden. Da die Tripel dieser Reihe nun zwei feste Punkte gemein haben, welche die dreifachen Punkte der gegebenen Reihe, und zugleich in dem Polarnetze jedes Tripels dieser Reihe diejenigen Punkte sind, deren gemischter Pol unbestimmt ist, so kann man, wenn  $\alpha$  ein gegebenes Tripel der Reihe ist, in dem Polarnetz von  $\alpha$  die beiden Punkte auf suchen, deren gemischter Pol unbestimmt ist, so constituiren diese mit jedem dritten Punkte die Tripel der

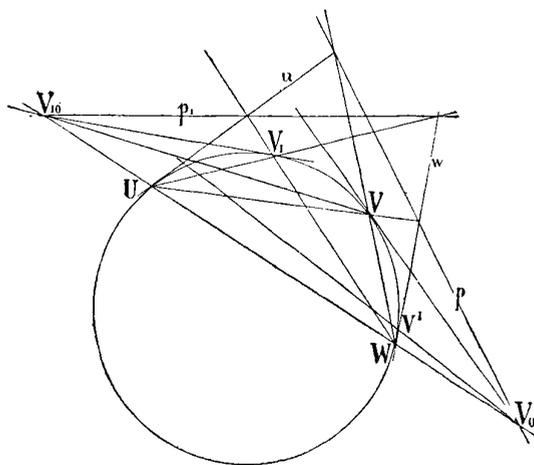


Fig. IV.

Polarreihe der gegebenen, und aus diesen lassen sich dann die uebrigen Tripel der gesuchten Reihe constituiren. Diese Construction kann nach dem fruher Gesagten so geschehen, dass, wenn  $U$  und  $W$  die Punkte des Polarnetzes des Tripels  $\alpha$  sind, deren gemischter Pol unbestimmt ist, zu jedem beliebigen auf der Curve  $\alpha$  liegenden Dreieck  $UWV$ , dem die Punkte  $U$  und  $W$  angehoren, die Pascalsche Gerade construirt wird, dann umhuelen alle diese Geraden die Curve II. Ordnung, der die Tripeldreiecke der durch  $\alpha$  bestimmten auf  $\alpha$  liegenden Tripelreihe umschrieben sind.

Die Construction wird sehr einfach, wenn zwei Punkte des Tripels  $\alpha$  conjugirt-imaginaer, die Punkte  $U$  und  $W$  also reell sind. (Fig. IV.) Dann erhaelt

man die Pascalschen Geraden der Dreiecke  $UWV$  offenbar so, dass man die Tangente  $w$  in  $W$  von  $U$  aus, die Tangente  $u$  in  $U$  von  $W$  aus perspectiv auf die Curve  $\alpha$  bezieht, und die homologen Punkte der so erhaltenen projectiven Reihen auf  $u$  und  $w$  durch Gerade verbindet. Um zu jeder dieser Geraden und den beiden imaginaeren Punkten in denen sie die Curve  $\alpha$  schneidet, den zugehoerigen dritten Tripelpunkt zu finden, so sei fuer das Dreieck  $UVW$  die Gerade  $p$  die Pascalsche und schneide  $\overline{UW}$  im Punkte  $V_0$ , fuer das Dreieck  $UWV_1$  sei  $p_1$  die Pascalsche Gerade und schneide  $UW$  in  $V_{10}$ , so ist das Tripel der Reihe, dem die Schnittpunkte von  $p_1$  mit  $\alpha$  angehoren, ebenso wie jedes andere Tripel der Reihe enthalten in dem Polarnetz  $UVW$ ; und da in diesem  $p$  die Gerade ist, welche die Punkte verbindet, deren gemischter Pol in dem Netze unbestimmt ist, so erhalten wir den gemischten Pol der Schnittpunkte von  $p_1$  und  $\alpha$  in diesem Netze, indem wir nach einem nun schon mehrfach angewandten Verfahren,  $V$  mit  $V_{10}$  verbinden, den Schnittpunkt von  $\overline{V_0V_{10}}$  und der Curve  $\alpha$  mit  $V_0$  verbinden, und den zweiten Schnittpunkt der Verbindungslinie mit der Curve  $\alpha$  bestimmen. Dieser Punkt  $V'$  bildet dann mit den Schnittpunkten von  $p_1$  und  $\alpha$  ein Tripel der Reihe.

Um zu weiteren Eigenschaften dieser Tripelreihe zu gelangen, stellen wir folgende Betrachtungen an.

Wenn in einem Gebilde erster Stufe (Gerade, Strahlenbueschel, Curve II. Ordnung, ect.), zwei projective Reihen vereinigt liegen, so sind jedem Elemente des Gebildes, da man es zu jeder der beiden Reihen gehoerig, betrachten kann, im Allgemeinen zwei andere Elemente zugeordnet.

Es seien  $A_1$  und  $B$  die beiden Elemente, welche dem Element  $AB_1$  des Gebildes zugeordnet sind, es sei ferner  $C$  dasjenige Element welches von  $AB_1$  durch die Elemente  $A_1$  und  $B$  harmonisch getrennt ist, so bilden  $AB_1$  und  $C$  ein Elementenpaar derjenigen involutorischen Reihe, deren Doppelemente die entsprechend gemeinschaftlichen Elemente  $S$  und  $T$  der gegebenen projectiven Reihen sind.

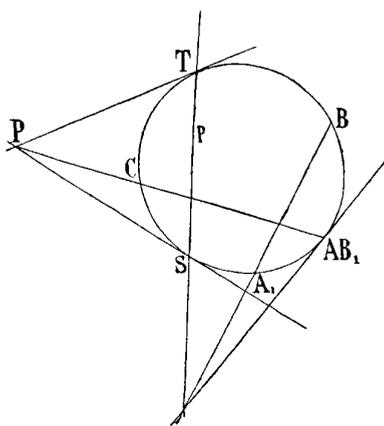


Fig. V.

Es sei das Gebilde eine Curve II. Ordnung  $\alpha$ ; sind dann  $AB$  und  $A_1B_1$  (Fig. V.) irgend zwei Paare homologer Punkte von zwei auf  $\alpha$  liegenden

projectiven Reihen, so schneiden sich bekanntlich die Geraden  $\overline{AB_1}$  und  $\overline{A_1B}$  in einem Punkte einer Geraden  $p$ , von welcher  $x$  in den entsprechend gemeinschaftlichen Punkten der beiden Reihen geschnitten wird. Fallen nun die Punkte  $A$  und  $B_1$  zusammen, so erhaelt man den Punkt  $C_1$  der von  $AB_1$  durch  $A_1$  und  $B$  harmonisch getrennt ist, indem man den Pol  $P$  der Geraden  $p$  bezueglich  $x$  mit  $AB_1$  durch eine Gerade verbindet, und den zweiten Schnittpunkt  $C$  derselben mit  $x$  bestimmt.  $C$  und  $AB_1$  bilden aber ein Punktpaar derjenigen involutorischen Reihe deren Involutionensaxe die Gerade  $p$  ist. Der Punkt  $AB_1$  ist ein willkuerlich gewaehlter der Curve (\*). Durchlaeuft der Punkt  $AB_1$  die Curve, so beschreibt jeder der Punkte  $A_1$  und  $B$  eine zu der von  $AB_1$  beschriebenen projective Reihe, woraus folgt:

Sind die Elemente eines Gebildes erster Stufe projectiv einander zugeordnet, so sind je zwei Elemente  $A_1$  und  $B$ , die demselben Element  $AB_1$  des Traegers entsprechen, homologe Elemente einer zweiten projectiven Beziehung, welche zwischen den Elementen des Gebildes besteht.

Die beiden projectiven Beziehungen der Elemente von  $x$  sind im Allgemeinen nicht identisch. Entspricht in der gegebenen Beziehung (Fig. VI.) dem Punkt  $A$  der ersten Reihe der Punkt  $B$  der zweiten, dem Punkt  $B$  der ersten der Punkt  $C$  der zweiten Reihe, so sind  $A$  und  $C$  ein Paar homologer

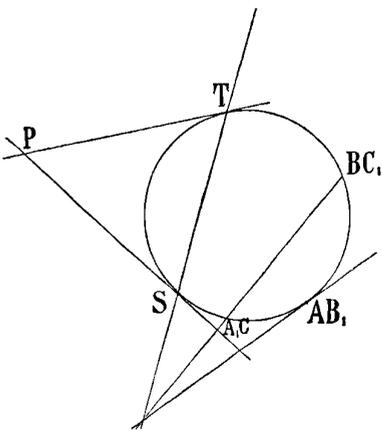


Fig. VI.

Punkte der zweiten zwischen den Punkten von  $x$  bestehenden Beziehung, und soll diese mit der urspruenglich gegebenen identisch sein, so muessen auch  $A$  und  $C$  homologe Elemente derselben sein. Da nun dem Punkt  $A$  der ersten Reihe schon ein Punkt  $B$  der zweiten zugeordnet ist, so koennen  $A$  und  $C$  homologe Punkte der beiden Reihen nur so sein, das  $C$  ein Element der ersten Reihe dem das Element  $A$  der zweiten entspricht, ist. Als nothwendige Bedingung fuer die Identitaet der beiden projectiven Beziehungen ergibt sich also, dass die beiden ineinanderliegenden Reihen, von denen man ausgeht, so auf einander bezogen sind, dass den Punkten  $ABC$  der ersten Reihe die Punkte  $BCA$  der

zogen sind, dass den Punkten  $ABC$  der ersten Reihe die Punkte  $BCA$  der

(\*) Vergl. SCHROETER, *Theorie der Oberflaechen*, II. Ordnung, § 4.

zweiten entsprechen, welche eine cyclische Permutation der ihnen homologen Punkte der ersten Reihe bilden.

Diese Bedingung ist aber auch hinreichend, das heisst:

Bezieht man zwei ineinanderliegende Reihen projectiv so auf einander dass man drei Elementen  $ABC$  der einen die Elemente  $BCA$  der zweiten zuordnet, welche eine cyclische Permutation der ersten Elemente bilden, so faellt diejenige projective Beziehung, welche man erhaelt, wenn man je zwei Elemente der beiden Reihen einander zuordnet, die einem und demselben Element des Traegers der Reihen entsprechen, mit der gegebenen Beziehung der beiden Reihen zusammen.

In der That, wenn den Punkten  $ABC$  der einen Reihe die Punkte  $BCA$  der anderen zugeordnet sind, so sind auch in der zweiten Beziehung den Punkten  $ABC$  einer Reihe die Punkte  $BCA$  einer zweiten zugeordnet, weil  $A$  und  $B$ ,  $B$  und  $C$ ,  $C$  und  $A$  Punktpaare sind, die in der ersten Beziehung je einem und demselben Punkt  $C$ ,  $A$ ,  $B$  zugeordnet sind.

Wir wollen eine Beziehung, in der den Elementen  $ABC$  die Elemente  $BCA$  zugeordnet sind, eine « cyclisch-projective » Beziehung nennen. Dann ist also in einem Gebilde  $\alpha$  durch die Punkte eines Tripels  $ABC$  eine « cyclisch-projective » Beziehung zwischen den Elementen desselben bestimmt. Entsprechen den Elementen  $ABC$  der einen Reihe die Elemente  $BCA$  der anderen, so entsprechen auch den Elementen  $BCA$  der ersten die Elemente  $CAB$  der zweiten; oder man hat:

$$ABC \overline{\wedge} BCA \overline{\wedge} CAB.$$

Man kann daher die « cyclisch-projective » Beziehung auch so auffassen, dass drei ineinanderliegende Reihen in der obigen Weise projectiv auf einander bezogen sind.

Aus der obigen Relation folgt auch die andere:

$$ACB \overline{\wedge} CBA \overline{\wedge} BAC,$$

und aus dieser die erste.

Nennt man die Punkte  $ABC$  ein « Tripel » der cyclisch-projectiven Beziehung, so gilt der Satz:

Es giebt in einer cyclisch-projectiven Beziehung unendlich viele Tripel. Jedes derselben ist durch ein Element bestimmt.

Sei  $E$  dies Element und seien  $D$  und  $F$  die beiden Elemente die ihm

in der durch  $ABC \overline{\wedge} BCA$  bestimmten projectiven Beziehung entsprechen, so sind  $D$  und  $F$  homologe Elemente einer zweiten Beziehung die mit der ersten identisch ist. Es muss daher  $DEF \overline{\wedge} EFD$  sein; also ist  $DEF$  ein Tripel der cyclisch-projectiven Beziehung und fuer jedes solche gelten die Relationen:

$$DEF \overline{\wedge} EFD \overline{\wedge} FDE$$

$$DFE \overline{\wedge} FED \overline{\wedge} EDF.$$

In den beiden entsprechend gemeinschaftlichen Punkten einer cyclisch-projectiven Beziehung fallen je drei Punkte eines Tripels zusammen. Findet die Beziehung zwischen den Punkten einer Curve II. Ordnung  $\alpha$  statt und ist  $ABC$  irgend ein Tripel derselben, so ist die Verbindungslinie der entsprechend gemeinschaftlichen Punkte die Pascalsche Gerade  $p$  des  $\alpha$  eingeschriebenen Dreiecks  $ABC$ . — Man kann daher diese Tripel auch als Tripel einer Tripelreihe mit zwei dreifachen Punkten betrachten, denn sie sind als Tripel des Tripelgebietes saemmtlich den Tripeln der Tripelreihe conjugirt, welche die beiden Schnittpunkte von  $p$  und  $\alpha$  gemeinschaftlich haben, und bilden also eine Tripelreihe. Umgekehrt sind die Tripel einer Tripelreihe mit zwei dreifachen Punkten zugleich Tripel einer cyclisch-projectiven Beziehung, wie man auch daraus schliessen kann, dass die Geraden, welche die Punkte der Tripel der cyclisch-projectiven Beziehung auf  $\alpha$  verbinden, eine Curve II. Ordnung umhuelen, der unendlich viele Dreiecke umschrieben sind, die  $\alpha$  eingeschrieben sind. Von diesen Dreiecken wissen wir aber schon, dass sie auf  $\alpha$  die Tripel einer Tripelreihe bilden.

Es existirt also ein Fall, in welchem je drei Punkte, Tripel einer Tripelreihe, zugleich drei homologe Punkte von drei projectiven Punktreihen sind; es giebt aber auch nur diesen einen Fall; denn sind die Punkte der Tripel einer Reihe zugleich homologe Punkte von drei projectiven Reihen, so folgert man aus dem Vorangegangenen leicht, dass diese Punktreihen zwei Punkte entsprechend gemein haben, in deren jedem die Punkte eines Tripels vereinigt liegen. Also hat die Tripelreihe dann zwei dreifache Punkte.

Ist  $UVW$  irgend ein Tripel einer cyclisch-projectiven Beziehung zwischen den Elementen eines Gebildes  $\alpha$ , so entsprechen dem Elemente  $U$  des Gebildes die beiden Elemente  $V$  und  $W$ , und wenn das Element  $U_1$  von  $U$  durch  $V$  und  $W$  harmonisch getrennt ist, so bilden  $U$  und  $U_1$  ein Elementenpaar der involutorischen Reihe, deren Doppelemente die entsprechend gemeinschaftlichen Elemente der projectiven Beziehung sind. Sind ferner  $V$

und  $V_1$  durch  $U$  und  $W$ ,  $W$  und  $W_1$  durch  $U$  und  $V$  harmonisch getrennt, so folgt daraus:

Sucht man zu jedem von drei gegebenen Elementen  $U, V, W$  eines Elementargebildes, das durch die beiden anderen harmonisch von ihm getrennte Element, so erhaelt man drei neue Elemente  $U_1, V_1, W_1$  von der Art, dass:

$$UU_1, \quad VV_1, \quad WW_1,$$

drei Elementenpaare in Involution sind.

Es ist daher:

$$UVWU_1V_1W_1 \bar{\wedge} U_1V_1W_1UVW.$$

Da je vier harmonischen Elementen der einen Reihe vier harmonische der anderen entsprechen, und  $V$  und  $W$  durch  $U$  und  $U_1$  harmonisch getrennt sind, so muessen auch  $V_1$  und  $W_1$  durch  $U$  und  $U_1$  harmonisch getrennt sein. Ebenso  $W_1$  und  $U_1$  durch  $V$  und  $V_1$ ,  $U_1$  und  $V_1$  durch  $W$  und  $W_1$ . Oder:

Sind  $U_1, V_1, W_1$  die drei vierten harmonischen Elemente die zu drei Elementen  $UVW$  in jeder Zuordnung gehoeren, so sind auch  $UVW$  die drei vierten harmonischen Elemente, die zu  $U_1, V_1, W_1$  in jeder Zuordnung gehoeren.

Es sind  $V_1$  und  $W_1$  durch  $U$  und  $U_1$  harmonisch getrennt, ebenso  $V$  und  $W$ ; daher ist auch:

$$UVWU_1 \bar{\wedge} U_1W_1V_1U,$$

also  $UU_1, VW, WV_1$  drei Punktpaare in Involution. Ebenso ist:

$$VWUV_1 \bar{\wedge} V_1U_1W_1V,$$

und:

$$WUUVW_1 \bar{\wedge} W_1V_1U_1W,$$

und daher auch:

$$VV_1, \quad WU_1, \quad UW_1,$$

und:

$$WW_1, \quad UV_1, \quad VU_1,$$

je drei Punktpaare in Involution. Oder:

Sucht man zu drei Punkten  $UVW$  in jeder Zuordnung die vierten harmonischen Punkte  $U_1, V_1, W_1$  so lassen sich die sechs Punkte vier Mal

zu drei Punktpaaren in Involution ordnen; diese sind:

$$\begin{array}{lll} UU, & VV, & WW, \\ UU_1, & VW_1, & WV_1, \\ VV_1, & WU_1, & UW_1, \\ WW_1, & UV_1, & VU_1. \end{array}$$

Ausserdem sind, wie schon oben gezeigt ist:

$$\begin{array}{llll} UU, & U_1U_1, & VW, & V_1W_1, \\ VV, & V_1V_1, & UW, & U_1W_1, \\ WW, & W_1W_1, & UV, & U_1V_1, \end{array}$$

je vier Punktpaare einer involutorischen Reihe (\*).

Wenn  $UVW$  ein Tripel einer cyclisch-projectiven Beziehung ist, so ist  $UVW \bar{\wedge} VWU$ , aber auch wenn  $U_1V_1W_1$  die vorige Bedeutung haben:

$$UVW \bar{\wedge} U_1V_1W_1,$$

und:

$$VWU \bar{\wedge} V_1W_1U_1.$$

Daher ist auch:

$$U_1V_1W_1 \bar{\wedge} V_1W_1U_1.$$

Das heisst aber:

Sucht man zu drei Punkten  $UVW$  eines Tripels einer Tripelreihe mit zwei dreifachen Punkten die vierten harmonischen Punkte  $U_1V_1W_1$  zu jenen in jeder Zuordnung, so bilden auch  $U_1V_1W_1$  ein Tripel der Reihe. Ausserdem sind  $UU_1, VV_1, WW_1$  drei Punktpaare der involutorischen Reihe, deren Doppelpunkte die dreifachen Punkte der Tripelreihe sind.  $UVW$  steht zu  $U_1V_1W_1$  in derselben Beziehung wie  $U_1V_1W_1$  zu  $UVW$ .

Mit einer Tripelreihe mit zwei dreifachen Punkten ist also allemal eine Punktpaarreihe deren Doppelpunkte die dreifachen Punkte der Tripelreihe sind, so verbunden, dass durch einen beliebigen Punkt des Trägers der Reihen drei Punktpaare der Punktpaarreihe bestimmt sind. Man bestimme naemlich das Tripel  $UVW$  der Tripelreihe dem der Punkt  $U$  angehört, sodann die

(\*) V. STAUDT, *Geometrie der Lage*, § 220 — *Beitraege*, § 285.

Punkte  $U_1, V_1, W_1$ , die in jeder Zuordnung zu  $UVW$  die vierten harmonischen sind, und auch ein Tripel der Tripelreihe bilden, so sind  $UU_1, VV_1, WW_1$  die drei Punktpaare der Punktpaarreihe, die durch den Punkt  $U$  bestimmt sind.

Aus vier Elementen  $AUVW$  lassen sich bekanntlich 24 Wuerfe bilden, von denen im Allgemeinen je vier zu einander projectiv sind. Sind die Elemente vier harmonische, so sind je acht Wuerfe projectiv. — Nennt man  $AUVW, AVWU, AWUV$  die Hauptwuerfe und sei  $UVW$  ein Tripel einer cyclisch-projectiven Beziehung, deren einer entsprechend gemeinschaftlicher Punkt der Punkt  $A$  sei, so ist:

$$AUVW \overline{\wedge} AVWU.$$

Daraus folgt:

$$AUVW \overline{\wedge} AVWU \overline{\wedge} AWUV,$$

und:

$$AUWV \overline{\wedge} AWVU \overline{\wedge} AVUW.$$

Sind also zwei Hauptwuerfe projectiv, so ist auch der dritte Hauptwurf zu ihnen projectiv und dann sind auch die drei uebrigen Wuerfe, die mit jenen eine Gruppe von sechs, im Allgemeinen nicht projectiven Wuerfen bilden, zu einander projectiv. Es folgt hieraus:

In einer Tripelreihe mit zwei dreifachen Punkten  $A$  und  $B$  bilden die drei Punkte jedes Tripels mit einem der Punkte  $A$  und  $B$  vier „aequianharmonische“ Punkte (\*).

---

(\*) SCHROETER, Math. Annalen, Bd. 10, p. 420. — Ders. STEINER's, Vorlesungen II., 2 Aufl., p. 62.



# Sulla generalizzazione delle frazioni continue algebriche.

(Di S. PINCHERLE, a Bologna.)

In una breve Nota pubblicata nel 1889 nei Rendiconti dell'Istituto Lombardo (\*) e poi in una Memoria presentata alla R. Accademia delle Scienze di Bologna (\*\*) ho indicato in qual modo, partendo da due o più funzioni date, sia possibile definire per esse un algoritmo analogo a ciò che è, per il caso di una sola funzione, lo sviluppo in frazione continua. Esso si genera quando si vogliono legare le due funzioni date  $\sigma_1, \sigma_2$  mediante una relazione lineare a coefficienti razionali:

$$A\sigma_1 + B\sigma_2 + C = 0,$$

nel modo il più approssimato possibile per un dato grado dei coefficienti  $A, B, C$ .

Nel presente scritto espongo alcune nuove proprietà di cui gode quest'algoritmo, ed alcune applicazioni cui esso si presta. Per semplicità, mi limito al primo stadio della generalizzazione e cioè al caso che si parta da due funzioni date, nel quale caso la base della teoria è una relazione ricorrente a quattro termini; avvertendo però che presenterebbe lievi difficoltà, e di pura forma, l'estensione al caso generale in cui si parte da  $p$  funzioni date ed in cui la teoria si fonda sopra una relazione ricorrente a  $p + 2$  termini.

Le proposizioni dei §§ 1-4, 6 e 8 della presente Memoria sono contenute come casi particolari nei teoremi dati nella citata Memoria dell'Accademia di Bologna del marzo 1890.

---

(\*) Serie II, tomo 22, fasc. 12-13.

(\*\*) Serie IV, tomo 10, marzo 1890.

È dovere gradito per me il cogliere questa occasione per esprimere la mia profonda riconoscenza verso il *ch.<sup>mo</sup>* professore HERMITE che mi ha onorato, a proposito di queste ricerche, di preziosi e benevoli consigli. Occupatosi egli pure di ricerche consimili, l'illustre uomo è giunto dal canto suo ad un algoritmo che presenta con quello da me trovato la più grande analogia, e contemporaneamente, ed indipendentemente l'uno dall'altro, abbiamo trovato che l'algoritmo che serve a legare nel modo più approssimato possibile due funzioni  $\sigma_1, \sigma_2$  mediante una relazione lineare a coefficienti razionali, è anche quello che serve a rappresentare nel modo più approssimato possibile le due funzioni  $\sigma_1, \sigma_2$  mediante frazioni razionali di uguale denominatore. (Vedi § 9 di questa Memoria.) Dalle comunicazioni epistolari da lui gentilmente favoritemi, posso aggiungere che l'HERMITE lega queste sue ricerche a questioni interessanti di calcolo integrale, in ispecie a quelle profonde investigazioni sulle funzioni esponenziali che hanno servito di fondamento al suo celebre lavoro sulla irrazionalità della funzione  $e^x$ ; ho detto quanto basta perchè debba essere nel desiderio di tutti che i risultati ottenuti in questo campo dall'esimio analista vengano presto alla luce (\*).

1. Siano:

$$\sigma_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{x^n}, \quad \sigma_2 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{s'_n}{x^n}, \quad (1)$$

due serie di potenze decrescenti di  $x$ ;  $s_1$  ed  $s_2$  siano essenzialmente diversi da zero, per modo che  $\sigma_1$  sia del grado  $-1$  e  $\sigma_2$  del grado  $-2$ . Pongo:

$$1 + a_0 \sigma_1 + b_0 \sigma_2 = \sigma_3; \quad (2)$$

posso sempre determinare il binomio di primo grado

$$a_0 = a'_0 x + a''_0,$$

e la costante  $b_0$  in guisa che i termini in  $x^1, x^{-1}, x^{-2}$  spariscano dalla (2); la  $\sigma_3$  si riduce allora al grado  $-3$ . Essa potrebbe anche ridursi ad un grado inferiore, se i coefficienti delle serie (1) fossero legati da certe relazioni, di

---

(\*) La generalizzazione delle frazioni continue intrapresa nel puro campo aritmetico dal JACOBI (Vedi Memoria postuma pubblicata dall'HEINE, J. de Crelle, tomo 69) sembra dovuta ad ispirazione dell'HERMITE stesso.

cui la prima sarebbe:

$$\begin{cases} s_2 & s_1 & 0 \\ s_3 & s_2 & s'_2 \\ s_4 & s_3 & s'_3 \end{cases} = 0;$$

ma escludo questo caso eccezionale. Pongo in seguito:

$$\sigma_1 + a_1\sigma_2 + b_1\sigma_3 = \sigma_4,$$

e qui determino, il che è sempre possibile, il binomio di primo grado  $a_1$  e la costante  $b_1$ , in guisa che i termini in  $x^{-1}$ ,  $x^{-2}$ ,  $x^{-3}$  scompaiono;  $\sigma_4$  è allora di grado  $-4$ , e si escluda il caso eccezionale che possa essere di grado inferiore.

Proseguendo in questo modo, si viene a costruire lo schema

$$\left. \begin{matrix} 1 & a_0 & b_0 \\ 1 & a_1 & b_1 \\ 1 & a_2 & b_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & b_n \\ \dots & \dots & \dots \end{matrix} \right\} \quad (3)$$

che dico ottenuto mediante l'*algoritmo generalizzato delle frazioni continue algebriche*. L'algoritmo si dirà *normale* nel caso in cui mi sono posto, che  $\sigma_n$  sia esattamente del grado  $-n$  (e non di grado inferiore): in tal caso le  $a_n$  sono binomii lineari

$$a_n = a'_n x + a''_n,$$

e le  $b_n$  sono costanti; in caso diverso, le  $a_n$  e  $b_n$  potrebbero essere polinomi di grado superiore.

2. Lo schema (3) ci rappresenta il sistema di equazioni:

$$\left. \begin{matrix} 1 + a_0\sigma_1 + b_0\sigma_2 = \sigma_3 \\ \sigma_1 + a_1\sigma_2 + b_1\sigma_3 = \sigma_4 \\ \dots & \dots & \dots \\ \sigma_n + a_n\sigma_{n+1} + b_n\sigma_{n+2} = \sigma_{n+3} \\ \dots & \dots & \dots \end{matrix} \right\} \quad (4)$$

Eliminando fra queste le  $\sigma_3, \sigma_4, \dots, \sigma_{n+2}$ , si ottiene la relazione:

$$A_{n+3} + B_{n+3}\sigma_1 + C_{n+3}\sigma_2 = \sigma_{n+3}, \quad (5)$$

dove  $A_{n+3}, B_{n+3}, C_{n+3}$  sono polinomiali razionali interi in  $x$  la cui considerazione è importantissima per ciò che segue.

3. Anzitutto, sostituendo per  $\sigma_{n+3}, \sigma_{n+2}, \sigma_{n+1}, \sigma_n$  le loro espressioni della forma (5) nella  $n + 1$ .<sup>a</sup> delle (4), viene:

$$\begin{aligned} A_n + a_n A_{n+1} + b_n A_{n+2} - A_{n+3} + \sigma_1(B_n + a_n B_{n+1} + b_n B_{n+2} - B_{n+3}) \\ + \sigma_2(C_n + a_n C_{n+1} + b_n C_{n+2} - C_{n+3}) = 0; \end{aligned}$$

ma questa uguaglianza si deduce dallo specchio di relazioni (4) in modo puramente *formale*, cioè qualunque siano le quantità  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ . Deve adunque essere:

$$\left. \begin{aligned} A_n + a_n A_{n+1} + b_n A_{n+2} &= A_{n+3}, \\ B_n + a_n B_{n+1} + b_n B_{n+2} &= B_{n+3}, \\ C_n + a_n C_{n+1} + b_n C_{n+2} &= C_{n+3}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

donde segue che  $A_n, B_n, C_n$  costituiscono, come pure  $\sigma_n$ , altrettanti integrali dell'equazione lineare alle differenze:

$$f(n+3) - b_n f(n+2) - a_n f(n+1) - f(n) = 0. \quad (7)$$

Si dà uno specchio dei valori iniziali dei polinomiali  $A_n, B_n, C_n$ :

$$\begin{aligned} A_0 &= 1, \dots\dots\dots B_0 &= 0, \dots\dots\dots C_0 &= 0, \\ A_1 &= 0, \dots\dots\dots B_1 &= 1, \dots\dots\dots C_1 &= 0, \\ A_2 &= 0, \dots\dots\dots B_2 &= 0, \dots\dots\dots C_2 &= 1, \\ A_3 &= 1, \dots\dots\dots B_3 &= a_0, \dots\dots\dots C_3 &= b_0, \\ A_4 &= b_1, \dots\dots\dots B_4 &= 1 + a_0 b_1, \dots\dots\dots C_4 &= a_1 + b_0 b_1, \\ A_5 &= a_2 + b_1 b_2, \dots\dots\dots B_5 &= b_0 + a_0 a_2 + a_0 b_1 b_2, \dots\dots\dots C_5 &= 1 + a_2 b_0 + a_1 b_2 + b_0 b_1 b_2. \end{aligned}$$

ecc.

I valori di  $A_n, B_n, C_n$  per  $n = 0, 1, 2$  mostrano che questi polinomiali formano un sistema fondamentale d'integrali della equazione (7).

Dalle relazioni (6) si stabilisce facilmente il grado dei polinomii  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$ . Essi sono dati dal seguente quadro:

Gradi di	per $n = 2r$	per $n = 2r + 1$
$A_n$	$r - 2$	$r - 1$
$B_n$	$r - 1$	$r$
$C_n$	$r - 1$	$r - 1$

(8)

4. Se ora date le serie  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ , si proponesse di determinare i polinomii  $A$ ,  $B$ ,  $C$  del grado indicato dallo specchio precedente in modo che la relazione:

$$A + B\sigma_1 + C\sigma_2 = 0, \quad (9)$$

sia verificata fino ai termini in  $x^{-n+1}$  inclusivamente, si troverebbe senza difficoltà che  $A$ ,  $B$ ,  $C$  non possono differire da  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  che per un fattore costante. Il nostro algoritmo serve dunque a risolvere il

**PROBLEMA I.** *Date due funzioni, stabilire fra esse una relazione lineare a coefficienti razionali la più approssimata possibile per un grado dato dei coefficienti.*

5. Non è privo d'interesse il vedere come siano formati i coefficienti della massima potenza di  $x$  nei polinomii  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$ . Indichiamo rispettivamente questi coefficienti con  $g_n$ ,  $h_n$ ,  $k_n$ . Nella relazione ricorrente (6), cioè:

$$A_{n+3} = A_n + a_n A_{n+1} + b_n A_{n+2},$$

si ha, per  $n = 2r$ , che  $A_n$  è di grado  $r - 2$  ed  $A_{n+1}$  e  $A_{n+2}$  di grado  $r - 1$ , mentre  $A_{n+3}$  è di grado  $r$ ; e siccome

$$a_n = a'_n x + a''_n,$$

non vi è che un termine di grado  $r$  nel secondo membro, proveniente da  $a_n A_{n+1}$ . Si ha dunque:

$$g_{2r+3} = a'_{2r} g_{2r+1}. \quad (10)$$

Invece, per  $n = 2r + 1$ , si ha  $A_n$  del grado  $r - 1$ ,  $A_{n+1}$  del grado  $r - 1$ ,  $A_{n+2}$  ed  $A_{n+3}$  del grado  $r$ . Vi sono dunque due termini di grado  $r$  nel se-

condo membro, l'uno proveniente da  $A_{n+2}$ , l'altro da  $a_n A_{n+1}$ , onde

$$g_{2r+4} = a'_{2r+1} g_{2r+2} + b_{2r+1} g_{2r+3}. \quad (11)$$

Analogamente si trova:

$$\left. \begin{aligned} h_{2r+3} &= a'_{2r} h_{2r+1}, \\ h_{2r+4} &= a'_{2r+1} h_{2r+2} + b_{2r+1} h_{2r+3}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} k_{2r+3} &= a'_{2r} k_{2r+1} + b_{2r} k_{2r+2}, \\ k_{2r+4} &= a'_{2r+1} k_{2r+2}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Da queste formole si deducono le seguenti espressioni, che sembrano abbastanza degne di nota:

$$\left. \begin{aligned} g_{2r+1} &= a'_2 a'_4 a'_6 \dots a'_{2r-2}, \\ h_{2r+1} &= a'_0 a'_2 a'_4 \dots a'_{2r-2}, \\ k_{2r+2} &= a'_1 a'_3 a'_5 \dots a'_{2r-1}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

6. Se si forma il determinante

$$(A_{n+1} B_{n+2} C_{n+3}) = \begin{vmatrix} A_{n+1} & B_{n+1} & C_{n+1} \\ A_{n+2} & B_{n+2} & C_{n+2} \\ A_{n+3} & B_{n+3} & C_{n+3} \end{vmatrix},$$

poi si sostituiscono agli elementi dell'ultima linea le loro espressioni tolte dalle (6), si trova senz'altro che il determinante stesso è uguale ad  $(A_n B_{n+1} C_{n+2})$ , e per conseguenza ad  $(A_0 B_1 C_2)$ , il quale è uguale all'unità. Onde si ha, qualunque sia  $n$ :

$$(A_n B_{n+1} C_{n+2}) = 1. \quad (15)$$

7. Ci conviene ora di studiare i polinomi:

$$\left. \begin{aligned} P_n &= B_n C_{n+1} - C_n B_{n+1}, \\ Q_n &= C_n A_{n+1} - A_n C_{n+1}, \\ R_n &= A_n B_{n+1} - B_n A_{n+1}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Si ha dapprima, dalle (15):

$$\begin{aligned} A_n P_n + B_n Q_n + C_n R_n &= 0, \\ A_{n+1} P_n + B_{n+1} Q_n + C_{n+1} R_n &= 0, \\ A_{n+2} P_n + B_{n+2} Q_n + C_{n+2} R_n &= 1; \end{aligned}$$

onde risulta che:

$$\left. \begin{aligned} A_n &= Q_n R_{n-1} - R_n Q_{n-1} \\ B_n &= R_n P_{n-1} - P_n R_{n-1} \\ C_n &= P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Si determina poi facilmente il grado dei polinomiali  $P_n$ ,  $Q_n$ ,  $R_n$ , per mezzo delle formole (16) e dello specchio (8) dato dianzi, e si trova che il grado di  $P_n$  è  $n - 1$  al più, ed il grado di  $Q_n$  e di  $R_n$  è al più  $n - 2$ . Ma dalle proprietà dei coefficienti dei termini di più alto grado in  $x$  nelle  $A_n$ ,  $B_n$  e  $C_n$ , proprietà date al § 5, si trova con un calcolo dei più elementari che il coefficiente di  $x^{n-1}$  in  $P_n$  e di  $x^{n-2}$  in  $Q_n$  è diverso da zero, mentre il coefficiente di  $x^{n-2}$  in  $R_n$  è nullo, ma non quello di  $x^{n-3}$ . Donde risulta che i gradi di  $P_n$ ,  $Q_n$ ,  $R_n$  sono rispettivamente  $n - 1$ ,  $n - 2$  ed  $n - 3$ .

8. I polinomiali  $P_n$ ,  $Q_n$ ,  $R_n$  sono integrali dell'equazione alle differenze:

$$f(n-1) - b_{n-1} f(n) - a_n f(n+1) - f(n+2) = 0; \quad (18)$$

a dimostrare ciò, basta riprendere le formole del § 3:

$$\begin{aligned} C_{n+3} &= b_n C_{n+2} + a_n C_{n+1} + C_n, \\ B_{n+3} &= b_n B_{n+2} + a_n B_{n+1} + B_n, \end{aligned}$$

moltiplicare la prima per  $B_{n+1}$ , la seconda per  $C_{n+1}$  e sottrarre, si ottiene in tal modo:

$$P_{n+2} = -a_n P_{n+1} + C_n B_{n+2} - B_n C_{n+2}.$$

Ma analogamente si ha:

$$C_n B_{n+2} - B_n C_{n+2} = -b_{n+1} P_n + P_{n-1},$$

onde sostituendo:

$$P_{n+2} = -a_n P_{n+1} - b_{n-1} P_n + P_{n-1}, \quad (19)$$

c. d. d.

Il teorema si dimostra nel modo stesso per  $Q_n$  e per  $R_n$ .

*Osservazione.* In varie ricerche sulle equazioni lineari alle differenze, accanto ad un'equazione della forma:

$$a_n f(n+m) + b_n f(n+m-1) + \dots + h_n f(n) = 0,$$

si presenta spontanea la considerazione dell'equazione:

$$a_{n-m} f(n-m) + b_{n-m+1} f(n-m+1) + \dots + h_n f(n) = 0;$$

questa seconda equazione l'ho chiamata *inversa* (\*) della precedente. L'equazione alle differenze cui soddisfano  $P_n, Q_n, R_n$  è appunto l'inversa di quelle cui soddisfano  $A_n, B_n, C_n$ .

L'equazione ricorrente (18), insieme al sistema dei valori iniziali

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= 0, & Q_1 &= 0, & R_1 &= 1, \\ P_2 &= 1, & Q_2 &= 0, & R_2 &= 0, \\ P_3 &= -a_0, & Q_3 &= 1, & R_3 &= 0, \end{aligned} \right\}$$

serve a determinare completamente i polinomi  $P_n, Q_n, R_n$ .

Dallo specchio precedente di valori iniziali risulta ancora che le  $P_n, Q_n, R_n$  costituiscono un sistema fondamentale d'integrali dell'equazione (18).

9. Riprendiamo le relazioni lineari della forma (5) fra  $\sigma_n, \sigma_{n+1}$  e  $\sigma_1, \sigma_2$ ; esse sono:

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1} &= A_{n+1} + B_{n+1} \sigma_1 + C_{n+1} \sigma_2, \\ \sigma_n &= A_n + B_n \sigma_1 + C_n \sigma_2. \end{aligned}$$

Risolvendo rispetto a  $\sigma_1, \sigma_2$ , se ne ricava:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{Q_n + C_{n+1} \sigma_n - C_n \sigma_{n+1}}{P_n}, \\ \sigma_2 &= \frac{R_n + B_n \sigma_{n+1} - B_{n+1} \sigma_n}{P_n}, \end{aligned}$$

e ponendo:

$$\lambda_n = C_{n+1} \sigma_n - C_n \sigma_{n+1}, \quad \mu_n = B_n \sigma_{n+1} - B_{n+1} \sigma_n,$$

si ha:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 - \frac{Q_n}{P_n} &= \frac{\lambda_n}{P_n}, \\ \sigma_2 - \frac{R_n}{P_n} &= \frac{\mu_n}{P_n}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

(\*) Vedi per es. *Compte-Rendus de l'Académie des Sciences*, tome 107, pag. 986. Paris, 17 décembre 1888.

I gradi di  $\lambda_n, \mu_n$  si calcolano senza difficoltà, e si trova che:

$$\begin{array}{ll} \text{per } n = 2r & \text{il grado di } \lambda_n \text{ è } -r - 1 \text{ e quello di } \mu_n \text{ è } -r, \\ \text{" } n = 2r + 1 & \text{" } \lambda_n \text{ " } -r - 1 \quad \text{" } \mu_n \text{ " } -r - 1. \end{array}$$

Ne consegue che le frazioni  $\frac{Q_n}{P_n}, \frac{R_n}{P_n}$  sviluppate in serie di potenze intere negative di  $x$  coincidono rispettivamente con  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  fino ai termini di grado

$$\begin{array}{ll} -3r + 1 & \text{e } -3r + 2 \quad \text{per } n = 2r, \\ -3r & \text{" } -3r \quad \text{" } n = 2r + 1, \end{array}$$

inclusivamente.

Se ora ci si propone, date le serie  $\sigma_1, \sigma_2$ , di determinare due frazioni razionali aventi lo stesso denominatore ed il cui sviluppo in serie di potenze decrescenti coincida con  $\sigma_1, \sigma_2$  fino ad un grado dato (lo stesso per le due frazioni o differente al più di un'unità) ed il massimo possibile compatibilmente col grado dei termini delle due frazioni, si trova facilmente, col metodo dei coefficienti indeterminati, che esse non possono differire da  $\frac{Q_n}{P_n}, \frac{R_n}{P_n}$ . Il nostro algoritmo serve dunque a risolvere il

**PROBLEMA II.** *Date due funzioni, rappresentarle mediante due frazioni razionali aventi il medesimo denominatore nel modo più approssimato possibile compatibilmente col grado dato del denominatore di queste frazioni.*

*Osservazione.* Le (20), che si possono scrivere:

$$P_n \sigma_1 - Q_n = \lambda_n, \quad P_n \sigma_2 - R_n = \mu_n, \quad (21)$$

mostrano che  $\lambda_n, \mu_n$  sono anch'esse integrali dell'equazione ricorrente (18).

10. Le seguenti formole fanno risaltare sempre più l'analogia fra il nostro algoritmo e le frazioni continue algebriche. Si ricava infatti dalle (17):

$$\frac{Q_n}{P_n} - \frac{Q_{n-1}}{P_{n-1}} = -\frac{C_n}{P_n P_{n-1}}, \quad \frac{R_n}{P_n} - \frac{R_{n-1}}{P_{n-1}} = \frac{B_n}{P_n P_{n-1}},$$

dove i secondi membri sono rispettivamente dei gradi:

$$\begin{array}{ll} -3r + 2, & -3r + 2 \quad \text{se } n = 2r, \\ -3r, & -3r + 1 \quad \text{" } n = 2r + 1. \end{array}$$

Ne segue:

$$\left. \begin{aligned} \frac{Q_n}{P_n} &= -\frac{C_2}{P_1 P_2} - \frac{C_3}{P_2 P_3} - \cdots - \frac{C_n}{P_{n-1} P_n}, \\ \frac{R_n}{P_n} &= \frac{B_3}{P_2 P_3} + \frac{B_4}{P_3 P_4} + \cdots + \frac{B_n}{P_{n-1} P_n}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Si può dunque scrivere:

$$\sigma_1 = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{n+1}}{P_n P_{n+1}}, \quad \sigma_2 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_{n+1}}{P_n P_{n+1}}. \quad (23)$$

In queste formule, come in quelle analoghe della teoria delle frazioni continue, la convergenza delle serie non è dimostrata e dovrà verificarsi volta per volta. L'uguaglianza fra  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e le serie dei secondi membri va intesa in questo senso: che prendendo in esse serie un numero di termini sempre crescente e sviluppando in serie di potenze negative di  $x$ , vi sarà un numero sempre maggiore di termini che andrà coincidendo coi termini di  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ .

11. Pongasi ora:

$$\sigma_1 = \int_l \frac{\varphi(y) dy}{x-y}, \quad \sigma_2 = \int_{l_1} \frac{\varphi_1(y) dy}{x-y}, \quad (24)$$

coll'ipotesi:

$$\int_{l_1} \varphi_1(y) dy = 0,$$

e dove l'integrazione va estesa alle linee  $l$ ,  $l_1$  di lunghezza finita e per altro qualunque (aperte o chiuse) nel piano della variabile  $y$ . Si deduce dalle (21):

$$\begin{aligned} \int_l \frac{P_n(x) - P_n(y)}{x-y} \varphi(y) dy + \int_{l_1} \frac{P_n(y) \varphi(y) dy}{x-y} &= Q_n + \lambda_n, \\ \int_{l_1} \frac{P_n(x) - P_n(y)}{x-y} \varphi_1(y) dy + \int_{l_1} \frac{P_n(y) \varphi_1(y) dy}{x-y} &= R_n + \mu_n, \end{aligned}$$

ed uguagliando separatamente in queste formole le parti intere in  $x$  e le serie di potenze negative di  $x$ , si ottiene:

$$\left. \begin{aligned} Q_n(x) &= \int_l \frac{P_n(x) - P_n(y)}{x-y} \varphi(y) dy, \\ R_n(x) &= \int_{l_1} \frac{P_n(x) - P_n(y)}{x-y} \varphi_1(y) dy, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

e

$$\left. \begin{aligned} \lambda_n(x) &= \int_i \frac{P_n(y) \varphi(y) dy}{x-y}, \\ \mu_n(x) &= \int_i \frac{P_n(y) \varphi_1(y) dy}{x-y}. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Ma  $\lambda_n, \mu_n$  sono dei gradi indicati al § 9, onde risulta che:

$$\left. \begin{aligned} \int_i P_n(y) \varphi(y) y^s dy &= 0 \\ \int_i P_n(y) \varphi_1(y) y^{s_1} dy &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

per

$$\left. \begin{aligned} s &= 0, 1, 2, \dots, r-1 \\ s_1 &= 0, 1, 2, \dots, r-2 \end{aligned} \right\} \text{ per } n = 2r,$$

e per

$$\left. \begin{aligned} s &= 0, 1, 2, \dots, r-1 \\ s_1 &= 0, 1, 2, \dots, r-1 \end{aligned} \right\} \text{ per } n = 2r + 1.$$

### APPLICAZIONI.

I. *Espressione dei coefficienti  $a'_n$  dell' algoritmo per mezzo delle funzioni  $\varphi(y), \varphi_1(y)$  sotto il segno.*

12. Nella teoria delle frazioni continue algebriche se una funzione:

$$\sigma = \int_i \frac{\varphi(y) dy}{x-y},$$

ammette lo sviluppo:

$$\frac{1}{a'_1 x + a''_1} - \frac{1}{a'_2 x + a''_2} - \frac{1}{a'_3 x + a''_3} - \dots,$$

il coefficiente  $a'_n$  del quoziente incompleto  $n$ .<sup>simo</sup> è dato dalla formola:

$$\frac{1}{a'_n} = \int_i P_n^2(y) \varphi(y) dy \quad (*),$$

o da altre in cui questa si può facilmente trasformare. Si domanda se per i coefficienti  $a'_n$  del presente algoritmo si possono dare formole analoghe.

A quest'effetto, deduciamo dalle (22), (23):

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \sigma_1 P_n - Q_n = -\frac{C_{n+1}}{P_{n+1}} - \frac{C_{n+2} P_n}{P_{n+1} P_{n+2}} - \frac{C_{n+3} P_n}{P_{n+2} P_{n+3}} - \dots \\ \mu_n &= \sigma_2 P_n - R_n = \frac{B_{n+1}}{P_{n+1}} + \frac{B_{n+2}}{P_{n+1} P_{n+2}} + \frac{B_{n+3}}{P_{n+2} P_{n+3}} + \dots \end{aligned}$$

Il termine di più alto grado in  $x$  viene dato in questi sviluppi dal primo termine, cioè rispettivamente dal termine di più alto grado in

$$-\frac{C_{n+1}}{P_{n+1}} \quad \text{e} \quad \frac{B_{n+1}}{P_{n+1}}.$$

Si supponga prima  $n = 2r + 1$ ; il coefficiente del termine di più alto grado in  $C_{n+1}$  è  $k_{2r+2}$ , in  $P_{n+1}$  è  $-k_{2r+3} k_{2r+2}$ , onde per il coefficiente del termine di più alto grado in  $-\frac{C_{n+1}}{P_{n+1}}$  cioè in  $\lambda_n$  si trova il valore:

$$\frac{1}{h_{2r+3}} = \frac{1}{a'_0 a'_2 a'_4 \dots a'_{2r}},$$

in forza delle (14). Ma il coefficiente della più alta potenza di  $x$  in  $\lambda_n$  viene dato, in conseguenza delle (26) e per essere  $\lambda_n$  del grado  $-(r+1)$ , da:

$$\int_i P_{2r+1}(y) \varphi(y) y^r dy,$$

onde:

$$\frac{1}{a'_0 a'_2 a'_4 \dots a'_{2r}} = \int_i P_{2r+1}(y) \varphi(y) y^r dy, \quad (28)$$

da cui si deduce:

$$a'_{2r} = \frac{\int_i P_{2r-1}(y) \varphi(y) y^{r-1} dy}{\int_i P_{2r+1}(y) \varphi(y) y^r dy}. \quad (29)$$

(\*) Vedi per es. Possé, *Sur quelques applications des fractions continues algébriques*, pag. 5. S.<sup>t</sup> Pétersbourg, 1886.

Si supponga ora  $n = 2r$ ; il coefficiente del termine di più alto grado di  $B_{n+1}$  è  $h_{2r+1}$ , quello di  $P_{n+1}$  è  $h_{2r+1} k_{2r+2}$ , onde quello di  $\mu_n$  è, tenuto conto delle (14):

$$\frac{1}{k_{2r+2}} = \frac{1}{a'_1 a'_3 a'_5 \dots a'_{2r-1}}$$

D'altra parte, essendo  $\mu_n$  del grado  $-r$ , il coefficiente della più alta potenza di  $x$  in  $\mu_n$  è dato per le (26) da:

$$\int_{l_1} P_{2r}(y) \varphi_1(y) y^{r-1} dy,$$

onde:

$$\frac{1}{a'_1 a'_3 a'_5 \dots a'_{2r-1}} = \int_{l_1} P_{2r}(y) \varphi_1(y) y^{r-1} dy, \quad (30)$$

ed infine:

$$a'_{2r+1} = \frac{\int_{l_1} P_{2r}(y) \varphi_1(y) y^{r-1} dy}{\int_{l_1} P_{2r+1}(y) \varphi_1(y) y^r dy}. \quad (31)$$

Le formole (29) e (31) rispondono alla questione posta in principio del presente paragrafo.

## II. Rappresentazione simultanea (esatta od approssimata) di due integrali definiti mediante $n$ valori di una medesima funzione.

13. È facile mostrare come il nostro algoritmo sia atto a dare un'estensione del metodo classico di calcolo approssimato degli integrali definiti, mediante  $n$  valori di una stessa funzione. L'estensione consiste in ciò: che mentre il metodo detto dal GAUSS delle *quadrature meccaniche* vale a risolvere la questione:

« Dato un integrale definito

$$\int_l \varphi(y) \psi(y) dy,$$

« determinare  $n$  punti  $a_1, a_2, \dots, a_n$  e le costanti  $c_1, c_2, \dots, c_n$  in modo tale  
 « che l'integrale venga rappresentato colla massima possibile approssimazione  
 « da un'espressione:

$$c_1 \psi(a_1) + c_2 \psi(a_2) + \dots + c_n \psi(a_n) \approx, \quad (32)$$

invece col nostro metodo risolveremo la seguente questione, di apparenza più complessa:

« Dati due integrali definiti:

$$\int_i \varphi(y) \psi(y) dy, \quad \int_i \varphi_1(y) \psi(y) dy,$$

« determinare  $n$  punti  $a_1, a_2, \dots, a_n$  e le costanti  $c_1, c_2, \dots, c_n$  e  $c'_1, c'_2, \dots, c'_n$  « in modo tale che gl'integrali vengano rappresentati simultaneamente e colla « massima possibile approssimazione da due espressioni della forma (32). »

14. A risolvere questo nuovo problema, si prenda dapprima un polinomio  $F'(y)$  razionale intero in  $y$ , di grado non maggiore di  $3r - 1$ , essendo

$$n = 2r + 1.$$

La  $P_n(y)$  è allora di grado  $n - 1 = 2r$ , e si può porre:

$$F'(y) = P_n(y)q(y) + r(y), \quad (33)$$

dove il quoziente  $q(y)$  è di grado  $r - 1$ , il resto  $r(y)$  di grado non maggiore di  $2r - 1$ .

Supponendo per semplicità le radici  $a_v$  di  $P_n(y)$  distinte, e lasciando al lettore la facile modificazione delle formole che seguono nel caso che  $P_n(y)$  abbia radici multiple, avremo dalla formola d'interpolazione di LAGRANGE:

$$r(y) = P_n(y) \sum_{v=1}^{n-1} \frac{r(a_v)}{(y - a_v) P'_n(a_v)};$$

onde moltiplicando la (33) per  $\varphi(y) dy$  ed integrando lungo  $l$ , si ha:

$$\begin{aligned} \int F'(y) \varphi(y) dy &= \int P_n(y) q(y) \varphi(y) dy \\ &+ \sum_{v=1}^{n-1} \frac{r(a_v)}{P'_n(a_v)} \int \frac{P_n(y) \varphi(y) dy}{y - a_v}. \end{aligned}$$

Ma essendo  $q(y)$  del grado  $r - 1$ , risulta immediatamente dalle formole (27) che:

$$\int_l P_n(y) q(y) \varphi(y) dy = 0,$$

e dalle (21) e (26) che:

$$\int_l \frac{P_n(y) \varphi(y) dy}{y - a_v} = -\lambda_n(a_v) = Q_n(a_v);$$

onde infine, essendo ancora  $r(a_v) = F(a_v)$ , viene:

$$\int_i F(y) \varphi(y) dy = \sum_{v=1}^{n-1} \frac{F(a_v) Q_n(a_v)}{P'_n(a_v)},$$

ed indicando con  $c_v$  le quantità:

$$\frac{Q_n(a_v)}{P'_n(a_v)},$$

costanti indipendenti dalla speciale funzione  $F(x)$  data, viene:

$$\int_i F(y) \varphi(y) dy = \sum_{v=1}^{n-1} c_v F(a_v). \quad (34)$$

Ma l'identico procedimento dà pure:

$$\int_i F(y) \varphi_1(y) dy = \sum_{v=1}^{n-1} c'_v F(a_v), \quad (34')$$

con

$$c'_v = \frac{R_n(a_v)}{P'_n(a_v)};$$

talchè le formole (34), (34') ci danno il seguente teorema:

« Se  $F(y)$  è una funzione razionale intera di grado non maggiore di  $3r - 1$ , gl'integrali:

$$\int_i F(y) \varphi(y) dy, \quad \int_i F(y) \varphi_1(y) dy,$$

« si possono esprimere mediante funzioni lineari a coefficienti costanti di  $F(a_1)$ ,  
 «  $F(a_2), \dots, F(a_{2r})$ . I coefficienti di queste espressioni sono indipendenti dalla  
 « speciale  $F(y)$ , ed i punti  $a_1, a_2, \dots, a_{2r}$  sono le radici del polinomio  $P_{2r+1}$ ,  
 « ottenuto coll'applicazione del nostro algoritmo alle funzioni:

$$\int_i \frac{\varphi(y) dy}{x-y}, \quad \int_i \frac{\varphi_1(y) dy}{x-y}.$$

15. Le formole (34) e (34'), che danno un'espressione esatta per il caso in cui  $F(y)$  è un polinomio razionale intero, servono invece come formole di

approssimazione (\*) per il caso che ad  $F(y)$  si sostituisca una funzione analitica qualunque, rappresentata da una serie di potenze di  $y$  intere e positive. Sia  $\psi(y)$  questa serie, il cui cerchio di convergenza comprenda le linee d'integrazione  $l$  ed  $l_1$ , e si ponga:

$$\psi(y) = F(y) + \sum_{\mu=3r}^{\infty} g_{\mu} y^{\mu}. \quad (35)$$

essendo  $F(y)$  l'insieme dei termini di grado  $\leq 3r - 1$ . Moltiplicando per  $\varphi(y)dy$  ed integrando lungo  $l$ , poi moltiplicando per  $\varphi_1(y)dy$  ed integrando lungo  $l_1$ , si avrà per le formole precedenti:

$$\int_l \psi(y) \varphi(y) dy = \sum_{\nu=1}^{n-1} c_{\nu} F(a_{\nu}) + \sum_{\mu=3r}^{\infty} g_{\mu} \int_l y^{\mu} \varphi(y) dy,$$

$$\int_{l_1} \psi(y) \varphi_1(y) dy = \sum_{\nu=1}^{n-1} c'_{\nu} F(a_{\nu}) + \sum_{\mu=3r}^{\infty} g_{\mu} \int_{l_1} y^{\mu} \varphi_1(y) dy,$$

e ponendo per le  $F(a_{\nu})$  il loro valore tratto dalla (35):

$$\int_l \psi(y) \varphi(y) dy = \sum_{\nu=1}^{n-1} c_{\nu} \psi(a_{\nu}) + \sum_{\mu=3r}^{\infty} g_{\mu} \left\{ \int_l y^{\mu} \varphi(y) dy - \sum_{\nu=1}^{n-1} a_{\nu}^{\mu} \right\},$$

$$\int_{l_1} \psi(y) \varphi_1(y) dy = \sum_{\nu=1}^{n-1} c'_{\nu} \psi(a_{\nu}) + \sum_{\mu=3r}^{\infty} g_{\mu} \left\{ \int_{l_1} y^{\mu} \varphi_1(y) dy - \sum_{\nu=1}^{n-1} a_{\nu}^{\mu} \right\}. \quad (36)$$

Da ciò segue che le espressioni lineari:

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} c_{\nu} \psi(a_{\nu}), \quad \sum_{\nu=1}^{n-1} c'_{\nu} \psi(a_{\nu}), \quad (37)$$

in cui i coefficienti e le  $a_{\nu}$  sono indipendenti dalla speciale funzione  $\psi(y)$ , ma dipendono solo da  $\varphi(y)$  e  $\varphi_1(y)$ , rappresentano *approssimativamente* gl'integrali del primo membro. Inoltre l'approssimazione, intesa nel debito senso, è la massima possibile compatibilmente col numero delle indeterminate  $a_{\nu}$ ,  $c_{\nu}$ ,  $c'_{\nu}$ : infatti queste sono in numero di  $6r$ , e poichè i termini complementari delle

(\*) In ciò che segue, quando si parla di *espressioni approssimate* riferendosi ad una certa serie di potenza  $\sum g_{\nu} x^{\nu}$ , si deve intendere che nelle espressioni formate colle  $g_{\nu}$ , si trascurano queste  $g_{\nu}$  da un certo indice in avanti. In questo senso è intesa l'approssimazione nelle questioni di *quadrature meccaniche* ed affini.

(36) non dipendono dai primi  $3r$  termini della serie  $\psi(y)$ , con esse si soddisfa appunto a  $6r$  condizioni.

Di più si noti che nei termini complementari i coefficienti  $g_{3r}, g_{3r+1}, \dots$  della  $\psi(y)$  sono moltiplicati per quantità pure indipendenti dalla  $\psi(y)$  stessa.

Se i limiti d'integrazione fossero reali, come pure le quantità  $a$ , e se queste fossero comprese fra i limiti d'integrazione, l'applicazione testuale di un metodo del MARKOFF (\*) fondato sull'uso di un notevole teorema di calcolo integrale dovuto all'HERMITE (\*\*\*) permetterebbe di trovare due limiti fra i quali è compreso l'errore che si commette sostituendo le espressioni (37) agli integrali definiti.

III. *Rappresentazione (esatta o approssimata) della somma di due integrali definiti mediante  $n$  valori di due funzioni date.*

16. Il nostro algoritmo si presta ancora alla applicazione esposta nei seguenti paragrafi, e che mi sembra non meno interessante della precedente. Cominciamo col sostituire nella (5) alle  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  le loro espressioni (24) in forma d'integrale definito, ed avremo:

$$\sigma_n = A_n(x) + B_n(x) \int_i \frac{\varphi(y) dy}{x-y} + C_n(x) \int_{i_1} \frac{\varphi_1(y) dy}{x-y},$$

donde con una trasformazione semplice e spesso usata si deduce:

$$\sigma_n = \int_i \frac{B_n(y) \varphi(y) dy}{x-y} + \int_{i_1} \frac{C_n(y) \varphi_1(y) dy}{x-y}, \quad (38)$$

e

$$A_n(x) = - \int_i \frac{B_n(x) - B_n(y)}{x-y} \varphi(y) dy - \int_{i_1} \frac{C_n(x) - C_n(y)}{x-y} \varphi_1(y) dy \quad (***) \quad (39)$$

Supponiamo ora, per fissare le idee,  $n$  pari e eguale a  $2r$  (\*\*\*\*); allora  $B_n$  e  $C_n$  sono del grado  $r-1$  come dallo specchio (8),  $\sigma_n$  è del grado  $-2r$ .

(\*) Vedi POSSÉ, Opera citata, pag. 76.

(\*\*) Lettre à M. BORCHARDT. J, de Crelle, tomo 84.

(\*\*\*) Queste formole (38) e (39) sono un caso particolare di quelle date sotto i numeri (34) e (35) nella mia citata Memoria: *Saggio di una generalizzazione*, ecc.

(\*\*\*\*) La trattazione del caso di  $n$  dispari procederebbe perfettamente analoga e si tralascia per brevità.

Dalla (38) risulta:

$$\int_i B_n(y) \varphi(y) y^s dy + \int_{i_1} C_n(y) \varphi_1(y) y^s dy = 0, \quad (40)$$

per  $s = 0, 1, 2, \dots, 2r - 2$ ; per conseguenza se  $h(y)$  è un polinomio razionale intero arbitrario d'ordine non maggiore di  $2r - 2$ , si avrà pure:

$$\int_i B_n(y) \varphi(y) h(y) dy + \int_{i_1} C_n(y) \varphi_1(y) h(y) dy = 0. \quad (40')$$

17. Ciò posto, siano  $G(y)$  ed  $H(y)$  due polinomii razionali interi d'ordine  $\alpha$  non superiore a  $3r - 3$  e non inferiore ad  $r + 1$ , e poichè le considerazioni che seguono hanno importanza soprattutto per valori grandi di  $r$ , si può supporre senza restrizione  $r > 2$ .

Si possono allora determinare tre polinomii razionali interi  $q(y)$ ,  $G_1(y)$ ,  $H_1(y)$ , il primo di grado non maggiore di  $2r - 2$ , il secondo ed il terzo di grado  $\beta$  inferiore ad  $\alpha$ , tali che sia identicamente:

$$\left. \begin{aligned} G(y) &= B_n(y)q(y) + G_1(y), \\ H(y) &= C_n(y)q(y) + H_1(y). \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Infatti questo sistema porta a  $2\alpha + 2$  relazioni fra i coefficienti indeterminati di  $q$ ,  $H$ ,  $H_1$ , i quali sono in numero di  $\alpha - r + 2\beta + 4$ ; ma uno di questi potendosi fare uguale all'unità, per poter soddisfare al sistema deve essere:

$$\alpha - r + 2\beta + 3 \geq 2\alpha + 2 \quad \text{con} \quad \beta < \alpha,$$

donde:

$$\alpha > \beta \geq \frac{\alpha + r - 1}{2}.$$

Ne viene che i due numeri  $\alpha$ ,  $\frac{\alpha + r - 1}{2}$  devono dare:

$$\alpha \geq \frac{\alpha + r - 1}{2} + 1,$$

risultato che collima coll'ipotesi  $\alpha \geq r + 1$  già fatta su  $\alpha$ ; le equazioni (41) si possono dunque soddisfare.

Moltiplicando ora la prima di queste formole per  $\varphi(y)dy$ , la seconda

per  $\varphi_i(y)dy$ , integrando lungo  $l$  ed  $l_i$  rispettivamente e sommando, si avrà:

$$\int_i G(y)\varphi(y)dy + \int_{l_i} H(y)\varphi_i(y)dy = \int_i G_i(y)\varphi(y)dy + \int_{l_i} H_i(y)\varphi_i(y)dy, \quad (42)$$

essendo nulla la somma degli integrali che contengono la  $q(y)$ , in forza della (40').

La formola (42) ci dimostra dunque che l'espressione:

$$S = \int_i G(y)\varphi(y)dy + \int_{l_i} H(y)\varphi_i(y)dy,$$

si può ricondurre ad un'espressione  $S_i$  della stessa forma, in cui in luogo dei polinomi  $G, H$ , figurano i polinomi  $G_i, H_i$  di grado inferiore.

Seguitando ad applicare questo procedimento, si finirà dunque col giungere ad un'espressione:

$$S_i = \int_i G_i(y)\varphi(y)dy + \int_{l_i} H_i(y)\varphi_i(y)dy,$$

in cui il grado dei polinomi sarà  $r$ , se nella precedente era il minimo valore  $r + 1$  supposto per  $\alpha$ ; ed oltre a questo punto non si potrà più applicare la riduzione. Ma si può scrivere:

$$\left. \begin{aligned} G_i(y) &= B_n(y)(y + a) + G_{i+1}(y), \\ H_i(y) &= C_n(y)(y + b) + H_{i+1}(y), \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

essendo  $G_{i+1}, H_{i+1}$  del grado  $r - 1$ : infatti le relazioni da soddisfare per verificare le (43) sono  $2r + 2$ , e le quantità disponibili, cioè  $a, b$  ed i coefficienti di  $G_{i+1}$  ed  $H_{i+1}$  sono pure  $2r + 2$ . Allora, tenuto conto della (40):

$$S_i = a \int_i B_n(y)\varphi(y)dy + b \int_{l_i} C_n(y)\varphi_i(y)dy + S_{i+1},$$

e posto:

$$a \int_i B_n(y)\varphi(y)dy = c, \quad b \int_{l_i} C_n(y)\varphi_i(y)dy = c',$$

si ha:

$$S = S_i = c + c' + S_{i+1}.$$

Ora per la formola d'interpolazione di LAGRANGE, essendo  $G_{i+1}, H_{i+1}$  del grado

$r - 1$  ed indicando con  $\alpha_v$  le radici di  $B_n(y)$  e con  $\beta_v$ , quelle di  $C_n(y)$ , (che si supporranno anche qui distinte, lasciando al lettore la facile generalizzazione) si ha:

$$G_{i+1}(y) = B_n(y) \sum_{v=1}^{n-1} \frac{G_{i+1}(\alpha_v)}{(y - \alpha_v) B'_n(\alpha_v)},$$

$$H_{i+1}(y) = C_n(y) \sum_{v=1}^{n-1} \frac{H_{i+1}(\beta_v)}{(y - \beta_v) C'_n(\beta_v)},$$

onde:

$$S_{i+1} = \sum_{v=1}^{n-1} c_v G_{i+1}(\alpha_v) + \sum_{v=1}^{n-1} c'_v H_{i+1}(\beta_v),$$

posto:

$$c_v = \int_i \frac{B_n(y) \varphi(y) dy}{y - \alpha_v}, \quad c'_v = \int_i \frac{C_n(y) \varphi_1(y) dy}{y - \beta_v};$$

ma per le (41), ... (43) segue che:

$$G_{i+1}(\alpha_v) = G(\alpha_v), \quad H_{i+1}(\beta_v) = H(\beta_v),$$

onde infine:

$$\int_i G(y) \varphi(y) dy + \int_i H(y) \varphi_1(y) dy = c + c' + \sum_{v=1}^{n-1} \left( c_v G(\alpha_v) + c'_v H(\beta_v) \right), \quad (44)$$

formola che esprime la somma dei due integrali mediante una somma di valori della funzione  $G(y)$  in  $r - 1$  punti e della funzione  $H(y)$  in  $r - 1$  altri punti convenientemente scelti.

È facile vedere che il problema risolto dalla formola (44) è determinato. Essendo infatti  $G$  del grado  $3r - 3$ , ed indicando con  $R$  una funzione razionale intera di grado  $r - 1$ ,  $\frac{G}{R}$  è esprimibile mediante la somma

$$\sum_{v=1}^{n-1} \frac{G(\alpha_v)}{(y - \alpha_v) R'(\alpha_v)}$$

aumentata di un polinomio di grado  $2r - 2$  in  $y$ : moltiplicando per  $\varphi(y) R(y) dy$  ed integrando, viene una sommatoria della forma:

$$\sum_{v=1}^{n-1} c_v G(\alpha_v),$$

aumentata di una somma di  $2r - 1$  nuove costanti, ed altrettante ne porta l'integrale relativo ad  $H$ . Ma di queste  $4r - 2$  nuove costanti ne spariscono

$4r - 4$  nella formola (44), che non ne conserva che  $\bar{a}$  e  $\bar{c}$  e la  $c'$ ; ed infatti le quantità che concorrono ad ottenere questo risultato sono le  $c, c', \alpha, \beta$ , in numero precisamente di  $4r - 4$ .

18. La formola precedente è esatta nel caso di due polinomii  $G, H$  di grado non superiore a  $3r - 3$ . Se ora questi polinomii fossero di grado maggiore, o se ad essi si sostituissero due funzioni analitiche qualunque rappresentate dalle serie di potenze intere e positive  $\psi(y), \psi_1(y)$ , si otterrebbe la formola di approssimazione

$$\int_i \psi(y) \varphi(y) dy + \int_i \psi_1(y) \varphi_1(y) dy = c + c' + \sum_{v=1}^{n-1} (c, \psi(\alpha_v) + c', \psi_1(\beta_v)) + \rho, \quad (45)$$

in cui il termine complementare  $\rho$  non dipende che dai coefficienti delle serie  $\psi, \psi_1$  il cui indice è superiore a  $3r - 3$ .



# Sopra una classe di equazioni differenziali lineari riducibili.

(Di CARLO BIGIAMI, a Pisa.)

---

La teoria generale dei punti singolari delle equazioni differenziali lineari, esposta dal FUCHS, ci dà il modo di riconoscere con metodi perfettamente determinati, se una data equazione ammette per integrale generale una funzione uniforme in tutto il piano ed avente un solo punto di singolarità essenziale, che, per mezzo di un cambiamento di variabile, si può sempre supporre trasportato all'infinito. Basta infatti esaminare uno ad uno i punti singolari dell'equazione e verificare se in ciascuno di essi tutti gl'integrali siano finiti e continui, o abbiano tutto al più dei poli, la qual cosa si può fare con operazioni puramente algebriche. Ma, quando invece si tratti di riconoscere se una data equazione ammetta soltanto alcuni integrali particolari uniformi, o più in generale se essa sia riducibile, il solo esame dei suoi punti singolari non è più sufficiente per la risoluzione del problema. Ciò dipende dal fatto che non sappiamo nulla delle modificazioni che subiscono gl'integrali, quando colla variabile si gira attorno a due o a più dei loro punti critici.

Per altro vi sono dei casi particolari nei quali la sola natura dei punti singolari è un dato sufficiente per stabilire l'esistenza di alcuni integrali uniformi. Così, ad esempio, consideriamo un'equazione del terz'ordine avente in tutt'il piano tre soli punti  $a$ ,  $b$ ,  $c$  critici per gl'integrali, tali però che esistono le equazioni determinanti relative ad essi, e supponiamo che nelle vicinanze di ognuno dei punti  $a$ ,  $b$ ,  $c$  vi siano due integrali monodromi distinti. Con questi dati si può subito stabilire che l'equazione possiede un integrale uniforme in tutto il piano.

Infatti siano  $y_1$ ,  $y_2$  due integrali distinti e monodromi nell'intorno di  $a$ , e sia  $y_3$  un terzo integrale definito nelle vicinanze di  $a$ , diverso da  $y_1$ ,  $y_2$

e da qualunque loro combinazione lineare a coefficienti costanti. Evidentemente la funzione  $y_3$  non riprende lo stesso valore, quando colla variabile si gira attorno ad  $a$ . Siano poi  $u$ ,  $v$  altri due integrali distinti e monodromi nelle vicinanze di  $b$ ; avremo allora:

$$u = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3$$

$$v = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \beta_3 y_3,$$

ove le  $\alpha$  e  $\beta$  sono costanti determinate. Da queste relazioni si deduce che la funzione:

$$\beta_3 u - \alpha_3 v$$

è un integrale che si mantiene monodromo nelle vicinanze di  $a$  e di  $b$ , e che quindi è uniforme in tutto il piano.

Si potrebbero citare vari altri esempi analoghi a questo; ma le equazioni, che in tal modo si vengono a considerare, sono troppo semplici perchè di esse si debba trattare in esteso. Se invece consideriamo le equazioni a coefficienti doppiamente periodici, troviamo un caso assai più interessante nel quale si può dimostrare che la sola natura dei punti singolari basta per stabilire che queste equazioni sono riducibili, ed ammettono un gruppo d'integrali uniformi. Questo caso si presenta per quelle equazioni a coefficienti ellittici d'ordine  $n$  che hanno entro il parallelogrammo dei periodi un solo punto critico per gl'integrali, tale che le radici della determinante relativa ad esso siano numeri interi, e che esistano  $n - 1$  integrali distinti e privi di logaritmi nelle sue vicinanze.

Parendomi che queste equazioni a coefficienti ellittici potessero offrire un certo interesse, mi sono proposto di farne un breve studio, tanto più che la proprietà che esse hanno di possedere alcuni integrali uniformi non si deduce più in modo così semplice come nell'esempio precedente.

Ho diviso il mio lavoro in quattro parti; nella prima, dopo avere ricordato brevemente alcuni dei risultati fondamentali ottenuti dal FUCHS sulle equazioni lineari, mi sono fermato in modo speciale sulla ricerca delle relazioni che esprimono la condizione necessaria e sufficiente affinchè in un gruppo d'integrali ve ne siano alcuni privi di logaritmi; nella seconda ho esposto alcuni teoremi generali sulle equazioni a coefficienti ellittici riducibili; nella terza poi ho preso a considerare quelle equazioni lineari che mi sono proposto di studiare, ed ho dimostrato che esse ammettono sempre un gruppo di integrali uniformi; finalmente nell'ultima ho citato alcuni esempi, limitandomi per altro alle sole equazioni del secondo e terz'ordine.

## I.

1. Consideriamo l'equazione differenziale lineare d'ordine  $n$ :

$$\Phi(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + p_n y = 0$$

pei valori della  $x$  interni ad un certo campo  $C$ , nel quale le funzioni  $p_1, p_2, \dots, p_n$  si suppongono uniformi, e proponiamoci di studiarne gl'integrali nelle vicinanze di un punto  $a$  interno a  $C$ .

Può darsi che i coefficienti  $p$  si mantengano finiti per  $x = a$ ; in tal caso risulta da un teorema di CAUCHY che l'integrale generale è una funzione uniforme nelle vicinanze di  $a$ , che si mantiene finita e differente da zero in questo punto. Si può formare questa funzione con  $n$  integrali particolari:

$$f_0(x), \quad f_1(x), \dots, \quad f_{n-1}(x),$$

tale che  $f_i(x)$  sia uniforme nelle vicinanze di  $a$ , ed abbia in questo punto un infinitesimo d'ordine  $i$ .

Può ancora accadere che alcuni dei coefficienti  $p$  divengano infiniti per  $x = a$ . Si dice allora che  $a$  è un punto singolare dell'equazione.

In questo secondo caso il FUCHS ha studiato il modo di comportarsi degli integrali nelle vicinanze di  $a$ , ed ha dato le regole per costruirli effettivamente quando  $a$  è un polo pei coefficienti  $p$  tale che le funzioni:

$$(x - a)p_1, \quad (x - a)^2 p_2, \dots, \quad (x - a)^n p_n$$

si mantengano finite per  $x = a$ .

Indichiamo con  $b_i$  il limite dell'espressione  $(x - a)^i p_i$  per  $x = a$ , e consideriamo l'equazione algebrica di grado  $n$  nella quantità incognita  $r$ , espressa da:

$$F(r) = r(r - 1) \dots (r - n + 1) + r(r - 1) \dots (r - n + 2)b_1 + \\ + \dots + r b_{n-1} + b_n = 0.$$

Essa si chiama l'equazione determinante relativa ad  $a$  di  $\Phi(y) = 0$ . Il risultato importante ottenuto dal FUCHS consiste in ciò che ad ogni radice di  $F(r) = 0$  corrisponde nelle vicinanze di  $a$  un integrale particolare di  $\Phi(y) = 0$ , e che gli  $n$  integrali che si hanno in tal modo appartengono ad un sistema fondamentale.

Si distribuiscano le  $n$  radici di  $F(r) = 0$  in vari gruppi, tali che le radici di ogni gruppo siano a differenze intere, ed in ogni gruppo si dispon-



In particolare  $(x - a)^{r_h} \varphi_{h, h}$  differisce da  $(x - a)^{r_1} \varphi_{1, 1}$  solo per un fattore costante.

Se i coefficienti costanti che entrano nella costituzione delle espressioni  $(x - a)^{r_h} \varphi_{h, 2}, (x - a)^{r_h} \varphi_{h, 3}, \dots$  sono tutti nulli, l'integrale  $y_h$  non contiene logaritmi, ed è della forma  $(x - a)^{r_h} \varphi_{h, 1}$ .

Possiamo sostituire altri integrali  $z_1, z_2, \dots, z_\lambda$  a quelli del gruppo (1) formandoli in modo che si abbia:

$$\begin{aligned} z_1 &= c_{1, 1} y_1 \\ z_2 &= c_{2, 1} y_1 + c_{2, 2} y_2 \\ &\dots \dots \dots \\ z_h &= c_{h, 1} y_1 + c_{h, 2} y_2 + \dots + c_{h, h} y_h \\ &\dots \dots \dots \\ z_\lambda &= c_{\lambda, 1} y_1 + c_{\lambda, 2} y_2 + \dots + c_{\lambda, \lambda} y_\lambda, \end{aligned}$$

ove le  $c$  sono costanti arbitrarie, colla condizione però che quelle che hanno i due indici eguali siano sempre differenti da zero. Gl'integrali  $z$  hanno nelle vicinanze di  $a$  espressioni analoghe a quelle degl'integrali  $y$ , e le funzioni  $\varphi$  relative ad essi godono pure di tutte le precedenti proprietà.

Avanti di lasciare queste considerazioni generali ricordiamo alcune proprietà delle funzioni che nelle vicinanze di  $a$  hanno una forma analoga a quella degl'integrali del gruppo (1). Sia  $Z$  una di tali funzioni che appartenga all'esponente  $r$ , cioè si abbia:

$$Z = (x - a)^r [\varphi_0 + \varphi_1 \log(x - a) + \dots + \varphi_k \log^k(x - a)],$$

ove le  $\varphi$  sono funzioni uniformi ed intere nell'intorno di  $a$ , e che non si annullano tutte per  $x = a$ .

Si dimostra facilmente che  $\frac{dZ}{dx}$  è un'espressione di una forma analoga a quella di  $Z$  che appartiene all'esponente  $r - 1$ , quando però non sia  $r = 0$ , e per  $x = a$  non si annullino tutte le funzioni  $\varphi$  all'infuori di  $\varphi_0$ . In questo caso speciale  $\frac{dZ}{dx}$  appartiene essa pure all'esponente zero, e se  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$  divengono per  $x = a$  infinitesime d'ordine superiore al primo, e  $\frac{d\varphi_0}{dx}$  si annulla anch'essa per  $x = a$ , allora  $\frac{dZ}{dx}$  appartiene a un esponente intero e positivo.

Supponiamo ora che  $r$  sia un numero intero positivo o nullo, e che la  $\varphi_k$  divenga in  $a$  infinitesima d'ordine  $s$ . Avremo allora:

$$\varphi_k = (x - a)^s \psi,$$

essendo  $\psi$  una funzione uniforme ed intera nelle vicinanze di  $a$ , e che non si annulla per  $x = a$ . La  $Z$  contiene quindi il termine:

$$(x - a)^{r+s} \psi \log^k(x - a),$$

e la sua derivata d'ordine  $r + s$  l'altro:

$$1 \times 2 \times 3 \dots (r + s) \psi \log^k(x - a).$$

Tutti i rimanenti termini, che entrano in  $\frac{d^{r+s} Z}{d x^{r+s}}$ , e che contengono  $\log^k(x - a)$ , hanno il coefficiente di questa potenza di logaritmo che si annulla per  $x = a$ . Sicchè:

$$\frac{d^{r+s} Z}{d x^{r+s}}$$

contiene un termine della forma  $\psi_k \log^k(x - a)$ , ove  $\psi_k$  è una funzione uniforme ed intera nelle vicinanze di  $a$ , e che non si annulla in questo punto. Di qui risulta che  $\frac{d^{r+s} Z}{d x^{r+s}}$  o appartiene a un esponente intero e negativo, o appartiene all'esponente zero. Per conseguenza:

$$\frac{d^{r+s+1} Z}{d x^{r+s+1}}$$

viene sempre ad appartenere a un esponente intero e negativo, perchè, anche quando  $\frac{d^{r+s} Z}{d x^{r+s}}$  appartiene all'esponente zero, non siamo nel caso di eccezione accennato precedentemente, e ciò a causa del termine  $\psi_k \log^k(x - a)$ .

2. Questi risultati sono dovuti al Fuchs, il quale se ne è servito per riconoscere in quale caso tutti gl'integrali del gruppo (1) siano privi di logaritmi. Noi invece li applicheremo alla ricerca delle condizioni che si devono avere affinchè soltanto alcuni integrali del gruppo non contengano logaritmi.

Dividiamo tutti gl'integrali del gruppo (1) per  $(x - a)^{\lambda}$ , ed eseguiamo le derivate d'ordine  $r_1 - r_\lambda + 1$  delle espressioni che si ottengono. Allora si vede facilmente che le derivate provenienti da integrali che contengono logaritmi devono appartenere ad esponenti negativi. Consideriamo infatti l'in-

tegrale  $y_h$ , il quale è dato da:

$$y_h = (x - a)^{r_h} [\varphi_{h,1} + \varphi_{h,2} \log(x - a) + \dots + \varphi_{h,h} \log^{h-1}(x - a)].$$

Supponiamo per più generalità che le funzioni  $\varphi_{h,k}, \varphi_{h,h-1}, \dots, \varphi_{h,h-1}$ , essendo  $k \leq h$ , risultino identicamente nulle, e che  $\varphi_{h,k}$  sia la prima delle  $\varphi$  di  $y_h$  che non si annulla identicamente. Da una proprietà delle  $\varphi$ , che già abbiamo ricordato, risulta che  $(x - a)^{r_h} \varphi_{h,k}$  è un'espressione lineare a coefficienti costanti di:

$$(x - a)^{r_1} \varphi_{1,1}, \quad (x - a)^{r_2} \varphi_{2,1}, \dots \quad (x - a)^{r_{h-1}} \varphi_{h-1,1}.$$

Sicchè  $(x - a)^{r_h} \varphi_{h,k}$  è una funzione che si può mettere nelle vicinanze di  $a$  anche sotto l'altra forma  $(x - a)^{m+r_\lambda} \theta_\lambda$  ove  $m$  è uno dei numeri interi  $r_1 - r_\lambda, r_2 - r_\lambda, \dots, r_{h-1} - r_\lambda$  e  $\theta$  una funzione uniforme nelle vicinanze di  $a$  che non si annulla per  $x = a$ .

Dividendo  $y_h$  per  $(x - a)^{r_\lambda}$ , si ottiene l'espressione:

$$(x - a)^{r_h - r_\lambda} [\varphi_{h,1} + \varphi_{h,2} \log(x - a) + \dots + \varphi_{h,k} \log^{k-1}(x - a)],$$

che si può anche mettere sotto la forma:

$$(x - a)^{r_h - r_\lambda} [\varphi_{h,1} + \varphi_{h,2} \log(x - a) + \dots + \varphi_{h,k-1} \log^{k-2}(x - a)] + \\ + (x - a)^m \theta \log^{k-1}(x - a).$$

Dalle osservazioni fatte precedentemente risulta che la derivata d'ordine  $m + 1$  di questa espressione deve appartenere a un esponente intero e negativo, e lo stesso deve quindi accadere per la derivata d'ordine  $r_1 - r_\lambda + 1$ , essendo questo numero eguale o superiore a  $m + 1$ .

Può darsi che fra gl'integrali del gruppo (1) oltre all'integrale  $y_1$  ve ne siano ancora altri senza logaritmi, come pure può accadere più in generale che si possano determinare le costanti  $c_{1,1}, c_{1,2}, \dots$  che servono per la formazione degl'integrali  $Z$ , in modo che alcuni di quest'integrali non contengano logaritmi.

Ci si può accertare di questo nel seguente modo: si faccia nel primo membro di  $\Phi(y) = 0$ :

$$y = (x - a)^{r_\lambda} u,$$

e si divida il risultato che si ottiene per  $(x - a)^{r_\lambda}$ . Si ha in tal modo un'equazione in  $u$  d'ordine  $n$ , che si può indicare con:

$$\Phi_1(u) = 0.$$

La sua determinante relativa ad  $a$  possiede l'unico gruppo di radici intere:

$$r_1 - r_\lambda, \quad r_2 - r_\lambda, \dots \quad r_{\lambda-1} - r_\lambda, \quad 0.$$

Si costruisca poi l'equazione:

$$\Omega(t) = \frac{d^n t}{dx^n} + q_1 \frac{d^{n-1} t}{dx^{n-1}} + \dots + q_n t = 0,$$

tale che la sua funzione incognita sia data da:

$$t = \frac{d^{r_1 - r_\lambda + 1} u}{dx^{r_1 - r_\lambda + 1}}.$$

La determinante di questa nuova equazione relativa ad  $a$  deve avere un unico gruppo di  $\lambda$  radici intere. È facile vedere che ad ogni radice positiva di questo gruppo corrisponde per l'equazione primitiva  $\Phi(y) = 0$  un integrale privo di logaritmi. Tutti quest'integrali, che si possono ottenere combinando fra loro quelli del gruppo (1) in modo conveniente, non sono legati da alcuna relazione lineare a coefficienti costanti.

Può ancora accadere che l'equazione  $\Omega(t) = 0$  sia di ordine  $m < n$ . In tal caso, se ricordiamo che gl'integrali di  $\Omega(t) = 0$  si possono ottenere eseguendo le derivate d'ordine  $r_1 - r_\lambda + 1$  degl'integrali di  $\Phi_1(u) = 0$ , si vede subito che fra gl'integrali di quest'ultima equazione vi devono essere  $i = n - m$  polinomi distinti interi in  $x - a$  e di grado inferiore a  $r_1 - r_\lambda + 1$ . Questi polinomi provengono da altrettanti integrali di  $\Phi(y) = 0$  privi di logaritmi nelle vicinanze di  $a$ , ed appartengono necessariamente ad esponenti interi e positivi relativamente a questo punto; sicchè, quando siano scelti in modo conveniente, devono corrispondere a  $i$  delle radici intere  $r_1 - r_\lambda, r_2 - r_\lambda, \dots, r_{\lambda-1} - r_\lambda, 0$ , e ciò perchè sono integrali di  $\Phi_1(u) = 0$ . Quindi deve essere  $\lambda \geq i$ , e la determinante di  $\Omega(t) = 0$  relativa ad  $a$  deve aver soltanto  $\lambda - i$  radici intere. Ad ognuna di queste radici corrisponde sempre un integrale di  $\Phi(y) = 0$  privo di logaritmi nell'intorno di  $a$ ; sicchè, considerando il gruppo di radici intere della determinante relativa ad  $a$  di  $\Omega(t) = 0$ , se accade che fra queste radici ve ne siano soltanto  $\mu \leq \lambda - i$  negative, si può concludere che la  $\Phi(y) = 0$  ha  $l = \lambda - \mu$  integrali privi di logaritmi nelle vicinanze di  $a$ , che si possono ottenere combinando fra loro in modo conveniente quelli del gruppo (1).

Queste considerazioni sono pure dovute al FUCHS, il quale peraltro ha tenuto conto del solo caso che sia  $\mu = 0$ , cioè che tutti gl'integrali del gruppo siano privi di logaritmi.

3. Ci proponiamo ora di esporre un altro metodo più semplice e più pratico per riconoscere se, combinando fra loro gl'integrali del gruppo (1), si possano ottenere alcuni integrali di  $\Phi(y) = 0$  privi di logaritmi.

Dobbiamo per questo considerare i coefficienti  $p_1, p_2, \dots, p_n$  dell'equazione  $\Phi(y) = 0$  nelle vicinanze di  $a$  e svilupparli in serie ordinate per le potenze intere e crescenti di  $x - a$ . Ciò premesso, essendo  $r, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$  una successione di quantità costanti scelte in modo qualunque, si costruisca la serie:

$$v = \alpha_0(x - a)^r + \alpha_1(x - a)^{r+1} + \alpha_2(x - a)^{r+2} + \dots,$$

che si può considerare come il prodotto di  $(x - a)^r$  per i termini di un'altra serie  $w$  espressa da:

$$w = \alpha_0 + \alpha_1(x - a) + \alpha_2(x - a)^2 + \dots$$

Finchè le  $\alpha$  restano indeterminate non possiamo dire nulla riguardo alla convergenza di queste serie nelle vicinanze di  $a$ . Osserviamo soltanto che, se una di esse è convergente, lo è anche l'altra. In tal caso si ha la formula:

$$v = (x - a)^r w.$$

Si può supporre che la  $\alpha_0$  sia sempre differente da zero, perchè, se fosse  $\alpha_0 = 0$  ed  $\alpha_i$  fosse la prima delle costanti  $\alpha$  differente da zero, si potrebbero considerare le quantità:

$$r + i, \quad \alpha_i, \quad \alpha_{i+1}, \dots$$

invece delle altre:

$$r, \quad \alpha_0, \quad \alpha_1, \dots$$

Sebbene non si sappia se la serie  $v$  sia convergente, pure diremo sempre che essa appartiene all'esponente  $r$  relativamente al punto  $a$ .

Si sostituisca ad  $y$  nel primo membro dell'equazione  $\Phi(y) = 0$  la serie  $v$ . Si ottiene in tal modo la nuova serie:

$$\Phi(v) = A_0(x - a)^{r-n} + A_1(x - a)^{r-n+1} + \dots,$$

che non sappiamo se sia convergente nelle vicinanze di  $a$ .

È facile vedere che si ha:

$$A_0 = \alpha_0 F(r);$$

epperò l'espressione  $A_0$  risulta nulla solo quando  $r$  è una radice della determinante relativa ad  $a$  di  $\Phi(y) = 0$ .

Si tratta ora di dimostrare che, quando i coefficienti  $A$  di  $\Phi(v)$  sono identicamente nulli, le due serie  $v$  e  $w$  sono convergenti nelle vicinanze di  $a$ , e  $v$  rappresenta un'integrale dell'equazione.

Se si fa  $r = r_1$ , e si dà ad  $\alpha_0$  un valore qualunque, si possono sempre determinare le rimanenti quantità  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  che entrano in  $v$ , in modo che la serie  $\Phi(v)$  risulti a coefficienti nulli. Questa determinazione non si può fare che in un modo solo, e di ciò ci si può accertare facilmente. Il FUCHS ha dimostrato che la serie  $v$  che così si ottiene è convergente, e rappresenta un integrale dell'equazione. Essa differisce dal primo integrale del gruppo (1) solo per un fattore costante dipendente dal valore di  $\alpha_0$ .

Può darsi ancora che, eguagliando  $r$  ad altre radici del gruppo  $r_1, r_2, \dots, r_\lambda$ , si possano ottenere altre serie analoghe alla  $v$  e tali che, sostituite ad  $y$  in  $\Phi(y) = 0$ , diano origine a serie a coefficienti nulli. Consideriamo tutte queste serie assieme a quella corrispondente a  $r = r_1$ ; indichiamole con  $v_1, v_2, \dots, v_l$ , e supponiamo che esse siano linearmente indipendenti, cioè che non si possano determinare delle costanti  $d$  tali che la serie:

$$d_1 v_1 + d_2 v_2 + \dots + d_l v_l$$

risulti a coefficienti nulli.

Ognuna delle serie  $v$  appartiene a una delle radici  $r_1, r_2, \dots, r_\lambda$ , e, se due serie  $u_h$  e  $u_k$  appartengono alla medesima radice  $r_h$ , si può a una di esse,  $u_k$  ad es., sostituire l'altra serie  $u_k + \lambda u_h$ , ove  $\lambda$  è una costante tale che in  $u_k + \lambda u_h$  venga a mancare il termine in  $(x - a)^{r_h}$ . Questa serie, che si può prendere invece di  $u_k$ , comincia con un termine contenente ad es.  $(x - a)^{r_k}$ , essendo  $r_k$  un'altra radice del gruppo differente da  $r_h$ . Ripetendo una tale operazione un numero finito di volte potremo ottenere le serie  $v_1, v_2, \dots, v_l$ , in modo che le radici alle quali appartengono siano tutte differenti.

Consideriamo le altre serie  $u_1, u_2, \dots, u_l$  tali che i loro termini differiscano da quelli delle corrispondenti  $v$  per il fattore  $(x - a)^{r_\lambda}$ . Queste nuove serie, quando vengano sostituite a  $u$  in  $\Phi_1(u)$ , danno origine ad altrettante serie a coefficienti nulli.

Sia  $t_h$  la serie che si ottiene derivando ogni termine di  $u_h$   $r_1 - r_\lambda + 1$  volte. È chiaro che le serie  $t_1, t_2, \dots, t_l$  sono tali che, sostituite a  $t$  in  $\Omega(t)$ , danno origine a serie a coefficienti nulli.

Può darsi che di queste serie  $t$  ve ne siano soltanto  $l - i$ , essendo  $i \leq l$ , linearmente indipendenti, che potremo determinare in modo che ognuna di esse cominci con una potenza differente di  $x - a$ . Indichiamo queste  $l - i$

serie con  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{l-i}$ , e sia  $s_h$  l'esponente della potenza di  $x - a$  nel primo termine di  $\theta_h$ . I numeri interi e positivi  $s_1, s_2, \dots, s_{l-i}$  sono radici della determinante di  $\Omega(t) = 0$  relativa ad  $a$ .

È facile vedere che, combinando linearmente le serie  $u$ , si ottengono  $i$  polinomi distinti interi in  $x - a$  e di grado inferiore a  $r_1 - r_\lambda + 1$ , i quali si possono sempre scegliere in modo che appartengano a esponenti differenti. Anzi si potrà supporre di avere scelto le serie  $v_1, v_2, \dots, v_l$  in modo che le radici alle quali appartengono siano tutte differenti, e che  $v_1, v_2, \dots, v_i$  siano espressioni a un numero finito di termini, tali che divise per  $(x - a)^{r_\lambda}$  diano origine agli  $i$  polinomi.

L'equazione  $\Omega(t) = 0$  è soltanto di grado  $m = n - i$ , e la sua determinante relativa ad  $a$  contiene un gruppo di  $\lambda - i$  radici intere, fra le quali ve ne sono almeno  $l - i$  positive.

Da tutto ciò risulta che l'equazione primitiva  $\Phi(y) = 0$  deve avere almeno  $l$  integrali distinti privi di logaritmi nelle vicinanze di  $a$  e appartenenti relativamente a questo punto a radici del gruppo  $r_1, r_2, \dots, r_\lambda$ . Difatti  $i$  di quest'integrali sono le espressioni  $v_1, v_2, \dots, v_i$  che hanno un numero finito di termini, ed altri  $l - i$  integrali sono quelli che devono corrispondere alle  $l - i$  radici intere e positive  $s_1, s_2, \dots, s_{l-i}$  della determinante relativa ad  $a$  di  $\Omega(t) = 0$ . Ma questi  $l - i$  integrali devono essere serie analoghe alle  $v$ , tali che, sostituite ad  $y$  in  $\Phi(y)$ , diano origine ad altrettante serie a coefficienti nulli. Epperò queste serie non possono essere che combinazioni lineari a coefficienti costanti di  $v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_l$ ; sicchè non se ne possono determinare che  $l - i$  distinte. Quindi gl'integrali privi di logaritmi che si ottengono da quelli del gruppo (1) sono soltanto  $l$ , e le radici intere e positive della determinante relativa ad  $a$  di  $\Omega(t) = 0$  sono soltanto  $l - i$ .

Se vogliamo che quest'integrali di  $\Phi(y) = 0$  appartengano a radici differenti, potremo prendere per rappresentarli le serie  $v_1, v_2, \dots, v_l$ , che, per quanto abbiamo già detto, devono essere convergenti nelle vicinanze di  $a$ .

Possiamo quindi enunciare il seguente teorema:

*Essendo data un'equazione differenziale lineare:*

$$\Phi(y) = 0,$$

*avente un punto singolare  $a$ , tale però che esista la determinante relativa ad esso, ogni serie  $v$  della forma:*

$$v = \alpha_0(x - a)^m + \alpha_1(x - a)^{m+1} + \dots$$

*è convergente, e rappresenta un integrale dell'equazione, quando è tale che,*





sono della forma:

$$p_h = \frac{1}{(x-a)^h} \sum_0^{\infty} l p_{h,l} (x-a)^l,$$

ove  $h$  è uno dei numeri interi  $1, 2, \dots n$ .

Si consideri l'espressione:

$$\Phi([x-a]^h),$$

la quale nell'intorno di  $a$  potrà mettersi sotto la forma:

$$\Phi([x-a]^h) = \sum_0^{\infty} \varphi_l(h) (x-a)^{h-n+l},$$

essendo:

$$\begin{aligned} \varphi_0(h) &= h(h-1)\dots(h-n+1) + h(h-1)\dots(h-n+2)p_{1,0} + \\ &\quad + \dots + h(h-1)p_{n-2,0} + hp_{n-1,0} + p_{n,0} \\ \varphi_l(h) &= h(h-1)\dots(h-n+2)p_{1,l} + \\ &\quad + \dots + h(h-1)p_{n-2,l} + hp_{n-1,l} + p_{n,l} = 0. \end{aligned}$$

La  $\varphi_0(h)$  è il primo membro  $F(h)$  della determinante di  $\Phi(y) = 0$ , nel quale la quantità incognita  $r$  è sostituita da  $h$ . Ricordando che la serie (3) posta in luogo di  $y$  nell'equazione la verifica qualunque siano i valori di:

$$\gamma_0, \quad \gamma_{m_1}, \quad \gamma_{m_2}, \dots \quad \gamma_{m_{\lambda-1}},$$

abbiamo le relazioni:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(s)\gamma_0 + \varphi_0(s+1)\gamma_1 &= 0 \\ \varphi_2(s)\gamma_0 + \varphi_1(s+1)\gamma_1 + \varphi_0(s+2)\gamma_2 &= 0 \\ \dots & \\ \dots & \\ \varphi_{m_k-1}(s)\gamma_0 + \varphi_{m_k-2}(s+1)\gamma_1 + \\ &\quad + \dots + \varphi_1(s+m_k-2)\gamma_{m_k-2} + \varphi_0(s+m_k-1)\gamma_{m_k-1} = 0 \\ \varphi_{m_k}(s)\gamma_0 + \varphi_{m_k-1}(s+1)\gamma_1 + \\ &\quad + \dots + \varphi_1(s+m_k-1)\gamma_{m_k-1} &= 0 \\ \varphi_{m_k+1}(s)\gamma_0 + \varphi_{m_k}(s+1)\gamma_1 + \\ &\quad + \dots + \varphi_1(s+m_k)\gamma_{m_k} + \varphi_0(s+m_k+1)\gamma_{m_k+1} = 0 \\ \dots & \\ \dots & \end{aligned} \right\} (5)$$

essendo  $k$  uno dei numeri interi  $1, 2, \dots, \lambda - 1$ . Manca la relazione colla sola  $\gamma_0$ , nella  $m_1$ esima non vi è il termine con  $\gamma_{m_1}$ , nella  $m_2$ esima quello con  $\gamma_{m_2}$  e finalmente nella  $m_{\lambda-1}$ esima quello con  $\gamma_{m_{\lambda-1}}$ , e ciò perchè:

$$\varphi_0(s) = \varphi_0(s + m_1) = \dots = \varphi_0(s + m_{\lambda-1}) = 0,$$

essendo:

$$s, \quad s + m_1, \dots \quad s + m_{\lambda-1}$$

le radici della determinante dell'equazione.

Le prime  $m_1$  delle (5) devono essere soddisfatte qualunque sia il valore assegnato a  $\gamma_0$ ; perciò il determinante formato coi coefficienti delle  $\gamma$  di queste  $m_1$  relazioni deve essere identicamente nullo. Si ha così una prima condizione che potremo indicare con

$$D_{1,2} = 0.$$

Ricavando i valori di

$$\gamma_1, \quad \gamma_2, \dots \quad \gamma_{m_1-1}$$

in funzione di  $\gamma_0$  dalle  $m_1$  eguaglianze considerate, e sostituendoli nelle  $m_2 - m_1$  delle (5) che vanno dalla  $m_1$ esima alla  $m_2$ esima, si vede che queste devono essere soddisfatte qualunque siano  $\gamma_0, \gamma_{m_1}$ ; epperò dovranno risultare nulli i due determinanti formati coi coefficienti di:

$$\gamma_0, \quad \gamma_{m_1+1}, \dots \quad \gamma_{m_2-1}$$

l'uno e di:

$$\gamma_{m_1}, \quad \gamma_{m_1+1}, \dots \quad \gamma_{m_2-1}$$

l'altro. Si hanno così due altre condizioni che potremo indicare con

$$D_{1,3} = 0, \quad D_{2,3} = 0,$$

e seguitando in questo modo si ottengono le  $\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}$  relazioni:

$$\left. \begin{aligned} D_{1,2} &= 0 \\ D_{1,3} &= 0, \quad D_{2,3} = 0 \\ D_{1,4} &= 0, \quad D_{2,4} = 0, \quad D_{3,4} = 0 \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ D_{1,\lambda} &= 0, \quad D_{2,\lambda} = 0, \quad D_{3,\lambda} = 0, \dots \quad D_{\lambda-1,\lambda} = 0. \end{aligned} \right\} (6)$$

Queste relazioni esprimono la condizione necessaria affinchè la  $\Phi(y) = 0$  abbia un integrale  $y$  con  $\lambda$  costanti arbitrarie, il quale nell'intorno di  $a$  sia espresso dalla (3); ma dai risultati ottenuti nel n.° 3 si deduce che esse esprimono ancora la condizione sufficiente.

5. Ricordiamo ora quali altre relazioni devono essere sostituite alle (6), affinchè dagl'integrali del gruppo (1) si possano ottenere soltanto  $\lambda - 1$  integrali senza logaritmi. Partiamo dall'ipotesi che esistano questi  $\lambda - 1$  integrali privi di logaritmi, e supponiamo che appartengano rispettivamente agli esponenti:

$$r_\lambda, \quad r_{\lambda-1}, \dots \quad r_{\lambda-h+1}, \quad r_{\lambda-h-1}, \dots \quad r_1.$$

Questi  $\lambda - 1$  integrali, che indicheremo con

$$v_1, \quad v_2, \dots \quad v_h, \quad v_{h+2}, \dots \quad v_\lambda,$$

possono svolgersi in serie nell'intorno di  $a$ . Noi prenderemo per rappresentarli le espressioni (2), nelle quali supporremo che manchi quella corrispondente ad  $y_{h+1}$ . Ciò equivale a fare:

$$\alpha_{h+1, m_h} = \alpha_{h+1, m_{h+1}} = \dots = \alpha_{h+1, m_{h+l}} = 0. \quad (7)$$

Con queste  $\lambda - 1$  funzioni si formi l'integrale particolare con le  $\lambda - 1$  costanti arbitrarie  $c_1, c_2, \dots c_h, c_{h+2}, \dots c_\lambda$  espresso da:

$$y = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_h v_h + c_{h+2} v_{h+2} + \dots + c_\lambda v_\lambda.$$

Quest'integrale potrà nelle vicinanze di  $a$  essere rappresentato dalla serie (3), nella quale le  $\gamma$  sono sempre date dalle (4), purchè si tenga conto delle (7), ossia purchè si faccia  $c_{h+1} = 0$ .

Con un ragionamento analogo a quello fatto precedentemente si vede che possiamo prendere le:

$$\gamma_0, \quad \gamma_{m_1}, \dots \quad \gamma_{m_{h-1}}, \quad \gamma_{m_{h+1}}, \dots \quad \gamma_{m_{\lambda-1}}$$

come costanti arbitrarie invece delle  $c$ , e che ogni  $\gamma$  della serie (3) dipende dalle sole  $\gamma$  arbitrarie che la precedono; sicchè anche per la  $\gamma_{m_h}$  si avrà una espressione della forma:

$$\gamma_{m_h} = \rho_0 \gamma_0 + \rho_1 \gamma_{m_1} + \dots + \rho_{h-1} \gamma_{m_{h-1}} \quad (8)$$

ove le  $\rho$  sono costanti determinate e finite. Seguitando a ragionare e ad ope-

rare come nel caso precedente, e di più ricordando che  $\gamma_{m_h}$  non è arbitraria, ma è data dalla (8), si giunge alle relazioni:

$$\begin{aligned}
 & D_{1,2} = 0 \\
 & D_{1,3} = 0, \quad D_{2,3} = 0 \\
 & \dots \dots \dots \\
 & \dots \dots \dots \\
 & D_{1,h+1} = 0, \quad D_{2,h+1} = 0, \dots \quad D_{h,h+1} = 0 \\
 & \quad D_{1,h+2} + \rho_0 D_{h+1,h+2} = 0 \\
 & \quad D_{2,h+2} + \rho_1 D_{h+1,h+2} = 0 \\
 & \quad \dots \dots \dots \\
 & \quad D_{h,h+2} + \rho_{h-1} D_{h+1,h+2} = 0 \\
 & \quad D_{1,h+3} + \rho_0 D_{h+1,h+3} = 0 \\
 & \quad D_{2,h+3} + \rho_1 D_{h+1,h+3} = 0 \\
 & \quad \dots \dots \dots \\
 & \quad D_{h,h+3} + \rho_{h-1} D_{h+1,h+3} = 0 \\
 & \quad \dots \dots \dots \\
 & \quad \dots \dots \dots \\
 & \quad D_{1,\lambda} + \rho_0 D_{h+1,\lambda} = 0 \\
 & \quad D_{2,\lambda} + \rho_1 D_{h+1,\lambda} = 0 \\
 & \quad \dots \dots \dots \\
 & \quad D_{h,\lambda} + \rho_{h-1} D_{h+1,\lambda} = 0 \\
 & \quad D_{h+2,h+3} = 0 \\
 & \quad D_{h+2,h+4} = 0, \quad D_{h+3,h+4} = 0 \\
 & \quad \dots \dots \dots \\
 & \quad D_{h+2,\lambda} = 0, \quad D_{h+3,\lambda} = 0, \dots \quad D_{\lambda-1,\lambda} = 0.
 \end{aligned}$$

Da queste, eliminando le  $\rho$ , si ottengono le altre:

$$\begin{aligned}
 & D_{1,2} = 0 \\
 & D_{1,3} = 0, \quad D_{2,3} = 0 \\
 & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 & D_{1,h+1} = 0, \quad D_{2,h+1} = 0, \dots \quad D_{h,h+1} = 0 \\
 & \frac{D_{1,h+2}}{D_{h+1,h+2}} = \frac{D_{1,h+3}}{D_{h+1,h+3}} = \dots = \frac{D_{1,\lambda}}{D_{h+1,\lambda}} \\
 & \frac{D_{2,h+2}}{D_{h+1,h+2}} = \frac{D_{2,h+3}}{D_{h+1,h+3}} = \dots = \frac{D_{2,\lambda}}{D_{h+1,\lambda}} \\
 & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 & \frac{D_{h,h+2}}{D_{h+1,h+2}} = \frac{D_{h,h+3}}{D_{h+1,h+3}} = \dots = \frac{D_{h,\lambda}}{D_{h+1,\lambda}} \\
 & D_{h+2,h+3} = 0 \\
 & D_{h+2,h+1} = 0, \quad D_{h+3,h+4} = 0 \\
 & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 & D_{h+2,\lambda} = 0, \quad D_{h+3,\lambda} = 0, \dots \quad D_{\lambda-1,\lambda} = 0.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Queste relazioni, che sono in numero di:

$$\frac{(\lambda - 1)(\lambda - 2)}{2},$$

esprimono la condizione necessaria e sufficiente affinchè dagl'integrali del gruppo (1) se ne possano ottenere  $\lambda - 1$  distinti e privi di logaritmi.

Se qualcuno dei denominatori delle eguaglianze (9) composto di membri frazionari è nullo, dovremo pure eguagliare a zero il corrispondente numeratore.

Evidentemente i  $\lambda - h - 1$  determinanti:

$$D_{h+1,h+2}, \quad D_{h+1,h+3}, \dots \quad D_{h+1,\lambda}$$

non possono essere tutti eguali allo zero, perchè in tal caso le relazioni (9) si trasformerebbero nelle (6), ed allora tutti gl'integrali del gruppo (1) sarebbero privi di logaritmi.

Al numero  $h$  si possono dare tutti i valori interi da 1 a  $\lambda - 1$ ; sicchè vi sono  $\lambda - 1$  modi nei quali può avvenire che dal gruppo (1) si ottengano  $\lambda - 1$  integrali privi di logaritmi.

Quando è  $\lambda = 2$ , cioè quando gl'integrali del gruppo (1) sono due soltanto, allora le (6) si riducono alla sola relazione:

$$D_{1,2} = 0,$$

e le (9) cessano d'esistere. Difatti in questo caso è  $\lambda - 1 = 1$ , ed è noto che nel gruppo (1) esiste sempre un integrale privo di logaritmi. Se poi vogliamo che sia il solo, dobbiamo porre come condizione:

$$\text{mod}(D_{1,2}) > 0.$$

Quando è  $\lambda = 3$ , abbiamo per le (6):

$$D_{1,2} = 0, \quad D_{1,3} = 0, \quad D_{2,3} = 0,$$

e per le (9) possono presentarsi due casi, cioè:

$$h = 1, \quad h = 2.$$

Nel primo caso si ha:

$$D_{1,2} = 0, \quad \text{mod}(D_{2,3}) > 0,$$

e nel secondo abbiamo invece:

$$D_{2,3} = 0,$$

e dei due determinanti:

$$D_{1,2}, \quad D_{1,3}$$

uno almeno deve essere differente da zero.

## II.

6. Ricordiamo che una funzione definita in tutto il piano si dice meromorfa, quando non ha alcun punto di singolarità essenziale a distanza finita. Le funzioni meromorfe possono quindi avere nel piano infiniti poli formanti un gruppo numerabile di punti, come avviene ad es.: per le funzioni ellittiche.

Ricordiamo ancora che un integrale di un'equazione differenziale lineare si dice regolare nelle vicinanze di un punto singolare  $a$ , se si mantiene finito in questo punto, quando è moltiplicato per una potenza conveniente di  $x - a$ . Dalle considerazioni esposte al principio della parte prima risulta che la con-

dizione necessaria e sufficiente affinchè tutti gl'integrali di un'equazione della forma:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + p_n y = 0 \quad (1)$$

siano regolari nell'intorno del punto  $a$ , e che i coefficienti dell'equazione diventino infiniti in  $a$ , in modo che  $p_i$  abbia in questo punto un polo d'ordine non superiore ad  $i$ . Quando per il punto  $a$  è soddisfatta questa condizione, esiste sempre l'equazione determinante della (1), la quale ci permette di costruire gl'integrali nelle vicinanze di  $a$ .

Le equazioni differenziali lineari che dovremo qui considerare sono a coefficienti meromorfi, ed hanno sempre tutti i loro integrali regolari nelle vicinanze di ogni punto singolare a distanza finita. Per semplicità indicheremo queste equazioni, quando siano messe sotto la forma (1), con le notazioni:

$$F(x, y, n) = 0, \quad G(x, y, m) = 0, \quad \Phi(v, z, p) = 0,$$

e talvolta anche con le altre:

$$F = 0, \quad G = 0, \quad \Phi = 0.$$

Nelle prime notazioni le tre lettere fra parentesi stanno ad indicare rispettivamente la variabile indipendente, la funzione incognita e l'ordine dell'equazione.

Ora si vede facilmente che un'equazione:

$$F(x, y, n) = 0$$

gode delle due seguenti proprietà fondamentali:

- 1.° Ogni integrale uniforme che la verifica è una funzione meromorfa.
- 2.° Se essa è riducibile, è soddisfatta da tutti gl'integrali di un'altra equazione:

$$G(x, y, m) = 0,$$

essendo  $m < n$ .

Infatti supponiamo dapprima che  $F = 0$  abbia un integrale uniforme; allora quest'integrale, dovendo essere regolare nei vari punti a distanza finita, non potrà avere che poli in tutti quei punti singolari nei quali non è finito e continuo; per conseguenza esso sarà una funzione meromorfa.

Supponiamo poi che la  $F = 0$  sia riducibile; allora essa ammetterà tutti gl'integrali di un'altra equazione a coefficienti monodromi e d'ordine  $m < n$ . Ma questa nuova equazione, avendo tutti i suoi integrali regolari in tutti i

punti singolari a distanza finita, sarà della stessa natura di  $F = 0$ , e quindi potrà essere rappresentata da:

$$G(x, y, m) = 0.$$

7. Ci possiamo servire di questi risultati per dimostrare due teoremi relativi alle equazioni differenziali lineari a coefficienti ellittici. Il primo di questi teoremi è il seguente:

*Un'equazione:*

$$F(x, y, n) = 0$$

*a coefficienti ellittici e riducibile ammette tutti gl'integrali di un'altra equazione:*

$$G(x, y, m) = 0$$

*pure a coefficienti ellittici e di ordine  $m < n$ .*

**La:**

$$F(x, y, n) = 0$$

essendo riducibile, ammetterà tutti gl'integrali di un'altra equazione:

$$G(x, y, m) = 0$$

d'ordine  $m < n$ . Di queste equazioni ve ne potranno essere più d'una; noi per altro sceglieremo una di quelle per le quali  $m$  abbia il massimo valore. Si tratta di dimostrare che l'equazione  $G(x, y, m) = 0$  scelta in questo modo è pure a coefficienti ellittici.

Supponiamo infatti che non lo sia; allora, indicando con  $2\omega$  e  $2\omega'$  i periodi dei coefficienti di  $F = 0$ , osserviamo che quest'equazione sarà ancora soddisfatta dagli integrali delle altre due:

$$G(x + 2\omega, y, m) = 0, \quad G(x + 2\omega', y, m) = 0.$$

Confrontiamo la  $G(x, y, m) = 0$  con una di queste equazioni, ad es.: con la prima; può darsi che le due equazioni:

$$G(x, y, m) = 0, \quad G(x + 2\omega, y, m) = 0 \quad (2)$$

non abbiano alcun integrale a comune, come pure può avvenire che siano ambedue riducibili, ed abbiano  $p$  integrali a comune, essendo naturalmente  $p < m$ . In tal caso questi  $p$  integrali appartengono ad una equazione:

$$H(x, y, p) = 0.$$

Consideriamo un punto qualunque  $x_0$  che non sia un polo dei coefficienti

di  $F = 0$ , e indichiamo con  $u_1, u_2, \dots, u_n$   $n$  integrali distinti di questa equazione definiti dai loro sviluppi in serie di CAUCHY nelle vicinanze di  $x_0$ . È chiaro che potremo supporli scelti in modo che:

$$u_1, \quad u_2, \dots, \quad u_{m-p}, \quad u_{m-p+1}, \dots, \quad u_m \quad (3)$$

e

$$u_{m-p+1}, \quad u_{m-p+2}, \dots, \quad u_{2m-p} \quad (4)$$

appartengano gli uni alla prima delle (2) e gli altri alla seconda. Allora:

$$u_{m-p+1}, \quad u_{m-p+2}, \dots, \quad u_m$$

saranno gl'integrali di  $H = 0$ . Se le (2) non avessero integrali a comune, e quindi la  $H = 0$  non esistesse, basterebbe fare  $p = 0$ .

Si descriva con la  $x$  un cammino qualunque tale che non passi per alcun polo dei coefficienti di  $F = 0$ , e si ritorni in  $x_0$ . Durante questo giro chiuso, che potremo indicare con  $\Gamma$ , le funzioni  $u$  variano con continuità; ma, quando  $x$  ritorna in  $x_0$ , le  $u$  prendono valori differenti dagli iniziali, e che si possono ottenere effettuando su questi valori iniziali una sostituzione lineare a coefficienti costanti.

Ma col giro  $\Gamma$  si vengono ad eseguire altre due sostituzioni lineari, cioè una sugli integrali (3), e l'altra sugli integrali (4), e ciò perchè i coefficienti delle equazioni (2) sono monodromi. Da ciò risulta subito che, se consideriamo le funzioni:

$$u_1, \quad u_2, \dots, \quad u_{2m-p}, \quad (5)$$

su di esse pure si viene ad eseguire una sostituzione lineare a coefficienti costanti, quando colla  $x$  si fa il giro  $\Gamma$ . Se quindi si costruisce un'equazione che nelle vicinanze di  $x_0$  abbia le funzioni (5) per integrali, si vede subito che essa è a coefficienti monodromi e di quelle che si possono indicare con una notazione della forma:

$$K(x, y, 2m - p) = 0.$$

Ma quest'equazione non può esistere, perchè tutti i suoi integrali, che sono in numero di  $2m - p > m$ , appartengono anche alla  $F = 0$ . Per conseguenza i coefficienti di  $G(x, y, m) = 0$  devono avere il periodo  $2\omega$ . Similmente si prova che ammettono il periodo  $2\omega'$ ; quindi la  $G(x, y, m) = 0$  è un'equazione a coefficienti ellittici c. d. d.

Il secondo teorema si riferisce a quelle equazioni che, oltre ad essere riducibili, ammettono alcuni integrali uniformi; esso si può enunciare così:

Se un'equazione:

$$F(x, y, n) = 0$$

a coefficienti ellittici ammette  $m$  integrali uniformi, essendo  $m < n$ , questi  $m$  integrali appartengono ad un'equazione:

$$G(x, y, m) = 0$$

di quelle del PICARD, e si può abbassare l'ordine di  $F = 0$  di  $m$  unità, in modo che l'equazione:

$$H(x, u, n - m) = 0$$

che si ottiene sia pure a coefficienti ellittici.

Siano infatti:

$$y_1(x), \quad y_2(x), \dots \quad y_m(x)$$

gli  $m$  integrali uniformi di  $F = 0$ , e  $2\omega, 2\omega'$  i periodi dei coefficienti di questa equazione. Le funzioni:

$$y_1(x + 2\omega), \quad y_2(x + 2\omega), \dots \quad y_m(x + 2\omega)$$

sono pure integrali uniformi e distinti di  $F = 0$ . Essi quindi devono essere espressioni lineari a coefficienti costanti di  $y_1, y_2, \dots, y_m$ , ed il determinante di questi coefficienti sarà differente da zero. Lo stesso si dica per

$$y_1(x + 2\omega'), \quad y_2(x + 2\omega'), \dots \quad y_m(x + 2\omega').$$

Perciò il cambiamento di  $x$  in  $x + 2\omega$  e  $x + 2\omega'$  equivale a fare sopra gl'integrali uniformi due sostituzioni lineari. Così si vede subito che l'equazione:

$$\begin{vmatrix} y & y_1 & y_2 \dots & y_m \\ y' & y'_1 & y'_2 \dots & y'_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y^{(m)} & y_1^{(m)} & y_2^{(m)} \dots & y_m^{(m)} \end{vmatrix} = 0,$$

che si può mettere sotto la forma:

$$G(x, y, m) = 0,$$

è di quelle del PICARD.

Poichè le  $m$  funzioni uniformi  $y_1, y_2, \dots, y_m$  formano un sistema fondamentale d'integrali dell'equazione a coefficienti ellittici  $G = 0$ , così fra esse ve ne dovrà essere una almeno di seconda specie,  $y_1$ , ad es. Se ora facciamo

in  $F = 0$  ed in  $G = 0$ :

$$y = y_1 \int z dx,$$

otteniamo due equazioni in  $z$  a coefficienti ellittici e d'ordine  $n - 1$  l'una e  $m - 1$  l'altra. Inoltre la seconda è di quelle del PICARD, e tutti i suoi  $m - 1$  integrali uniformi appartengono anche alla prima.

Fra questi ve ne sarà uno  $z_1$  di seconda specie; sicchè, facendo nelle due equazioni ottenute:

$$z = z_1 \int t dx,$$

se ne avranno altre due in  $t$  analoghe ad esse, d'ordine  $n - 2$  l'una e  $m - 2$  l'altra sulle quali potremo operare come sulle precedenti. E dopo avere eseguito questa operazione  $m$  volte, l'equazione proveniente dalla  $G = 0$  si ridurrà alla forma  $u = 0$ , essendo  $u$  la funzione incognita, nel mentre che quella che discende dalla  $F = 0$  sarà d'ordine  $n - m$  ed a coefficienti doppiamente periodici.

8. Avanti di lasciare queste considerazioni facciamo un'ultima osservazione sulle equazioni a coefficienti ellittici.

Sia :

$$F(x, y, n) = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = 0 \quad (6)$$

una di tali equazioni, e siano  $2\omega, 2\omega'$  i periodi dei suoi coefficienti. Supponiamo che la variabile indipendente sia scelta in modo che non cadano poli delle funzioni  $p$  sul contorno del parallelogrammo fondamentale, cioè di quel parallelogrammo formato dai vertici  $0, 2\omega, 2\omega', 2\omega + 2\omega'$ . Indichiamo con  $\Gamma_1$  un giro chiuso e positivo eseguito colla variabile  $x$  sul contorno del parallelogrammo fondamentale a partire dal vertice zero, e consideriamo un sistema d'integrali  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , che supporremo definiti dai loro sviluppi in serie di CAUCHY nelle vicinanze del punto zero. Quest'integrali sono finiti e continui lungo il contorno del parallelogrammo fondamentale, e col giro  $\Gamma_1$  si viene ad eseguire su di essi una sostituzione lineare a coefficienti costanti data da:

$$S = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \dots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \dots & \alpha_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} \dots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix}$$

Una proprietà fondamentale dell'equazione  $F = 0$  è la seguente:  
 Il determinante  $\Delta$  della sostituzione  $S$  è uguale all'unità.

Infatti, se consideriamo la funzione  $D$  espressa da:

$$D = \begin{vmatrix} y_1^{(n-1)} & y_1^{(n-2)} \dots & y_1 \\ y_2^{(n-1)} & y_2^{(n-2)} \dots & y_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ y_n^{(n-1)} & y_n^{(n-2)} \dots & y_n \end{vmatrix},$$

si vede che essa è finita e continua sul contorno del parallelogrammo fondamentale, e che dopo il giro  $\Gamma_1$  si riproduce moltiplicata per il fattore  $\Delta$ . Ma per un noto teorema del LIOUVILLE abbiamo ancora:

$$D = C e^{-\int \rho_1 dx},$$

essendo  $C$  una costante determinata differente da zero. Ora dalla teoria delle funzioni doppiamente periodiche risulta che l'integrale  $\int p_1 dx$  esteso al contorno del parallelogrammo fondamentale è uguale allo zero. Da ciò si deduce che dopo il giro  $\Gamma_1$  la funzione  $D$  deve riprendere lo stesso valore; per conseguenza deve essere:

$$\Delta = 1.$$

Nella sostituzione  $S$  le  $\alpha$  possono avere differenti sistemi di valori, tali però che sia sempre  $\Delta = 1$ . Così ad esempio può darsi che tutti gl'integrali della (6) riprendano lo stesso valore col giro  $\Gamma_1$ ; allora  $S$  è la sostituzione identica.

Quando non si presenta questo caso si eseguisca sopra il sistema d'integrali  $y_1, y_2, \dots, y_n$  una sostituzione lineare a coefficienti costanti data da:

$$II = \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} \dots & \beta_{1,n} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} \dots & \beta_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n,1} & \beta_{n,2} \dots & \beta_{n,n} \end{pmatrix},$$

ove le  $\beta$  sono costanti, che per ora assoggetteremo alla sola condizione di

non annullare il determinante di  $H$ . Si ottiene in tal modo un nuovo sistema d'integrali, che potremo indicare con  $z_1, z_2, \dots, z_n$ . Sia  $S_1$  la sostituzione che si viene ad eseguire su questi nuovi integrali, quando con la  $x$  si fa il giro  $\Gamma_1$ , e  $\Delta_1$  il determinante di  $S_1$ . Si ha evidentemente:

$$S_1 = HSH^{-1}$$

e

$$\Delta_1 = \Delta = 1,$$

cioè  $S_1$  ed  $S$  sono trasformate l'una dell'altra.

Si disponga delle costanti  $\beta$  in modo che  $S_1$  venga ad avere la forma normale, cioè in modo che si abbia:

$$S_1 = \begin{pmatrix} \gamma_{1,1} & 0 & 0 \dots & 0 \\ \gamma_{2,1} & \gamma_{2,2} & 0 \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{n,1} & \gamma_{n,2} & \gamma_{n,3} \dots & \gamma_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Allora avremo pure:

$$\gamma_{1,1} \gamma_{2,2} \gamma_{3,3} \dots \gamma_{n,n} = 1.$$

Per conseguenza se  $n - 1$  di queste quantità sono eguali all'unità, lo stesso dovrà accadere della *nesima*.

Epperò se la (6) ammette soltanto  $n - 1$  integrali distinti, che riprendono lo stesso valore, quando colla  $x$  si fa il giro  $\Gamma_1$ , tutte le quantità:

$$\gamma_{1,1}, \gamma_{2,2}, \dots, \gamma_{n,n}$$

saranno uguali all'unità, ed anzi potremo disporre delle  $\beta$  in modo che  $S_1$  si riduca alla forma semplice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 1 \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta & 0 \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

essendo  $\delta$  una costante determinata diversa da zero.

Da queste considerazioni si deduce che quando la (6) ha entro il parallelogrammo fondamentale un solo punto critico per gl'integrali, tale che nelle sue vicinanze esistano  $n - 1$  integrali monodromi, l'equazione determinante relativa a questo punto ha tutte le sue radici intere.

Infatti  $n - 1$  di queste radici devono essere intere, e ciò perchè possano esistere  $n - 1$  integrali monodromi nell'intorno del punto critico. In quanto poi alla  $n^{\text{esima}}$  radice essa pure deve essere intera, perchè altrimenti il determinante  $\Delta_1$  non potrebbe essere uguale all'unità.

### III.

9. Consideriamo l'equazione differenziale lineare:

$$F(x, y, n) = 0$$

a coefficienti doppiamente periodici e coi periodi  $2\omega, 2\omega'$ , per la quale supporremo che si possa determinare un parallelogrammo fondamentale, tale che in esso esistano  $n - 1$  integrali uniformi, e che l'ultimo integrale, che non è uniforme, non riprenda lo stesso valore, quando colla variabile indipendente si gira attorno a tutti i punti singolari di questo parallelogrammo. Evidentemente una tale equazione comprende come caso particolare quelle che abbiamo accennato al principio di questo lavoro.

Si tratta qui di dimostrare che queste proprietà, che abbiamo attribuito alla  $F = 0$ , sono sufficienti per stabilire che essa è riducibile, ed ammette un gruppo d'integrali uniformi.

Cominceremo dall'espore un lemma, sul quale si fonda la dimostrazione che dobbiamo fare. Questo lemma, che si riferisce ad una proprietà della sostituzione (7) del capitolo precedente, si può enunciare così:

*Essendo  $S$  una sostituzione lineare d'ordine  $n$  e  $T$  un'altra sostituzione pure d'ordine  $n$  ed espressa da:*

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 1 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta & 0 \dots & 1 \end{pmatrix},$$

*ove  $\delta$  è una costante diversa da 0, se  $S$  e  $TS$  sono trasformate l'una dell'altra, qualunque potenza di  $S$  ha uguale a zero il termine della prima linea e dell'ultima colonna.*

Sia  $S'$  la sostituzione che effettua la trasformazione, cioè si abbia:

$$S' S S^{-1} = T S. \quad (1)$$

Consideriamo ora la sostituzione:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \dots & 0 & 0 \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \dots & \alpha_{2,n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n-1,1} & \alpha_{n-1,2} \dots & \alpha_{n-1,n-1} & 0 \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} \dots & \alpha_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix},$$

ove le  $\alpha$  sono costanti, che per ora assoggetteremo alla sola condizione di rendere eguale alla unità il determinante di  $H$ . Allora si trova facilmente:

$$HT = TH,$$

e da questa e dalla (1) si ricava:

$$S'_1 S_1 S_1^{-1} = T S_1, \quad (2)$$

essendo:

$$S'_1 = H S' H^{-1}, \quad S_1 = H S H^{-1}.$$

Ora dalla seconda di queste due relazioni si ottiene:

$$S_1^{-1} = H S^{-1} H^{-1},$$

e quindi:

$$S_1^p = H S^p H^{-1},$$

essendo  $p$  un numero intero e positivo qualunque.

È facile vedere che  $S^p$  e  $S_1^p$  hanno eguale il termine della prima linea e dell'ultima colonna, sicchè basterà dimostrare che in  $S_1^p$  questo termine è uguale allo zero.

Se poniamo:

$$S_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} \dots & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

si ha:

$$T S_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} + \delta a_{1,1} & a_{n,2} + \delta a_{1,2} \dots & a_{n,n} + \delta a_{1,n} \end{pmatrix},$$

e le  $a$  sono quantità che dipendono dalle  $\alpha$  e dalle costanti di  $S$ .

Da un noto teorema di *K* WEIERSTRASS si deduce (\*) che la condizione necessaria e sufficiente affinchè la (2) sia soddisfatta è che i determinanti:

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1} - \varepsilon & a_{1,2} \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \varepsilon \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} \dots & a_{n,n} - \varepsilon \end{vmatrix}.$$

$$D' = \begin{vmatrix} a_{1,1} - \varepsilon & a_{1,2} \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \varepsilon \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} + \delta a_{1,1} & a_{n,2} + \delta a_{1,2} \dots & a_{n,n} + \delta a_{1,n} - \varepsilon \end{vmatrix}$$

abbiano i medesimi divisori elementari. Per conseguenza le due eguaglianze:

$$D = 0, \quad D' = 0, \tag{3}$$

nelle quali si considera  $\varepsilon$  come quantità incognita, devono essere equivalenti. Da esse si deduce:

$$D' - D = -\delta\varepsilon L = 0, \tag{4}$$

essendo:

$$L = \begin{vmatrix} a_{2,2} - \varepsilon & a_{2,3} \dots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ a_{3,2} & a_{3,3} - \varepsilon \dots & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,2} & a_{n-1,3} \dots & a_{n-1,n-1} - \varepsilon & a_{n-1,n} \\ a_{1,2} & a_{1,3} \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \end{vmatrix}.$$

Le due equazioni (3) sono di grado  $n$ , e la (4) è soltanto di grado  $n - 1$ ; per conseguenza essa deve risultare identicamente nulla, essendo soddisfatta da  $n$  valori di  $\varepsilon$ . Così nel determinante  $L$ , che è di grado  $n - 2$  in  $\varepsilon$ , dovranno risultare nulli i coefficienti delle varie potenze di  $\varepsilon$ . Eguagliando a zero quello di  $\varepsilon^{n-2}$ , si ha:

$$a_{1,n} = 0.$$

Può darsi che si abbia ancora:

$$a_{2,n} = a_{3,n} = \dots = a_{n-1,n} = 0. \tag{5}$$

(\*) Vedi VOLTERRA: *Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari*. Memorie della Società Italiana delle Scienze detta dei XL, vol. 6, serie 3.<sup>a</sup>.

Allora la  $S_1$  e tutte le sue potenze positive e negative godono della proprietà di avere eguale allo zero tutti i termini dell'ultima colonna, all'infuori dell'ultimo, e per conseguenza anche quello della prima linea.

Se poi le (5) non sono soddisfatte, potremo disporre delle  $\alpha$  in modo che si abbia:

$$a_{2,n} = a_{3,n} = \dots = a_{n-2,n} = 0, \quad \text{mod}(a_{n-1,n}) > 0. \quad (6)$$

In tal caso nel determinante, il coefficiente di  $\varepsilon^{n-3}$  si riduce a  $a_{1,n-1} a_{n-1,n}$ , e quindi deve essere:

$$a_{1,n-1} = 0.$$

Se è ancora:

$$a_{2,n-1} = a_{3,n-1} = \dots = a_{n-2,n-1} = 0, \quad (7)$$

allora la  $S_1$  e tutte le sue potenze godono della proprietà di avere eguale allo zero i termini delle ultime due colonne all'infuori di quelli appartenenti alle ultime due linee. Per conseguenza tutte le potenze di  $S_1$  hanno eguale a zero il termine della prima linea e dell'ultima colonna. Ma, se non sono verificate le (7), potremo sempre disporre delle  $\alpha$  in modo che oltre alle (6) si abbia ancora:

$$a_{2,n-1} = a_{3,n-1} = \dots = a_{n-3,n-1} = 0, \quad \text{mod}(a_{n-2,n-1}) > 0;$$

quindi nel determinante  $L$  il coefficiente di  $\varepsilon^{n-4}$  si riduce a:

$$a_{1,n-2} a_{n-2,n-1} a_{n-1,n},$$

per cui deve essere:

$$a_{1,n-2} = 0,$$

e seguitando in questo modo si vede che si possono sempre prendere le  $\alpha$  in modo che  $S_1^q$ , ove  $q$  è un numero intero qualunque, abbia eguale a zero il termine della prima linea e dell'ultima colonna. Ma, per quello che abbiamo detto relativamente ad  $S$  e ad  $S_1$ , si vede subito che anche  $S^q$  deve godere di questa proprietà c. d. d.

10. Ritornando ora alla  $F=0$ , osserviamo che quello che ci proponiamo di dimostrare relativamente ad essa si può enunciare sotto forma di teorema nel modo seguente:

*Le equazioni differenziali lineari a coefficienti ellittici ammettono un gruppo d'integrali uniformi, tutte le volte che si può determinare un parallelogrammo fondamentale, tale che in esso esistano  $n-1$  integrali distinti e uniformi, e che l'ultimo integrale che non è uniforme non riprenda lo stesso*

valore, quando colla variabile si gira attorno a tutti i punti singolari di questo parallelogrammo.

Consideriamo dunque la  $F = 0$ , che gode di tutte queste proprietà, e determiniamo la variabile indipendente in modo che sul contorno del parallelogrammo fondamentale, che deve soddisfare alle condizioni poste nell'enunciato, non cada alcun punto d'infinito dei coefficienti di  $F = 0$ .

Per le osservazioni fatte alla fine del capitolo precedente ricordiamo che, scelto il parallelogrammo fondamentale, che deve soddisfare alle condizioni dell'enunciato, in modo che sul suo contorno non cadano punti singolari, si può sempre determinare un sistema d'integrali  $y_1, y_2, \dots, y_n$  tali che, facendo colla variabile un giro positivo sul contorno di questo parallelogrammo, si venga ad eseguire su di esso la sostituzione  $T$ . Di qui risulta che  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$  sono gli  $n - 1$  integrali uniformi entro il parallelogrammo, e che  $y_n$  è quello non uniforme.

Siano  $S$  ed  $S'$  le sostituzioni che si eseguono rispettivamente sul sistema d'integrali  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , quando colla variabile si va da 0 a  $2\omega$  e da 0 a  $2\omega'$ , camminando sui lati che congiungono questi vertici. Allora un giro positivo, eseguito colla variabile sul contorno del parallelogrammo a partire dal vertice 0, produce sul sistema d'integrali la sostituzione:

$$S S' S^{-1} S'^{-1} = T$$

e quindi:

$$S' S S'^{-1} = T^{-1} S, \quad S S' S^{-1} = T S'. \quad (8)$$

Queste relazioni ci mostrano che le sostituzioni  $S, S'$  sono rispettivamente le trasformate delle altre

$$T^{-1} S, \quad T S'.$$

Dalla prima delle (8) si ha poi:

$$S' S_\alpha S'^{-1} = T^{-1} S_\alpha,$$

essendo:

$$S_\alpha = S S'^\alpha,$$

e  $\alpha$  un numero intero qualunque.

Ma abbiamo ancora:

$$S_\alpha S' S_\alpha^{-1} = T S'$$

e:

$$S_\alpha S_\beta S_\beta^{-1} = T S_{\alpha, \beta},$$

essendo:

$$S_{\alpha, \beta} = S' S_{\alpha}^{\beta},$$

e  $\beta$  un altro numero pure arbitrario. Seguitando in questo modo si può costruire la sostituzione  $S_{\alpha, \beta, \gamma}$ , facendo:

$$S_{\alpha, \beta, \gamma} = S_{\alpha} S_{\alpha, \beta}^{\gamma}.$$

Procedendo sempre con questa legge si può costruire la sostituzione:

$$S_{\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda},$$

la quale è perfettamente determinata, quando sono fissati i valori dei numeri interi  $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$ . Se  $m$  è il loro numero, si deduce subito dal modo di formazione di:

$$S_{\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda}$$

che questa sostituzione e l'altra data da:

$$T^{(-1)^m} S_{\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda}$$

sono trasformate l'una dell'altra.

Le sostituzioni fondamentali che entrano nella costituzione di  $S_{\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda}$  sono  $S$  ed  $S'$ , e queste possono anche avere esponenti negativi, perchè  $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$  sono numeri interi qualunque. Ciò significa che nella  $S_{\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda}$  possono anche entrare le sostituzioni inverse  $S^{-1}$ ,  $S'^{-1}$ . Ora, quando in un prodotto di sostituzioni entra una sostituzione  $S$   $h$  volte e la sua inversa  $S^{-1}$   $k$  volte, diremo che  $S$  entra in quel prodotto  $h - k$  volte. Ciò posto siano:

$$[\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda], \quad [\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda]'$$

i numeri delle volte che  $S$  ed  $S'$  entrano in  $S_{\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda}$ .

Consideriamo poi la sostituzione:

$$S_{\beta, \gamma, \dots, \lambda},$$

la quale si costruisce con la legge precedente. Le sostituzioni ausiliarie che servono per la sua formazione sono:

$$S_{\beta} = S S^{\beta}, \quad S_{\beta, \gamma} = S' S_{\beta}^{\gamma} \dots$$

Ora la  $S_{\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda}$  si può considerare come costituita da  $S'$  e da  $S_{\alpha}$ ; in tal caso essa è formata da queste sostituzioni come  $S_{\beta, \gamma, \dots, \lambda}$  è formata da  $S$  e da  $S'$ .

Perciò:

$$[\beta, \gamma, \dots, \lambda] \quad \text{e} \quad [\beta, \gamma, \dots, \lambda]'$$

sono i numeri delle volte che  $S'$  e  $S_\alpha$  entrano in  $S_{\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda}$ , quando essa si considera costituita da queste sostituzioni. Ma la  $S$  entra in  $S_{\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda}$  inquantochè si trova in  $S_\alpha$  alla prima potenza; epperò avremo:

$$[\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda] = [\beta, \gamma, \dots, \lambda]' \tag{9}$$

Invece la  $S'$  vi entra per mezzo di  $S_\alpha$  e direttamente. Evidentemente la  $S'$  entra in  $S_{\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda}$  per mezzo di  $S_\alpha$  un numero di volte dato da  $\alpha [\beta, \gamma, \dots, \lambda]'$ . Direttamente poi la  $S'$  entra in  $S_{\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda}$  un numero di volte eguale a quello che si ha quando si considera questa sostituzione come costituita da  $S'$  e da  $S_\alpha$ , ossia un numero di volte dato da  $[\beta, \gamma, \dots, \lambda]$ ; quindi abbiamo:

$$[\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda]' = \alpha [\beta, \gamma, \dots, \lambda]' + [\beta, \gamma, \dots, \lambda]. \tag{10}$$

Osserviamo finalmente che le sostituzioni fondamentali  $S, S'$  e tutte le altre  $S$ , qualunque sieno i loro indici, godono della proprietà esposta nell'enunciato del lemma, cioè esse e tutte le loro potenze hanno eguale a zero il termine della prima linea e dell'ultima colonna.

Si tratta ora di dimostrare che, essendo dati due numeri interi arbitrari  $\alpha, \beta$ , si può sempre costruire una  $S$  tale che essa o una sua potenza contenga la  $S$   $\alpha$  volte e la  $S'$   $\beta$  volte.

Cominciamo dal considerare due numeri  $\alpha, \beta$  primi fra loro, e supponiamo inoltre che  $\alpha$  sia positivo. Allora si possono sempre determinare due altri numeri  $p_1, \alpha_1$  tali che si abbia:

$$\beta = p_1 \alpha + \alpha_1,$$

e colla condizione che  $\alpha_1$  sia positivo e minore di  $\alpha$ . Considerando poi  $\alpha$  e  $\alpha_1$  si possono fare tutte le operazioni necessarie per la ricerca del loro massimo comun divisore. Siano  $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{i-1}$  i resti successivi, essendo  $\alpha_{i-1} = 1$ , e  $p_2, p_3, \dots, p_{i-1}, p_i$  i quozienti successivi, essendo  $p_i = \alpha_{i-2}$ ; avremo le  $i - 1$  relazioni:

$$\left. \begin{aligned} \beta &= p_1 \alpha + \alpha_1 \\ \alpha &= p_2 \alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_1 &= p_3 \alpha_2 + \alpha_3 \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \\ \alpha_{i-3} &= p_{i-1} \alpha_{i-2} + 1. \end{aligned} \right\} \tag{11}$$

Dalla (9) si ottiene:

$$\begin{aligned}
 [p_1, p_2, \dots p_i] &= [p_2, \dots p_i]' \\
 [p_2, p_3, \dots p_i] &= [p_3, \dots p_i]' \\
 &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 [p_{i-1}, p_i] &= [p_i]' = p_i \\
 [p_i] &= 1.
 \end{aligned}$$

Da queste e dalla (10) si ricava poi:

$$\begin{aligned}
 [p_1, p_2, \dots p_i]' &= p_1 [p_1, p_2, \dots p_i] + [p_2, \dots p_i] \\
 [p_1, p_2, \dots p_i] &= p_2 [p_2, \dots p_i] + [p_3, \dots p_i] \\
 [p_2, \dots p_i] &= p_3 [p_3, \dots p_i] + [p_4, \dots p_i] \\
 &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 [p_{i-2}, p_{i-1}, p_i] &= p_{i-1} [p_{i-1}, p_i] + [p_i] = p_{i-1} p_i + 1.
 \end{aligned}$$

Quest' ultime relazioni confrontate con le (11) ci mostrano che:

$$\alpha = [p_1, p_2, \dots p_i], \quad \beta = [p_1, p_2, \dots p_i]',$$

e quindi la sostituzione:

$$S_{p_1, p_2, \dots p_i}$$

contiene la  $S$   $\alpha$  volte e la  $S'$   $\beta$  volte.

Si abbiano ora due numeri interi qualunque  $\gamma, \delta$ . Se sono ambedue diversi da zero, si può determinare il massimo comun divisore  $m$  come se fossero positivi. Allora i numeri:

$$\frac{\gamma}{\pm m}, \quad \frac{\delta}{\pm m},$$

nei quali si prende il segno  $+$  o il segno  $-$  secondochè  $\gamma$  è positivo o negativo, godono di tutte le proprietà di  $\alpha$  e  $\beta$ . Per conseguenza si può sempre trovare una sostituzione:

$$S_{p_1, p_2, \dots p_i}$$

per la quale sia:

$$[p_1, p_2, \dots p_i] = \frac{\gamma}{\pm m}, \quad [p_1, p_2, \dots p_i]' = \frac{\delta}{\pm m}.$$

Allora la sostituzione:

$$S_{p_1, p_2, \dots, p_i}^{\pm m}$$

contiene  $\gamma$  volte la  $S$  e  $\delta$  volte la  $S'$ .

Se poi è:

$$\gamma = 0, \quad \delta \geq 0,$$

oppure:

$$\gamma \geq 0, \quad \delta = 0,$$

allora si può considerare nel primo caso la sostituzione  $S'^{\delta}$  e nel secondo l'altra  $S^{\gamma}$ .

In ogni caso la sostituzione che si determina, e che contiene  $\gamma$  volte la  $S$  e  $\delta$  volte la  $S'$ , ha eguale a zero il termine della prima linea e dell'ultima colonna, perchè essa è sempre una potenza positiva o negativa di una  $S$ .

Ora se diamo a  $\gamma$  e a  $\delta$  i sistemi di valori:

$$1, 0; \quad -1, 0; \quad 0, 1; \quad 0, -1; \quad 1, 1; \quad -1, 1; \quad 1, -1; \quad -1, -1,$$

si vede che  $y_1$  si comporta negli otto parallelogrammi, che racchiudono quello fondamentale, nello stesso modo che combinazioni lineari a coefficienti costanti di  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$  si comportano nel parallelogrammo fondamentale; epperò  $y_1$  è uniforme in questi otto parallelogrammi. Seguendo in questo modo col dare a  $\gamma$  e a  $\delta$  tutti i possibili sistemi di valori interi, si troverà che  $y_1$  è uniforme in tutto il piano.

Se  $y_1$  è di seconda specie, allora può darsi che esso sia il solo integrale uniforme, ma se non è di seconda specie, esso dovrà far parte di un gruppo d'integrali uniformi in tutto il piano, fra i quali ve ne dovrà essere uno almeno di seconda specie. Così il teorema resta completamente dimostrato.

11. Questo teorema può servire utilmente alla integrazione delle equazioni a coefficienti doppiamente periodici, quando i punti critici per gl'integrali che si trovano entro il parallelogrammo fondamentale si riducono a uno, perchè soltanto allora si può verificare con metodi algebrici e perfettamente determinati se esistono  $n - 1$  integrali uniformi entro il parallelogrammo fondamentale.

Infatti abbiamo già osservato alla fine del primo capitolo che in questo caso l'equazione determinante relativa all'unico punto critico per gl'integrali ha tutte le sue radici intere. Per conseguenza basterà studiare gl'integrali nelle vicinanze del punto critico e verificare se fra esso ve ne sono  $n - 1$  distinti che non contengano logaritmi.

Quando i punti critici per gl'integrali che si trovano entro il parallelogrammo fondamentale si riducono ad uno solo, il teorema che abbiamo dimostrato si può enunciare più semplicemente nel modo seguente:

*Le equazioni differenziali lineari di ordine  $n$  a coefficienti doppiamente periodici ed aventi entro il parallelogrammo dei periodi un solo punto critico per gl'integrali ammettono un gruppo d'integrali particolari uniformi, tutte le volte che ne esistono  $n - 1$  che si mantengono monodromi nelle vicinanze del punto critico.*

Le equazioni che soddisfano alle condizioni esposte nell'enunciato di questo teorema possono considerarsi come completamente integrabili. Infatti esse ammettono sempre almeno un integrale particolare uniforme di seconda specie, che si può determinare con metodi analoghi a quelli che sono stati dati nel caso dell'integrale generale uniforme.

Noto uno di questi integrali di seconda specie, che si può prendere per uno degl'integrali  $y$ ,  $y_i$  ad es., si faccia nell'equazione:

$$y = y_i \int z dx.$$

Si ottiene in tal modo un'equazione d'ordine  $n - 1$  in  $z$  pure a coefficienti doppiamente periodici ed aventi entro il parallelogrammo fondamentale gli  $n - 1$  integrali particolari distinti:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{y_1}{y_i} \right), \quad \frac{d}{dx} \left( \frac{y_2}{y_i} \right), \dots \quad \frac{d}{dx} \left( \frac{y_{i-1}}{y_i} \right), \quad \frac{d}{dx} \left( \frac{y_{i+1}}{y_i} \right), \dots \quad \frac{d}{dx} \left( \frac{y_n}{y_i} \right).$$

Di questi i primi  $n - 2$  sono sempre uniformi nel parallelogrammo fondamentale, e l'ultimo viene aumentato del primo moltiplicato per  $\vartheta$ , quando si gira attorno al punto critico nel senso positivo, nel caso però che sia  $i > 1$ . Se invece è  $i = 1$ , allora anche l'ultimo integrale è uniforme, e l'equazione è di quelle del PICARD. Sicchè, abbassando di una unità l'ordine dell'equazione data, se ne ottiene un'altra che soddisfa pure alle condizioni del teorema, e che in casi speciali è di quelle del PICARD. Ma si può sempre abbassare l'ordine di questa nuova equazione determinandone un integrale. Seguitando in questo modo si giunge ad un'equazione del primo ordine, che è perfettamente integrabile. Risalendo poi dagli integrali successivamente ottenuti a quelli dell'equazione primitiva, si vede che questi ultimi si possono sempre ottenere con quadrature. Epperò le equazioni, che godono delle proprietà esposte nell'enunciato del secondo teorema, possono considerarsi come perfettamente integrabili.

## IV.

12. Esporremo in quest'ultima parte alcuni esempi di equazioni del secondo e terzo ordine che soddisfano a tutte le condizioni dell'ultimo teorema che abbiamo enunciato, e mostreremo ancora come talvolta quest'ultimo teorema possa servire utilmente per riconoscere in modo semplice se un'equazione a coefficienti ellittici abbia per integrale generale una fuzione uniforme.

Sia l'equazione del secondo ordine:

$$F(x, z, 2) = z'' + Pz' + Qz = 0,$$

e le funzioni  $P$  e  $Q$  siano doppiamente periodiche coi periodi  $2\omega$ ,  $2\omega'$ . Affinchè la  $F = 0$  soddisfi alle condizioni del teorema bisogna che le equazioni determinanti relative ai suoi punti singolari abbiano le loro radici intere, e che dei punti singolari che cadono entro il parallelogrammo dei periodi uno solo sia critico per gl'integrali. Sicchè deve essere verificata la relazione (\*):

$$D_{1,2} = 0$$

per tutti i poli che  $P$  e  $Q$  hanno entro il parallelogrammo, all'infuori di uno, per il quale deve essere invece:

$$\text{mod}(D_{1,2}) > 0.$$

Noi prenderemo la  $F = 0$  in modo che goda di tutte queste proprietà; ma per più generalità supporremo di avere verificato che per tutti i punti singolari del parallelogrammo, all'infuori di uno, è soddisfatta la relazione:

$$D_{1,2} = 0.$$

Possiamo ancora supporre di avere scelto la variabile indipendente  $x$  in modo che questo punto, che non sappiamo se sia critico o no per gl'integrali, venga a coincidere col vertice zero del parallelogrammo fondamentale.

Siano  $a_1, a_2, \dots, a_l$  i rimanenti punti singolari del parallelogrammo fondamentale e:

$$s_k, \quad s_k + r_k$$

le radici della determinante relativa ad  $a_k$ , disposte in ordine crescente; sicchè  $s_k$  ed  $r_k$  saranno numeri interi ed  $r_k$  sempre positivo e differente da zero.

---

(\*) Vedi parte 1.<sup>a</sup>, numero 5.

Fra i numeri  $r$  ve ne saranno alcuni eguali all'unità ed altri maggiori di uno. Siano:

$$r_{i+1}, \quad r_{i+2}, \dots \quad r_l$$

quelli eguali ad uno, essendo naturalmente:

$$0 \leq i \leq l.$$

Si faccia in  $F = 0$  un cambiamento di funzione incognita ponendo:

$$z = y \prod_{k=1}^{k=l} \left[ \frac{\sigma(x - a_k)}{\sigma(x)} e^{Z(a_k)x} \right]^{s_k}, \quad (1)$$

essendo:

$$Z(a_k) = \frac{\sigma'(a_k)}{\sigma(a_k)}$$

e  $\sigma(x)$  la funzione di WEIERSTRASS corrispondente ai periodi  $2\omega, 2\omega'$ ; si ottiene in tal modo la nuova equazione:

$$G(x, y, 2) = y'' + py' + qy = 0,$$

la quale è pure a coefficienti doppiamente periodici, e gode delle stesse proprietà della  $F = 0$ .

Inoltre è facile vedere che la  $G = 0$  è assai più semplice della  $F = 0$ . Infatti i punti singolari, che essa ha entro il parallelogrammo fondamentale, sono soltanto:  $0, a_1, a_2, \dots a_i$ , e ciò perchè i suoi coefficienti  $p$  e  $q$  sono finiti negli altri punti  $a_{i+1}, a_{i+2}, \dots a_l$ . Le radici delle determinanti di  $G = 0$  relative ad  $a_1, a_2, \dots a_i$  sono rispettivamente:

$$0, r_1; \quad 0, r_2; \dots \quad 0, r_i,$$

sicchè l'integrale generale di quest'equazione si mantiene finito e continuo in tutti i punti del parallelogrammo fondamentale all'infuori del vertice zero.

Queste proprietà della  $G = 0$  ci mostrano che è meglio considerare una tale equazione invece della  $F = 0$ , la qual cosa del resto si può sempre fare, perchè per mezzo della relazione (1) si può sempre passare dagli integrali di  $G = 0$  a quelli di  $F = 0$ .

Indichiamo con:

$$-(n + h), \quad -n$$

le radici della determinante di  $G = 0$  relativa al punto zero, disposte in ordine crescente. I numeri  $n, h$  sono interi, ed  $h$  è sempre positivo, e diviene

uguale allo zero solo quando le due radici sono eguali. Questi numeri e gli altri  $r_1, r_2, \dots, r_i$  devono soddisfare alla relazione:

$$2n + h + 1 + i - \sum_{k=1}^{k=i} r_k = 0, \quad (2)$$

la quale esprime che la somma dei residui dei poli, che  $p$  ha entro il parallelogrammo, è eguale allo zero.

La  $G = 0$  è un'equazione del PICARD, quando lo zero non è un punto critico per gl'integrali; in caso contrario essa soddisfa a tutte le condizioni dell'ultimo teorema del capitolo precedente, ed ammette quindi un solo integrale uniforme, il quale deve essere di seconda specie, e deve nelle vicinanze dello zero comportarsi come la funzione  $x^{-n}$ . Ma ciò non può mai avvenire quando è  $n < 0$ , perchè allora si avrebbe una funzione di seconda specie sempre finita ed avente in zero un infinitesimo di ordine  $-n$ . Sicchè per la  $G = 0$  si hanno i due seguenti risultati:

1.° Lo zero non può mai essere un punto critico per gl'integrali, quando  $n$  è negativo.

2.° Essendo  $n$  positivo o nullo e lo zero critico, esiste sempre per la  $G = 0$  un integrale particolare uniforme di seconda specie con un polo di ordine  $n$  in zero.

Il primo di questi risultati può servire utilmente per verificare se un'equazione del secondo ordine a coefficienti ellittici ammette un integrale generale uniforme. Così ad es., essendo data l'equazione di LAMÉ:

$$y'' + [-n(n+1)p(x) + h]y = 0,$$

si vede subito che essa deve avere un integrale generale uniforme.

Consideriamo un caso speciale d'equazioni a coefficienti ellittici ed aventi un solo integrale uniforme, il qual caso si può ottenere dando valori determinati alle quantità  $i, h, n, r_1, r_2, \dots, r_i$ , in modo però che sia sempre soddisfatta la (2). Facciamo ad es.:

$$i = 3, \quad n = 1, \quad h = 0, \quad r_1 = r_2 = r_3 = 2.$$

Si ha così un'equazione con quattro punti singolari  $0, a, b, c$  entro il parallelogrammo dei periodi; il primo dei quali, cioè lo zero, oltre ad essere singolare è ancora critico per gl'integrali, perchè le radici della sua determinante sono ambedue uguali a  $-1$ .

Se poniamo:

$$f(x, a) = \frac{1}{2} \frac{p'(a) + p'(x)}{p(a) - p(x)},$$

si vede che l'equazione si può mettere sotto la forma:

$$\left. \begin{aligned} y'' + [f(x, a) + f(x, b) + f(x, c)]y' + \\ + [p(x) + Af(x, a) + Bf(x, b) + Cf(x, c) + R]y = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Le relazioni  $D_{1,2} = 0$  corrispondenti ai punti  $a, b, c$  sono:

$$\left. \begin{aligned} A^2 + p(a) + R &= (A - B)f(a, b) + (A - C)f(a, c) \\ B^2 + p(b) + R &= (B - C)f(b, c) + (B - A)f(b, a) \\ C^2 + p(c) + R &= (C - A)f(c, a) + (C - B)f(c, b) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

sicchè delle quattro quantità  $A, B, C, R$  una sola rimane arbitraria.

Essendo  $n = 1$ , l'integrale uniforme diverrà infinito del primo ordine nel punto zero, e sarà quindi della forma:

$$y_1 = \frac{\sigma(x - \varepsilon)}{\sigma(x)} e^{[\lambda(\varepsilon) + \lambda]x},$$

ove  $\varepsilon$  è un punto del parallelogrammo che non coincide con quelli di singolarità, e  $\lambda$  una costante determinata.

Ma invece di questo integrale consideriamo la sua derivata logaritmica, la quale è data da:

$$v_1 = \frac{y_1'}{y_1} = -f(x, \varepsilon) + \lambda. \quad (5)$$

Se prendiamo per funzione incognita:

$$v = \frac{y'}{y},$$

l'equazione differenziale si trasforma nell'altra:

$$\begin{aligned} v' + v^2 + [f(x, a) + f(x, b) + f(x, c)]v + \\ + p(x) + Af(x, a) + Bf(x, b) + Cf(x, c) + R = 0. \end{aligned}$$

Ponendo in quest'equazione in luogo di  $v$  il valore di  $v_1$  dato dalla (5), si ottiene una nuova relazione, di cui il secondo membro è sempre lo zero, ed il primo è una funzione di prima specie della  $x$  con cinque poli del primo

ordine entro il parallelogrammo, cioè,  $0, a, b, c, \varepsilon$ . Annullando i residui di  $0, a, b, c$  ed il valore che la funzione prende in zero, quando si è annullato il residuo di questo punto, si hanno le cinque relazioni seguenti:

$$\left. \begin{aligned} f(a, \varepsilon) - \lambda - A &= 0 \\ f(b, \varepsilon) - \lambda - B &= 0 \\ f(c, \varepsilon) - \lambda - C &= 0 \\ \lambda + A + B + C &= 0 \\ \lambda^2 - 2p(\varepsilon) - p(a) - p(b) - p(c) + R &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Evidentemente deve esistere un sistema di valori per  $\varepsilon$  e  $\lambda$  che verifichino queste relazioni, e ciò perchè si possa determinare la funzione  $v_1$  e quindi l'integrale  $y_1$ . Epperò tre delle (6) devono essere conseguenza delle altre due. Ma ci si può accertare di questo eliminando  $\varepsilon$  e  $\lambda$  dalle (6), perchè allora è facile vedere che si ottengano le (4), le quali per ipotesi sono soddisfatte.

Dalla quarta delle (6) abbiamo:

$$\lambda = -(A + B + C),$$

e dalla quinta, ponendo per  $\lambda$  il suo valore, si ricava:

$$p(\varepsilon) = \frac{(A + B + C)^2 + R - p(a) - p(b) - p(c)}{2}.$$

Quest'ultima relazione ci dà due valori per  $\varepsilon$ ; ma soltanto uno di essi è tale che, sostituito nelle prime tre delle (6), le verifica. Difatti, da una di esse, dalla prima per es., si ottiene:

$$p'(\varepsilon) = 2(B + C)[p(a) - p(\varepsilon)] - p'(a);$$

ma per simmetria, servendoci ancora delle altre due, si ha invece:

$$p'(\varepsilon) = \frac{2\Sigma(B + C)p(a) - 4(A + B + C)p(\varepsilon) - \Sigma p'(a)}{3}.$$

Sostituendo a  $p(\varepsilon)$  l'espressione che già abbiamo trovato, si ottiene:

$$\begin{aligned} p'(\varepsilon) = & \frac{1}{3} [2\Sigma(B + C)p(a) - \Sigma p'(a) - 2(A + B + C)^2 - \\ & - 2R(A + B + C) + 2(A + B + C)\Sigma p(a)]. \end{aligned}$$

Per quanto abbiamo detto vi deve sempre essere un valore di  $\varepsilon$  che verifica al tempo stesso quest'ultima relazione e quella che ci dà  $p(\varepsilon)$ ; ma dalla natura stessa di queste relazioni si vede subito che di tali valori non ve ne può essere che uno. Quindi l'integrale  $y_1$  è perfettamente determinato.

L'altro integrale  $y_2$  è dato da:

$$y_2 = y_1 \int dx \frac{\sigma(x-a)\sigma(x-b)\sigma(x-c)}{\sigma(x)\sigma^2(x-\varepsilon)} e^{[Z(a)+Z(b)+Z(c)-2Z(\varepsilon)-2\lambda]x}$$

13. Negli esempi che faremo sulle equazioni del terzo ordine, considereremo equazioni che hanno entro il parallelogrammo dei periodi un solo punto singolare, cioè quello critico per gl'integrali, e supporremo che questo punto coincida col vertice zero, il che del resto si può sempre ottenere con un cambiamento di variabile. Le radici della determinante relativa a zero devono essere intere, e nelle vicinanze di questo punto vi devono essere sempre due integrali distinti privi di logaritmi, la qual cosa, come abbiamo veduto, si può ottenere in due modi differenti.

Sia:

$$G(x, y, z) = 0$$

un'equazione del terzo ordine a coefficienti ellittici e che abbia entro il parallelogrammo un solo punto singolare, che coincida col vertice zero, e siano:

$$-n, \quad -n+h, \quad -n+h+k$$

le radici della determinante relativa a questo punto, che supporremo intere e disposte in ordine crescente.

Dalla natura dell'equazione  $G=0$  si deduce che la somma di queste tre radici deve essere eguale a 3; abbiamo quindi:

$$-3n + 2h + k = 3. \tag{7}$$

Possiamo anche porre per condizione che la  $G=0$  abbia nelle vicinanze dello zero due integrali privi di logaritmi; allora le precedenti radici non potranno essere tutte tre eguali. Tenendo conto di questo fatto e della relazione (7) si vede che i tre numeri  $n, h, k$  devono avere valori interi e positivi, potendo anche essere eguali allo zero, colla condizione però che i due numeri  $h, k$  non siano nulli al tempo stesso, perchè in questo caso le tre radici sarebbero eguali.

Qui pure l'ultimo teorema del capitolo precedente può servire utilmente per riconoscere in modo semplice se un'equazione del terzo ordine a coefficienti ellittici ha l'integrale generale uniforme.

Supponiamo infatti di aver verificato che per l'equazione  $G = 0$  è soddisfatta la relazione:

$$D_{2,3} = 0$$

e di non saper nulla relativamente alle altre due:

$$D_{1,2} = 0, \quad D_{1,3} = 0.$$

Con questo dato soltanto siamo in grado di dire che la  $G = 0$  ha uno o due integrali uniformi. Essa quindi deve ammettere un'integrale uniforme di seconda specie, il quale nelle vicinanze dello zero deve comportarsi come una delle due funzioni:

$$x^{-n+h}, \quad x^{-n+h+k};$$

ma ciò non è possibile quando è:

$$-n + h > 0,$$

perchè allora vi sarebbe un integrale uniforme di seconda specie sempre finito ed avente in zero un infinitesimo d'ordine  $-n + h$  o  $-n + h + k$ . Per conseguenza anche le due altre relazioni  $D_{1,2} = 0$   $D_{1,3} = 0$  devono essere soddisfatte, e la  $G = 0$  deve avere l'integrale generale uniforme.

Questo fatto si presenta per l'equazione:

$$y''' + [-3n(n+1)p(x) + \alpha]y' + [-n(n+1)(n+2)p'(x) + \beta]y = 0,$$

ove  $\alpha, \beta$  sono costanti arbitrarie. Infatti le radici della determinante relativa a zero sono:

$$-2n, \quad n+1, \quad n+2,$$

ed è facile vedere che la relazione  $D_{2,3} = 0$  è soddisfatta.

Diamo ora alcuni esempi di equazioni a coefficienti ellittici del terzo ordine che hanno soltanto uno o due integrali uniformi.

Per considerare i due casi che si possono presentare diamo alle costanti  $n, h, k$  di  $G = 0$  i due sistemi di valori:

$$\begin{array}{ccc} 0, & 0, & 3 \\ -1, & 3, & 0. \end{array}$$

Si hanno così i due sistemi di radici:

$$\begin{array}{ccc} 0, & 0, & 3 \\ -1, & 2, & 2, \end{array}$$

ai quali non potranno naturalmente corrispondere tre integrali distinti privi di logaritmi nelle vicinanze dello zero. Ma affinchè di questi integrali senza logaritmi ve ne siano due soltanto, dovremo porre per il primo sistema di radici la relazione:

$$D_{2,3} = 0$$

e per il secondo l'altra:

$$D_{1,2} = 0.$$

Nel primo caso si ha l'equazione:

$$y''' + [-2p(x) + \alpha]y' + [-2p'(x) + \beta p(x) + \gamma]y = 0 \quad (8)$$

e nel secondo l'altra:

$$y''' + [-2p(x) + \alpha]y' + [\beta p(x) + \gamma]y = 0. \quad (9)$$

In queste due equazioni le tre costanti  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  sono legate fra loro dalla relazione:

$$\beta^3 + 4\alpha\beta + 8\gamma = 0, \quad (10)$$

sicchè due soltanto di esse restano arbitrarie.

La (8) ammette sempre un'integrale uniforme di seconda specie, il quale diviene entro il parallelogrammo infinito del primo ordine in zero. Quest'integrale è quindi della forma:

$$\frac{\sigma(x - \varepsilon)}{\sigma(x)} e^{[Z(\varepsilon) + \lambda]x},$$

ove  $\varepsilon$  e  $\lambda$  sono due costanti da determinarsi.

Sostituendo questa espressione nella (8), si hanno per la determinazione di  $\varepsilon$  e  $\lambda$  le due relazioni:

$$\lambda = -\frac{\beta}{4}$$

$$p(\varepsilon) + \alpha + \frac{3\beta\varepsilon}{16} = 0.$$

Abbiamo quindi entro il parallelogrammo due valori per  $\varepsilon$ , che potremo indicare con  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$ , essendo  $\varepsilon_2 = 2\omega + 2\omega' - \varepsilon_1$ . Questi due valori di  $\varepsilon$  ci danno i due integrali di seconda specie:

$$u_1 = \frac{\sigma(x - \varepsilon_1)}{\sigma(x)} e^{[Z(\varepsilon_1) - \frac{\beta}{4}]x}$$

$$u_2 = \frac{\sigma(x + \varepsilon_1)}{\sigma(x)} e^{-[Z(\varepsilon_1) + \frac{\beta}{4}]x}.$$

Nel caso che i due valori di  $\varepsilon$  vengano a coincidere, il che accade quando risulta:

$$\varepsilon_1 = \omega, \quad \varepsilon_2 = \omega', \quad \varepsilon_3 = \omega + \omega',$$

si ha un solo integrale uniforme  $u_1$  di seconda specie. È facile però vedere che anche in questo caso di eccezione la (8) ha sempre due integrali uniformi in tutto il piano, cioè, oltre all'integrale  $u_1$ , ve ne è un altro, il quale non è di seconda specie.

Infatti sieno  $y_1, y_2, y_3$  tre integrali distinti della (8), i quali, quando colla  $x$  si gira nel senso positivo attorno al punto zero, subiscano la sostituzione:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \delta & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

essendo  $\delta$  una costante determinata differente da zero.

Per quello che abbiamo dimostrato nel capitolo precedente, sappiamo che l'integrale  $y_1$  deve essere uniforme in tutto il piano. Epperò, se  $u_1$  è il solo integrale uniforme della (8), dovremo avere:

$$u_1 = c y_1,$$

essendo  $c$  una costante determinata, ed anzi potremo prendere gl'integrali  $y$  in modo che sia  $c = 1$  e  $u_1 = y_1$ .

Si faccia ora nella (8):

$$y = u_1 \int z dx;$$

si ottiene allora l'equazione del secondo ordine in  $z$ :

$$z'' + pz' + qz = 0, \tag{11}$$

la quale è pure a coefficienti ellittici, ed ammette per integrali le due funzioni uniformi in tutto il piano:

$$\left[ \frac{y_2}{y_1} \right]', \quad \left[ \frac{y_3}{y_1} \right]'$$

Quest'equazione è quindi di quelle del PICARD; ma, se calcoliamo le radici della sua determinante relativa a zero, si vede che esse sono ambedue eguali a 2. Per conseguenza la (11) non può essere una equazione del PICARD, e quindi la (8) deve avere due integrali uniformi  $u_1, u_2$ .

L'integrale  $u_2$  si può ottenere dalla (11), osservando che essa ammette sempre un integrale uniforme di seconda specie  $z_1$ , per il quale si deve avere necessariamente:

$$z_1 = \left[ \frac{u_2}{u_1} \right]'$$

e quindi:

$$u_2 = u_1 \int z_1 dx.$$

L'integrale non uniforme della (11) è dato da:

$$z_2 = z_1 \int \frac{e^{-\int p dx}}{z_1^2} dx,$$

e quindi per avere l'integrale non uniforme della (8) basterà porre:

$$u_3 = u_1 \int z_2 dx = u_1 \int z_1 dx \int \frac{e^{-\int p dx}}{z_1^2} dx.$$

Si può ancora ottenere l'integrale  $u_2$  facendo uso della formula:

$$u_2 = \frac{\partial u_1}{\partial \varepsilon_1},$$

nella quale si suppone dapprima la  $\varepsilon_1$  indeterminata, e poi si assegna ad essa il valore che deve avere. Non staremo qui a dimostrare questa formula, la quale del resto si ottiene assai facilmente.

Andiamo ora all'equazione (9); essa ammette un unico integrale uniforme dato da:

$$u_1 = e^{-\frac{\beta}{2}x}.$$

Per avere gli altri due integrali che non sono uniformi basta fare nella (9):

$$y = u_1 \int t dx.$$

Si ha allora l'equazione in  $t$ :

$$t' - \frac{3\beta}{2} t + \left[ -2p(x) + \alpha + \frac{3\beta^2}{4} \right] t = 0, \quad (12)$$

la quale per le osservazioni già fatte sulla (11) deve essere di quelle del PICARD. E ci si può accertare di questo col cambiare nella (12) la funzione

incognita facendo :

$$t = w e^{\frac{3\beta}{4}x}.$$

Essa infatti si trasforma allora nella equazione:

$$w'' + \left[ -2p(x) + \alpha - \frac{9\beta^2}{16} \right] w = 0,$$

la quale non è altro che quella del LAMÉ nel caso di  $n = 1$ .

Quindi la (12) si integra facilmente, e ci dà due integrali  $t_2, t_3$ , in generale ambedue di seconda specie. Da quest'integrali poi si passa ai due non uniformi della (9) mediante le formule:

$$u_2 = u_1 \int t_2 dx, \quad u_3 = u_1 \int t_3 dx.$$

Termino questo lavoro rendendo vivissime grazie all'egregio prof. VITO VOLTERRA, il quale mi ha guidato in questi studi, dandomi numerosi ed utili consigli.



# Corrispondenze univoche singolari delle curve ellittiche armoniche ed equianarmoniche.

(Memoria II di FEDERICO AMODEO, a Torino.)

---

Nella Memoria I (\*) abbiamo già accennato che queste corrispondenze singolari furono fatte notare dal KLEIN (\*\*), e sono state studiate per la prima volta dal chiar. signor SEGRE (\*\*\*) .

Il signor SEGRE ha fatto vedere che, assegnata una coppia di punti omologhi, è individuata una corrispondenza in ciascuno dei sistemi di corrispondenze univoche singolari che esistono sulle curve ellittiche (due sistemi nelle curve armoniche, quattro nelle curve equianarmoniche); ma, non avendo esplicitamente data la costruzione di una almeno delle corrispondenze singolari di ciascuna curva, lascia sospesa la costruzione delle altre.

Noi presentiamo queste costruzioni e diamo al tema uno svolgimento alquanto diverso, che crediamo non debba riuscire del tutto inopportuno.

Per brevità, quando avremo bisogno di riferirci alla Memoria I, faremo uso della notazione (M. I) ed a questa rimandiamo il lettore per la spiegazione dei simboli che qui sono adottati.

---

(\*) Cfr. in questi medesimi Annali: *Le corrispondenze univoche sulle curve ellittiche di ordine  $n$  normali di uno  $S_{n-1}$* , vol. 19, pag. 1.

(\*\*) KLEIN, *Ueber die Auflösung gewisser Gleichungen von siebenten und achten Grade*. Math. Ann., pag. 279. 1879.

(\*\*\*) SEGRE, *Le corrispondenze univoche sulle curve ellittiche*. Atti della r. Acc. di Torino, vol. 24. 1889.

## § 1. Teoremi generali.

**Trasformazione di una  $C$  in sè stessa.**

1. *Il prodotto di una corrispondenza singolare  $C$  per ciascuna delle corrispondenze ordinarie ellittiche  $E$ , o di ciascuna corrispondenza  $E$  per la corrispondenza singolare  $C$ , produce uno stesso sistema di corrispondenze singolari, che contiene la  $C$ .*

Infatti, una corrispondenza ordinaria ellittica  $E$ , dovendo essere trasformata dalla corrispondenza singolare  $C$  in un'altra corrispondenza priva di punti uniti, sarà trasformata in un'altra corrispondenza ordinaria ellittica  $E_1$ , quindi si avrà:

$$C^{-1} E C \equiv E_1,$$

e perciò

$$E C \equiv C E_1;$$

cosicchè in qualunque ordine si faccia la moltiplicazione il sistema di corrispondenze che si ottiene sarà sempre lo stesso.

Ciascuna di queste corrispondenze non può essere ordinaria, perchè se fosse  $C E \equiv E_1$ , sarebbe  $C \equiv E_1 E^{-1} \equiv E_2$ , e se fosse  $C E \equiv J$ , sarebbe  $C \equiv J E^{-1} \equiv J_2$ . Si ottiene la stessa  $C$  quando essa si moltiplica per l'identità.

Lo stesso sistema di corrispondenze si può ottenere partendo da qualunque altra corrispondenza del sistema, poichè è  $C E \cdot E_1 \equiv C E_2$ , cioè ad una corrispondenza del sistema primitivo.

2. *Il prodotto della corrispondenza  $C^{-1}$ , inversa di  $C$ , per ciascuna corrispondenza ordinaria ellittica  $E$ , o viceversa, produce un altro sistema di corrispondenze singolari, ciascuna delle quali è inversa di ciascuna corrispondenza del sistema precedente.*

Che siano singolari si vede come sopra; che siano diverse dalle precedenti si deduce da ciò, che, se fosse  $C^{-1} E \equiv C E_1$ , sarebbe  $E \equiv C^2 E_1$ , cioè  $\equiv$  ad una  $J$  o ad una corrispondenza singolare, secondo che  $C^2$  è una  $J$  (nelle curve armoniche) o una corrispondenza singolare anch'essa (nelle curve equianarmoniche).

Per le curve equianarmoniche, se è  $C \equiv T$ , questo secondo sistema è rappresentato da  $T^2 E$ , e, se è  $C \equiv S$ , esso è rappresentato da  $S^5 E$ .

3. Supposto che  $C^2$  fosse pure una corrispondenza singolare, diversa da  $C^{-1}$  (ciò succede nelle curve equianarmoniche quando sia  $C \equiv S$ , quindi  $C^2 \equiv T$ ), saranno  $C^2 E$  e  $C^{-2} E$  altri due sistemi di corrispondenze singolari, diversi fra

loro (come si vedrebbe analogamente a quanto si è fatto sopra) ed anche diversi dai precedenti; perchè, se fosse  $\mathbf{C E} \equiv \mathbf{C}^2 \mathbf{E}$  o  $\mathbf{C E} \equiv \mathbf{C}^{-2} \mathbf{E}$ , sarebbe  $\mathbf{E} \equiv \mathbf{C E}$  ovvero  $\mathbf{E} \equiv \mathbf{J E}$ , assurdo.

4. *Se una corrispondenza ordinaria ellittica  $\mathbf{E}_1$  è trasformata nella corrispondenza ellittica  $\mathbf{E}_2$  da una corrispondenza singolare  $\mathbf{C}$  di un qualunque sistema, essa è trasformata nella stessa  $\mathbf{E}_2$  da ogni altra corrispondenza singolare dello stesso sistema.*

Per l'ipotesi si ha

$$\mathbf{C}^{-1} \mathbf{E}_1 \mathbf{C} \equiv \mathbf{E}_2,$$

ma per teorema noto (M. I, n.° 19) si ha pure

$$\mathbf{E}_1 \equiv \mathbf{E}^{-1} \mathbf{E}_1 \mathbf{E},$$

essendo  $\mathbf{E}$  una qualunque altra corrispondenza ellittica: dunque,

$$\mathbf{C}^{-1} \mathbf{E}^{-1} \mathbf{E}_1 \mathbf{E} \mathbf{C} \equiv \mathbf{E}_2,$$

ovvero,

$$\mathbf{C}^{-1} \mathbf{E}^{-1} \cdot \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E} \mathbf{C} \equiv \mathbf{E}_2,$$

dove  $\mathbf{E C}$  rappresenta (n.° 1) ogni altra corrispondenza del sistema di  $\mathbf{C}$ .

Qualora sia  $\mathbf{E}_2 \equiv \mathbf{E}_1$  si ha:

*Una corrispondenza  $\mathbf{E}$  ellittica è trasformata in sè stessa da tutte o da nessuna delle corrispondenze singolari del medesimo sistema.*

**E** quindi:

*Se una corrispondenza  $\mathbf{E}$  trasforma una corrispondenza singolare di un dato sistema in questa stessa, trasforma ogni altra corrispondenza dello stesso sistema in essa stessa.*

5. Gli elementi uniti della corrispondenza debbono essere trasformati in elementi uniti, dunque: *Ogni corrispondenza singolare  $\mathbf{Q}$  delle curve armoniche può essere trasformata in sè stessa solo dalla involuzione fondamentale  $\mathbf{F}_1$ . Le coppie di punti uniti delle corrispondenze  $\mathbf{Q}$  costituiscono tutte le coppie di elementi coniugati della  $\mathbf{F}_1$ .*

*Ogni corrispondenza singolare di terzo ordine  $\mathbf{T}$  delle curve equianarmoniche può essere trasformata in sè stessa solo dalla corrispondenza ellittica  $\mathbf{E}$  ciclica del terzo ordine. Le terne di punti uniti delle  $\mathbf{T}$  costituiscono tutti i cicli della corrispondenza ellittica  $\mathbf{E}$  ciclica del terzo ordine. Le corrispondenze singolari  $\mathbf{S}$  del sesto ordine non sono trasformate in sè stesse da alcuna corrispondenza  $\mathbf{E}$ .*

Inoltre, e ciò sappiamo già per altra via (M. I, n.<sup>i</sup> 13 e 12):

Ogni corrispondenza  $Q$  è trasformata in sè stessa da due involuzioni razionali, cioè da quella che ha comune con essa due punti uniti e da quella che ha comune con essa la coppia involutoria.

Ogni corrispondenza  $T$  è trasformata in sè stessa da tre corrispondenze razionali  $J$ , quelle che hanno comune con essa uno degli elementi uniti e per coppia i rimanenti elementi uniti; ed è trasformata in sè stessa pure da una corrispondenza  $S$  e dalla inversa di questa.

Ogni corrispondenza  $S$  è trasformata in sè stessa da una corrispondenza razionale  $J$ , quella che ha comune con essa l'elemento unito, e da una corrispondenza  $T$  di terzo ordine (\*).

## § 2. Corrispondenze singolari delle curve ellittiche armoniche.

### Costruzione di una $Q$ .

6. Già sappiamo (M. I, n.<sup>o</sup> 15) che nelle curve armoniche non vi sono che due soli sistemi di corrispondenze singolari del quarto ordine, per cui essi sono indicati rispettivamente da  $QE$  e  $Q^{-1}E$ , ovvero da  $QE$  e  $Q^3E$ , dove  $Q$  indica una qualunque delle corrispondenze singolari del quarto ordine.

Se con  $J_q$  indichiamo la involuzione razionale quadrato di  $Q$ , sarà  $QJ_q \equiv Q^{-1}$ , e quindi  $Q^{-1}E \equiv QJ_qE \equiv QJ_1$ , e per la nota del n.<sup>o</sup> 5,  $\equiv J_2Q$ ; oppure sarà  $QE \equiv Q^3J_qE \equiv Q^3J_3 \equiv J_4Q^3$ . Quindi:

*Il secondo (primo) sistema si può ottenere pure moltiplicando una corrispondenza del primo (secondo) sistema per ogni corrispondenza razionale  $J$  o, viceversa, moltiplicando ogni corrispondenza razionale  $J$  per una corrispondenza del primo (secondo) sistema.*

Sicchè possiamo affermare che ogni corrispondenza singolare, di uno dei due sistemi delle curve ellittiche armoniche, moltiplicata per una  $E$ , produce una corrispondenza singolare dello stesso sistema e moltiplicata per una  $J$  produce una corrispondenza singolare del sistema inverso.

(\*) Si noti ancora che il primo teorema del n.<sup>o</sup> 3 della M. I si può enunciare in particolare, per le corrispondenze singolari, nel seguente modo:

Ogni corrispondenza singolare  $C$  trasforma una corrispondenza razionale  $J$  in un'altra corrispondenza razionale  $J_1$ , cioè si ha:

$$C^{-1}JC \equiv J_1,$$

e quindi

$$JC \equiv CJ_1.$$

Da ciò, e dal n.° 14 della M. I, si ricava che:

Una corrispondenza  $Q$  ed una  $E$ , come pure una corrispondenza  $Q$  ed una  $J$  hanno sempre due coppie di elementi comuni.

Osservando inoltre che,

$$JQJ \equiv QJ, J \equiv QE \equiv Q_1,$$

e che,

$$E^{-1}QE \equiv QE_1, E \equiv QE_2 \equiv Q_2,$$

si ha pure:

Una corrispondenza singolare  $Q$  è trasformata da una  $E$  e da una  $J$  sempre in una corrispondenza singolare dello stesso sistema a cui essa appartiene.

7. Dall'essere  $Q_2 \equiv Q_1E$ , oppure  $\equiv Q_1^{-1}J$  (essendo  $E, J$  qualunque) si ha pure,

$$Q_1Q_2 \equiv Q_1Q_1^{-1}J \equiv J$$

$$Q_1^{-1}Q_2 \equiv Q_1^{-1}Q_1E \equiv E;$$

cioè: Il prodotto di due corrispondenze singolari delle curve armoniche appartenenti ad uno stesso sistema è una  $J$ , ed il prodotto di due di queste corrispondenze appartenenti a sistemi inversi è una  $E$ . E quindi (M. I, n.° 14):

Due corrispondenze dello stesso sistema non possono avere coppie comuni e due corrispondenze di sistemi differenti hanno quattro coppie comuni.

8. Fra i prodotti di una  $Q$  per una corrispondenza  $E$  sono notevoli quelli che si ottengono moltiplicando la  $Q$  per le tre involuzioni fondamentali  $F$ .

Indichiamo con  $\Gamma^n$  una curva ellittica armonica normale di uno  $S_{n-1}$ , e con  $A, B, C, D$  quattro suoi punti; se  $Q$  ha per elementi uniti i punti  $A, B$ , e per coppia involutoria la coppia  $CD$ , cioè se è  $Q \equiv A, B, \begin{smallmatrix} CD \\ DC \end{smallmatrix} (*)$ ,  $ABCD$  sono (M. I, n.° 13) punti di contatto di una rigata razionale  $M_2^{n-2}$  con la curva  $\Gamma^n$ , e indicando con  $F_1, F_2, F_3$  le involuzioni fondamentali che sono individuate rispettivamente dalle coppie  $AB, AC, AD$ , si ha

$$F_1 \equiv AB, CD, \quad F_2 \equiv AC, BD, \quad F_3 \equiv AD, BC,$$

e quindi si ha pure,

$$QF_1 \equiv C, D, \begin{smallmatrix} AB \\ BA \end{smallmatrix}, \quad QF_2 \equiv \begin{smallmatrix} ACBD \\ CBDA \end{smallmatrix}, \quad QF_3 \equiv \begin{smallmatrix} ADBC \\ DBCA \end{smallmatrix}.$$

(\*) La notazione da noi qui adottata è conforme a quella adottata per le proiettività dal chiar. prof. A. SANNIA (v. ristampa della sua *Geometria Proiettiva*. Napoli, Pellegrano, 1891).

La prima di queste è la corrispondenza del sistema il cui quadrato produce la medesima involuzione razionale  $J_q$  del quadrato di  $Q$ ; e quindi, le quattro corrispondenze singolari che hanno per quadrato la medesima involuzione razionale  $J_q$  sono:

$$Q, \quad Q^{-1}, \quad QF_1, \quad F_1Q^{-1}.$$

Le due altre corrispondenze  $QF_2, QF_3$  confermano non solo (M. I, n.° 13) che ogni corrispondenza  $Q$  può essere proiettata da un  $[n-3]_s$  (\*) della curva, e quindi da  $\infty$ , secondo una proiettività ciclica di  $[n-2]$  del quarto ordine; ma inoltre fanno pure vedere che *le quattro coppie che hanno in comune due corrispondenze singolari  $Q$  appartenenti a sistemi differenti possono pure formare un ciclo solo, e che, di conseguenza, nemmeno un ciclo basta ad individuare una corrispondenza  $Q$  se non è precisato il sistema a cui essa deve appartenere.*

Possiamo ancora notare che ogni proiettività ciclica del quarto ordine di  $[n-2]$  che ha per sostegno un  $[n-3]_s$  della curva  $\Gamma^n$ , proietta quattro corrispondenze singolari, e sono:

$$QF_2, \quad QF_3, \quad F_2Q^{-1}, \quad F_3Q^{-1},$$

qualora sia  $Q$  la corrispondenza singolare il cui quadrato  $J_q$  ha per suo  $[n-3]_s$  direttore, l' $[n-3]_s$  di proiezione.

9. Indicando ancora con  $ABCD$  i quattro punti di contatto di una rigata razionale  $M_2^{n-2}$  colla curva e con  $(m)$  il fascio di  $[n-2]$ , secondo il quale un  $[n-3]_s$  direttore  $m$  di questa rigata proietta le sue generatrici, gli  $[n-2]$  del fascio  $(m)$  si possono accoppiare in involuzione in modo che gli  $[n-2]$  tangenti che toccano la curva in  $AB$ , oppure quelli che la toccano in  $CD$  siano gli  $[n-2]$  doppii. Si può dire che le generatrici di  $M_2^{n-2}$  sono esse stesse accoppiate in involuzione, e che le due involuzioni sono *armoniche fra loro* (\*\*).

Consideriamo due generatrici coniugate  $p, p'$  della involuzione i cui raggi doppii sono quelli che passano per  $A$  e  $B$ , se  $LL_1, MM_1$  sono i punti che ciascuna di essa determina sulla curva, questi debbono costituire un ciclo della corrispondenza singolare  $Q$ ; ma al punto  $L$  dell'una generatrice si può far corrispondere il punto  $M$  o il punto  $M_1$  dell'altra generatrice, quindi a se-

(\*) Indichiamo con  $[n-3]_s$  un  $S_{n-3}$   $(n-2)$ -secante della curva  $\Gamma^n$  di  $S_{n-1}$ .

(\*\*) Cioè che l'una involuzione trasforma l'altra nella inversa di questa. (Vedi, *Lezioni sulle omografie binarie*, 2.<sup>a</sup> ediz. Napoli, Pellerano, 1889.)

conda che la coppia è  $LM$  o  $LM_1$ , si ha l'una o l'altra corrispondenza che ha per punti uniti  $A, B$  e per coppia involutoria  $CD$ . L'una di queste ha  $LML_1M_1$  per ciclo, l'altra ha per ciclo  $LM_1L_1M$ .

Quindi: ogni punto unito individua due corrispondenze singolari  $Q, Q^{-1}$ , una in ciascun sistema, l'una inversa dell'altra.

Se si voglia costruire la corrispondenza singolare di uno dei due sistemi che è individuata da un punto unito  $A_1$  basterà proiettare la corrispondenza di quel sistema che ha per punto unito  $A$  da uno degli  $\infty^{n-3}$   $[n-3]$ , della curva che giacciono con  $A, A_1$  in uno stesso  $[n-2]$ , cioè basterà trasformare la  $Q \equiv A, B, \dots$  mediante la  $J \equiv (AA_1)$  (vedi n.º 6).

Analogamente una coppia di elementi omologhi individua una corrispondenza singolare in ciascuno dei due sistemi. Sia difatti  $PP'$  la coppia; nella corrispondenza singolare  $Q$  si costruisca l'elemento  $P_1$  che corrisponde a  $P$ , e siano  $E_1, J_1$  ordinatamente la corrispondenza ellittica ordinaria e la involuzione razionale individuata dalla coppia  $P_1P'$ , saranno  $QE_1, QJ_1$  le corrispondenze dei due sistemi individuate da  $PP'$ .

10. Perciò è innanzi tutto necessario, non solo di saper costruire tutti i cicli della corrispondenza

$$Q \equiv A, B, \begin{matrix} CD & LML_1M_1 \\ DC' & ML_1M_1L' \end{matrix}$$

ma di saper costruire ancora di un dato elemento  $P$  di  $\Gamma^n$ , l'omologo nella corrispondenza  $Q$ .

Per costruire tutti gli altri cicli della  $Q$ , conoscendone il ciclo  $LML_1M_1$ , basterà ricordare (n.º 5) che la corrispondenza singolare  $Q$  è trasformata in sè stessa dalla

$$J_q \equiv Q^2 \equiv A, B, C, D, \begin{matrix} L & M \\ L_1 & M_1 \end{matrix},$$

dalla  $F_1 \equiv \frac{AC}{BD}$  e dalla  $J_2 \equiv \frac{AC}{BD}$ . Quindi, se degli elementi del ciclo  $LML_1M_1$  si trovano gli elementi omologhi  $L'M'L'_1M'_1$  in  $F_1$ , questi formeranno un altro ciclo di  $Q$ , e se di questi elementi si trovano gli omologhi  $L_2M_2L_3M_3$  in  $J_2$ , e di questi gli omologhi  $L'_2M'_2L'_3M'_3$  in  $F_1$ , e di questi gli omologhi in  $J_q$ , ecc., saranno  $L_2M_2L_3M_3, L'_2M'_2L'_3M'_3$ , ecc., tutti cicli della corrispondenza  $Q$ . Ma con ciò non ancora si può costruire di un elemento  $P$  di  $Q$  il corrispondente  $P$ .

Per farlo si osservi che se si proietta la corrispondenza singolare  $Q$  da

uno  $m$  degli  $\infty^{n-3} [n-3]_s$  della curva  $\Gamma^n$  che si appoggiano alla corda  $AB$  si otterrà (M. I, n.° 9) una proiettività  $(m)$  di  $[n-2]$ , che avrà per  $[n-2]$  uniti quelli che proiettano la coppia  $AB$  di punti uniti e la coppia involutoria  $CD$ , e questa sarà ciclica del quarto ordine, perchè quattro  $[n-2]$  successivi di un ciclo saranno dati dagli  $[n-2]$  che proiettano il ciclo  $LM L_1 M_1$  (M. I, n.° 11). Se indichiamo con  $NON_1 O_1$  le rimanenti intersezioni di questi  $[n-2]$  con la curva  $\Gamma^n$ , sarà pure  $NON_1 O_1$  un altro ciclo della corrispondenza  $\mathbf{Q}$ , ed  $NN_1 OO_1$  saranno due altre coppie della involuzione razionale  $\mathbf{J}_q$ . Mediante la proiettività ciclica del quarto ordine  $(m)$ , già sappiamo che il punto  $P'$  corrispondente a  $P$  nella  $\mathbf{Q}$  si deve trovare nell' $[n-2]$  che corrisponde a quello che passa per  $P$ , e che si sa costruire elementarmente, ma il punto  $P'$  si deve pure trovare sulla generatrice della rigata  $M_2^{n-2}$  coniugata a quella che passa per  $P$  nell'involuzione  $\mathbf{J}_q$ , quindi esso è il punto d'intersezione della generatrice con l' $[n-2]$ .

Questa costruzione degli elementi di  $\mathbf{Q}$ , può servire anche a costruire per punti la curva  $\Gamma^n$  (\*).

### § 3. Corrispondenze singolari delle curve ellittiche equianarmoniche.

11. Già sappiamo (M. I, n.° 15) che nelle curve ellittiche equianarmoniche non vi sono che quattro sistemi di corrispondenze singolari, dunque essi sono rappresentati rispettivamente da:

$$\mathbf{S} \mathbf{E}, \quad \mathbf{S}^{-1} \mathbf{E}, \quad \mathbf{S}^2 \mathbf{E}, \quad \mathbf{S}^{-2} \mathbf{E},$$

ovvero da

$$\mathbf{S} \mathbf{E}, \quad \mathbf{S}^5 \mathbf{E}, \quad \mathbf{S}^2 \mathbf{E}, \quad \mathbf{S}^4 \mathbf{E},$$

dove  $\mathbf{S}$  indica una qualunque corrispondenza singolare del sesto ordine, e quindi  $\mathbf{S}^2$  una corrispondenza singolare  $\mathbf{T}$  del terzo ordine.

(\*) Per es., nelle curve ellittiche armoniche piane del terzo ordine, assegnati i punti  $A B C D$ , il punto di concorso  $S$  delle quattro tangenti (armoniche) in questi punti ed i punti  $L M$  restano individuate la involuzione di raggi di centro  $S$  e la proiettività di raggi ciclica del quarto ordine di centro  $AB \cdot CD \equiv M$ ; e quindi si possono costruire gli altri due punti  $L_1, M_1$ . Se poi inoltre si assegna un punto  $P$  della curva si troveranno con costruzioni semplici gli altri tre punti  $P', P'', P'''$  che insieme a  $P$  formano un ciclo della  $\mathbf{Q} \equiv A, B, \dots$ , e analogamente i punti  $P_1, P_2, P_3$  che insieme a  $P$  formano un ciclo della  $\mathbf{Q} \equiv C, D, \dots$ .

Il primo ed il secondo sistema sono formati di corrispondenze singolari cicliche del sesto ordine, e sono l'uno inverso dell'altro; il terzo ed il quarto sistema sono formati di corrispondenze singolari cicliche del terzo ordine, e sono pure l'uno inverso dell'altro.

Ogni corrispondenza del terzo sistema è il quadrato di una corrispondenza del primo sistema e di una del quarto sistema, ed ogni corrispondenza del quarto sistema è il quadrato di una corrispondenza del secondo e di una del terzo sistema.

12. Se con  $\mathbf{J}$ , indichiamo quella corrispondenza razionale che è il cubo di una assegnata corrispondenza singolare  $\mathbf{S}$  del sesto ordine, sarà:

$$\mathbf{S J} \equiv \mathbf{S}^4, \quad \mathbf{S}^{-1} \mathbf{J} \equiv \mathbf{S}^2,$$

e quindi

$$\mathbf{S}^4 \mathbf{E} \equiv \mathbf{S J E} \equiv \mathbf{S J}_1, \quad \mathbf{S}^2 \mathbf{E} \equiv \mathbf{S}^{-1} \mathbf{J E} \equiv \mathbf{S}^{-1} \mathbf{J}_1,$$

e viceversa. Dunque:

Il quarto (o terzo) sistema di corrispondenze singolari si può pure ottenere moltiplicando una corrispondenza singolare del primo (o secondo) sistema per ciascuna involuzione razionale  $\mathbf{J}$ , o moltiplicando ogni corrispondenza razionale  $\mathbf{J}$  per una corrispondenza del primo (o secondo) sistema.

E viceversa, dal quarto (o terzo) sistema si ottiene analogamente il primo (o secondo).

Ovvero altrimenti:

Ogni corrispondenza singolare di uno dei quattro sistemi moltiplicata per una corrispondenza razionale  $\mathbf{J}$  produce una corrispondenza singolare, di ordine diverso, appartenente al sistema inverso del sistema quadrato di quello a cui appartiene la corrispondenza data.

Si ricava dai precedenti teoremi:

Una corrispondenza singolare  $\mathbf{S}$  ed una corrispondenza ellittica ordinaria  $\mathbf{E}$  hanno una sola coppia comune;

Una corrispondenza singolare  $\mathbf{T}$  ed una corrispondenza ellittica ordinaria  $\mathbf{E}$  hanno tre coppie comuni;

Una corrispondenza singolare  $\mathbf{S}$  ed una corrispondenza razionale  $\mathbf{J}$  hanno tre coppie comuni;

Una corrispondenza singolare  $\mathbf{T}$  ed una corrispondenza razionale  $\mathbf{J}$  hanno una sola coppia comune.

13. Il prodotto di due corrispondenze singolari di due sistemi inversi è sempre una corrispondenza ordinaria ellittica.

*Il prodotto di due corrispondenze singolari di uno stesso sistema è una corrispondenza del sistema quadrato del primo.*

Difatti, indicando con  $C$  una qualunque delle corrispondenze  $S, S^5, S^2, S^4$ , si ha sempre

$$C E_1 \cdot C^{-1} E_2 \equiv C \cdot E_1 C^{-1} \cdot E_2 \equiv C C^{-1} \cdot E_2 E_1 \equiv E,$$

oppure

$$C E_1 \cdot C E_2 \equiv C \cdot E_1 C \cdot E_2 \equiv C^2 E.$$

Quindi, due corrispondenze dello stesso sistema non possono avere coppie di elementi comuni; due corrispondenze di sistemi inversi hanno sempre tre coppie comuni.

Ed inoltre, una corrispondenza del terzo (quarto) sistema si può ottenere sia moltiplicando fra loro due corrispondenze del primo (secondo) sistema, sia moltiplicando fra loro due corrispondenze del quarto (terzo) sistema.

14. Analogamente si dimostrano i seguenti teoremi.

*Il prodotto di una corrispondenza del primo (secondo) sistema per una corrispondenza del terzo (quarto) sistema è una corrispondenza razionale I.*

*Il prodotto di una corrispondenza del primo (secondo) sistema per una corrispondenza del quarto (terzo) sistema è una corrispondenza del secondo (primo) sistema.*

E quindi:

*Una corrispondenza del primo (secondo) sistema ed una del quarto (terzo) hanno in comune quattro coppie di elementi omologhi.*

*Una corrispondenza del primo (secondo) sistema ed una corrispondenza del terzo (quarto) hanno a comune una sola coppia di elementi omologhi.*

15. Indichiamo con  $\Gamma^n$  una curva ellittica equianarmonica normale di un  $S_{n-1}$  e con  $A_i, B_i, C_i, D_i$  i quattro punti uniti di una determinata corrispondenza razionale  $J_i$ ; ognuno di questi riguardato come punto unito individua due  $T$ , una per ciascuna dei due sistemi terzo e quarto. Indichiamo rispettivamente con  $T_a, T_b, T_c, T_d$  le corrispondenze individuate da ciascuno dei punti  $A_1, B_1, C_1, D_1$  nel quarto sistema, e supponiamo che in una di esse, per es.  $T_a$ , siano  $A_2, A_3$  gli altri due punti uniti sarà:

$$T_a = A_1 A_2 A_3 \begin{matrix} B_1 C_1 D_1 \\ C_1 D_1 B_1 \dots \end{matrix}$$

Se  $A_1 B_1 C_1 D_1$  sono proiettati in  $A_2 B_2 C_2 D_2$  da un  $[n-3]_s$  che si appoggia alla corda  $A_1 A_2$ , ed in  $A_3 B_3 C_3 D_3$  da un  $[n-3]_s$  che si appoggia

alla corda  $A_1 A_3$ , saranno  $A_2 B_3, B_2 B_3, C_2 C_3, D_2 D_3$  elementi corrispondenti nella corrispondenza ellittica  $E_3 \equiv J_3 J_2$ , la quale è quindi precisamente la corrispondenza ellittica ciclica del terzo ordine, ed ha per cicli di punti le terne  $A_1 A_2 A_3, B_1 B_2 B_3, C_1 C_2 C_3, D_1 D_2 D_3$ .

Inoltre nella corrispondenza singolare  $T_a$  sono pure cicli di elementi, le terne  $B_2 C_2 D_2, B_3 C_3 D_3$ ; poichè trasformando la  $T_a$  mediante  $J_3 \equiv \frac{A_1 B_1}{A_2 B_2} \dots$  il ciclo  $B_1 C_1 D_1$  si trasforma in  $B_2 C_2 D_2$ , e trasformandolo mediante  $J_2 \equiv \frac{A_1 B_1}{A_3 B_3} \dots$  esso è trasformato in  $B_3 C_3 D_3$ ; quindi si ha:

$$T_a \equiv A_1 A_2 A_3 \begin{matrix} B_1 C_1 D_1 & B_2 C_2 D_2 & B_3 C_3 D_3 \\ C_1 D_1 B_1 & C_2 D_2 B_2 & C_3 D_3 B_3 \end{matrix} \dots$$

Trasformando questa corrispondenza mediante le tre involuzioni fondamentali  $F_1 \equiv A_1 B_1, C_1 D_1, F_2 \equiv A_1 C_1, B_1 D_1, F_3 \equiv A_1 D_1, B_1 C_1$  otterremo precisamente le altre corrispondenze singolari  $T_b, T_c, T_d$ , dello stesso sistema a cui appartiene  $T_a$ , cioè del quarto sistema e sono:

$$\begin{aligned} F_1 T_a F_1 \equiv T_b &\equiv B_1 B_2 B_3 \begin{matrix} A_1 D_1 C_1 & A_2 D_2 C_2 & A_3 D_3 C_3 \\ D_1 C_1 A_1 & D_2 C_2 A_2 & D_3 C_3 A_3 \end{matrix} \\ F_2 T_a F_2 \equiv T_c &\equiv C_1 C_2 C_3 \begin{matrix} D_1 A_1 B_1 & D_2 A_2 B_2 & D_3 A_3 B_3 \\ A_1 B_1 D_1 & A_2 B_2 D_2 & A_3 B_3 D_3 \end{matrix} \\ F_3 T_a F_3 \equiv T_d &\equiv D_1 D_2 D_3 \begin{matrix} C_1 B_1 A_1 & C_2 B_2 A_2 & C_3 B_3 A_3 \\ B_1 A_1 C_1 & B_2 A_2 C_2 & B_3 A_3 C_3 \end{matrix} \end{aligned}$$

Moltiplicando ciascuna di queste  $T$  per la corrispondenza ciclica  $E_3$  del terzo ordine, si debbono ottenere altre  $T$  del terzo sistema; e sono:

$$\begin{aligned} T_a E_3 &\equiv \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 & B_1 C_2 D_3 & C_1 D_2 B_3 & D_1 B_2 C_3 \\ A_2 A_3 A_1 & C_2 D_3 B_1 & D_2 B_3 C_1 & B_2 C_3 D_1 \end{matrix} \\ T_b E_3 &\equiv \begin{matrix} B_1 B_2 B_3 & A_1 D_2 C_3 & D_1 C_2 A_3 & C_1 A_2 D_3 \\ B_2 B_3 B_1 & D_2 C_3 A_1 & C_2 A_3 D_1 & A_2 D_3 C_1 \end{matrix} \\ T_c E_3 &\equiv \begin{matrix} C_1 C_2 C_3 & D_1 A_2 B_3 & A_1 B_2 D_3 & B_1 D_2 A_3 \\ C_2 C_3 C_1 & A_2 B_3 D_1 & B_2 D_3 A_1 & D_2 A_3 B_1 \end{matrix} \\ T_d E_3 &\equiv \begin{matrix} D_1 D_2 D_3 & C_1 B_2 A_3 & B_1 A_2 C_3 & A_1 C_2 B_3 \\ D_2 D_3 D_1 & B_2 A_3 C_1 & A_2 C_3 B_1 & C_2 B_3 A_1 \end{matrix} \end{aligned}$$

e queste mostrano che le tre coppie comune alla  $\mathbf{E}_3$  ed a ciascuna corrispondenza singolare  $\mathbf{T}$  costituiscono un ciclo di terzo ordine.

Riepilogando si ha il seguente teorema:

Se  $A_1 A_2 A_3$  sono i punti uniti di una corrispondenza singolare del terzo ordine  $\mathbf{T}_a$  le tre quaterne:

$$A_1 B_1 C_1 D_1, \quad A_2 B_2 C_2 D_2, \quad A_3 B_3 C_3 D_3,$$

sono tali che qualunque terna di punti presa fra essi, che differiscono fra loro solo per gli indici, o solo per le lettere, o per gli indici e le lettere insieme, costituisce sempre un ciclo di una corrispondenza singolare del terzo e del quarto sistema.

16. Ora vogliamo costruire, di un punto  $M_1$  della curva  $\Gamma^n$ , il punto corrispondente  $M_2$  nella corrispondenza singolare  $\mathbf{T}_a$ .

Si noti che proiettando la corrispondenza singolare  $\mathbf{T}_a$  da uno  $m$  degli  $\infty^{n-3} [n-3]_s$  della curva  $\Gamma^n$  che si appoggiano alla corda  $A_2 A_3$  si otterrà (M. I, n.° 11) una proiettività  $(m)$  di  $[n-2]$ , ciclica del terzo ordine. Mediante questa proiettività succede che sulla superficie razionale  $M_2^{n-2}$ , che tocca la curva in  $A_1, B_1, C_1, D_1$ , le generatrici che proiettano i punti corrispondenti della  $\mathbf{T}_a$  costituiscono una proiettività di 1.<sup>a</sup> specie, ciclica del terzo ordine, di cui un ciclo è quello delle generatrici tangenti nei punti  $B_1, C_1, D_1$ , l'altro è quello delle congiungenti le coppie di punti  $B_2 B_3, C_2 C_3, D_2 D_3$ .

Analogamente, proiettando la corrispondenza  $\mathbf{T}_a$  da uno  $m_1$  degli  $\infty^{n-3} [n-3]_s$  che si appoggiano alla corda  $A_1 A_2$ , otterremo in questo sostegno una proiettività di  $[n-2]$  ciclica del terzo ordine, di cui costituiscono cicli quelli che toccano la curva in  $B_3 C_3 D_3$ , e quelli che proiettano le corde  $B_1 B_2, C_1 C_2, D_1 D_2$ .

Il punto, che corrisponde al punto dato  $M_1$  in  $\mathbf{T}_a$ , deve trovarsi sulla generatrice della superficie  $M_2^{n-2}$  che corrisponde a quella che passa per  $M_1$ , deve trovarsi nell' $[n-2]$  della proiettività  $(m)$  che corrisponde a quello che passa per  $M_1$ , quindi sarà precisamente il punto d'intersezione di questi due elementi.

17. Si voglia ora costruire una corrispondenza singolare  $\mathbf{T}$  del terzo sistema individuata da un punto unito  $A_i$ , oppure da una coppia  $P_1 P_2$  di punti omologhi. Se è dato il punto unito  $A_i$ , la  $\mathbf{T}$  si costruisce direttamente come abbiamo fatto per la corrispondenza  $\mathbf{T}_a$ , oppure si costruisce proiettando la  $\mathbf{T}_a$  nella curva stessa da uno degli  $[n-3]_s$  che si appoggiano alla corda  $A_1 A_i$ .

Se poi è data la coppia  $P_1 P_2$ , si troverà di  $P_1$  l'elemento omologo  $P'_1$

nella  $T_a$ , e si moltiplicherà la corrispondenza singolare  $T_a$  per la corrispondenza ordinaria ellittica  $E$ , individuata dalla coppia  $P', P_2$ ; il prodotto sarà la corrispondenza richiesta.

Analoga è la costruzione per le corrispondenze del terzo sistema.

18. Sappiamo che dalle corrispondenze  $T$  del quarto sistema si ottengono quelle del primo moltiplicandole per una corrispondenza razionale  $J$ . Indichiamo, conformemente a quanto abbiamo fatto nel n.° 15, con  $S_a$  la corrispondenza del primo sistema individuata dal punto unito  $A_1$ , sarà:

$$T_a J_1 \equiv S_a \equiv A_1 \begin{matrix} A_2 A_3 & B_1 C_1 D_1 & B_2 C_3 D_2 B_3 C_2 D_3 \\ A_3 A_2 & C_1 D_1 B_1 & C_3 D_2 B_3 C_2 D_3 B_2 \dots \end{matrix},$$

e la  $S_a$  è pienamente individuata, non solo, ma si può anche mediante la  $T_a$  costruire (n.° 17) di ogni punto  $M_1$  il suo corrispondente.

Analogamente mediante  $T_b, T_c, T_d$ , e la stessa involuzione  $J$ , si otterrebbero:

$$T_b J_1 \equiv S_b \equiv B_1 \begin{matrix} B_2 \\ B_3 \dots \end{matrix}, \quad T_c J_1 \equiv S_c \equiv C_1 \begin{matrix} C_2 \\ C_3 \dots \end{matrix}, \quad T_d J_1 \equiv S_d \equiv D_1 \begin{matrix} D_2 \\ D_3 \dots \end{matrix}$$

Le quattro corrispondenze singolari  $S_a, S_b, S_c, S_d$  e le loro inverse sono le otto corrispondenze singolari del sesto ordine che hanno per cubo la medesima involuzione razionale  $J$ , (vedi SEGRE, loc. cit., n.° 10).

Qualora si voglia costruire la  $S$  del primo sistema, individuata dalla coppia  $L_1 L_2$ , si troverebbe nella corrispondenza singolare  $T_a$  del quarto sistema l'elemento  $L'_1$  omologo all'elemento  $L_1$ , e si moltiplicherebbe la  $T_a$  per la involuzione razionale individuata dalla coppia di elementi coniugati  $L'_1 L_2$ .

Analoga è la costruzione delle corrispondenze singolari del secondo sistema.

Napoli, ottobre 1890.



# Sulle sestiche di contatto alla superficie di KUMMER.

(Memoria VII di ERNESTO PASCAL, a Pavia.)

---

Questa Memoria fa seguito a quella pubblicata in questo stesso Giornale *Sull'equazione razionale della superficie di KUMMER*.

Assumendo per coordinate spaziali le quattro funzioni iperellittiche  $\Sigma$  pari di 1.<sup>a</sup> specie, non solo la superficie di KUMMER acquista un'equazione *razionale*, cioè tale che i coefficienti sono invarianti razionali della sestica binaria fondamentale, ma della stessa proprietà godono anche le sestiche di contatto alla superficie, cioè le superficie di 6.<sup>o</sup> ordine che *toccano* quella di KUMMER lungo una curva di 12.<sup>mo</sup> ordine.

Lo scopo di questo lavoro è la ricerca dei vari coefficienti invarianti dell'equazione delle sestiche, e propriamente è il mostrare con quali artifizii si può ricondurre il calcolo di tali invarianti alle formole fondamentali stabilite nella Memoria VI.

L'equazione della superficie di KUMMER, e quella di queste superficie sestiche, non interpretate geometricamente, ma considerate dal solo punto di vista analitico delle funzioni iperellittiche, corrispondono non ad altro che alle *due uniche relazioni razionali* esistenti fra le cinque funzioni  $\Sigma$ , e con ciò le Memorie VI e VII vengono ad essere un completamento della Memoria V, in cui si sono separatamente studiate le  $\Sigma$  di genere 2.

Pavia, febbraio 1891.

### § 1. Corrispondenza fra la superficie di Riemann e la superficie di Kummer.

Abbiamo visto nelle Memorie precedenti (\*) come mediante una coppia di punti  $x' x''$  dati sulla superficie di RIEMANN, si possano costruire le quattro funzioni  $X_1, X_2, X_3, X_4$  che si possono poi a lor volta prendere come le coordinate omogenee di un punto dello spazio, e allora saranno propriamente le coordinate di un punto di quella speciale superficie del 4.° ordine che si chiama la superficie di KUMMER (\*\*).

Abbiamo dunque una corrispondenza fra le coppie di punti della superficie di RIEMANN e i punti della superficie di KUMMER (\*\*\*).

Studiamo di che natura è questa corrispondenza. È chiaro in primo punto che ad ogni coppia  $x' x''$  corrisponde una sola quaterna  $X$ . Viceversa data una quaterna  $X$  è facile vedere che le formole che definiscono le  $X$  si possono risolvere rispetto a

$$x', x''_1, \quad (x', x''_2 + x', x''_1), \quad x'_2 x''_2, \quad \sqrt{f(x') f(x'')},$$

e allora daranno valori determinati per queste quantità, salvochè resta però sempre l'indeterminazione del segno dei radicali  $\sqrt{f(x')}, \sqrt{f(x'')}$  i quali potranno prendersi con due segni diversi in modo però che il loro prodotto abbia sempre quel segno che risulta dalla risoluzione. In altri termini ad ogni punto della superficie di KUMMER vengono così sempre a corrispondere due coppie di punti di quella di RIEMANN, cioè o la coppia:

$$(x', \sqrt{f(x')}; \quad x'', \sqrt{f(x'')}),$$

o l'altra conjugata:

$$(x', -\sqrt{f(x')}; \quad x'', -\sqrt{f(x'')}).$$

Supponiamo ora che i due punti  $x' x''$  di una coppia coincidano; allora le  $X$  diventano tutte doppiamente zero (\*\*\*\*); quindi i loro rapporti saranno

(\*) Memoria V. § 8.

(\*\*) Memoria VI.

(\*\*\*) KLEIN, Lezioni, 1887. — BURKHARDT, Math. Annalen, Bd, 35, § 21.

(\*\*\*\*) È indispensabile notare qui che noi intendiamo la coordinata  $X_4$  espressa colla formola  $X_4 = \sqrt{f(x') f(x'')} - a_{x'}^3 a_{x''}^3$  e non col segno + come si trova espressa nel § 3

le coordinate di un punto determinato della superficie di KUMMER. Se invece i due punti  $x' x''$  sono coniugati, allora la  $X_4$  è diversa da zero, mentre le altre tre  $X$  continuano ad essere doppiamente zero.

Possiamo concludere dunque che a tutte le coppie di punti coniugati corrisponde sulla superficie di KUMMER un unico punto, cioè il punto  $X_1 = X_2 = X_3 = 0$ . Questo punto è evidentemente un punto *doppio* della superficie, perchè dall'equazione della superficie di KUMMER (vedi Mem. VI) risulta che in essa le coordinate  $X_1, X_2, X_3$  non entrano linearmente, ma almeno a secondo grado.

## § 2. Corrispondenza fra il parallelepipedo degli integrali di 1.<sup>a</sup> specie $w$ e la superficie di Kummer.

Teniamo presenti le considerazioni esposte nel § 1 della Memoria V. Ivi si è supposto diviso tutto lo spazio a quattro dimensioni in una serie di parallelepipedi congruenti fra loro. Ogni punto dello spazio corrisponde ad un certo sistema di valori pei due integrali di 1.<sup>a</sup> specie  $w_1 w_2$ . *A meno di multipli dei periodi  $\omega$* , tutti i valori delle  $w$  possono essere rappresentati da un punto del *primo* parallelepipedo che si chiama il parallelepipedo iniziale.

Ad ogni coppia di punti  $x' x''$  sulla superficie di RIEMANN corrisponde uno e un solo punto del parallelepipedo iniziale, e viceversa ad ogni punto di questo corrisponde sempre una coppia di punti  $x' x''$ ; però a tutte le coppie di punti coniugati corrisponde il solo punto origine del parallelepipedo, e viceversa al punto origine ( $w_1 = 0 w_2 = 0$ ) corrispondono solo tutte le coppie di punti coniugati.

Ora è facile studiare la corrispondenza fra il parallelepipedo delle  $w$  e la superficie di KUMMER.

Ad ogni punto del parallelepipedo iniziale (che non sia un vertice) corrisponde sempre una coppia di punti ( $x$ ), e quindi *un* punto della superficie di KUMMER. Al vertice del parallelepipedo iniziale corrispondono tutte le coppie

---

della Memoria VI. Per trovare l'equazione della superficie di KUMMER corrispondente a questo caso basta semplicemente mutare il segno di  $X_4$  nella equazione (b) del § 3 (Mem. VI).

Ponendo  $x' = x y = x''$ , dove con  $x''$  si intende il coniugato di  $x'$ , si ha:

$$X_4 = -(\sqrt{f(x)}\sqrt{f(y)} + a_x^3 a_y^3),$$

cioè questa  $X_4$  salvo nel segno corrisponde anche esattamente a quella adoperata e studiata nella Mem. V (§ 13).

di punti coniugati ( $x$ ), e quindi il solo punto origine della superficie di KUMMER, cioè il nodo ( $X_1 = 0 \ X_2 = 0 \ X_3 = 0$ ).

Viceversa ad ogni punto della superficie di KUMMER corrispondono due punti del parallelepipedo delle  $w$ .

Propriamente se  $w$  è uno dei punti corrispondenti, l'altro sarà quello che nel parallelepipedo iniziale è congruente al punto  $-w$ , il quale ultimo punto sta naturalmente fuori del parallelepipedo.

La corrispondenza dunque fra il parallelepipedo delle  $w$  e la superficie di KUMMER è una corrispondenza (1, 2); perciò possiamo asserire che le coordinate dei punti della superficie di KUMMER sono funzioni monodrome delle  $w$  (come si sa), e viceversa le  $w$  sono funzioni bidrome dei punti della superficie di KUMMER, cioè, in altri termini, le  $w$  sulla superficie di KUMMER sono funzioni a due valori.

Immaginiamo dunque una *doppia* superficie di KUMMER, cioè due superficie di KUMMER eguali sovrapposte l'una all'altra; allora sul complesso di queste due superficie le  $w$  saranno funzioni monodrome.

### § 3. Le funzioni $w$ distese sulla superficie di Kummer.

Abbiamo detto che sopra una *doppia* superficie di KUMMER gli integrali  $w$  sono funzioni monodrome. Vediamo ora se le  $w$  sono funzioni diramate sulla superficie di KUMMER; cioè se vi sono punti della superficie di KUMMER attorno cui i due valori delle  $w$  si succedono fra loro in ciclo, o anche punti in cui le due falde della supposta doppia superficie di KUMMER si debbono immaginare connesse fra loro circolarmente.

Tali punti di diramazione dovranno corrispondere a quelli in cui i due valori di  $w$  vengono a coincidere; ora, poichè tali due valori non differiscono, come si è visto, che pel segno (a meno di multipli interi di periodi), così è chiaro che i punti di diramazione saranno quelli corrispondenti al punto  $w = 0$ , cioè ai vertici del parallelepipedo iniziale delle  $w$ . Come si sa, tali vertici corrispondono sulla superficie di KUMMER all'unico punto  $X_1 = X_2 = X_3 = 0$ , cioè al vertice che nel tetraedro delle  $X$  è opposto al piano  $X_4 = 0$ . Dunque solo tal punto potrebbe essere sulla superficie di KUMMER un punto di diramazione.

Però noi già sappiamo che esso è un punto *doppio* per la superficie di KUMMER; dal che si deduce che corrisponde a due punti di diramazione riuniti

insieme; dunque girando sulla superficie di KUMMER intorno a tal punto doppio, le funzioni *bidrome*  $w$  non potranno che ritornare in loro stesse, onde effettivamente possiamo concludere il teorema importantissimo (\*):

« Le  $w$  sono sulla superficie di KUMMER funzioni bidrome, ma non diramate. La stessa proprietà si verifica naturalmente per ogni funzione *monodroma* delle  $w$ . »

In particolare quindi possiamo asserire che le funzioni  $\sigma$ , essendo funzioni monodrome delle  $w$ , sono funzioni non diramate sulla superficie di KUMMER, e così anche la funzione  $\Sigma_5$  che è l'unica funzione iperellittica dispari di 1.<sup>a</sup> specie (\*\*).

#### § 4. Interpretazioni geometriche dei risultati precedenti.

Abbiamo già introdotta nei paragrafi precedenti, una *doppia* superficie di KUMMER per fare che su di essa le  $w$  si rappresentino monodromicamente. Per definire questa sovrapposizione della superficie con sè stessa noi possiamo, anzichè usare le  $w$ , prendere una qualunque funzione monodroma delle  $w$ ; prendiamo per es. una funzione  $\sigma$ .

È facile dimostrare che il quadrato di una  $\sigma$  dispari si esprime linearmente mediante  $\Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_3$ , mentre il quadrato di una  $\sigma$  pari si esprime linearmente mediante  $\Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_3 \Sigma_4$ .

Quindi eguagliato a zero un tal quadrato, rappresenterà nello spazio della superficie di KUMMER, un piano. Si può mostrare che tal piano ha però una notevole posizione rispetto alla superficie.

Infatti essendo  $\sigma$  una funzione *non diramata* sulla superficie, si ha che i punti della superficie in cui essa è zero non sono punti di diramazione, e propriamente sono tutti punti zero di 1.<sup>o</sup> ordine; onde per  $\sigma^2$  saranno punti zero di 2.<sup>o</sup> ordine, cioè ciascuno di quei punti conterà come una *doppia* intersezione del piano colla superficie e quindi, il piano sarà tangente alla superficie lungo tutti i punti in cui la taglia, cioè si ha un *piano di contatto* della superficie.

Essendo la superficie di KUMMER una superficie di 4.<sup>o</sup> ordine, l'intersezione del piano di contatto sarà una *conica doppia*, e tenendo presente che,

(\*) KLEIN, Lezioni, 1887.

(\*\*) Memoria V, § 14.

come si è detto avanti, il quadrato di una  $\sigma$  dispari non contiene la coordinata  $\Sigma_4$ , mentre la contiene il quadrato di una  $\sigma$  pari, si ricava infine il noto teorema:

« I quadrati delle sei  $\sigma$  dispari rappresentano, eguagliati a zero, sei coniche sulla superficie di KUMMER passanti pel punto origine delle coordinate « (nodo); i quadrati delle dieci  $\sigma$  pari rappresentano, eguagliati a zero, dieci « coniche non passanti per il nodo (\*). »

Una considerazione perfettamente analoga si può fare prendendo a fondamento la funzione Jacobiana  $\Sigma_5$  di cui abbiamo parlato nel paragrafo precedente.

Il quadrato di  $\Sigma_5$  sarà una funzione pari e quindi si esprimerà razionalmente mediante le quattro funzioni pari  $\Sigma$ ; vedremo che si esprimerà con una funzione di 6.° grado nelle  $\Sigma$ , e quindi allora, ripetendo le stesse considerazioni di sopra, si ricava che essa, eguagliata a zero, rappresenterà una superficie di 6.° ordine di contatto a quella di KUMMER; e poichè poi nella sua rappresentazione analitica c'entra, come si sa (\*\*), un parametro arbitrario  $t$ , così si ha tutto una serie di superficie sestiche di contatto (\*\*\*) .

### § 5. Costruzione dell'equazione della serie di sestiche di contatto.

La funzione dispari  $X_5$  è (\*\*\*\*):

$$X_5 = a_t \left\{ a_x^4 a_{x'} \sqrt{f(x')} - a_{x'}^4 a_x \sqrt{f(x)} \right\} (x' x'')^5.$$

Elevando a quadrato, possiamo scrivere (aggiungendo e togliendo un certo termine):

$$\begin{aligned} X_5^2 = (x' x'')^{10} & \left\{ -2(a_t a_x^4 a_{x'}) (a_t a_{x'}^4 a_x) [\sqrt{f(x)} \sqrt{f(x')} - a_x^3 a_{x'}^3] \right. \\ & + [-2(a_t a_x^4 a_{x'}) (a_t a_{x'}^4 a_x) (a_x^3 a_{x'}^3) + f(x) (a_t a_x^4 a_{x'})^2 \\ & \left. + f(x') (a_t a_{x'}^4 a_x)^2 \right\}. \end{aligned}$$

(\*) REICHARDT, *Darstellung der Kummerschen Fläche*, § 9. Halle, 1887.

(\*\*) Memoria V, § 8.

(\*\*\*) KLEIN, *Lezioni cit.* — BURKHARDT, *Opera cit.*, pag. 232, 233.

(\*\*\*\*) Memoria V, § 8.

Ora ci serviamo ancora una volta delle osservazioni fatte nel § 3 della Memoria VI, e osserviamo che il coefficiente della prima parentesi quadrata, come anche il termine contenuto nella seconda parentesi quadrata, sono covarianti simmetrici nelle due serie di variabili  $x'$ ,  $x''$ . Onde tali termini potranno esprimersi come funzioni razionali intere di

$$l_x l_{x''}; \quad m_x m_{x''}; \quad n_x n_{x''}, \quad (1)$$

e coi coefficienti che sono invarianti di  $f$ ; e propriamente è facile vedere, badando ai gradi nelle variabili  $x'$ ,  $x''$ , che il coefficiente della prima parentesi quadrata verrà di 5.° grado nelle (1), e il termine della seconda parentesi quadrata, quando vi si metta da parte il fattore  $(x' x'')^2$  contenuto da quel termine, verrà di 6.° grado nelle (1). Onde infine combinando le (1) coi fattori  $(x' x'')^2$  che compariscono esternamente nella formola, e tenendo presenti le formole di  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  e  $X_4$  si ha:

$$X_5^2 = X_4 G_5(X_1 X_2 X_3) + G_6(X_1 X_2 X_3), \quad (2)$$

dove le  $G$  sono funzioni intere razionali nelle  $X$  dei gradi indicati dagli indici.

Facciamo intanto le seguenti osservazioni: la espressione  $X_5^2$  è un covariante nelle serie di variabili  $x'$ ,  $x''$ ,  $t$ ; esso è inoltre di 2.° grado nelle  $t$ . Se consideriamo i coefficienti di  $t_1^2$ ,  $t_1 t_2$ ,  $t_2^2$ , tali coefficienti non saranno da sé covarianti; cioè supposto  $X_5^2$  posto sotto la forma:

$$X_5^2 = A_{11} t_1^2 + A_{12} t_1 t_2 + A_{22} t_2^2,$$

i coefficienti  $A$  non sono covarianti; però se introduciamo i noti covarianti quadratici della sestica:

$$l_i^2, \quad m_i^2, \quad n_i^2;$$

allora una quadratica qualunque nelle  $t$ , come la  $X_5^2$ , sarà al solito esprimibile linearmente mediante  $l$ ,  $m$ ,  $n$  con coefficienti che hanno la proprietà invariante; onde possiamo concludere che  $X_5^2$  può sempre porsi sotto la forma:

$$X_5^2 = B_{11} l + B_{12} m + B_{22} n, \quad (3)$$

dove le  $B$  sono covarianti in  $x'$ ,  $x''$ .

Paragonando la (3) colla (2) si ha anche che le  $B$  sono funzioni razionali intere nelle  $X$ , e poichè queste ultime sono a lor volta anche covarianti, si ha che i coefficienti di tali funzioni debbono essere invarianti della sestica binaria, e quindi esprimibili razionalmente mediante i quattro invarianti fondamentali.

§ 6. Introduzione al calcolo della funzione  $G_5$

Cominciamo col fissare alcune formole simboliche fondamentali. Se  $F'$  è un coefficiente simbolico qualunque si ha:

$$\begin{aligned}
 R \cdot F'_i{}^2 &= l_i^2(\lambda F')^2 + m_i^2(\mu F')^2 + n_i^2(\nu F')^2 \\
 R \cdot F'_i F'_i{}' &= l_i^2(\lambda F')(\lambda F')' + m_i^2(\mu F')(\mu F')' + n_i^2(\nu F')(\nu F')' \\
 R \cdot F'_{x'} F'_{x''} &= l_{x'} l_{x''}(\lambda F')^2 + m_{x'} m_{x''}(\mu F')^2 + n_{x'} n_{x''}(\nu F')^2 \\
 R \cdot (F'_{x'} F'_{x''} + F'_{x''} F'_{x'}) &= 2 l_{x'} l_{x''}(\lambda F')(\lambda F')' + 2 m_{x'} m_{x''}(\mu F')(\mu F')' + \\
 &\quad + 2 n_{x'} n_{x''}(\nu F')(\nu F')'.
 \end{aligned} \tag{1}$$

L'espressione di  $G_5$  è data da:

$$- 2 a_t b_t a_{x'}^4 a_{x''} b_x b_{x''}^4 (x' x'')^{10},$$

che può scriversi:

$$\begin{aligned}
 & - (x' x'')^{10} a_t b_t \cdot a_{x'} a_{x''} \cdot b_x b_{x''} \cdot (a_x^3 b_{x'}^3 + a_{x'}^3 b_x^3) \\
 & = (x' x'')^{10} a_t b_t \cdot a_{x'} a_{x''} \cdot b_x b_{x''} \left\{ - (a_x b_{x'} + a_{x'} b_x)^3 + \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + 3 a_x a_{x'} b_x b_{x''} (a_x b_{x''} + a_{x'} b_x) \right\} \\
 & = - \frac{8}{R^6} [X_1(\lambda a)^2 + X_2(\mu a)^2 + X_3(\nu a)^2] [X_1(\lambda' b)^2 + X_2(\mu' b)^2 + X_3(\nu' b)^2] \cdot \\
 & \quad \cdot [l_i^2(\lambda'' a)(\lambda'' b) + m_i^2(\mu'' a)(\mu'' b) + n_i^2(\nu'' a)(\nu'' b)] [X_1(\lambda''' a)(\lambda''' b) + \\
 & \qquad \qquad \qquad + X_2(\mu''' a)(\mu''' b) + X_3(\nu''' a)(\nu''' b)]^3 + \\
 & + \frac{6}{R^6} [l_i^2(\lambda a)(\lambda b) + \dots] [X_1(\lambda' a)^2 + \dots]^2 [X_1(\lambda'' b)^2 + \dots]^2 [X_1(\lambda''' a)(\lambda''' b) + \dots]
 \end{aligned}$$

I vari coefficienti dei prodotti delle  $X$  colle  $l_i^2 m_i^2 n_i^2$ , sono invarianti che noi ora vogliamo trovare il mezzo di calcolare mediante gli invarianti fondamentali.

L'ultima espressione risulta di due termini; nel primo termine i coefficienti di  $l_i^2, m_i^2, n_i^2$  sono del tipo:

$$\Sigma [S] \cdot (\omega a) (\omega b) (\omega' a) (\omega' b) (\omega'' a) (\omega'' b) (\omega''' a) (\omega''' b), \tag{I}$$

dove con  $[S]$  s'intende il prodotto dei due primi fattori, costituente un'espressione simmetrica in  $a, b$ , e con  $\omega \omega' \dots$  s'intendono i simboli di quattro fra

le tre quadratiche  $\lambda, \mu, \nu$ . Poichè almeno due dei quattro simboli  $\omega$  debbono essere equivalenti, così potremo sempre supporre in (I)  $\omega$  e  $\omega'$  equivalenti.

Nel secondo termine poi i coefficienti delle combinazioni delle  $X$  con una delle quadratiche  $l_i^2, m_i^2, n_i^2$  sono del tipo:

$$\Sigma [S'] (\omega a) (\omega b) (\omega' a) (\omega' b), \quad (\text{II})$$

dove  $[S']$  rappresenta al solito un'altra espressione simmetrica in  $a, b$ .

Mostreremo ora con quali metodi, termini del tipo (I) e del tipo (II) possano calcolarsi mediante gli invarianti fondamentali.

Le espressioni simmetriche  $[S]$  e  $[S']$  rispettivamente in (I) e (II) sono polinomii interi nelle  $X$  di 2.<sup>o</sup> grado e di 4.<sup>o</sup> rispett., i cui coefficienti sono dei tipi:

$$(\omega a)^2 (\omega' b)^2$$

oppure:

$$(\omega a)^2 (\omega' a)^2 (\omega'' b)^2 (\omega''' b)^2,$$

essendo al solito le  $\omega$  simboli delle quadratiche  $\lambda, \mu, \nu$ . La ragione per la quale abbiamo separato la considerazione di questi fattori da quella degli altri, è che in questi, ciascun determinante è a seconda potenza, mentre negli altri fattori in (I) (II) ciascun determinante è a prima potenza, e noi su questi ultimi soli opereremo per ora delle trasformazioni speciali per ridurli ad altro tipo.

### § 7. Trasformazione dei termini del tipo (I)

Adoperando le formole simboliche:

$$(\omega a) (\omega' b) = (\omega b) (\omega' a) - (\omega \omega') (a b)$$

$$(\omega'' a) (\omega''' b) = (\omega'' b) (\omega''' a) - (\omega'' \omega''') (a b),$$

un termine del tipo (I) diventa:

$$[S] \left\{ \begin{aligned} & (\omega b)^2 (\omega' a)^2 (\omega'' b)^2 (\omega''' a)^2 + (a b) [(\omega b)^2 (\omega' a)^2 (\omega'' b) (\omega''' a) (\omega'' \omega''') \\ & \quad + (\omega'' b)^2 (\omega''' a)^2 (\omega b) (\omega' a) (\omega \omega')] \\ & + (a b)^2 (\omega \omega') (\omega'' \omega''') (\omega b) (\omega' a) (\omega'' b) (\omega''' a) \end{aligned} \right\}. \quad (1)$$

Il primo dei termini di questa espressione è immediatamente calcolabile se teniamo presenti le formole ottenute nella Memoria precedente. Infatti un termine qualunque di  $[S]$  è (a meno dei fattori  $X$ ) del tipo:

$$(\omega^{\nu} a)^2 (\omega^{\nu} b)^2,$$

essendo  $\omega^{\nu}$ ,  $\omega^{\nu}$  i simboli di due delle tre quadratiche  $\lambda, \mu, \nu$ ; quindi in tutto si hanno prodotti di due seste spinte di  $f$  su prodotti del tipo  $\omega \cdot \omega' \cdot \omega''$ ; tali seste spinte si calcolano come quelle del § 12 della Memoria precedente.

In quanto al secondo termine della formola precedente (1) esso può scriversi, operandovi alcune facili trasformazioni e tenendo conto dell'equivalenza dei simboli  $a, b$ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [S] (ab)^2 (\omega'' \omega''') \left\{ - (\omega'' \omega''') (\omega b)^2 (\omega' a)^2 - \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. - (\omega \omega') (\omega'' a) (\omega''' b) [(\omega a) (\omega' b) + (\omega b) (\omega' a)] \right\} \\ & + \frac{1}{2} [S] (ab)^2 (\omega \omega') \left\{ - (\omega \omega') (\omega'' b)^2 (\omega''' a)^2 - \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. - (\omega'' \omega''') (\omega a) (\omega' b) [(\omega'' a) (\omega''' b) + (\omega'' b) (\omega''' a)] \right\}, \end{aligned}$$

che coll'ultimo termine di (1) dànno:

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2} [S] (ab)^2 [(\omega b)^2 (\omega' a)^2 (\omega'' \omega''')^2 + (\omega'' b)^2 (\omega''' a)^2 (\omega \omega')^2] \\ & - [S] (ab)^2 (\omega \omega') (\omega'' \omega''') (\omega a) (\omega' b) (\omega'' a) (\omega''' b) \\ & + \frac{1}{2} [S] (ab)^2 (\omega \omega') (\omega'' \omega''') \left\{ (\omega b) (\omega' a) [(\omega'' b) (\omega''' a) - (\omega''' b) (\omega'' a)] \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + (\omega'' b) (\omega''' a) [(\omega b) (\omega' a) - (\omega a) (\omega' b)] \right\}. \end{aligned}$$

La terza linea facilmente si trasforma in

$$\frac{1}{2} [S] (ab)^4 (\omega \omega')^2 (\omega'' \omega''')^2,$$

e la seconda linea, per la supposta equivalenza dei simboli  $\omega, \omega'$ , si trasforma in

$$- \frac{1}{4} [S] (ab)^4 (\omega \omega')^2 (\omega'' \omega''')^2.$$

Onde infine un termine del tipo (I) diventa:

$$\begin{aligned} (I) &= [S] (\omega b)^2 (\omega' a)^2 (\omega'' b)^2 (\omega''' a)^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} [S] (ab)^2 [(\omega b)^2 (\omega' a)^2 (\omega'' \omega''')^2 + (\omega'' b)^2 (\omega''' a)^2 (\omega \omega')^2] \\ &\quad + \frac{1}{4} [S] (ab)^4 (\omega \omega')^2 (\omega'' \omega''')^2. \end{aligned}$$

Ora ciascuno di tali termini è calcolabile colle formole fondamentali stabilite nella Memoria VI.

Infatti in quanto al secondo esso cogli stessi ragionamenti fatti al § 13 della Mem. VI diventa (a meno dei fattori  $X$ ):

$$\Sigma \left( \left( [ (f, \omega' \omega^{IV})^4, f ]^2 \omega^v \right)^2 (\omega'' \omega''')^2 + \Sigma \left( \left( [ (f, \omega'' \omega^{IV})^4, f ]^2, \omega'' \right)^2 \omega^v \right)^2 (\omega \omega')^2, \right.$$

dove al solito abbiamo indicato con  $(\omega^{IV} a)^2 (\omega^V b)^2$  uno dei termini di  $[S]$ , e il segno  $\Sigma$  si estende a tutti i termini di  $[S]$  ricordando ancora che bisogna poi corrispondentemente moltiplicare per i fattori  $X$ .

Ora tutte le spinte indicate in questa formola sono calcolabili colle formole stabilite nella Mem. VI come abbiamo osservato nel § 13 della stessa.

In quanto poi al terzo termine di (I) osserviamo che avendosi per la formola di GORDAN:

$$(ab)^4 a_y^2 b_x^2 = \Delta_y^2 \cdot i_x^4 + \frac{1}{3} (ab)^6 (xy)^2,$$

si ha:

$$(ab)^4 (\omega^{IV} a)^2 (\omega^V b)^2 = \left( (i, \omega^{IV})^2, \omega^V \right)^2 + \frac{1}{3} A (\omega^{IV} \omega^V)^2,$$

e le spinte indicate in questa formola si calcolano facilmente mediante le formole (1) del § 9 della Mem. VI.

Nella espressione di (I) ultimamente data, indicando con

$$(\omega^{IV} a)^2 (\omega^V b)^2,$$

uno dei termini di  $[S]$ , possiamo esprimere colla seguente formola il termine corrispondente di (I):

$$\begin{aligned} & (f, \omega' \omega''' \omega^{IV})^6 \cdot (f, \omega' \omega'' \omega^V)^6 - \\ & - \frac{1}{2} \left( \left( (f, \omega' \omega^{IV})^4, f \right)^2, \omega^v \right)^2 \cdot A_{\omega'' \omega'''} - \frac{1}{2} \left( \left( (f, \omega'' \omega^{IV})^4, f \right)^2 \omega'' \right)^2 \omega^v \right)^2 A_{\omega' \omega} \\ & + \frac{1}{4} \left( (i, \omega^{IV})^2 \omega^V \right)^2 A_{\omega' \omega} A_{\omega'' \omega'''} + \frac{1}{12} A \cdot A_{\omega' \omega} A_{\omega'' \omega'} A_{\omega^{IV} \omega^V}, \end{aligned}$$

dove si è posto  $\omega \equiv \omega'$ , perchè appunto si è supposto avanti che questi due simboli equivalenti, e inoltre si sono rappresentati con  $A$  cogli indici  $\omega$ , gli invarianti simultanei delle quadratiche  $\omega$ .

### § 8. Trasformazione dei termini del tipo (II).

La trasformazione di uno di tali termini è facilissima. Con

$$(\omega a)(\omega' b) = (\omega b)(\omega' a) + (\omega \omega')(ab),$$

si ha, scambiando i simboli  $a$  con  $b$  e ricordando che  $[S']$  è simmetrica in tali simboli,

$$\begin{aligned} \text{(II)} &= [S'](\omega b)^2(\omega' a)^2 + \frac{1}{2}[S'](ab)(\omega \omega')[(\omega b)(\omega' a) - (\omega a)(\omega' b)] \\ &= [S'](\omega b)^2(\omega' a)^2 - \frac{1}{2}[S'](ab)^2(\omega \omega')^2. \end{aligned}$$

Indicando ora con

$$(\omega'' b)^2(\omega''' a)^2(\omega^{IV} a)^2(\omega^V b)^2,$$

un termine di  $[S']$  (a meno dei fattori  $X$ ) si ha che il termine corrispondente di (II) si esprimerà col seguente sistema di spinte:

$$\begin{aligned} &(f, \omega' \omega''' \omega^{IV})^6 (f, \omega \omega'' \omega^V)^6 \\ &- \frac{1}{2} \left( \left( [ (f, \omega''' \omega^{IV})^4, f ]^2 \omega'' \right)^2, \omega^V \right)^2 \cdot A_{\omega \omega'}. \end{aligned}$$

Si hanno in fondo termini della stessa specie di quelli precedentemente ottenuti, ma qui gli  $\omega \omega'$  sono simboli qualunque e potranno capitare fra loro diversi, mentre nel paragrafo precedente bisogna supporre  $\omega \omega'$  simboli equivalenti, altrimenti non sarebbero più esatte le trasformazioni ivi effettuate.

### § 9. Calcolo di alcuni dei coefficienti di $G_5$ .

La funzione  $G_5$  è un'espressione del tipo:

$$G'_5 l_i^2 + G''_5 m_i^2 + G'''_5 n_i^2,$$

dove le  $G'_5, G''_5, G'''_5$  sono quintiche ternarie in  $X_1, X_2, X_3$  che noi porremo simbolicamente sotto la forma:

$$\begin{aligned} G'_5 &= g'^5_x \\ G''_5 &= g''^5_x \\ G'''_5 &= g'''^5_x. \end{aligned}$$

Colle formole precedenti noi potremmo calcolare tutti i coefficienti  $g$ . Ci basterà di calcolare solo alcuni sotto forma definitiva.

Il coefficiente  $g'_1$  è dato da:

$$\frac{1}{R^6} \left\{ 2 [(f\lambda^3)^6]^2 + 5 \left( \left( (f\lambda^2)^4 f \right)^2 \lambda \right)^2 A_{\lambda\lambda} - 2 \left( (i\lambda)^2 \lambda \right)^2 A_{\lambda\lambda} - \frac{2}{3} A A_{\lambda\lambda} \right\},$$

e ponendo qui  $\mu, \nu$  in luogo di  $\lambda$  si hanno i valori dei coefficienti  $g''^5_{\frac{1}{2}}, g'''^5_{\frac{1}{3}}$ .

Colle formole dei §§ 5, 8, 9, 11 della Memoria VI si ricava infine:

$$\begin{aligned} g'_1 &= \frac{1}{R^6} \left\{ -2R^2 L_{11}^2 - 5 \left( +\frac{2}{3} L_{11} B + \frac{1}{6} M_{11} A_{11} + \frac{1}{9} A B M_{11} + \frac{1}{9} B^2 N_{11} \right) A_{\lambda\lambda} \right. \\ &\quad + 5 \left( \frac{2}{3} L_{11} C + \frac{1}{9} M_{11} A C + \frac{1}{3} N_{11} A_{mm} + \frac{1}{9} N_{11} B C \right) A_{\mu\lambda} \\ &\quad + 5 \left( \frac{2}{9} L_{11} C + \frac{1}{9} M_{11} B C + \frac{1}{3} N_{11} A_{mn} - \frac{1}{9} N_{11} C^2 \right) A_{\nu\lambda} \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} R^2 M_{11} - \frac{2}{3} C A_{\nu\lambda} A_{\lambda\nu} - \frac{2}{3} A A_{\lambda\lambda} \right\}. \end{aligned}$$

### § 10. Introduzione al calcolo della funzione $G_6$ .

È facile in primo punto riconoscere che  $G_6$  a meno del fattore esterno  $(x'x'')^{10}$  è ancora divisibile per  $(x'x'')^2$ ; infatti per  $x' = x''$  essa si annulla, e inoltre è simmetrica in  $x', x''$ . Si ha:

$$\begin{aligned} G_6 &= (x'x'')^{10} [b_{x'}^3 a_t a_{x'} a_{x'}^4 c_t c_{x'} c_{x''} (b_{x'}^3 c_{x''}^2 - b_{x''}^3 c_{x'}^2) \\ &\quad - b_{x''}^3 a_t a_{x''} a_{x''}^4 c_t c_{x''} c_{x'} (b_{x''}^3 c_{x'}^2 - b_{x'}^3 c_{x''}^2)] \\ &= (ba)(bc)(x'x'')^{12} a_t c_t a_{x'} a_x c_{x'} c_{x''} [b_{x'}^2 c_{x''}^2 + b_{x'} b_{x''} c_{x'} c_{x''} + b_{x''}^2 c_{x'}^2] \cdot \\ &\quad \cdot [b_{x'}^2 a_{x''}^2 + b_{x'} b_{x''} a_x a_{x'} + b_{x''}^2 a_x^2] \\ &= (ba)(bc)(x'x'')^2 a_t c_t a_x a_{x'} c_x c_{x''} \left\{ (b_x c_{x'} + b_{x'} c_x)^2 - b_x b_{x'} c_x c_{x'} \right\} \cdot \\ &\quad \cdot \left\{ (b_x a_{x'} + b_{x'} a_x)^2 - b_x b_{x'} a_x a_{x'} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(ba)(bc)}{R^7} \left\{ l_i^2(\lambda a)(\lambda c) + \text{ecc.} \right\} \left\{ X_1(\lambda' a)^2 + \text{ecc.} \right\} \left\{ X_1(\lambda'' c)^2 + \text{ecc.} \right\} \times \\
 &\quad \times \left[ 16 \left\{ X_1(\lambda''' b)(\lambda''' c) + \text{ecc.} \right\}^2 \left\{ X_1(\lambda^{IV} a)(\lambda^{IV} b) + \text{ecc.} \right\}^2 \right. \\
 &\quad - 4 \left\{ X_1(\lambda''' b)(\lambda''' c) + \text{ecc.} \right\}^2 \left\{ X_1(\lambda^{IV} b)^2 + \text{ecc.} \right\} \left\{ X_1(\lambda^V a)^2 + \text{ecc.} \right\} \\
 &\quad - 4 \left\{ X_1(\lambda''' b)(\lambda''' a) + \text{ecc.} \right\}^2 \left\{ X_1(\lambda^{IV} b)^2 + \text{ecc.} \right\} \left\{ X_1(\lambda^V c)^2 + \text{ecc.} \right\} \\
 &\quad \left. + \left\{ X_1(\lambda''' b)^2 + \text{ecc.} \right\}^2 \left\{ X_1(\lambda^{IV} a)^2 + \text{ecc.} \right\} \left\{ X_1(\lambda^V c)^2 + \text{ecc.} \right\} \right].
 \end{aligned}$$

In questa formola vi sono termini di quattro tipi diversi; chiamiamoli rispettivamente con (I) (II) (III) (IV), e cominciamo col trasformare i termini del tipo IV.

Indicando con  $[S_{ac}]$  l'espressione:

$$\left\{ X_1(\lambda' a)^2 + \text{ecc.} \right\}^2 \left\{ X_1(\lambda'' c)^2 + \text{ecc.} \right\}^2,$$

che è simmetrica in  $a, c$ , si ha:

$$(IV) = \Sigma (ba)(bc) [S_{ac}] (\omega a)(\omega c) \left\{ X_1(\lambda b)^2 + \text{ecc.} \right\}^2.$$

Adoperando la formola:

$$(ba)(\omega c) = (bc)(\omega a) - (ac)(\omega b),$$

si ha:

$$\begin{aligned}
 (IV) &= \Sigma [S_{ac}] (bc)^2 (\omega a)^2 [X_1(\lambda b)^2 + \text{ecc.}]^2 \\
 &\quad - \Sigma (ac)(\omega b)(bc)(\omega a) [S_{ac}] [X_1(\lambda b)^2 + \text{ecc.}]^2,
 \end{aligned}$$

e scambiando nel secondo termine  $a$  con  $c$  e sommando e poi dividendo per 2 si ha:

$$\begin{aligned}
 (IV) &= \Sigma [S_{ac}] [bc]^2 (\omega a)^2 [X_1(\lambda b)^2 + \text{ecc.}]^2 \\
 &\quad - \frac{1}{2} \Sigma (ac)^2 (\omega b)^2 [S_{ac}] [X_1(\lambda b)^2 + \text{ecc.}]^2.
 \end{aligned}$$

Tale espressione può meglio scriversi (a meno dei fattori  $X$ ):

$$(IV) = \Sigma \left[ (bc)^2 (\omega a)^2 - \frac{1}{2} (ac)^2 (\omega b)^2 \right] (\omega' a)^2 (\omega'' a)^2 (\omega''' c)^2 (\omega^{IV} c)^2 (\omega^V b)^2 (\omega^{VI} b)^2,$$

dove il segno  $\Sigma$  si estende a tutti i possibili valori delle  $\omega$ , e quindi in virtù delle formole già stabilite si ha:

$$(IV) = \Sigma \left\{ (f, \omega \omega' \omega'')^4 \cdot \left( (f, \omega''' \omega^{IV})^4 f \right)^2, \omega^V \omega^{VI} \right\}^4 - \\ - \frac{1}{2} (f, \omega \omega^V \omega^{VI})^6 \left\{ (f, \omega' \omega'')^4 f \right\}^2, \omega''' \omega^{IV} \right\}^4.$$

### § 11. Trasformazione dei termini (II) e (III) del paragrafo precedente.

In primo punto osserviamo che i termini (II) (III) sono fra loro della stessa specie e propriamente sono del tipo:

$$\Sigma [S_{ac}] (ba) (bc) (\omega a) (\omega c) (\omega' b) (\omega' a) (\omega'' b) (\omega'' a) (\omega''' b)^2 (\omega^{IV} c)^2.$$

Poniamo:

$$(\omega' b) (\omega' a) (\omega'' b) (\omega'' a) = -\frac{1}{2} [(\omega' \omega'')^2 (ab)^2 - (\omega' b)^2 (\omega'' a)^2 - (\omega' a)^2 (\omega'' b)^2].$$

Allora si hanno tre specie di termini di cui gli ultimi due sono simili a (IV) del paragrafo precedente, e quindi sappiamo come si possono calcolare, e il primo è:

$$-\frac{1}{2} [S_{ac}] (ba)^3 (bc) \cdot (\omega a) (\omega c) (\omega''' b)^2 (\omega^{IV} c)^2. \quad (\alpha)$$

Scambiando  $a$  con  $c$  e sommando e dividendo per 2, si ha:

$$-\frac{1}{4} [S_{ac}] [(ba)^2 (\omega^{IV} c)^2 + (bc)^2 (\omega^{IV} a)^2] (ba) (bc) (\omega a) (\omega c) (\omega''' b)^2,$$

che con

$$(ba) (\omega c) = (bc) (\omega a) - (ac) (\omega b),$$

diventa:

$$-\frac{1}{4} [S_{ac}] \left[ (ba)^2 (\omega^{IV} c)^2 + (bc)^2 (\omega^{IV} a)^2 \right] \left[ (bc)^2 (\omega a)^2 - \frac{1}{2} (ac)^2 (\omega b)^2 \right] (\omega''' b)^2$$

Onde infine o ci riduciamo a termini:

$$(bc)^4 (\omega''' b)^2 (\omega' c)^2 \cdot (\omega' a)^2 (\omega a)^2 (\omega^{IV} a)^2$$

oppure:

$$(ab)^2 (bc)^2 (b\omega)^2 (a\omega')^2 (a\omega'')^2 (c\omega''')^2 (c\omega^{IV})^2,$$

di cui il primo si calcola come quello del § 7, e il secondo si può calcolare col seguente sistema di spinte:

$$\left( \left( \left( (c, \omega''' \omega^{IV})^4, b \right), \omega \right)^2 a \right)^2 \omega' \omega''^4.$$

È facile far vedere che colle formole già stabilite si può calcolare un tal sistema di spinte. Infatti la spinta  $(c, \omega''' \omega^{IV})^4$  dà luogo ad espressioni lineari in (§ 11, Mem. VI)

$$l, \quad m, \quad n.$$

Spingendo queste due volte su  $f = b_x^6$  otteniamo espressioni lineari in [formole (5), § 5, Mem. VI]

$$l^2, \quad lm, \quad \Delta, \quad i.$$

Ciascuna di queste può spingersi due volte con formole note su  $\lambda, \mu, \nu$ , (§§ 8, 9 della Mem. VI), e si hanno espressioni lineari in  $l, m, n, \lambda, \mu, \nu$ , di cui dobbiamo poi ancora fare le seconde spinte su  $f$ ; per  $l, m, n$  le formole che ci occorrono sono quelle già citate (§ 5, Mem. VI); pel caso di  $\lambda, \mu, \nu$  possiamo semplicemente procedere così:

Dovendo effettuare per es.  $((\lambda, f)^2, \omega' \omega'')^4$ , trasformiamo questo sistema di spinte in

$$(f, \lambda \omega' \omega'')^6,$$

e noi conosciamo già tutte le spinte di questo genere (§ 11 della Mem. VI).

Colle vie indicate dunque potranno calcolarsi tutti i termini del tipo (II), (III).

## § 12. Trasformazione dei termini (I) di $G_6$ .

Tali termini sono:

$$(I) = \Sigma [S_{ae}] (b a) (b c) (\omega a) (\omega c) (\omega' b) (\omega' c) (\omega'' b) (\omega'' c) (\omega''' a) (\omega''' b) (\omega^{IV} a) (\omega^{IV} b).$$

Facciamo consecutivamente la trasformazione colle due formole:

$$(\omega' b) (\omega' c) (\omega'' b) (\omega'' c) = + \frac{1}{2} [(\omega' b)^2 (\omega'' c)^2 + (\omega' c)^2 (\omega'' b)^2 - (\omega' \omega'')^2 (b c)^2]$$

$$(\omega''' a) (\omega''' b) (\omega^{IV} a) (\omega^{IV} b) = + \frac{1}{2} [(\omega''' a)^2 (\omega^{IV} b)^2 + (\omega''' b)^2 (\omega^{IV} a)^2 - (\omega''' \omega^{IV})^2 (a b)^2].$$

Allora o si hanno termini come (IV), oppure come i termini ( $\alpha$ ) del § 11, o finalmente come

$$[S_{ac}] (b a)^3 (b c)^3 (\omega a) (\omega c) \cdot (\omega' \omega'')^2 (\omega''' \omega^{IV})^2.$$

Come si vede quindi si stacca un fattore, e considerando poi un solo dei termini compresi in  $[S_{ac}]$  cioè per es.  $(\omega' a)^2 \cdot (\omega'' c)^2$  si ha da dover calcolare

$$(b a)^3 (b c)^3 (\omega' a)^2 (\omega'' c)^2 (\omega a) (\omega c).$$

Scambiandovi  $a$  con  $b$ , e aggiungendovi e togliendo una stessa espressione, questo termine può scriversi:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (ab)^4 \left\{ (a\omega')^2 (c\omega'')^2 (\omega c)^2 (\omega'' c)^2 \right. \\ & \quad \left. - (c\omega'')^2 (\omega c) (\omega b) (c a) (\omega' c) [(b\omega') (c a) + (a\omega') (c b)] \right\} \\ & = \frac{1}{2} (ab)^4 \left\{ (c\omega'')^2 (a\omega')^2 (c\omega)^2 (c\omega'')^2 \right. \\ & \quad + 2(c a)^2 (c\omega'')^2 (c\omega') (b\omega') (c\omega) (b\omega) \\ & \quad \left. + (ab) (c\omega'')^2 (\omega c) (\omega b) (c a) (c\omega')^2 \right\}. \end{aligned}$$

Ora colla formola:

$$(c\omega') (b\omega') (c\omega) (b\omega) = \frac{1}{2} [(c\omega')^2 (b\omega)^2 + (c\omega)^2 (b\omega')^2 - (\omega\omega')^2 (cb)^2],$$

e scambiando i simboli  $a$  con  $b$  nell'ultimo termine, e poi al solito sommando il risultato ottenuto e dividendo per 2 si ha:

$$\begin{aligned} & = (ab)^4 (c\omega'')^2 (a\omega')^2 (c\omega'')^2 (c\omega)^2 + \frac{1}{2} (ab)^4 (c a)^2 (c\omega')^2 (c\omega'')^2 (b\omega)^2 \\ & \quad - \frac{1}{2} (\omega\omega')^2 (ab)^4 (c a)^2 (c\omega'')^2 (c\omega'')^2 - \frac{1}{4} A \cdot (f, \omega\omega'\omega'')^6. \end{aligned}$$

Ora i due primi termini sono della stessa specie, e possono calcolarsi come segue:

Avendosi

$$(ab)^4 a_x^2 b_y^2 = \Delta_y^2 k + \frac{1}{3} A \cdot (xy)^2,$$

si ha:

$$(ab)^4 (b\omega)^2 a_x^2 = (k\omega)^2 + \frac{1}{3} A \cdot \omega.$$

Ora  $(k\omega)^2 \equiv (i\omega)^2$  si ricava dalle formole del § 9 della Mem. VI e si vede ancora che esso è sempre una funzione lineare di  $\lambda, \mu, \nu$ ; quindi il secondo membro della formola precedente si esprime linearmente mediante tali tre quadratiche; per completare ora il termine

$$(ab)^4 (b\omega)^2 (ac)^2 (c\omega')^2 (c\omega'')^2,$$

dobbiamo effettuare la sesta spinta di  $f = c_x^6$  su esso termine moltiplicato per  $\omega' \omega''$ ; e quindi ci riduciamo a espressioni come quelle che si ricavano immediatamente dal § 11 della Mem. VI.

In quanto poi a

$$(ab)^4 (ca)^2 (cb)^2 (c\omega'')^2,$$

esso è

$$\left( (i, f)^4, \omega'' \right)^2 \quad \text{cioè} \quad (l, \omega'')^2.$$

---

# Sui sistemi tripli ortogonali che contengono una serie di superficie con un sistema di linee di curvatura piane.

(Di LUIGI BIANCHI, a Pisa.)

---

Nella presente Memoria il problema della ricerca dei sistemi tripli ortogonali, indicati nel titolo, è ricondotto a quello ben noto dei sistemi *ciclici*. Vi si dimostra che, per definire univocamente uno dei sistemi cercati, basta darne i seguenti elementi caratteristici:

- 1.° Una superficie  $\Sigma_0$  ortogonale alle curve piane  $C$ .
- 2.° Una delle curve piane  $C_0$ .
- 3.° I cerchi osculatori delle curve  $C$  nei loro punti d'incontro colla superficie  $\Sigma_0$ .

Inversamente, dati ad arbitrio questi elementi, purchè i detti cerchi costituiscano un sistema *normale* (\*), condizione che risulta necessaria per un noto teorema di RIBAUCOUR, esiste il sistema triplo ortogonale corrispondente, che si può determinare con sole quadrature. Qualunque superficie con un sistema di linee di curvatura piane può far parte di sistemi tripli di questa specie.

Due casi particolari meritano speciale menzione. Il primo si presenta quando per tutte le superficie  $\Sigma_1$  di una delle due serie, che hanno le curve piane  $C$  per linee di curvatura, l'angolo sotto cui sono tagliate dai piani di queste curve è il medesimo. La determinazione di questi speciali sistemi si riconduce alla teoria delle deformazioni infinitesime delle superficie a curvatura costante.

---

(\*) Cioè ammettano una serie di superficie ortogonali,

*Annali di Matematica*, tomo XIX.

Quando accada invece che per ciascuna delle superficie  $\Sigma_i$  sopra ricordate, i piani delle linee di curvatura  $C$  taglino bensì la superficie sotto lo stesso angolo, ma tale angolo vari dall'una all'altra superficie della serie, si avrà il secondo dei casi accennati. La determinazione di questi sistemi più generali si riconduce alla sua volta alla ricerca delle deformazioni infinitesime di quelle superficie che hanno un sistema di linee assintotiche a torsione costante. In ambedue i casi bastano sole quadrature per ottenere quanti si vogliono sistemi tripli della classe corrispondente.

### § 1. Le superficie con un sistema di linee di curvatura piane.

1. Le superficie con un sistema di linee di curvatura piane possono dirsi completamente note, le loro equazioni in termini finiti essendo state ottenute, in tutta la generalità, da vari geometri. Dobbiamo qui esporre alcune considerazioni fondamentali che conducono a stabilire, rispetto agli elementi caratteristici di queste superficie, un teorema indispensabile nelle nostre ricerche.

Se di una superficie  $S$  con un sistema di linee  $L$  di curvatura piane si fa la rappresentazione sferica di GAUSS, le linee sferiche immagini delle linee  $L$  sono cerchi. Inversamente, preso sulla sfera un sistema  $\infty^1$  arbitrario di cerchi e il sistema delle loro traiettorie ortogonali, ogni superficie  $S$  che abbia per immagine sferica delle linee di curvatura questo doppio sistema ortogonale appartiene alla nostra classe. Il problema di determinare tali superficie  $S$  rientra quindi nell'altro più generale: *determinare le superficie  $\Sigma$  con assegnata rappresentazione sferica delle linee di curvatura*. Per la soluzione di questo problema generale il metodo più semplice ed elegante è quello dovuto ai sig.<sup>i</sup> WEINGARTEN e DARBOUX, che qui riportiamo.

Sia:

$$ds^2 = Edu^2 + Gdv^2, \quad (1)$$

l'espressione dell'elemento lineare sferico riferito all'assegnato sistema doppio ortogonale di linee  $(u, v)$ . Se indichiamo con  $x, y, z$  le coordinate di un punto mobile sulla superficie, con  $X, Y, Z$  i coseni di direzione della normale e poniamo:

$$W = Xx + Yy + Zz,$$

saranno  $X, Y, Z$  tre soluzioni particolari dell'equazione a derivate parziali:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} = \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} \frac{\partial \Phi}{\partial v}, \quad (2)$$

e alla medesima equazione soddisferà anche  $W$ , che geometricamente rappresenta la distanza del piano tangente della superficie dall'origine.

Inversamente sia  $W$  una soluzione qualunque della (2); se consideriamo la superficie involuppo del piano

$$X\xi + Y\eta + Z\zeta = W,$$

dove  $\xi, \eta, \zeta$  indicano le coordinate correnti, questa superficie  $\Sigma$  appartiene, come facilmente si dimostra, alla classe richiesta, cioè ha per immagini sferiche dello sue linee di curvatura il doppio sistema assegnato  $(u, v)$ . Per determinare effettivamente quest'involuppo  $\Sigma$ , basta ricorrere alle formole generali di WEINGARTEN in coordinate tangenziali (\*).

Supponiamo ora che le linee sferiche  $u = \text{cost.}^e$  siano circoli, cioè la loro curvatura geodetica

$$\frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = U,$$

sia una funzione della sola  $u$ . In tal caso l'equazione (2)

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u \partial v} = \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} \frac{\partial W}{\partial u} + U \sqrt{E} \frac{\partial W}{\partial v},$$

avendo nullo il secondo invariante, è immediatamente integrabile; essa può scriversi infatti

$$\frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial W}{\partial u} - U \sqrt{E} \cdot W \right) = \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} \left( \frac{\partial W}{\partial u} - U \sqrt{E} \cdot W \right),$$

e integrata dà:

$$W = e^{\int_{v_0}^v U \sqrt{E} dv} \left\{ \psi(v) + \int_{u_0}^u \sqrt{E} \varphi(u) \cdot e^{-\int_{u_0}^u U \sqrt{E} du} du \right\}, \quad (3)$$

dove  $\varphi(u), \psi(v)$  sono due funzioni arbitrarie, la prima di  $u$  e la seconda di  $v$ .

2. Ciò premesso, dimostriamo il teorema:

A) Una superficie  $S$  con un sistema di linee  $C$  di curvatura piane è individuata quando ne siano assegnati i seguenti elementi: 1.° una linea  $C_0$  di curvatura piana; 2.° una linea  $\Gamma_0$  di curvatura del secondo sistema; 3.° il sistema dei piani  $\pi$  che contengono le linee di curvatura  $C$ .

(\*) WEINGARTEN, *Ueber die Theorie der auf einander abwickelbaren Oberflächen*. Berlin, 1884. — Cfr. anche KNOBLAUCH, *Einleitung in die allgemeine Theorie der Flächen*, § 30, pag. 83.

Le due linee  $C_0, \Gamma_0$  s'incontreranno ortogonalmente in un punto  $P_0$ , ove si conoscerà la normale alla superficie  $S$  come normale comune a  $C_0, \Gamma_0$ . Conosciamo dunque le normali alla  $S$  tanto lungo  $C_0$  quanto lungo la  $\Gamma_0$ , ambedue i sistemi di normali dovendo formare una superficie sviluppabile, e nella immagine sferica della  $S$  saranno perfettamente determinati il circolo  $C'_0$  immagine della  $C_0$  e la linea  $\Gamma'_0$  immagine della  $\Gamma_0$ . Essendo inoltre dati i piani  $\pi$  delle curve  $C$  a cui sono paralleli i piani dei circoli immagini  $C'$ , conosceremo completamente sulla sfera rappresentativa le linee  $u, v$  immagini delle linee di curvatura della  $S$ . Indicando ora con  $u = u_0, v = v_0$  le equazioni delle linee  $C'_0, \Gamma'_0$ , applichiamo il metodo del n.º 1, osservando che della corrispondente soluzione  $W$  della (2) conosciamo i valori lungo  $\Gamma_0$  e  $C_0$ , cioè per  $v = v_0, u = u_0$  rispettivamente. Così restano determinate senza ambiguità le funzioni arbitrarie  $\varphi(u), \psi(v)$  che figurano nell'integrale generale (3) e la superficie  $S$  ne risulta individuata come si era asserito.

*Osservazione.* — La dimostrazione superiore, appoggiandosi sulla proprietà della rappresentazione sferica, suppone che la superficie  $S$  non sia sviluppabile. Però si vede che anche in questo caso il teorema A) resta valido; soltanto è da osservarsi che se la superficie  $S$  si riduce ad un piano sono naturalmente indeterminate le sue linee di curvatura.

3. Gli elementi del teorema A) non possono darsi del tutto ad arbitrio. Ed infatti le tangenti alle curve  $C$  nei loro punti d'incontro colla linea  $\Gamma_0$  formano una sviluppabile, sulla quale  $\Gamma_0$  è una traiettoria ortogonale delle generatrici; tale sviluppabile  $\Lambda$  è determinata dalla tangente in  $P_0$  alla  $C_0$  come generatrice iniziale. Ciascun piano  $\pi$  deve adunque passare per la corrispondente generatrice di  $\Lambda$ . Possiamo ora facilmente dimostrare il teorema:

*B) Dati ad arbitrio gli elementi del teorema A), purchè i piani  $\pi$  siano condotti per le generatrici di quella sviluppabile  $\Lambda$ , che è formata di normali alla curva  $\Gamma_0$  e contiene come generatrice iniziale la tangente in  $P_0$  alla  $C_0$ , esiste la corrispondente superficie  $S$  che si può determinare con sole quadrature.*

Si considerino infatti la curva sferica  $\Gamma'_0$  e il circolo  $C'_0$  ottenuti nel modo superiormente descritto e pei punti della  $\Gamma'_0$  si conducano ai piani  $\pi$  uscenti dai corrispondenti punti della  $\Gamma_0$  i piani paralleli  $\pi'$ , che daranno per sezioni nella sfera un sistema di circoli  $C'$ . Siccome le tangenti in due punti corrispondenti delle  $\Gamma'_0, \Gamma_0$  sono parallele e i piani  $\pi$  soddisfano la condizione enunciata nel teorema, i circoli  $C'$  saranno tutti ortogonali alla linea  $\Gamma'_0$  e le traiettorie ortogonali dei circoli  $C'$ , essendone già note una  $\Gamma'_0$ , si

troveranno con quadrature (\*). Scegliendo i cerchi  $C'$  e queste traiettorie ortogonali a linee coordinate  $u, v$ , l'elemento lineare sferico prenderà la forma determinata (1). Ora se nell'integrale (3) dell'equazione (2) di LAPLACE determiniamo le funzioni arbitrarie  $\varphi(u), \psi(v)$  in guisa che per  $u = u_0, v = v_0$   $W$  assuma i valori assegnati (ciò che evidentemente si ottiene senza integrazioni), avremo individuata, secondo il n.º 1, una superficie  $S$  con un sistema di linee di curvatura piane che soddisferà, come subito si vede, alle condizioni iniziali richieste. Non tralascieremo di osservare che i risultati ottenuti dimostrano immediatamente come nelle equazioni generali delle superficie  $S$ , con un sistema di linee di curvatura piane, entrino *quattro* funzioni arbitrarie.

## § 2. I sistemi ciclici.

4. Fra i sistemi tripli ortogonali, che contengono una serie di superficie con un sistema di linee di curvatura piane  $C$  (e quindi una seconda), i più semplici sono quelli in cui le curve  $C$  sono cerchi, cioè, secondo una denominazione del sig. RIBAUCCOUR, *i sistemi ciclici*.

Come si vedrà nel corso del presente lavoro, la conoscenza di questi sistemi elementari basta già per elevarsi a quella dei sistemi generali proposti con sole operazioni di quadrature. È per ciò che daremo prima una nuova trattazione della teoria dei sistemi ciclici, che permette di trovare l'effettiva forma dell'elemento lineare dello spazio riferito ad un tale sistema triplo ortogonale, come a sistema coordinato.

Consideriamo un sistema  $\infty^2$  di cerchi che ammettano una serie di superficie ortogonali e associamovi la considerazione del sistema degli assi dei cerchi, cioè delle normali elevate nei centri dei cerchi ai loro piani. Questi formano, in generale, un sistema  $\infty^2$  di raggi, o congruenza, con due serie distinte di sviluppabili reali non cilindriche e facendo la rappresentazione sferica della congruenza si avranno quindi, come immagini delle sviluppabili, due distinti sistemi di curve. Tratterò distesamente solo questo caso, che è il generale, e pei casi eccezionali mi limiterò ad alcune osservazioni sufficienti pel nostro scopo (vedi n.º 9).

I calcoli che seguono, salvo il loro significato attuale più generale, sono

---

(\*) DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces*, vol. I, pag. 113.

precisamente gli stessi che ho sviluppato al § 3 della Memoria precedente (\*). Qui basterà adunque riprodurre le formole generali rimandando per la loro deduzione al luogo citato.

5. Prendiamo per linee coordinate  $u, v$  sulla sfera le immagini delle sviluppabili formate cogli assi dei circoli del sistema e sia:

$$ds^2 = E du^2 + 2F dudv + G dv^2, \quad \text{dove } F = \cos\Omega\sqrt{EG} \quad (1)$$

l'espressione dell'elemento lineare sferico. Le coordinate  $X, Y, Z$  di un punto della sfera sono altresì i coseni di direzione del corrispondente raggio della congruenza. Per definire completamente la congruenza basterà inoltre conoscere in funzione di  $u, v$  le coordinate:

$$\bar{x}, \quad \bar{y}, \quad \bar{z},$$

del punto medio di ogni raggio. Secondo risultati ottenuti dal sig. GUICHARD (\*\*), indicando con  $\rho$  la semidistanza focale, sarà  $\rho$  una soluzione dell'equazione di LAPLACE

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v} + \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right\} \frac{\partial \rho}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{matrix} \right\} \frac{\partial \rho}{\partial v} + \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right\} + \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{matrix} \right\} + \cos\Omega\sqrt{EG} \right] \rho = 0, \quad (2)$$

dove i simboli  $\left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{matrix} \right\}$  del sig. CHRISTOFFEL hanno i valori:

$$\left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right\} = \frac{G \frac{\partial E}{\partial v} - F \frac{\partial G}{\partial u}}{2(EG - F^2)}, \quad \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{matrix} \right\} = \frac{E \frac{\partial G}{\partial u} - F \frac{\partial E}{\partial v}}{2(EG - F^2)}.$$

Nota questa soluzione  $\rho$ , si avranno definite per quadrature  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  dalle formole:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} &= \left[ \frac{\partial \rho}{\partial u} + 2 \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{matrix} \right\} \rho \right] X - \rho \frac{\partial X}{\partial u} \\ \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} &= - \left[ \frac{\partial \rho}{\partial v} + 2 \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right\} \rho \right] X + \rho \frac{\partial X}{\partial v}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

e dalle analoghe in  $\bar{y}, \bar{z}$ .

Ora, supponendo che la congruenza sia ciclica (m. p., n.º 8), indichiamo con  $\rho \cos \sigma$  la distanza del centro di ogni circolo dal punto medio del suo asse,

(\*) Questi Annali, tomo precedente. I richiami a questa Memoria saranno segnati con (m. p.).

(\*\*) Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, tom. 6, 3.<sup>me</sup> série, pag. 333-348.

talchè le coordinate  $x_1, y_1, z_1$  del centro saranno date dalle formole:

$$x_1 = \bar{x} + \rho \cos \sigma X, \quad y_1 = \bar{y} + \rho \cos \sigma Y, \quad z_1 = \bar{z} + \rho \cos \sigma Z,$$

mentre pel raggio  $R$  del circolo si avrà:

$$R = \rho \sin \sigma.$$

Tracciamo poi nel piano di ogni circolo i due diametri ortogonali paralleli alle bisettrici dell'angolo delle linee sferiche coordinate  $u, v$ ; i loro rispettivi coseni di direzione

$$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \quad \alpha_2, \beta_2, \gamma_2,$$

saranno dati dalle formole:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2 \sin \frac{\Omega}{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial X}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial X}{\partial v} \right) \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2 \cos \frac{\Omega}{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial X}{\partial u} + \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial X}{\partial v} \right), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

e dalle analoghe per  $\beta_1, \gamma_1; \beta_2, \gamma_2$ .

Per le derivate dei coseni di direzione della terna ortogonale

$$(X, Y, Z) \quad (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \quad (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2),$$

si hanno le formole (m. p., n.° 10):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial u} &= \sqrt{E} \left( \alpha_1 \sin \frac{\Omega}{2} + \alpha_2 \cos \frac{\Omega}{2} \right) \\ \frac{\partial X}{\partial v} &= \sqrt{G} \left( -\alpha_1 \sin \frac{\Omega}{2} + \alpha_2 \cos \frac{\Omega}{2} \right) \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial u} &= - \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial \Omega}{\partial u} + \sqrt{\frac{E}{G}} \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{matrix} \right\} \sin \Omega \right] \alpha_2 - \sqrt{E} \sin \frac{\Omega}{2} X \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial v} &= \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial \Omega}{\partial v} + \sqrt{\frac{G}{E}} \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{matrix} \right\} \sin \Omega \right] \alpha_2 + \sqrt{G} \sin \frac{\Omega}{2} X \\ \frac{\partial \alpha_2}{\partial u} &= \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial \Omega}{\partial u} + \sqrt{\frac{E}{G}} \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{matrix} \right\} \sin \Omega \right] \alpha_1 - \sqrt{E} \cos \frac{\Omega}{2} X \\ \frac{\partial \alpha_2}{\partial v} &= - \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial \Omega}{\partial v} + \sqrt{\frac{G}{E}} \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{matrix} \right\} \sin \Omega \right] \alpha_1 - \sqrt{G} \cos \frac{\Omega}{2} X. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

6. Se indichiamo con  $\xi, \eta, \zeta$  le coordinate di un punto qualunque sul circolo  $(u, v)$  e con  $\theta$  l'angolo che il raggio coll'estremo in quel punto fa colla direzione  $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ , avremo le formole:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \bar{x} + \rho \cos \sigma X + \rho \operatorname{sen} \sigma (\alpha_1 \cos \theta + \alpha_2 \operatorname{sen} \theta) \\ \eta &= \bar{y} + \rho \cos \sigma Y + \rho \operatorname{sen} \sigma (\beta_1 \cos \theta + \beta_2 \operatorname{sen} \theta) \\ \zeta &= \bar{z} + \rho \cos \sigma Z + \rho \operatorname{sen} \sigma (\gamma_1 \cos \theta + \gamma_2 \operatorname{sen} \theta). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Per ottenere una superficie ortogonale ai circoli bisogna nelle (6) sostituire in luogo di  $\theta$  una soluzione dell'equazione a differenziali totali (m. p., n.° 11):

$$\left. \begin{aligned} d\theta &= \left[ \sqrt{E} \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2} \cos \left( \theta + \frac{\Omega}{2} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial \Omega}{\partial u} + \sqrt{\frac{E}{G}} \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{matrix} \right\} \operatorname{sen} \Omega \right] du - \\ &- \left[ \sqrt{G} \cot \frac{\sigma}{2} \cos \left( \theta - \frac{\Omega}{2} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial \Omega}{\partial v} + \sqrt{\frac{G}{E}} \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{matrix} \right\} \operatorname{sen} \Omega \right] dv, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

il che dà le coordinate  $\xi, \eta, \zeta$  di un punto mobile sulla superficie espressa pei parametri  $u, v$ . E poichè, la congruenza supposta essendo ciclica, la (7) deve essere illimitatamente integrabile, dovrà trovarsi verificata la condizione d'integrabilità, che si risolve nelle due equazioni di condizione per  $\sigma$  (m. p., n.° 11):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial u} &= 2 \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{matrix} \right\} \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial v} &= -2 \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{matrix} \right\} \cot \frac{\sigma}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Queste determinano  $\sigma$  in funzione di  $u, v$  poichè da esse si deduce facilmente l'equazione:

$$\cos^2 \left( \frac{\sigma}{2} \right) \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{matrix} \right\} + \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\sigma}{2} \right) \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{matrix} \right\} = 2 \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{matrix} \right\}, \quad (9)$$

che dà per  $\cos \sigma$  un valore *unico e determinato* tutte le volte che non sono soddisfatte simultaneamente le condizioni:

$$\frac{\partial}{\partial u} \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{matrix} \right\} = \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{matrix} \right\} = 2 \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{matrix} \right\}. \quad \alpha)$$

Affinchè la congruenza sia ciclica è adunque necessario e sufficiente che pel valore di  $\cos \sigma$  dedotto dalla (9) risultino identicamente soddisfatte le (8). Ciò limita la natura delle immagini sferiche delle sviluppabili per una congruenza

ciclica; ma, come si vede, l'essere la congruenza ciclica o no dipende unicamente dalla specie della sua immagine sferica. Quando l'indicata condizione è soddisfatta, il sistema normale di circoli, i cui assi sono i raggi della congruenza, è unico e determinato. Un'eccezione si presenta soltanto quando siano verificate le  $\alpha$ ; è questo il caso delle congruenze cicliche di RIBAUCCOUR (m. p., n.º 11) alle quali corrispondono infiniti sistemi normali di circoli.

7. Non tralasciamo di osservare che dalle formole (8) risulta una soluzione molto semplice del problema: *Determinare le superficie per le quali la congruenza delle normali è ciclica.*

In tale ipotesi si ha:

$$\Omega = \frac{\pi}{2}, \quad \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{Bmatrix} = \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v}, \quad \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{Bmatrix} = \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u},$$

e le (8) diventano:

$$\frac{\partial \log \operatorname{sen} \frac{\sigma}{2}}{\partial u} = \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u}, \quad \frac{\partial \log \cos \frac{\sigma}{2}}{\partial v} = \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v},$$

da cui

$$\sqrt{E} = U \cos \frac{\sigma}{2}, \quad \sqrt{G} = V \operatorname{sen} \frac{\sigma}{2},$$

dove  $U$  è funzione di  $u$  soltanto e  $V$  di  $v$ . Ora cangiando i parametri  $u, v$ , si può fare senz'altro:

$$\sqrt{E} = \cos \frac{\sigma}{2}, \quad \sqrt{G} = \operatorname{sen} \frac{\sigma}{2},$$

e le linee sferiche  $u, v$  sono conseguentemente, come è ben noto, le immagini delle linee di curvatura di una superficie pseudosferica. La risposta all'indicata questione è adunque la seguente: *Le superficie le cui normali formano una congruenza ciclica sono tutte e sole quelle che hanno a comune colle superficie pseudosferiche le immagini sferiche delle linee di curvatura.*

8. Ritorniamo alle nostre equazioni (6) nelle quali intenderemo sostituito per  $\theta$  l'integrale generale della (7), che contiene una costante arbitraria  $w$ . Riguardando  $w$  come una terza variabile, la teoria dei sistemi ciclici di RIBAUCCOUR insegna che le (6) ci danno le coordinate di un punto dello spazio espresse pei parametri  $u, v, w$  di un sistema triplo ortogonale. Qui abbiamo una conferma diretta di questo teorema coi calcoli seguenti. Derivando le (6)

col tener presenti le (3), (5), (7) e (8) troviamo (cfr. m. p., n.° 12):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial u} &= AX + B\alpha_1 + C\alpha_2 \\ \frac{\partial \xi}{\partial v} &= A'X + B'\alpha_1 + C'\alpha_2 \\ \frac{\partial \xi}{\partial w} &= \quad + B''\alpha_1 + C''\alpha_2, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

dove, ponendo:

$$\left. \begin{aligned} L &= \frac{\partial \rho}{\partial u} - \sqrt{E} \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2} \operatorname{sen} \left( \theta + \frac{\Omega}{2} \right) \rho + \frac{2 \cos \sigma}{1 + \cos \sigma} \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{matrix} \right\} \rho \\ M &= \frac{\partial \rho}{\partial v} + \sqrt{G} \operatorname{cot} \frac{\sigma}{2} \operatorname{sen} \left( \theta - \frac{\Omega}{2} \right) \rho - \frac{2 \cos \sigma}{1 - \cos \sigma} \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{matrix} \right\} \rho, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

si ha:

$$\left. \begin{aligned} A &= (\cos \sigma + 1)L, & B &= \cos \theta \operatorname{sen} \sigma L, & C &= \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \sigma L \\ A' &= (\cos \sigma - 1)M, & B' &= \cos \theta \operatorname{sen} \sigma M, & C' &= \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \sigma M \\ & & B'' &= -\rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \sigma \frac{\partial \theta}{\partial w}, & C'' &= \rho \cos \theta \operatorname{sen} \sigma \frac{\partial \theta}{\partial w}. \end{aligned} \right\} \quad (11^*)$$

Ne risulta quindi la formola:

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = H_1^2 du^2 + H_2^2 dv^2 + H_3^2 dw^2, \quad (12)$$

avendo  $H_1, H_2, H_3$  i valori seguenti:

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= 2 \cos \frac{\sigma}{2} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial u} - \sqrt{E} \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2} \operatorname{sen} \left( \theta + \frac{\Omega}{2} \right) \rho + \frac{2 \cos \sigma}{1 + \cos \sigma} \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{matrix} \right\} \rho \right] \\ H_2 &= 2 \operatorname{sen} \frac{\sigma}{2} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial v} + \sqrt{G} \operatorname{cot} \frac{\sigma}{2} \operatorname{sen} \left( \theta - \frac{\Omega}{2} \right) \rho - \frac{2 \cos \sigma}{1 - \cos \sigma} \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{matrix} \right\} \rho \right] \\ H_3 &= \rho \operatorname{sen} \sigma \frac{\partial \theta}{\partial w}; \end{aligned} \right\} \quad (12^*)$$

ciò dà appunto la verifica enunciata.

9. Trattiamo ora dei casi eccezionali esclusi al n.° 4.

Quando anche gli assi dei circoli formino una doppia infinità può darsi che il metodo esposto non sia applicabile e dovrà allora aver luogo uno dei due casi seguenti:

- 1.° Le sviluppabili della congruenza sono indeterminate.
- 2.° Le sviluppabili di una serie sono superficie cilindriche.

Nel 1.° caso gli assi dei circoli sono tutte le rette di un piano (\*) e i corrispondenti sistemi normali di circoli si ottengono considerando una superficie qualunque  $\Sigma$  ed un piano  $\pi$  e conducendo per ogni punto di  $\Sigma$  il circolo normale a  $\Sigma$  ed al piano  $\pi$  (\*\*). Non sarebbe difficile stabilire direttamente le formole relative a questo caso, ma a noi qui basta osservare che i sistemi tripli ciclici di questa specie si ottengono con un'inversione per raggi vettori reciproci da quelli in cui il piano  $\pi$  è sostituito da una sfera. Ora a questi ultimi è ancora applicabile il metodo dei numeri precedenti. Volendo infatti che nel sistema triplo (12) la superficie  $w = w_0$  sia una sfera di raggio  $a$ , basta determinare la soluzione  $\rho$  della (2) dalle equazioni simultanee:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial u} &= \sqrt{E} \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2} \operatorname{sen} \left( \theta_0 + \frac{\Omega}{2} \right) \rho - \frac{2 \cos \sigma}{1 + \cos \sigma} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & \end{pmatrix} \rho - \\ &\quad - \frac{a \sqrt{E}}{1 + \cos \sigma} \cos \left( \theta_0 + \frac{\Omega}{2} \right) \\ \frac{\partial \rho}{\partial v} &= -\sqrt{G} \operatorname{cot} \frac{\sigma}{2} \operatorname{sen} \left( \theta_0 - \frac{\Omega}{2} \right) \rho + \frac{2 \cos \sigma}{1 - \cos \sigma} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & \end{pmatrix} \rho + \\ &\quad + \frac{a \sqrt{G}}{1 - \cos \sigma} \cos \left( \theta_0 - \frac{\Omega}{2} \right), \end{aligned} \right\} (13)$$

dove  $\theta_0$  indica il valore di  $\theta$  per  $w = w_0$ ; queste equazioni soddisfano alla condizione d'illimitata integrabilità e il loro integrale comune  $\rho$  (che si può trovare con quadrature) soddisfa la (2). (Cfr. m. p., n.° 13.)

Nel 2.° caso se, per es., le sviluppabili  $v$  sono cilindriche, nelle corrispondenti superficie  $\Sigma_2$  a linee di curvatura circolari del sistema ciclico gli assi dei circoli sono paralleli e conseguentemente ogni superficie  $\Sigma_2$ , non potendo essere una superficie di rotazione (altrimenti gli assi dei circoli non formerebbero più un sistema  $\infty^2$ ), è necessariamente piana. Ne segue che le superficie ortogonali ai circoli sono superficie modanate (*moulures*) del MONGE.

Veniamo ora ai casi in cui gli assi dei circoli formano soltanto un sistema  $\infty^1$  o si riducono ad una sola retta.

a) Se gli assi dei circoli formano un sistema  $\infty^1$  essi sono le tangenti di una curva  $\Gamma$  nello spazio e nel corrispondente sistema ciclico le superficie

(\*) Il caso che passino per uno stesso punto deve escludersi come quello che non dà luogo a congruenze cicliche.

(\*\*) Vedi DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces*, vol. I, pag. 261.

di una delle serie sono coni rotondi coi vertici sopra  $\Gamma$  e aventi per assi le tangenti di  $\Gamma$ ; le superficie ortogonali ai cerchi sono allora sviluppabili (\*).

b) Quando infine gli assi dei cerchi si riducono ad una sola retta le superficie ortogonali ai cerchi sono evidentemente piani per l'asse comune.

### § 3. I sistemi tripli ortogonali $\Phi$ .

10. Indicheremo, per abbreviare, col nome di *sistemi*  $\Phi$  i sistemi tripli ortogonali che contengono una serie di superficie con un sistema di linee di curvatura piane.

In un tale sistema  $\Phi$  consideriamo una superficie  $\Sigma_0$  ortogonale alle curve piane  $C$  e il sistema dei cerchi osculatori delle curve  $C$  nei punti ove incontrano la  $\Sigma_0$ . Per un teorema di RIBAUCOUR questa congruenza di cerchi ammette una serie di superficie ortogonali e determina quindi un sistema triplo ciclico ortogonale  $\Phi_0$ , che diremo il *sistema ciclico osculatore* del sistema  $\Phi$  lungo la superficie  $\Sigma_0$ . Ora appoggiandosi sul teorema del n.º 2 è facile dimostrare l'altro:

*C) Un sistema  $\Phi$  è individuato quando ne siano assegnati i seguenti elementi: 1.º una superficie  $\Sigma_0$  ortogonale alle curve piane  $C$ ; 2.º una di queste curve  $C_0$ ; 3.º il sistema ciclico osculatore  $\Phi_0$  del sistema  $\Phi$  lungo  $\Sigma_0$ .*

Escludiamo il caso che la superficie  $\Sigma_0$  abbia le linee di curvatura indeterminate cioè supponiamo che  $\Sigma_0$  non sia nè una sfera nè un piano. Sarebbe bensì facile, con opportune osservazioni, dimostrare il teorema anche in questo caso, ma l'esame di questo caso particolare non è necessario per lo studio dei nuovi sistemi  $\Phi$ .

La curva  $C_0$  uscirà da un punto  $P_0$  della superficie  $\Sigma_0$  normalmente a questa. Siano  $u_0, v_0$  le linee di curvatura della  $\Sigma_0$  uscenti da  $P_0$  e indichiamo con  $\Sigma_0^{(1)}, \Sigma_0^{(2)}$  le superficie luogo delle curve  $C$  uscenti rispettivamente dai punti di  $u_0$  e  $v_0$ . Per ciascuna di queste superficie con un sistema di linee  $C$  di curvatura piane ci troviamo precisamente nelle condizioni del teorema A) n.º 2; esse sono quindi pienamente determinate dagli elementi assegnati. Sia ora  $\Sigma^{(1)}$  una qualunque superficie del sistema  $\Phi$  appartenente alla serie di  $\Sigma_0^{(1)}$ ; essa taglierà la superficie  $\Sigma_0$  lungo una linea di curvatura  $u_1$  e la  $\Sigma_0^{(2)}$  lungo una

---

(\*) Vedi il § 16 della mia Nota 2.<sup>a</sup>: *Sui sistemi ciclici*. Giornale di matematiche, tom. 22 e LEVY, Journal de l'École Polytechnique, tom. 26, pag. 164.

linea di curvatura individuata dal punto ove la  $u_1$  interseca la  $v_0$ . Per la superficie  $\Sigma^{(1)}$  ci troviamo dunque nuovamente nelle condizioni del teorema A) n.° 2. Ne segue che essa è determinata senza ambiguità e quindi lo stesso vale del sistema  $\Phi$  c. d. d.

*Osservazione.* — L'unico caso in cui il teorema precedente è in difetto si presenta (n.° 2) quando le superficie  $\Sigma^{(1)}$  (o  $\Sigma^{(2)}$ ) sono tutte piane. Allora la  $\Sigma_0$  è una superficie modanata e i piani dei cerchi coincidono coi piani dei profili.

11. Oggetto delle ricerche seguenti sarà di stabilire che in un sistema  $\Phi$  si possono dare ad arbitrio gli elementi del teorema C). Per arrivare a questa conclusione terremo il metodo seguente. Nelle formole generali (6) n.° 6 relative ad un sistema ciclico qualunque  $\Phi_0$ :

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \bar{x} + \rho \cos \sigma X + \rho \operatorname{sen} \sigma (\alpha_1 \cos \theta + \alpha_2 \operatorname{sen} \theta) \\ \eta &= \bar{y} + \rho \cos \sigma Y + \rho \operatorname{sen} \sigma (\beta_1 \cos \theta + \beta_2 \operatorname{sen} \theta) \\ \zeta &= \bar{z} + \rho \cos \sigma Z + \rho \operatorname{sen} \sigma (\gamma_1 \cos \theta + \gamma_2 \operatorname{sen} \theta), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

lasciando invariate le altre funzioni che vi figurano, supporremo che le quattro

$$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \rho,$$

siano attualmente funzioni, oltre che di  $u, v$ , anche di  $w$  e cercheremo di determinare queste funzioni in guisa che le (1) diano ancora le coordinate  $\xi, \eta, \zeta$  di un punto dello spazio espresse pei parametri  $u, v, w$ . Il successo dimostrerà che i sistemi tripli ortogonali a cui arriviamo sono appunto i più generali sistemi  $\Phi$  cercati.

In primo luogo poniamo le condizioni affinchè le derivate di  $\xi, \eta, \zeta$  prese rapporto ad  $u, v, w$  conservino la stessa forma (10) n.° 8 come nel caso dei sistemi ciclici. Per ciò basta che sussistano le formole:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} &= \left[ \frac{\partial \rho}{\partial u} + 2 \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 2 \end{Bmatrix} \rho \right] X - \rho \frac{\partial X}{\partial u} \\ \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} &= - \left[ \frac{\partial \rho}{\partial v} + 2 \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \rho \right] X + \rho \frac{\partial X}{\partial v} \\ \frac{\partial \bar{x}}{\partial w} &= - \frac{\partial \rho}{\partial w} \left\{ \cos \sigma X + \operatorname{sen} \sigma (\alpha_1 \cos \theta + \alpha_2 \operatorname{sen} \theta) \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

e le analoghe per  $\bar{y}, \bar{z}$ . Ora le condizioni d'integrabilità per queste equazioni

si traducono nelle equazioni seguenti cui deve soddisfare  $\rho$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v} + \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial v} + \left[ \frac{\partial}{\partial u} \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial v} \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 2 \end{Bmatrix} + \cos \Omega \sqrt{E} G \right] \rho = 0 \\ \frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial w} = \left[ \sqrt{E} \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2} \operatorname{sen} \left( \theta + \frac{\Omega}{2} \right) - \frac{2 \cos \tau}{1 + \cos \sigma} \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 2 \end{Bmatrix} \right] \frac{\partial \rho}{\partial w} \\ \frac{\partial^2 \rho}{\partial v \partial w} = \left[ -\sqrt{G} \operatorname{cot} \frac{\sigma}{2} \operatorname{sen} \left( \theta - \frac{\Omega}{2} \right) + \frac{2 \cos \sigma}{1 - \cos \sigma} \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \right] \frac{\partial \rho}{\partial w} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Dimostreremo che queste tre equazioni sono compatibili e determineremo  $\rho$  con quadrature.

12. Se osserviamo che dalla equazione a differenziali totali (7) n.° 6 per  $\theta$  seguono le due:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w} &= -\sqrt{E} \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2} \operatorname{sen} \left( \theta + \frac{\Omega}{2} \right) \frac{\partial \theta}{\partial w} \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w} &= \sqrt{G} \operatorname{cot} \frac{\sigma}{2} \operatorname{sen} \left( \theta - \frac{\Omega}{2} \right) \frac{\partial \theta}{\partial w} \end{aligned} \right\}$$

mentre le (8) n.° 6 possono scriversi:

$$\frac{\partial \log \operatorname{sen} \tau}{\partial u} = \frac{2 \cos \tau}{1 + \cos \sigma} \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 2 \end{Bmatrix}, \quad \frac{\partial \log \operatorname{sen} \sigma}{\partial v} = -\frac{2 \cos \sigma}{1 - \cos \sigma} \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

vediamo che le due ultime (3) sono equivalenti alle seguenti:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \log \frac{\partial \rho}{\partial w} &= -\frac{\partial}{\partial u} \log \left( \operatorname{sen} \sigma \frac{\partial \theta}{\partial w} \right) \\ \frac{\partial}{\partial v} \log \frac{\partial \rho}{\partial w} &= -\frac{\partial}{\partial v} \log \left( \operatorname{sen} \sigma \frac{\partial \theta}{\partial w} \right) \end{aligned} \right\}$$

Da queste segue integrando:

$$\frac{\partial \rho}{\partial w} = \frac{W}{\operatorname{sen} \sigma \frac{\partial \theta}{\partial w}},$$

dove  $W$  è una funzione arbitraria di  $w$  e una nuova integrazione rapporto a  $w$  porge:

$$\rho = \frac{1}{\operatorname{sen} \sigma} \int_0^w \frac{W dw}{\frac{\partial \theta}{\partial w}} + R(u, v), \quad (4)$$

essendo  $R(u, v)$  una funzione di  $u, v$  soltanto. Questa resterà da determinarsi in guisa che anche la 1.<sup>a</sup> delle (3) risulti soddisfatta. Ora si verifica

subito che la funzione

$$\frac{1}{\operatorname{sen} \sigma \frac{\partial \theta}{\partial w}},$$

soddisfa l'equazione ora citata; se si pone adunque per un momento

$$\rho_1 = \frac{1}{\operatorname{sen} \sigma} \int_0^w \frac{W dw}{\frac{\partial \theta}{\partial w}},$$

si avrà:

$$\frac{\partial}{\partial w} \left\{ \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial u \partial v} + \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial \rho_1}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial \rho_1}{\partial v} + \left[ \frac{\partial}{\partial u} \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial v} \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 2 \end{Bmatrix} + \right. \right. \\ \left. \left. + \cos \Omega \sqrt{E} G \right] \rho_1 \right\} = 0,$$

e quindi:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial u \partial v} + \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial \rho_1}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial \rho_1}{\partial v} + \left[ \frac{\partial}{\partial u} \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial v} \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 2 \end{Bmatrix} + \right. \\ \left. + \cos \Omega \sqrt{E} G \right] \rho_1 = F(u, v), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

dove  $F(u, v)$  è indipendente da  $w$ . Ma se facciamo  $w = 0$  il 1.° membro della (5) si annulla e perciò anche  $F(u, v) = 0$ ; dunque: *La soluzione più generale  $\rho$  delle (3) si ottiene dalla (4) ponendovi per  $R(u, v)$  una soluzione qualunque della 1.ª delle (3).*

13. Sostituiamo ora nelle (1) per  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{z}$  i valori che si deducono per quadrature dalle (2) adottando per  $\rho$  il valore (4). È facile vedere che esse definiscono allora un sistema triplo ortogonale  $(u, v, w)$  nel quale le linee  $(w)$  (\*) sono curve piane. Intanto se deriviamo le (1) troviamo nuovamente le (10) n.° 8 e conseguentemente:

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = H_1^2 du^2 + H_2^2 dv^2 + H_3^2 dw^2, \quad (6)$$

dove  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$  hanno i valori:

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= 2 \cos \frac{\sigma}{2} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial u} - \sqrt{E} \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2} \operatorname{sen} \left( \theta + \frac{\Omega}{2} \right) \rho + \frac{2 \cos \sigma}{1 + \cos \sigma} \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 2 \end{Bmatrix} \rho \right] \\ H_2 &= 2 \operatorname{sen} \frac{\sigma}{2} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial v} + \sqrt{G} \operatorname{cot} \frac{\sigma}{2} \operatorname{sen} \left( \theta - \frac{\Omega}{2} \right) \rho - \frac{2 \cos \sigma}{1 - \cos \sigma} \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \rho \right] \\ H_3 &= \rho \operatorname{sen} \sigma \frac{\partial \theta}{\partial w}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

(\*) Cioè quelle lungo le quali varia la sola  $w$ .

Queste dimostrano appunto che l'attuale sistema coordinato  $(u, v, w)$  è un sistema ortogonale. D'altronde formando le derivate di  $H_1, H_2, H_3$  coll'aver riguardo alle (4) n.° 11 ed alle (7) (8) n.° 6 troviamo:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_1}{\partial v} &= - \left[ \sqrt{E} \operatorname{sen} \left( \theta + \frac{\Omega}{2} \right) + \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2} \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix} \right] H_2, & \frac{\partial H_1}{\partial w} &= - \frac{\sqrt{E}}{\cos \frac{\sigma}{2}} \cos \left( \theta + \frac{\Omega}{2} \right) \cdot H_3 \\ \frac{\partial H_2}{\partial u} &= \left[ \sqrt{G} \operatorname{sen} \left( \theta - \frac{\Omega}{2} \right) - \operatorname{cot} \frac{\sigma}{2} \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix} \right] H_1, & \frac{\partial H_2}{\partial w} &= \frac{\sqrt{G}}{\operatorname{sen} \frac{\sigma}{2}} \cos \left( \theta - \frac{\Omega}{2} \right) \cdot H_3 \\ \frac{\partial H_3}{\partial u} &= \operatorname{sen} \frac{\sigma}{2} \frac{\partial \theta}{\partial w} \cdot H_1, & \frac{\partial H_3}{\partial v} &= \cos \frac{\sigma}{2} \frac{\partial \theta}{\partial w} \cdot H_2. \end{aligned} \right\}$$

Per i raggi principali  $r_{ik}$  di curvatura delle superficie del sistema triplo ortogonale, adottando le notazioni del § 129 delle mie *Lezioni di geometria differenziale*, abbiamo quindi:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r_{12}} &= \frac{\sqrt{G} \operatorname{sen} \left( \theta - \frac{\Omega}{2} \right) - \operatorname{cot} \frac{\sigma}{2} \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix}}{H_2}, & \frac{1}{r_{21}} &= - \frac{\sqrt{E} \operatorname{sen} \left( \theta + \frac{\Omega}{2} \right) + \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2} \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix}}{H_1} \\ \frac{1}{r_{13}} &= \frac{1}{2 \cos \frac{\sigma}{2} \rho}, & \frac{1}{r_{31}} &= - \frac{\sqrt{E} \cos \left( \theta + \frac{\Omega}{2} \right)}{\cos \frac{\sigma}{2} \cdot H_1} \\ \frac{1}{r_{23}} &= \frac{1}{2 \operatorname{sen} \frac{\sigma}{2} \rho}, & \frac{1}{r_{32}} &= \frac{\sqrt{G} \cos \left( \theta - \frac{\Omega}{2} \right)}{\operatorname{sen} \frac{\sigma}{2} \cdot H_2}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Ora se indichiamo con  $\frac{1}{\rho_3}, \frac{1}{T_3}$  la 1.<sup>a</sup> e la 2.<sup>a</sup> curvatura rispettivamente delle linee  $(w)$  e con  $\omega_3$  l'angolo sotto cui il loro piano osculatore taglia le superficie  $u = \text{cost.}^e$ , potremo applicare le note formole (ibid.):

$$\frac{1}{\rho_3^2} = \frac{1}{r_{13}^2} + \frac{1}{r_{23}^2}, \quad \operatorname{tg} \omega_3 = \frac{r_{23}}{r_{13}}$$

$$\frac{1}{T_3} = \frac{1}{H_3} \frac{\partial \omega_3}{\partial w},$$

e troveremo:

$$\rho_3 = \rho \operatorname{sen} \sigma, \quad \omega = \frac{\sigma}{2}, \quad \frac{1}{T_3} = 0 \quad (9)$$

Queste dimostrano appunto che le curve  $C$  ortogonali alle superficie  $w = \cos.\sigma$  sono piane e ci danno di più il significato geometrico dell'angolo  $\frac{\sigma}{2}$  pel nostro sistema  $\Phi$ : *L'angolo  $\frac{\sigma}{2}$  misura l'inclinazione dei piani delle curve  $C$  sulle superficie  $u = \cos.t.$*

14. Siamo ora in grado di dimostrare il teorema già accennato al n.° 11:

*D) Per determinare un sistema  $\Phi$  si possono dare ad arbitrio i seguenti elementi: 1.° una superficie  $\Sigma_0$  ortogonale alle curve piane  $C$ ; 2.° una delle curve piane  $C_0$ ; 3.° il sistema ciclico osculatore lungo la superficie  $\Sigma_0$ .*

Consideriamo il sistema ciclico osculatore  $\Phi_0$  assegnato e supponiamo che la congruenza degli assi dei circoli sia nelle condizioni generali del n.° 4, cioè l'immagine sferica delle sue sviluppabili consti di due distinti sistemi di curve.

Applichiamo allora al sistema ciclico  $\Phi_0$  le formole dei n.° 5-8 e sia  $R(u, v)$  la corrispondente soluzione della (2) n.° 5 che occorre sostituire per  $\rho$  nelle (6) n.° 6 per ottenere il sistema  $\Phi_0$ .

Indichiamo con  $w = 0$  l'equazione della superficie  $\Sigma_0$  e siano  $u_0, v_0$  le coordinate curvilinee del punto  $P_0$  ove la curva  $C_0$  incontra (ortogonalmente) la superficie  $\Sigma_0$ . Costruiamo il sistema  $\Phi$  del precedente n.° 12 prendendo:

$$\rho = \frac{1}{\text{sen } \tau} \int_0^w \frac{Wdw}{\frac{\partial \theta}{\partial w}} + R(u, v).$$

Qualunque sia la funzione  $W$  di  $w$ , avendosi, per  $w = 0$ ,  $\rho = R$  e le due prime equazioni (2) n.° 11 coincidendo colle (3) n.° 5, nel corrispondente sistema  $\Phi$  la superficie  $w = 0$  coinciderà colla superficie assegnata  $\Sigma_0$  e il sistema ciclico osculatore lungo  $\Sigma_0$  sarà il sistema dato  $\Phi_0$ . Resta a dimostrarsi che scegliendo convenientemente la funzione  $W$  si può ottenere che la curva  $C'_0$  del sistema  $\Phi$  uscente da  $P_0$  coincida colla curva data  $C_0$ . Per questo osserviamo che una curva piana è perfettamente determinata di forma se è dato il suo raggio  $r$  di curvatura in funzione dell'arco  $s$ . Ora per la nostra curva  $C'_0$  abbiamo per le (9) n.° 13:

$$r = \rho \text{sen } \sigma_0 = \int_0^w \frac{Wdw}{\left(\frac{\partial \theta}{\partial w}\right)_0} + R_0 \text{sen } \sigma_0,$$

dove l'indice 0 apposto qui a

$$\sigma, \frac{\partial \theta}{\partial w}, R,$$

indica che vi si è fatto  $u = u_0$ ,  $v = v_0$ . D'altronde per l'arco  $s$  di  $C'_0$  contato da  $P_0$  abbiamo:

$$s = \int_0^w \rho \operatorname{sen} \sigma_0 \left( \frac{\partial \theta}{\partial w} \right)_0 dw = \int_0^w r \left( \frac{\partial \theta}{\partial w} \right)_0 dw.$$

Disponendo convenientemente della  $W$  in funzione di  $w$  è chiaro che possiamo dare ad  $r$  in funzione di  $s$  una forma prestabilita ad arbitrio. Con ciò è provato, nel caso generale, il nostro teorema e di più vediamo che: *note le linee di curvatura della superficie  $\Sigma_0$ , la determinazione del sistema  $\Phi$  dalle sue caratteristiche richiede soltanto quadrature.*

La dimostrazione data non esclude il caso che la superficie  $\Sigma_0$  sia una sfera, purchè si attribuiscono allora alla  $\Sigma_0$  come linee di curvatura quelle che le competono nel sistema ciclico  $\Phi_0$ . Il caso che la  $\Sigma_0$  sia un piano appartiene al numero seguente.

15. Esaminiamo ora se il teorema *D*) continua a sussistere quando il sistema degli assi dei cerchi di  $\Phi_0$  presenti uno dei casi eccezionali esaminati al n.º 9.

1.º Se le sviluppabili della congruenza formata dagli assi dei cerchi sono indeterminate, fra le superficie ortogonali ai cerchi vi è un piano  $\pi$ . Considerando il piano come limite d'una sfera il cui raggio cresce all'infinito ci persuadiamo facilmente che il teorema vale anche in questo caso.

2.º Le dette sviluppabili siano, in una serie, superficie cilindriche. La superficie  $\Sigma_0$  è allora una superficie modanata i cui piani dei profili coincidono coi piani dei cerchi. È questo l'unico caso (n.º 10) in cui le caratteristiche del teorema *D*) possono lasciar luogo ad indeterminazione.

Ciò accade effettivamente, come dimostrano le considerazioni seguenti. Sia  $\Gamma_0$  il profilo della  $\Sigma_0$  giacente nel piano della curva data  $C_0$ ; tracciamo in questo piano, un sistema di curve  $u$  ortogonali a  $\Gamma_0$  che nei punti di  $\Gamma_0$  abbiano i cerchi osculatori richiesti ed al sistema  $u$ , del resto arbitrario, appartenga la  $C_0$ . Si considerino ora le traiettorie ortogonali  $v$  del sistema  $u$  fra le quali figura la  $\Gamma_0$ ; il doppio sistema di superficie modanate che hanno per profili le curve  $u$ ,  $v$  e la stessa sviluppabile direttrice della  $\Sigma_0$  costituiscono un sistema  $\Phi$  che soddisfa alle condizioni richieste.

3.º Gli assi dei cerchi costituiscano una semplice infinità. Siamo allora nel caso *a*) descritto al n.º 9; la superficie  $\Sigma_0$  è sviluppabile ed il luogo dei cerchi uscenti dai punti di una generatrice di  $\Sigma_0$  è un cono circolare retto. Si consideri allora la curva  $C_0$  uscente da un punto  $P_0$  di  $\Sigma_0$  e la traiettoria

ortogonale  $\Gamma_0$  delle generatrici di  $\Sigma_0$  che passa per  $P_0$ . Da queste due curve come linee di curvatura è individuata (n.º 2) una superficie  $\Sigma_1$  con un sistema di linee di curvatura situate nei piani dei cerchi che escono dai punti di  $\Gamma_0$ . Si vedrà facilmente che le superficie parallele alla  $\Sigma_1$  insieme ai due sistemi di sviluppabili luogo delle loro normali comuni lungo le linee di curvatura danno il sistema  $\Phi$  domandato.

4.º Supponiamo in fine che gli assi dei cerchi si riducano ad una sola retta. La superficie  $\Sigma_0$  è piana e si vede subito che si può allora di più assegnare ad arbitrio il doppio sistema ortogonale di curve da riguardarsi come linee di curvatura.

16. Se ritorniamo ora al metodo dei n.º 11-13 vediamo che esso è applicabile a qualsiasi sistema  $\Phi$ , purchè non accada che per *tutti* i suoi sistemi ciclici osculatori si presenti uno dei casi eccezionali sopra esaminati, oppure che tutte le superficie  $\Sigma$  ortogonali alle curve piane siano sfere (o piane). Così adunque gli unici sistemi  $\Phi$  che sfuggono al nostro metodo generale sono quelli appartenenti alle seguenti quattro classi:

1.ª Sistemi contenenti due serie di superficie modanate.

2.ª Sistemi contenenti una serie di superficie parallele ad una stessa superficie con un sistema di linee di curvatura piane.

3.ª Sistemi  $\Phi$  di cui fa parte una serie di sfere coi centri in linea retta.

4.ª Sistemi  $\Phi$  nei quali i cerchi osculatori di tutte le curve  $C$  nei loro punti d'incontro con una stessa superficie ortogonale  $\Sigma$  sono normali ad un piano.

Le prime tre classi sono ben note e ad esse appartengono, per quanto io so, tutti i sistemi  $\Phi$  fino ad ora conosciuti.

Quanto all'ultima classe ci contenteremo qui d'averne rilevata l'esistenza considerando i sistemi che vi appartengono come casi limiti dei sistemi generali  $\Phi$  (n.º 15, 1.º). In una Nota complementare penso di mostrare come si possano sottomettere anche questi sistemi  $\Phi$  ad un'analisi diretta (\*).

Termineremo questo paragrafo coll'osservare che dal confronto dei teoremi *B*) e *D*) (n.º 3, 14) si rileva facilmente l'altro:

*Ogni superficie S con un sistema di linee di curvatura piane fa parte d'infiniti sistemi  $\Phi$ .*

(\*) Pel caso particolare in cui l'angolo  $\sigma$  sia costante ho frattanto esposto questi risultati complementari in una comunicazione fatta alla R. Accademia dei Lincei: *Sulle superficie le cui sezioni fatte con un sistema di piani paralleli tagliano le linee di curvatura sotto angolo costante.* (Vedi Rendiconti del 4 gennaio 1891.)

E infatti, indicando con  $C$  le linee di curvatura piane della  $S$ , facciamo passare per una linea  $\Gamma$  di curvatura del 2.º sistema una superficie qualunque  $\Sigma_0$  che tagli lungo  $\Gamma$  ortogonalmente la  $S$ . Dalla teoria dei sistemi ciclici risulta che si può sempre descrivere un sistema normale di circoli ortogonale alla  $\Sigma_0$  di cui facciano parte i circoli osculatori delle  $C$  nei loro punti d'incontro colla  $\Gamma$  (\*). Il sistema  $\Phi$  individuato, secondo il teorema  $D$ ) n.º 14, dalla superficie  $\Sigma_0$ , da una qualsiasi delle curve  $C$  e dal sistema normale dei circoli descritto contiene evidentemente la superficie assegnata  $S$ .

#### § 4. Sistemi $\Phi$ pei quali l'angolo $\sigma$ è costante ovvero funzione della sola $u$ .

17. Fra i sistemi tripli ortogonali  $\Phi$  la cui teoria abbiamo sviluppato nel paragrafo precedente prendiamo ora a considerare due classi speciali notevoli.

Come si è visto al n.º 13 l'angolo  $\frac{\sigma}{2}$  dà l'inclinazione dei piani delle curve  $C$  sulle superficie  $u = \text{cost.}^e$ . Se supponiamo che l'angolo  $\sigma$  sia costante le formole (8) n.º 6 dànno:

$$\begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix} = 0 \quad \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix} = 0;$$

dunque: *Le linee sferiche  $u, v$  sono le immagini delle linee assintotiche di una superficie pseudosferica.* In tal caso si può fare

$$E = 1, \quad G = 1,$$

e nell'elemento lineare sferico:

$$ds^2 = du^2 + 2 \cos \Omega du dv + dv^2,$$

---

(\*) La ricerca dei sistemi *normali* di circoli ortogonali ad una data superficie  $\Sigma$  dipende dall'integrazione dell'equazione del CAYLEY:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} = \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} \frac{\partial \Phi}{\partial v},$$

dove:

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2.$$

è l'elemento lineare della  $\Sigma$  riferito alle linee di curvatura. La condizione assegnata equivale analiticamente a dare una relazione lineare da cui siano legate  $\frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v}$  lungo una data linea di curvatura  $u = u_0$ .

la funzione  $\Omega$  di  $u, v$  sarà un integrale qualunque dell'equazione:

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \partial v} + \text{sen } \Omega = 0.$$

La determinazione dei nostri sistemi  $\Phi$  riducendosi ad integrare l'equazione:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v} + \rho \cos \Omega = 0,$$

abbiamo il risultato: *La determinazione dei sistemi  $\Phi$  nei quali i piani delle linee di curvatura  $C$  tagliano sotto il medesimo angolo le superficie di una serie si riduce alla ricerca delle deformazioni infinitesime delle superficie pseudosferiche.*

È importante osservare che per tutte le superficie pseudosferiche note come per quelle che possono dedursene coi noti metodi di trasformazione, il problema delle deformazioni infinitesime si risolve con quadrature e perciò bastano quadrature per ottenere quanti si vogliono sistemi  $\Phi$  della specie in discorso.

18. Le formole generali del precedente paragrafo, applicate agli attuali sistemi  $\Phi$ , conducono ai risultati seguenti.

Sia  $\Omega$  una soluzione qualunque dell'equazione:

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \partial v} + \text{sen } \Omega = 0, \quad (a)$$

$R$  una soluzione dell'altra:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial u \partial v} + R \cos \Omega = 0.$$

Indicando con  $\sigma$  una costante arbitraria, si determini una funzione  $\theta$ , dalle equazioni:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \left( \theta - \frac{\Omega}{2} \right)}{\partial u} &= \text{tg } \frac{\sigma}{2} \cos \left( \theta + \frac{\Omega}{2} \right) \\ \frac{\partial \left( \theta + \frac{\Omega}{2} \right)}{\partial v} &= - \cot \frac{\sigma}{2} \cos \left( \theta - \frac{\Omega}{2} \right), \end{aligned} \right\}$$

che ammettono un integrale comune con una costante arbitraria  $w$ . Riguardando  $w$  come una terza variabile e ponendo:

$$\rho = \frac{1}{\text{sen } \sigma} \int_0^w \frac{W dw}{\frac{\partial \theta}{\partial w}} + R,$$

dove  $W$  è una funzione arbitraria di  $w$ , l'elemento lineare:

$$ds^2 = 4 \cos^2 \left( \frac{\sigma}{2} \right) \left[ \frac{\partial \rho}{\partial u} - \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2} \operatorname{sen} \left( \theta + \frac{\Omega}{2} \right) \rho \right]^2 du^2 + \left. \begin{aligned} &+ 4 \operatorname{sen}^2 \frac{\sigma}{2} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial v} + \operatorname{cot} \frac{\sigma}{2} \operatorname{sen} \left( \theta - \frac{\Omega}{2} \right) \rho \right]^2 dv^2 + \rho^2 \operatorname{sen}^2 \sigma \left( \frac{\partial \theta}{\partial w} \right)^2 dw^2, \end{aligned} \right\} (b)$$

appartiene allo spazio ordinario e il corrispondente sistema triplo ortogonale  $(u, v, w)$  è il più generale sistema  $\Phi$  della specie richiesta esclusi quelli che eventualmente possono appartenere alle classi eccezionali del n.° 16.

Si è qui supposto che la soluzione  $\Omega$  della (a) sia diversa da zero. Però anche se si fa  $\Omega = 0$ , l'elemento lineare (b) appartiene allo spazio ordinario e il corrispondente sistema triplo ortogonale  $(u, v, w)$  è un sistema  $\Phi$  della specie considerata; ma esso rientra, come facilmente si vede, nella 4.ª classe eccezionale del n.° 16. Possiamo aggiungere che per tal modo si ottengono i più generali sistemi  $\Phi$  della specie considerata nel presente paragrafo appartenenti alla detta classe eccezionale. (Veggasi la mia Nota sopra citata nei Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 4 gennaio 1891.)

19. Se in un sistema triplo ortogonale, definito dall'espressione:

$$ds^2 = H_1^2 du^2 + H_2^2 dv^2 + H_3^2 dw^2,$$

del quadrato dell'elemento lineare dello spazio, indichiamo col nome di *linee di livello* sulle superficie  $w = \operatorname{cost.}^e$  le linee di equazione:

$$H_3 = \operatorname{cost.}^e,$$

ed osserviamo che nei nostri sistemi  $\Phi$  l'angolo  $\frac{\sigma}{2}$  misura altresì l'inclinazione delle linee di livello sulle linee di curvatura  $v = \operatorname{cost.}^e$ , abbiamo il risultato:

*Negli attuali sistemi  $\Phi$  le linee di livello delle superficie ortogonali alle curve piane tagliano sotto angolo costante le linee di curvatura.*

È questa una proprietà caratteristica dei nostri sistemi  $\Phi$  cioè sussiste il teorema:

*Se in un sistema triplo ortogonale le linee di livello delle superficie  $\Sigma$  di una delle tre serie tagliano sotto angolo costante le linee di curvatura le superficie  $\Sigma_1, \Sigma_2$  delle altre due serie s'intersecano lungo curve piane, i cui piani tagliano sotto il medesimo angolo le superficie di ciascuna serie  $\Sigma_1$  o  $\Sigma_2$ .*

Per dimostrarlo basta ricorrere alle formole generali già ricordate al n.° 13.

Osserviamo poi che i sistemi ciclici osculatori degli attuali sistemi  $\Phi$  lungo

le superficie  $w = \text{cost.}^e$  appartengono alla classe studiata al § 7 della Memoria precedente e conseguentemente: *Le superficie  $\Sigma$  ortogonali alle curve piane sono divise in parallelogrammi infinitesimi equivalenti da un doppio sistema di traiettorie isogonali delle linee di curvatura.*

Noteremo da ultimo che nei nostri sistemi  $\Phi$  la superficie  $S$  involuppo dei piani delle curve  $C$ , ortogonali alle superficie  $w = \text{cost.}^e$ , è una superficie di Voss (\*), sulla quale cioè esistono due sistemi di linee geodetiche a tangenti coniugate: tali linee della  $S$  sono precisamente le  $u = \text{cost.}^e$   $v = \text{cost.}^e$ . La dimostrazione si ricava facilmente dalle formole di una Nota del sig. GUICHARD (\*\*).

20. Consideriamo in fine un'ulteriore classe di sistemi  $\Phi$  che comprende la classe sopra studiata come caso particolare. Supponiamo che i piani delle curve  $C$  taglino sotto angolo costante le superficie delle serie  $u = \text{cost.}^e$ , ma quest'angolo varii dall'una all'altra superficie della serie. Sarà allora  $\sigma$  funzione della sola  $u$  e per le (8) n.º 6 avremo quindi:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \ 2 \\ 1 \end{array} \right\} = 0 \quad \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \begin{array}{l} 1 \ 2 \\ 2 \end{array} \right\} = 0. \quad (c)$$

Secondo quanto ho dimostrato al § 6 della Memoria precedente, le (c) rappresentano le condizioni necessarie e sufficienti affinchè le linee sferiche  $u, v$  siano le immagini delle assintotiche di una superficie con un sistema di linee assintotiche a torsione costante. D'altronde l'equazione (2) n.º 5 diventa nel nostro caso precisamente quella da cui dipende la ricerca delle deformazioni infinitesime delle accennate superficie. Potendosi nel caso attuale ripetere l'osservazione fatta al n.º 17 riguardo al problema delle deformazioni infinitesime delle superficie pseudosferiche, vediamo che anche in questo caso più generale bastano quadrature per trovare quanti si vogliano sistemi  $\Phi$  della specie corrispondente.

Terminiamo coll'osservare che le formole generali relative ai sistemi tripli ortogonali, già richiamate al n.º 13, applicate ai nostri sistemi  $\Phi$  fanno conoscere come *caratteristica* la seguente loro proprietà:

*Sulle superficie  $w = \text{cost.}^e$  ciascuna linea di curvatura  $u = \text{cost.}^e$  taglia sotto il medesimo angolo tutte le linee di livello.*

Pisa, novembre 1890.

(\*) Sitzungsberichte der K. Akademie zu München. März 1888.

(\*\*) Comptes Rendus de l'Académie. 12 Mai 1890.



---

# Sonja Kovalevsky

(morta il 10 Febbraio 1891).

(Di ANNA CARLOTTA LEFFLER, *Duchessa di Cajanello, a Napoli.*)

Una sera in casa di Giorgio Eliot a Londra erano adunati intorno alla celebre scrittrice gli uomini più insigni d'Inghilterra nelle scienze e nella letteratura. Una sola signora vi si trovava, una studentessa russa giovanissima, che era a Londra di passaggio con suo marito. La russa avea la sembianza piccola ed esile, i modi timidi quasi di scolaria, la testa grande in proporzione con le spalle sottili, la fronte larga circondata di ricchi capelli ricciuti e di color castaneo. Gli occhi d'un verde grigiastro brillavano in modo insolito, e pareano volessero afferrare avidamente ogni parola, che dicevano gli altri. Ella stessa taceva: era senza dubbio la persona più oscura di quella società non avendo ancor fatto nulla che la potesse illustrare. La conversazione si volgeva intorno alla capacità intellettuale della donna: e un signore di una certa età contrastava fortemente la tesi, che la donna potesse mai produrre nulla di originale nel campo scientifico. La piccola russa allora prese d'un tratto la parola, e si diede a difendere caldamente l'attitudine scientifica della donna. Quel signore era parso così stringente nei suoi argomenti che tutti avean taciuto innanzi a lui; ma la giovine studentessa sviluppava una eloquenza così ardente ed ingegnosa, avea degli argomenti così sorprendenti ed originali, che quel signore si tacque alla sua volta con un sorriso gentile, e le lasciò l'ultima parola. Giorgio Eliot allora le domandò, se sapesse chi avea convinto. — Herbert Spencer.

---

Nell'autunno del 1870 entrò un giorno in casa di Weierstrass a Berlino una giovane russa dall'aspetto timido di una scolarotta, e gli domandò umil-

*Annali di Matematica*, tomo XIX.

26

mente se poteva darle lezioni private di matematica, poichè l'Università della capitale di Germania era — ed è tuttora — chiusa alle donne. Weierstrass pensava come Herbert Spencer: la donna non diventerà mai altro che dilettante nella scienza; e non voleva perdere il tempo ad istruire dei dilettanti. Ma durante la conversazione scoperse in quella giovinetta una tale ricchezza di idee, una sì facile intuizione sulle più ardue quistioni della scienza, che divenne una gioia per il gran matematico di dare istruzione a lei, che sarebbe stata più tardi la prediletta fra i suoi discepoli.

---

Sonja Vassilievna Corvin Krukovsky, nacque a Mosca il 15 (3 del calendario russo) Gennaio 1850. Suo padre generale di artiglieria, maresciallo di nobiltà nel governo di Viteb, apparteneva alla vecchia aristocrazia del paese. Sua madre era nipote del noto astronomo Schubert. La famiglia Corvin discendeva direttamente dal re Mattias Corvin, l'eroe d'Ungheria.

Il vecchio castello feudale nel governo di Viteb, dove Sonja cresceva, era lontanissimo da ogni città, e non aveva altre comunicazioni con il mondo esterno che per mezzo di pessime strade, in certe stagioni dell'anno addirittura impraticabili, che traversavano steppe immense. Intorno al paterno castello, Palibino, urlavano i lupi le serate d'inverno, e l'orso si aggirava nei boschi selvaggi, che formavano intorno un parco naturale. Qui la fanciulla immaginosa sognava non solo il gran mondo sconosciuto di là da quei boschi, ma anche altri spazi ignoti con altri orizzonti, che già la sua mente precoce indovinava.

Era nel castello una camera le cui pareti erano rimaste coperte solamente di vecchi giornali, fra' quali per caso si trovavano alcuni fogli litografati delle lezioni di Ostrogradski sul calcolo differenziale e integrale, che il padre avea studiato nella sua gioventù. Quei fogli con le loro formole strane attiravano l'attenzione della piccola Sonja. Essa restava dell'ore intere innanzi al muro misterioso e cercava di trovare il senso di certe frasi, o di capire in che ordine i fogli dovevano seguire l'uno all'altro. In questo modo l'apparenza esteriore di talune formole si fissava nella sua memoria, e il testo stesso lasciava un'orma profonda nel suo cervello. Quando poi essa prendeva le sue prime lezioni di calcolo differenziale il suo professore si meravigliava come subito sapesse appropriarsi le idee ed i metodi relativi a quella disciplina.

Avea anche studiato da sola un testo di Fisica rinvenuto fra i libri pa-

terni. L'autore era un amico del padre, e mentre questi una volta faceva una visita a Palibino, Sonja gli disse, che avea studiato il suo libro. Le rispose ridendo, che ciò era impossibile per lei, che non conosceva la trigonometria. Apparve allora nel seguito della conversazione che la fanciulla basandosi sulle conoscenze che già possedeva, avea costruite da sè per uso proprio le formole fondamentali della trigonometria. Meravigliato di tanta prova di intelligenza l'amico indusse allora il padre a lasciarle prendere lezioni, ad onta delle idee aristocratiche e conservatrici di questo intorno alla educazione conveniente per una signorina di alta condizione. Il padre che considerava questa passione per lo studio come una semplice velleità od un capriccio, avea consentito di buon grado; ma quando Sonja a quindici anni gli domandò sul serio il permesso di andare all'estero per studiare in una Università tedesca, avvenne una scena terribile nella famiglia. Il padre non avrebbe potuto prendersela più a cuore, se la figlia avesse commesso un fallo.

Per ben capire ciò, bisogna sapere come in quel tempo in Russia una fanciulla che studiava era considerata quasi una nihilista. E c'era veramente un entusiasmo politico e patriottico nella smania per gli studi, che avea invaso tutta la nuova generazione: c'era un desiderio di spingere innanzi verso la luce e la libertà la patria infelice tanto amata da tutti i Russi. Quell'entusiasmo avea prodotto un fenomeno abbastanza curioso: i matrimoni fittizii, che erano venuti in moda, e che aveano per scopo di liberare le fanciulle dall'autorità paterna per dar loro l'opportunità di studiare all'estero. E così Sonja appena uscita fuori d'infanzia si sposava con Vladimir Kovalevsky, legalmente sì, ma con la convenzione fra loro di non essere altro che compagni di studio. Insieme con sua sorella e un'amica andava allora in Germania dove le tre fanciulle studiavano in una Università e Kovalevsky in un'altra. Heidelberg era allora la sola Università tedesca aperta alle donne; ora tutte sono chiuse, per modo che quando pochi anni addietro Sonja Kovalevsky già professore a Stoccolma voleva ascoltare una lezione nella Università di Berlino, gliene fu dapprima rifiutato il permesso, che ottenne poi unicamente per l'intervento diretto del Ministro dei Culti come un gran favore personale.

Il prof. Koenigsberger fu il suo primo maestro. Dopo aver seguito per due anni il suo corso andò a Berlino, come già si è detto, alla fine del 1870 e prese con Weierstrass, durante quattro anni, lezioni private, che furono spesso interrotte da lunghe visite alla sua famiglia in Russia e da altri viaggi. Una volta fu anche chiamata a Parigi da sua sorella, e vi si trovò durante il bombardamento e la Comune.

L'anno 1874 senza esami orali, ma presentando tre tesi scritte fu laureata alla Università di Gottinga. Nell'una delle sue tesi (\*) che conta fra' lavori più importanti che sieno stati mai scritti intorno alla teoria delle equazioni differenziali parziali, dopo aver esposte le lezioni di Weierstrass sulla esistenza degli integrali di un dato sistema di equazioni differenziali ordinarie, estendendo lo stesso metodo, giunge a provare l'esistenza degli integrali di date equazioni differenziali parziali. Dimostra che in generale le funzioni primitive possono esprimersi come serie di potenze delle variabili indipendenti tutte convergenti in un determinato cerchio, e discute accuratamente i casi in cui queste serie sono divergenti, sicchè sostituite nelle equazioni differenziali date le risolvono solo formalmente.

Un'altra delle tesi presentate per ottener la laurea fu stampata dieci anni dopo negli *Acta Mathematica* (\*\*), senza alcuna modificazione. In essa l'autrice espone e studia alcuni teoremi di Weierstrass sulla riduzione di una certa classe di integrali abéliani di terza specie ad integrali ellittici, profittando anche delle ricerche del prof. Königsberger (\*\*\*), e ricavandone poscia diversi corollari. I medesimi teoremi furono poi estesi dal Poincarè (\*\*\*\*), ed il Picard (\*\*\*\*\*) pervenne indipendentemente ad analoghi risultati.

Della terza tesi di laurea intorno alla forma dell'anello di Saturno parlerò in seguito.

Finiti gli studi, insieme con suo marito, il quale si era contemporaneamente laureato, fece ritorno in Russia, dove questi fu nominato professore di Paleontologia nella Università di Mosca.

Solamente allora incominciarono a vivere di una vera vita matrimoniale: Sonja divenne madre e per alcuni anni mise da canto addirittura la scienza. Era nella sua indole di dedicarsi con una intensità passionata a ciò che per il momento considerava come essenziale nella vita. Durante questi primi anni fu esclusivamente madre e moglie: con la capacità straordinaria che aveva di sempre entrare a prender parte negli interessi di coloro co' quali

(\*) *Zur Theorie der partiellen Differenzialgleichungen.* Journal für die reine und angewandte Mathematik, tom. 80.

(\*\*) *Ueber die Reduction einer bestimmten Klasse Abel'scher Integrale 3.ten Ranges auf elliptische Integrale.* Acta Mathematica, tom. 4, 1884.

(\*\*\*) Borchardt-Journal, Bd 67.

(\*\*\*\*) *Sur la réduction des intégrales abéliennes.* S. M. F., Bull., n.º 12.

(\*\*\*\*\*) *Remarque sur la réduction des intégrales abéliennes aux intégrales elliptiques.* S. M. F., Bull., n.º 12.

viveva, essa studiava ora la scienza di suo marito con tale assiduità, che per qualche tempo, mentre egli era occupato in affari, scrisse tutte le sue lezioni. Ma vivendo anche in un ambiente letterario, il suo gusto per la letteratura insino allora latente, si destò a poco a poco, manifestandosi con la produzione di un romanzo intitolato: *Der Privatdocent*, rappresentante la vita universitaria in Germania. Lo pubblicò anonimamente come appendice in un giornale russo.

Ma poco durava il tempo calmo e felice, che appena era incominciato per lei. Suo marito ch'era pieno di idee grandiose e di vedute geniali, era anche disgraziatamente fantastico senza misura, ed era caduto sotto l'influenza di un avventuriere, che lo attirava in speculazioni pericolose sulle miniere di petrolio e su altre intraprese industriali, nelle quali si metteva in gioco il patrimonio di Sonja. Benchè secondo la legge russa avrebbe potuto sottrarre al marito il dritto di disporne, pure essa non fece altro che procurare di opporre la sua influenza a quella del fatale consigliere. Non riuscì, e colpita nel cuore di vedere così andare in rovina, non tanto il suo patrimonio, quanto la felicità della sua vita, abbandonò di nuovo casa e patria per riprendere all'estero la solitaria vita di studio. Lasciata la bambina in Russia alle cure di una amica, ella stessa viveva a Parigi in una camera da studente nel *quartier Latin*, quando le giunse la notizia fulminante, che il marito non avea avuto il coraggio di sopravvivere alla disgrazia attirata sui suoi, ed alla disperazione di avere, benchè senza colpa, macchiato il suo nome.

Sola, dilaniata dal dolore, la povera Sonja cresciuta fra gli agi e nella totale noncuranza delle questioni economiche doveva ora provvedere a crearsi i mezzi di che vivere insieme con la sua figliuola. Dalla sua propria patria non le si offerse nulla di meglio che un posto di maestra di aritmetica nelle classi inferiori di una scuola femminile.

Da poco Stoccolma aveva aperta la sua Università fondata con mezzi privati. Mittag-Leffler fu fra i tre professori primi nominati. Entusiasta per quel nuovo istituto della sua città nativa, caldeggiò l'idea di dar l'onore al giovane Ateneo di legare a sè l'unica donna, che avesse mostrato tanto ingegno scientifico. Dietro suo invito ella venne a Stoccolma nell'autunno del 1883, ed incominciò un corso libero in lingua tedesca sulla teoria delle equazioni differenziali parziali. Nel frattempo riuscì al Mittag-Leffler di raccogliere da mecenati privati i fondi per creare apposta per lei una cattedra di matematiche superiori.

Nella commemorazione che il prof. Mittag-Leffler, come rettore dell'Uni-

versità di Stoccolma, ha fatto della defunta, così si esprime a proposito dell'influenza ch'ella ha esercitato sopra i suoi scolari:

« Essa venne a noi dal centro della scienza moderna piena di fede e di entusiasmo per l'idea del suo gran maestro di Berlino, il vecchio venerando che ora ha dovuto sopravvivere alla sua alunna prediletta. I suoi lavori, che tutti appartenevano allo stesso ordine di idee, hanno con nuove scoperte mostrata la forza del sistema di Weierstrass. Noi sappiamo con quale zelo comunicativo ella spiegava quelle idee, quale importanza essa dava loro per la risoluzione dei più difficili problemi. E quanto volentieri ella faceva parte della ricchezza delle sue conoscenze, delle divinazioni geniali della sua mente ad ogni scolaro che avea la forza e la volontà di riceverle! La sua personalità semplice, libera di ogni affettazione scientifica, la premura con la quale cercava di comprendere ciò che è più intimo e individuale in ciascun uomo, induceva tutti a confessare a lei quasi al primo incontro i propri pensieri e sentimenti più nascosti, i dubbi e le speranze del ricercatore, le esitazioni dinanzi a' nuovi sistemi, i dolori, le illusioni perdute e i sogni di felicità. Con tali qualità ella entrava nell'insegnamento, e su queste basi si fondavano le sue relazioni con gli scolari. »

Durante i primi anni del suo soggiorno a Stoccolma si occupò nei suoi lavori scientifici della teoria della propagazione della luce attraverso i cristalli. Su tale argomento pubblicò una nota nei *Comptes Rendus* (\*), tradotta poi in lingua svedese (\*\*), dove comunicava i risultati ottenuti senza dimostrazioni: queste pubblicò in seguito in una Memoria più estesa (\*\*\*)

Lamè nella sua teoria della elasticità ha dati alcuni integrali particolari delle equazioni differenziali relative alle vibrazioni trasversali della luce in un mezzo cristallino, e che rappresentano ondulazioni analoghe alle ondulazioni sferiche, che si propagano in un ambiente isotropo. Le ondulazioni rappresentate da questi integrali particolari divengono indeterminate in ogni punto degli assi ottici, e nel centro delle vibrazioni diventano infinite: sono perciò fisicamente impossibili. Da ciò fu indotta la Kovalevsky a ricercare gli integrali generali di quelle equazioni. A tale risultato ella pervenne basandosi

(\*) *Sur la propagation de la lumière dans un milieu cristallisé.* C. R., tom. 98.

(\*\*) *Om Ljusets fortplantning uti ett kristalliniskt medium.* Oversigt af svenska vetenskapsakademiens förhandlingar, tom. 41.

(\*\*\*) *Ueber die Brechung des Lichtes in cristallinischen Mitteln.* Acta Mathematica, tom. 6.

sopra un metodo di integrazione trovato dal Weierstrass, che allora era inedito, e che ella espose nelle prime pagine del suo lavoro.

In seguito riprendendo il filo interrotto di alcune sue precedenti investigazioni menò a termine il suo lavoro intorno all'anello di Saturno (\*). Ivi si propose di trovarne la forma, supponendo che abbian luogo le leggi di Laplace, che l'anello sia omogeneo, che la sua sezione meridiana posseda un asse di simmetria giacente nel piano dell'equatore, e poco differisca da una ellissi, che la massa del corpo centrale sia condensata nel centro dell'anello, e che l'anello ruoti con una velocità costante. Dimostra che il problema può risolversi con qual si voglia approssimazione mediante l'uso di alcune serie rapidamente convergenti.

Intanto nel 1887 l'Accademia di Francia avea messo a concorso per il premio Bordin il tema seguente:

*Perfezionare in qualche punto importante la teoria del movimento di un corpo rigido.*

La Kovalevsky, già intravedendo il modo come avrebbe potuto svolgere quel tema, risolse di concorrere. Ma col fatalismo russo, che la dominava, lasciò trascorrere un anno quasi dal tempo assegnato senza neppure incominciare il lavoro. Si occupava intanto, durante quel tempo prezioso, a comporre due drammi insieme con la scrittrice di questo cenno, le cui occupazioni letterarie l'avevano attirata, come sempre risentiva l'influenza dell'atmosfera intellettuale circondante i suoi intimi. Questi due drammi paralleli furono scritti sopra questa idea, che l'uomo benchè *deterministicamente* predestinato, pure possa in certi momenti critici dare uno od un altro indirizzo alla sua vita.

In questi drammi si tratta della scelta: fedeltà verso sè stessi e verso l'essenziale della vita, o abbandono dell'essenziale per andare a caccia del superficiale e del successo esteriore. Perciò il lavoro fu intitolato: *La lotta per la felicità*. Durante questa collaborazione diverse volte espressi la mia inquietudine, perchè ella perdeva in questo modo il tempo utile a finire il lavoro del concorso; mi rispose sempre: Non fa nulla, io so che sarò pronta in tempo. Eppure ignorava allora nonchè la soluzione del problema che s'era proposto, anche la strada per trovarne la soluzione. Aveva solo un presentimento interiore che l'avrebbe trovata.

Nella primavera 1888 incominciò sul serio ad occuparsi di quel lavoro,

---

(\*) *Zusätze und Bemerkungen zu Laplace's Untersuchung über die Gestalt der Saturnsringe*. *Astronomische Nachrichten*, tom. 111.

privandosi del sonno per molte notti di seguito, e la vigilia di Natale dello stesso anno il premio le fu dato in una solenne tornata dell'Accademia di Francia (\*). La risoluzione del problema parve sì notevole all'Accademia che prima di aprire la scheda contenente il nome dell'autore, aveva deliberato di aumentare il premio da tre a cinquemila lire.

Avea data la soluzione completa di un nuovo caso del problema del movimento di un corpo rigido sollecitato dalla gravità ed avente un punto fisso, ed avea con ciò annesso il proprio nome ai grandi nomi di Lagrange, Poisson, Jacobi, che avevano risolti altri due casi del medesimo problema. Intorno a questo argomento oltre la Memoria presentata all'Accademia di Francia (\*\*), ne scrisse altre due, una contenente un riassunto della precedente (\*\*\*), l'altra la discussione di una proprietà delle equazioni differenziali relative alla rotazione di un corpo rigido intorno un punto fisso (\*\*\*\*).

Nello stesso anno (1890) pubblicò ancora sopra un teorema di Bruns alcune osservazioni che avea avuto occasione di fare nelle conferenze che ella teneva nel seminario di Matematica annesso all'Università di Stoccolma (\*\*\*\*\*).

Dopo le fatiche che avea sopportate la Kovalevsky per menare a termine questi lavori parve che la sua inventiva scientifica fosse per qualche tempo esaurita. Tornò di nuovo alla letteratura, e questa volta più seriamente che mai. Già da più anni anelava uscir fuori dal mondo solitario della scienza ed entrare nei campi letterari più fertili di gioie personali. Il bisogno di simpatia e di vincoli intellettuali con gli altri, era così intenso in lei che quasi non potea lavorare senza avere qualcuno fra i suoi intimi che vivesse nella stessa sfera di pensieri. Non avea nulla della noncuranza aristocratica di un Gauss, d'essere apprezzata ed onorata dai suoi contemporanei e da' suoi amici personali. Avea anzi un desiderio ardente di essere corrisposta con simpatia e con stima ad ogni passo che dava, ad ogni pensiero che in lei si destava. Non era per altro vanità degli onori esteriori, ne avea avuti abbastanza nella

(\*) Cfr. Comptes Rendus, tom. 107, pag. 1042.

(\*\*) *Mémoire sur un cas particulier du problème de la rotation d'un corps pesant autour d'un point fixe, où l'intégration s'effectue à l'aide des fonctions ultracelliptiques du temps.* Recueil des Savants étrangers, tom. 30.

(\*\*\*) *Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe.* Acta Mathematica, tom. 12.

(\*\*\*\*) *Sur une propriété du système d'équations différentielles qui définit la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe.* Acta Mathematica, tom. 14.

(\*\*\*\*\*) *Sur un théorème de Bruns.* Acta Mathematica, tom. 15.

sua vita per sentirne il vacuo, ed era una natura troppo profonda per esserne soddisfatta. Ma era il bisogno di un'indole essenzialmente femminile di farsi amare e di provocare non solamente ammirazione, ma anche gioia coi propri lavori ad un cerchio di persone il più esteso possibile. Perciò la letteratura le parve più gradita a misura che avanzava negli anni, perchè la solitudine le pesava più e più, e la brama di simpatia diventava sì acuta in lei da farla intensamente soffrire.

Ma non soltanto domandava e desiderava simpatia, avea anche una capacità unica di darne agli altri. Era nella sua conversazione così spiritosa ed attraente, come solo una russa può essere; ma benchè parlasse molto e volentieri, era nello stesso tempo un'eccellente ascoltatrice, che penetrava coi suoi occhi miopi, ma lucenti, negli occhi dell'interlocutore, e con piccole esclamazioni impazienti gli tirava fuori le parole. Se approvava ciò che l'altro diceva, se trovava un giudizio giusto, o un'idea originale, la raccoglieva con giubilo. Se invece disapprovava, allora criticava con espressioni taglienti, mordenti e spesso paradossali. Non manifestava mai disdegno, nè opponeva pregiudizi contro arditi pensieri. Avea un modo di vedere larghissimo su tutte le quistioni della vita, e una mente sì pieghevole, che mai non si arrestava ad un sistema di idee una volta acquistate, ma sempre ne accoglieva di nuove, e spingevasi innanzi a nuove conquiste. Nei suoi modi era sempre una gran dama, e al tempo istesso sempre semplice e naturale. Detestava ogni esteriore apparenza di emancipazione; e si sentiva molto più adulata, se alcuno le facesse complimenti sul suo abbigliamento o sulla sua avvenenza, che se l'ammirasse per la sua dottrina. Nei suoi più giovani anni era veramente bella, ma ultimamente le lunghe veglie negli studi ed i tanti sofferti dolori, aveano lasciate tracce non lievi sul suo viso fine e regolare.

Nel romanzo: *Le sorelle Rajevsky* (\*) il primo che pubblicasse col proprio nome racconta la storia della sua infanzia con colori così vivi e veri, con tanta finezza di osservazioni e di sentimenti, che ottenne subito il successo che tanto desiderava, di essere cioè personalmente capita, provocando l'altrui simpatia. In Russia, in Svezia-Norvegia e in Danimarca la pubblicazione di quel romanzo fu salutato come un avvenimento letterario e diceasi che un nuovo Tolstoi era nato alla Russia.

Questa entrata felice nella carriera letteraria stimolava la sua fantasia

---

(\*) Pubblicato in russo col titolo: *Ricordi della fanciullezza* nel *Vestnik Evropy*, ed in svedese col titolo: *Systrarna Rajevsky* in un volume a parte.

fertile, che era inoltre aiutata da una esperienza della vita esteriore ed interiore eccezionalmente ricca, e quattro o cinque nuovi lavori letterari germinavano contemporaneamente in lei. Ancora bambina, ma già acuta osservatrice, avea assistito alla grande crisi della liberazione degli schiavi in Russia. Ha raccontato in un romanzo (\*) l'impressione che quella crisi produceva nelle famiglie nobili dei proprietari di campagna. La figlia di uno di questi proprietari diventa poi nihilista e va prigioniera in Siberia. Questo lavoro l'autrice poco innanzi la sua morte leggeva in un circolo scientifico di Stoccolma, e produceva grande entusiasmo. Fortunatamente se ne trova il manoscritto compiuto, e verrà presto alla luce.

Di un altro gran romanzo: *Vae Victis*, aveva pubblicato un solo capitolo (\*\*). Il concetto fondamentale di questo lavoro rivela meglio d'ogni altro l'indole di lei.

Poche donne sono state così osservate, festeggiare, adulate, colmate di onori come lei. E nondimeno voleva in questo romanzo, che sarebbe diventata la vera storia interiore della sua vita, cantare la lode dei vinti, perchè essa stessa sentivasi, malgrado il plauso che la circondava, come una vinta nella *lotta per la felicità*, la vera felicità che per lei consisteva esclusivamente nell'amore, nella vita in due, che sola in un paese straniero amaramente rimpiangeva.

Secondo ciò che il prof. Mittag-Leffler riferisce, ella non aveva pensato di abbandonare per sempre gli studi scientifici. Nell'ultima conversazione che ebbe con lui, il giorno prima della sua breve malattia, gli avea comunicato il disegno di un nuovo lavoro matematico, che credea sarebbe diventato il più importante che avesse mai scritto. Secondo il suo solito modo, ritenendosi dotata di una *seconda vista* sulle cose intellettuali, disse di avere indovinata la soluzione di certi enigmi profondi, aprendo così una nuova strada nei campi del pensiero.

Essa era dotata in alto grado di quella *seconda vista* anche quando si trattava degli avvenimenti della vita. Sapeva dapprima tutto quanto dovesse accaderle d'importante, e mentre ella l'ultimo capo d'anno, insieme con alcuni amici russi, visitava il camposanto di Genova, un'ombra subitanea le oscurò il volto, e disse: uno di noi morirà in quest'anno. Nei primi di feb-

---

(\*) *La famiglia Vorontsoff*. Due capitoli furono pubblicati dall'autrice sotto il pseudonimo TANJA RAJEVSKY nel giornale di Stoccolma: *Nordisk Tidskrift*.

(\*\*) Nornan del 1889.

brajo tornò verso il Nord, dopo aver passati i due mesi di vacanza sul Mediterraneo. Fece un viaggio penosissimo pel freddo straordinario, e data una sola lezione all'Università, fu assalita da una polmonite violenta, che in tre giorni distrusse quella vita sì intensa e rigogliosa.

Raramente una morte ha provocato un compianto così universale. Telegrammi affluivano all'Università di Stoccolma da tutti i paesi di Europa, dalle più illustri Accademie fino alle maestrine di campagna in Russia e le bambine delle scuole domenicali di Tiflis e di Charkow. Il corteo funebre fu seguito da tre carrozze piene di fiori, che furono posate sulla neve che ricopriva la sua tomba nel cimitero di Stoccolma. Fu una pompa meridionale in mezzo al gelo nordico che l'aveva uccisa. Ma tutto quello splendore di fiori di che venne circondata in vita ed in morte, ella avrebbe volentieri scambiato con un piccolo modesto fiore dei prati boreali che mancava in quella pompa esotica; si chiama: *non mi dimenticare*, ed è il simbolo del dono intero d'un cuore.

Napoli, 10 maggio 1891.

---



# Sulla determinazione delle linee di cui il rapporto della curvatura alla torsione è una funzione nota dell'arco.

(Di GEMINIANO PIRONDINI, a Parma.)

---

È noto che BERTRAND ha dimostrato, per primo, che ogni linea in cui il rapporto della curvatura alla torsione è una costante, è un'elica cilindrica; siccome poi, reciprocamente, in ogni elica cilindrica è costante il rapporto predetto, si può dire che la relazione:

$$\frac{\rho}{r} = \text{costante},$$

(nella quale  $\rho$  indica il raggio di curvatura ed  $r$  quello di torsione di una linea a doppia curvatura) è caratteristica delle eliche cilindriche.

In questa nota, generalizzando il teorema di BERTRAND, tratto della determinazione delle curve in cui il rapporto  $\frac{\rho}{r}$  è una funzione nota dell'arco, faccio parecchie applicazioni ai casi più notevoli e determino anche completamente alcune famiglie di linee definite da speciali relazioni che legano fra loro il raggio di curvatura e quello di torsione.

## § 1.

Sia  $L$  una geodetica della sviluppabile  $\Sigma$  avente la curva  $L_0$  per spigolo di regresso; siano  $s, \rho, r, i$  l'arco, il raggio di curvatura, quello di torsione di  $L$  e l'inclinazione di questa linea sulle generatrici rettilinee di  $\Sigma$ .

Se si sviluppa  $\Sigma$  sopra un piano, la linea  $L_0$  diviene una curva piana  $\Lambda_0$  ed  $L$  una retta; se si prende questa retta per asse delle  $x$  e la perpendicolare ad essa nell'origine degli archi  $s$  per asse delle  $y$ , si ha:

$$s = \frac{x dy - y dx}{dy}.$$

D'altronde, ricordando che per ogni geodetica di una sviluppabile ha luogo la relazione  $\frac{\rho}{r} = \cot i$ ; si ha pure:

$$\frac{\rho}{r} = \frac{dx}{dy}.$$

Abbiamo dunque il teorema: « Se, relativamente a una linea a doppia curvatura  $L$ , il rapporto  $\frac{\rho}{r}$  è una funzione data  $\varphi(s)$  dell'arco  $s$ , la linea piana  $\Lambda_0$  alla quale si riduce lo spigolo di regresso  $L_0$  della sviluppabile rettificatrice di  $L$ , quando tale superficie si sviluppa in un piano, verifica l'equazione differenziale:

$$\frac{dx}{dy} = \varphi\left(\frac{x dy - y dx}{dy}\right). \quad (1)$$

Supponiamo reciprocamente che la linea piana  $\Lambda_0$  sia rappresentata dall'equazione:

$$y = \psi(x),$$

e che il piano della linea sia ridotto a una sviluppabile, mediante una serie di flessioni infinitesime attorno alle tangenti di  $\Lambda_0$ ; sia  $L$  la linea a doppia curvatura alla quale si riduce l'asse delle  $x$ .

Si ha:

$$s = \frac{x dy - y dx}{dy} = x - \frac{\psi(x)}{\psi'(x)}; \quad \frac{r}{\rho} = \frac{dy}{dx} = \psi'(x); \quad (2)$$

e se si indica con  $x = f\left(\frac{\rho}{r}\right)$  il valore di  $x$  che si ottiene risolvendo la seconda equazione (2) rapporto ad  $x$ , si deduce l'eguaglianza:

$$s = f\left(\frac{\rho}{r}\right) - \frac{\rho}{r} \psi \left[ f\left(\frac{\rho}{r}\right) \right]. \quad (3)$$

Dunque: « Se il piano di una linea  $\Lambda_0$ , rappresentata dall'equazione  $y = \psi(x)$ , è ridotto a una superficie sviluppabile mediante una serie di flessioni infini-

tesime attorno alle tangenti di  $\Lambda_0$ , la linea  $L$  alla quale si riduce l'asse delle  $x$  verifica la relazione (3), essendo  $f\left(\frac{\rho}{r}\right)$  il valore di  $x$  che si ricava dalla seconda equazione (2)  $n$ .

## § 2.

Quantunque, nella questione che ci occupa, si possa trarre partito di quanto sarà dimostrato al § 3, le proprietà esposte sono però sufficienti per la risoluzione del problema proposto.

Si deve notare, a questo riguardo, che se l'equazione integrale generale di (1) rappresenta una serie di rette, nessuna di queste può essere la linea piana  $\Lambda_0$ ; la linea cercata è ordinariamente l'involuppo di queste rette e la sua equazione è l'integrale singolare di (1).

*Esempio 1.<sup>o</sup>* — Se:

$$\frac{\rho}{r} = \frac{s}{a} + b,$$

essendo  $a$  e  $b$  costanti, si deduce dall'equazione (1):

$$(a + y)dx = (ab + x)dy,$$

da cui integrando:

$$ab + x = c(a + y),$$

con  $c$  costante.

Qualunque sia il valore di  $c$ , l'equazione scritta rappresenta una retta passante per il punto fisso di cui le coordinate sono:

$$x = -ba, \quad y = -a.$$

La linea piana  $\Lambda_0$  si riduce dunque a un punto e la sviluppabile  $\Sigma$  a un cono. La proprietà reciproca non può dimostrarsi applicando il secondo dei teoremi precedenti; ma è molto facile provare direttamente che per ogni geodetica di un cono si ha:

$$\cotg i = \frac{s}{a} + b,$$

da cui si deduce appunto:

$$\frac{\rho}{r} = \frac{s}{a} + b.$$

Dunque: « La relazione  $\frac{\rho}{r} = \frac{s}{a} + b$  caratterizza completamente le geodetiche dei coni  $n$ .

Si riconosce facilmente che in questa eguaglianza la costante  $a$  rappresenta la minima distanza del vertice del cono dalla geodetica.

Se si suppone  $a = \infty$ , la superficie degenera in un cilindro e l'eguaglianza precedente si riduce all'altra:

$$\frac{\rho}{r} = \text{costante},$$

esprime il noto teorema di BERTRAND.

*Esempio 2.<sup>o</sup>* — Consideriamo, più generalmente, le linee nelle quali:

$$\left(\frac{\rho}{r}\right)^m = \frac{a}{s},$$

essendo  $a$  e  $m$  due costanti.

L'equazione differenziale (1) diviene:

$$y = x \frac{dy}{dx} - a \left(\frac{dy}{dx}\right)^{m+1},$$

di cui l'integrale generale è:

$$y = cx - ac^{m+1},$$

(con  $c$  costante arbitraria), mentre che l'integrale singolare è:

$$a \left(\frac{y}{m}\right)^m = \left(\frac{x}{m+1}\right)^{m+1}.$$

Notando che la prima equazione rappresenta una serie di rette, si conclude che la linea piana  $\Lambda_0$  è rappresentata dalla seconda equazione.

Se, reciprocamente si suppone:

$$y = \Psi(x) = a^{-\frac{1}{m}} \cdot m \left(\frac{x}{m+1}\right)^{\frac{m+1}{m}},$$

e si applica il secondo teorema del § 1, si giunge, dopo alcuni calcoli, all'equazione:

$$\left(\frac{\rho}{r}\right)^m = \frac{a}{s}.$$

Dunque: « La linea più generale  $L$ , per la quale è verificata la relazione:

$$\left(\frac{\rho}{r}\right)^m = \frac{s}{a}.$$

tra il raggio di curvatura, quello di torsione e l'arco, è caratterizzata dalla

proprietà che lo spigolo di regresso  $L_0$  della sviluppabile rettificatrice, quando questa superficie si sviluppa sopra un piano, si riduce alla linea piana  $\Lambda$ , definita dall'equazione:

$$a\left(\frac{y}{m}\right)^m = \left(\frac{x}{m+1}\right)^{m+1},$$

e la geodetica  $L$  all'asse delle  $x$ .

Questo teorema dà una costruzione geometrica delle linee in discorso.

*Casi particolari.*

Se in quanto precede si suppone successivamente:

$$m = 1, \quad m = -2, \quad m = -\frac{1}{2},$$

si ha rispettivamente:

$$\frac{\rho}{r} = \frac{a}{s}; \quad \frac{\rho}{r} = \sqrt{\frac{s}{a}}; \quad \frac{\rho}{r} = \left(\frac{s}{a}\right)^2.$$

Lo spigolo di regresso  $L_0$  della sviluppabile rettificante  $\Sigma$ , dopo lo sviluppo di tale superficie sopra un piano, diviene la parabola:

$$y = \frac{1}{4a} x^2,$$

ovvero la parabola:

$$y^2 = -4ax,$$

ovvero l'iperbole equilatera:

$$-4xy = a^2.$$

La linea geodetica  $L$  di  $\Sigma$ , in causa dello sviluppo di tale superficie, si riduce rispettivamente alla tangente della prima parabola nel vertice, all'asse della seconda parabola e a uno degli assintoti dell'iperbole equilatera.

### § 3.

Passiamo ora alla determinazione dei raggi di curvatura e di torsione  $\rho_0, r_0$  dello spigolo di regresso della sviluppabile  $\Sigma$  per mezzo dei raggi  $\rho, r$  della geodetica  $L$ .

Riferiamoci, per questa determinazione, alla figura che si ottiene sviluppando  $\Sigma$  sopra un piano, scegliendo gli assi coordinati nel modo indicato al

§ 1; le coordinate di un punto qualunque della linea  $\Lambda_0$  sono:

$$x_0 = s + T \cdot \cos i; \quad y_0 = T \cdot \sin i,$$

essendo  $T$  la distanza fra due punti corrispondenti delle linee  $L$ ,  $L_0$ .

La determinazione di  $T$  si effettua facilmente e si ha:

$$T = \frac{\sin i}{\frac{di}{ds}}. \quad (4)$$

Se dunque  $s_0$  è l'arco di  $\Lambda_0$ , risulta:

$$\frac{ds_0}{ds} = \cos i + \frac{dT}{ds}, \quad (5)$$

e conseguentemente:

$$\frac{d^2 x_0}{ds_0^2} = - \frac{\sin i \cdot \frac{di}{ds}}{\cos i + \frac{dT}{ds}}, \quad \frac{d^2 y_0}{ds_0^2} = \frac{\cos i \cdot \frac{di}{ds}}{\cos i + \frac{dT}{ds}}.$$

Il raggio di curvatura della linea a doppia curvatura  $L_0$  è anche il raggio di curvatura della linea piana  $\Lambda_0$  e le ultime formole ci danno:

$$\rho_0 = \frac{\frac{dT}{ds} + \cos i}{\frac{di}{ds}}.$$

In quanto alla determinazione di  $r_0$ , si deve notare che le normali principali di  $L$  sono parallele alle binormali di  $L_0$  e per conseguenza:

$$\frac{ds_0}{r_0} = \sqrt{\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}} \cdot ds,$$

dalla quale equazione, in causa della (5), si ricava:

$$r_0 = \frac{\frac{dT}{ds} + \cos i}{\sqrt{\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}}};$$

e se alle formole ottenute si aggiunge l'altra:

$$\operatorname{tg} i = \frac{r}{\rho},$$

si ha il teorema: « Il raggio di curvatura  $\rho_0$ , quello di torsione  $r_0$  dello spigolo di regresso  $L_0$  della sviluppabile rettificatrice d'una linea a doppia curvatura qualunque  $L$  e la distanza  $T$  fra due punti corrispondenti delle linee  $L_0, L$  sono dati dalle seguenti equazioni:

$$\left. \begin{aligned} \rho_0 &= \frac{T \left\{ 1 + \sqrt{1 + \left(\frac{r}{\rho}\right)^2} \cdot \frac{dT}{ds} \right\}}{\frac{r}{\rho}}; & r_0 &= \frac{r \left\{ 1 + \sqrt{1 + \left(\frac{r}{\rho}\right)^2} \cdot \frac{dT}{ds} \right\}}{1 + \left(\frac{r}{\rho}\right)^2} \\ T &= \frac{r}{\rho} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{\rho}\right)^2}}{\frac{d}{ds} \left(\frac{r}{\rho}\right)}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

§ 4.

*Applicazioni delle formole del § 3.* —  $\alpha$ ) Si può dare un'altra dimostrazione del notevole teorema del § 2 che si riferisce alle geodetiche dei coni, riferendosi alle equazioni (6).

Infatti la condizione necessaria e sufficiente perchè la sviluppabile  $\Sigma$  sia un cono è che la linea  $L_0$  si riduca a un punto, condizione che è soddisfatta solamente quando  $\rho_0 = r_0 = 0$ . Ora se, per semplicità, si pone:

$$\frac{r}{\rho} = \theta,$$

le (6) ci danno:

$$\rho_0 = \frac{(1 + \theta^2)^{\frac{3}{2}} (2\theta'z - \theta\theta'')}{\theta'^3}, \quad r_0 = \frac{r(2\theta'^2 - \theta\theta'')}{\theta'^2}; \quad (7)$$

si deve dunque avere:

$$\theta\theta'' = 2\theta'^2.$$

Se  $\theta' = 0$ , si ha  $\frac{r}{\rho} = \text{costante}$  e la curva è un'elica; questo caso può essere lasciato da parte.

Se  $\theta' \geq 0$ , si può scrivere:

$$\frac{\theta''}{\theta'} = \frac{2\theta'}{\theta},$$

ciò che dà:

$$\log \theta' = \log \theta^2 - \log a,$$

con  $a$  costante. Da quest'equazione si deduce:

$$\frac{d\theta}{\theta^2} = \frac{ds}{a},$$

da cui integrando:

$$\frac{1}{\theta} = \frac{\rho}{r} = b - \frac{s}{a},$$

che è appunto la relazione caratteristica delle geodetiche dei coni.

$\beta$ ) La condizione  $T = a$ , con  $a$  costante, in causa della (4), equivale all'altra:

$$\frac{di}{\text{sen } i} = \frac{ds}{a},$$

da cui integrando:

$$\text{tg } \frac{1}{2} i = k e^{\frac{s}{a}},$$

con  $k$  costante arbitraria. Siccome da questa equazione si ricava:

$$\cot i = \frac{\rho}{r} = \frac{1}{2k} \left( e^{-\frac{s}{a}} - k^2 e^{\frac{s}{a}} \right),$$

si ha il teorema: « *La relazione scritta caratterizza la linea a doppia curvatura alla quale si riduce l'assintoto d'una trattrice, mediante una serie di flessioni infinitesime del piano di questa curva attorno alle sue tangenti* ».

Le equazioni (7) ci danno:

$$\frac{r_0}{r} = \frac{2\theta'^2 - \theta\theta''}{\theta'^2};$$

e poichè  $\theta$ , come pure  $\theta'$  e  $\theta''$ , sono invariabili in tutte le flessioni della sviluppabile rettificante, si può dire: « *Il rapporto del raggio di torsione d'una linea qualunque al raggio di torsione corrispondente dello spigolo di regresso della sviluppabile rettificante è invariabile in tutte le flessioni di questa superficie, fatte in maniera da conservare rettilinee le generatrici* ».

Se si cercano le linee nelle quali il rapporto  $\frac{r_0}{r}$  è una costante  $k$ , si

deve integrare l'equazione differenziale:

$$\theta'^2(2-k) = \theta\theta'',$$

la quale, per essere  $\theta'$  diverso da zero, si può scrivere:

$$(2-k) \frac{\theta'}{\theta} = \frac{\theta''}{\theta'},$$

da cui integrando:

$$\theta' = m\theta^{2-k},$$

con  $m$  costante qualunque. Ciò posto, vi sono da considerare due casi:

1.° Sia  $k \geq 1$ ; scrivendo la precedente sotto la forma:

$$\theta^{k-2} \cdot d\theta = m ds,$$

una nuova integrazione ci dà:

$$\theta^{k-1} = \frac{s}{a} + h,$$

essendo  $a$  e  $h$  costanti arbitrarie.

Si può sempre supporre  $h = 0$  con una scelta conveniente dell'origine dell'arco  $s$ ; ricordandosi di più che  $\theta = \frac{r}{\rho}$ , si può scrivere:

$$\left(\frac{\rho}{r}\right)^{k-1} = \frac{a}{s}.$$

Paragonando quest'equazione a quella che si è ottenuta all'esempio 2.° del § 2, si ha il teorema: « *Le linee per le quali ha luogo la relazione:*

$$\left(\frac{\rho}{r}\right)^m = \frac{a}{s},$$

(*linee che si sono ottenute al § 2*) sono caratterizzate dalla proprietà che il rapporto  $\frac{r_0}{r}$  della loro torsione a quella dello spigolo di regresso della sviluppabile rettificatrice è costante ed eguale a  $m + 1$  ».

2.° Sia  $k = 1$ ; l'equazione da integrare è:

$$\theta' = m\theta,$$

da cui:

$$\theta = ne^{ms} \quad (n = \text{cost.}).$$

Si ha dunque in questo caso:

$$\frac{r}{\rho} = ne^{ms},$$

vale a dire:

$$\frac{dy}{dx} = n e^{m \cdot \frac{xy' - y}{y'}};$$

quest'equazione ha per integrale generale:

$$y = c \left\{ x + \log \left( \frac{n}{c} \right)^{\frac{1}{m}} \right\},$$

che rappresenta una serie di rette, inviluppani la linea rappresentata dall'integrale singolare. Tale integrale si ottiene eliminando  $\frac{dy}{dx}$  fra le due seguenti equazioni:

$$x + \frac{1}{m} \left( \log n - 1 - \log \frac{dy}{dx} \right) = 0; \quad y = \left( x - \frac{1}{m} \log \frac{dy}{dx} + \frac{1}{m} \log n \right) \frac{dy}{dx}.$$

E poichè con tale eliminazione si ottiene:

$$y = \frac{n}{m} e^{mx-1},$$

si ha il teorema: « *La linea a doppia curvatura alla quale si riduce l'assintoto della curva logaritmica:*

$$y = \frac{n}{m} e^{mx-1},$$

*con flessioni infinitesime del suo piano attorno alle sue tangenti, è la sola di cui il raggio di torsione sia eguale al raggio di torsione dello spigolo di regresso della sviluppabile rettificatrice; una tale linea è pure caratterizzata dalla relazione:*

$$\frac{r}{\rho} = n e^{ms} n,$$

*Casi particolari.* — Se, conformemente ai casi particolari del § 2, facciamo successivamente:

$$m = 1, \quad m = -2, \quad m = -\frac{1}{2},$$

si ha rispettivamente:

$$k = 2, \quad k = -1, \quad k = \frac{1}{2}.$$

Dunque: « *Le linee a doppia curvatura alle quali si riduce la tangente a una parabola nel vertice, l'asse di una parabola e uno degli assintoti d'un'i-*

perbole equilatera mediante una serie di flessioni infinitesime del piano di queste coniche attorno alle loro tangenti, sono caratterizzate dalla proprietà che il rapporto  $\frac{r_0}{r}$  della torsione delle linee a quella dello spigolo di regresso della loro sviluppabile rettificatrice è rispettivamente eguale a:

$$2, \quad -1, \quad \frac{1}{2} n.$$

§ 5.

Ricordando la formola (4) e l'altra  $\operatorname{tg} i = \frac{r}{\rho}$ , l'eguaglianza (5) e la prima delle (6) ci danno:

$$ds_0 = \frac{2 \cos i \left(\frac{di}{ds}\right)^2 - \operatorname{sen} i \cdot \frac{d^2 i}{ds^2}}{\left(\frac{di}{ds}\right)^2} ds; \quad \rho_0 = \frac{2 \cos i \left(\frac{di}{ds}\right)^2 - \operatorname{sen} i \cdot \frac{d^2 i}{ds^2}}{\left(\frac{di}{ds}\right)^3}.$$

Queste formole si possono applicare anche quando la sviluppabile rettificatrice della linea è stata sviluppata sopra un piano; esse servono quindi per risolvere il problema di determinare la linea piana involupata da una retta mobile che ruota attorno a uno de' suoi punti mentre che esso si sposta sopra una retta data.

Infatti se si suppone:

$$i = f(s),$$

essendo  $f(s)$  una funzione data di  $s$ , si ha:

$$s_0 = \int \frac{2 \cos f \cdot \left(\frac{df}{ds}\right)^2 - \operatorname{sen} f \cdot \frac{d^2 f}{ds^2}}{\left(\frac{df}{ds}\right)^2} ds + k,$$

vale a dire:

$$s_0 = \frac{\operatorname{sen} f}{\left(\frac{df}{ds}\right)} + \int \cos f(s) \cdot ds + k, \tag{8}$$

con  $k$  costante arbitraria.

Si supponga d'ottenere, colla risoluzione di (8) rapporto ad  $s$ :

$$s = \varphi(s_0);$$

risulta allora:

$$\rho_0 = \left[ \frac{2 \cos f \cdot \left(\frac{df}{ds}\right)^2 - \operatorname{sen} f \cdot \frac{d^2 f}{ds^2}}{\left(\frac{df}{ds}\right)^3} \right]_{s=\varphi(s_0)},$$

vale a dire:

$$\frac{1}{\rho_0} = \frac{d\varphi(s_0)}{ds_0} \left[ \frac{df}{ds} \right]_{s=\varphi(s_0)}. \quad (9)$$

Si ha dunque il teorema: « *La curva involupata da una retta mobile che ruota attorno a uno de' suoi punti, colla velocità  $v_r$ , mentre che il punto si sposta sopra una retta fissa  $D$  colla velocità  $v_t$ , è rappresentata in coordinate intrinseche  $\rho_0$ ,  $s_0$  dall'equazione (9), essendo  $\varphi(s_0)$  la funzione che si ottiene risolvendo l'equazione (8) rapporto ad  $s$ ; in queste equazioni  $s$  rappresenta la distanza fra un punto fisso di  $D$  e il punto in cui  $D$  è incontrata dalla retta mobile, e la funzione  $f(s)$  è legata alle velocità  $v_r$ ,  $v_t$  dalla relazione:*

$$\frac{df(s)}{ds} = \frac{v_r}{v_t} n.$$

Per vedere quale è la posizione della retta  $D$  rispetto all'involuppo  $\Lambda_0$  della retta mobile, si noti che tale retta nel movimento viene a coincidere una o più volte colla retta  $D$ . Se ora si suppone  $i = 0$  e si denota con  $s_1$  una soluzione reale dell'equazione:

$$f(s) = 0,$$

l'equazione (8) ci dà:

$$(s_0)_{s=s_1} = \sigma = \left[ \frac{\operatorname{sen} f}{\left(\frac{df}{ds}\right)} + \int \cos f(s) \cdot ds + k \right]_{s=s_1}$$

Quest'eguaglianza ci dà il valore  $\sigma$  dell'arco  $s_0$  della linea  $\Lambda_0$  corrispondente a un punto nel quale la tangente coincide colla retta fissa  $D$ ; questi punti particolari sono tanti quante sono le soluzioni reali dell'equazione  $f(s) = 0$ .

Il teorema dimostrato può servire anche per la soluzione dei problemi dei quali si tratta in questa Nota.

*Esempi.* —  $\alpha$ ) Se si suppone:

$$\frac{v_r}{v_t} = \frac{1}{a},$$

con  $a$  costante, si ha:

$$f(s) = \frac{s}{a} + b,$$

nella quale  $b$  è una costante arbitraria che si può anche supporre zero, senza nuocere alla generalità. La (8) ci dà allora:

$$s_0 = 2a \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{s}{a}\right),$$

da cui:

$$s_0 = a \cdot \operatorname{arc} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{s_0}{2a}\right);$$

e l'equazione (9) diviene:

$$\rho_0 = \sqrt{4a^2 - s_0^2},$$

rappresentante una cicloide nella quale il raggio del cerchio generatore è  $\frac{a}{2}$ .

L'equazione  $f(s) = 0$  ha per soluzione:

$$s = s_1 = 0,$$

corrispondentemente al qual valore l'equazione esprime  $s_0$  ci dà:

$$s_0 = 0.$$

La linea  $D$  è dunque tangente alla curva  $\Lambda_0$  nell'origine degli archi  $s_0$ ; ma si riconosce facilmente che tale origine è il vertice della cicloide, poichè per  $s_0 = 0$  si ha:

$$\rho_0 = 2a.$$

Dunque: « *La linea involupata da una retta che ruota intorno a uno de' suoi punti mentre che questo si sposta sopra una retta fissa  $D$ , colla condizione che il rapporto della velocità di traslazione a quella di rotazione sia una costante  $a$ , è una cicloide generata da un cerchio di cui il raggio è  $\frac{1}{2}a$ ; la retta  $D$  è la tangente nel vertice della linea  $\Lambda$ .* »

Se si osserva che:

$$\frac{\rho}{r} = \cot i = \cot f(s) = \cot\left(\frac{s}{a}\right),$$

si ha il teorema: « *La linea a doppia curvatura alla quale si riduce la tangente a una cicloide nel vertice, mediante una serie di flessioni infinitesime del piano di questa curva attorno alle sue tangenti, è caratterizzata dalla relazione:* »

$$\frac{\rho}{r} = \cot\left(\frac{s}{a}\right).$$

β) Se si prende:

$$i = f(s) = \text{arc} \cdot \cos\left(\frac{s}{a}\right),$$

la (8) ci dà:

$$s_0 + m = \frac{3s^2}{2a},$$

essendo  $m$  una costante arbitraria; si deduce di qui:

$$s = \sqrt{\frac{2}{3} a(s_0 + m)} = \varphi(s_0),$$

ed applicando la formola (9):

$$\rho_0 = -\sqrt{2m(3a - 2m) + 2(3a - 4m)s_0 - 4s_0^2}.$$

Nelle equazioni precedenti si può supporre che  $m$  sia determinato in modo, che risulti  $3a - 4m = 0$ , poichè, come si rileva dall'eguaglianza che ci dà  $s_0$ , ciò equivale a uno spostamento dell'origine degli archi  $s_0$ , il che non nuoce affatto alla generalità. Si ha dunque:

$$s = \sqrt{\frac{2a}{3} \left(s_0 + \frac{3a}{4}\right)}; \quad \rho_0 = -\sqrt{\frac{9a^2}{4} - 4s_0^2},$$

l'ultima delle quali dimostra che la linea  $\Lambda_0$  involupata dalla retta mobile è un'ipocicloide nella quale il cerchio fisso e quello mobile hanno rispettivamente per raggio  $a$  e  $\frac{3a}{2}$ .

L'equazione  $f(s) = 0$ , che in questo caso diviene:

$$\text{arc} \cdot \cos\left(\frac{s}{a}\right) = 0,$$

ha per soluzione:

$$s = s_1 = a,$$

in causa del qual valore si deduce:

$$s_0 = \frac{3a}{4} \quad \text{e conseguentemente} \quad \rho_0 = 0.$$

La retta  $D$  è dunque una delle tangenti di regresso dell'ipocicloide.

Perciò: « La linea involupata da una retta che ruota attorno a uno de' suoi punti mentre che questo si sposta sopra una retta fissa  $D$  colla legge

espressa dall'eguaglianza  $i = \text{arc} \cdot \cos\left(\frac{s}{a}\right)$ , è un'ipocicloide nella quale il cerchio fisso ha il raggio  $a$  e il cerchio mobile il raggio  $\frac{3a}{2}$ ; la retta  $D$  è una delle tangenti di regresso dell'ipocicloide  $n$ .

Se si nota che in questo caso:

$$\frac{\rho}{r} = \cot i = \frac{s}{\sqrt{a^2 - s^2}},$$

si può enunciare il teorema: « La linea a doppia curvatura alla quale si riduce una delle tangenti di regresso d'un'ipocicloide, nella quale il raggio del cerchio fisso è  $a$  e quello del cerchio mobile è  $\frac{3a}{2}$  per mezzo d'una serie di flessioni infinitesime del piano di questa curva attorno alle sue tangenti, è caratterizzata dalla relazione:

$$\frac{\rho}{r} = \frac{s}{\sqrt{a^2 - s^2}} n.$$

## § 6.

L'equazione (5), moltiplicata per  $ds$  e integrata dà:

$$s_0 = k + \int \frac{ds}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{\rho}\right)^2}} + T,$$

essendo  $k$  una costante e  $T$  dato dalla terza (6).

Supponiamo d'aver determinato una famiglia di linee a doppia curvatura  $L_0$  definite da una relazione:

$$\varphi(s_0, \rho_0, r_0, \rho'_0, r'_0, \dots) = 0,$$

fra l'arco, il raggio di curvatura, quello di torsione e le loro derivate successive rapporto all'arco.

Le equazioni (6), (10) ci fanno conoscere un'altra famiglia completa di linee definite da un'altra relazione analoga alla precedente e che si ottiene facilmente da questa.

*Esempi.* — Se si pone la condizione  $\frac{r_0}{\rho_0} = a$ , con  $a$  costante, le (6) dànno:

$$a \sqrt{\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}} = \frac{d}{ds} \cdot \text{arc} \cdot \text{tg} \left( \frac{r}{\rho} \right); \quad (11)$$

reciprocamente quest'ultima relazione conduce alla prima.

Dunque: « *La relazione (11) caratterizza completamente le geodetiche di una sviluppabile di cui lo spigolo di regresso è un'elica qualunque* ».

La condizione necessaria e sufficiente perchè per la linea  $L_0$  sia soddisfatta un'equazione della forma (11) è che per l'altra linea  $L$  si abbia:

$$\frac{a \sqrt{r^2 \left\{ \frac{d}{ds} \left( \frac{r}{\rho} \right) \right\}^2 + \left\{ 1 + \left( \frac{r}{\rho} \right)^2 \right\}^2}}{r \left\{ 1 + \left( \frac{r}{\rho} \right)^2 \right\}} = \frac{d}{ds} \text{arc} \cdot \text{tg} \cdot \left[ \frac{r \frac{d}{ds} \left( \frac{r}{\rho} \right)}{\left\{ 1 + \left( \frac{r}{\rho} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}} \right].$$

Dunque: « *La relazione scritta caratterizza completamente le geodetiche di una sviluppabile di cui lo spigolo di regresso è una geodetica qualunque di un'altra sviluppabile avente per singolo di regresso un'elica arbitraria* ».

Se poniamo la condizione:

$$\frac{\rho_0}{r_0} = \frac{s_0}{a},$$

con  $a$  costante, il procedimento esposto ci dà per gli elementi relativi alla curva  $L$ :

$$\left\{ a \frac{1 + \left( \frac{r}{\rho} \right)^2}{r} - \frac{r}{\rho} \right\} \frac{\sqrt{1 + \left( \frac{r}{\rho} \right)^2}}{\frac{d}{ds} \left( \frac{r}{\rho} \right)} = \int \frac{ds}{\sqrt{1 + \left( \frac{r}{\rho} \right)^2}} + k.$$

Dunque: « *La relazione scritta caratterizza completamente le geodetiche di una sviluppabile di cui lo spigolo di regresso è una geodetica d'un cono qualunque* ».

Questi esempi bastano per dimostrare che, in certi casi, si possono determinare delle famiglie complete di linee caratterizzate da una particolare relazione fra il raggio di curvatura, quello di torsione e le loro derivate rapportò all'arco.

## § 7.

Considerando sopra una sviluppabile  $\Sigma$  una particolare geodetica  $L$  definita dalla relazione  $f=0$  fra il raggio di curvatura, quello di torsione e le loro derivate rapporto all'arco, e la geodetica  $L_i$  più generale possibile della medesima sviluppabile, possono darsi due casi: o la relazione  $f_i=0$  che definisce  $L_i$  è della stessa forma dell'altra  $f=0$  che definisce  $L$ , ovvero la relazione  $f_i=0$  ha una forma diversa dall'altra  $f=0$  e comprende quest'ultima come caso particolare. Ha luogo per es. il 1.° caso nel cilindro, nel cono e nelle sviluppabili considerate al § 6; ha luogo il 2.° caso nella maggior parte delle sviluppabili considerate nei §§ 2, 4, 5.

Quando abbia luogo il 2.° caso possiamo proporci di determinare la relazione che definisce la geodetica  $L_i$  più generale possibile di una sviluppabile qualunque  $\Sigma$ , nota che sia la relazione che definisce una sua geodetica particolare  $L$ .

Sia  $L$  una geodetica della sviluppabile  $\Sigma$  caratterizzata dalla relazione:

$$\frac{\rho}{r} = f(s),$$

e sia  $L_1$  un'altra geodetica qualunque di  $\Sigma$ ; denotiamo con  $s_1, \rho_1, r_1, i_1$  l'arco, il raggio di curvatura, quello di torsione di  $L_1$  e l'inclinazione di questa linea sulle generatrici rettilinee di  $\Sigma$ . Se  $\alpha$  è l'angolo formato dalle geodetiche  $L_1, L$ , si ha:

$$\cot i = \cot(i_1 - \alpha) = \frac{\cot i_1 \cot \alpha + 1}{\cot \alpha - \cot i_1},$$

e conseguentemente:

$$\frac{\rho}{r} = \frac{\text{sen } \alpha + \frac{\rho_1}{r_1} \cos \alpha}{\cos \alpha - \frac{\rho_1}{r_1} \text{sen } \alpha}, \quad (12)$$

Determiniamo la relazione fra  $s_1$  e  $s$ ; si sviluppi  $\Sigma$  sopra un piano e si prendano due sistemi d'assi coordinati  $0(x, y), 0_1(x_1, y_1)$  scelti, rispetto alle linee  $L, L_1$  nel modo indicato al § 1.

Fra le coordinate  $x, y$  e le altre  $x_1, y_1$  d'un punto qualunque della linea piana  $\Lambda_0$  a cui si riduce lo spigolo di regresso  $L_0$  di  $\Sigma$ , hanno luogo le relazioni:

$$x_1 = m + x \cos \alpha - y \text{sen } \alpha; \quad y_1 = n + x \text{sen } \alpha + y \cos \alpha,$$

essendo  $m, n$  le coordinate di  $O_1$  (origine degli archi  $s_1$  di  $L_1$ ) rispetto al sistema  $O(x, y)$ . Per conseguenza:

$$s_1 = \frac{x_1 dy_1 - y_1 dx_1}{dy_1} = \frac{(m \cos \alpha + n \operatorname{sen} \alpha) + (m \operatorname{sen} \alpha - n \cos \alpha) \frac{dx}{dy} + s}{\operatorname{sen} \alpha \frac{dx}{dy} + \cos \alpha},$$

e se ricordiamo che:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\rho}{r} = f(s),$$

viene:

$$s_1 = \frac{(m \cos \alpha + n \operatorname{sen} \alpha) + (m \operatorname{sen} \alpha - n \cos \alpha) f(s) + s}{\operatorname{sen} \alpha \cdot f(s) + \cos \alpha}. \quad (13)$$

Se la risoluzione di quest'equazione rapporto ad  $s$  ci dà:

$$s = \varphi(s_1),$$

la (12) diviene:

$$f[\varphi(s_1)] = \frac{\operatorname{sen} \alpha + \frac{\rho_1}{r_1} \cos \alpha}{\cos \alpha - \frac{\rho_1}{r_1} \operatorname{sen} \alpha},$$

da cui si ricava:

$$\frac{\rho_1}{r_1} = \frac{f[\varphi(s_1)] \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha}{f[\varphi(s_1)] \operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha}. \quad (14)$$

Si ha dunque il teorema: « Se, relativamente a una linea a doppia curvatura  $L$ , è verificata la relazione  $\frac{\rho}{r} = f(s)$ , per qualsivoglia altra geodetica  $L_1$  della sviluppabile rettificatrice di  $L$  è verificata l'altra relazione (14), essendo  $\varphi(s_1)$  la funzione di  $s_1$  che si ottiene risolvendo rapporto ad  $s$  l'equazione (13) ».

Caso particolare. — Se  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ,  $m = n = 0$ , le (13), (14) divengono:

$$s_1 = \frac{s}{f(s)}; \quad (13') \quad f[\varphi(s_1)] = -\frac{r_1}{\rho_1}. \quad (14')$$

Esempi. — Se si suppone:

$$\frac{\rho}{r} = f(s) = \frac{a}{s},$$

il teorema dimostrato e le formole (13'), (14') ci danno:

$$\frac{\rho_1}{r_1} = -\sqrt{\frac{s_1}{a}},$$

e questo è ben naturale, in causa di quanto abbiamo ottenuto nei primi due casi particolari del § 2.

Se:

$$\frac{\rho}{r} = f(s) = \left(\frac{s}{a}\right)^2,$$

si ha:

$$\frac{\rho_1}{r_1} = -\left(\frac{s_1}{a}\right)^2,$$

relazione della stessa forma di quella donde siamo partiti. Ciò si spiega facilmente riferendoci al 3.º caso particolare del § 2.

Se:

$$\frac{\rho}{r} = \frac{s}{a},$$

la (13) diviene:

$$s_1 = \frac{a(m \cos \alpha + n \operatorname{sen} \alpha) + (a + m \operatorname{sen} \alpha - n \cos \alpha)s}{s \cdot \operatorname{sen} \alpha + a \cos \alpha},$$

da cui:

$$s = \varphi(s_1) = \frac{a\{(s_1 - m) \cos \alpha - n \operatorname{sen} \alpha\}}{a - (s_1 - m) \operatorname{sen} \alpha - n \cos \alpha},$$

e conseguentemente:

$$f[\varphi(s_1)] = \frac{(s_1 - m) \cos \alpha - n \operatorname{sen} \alpha}{a - (s_1 - m) \operatorname{sen} \alpha - n \cos \alpha}.$$

La (14) dà dunque:

$$\frac{\rho_1}{r_1} = \frac{s_1 - m - a \cdot \operatorname{sen} \alpha}{a \cos \alpha - n},$$

ed esprime quindi il rapporto  $\frac{\rho_1}{r_1}$  per mezzo di una funzione lineare dell'arco  $s_1$ ; ciò combina perfettamente con quanto si è dimostrato al § 2 per le geodetiche dei coni.

Quando  $\frac{\rho}{r} = \frac{a}{s}$ , la relazione (13) ci offre:

$$s = \varphi(s_1) = \frac{1}{2} [(s_1 - m) \cos \alpha - n \operatorname{sen} \alpha \pm \sqrt{\{(s_1 - m) \cos \alpha - n \operatorname{sen} \alpha\}^2 + 4a\{(s_1 - m) \operatorname{sen} \alpha + n \cos \alpha\}}],$$

e la (14):

$$\frac{\rho_1}{r_1} = \frac{2a \cos \alpha - [(s_1 - m) \cos \alpha - n \operatorname{sen} \alpha \pm \sqrt{\{(s_1 - m) \cos \alpha - n \operatorname{sen} \alpha\}^2 + 4a\{(s_1 - m) \operatorname{sen} \alpha + n \cos \alpha\}}] \operatorname{sen} \alpha}{2a \operatorname{sen} \alpha + [(s_1 - m) \cos \alpha - n \operatorname{sen} \alpha \pm \sqrt{\{(s_1 - m) \cos \alpha - n \operatorname{sen} \alpha\}^2 + 4a\{(s_1 - m) \operatorname{sen} \alpha + n \cos \alpha\}}] \cos \alpha}. \quad (15)$$

Similmente se:

$$\frac{\rho}{r} = \left(\frac{s}{a}\right)^2,$$

la (13) dà:

$$s = \varphi(s_1) = \frac{a^2 \pm a \sqrt{a^2 - 4\{(s_1 - m)\operatorname{sen} \alpha + n \cos \alpha\}\{(s_1 - m) \cos \alpha - n \operatorname{sen} \alpha\}}}{2\{(s_1 - m)\operatorname{sen} \alpha + n \cos \alpha\}},$$

e la (14):

$$\frac{\rho_1}{r_1} = \frac{[a \pm \sqrt{a^2 - 4\{(s_1 - m)\operatorname{sen} \alpha + n \cos \alpha\}\{(s_1 - m) \cos \alpha - n \operatorname{sen} \alpha\}}]^2 \cos \alpha - 4[(s_1 - m)\operatorname{sen} \alpha + n \cos \alpha]^2 \operatorname{sen} \alpha}{[a \pm \sqrt{a^2 - 4\{(s_1 - m)\operatorname{sen} \alpha + n \cos \alpha\}\{(s_1 - m) \cos \alpha - n \operatorname{sen} \alpha\}}]^2 \operatorname{sen} \alpha + 4[(s_1 - m)\operatorname{sen} \alpha + n \cos \alpha]^2 \cos \alpha}. \quad (16)$$

Si ha dunque il teorema: « *La linea a doppia curvatura alla quale si riduce una retta qualunque posta nel piano d'una parabola, o d'un'iperbole equilatera, mediante una serie di flessioni infinitesime del piano di queste coniche attorno alle loro tangenti, è caratterizzata rispettivamente dalle relazioni (15), (16) ».*

Parma, aprile 1891.

# Theorie der Elemententripel einstufiger Elementargebilde.

(Von BENNO KLEIN, in Marburg in Hessen.)

---

## Theil III. — COLLINEARE BEZIEHUNG DES TRIPELGEBIETES AUF DEN RAUM UND ALLGEMEINE THEORIE DER RAUMCURVE III. ORDNUNG.

Die vorliegenden Ausfuehrungen bilden den Schluss der im Titel genannten Theorie; sie schliessen sich an den Theil I. und Theil II. derselben an, welche in dieser Zeitschrift, Band XVIII. und XIX. veroeffentlicht wurden.

Der Inhalt des Theils III. ist schon in der Einleitung zum Theil II. angegeben worden.

### 23. *Projectivitaet im Tripelgebiet.*

Wenn die Punkte  $ABC$  ein Tripel des Polarnetzes des Tripels  $UVW$  bilden, so ist jeder der Punkte  $ABC$  der gemischte Pol der beiden anderen in dem Netze und soll auch der gemischte Pol derselben „beueglich des Tripels  $UVW$ “ heissen. Fallen zwei Punkte  $B$  und  $C$  zusammen, so ist  $BC$  ein erster Pol von  $A$ ,  $A$  der zweite Pol von  $BC$  beueglich des Tripels  $UVW$ .

Es sei auf  $\alpha$  eine Tripelreihe  $\alpha\beta$  gegeben und  $A$  ein Punkt von  $\alpha$ ; es seien ferner  $ABC$  das durch  $A$  bestimmte Tripel der Polarreihe  $\alpha'\beta'$  der gegebenen; dann ist  $ABC$  ein Tripel saemmtlicher Polarnetze der Tripel der gegebenen Reihe  $\alpha\beta$  und daher  $A$  der gemischte Pol von  $B$  und  $C$  beueglich aller Tripel der Reihe  $\alpha\beta$ . Nun sind je zwei Punkte  $B$  und  $C$  die beueglich eines Tripels  $\alpha$  den Punkt  $A$  zum gemischten Pol haben durch die ersten Pole von  $A$  beueglich des Tripels  $\alpha$  harmonisch getrennt. Also folgt, da die ersten Pole von  $A$  beueglich aller Tripel der gegebenen Reihe  $\alpha\beta$  durch  $B$  und  $C$  harmonisch getrennt sein muessen, und da die ersten Pole

eines Punktes bezüglich eines Tripels  $\alpha$  im Allgemeinen nicht zugleich die desselben Punktes bezüglich eines anderen Tripels  $\beta$  sind:

Die Paare der ersten Pole eines Punktes  $A$  von  $\alpha$  bezüglich der Tripel einer Tripelreihe  $\alpha\beta$  bilden eine Punktpaarreihe.

Die Doppelpunkte  $B$  und  $C$  derselben sind die beiden Punkte deren gemischter Pol der Punkt  $A$  bezüglich aller Tripel der Reihe  $\alpha\beta$  ist, oder was auf dasselbe hinauskommt, die Punkte  $B$  und  $C$  ergaenzen  $A$  zu einem Tripel der Polarreihe  $\alpha'\beta'$  der gegebenen  $\alpha\beta$ . Nun wissen wir schon, dass  $B$  und  $C$  in dem Polarnetz *eines* Tripels der Reihe  $\alpha\beta$  diejenigen beiden Punkte sind, deren gemischter Pol jeder Punkt von  $\alpha$  sein kann. Dann sind aber  $B$  und  $C$  zugleich die Doppelpunkte der Punktpaarreihe, die von den ersten Polen der Punkte von  $\alpha$  bezüglich des Netzes gebildet werden.

Daraus folgt:

Die Punktpaarreihe der ersten Pole eines Punktes von  $\alpha$  bezüglich aller Tripel einer Tripelreihe  $\alpha\beta$  ist zugleich die Reihe der ersten Pole aller Punkte von  $\alpha$  bezüglich eines Tripels der Tripelreihe. Und umgekehrt.

Mit einer Tripelreihe auf  $\alpha$  sind zugleich die Punktpaarreihen gegeben, deren jede aus den ersten Polen aller Punkte von  $\alpha$  bezüglich *eines* Tripels der Reihe besteht. Nach dem vorigen Satze gehoert nun zu jedem Punkte  $A$  von  $\alpha$  eine dieser Reihen in der Art, dass die Paare derselben die ersten Pole von  $A$  bezüglich *aller* Tripel der Tripelreihe sind. Die Doppelpunkte  $B$  und  $C$  der zu  $A$  gehoerigen Punktpaarreihe haben  $A$  zum gemischten Pol bezüglich aller Tripel der Tripelreihe.

Es folgt hieraus:

Sind  $\alpha$  und  $\beta$  die Paare erster Pole zweier Punkte  $A$  und  $B$  von  $\alpha$  bezüglich eines Tripels einer Tripelreihe, so sind  $\alpha$  und  $\beta$  zugleich die Paare erster Pole eines und desselben dritten Punktes von  $\alpha$  bezüglich zweier Tripel der Tripelreihe.

Denn die Paare  $\alpha$  und  $\beta$  bestimmen die Punktpaarreihe der ersten Pole von  $\alpha$  bezüglich des ersten Tripels und folglich muessen sie die ersten Pole eines anderen Punktes bezüglich zweier anderer Tripel der Reihe sein.

Die Paare erster Pole der Punkte von  $\alpha$  bezüglich zweier Tripel sind den Punkten von  $\alpha$ , also auch einander projectiv zugeordnet. Sie sind aber

zugleich die Paare erster Pole zweier Punkte von  $\kappa$  bezueglich aller Tripel der durch jene beiden bestimmten Reihe, woraus sich ergibt:

Die Paare der ersten Pole von zwei beliebigen Punkten von  $\kappa$  bezueglich der Tripel einer Tripelreihe entsprechen einander projectiv, wenn man je zwei Paare einander zuordnet, die Pole der beiden Punkte bezueglich desselben Tripels sind.

Die vorigen Saetze werden anschaulich, wenn man an einer Curve II. Ordnung  $\kappa$  operirt.

Ist auf  $\kappa$  ein Tripel  $UVW$  gegeben, so erhaelt man die ersten Pole eines Punktes  $A$  bezueglich dieses Tripels, wenn man die Pascalsche Gerade  $p$  des Dreiecks  $UVW$  bezueglich  $\kappa$  construirt, und in der projectiven Beziehung von  $p$  und  $\kappa$ , in welcher einem Punkt von  $\kappa$  das Involutioncentrum derjenigen Punktpaarreihe entspricht, deren Doppelpunkte die ersten Pole von  $\kappa$  bezueglich des Tripels  $UVW$  sind, den homologen Punkt des Punktes  $A$  aufsucht. Mit diesem sind dann die ersten Pole von  $A$  bezueglich  $UVW$  gegeben.

Sind nun zwei Tripel einer Reihe auf  $\kappa$  gegeben,  $p$  und  $p_1$  (Fig. VII.) die Pascalschen Geraden der beiden Tripeldreiecke bezueglich  $\kappa$ , so entspricht einem Punkt  $A$  von  $\kappa$  auf  $p$  ein Punkt  $A_0$ , auf  $p_1$  ein Punkt  $A_{10}$ , und die Gerade  $\overline{A_0 A_{10}}$  schneidet  $\kappa$  in zwei Punkten die mit  $A$  ein Tripel der Polarreihe der gegebenen bilden. Nun ist dies Tripel in den Polarnetzen saemmtlicher Tripel der gegebenen Reihe enthalten, also muss  $\overline{A_0 A_{10}}$  durch das Involutioncentrum jeder Punktpaarreihe gehen, die zu  $A$  in einem dieser Netze gehoeren und deren Doppelpunkte die ersten Pole von  $A$  in diesem Netze sind. Die zu  $A$  gehoerigen Involutioncentren bezueglich aller dieser Netze liegen somit auf einer Geraden, folglich bilden die ersten Polpaare von  $A$  bezueglich dieser Netze eine Punktpaarreihe, deren Involutionssaxe jene Gerade  $\overline{A_0 A_{10}}$  ist.

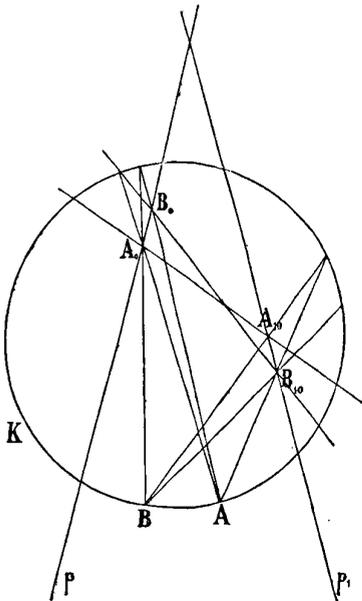


Fig. VII.

Steht eine zweite Gerade zu einem Punkt  $B$  in derselben Beziehung wie  $\overline{A_0 A_{10}}$  zum Punkt  $A$  und schneidet  $p$  und  $p_1$  in  $B_0$  und  $B_{10}$ , so sind  $\overline{A_0 A_{10}}$  und  $\overline{B_0 B_{10}}$  zwei Tangenten der Curve II. Ord-

nung, welche von den Strahlen umhüllt wird die die Punkte der Tripel der Polarreihe der gegebenen Tripelreihe verbinden. Sie werden daher von den anderen Tangenten in projectiven Reihen geschnitten, und es sind folglich die Punkte  $A_0$  und  $B_0$  auf  $p$ ,  $A_{10}$  und  $B_{10}$  auf  $p_1$  homologe Punkte der Reihen. Somit sind auch die mit diesen Punkten mitbestimmten ersten Pole von  $A$  und  $B$  bezueglich der Tripel der Tripelreihe homologe Paare zweier projectiven Punktpaarreihen, deren Involutionen  $\overline{A_0 A_{10}}$  und  $\overline{B_0 B_{10}}$  sind.

Die Reihe der zweiten Pole eines Punktes von  $\alpha$  bezueglich der Tripel einer Reihe ist die Reihe der Punkte, welche von dem Punkt durch die ersten Pole desselben bezueglich der Tripel harmonisch getrennt sind. Diese Reihe der zweiten Pole ist zur Punktpaarreihe der ersten Pole projectiv. Nimmt man daher zwei Punkte  $A$  und  $B$ , die Punktpaarreihen ihrer ersten Pole bezueglich der Tripel einer Tripelreihe und die Reihen der zweiten Pole von  $A$  und  $B$  an, so sind diese zu jenen, also auch zu einander projectiv; man hat daher den Satz:

Die zweiten Pole zweier festen Punkte  $A$  und  $B$  von  $\alpha$  bezueglich der Tripel einer Tripelreihe sind homologe Punkte projectiver Reihen, wenn man je zwei Punkte, die Pole von  $A$  und  $B$  bezueglich desselben Tripels sind, einander zuordnet.

In der Figur erhaelt man die zweiten Pole von  $A$  als die zweiten Schnittpunkte mit  $\alpha$  der Verbindungslinien von  $A$  mit den Punkten  $A_0$ ,  $A_{10}$  der Reihe  $\overline{A_0 A_{10}}$  und aehnlich die zweiten Pole von  $B$ .

24. Auf Grund der letzten Saetze kann man « vier harmonische Tripel einer Tripelreihe » als solche Tripel definiren, bezueglich derer die Paare der ersten Pole eines und daher jeden Punktes des Traegers  $\alpha$  der Reihe vier harmonische Punktpaare oder auch bezueglich derer die zweiten Pole eines und daher jeden Punktes von  $\alpha$  vier harmonische Punkte sind. Jede der beiden Bedingungen schliesst die andere ein.

Man kann aber auch anders verfahren.

Das Punkttripel-Gebiet auf der Curve  $\alpha$  ist offenbar eine Mannigfaltigkeit, die die naemlichen Lagenverhaeltnisse als unser Punkt- und Ebenenraum besitzt. Wie Punkte und Ebenen reciproke Elemente des Raumes sind und die Elemente der einen Art durch die der anderen mit gegeben sind, so sind Tripel und Tripelnetze reciproke Elemente des Tripelgebiets und jede Art durch die andere mitbestimmt. Wie ferner durch zwei Punkte oder Ebenen

eine gerade Punktreihe und ein Ebenenbueschel bestimmt ist, so dass jeder Punkt der ersteren in jeder Ebene des letzteren liegt, so ist durch zwei Tripel oder Netze eine Tripelreihe und ein Netzbueschel bestimmt, so dass jedes Tripel der ersteren in jedem Netz des letzteren liegt.

Fuer solche unserem Raum in Bezug auf ihre Lagenverhaeltnisse gleichartigen Mannigfaltigkeiten gilt, wie Herr F. KLEIN (\*) gezeigt hat die projective Geometrie, wenn man sie in der von Staudtschen Weise begruendet. Namentlich gilt der Satz vom vollstaendigen Viereck, wenn man statt des Punktes das Punkttripel von  $\alpha$  oder das Tripelnetz als Element nimmt. Mittels dieses Satzes lassen sich also vier harmonische Tripel einer Tripelreihe direct definiren und daraufhin laesst sich die Projectivitaet der Grundgebilde erster, zweiter und dritter Stufe im Tripelgebiet entwickeln.

Ein Unterschied zwischen dem Raum und dem Tripelgebiet besteht darin, dass zwei Raeume, die man projectiv auf einander bezieht, immer in einander liegen, waehrend man auch zwei Tripelgebiete die nicht denselben Traeger haben, projectiv auf einander beziehen kann.

Es ist ferner klar, dass man das Tripelgebiet eines Traegers  $\alpha$  nicht nur auf sich selbst oder ein anderes Tripelgebiet, sondern auch auf den Punkt- und Ebenenraum projectiv beziehen kann.

Zwei Tripelgebiete die projectiv auf einander bezogen sind, so dass gleichartige oder ungleichartige Elemente einander entsprechen, koennen « collinear » resp. « reciprok » heissen.

Ebenso mag ein Tripelgebiet zu dem Punkt und Ebenenraum collinear oder reciprok heissen, je nachdem den Punkten des Raumes die Tripelnetze oder die Tripel des Tripelgebietes zugeordnet sind.

25. Es ist schon frueher (§ 10) bemerkt worden, dass die Beziehung im Tripelgebiet zwischen den Tripeln und ihren Polarnetzen der Beziehung des raeumlichen Nullsystems analog ist. In der That ist jedem Tripel ein Netz, sein Polarnetz zugeordnet; beschreibt das Tripel ein Netz, so dreht sich das Polarnetz desselben um ein Tripel, das Polartripel des gegebenen Netzes.

Ausserdem liegt jedes Tripel in seinem Polarnetze.

Wir beziehen nun das Tripelgebiet collinear auf den Raum. Dann ist jedem Tripelnetz des ersteren ein Punkt des letzteren, aber auch jedem Tripel

---

(\*) Math. Annalen, Bd. 6.

des ersteren eine Ebene des letzteren zugeordnet, weil den reciproken Elementen des Tripelgebiets reciproke Elemente des Raumes entsprechen muessen.

Dem Nullsysteme im Tripelgebiet entspricht ein ebensolches im Raume; jedem Tripel und seinem Polarnetze entspricht eine Ebene und ihr Nullpunkt, je zwei conjugirten Tripelreihen entsprechen zwei conjugirte Gerade, jeder sich selbst conjugirten Tripelreihe ein Leitstrahl des Nullsystems.

Dass die Leitstrahlen des Nullsystems einen linearen Complex bilden, ist die Uebertragung des Satzes, dass in jedem Netz des Tripelgebiets ein Bueschel von sich selbst conjugirten Reihen liegt dessen Basistripel das Polartripel des Netzes ist.

26. Die dreifachen Tripel und die singulaeren Netze zweiter Art, diejenigen also, deren Polartripel dreifache Punkte sind, bilden je eine einfache Mannigfaltigkeit im Tripelgebiete. Diesen entsprechen im Raume ein Ebenenbueschel  $K^3$  und eine Curve  $\alpha^3$ .

Sie sind von der dritten Ordnung, da in jedem Netz drei dreifache Punkte liegen, und durch jedes Tripel drei singulaere Netze zweiter Art gehen. Da jedes Netz sein Polartripel enthaelt, so sind die Ebenen des Bueschels  $K^3$  die Nullebenen der Punkte der Curve  $\alpha^3$ , und da die drei singulaeren Netze zweiter Art, welche im Allgemeinen durch ein Tripel gehen, zusammenfallen, wenn das Tripel ein dreifacher Punkt ist, so schneidet jede Ebene von  $K^3$  die Curve  $\alpha^3$  in drei zusammenfallenden Punkten. Wir koennen also zusammenfassend sagen:

Den dreifachen Punkten des Tripelgebiets entsprechen im Raume die Punkte einer Raumcurve III. Ordnung  $\alpha^3$ , den singulaeren Netzen zweiter Art die Schmiegungebenen der Curve  $\alpha^3$ , welche ihrerseits einen Ebenenbueschel III. Ordnung  $K^3$  bilden. Die Punkte von  $\alpha^3$  sind die Nullpunkte ihrer Schmiegungebenen im Nullsystem.

Die dreifachen Punkte des Tripelgebietes auf der Curve II. Ordnung  $\alpha$  und die Schmiegungebenen der Curve  $\alpha^3$  sind homologe Mannigfaltigkeiten zweier collinear Gebiete, daher sind sie einander projectiv zugeordnet, und da auch das Naemliche fuer die Punkte und Schmiegungebenen von  $\alpha^3$  stattfindet so folgt:

Die Punkte der Traegers  $\alpha$  des Tripelgebiets sind den Punkten der Curve  $\alpha^3$  projectiv zugeordnet.

Durch den Traeger  $\alpha$  ist das Tripelgebiet desselben bestimmt. Bezieht man es collinear auf den Raum, so folgt:

Durch eine Raumcurve III. Ordnung  $\alpha^3$  ist alle Mal ein Nullsystem bestimmt, in welchem die Punkte von  $\alpha^3$  die Nullpunkte ihrer Schmiegungebenen sind.

Die Polarnetze der drei dreifachen Punkte eines Tripelnetzes gehen durch das Polartripel desselben, das ist auf den Raum uebertragen, der Satz:

Die drei durch einen Punkt  $P$  gehenden Schmiegungebenen der Curve  $\alpha^3$  osculiren sie in drei Punkten, die mit dem Punkt  $P$  in einer Ebene, der Nullebene von  $P$ , liegen.

Einem Tripel mit einem Doppelpunkt  $A$  entspricht eine Beruehrungsebene von  $\alpha^3$  dem Polarnetz eines solchen Tripels, also einem singulaeren Netze erster Art ein Punkt auf der Schnittlinie zweier unendlich nahen Schmiegungebenen von  $\alpha^3$ . Einer Tripelreihe deren Tripel saemmtlich den Punkt  $A$  zum Doppelpunkt haben, entspricht die Tangente von  $\alpha^3$  in dem zu  $A$  homologen Punkte. Die Reihe ist sich selbst conjugirt, also ist jede Tangente von  $\alpha^3$  Leitstrahl des Nullsystems. Weil die Reihe sich selbst conjugirt ist, so gehen durch sie alle singulaeren Netze erster Art deren Polartripel die Reihe bilden. Jede Tangente in einem Punkte von  $\alpha^3$  ist also zugleich der Beruehrungsstrahl einer Ebene des Bueschels  $K^3$ , naemlich der Schmiegungeebene von  $\alpha^3$  in jenem Punkte.

Die Tangentenflaeche von  $\alpha^3$  ist daher identisch mit der Flaeche der Beruehrungsstrahlen des Ebenenbueschels  $K^3$ .

Da eine beliebige Tripelreihe im Allgemeinen vier Tripel mit einem Doppelpunkt enthaelt und den vier Tripeln mit einem Doppelpunkt, die ihre Polarreihe enthaelt conjugirt ist so folgt:

Die Tangentenflaeche von  $\alpha^3$  ist von der vierten Klasse und der vierten Ordnung.

Einer Tripelreihe, deren Tripel zwei Punkte gemein haben, entspricht eine Sehne von  $\alpha^3$ , ihrer Polarreihe welche zwei dreifache Punkte enthaelt, die Schnittlinie von zwei Schmiegungebenen der  $\alpha^3$  oder eine „Axe“ des Bueschels  $K^3$ . Der Sehne von  $\alpha^3$  welche sie in den Punkten  $A$  und  $B$  schneidet, ist conjugirt die Axe von  $K^3$  in der sich die Schmiegungebenen von  $\alpha^3$  in  $A$  und  $B$  schneiden. Die beiden festen Punkte der Tripel der ersten Tri-

pelreihe sind zugleich die dreifachen Punkte der Polarreihe. Sind sie reell, so sind auch die entsprechenden Punkte und Schmiegungebenen von  $\alpha^3$  reell, und mit jenen sind auch diese imaginaer, d. h. die den Reihen entsprechende Sehne von  $\alpha^3$  und die ihr conjugirte Axe von  $K^3$  sind gleichzeitig eigentlich oder uneigentlich. Zugleich folgt:

Je nachdem eine Sehne von  $\alpha^3$  eine eigentliche oder uneigentliche ist, schneiden die durch die conjugirte Axe gehenden Ebenen  $\alpha^3$  in einem oder drei reellen Punkten. Und umgekehrt.

Oder, da jeder Punkt der Sehne der Nullpunkt einer durch die conjugirte Axe gehenden Ebene ist, folgt:

Durch einen Punkt einer eigentlichen Sehne geht nur eine reelle Schmiegungeebene.

Und:

Eine Ebene durch eine eigentliche Axe schneidet  $\alpha^3$  nur in einem reellen Punkt.

In jedem Tripelnetz liegen drei dreifache Punkte welche zu zweien eine Tripelreihe mit zwei dreifachen Punkten bestimmen, und eine Tripelreihe, deren Tripel zwei Punkte gemein haben, diejenigen beiden Punkte, deren gemischter Pol in dem Netze unbestimmt ist. Jene drei Reihen mit zwei dreifachen Punkten haben zu Polarreihen drei Reihen deren Tripel je zwei Punkte gemein haben und die Reihe, deren Tripel zwei Punkte gemein haben, hat zur Polarreihe eine mit zwei dreifachen Punkten. Diese Polarreihen gehen durch das Polartripel des gegebenen Netzes. Daraus folgt:

Durch jeden Punkt der Raumes gehen drei Axen des Bueschels  $K^3$  und geht eine Sehne der Curve  $\alpha^3$ .

In jeder Ebene des Raumes liegen drei Sehnen von  $\alpha^3$  und liegt eine Axe von  $K^3$ .

Ist die durch einen Punkt gehende Sehne von  $\alpha^3$  eine eigentliche, so gehen durch ihn eine uneigentliche und zwei conjugirt-imaginaere Axen von  $K^3$ .

Ist ebenso die in einer Ebene liegende Axe eine eigentliche, so liegen in ihr eine uneigentliche und zwei conjugirt-imaginaere Sehnen von  $K^3$ .

Einer Tripelreihe deren Tripel einen Punkt gemein haben, entspricht eine

Gerade, die  $\kappa^3$  in einem Punkte schneidet, der Polarreihe mit einem dreifachen Punkt entspricht die der ersteren conjugirte Gerade in einer Schmiegungeebene.

27. Es seien zwei singulaere Tripelnetze zweiter Art gegeben,  $A$  der Punkt des ersten,  $B$  der des zweiten, der mit jedem beliebigen Punktpaar ein Tripel eines der Netze bildet. Jedes Punktpaar des Traegers  $\kappa$  bestimmt mit  $A$  und  $B$  zwei Tripel, die ihrerseits eine Tripelreihe des Tripelgebiets bestimmen, deren Tripel zwei Punkte gemein haben. Beschreibt das Punktpaar eine Punktpaarreihe so beschreiben die Tripel, welche es mit  $A$  und  $B$  bildet, zwei Tripelreihen.

Daraus folgt dass die beiden Netze collinear sind, wenn man je zwei Tripel einander zuordnet, welche zwei Punkte gemein haben. Fuer den Raum giebt dies den Satz:

Aus je zwei Punkten der Curve  $\kappa^3$  werden die Sehnen der Curve durch zwei collineare Strahlenbuenchel projicirt.

Und reciprok:

Je zwei Ebenen des Ebenenbueschels  $K^3$  werden von der Axe des Bueschels  $K^3$  in collinearen Systemen geschnitten.

Daraus folgt zunaechst fuer zwei sich schneidende und dann fuer zwei beliebige Sehnen von  $\kappa^3$ , dass aus ihnen  $\kappa^3$  durch zwei projective Ebenenbueschel projicirt wird, ebenso, dass zwei Axen von den Ebenen des Bueschels  $K^3$  in projectiven Punktreihen geschnitten werden.

28. Betrachtet man das Punkttripelgebiet einer gegebenen Raumcurve III. Ordnung  $\kappa^3$ , so folgt aus der collinearen Beziehung dieses Gebietes zum Raum:

Die Ebenen eines Ebenenbuenchels schneiden  $\kappa^3$  in den Tripeln eines Punkttripelnetzes.

Das Tripelnetz ist ein singulaeres der ersten Art, wenn der Mittelpunkt des Ebenenbuenchels ein Punkt der Tangentenflaeche ist; es ist singulaer von der zweiten Art, wenn der Mittelpunkt auf der Curve  $\kappa^3$  selbst liegt und besteht dann aus diesem Punkt und saemmtlichen Punktpaaren von  $\kappa^3$ .

Die drei durch einen Punkt gehenden Schmiegungeebenen beruehren  $\kappa^3$  in den dreifachen Punkten desjenigen Tripelnetzes, welches durch die durch

den Punkt gehenden Ebenen bestimmt wird. Die Ebenen eines Ebenenbueschels schneiden  $\kappa^3$  in den Tripeln einer Punkttripelreihe. Die vier durch die Gerade gehenden Beruehrungsebenen von  $\kappa^3$  bestimmen die vier Tripel der Reihe mit je einem Doppelpunkt.

Die der Geraden in dem durch  $\kappa^3$  bestimmten Nullsystem conjugirte Gerade ist die Axe eines Ebenenbueschels dessen Ebenen  $\kappa^3$  in der zu der ersten conjugirten Tripelreihe schneiden.

Hat eine Gerade mit  $\kappa^3$  einen Punkt gemein, so schneiden die durch sie gehenden Ebenen  $\kappa^3$  ausser in jenem Punkte in den Punktpaaren einer Punktparreihe. Die Ebenen eines Ebenenbueschels, dessen Axe ein Leitstrahl des Nullsystems ist, schneiden  $\kappa^3$  in den Tripeln einer sich selbst conjugirten Reihe.

Den Tripeln mit einem Doppelpunkt eines Tripelnetzes auf einem Traeger  $\kappa$  entsprechen im Raume die saemmtlichen durch einen Punkt  $O$  gehenden Beruehrungsebenen von  $\kappa^3$ , die im Allgemeinen einen Kegel vierter Klasse bilden. Der Doppelpunkt eines Tripels eines Netzes ist ein erster Pol des einfachen Punktes des Tripels bezueglich des Netzes. Die Beziehungen, die zwischen den Punkten von  $\kappa$  und ihren ersten Polen bezueglich eines Tripelnetzes bestehen, lassen sich daher in folgender Weise auf die Raumcurve  $\kappa^3$  uebertragen.

Verbindet man einen Punkt  $S$  der nicht auf  $\kappa^3$  liegt, mit allen Punkten  $A$  von  $\kappa^3$ , so gehen durch jede Gerade  $SA$  ausser der in  $A$  beruehrenden Ebene noch zwei Beruehrungsebenen deren Beruehrungspunkte das Paar  $\alpha$  bilden moegen. Beschreibt der Punkt  $A$  die Curve  $\kappa^3$ , so beschreibt das Paar  $\alpha$  eine Punktpaarreihe, deren Paare den Punkten  $A$  projectiv zugeordnet sind. Die Doppelpunkte der Punktpaarreihe sind die Schnittpunkte der durch  $S$  gehenden Sehne von  $\kappa^3$  mit  $\kappa^3$ . Jedem derselben als einem Punkt  $A$  entspricht der anderen als ein Punktpaar  $\alpha$ . Die entsprechend gemeinschaftlichen Punkte der von  $A$  beschriebenen Punktreihe und der von  $\alpha$  beschriebenen Punktpaarreihe sind die Osculationspunkte der in  $S$  sich schneidenden Schmiegungeebenen von  $\kappa^3$ .

Es seien  $A, B, C$  drei Punkte von  $\kappa^3$  die mit  $S$  in einer Ebene liegen,  $\alpha, \beta, \gamma$  die Paare der Beruehrungspunkte derjenigen durch  $\overline{SA}, \overline{SB}, \overline{SC}$  gehenden Beruehrungsebenen von  $\kappa^3$ , die  $\kappa^3$  nicht in  $A, B, C$  beruehren, so sind je zwei der drei Punkte  $ABC$  durch das zum dritten gehoerige der drei Punktpaare  $\alpha, \beta, \gamma$  harmonisch getrennt. Schneidet die Beruehrungsebene von  $\kappa^3$  im Punkte  $A$ , welche durch  $\overline{SA}$  geht, die Curve noch im Punkte  $A_1$ , so sind  $A$  und  $A_1$  harmonisch getrennt, durch die Punkte des Paares  $\alpha$ , in

denen die beiden anderen durch  $\overline{SA}$  gehenden Beruehrungsebenen  $\kappa^3$  beruehren.

Die Osculationspunkte der in einem Punkt  $S$  sich schneidenden Schmiegungsebenen von  $\kappa^3$  bilden mit jedem der Schnittpunkte von  $\kappa^3$  mit der durch  $S$  gehenden Sehne vier aequi-anharmonische Punkte.

Alle Ebenen, welche sich in einer Axe der Ebenenbueschels III. Ordnung  $K^3$  schneiden, schneiden  $\kappa^3$  in je drei Punkten, welche mit jedem der Schnittpunkte von  $\kappa^3$  mit der der Axe conjugirten Sehne von  $\kappa^3$  vier aequi-anharmonische Punkte bilden. Die drei Schnittpunkte jeder Ebene bilden zugleich ein Tripel einer cyclisch-projectiven Beziehung von  $\kappa^3$  auf sich selbst, deren Doppelpunkte die Schnittpunkte der Sehne mit  $\kappa^3$  sind.

Sucht man zu den drei Schnittpunkten mit  $\kappa^3$  einer durch eine Axe von  $K^3$  gehenden Ebene in jeder Zuordnung den vierten harmonischen, so geht die Ebene, welche diese drei vierten harmonischen Punkte verbindet gleichfalls durch jene Axe von  $K^3$ . Es ist leicht zu sehen, dass die vorigen Saetze sich in solche fuer die Kegelflaeche III. Ordnung durch welche  $\kappa^3$  aus dem Punkt  $S$  projectirt wird, umwandeln lassen. Ich gehe hierauf nicht ein, und uebergehe auch die reciproken Saetze.

29. Aus einem beliebigen ihrer Punkte wird die Raumcurve  $\kappa^3$  auf eine beliebige Ebene  $\alpha$  als eine Curve II. Ordnung  $\kappa$  projectirt. In dieser schneidet naemlich die Ebene  $\alpha$  die Kegelflaeche II. Ordnung durch welche  $\kappa^3$  aus jenem Punkte projectirt wird. Hierdurch wird auch das Punkttripelgebiet von  $\kappa^3$  perspectiv auf das Punkttripelgebiet der Curve  $\kappa$  bezogen.

Mit Beruecksichtigung der Eigenschaften des letzteren folgt daraus:

Projectirt man die Punkttripel von  $\kappa^3$ , in denen sie von den Ebenen eines Ebenenbueschels I. Ordnung geschnitten wird, aus einem gegebenen Punkt von  $\kappa^3$  auf eine Ebene, so bilden die Projectionspunkte der Tripel die Eckpunkte von unendlich vielen Dreiecken, die einer Curve II. Ordnung  $\kappa$  eingeschrieben, einer zweiten  $\lambda$  umschrieben sind.

Verfaehrt man so mit allen Ebenenbuescheln, deren Axen durch einen gegebenen Punkt gehen, so bilden die Curven  $\lambda$  eine Schaarschaar von Curven II. Klasse, welche eine gemeinschaftliche Tangente haben. Sie ist die Projection der durch den gegebenen Punkt gehenden Sehne von  $\kappa^3$  (\*).

(\*) *Theorie der tril. sym. Verwandtschaft*, § 24.

Man wird hierdurch zur Betrachtung einer Verwandtschaft gefuehrt, welche zwischen dem Sehnensystem von  $\kappa^3$  und der Ebene der Curve  $\kappa$  besteht und deren Zusammenhang mit der Beziehung der Tripelgebiete von  $\kappa^3$  und  $\kappa$  leicht zu zeigen ist. Im Tripelgebiet von  $\kappa$  stellt jede Tripelreihe, deren Tripel zwei feste Punkte  $AB$  enthalten, eine Sehne von  $\kappa^3$  dar. Nun ist die Tripelreihe durch die Punkte  $AB$  bestimmt, daher duerfen wir sagen, den Punktpaaren von  $\kappa$  entsprechen die Sehnen von  $\kappa^3$ . Ziehen wir endlich die Gerade, welche die Punkte eines Paares von  $\kappa$  verbindet, so koennen wir auch dieser eine Sehne von  $\kappa^3$  entsprechen lassen. Nun ist aber bei unserer perspectiven Beziehung von  $\kappa^3$  auf  $\kappa$  diese Gerade nichts anderes, als die Projection der ihr entsprechenden Sehne von  $\kappa^3$  aus dem gegebenen Punkt von  $\kappa^3$  auf die Ebene von  $\kappa$ , denn sie verbindet die Punkte auf  $\kappa$ , welche die Projectionen der Schnittpunkte der entsprechenden Sehne mit  $\kappa^3$  sind.

Es ist also jeder Sehne von  $\kappa^3$  ihre Projection auf die Ebene von  $\kappa$  zugeordnet; den Punkten und Tangenten von  $\kappa^3$  sind die Punkte und Tangenten von  $\kappa$  zugeordnet.

Diese Beziehung des Sehnensystems von  $\kappa^3$  und der Ebene von  $\kappa$  ist aber eine projective, denn das Sehnensystem ist projectiv zu jedem Strahlenbuen-del, durch den es aus einem Punkt von  $\kappa^3$  projecirt wird und daher auch zu dem Schnitt der Ebene von  $\kappa$  mit einem dieser Buendel.

Diese Beziehung ist im Wesentlichen dieselbe, die Herr REYE (*Geometrie der Lage*, 2 Abth., 2 Aufl., pag. 113) behandelt hat, nur dass dort den Sehnen von  $\kappa^3$  die Punkte einer Ebene und zwar in allgemeiner Lage zugeordnet sind.

Den Strahlen einer durch  $\kappa^3$  gehenden Kegelflaeche entsprechen die Strahlen eines Strahlenbueschels dessen Mittelpunkt auf  $\kappa$  liegt; denjenigen Buescheln, deren Mittelpunkte nicht auf  $\kappa$  liegen, entsprechen die durch  $\kappa^3$  gehenden Regelflaechen. Der Mittelpunkt des Bueschels ist die Projection desjenigen Leitstrahls der aus Sehnen bestehenden Regelschaar der Flaeche, welcher durch den Projectionspunkt von  $\kappa^3$  geht. Auch aus der Betrachtung des Tripelgebiets auf  $\kappa$  ergiebt sich dieses.

Den Geraden und Punkten der Ebene der Curve  $\kappa$  sind so die Strahlen und Kegel-resp. Regelflaechen des Sehnensystems von  $\kappa^3$  zugeordnet. Man kann daraus schliessen, dass, wie durch zwei Sehnen alle Mal eine Regelschaar von Sehnen bestimmt ist, auch durch zwei Regelschaaren von Sehnen des Systems eine Sehne bestimmt ist, oder dass zwei durch  $\kappa^3$  gehende Regelflaechen noch eine Sehne von  $\kappa^3$  gemein haben.

30. Wir sind von der Betrachtung des Tripelgebiets auf einer Curve II. Ordnung  $\alpha$  ausgegangen, und haben aus der collinearen Beziehung, welche sich zwischen diesem und dem Raum herstellen laesst, auf die Existenz der Raumcurve III. Ordnung  $\alpha^3$  geschlossen und das Tripelgebiet dieser in Betracht gezogen. Da nun die Eigenschaften des Tripelgebiets in Elementar-Gebilden erster Stufe projectiv sich uebertragen, so kann man auch, die Raumcurve  $\alpha^3$  und deren Eigenschaften als bekannt vorausgesetzt, von dieser ausgehen, um die Eigenschaften des Tripelgebiets eines beliebigen Gebildes erster Stufe zu erkennen. Die Ableitung gewisser Saetze z. B. der in § 20 wird dadurch anschaulicher.

So wurde der Satz bewiesen: Durch vier Punktpaare sind zwei Tripelreihen bestimmt, so dass die Punktpaare je vier Tripeln jeder derselben angehoren (21). Fuer den Raum mit Zugrundelegung der Raumcurve  $\alpha^3$  ist der Satz nur eine Uebertragung des bekannten Satzes, dass vier Gerade im Raume im Allgemeinen von zwei Geraden geschnitten werden. Nimmt man vier Tangenten von  $\alpha^3$  an, so gilt noch der specielle Satz:

Durch vier Punkte als Doppelpunkte der singulaeren Tripel einer Tripelreihe sind im Allgemeinen zwei conjugirte Tripelreihen bestimmt (18).

31. Ich will schliesslich noch die Construction der Schnittpunkte einer Ebene mit der Raumcurve  $\alpha^3$  angeben, welche Construction auf den Eigenschaften eines Tripelnetzes beruht. Man kann die Schnittpunkte bekanntlich so construiren, dass man  $\alpha^3$  aus zwei ihrer Punkte durch collineare Strahlenbueudel projicirt, diese mit der Ebene zum Durchschnitt bringt, so sind die entsprechend gemeinschaftlichen Punkte der in einander liegenden collinearen ebenen Systeme die gesuchten Punkte (\*). Bei der Curve II. Ordnung ist dieser Construction analog diejenige der Schnittpunkte einer Geraden mit der Curve, welche darauf beruht, drei Punkte der Curve aus zwei anderen durch projective Bueschel zu projiciren, diese durch die Gerade in zwei projectiven Punktreihen zu schneiden und die entsprechend gemeinschaftlichen Punkte zu bestimmen. Eine zweite Construction beruht darauf, auf der Geraden die involutorische Lage zu bestimmen, welche von den Paaren der bezueglich der Curve conjugirten Punktpaare gebildet wird und deren Doppelpunkte aufzusuchen. Mit dieser hat die Construction der Schnittpunkte von  $\alpha^3$  mit einer Ebene, die ich nun darlegen will, einige Analogie.

---

(\*) REYE, *Geometrie der Lage*, II, 2 Aufl., pag. 91.

Schneidet die Ebene  $\alpha$  die Curve  $\kappa^3$  in den Punkten  $ABC$ , so sind  $ABC$  zugleich die Osculationspunkte der vom Nullpunkt  $P$  der Ebene  $\alpha$  an  $\kappa^3$  gehenden Schmiegungebenen und daher die dreifachen Punkte derjenigen Tripelnetzes auf  $\kappa^3$ , dessen Tripel in den Ebenen des Ebenenbündels  $P$  liegen. Projicirt man  $\kappa^3$  und dieses Tripelnetz aus irgend einem Punkte  $O$  von  $\kappa^3$  auf die Ebene  $\alpha$ , so erhaelt man als Projection von  $\kappa^3$  eine Curve II. Ordnung  $\kappa$ , die durch  $ABC$  geht und als Projection des Tripelnetzes auf  $\kappa^3$  ein Tripelnetz auf  $\kappa$ , dessen dreifache Punkte gleichfalls die Punkte  $ABC$  sind, denn projectiv entspricht jedem dreifachen Punkte eines Tripelnetzes ein dreifacher Punkt eines zweiten.

Ist nun  $\kappa^3$  durch sechs Punkte gegeben, so projicire man aus einem derselben  $O$  die uebrigen fuenf durch Strahlen und schneide die letzteren mit der Ebene  $\alpha$ , so erhaelt man fuenf Punkte der Curve II. Ordnung  $\kappa$ , in welche  $\kappa^3$  aus  $O$  projicirt wird. Nun construire man den Nullpunkt  $P$  der Ebene  $\alpha$  in dem durch  $\kappa^3$  bestimmten Nullsystem, verbinde  $P$  mit dreimal zwei Punkten von den sechs gegebenen, und zwar so, dass man drei nicht in einer Geraden sich schneidende Ebenen erhaelt, construire die dritten Schnittpunkte dieser Ebenen mit  $\kappa^3$ , und projicire die drei Punkttripel, in denen  $\kappa^3$  von den Ebenen geschnitten wird, und durch welche das Tripelnetz auf  $\kappa^3$  bestimmt ist, dessen Tripel in den durch  $P$  gehenden Ebenen liegen, auf die Curve II. Ordnung  $\kappa$ . Man erhaelt auf dieser drei Tripel, die nicht derselben Tripelreihe angehoren. Die dreifachen Punkte des durch sie bestimmten Netzes sind die Schnittpunkte von  $\kappa^3$  mit der Ebene  $\alpha$ .

Marburg (Hessen), 19 Juli 1890.

---

# Alcuni teoremi sulle superficie sviluppabili.

(Di GEMINIANO PIRONDINI, a Parma.)

---

Siano  $L(\rho, r)$ ,  $L_1(\rho_1, r_1)$  due geodetiche parallele di una medesima superficie sviluppabile  $\Sigma$ ,  $i$  l'inclinazione di queste linee sulle generatrici rettilinee e  $k$  la loro distanza geodetica costante.

Se  $A$  e  $A_1$  sono i punti in cui una medesima generatrice rettilinea di  $\Sigma$  sega le curve  $L$ ,  $L_1$ , si ha:

$$AA_1 = \frac{k}{\text{sen } i}.$$

Se dunque denotiamo con  $(\alpha, \beta, \gamma)$ ,  $(l, m, n)$  gli angoli formati cogli assi coordinati dalla tangente e dalla binormale di  $L$  e si osserva che:

$$\cot i = \frac{\rho}{r},$$

le coordinate  $x_1, y_1, z_1$  di  $A_1$  sono legate alle coordinate  $x, y, z$  di  $A$  dalle relazioni:

$$x_1 = x + k \left( \cos l - \frac{\rho}{r} \cos \alpha \right), \quad \text{ecc.}$$

Sia  $S$  la sviluppabile osculatrice di  $L$ ,  $S_1$  una sviluppabile parallela a  $S$ ,  $\Lambda$  la linea di  $S_1$  che corrisponde alla linea  $L$  di  $S$  e  $\Lambda_1$  lo spigolo di regresso di  $S_1$ .

Se si osserva che le coordinate  $\xi, \eta, \zeta$  d'un punto qualunque di  $\Lambda$  sono espresse dalle formole:

$$\xi = x + k \cos l, \quad \eta = y + k \cos m, \quad \zeta = z + k \cos n,$$

essendo  $k$  la distanza costante fra le superficie parallele  $S, S_1$ , si trova che

le coordinate d'un punto qualunque della superficie  $S_1$  sono date come segue:

$$X = \xi + v \cos \alpha = x + k \cos l + v \cos \alpha, \text{ ecc.},$$

essendo  $v$  le distanze contate sulle generatrici di  $S_1$  a partire da  $\Lambda$ .

Per mezzo di queste formole e con un calcolo ben noto, si trova:

$$- k \cdot \frac{\rho}{r},$$

per espressione della distanza fra le coppie di punti corrispondenti delle due linee  $\Lambda$  e  $\Lambda_1$ ; conseguentemente le coordinate  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$  d'un punto qualunque di  $\Lambda_1$  sono espresse nel modo seguente:

$$\xi_1 = x + k \cos l - k \frac{\rho}{r} \cos \alpha, \text{ ecc.}$$

Queste equazioni ci dicono che la linea  $\Lambda_1$  coincide colla precedente  $L_1$ .

Si ha dunque il teorema:

« Se si costruisce una serie di sviluppabili parallele a una sviluppabile data  $S$ :

1.° Gli spigoli di regresso di queste superficie sono situati sopra una medesima sviluppabile  $\Sigma$ .

2.° Questi spigoli di regresso formano sulla sviluppabile  $\Sigma$  una serie di geodetiche parallele.

3.° La distanza geodetica fra due di queste linee è eguale alla distanza fra le due sviluppabili parallele corrispondenti.

4.° La superficie  $\Sigma$  è la sviluppabile rettificante dello spigolo di regresso di  $S$ . »

Le equazioni (7) date al § 4 della mia Nota: *Sulla determinazione delle linee di cui il rapporto della curvatura alla torsione è una funzione nota dell'arco* (\*), si possono applicare alla determinazione del raggio di curvatura  $\rho_1$  e del raggio di torsione  $r_1$  di  $L_1$  per mezzo delle quantità analoghe relative alla linea  $L$ .

Infatti se si osserva che in questo caso:

$$\frac{r}{\rho} = \frac{r_1}{\rho_1}, \tag{1}$$

se si indica  $\frac{r}{\rho}$  con  $\theta$  e  $\frac{r_1}{\rho_1}$  con  $\theta_1$ , le equazioni (7) danno:

$$\frac{2\theta_1'^2 - \theta_1\theta_1''}{\theta_1'^3} = \frac{2\theta'^2 - \theta\theta''}{\theta'^3}; \quad \frac{r_1(2\theta_1'^2 - \theta_1\theta_1'')}{\theta_1'^2} = \frac{r(2\theta'^2 - \theta\theta'')}{\theta'^2},$$

(\*) Annali di Matematica, 1891.

dalle quali si ricava:

$$r_1 \frac{d\theta_1}{ds_1} = r \frac{d\theta}{ds}. \quad (2)$$

La relazione fra l'arco  $s_1$  di  $L_1$  e l'arco  $s$  di  $L$  è data dalla formola (13) del § 7 della mia Nota citata, quando vi si supponga:

$$\alpha = 0, \quad m = 0, \quad n = k, \quad f(s) = \frac{\rho}{r}.$$

Si ha dunque:

$$s_1 = s - k \cdot \frac{\rho}{r};$$

e se si fa uso di quest'eguaglianza, le (1), (2) ci danno  $\rho_1$  e  $r_1$ .

Sussiste dunque il teorema:

« Lo spigolo di regresso  $L_1$  della sviluppabile  $S_1$  parallela a una sviluppabile qualunque  $S$  di cui lo spigolo di regresso è  $L$ , è una geodetica della sviluppabile rettificante di  $L$ ; le linee  $L$  e  $L_1$  sulla detta superficie sono geodeticamente parallele e la distanza geodetica costante di queste linee è uguale alla distanza delle superficie parallele  $S, S_1$ . Le formole che legano gli elementi geometrici di  $L_1$  agli elementi di  $L$  sono le seguenti:

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 &= \rho \left\{ 1 - k \frac{d}{ds} \left( \frac{\rho}{r} \right) \right\} \\ r_1 &= r \left\{ 1 - k \frac{d}{ds} \left( \frac{\rho}{r} \right) \right\} \\ s_1 &= s - k \cdot \frac{\rho}{r} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Queste formole servono alla determinazione della linea  $L_1$  quando sia nota  $L$ .

Applicazione. — La linea  $L_1$  è eguale ad  $L$  quando:

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\rho}{r} \right) = 0;$$

questa condizione è equivalente all'altra:

$$\frac{\rho}{r} = \text{costante}.$$

La linea  $L_1$  è simile ad  $L$  quando:

$$1 - k \frac{d}{ds} \left( \frac{\rho}{r} \right) = a,$$

con  $a$  costante; si ha di qui:

$$\frac{\rho}{r} = \frac{1-a}{k} s + \text{cost.},$$

la quale dimostra che  $L$  è una geodetica d'un cono.

Dunque: « *Fra le superficie sviluppabili quelle di cui lo spigolo di regresso è un'elica cilindrica o una geodetica d'un cono, sono caratterizzate dalla proprietà che gli spigoli di regresso delle loro sviluppabili parallele sono linee rispettivamente eguali o simili* ».

Si può enunciare la proprietà che precede anche nel modo seguente: « *Il cilindro e il cono sono le superficie sviluppabili caratterizzate dalla proprietà che le geodetiche parallele sono linee rispettivamente eguali o simili* ».

Le equazioni (3) suppongono che la linea  $L$  non si riduca a un punto; si deve quindi considerare a parte questo caso eccezionale.

Sia  $S$  un cono col vertice nell'origine degli assi coordinati; se denotiamo con

$$(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma); \quad (\cos l, \cos m, \cos n); \quad (\cos \lambda, \cos \mu, \cos \nu),$$

i coseni direttori delle generatrici rettilinee, delle normali alla superficie del cono e delle rette perpendicolari ai piani determinati dalle coppie di rette precedenti, la linea  $L_1$  è rappresentata dalle equazioni:

$$x_1 = k \left\{ \cos l - \left( \frac{\rho}{r} \right)_0 \cos \alpha \right\}, \quad \text{ecc.},$$

essendo  $\left( \frac{\rho}{r} \right)_0$  ciò che diviene il rapporto  $\frac{\rho}{r}$  relativo alla linea  $L$  quando essa si riduca a un punto.

Seghiamo il cono  $S$  con una sfera di raggio 1 col centro nel vertice e sia  $\Lambda$  la linea sferica che si ottiene. L'angolo infinitesimo di due generatrici consecutive del cono è misurato dall'arco elementare  $d\sigma$  di  $\Lambda$  e l'angolo infinitesimo di due piani tangenti consecutivi della superficie conica è misurato dall'angolo di contingenza geodetica  $\frac{d\sigma}{R_g}$  di  $\Lambda$ ; si ha dunque:

$$\left( \frac{\rho}{r} \right)_0 = \frac{1}{R_g},$$

e le formole precedenti divengono:

$$x_1 = k \left( \cos l - \frac{1}{R_g} \cos \alpha \right), \text{ ecc.}$$

Se si osserva che si ha:

$$\frac{d \cos \alpha}{d \sigma} = \cos \lambda; \quad \frac{d \cos l}{d \sigma} = \frac{\cos \lambda}{R_g}, \text{ ecc.,}$$

si può scrivere la relazione:

$$\frac{d s_1}{d \sigma} = -k \left( \frac{1}{R_g} \right)',$$

la quale, coll'applicazione delle formole:

$$\frac{d s_1}{\rho_1} = d \sigma, \quad \frac{d s_1}{r_1} = \frac{d \sigma}{R_g},$$

dà le altre:

$$\rho_1 = -k \frac{d}{d \sigma} \left( \frac{1}{R_g} \right); \quad r_1 = -k R_g \cdot \frac{d}{d s} \left( \frac{1}{R_g} \right); \quad d s_1 = -k \frac{d}{d s} \left( \frac{1}{R_g} \right) d \sigma. \quad (4)$$

Dunque: « Per lo spigolo di regresso della sviluppabile parallela a un cono non circolare hanno luogo le formole (4), nelle quali  $\sigma$  e  $R_g$  sono l'arco e il raggio di curvatura geodetica della linea  $\Lambda$  che si ottiene segnando il cono con una sfera di raggio unitario avente il centro nel vertice ».

• Le equazioni (4) sono quelle che sostituiscono le (3) quando la linea  $L$  degenera in un punto a distanza finita.

Se  $S$  è un cono circolare,  $R_g$  è costante e le (4) danno:

$$s_1 = \rho_1 = r_1 = 0;$$

ciò è ben naturale, poichè in questo caso la superficie parallela al cono è un altro cono.

Se nelle equazioni:

$$x_1 = k \left( \cos l - \frac{1}{R_g} \cos \alpha \right), \text{ ecc.,}$$

si suppone che  $k$  sia una variabile indipendente da  $\sigma$ , si ottengono le coordinate d'un punto qualunque di una certa superficie  $s$ ; e poichè:

$$E = \Sigma \left( \frac{\partial x_1}{\partial \sigma} \right)^2 = k^2 \left( \frac{1}{R_g} \right)'; \quad F = \Sigma \left( \frac{\partial x_1}{\partial \sigma} \frac{\partial x_1}{\partial k} \right) = \frac{k}{R_g} \left( \frac{1}{R_g} \right)';$$

$$G = \Sigma \left( \frac{\partial x_1}{\partial k} \right)^2 = 1 + \left( \frac{1}{R_g} \right)';$$

se si indica con  $\rho_k$  il raggio di curvatura geodetica delle linee  $k = \text{cost.}$  e con  $\rho_t$  quello delle linee  $t = \text{cost.}$  traiettorie ortogonali delle  $k = \text{cost.}$ , si ha:

$$\frac{1}{\rho_k} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left\{ \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial k} - \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{F}{\sqrt{E}} \right) \right\} = 0;$$

$$\frac{1}{\rho_t} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}} \right) = 0.$$

La superficie  $s$  contiene dunque due sistemi di geodetiche ortogonali e quindi essa è sviluppabile.

Se poi si osserva che i coseni direttori  $\cos \alpha_\sigma$ ,  $\cos \beta_\sigma$ ,  $\cos \gamma_\sigma$  della tangente alle linee  $\sigma = \text{cost.}$  sono dati dalle equazioni:

$$\cos \alpha_\sigma = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x_1}{\partial k} = \frac{\cos l - \frac{1}{R_g} \cos \alpha}{\sqrt{1 + \left( \frac{1}{R_g} \right)^2}}, \text{ ecc.},$$

si deduce che sulla superficie  $s$  le linee  $\sigma = \text{cost.}$  sono le generatrici rettilinee; e poichè risulta:

$$x_1 = y_1 = z_1 = 0$$

quando la variabile  $k$  assume il valore 0, si conclude che la superficie  $s$  è un cono il cui vertice è nell'origine degli assi coordinati.

Le linee  $k = \text{cost.}$  sono dunque delle geodetiche parallele d'una superficie conica; le equazioni (4) ci danno infatti:

$$\frac{\rho_1}{r_1} = \frac{a - s_1}{k}.$$

(essendo  $a$  una costante) la quale è, come si sa, la relazione caratteristica delle geodetiche di cono.

Determiniamo la posizione reciproca del cono dato  $C$  e del cono  $C_1$  luogo delle linee  $k = \text{cost.}$

Siano  $\Lambda$  e  $\Lambda_1$  le curve secondo le quali rimangono intersecate le superficie dei 2 cono  $C$  e  $C_1$  da una sfera di raggio unitario avente il centro nel vertice comune; l'eguaglianza:

$$\Sigma \cos \alpha_\sigma \cdot \cos \lambda = 0,$$

che si può ricavare dalle equazioni precedenti, ci insegna che le generatrici del cono  $C_1$  sono nei piani normali della linea sferica  $\Lambda$ .

Se poi si indica con  $\varepsilon$  l'angolo formato dalle generatrici rettilinee corrispondenti dei coni  $C$ ,  $C_1$ , si ha:

$$\cos \varepsilon = \sum \cos \alpha_\sigma \cdot \cos \alpha = - \frac{\frac{1}{R_g}}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{R_g}\right)^2}},$$

da cui:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = - R_g.$$

Quest'eguaglianza dimostra che la linea  $\Lambda_1$  è la sviluppata sferica di  $\Lambda$ .

Si ha dunque il teorema generale seguente:

*« Se si costruisce una serie di sviluppabili parallele a un cono dato  $C$ :*

1.° *Gli spigoli di regresso di queste superficie sono sopra un altro cono  $C_1$  il cui vertice coincide con quello del cono dato.*

2.° *Questi spigoli di regresso sono geodetiche parallele del cono  $C_1$ .*

3.° *La linea secondo la quale il cono  $C_1$  è tagliato da una sfera il cui centro è nel vertice, è la sviluppata sferica della linea secondo la quale il cono  $C$  è segato dalla medesima sfera. »*

Parma, aprile 1891.

# Ricerca del rapporto fra i discriminanti di un'equazione algebrico-differenziale di 1.° ordine e della sua primitiva completa per mezzo della teoria delle curve piane razionali.

(Di GABRIELE TORELLI, a Napoli.)

---

1. Nel precedente lavoro: *Contribuzione alla teoria delle equazioni algebrico-differenziali* (\*), io mi occupai della relazione:

$$G = gk^2,$$

dove  $G$  è il discriminante della primitiva completa:

$$f_0 \omega^m + f_1 \omega^{m-1} + \dots + f_m = 0, \quad (1)$$

$g$  quello della equazione differenziale che s'ottiene eliminando la costante arbitraria  $\omega$  fra (1) e la sua differenziale immediata, e  $k$  è una espressione composta in modo razionale intero colle prime derivate parziali delle  $f_0, f_1, \dots, f_m$  rispetto alle variabili.

Prendendo le mosse da due memorie del compianto prof. CASORATI io riuscii a costruire la funzione  $k$  qualunque sia  $m$ , non essendo ciò fin allora stato fatto che pei valori particolari di  $m = 2, 3, 4$ .

Nell'intento di rinvenire un modo più semplice per formare la espressione in discorso io ora ho ripresa in esame la medesima quistione, ed ho

---

(\*) Giornale di Matematiche BATTAGLINI, vol. 24, pag. 280, 1886.

rintracciato un metodo geometrico per pervenire alla costruzione di  $k$ . La forma, cui tale via mi ha condotto, è la medesima di quella sotto la quale io precedentemente presentai la espressione  $k$ . Nonpertanto stimo opportuno pubblicare questo nuovo procedimento, sia perchè esso si presta ad ulteriori trasformazioni, sia perchè il significato geometrico può facilitare lo studio delle proprietà della espressione  $k$ .

2. Consideriamo le tre forme:

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= a_0 \lambda_1^n + a_1 \lambda_1^{n-1} \lambda_2 + \dots + a_n \lambda_2^n, \\ b(\lambda) &= b_0 \lambda_1^n + b_1 \lambda_1^{n-1} \lambda_2 + \dots + b_n \lambda_2^n, \\ c(\lambda) &= c_0 \lambda_1^n + c_1 \lambda_1^{n-1} \lambda_2 + \dots + c_n \lambda_2^n, \end{aligned}$$

e supponiamo che nella  $c(\lambda)$  si operi la trasformazione delle variabili  $\lambda_1, \lambda_2$  nelle altre  $\mu_1, \mu_2$  mediante l'equazione:

$$\mu_1 b(\lambda) - \mu_2 a(\lambda) = 0.$$

Se  $C(\mu)$  è la trasformata e  $g, G$  sono rispettivamente i discriminanti di  $c(\lambda)$ ,  $C(\mu)$  si ha:

$$G = gk^2,$$

dove  $k$  è una funzione razionale intera ordinatamente dei gradi:

$$\frac{n(n-1)}{2}, \quad \frac{n(n-1)}{2}, \quad (n-1)^2,$$

rispetto ai coefficienti  $a, b, c$ , ed essa eguagliata a 0 è la condizione necessaria e sufficiente acciocchè sia possibile determinare il rapporto  $\frac{\mu_1}{\mu_2}$  in modo che  $\mu_1 b(\lambda) - \mu_2 a(\lambda)$  e  $c(\lambda)$  abbiano un fattore di 2.° grado di comune (\*).

Ciò premesso consideriamo la curva piana razionale le coordinate dei

---

(\*) Vedi la già citata mia *Contribuzione ecc.*; confronta pure GORDAN, *Ueber die Invarianten binärer Formen bei höheren Transformationen* (Giornale di CRELLE, vol. 71, pag. 164), e il mio lavoro: *Della trasformazione cubica di una forma binaria cubica*. Rendiconti del Circolo Matem. di Palermo, vol. 2, pag. 169, nota a piè di pagina.



$n - 1$  delle dette ignote. Ponendo:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 \cdot 0 & a_0 & a_1 \cdot a_{n-2} \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 & b_0 & b_1 \cdot b_{n-2} \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 & c_0 & c_1 \cdot c_{n-2} \cdot 0 \\ x_1 \cdot 0 & 0 & a_0 \cdot a_{n-3} \cdot 0 \\ x_2 \cdot 0 & 0 & b_0 \cdot b_{n-3} \cdot 0 \\ x_3 \cdot 0 & 0 & c_0 \cdot c_{n-3} \cdot 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 \cdot x_1 & 0 & 0 \cdot a_0 \cdot a_n \\ 0 \cdot x_2 & 0 & 0 \cdot b_0 \cdot b_n \\ 0 \cdot x_3 & 0 & 0 \cdot c_0 \cdot c_n \end{vmatrix}, \dots, \Delta_2 = \begin{vmatrix} x_1 \cdot 0 & a_0 & a_1 \cdot a_{n-2} \cdot 0 \\ x_2 \cdot 0 & b_0 & b_1 \cdot b_{n-2} \cdot 0 \\ x_3 \cdot 0 & c_0 & c_1 \cdot c_{n-2} \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 & 0 & a_0 \cdot a_{n-3} \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 & 0 & b_0 \cdot b_{n-3} \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 & 0 & c_0 \cdot c_{n-3} \cdot 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 \cdot x_1 & 0 & 0 \cdot a_0 \cdot a_n \\ 0 \cdot x_2 & 0 & 0 \cdot b_0 \cdot b_n \\ 0 \cdot x_3 & 0 & 0 \cdot c_0 \cdot c_n \end{vmatrix},$$

$$\dots, \Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} x_1 \cdot 0 & a_0 \cdot a_{n-3} & a_{n-2} \cdot 0 \\ x_2 \cdot 0 & b_0 \cdot b_{n-3} & b_{n-2} \cdot 0 \\ x_3 \cdot 0 & c_0 \cdot c_{n-3} & c_{n-2} \cdot 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 \cdot x_1 & 0 \cdot a_0 & a_1 \cdot 0 \\ 0 \cdot x_2 & 0 \cdot b_0 & b_1 \cdot 0 \\ 0 \cdot x_3 & 0 \cdot c_0 & c_1 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 & a_0 \cdot a_n \\ 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 & b_0 \cdot b_n \\ 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 & c_0 \cdot c_n \end{vmatrix},$$

abbiamo:

$$\frac{\lambda_1^{n-2}}{\Delta_1} = \frac{\lambda_1^{n-3} \lambda_2}{\Delta_2} = \dots = \frac{\lambda_2^{n-2}}{\Delta_{n-1}}.$$

Se dunque  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$  è il valore del parametro corrispondente a un punto  $(x_1, x_2, x_3)$  della curva, per questo passano le curve di ordine  $n - 2$ :

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 \Delta_2 - \lambda_2 \Delta_1 &= 0 \\ \lambda_1 \Delta_3 - \lambda_2 \Delta_2 &= 0 \\ \dots &\dots \\ \lambda_1 \Delta_{n-1} - \lambda_2 \Delta_{n-2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Ora a un punto doppio corrispondono due valori del parametro  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \frac{\lambda'_1}{\lambda'_2}$ ; perciò le sue coordinate verificar debbono anche le altre relazioni:

$$\begin{aligned} \lambda'_1 \Delta_2 - \lambda'_2 \Delta_1 &= 0 \\ \lambda'_1 \Delta_3 - \lambda'_2 \Delta_2 &= 0 \\ \dots & \\ \lambda'_1 \Delta_{n-1} - \lambda'_2 \Delta_{n-2} &= 0, \end{aligned}$$

le quali confrontate colle (3) danno che le coordinate dei punti doppi soddisfano le equazioni;

$$\Delta_1 = 0, \quad \Delta_2 = 0, \dots, \quad \Delta_{n-1} = 0. \tag{4}$$

Dunque:

*Le curve dell'ordine  $n - 2$  rappresentate dalle equazioni (4) passano pei punti doppi della curva (2) (\*).*

4. Le equazioni (4) possono servire a determinare le coordinate dei punti doppi della curva razionale. Così per es. basta ordinarle rispetto ad  $x_1$  ed eliminare  $x_1^{n-2}, x_1^{n-3}, \dots, x_1$ . La risultante sarà rappresentata da un determinante le cui colonne saranno rispettivamente di grado 0, 1, 2, ...,  $n - 2$  nelle  $x_2, x_3$ . Decomponendolo in determinanti a colonne semplici, e ordinando otterremo un'equazione di grado  $\frac{1}{2}(n - 2)(n - 1)$  rispetto al rapporto  $\frac{x_3}{x_2}$ .

L'ultimo termine di questa equazione eguagliato a 0 rappresenta la condizione, affinchè uno dei punti doppi della curva (2) giaccia sulla retta  $x_3 = 0$ , ossia ci fornisce l'espressione di  $k$ . Per ottenere questa più brevemente, noi possiamo fin dal principio introdurre l'ipotesi  $x_3 = 0$  nelle (4). Sviluppando dopo ciò ogni determinante  $\Delta$  secondo le potenze discendenti di  $x_1$  e indicando con

$$(-)^{i-1+n} D_{1,i}, \quad (-)^{i-2+n} D_{2,i}, \dots, \quad (-)^{i+1} D_{n-1,i},$$

rispettivamente i coefficienti di  $x_1^{n-2}, x_1^{n-3} x_2, \dots, x_2^{n-2}$  in  $\Delta_i$  ricaveremo dalle (4) il sistema:

$$\begin{aligned} D_{1,1} x_1^{n-2} - D_{2,1} x_1^{n-3} x_2 + \dots + (-)^{n-2} D_{n-1,1} x_2^{n-2} &= 0 \\ D_{1,2} x_1^{n-2} - D_{2,2} x_1^{n-3} x_2 + \dots + (-)^{n-2} D_{n-1,2} x_2^{n-2} &= 0 \\ \dots & \\ D_{1,n-1} x_1^{n-2} - D_{2,n-1} x_1^{n-3} x_2 + \dots + (-)^{n-2} D_{n-1,n-1} x_2^{n-2} &= 0. \end{aligned}$$

(\*) Vedi FRIEDRICH, *Die rationale Plancurve 4 Ordnung*, § 11. Giessen, 1886.

Perchè coesistano queste equazioni deve essere:

$$\begin{vmatrix} D_{1,1} & D_{1,2} & \dots & D_{1,n-1} \\ D_{2,1} & D_{2,2} & \dots & D_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{n-1,1} & D_{n-1,2} & \dots & D_{n-1,n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Questa condizione è dunque necessaria perchè un punto doppio della curva razionale (2) giaccia sulla  $x_3 = 0$ . Evidentemente essa è sufficiente; perciò:

$$k = \Sigma \pm D_{1,1} D_{2,2} \dots D_{n-1,n-1}.$$

Gli elementi di questo determinante sono formati da determinanti ricavati col sopprimere  $n - 2$  orizzontali dalla matrice comune a tutti i determinanti  $\Delta$  costituita dalle ultime  $2n - 1$  colonne di questi.

5. Nel caso di  $n = 4$  se noi indichiamo con  $(r, s)$  il determinante ricavato col sopprimere le orizzontali  $r^{\text{ma}}$ , ed  $s^{\text{ma}}$  dalla matrice:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 0 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 \\ 0 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix},$$

le equazioni  $\Delta_1 = 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 = 0$  si possono scrivere:

$$\begin{aligned} (4, 7)x_1^2 - \{(4, 8) + (5, 7)\}x_1x_2 + \{(4, 9) + (6, 7)\}x_1x_3 + \\ + (5, 8)x_2^2 - \{(5, 9) + (6, 8)\}x_2x_3 + (6, 9)x_3^2 = 0 \\ (1, 7)x_1^2 - \{(1, 8) + (2, 7)\}x_1x_2 + \{(1, 9) + (3, 7)\}x_1x_3 + \\ + (2, 8)x_2^2 - \{(2, 9) + (3, 8)\}x_2x_3 + (3, 9)x_3^2 = 0 \\ (1, 4)x_1^2 - \{(1, 5) + (2, 4)\}x_1x_2 + \{(1, 6) + (3, 4)\}x_1x_3 + \\ + (2, 5)x_2^2 - \{(2, 6) + (3, 5)\}x_2x_3 + (3, 6)x_3^2 = 0, \end{aligned}$$

sicchè ponendo:

$$A = \begin{vmatrix} (4, 7) (4, 9) + (6, 7) (6, 9) \\ (1, 7) (1, 9) + (3, 7) (3, 9) \\ (1, 4) (1, 6) + (3, 4) (3, 6) \end{vmatrix},$$

$$B = \begin{vmatrix} (4, 7) (4, 9) + (6, 7) (5, 9) + (6, 8) \\ (1, 7) (1, 9) + (3, 7) (2, 9) + (3, 8) \\ (1, 4) (1, 6) + (3, 4) (2, 6) + (3, 5) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (4, 7) (4, 8) + (5, 7) (6, 9) \\ (1, 7) (1, 8) + (2, 7) (3, 9) \\ (1, 4) (1, 5) + (2, 4) (3, 6) \end{vmatrix},$$

$$C = \begin{vmatrix} (4, 7) (4, 8) + (5, 7) (5, 9) + (6, 8) \\ (1, 7) (1, 8) + (2, 7) (2, 9) + (3, 8) \\ (1, 4) (1, 5) + (2, 4) (2, 6) + (3, 5) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (4, 7) (4, 9) + (6, 7) (5, 8) \\ (1, 7) (1, 9) + (3, 7) (2, 8) \\ (1, 4) (1, 6) + (3, 4) (2, 5) \end{vmatrix},$$

$$D = \begin{vmatrix} (4, 7) (4, 8) + (5, 7) (5, 8) \\ (1, 7) (1, 8) + (2, 7) (2, 8) \\ (1, 4) (1, 5) + (2, 4) (2, 5) \end{vmatrix},$$

l'equazione che fornisce il rapporto  $\frac{x_3}{x_2}$  pei tre punti doppi è:

$$Ax_3^3 - Bx_3^2x_2 + Cx_3x_2^2 - Dx_2^3 = 0,$$

e:

$$k = D.$$

Sul  
rapporto  $\frac{\eta'}{\eta}$  considerato come funzione  
del rapporto  $\frac{\omega'}{\omega}$  dei periodi  
delle funzioni ellittiche di Weierstrass.

(Di CARLO BIGIAMI, a Pisa.)

---

Le funzioni di WEIERSTRASS  $\sigma(u)$ ,  $\zeta(u)$ ,  $p(u)$ , oltre che dalla variabile  $u$ , vengono a dipendere dagli invarianti  $g_2$ ,  $g_3$  o dai semiperiodi  $\omega$ ,  $\omega'$ , i quali ultimi possono assumere tutti i sistemi di valori tali che il rapporto  $\frac{\omega'}{\omega} = \tau$  sia un numero complesso finito avente il coefficiente dell'immaginario positivo e sempre differente da zero. Questo fatto conduce a varie formule importanti fra  $\omega$ ,  $\omega'$ ,  $\tau$ ,  $g_2$ ,  $g_3$ ,  $J = J(\tau)$ ,  $\eta = \zeta(\omega)$ ,  $\eta' = \zeta(\omega')$ . Di esse citeremo le tre seguenti:

$$\Delta = \left[ \frac{dJ}{4\omega^2 d\tau} \right]^6 \frac{\pi^6}{27 J^4 (1-J)^3}, \quad (1)$$

$$6\eta = -\frac{\pi i}{4} \frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega'}, \quad 6\eta' = \frac{\pi i}{4} \frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega} \quad (*), \quad (2)$$

nelle quali è  $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ , e che ci permettono di determinare l'espressione analitica del rapporto  $\lambda = \frac{\eta'}{\eta}$  considerato come funzione di  $\tau$ .

(\*) Per queste formule si può consultare a pag. 118 e a pag. 122 il 1.° volume del trattato del KLEIN, *Vorlesungen über die Theorie der Elliptischen Modulfunctionen*. Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner.

Bisogna però tener conto che ivi sono adottati i simboli  $\omega_2$ ,  $\omega_1$ ,  $\eta_2$ ,  $\eta_1$  invece degli altri  $2\omega$ ,  $2\omega'$ ,  $\tau$ ,  $2\eta$ ,  $2\eta'$ .

Estragghiamo infatti la radice 12<sup>esima</sup> dai due membri della (1); allora, scegliendo convenientemente i valori dei radicali da una parte e dall'altra, si ottiene:

$$2\omega\Delta^{\frac{1}{12}} = \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt[4]{3}} J^{-\frac{1}{3}} (1-J)^{-\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{dJ}{d\tau}},$$

e se poniamo:

$$x_1 = 2\omega\Delta^{\frac{1}{12}}, \quad x_2 = 2\omega'\Delta^{\frac{1}{12}}, \quad (3)$$

possiamo ancora scrivere:

$$x_1 = \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt[4]{3}} J^{-\frac{1}{3}} (1-J)^{-\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{dJ}{d\tau}}, \quad x_2 = \tau x_1. \quad (4)$$

Nelle (3) immaginiamo sostituite alle quantità  $g_2, g_3$  che entrano in  $\Delta$  le loro espressioni analitiche in funzione di  $\omega, \omega'$ ; in tal modo le  $x_1, x_2$  vengono a dipendere da  $\omega, \omega'$ , che possono considerarsi come variabili indipendenti. Tenendo conto di questo fatto deriviamo  $x_1$  rapporto ad  $\omega'$  e  $x_2$  rapporto ad  $\omega$ ; si ha allora:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial \omega'} &= \frac{\omega}{6} \Delta^{-\frac{11}{12}} \frac{\partial \Delta}{\partial \omega'}, \\ \frac{\partial x_2}{\partial \omega} &= \frac{\omega'}{6} \Delta^{-\frac{11}{12}} \frac{\partial \Delta}{\partial \omega}, \end{aligned}$$

e, confrontando queste relazioni colle (2), si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial \omega'} &= \frac{4\omega i}{\pi} \Delta^{\frac{1}{12}} \eta, \\ \frac{\partial x_2}{\partial \omega} &= -\frac{4\omega' i}{\pi} \Delta^{\frac{1}{12}} \eta, \end{aligned}$$

Ma dalle espressioni (4) di  $x_1, x_2$  si deduce facilmente che queste quantità sono funzioni uniformi di  $\tau$  definite per tutti i possibili valori di questa variabile. Sicchè potremo scrivere ancora:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial \omega'} &= \frac{dx_1}{d\tau} \frac{\partial \tau}{\partial \omega'} = \frac{dx_1}{d\tau} \frac{1}{\omega}, \\ \frac{\partial x_2}{\partial \omega} &= \frac{dx_2}{d\tau} \frac{\partial \tau}{\partial \omega} = -\frac{dx_2}{d\tau} \frac{\omega'}{\omega^2}. \end{aligned}$$

Paragonando queste ultime relazioni colle due precedenti abbiamo:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{d\tau} &= \frac{4\omega^2 i}{\pi} \Delta^{\frac{1}{12}} \eta, \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= \frac{4\omega^2 i}{\pi} \Delta^{\frac{1}{12}} \eta', \\ \lambda &= \frac{\eta'}{\eta} = \frac{\frac{dx_2}{d\tau}}{\frac{dx_1}{d\tau}}.\end{aligned}$$

Ed essendo  $x_2 = \tau x_1$  si ha pure:

$$\lambda = \tau + \frac{x_1}{\frac{dx_1}{d\tau}} = \tau + \frac{12J(1-J) \frac{dJ}{d\tau}}{6J(1-J) \frac{d^2J}{d\tau^2} + (7J-4) \left(\frac{dJ}{d\tau}\right)^2}. \quad (5)$$

Questa relazione ci mostra che il rapporto  $\lambda$  è una funzione uniforme di  $\tau$  definita in tutti i punti del semipiano complesso positivo ed avente l'asse reale come linea di singolarità essenziale.

Riguardo a questa funzione, che indicheremo con  $\lambda(\tau)$ , dobbiamo ancora osservare, come risulta subito dalle proprietà della  $\zeta(u)$ , che, quando  $\tau$  subisce la sostituzione lineare fratta  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  con  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  numeri interi e  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ , anche essa viene a subirla, cioè si ha:

$$\lambda\left(\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}\right) = \frac{\alpha\lambda(\tau) + \beta}{\gamma\lambda(\tau) + \delta}. \quad (6)$$

Mi propongo qui d'indicare brevemente come si muove sul proprio piano di variabilità la funzione  $\lambda(\tau)$ , quando  $\tau$  percorre il suo in modo continuo.

Cominciamo per questo dall'osservare che le quantità  $x_1, x_2$ , considerate come funzioni di  $J$ , sono due integrali particolari dell'equazione ipergeometrica (\*):

$$J(1-J) \frac{d^2x}{dJ^2} + \frac{1}{6}(4-7J) \frac{dx}{dJ} - \frac{1}{144}x = 0, \quad (7)$$

nella quale l'invariante assoluto  $J$  è preso come variabile indipendente.

---

(\*) Vedi: *Traité des Fonctions Elliptiques et de leurs applications* par G. H. HALPHEN. Gauthier-Villars, Paris, 1.<sup>re</sup> partie, chapitre IX, pag. 312-313.

Derivando poi la (7) rapporto ad  $J$  e cambiando funzione incognita, cioè ponendo  $y = \frac{dx}{dJ}$ , si ottiene l'altra equazione ipergeometrica:

$$J(1 - J) \frac{d^2 y}{dJ^2} + \frac{1}{6} (10 - 19J) \frac{dy}{dJ} - \frac{169}{144} y = 0. \quad (8)$$

Essa ammette i due integrali particolari distinti:

$$y_1 = \frac{dx_1}{dJ}, \quad y_2 = \frac{dx_2}{dJ},$$

i quali, potendosi considerare  $x_1, x_2$  come funzioni di  $\tau$  e  $\tau$  come funzione di  $J$ , hanno per rapporto:

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{\frac{dx_2}{dJ}}{\frac{dx_1}{dJ}} = \frac{\frac{dx_2}{d\tau}}{\frac{dx_1}{d\tau}} = \lambda(\tau).$$

Le radici delle determinanti della (8) relative ai punti singolari sono  $0, -\frac{2}{3}$  per lo zero,  $0, -\frac{1}{2}$  per il punto 1 e  $\frac{13}{12}, \frac{13}{12}$  per l'infinito.

Consideriamo ora sul piano di variabilità di  $\tau$  un triangolo  $\Gamma'$  formato da quella parte del semipiano complesso positivo compresa fra le due rette  $\tau_1 = -\frac{1}{2}, \tau_1 = 0$  ed esterna al cerchio  $\text{mod } \tau = 1$ , ove  $\tau_1, \tau_2$  indicano la parte reale ed il coefficiente dell'immaginario di  $\tau$ . I vertici di  $\Gamma'$  sono i punti  $-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, i, i\infty$  e i lati le parti delle tre precedenti linee che terminano a questi vertici e che formano il contorno di  $\Gamma'$ . Ciò posto, indicando con  $A'$  il semipiano complesso positivo della variabile  $J$ , ricordiamo che la relazione  $J = J(\tau)$  stabilisce una rappresentazione conforme di  $A'$  su  $\Gamma'$ , tale che i punti  $0, 1, \infty$  del contorno di  $A'$  vengono a corrispondere ai vertici  $-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, i, i\infty$  di  $\Gamma'$ .

Questo fatto si può anche dedurre dall'equazione (7) servendosi di un celebre teorema di SCHWARZ relativo alle equazioni ipergeometriche (\*). Applicando questo teorema alla (8) si ha che il quoziente  $\frac{y_2}{y_1} = \lambda$ , considerato come

(\*) Giornale di Crelle, vol. 75, pag. 311.

funzione di  $J$ , stabilisce una rappresentazione conforme di  $A'$  sopra un campo  $\Delta'$  semplicemente connesso e limitato da tre archi di circolo, che formano un triangolo avente per vertici i punti  $v_0, v_1, v_\infty$  del contorno di  $\Delta'$  corrispondenti ai valori singolari  $J=0, J=1, J=\infty$ . Dallo stesso teorema di SCHWARZ risulta pure che gli angoli, che i lati di  $\Delta'$  formano in questi vertici, sono rispettivamente  $\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, 0$ , e, poichè nessuno di questi angoli arriva a  $2\pi$ , così il campo  $\Delta'$  non contiene parti che si ricoprono l'una coll'altra, ed è quindi costituito da una area semplice del piano della variabile  $\lambda$ . Ma, affinchè, quest'area  $\Delta'$  sia completamente determinata, bisogna che sia fissato il valore da attribuirsi al rapporto  $\frac{y_2}{y_1}$  in un punto  $J_0$  di  $A'$ . Indicando per questo con  $\tau_0$  il valore di  $\tau$  che cade in  $\Gamma'$  e che corrisponde ad  $J_0$ , si può prendere  $\lambda_0 = \lambda(\tau_0)$  per valore del precedente rapporto in  $J = J_0$ . In tal caso il triangolo  $\Delta'$  è determinato perfettamente, e la relazione  $\lambda = \lambda(\tau)$  stabilisce su di esso una rappresentazione conforme del triangolo  $\Gamma'$ , tale che ai vertici  $v_0, v_1, v_\infty$  di  $\Delta'$  vengono a corrispondere i vertici  $-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, i, i\infty$  di  $\Gamma'$ .

Per trovare i lati di  $\Delta'$  indichiamo con  $\lambda_1, \lambda_2$  la parte reale ed il coefficiente dell'immaginario di  $\lambda(\tau)$ , ed osserviamo che, se è  $\lambda(\tau_1 + i\tau_2) = \lambda_1 + i\lambda_2$ , deve per la costituzione di  $\lambda(\tau)$  essere pure  $\lambda(-\tau_1 + i\tau_2) = -\lambda_1 + i\lambda_2$ . Avendosi poi per la (6)  $\lambda(\tau + 1) = \lambda(\tau) + 1$ , si può concludere che sulle rette  $\tau_1 = -\frac{1}{2}, \tau_1 = 0, \lambda(\tau)$  deve avere la stessa parte reale di  $\tau$ , cioè  $-\frac{1}{2}$  per la prima, 0 per la seconda. Invece per la circonferenza del cerchio  $\text{mod } \tau = 1$  si ha che, se  $\tau = \tau_1 + i\tau_2$  è un punto di essa, anche  $-\frac{1}{\tau} = -\tau_1 + i\tau_2$  appartiene a questa stessa circonferenza; ma per la (6) abbiamo:

$$\lambda\left(-\frac{1}{\tau}\right) = -\frac{1}{\lambda(\tau)} \quad \text{ossia} \quad \lambda(-\tau_1 + i\tau_2) = -\frac{1}{\lambda(\tau_1 + i\tau_2)},$$

e di qui si vede subito che quando è  $\text{mod } \tau = 1$  deve pure essere  $\text{mod } \lambda = 1$ . Sicchè, se consideriamo sul piano di  $\lambda$  le tre linee  $\lambda_1 = -\frac{1}{2}, \text{mod } \lambda = 1, \lambda_1 = 0$ , risulta da quanto abbiamo ora detto che i lati di  $\Delta'$  corrispondenti a quelli  $\tau_1 = -\frac{1}{2}, \text{mod } \tau = 1, \tau_1 = 0$  di  $\Gamma'$  devono essere tre porzioni  $a, b, c$  delle tre precedenti linee. In quanto ai vertici  $v_0, v_1, v_\infty$  di  $\Delta'$  si vede che essi sono formati dalle tre coppie di lati  $a, b; b, c; c, a$ .

Queste osservazioni ci mostrano che il triangolo  $\Delta'$  è costituito da quella porzione del piano di  $\lambda$  compresa fra le due rette  $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ ,  $\lambda_1 = 0$ , che al disopra dell'asse reale si estende all'infinito e che al disotto di quest'asse è limitato dal circolo  $\text{mod } \lambda = 1$ . I vertici  $v_0, v_1, v_\infty$  di  $\Delta'$  sono quindi  $-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$ ,  $-i, i\infty$ , ed in essi i lati di  $\Delta'$  formano appunto gli angoli  $\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, 0$ . Se indichiamo con  $\Gamma''$  e  $\Delta''$  i triangoli simmetrici di  $\Gamma'$  e  $\Delta'$  rispetto agli assi immaginari  $\tau_1 = 0$ ,  $\lambda_1 = 0$ , e con  $\Gamma, \Delta$  i triangoli formati dall'assieme di  $\Gamma'$  e  $\Gamma''$  l'uno e di  $\Delta'$  e  $\Delta''$  l'altro, si vede ancora che la relazione  $\lambda = \lambda(\tau)$  stabilisce una rappresentazione conforme di  $\Gamma$  su  $\Delta$ , tale che a due punti di  $\Gamma$  simmetrici rispetto all'asse  $\tau_1 = 0$  vengono a corrispondere due punti di  $\Delta$  simmetrici rispetto all'asse  $\lambda_1 = 0$ . Sicchè, quando  $\tau$  è all'interno o sul contorno di  $\Gamma$ , il valore corrispondente di  $\lambda(\tau)$  è all'interno o sul contorno di  $\Delta$ .

Ma ora invece di far muovere  $\tau$  sul suo piano entro il solo triangolo  $\Gamma$  facciamo andare questa variabile con continuità in tutti i rimanenti punti del semipiano complesso positivo, e ricerchiamo come si muove in questo caso generale la funzione  $\lambda(\tau)$  sul proprio piano. Costruiamo a tale effetto sui piani di  $\tau$  e  $\lambda$  i triangoli trasformati di  $\Gamma$  e  $\Delta$  da tutte le sostituzioni della forma  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  con  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  numeri interi e  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ . I primi, come è noto, non si ricoprono gli uni cogli altri, e formano una rete che occupa tutto il semipiano positivo di  $\tau$ . I secondi invece si ricoprono gli uni cogli altri, e si estendono su tutto il piano di  $\lambda$ , di guisa che ogni punto di questo piano appartiene al tempo stesso ad infiniti triangoli. Dobbiamo però osservare che un punto  $\lambda_e$  del piano di  $\lambda$  appartenente a due triangoli distinti  $\Delta_a, \Delta_b$ , che si ricoprono l'uno coll'altro, gode soltanto in casi speciali della proprietà di rimanere invariato dalla sostituzione  $S_{a,b}$  che trasforma  $\Delta_a$  in  $\Delta_b$ . Infatti, affinché si possa presentare questo caso, bisogna che  $\lambda_e$  sia un punto doppio di  $S_{a,b}$ ; ma di tali punti se ne hanno due al più, mentre che i punti comuni a  $\Delta_a$  e a  $\Delta_b$  sono infiniti.

Nei due precedenti sistemi di triangoli potremo far corrispondere fra loro  $\Gamma$  e  $\Delta$  e in generale quei due triangoli  $\Gamma_i$  e  $\Delta_i$ , l'uno del semipiano di  $\tau$  e l'altro del piano di  $\lambda$ , che sono i trasformati di  $\Gamma$  e  $\Delta$  da una stessa sostituzione  $S_i$ . Riguardo poi ai due triangoli  $\Gamma_i, \Delta_i$  si noti che fra i loro punti si può stabilire una corrispondenza biunivoca e continua precisamente come per

$\Gamma$  e  $\Delta$ . Basta infatti considerare come punti corrispondenti i trasformati da  $S_i$  di due punti corrispondenti di  $\Gamma$  e  $\Delta$ .

Un punto  $\lambda_e$  del piano di  $\lambda$  per quanto abbiamo detto appartiene ad infiniti triangoli trasformati di  $\Delta$ ; ma, quando un punto mobile  $\lambda$  si trova in  $\lambda_e$ , si può supporre che esso sia in uno solo di questi triangoli. Fissato il triangolo nel quale deve trovarsi  $\lambda$ , quando passa per  $\lambda_e$ , converremo che  $\lambda$  seguitando a muoversi rimanga sempre in questo triangolo finchè non oltrepassa uno dei suoi lati. Se, per es., il punto mobile  $\lambda$  è entro il triangolo  $\Delta_i$ , e ne esce attraversando un lato che separa  $\Delta_i$  da  $\Delta_h$ , diremo allora che  $\lambda$  escendo da  $\Delta_i$  entra in  $\Delta_h$ .

Supponiamo ora che  $\tau$ , partendo da un punto  $\tau_h$  di  $\Gamma$  e attraversando i triangoli  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{l-1}$ , giunga in un punto  $\tau_k$  del triangolo  $\Gamma_l$ . Allora  $\lambda$ , partendo da un punto  $\lambda_h$  del suo piano, giungerà in un altro punto  $\lambda_k$ . Fra gl'infiniti triangoli nei quali si trova  $\lambda_h$  vi è certamente  $\Delta$ , ed anzi noi fisseremo che  $\lambda$  partendo da  $\lambda_h$  sia in  $\Delta$ . In tal caso  $\lambda$ , per il precedente percorso di  $\tau$  e per le convenzioni che abbiamo fatto, partendo, da  $\lambda_h$  in  $\Delta$ , attraverserà i triangoli  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{l-1}$ , e, giungendo al punto  $\lambda_k$ , si troverà nel triangolo  $\Delta_l$ .

Ma in questo modo possiamo ancora vedere come si muove  $\tau$  sul suo semipiano, quando  $\lambda$  descrive sul proprio piano una linea determinata  $D$  che va da un punto iniziale  $\lambda_h$  ad un punto finale  $\lambda_k$ . Supponiamo che fra gl'infiniti triangoli nei quali si trova  $\lambda_h$  vi sia anche  $\Delta$ , e che  $\lambda$ , partendo da  $\lambda_h$  per andare in  $\lambda_k$ , si trovi appunto in  $\Delta$ . In tal caso potremo determinare in modo preciso per quali triangoli passerà  $\lambda$  percorrendo la linea  $D$ , ed in quale triangolo finale si troverà  $\lambda$  giungendo in  $\lambda_k$ . Supponiamo, ad es.: che  $\lambda$  uscendo da  $\Delta$  attraversi  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{l-1}$ , e che il triangolo d'arrivo sia  $\Delta_l$ . Allora, se indichiamo con  $\tau_h$  il punto di  $\Gamma$  che corrisponde al punto  $\lambda_h$  di  $\Delta$  e con  $\tau_k$  quello di  $\Gamma_l$  che corrisponde al punto  $\lambda_k$  di  $\Delta_l$ , si vede che durante il precedente percorso di  $\lambda$  la variabile  $\tau$  descrive una linea determinata  $C$ , la quale, cominciando nel punto  $\tau_h$  di  $\Gamma$  e attraversando i triangoli  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{l-1}$ , va nel punto  $\tau_k$  di  $\Gamma_l$ .

Se il punto finale  $\lambda_k$  coincide con  $\lambda_h$ , la linea  $D$  è chiusa, ma il triangolo finale  $\Delta_l$  è in generale diverso da  $\Delta$ ; per conseguenza anche il triangolo  $\Gamma_l$  è diverso da  $\Gamma$ , e il punto  $\tau_k$  non coincide con  $\tau_h$ ; cosicchè in generale la linea  $C$  descritta da  $\tau$  e corrispondente alla  $D$  è aperta. Giova inoltre osservare che di linee chiuse  $D$  passanti per  $\lambda_h$  se ne possono tracciare infinite, ed anzi, se  $\Delta_{\alpha_0} = \Delta, \Delta_{\alpha_1}, \dots, \Delta_{\alpha_r}, \dots$  è la serie degli infiniti triangoli tras-

formati di  $\Delta$  che contengono il punto  $\lambda_h$ , è facile vedere che si può sempre determinare una serie di linee chiuse  $D_{\alpha_0}, D_{\alpha_1}, \dots, D_{\alpha_r}, \dots$  che passino tutte per  $\lambda_h$  e siano tali che il triangolo finale o d'arrivo relativo alla linea  $D_{\alpha_r}$  coincida con  $\Delta_{\alpha_r}$ . In tal caso, se indichiamo con  $C_{\alpha_0}, C_{\alpha_1}, \dots, C_{\alpha_r}, \dots$  le linee descritte da  $\tau$  a partire da  $\tau_h$  e corrispondenti a quelle descritte da  $\lambda$ , si vede subito che, all'infuori della prima, che è chiusa, tutte le altre sono aperte, e sono tali che la  $C_{\alpha_r}$  termina in un punto situato nel triangolo  $\Gamma_{\alpha_r}$  corrispondente a  $\Delta_{\alpha_r}$ .

In tutti questi ragionamenti tanto per  $\tau$  quanto per  $\lambda$ , considerate come variabili indipendenti, siamo sempre partiti da un punto  $\tau_h$  o  $\lambda_h$  che fosse in  $\Gamma$  nel primo caso e in  $\Delta$  nel secondo. Ma i risultati ottenuti valgono egualmente partendo da punti qualunque. Osserveremo soltanto che, quando sul piano di  $\lambda$  si prende un punto arbitrario di partenza, bisogna fissare in quale degli infiniti triangoli contenenti questo punto deve considerarsi situata la variabile  $\lambda$  quando si trova in esso, e ciò perchè sia perfettamente determinato il valore corrispondente di  $\tau$ . Da tutto ciò risulta che la quantità  $\tau$ , considerata come funzione di  $\lambda$  in tutto il piano di questa variabile, è ad infiniti valori, perchè si possono sempre tracciare sul piano di  $\lambda$  infinite linee chiuse passanti per un punto arbitrario  $\lambda_h$ , e tali che sul piano di  $\tau$  vi corrispondano infinite linee aperte tutte uscenti da un punto  $\tau_h$  preso come corrispondente di  $\lambda_h$  ed aventi i loro estremi finali in triangoli differenti del semipiano di  $\tau$ .

Anche l'invariante assoluto  $J(\tau)$ , considerato come funzione di  $\lambda$ , è ad infiniti valori. Infatti, affinchè la  $J(\tau)$  risultasse monodroma, bisognerebbe che tutti gli estremi delle precedenti linee aperte descritte da  $\tau$  fossero sempre i trasformati di uno stesso punto da sostituzioni della forma  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  con  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  numeri interi e  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ ; ma una tale circostanza non si può presentare in generale, perchè altrimenti il punto arbitrario  $\lambda_h$  dovrebbe rimanere invariato da tutte queste sostituzioni, il che, per osservazioni già fatte, può se mai accadere in casi speciali e solo quando  $\lambda_h$  è sull'asse reale del piano di  $\lambda$ , poichè si tratta di un punto doppio comune ad infinite sostituzioni del gruppo.

# Sulle condizioni invariantive perchè due quintiche binarie abbiano quattro radici comuni.

(Di L. BERZOLARI, a Pavia.)

---

Siano in notazione simbolica

$$f = a_x^n, \quad \varphi = \alpha_x^n$$

due forme binarie del medesimo grado  $n$ , e si consideri la forma di CAYLEY

$$F = \frac{f \cdot \varphi y^n - \varphi \cdot f y^n}{(xy)} = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} c_{ik} x_1^i x_2^{n-1-i} y_1^k y_2^{n-1-k},$$

simmetrica rispetto alle due serie di variabili  $x, y$ . Allora (\*) la risultante  $R$  delle due forme  $f$  e  $\varphi$  sarà il determinante formato colle  $c_{ik}$ , cioè si avrà:

$$R = \sum \pm c_{00} c_{11} \dots c_{n-1, n-1},$$

e ponendo simbolicamente:

$$F = r_x^{n-1} s_y^{n-1} = r_{ix}^{n-1} s_{ix}^{n-1} = \dots,$$

il GORDAN in un lavoro ben noto (\*\*\*) ha dimostrato che  $R$  si può mettere sotto la forma:

$$R = \prod_{ik} (r_i r_k) (s_i s_k),$$

dove ciascuno dei numeri  $i, k$  deve assumere tutti i valori da 0 fino ad  $n - 1$ .

Egli ha inoltre determinato dei covarianti ad una, due, ... serie di va-

(\*) Vedi per es. BALTZER, *Theorie und Anwendung der Determinanten*, 5.<sup>a</sup> ediz., 1881, § 2.

(\*\*) GORDAN, *Ueber die Bildung der Resultante zweier Gleichungen*. Mathem. Annalen, Bd. 3.

riabili, il cui identico annullarsi fornisce l'insieme delle condizioni necessarie e sufficienti perchè le due forme abbiano rispett. due, tre, ... radici comuni. Questi covarianti sono:

$$\left. \begin{aligned} \Theta &= \prod_{ik} (r_i r_k) (s_i s_k) r_{ix} s_{ix} & (i, k = 0, 1, \dots, n-2), \\ \Phi &= \prod_{ik} (r_i r_k) (s_i s_k) r_{ix} r_{iy} s_{ix} s_{iy} & (i, k = 0, 1, \dots, n-3), \\ &\dots & \dots \end{aligned} \right\} (1)$$

ed hanno ordinatamente i gradi  $2(n-1)$ ,  $2(n-2)$ , ... rispetto a ciascuna serie di variabili. Essi, come anche la  $R$ , si possono tutti esprimere come aggregati di spinte (*Ueberschiebungen*) fra le due binarie, ed il GORDAN, che si è occupato più particolarmente della  $R$  e del covariante  $\Theta$ , ha eseguita effettivamente tale determinazione di queste due forme per i casi di due cubiche, di due quartiche e di due quintiche. Ha inoltre stabilita, insieme con molte altre della massima importanza, la formola notevole (\*):

$$nR = [\Theta, \overline{(rs)}^0]^{2n-2}, \tag{2}$$

dove  $\overline{(rs)}^0$  è il primo dei covarianti elementari di  $f, \varphi$ , ed è espresso da:

$$\overline{(rs)}^0 = n(f, \varphi)_1.$$

Recentemente il sig. PASCAL ha trattato il caso in cui le due forme abbiano tre radici comuni, estendendo ad esso il risultato contenuto nella (2), e trovando, per due quartiche e per due quintiche, l'espressione di  $\Phi$  mediante spinte dei covarianti elementari delle due forme (\*\*).

Egli ha inoltre osservato che le condizioni necessarie e sufficienti perchè due binarie del medesimo grado abbiano tre radici comuni (esprese già, per quanto il GORDAN ha dimostrato, dall'annullarsi identico di  $\Phi$ ) si possono altresì ottenere aggiungendo all'annullarsi identico di  $\Theta$  il contemporaneo annullarsi di un certo invariante  $\Phi^{(r)}$ , che è l'ultimo termine che si ottiene sviluppando  $\Phi$  colla nota formola di GORDAN.

(\*) GORDAN, l. c., pag. 378, form. (XIX).

(\*\*) PASCAL, *Sopra certi covarianti simultanei dei sistemi di due quartiche e di due quintiche*. Annali di Matem., serie 2.<sup>a</sup>, tom. 16. 1888.

Le stesse espressioni per il caso di due quartiche sono poi state da lui calcolate in termini delle forme del sistema completo in un lavoro successivo *Sopra alcune forme invariantive del sistema di due binarie biquadratiche*. Rendic. della R. Accad. delle Scienze fis. e matem. di Napoli, fasc. 8.<sup>o</sup>, agosto 1888.

La dimostrazione di questa proprietà è basata sul fatto che, per due forme aventi i coefficienti fra loro assolutamente indipendenti, l'annullarsi dell'invariante  $\Phi^{(r)}$  non è conseguenza necessaria dell'annullarsi identico di  $\Theta$ . Non è però inutile aggiungere qui un'altra dimostrazione della medesima proprietà, comunicatami dallo stesso prof. PASCAL.

« Dalla citata Memoria di GORDAN risulta che le condizioni perchè due forme binarie dello stesso grado abbiano due radici comuni sono espresse dall'identico annullarsi di un covariante (cioè  $\Theta$ ), e che in pari tempo esse non possono venire espresse dall'annullarsi di due invarianti. Ciò posto, se l'annullarsi di  $\Phi^{(r)}$  fosse una conseguenza necessaria dell'annullarsi identico di  $\Theta$ , poichè da quest'ultimo fatto segue l'annullarsi pure di  $R$ , le condizioni perchè le due binarie abbiano due radici comuni potrebbero venire rappresentate dall'annullarsi dei due invarianti  $R$  e  $\Phi^{(r)}$ , contro ciò che si è sopra osservato. »

È molto probabile che sussista un teorema analogo anche per il caso in cui le due forme abbiano un numero qualunque  $r$  di radici comuni, cioè che le condizioni perchè ciò avvenga si possano ottenere aggiungendo all'identico annullarsi del covariante  $\Theta$  l'annullarsi di certi  $r - 2$  invarianti. Invero supponiamo sviluppato, colla ripetuta applicazione della formola di GORDAN, ciascuno dei covarianti  $\Phi, \Psi, \dots$  a due, tre,  $\dots, r - 1$  serie di variabili, il cui identico annullarsi dà le condizioni perchè le due forme abbiano rispett. 3, 4,  $\dots, r$  radici comuni.

Questi covarianti, come risulta dalle (1), sono tutti simmetrici rispetto alle varie serie di variabili, e sono di grado pari rispetto a ciascuna, laonde l'ultimo termine dello sviluppo sarà un invariante: gli  $r - 2$  invarianti che così si ottengono sono quelli a cui or ora si è accennato. A provare la verità del teorema sopra riferito occorrerebbe soltanto dimostrare che l'annullarsi dell'ultimo invariante, che si deve aggiungere, non è necessariamente una conseguenza dell'annullarsi degli altri  $r - 1$  e dell'annullarsi identico di  $\Theta$ .

A tal fine non si può però ripetere il ragionamento esposto superiormente per  $r = 3$ , ed in ciò che segue io mi limito a dimostrare per altra via (cioè facendo vedere che l'invariante di cui si è parlato non è nullo in un caso particolare) il teorema nel caso di  $r = 4$ , che è quello di cui mi occupo nel presente lavoro (\*).

---

(\*) Collo stesso metodo si potrebbe dimostrare il teorema anche per  $r = 3$ .

Prima di proseguire è però bene di precisare maggiormente il significato del teorema stesso, e per fissar le idee mi riferirò al caso di  $r = 3$ . Le condizioni *necessarie* e *sufficienti* perchè le due binarie abbiano tre radici comuni sono date dall'annullarsi identico di  $\Phi$ : quando noi diciamo che si possono anche esprimere coll'identico annullarsi di  $\Theta$  e coll'annullarsi di  $\Phi^{(r)}$ , che è l'ultimo dei covarianti elementari di  $\Phi$ , vogliamo intendere di sostituire all'annullarsi dei rimanenti covarianti elementari di  $\Phi$ , l'annullarsi di  $\Theta$ , cioè di combinare i detti covarianti elementari fra loro e coi coefficienti delle due forme date, in guisa che ne risulti  $\Theta$ . Ora è manifesto che questo procedimento, a rigore, è possibile qualora si supponga che i coefficienti di  $f$  e  $\varphi$  siano fra loro assolutamente indipendenti (per esempio, siano espressioni letterali affatto arbitrarie); chè, se ciò non accadesse, la accennata combinazione potrebbe essere tale che le condizioni fornite dal teorema sopra enunciato, pur restando sempre necessarie, non fossero più *sufficienti* per l'esistenza di tre radici comuni (\*).

Nel presente lavoro estendo innanzi tutto il risultato contenuto nella (2) al caso in cui le due forme abbiano un numero qualunque di radici comuni. Nei paragrafi seguenti completo, dal presente punto di vista, lo studio del sistema di due forme binarie del 5.<sup>o</sup> ordine, e, chiamando  $\Psi$  il covariante a tre serie di variabili, il cui identico annullarsi dà le condizioni necessarie e sufficienti perchè  $f$  e  $\varphi$  abbiano quattro radici comuni, giungo ad esprimere i covarianti elementari di  $\Psi$  come aggregati di spinte fra i covarianti elementari di  $f$  e  $\varphi$ .

Benchè le forme a cui da ultimo pervengo siano abbastanza semplici, pure si vedrà come lo sviluppo di  $\Psi$  sia di gran lunga più complicato che non quello dei covarianti precedenti (cioè  $R$ ,  $\Theta$  e  $\Phi$ ) studiati dal GORDAN e dal PASCAL. Egli è appunto dietro questa considerazione che ho creduto non privo d'interesse il confermare i risultati finali a cui sono giunto, mediante una verifica, che, per essere di natura generale, mi sembra altresì abbastanza elegante.

Nell'ultimo paragrafo è brevemente indicato un sistema particolare di due quintiche dotate di tre sole radici comuni, e per le quali l'invariante che sarà da me chiamato  $P$  (cioè l'ultimo termine dello sviluppo di  $\Psi$ ) *non è nullo*, ciò che nel caso presente dimostra il teorema di cui sopra si è discusso.

(\*) Cfr. le considerazioni di CLEBSCH a pag. 91 della *Theorie der bin. alg. Formen*.

§ 1. Estensione della formola (2).

In questo paragrafo, per uniformità di scrittura, chiamerò  $\Theta, \Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_{i-2}$  i covarianti ad una, due, tre,  $\dots, i-1$  serie di variabili che compajono nelle (1). Il sig. PASCAL in principio del lavoro citato ha dimostrato che  $\Theta$  si può esprimere come una combinazione lineare di spinte dei covarianti elementari di  $\Theta_1$  e dei covarianti elementari di  $F$ , essendo  $F$  la forma di CAYLEY. Per il caso di un numero qualunque  $i$  (essendo  $i > 3$ ) di radici comuni ad  $f$  e  $\varphi$ , il teorema subisce una leggiera modificazione e diventa:

« Il covariante  $\Theta_{i-1}$  si può esprimere mediante una combinazione lineare di polari delle spinte dei covarianti elementari di  $\Theta_i$  e dei covarianti elementari di  $F$ , moltiplicate per potenze dei determinanti simbolici formati colle diverse serie di variabili. »

Invero, indicando con  $x_1, x_2, \dots, x_{i+2}$  le  $i+2$  serie di variabili contenute [ciascuna al grado  $2(n-i-2)$ ] in  $\Theta_{i+1}$ , è facile anzitutto dimostrare la relazione:

$$(n-i-1)\Theta_i = [\Theta_{i+1}, r_{x_{i+2}}^{n-i-2} s_{x_{i+2}}^{n-i-2} r_{x_{i+1}} s_{x_{i+1}} r_{x_i} s_{x_i} \dots r_{x_1} s_{x_1}]^{2(n-i-2)},$$

nella quale la spinta è fatta colle variabili  $x_{i+2}$ : essa si può riguardare come una prima estensione della (2).

Sviluppando ora  $\Theta_{i+1}$  colla formola di GORDAN, otterremo una somma di termini della natura seguente:

$$L(x_1 x_{i+2})^\alpha (x_2 x_{i+2})^\beta \dots M_{x_1}^{\alpha_1} M_{x_2}^{\beta_1} \dots M_{x_{i+2}}^{2n-h}, \quad (3)$$

dove  $L$  è il prodotto di un coefficiente numerico per determinanti simbolici non contenenti la variabile  $x_{i+2}$ .

Inoltre, sviluppando l'espressione

$$r_{x_{i+2}}^{n-i-2} s_{x_{i+2}}^{n-i-2} r_{x_{i+1}} s_{x_{i+1}} r_{x_i} s_{x_i} \dots r_{x_1} s_{x_1}$$

colla formola (XIV) data dal GORDAN a pag. 372 della citata Memoria, ogni termine conterrà un certo numero di quadrati di determinanti simbolici contenenti la variabile  $x_{i+2}$ , e sarà della forma:

$$L_1(x_1 x_{i+2})^2 (x_2 x_{i+2})^2 \dots N_{x_j}^\mu \dots N_{x_{i+2}}^{2n-h}, \quad (4)$$

dove  $L_1$  è il prodotto di un coefficiente numerico per quadrati di determi-

nanti simbolici non contenenti  $x_{i+2}$ . Si noti poi che le forme  $M$  ed  $N$  sono rispett. i covarianti elementari di  $\Theta_{i+1}$  e di  $F$ .

Siamo dunque ridotti ad eseguire spinte di termini come (3) sopra termini come (4), intendendo di eseguire le spinte colle variabili  $x_{i+2}$ . A tal fine poniamo:

$$L_1(x_1 x_{i+2})^2 (x_2 x_{i+2})^2 \dots N_{x_j}^\mu \dots N_{x_{i+2}}^{2n-k} = P_{x_{i+2}}^{2n-2i-4},$$

e la spinta richiesta sarà

$$L(MP)^{2n-h} P_{x_1}^\alpha P_{x_2}^\beta \dots M_{x_1}^{\alpha_1} M_{x_2}^{\beta_1} \dots \quad (5)$$

Ora osserviamo che, dovendo la variabile  $x_{i+2}$  essere contenuta in (3) al grado  $2n - 2i - 4$ , deve aver luogo la relazione:

$$\alpha + \beta + \dots = h - 2i - 4,$$

dalla quale segue che il secondo membro non può essere negativo. Pertanto, indicando con  $y$  un elemento per ora arbitrario, potremo scrivere, a meno di coefficienti numerici:

$$\begin{aligned} P_{x_{i+2}}^{2n-h} P_y^{h-2i-4} &= L_1(x_1 x_{i+2})^2 (x_2 x_{i+2})^2 \dots N_{x_j}^\mu \dots N_{x_{i+2}}^{2n-h-k+2i+4} N_y^{h-2i-4} \\ &+ L_1 N_{x_j}^\mu \dots N_{x_{i+2}}^{2n-k} \cdot \Delta_y^{h-2i-4} (x_1 x_{i+2})^2 (x_2 x_{i+2})^2 \dots \end{aligned}$$

La spinta cercata (5) si otterrà da quest'ultima espressione ponendo i simboli  $M$  in luogo delle variabili  $x_{i+2}$ , moltiplicando per  $L M_{x_1}^{\alpha_1} M_{x_2}^{\beta_1} \dots$ , e sostituendo al simbolo  $y$  (che compare al grado  $h - 2i - 4$ ) un numero  $\alpha$  di simboli  $x_1$ , un numero  $\beta$  di simboli  $x_2, \dots$  al solito modo ben conosciuto. Ciò facendo, alcuni dei termini contenuti nella seconda parte dell'espressione precedente si annullano, ed otteniamo infine un'espressione composta linearmente con polari di spinte delle  $M$  sulle  $N$ , moltiplicate per potenze di determinanti simbolici.

## § 2. Covariante $\Psi$ per due quintiche.

Prima di venire alla considerazione del covariante  $\Psi$  per il caso di due quintiche, richiamo le espressioni delle forme  $A, B, C, E, t$  introdotte dal GORDAN (\*) per lo sviluppo di  $R$  e  $\Theta$ , e delle quali dovrò poi fare uso.

(\*) L. c., pag. 386-389.

Esse sono:

$$A = (r r_1)^3 (s s_1) r_x s_x^3 r_{1x} s_{1x}^3 = (\rho \rho)^4 + \frac{3}{7} (\rho \sigma)^2 - \frac{1}{10} \rho \tau - \frac{18}{49} \sigma^2,$$

$$B = (r r_1)^3 (s s_1) (r_1 s_1) r_x s_x^3 s_{1x}^2 = -(\rho \sigma)^3,$$

$$C = \frac{2}{7} \{ (r r_1)^3 (s s_1) (r_1 s_1) (r s_1) s_x^3 s_{1x} - t \}$$

$$= -\frac{2}{7} (\rho \rho)^6 - \frac{1}{49} (\rho \sigma)^4 - \frac{27}{343} (\sigma \sigma)^3 + \frac{9}{70} \sigma \tau,$$

$$E = \frac{1}{30} (r r_1)^4 (s s_1)^4 - \frac{1}{15} (r r_1)^3 (s s_1)^3 (r s) (r_1 s_1) = \frac{1}{30} (\rho \rho)^8 - \frac{3}{70} (\sigma \sigma)^4 - \frac{1}{100} \tau^2,$$

$$t = (r r_1)^3 (s s_1)^3 r_x s_x r_{1x} s_{1x} = (\rho \rho)^6 - \frac{3}{7} (\rho \sigma)^4 + \frac{45}{49} (\sigma \sigma)^2 - \frac{3}{10} \sigma \tau,$$

dove si è posto:

$$\rho = 5(f\varphi),$$

$$\sigma = \frac{25}{12}(f\varphi)^3,$$

$$\tau = \frac{5}{3}(f\varphi)^5.$$

Ponendo inoltre:

$$\lambda_x^4 \mu_y^4 = (r r_1)^3 (s s_1) r_x s_x r_{1x} s_{1x} s_y^2 s_{1y}^2,$$

si ha:

$$\lambda_x^4 \mu_y^4 = A_x^4 A_y^4 + (xy) B_x^3 B_y^3 + (xy)^2 C_x^2 C_y^2 + (xy)^4 E.$$

Ciò premesso, abbiamo:

$$\Psi = (r r_1) (s s_1) r_x r_{1x} r_y r_{1y} r_z r_{1z} s_x s_{1x} s_y s_{1y} s_z s_{1z}:$$

questa forma si ottiene (\*) moltiplicando per  $r_x r_{1x} s_x s_{1x}$  l'espressione del  $\Phi$  relativo a due quartiche, che si trova a pag. 11 del citato lavoro del sig. PASCAL.

(\*) Vedi l'osservazione di PASCAL a pag. 5, l. c. Giovandosi della medesima e conoscendosi già il  $\Theta$  di due quartiche (trovato dal GORDAN, l. c., pag. 384), si sarebbe potuto scrivere senz'altro anche il  $\Phi$  di due quintiche nella forma trovata direttamente dal PASCAL a pag. 13.

Si ha pertanto:

$$\begin{aligned} \Psi = & \Delta_y^4 (r r_1) (s s_1) r_x^2 s_x^2 r_{1x}^2 s_{1x}^2 r_z r_{1z} s_z s_{1z} \\ & + (xy)^2 \Delta_y^2 \left\{ -\frac{37}{70} (r r_1) (s s_1)^3 r_x^2 r_{1x}^2 + \frac{1}{5} (r r_1) (s s_1) (r_1 s_1) (r s_1) r_x s_x^2 r_{1x}^2 \right. \\ & - \frac{17}{70} (r r_1)^2 (s s_1)^2 r_x s_x r_{1x} s_{1x} + \frac{17}{35} (r r_1) (s s_1) (r s_1) (s r_1) r_x s_x r_{1x} s_{1x} \left. \right\} r_z r_{1z} s_z s_{1z} \\ & + \frac{1}{30} (xy)^4 (r r_1)^3 (s s_1)^3 r_z r_{1z} s_z s_{1z}, \end{aligned}$$

dove il simbolo  $\Delta_y$  indica le polari prese rispetto al polo  $y$ , considerando come variabili le  $x$ .

Nell'espressione precedente il secondo e l'ultimo termine, cioè

$$(r r_1) (s s_1)^3 r_x^2 r_{1x}^2 r_z r_{1z} s_z s_{1z}, \quad (r r_1)^3 (s s_1)^3 r_z r_{1z} s_z s_{1z},$$

sono già noti, e, come si ricordò sopra, equivalgono rispett. a  $\lambda_z^4 \mu_x^4$  e  $t_x^4$ . Passiamo ora agli altri termini.

### § 3. Sviluppo del primo termine di $\Psi$ .

Chiamando  $(A)$  il primo termine di  $\Psi$  a cui si deve applicare l'operazione  $\Delta_y$ , esso si può scrivere come segue:

$$\begin{aligned} (A) = & \frac{1}{4} (r r_1) (s s_1) r_x s_x r_{1x} s_{1x} [r_x^2 r_{1x}^2 + r_z^2 r_{1z}^2 - (r r_1)^2 (x z)^2] \times \\ & \times [s_x^2 s_{1x}^2 + s_z^2 s_{1z}^2 - (s s_1)^2 (x z)^2] \\ = & \frac{1}{4} (r r_1) (s s_1) r_x s_x r_{1x} s_{1x} \left\{ r_x^2 s_x^2 r_{1x}^2 s_{1x}^2 + s_x^2 r_{1x}^2 r_z^2 s_{1z}^2 \right. \\ & + r_x^2 s_{1x}^2 s_z^2 r_{1z}^2 + r_{1x}^2 s_{1x}^2 r_z^2 s_z^2 - (x z)^2 (s s_1)^2 r_x^2 r_{1x}^2 - (x z)^2 (s s_1)^2 r_{1x}^2 r_z^2 \\ & \left. - (x z)^2 (r r_1)^2 s_x^2 s_{1x}^2 - (x z)^2 (r r_1)^2 s_{1x}^2 s_z^2 + (x z)^4 (r r_1)^2 (s s_1)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Il primo termine è simile al quarto ed il secondo è simile al terzo, perchè si deducono l'uno dall'altro scambiando  $r$  con  $r_1$  ed  $s$  con  $s_1$ ; inoltre sono simili il quinto, sesto, settimo ed ottavo o per la stessa ragione, o perchè si deducono l'uno dall'altro scambiando  $r$  con  $s$  ed  $r_1$  con  $s_1$  (\*).

(\*) In questa, come in tutte le trasformazioni che seguono, occorre tener presente che la forma di CAYLEY è simmetrica rispetto ad  $x, y$ , quindi non solo è lecito scambiare  $r$  ed  $s$  con  $r_1$  ed  $s_1$ , ma anche  $r$  con  $s$  ed  $r_1$  con  $s_1$ , come pure  $r$  con  $s_1$  ed  $s$  con  $r_1$ .

Si ha quindi:

$$(A) = \frac{1}{2} (r r_1) (s s_1) r_x^3 s_x^3 r_{1x} s_{1x} r_{1z}^2 s_{1z}^2 + \frac{1}{2} (r r_1) (s s_1) s_x^3 r_{1x}^3 r_x s_{1x} r_z^2 s_{1z}^2 \\ - (x z)^2 (r r_1) (s s_1)^3 r_x^3 s_x r_{1x} s_{1x} r_{1z}^2 + \frac{1}{4} (x z)^4 (r r_1)^3 (s s_1)^3 r_x s_x r_{1x} s_{1x}.$$

Qui, dovendo svolgere i singoli termini, il calcolo riesce semplificato usando alcuni artifici. In primo luogo, sviluppando colla formola di GORDAN, abbiamo:

$$\frac{1}{2} (r r_1) (s s_1) r_x^3 s_x^3 r_{1x} s_{1x} r_{1z}^2 s_{1z}^2 = \frac{1}{2} (r r_1) (s s_1) r_{1x} s_{1x} \left\{ (r_x^3 s_x^3, r_{1x}^2 s_{1x}^2)_z^4 \right. \\ \left. + \frac{12}{5} (x z) (\text{idem})_z^3 + \frac{5}{2} (x z)^2 (\text{idem})_z^2 + \frac{10}{7} (x z)^3 (\text{idem})_z + \frac{3}{7} (x z)^4 (\text{idem})^4 \right\}.$$

Ma, indicando con  $D$  il simbolo di polare rispetto al polo  $x$ , quando si considerino come variabili le  $z$ , abbiamo:

$$r_{1x} s_{1x} (r_x^3 s_x^3, r_{1x}^2 s_{1x}^2)_z^4 = D^6 r_{1x} s_{1x} (r_x^3 s_x^3, r_{1x}^2 s_{1x}^2)_{z^0} = D^6 r_{1x} s_{1x} r_z^3 s_z^3 r_{1z}^2 s_{1z}^2, \\ r_{1x} s_{1x} (r_x^3 s_x^3, r_{1x}^2 s_{1x}^2)_z^3 = D^5 r_{1x} s_{1x} (\text{idem})_z^3 \\ = \frac{1}{2} (r r_1) D^5 r_{1x} s_{1x} r_z^2 s_z^3 r_{1z} s_{1z}^2 + \frac{1}{2} (r s_1) D^5 r_{1x} s_{1x} r_z^2 s_z^3 r_{1z}^2 s_{1z}, \\ r_{1x} s_{1x} (r_x^3 s_x^3, r_{1x}^2 s_{1x}^2)_z^2 = D^4 r_{1x} s_{1x} (\text{idem})_z^2 \\ = \frac{1}{2} (r r_1)^2 D^4 r_{1x} s_{1x} r_z s_z^3 s_{1z}^2 + \frac{1}{2} (r s_1)^2 D^4 r_{1x} s_{1x} r_z s_z^3 r_{1z}^2 \\ - \frac{1}{3} (r_1 s_1)^2 D^4 r_{1x} s_{1x} r_z^3 s_z^3 - \frac{3}{10} (r s)^2 D^4 r_{1x} s_{1x} r_z s_z r_{1z}^2 s_{1z}, \\ r_{1x} s_{1x} (r_x^3 s_x^3, r_{1x}^2 s_{1x}^2)_z = D^3 r_{1x} s_{1x} (\text{idem})_z^3 \\ = \frac{1}{2} (r r_1) (r s_1)^2 D^3 r_{1x} s_{1x} r_{1z} s_z^3 + \frac{1}{2} (r r_1)^2 (r s_1) D^3 r_{1x} s_{1x} s_{1z} s_z^3 \\ - \frac{9}{20} (r r_1) (r s)^2 D^3 r_{1x} s_{1x} s_z r_{1z} s_{1z}^2 - \frac{9}{20} (r s)^2 (r s_1) D^3 r_{1x} s_{1x} s_z r_{1z}^2 s_{1z}, \\ r_{1x} s_{1x} (r_x^3 s_x^3, r_{1x}^2 s_{1x}^2)^4 = \frac{1}{2} (r r_1)^2 (s s_1) (r s_1) s_x^2 r_{1x} s_{1x} \\ + \frac{1}{2} (r r_1) (r s_1)^2 (s r_1) s_x^2 r_{1x} s_{1x} - \frac{1}{10} (s s_1) (r s)^2 (r s_1) r_{1x}^3 s_{1x} \\ - \frac{1}{10} (r s)^2 (r s_1) (s r_1) r_{1x}^2 s_{1x} - \frac{1}{10} (r r_1) (s s_1) (r s)^2 r_{1x}^2 s_{1x}.$$

Applicando allora ripetutamente la formola di GORDAN, ed osservando che si ha:

$$D^6(r_{1x} s_{1x}, r_x^3 s_x^3 r_{1x}^2 s_{1x}^2)_{z^{10}} = (\text{idem})_{z^4}^0,$$

$$D^6(xz) (\text{idem})_{z^8}^1 = \frac{2}{5} (xz) (\text{idem})_{z^8}^1,$$

$$D^6(xz)^2 (\text{idem})_{z^8}^2 = \frac{2}{15} (xz)^2 (\text{idem})_{z^8}^2,$$

e che analoghe relazioni si hanno per gli altri casi, si ottiene facilmente il primo termine di (A) nella forma:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (r r_1) (s s_1) r_x^3 s_x^3 r_{1x}^2 s_{1x}^2 r_{1z}^2 s_{1z}^2 \\ & = \frac{1}{2} (r r_1) (s s_1) \{ A_0 + A_1(xz) + A_2(xz)^2 + A_3(xz)^3 + A_4(xz)^4 \}, \end{aligned}$$

dove le  $A_i$  hanno le espressioni seguenti:

$$A_0 = (r_{1x} s_{1x}, r_x^3 s_x^3 r_{1x}^2 s_{1x}^2)_{z^4}^0,$$

$$\begin{aligned} A_1 = & \frac{2}{3} (r_{1x} s_{1x}, r_x^3 s_x^3 r_{1x}^2 s_{1x}^2)_{z^3}^1 + \frac{6}{5} (r r_1) (r_{1x} s_{1x}, r_x^2 s_x^3 r_{1x} s_{1x}^2)_{z^3}^0 \\ & + \frac{6}{5} (r s_1) (r_{1x} s_{1x}, r_x^2 s_x^3 r_{1x} s_{1x}^2)_{z^3}^0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 = & \frac{6}{55} (r_{1x} s_{1x}, r_x^3 s_x^3 r_{1x}^2 s_{1x}^2)_{z^2}^2 + \frac{18}{25} (r r_1) (r_{1x} s_{1x}, r_x^2 s_x^3 r_{1x} s_{1x}^2)_{z^2}^1 \\ & + \frac{18}{25} (r s_1) (r_{1x} s_{1x}, r_x^2 s_x^3 r_{1x} s_{1x}^2)_{z^2}^1 + \frac{5}{4} (r r_1)^2 (r_{1x} s_{1x}, r_x s_x^3 r_{1x}^2)_{z^2}^0 \\ & + \frac{5}{4} (r s_1)^2 (r_{1x} s_{1x}, r_x s_x^3 r_{1x}^2)_{z^2}^0 - \frac{5}{6} (r_1 s_1)^2 (r_{1x} s_{1x}, r_x^3 s_x^3)_{z^2}^0 \\ & - \frac{3}{4} (r s)^2 (r_{1x} s_{1x}, r_x s_x r_{1x}^2 s_{1x}^2)_{z^2}^0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_3 = & \frac{1}{10} (r r_1) (r_{1x} s_{1x}, r_x^2 s_x^3 r_{1x} s_{1x}^2)_{z^2}^2 + \frac{1}{10} (r s_1) (r_{1x} s_{1x}, r_x^2 s_x^3 r_{1x} s_{1x}^2)_{z^2}^2 \\ & + \frac{5}{8} (r r_1)^2 (r_{1x} s_{1x}, r_x s_x^3 r_{1x}^2)_{z^2}^1 + \frac{5}{8} (r s_1)^2 (r_{1x} s_{1x}, r_x s_x^3 r_{1x}^2)_{z^2}^1 \\ & - \frac{5}{12} (r_1 s_1)^2 (r_{1x} s_{1x}, r_x^3 s_x^3)_{z^2}^1 - \frac{3}{8} (r s)^2 (r_{1x} s_{1x}, r_x s_x r_{1x}^2 s_{1x}^2)_{z^2}^1 \\ & + \frac{5}{7} (r r_1) (r s_1)^2 (r_{1x} s_{1x}, s_x^3 r_{1x})_{z^2}^0 + \frac{5}{7} (r r_1)^2 (r s_1) (r_{1x} s_{1x}, s_x^3 r_{1x})_{z^2}^0 \\ & - \frac{9}{14} (r r_1) (r s)^2 (r_{1x} s_{1x}, s_x r_{1x} s_{1x}^2)_{z^2}^0 - \frac{9}{14} (r s)^2 (r s_1) (r_{1x} s_{1x}, s_x r_{1x}^2 s_{1x})_{z^2}^0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_4 = & \frac{5}{84} (r r_1)^2 (r_{1x} s_{1x}, r_x s_x^3 s_{1x}^2)^2 + \frac{5}{84} (r s_1)^2 (r_{1x} s_{1x}, r_x s_x^3 r_{1x}^2)^2 \\
 & - \frac{5}{126} (r_1 s_1)^2 (r_{1x} s_{1x}, r_x^3 s_x^3)^2 - \frac{1}{28} (r s)^2 (r_{1x} s_{1x}, r_x s_x r_{1x}^2 s_{1x}^2)^2 \\
 & + \frac{5}{21} (r r_1) (r s_1)^2 (r_{1x} s_{1x}, s_x^3 r_{1x})^4 + \frac{5}{21} (r r_1)^2 (r s_1) (r_{1x} s_{1x}, s_x^3 s_{1x})^4 \\
 & - \frac{3}{14} (r r_1) (r s)^2 (r_{1x} s_{1x}, s_x r_{1x} s_{1x}^2)^4 - \frac{3}{14} (r s)^2 (r s_1) (r_{1x} s_{1x}, s_x r_{1x}^2 s_{1x})^4 \\
 & + \frac{3}{14} (r r_1)^2 (s s_1) (r s_1) s_x^2 r_{1x} s_{1x} + \frac{3}{14} (r r_1) (r s_1)^2 (s r_1) s_x^2 r_{1x} s_{1x} \\
 & - \frac{3}{70} (s s_1) (r s)^2 (r s_1) r_{1x}^3 s_{1x} - \frac{3}{70} (r s)^2 (r s_1) (s r_1) r_{1x}^2 s_{1x}^2 \\
 & - \frac{3}{70} (r r_1) (s s_1) (r s)^2 r_{1x}^2 s_{1x}^2.
 \end{aligned}$$

Il secondo termine di (A) si deduce dal primo, ora scritto, scambiando  $r$  con  $r_1$  nelle espressioni delle  $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4$ .

Per ciò che riguarda il terzo termine di (A), la formola di GORDAN dà:

$$\begin{aligned}
 & - (x z)^2 (r r_1) (s s_1)^3 r_x^3 s_x r_{1x} s_{1x} r_{1x}^2 \\
 = & - (x z)^2 (r r_1) (s s_1)^3 \left\{ (r_x^3 s_x r_{1x} s_{1x}, r_{1x}^2)_{z^2}^2 + \frac{3}{2} (x z) (\text{idem})_z^4 + \frac{5}{7} (x z)^2 (\text{idem})_z^2 \right\}.
 \end{aligned}$$

Infine l'ultimo termine di (A) non è altro che

$$\frac{1}{4} (x z)^4 t_x,$$

e così resta sviluppato (A), cioè il primo termine di  $\Psi$ .

#### § 4. Sviluppo dei termini rimanenti di $\Psi$ .

Il terzo termine che in  $\Psi$  compare sottoposto all'operazione di polare è

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{5} (r r_1) (s s_1) (r_1 s_1) (r s_1) s_x^2 \left\{ (r_x r_{1x}, r_x s_x r_{1x} s_{1x})_{z^4}^2 + \frac{4}{3} (x z) (\text{idem})_{z^3}^2 \right. \\
 & \left. + \frac{3}{5} (x z)^2 (\text{idem})_{z^2}^2 \right\}.
 \end{aligned}$$

Applicando ripetutamente la formola di GORDAN, e facendo uso di artifici ana-

loghi ai precedenti, si trovano per i tre termini che qui compajono le espressioni seguenti:

$$s_x^2 (r_x r_{1x}, r_x s_x r_{1x} s_{1x})_{z^4}^0 = (s_x^2, r_x^2 r_{1x}^2 s_x s_{1x})_{z^4}^0 \\ + (xz) (\text{idem})_{z^3}^1 + \frac{2}{7} (xz)^2 (\text{idem})_{z^2}^2,$$

$$s_x^2 (r_x r_{1x}, r_x s_x r_{1x} s_{1x})_{z^3}^1 = \frac{1}{8} (rs) (s_x^2, r_x r_{1x}^2 s_{1x})_{z^3}^0 + \frac{1}{8} (r_1 s_1) (s_x^2, r_x^2 s_x r_{1x})_{z^3}^0 \\ + \frac{1}{8} (r s_1) (s_x^2, r_x s_x r_{1x}^2)_{z^3}^0 - \frac{1}{8} (s r_1) (s_x^2, r_x^2 r_{1x} s_{1x})_{z^3}^0 \\ + \frac{1}{8} (xz) \left\{ (rs) (s_x^2, r_x r_{1x}^2 s_{1x})_{z^2}^1 - (s r_1) (s_x^2, r_x^2 r_{1x} s_{1x})_{z^2}^1 \right. \\ \left. + (r s_1) (s_x^2, r_x s_x r_{1x}^2)_{z^2}^1 + (r_1 s_1) (s_x^2, r_x^2 s_x r_{1x})_{z^2}^1 \right\} \\ + \frac{3}{80} (xz)^2 \left\{ (rs) (s_x^2, r_x r_{1x}^2 s_{1x})_{z^2}^2 - (s r_1) (s_x^2, r_x^2 r_{1x} s_{1x})_{z^2}^2 \right. \\ \left. + (r s_1) (s_x^2, r_x s_x r_{1x}^2)_{z^2}^2 + (r_1 s_1) (s_x^2, r_x^2 s_x r_{1x})_{z^2}^2 \right\},$$

$$s_x^2 (r_x r_{1x}, r_x s_x r_{1x} s_{1x})_{z^2}^2 = -\frac{1}{12} (r r_1)^2 (s_x^2, s_x s_{1x})_{z^2}^0 \\ - \frac{1}{12} (r r_1) (r s) (s_x^2, r_{1x} s_{1x})_{z^2}^0 - \frac{1}{12} (r r_1) (r s_1) (s_x^2, s_x r_{1x})_{z^2}^0 \\ + \frac{1}{12} (r r_1) (r_1 s_1) (s_x^2, r_x s_x)_{z^2}^0 - \frac{1}{12} (r r_1) (s r_1) (s_x^2, r_x s_{1x})_{z^2}^0 \\ + \frac{1}{12} (r s) (r_1 s_1) (s_x^2, r_x r_{1x})_{z^2}^0 - \frac{1}{12} (r s_1) (s r_1) (s_x^2, r_x r_{1x})_{z^2}^0 \\ + \frac{1}{12} (xz) \left\{ - (r r_1)^2 (s_x^2, s_x s_{1x})_{z^1}^1 - (r r_1) (r s) (s_x^2, r_{1x} s_{1x})_{z^1}^1 \right. \\ \left. - (r r_1) (r s_1) (s_x^2, s_x r_{1x})_{z^1}^1 - (r r_1) (s r_1) (s_x^2, r_x s_{1x})_{z^1}^1 + (r r_1) (r_1 s_1) (s_x^2, r_x s_x)_{z^1}^1 \right. \\ \left. + (r s) (r_1 s_1) (s_x^2, r_x r_{1x})_{z^1}^1 - (r s_1) (s r_1) (s_x^2, r_x r_{1x})_{z^1}^1 \right\} \\ + \frac{1}{36} (xz)^2 \left\{ - (r r_1) (s s_1) (r s) (s r_1) + (r r_1) (s s_1) (r s) (s r_1) \right. \\ \left. - (r s)^2 (r_1 s_1) (s r_1) + (r s) (r s_1) (s r_1)^2 \right\}.$$

Finalmente, volendo le espressioni del quarto e del quinto termine di  $\Psi$ ,

occorre soltanto sviluppare la forma  $r_x s_x r_{1x} s_{1x} r_x s_x r_{1x} s_{1x}$ , e si ottiene:

$$s_x s_{1x} \left\{ (r_x r_{1x}, r_x s_x r_{1x} s_{1x})_{z^4}^0 + \frac{4}{3} (xz) (\text{idem})_{z^3}^1 + \frac{3}{5} (xz)^2 (\text{idem})_{z^2}^2 \right\}.$$

Ora per lo sviluppo dei tre termini che qui intervengono non è necessario eseguire un nuovo calcolo, poichè sussistono ancora le formole scritte precedentemente, quando nei primi fattori dei primi membri e nelle prime forme di cui si devono fare le spinte nei secondi membri al posto di  $s_x^2$  si scriva sempre  $s_x s_{1x}$ . Inoltre è da osservarsi che, essendo lecito sì nel quarto come nel quinto termine di  $\Psi$  scambiare  $r$  con  $r_1$  e nello stesso tempo  $s$  con  $s_1$ , nel caso presente si introducono notevoli semplificazioni. Per brevità ometto di scrivere gli sviluppi di queste ultime espressioni.

### § 5. Sviluppo definitivo di $\Psi$ .

Sostituendo nell'espressione di  $\Psi$  i valori trovati nei paragrafi precedenti, si perviene al seguente risultato:

$$\begin{aligned} \Psi = & \Delta_y^4 \Delta_z^4 M_1 + \left\{ (xz)^2 \Delta_y^4 \Delta_z^2 + \frac{8}{3} (xz)(yz) \Delta_y^3 \Delta_z^2 + (yz)^2 \Delta_y^2 \Delta_z^2 \right\} M_2 + (xy)^2 \Delta_y^2 \Delta_z^4 M_3 \\ & + \left\{ (xz)^4 \Delta_y^4 + 16 (xz)^3 (yz) \Delta_y^3 + 36 (xz)^2 (yz)^2 \Delta_y^2 + 16 (xz)(yz)^3 \Delta_y + (yz)^4 \right\} M_4 \\ & + \left\{ (xy)^2 (xz)^2 \Delta_y^2 \Delta_z^2 + 4(xy)^2 (xz)(yz) \Delta_y \Delta_z^2 + (xy)^2 (yz)^2 \Delta_z^2 \right\} M_5 + (xy)^2 (xz)^2 (yz)^2 M_6 \\ & - \left\{ \frac{1}{70} (xz)^3 \Delta_y^4 \Delta_z + \frac{3}{35} (xz)^2 (yz) \Delta_y^3 \Delta_z + \frac{3}{35} (xz)(yz)^2 \Delta_y^2 \Delta_z + \frac{1}{70} (yz)^3 \Delta_y \Delta_z \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{20} (xy)^2 (xz) \Delta_y^2 \Delta_z^3 + \frac{1}{20} (xy)^2 (yz) \Delta_y \Delta_z^3 \right\} B \\ & + \left\{ \frac{1}{30} (xy)^4 \Delta_z^4 + \frac{1}{280} (xz)^4 \Delta_y^4 + \frac{2}{35} (xz)^3 (yz) \Delta_y^3 + \frac{9}{70} (xz)^2 (yz)^2 \Delta_y^2 \right. \\ & \quad \left. + \frac{2}{35} (xz)(yz)^3 \Delta_y + \frac{1}{280} (yz)^4 \right\} t - \frac{37}{70} (xy)^2 \Delta_y^2 \lambda_z^4 \mu_x^4. \end{aligned}$$

Le  $M_1, M_2, \dots, M_6$ , che, insieme colle espressioni già note  $B, t$  e  $\lambda_x^4 \mu_y^4$  (vedi § 2), entrano a comporre la  $\Psi$ , si presentano quasi tutte sotto aspetto assai complicato; però con molteplici artifici, di cui non è il caso di qui

esporre i particolari, si possono ridurre alle forme seguenti, abbastanza semplici:

$$M_1 = (r r_1)(s s_1) r_x^3 s_x^3 r_{1x}^3 s_{1x}^3,$$

$$\begin{aligned} M_2 = & - \frac{3^2 \cdot 157}{2^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11} (r r_1)(s s_1)(r_1 s_1)^2 r_x^3 s_x^3 r_{1x} s_{1x} \\ & - \frac{3^2 \cdot 157}{2^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11} (r r_1)(s s_1)(r s_1)^2 r_x s_x^3 r_{1x}^3 s_{1x} \\ & - \frac{3 \cdot 131}{2^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11} (r r_1)(s s_1)(r_1 s_1)(r s_1) r_x^2 s_x^3 r_{1x}^2 s_{1x} - \frac{3}{2^5 \cdot 5} (r r_1)^3 (s s_1) r_x s_x^3 r_{1x} s_{1x}^3 \\ & - \frac{3^2 \cdot 13}{2^4 \cdot 5^2 \cdot 11} (r r_1)(s s_1)(r s_1)(s r_1) r_x^2 s_x^2 r_{1x}^2 s_{1x}^2 + \frac{3^2 \cdot 13}{2^5 \cdot 5^2 \cdot 11} (r r_1)^2 (s s_1)^2 r_x^2 s_x^2 r_{1x}^2 s_{1x}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_3 = & \frac{1}{5} (r r_1)(s s_1)(r_1 s_1)(r s_1) r_x^2 s_x^2 r_{1x}^2 s_{1x} - \frac{17}{2 \cdot 5 \cdot 7} (r r_1)^2 (s s_1)^2 r_x^2 s_x^2 r_{1x}^2 s_{1x}^2 \\ & + \frac{17}{5 \cdot 7} (r r_1)(s s_1)(r s_1)(s r_1) r_x^2 s_x^2 r_{1x}^2 s_{1x}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_4 = & - \frac{83}{2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2} (r r_1)^3 (s s_1)(r_1 s_1)(r s_1) s_x^3 s_{1x} + \frac{73}{2^6 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7} (r r_1)^3 (s s_1)(r s_1)(r_1 s_1) s_x^2 s_{1x}^2 \\ & - \frac{13}{2^6 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7} (r r_1)(s s_1)(r_1 s_1)(r s_1)^2 (s r_1) r_x s_x^2 r_{1x} \\ & + \frac{13}{2^6 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7} (r r_1)(s s_1)(r s_1)^2 (r_1 s_1)(r s_1) s_x r_{1x}^2 s_{1x} \\ & - \frac{73}{2^6 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7} (r r_1)(s s_1)(r s_1)^3 (s r_1) s_x^2 r_{1x}^2 + \frac{283}{2^6 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2} (r r_1)(s s_1)^2 (r s_1)^2 (s r_1) r_x s_x r_{1x}^2 \\ & - \frac{283}{2^6 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2} (r r_1)^2 (s s_1)(r s_1)^2 (r_1 s_1) s_x r_{1x} s_{1x}^2 - \frac{113}{2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2} (r r_1)^3 (s s_1)^2 r_x s_x r_{1x} s_{1x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_5 = & - \frac{29}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7} (r r_1)^3 (s s_1)(r_1 s_1)(r s_1) s_x^3 s_{1x} + \frac{17 \cdot 233}{2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2} (r r_1)^2 (s s_1)^4 r_x^2 r_{1x}^2 \\ & - \frac{13 \cdot 17}{2^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2} (r r_1)(s s_1)(r s_1)^3 (s r_1) s_x^2 r_{1x}^2 + \frac{17}{2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7} (r r_1)^2 (s s_1)^2 (r s_1)^2 r_{1x}^2 s_{1x}^2 \\ & + \frac{17}{2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7} (r r_1)^2 (s s_1)^2 (r s_1)^2 s_x^2 r_{1x}^2 - \frac{53}{2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2} (r r_1)^2 (s s_1)^2 (r s_1)(s r_1) s_x r_{1x}^2 s_{1x} \\ & - \frac{17 \cdot 137}{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2} (r r_1)(s s_1)^2 (r s_1)^2 (s r_1) r_x s_x r_{1x}^2 \\ & - \frac{17 \cdot 163}{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2} (r r_1)(s s_1)(r_1 s_1)(r s_1)^2 (s r_1) r_x s_x^2 r_{1x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{17}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7} (r r_1)^2 (s s_1) (r s)^2 (r_1 s_1) s_x r_{1x} s_{1x}^2 \\
 & + \frac{2^3 \cdot 13}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2} (r r_1) (s s_1) (r s)^2 (r_1 s_1) (r s_1) s_x r_{1x}^2 s_{1x}, \\
 M_6 = & \frac{3 \cdot 19}{2^4 \cdot 5^2 \cdot 7} (r r_1)^2 (s s_1)^2 (r s) (r_1 s_1) (r s_1) (s r_1) + \frac{17}{2^4 \cdot 5^2 \cdot 7} (r r_1)^2 (s s_1)^2 (r s_1)^2 (s r_1)^2 \\
 & - \frac{17}{2^4 \cdot 5^2 \cdot 7} (r r_1)^3 (s s_1)^3 (r s) (r_1 s_1) + \frac{17}{2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7} (r r_1) (s s_1) (r s_1)^3 (s r_1)^3 \\
 & - \frac{17}{2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7} (r r_1)^4 (s s_1)^4.
 \end{aligned}$$

Per ottenere lo sviluppo di  $\Psi$  nella forma definitiva non rimane che da esprimere tutti i covarianti precedenti mediante spinte di  $\rho$ ,  $\sigma$  e  $\tau$ , cioè dei covarianti elementari di  $f$  e  $\varphi$ , dei quali si è parlato nel § 2. A tale scopo servono le formole seguenti, che si deducono in parte dalle polari calcolate dal GORDAN a pag. 385 e 386 del l. c., ed in parte da altre calcolabili in modo analogo: io le scriverò raccogliendole in quattro gruppi, che serviranno rispett. al calcolo di  $M_1$ ;  $M_2$  ed  $M_3$ ;  $M_4$  ed  $M_5$ ;  $M_6$ .

1.

$$(r r_1) (s s_1) r_x^3 s_x^3 r_{1x}^3 s_{1x}^3 = (\rho \rho)^2 - \frac{3}{7} \rho \sigma.$$

2.

$$(r r_1) (s s_1) (r_1 s_1)^2 r_x^3 s_x^3 r_{1x} s_{1x} = (\rho \sigma)^2 - \frac{1}{6} \tau \rho - \frac{3}{14} \sigma^2,$$

$$(r r_1) (s s_1) (r s_1)^2 r_x s_x^3 r_{1x}^3 s_{1x} = (\rho \rho)^4 + \frac{3}{7} (\rho \sigma)^2 - \frac{1}{10} \tau \rho + \frac{13}{98} \sigma^2,$$

$$(r r_1) (s s_1) (r_1 s_1) (r s_1) r_x^2 s_x^3 r_{1x}^2 s_{1x} = \frac{1}{2} (\rho \sigma)^2 - \frac{1}{12} \tau \rho + \frac{1}{7} \sigma^2,$$

$$(r r_1) (s s_1) (r s_1) (s r_1) r_x^2 s_x^3 r_{1x}^2 s_{1x}^2 = (\rho \rho)^4 - \frac{4}{7} (\rho \sigma)^2 + \frac{1}{15} \tau \rho - \frac{15}{98} \sigma^2,$$

$$(r r_1)^2 (s s_1)^2 r_x^2 s_x^2 r_{1x}^2 s_{1x}^2 = (\rho \rho)^4 - \frac{4}{7} (\rho \sigma)^2 + \frac{1}{15} \tau \rho + \frac{17}{49} \sigma^2.$$

3.

$$(r r_1)^3 (s s_1) (r_1 s_1) (r s_1) s_x^3 s_{1x} = -\frac{1}{2} (\rho \sigma)^4 + \frac{9}{14} (\sigma \sigma)^2 + \frac{3}{20} \tau \sigma,$$

$$(r r_1)^3 (s s_1) (r s) (r_1 s_1) s_x^2 s_{1x}^2 = \frac{1}{2} \tau \sigma,$$

$$(r r_1) (s s_1) (r_1 s_1) (r s_1)^2 (s r_1) r_x s_x^2 r_{1x} = \frac{1}{2} (\rho \sigma)^4 - \frac{1}{7} (\sigma \sigma)^2 - \frac{1}{15} \tau \sigma,$$

$$(r r_1) (s s_1) (r s)^2 (r_1 s_1) (r s_1) s_x r_{1x}^2 s_{1x} = \frac{1}{2} (\sigma \sigma)^2 + \frac{1}{12} \tau \sigma,$$

$$(r r_1) (s s_1) (r s_1)^3 (s r_1) s_x^2 r_{1x}^2 = (\rho \rho)^6 + \frac{4}{7} (\rho \sigma)^4 - \frac{18}{49} (\sigma \sigma)^2 - \frac{1}{10} \tau \sigma,$$

$$(r r_1) (s s_1)^2 (r s_1)^2 (s r_1) r_x s_x r_{1x}^2 = (\rho \rho)^6 + \frac{1}{14} (\rho \sigma)^4 - \frac{11}{49} (\sigma \sigma)^2 - \frac{1}{30} \tau \sigma,$$

$$(r r_1)^2 (s s_1) (r s)^2 (r_1 s_1) s_x r_{1x} s_{1x}^2 = -\frac{1}{2} (\sigma \sigma)^2 + \frac{5}{12} \tau \sigma,$$

$$(r r_1)^3 (s s_1)^3 r_x s_x r_{1x} s_{1x} = (\rho \rho)^6 - \frac{3}{7} (\rho \sigma)^4 + \frac{45}{49} (\sigma \sigma)^2 - \frac{3}{10} \tau \sigma,$$

$$(r r_1)^3 (s s_1)^4 r_x^2 r_{1x}^2 = (\rho \rho)^6 + \frac{4}{7} (\rho \sigma)^4 - \frac{18}{49} (\sigma \sigma)^2 + \frac{2}{5} \tau \sigma,$$

$$(r r_1)^2 (s s_1)^2 (r s)^2 r_{1x}^2 s_{1x}^2 = (\rho \sigma)^4 - \frac{2}{7} (\sigma \sigma)^2 + \frac{11}{30} \tau \sigma,$$

$$(r r_1)^2 (s s_1)^2 (r s_1)^2 s_x^2 r_{1x}^2 = (\rho \rho)^6 + \frac{4}{7} (\rho \sigma)^4 + \frac{31}{49} (\sigma \sigma)^2 + \frac{1}{15} \tau \sigma,$$

$$(r r_1)^2 (s s_1)^2 (r s) (r s_1) s_x r_{1x}^2 s_{1x} = \frac{1}{2} (\rho \sigma)^4 + \frac{5}{14} (\sigma \sigma)^2 + \frac{1}{60} \tau \sigma.$$

4.

$$(r r_1)^2 (s s_1)^2 (r s) (r_1 s_1) (r s_1) (s r_1) = \frac{1}{2} (\sigma \sigma)^4 - \frac{1}{12} \tau^2,$$

$$(r r_1)^2 (s s_1)^2 (r s_1)^2 (s r_1)^2 = (\rho \rho)^8 - \frac{2}{7} (\sigma \sigma)^4 + \frac{1}{30} \tau^2,$$

$$(r r_1)^3 (s s_1)^3 (r s) (r_1 s_1) = \frac{3}{2} (\sigma \sigma)^4 + \frac{1}{4} \tau^2,$$

$$(r r_1) (s s_1) (r s_1)^3 (s r_1)^3 = (\rho \rho)^8 + \frac{3}{14} (\sigma \sigma)^4 - \frac{1}{20} \tau^2.$$

Sostituendo allora questi valori nell'espressione di  $\Psi$  data in principio di questo paragrafo, ed osservando che (vedi § 2)

$$\begin{aligned} \Delta^2 \lambda_z^4 \mu_x^4 &= A_z^4 A_x^2 A_y^2 - \frac{1}{2} (xz) B_z^3 B_x B_y^2 - \frac{1}{2} (yz) B_z^3 B_x^2 B_y \\ &+ \frac{1}{6} (xz)^2 C_z^2 C_y^2 + \frac{2}{3} (xz)(yz) C_z^2 C_x C_y + \frac{1}{6} (yz)^2 C_z^2 C_x^2 + E(xz)^2 (yz)^2, \end{aligned}$$

si trova che tutti i termini contenenti un medesimo numero di determinanti simbolici  $(xy)$ ,  $(xz)$ ,  $(yz)$  sono poi moltiplicati per polari (rispetto ad  $y$  e  $z$ ) di covarianti tutti fra loro identici a meno di coefficienti numerici, e questo fornisce un'importante conferma dei risultati precedenti.

Osserviamo inoltre che la  $\Psi$  deve essere simmetrica rispetto alle tre serie di variabili  $x, y, z$ : per renderla tale anche nella forma basterà prendere il sesto della somma dei risultati che si ottengono eseguendo le sei permutazioni dei simboli  $x, y, z$  nell'espressione di  $\Psi$  a cui si arriva nel modo sopra esposto. Così facendo si ottiene

$$\begin{aligned} \Psi &= -\frac{1}{10} \left\{ (yz)^2 [(xy) B_x + (xz) B_y] B_y B_x B_x^3 \right. \\ &+ (zx)^2 [(yz) B_x + (yx) B_z] B_x B_x B_y^3 + (xy)^2 [(zx) B_y + (zy) B_x] B_x B_y B_z^3 \left. \right\} \\ &+ \frac{1}{4410} \left\{ 67 [(yz)^4 t_x^4 + (zx)^4 t_y^4 + (xy)^4 t_z^4] \right. \\ &+ 76 [(xy)^2 (xz)^2 t_y^2 t_z^2 + (yz)^2 (yx)^2 t_z^2 t_x^2 + (zx)^2 (zy)^2 t_x^2 t_y^2] \left. \right\} \\ &+ M_x^4 M_y^4 M_z^4 + \frac{7}{3} \left\{ (yz)^2 N_y^2 N_z^2 N_x^4 + (zx)^2 N_z^2 N_x^2 N_y^4 + (xy)^2 N_x^2 N_y^2 N_z^4 \right\} \\ &+ (yz)^2 (zx)^2 (xy)^2 P, \end{aligned}$$

dove i tre nuovi covarianti  $M, N$  e  $P$  hanno i valori:

$$\begin{aligned} M &= (\rho\rho)^2 - \frac{3}{7} \rho\sigma, \\ N &= -\frac{6}{77} (\rho\rho)^4 - \frac{39}{539} (\rho\sigma)^2 + \frac{1}{70} \tau\rho + \frac{6}{343} \sigma^2, \\ P &= -\frac{1}{105} (\rho\rho)^3 + \frac{19}{980} (\sigma\sigma)^4 + \frac{1}{600} \tau^2. \end{aligned}$$

Le condizioni necessarie e sufficienti perchè  $f$  e  $\varphi$  abbiano quattro radici comuni consistono dunque nell'identico annullarsi dei covarianti  $B, t, M$  ed  $N$ ,

e nell'annullarsi dell'invariante  $P$ ; esse possono però anche venire espresse, nel senso dichiarato nell'introduzione di questa Memoria, aggiungendo all'identico annullarsi del covariante  $\Theta$  l'annullarsi dei due invarianti  $\Phi^{IV}$  e  $P$ , essendo  $\Phi^{IV}$  l'ultimo termine dello sviluppo di  $\Phi$ .

### § 6. Verificazione dei risultati precedenti.

A confermare l'esattezza degli sviluppi precedenti partiremo da due quintiche aventi quattro radici comuni, e dimostreremo che in tal caso le condizioni sopra trovate sono effettivamente soddisfatte. Poniamo dunque

$$f = R_x^4 h_x, \quad \varphi = R_x^4 k_x,$$

dove  $R_x^4$  è la forma biquadratica che fornisce le quattro radici comuni, ed  $h_x, k_x$  sono forme lineari (laonde  $h$  e  $k$  non sono simboli, ma quantità effettive). Chiamiamo  $D$  l'invariante simultaneo di  $h$  e  $k$ , cioè poniamo

$$D = (hk),$$

per cui, volendo supporre che le due quintiche non coincidano,  $D$  sarà diverso da zero.

Denotando allora, come di solito, con  $H$  l'hessiano, e con  $i$  e  $j$  i due invarianti di  $R$ , è facile trovare che i covarianti elementari  $\rho, \sigma$  e  $\tau$  di  $f$  e  $\varphi$  sono dati dalle formole semplicissime:

$$\rho = DR^2, \quad \sigma = DH, \quad \tau = Di.$$

Dovendo sostituire questi valori nelle espressioni di  $M, N, P, B, t$  trovate alla fine del paragrafo precedente, ci occorrono in primo luogo le spinte 2.<sup>a</sup>, 4.<sup>a</sup>, 6.<sup>a</sup> ed 8.<sup>a</sup> di  $\rho$  sopra sè stesso. Ora le tre ultime sono già state calcolate recentemente per altro scopo dal sig. ALAGNA (\*), il quale ha trovato (salvo il fattore  $D^2$  che interviene nel nostro caso):

$$(\rho\rho)^4 = \frac{1}{245} D^2 (7iR^2 + 120H^2),$$

$$(\rho\rho)^6 = \frac{6}{49} D^2 (4iH - jR),$$

$$(\rho\rho)^8 = \frac{18}{35} D^2 i^2.$$

(\*) ALAGNA, *Condizioni perchè una forma dell'ottavo ordine abbia quattro punti doppi* (Rendic. del Circolo Matem. di Palermo, 1890, t. 4.<sup>o</sup>, pag. 25).

Inoltre dalla (2) dello stesso lavoro segue subito:

$$(\rho\rho)^2 = \frac{3}{7} D^2 R^2 H.$$

Dallo stesso lavoro si desumono altresì [form. (4) e (6)] le formole seguenti:

$$(\rho\sigma)^2 = D^2 \left( \frac{1}{6} i R^2 - \frac{2}{7} H^2 \right),$$

$$(\rho\sigma)^4 = \frac{3}{35} D^2 (5jR + iH).$$

Per la teoria delle forme biquadratiche (\*) abbiamo poi:

$$(\sigma\sigma)^2 = \frac{1}{3} D^2 \left( jR - \frac{1}{2} iH \right),$$

$$(\sigma\sigma)^4 = \frac{1}{6} D^2 i^2.$$

Infine, se per un istante poniamo

$$S_x^8 = \overline{R_x^4},$$

dalla (2) del lavoro citato (scritta coi nostri simboli) segue:

$$S_y^3 S_x^5 = \frac{1}{3} R_y^3 R_x R_x^4 + \frac{2}{3} R_y^2 R_x^2 R_y' R_x^3 - \frac{4}{21} (xy)^2 H_y H_x^3,$$

da cui:

$$\begin{aligned} B = -(\rho\sigma)^3 &= -\frac{1}{3} (RH)^3 R_x H_x \cdot R_x^4 - \frac{2}{3} (RH)^2 (R'H) R_x^2 R_x^3 H_x \\ &= -\frac{2}{3} (RH)^2 (R'H) R_x^2 R_x^3 H_x. \end{aligned}$$

Ma

$$(RH)^2 R_x^2 H_x H_y = \frac{1}{6} i R_x^3 R_y,$$

quindi  $B$  è identicamente nullo. Sostituendo poi i valori precedenti nelle formole dell'ultimo paragrafo, i primi membri si riducono tutti identicamente a zero.

---

(\*) CLEBSCH, *Theorie der bin. alg. Formen*, § 41.

§ 7. Dimostrazione che  $P$  non è necessariamente nullo  
quando  $f$  e  $\varphi$  hanno tre sole radici comuni.

Avendo nel paragrafo precedente trovata l'espressione dell'invariante  $P$ , siamo ora in grado di dimostrare che esso non è necessariamente nullo quando le due forme date abbiano tre sole radici comuni.

Le due quintiche abbiano in comune le tre radici  $0, \infty, -1$ , e siano:

$$f = x_1^2 x_2^2 (x_1 + x_2),$$

$$\varphi = x_1 x_2 (x_1 + x_2) (x_2^2 - x_1).$$

Allora avremo:

$$\rho = x_1^6 x_2^2 + 2 x_1^5 x_2^3 + 2 x_1^4 x_2^4 + 2 x_1^3 x_2^5 + x_1^2 x_2^6,$$

$$\sigma = -\frac{1}{24} (3 x_1^4 + 4 x_1^3 x_2 + 8 x_1 x_2^2 + 4 x_1 x_2^3 + 3 x_2^4);$$

$$\tau = \frac{1}{3}.$$

Laonde

$$(\rho\rho)^3 = -\frac{1}{70}, \quad (\sigma\sigma)^4 = \frac{31}{864}, \quad \tau^2 = \frac{1}{9},$$

epperò  $P$  risulta la somma di tre numeri positivi, e con ciò il nostro asserto è dimostrato.

Pavia, 2 luglio 1891.

# Sulle funzioni a due variabili reali, le quali crescono o decrescono sempre nel verso positivo di ciascuno degli assi in un pezzo di piano a distanza finita.

(Di GIULIO ASCOLI, a Milano.)

---

## I.

1. **L**e aree che consideriamo in appresso sono piane, ad un solo strato, nè si estendono all'infinito, e le curve di cui ci gioviamo appartengono alla prima classe (\*), non escludendo in tal modo che sieno di classe superiore, come è manifesto.

Indico con  $f_i(x, y)$  una funzione continua nell'area connessa  $A$  e sempre crescente secondo la direzione positiva di ciascuno degli assi, cioè tale, che si abbia

$$f_i(x_1 + h, y_1) - f_i(x_1, y_1) > 0, \quad f_i(x_1, y_1 + k) - f_i(x_1, y_1) > 0 \\ (h > 0, k > 0),$$

essendo  $(x_1, y_1)$   $(\overline{x_1 + h}, y_1)$ ,  $(x_1, y_1)$   $(x_1, \overline{y_1 + k})$  le coordinate degli estremi di due segmenti che appartengono per intero alla superficie  $A$ .

*Ci proponiamo di studiare le proprietà di questa funzione.*

La  $f_i(x, y)$  essendo ovunque continua in  $A$  è pure *finita*.

Si facilitano le nostre ricerche supponendo prima che qualunque parallela ad uno degli assi uscente da un punto della superficie  $A - 0$  ne incontri in

---

(\*) Vedi la prima parte della mia Memoria: *Le curve limite di una varietà data di curve*, inserita nel Vol. XVIII (Ser. 3.<sup>a</sup>), delle Memorie della classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei. Vedi anche la prima delle mie Note inserita nel Vol. XXI, Ser. II, dei Rendiconti del R. Istituto Lombardo.

soli due punti il contorno  $C_A$  ed ammettendo che l'area  $A$  cada nel primo quadrante, mentre la funzione  $f_1(x, y)$  non raggiunge dei valori negativi o nulli. Si può soddisfare alle due ultime condizioni scegliendo opportunamente gli assi.

2. Prima di accingerci al nostro studio giova fare alcune osservazioni circa al contorno  $C_A$ , che sono una conseguenza delle premesse.

Quando la curva  $C_A$  non contenga alcun segmento parallelo ad uno degli assi, si possono tracciare due parallele alla retta  $y = 0$ , ciascuna delle quali esce da un *solo* punto del contorno di  $A$ , che determinano una lista di piano, in cui giace per intero l'area data. Fa parte di una di queste rette il punto più vicino alla linea  $y = 0$  della superficie  $A$ , dell'altra il più discosto. I due elementi in discorso dividono il contorno  $C_A$  in due parti, destra e sinistra, guardando nella direzione positiva dell'asse  $Y$ . Io posso tracciare anche due rette parallele a quest'ultimo ed analoghe e quelle condotte or ora, le quali fanno nascere altri due punti sopra la linea  $C_A$ , il più vicino ed il più lontano dell'asse  $Y$ , che alla loro volta scindono il contorno della nostra area in due pezzi, superiore l'uno, inferiore l'altro.

In tale maniera si è costruito un rettangolo circoscritto all'area data, il quale ha comune con essa soltanto quattro punti  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  girando da destra a sinistra, essendo  $\alpha$  il punto di  $C_A$  più discosto dalla linea  $x = 0$ , che dividono la curva  $C_A$  in quattro parti, l'una  $\alpha\beta$  superiore destra, l'altra  $\beta\gamma$  superiore sinistra, la terza  $\gamma\delta$  inferiore sinistra, l'ultima  $\delta\alpha$  inferiore destra. Distingueremo in appresso questi parti con le denominazioni di prima, seconda, terza e quarta, e le indicheremo coi simboli  $C_A^{(1)}, C_A^{(2)}, C_A^{(3)}, C_A^{(4)}$  ordinatamente. Di conseguenza,  $C_A^{(1)} + C_A^{(2)} + C_A^{(3)} + C_A^{(4)} = C_A$ .

È chiaro che la linea  $C_A^{(1)}$  è sempre decrescente all'aumentare dell'ascissa, chè, se ciò non fosse, ogni parallela all'asse  $X$  non incontrerebbe al massimo in due punti il contorno  $C_A$ . La seconda parte della curva  $C_A$  è all'incontro crescente, la terza decresce e l'ultima aumenta sempre insieme all'ascissa.

Quindi innanzi dirò ramo semplice crescente o decrescente una curva formata da un numero limitato di rami di prima classe successivi, la quale è aperta e può percorrersi in guisa, che la sua ordinata cresca o diminuisca ognora per ordine, mentre l'ascissa cresce. Adunque, ogni parte in cui fu diviso il contorno  $C_A$  è un ramo semplice.

Siamo ora in grado di costruire nel primo quadrante tante aree della natura indicata quante vogliamo, in cui i punti  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  sono scelti ad arbitrio, *per quanto è possibile*; ed ecco come. Si scelga l'elemento  $\alpha$  del tutto

a piacere entro il primo quadrante, il punto  $\beta$  sopra  $\alpha$  ed alla sua sinistra,  $\gamma$  a sinistra al disotto di  $\beta$ , e per ultimo  $\delta$  sotto i punti  $\alpha$  e  $\gamma$  e fra i medesimi. Si tracci poi un ramo sempre decrescente da  $\beta$  ad  $\alpha$ , uno crescente da  $\delta$  ad  $\alpha$ , un terzo il quale decresca da  $\gamma$  a  $\delta$ , ed infine uno crescente dall'elemento  $\gamma$  all'altro  $\beta$ .

I punti  $\alpha$  e  $\beta$  potrebbero coincidere, mentre gli altri due sono distinti o meno, così pure gli elementi  $\beta$  e  $\gamma$  potrebbero ridursi ad uno solo, laddove la stessa cosa ha luogo degli altri o no. Di più, i punti  $\alpha$  e  $\beta$  essendo tra loro diversi, gli altri due potranno coincidere, e mentre gli elementi  $\beta$  e  $\gamma$  sono distinti, la stessa cosa potrà non verificarsi di  $\alpha$  e di  $\delta$ .

Per costruire, ad esempio, un'area in cui i punti  $\alpha$  e  $\beta$  sono coincidenti come pure  $\gamma$  e  $\delta$ , scelto il punto  $\alpha$  a piacere e  $\gamma$  a sinistra ed al di sotto del primo, si traccino due rami semplici crescenti da  $\gamma$  ad  $\alpha$ , i quali non si incontrino nell'interno del loro corso.

Dalle ricerche precedenti risulta manifesto come una delle quattro parti  $C_A^{(s)}$  ( $s = 1, 2, 3, 4$ ) ed anche due possano annullarsi, e come nella seconda ipotesi le parti che formano la curva  $C_A$  sieno amendue ad indice pari od impari.

3. Preso ad arbitrio un punto in  $A - 0$ , si potrà tener parola di un segmento parallelo all'asse  $X$  e di un altro parallelo all'asse  $Y$ , che lo contengono ad un estremo e cadono nella superficie  $A - 0$ .

La funzione  $f_i(x, y)$  è sempre crescente in ognuno di questi intervalli nel verso positivo dell'asse che gli è parallelo.

La espressione  $f_i(x, y)$  cresce ognora lungo un ramo semplice crescente tracciato in  $A - 0$ .

Infatti, divisa la curva considerata in più parti piccole a piacere, tiro le rette che proiettano i punti di divisione ed i suoi estremi sopra amendue gli assi ed ottengo due linee poligonali, l'una da una parte, la seconda dall'altra della linea in discorso. Di due vertici successivi di ciascuna delle nostre spezzate l'uno appartiene alla curva contemplata, l'altro no. Queste due linee cadono per intero entro la superficie data, perchè io posso torre da quest'ultima un pezzo connesso contenente nel suo interno la linea di cui ci occupiamo.

Le due spezzate in discorso si possono percorrere in guisa da trovarsi sempre sopra un segmento parallelo ad uno degli assi e nel suo verso; l'asserto è quindi vero.

Le cose dette reggono anche se il ramo semplice contemplato  $S$  appar-

tiene al contorno  $C_A$ . Ed invero, fatta astrazione, se mai, di un tratticello aderente ad uno degli estremi del medesimo, oppure di due, uno ad uno dei termini, all'altro il secondo, potrà tracciare per gli estremi del ramo  $L$  così ottenuto due segmenti paralleli ad uno qualunque degli assi nella superficie  $A$ , e quindi torre da quest'ultima un pezzo semplicemente connesso limitato dalla linea  $L$  da questi due tratti e da un'altra curva. Dimostrata l'asserzione con metodo analogo al precedente e giovandosi di una sola spezzata per l'arco  $L$ , si supponga che quest'ultimo tenda ad  $S$ , e si vedrà tosto che la funzione  $f_i(x, y)$  è crescente lungo la linea  $S$ , quando sia percorsa in guisa, che l'ascissa cresca.

Sarebbe necessario, ad esempio, il trascurare una particella dell'arco  $S$  in ciascuno dei due termini, se i punti  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  si riducessero ai due  $\alpha$  e  $\gamma$ , la linea  $S$  essendo una delle due che andando da  $\gamma$  ad  $\alpha$  costituiscono l'intero contorno  $C_A$ , la stessa cosa dovrebbe farsi rispetto ad un solo termine, se l'elemento contemplato fosse una parte connessa di uno di questi archi avente un estremo in  $\alpha$  od in  $\gamma$ .

Se  $pq$  è un tratto che cade *entro* una delle quattro parti del contorno  $C_A$ , supposto completo, si potrà condurre in  $A$  per  $p$  e per  $q$  un segmento parallelo ad ognuno degli assi. La cosa non è possibile rispetto a nessuno dei due assi, se amendue i termini  $p$  e  $q$  si confondono con due successivi tra gli elementi  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ . Quando invece uno soltanto degli estremi  $p$  e  $q$  cade in uno dei quattro punti  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , si potranno tracciare i due segmenti in  $A$  parallelamente ad uno solo degli assi.

4. Condotte per il punto  $a$  nel piano della superficie  $A$  due raggi  $aX'$  ed  $aY'$  paralleli agli assi  $OX$  ed  $OY$  e nel loro verso, dirò che un punto  $b$  è nel primo quadrante rispetto ad  $a$  oppure di  $a$ , se appartiene all'angolo  $X'aY'$ , i lati compresi. Analogo significato attribuiremo alle locuzioni: il punto  $b$  è nel *secondo, terzo, quarto* quadrante di  $a$ . Il punto  $b$  si trova in due quadranti successivi riguardo ad  $a$ , se cade sopra la retta  $aX'$  od  $aY'$ . Il punto  $a$  appartiene poi ad una qualunque delle quattro regioni che in esso hanno l'origine.

Non è difficile a dimostrarsi, *come, preso un punto ad arbitrio  $O$  nell'area  $A$ , la funzione  $f_i(x, y)$  assuma un valore più grande che in esso in ogni punto della superficie  $A$ , il quale appartiene al primo quadrante rispetto all'elemento  $a$ , mentre in ogni punto del terzo avviene l'opposto.*

Il punto  $O$  potrà cadere in  $A - 0$  oppure sulla curva  $C_A$ , e nell'ultimo caso si ricava una proprietà notevole dei valori raggiunti dalla  $f_i(x, y)$  sul contorno  $C_A$ , che facilmente si enuncia.

Queste asserzioni sono una conseguenza della proposizione:

*Se si tira per un punto  $O'$  della nostra area  $A$  una coppia di assi paralleli ai primitivi e nel loro verso il pezzo di  $A - 0$  sito nel primo dei nuovi quadranti (\*) ha la proprietà, che si può pervenire dall'elemento  $O'$  ad un suo punto qualsivoglia mediante un ramo semplice crescente di cui ciascun punto interno è in  $A - 0$ , oppure per mezzo di un segmento dei nuovi assi sito nella superficie data.*

Una parallela all'asse  $X$  divide l'area contemplata in due parti semplicemente connesse, oppure non la spezza. Nella prima ipotesi una retta che non incontri l'asse  $Y$  non divide ulteriormente la superficie o la scinde in tre o quattro parti aventi ciascuna una connessione semplice. L'ultimo fatto avviene soltanto quando il punto di incontro delle due parallele agli assi coordinati è in  $A - 0$ , il penultimo se amendue passano per l'interno, mentre il punto di intersezione è entro una dalle curve  $C_A^{(1)}$ ,  $C_A^{(2)}$ ,  $C_A^{(3)}$ ,  $C_A^{(4)}$ . Nella seconda ipotesi una parallela alla retta  $x = 0$  non divide l'area oppure la spezza in due.

Ciò premesso, se il punto  $N$  al quale si vuol pervenire appartenesse ad uno dei nuovi assi, l'asserzione sarebbe manifesta. Suppongo quindi che ciò non si verifichi, laddove esso è nel primo quadrante rispetto al punto  $O'$  ed in  $A - 0$ . Ammetto poi come *evidente* che si possa tracciare una curva aperta scevra da punti multipli e da tratti paralleli agli assi, di cui gli estremi sono i punti  $O'$  ed  $N$ , e tutta entro l'area data.

Pertanto, se non stesse la proposizione enunciata, dopo aver percorso un ramo semplice  $O'M$  crescente e sito in  $A - 0$ , la qual cosa può sempre farsi, io sarei *costretto* a procedere lungo una linea  $MQ$  tracciata in  $A - 0$ , di cui l'ordinata o l'ascissa decresce sempre da  $M$  a  $Q$ , mentre l'ascissa cresce o l'ordinata rispettivamente, oppure secondo una curva di cui amendue le coordinate decrescono, essendo il punto  $Q$  identico o no all'elemento  $N$ . *Tal fatto però non si verifica.*

Ed invero, la linea  $OM + MQ$  non avendo nulla di comune con gli assi novelli, tolto il punto  $O'$ , la parallela all'asse  $X$  od  $Y$  per  $Q$  incontrerà il ramo  $O'M$  in un punto  $V$  interno al suo corso, *laddove il segmento  $VQ$  appartiene per intero all'area  $A - 0$  ed al primo quadrante di  $O'$* , come tosto si avverte, quando si rammenti che ogni parallela ad uno degli assi uscente

(\*) Ben s'intende quando non sia nullo, oppure, ciò che torna lo stesso, quando il punto  $O'$  non cada sulla  $C_A^{(1)}$ .

da un punto della superficie  $A - 0$  incontra due volte soltanto il contorno  $C_A$ . La parallela  $VQ$  si riferisce a quell'asse sul quale la linea  $O'MQ$  si proietta *semplicemente*, se può assegnarsi, in caso diverso ad uno qualsivoglia dei due. Ora, il tratto  $VQ$  cadendo in  $A - 0$ , io posso recarmi dal punto  $O'$  all'altro  $Q$  secondo un ramo semplice crescente sito entro  $A$ .

Che se il punto  $N$  fosse sopra la curva  $C_A$ , nè sopra uno dei nuovi assi, tracciato per esso un segmento  $bN$  ( $b < N$ ) parallelo ad uno di questi ultimi, quando ciò sia possibile, costruirei una curva sempre crescente in  $A$ , la quale va dall'elemento  $O'$  all'altro  $b$ , e poi mi recherei da  $b$  ad  $N$  lungo il tratto  $bN$ . Se questa costruzione non potesse farsi, considererei la serie di punti  $\alpha_s$  ( $s \geq 1$ ) siti in  $A - 0$  e tali, che sia  $\lim_{s=\infty} \alpha_s = N$ , ed avvertirei tosto che la cosa regge anche in questo caso. L'ultimo fatto avrebbe luogo quando i punti  $\alpha$  e  $\beta$  si riducessero ad uno solo, mentre l'elemento  $N$  si confonde coi medesimi, e soltanto in questo caso.

In modo analogo si dimostra che in ciascun punto del terzo quadrante rispetto ad  $O'$  la funzione  $f_1(x, y)$  raggiunge un valore più piccolo che nell'elemento  $O'$ . Del resto, questo fatto può considerarsi come una conseguenza di quello già dimostrato.

5. È facile l'avvertire che il limite superiore  $M$  dei valori della  $f_1(x, y)$  in  $A$  viene conseguito sopra il contorno  $C_A$ . Poichè, se questo valore venisse raggiunto nell'elemento  $E$  dell'area  $A - 0$ , in ogni punto del primo quadrante rispetto ad  $E$  la funzione data avrebbe un valore più grande di  $M$ , la qual cosa non si verifica. Anzi, se la  $f_1(x, y)$  conseguisse nel punto  $P$  di  $C_A$  il valore  $M$ , l'area  $A$  non conterrebbe alcun punto nel primo quadrante dell'elemento  $P$ , il quale di conseguenza giace sulla curva  $C_A^{(1)}$ . Se quest'ultima si riducesse ad un punto, la funzione  $f_1(x, y)$  sarebbe eguale una sol volta ed in esso alla quantità  $M$ .

In maniera analogo si avverte che la funzione  $f_1(x, y)$  raggiunge il limite inferiore dei suoi valori  $m$  sopra il contorno  $C_A$  e precisamente nella terza parte  $C_A^{(3)}$ ; quindi una sol volta al certo, se la linea  $\gamma\delta$  si riduce ad un punto. Sia  $Q$  un punto della curva  $C_A^{(3)}$ , nel quale  $f_1(x, y) = m$ .

*La funzione  $f_1(x, y)$  raggiunge un valore qualsivoglia  $C (> m, < M)$  tante volte quante si vuole.*

Ed invero, noi possiamo tracciare in  $A$  tante curve quante vogliamo aventi ogni punto interno in  $A - 0$  e gli estremi in  $P$  ed in  $Q$ , le quali non hanno alcun punto comune entro il loro corso. Ora, se consideriamo la fun-

zione  $f_1(x, y)$  lungo una qualsivoglia di queste linee, e se rammentiamo il teorema:

*Una funzione continua dei punti di una curva raggiunge un valore qualsivoglia  $C$  non eccedente il suo limite superiore ed inferiore, scorderemo tosto che l'asserto è vero.*

6. Una funzione  $f_2(x, y)$  sempre crescente secondo il verso negativo dell'asse  $X$  ed il positivo dell'altro nell'area  $A$  decresce ognora lungo un ramo semplice decrescente tracciato in  $A$ .

Il limite superiore e l'inferiore vengono raggiunti per ordine sulle curve  $C_A^{(3)}$  e  $C_A^{(4)}$ .

È d'altra parte inutile l'aggiungere che anche la funzione  $f_2(x, y)$  consegue in  $A$  un numero non assegnabile di volte uno stesso valore *qualsivoglia* compreso tra le grandezze limite.

Indico poi con  $f_3(x, y)$  una funzione, la quale è decrescente nel verso positivo di amendue gli assi sempre nella superficie  $A$ , e con  $f_4(x, y)$  un'altra che cresce nella direzione positiva dell'asse  $X$  e nella negativa dell'altro.

La prima delle due ultime funzioni decresce lungo un ramo crescente con l'ascissa, e la stessa cosa ha di conseguenza luogo nelle parti  $C_A^{(2)}$  e  $C_A^{(4)}$  della curva  $C_A$ . Il limite superiore viene conseguito in un punto della linea  $C_A^{(3)}$ , l'inferiore sulla curva  $C_A^{(4)}$ . Se  $b$  ed  $a$  sono due punti dell'area  $A - 0$  e se il primo giace nel primo quadrante rispetto al secondo, la  $f_3(x, y)$  raggiunge in  $a$  un valore più grande che in  $b$ .

Analogamente si dica dell'altra  $f_4(x, y)$ .

Le funzioni  $f_1(x, y)$ ,  $f_2(x, y)$ ,  $f_3(x, y)$ ,  $f_4(x, y)$  si diranno ordinatamente di prima, seconda, terza e quarta specie. A queste funzioni sono da aggiungersi altre cinque, che possono considerarsi come dei limiti delle prime, e sono le seguenti. Funzioni costanti lungo la direzione dell'asse  $X$  e crescenti o decrescenti nel verso positivo dell'altro asse o viceversa, e funzioni ognora costanti. Le prime quattro sono dei casi limite delle espressioni I, II; III, IV; I, IV; II, III rispettivamente. La funzione ovunque costante in  $A$  può considerarsi come un caso limite di una qualsivoglia delle quattro studiate in questo numero.

## II.

1. *Suppongo che la funzione  $f_t(x, y)$  ( $t = 1, 2, 3, 4$ ) raggiunga una sol volta il limite superiore  $M$  e l'inferiore  $m$  dei suoi valori, laddove la*

funzione  $f_t(s)$  ( $t = 1, 2, 3, 4$ ) dei punti del contorno  $C_A$  è ognora crescente da  $Q$  a  $P$  (\*).

Fatta astrazione dei valori limite  $M$  ed  $m$ , la funzione  $f_t(s)$  ( $t \geq 1, \leq 4$ ) raggiunge quindi due volte soltanto uno stesso valore compreso tra i medesimi.

L'insieme dei punti della superficie  $A$ , in ciascuno dei quali si ha  $f_t(x, y) = \text{cost.}$  ( $> m, < M$ ), è una linea connessa decrescente o crescente al crescere della ascissa, di cui gli estremi sono sopra  $C_A$ , secondo che il numero  $t$  è impari o pari.

Ed invero, ammesso, per fissare le idee,  $t = 1$  e dette  $(x_1, y_1)$  le coordinate di un punto dell'area  $A - 0$ , in cui la funzione  $f_1(x, y)$  assume il valore  $C$  ( $> m, < M$ ), sarà

$$f_1(x_1 + h, y_1) = f_1(x_1, y_1) + k \quad (h > 0, k > 0).$$

Se la quantità  $h$  è abbastanza piccola, si può assegnare una grandezza  $l$  ( $> 0$ ) ed una *soltanto* per modo, che sia

$$f_1(x_1 + h, y_1 - l) = f_1(x_1, y_1) = C.$$

Questo fatto ha luogo perchè la differenza

$$f_1(x, y_1) - f_1(x, \theta(x)),$$

considerata in un tratto opportuno  $\overline{x_1 x_1 + u}$  ( $u > 0$ ) è positiva, nè ha per limite inferiore dei suoi valori lo zero, quando  $y = \theta(x)$  rappresenti una parte di  $C_A$  sottoposta alla retta  $y = y_1$ , la quale formi insieme alle linee  $y = y_1$ ,  $x = x_1$ ,  $x = x_1 + u$  il contorno completo di un pezzo dell'area  $A$ .

Il limite inferiore  $r$  della funzione positiva

$$f_1(x, y_1) - f_1(x, \theta(x)),$$

non è nullo nel tratto  $\overline{x_1 x_1 + u}$ , perchè esso viene raggiunto nel medesimo, mentre la  $f_1(x, y)$  è continua in  $A$  e decrescente nel verso  $-Y$ . Basta dunque attribuire ad  $h$  un valore non più grande di  $u$  e tale, che sia  $k < r$ .

Se poi la grandezza  $h_1$  ( $> 0$ ) fosse minore di  $h$ , si potrebbe determinare una sola quantità  $l_1$  ( $< l, > 0$ ) per modo, che si avesse

$$f_1(x_1 + h_1, y_1 - l_1) = f_1(x_1, y_1) = C.$$

(\*) In  $Q$  la funzione contemplata assume il minimo dei suoi valori, in  $P$  il massimo.

La quantità  $l_1$  è più piccola di  $l$ , poichè, se fosse  $l = l_1$ , la espressione  $f_1(x, y)$  avrebbe lo stesso valore nei punti  $(\overline{x_1 + h_1}, \overline{y_1 - l_1})$ ,  $(\overline{x_1 + h}, \overline{y_1 - l})$  siti sopra una stessa parallela all'asse  $X$ , la qual cosa non può aver luogo, perchè la  $f_1(x, y)$  è crescente secondo il verso positivo della retta  $y = 0$ . Non sarà neppure  $l_1 > l$ , come risulta manifesto tracciando una curva sempre crescente in  $A$ , la quale vada dal punto  $(\overline{x_1 + h_1}, \overline{y_1 - l_1})$  all'altro  $(\overline{x_1 + h}, \overline{y_1 - l})$ .

Se la grandezza  $h$  fosse negativa sarebbe tale anche la quantità  $l$ .

Adunque, se  $(x_1, y_1)$  è un punto dell'area  $A - 0$  nel quale  $f(x_1, y_1) = C (M > C > m)$ , io posso assegnare un tratto  $\overline{x_1 - p}, \overline{x_1 + q}$  in guisa, che in ciascun punto del medesimo si progetti un elemento di una varietà di punti siti in  $A$ , di cui le ordinate decrescono al crescere della ascissa, ed in ognuno dei quali  $f_1(x, y) = C$ .

Rappresentata questa varietà con la notazione  $y = \rho(x)$ , se l'elemento  $(\overline{x_1 + q}, \rho(\overline{x_1 + q}))$  è in  $A - 0$ , potremo prolungare la linea  $f_1(x, y) = C = f_1(x, \rho(x))$  alla destra del medesimo rispetto ad ogni punto di un tratto  $\overline{x_1 + q}, \overline{x_1 + q + r}$  ed indicare sempre le nuove ordinate dei punti che in tal guisa si ottengono col simbolo  $\rho(x)$ .

Una osservazione analoga può ripetersi circa al punto

$$(\overline{x_1 - p}, \rho(\overline{x_1 - p})).$$

Col metodo delle successive divisioni avverto facilmente l'esistenza di un tratto  $tu (t < u)$  connesso dell'asse  $X$  in ciascun punto interno del quale si proietta un elemento della linea  $y = \rho(x)$ , che è il massimo possibile. La grandezza  $\rho(t - \alpha_s)$  ( $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3, \dots; \lim_{s \rightarrow \infty} \alpha_s = 0$ ), siccome ognora crescente all'annullarsi del quoto  $\frac{1}{s}$  non oscillando, tende ad un limite, che dico  $\rho(t)$ , laddove, come è manifesto, il punto  $(t, \rho(t))$  appartiene all'area  $A$  e  $f_1(t, \rho(t)) = C$  (\*).

Analogamente si ragioni col punto  $u$ . Gli elementi  $(t, \rho(t))$ ,  $(u, \rho(u))$  cadono sopra il contorno, il che facilmente si avverte rammentando ciò che or ora si disse circa il tratto  $pq$ .

La linea  $y = \rho(x)$  è ovunque continua.

---

(\*) Vedi il § 2 del c.º 5 del N. I della mia Memoria: *Nuove ricerche sulla Serie di Fourier*, inserita nel Vol. II (Ser. 3.ª) delle Memorie della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei.

Infatti, se si avesse in un punto interno alla medesima

$$\rho(x' - 0) > \rho(x') \quad \text{oppure} \quad \rho(x') > \rho(x' + 0),$$

o se amendue queste disequaglianze fossero soddisfatte, ne conseguirebbe per la continuità della funzione  $f_1(x, y)$

$$f_1(x' - 0, \rho(x' - 0)) = f(x', \rho(x')) = f_1(x' + 0, \rho(x' + 0)) = C,$$

la qual cosa non può verificarsi, perchè la espressione  $f_1(x, y)$  è crescente secondo il verso positivo dell'asse  $Y$ .

Come si è già osservato la espressione  $f(s)$  cresce sempre dal punto  $Q$ , in cui  $f(s) = m$ , all'altro  $P$ , nel quale  $f(s) = M$ , tanto se si procede lasciando alla sinistra che alla destra l'area data.

Di conseguenza:

*Assegnata una grandezza  $C (> m, < M)$ , esiste una linea connessa in  $A$  sempre decrescente al crescere dell'ascissa, di cui gli estremi soltanto cadono sul contorno e lungo la quale  $f_1(x, y) = C$ . Tolta questa linea la funzione  $f_1(x, y)$  non raggiunge il valore  $C$ .*

Analoghi risultati reggono per le funzioni  $f_2(x, y)$ ,  $f_3(x, y)$ ,  $f_4(x, y)$ , e precisamente rispetto a quelle di seconda e quarta specie il luogo del punto, nel quale la funzione assume un valore costante, è una linea che cresce ognora con l'ascissa, laddove per la  $f_3(x, y)$  essa linea diminuisce sempre.

*L'elemento  $f_1(x, y) = C (m < C < M)$  è rettificabile (\*).*

2. Dirò che la linea  $f_1(x, y) = C'$  è sovrapposta all'altra  $f_1(x, y) = C$ , se  $C' > C$ , mentre  $m < C < C' < M$ . Ora, si potrà assegnare un punto della retta  $y = 0$  nel quale si proietta un punto interno di ciascuna delle due linee  $f_1(x, y) = C, = C'$ , oppure ciò non ha luogo. Il secondo fatto si verifica al certo per le linee  $f_1(x, y) = \overline{M - \varepsilon}, \overline{m + \varepsilon}$ , quando il punto  $\alpha$  coincida con  $\beta, \gamma$  con  $\delta$ , ed  $\varepsilon$  sia una quantità abbastanza piccola.

Nel primo caso si può assegnare un segmento  $pq (p < q)$  dell'asse  $X$  in guisa, che nel medesimo si progetti una parte di ognuna delle linee indicate, laddove la stessa cosa non ha luogo nel tratto

$$\overline{p - \eta} \quad \overline{q + \eta'} \quad (\eta \geq 0, \eta' \geq 0, \eta + \eta' > 0).$$

In ciascun degli estremi dell'intervallo  $pq$  si proietta almeno un termine di

(\*) Vedi la Nota III della mia Memoria: *Le curve limite di una varietà data di curve.*

una delle linee  $f_i(x, y) = C, = C'$  ed al più due non appartenenti manifestamente ad una stessa linea. Nella ipotesi ora contemplata i due complessi  $f_i(x, y) = C, = C'$  si diranno *effettivamente sovrapposti*. Essi limitano insieme alle rette  $x = p, = q$  un pezzo semplicemente connesso dell'area  $A$ .

3. La linea  $f_i(x, y) = f_i(x_1, y_r)$  ( $r = 1, 2, 3, \dots$ ) tende uniformemente all'altra  $f_i(x, y) = f_i(x_1, y') = C$  ( $m < C < M$ ) all'annullarsi del quoto  $\frac{1}{r}$ , essendo  $y_1 > y_2 > y_3 > \dots$ ,  $\lim_{r \rightarrow \infty} y_r = y'$  ed  $(x_1, y')$  un punto in  $A - 0$ .

Ed invero, condotte le normali all'asse  $X$  dagli estremi  $a$  e  $b$  dell'elemento  $f_i(x, y) = C$ , i punti del contorno  $C_A$  abbastanza vicini e sovrapposti ad  $a$  (cioè aventi un'ordinata maggiore) sono a destra oppure a sinistra della parallela per  $a$  alla linea  $x = 0$ , perchè l'elemento  $C_A$  non contiene per ipotesi alcun tratto parallelo ad uno degli assi. Il primo caso avrebbe luogo, ad esempio, se il punto  $a$  fosse nell'interno della seconda parte dell'insieme  $C_A$ , l'altro se cadesse entro la terza.

Aggiungo nella prima ipotesi a ciascuna linea  $f_i(x, y) = C$ , la quale ha il suo estremo sinistro abbastanza vicino ad  $a$ , un segmento parallelo all'asse  $X$ , che si connetta ad essa con continuità, e di cui il termine sinistro non cada a destra dalla retta  $x = a$ . Nel secondo caso poi fingo che l'estremo sinistro dell'insieme  $f_i(x, y) = C$  sia sopra l'elemento  $x - a = 0$ . In tal guisa la proiezione del primo capo del complesso  $f_i(x, y) = f_i(x_1, y') = C$  sopra l'asse  $X$  si confonde con quello dell'elemento  $f_i(x, y) = f_i(x_1, y_r)$  ( $r \geq 1$ ).

In modo analogo si ragioni rispetto ai punti della curva  $C_A$  vicini all'altro estremo  $b$  dell'insieme  $f_i(x, y) = f_i(x_1, y')$  e siti superiormente a quest'ultimo.

La linea  $f_i(x, y) = f_i(x_1, y_r)$  ( $r \geq 1$ ), quando sia modificata nella guisa detta or ora, la varietà  $f_i(x, y) = f_i(x_1, y')$  e le due parallele all'asse  $Y$  per  $a$  e per  $b$  determinano un quadrilatero mistilineo.

Si divida ora la linea *rettificabile*  $f_i(x, y) = C$  in parti eguali per modo, che la oscillazione in ognuna di esse sia piccola a piacere. La funzione  $f_i(x, y)$  essendo continua in  $A$  e sempre crescente secondo il verso positivo dell'asse  $Y$ , si può supporre l'intero  $r$  così grande, poniamo eguale ad  $r_1$ , che due ordinate delle linee

$$f_i(x, y) = f_i(x_1, y'), \quad = f_i(x_1, y_{r_1+t}) \quad (t \geq 0),$$

le quali corrispondono ad uno stesso punto di divisione della prima, compresi gli estremi, sieno quasi eguali, laddove le ordinate della seconda sono maggiori

di quelle dell'altra. Rammentando poi che gli elementi  $f_i(x, y) = f_i(x_1, y')$ ,  $= f_i(x_1, y_{r+t})$  decrescono al crescere dell'ascissa, ne consegue che essi si avvicinano arbitrariamente ovunque, oppure, ciò che torna lo stesso, che due punti dei medesimi dotati di una stessa ascissa convergono l'uno all'altro.

È poi chiaro che gli estremi della linea  $f_i(x, y) = f(x_1, y_r)$  siti sopra  $C_A$  tendono ai termini dell'altra  $f_i(x, y) = f_i(x_1, y') = C$  all'annullarsi del quoto  $\frac{1}{r}$ .

In modo analogo si dimostrerebbe il teorema, se fosse

$$y_1 < y_2 < y_3 < \dots, \lim_{t \rightarrow \infty} y_t = y'.$$

Si vede poi facilmente che le linee  $f_i(x, y) = \overline{M - \tau}$ ,  $\overline{m + \tau}$  tendono ordinatamente ai punti  $f_i(x, y = M)$ ,  $= m$  all'annullarsi della grandezza  $\tau$ .

A tal fine basta condurre da un punto  $u$  vicino quanto si vuole all'elemento  $P$  ed alla sua sinistra per chi guarda nel verso positivo dell'asse  $Y$  una linea  $V$  sempre decrescente in  $A$ , la quale abbia il suo secondo capo  $v$  vicinissimo a  $P$  ed alla destra. Questa costruzione è sempre possibile perchè il punto  $P$  cade sulla curva  $C_A^{(1)}$ . Se taglio ora la superficie  $A$  lungo l'elemento  $V$ , ottengo due aree tra loro sconnesse, una delle quali contiene il punto  $P$ . Assunto ora in quest'ultima, che chiamo  $G$ , un punto  $e$ , in cui la funzione  $f_i(x, y)$  raggiunga un valore  $D$  più grande del suo limite superiore nell'elemento  $V$ , avverto subito che si può assegnare in  $G$  una linea sempre decrescente  $f_i(x, y) = D$ , di cui gli estremi cadono sulla  $C_G - V$ . Se poi  $D_1$  è una quantità maggiore di  $D$  e minore di  $M$ , la linea  $f_i(x, y) = D_1$  cade in quella parte, contenente il punto  $P$ , che si ottiene da  $G$  mediante un taglio lungo l'elemento  $f_i(x, y) = D$ .

Analogamente si dica dell'ente  $Q$  in cui  $f_i(x, y) = m$ .

4. Date le linee  $f_i(x, y) = R$ ,  $= S (m < S < R < M)$  effettivamente sovrapposte, diciamo  $pq$  il massimo segmento dell'asse  $X$  nel quale si proietta in pari tempo una parte della prima ed una della seconda. Nel punto  $x'$  del tratto  $pq$  i due complessi  $f_i(x, y) = R$ ,  $= S$  distano della differenza delle ordinate corrispondenti. Il limite superiore e l'inferiore di queste differenze, i quali vengono raggiunti, si diranno la massima e minima distanza delle due linee in discorso.

L'area  $A$  è il luogo della varietà  $f_i(x, y) = C$  ( $m \leq C \leq M$ ), e si può assegnare una grandezza  $\eta (> 0)$  tale, che due linee qualsivoglia  $f_i(x, y) = C$ ,

$= \overline{C + \eta}$  ( $m < m_1 \leq C \leq M_1 < M$ ) non abbiano una distanza maggiore della quantità arbitraria  $\sigma (> 0)$ , essendo  $m_1$  ed  $M_1$  due valori fissi.

Per tutta chiarezza giova supporre la grandezza  $\eta$  non maggiore di  $M - M_1$ .

La prima parte della asserzione è evidente, la seconda si verifica al certo per ogni valor particolare della quantità  $C (> m, < M)$  per la ricerca del paragrafo precedente. Resta quindi a dimostrarsi che la stessa cosa ha luogo, qualunque sia la grandezza

$$C (\geq m_1, \leq M_1),$$

per uno stesso valore di  $\eta$ . Poniamo per un istante che esista una quantità  $H_r (r \geq 1)$  in guisa, che la massima distanza delle due linee  $f_1(x, y) = H_r$ ,  $H_r + \eta_r$  non sia maggiore di  $\sigma$ , essendo  $\eta_r (r \geq 1)$  di necessità un infinitesimo positivo. Sia poi  $\lim_{u \rightarrow \infty} H_{r_u} = H$ , mentre  $H_{r_1} > H_{r_2} > H_{r_3} > \dots$  oppure  $H_{r_1} < H_{r_2} < H_{r_3} < \dots$ , ed  $r_t (t \geq 1)$  è una successione illimitata di interi sempre crescenti. La grandezza  $H$  non è uguale ad  $M_1$  o ad  $m_1$ . Infatti, supposto per un momento che si abbia  $H = M_1$ , le due linee

$$f_1(x, y) = M_1, \quad f_1(x, y) = \overline{M_1 + \tau},$$

non hanno al certo una distanza maggiore di  $\sigma$  da valore opportuno della grandezza positiva  $\tau$ . D'altra parte, il complesso  $f_1(x, y) = H_{r_u}$  è pel teorema precedente vicino quanto si vuole all'altro  $f_1(x, y) = M_1$ , purchè l'intero  $u$  abbia un valore abbastanza grande. Quindi, se  $H_{r_1} > H_{r_2} > \dots$ , la massima distanza delle due linee

$$f_1(x, y) = \overline{M_1 + \tau}, \quad = H_{r_u},$$

non è maggiore di  $\sigma$ , quando il numero  $u$  non sia più piccolo di una grandezza opportuna. Se poi si avesse  $H_{r_1} < H_{r_2} < \dots$ , converrebbe sostituire nell'ultimo ragionamento alla linea  $f_1(x, y) = \overline{M_1 + \tau}$  l'altra  $f_1(x, y) = M_1 + \tau_1$ , essendo  $0 < \tau_1 < \tau$ . La quantità  $\eta_{r_u}$  non è dunque di necessità un infinitesimo, contro il supposto.

In maniera analoga si avverte che non si ha  $H = m_1$  oppure  $m_1 < H < M_1$ .

È poi manifesto che la quantità  $\eta$  si annulla con l'altra  $\sigma$ , perchè ciò si verifica per ogni valor particolare della grandezza

$$C (m_1 \leq C \leq M_1),$$

laddove le differenze  $m_1 - m$  ed  $M - M_1$  si possono supporre tali, che nelle piccole parti connesse di  $A$  limitate parzialmente dalle linee  $f_1(x, y) = m_1, = M_1$ , la funzione  $f_1(x, y)$  sia per ordine quasi eguale ad  $m$  e ad  $M$ .

Il teorema che precede vale anche se la quantità  $\eta$  è negativa.

*Dato un valore opportuno  $\eta (> 0)$ , la minima distanza delle due linee  $f_1(x, y) = C, = \overline{C + \eta} (m_1 \leq C \leq M_1)$  non è minore di una quantità assegnabile, che si annulla con  $\eta$ , qualunque sia la grandezza  $C$  nei limiti indicati.*

Infatti, pel teorema che precede si può far parola della minima distanza di due linee qualsivoglia

$$f_1(x, y) = C, \quad = \overline{C + \eta} (m_1 \leq C \leq M_1).$$

D'altra parte, se la proposizione enunciata non fosse vera, esisterebbe una quantità  $K_r (r \geq 1)$  non eccedente i limiti  $m_1$  ed  $M_1$  per modo, che la minima distanza dei due complessi

$$f_1(x, y) = K_r, \quad = \overline{K_r + \eta},$$

fosse minore dell'infinitesimo positivo sempre decrescente  $\tau_r (r \geq 1)$ . Ora, se si ha  $\lim_{u \rightarrow \infty} K_{r_u} = K (m_1 \leq K \leq M_1)$ , la minima distanza delle due linee  $f_1(x, y) = K, = \overline{K + \eta}$ , che viene raggiunta non è al certo nulla. Da valore opportuno  $u_1$  dell'intero  $u$  gli elementi  $f_1(x, y) = K_{r_{u_1+t}}, = \overline{K_{r_{u_1+t}} + \eta} (t \geq 0)$  sono vicini oltre ogni dire agli altri  $f_1(x, y) = K, = \overline{K + \eta}$  rispettivamente. La minima distanza delle due linee  $f_1(x, y) = K_{r_{u_1+t}}, = \overline{K_{r_{u_1+t}} + \eta}$  non può quindi annullarsi con  $\frac{1}{t}$ .

È manifesto che il teorema regge anche pel caso che la grandezza  $\eta$  sia negativa.

*Le linee  $f_1(x, y) = C (m \leq C \leq M)$  sono continue in egual maniera.*

Poichè, nel caso contrario, si potrebbe assegnare una linea

$$f_1(x, y) = H (> m, < M),$$

tale, che nelle sue estreme vicinanze cada un insieme di elementi disegualmente continuo  $f_1(x, y) = H + \varepsilon_t (t \geq 1)$ , essendo  $\varepsilon_t$  un infinitesimo positivo o negativo sempre decrescente. La quantità  $H$  non può essere eguale ad  $m$  od a  $M$ , perchè la massima distanza delle linee  $f_1(x, y) = \overline{M - \tau}, = M$ , come

pure quella delle altre  $f_i(x, y) = m, \overline{m + \tau}$  è di quella piccolezza che si vuole da valore abbastanza piccolo della grandezza positiva  $\tau$ . Ora, l'elemento  $f_i(x, y) = H \pm \varepsilon_t$  converge uniformemente all'altro  $f_i(x, y) = H$ , le quali cose non potendo coesistere, l'asserto risulta dimostrato.

5. Studiamo ora la funzione  $s(C)$  che rappresenta la lunghezza della linea  $f_i(x, y) = C$ .

Il limite superiore della espressione  $s(C)$  è assegnabile, perchè non maggiore della somma delle proiezioni del contorno  $C_A$  sopra ciascuno degli assi, l'inferiore è nullo e viene conseguito due volte soltanto, e precisamente quando si faccia  $C = m, = M$ , mentre  $s(m + 0) = s(M - 0) = 0$ .

La grandezza  $s(C + \varepsilon)(m < C < M)$  oscilla all'annullarsi della quantità  $\varepsilon$  tra due valori  $R_1$  ed  $S_1$  ( $R_1 \geq S_1$ ) e si può determinare di conseguenza un infinitesimo  $\varepsilon_r (r \geq 1)$  per modo, che sia

$$\lim_{r \rightarrow \infty} s(C + \varepsilon_r) = K_1 (R_1 \geq K_1 \geq S_1).$$

La quantità  $\varepsilon_r$  può supporre sempre dello stesso segno, poniamo positiva.

Quando si modifichi in maniera conveniente la linea

$$f_i(x, y) = \overline{C + \varepsilon_r} (r \geq 1),$$

si potrà ammetterla dotata della stessa proiezione  $pq$  sopra l'asse  $X$  dell'altra  $f_i(x, y) = C$ .

Divido ora il segmento  $pq$  in più parti per modo, che la spezzata  $T$ , i cui vertici sono sempre l'elemento  $f_i(x, y) = C$  ed i quali si proiettano nei punti di divisione dell'intervallo  $pq$  nonchè in  $p$  ed in  $q$ , si avvicini quanto si vuole al valore  $s(C)$ . Detta poi  $s_1(C + \varepsilon_r)$  la lunghezza della linea  $f_i(x, y) = \overline{C + \varepsilon_r}$  modificata, posso dividere ogni parte di  $pq$  ottenuta or ora in  $m_r (m_1 < m_2 < m_3 < \dots)$  tratticelli eguali in guisa, che la grandezza  $s_1(C + \varepsilon_r)$  non si scosti più di  $\eta_r$  dalla linea poligonale  $L_r$  avente i suoi vertici nell'elemento mutato  $f_i(x, y) = \overline{C + \varepsilon_r}$ , mentre questi ultimi hanno per proiezioni i punti che dividono ogni tratto di  $pq$  in  $m_r$  parti eguali ed i suoi estremi. La proprietà accennata abbia luogo anche se si sostituisce al numero  $m_r$  l'altro  $m_r + u_r (u_r > 0)$ . Con la notazione  $\eta_r$  si indica un infinitesimo positivo sempre decrescente all'annullarsi del quoto  $\frac{1}{r}$ .

Ciò premesso, è manifesto che la somma  $P_r$  dei lati della spezzata  $L_r$ , i quali contengono un punto dotato della stessa proiezione di un vertice della

linea poligonale  $T$  tende a zero con  $\frac{1}{r}$ , perchè il loro numero è limitato e perchè la varietà di linee  $f_i(x, y) = C$  è in egual grado continua. Pertanto, convergerà allo zero con  $\frac{1}{r}$  anche la somma  $Q_r$  di quei segmenti che hanno un estremo in un vertice della spezzata relativa all'elemento  $f_i(x, y) = C$  e l'altro in uno della linea poligonale corrispondente alla varietà  $f_i(x, y) = \overline{C + \varepsilon_r}$  ( $r \geq 1$ ) modificata, che è immediatamente vicino al primo. Questo fatto ha luogo perchè il numero dei vertici della spezzata  $T$  è assegnabile e perchè l'elemento  $f_i(x, y) = \overline{C + \varepsilon_r}$  converge all'altro  $f_i(x, y) = C$  uniformemente, quando la grandezza  $r$  cresca oltre ogni dire.

Per tutta chiarezza si aggiunga all'aggregato  $Q_r$  la somma di due segmenti paralleli all'asse  $Y$ , che congiungono gli estremi della linea  $f_i(x, y) = C$  con quelli dell'altra  $f_i(x, y) = \overline{C + \varepsilon_r}$  ( $r \geq 1$ ) modificata.

Abbiamo quindi

$$L_r + Q_r - P_r > T,$$

perchè il più corto cammino fra due punti è il rettilineo. Le quantità  $Q_r$  e  $P_r$  vanno a zero con  $\frac{1}{r}$ , mentre  $\lim_{r \rightarrow \infty} [s_i(C + \varepsilon_r) - s(C + \varepsilon_r)] = 0$  e le due grandezze  $L_r$  e  $T$  sono vicine quanto si vuole ai loro limiti  $s_i(C + \varepsilon_r)$  ed  $s(C)$ , non sarà di conseguenza  $K_1 < s(C)$ .

La quantità  $K_1$  può supporre eguale ad  $R_1$  oppure ad  $S_1$ , non avremo dunque

$$R_1 < s(C), \quad S_1 < s(C).$$

Non possiamo però asserire che la grandezza  $K_1$  non eccede il valore  $s(C)$ , come risulta da quanto segue.

Traccio nel primo quadrante un segmento di retta  $ab$  inclinato di  $135^\circ$  sull'asse  $X$  e lo divido in  $m$  parti eguali. Sopra ciascuna di quest'ultime e sempre da uno stesso lato dell'intervallo  $ab$  costruisco un triangolo isoscele, di cui l'angolo alla base sia di  $30$  gradi. L'insieme dei lati eguali di tutti i triangoli così ottenuti forma una linea  $L_m$  sempre decrescente che va da un estremo all'altro dell'intervallo  $ab$  e di cui la lunghezza è  $2 \frac{ab}{\sqrt{3}}$ . Il complesso delle linee ognora decrescenti  $L_m$  ( $m \geq 1$ ) è in egual modo continuo ed ammette per linea limite il tratto  $ab$ , laddove la lunghezza dell'elemento

$L_m (m \geq 1)$  tende a  $\frac{2}{\sqrt{3}} ab$  all'annullarsi del quoto  $\frac{1}{m}$ , anzi è ognora eguale ad  $ab \frac{2}{\sqrt{3}}$ .

Ecco un altro esempio: alla linea  $L_m$ , di cui ora si fece parola accoppio un tratto  $a_m b_m$  parallelo ad  $ab$  che la incontri, essendo  $\lim_{m=\infty} a_m b_m = ab$ . Il punto  $a_m$  si trovi sopra un ramo di curva ognora crescente con l'ascissa che contenga il punto  $a$ , l'elemento  $b_m$  poi cada sopra un altro ramo semplice pure crescente, il quale passi per  $b$ , mentre l'intervallo  $a_{m+1} b_{m+1}$  giace tra i due  $ab$  ed  $a_m b_m$ , qualunque sia l'intero  $m$ . Combinando quelle parti di  $a_m b_m$  che sono fuori del complesso dei triangoli isosceli con quei pezzi della linea  $L_m$  che non si trovano dalla stessa parte di  $ab$  rispetto al tratto  $a_m b_m$ , si ottiene una linea sempre decrescente, di cui la lunghezza va divisa in due parti. La prima  $c_m$  è dovuta ad un pezzo sconnesso del tratto  $a_m b_m$ , la seconda  $T_m$  ad uno pure sconnesso della linea  $L_m$ . Se supponiamo ora che l'intervallo  $a_m b_m$  converga all'altro  $ab$  in modo opportuno, la grandezza  $c_m$  andrà a zero con  $\frac{1}{m}$ , laddove l'altra  $T_m$  tende ad  $ab \frac{2}{\sqrt{3}}$ .

Il secondo esempio è più conforme al caso nostro, sul quale il primo reca già luce completa.

Adunque, la funzione  $s(C)$  esiste nel tratto  $mM$ , raggiunge il limite inferiore dei suoi valori, che è lo zero, due volte soltanto in  $m$  ed in  $M$ , e si ha  $s(m+0) = s(M-0) = 0$ . I valori conseguiti dalla espressione  $s(C+\varepsilon)$  convergendo al punto  $C (> m, < M)$  tanto all'annullarsi positivo che negativo della grandezza  $\varepsilon$  non sono minori della quantità  $s(C)$ .

6. Il valore  $M$  può considerarsi come un massimo assoluto e relativo della funzione  $f_1(x, y)$  in  $A$  e lungo  $C_A$ . Analogamente si dica della grandezza  $m$ .

Indico con  $QP$  la parte di contorno da  $Q$  a  $P$  che lascia alla sinistra l'area data e con  $s_2$  la sua lunghezza, l'origine dell'arco essendo in  $Q$ , con  $\overline{QP}$  l'altra parte di  $C_A$ , di cui  $s_1$  sia la misura. Ciò posto, essendo  $'s_1$  ed  $'s_2$  le distanze di due punti corrispondenti sopra  $\overline{QP}$  e  $QP$  da  $Q$ , dico  $y_1 = f_1('s_1)$ ,  $y_2 = f_2('s_2)$  le relative ordinate. Le due grandezze  $'s_1$  ed  $'s_2$  sono corrispondenti quando si riferiscono ai due estremi di una stessa linea  $f_1(x, y) = \text{cost}$ .

La differenza  $y_1 - y_2$  considerata nel tratto  $\varepsilon s_1 - \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0, < s_1$ ) è positiva, continua, nè ha per limite inferiore dei suoi valori lo zero.

Infatti, la funzione  $y_1 - y_2$  è positiva per ogni valor particolare della quantità  $s_1 (\geq \varepsilon, \leq \overline{s_1 - \varepsilon})$ , perchè la linea  $f_1(x, y) = C$  è ognora decrescente. Essa è altresì continua nei limiti indicati e raggiunge di conseguenza il limite inferiore dei suoi valori, il quale non è nullo, perchè in caso contrario si potrebbe assegnare nell'area data una linea  $f_1(x, y) = \text{cost.}$  di cui i termini sono sopra una parallela dell'asse  $X$ , la qual cosa non si verifica. Questo limite inferiore si annulla insieme alla grandezza  $\varepsilon$ .

Un teorema analogo vige per la differenza  $x_1 - x_2$ .

I risultati ottenuti nei paragrafi 2-6 di questo numero reggono anche per le funzioni  $f_2, f_3, f_4$ .

### III.

1. Generalizziamo le ricerche contenute nei due Numeri precedenti.

Suppongo prima che il contorno  $C_A$  possa contenere dei tratti rettilinei paralleli agli assi, stando sempre l'ipotesi che una parallela ad uno di questi ultimi uscente da un punto dell'area  $A - 0$  lo incontri in soli due punti. In questo caso ciascuno degli elementi  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  potrà essere sostituito da un intervallo di retta, e la superficie  $A$  potrà anche ridursi ad un rettangolo.

È poi manifesto come si debba procedere per costruire un'area  $A$ , nella quale uno o più tra gli elementi  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  sono dei pezzi rettilinei.

Per brevità di linguaggio diremo ognora che gli elementi  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  sono degli intervalli di retta, ritenendo il punto come un segmento di lunghezza nulla. Si potrà quindi, ad esempio, far sempre parola di due estremi del tratto  $\alpha$ , l'uno superiore, inferiore l'altro, i quali coincidono, se la lunghezza dell'intervallo  $\alpha$  è nulla.

Il tratto  $\delta$  e la parte di  $C_A$  che va dall'estremo destro del medesimo al termine inferiore del segmento  $\alpha$  più quest'ultimo formi la quarta parte  $C_A^{(4)}$  del contorno  $C_A$ . Gli altri due intervalli  $\beta$  e  $\gamma$  e quel pezzo di curva  $C_A$  che li connette e non contiene gli elementi  $\alpha$  e  $\delta$  ne costituiscano la seconda parte  $C_A^{(2)}$ . Riesce ora manifesto ciò che debba intendersi per prima e per terza parte della linea  $C_A$  (\*).

Il valore massimo  $M$  della funzione  $f_1(x, y)$  viene raggiunto in un punto qualunque della curva  $C_A^{(1)}$ , mentre il minimo è conseguito in uno qualsivoglia dell'altra  $C_A^{(3)}$ .

(\*) Si vedrà in appresso che questa divisione non è l'unica possibile.

Le proprietà dimostrate nell'ipotesi che gli elementi  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  siano dei punti reggono tutte quando si tolga questa restrizione, come è manifesto.

2. Ammettiamo ora che la funzione  $f_i(x, y)$  possa raggiungere lungo  $C_A$  più di due volte uno stesso valore, mentre la linea  $C_A$  può dividersi in un numero limitato di parti, in ognuna delle quali la  $f_i(x, y)$  cresce o decresce.

Detto  $C$  un valore conseguito dalla nostra funzione in un punto della superficie  $A = 0$ , si potrà tracciare per quest'ultimo una linea connessa  $L_1$ , sempre decrescente, di cui ciascun punto interno è entro  $A$  e lungo la quale  $f_i(x, y) = C$ , mentre i suoi estremi cadono sopra  $C_A$ . Ciò premesso, esisterà nella superficie  $A = 0$  un punto esterno all'elemento  $L_1$ , nel quale  $f_i(x, y) = C$ , oppure tal fatto non si verifica. Nella prima ipotesi posso assegnare un'altra linea  $L_2$  analoga alla precedente  $L_1$ , laddove di siffatti elementi *connessi* potrà esistere un terzo  $L_3$ , un quarto  $L_4$ , e così via. Si può però determinare un numero  $q$  per modo, che nessuna delle linee  $f_i(x, y) = C (m \leq C \leq M)$  contenga più di  $q$  pezzi analoghi a quelli ora indicati, perchè la funzione  $f_i(x, y)$  assume un numero limitato di volte uno stesso valore lungo il contorno  $C_A$ . Il complesso  $f_i(x, y) = C$  potrà contenere anche un numero assegnabile di punti isolati, i quali cadono manifestamente sopra la curva  $C_A$ , e che si possono considerare come dei tratti di lunghezza nulla. Le linee  $f_i(x, y) = M, = m$  si compongono, ad esempio, soltanto di punti isolati.

Nel primo e nel terzo quadrante di un punto  $a$  sito in una parte connessa della linea  $f_i(x, y) = C$ , che è in  $A = 0$ , tolti gli estremi, non cade verun punto dell'area  $A$ , nel quale si abbia  $f_i(x, y) = C$ . Un punto in cui  $f_i(x, y) = C$  diverso da  $a$  appartiene quindi *all'interno* del secondo o del quarto quadrante rispetto all'elemento  $a$ . Se la linea  $f_i(x, y) = C$  constasse di *soli*  $t$  pezzi, ciascuno dei quali è in  $A = 0$ , tolti i due termini, essi formerebbero una linea connessa sempre decrescente, oppure potrebbero considerarsi come delle parti di una siffatta linea.

Consideriamo ora un punto  $h$  qualsivoglia intorno alla seconda parte  $C_A^2$  del contorno  $C_A$ , ma non entro il tratto  $\gamma$  o  $\beta$ . Assunto un tratticello  $mn$  della medesima, il quale contenga, non però ad un limite, l'elemento  $h$ , tiro pel punto  $m$ , che suppongo più vicino dell'altro  $n$  all'asse  $Y$ , una parallela alla linea  $y = 0$  e per  $n$  un'altra alla retta  $x = 0$ , ed ottengo un triangolo non di necessità mistilineo, lungo il perimetro del quale la  $f_i(x, y)$  non raggiunge più di due volte uno stesso valore. Il massimo ed il minimo della funzione  $f_i(x, y)$  in questo triangolo cadono rispettivamente in  $n$  ed in  $m$ .

Nell'elemento  $h$  termina dunque un pezzo connesso di una linea  $f_1(x, y) = C$ , e la stessa cosa si verifica per ogni punto entro gli elementi  $\beta$  e  $\gamma$  nonchè per l'estremo di ciascuno dei medesimi, che è interno a  $C_A^{(2)}$ , ben si intende quando amendue non sieno nulli.

Quanto si è detto della seconda parte di  $C_A$  può ripetersi dell'altra  $C_A^{(4)}$ , ossia ogni suo punto interno è un estremo di un pezzo connesso di una linea  $f_1(x, y) = C$ .

Occupiamoci ora della curva  $C_A^{(4)}$ . Se ci muoviamo lungo la medesima in guisa da lasciare alla sinistra la nostra superficie, ci imbattemo prima in un massimo della espressione  $f(s)$ , purchè il simbolo  $f(s)$  rappresenti la  $f_1(x, y)$  considerata nella sua dipendenza dall'elemento  $C_A$ . Questo massimo non è il termine di uno dei soliti pezzi di linea  $f_1(x, y) = C$ , ma deve ritenersi come il limite di un sistema di tratti connessi, ciascuno dei quali appartiene ad una varietà della forma  $f_1(x, y) = C$ . Uno qualsivoglia di questi tratti ha soltanto i suoi estremi sul contorno  $C_A$ , la qual cosa si avverte tosto costruendo un triangolo analogo a quello di poco fa. Il nostro massimo relativo va quindi considerato come tale anche per la funzione  $f_1(x, y)$ . Seguendo il cammino nella prima parte di  $C_A$ , la qual cosa è possibile quando l'estremo destro del tratto  $\beta$  non sia il massimo ora contemplato, incontreremo un minimo della espressione  $f(s)$ . Se costruiamo ora due triangoli opportuni, che hanno un vertice comune in esso, vedo subito che nel medesimo terminano due dei soliti pezzi di un complesso  $f_1(x, y) = \text{cost.}$  Camminando ulteriormente nel verso indicato sopra  $C_A^{(4)}$ , la qual cosa può farsi, perchè il minimo contemplato precede l'estremo destro del tratto  $\beta$ , si ripeterebbero per ordine gli accidenti già avvertiti, essendo l'ultimo di necessità un massimo. In ogni altro punto della parte  $C_A^{(4)}$  termina un pezzo soltanto di una varietà  $f_1(x, y) = \text{cost.}$ , il quale ha ogni suo punto interno in  $A - 0$  e gli estremi sopra  $C_A$ . Questo tratto giace alla sinistra od alla destra della ordinata uscente dal punto contemplato, secondo che quest'ultimo precede un massimo od un minimo per chi vada nel verso indicato.

Se percorriamo ora la curva  $C_A^{(3)}$ , lasciando ognora alla sinistra l'area data, ci imbattemo prima in un minimo relativo, poi, se mai, in un massimo pure relativo della funzione  $f(s)$ , e così via, l'ultima singolarità essendo necessariamente un minimo. Col metodo di poco fa avverto facilmente che un minimo potrà considerarsi come il limite di un complesso di pezzi di linee  $f_1(x, y) = C$ , ciascuno dei quali è connesso ed ha ogni suo punto interno in  $A - 0$ , tolti gli estremi. Questo minimo relativo della  $f(s)$  è tale anche

per la funzione  $f_1(x, y)$ . In un massimo della  $f(s)$  sito nella terza parte della linea  $C_A$  terminano due pezzi connessi di un complesso  $f_1(x, y) = C$ , ciascuno dei quali è dotato della proprietà più volte rammentata. In ogni altro punto della curva contemplata termina uno soltanto dei soliti elementi, che giace alla destra od alla sinistra dell'ordinata uscente dal medesimo per chi cammini lungo  $C_A^3$  nella direzione accennata, secondo che esso precede un massimo od un minimo della  $f(s)$ .

3. Pertanto, è manifesto che il numero dei punti del contorno  $C_A$ , in ciascuno dei quali la funzione  $f_1(x, y)$  assume un valore isolato, cioè diverso da quello raggiunto in un punto infinitamente vicino qualsivoglia sito nell'area  $A$ , è assegnabile. Questi elementi cadono soltanto nella prima e nella terza parte della curva  $C_A$ ; nel primo caso essi sono dei massimi relativi rispetto ad amendue le funzioni  $f(s)$  ed  $f_1(x, y)$ , nell'altro dei minimi della stessa specie.

Così pure è chiaro che il numero dei complessi  $f_1(x, y) = \text{cost.}$ , ciascuno dei quali non ha ogni punto interno al suo corso in  $A - 0$  è limitato, perchè un punto *entro* l'elemento  $f_1(x, y) = \text{cost.}$  e sopra  $C_A$  corrisponde ad un massimo relativo della funzione  $f(s)$ , se sulla curva  $C_A^3$ , ad un minimo, se sulla linea  $C_A^1$ . È poi inutile l'aggiungere che un insieme qualsivoglia  $f_1(x, y) = \text{cost.}$  ha un numero assegnabile di punti comuni con la curva  $C_A$ , perchè questa ultima si può dividere in un numero limitato di parti, in ognuna delle quali la  $f(s)$  è sempre crescente o decrescente.

Consideriamo ora una linea  $f_1(x, y) = C (m < C < M)$  scevra da punti isolati e composta di  $p (\geq 1)$  pezzi tra loro sconnessi. Sia  $T$  uno dei medesimi, il quale abbia *soltanto*  $r$  punti interni al suo corso sopra  $C_A$ , che dico  $a_1, a_2, \dots, a_r$  da sinistra a destra, mentre  $a_0$  ed  $a_{r+1}$  ne sono i termini, posti manifestamente sul contorno. Ciò premesso, indico con  $a''_0$  un punto sopra la linea  $f_1(x, y) = C$ , il quale tende all'altro  $a_0$  sempre ed esso accostandosi. Il simbolo  $a'_1$  rappresenti poi un punto dell'insieme considerato alla sinistra di  $a_1$  per chi guardi verso la direzione positiva dell'asse  $Y$ , che converga all'elemento  $a_1$ , mentre l'ente  $a''_0$  tende ad  $a_0$ . Traccio adesso pei punti  $a'_0$  ed  $a'_1$ , delle parallele all'asse  $Y$  e determino in tal guisa un pezzo connesso  $B$  della superficie  $A$ , sovrapposto al tratto della varietà  $f_1(x, y) = C$ , che sta tra i punti  $a''_0$  ed  $a'_1$  e limitato in parte da due segmenti delle nostre parallele.

Noi possiamo assegnare in  $B$  una linea connessa  $f_1(x, y) = \overline{C + \varepsilon}$ , la quale converga al tratto dell'insieme  $f_1(x, y)$  interposto ai punti  $a''_0$  ed  $a'_1$ ,

all'annullarsi della grandezza  $\varepsilon$ . I termini di ogni complesso  $f_i(x, y) = \overline{C + \varepsilon}$  sito nell'area  $B$  cadono sopra  $C_B$ , mentre ogni altro punto è in  $B - 0$  da valore opportuno della quantità  $\varepsilon$ . Questo fatto si verifica perchè la differenza  $f[x, \theta(x)] - C$  è positiva nè ha per limite inferiore lo zero nell'intervallo  $a''_0 a'_1$ , quando  $y = \theta(x)$  sia la equazione della parte  $C_E$  che non appartiene alla linea  $f_i(x, y) = C$  nè alle due parallele, laddove  $E$  indica un pezzo connesso della superficie  $B$ , di cui il contorno è formato dalla parte dell'elemento  $f_i(x, y) = C$  sito tra i punti  $a''_0$  ed  $a'_1$ , da un tratto di ciascuna delle due parallele all'asse  $Y$  uscenti da questi ultimi e da una linea ognora decrescente. Ed è chiaro che basterà fare la quantità  $\varepsilon$  minore del limite più basso della differenza  $f[x, \theta(x)] - C$ . Gli estremi  $b''_0$  e  $b'_1$  dell'intervallo di linea  $f(x, y) = \overline{C + \varepsilon}$  appartenente all'elemento  $E$  convergono ai punti  $a_0$  ed  $a_1$ , quando gli elementi  $a''_0$  ed  $a'_1$  tendano a questi ultimi ed in pari tempo la grandezza  $\varepsilon$  si accosti di più in più allo zero. Infatti, gli elementi  $b''_0$  e  $b'_1$  convergono agli altri  $a''_0$  ed  $a'_1$  ordinatamente, laddove questi ultimi si avvicinano senza limite agli estremi  $a_1$  ed  $a_0$  del tratto di linea  $f_i(x, y) = C$ , che si considera.

Quanto si è detto del segmento  $a''_0 a'_1$  può ripetersi di ognuno degli altri  $a''_1 a'_2, a''_2 a'_3, \dots, a''_r a'_{r+1}$ , i simboli  $a''_1, \dots, a'_{r+1}$  avendo un significato palese.

Adunque:

*Se una linea  $f_i(x, y) = C$  si compone di  $p$  pezzi, il primo dei quali ha soltanto  $r_1$  punti interni al suo corso sopra  $C_A$ , il secondo  $r_2$ , e così via, esistono  $p + \sum_1^p r_s$  tratti della linea  $f_i(x, y) = \overline{C + \varepsilon}$ , ciascuno dei quali tende all'annullarsi positivo della quantità  $\varepsilon$  ad uno dei pezzi connessi, di cui si compone la varietà  $f_i(x, y) = C$ , avente ogni suo punto interno soltanto in  $A - 0$ .*

Un'asserzione analoga va ripetuta rispetto alla linea

$$f_i(x, y) = \overline{C - \varepsilon} (\varepsilon > 0).$$

Se uno dei  $p$  tratti dell'insieme  $f_i(x, y)$  avesse ogni suo punto interno in  $A - 0$ , si potrebbe assegnare un segmento connesso che non ha alcun punto entro il suo corso sopra  $C_A$ , il quale converga al medesimo per  $\varepsilon = + 0$ , e la stessa cosa si dica mentre  $\varepsilon$  si annulla negativamente.

È degna di nota la proposizione:

*La varietà  $f_i(x, y) = \overline{C \pm \varepsilon}$  non contiene alcun tratto diverso dai*

$p + \sum_1^p r_s$  già indicati, di cui la proiezione sull'asse  $X$  od  $Y$  si mantenga a distanza finita dalla proiezione del complesso  $f_i(x, y) = C$  all'infinito diminuire della grandezza  $\varepsilon$ .

Infatti, se ciò non avesse luogo, io potrei assegnare un insieme della forma  $f_i(x, y) = C + \varepsilon_r$  ( $r \geq 1$ ) oppure dell'altra  $f_i(x, y) = \overline{C - \varepsilon_r}$ , essendo  $\varepsilon_r$  una quantità positiva infinitesima sempre decrescente, diversa dai  $p + \sum_1^p r_s$

considerati or ora, e di cui la proiezione sull'asse  $X$  non si accosta indefinitamente alla proiezione dell'aggregato  $f_i(x, y) = C$ , cioè in guisa, che possa determinarsi una grandezza  $\mu (> 0)$  non minore della minima distanza delle due immagini in discorso. Il complesso delle proiezioni del gruppo  $f_i(x, y) = \overline{C + \varepsilon_r}$  o dell'altro  $f_i(x, y) = \overline{C - \varepsilon_r}$  ( $r = 1, 2, 3, \dots$ ) ammette un elemento limite *almeno*, il quale è un punto  $p$  od un tratto di retta  $rs$ . Nel primo caso la varietà  $f_i(x, y) = \overline{C \pm \varepsilon_r}$  dà origine, *quando sia egualmente continua*, ad un punto limite, nel quale  $f_i(x, y) = C$ , perchè la funzione  $f_i(x, y)$  è continua in  $A$ . Questo punto apparterebbe dunque anche al complesso  $f_i(x, y) = C$ , la qual cosa è contraria all'ipotesi. Nel secondo caso io potrei determinare in  $A$ , sempre ammettendo la continuità uniforme (\*), un altro *intervallo* della linea  $f_i(x, y) = C$  diverso da quelli già contemplati, il che non si verifica.

Nel caso poi che la parte della varietà  $f_i(x, y) = \overline{C \pm \varepsilon_r}$ , di cui il limite della proiezione sull'asse  $X$  è il punto  $p$  oppure il tratto  $rs$ , non fosse egualmente continua, si potrebbe determinare un *punto notevole*  $v$  sopra la linea  $y = 0$  per ordine coincidente con  $p$  o nell'intervallo  $rs$ . In un tratto infinitesimo  $\sigma_\tau$  ( $\tau \geq 1$ ), il quale contiene l'elemento  $v$ , si proietterebbe un pezzo appartenente ad un gruppo tolto dalle linee  $f_i(x, y) = \overline{C \pm \varepsilon_r}$ , di cui la lunghezza non si annulla con  $\frac{1}{t}$  e che converge ad un segmento parallelo all'asse  $Y$ , lungo il quale sarebbe  $f_i(x, y) = C$ , il che è assurdo.

Adunque il teorema:

*Se il complesso  $f_i(x, y) = C$  non contiene dei punti isolati, la linea  $f_i(x, y) = \overline{C + \varepsilon}$  tende in egual maniera all'altra  $f_i(x, y) = C$  tanto per  $\varepsilon = +0$  che per  $\varepsilon = -0$ .*

(\*) Vedi il N. I della seconda parte della mia Memoria: *Le curve limite di una varietà data di curve.*

Con la locuzione la  $f_i(x, y) = \overline{C + \varepsilon}$  tende in egual maniera all'altra  $f_i(x, y) = C$  voglio dire che la distanza di due punti qualsivoglia dotati della stessa ascissa delle linee in discorso è di quella piccolezza che si vuole, quando la grandezza  $\varepsilon$  non ecceda un limite opportuno.

L'ultima proposizione si può dimostrare in maniera più semplice, decomponendo l'area data  $A$  in più parti mercè delle parallele all'asse  $Y$  uscenti dai punti del contorno  $C_A$ , nei quali la funzione ha un massimo od un minimo.

Se l'insieme  $f_i(x, y) = \text{cost.}$  contenesse uno o più punti isolati, ciascuna delle due linee  $f_i(x, y) = \overline{C \pm \varepsilon}$  tenderebbe al medesimo per  $\varepsilon = +0$  ed in maniera uniforme, purchè si faccia astrazione da questi ultimi.

Le proposizioni dei paragrafi 3 e 4 del numero precedente, nonchè il teorema enunciato nel successivo, reggono anche per la funzione  $f_i(x, y)$ , di cui si sta facendo parola. Infatti, decomposta l'area  $A$  mediante delle parallele all'asse  $Y$  uscenti dai massimi e minimi della  $f(s)$ , si ottengono delle aree connesse lungo il contorno di ciascuna delle quali la  $f_i(x, y)$  si comporta come la funzione  $f_i(x, y)$ , di cui ci siamo occupati nel numero precedente. Ora, in ognuno dei pezzi ottenuti vigono i cinque teoremi accennati, quindi anche nell'area data.

4. Poniamo ora che la  $f(s)$  pur essendo dotata di un numero limitato di massimi e minimi si mantenga costante in un numero assegnabile, al caso nullo, di intervalli tra loro sconnessi. È chiaro che questi segmenti cadono nella prima e nella terza parte di  $C_A$ .

Consideriamo prima una parte  $pq$  di  $C_A$ , in cui la  $f_i(x, y)$  si mantiene eguale a  $C$ , sita nella curva  $C_A^{(3)}$ , essendo  $p$  l'estremo più vicino all'asse  $Y$ , mentre la  $f_i(x, y)$  non ha sempre lo stesso valore nel tratto  $\overline{p - \eta} \overline{q + \eta_1}$  ( $\eta \geq 0, \eta_1 \geq 0; \eta + \eta_1 \geq 0$ ), quando si percorra la linea  $C_A$  in guisa da lasciare alla sinistra l'area data. Suppongo altresì che l'intervallo  $pq$  non abbia un estremo ad un termine dell'elemento  $C_A^{(3)}$ . Tracciate due parallele all'asse  $Y$  uscenti dai punti  $p$  e  $q$  e una linea sempre decrescente, la quale insieme all'intervallo  $pq$  ed ad un pezzo di ciascuna delle due parallele determini una parte connessa di  $A$ , avverto subito l'esistenza di una linea  $f_i(x, y) = \overline{C + \varepsilon}$ , di cui una parte si riduce al segmento  $pq$  per  $\varepsilon = +0$ .

Ciò posto, interessa studiare il modo di comportarsi dell'elemento  $f_i(x, y) = \overline{C + \varepsilon}$  ( $\varepsilon > 0$ ) alla sinistra della parallela per  $p$  e dopo  $q$ , quando si guardi nella direzione positiva dell'asse  $Y$ . Ammetto prima che il tratto  $pq$  non sia nè un massimo nè un minimo della funzione  $f(s)$ , e che nel verso da  $p$  a  $q$ , prima e dopo l'intervallo  $pq$ , la espressione  $f_i(x, y)$  sia crescente. Costruito

un triangolo di cui due lati sono paralleli agli assi ed il terzo una piccola parte di  $C_A$ , che immediatamente precede il tratto  $pq$ , vedo facilmente che alla sinistra di quest'ultimo cade una parte di una linea  $f_i(x, y) = C$ , la quale contiene il punto  $p$ . In modo analogo si avverte che l'elemento  $q$  è un termine dell'insieme  $f_i(x, y) = C$ .

Avverrebbe l'opposto, se la funzione  $f_i(x, y)$  fosse decrescente nel verso  $pq$ , l'elemento  $f_i(x, y) = C$  conterrebbe il punto  $q$  nel suo interno terminando in  $p$ .

Ogni punto del tratto  $\overline{p+0} \overline{q-0}$  può considerarsi come un minimo relativo della funzione  $f_i(x, y)$ . Se poi la  $f(s)$  fosse crescente nel verso  $pq$ , prima di  $p$  e dopo  $q$ , il punto  $q$  potrà pure ritenersi come un minimo della  $f_i(x, y)$ , non già l'altro  $p$ . Un'asserzione analoga può farsi nel caso che la  $f(s)$  sia decrescente pel verso  $pq$ .

Quando l'intervallo  $pq$  fosse un massimo della funzione  $f(s)$  esisterebbe una linea  $f_i(x, y) = C$  che lo contiene nel suo interno. Se poi la  $f(s)$  avesse un minimo nel segmento  $pq$ , potrei determinare un pezzo connesso dell'elemento  $f_i(x, y) = \overline{C+\varepsilon}$  ( $\varepsilon > 0$ ), di cui ogni punto interno è in  $A-0$  ed i termini sopra  $C_A$ , il quale converge al tratto  $pq$  all'annullarsi positivo della grandezza  $\varepsilon$ . L'intervallo  $pq$  va considerato in questo caso come un minimo anche per la data funzione.

Sia ora  $rt$  un arco del tutto interno alla prima parte del contorno  $C_A$ , essendo  $r$  il punto più lontano dalla retta  $x=0$ , nel quale la  $f(s)$  non muta valore. Se la funzione è crescente nel verso  $rt$ , vedo subito che in  $r$  termina un pezzo connesso di linea  $f_i(x, y) = C$ , il quale si estende alla sinistra della normale per  $t$  all'asse  $X$  per chi guardi nella direzione positiva della retta  $x=0$ . Avverrebbe l'opposto nel caso che la funzione  $f(s)$  fosse decrescente nel verso  $rt$ , ed il pezzo di linea  $f_i(x, y) = C$  che si connette all'arco  $rt$  cadrebbe alla destra dell'elemento  $r$ . La linea  $f_i(x, y) = \overline{C-\varepsilon}$  contiene una parte connessa, la quale ha un termine che converge per  $\varepsilon = +0$  al punto  $r$  o  $t$  ordinatamente nei due casi contemplati. Ogni elemento dell'intervallo  $\overline{r+0} \overline{t-0}$  può ritenersi come un massimo relativo della data funzione, quando ci si muova in guisa lungo  $C_A$  da lasciare alla sinistra l'area  $A$ . La stessa cosa si dica dei punti  $r$  e  $t$  per ordine nelle due ipotesi contemplate.

Il segmento  $rt$  potrebbe essere un massimo relativo delle due funzioni  $f(s)$  ed  $f_i(x, y)$ , ed in tal caso io potrei assegnare un pezzo connesso dell'insieme  $f_i(x, y) = \overline{C-\varepsilon}$ , il quale si accosta indefinitamente al tratto  $rt$  all'annullarsi positivo della grandezza  $\varepsilon$ . Se poi l'arco  $rt$  fosse un minimo

della  $f(s)$ , esso cadrebbe nell'interno di una linea  $f_1(x, y) = \text{cost.}$  ed ogni suo punto *interposto* agli estremi  $r$  e  $t$  sarebbe un massimo relativo della data funzione.

Nelle ricerche precedenti si è supposto che il tratto  $pq$  non avesse alcun estremo sopra i termini della terza parte  $C_A^{(3)}$  del contorno  $C_A$ , e che una proprietà analoga si verificasse rispetto all'intervallo  $rt$ . Togliamo ora queste restrizioni. Se il tratto  $pq$  ha il termine  $p$  in comune con la seconda parte di  $C_A$ , che non si suppone nulla, e l'altro entro la terza, esso appartiene ad una linea  $f_1(x, y) = \text{cost.}$ , che ha un estremo in  $p$  e si prolunga alla destra dell'ordinata per  $q$ , purchè la  $f(s)$  non abbia un minimo nel segmento  $pq$ . Quando poi l'intervallo  $pq$  avesse il termine  $p$  entro la terza parte di  $C_A$  e l'altro al confine sinistro della quarta, che non si ammette nulla, esso farebbe parte di una linea  $f_1(x, y) = C$ , la quale, avendo un termine in  $q$ , si estende alla sinistra della ordinata per  $p$ , se l'arco  $pq$  non è un minimo della  $f(s)$ . Se poi nel primo di questi due casi mancasse la seconda parte della linea  $C_A$  e nel secondo la quarta, si verificherebbero soltanto gli accidenti or ora indicati, come facilmente si avverte. In tutte le ultime quattro ipotesi rispetto al contorno  $C_A$  ed alla posizione dell'intervallo  $pq$  si potrà assegnare un tratto di linea  $f_1(x, y) = C + \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ), di cui ogni punto interno al suo corso è in  $A - 0$ , il quale non si connette ad un'altra parte dell'elemento  $f_1(x, y) = C + \varepsilon$  e tende all'intervallo  $pq$ , se quest'ultimo è un minimo della funzione  $f(s)$ . Se infine l'arco  $pq$  si confondesse con la curva  $C_A^3$ , esso sarebbe di necessità un minimo per ognuna delle due funzioni  $f(s)$  ed  $f_1(x, y)$ .

Considerazioni analoghe si possono ripetere rispetto al tratto  $rt$ .

5. Per le ricerche di questo numero possiamo enunciare i teoremi:

*Ad un pezzo connesso  $T$  di linea  $f_1(x, y) = C$  corrisponde una parte dell'insieme  $f_1(x, y) = C + \varepsilon$ , la quale converge in egual grado all'elemento  $T$  per  $\varepsilon = +0$  oppure per  $\varepsilon = -0$ . Soltanto nel caso che il tratto  $T$  appartenga generalmente parlando (\*) all'area  $A - 0$ , si potrà fare a piacere  $\varepsilon = +0$  oppure  $\varepsilon = -0$ .*

*La differenza  $f_1(x, y) - C$  è di segno contrario dalle due parti di un pezzo connesso di linea  $f_1(x, y) = C$  sito in  $A - 0$ .*

*Il limite inferiore e superiore della funzione  $f_1(x, y)$  vengono conseguiti sopra il contorno  $C_A$ , il primo nella curva  $C_A^{(3)}$ , nell'altra  $C_A^{(4)}$  il secondo.*

(\*) Cioè tolto un numero limitato, al caso nullo, di punti.

Se il complesso  $f_1(x, y) = \text{cost.}$  è sito in  $A - 0$ , generalmente parlando, nè contiene dei punti isolati, la linea  $f_1(x, y) = C + \varepsilon$  tende all'altra  $f_1(x, y) = C$  in egual grado tanto per  $\varepsilon = +0$  che per  $\varepsilon = -0$ .

I risultati dei paragrafi 4 e 5 del N. II reggono anche in questo caso, come risulta manifesto decomponendo l'area  $A$  nel modo di cui è parola nel paragrafo 3 di questo numero, purchè si aggiungano delle parallele all'asse  $Y$  uscenti dagli estremi di ogni tratto del contorno  $C_A$ , in cui la  $f(s)$  si mantiene costante.

Poniamo ora che la funzione  $f_1(x, y)$  pur essendo sempre crescente nel verso positivo di ciascuno degli assi e continua in  $A - 0$  non si mantenga finita nell'area  $A$ . In tale ipotesi essa potrà essere dotata nella curva  $C_A^{(3)}$  di un numero limitato di tratti e di punti, in ognuno dei quali va all'infinito negativamente.

Ed è facile l'avvertire dopo gli studi precedenti come la nostra funzione si comporti nelle estreme vicinanze dei medesimi. La  $f_1(x, y)$  potrà anche crescere oltre ogni dire positivamente in alcuni punti od intervalli della prima parte del contorno  $C_A$ , e non torna difficile lo scorgere il modo di comportarsi della espressione  $f_1(x, y)$  vicino a questi elementi. Gli infiniti negativi potranno ritenersi in certo qual modo come dei minimi di ognuna delle due funzioni  $f_1(x, y)$  ed  $f(s)$ , i secondi come dei massimi.

Le ricerche di questo numero reggono anche per le funzioni  $f_s(x, y)$  ( $s = 2, 3, 4$ ), purchè leggermente modificate.

#### IV.

1. Per procedere con chiarezza nei nostri studi giova occuparsi alquanto delle funzioni ad una variabile  $f(x)$ , che, essendo continue ed ognora crescenti in un dato intervallo, sono eguali agli estremi.

Sono manifeste le proposizioni seguenti (\*):

*È illimitato il numero delle funzioni  $f(x)$  sempre crescenti in  $ab$  ( $a < b$ ), ciascuna delle quali raggiunge il valore  $A$  in  $a$  e  $B$  in  $b$  ( $A < B$ ). Ed in particolare, non ha limite il numero di quelle che a due a due non si incontrano nel tratto  $\overline{a + 0} \overline{b - 0}$ .*

---

(\*) Vedi la Nota II della mia Memoria: *Le curve limite di una varietà data di curve.*

*Esistono tante funzioni  $f(x)$  quante si vogliono, le quali si confondono in un numero limitato od illimitato di punti tra loro sconnessi.*

*Non ha fine il numero delle espressioni  $f(x)$ , le quali hanno a comune un numero assegnabile o meno (\*) di tratticelli disgiunti tra loro.*

È poi chiaro che si potranno verificare amendue i fatti dei quali è parola nei due ultimi teoremi, conseguenze del primo.

*La varietà delle funzioni  $f(x)$  non è egualmente continua.*

Ed invero, esiste una funzione  $f_s(x)$  ( $s \geq 1$ ) dell'insieme  $f(x)$  eguale ad  $A + \eta_s$  nel punto  $\overline{b - \eta_s}$  ( $s \geq 1$ ), essendo  $\eta_s$  un infinitesimo sempre decrescente e maggiore dello zero. Il gruppo

$$y = f_s(x) \quad (s \geq 1),$$

non è al certo continuo in egual maniera, non potendosi assegnare un tratticello aderente al punto  $b$ , nel quale la oscillazione della  $f_s(x)$  sia di quella piccolezza che si vuole, qualunque sia l'interò  $s$ .

*Se  $x_1$  è un punto del segmento  $\overline{a + 0 \ b - 0}$ , il limite superiore della grandezza  $f(x_1)$  è  $B$ , l'inferiore  $A$ , nè questi limiti vengono raggiunti.*

Infatti, si può assegnare una funzione  $f'_s(x)$  ( $s \geq 1$ ) della varietà  $f(x)$ , la quale consegua in  $x_1$  il valore  $A + \eta_s$  ed un'altra  $f''_s(x)$  ( $s \geq 1$ ), che sia eguale nel medesimo a  $B - \eta_s$ .

*Data una varietà disegualmente continua  $y = \rho(x)$ , che fa parte dell'altra  $y = f(x)$ , si può determinare un insieme  $y = \rho_s(x)$  ( $s \geq 1$ ) appartenente al complesso  $y = \rho(x)$  per modo, che sia soddisfatta una delle tre diseguaglianze*

$$\lim_{s=\infty} [\rho_s(x_1 + \epsilon_s) - \rho_s(x_1 - \epsilon_s)] = C, \quad \lim_{s=\infty} [\rho(a + \epsilon_s) - \rho(a)] = C,$$

$$\lim [\rho_s(b) - \rho_s(b - \epsilon_s)] = C,$$

essendo  $a < x_1 < b$ ,  $C$  una quantità maggiore dello zero, ed  $\epsilon_s$  un infinitesimo positivo che ognora decresce.

Ed invero, esiste una quantità  $\sigma (> 0)$  tale, che non si possa dividere il tratto  $ab$  in più parti per modo, che in ciascuna di esse la oscillazione della funzione qualsivoglia  $\rho(x)$  sia minore di  $\sigma$ , perchè l'insieme  $\rho(x)$  è per ipotesi continuo in maniera disuguale. Si può dunque assegnare un punto  $x_1$ , che suppongo prima nel tratto  $\overline{a + 0 \ b - 0}$ , tale, che in un segmento comunque

(\*) Cioè senza fine.

piccolo, che lo contiene nel suo interno, esistano pur sempre delle funzioni  $\rho(x)$  dotate di una oscillazione non inferiore alla grandezza  $\sigma$ . Scelgo quindi dall'insieme  $\rho(x)$  la espressione  $\rho_s(x)$  ( $s \geq 1$ ) in guisa, che la differenza dei suoi valori massimo e minimo non sia minore di  $\sigma$  nell'intervallo infinitesimo ed opportuno  $2\varepsilon_s$  avente per punto medio l'elemento  $x_1$ .

La grandezza  $\rho_s(x_1 - \varepsilon_s)$  si mantiene finita all'annullarsi del quoto  $\frac{1}{s}$ ; io posso dunque assegnare la varietà  $\rho_{s_t}(x_1 - \varepsilon_{s_t})$  ( $t \geq 1$ ) per modo, che sia

$$\lim_{t=\infty} \rho_{s_t}(x_1 - \varepsilon_{s_t}) = D,$$

essendo  $D$  una quantità determinata. Anche la grandezza

$$\rho_{s_t}(x_1 + \varepsilon_{s_t}),$$

è finita, qualunque sia l'intero  $t$ , e si può di conseguenza determinare il gruppo  $\rho_{s_{t_r}}(x)$  ( $r \geq 1$ ) in guisa, che la espressione

$$\rho_{s_{t_r}}(x_1 + \varepsilon_{s_{t_r}}) = \rho_r(x_1 + \varepsilon_r),$$

tenda ad un limite  $E$ , mentre l'intero  $r$  va all'infinito. La quantità  $E$  è diversa dall'altra  $D$ , che, in caso opposto, si avrebbe

$$\lim_{r=\infty} [\rho_r(x_1 + \varepsilon_r) - \rho_r(x_1 - \varepsilon_r)] = 0,$$

e la oscillazione della  $\rho_r(x)$  sarebbe inferiore a  $\sigma$  da valore opportuno dell'intero  $r$  nell'intervallo di centro  $x_1$  e di ampiezza  $2\varepsilon_r$ , la qual cosa è contraria all'ipotesi. Adunque, la quantità  $E$  è diversa dall'altra  $D$ ; ne è poi maggiore, perchè la funzione  $\rho_r(x)$  è ognora crescente nel tratto  $ab$ , qualunque sia l'intero  $r$ .

Se il punto  $x_1$  cadesse in  $a$  od in  $b$ , reggerebbe l'una o l'altra delle due ultime eguaglianze del teorema.

Supposto  $a < x_1 < b$ , si potrà costruire una funzione ognora costante oppure sempre crescente nel tratto  $\overline{ax_1 - 0}$  secondo che la quantità  $D$  è eguale oppure è  $>$  di  $A$ , che abbia il valore  $A$  in  $a$  e tenda a  $D$  nel punto  $\overline{x_1 - 0}$  ed un'altra analoga nel segmento  $\overline{x_1 + 0b}$ , che assuma il valore  $E$  in  $x_1 + 0$  e  $B$  in  $b$ . L'insieme di queste due funzioni forma una sola funzione  $\varphi(x)$  ovunque continua in  $ab$ , fatta astrazione dal punto  $x_1$ , in cui non

è definita, mentre

$$\varphi(x_1 + 0) - \varphi(x_1 - 0) = E - D > 0.$$

Si può quindi dire che l'aggregato  $\rho_r(x)$  si accosta indefinitamente nelle estreme vicinanze del punto  $x_1$  ad una funzione  $\varphi(x)$  discontinua in esso.

Se l'elemento  $x_1$  cadesse in  $b$ , si potrebbe formare una funzione continua nel tratto  $\overline{ab-0}$  tale, che fosse  $\varphi(b-0) = \lim_{r=\infty} \rho_r(b - \varepsilon_r)$  e  $\varphi(b) = B$ .

La  $\varphi(x)$  potrebbe supporre in questo caso ognora crescente nell'intervallo  $\overline{ab-0}$ , quando si avesse  $\lim_{r=\infty} \rho_r(b - \varepsilon_r) > A$ , altrimenti sempre eguale alla grandezza  $A$ .

In maniera analoga si ragiona se il punto  $x_1$  cade in  $a$ .

2. È notevole il teorema:

*Una varietà di funzioni  $\varphi(x)$  dell'insieme  $f(x)$  tale, che ne passi una soltanto per ciascun punto interno dell'area connessa  $S$  limitata dalle due linee  $\varphi(x)$  e  $\psi(x)$ , le quali fanno parte del sistema  $f(x)$ , non si accosta indefinitamente ad una funzione discontinua nel tratto  $ab$ .*

Ed invero, se l'asserzione non reggesse, esisterebbe un gruppo  $\varphi_s(x)$  ( $s \geq 1$ ) in guisa, che in un punto opportuno fosse

$$\lim_{s=\infty} [\varphi_s(x_1 + \varepsilon_s) - \varphi_s(x_1 - \varepsilon_s)] = C (> 0),$$

i due simboli  $\lim_{s=\infty} \varphi_s(x_1 + \varepsilon_s)$ ,  $\lim_{s=\infty} \varphi_s(x_1 - \varepsilon_s)$  avendo significato, laddove  $a < x_1 < b$ , perchè le due funzioni  $y = \varphi(x)$ ,  $y = \psi(x)$  sono continue e raggiungono lo stesso valore tanto in  $a$  che in  $b$ .

Ogni linea  $y = \varphi(x)$  spezza in due parti semplicemente connesse l'area  $S$ , e due elementi del complesso  $y = \varphi(x)$  formano il contorno completo di una superficie connessa che appartiene ad  $S$ .

Il punto limite  $h$  dell'aggregato  $[\overline{x_1 - \varepsilon_s}, \varphi_s(x_1 - \varepsilon_s)]$  termina insieme all'altro  $k$  di coordinate  $[x_1, \lim_{s=\infty} \varphi_s(x_1 + \varepsilon_s)]$  un segmento parallelo all'asse  $Y$ , al quale la linea  $y = \varphi_s(x)$  si avvicina con una sua parte indefinitamente all'annullarsi del quoto  $\frac{1}{s}$ .

Pel punto  $e$  dell'intervallo  $\overline{h+0} \overline{k-0}$  passa per dato soltanto una linea del gruppo  $y = \varphi(x)$ , sia essa  $y = t(x)$ . D'altra parte, nel tratticello  $\overline{x_1 - \eta} \overline{x_1 + \eta}$  la funzione  $y = t(x)$  può ritenersi quasi costante, quando la grandezza  $\eta$  sia abbastanza piccola, perchè ciascuna linea della varietà  $y = \varphi(x)$  è per

ipotesi continua. Io potrei di conseguenza supporre l'intero  $s$  sì grande, poniamo eguale ad  $s_1$ , che l'insieme  $y = \varphi_{s_1+u}(x)$  incontri nei pressi del punto  $e$  l'altro  $y = t(x)$ , qualunque sia l'intero  $u$ . Questo fatto però non avviene, uscendo per dato una sola linea dell'insieme proposto da ciascun punto dell'area  $S$ .

Essendo  $y = \varphi(x)$ ,  $= \psi(x)$  due funzioni del gruppo  $f(x)$ , le quali formano il contorno completo di un pezzo connesso  $S$  di piano, mi propongo di costruire un insieme  $y = \lambda(x)$  appartenente all'aggregato  $f(x)$  e tale, che per ciascun punto di  $S - 0$  esca soltanto una funzione  $\lambda(x)$ .

Detto  $cd$  ( $c < d$ ) un segmento dell'asse  $Y$  eguale alla massima distanza delle due linee  $y = \varphi(x)$ ,  $= \psi(x)$  [ $\psi(x) > \varphi(x)$ ,  $a < x < b$ ], indico con  $\psi_1(y)$  una funzione sempre crescente nel medesimo, di cui il valore in  $d$  sia uno ed in  $c$  zero.

Pertanto, la funzione

$$\lambda(x) = [1 - \psi_1(y)] \varphi(x) + \psi_1(y) \psi(x) = \varphi(x) + \psi_1(y) [\psi(x) - \varphi(x)],$$

soddisfa a tutte le condizioni volute per ogni valor particolare della quantità  $y$  nei limiti indicati, perchè crescente e continua nel tratto  $ab$ , mentre  $\lambda(a) = A$ ,  $\lambda(b) = B$ , e la espressione

$$[\psi_1(y') - \psi_1(y)] [\psi(x) - \varphi(x)] (y' > y)$$

è positiva, qualunque sia il valore della variabile  $x$  tra  $a$  e  $b$ .

3. Sia ora  $A$  un'area piana limitata da due tratti di retta paralleli all'asse  $Y$  e da due linee sempre decrescenti insieme all'ordinata. Questa superficie viene incontrata nel suo contorno in soli due punti da ogni parallela ad uno degli assi coordinati uscente da un punto del suo interno.

Ciò premesso, ammetto il postulato:

*Esistono tanti sistemi quanti si vogliono, ciascuno dei quali è formato da una varietà di linee ognora decrescenti in guisa, che per ogni punto della superficie  $A$  ne esca una soltanto avente l'estremo destro sul tratto rettilineo del contorno  $C_A$  più vicino all'asse  $Y$  ed il secondo sul più lontano.*

Una proposizione analoga ha luogo per un'area limitata da due segmenti paralleli all'asse  $X$  e da due linee che ognora decrescono all'aumentare dell'ascissa.

È tosto dimostrato il teorema:

*Le linee di ogni sistema di cui si fa parola nei due postulati precedenti sono continue in egual modo.*

Ed invero, considerando il primo, se l'asserzione non fosse vera, esisterebbe un punto  $x_1$  nel tratto  $ab$ , proiezione dell'area data sull'asse  $X$  tale, che nel segmento  $\overline{x_1 - \varepsilon_s}, \overline{x_1 + \varepsilon_s}$  la oscillazione della linea  $y = \varphi_s(x)$  ( $s \geq 1$ ) del gruppo contemplato fosse maggiore della grandezza opportuna  $\sigma$ , supposto che l'elemento  $x_1$  cada tra  $a$  e  $b$ .

Se l'ultima condizione non si verificasse, al tratto  $\overline{x_1 - \varepsilon_s}, \overline{x_1 + \varepsilon_s}$  andrebbe sostituito uno dei due  $\overline{a + \varepsilon_s}, \overline{b - \varepsilon_s}$ .

Amnesso che il punto  $[\overline{x_1 - \varepsilon_s}, \varphi_{s_t}(x_1 - \varepsilon_s)]$  tenda alla posizione  $h$  di coordinate  $[x_1, \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_{s_t}(x_1 - \varepsilon_s)]$ , posso levare dal gruppo  $\varphi_{s_t}(x)$  un altro  $\psi_s(x)$  per modo che l'elemento

$$[\overline{x_1 + \varepsilon_s}, \psi_s(x_1 + \varepsilon_s)],$$

tenda pure ad una posizione limite  $k$ , quando l'intero  $s$  cresce a dismisura. La linea della varietà contemplata uscente da un punto fisso del tratto  $\overline{h - 0}, \overline{k + 0}$  dovrebbe incontrare ogni elemento  $y = \psi_{s_1+t}(x)$  da valore opportuno dell'intero  $s_1$ , qualunque sia l'intero  $t$ . Questo fatto però non si verifica, perchè ciascuna linea di un sistema non ne incontra per ipotesi un'altra dello stesso.

Se l'elemento  $x_1$  cadesse in  $b$ , al punto  $[x_1, \lim_{s \rightarrow \infty} \psi_s(x_1 + \varepsilon_s)]$  andrebbe sostituito l'ente  $[b, \psi_s(b)]$ , e se in  $a$ , alla coppia di grandezze  $[x_1, \lim_{s \rightarrow \infty} \psi_s(x_1 - \varepsilon_s)]$  l'altra  $[a, \psi_s(a)]$ .

Per facilitare le ricerche che si faranno in appresso, torna opportuno l'aggiungere ai due postulati detti or ora i successivi, che li contengono come casi particolari.

I. *Se  $A$  è un'area a contorno completo, la quale viene incontrata in soli due punti da ogni parallela ad uno degli assi uscente da un suo punto interno, e se  $P$  è un punto della prima parte di  $C_A$  e  $Q$  una della terza, si può determinare una corrispondenza univoca tra le due curve  $\overline{QP}$  e  $QP$  per modo, che due punti corrispondenti possono considerarsi come i termini di una linea sempre decrescente. Se poi il punto  $s_1$  si muove da  $Q$  a  $P$ , il suo corrispondente  $s_2$  va da  $Q$  a  $P$  sempre scostandosi dall'elemento  $Q$ .*

*Il riscontro indicato può farsi in quante maniere si vuole.*

*Suppongo altresì che le cose dette reggano se al punto  $P$  od all'altro  $Q$  od anche a ciascuno dei due si sostituisca un tratto del contorno, che indicherò ancora con  $P$  e con  $Q$ , posto tutto nella curva  $C_A^{(1)}$  o nell'altra  $C_A^{(2)}$  per ordine.*

II. Ammetto poi che esistano in  $A$  tanti sistemi di linee quanti si vogliono sempre decrescenti e tali, che per ogni punto della superficie data esca una linea soltanto di ciascun sistema, la quale abbia i suoi termini in punti corrispondenti degli archi  $\overline{QP}$  e  $QP$ . La corrispondenza è quella di cui è cenno nel postulato I.

Ciascuna linea di ogni varietà considerata a sè sia continua (\*).

Quanto al postulato I è degno di nota che la differenza delle ordinate di due punti corrispondenti  $'s_1$  ed  $'s_2$  posti sugli archi  $\overline{QP-\eta}$  e  $\overline{QP-\eta'}$  non è mai minore di una stessa quantità assegnabile, la quale si annulla con  $\eta$ . Con la notazione  $\overline{QP-\eta}$  indico l'arco  $\overline{QP}$ , quando si trascuri un pezzo non maggiore di  $\eta$  ad ognuno dei suoi estremi, laddove  $\overline{QP-\eta'}$  è il tratto corrispondente sopra  $QP$ .

Ed invero, se ciò non si verificasse, potrei assegnare un valore  $'s'_1$  ad  $'s_1$  in guisa, che nelle sue estreme vicinanze cadano pur sempre dei valori di  $'s_1$  dotati di un'ordinata diversa tanto poco quanto si vuole da quella dei punti corrispondenti  $'s_2$ . Ma, l'ordinata del punto  $'s'_1$  supera quella dell'altro  $'s'_2$ , che gli fa riscontro sopra  $QP$  di una quantità  $\sigma + \varepsilon$  ( $\sigma > 0, \varepsilon > 0$ ). Gli elementi vicinissimi ad  $'s'_1$  sopra  $\overline{QP-\eta}$  hanno dunque un'ordinata che è più grande di quella dei corrispondenti sull'altro  $\overline{QP-\eta'}$  di una grandezza, che può ritenersi non inferiore a  $\sigma$ , la qual cosa si verifica perchè la quantità  $'s_2$  è una funzione continua dell'altra  $'s_1$ , che gli fa riscontro sopra  $\overline{QP-\eta}$ .

Una proprietà analoga ha luogo rispetto alle ascisse di due punti che si corrispondono sopra gli archi  $\overline{QP-\eta}$  e  $\overline{QP-\eta'}$ .

I due ultimi postulati reggono anche se il contorno  $C_A$  non è completo. È superfluo poi l'osservare che gli elementi  $P$  e  $Q$  sono sempre separati l'uno dall'altro.

## V.

1. Ogni varietà di linee  $R$ , di cui è parola nel postulato II del § 3 del numero precedente, è continua in maniera eguale.

Ed invero, se ciò non si verificasse, io potrei torre dalla medesima un insieme  $y = l_r(x)$  disegualmente continuo. Dal gruppo  $y = l_r(x)$  si potrebbe

(\*) Nel Vol. XXII (Ser. II) dei Rendiconti del R. Istituto Lombardo di scienze, lettere ed arti, espongo delle considerazioni che rendono di particolare evidenza questi postulati.

poi levare un altro  $y = p_r(x)$  ( $r \geq 1$ ) in guisa, che gli estremi dell'elemento  $y = p_r(x)$  tendano a due punti corrispondenti  $m$  ed  $n$  del contorno  $C_A$ , oppure ai termini del tratto  $P$  o  $Q$ , che dirò ancora  $m$  ed  $n$ .

Nel caso di  $P = 0$  i punti  $m$  ed  $n$  non coincidono al certo con l'elemento  $P$ . Infatti, pel postulato I la grandezza  $'s_2$  è una funzione continua dell'arco  $'s_1$ , perchè essa cresce sempre insieme all'altra  $'s_1$  e raggiunge un valore qualsivoglia compreso tra i valori limite 0 e  $QP$ , essendo  $QP$  la distanza tra l'elemento  $Q$  e l'altro  $P$  contata in guisa da lasciare alla sinistra l'area  $A$ , mentre, come è noto, una espressione sempre crescente in un intervallo e non continua non raggiunge ogni valore intermedio alle grandezze estreme. Adunque, se un punto è oltre ogni dire vicino al punto  $P$  sopra  $QP$ , altrettanto si verifica del suo corrispondente; e poichè le linee di cui è parola nel postulato II sono tutte decrescenti, ne consegue che nelle vicinanze del punto  $P$  esse sono egualmente continue, laddove il gruppo  $y = p_r(x)$  ( $r \geq 1$ ) non ha per ipotesi questa proprietà. In modo analogo si ragiona rispetto al punto  $Q$ .

Ciò posto, chiamo  $y = p(x)$  la linea che ha i suoi estremi nei punti  $m$  ed  $n$  e fa parte dell'insieme di elementi, di cui è cenno nel postulato II, e al caso il tratto  $P$  o  $Q$ . Ammesso che  $y = p'_r(x)$  sia un gruppo tolto dall'altro  $y = p_r(x)$  ( $r \geq 1$ ) e sempre sovrapposto o sottoposto alla linea  $y = p(x)$ , lo modifico in guisa, che ogni sua linea abbia per proiezione completa il tratto  $m_1 n_1$  ( $m_1 < n_1$ ), essendo  $m_1$  ed  $n_1$  per ordine le immagini dei punti  $m$  ed  $n$  sull'asse  $X$ . Dall'aggregato  $y = p_r(x)$  si potrà poi levare l'insieme  $y = K_r(x)$  ( $r \geq 1$ ) per modo, che una parte del medesimo si accosti indefinitamente all'annullarsi del quoto  $\frac{1}{r}$  ad un segmento di retta  $l$  parallelo all'asse  $Y$ , che si proietta nel punto  $x_1$  della retta

$$y = 0 \quad (m_1 \leq x_1 \leq n_1).$$

Il tratto  $l$  cade per intero nell'area  $E$  limitata dalla linea  $y = p(x)$  dall'altra  $y = p'_1(x)$  modificata e da due tratti paralleli all'asse  $Y$ , chè, in caso diverso, il sistema  $y = K_r(x)$  non apparterebbe completamente alla superficie  $A$ , contro il supposto. La linea del gruppo  $R$ , la quale esce dal punto medio del segmento  $l$  dovrebbe incontrare ogni ente dell'aggregato  $y = K_r(x)$  da valore opportuno dell'intero  $r$ , la qual cosa non può verificarsi, perchè due linee della varietà  $R$  non hanno per dato alcun punto comune.

Se  $y = u(x)$ ,  $= u_r(x)$  ( $r \geq 1$ ) sono due linee del sistema  $R$ , di cui la

prima è fissa, laddove un estremo della seconda converge all'omologo dell'altra, l'elemento  $y = u_r(x)$  tende uniformemente all'altro  $y = u(x)$ .

Ed invero, detti  $q_r$  e  $q$  gli estremi sinistri delle linee  $y = u_r(x)$ ,  $= u(x)$  e  $q'_r$ ,  $q'$  i destri ordinatamente, ammetto che il punto  $q_r$  converga all'altro  $q$  sempre accostandosi ad esso e standogli sempre da una stessa parte, nella quale ipotesi la stessa cosa avverrà degli altri due termini. Le proiezioni  $mn$  ed  $m_r n_r$  delle linee

$$y = u(x), \quad = u_r(x),$$

sono quindi quasi coincidenti da valore opportuno dell'intero  $r$ . Divido ora il tratto  $mn$  in parti eguali per modo, che la oscillazione dell'elemento  $y = u(x)$  in ciascuna di esse sia piccola quanto si vuole. Tutte le normali alla retta  $y = 0$  nei punti di divisione dell'intervallo  $mn$  incontrano anche la linea  $y = u_{r_1+t}(x)$  ( $t \geq 0$ ), qualunque sia l'intero  $t$ , purchè il numero  $r_1$  sia scelto in maniera adatta, in quanto ogni linea del sistema  $R$  è decrescente. Si può anche supporre che le ordinate delle linee  $y = u(x)$ ,  $= u_{r_1+t}(x)$  ( $t \geq 0$ ), corrispondenti ad uno stesso punto di partizione del tratto  $mn$ , sieno quasi eguali. Poichè, se ciò non avvenisse, lungo una delle normali or ora condotte almeno l'ente  $y = u_r(x)$  non convergerebbe all'altro  $y = u(x)$  all'infinito diminuire del quoto  $\frac{1}{r}$ , ma tenderebbe ad un punto  $k$  diverso dal corrispondente  $h$  sull'elemento  $y = u(x)$ , essendo la linea

$$y = u_{r_1+t}(x),$$

sempre sovrapposta o sottoposta all'altra  $y = u_{r_1+s}(x)$  ( $t < s$ ) per dato. Da un punto interno del tratto rettilineo  $kh$  non uscirebbe quindi, come tosto si avverte, nessuna linea del sistema  $R$ , la qual cosa contrasta con l'ipotesi. Di conseguenza, rammentando che le linee del gruppo  $R$  sono tutte decrescenti, si vede tosto che la linea  $y = u_r(x)$  converge in egual maniera all'altra  $y = u(x)$ , mentre l'intero  $r$  cresce oltre ogni dire.

In luogo di riferirsi all'asse  $X$ , si avrebbe potuto proiettare ogni cosa sull'altro asse.

Laonde, se conduco da un punto interno  $e$  dell'elemento  $y = u(x)$  due parallele agli assi coordinati e nel loro verso, incontro nelle sue immediate vicinanze degli enti che fanno parte del gruppo  $R$  e gli sono sovrapposti.

2. Giovandoci di quanto è detto nel § 3 del precedente numero nonchè nel § 1 di questo, possiamo costruire una funzione crescente secondo il verso positivo di amendue gli assi nell'area  $A$ , la quale consegua dei valori continui dati ad arbitrio, per quanto è possibile, lungo la curva  $C_A$ .

Supposto prima che la funzione  $f(s)$  dei punti del contorno  $C_A$  non raggiunga più di due volte uno stesso valore, gli elementi degli archi  $\overline{QP}$  e  $QP$ , nei quali  $f(s_1) - f(s_2) = 0$ , devono soddisfare alle condizioni dette nel postulato I. Rammentando poi il successivo, si attribuisca alla funzione da costruirsi in ciascuna linea decrescente del sistema considerato i valori che deve raggiungere ai suoi termini e si otterrà una funzione  $f_1(x, y)$  sempre crescente nel verso positivo di ciascun asse, la quale consegue i valori assegnati lungo  $C_A$ , come tosto si avverte, quando si ponga mente alla seconda proposizione del paragrafo precedente.

Da questa costruzione risulta manifesto il teorema:

*Esiste un numero illimitato di funzioni  $f_1(x, y)$  crescenti secondo il verso positivo di amendue gli assi coordinati nell'area  $A$ , ciascuna delle quali assume gli stessi valori  $f(s)$  dati ad arbitrio, per quanto è possibile, lungo  $C_A$ , laddove la  $f(s)$  raggiunge al massimo due volte uno stesso valore nella curva  $C_A$ .*

Due funzioni  $p(x, y)$  e  $q(x, y)$  della specie indicata possono essere diverse l'una dall'altra in ciascun punto della superficie  $A - 0$ .

E perchè ciò si verifichi basta supporre che due linee qualsivoglia  $p(x, y) = C$ ,  $q(x, y) = C$ , le quali hanno gli stessi estremi, non abbiano alcun punto comune nell'interno del loro corso.

Questa asserzione risulta chiarita dal postulato che giova aggiungere ai precedenti.

III. *Fra i sistemi, dei quali è parola nel postulato II, esistono quanti si vogliono tali, che due linee qualunque contermini di due dei medesimi  $M$  ed  $N$  non abbiano alcun punto comune entro il loro corso, laddove ogni linea di una di queste varietà è sempre sovrapposta alla corrispondente dell'altra, tolti, ben si intende, gli estremi.*

Laonde la proposizione:

*Esistono tante funzioni  $f_1(x, y)$ , quante si vogliono, le quali non assumono lo stesso valore in uno stesso punto dell'area  $A - 0$  e coincidono lungo  $C_A$ .*

Se poi considero due linee contermini qualunque  $a$  e  $b$  appartenenti a due delle funzioni, di cui è parola nell'ultimo teorema, l'elemento  $a$  è sempre sottoposto nell'interno del suo corso all'altro  $b$  oppure sempre sovrapposto. Nel primo caso la funzione cui compete la linea  $a$  ha in ogni punto della superficie  $A - 0$  un valore più grande di quello dell'altra, nel secondo avviene l'opposto.

Ad illustrare l'ultima proposizione valga il seguente esempio.

Indico con  $p_1(x, y)$  e  $q_1(x, y)$  [ $q_1(x, y) \cong p_1(x, y)$ ] due funzioni che non si incontrano in  $A - 0$  e con  $cd$  ( $c < d$ ) un segmento eguale alla massima distanza delle medesime contata parallelamente all'asse  $Z$ , la quale viene manifestamente raggiunta. Se il simbolo  $\psi_1(u)$  rappresenta una funzione sempre crescente nel tratto  $cd$  in guisa, che sia  $\psi_1(c) = 0$ ,  $\psi_1(d) = 1$ , la differenza  $1 - \psi_1(u)$  è ognora positiva e decrescente nell'intervallo indicato, eguale ad uno in  $c$  ed allo zero in  $d$ .

Pertanto, la espressione

$$\begin{aligned} \lambda(x, y) &= [1 - \psi_1(u)] p_1(x, y) + \psi_1(u) q_1(x, y) \\ &= p_1(x, y) + \psi_1(u) [q_1(x, y) - p_1(x, y)], \end{aligned}$$

rappresenta una varietà di funzioni sempre crescenti nel verso positivo di ciascuno degli assi e tali, che due delle medesime non si incontrano in  $A - 0$ , e coincidono lungo la curva  $C_A$ . I due ultimi fatti hanno luogo perchè la differenza

$$[\psi_1(u') - \psi_1(u)] [q_1(x, y) - p_1(x, y)] \quad (u' > u),$$

è più grande di zero entro  $A$  e nulla nell'elemento  $C_A$ . Per ogni punto dello spazio limitato delle due superficie  $z = p_1(x, y)$ ,  $z = q_1(x, y)$  esce una funzione soltanto della famiglia  $z = \lambda(x, y)$ .

3. *Il numero delle funzioni, le quali coincidono in uno o più punti entro  $A$ , è senza limite. Questi elementi possono essere disposti in svariate guise* (\*).

Alcuni esempi chiariscano questa asserzione.

Sia  $A$  un'area a contorno completo,  $m$  ed  $n$  due punti entro la medesima, di cui il secondo cade nel primo quadrante del primo, mentre gli elementi  $P$  ed  $m$  hanno delle ordinate maggiori di  $n$  e di  $Q$  rispettivamente. Dico poi  $B$  un'area sita in  $A - 0$ , il contorno della quale sia formato da due rami semplici crescenti che congiungono i punti  $m$  ed  $n$ , e tiro le linee  $y = c$ ,  $y = d$  ( $c < d$ ) uscenti dai medesimi. Le rette  $y = c$ ,  $y = d$  incontrino il contorno  $C_A$  nei punti  $C_1$  e  $C_2$  del tratto  $\overline{QP} - 0$  e negli elementi  $D_1$  e  $D_2$  dell'altro  $\overline{QP} - 0$ . Ora, è manifesto che ad un intervallo opportuno

$$\overline{C_2 - \eta_2} \quad \overline{C_1 - \eta_1} \quad (\eta_2 > 0, \eta_1 > 0),$$

(\*) Le funzioni  $f_1(x, y)$ , delle quali si fa parola in questo paragrafo e nei successivi del presente numero, non raggiungono più di due volte uno stesso valore lungo la curva  $C_A$ , nella quale coincidono.

sopra  $\overline{QP}$  corrisponde il segmento  $\overline{D_1 - \eta'_1}, \overline{D_2 - \eta'_2}$  ( $\eta'_1 > 0, \eta'_2 > 0$ ) dell'arco  $QP$ , purchè si ritenga come positiva la direzione della linea  $C_A$ , che lascia alla sinistra l'area  $A$ , e, giovandoci del postulato I, si sia già fissato il riscontro fra i punti delle curve  $QP$  e  $\overline{QP}$ .

Determino ora una corrispondenza univoca tra gli elementi dell'arco  $\overline{C_2 - \eta_2}, \overline{C_1 - \eta_1}$  e la parte sinistra del contorno  $C_B$  per modo, che due punti corrispondenti possano considerarsi come termini di una linea sempre decrescente al crescere della ascissa. Questo riscontro viene fatto in guisa, che se ne possa determinare uno analogo tra i punti dell'altra parte di  $C_B$  e del tratto  $\overline{D_1 - \eta_1}, \overline{D_2 - \eta_2}$ , la dove per quattro punti corrispondenti per ordine sopra  $\overline{C_2 - \eta_2}, \overline{C_1 - \eta_1}$ , sulla parte sinistra e destra della linea  $C_B$  ed infine sopra il segmento  $\overline{D_1 - \eta'_1}, \overline{D_2 - \eta'_2}$  passa una linea sempre decrescente all'aumentare della ascissa, e quindi quante si vogliono. La corrispondenza fra i quattro punti dipenda da quella determinata sopra le curve  $\overline{QP}$  e  $QP$ .

Fisso ora sopra  $C_B$  i valori che la  $f_1(x, y)$  deve raggiungere nei punti corrispondenti del contorno  $C_A$  e costruisco in  $B$  una funzione  $l(x, y)$  sempre crescente secondo il verso positivo di amendue gli assi, la quale raggiunga lungo  $C_B$  questi valori. Traccio quindi una linea sempre decrescente in  $A$ , la quale esca dai punti  $\overline{C_2 - \eta_2}, n, \overline{D_2 - \eta_2}$  ed una analoga rispetto agli elementi  $\overline{C_1 - \eta_1}, m, \overline{D_1 - \eta_1}$ . In tal guisa la superficie data risulta divisa in cinque parti, che sono le aree  $rnsP\beta, nr\gamma tm, tQ\delta um, snmu\alpha$  e l'elemento  $B$ , essendo

$$\begin{aligned} r &\equiv \overline{C_2 - \eta_2}, & s &\equiv \overline{D_2 - \eta_2} \\ t &\equiv \overline{C_1 - \eta_1}, & u &\equiv \overline{D_1 - \eta'_1} \quad (*). \end{aligned}$$

Giovandomi dei valori fissati lungo la linea  $C_A$  e  $C_B$  io posso costruire in  $A - B$  una funzione  $p(x, y)$  sempre crescente ed eguale ai medesimi nel contorno  $C_{A-B}$ , quando si considerino successivamente le aree 1, 2, 3, 4 e si attribuisca alla  $p(x, y)$  lungo le linee  $\overline{C_1 - \eta_1}, m, \overline{D_1 - \eta_1} \equiv tm u, \overline{C_2 - \eta_2}, n, \overline{D_2 - \eta_2} \equiv rns$  i valori già assegnati in  $t$  ed  $r$  ordinatamente.

L'insieme delle funzioni  $l(x, y)$  e  $p(x, y)$  forma una sola funzione nella superficie  $A$ , la quale cresce secondo la direzione positiva di amendue gli assi e raggiunge dei valori fissati lungo  $C_A$ . Pei postulati II e III avverto poi di leggieri che posso formare nell'area  $B$  tante funzioni quante voglio,

(\*) Il Lettore è pregato a farsi la figura.

le quali sono tra loro del tutto distinte, fatta astrazione della linea  $C_B$  in cui coincidono, e del tutto analoghe alla  $l(x, y)$ . Se tengo poi fisso l'ente  $p(x, y)$  ho il teorema:

*Esistono tante funzioni  $f_i(x, y)$  quante si vogliono, le quali coincidono soltanto in ogni punto dell'area  $A - (B - 0)$ .*

Se, rammentando i postulati I, II, III, considero due varietà di linee ognora decrescenti al crescere dell'ascissa in  $A$ , ciascuna delle quali congiunge gli stessi punti sopra  $\overline{QP}$  e  $QP$  ed ha a comune con l'altro soltanto un numero limitato di linee, dò origine a due funzioni  $p(x, y)$  e  $q(x, y)$  tali, che sia  $p(x, y) - q(x, y) = 0$  solamente lungo  $C_A$  ed in un numero assegnabile di complessi della forma  $p(x, y) = \text{cost}$ .

A questi pochi esempi torna opportuno l'aggiungere la proposizione:

*Se  $p(x, y)$  e  $q(x, y)$  sono due funzioni sempre crescenti in  $A$  e se lungo  $C_A$   $p(x, y) = q(x, y)$ , mentre si possono determinare due punti in  $A - 0$ , in uno dei quali essa differenza è positiva e nell'altro negativa, gli elementi della superficie  $A$ , in cui*

$$p(x, y) - q(x, y) = 0,$$

*spezzano la connessione dell'area data.*

Infatti, io non posso congiungere i due punti, di cui è parola nel teorema, mediante una curva lungo la quale la differenza  $p(x, y) - q(x, y)$  non si annulla.

4. *La varietà delle funzioni  $f_i(x, y)$  non è continua in maniera uniforme.*

Traccio nell'interno dell'area  $A$  un ramo semplice infinitesimo crescente di lunghezza  $\eta_s (s \geq 1)$  in guisa, che l'elemento  $\eta_{s+1}$  faccia parte del medesimo. Imagino quindi fissato sull'arco  $\overline{QP} - 0$  un tratto  $\bar{e}$  del tutto entro il secondo quadrante del punto  $f$ , cui converge il ramo  $\eta_s$  all'annullarsi del quoto  $\frac{1}{s}$ , e sulla curva  $\overline{QP} - 0$  l'arco  $e$  che sia per intero nell'interno del quarto quadrante rispetto ad  $f$ , alle quali condizioni si può sempre soddisfare.

Ciò premesso, determino, giovandomi del postulato I, una corrispondenza univoca tra gli archi  $QP$  e  $\overline{QP}$  in guisa, che al tratto  $e$  faccia riscontro l'altro  $\bar{e}$ , ed una analoga tra gli elementi  $e$  ed  $\eta_s (s \geq 1)$ . Formo quindi la funzione  $'f_s(x, y) (s \geq 1)$  sempre crescente secondo il verso positivo di amendue gli assi per mezzo della corrispondenza già fissata lungo gli archi  $QP, \overline{QP}$  ed  $\eta_s$ , per modo, che sia lungo  $C_A$   $'f_{s+1}(x, y) - 'f_s(x, y) = 0$ , e dò origine

in tal guisa ad un gruppo di funzioni, il quale è continuo in maniera disuguale. Questo fatto si verifica perchè la oscillazione delle  $f_s(x, y)$  non si annulla con  $\frac{1}{s}$  in un quadrato infinitesimo, di cui i lati sono paralleli agli assi e che contiene nel suo interno l'insieme  $\eta_s (s \geq 1)$ .

Un gruppo di funzioni  $\varphi(x, y)$  scelto dall'altro  $f_1(x, y)$  per modo, che due qualsivoglia non escano da uno stesso punto rispetto ad  $A - 0$  è in egual maniera continuo, quando formi lo spazio completo racchiuso da due funzioni  $l(x, y)$  ed  $m(x, y)$  della varietà  $f_1(x, y)$ .

Ed invero, se ciò non si verificasse, divisa l'area data in più parti mediante una rete di segmenti paralleli ad amendue gli assi, avverrebbe che in una di queste,  $c_1$ , ad esempio, il gruppo dato non sarebbe uniformemente continuo. Con la parte  $c_1$  si proceda come con la superficie  $A$  e così di seguito, e si tenderà ad un punto  $a$ , laddove  $\lim_{s \rightarrow \infty} c_s = a$ . L'elemento  $c_s$  è un rettangolo di cui i lati sono paralleli agli assi, che cade in  $A - 0$ , la qual cosa ha luogo, perchè si può segnare entro l'area data una linea  $D$  analoga all'altra  $C_A$  e sufficientemente vicina a quest'ultima in guisa, che in ciascun punto della parte di  $A$  limitata dai due elementi  $D$  e  $C_A$ , le funzioni  $l(x, y)$  ed  $m(x, y)$  abbiano una differenza piccola quanto si vuole.

È manifesto che tanto il limite superiore che l'inferiore della  $\varphi(x, y)$  viene raggiunto una sol volta in  $c_s$ , il primo nel vertice più discosto dall'origine, nel più vicino il secondo.

Ciò premesso, io posso assegnare un aggregato di funzioni

$$\varphi_s(x, y) \quad (s \geq 1),$$

appartenente all'altro  $\varphi(x, y)$  per modo, che la oscillazione della  $\varphi_s(x, y)$  non sia inferiore alla grandezza opportuna  $\sigma$  nel quadrato  $c_s (s \geq 1)$ . Sia  $(x_s, y_s)$  il punto della superficie  $c_s$  che è il più vicino all'origine ed  $(X_s, Y_s)$  il più discosto. Dall'insieme  $\varphi_s(x, y)$  si può levare l'altro  $\varphi_{s_u}(x, y)$  in guisa, che la quantità  $\varphi_{s_u}(x_{s_u}, y_{s_u})$  tenda ad un valore al crescere indefinito dell'intero  $u$ , laddove la stessa cosa ha luogo dell'altra  $\varphi_{s_u}(X_{s_u}, Y_{s_u})$ .

Chiamo  $h$  la posizione limite del punto  $[x_{s_u}, y_{s_u}, \varphi_{s_u}(x_{s_u}, y_{s_u})]$  e  $k$  quella dell'altro  $[X_{s_u}, Y_{s_u}, \varphi_{s_u}(X_{s_u}, Y_{s_u})]$  all'annullarsi del quoto  $\frac{1}{u}$ . Ne consegue che la funzione  $\varphi_{s_u}(x, y)$  si accosta oltre ogni dire con una sua parte al segmento  $hk$  parallelo all'asse  $Z$ , mentre la grandezza  $u$  cresce a dismisura.

Detto  $e$  un punto interno al tratto  $hk$ , faccio passare pel medesimo la sola funzione  $\varphi(x, y)$  del gruppo proposto che per dato lo contiene, la quale è quasi costante in un ciascun punto di un'area opportuna del piano  $z = 0$  racchiudente la proiezione del punto  $e$ . Da valore opportuno dell'intero  $u$  ciascuna funzione  $\varphi_{s_u+t}(x, y)$  ( $t \geq 0$ ) incontrerebbe di conseguenza l'altra  $\varphi(x, y)$  vicino al punto  $e$ , la qual cosa contrastando con l'ipotesi l'asserto è dimostrato.

Se  $\varphi(x, y)$  è un insieme che appartiene all'altro  $f_1(x, y)$  ed è disegualmente continuo, esiste in  $A$  almeno un punto  $a$  nelle estreme vicinanze del quale ogni funzione del gruppo  $\varphi(x, y)$  non è quasi costante.

Questa proposizione è una conseguenza della ricerca precedente, quando si osservi però che il punto di discontinuità può cadere anche sul contorno  $C_A$ .

Il numero dei punti  $a$ , di cui si fa parola nell'ultimo teorema, potrà essere limitato od illimitato, e nell'ultima ipotesi essi potranno esser disposti in svariate guise.

Ammesso prima che esista un solo punto  $a$  nell'interno della superficie  $A$ , costruisco un quadrato infinitesimo  $d_s$  ( $s \geq 1$ ) sempre decrescente, che abbia in esso il suo centro e di cui i lati sieno paralleli agli assi.

È chiaro che la espressione  $\varphi_s(x, y)$  è continua in egual maniera in  $A - d_1$ , ed ammette di conseguenza almeno una funzione limite  $l_1(x, y)$  nella medesima per modo, che sia  $\lim_{u \rightarrow \infty} \varphi_{t_u}(x, y) = l_1(x, y)$ , quando il simbolo  $\varphi_s(x, y)$  abbia il significato attribuitogli or ora. Se poi facciamo  $\varphi_{t_u}(x, y) = f_u^{(1)}(x, y)$ , si potrà torre dal gruppo  $f_u^{(1)}(x, y)$  l'altro  $f_u^{(2)}(x, y)$  ( $u \geq 1$ ) in guisa, che si abbia

$$\lim_{u \rightarrow \infty} f_u^{(2)}(x, y) = l_2(x, y),$$

nell'elemento  $A - d_2$ , e così di seguito indefinitamente. Nelle superfici  $A - d_1$ ,  $A - d_2$ ,  $A - d_3, \dots$  abbiamo per ordine

$$\begin{aligned} l_1(x, y) - l_2(x, y) &= 0, & l_2(x, y) - l_3(x, y) &= 0, \\ l_3(x, y) - l_4(x, y) &= 0, \dots \end{aligned}$$

In tal guisa si è fatto nascere una funzione  $L(x, y)$  nell'area  $A$ , la quale è ovunque definita, fatta astrazione dal punto  $a$ . Il valore assunto nell'elemento  $c$  diverso da  $a$  e sito nella superficie  $A - 0$  dalla espressione  $L(x, y)$  è quello della funzione  $l_{s+t}(x, y)$  ( $t \geq 0$ ), quando l'intero  $s$  sia scelto in guisa, che l'elemento  $c$  cada nell'area  $A - d_s$ .

Se  $(x_1, y_1)$  sono le coordinate del punto  $c$ , avremo

$$L(x_1 + \eta, y_1) - L(x_1, y_1) \geq 0, \quad L(x_1, y_1 + \eta) - L(x_1, y_1) \geq 0,$$

purchè la grandezza positiva  $\eta$  non ecceda un limite opportuno.

*Nell'elemento  $a$  la funzione  $L(x, y)$  è discontinua, nè in maniera da potersi rendere continua attribuendole in esso un valore conveniente.*

Ed invero, se la espressione  $L(x, y)$  avesse un'oscillazione nulla in  $a$ , io potrei determinare un quadrato  $d$  di centro  $a$  avente i lati paralleli agli assi e nel quale la  $L(x, y)$  sarebbe quasi costante. D'altra parte, la espressione  $f_v^{(s)}(x, y)$  ( $v \geq 1$ ) ha un'oscillazione maggiore di una grandezza assegnabile ed opportuna  $\sigma (> 0)$  in  $d$  da valore conveniente dell'intero  $v$ , qualunque sia il numero  $s$ . In altri termini, la differenza dei valori della espressione  $f_v^{(s)}(x, y)$  nei due vertici di  $d$ , il più lontano ed il più vicino all'origine, è più grande della quantità  $\sigma$ , quando l'intero  $v$  ecceda un certo limite. La oscillazione della funzione limite  $L(x, y)$  non è di conseguenza minore di  $\sigma$  nel quadrato  $d$ .

Percorro il perimetro del quadrato  $d_s$  ( $s \geq 1$ ) partendo dal punto  $a_s$  che si accosta all'origine delle coordinate più di ogni altro suo elemento. La funzione  $l_s(x, y)$  raggiunge nel punto  $a_s$  un valore  $A'_s$ , di cui il limite sia  $A'$  all'annullarsi del quoto  $\frac{1}{s}$ , e nel punto  $b_s$ , che maggiormente dista dall'origine, il valore  $B'_s$ , laddove si ha

$$\lim_{s=\infty} B'_s = B', \quad \text{essendo } A' - B' > 0.$$

Ciascuna delle grandezze  $A'_s$  e  $B'_s$  ha un limite soltanto pel modo di comportarsi della funzione  $L(x, y)$  nell'area  $A$ . Ne consegue che, se vado dall'elemento  $a_s$  all'altro  $b_s$  lungo  $C_{d_s}$ , otterrò una successione di valori mai decrescenti della funzione  $l_s(x, y)$ , la quale varia da un valore molto vicino ad  $A'$  ad un altro vicinissimo a  $B'$ , e l'approssimazione sarà tanto maggiore, quanto più grande è l'intero  $s$ . È poi superfluo l'osservare che posso recarmi lungo  $C_{d_s}$  dal punto  $a_s$  all'altro  $b_s$  seguendo due cammini.

Suppongo adesso che il punto  $a$  cada sopra il contorno  $C_A$  e, per fissare le idee, precisamente *nell'interno* della prima parte  $C_A^{(1)}$ , la quale di conseguenza non è nulla. In tale ipotesi è facile vedere che, se costruisco nella superficie  $A$  un quadrato infinitesimo  $d_s$  ( $s \geq 1$ ), di cui i lati sono paralleli agli assi e che abbia un vertice in  $a$ , la qual cosa è sempre possibile, la oscillazione della  $\varphi_s(x, y)$  nel medesimo non si annulla con  $s^{-1}$ .

Infatti, se l'asserto non fosse vero, la funzione  $\varphi_s(x, y)$  ( $s \geq 1$ ) sarebbe quasi costante nel triangolo non di necessità mistilineo  $bd f$ , essendo  $db$  e  $df$  dei tratti paralleli per ordine  $a$  all'asse  $Y$  ed  $X$ , e  $bd f$  una parte della curva  $C_A^{(1)}$ , che contiene nel suo interno il punto  $a$ , come assai facilmente si avverte. Questo fatto però non può avverarsi, l'asserto è dunque vero.

Si ragiona in modo analogo se il punto  $a$ , pur cadendo sulla curva  $C_A$ , fosse nell'interno di una delle linee  $C_A^{(2)}, C_A^{(3)}, C_A^{(4)}$ . Il quadrato però non potrà costruirsi quando l'elemento  $a$  cade, a mo' d'esempio, in  $\alpha$ , laddove  $\alpha = 0$ . Se tolgo però in questo caso dall'area  $A$  una parte infinitesima  $t_s$  ( $s \geq 1, t_s > t_{s+1}$ ) insieme al suo contorno, la quale contenga in quest'ultimo un pezzo di  $C_A$  avente nel suo interno il punto  $a$ , potrò, giovandomi di ragionamenti analoghi a quelli fatti or ora, dar origine ad una funzione ovunque continua in  $A$ , tolto il punto  $a$ .

5. Mi propongo ora di costruire una varietà di funzioni dotate di un numero illimitato di punti  $a$  disposti lungo una curva tracciata in  $A - 0$ .

Fissati i valori che devono venir raggiunti dalla espressione da costruirsi lungo  $C_A$ , considero nella superficie  $A - 0$  un ramo sempre crescente  $l_1$ , che va dal punto  $m$  all'altro  $n$ . Faccio quindi corrispondere l'arco  $l_1$  ad un tratto  $m_1 n_1$  della parte  $\overline{QP} - 0$  di  $C_A$ , che abbia il suo termine superiore più discosto dall'asse  $X$  che non l'omonimo dell'elemento  $l_1$ , laddove la stessa cosa si verifica rispetto agli estremi inferiori. La corrispondenza viene fatta in maniera, che due elementi in  $l_1$  ed  $m_1 n_1$ , che si fanno riscontro, possano considerarsi come i termini di una linea sempre decrescente all'aumentare dell'ascissa. Ripeto poi la stessa cosa coll'intervallo  $m_2 n_2$  della parte  $QP$  del contorno  $C_A$  nell'ipotesi che i suoi estremi sieno più vicini all'asse  $X$  che non gli omonimi dell'insieme  $l_1$ . Il riscontro viene fatto in guisa, che a due punti corrispondenti  $h, k$  sopra gli archi  $m_1 n_1$ , ed  $m_2 n_2$  si riferisca lo stesso elemento  $t$  sopra  $l_1$ . Adunque, tre punti  $h, t$  e  $k$  possono considerarsi come appartenenti ad una stessa linea sempre decrescente di un sistema  $P_1$  di enti che diminuiscono ognora all'aumentare dell'ascissa, laddove due dei medesimi non si incontrano. Il luogo degli elementi della varietà  $P_1$  sia poi un'area  $B$  limitata dai tratti  $m_1 n_1, m_2 n_2$  e da due linee che decrescono ognora e passano pei punti  $n_1, n, n_2; m_1, m, m_2$  per ordine.

Ciò premesso, traccio alla destra di  $l_1$  una curva  $mn$  (\*), la quale cresca sempre e congiunga il punto  $m$  all'altro  $n$  incontrando una sola volta ogni

(\*) Il Lettore abbia la compiacenza di farsi la figura.

linea del gruppo  $P_1$ , il che si ammette come possibile, laddove essa determina insieme ad  $l_t$  una parte di  $A$ , che dirò  $C$ . Sia poi  $l_t (t \geq 2)$  un arco dotato delle stesse proprietà del precedente  $mn$  sito in  $C$  e tale, che si abbia  $\lim_{t \rightarrow \infty} l_t = mn$ . L'insieme  $l_t$  cada alla sinistra della curva  $mn$  e la linea  $l_{t+1} (t \geq 2)$  alla destra dell'altra  $l_t$ , ben si intende fatta astrazione dai punti  $m$  ed  $n$ . Dico poi  $(a)_t$  la corrispondenza univoca che nasce tra gli enti  $l_t (t \geq 1)$  mediante il sistema  $P_1$  nella fatta ipotesi, che ogni elemento di quest'ultimo incontri una sola volta ciascuna linea  $l_t (t \geq 1)$ .

Costruisco quindi nell'interno dell'area  $B$  un'altra successione di linee sempre decrescenti  $Q_t$  in guisa, che per ogni suo punto ne esca una soltanto, la quale congiunga due punti corrispondenti degli archi  $m_1 n_1$  ed  $m_2 n_2$ . Ogni elemento del gruppo  $Q_t$  cada sopra quello della varietà  $P_1$ , che ha gli stessi estremi, tolti questi ultimi. Dico poi  $(b)_t$  il riscontro univoco che nasce mediante l'aggregato  $Q_t$  sulle due linee  $l_t$  ed  $mn$ , supposto che ogni elemento di quest'ultimo incontri una sola volta ciascuna linea  $l_t (t \geq 1)$ , nonchè la curva  $mn$ .

Formo ora nella parte di  $A$  che sovrasta all'area  $B$  una funzione  $\varphi_1(x, y)$  sempre crescente, la quale raggiunga i valori dati lungo  $C_A$ , e procedo in maniera analoga nel pezzo di  $A$  che sta sotto all'elemento  $B$  formando la  $\varphi_2(x, y)$ . Costruisco poi altre due funzioni  $v_t(x, y) (t \geq 1)$  ed  $u(x, y)$  ognora crescenti, di cui la prima dipenda dai punti della parte  $C_t$  di  $B$ , che sta alla sinistra della linea  $l_t$ , e nasca mercè quella parte del sistema  $Q_t$ , che appartiene alla superficie  $C_t (t \geq 1)$ , laddove l'altra si riferisca ai punti del pezzo di  $B$  che sta alla destra della linea  $mn$  e debba la sua origine al gruppo  $P_1$ . Formo per ultimo nell'area  $C^{(t)} (t \geq 1)$  limitata dalle linee  $l_t$  ed  $mn$  una funzione  $h_t(x, y) (t \geq 1)$  ognora crescente mediante un sistema di linee, che vanno dai punti sopra  $l_t$  determinati dal riscontro  $(b)_t$  ai corrispondenti sopra  $mn$  ottenuti mediante l'altro  $(a)_t$ . Sono corrispondenti quei punti che nascono mediante due linee dei gruppi  $P_1$  e  $Q_t$  dotate degli stessi estremi.

L'insieme delle cinque funzioni

$$\varphi_1(x, y), \quad \varphi_2(x, y), \quad v_t(x, y), \quad u(x, y) \quad \text{ed} \quad h_t(x, y),$$

dà origine ad una sola funzione  ${}^{(t)}f(x, y)$  ognora crescente nell'area  $A$ , la quale raggiunge i valori assegnati lungo  $C_A$ .

È poi manifesto che la varietà  $\lim_{t \rightarrow \infty} {}^{(t)}f(x, y) = L(x, y)$  è egualmente continua nell'area  $A$ , tolta la linea  $\overline{m+0} \overline{n-0}$ , e tale, che si ha

$$L(x_1 + \eta, y_1) > L(x_1, y_1) \quad L(x_1, y_1 + \eta) > L(x_1, y_1),$$

quando la grandezza positiva  $\eta$  non ecceda un limite opportuno ed il punto  $(x_1, y_1)$  non cada sull'elemento  $\overline{m+0} \overline{n-0}$ , nel quale la funzione  $L(x, y)$  non è definita.

6. Essendo di nuovo  $A$  un'area il cui contorno  $C_A$  viene incontrato in soli due punti da una retta qualsivoglia parallela ad uno degli assi ed uscente da un suo punto interno, mi propongo di costruire una funzione sempre crescente in  $A$ , la quale vari ognora con l'arco  $s$  lungo  $C_A$ , nè abbia infiniti massimi e minimi lungo il contorno.

In questo caso giova il metodo seguente.

Traccio per ciascuno dei termini dei segmenti  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  una parallela all'asse  $X$  ed aggiungo quindi a queste rette un numero assegnabile, del resto arbitrario, di altre parallele allo stesso asse in guisa, che ognuna tagli la curva  $C_A$ . Mercè queste rette la superficie  $A$  risulta divisa in un numero limitato  $m$  di aree, che per ordine dico  $B_1, B_2, \dots, B_m$  ( $m \geq 1$ ) dal basso all'alto, ciascuna delle quali viene incontrata in soli due punti da una parallela ad uno degli assi per un suo punto interno.

Ciò premesso, io posso costruire nella superficie  $B_1$  una funzione sempre crescente, la quale non raggiunga più di due volte uno stesso valore lungo  $C_{B_1}$ . Analogamente faccio in  $B_2$ , rammentando che lungo il tratto che separa  $B_1$  da  $B_2$  la funzione dei punti di  $B_2$  deve assumere dei valori già fissati. Procedendo nella guisa indicata si risolve il problema proposto.

Si voglia ora costruire una funzione  $f_1(x, y)$  nella solita area  $A$ , la quale sia sempre crescente e raggiunga lungo  $C_A$  una successione continua di valori  $f(s)$ , scevra da infiniti massimi e minimi, ma dotata di un numero limitato di tratti in cui non muta. Questo caso si tratta come il precedente, purchè si facciano uscire delle parallele all'asse  $X$  anche pei termini di quei tratti della linea  $C_A$ , in ognuno dei quali la  $f(s)$  non dee variare. È poi superfluo l'avvertire che i segmenti in parola devono cadere sulla curva  $C_A^{(1)} + C_A^{(2)}$ .

(Continua.)

FINE DEL TOMO XIX.° (SERIE II.ª).