ANNALI

DI

MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

GIÀ DIRETTI DA

Francesco Brioschi

e continuati dai professori:

Luigi Bianchi *in Pisa*
Ulisse Dini *in Pisa*
Giuseppe Jung *in Milano*
Corrado Segre *in Torino*

SERIE III.^{a} – TOMO XII.^{o}

MILANO,

TIPO-LITOGRAFIA REBESCHINI DI TURATI E C.

1906.

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NEL TOMO XII.° (SERIE III.ª)

Sopra una delle esperienze del Plateau.

(*Di* E. Almansi, *a Genova.*)

1. Il Plateau, in una delle sue celebri esperienze, esamina le configurazioni d'equilibrio di una goccia d'olio, immersa in un liquido di ugual densità (acqua ed alcool, in proporzioni convenienti) e appoggiata a dei sostegni rigidi fissi.

Sia W il potenziale delle forze agenti sull'intero sistema (forze di gravità e forze capillari). Condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio sarà che per ogni deformazione infinitesima della massa liquida, il differenziale di W sia nullo o positivo.

Se per una data configurazione d'equilibrio W è minimo, l'equilibrio è stabile.

Limitando il nostro studio alle configurazioni d'equilibrio della goccia d'olio, possiamo supporre di mantenere inalterata la superficie libera dell'intera massa liquida. Allora quella parte di W che è dovuta alle forze di gravità si mantiene costante: potremo quindi considerare W come il potenziale delle sole forze capillari. Esso è dato dalla formula:

$$W = m\sigma - n\tau \tag{1}$$

ove σ e τ denotano, rispettivamente, le superficie di separazione della goccia d'olio col liquido circostante, e coi sostegni: m ed n sono delle costanti. La costante m è positiva.

In particolare il Plateau esamina il caso che i sostegni siano costituiti da due dischi circolari, di ugual raggio, orizzontali, e con i loro centri situati sopra una retta verticale.

Diciamo H la distanza fra i due dischi, R il loro raggio.

Una configurazione d'equilibrio si presenta quando la goccia d'olio abbia la forma di un cilindro di raggio R, colle basi a contatto coi dischi.

In tal caso il PLATEAU ha osservato che *l'equilibrio è stabile o instabile secondochè H è minore o maggiore di $2\pi R$.*

Questo fatto, constatato sperimentalmente, è in relazione col seguente Teorema:

« L'area di una superficie cilindrica σ, limitata da due circonferenze di raggio R, situate in piani normali alla retta che congiunge i loro centri, è minima rispetto all'area di tutte le superficie σ', infinitamente vicine, che passano per le stesse circonferenze, e racchiudono, insieme ai cerchi di base, lo stesso volume, *purchè la distanza H fra i due cerchi sia minore di $2\pi R$.* Se H è maggiore di $2\pi R$, esistono delle superficie σ' aventi un'area minore di σ. »

In questa Nota io do una dimostrazione del teorema enunciato. Dimostro poi un altro teorema, più generale. Valendomi di questo secondo teorema, faccio vedere che quando H è minore di $2\pi R$ la variazione del potenziale W è positiva per qualunque deformazione infinitesima data alla goccia d'olio: mentre se H è minore di $2\pi R$, può esser negativa.

La questione di cui mi occupo era già stata esaminata dallo stesso PLATEAU, dal MATHIEU e dal POINCARÉ, ma non, a mio parere, in modo esauriente. Il POINCARÉ (*Capillarité*, p. 102) si limita a considerare quelle deformazioni infinitesime per le quali varia la superficie di separazione σ della colonna d'olio col liquido circostante, ma non la superficie di contatto τ della colonna d'olio coi sostegni. Con questa limitazione il potenziale W assume la forma $m\sigma + \text{cost.}$, e la sua variazione, a meno del fattore positivo m, è uguale alla variazione di σ. Posta così la questione, è sufficiente a risolverla il teorema sopra enunciato. Di questo teorema il POINCARÉ dà infatti una dimostrazione (affatto diversa da quella che io do in questa Nota). Ma col supporre invariabile la superficie τ si viene, in sostanza, ad introdurre un nuovo vincolo, ciò che non apparisce giustificato.

Tenendo conto anche di quelle deformazioni per le quali varia la superficie τ, si è condotti ad imporre dei limiti al valore della costante n che figura nell'espressione di W: essa deve esser compresa fra 0 ed m. Questa condizione porta come conseguenza che, in generale, se è possibile l'equilibrio di una colonna cilindrica, costituita di un certo liquido L, immersa in un liquido L', non è possibile, inversamente, l'equilibrio di una colonna costituita del liquido L', immersa nel liquido L.

2. Diamo una dimostrazione del Teorema enunciato nel paragrafo precedente.

Sieno AB, CD (Fig. I) le due circonferenze di raggio R che limitano la superficie cilindrica σ. Consideriamo poi una superficie σ', infinit.te vicina a σ, limitata dalle stesse circonferenze, e che racchiuda, come σ, un volume uguale a $\pi R^2 H$.

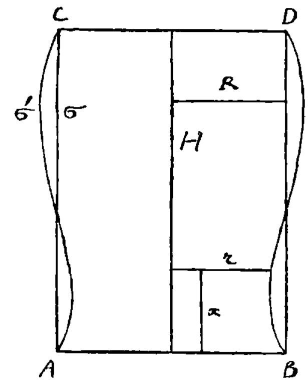

Fig. I

Possiamo supporre che σ' sia una superficie di rivoluzione, giacchè l'area di una tal superficie è minore, come osserva il Poincaré, dell'area di qualunque altra superficie le cui sezioni parallele alle basi siano uguali alle sezioni corrispondenti della superficie di rivoluzione.

Una superficie σ' di rivoluzione possiamo individuarla in questo modo: detto r il raggio della sezione di σ' che dista di x dal cerchio AB, poniamo

$$r^2 = R^2(1+u), \tag{2}$$

ove u è una funzione della variabile x, definita fra $x=0$ ed $x=H$. Ad ogni funzione u corrisponde una superficie σ'.

La superficie σ' deve passare per i due circoli AB, CD; dunque per $x=0$ ed $x=H$ deve essere $r=R$, quindi $u=0$.

Inoltre la superficie σ' deve racchiudere insieme ai due cerchi un volume uguale a quello racchiuso dalla superficie σ, vale a dire deve essere:

$$\int_0^H \pi r^2 \, dx = \pi R^2 H,$$

e sostituendo ad r^2 il suo valore

$$\int_0^H u \, dx = 0. \tag{3}$$

Noi supporremo che la u, oltre che della x, sia funzione di un parametro t, e che col tendere di t a zero, u tende *uniformemente* a zero.

Per la natura stessa del problema la u deve essere una funzione continua della x. Ammetteremo che anche la sua derivata $\frac{du}{dx}$ sia una funzione continua della x, e col tendere di t a zero tenda uniformemente a zero. Questa limitazione è pienamente giustificata dal fatto che, a rigore, basterebbe (come fa il POINCARÉ) confrontare la superficie σ colle superficie di rivoluzione a curvatura costante: classe ben nota di superficie per le quali si riconosce facilmente che la condizione relativa a $\frac{du}{dx}$ è soddisfatta. Però, la considerazione di questa sola classe di superficie σ' non apporterebbe nessuna semplificazione nei nostri calcoli.

Si tratta di dimostrare che quando H è minore di $2\pi R$, qualunque sia la funzione $u(x, t)$, purchè soddisfi le condizioni poste, si può trovare un numero t_0 tale che per ogni valore di t compreso fra 0 e t_0 (0 escluso) sia $\sigma' > \sigma$; mentre se H è maggiore di $2\pi R$, σ' può conservarsi sempre minore di σ.

3. Cerchiamo un'espressione della superficie σ'.

Detto dl un elemento della linea AC che rotando genera la superficie σ', avremo

$$dl = \left\{1 + \left(\frac{dr}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} dx,$$

quindi:

$$\sigma' = \int_0^H 2\pi r\, dl = 2\pi \int_0^H r \left\{1 + \left(\frac{dr}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} dx =$$

$$= 2\pi \int_0^H \left\{r^2 + \left(\frac{1}{2}\frac{dr^2}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} dx;$$

e per la formula (2):

$$\sigma' = 2\pi \int_0^H \left\{R^2(1+u) + \left(\frac{R^2}{2}\frac{du}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} dx,$$

ovvero:

$$\sigma' = 2\pi R \int_0^H \left\{1 + u + \left(\frac{R}{2}\frac{du}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} dx. \tag{4}$$

Introduco la variabile:

$$\theta = \frac{2\pi}{H} x.$$

Potrò allora, per ogni valore del parametro t, considerare la u come una funzione di θ definita fra $\theta = 0$ e $\theta = 2\pi$. Per $\theta = 0$ e $\theta = 2\pi$ sarà $u = 0$. Sarà poi $d x = \frac{H}{2\pi} d\theta$; onde la formula (3) diventerà

$$\int_0^{2\pi} u \, d\theta = 0,$$

e la (4):

$$\sigma' = R H \int_0^{2\pi} \left\{ 1 + u + \left(\frac{\pi R}{H} \frac{d u}{d \theta} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} d\theta.$$

Più semplicemente, ponendo

$$q = \left(\frac{\pi R}{H} \frac{d u}{d \theta} \right)^2, \tag{5}$$

scriveremo:

$$\sigma' = R H \int_0^{2\pi} \left\{ 1 + u + q \right\}^{\frac{1}{2}} d\theta. \tag{6}$$

Col tendere di t a zero, $\frac{d u}{d \theta}$, che è uguale ad $\frac{H}{2\pi} \frac{d u}{d x}$, tende uniformemente a zero, come $\frac{d u}{d x}$: lo stesso avverrà di q, ed anche di $u + q$.

Ora osserviamo che

$$(1 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \varepsilon - \frac{1}{8} \varepsilon^2 (1 + \varepsilon'),$$

ove ε' tende a zero con ε. Perciò potremo scrivere:

$$\left\{ 1 + u + q \right\}^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} (u + q) - \frac{1}{8} (u + q)^2 (1 + \varepsilon')$$

ove ε' sarà una funzione di θ e t che col tendere di t a zero tende uniformemente a zero.

Sviluppando $(u+q)^2$, e ponendo, per semplicità,

$$\varepsilon''=-\left(\frac{1}{4}q+\frac{1}{2}u\right)(1+\varepsilon'),$$

avremo:

$$\{1+u+q\}^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}u-\frac{1}{8}u^2(1+\varepsilon')+\frac{1}{2}q(1+\varepsilon'').$$

Anche ε'' tende uniformemente a zero con t.

Sostituisco nella formula (6):

$$\sigma'=RH\int_0^{2\pi}\left\{1+\frac{1}{2}u-\frac{1}{8}u^2(1+\varepsilon')+\frac{1}{2}q(1+\varepsilon'')\right\}d\theta.$$

Ma $RH\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi RH=\sigma$, $\int_0^{2\pi}u\,d\theta=0$. Dunque:

$$\sigma'=\sigma+\frac{RH}{8}\left\{4\int_0^{2\pi}(1+\varepsilon'')q\,d\theta-\int_0^{2\pi}(1+\varepsilon')u^2\,d\theta\right\}.$$

Osservando che q ed u^2 sono quantità sempre positive o nulle, potremo scrivere:

$$\sigma'=\sigma+\frac{RH}{8}\left\{4(1+e')\int_0^{2\pi}q\,d\theta-(1+e'')\int_0^{2\pi}u^2\,d\theta\right\},$$

ove e' ed e'' rappresenteranno dei valori medii di ε'' ed ε' fra 0 e 2π: saranno perciò funzioni del solo parametro t, che tendono a zero con t.

Ora torniamo a sostituire a q il suo valore dato dalla formula (5). Avremo:

$$\sigma'=\sigma+\frac{RH}{8}\left\{(1+e')\left(\frac{2\pi R}{H}\right)^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2d\theta-(1+e'')\int_0^{2\pi}u^2d\theta\right\}. \tag{7}$$

È questa l'espressione di σ' che volevamo stabilire.

4. Prima di andar più oltre esaminiamo un caso particolare. Sia $u=t\,\mathrm{sen}\,\theta$. Si riconosce immediatamente che questa funzione $u(\theta,t)$ sod-

disfa a tutte le condizioni volute: infatti $u(0)=0$, $u(2\pi)=0$, $\int_0^{2\pi} u\,d\theta=0$, inoltre u e $\frac{du}{d\theta}$ sono continue, e tendono uniformemente a zero con t.

La formula (7), osservando che i due integrali del secondo membro sono, in questo caso, uguali a πt^2, diventerà:

$$\sigma' = \sigma + \frac{\pi R H t^2}{8} \left\{ (1 + e) \left(\frac{2\pi R}{H} \right)^2 - (1 + e'') \right\}.$$

Poichè e' ed e'' tendono a zero con t, la quantità entro le grandi parentesi tenderà al valore $\left(\frac{2\pi R}{H}\right)^2 - 1$: dunque, per t abbastanza piccolo, sarà $\sigma' \gtrless \sigma$ secondochè H è minore o maggiore di $2\pi R$.

Così intanto vediamo che quando H è maggiore di $2\pi R$, σ' può tendere verso σ conservando, per valori abbastanza piccoli di t, un'area minore dell'area di σ.

5. Dopo ciò ritorniamo al caso generale.

La funzione $u(\theta, t)$, per un determinato valore del parametro t, sarà una certa funzione $U(\theta)$, definita tra 0 e 2π, che soddisfa a queste condizioni:

1) è finita e continua insieme alla sua derivata $\frac{dU}{d\theta}$,

2) si annulla per $\theta=0$ e $\theta=2\pi$,

3) verifica l'equazione $\int_0^{2\pi} U\,d\theta = 0$.

Supponiamo di saper dimostrare che per qualunque funzione di tal natura si ha:

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{dU}{d\theta}\right)^2 d\theta \geqq \int_0^{2\pi} U^2\, d\theta. \tag{8}$$

Sarà, per tutti i valori di t:

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 d\theta \geqq \int_0^{2\pi} u^2\, d\theta. \tag{9}$$

Se dunque H è minore di $2\pi R$, esisterà un numero t_0 così piccolo, che per qualunque valore di t compreso fra 0 e t_0 la quantità racchiusa dalle grandi parentesi, nella formula (7), sia positiva. Sarà allora $\sigma' > \sigma$.

La questione, come si vede, è ridotta a dimostrare la formula (8).

6. Supponiamo da prima che la funzione U sia rappresentata da una serie finita di Fourier: sia cioè:

$$U = \sum_1^N \{ a_n \operatorname{sen}(n\theta) + b_n \cos(n\theta) \}$$

ove N è un numero intero e positivo, a_n e b_n ($n = 1, 2, \ldots, N$) sono delle costanti. Ho tralasciato il termine costante, dovendo essere $\int_0^{2\pi} U\, d\theta = 0$. Affinchè per $\theta = 0$ ed $\theta = 2\pi$ sia $U = 0$, basta supporre $\sum_0^N b_n = 0$: ma di questa condizione non occorrerà tener conto.

Dalla formula precedente si ha:

$$U^2 = \sum_1^N \{ a_n^2 \operatorname{sen}^2(n\theta) + b_n^2 \cos^2(n\theta) \} + \Sigma\, T$$

ove $\Sigma\, T$ rappresenta una somma di termini, ciascuno dei quali, per proprietà ben note, verifica l'equazione:

$$\int_0^{2\pi} T\, d\theta = 0.$$

Essendo poi

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(n\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2(n\theta)\, d\theta = \pi,$$

sarà

$$\int_0^{2\pi} U^2\, d\theta = \pi \sum_1^N (a_n^2 + b_n^2).$$

Calcolando $\frac{dU}{d\theta}$ si troverà analogamente

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{dU}{d\theta}\right)^2 d\theta = \pi \sum_1^N n^2 (a_n^2 + b_n^2),$$

Dal confronto di questa formula colla precedente, la (8), per la classe speciale, ma pur vastissima, di funzioni U che consideriamo, resulta senz'altro verificata.

7. Sia ora U una funzione qualunque che soddisfi alle condizioni 1), 2), 3). Inoltre supponiamo che la sua derivata $\frac{dU}{d\theta}$ assuma gli stessi valori per $\theta = 0$ e $\theta = 2\pi$.

Allora, per un Teorema di Analisi dovuto al Picard (*), potremo rappresentare la funzione $\frac{dU}{d\theta}$ con $U' + \lambda$, ove U' è una serie finita del Fourier, e λ una funzione di θ, la quale, prendendo abbastanza grande il numero di termini di U', può rendersi, in tutto l'intervallo fra 0 e 2π, minore, in valore assoluto, di un numero assegnato, piccolo ad arbitrio.

Evidentemente potremo porre $U' = \frac{dU_1}{d\theta} + c$, c essendo il termine costante di U', ed U_1 un'altra serie finita del Fourier, il cui termine costante si può supporre nullo. Avremo perciò

$$\frac{dU}{d\theta} = \frac{dU_1}{d\theta} + c + \lambda.$$

Moltiplico per $d\theta$ e integro fra 0 e 2π. Poichè $U(2\pi) = U(0)$, $U_1(2\pi) = U_1(0)$, otterrò, risolvendo rispetto a c:

$$c = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lambda\, d\theta.$$

Questa formula mostra che la costante c può rendersi, in valore assoluto, piccola ad arbitrio. Pongasi allora $c + \lambda = \mu$: avremo:

$$\frac{dU}{d\theta} = \frac{dU_1}{d\theta} + \mu, \tag{10}$$

ove μ è una funzione che potremo rendere, in valore assoluto, piccola ad arbitrio, in tutto l'intervallo fra 0 e 2π

(*) *Traité d'Analyse*, Tome I, p. 257.

Integrando fra 0 e θ si ottiene:

$$U = U_1 + \mu_1 + c_1,$$

ove $\mu_1 = \int_0^\theta \mu \, d\theta$ e c_1 è una nuova costante.

Poichè $\int_0^{2\pi} U \, d\theta = \int_0^{2\pi} U_1 \, d\theta = 0$, dovrà essere $c_1 = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu_1 \, d\theta$. Ponendo $\mu_1 + c_1 = \nu$, avremo:

$$U = U_1 + \nu \tag{11}$$

ove ν è una funzione che al pari di μ e μ_1 si può rendere, in valore assoluto, piccola ad arbitrio, in tutto l'intervallo fra 0 e 2π.

Dalle formole (10) e (11) si riconosce che i due integrali $\int_0^{2\pi} U_1^2 \, d\theta$, $\int_0^{2\pi} \left(\frac{dU_1}{d\theta}\right)^2 d\theta$ si possono far differire di tanto poco quanto si vuole dagl'integrali analoghi formati colla funzione U. Ma per la funzione U_1, che è una serie finita del Fourier senza termine costante, vale una formula analoga alla (8): dunque per la funzione U varrà la formula (8).

8. Ora, finalmente, sia U una funzione che soddisfi alle sole condizioni 1), 2), 3): la sua derivata $\frac{dU}{d\theta}$ non assumerà, in generale, valori uguali, per $\theta = 0$ e $\theta = 2\pi$.

È facile vedere che si può sempre costruire una funzione U' che soddisfi, come la U, alle condizioni 1), 2), 3), la cui derivata $\frac{dU'}{d\theta}$ assuma valori uguali per $\theta = 0$ e $\theta = 2\pi$, e sia tale che i due integrali $\int_0^{2\pi} U'^2 \, d\theta$, $\int_0^{2\pi} \left(\frac{dU'}{d\theta}\right)^2 d\theta$ differiscano di tanto poco quanto si vuole dagl'integrali analoghi formati colla funzione U. Ma per la funzione U' vale una formula analoga alla (8) (§ 7): questa formula dovrà dunque essere verificata anche dalla funzione U.

Il Teorema pertanto è dimostrato.

9. Si noti che nei paragrafi precedenti non abbiamo tenuto conto della condizione $U(0) = 0$, $U(2\pi) = 0$, ma solo della condizione meno restrittiva $U(0) = U(2\pi)$, la quale potrà perciò esser sostituita alla 2).

Così la formola (9) varrà quand'anche $u(0)$ e $u(2\pi)$ non siano uguali a zero, purchè, per qnalunque valore di t, siano uguali tra loro.

Ciò porta come conseguenza che il teorema dimostrato ($\sigma' < \sigma$, se $H < 2\pi R$) sussiste anche se, col variare di t, le sezioni estreme di σ' variano, purchè l'area dell'una sia sempre uguale all'area dell'altra.

Se però le due aree non sono uguali tra loro, potrà accadere che, pur essendo $H < 2\pi R$, la superficie σ', col tendere di t a zero, si conservi sempre minore di σ.

Consideriamo infatti una speciale superficie σ', di rivoluzione, definita dalla formula $r^2 = R^2(1+u)$ (§ 2), ove

$$u = t\left\{-\pi\cos\theta + \theta - \pi\right\}.$$

La condizione $\int_0^{2\pi} u\,d\theta$ è soddisfatta: dunque il volume racchiuso da questa superficie è sempre uguale a $\pi R^2 H$. Ma le due sezioni estreme non sono uguali: infatti per $\theta = 0$ abbiamo $u = -2\pi t$, quindi $\pi r^2 = \pi R^2(1 - 2\pi t)$; per $\theta = 2\pi$, $u = 0$ e $\pi r^2 = \pi R^2$. Le due aree differiscono di $2\pi^2 R^2 t$.

La formula (7) sussiste indipendentemente dai valori che assume u per $\theta = 0$ e $\theta = 2\pi$. Calcolando i due integrali che vi figurano, troveremo:

$$\int_0^{2\pi} u^2\,d\theta = \left(\pi + \frac{2}{3}\pi^3\right)t^2, \quad \int_0^{2u}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 d\theta = 3\pi t^2;$$

quindi:

$$\sigma' = \sigma + \frac{\pi R H t^2}{8}\left\{3(1+e')\left(\frac{2\pi R}{H}\right)^2 - \left(1 + \frac{2}{3}\pi^2\right)(1+e'')\right\}. \qquad (12)$$

La quantità entro le grandi parentesi, col tendere di t, e per conseguenza di e' ed e'', a zero, tende al valore

$$3\left(\frac{2\pi R}{H}\right)^2 - \left(1 + \frac{2}{3}\pi^2\right),$$

che può esser negativo se H è minore di $2\pi R$, giacchè $1 + \frac{2}{3}\pi^2$ è maggiore di 3.

In tal caso, per t abbastanza piccolo, σ' è minore di σ.

Qualunque sia il valore del rapporto $\frac{H}{2\pi R}$, la formula (12), indicando con a la differenza $2\pi^2 R^2 t$ fra le sezioni estreme di σ', si potrà scrivere:

$$\sigma' - \sigma = Q a^2,$$

ove Q è una quantità che si conserva sempre finita.

Più avanti ci sarà utile questo resultato.

10. Noi vogliamo ora dimostrare un teorema più generale di quello di cui abbiamo dato la dimostrazione nei §§ 2-8: un teorema, cioè, relativo ad una superficie qualunque σ', limitata da due piani paralleli X, Y, (Fig. 2), la quale, col tendere a zero di un parametro t, tenda verso la superficie cilindrica σ di raggio R, limitata dagli stessi piani, togliendo le condizioni che le sue sezioni estreme siano uguali tra loro, e che essa racchiuda un volume uguale a πR^2.

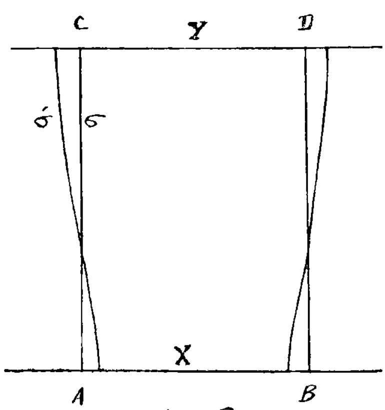

Fig. 2

La distanza H fra i due piani X, Y sia minore di $2\pi R$.

Il nostro scopo è quello di stabilire un limite inferiore di σ', tenendo conto del volume che essa racchiude, e della differenza fra l'area delle sezioni estreme. Perciò potremo supporre che σ' sia una superficie di rivoluzione (§ 2).

Sia $\pi R'^2 H$ il volume racchiuso da σ', R' denotando una quantità che col tendere di t a zero tende verso R.

Invece della formula (2) si potrà scrivere:

$$r^2 = R'^2 (1 + v) \tag{13}$$

v essendo una funzione di θ e di t che tende uniformemente a zero con t, insieme alla sua derivata $\frac{dv}{d\theta}$, e soddisfa alla equazione $\int_0^{2\pi} v \, d\theta = 0$, ma può non assumere valori uguali per $\theta = 0$ e $\theta = 2\pi$.

Invece della formula (7), ove σ vale $2\pi R H$, avremo:

$$\left.\begin{aligned}\sigma' = 2\pi R' H + \\ + \frac{R' H}{8}\left\{(1+e')\left(\frac{2\pi R'}{H}\right)^2 \int_0^{2\pi}\left(\frac{dv}{d\theta}\right)^2 d\theta - (1+e'')\int_0^{2\pi} v^2\, d\theta\right\}.\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Siano S_1 ed S_2 le sezioni estreme della superficie σ', vale a dire, per la formula (13):

$$S_1 = \pi R^2 \{1 + v(0)\}, \quad S_2 = \pi R'^2 \{1 + v(2\pi)\}.$$

Poniamo

$$a = S_2 - S_1,$$

ovvero

$$a = \pi R'^2 \{v(2\pi) - v(0)\}.$$

La quantità a tende a zero con t.

Consideriamo la nuova funzione di θ e t:

$$u = v - \frac{a}{2\pi^2 R'^2}(\theta - \pi).$$

Essa soddisfa la condizione $\int_0^{2\pi} u\, d\theta = 0$, ed assume valori uguali per $\theta = 0$ e $\theta = 2\pi$.

Sostituendo, nella formula (14), $u + \frac{a}{2\pi^2 R'^2}(\theta - \pi)$ a v, e $\frac{du}{d\theta} + \frac{a}{2\pi^2 R'^2}$ a $\frac{dv}{d\theta}$, otterremo:

$$\sigma' = 2\pi R' H + \frac{R' H}{8}\left\{(1+e')\left(\frac{2\pi R'}{H}\right)^2 \int_0^{2\pi}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 d\theta - (1+e'')\int_0^{2\pi} u^2\, d\theta\right\} + g\, a,$$

ove g è la somma di più termini che contengono come fattori quantità infinitesime, e quindi tende a zero con t.

Se H è minore di $2\pi R$, per t abbastanza piccolo sarà anche minore di $2\pi R'$, giacchè R' tende verso R. Inoltre il primo dei due integrali che figurano nella formula precedente è maggiore del secondo od uguale (formula (9)). Sarà dunque, per t abbastanza piccolo:

$$\sigma' > 2\pi R' H + g\, a,$$

ovvero:

$$\sigma' - \sigma > 2\pi H(R' - R) + g\,a \qquad (\sigma = 2\pi R H).$$

Ma $2\pi H(R' - R) = \frac{2}{R + R'} \{\pi R'^2 H - \pi R^2 H\} = -G\,w$, w rappresentando la differenza $\pi R^2 H - \pi R'^2 H$ fra il volume racchiuso dalla superficie σ, e quello racchiuso dalla superficie σ', e G una quantità sempre finita. Avremo perciò

$$\sigma' - \sigma > -G\,w + g\,a. \tag{15}$$

Questa formula esprime il teorema che volevamo dimostrare.

11. Torniamo ora a considerare la goccia d'olio in equilibrio sotto la forma di una colonna cilindrica d'altezza H, limitata dai bordi AB, CD dei due dischi di raggio R (Fig. 3).

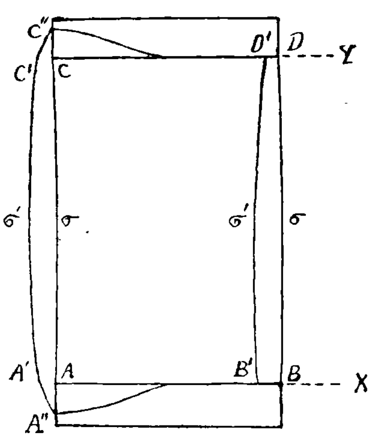

Fig. III

Diamole una deformazione infinitesima, in modo che essa lasci scoperta complessivamente una certa porzione α $(BB' + DD')$ dei cerchi AB, CD, e venga a coprire una porzione γ $(AA'' + CC'')$ della superficie laterale dei dischi.

Indichiamo con $\sigma' + \lambda$ la nuova superficie di separazione fra l'olio e il liquido circostante, intendendo che σ' rappresenti quella parte della superficie che è compresa fra i due piani X, Y in cui si trovano i cerchi AB, CD.

Si suppone che α, γ e λ tendano a zero, e σ' tenda verso σ, col tendere a zero di un parametro t.

Consideriamo la variazione $\Delta W = m\,\Delta\sigma - n\,\Delta\tau$ (§ 1) del potenziale W. Sarà evidentemente:

$$\Delta\sigma = \sigma' + \lambda - \sigma, \quad \Delta\tau = -\alpha + \gamma,$$

quindi

$$\Delta W = m(\sigma' + \lambda - \sigma) - n(-\alpha + \gamma),$$

ovvero:

$$\Delta W = m(\sigma' - \sigma) + m\lambda + n\alpha - n\gamma. \tag{16}$$

In particolare possiamo supporre che la goccia d'olio deformata non esca fuori dei piani X, Y. Sarà allora $\gamma = \lambda = 0$, e

$$\Delta W = m(\sigma' - \sigma) + n\alpha.$$

Se H è maggiore di $2\pi R$, supponendo $\alpha = 0$, $\sigma' < \sigma$ (§ 4), sarà $\Delta W < 0$. La variazione di W può dunque esser negativa.

Sia invece $H < 2\pi R$. Esaminiamo da prima una deformazione speciale: la superficie σ' sia quella considerata nel § 9. Si è trovato

$$\sigma' - \sigma = Q a^2,$$

ove Q è una quantità finita, ed a rappresenta la differenza fra πR^2 ed una delle sezioni estreme di σ': l'altra era uguale a πR^2. Dunque a non è altro che α; e potremo scrivere (poichè in questo caso $\gamma = \lambda = 0$):

$$\Delta W = m Q \alpha^2 + n\alpha = (n + m Q \alpha)\alpha.$$

Affinchè possa aversi l'equilibrio, stabile o instabile, è necessario che sia $\Delta W \geqq 0$, quindi $n + m Q \alpha \geqq 0$, ovvero, α essendo una quantità infinitesima,

$$n \geqq 0.$$

Consideriamo ancora una deformazione particolare: α, $\sigma' - \sigma$ e $\lambda - \gamma$ siano infinitesime d'ordine superiore rispetto a γ. Ciò è possibile, giacchè per un dato valore di γ, possiamo rendere α e $\sigma' - \sigma$ piccole ad arbitrio, e λ vicino a γ quanto si vuole.

Avremo allora, per la formula (16):

$$\Delta W = (m - n)\gamma + \varepsilon,$$

ove ε è una quantità infinitesima d'ordine superiore rispetto a γ.

Per l'equilibrio dovrà essere $m - n \geqq 0$.

Noi escluderemo il caso che sia esattamente $n = 0$ od $n = m$. Dovremo supporre pertanto

$$0 < n < m.$$

12. Riprendiamo la formula generale (16). Pongasi $m = n + 2p$ ($p > 0$). Sarà $m\lambda = n\lambda + 2p\lambda$, quindi

$$\Delta W = m(\sigma' - \sigma) + n(\lambda - \gamma) + 2p\lambda + n\alpha;$$

e poichè $\lambda \geqq \gamma$ (γ essendo la proiezione sul cilindro di raggio R della superficie esterna λ):

$$\Delta W \geqq m(\sigma' - \sigma) + 2p\lambda + n\alpha.$$

Diciamo β la proiezione $(AA' + CC')$ di λ sui piani X, Y. Sarà $\lambda \geqq \beta$, $2p\lambda \geqq p\lambda + p\beta$, onde

$$\Delta W \geqq m(\sigma' - \sigma) + p\lambda + p\beta + n\alpha,$$

e chiamando q la minore delle due quantità p ed n:

$$\Delta W \geqq m(\sigma' - \sigma) + p\lambda + q(\alpha + \beta).$$

Ora teniamo conto della formula (15). In essa w rappresenterà il volume di quella parte della goccia d'olio che si trova fuori dei piani X, Y: a è la differenza fra le sezioni estreme di σ'. Avremo:

$$\Delta W > -mGw + mga + p\lambda + q(\alpha + \beta),$$

ovvero:

$$\Delta W > \{p\lambda - mGw\} + \{q(\alpha + \beta) + mga\}.$$

Il volume w è racchiuso dalla superficie $\beta + \gamma + \lambda \leqq 3\lambda$. Il massimo volume che può racchiudere una superficie uguale a 3λ è $\frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}}\lambda^{\frac{3}{2}}$ (caso della sfera). Dunque w è infinitesimo d'ordine superiore rispetto a λ. D'altra parte p, m e G sono quantità finite, e p è positiva. Quindi sarà, per t abbastanza piccolo, $p\lambda - mGw \geqq 0$.

Ora consideriamo le sezioni estreme della superficie σ' $(A'B' + C'D')$. Ciascuna di esse è uguale a πR^2 — una parte di α + una parte di β: è dunque compresa fra $\pi R^2 - \alpha$ e $\pi R^2 + \beta$. La loro differenza a, in valore assoluto, sarà minore di $\alpha + \beta$. Poichè q ed m sono quantità finite mentre g è infinitesima (§ 10), per t abbastanza piccolo sarà

$$q(\alpha + \beta) + mga \geqq 0.$$

E per conseguenza:

$$\Delta W > 0,$$

ciò che appunto volevamo dimostrare.

13. Il potenziale $W = m\sigma - n\tau$ si riferisce ad un sistema costituito dei sostegni rigidi e dei due liquidi.

Supponiamo di scambiare tra loro i due liquidi, e cerchiamo il nuovo potenziale W', analogo a W.

Indicando con $\tau + \tau'$ la superficie totale dei sostegni rigidi, basterà sostituire τ con τ'; avremo dunque:

$$W' = m\,\sigma - n\,\tau',$$

ovvero, a meno di una costante:

$$W' = m\,\sigma + n\,\tau; \qquad (\tau + \tau' = \text{cost.})$$

vale a dire: passando da un sistema all'altro il coefficiente di σ non varia, quello di τ cambia di segno.

Ma per l'equilibrio del primo sistema si è veduto che deve essere $n \geqq 0$. Per l'equilibrio del secondo si dovrà dunque avere $n \leqq 0$.

Tali condizioni non sono compatibili tra loro se non quando sia $n = 0$. Fatta dunque eccezione da questo caso speciale, possiamo dire che se è possibile l'equilibrio di una colonna cilindrica costituita di un certo liquido L, immersa in un altro liquido L', non è possibile l'equilibrio del sistema ottenuto invertendo i due liquidi.

L'annullarsi di n ha un significato fisico assai semplice. Supponiamo che la superficie dei sostegni, lungo la linea d'incontro colla superficie σ che separa i due liquidi, ammetta un piano tangente unico (condizione che non è verificata nel caso dei dischi): se n è uguale a zero, le due superficie s'incontrano normalmente, giacchè, detto φ l'*angolo di raccordo*, si ha dalla Teoria di Gauss

$$\cos\varphi = \frac{n}{m}.$$

Complementi alle ricerche sulle superficie isoterme.

(Di Luigi Bianchi, *a Pisa)*

Nel presente lavoro, continuazione della Memoria pubblicata nel tomo XI, serie 3.ª, di questi *Annali* (1905), mi propongo di esporre alcune ricerche complementari sulle trasformazioni delle superficie isoterme, in particolare di studiare le proprietà di una nuova classe di trasformazioni di queste superficie che si collegano alle trasformazioni di Darboux. Il punto di partenza delle nuove ricerche si trova nelle osservazioni seguenti. Consideriamo una coppia (S, S_1) di superficie isoterme che siano le due falde di un inviluppo conforme di sfere, tali cioè che, secondo le notazioni della Memoria, si passi dall'una superficie S all'altra S_1 mediante una trasformazione D_m di Darboux. Dimostreremo che questa coppia (S, S_1) determina *intrinsecamente* un'altra coppia $(\Sigma, \overline{\Sigma})$ di superficie isoterme che si corrispondono per parallelismo delle normali in una rappresentazione conforme e sono quindi trasformate l'una dell'altra per la trasformazione C di Christoffel. Il passaggio dalle superficie S, S_1 della prima coppia alle corrispondenti Σ, $\overline{\Sigma}$ della seconda si dirà la *trasformazione T_m associata alla D_m* di Darboux. Queste trasformazioni T_m cangiano adunque le due falde isoterme di un inviluppo conforme di sfere in due superficie isoterme trasformate di Christoffel e viceversa, trasformano cioè una trasformazione di Darboux in una di Christoffel, e viceversa, ciò che si può esprimere simbolicamente così:

$$C = T_m^{-1} D_m T_m, \qquad D_m = T_m C T_m^{-1}.$$

Suppongasi in particolare che la coppia (S, S_1) sia costituita da due superficie isoterme speciali *complementari* ((M) § 14) (*); allora anche le su-

(*) Le citazioni come questa si riferiscono alla Memoria nel tomo XI.

perficie $(\Sigma, \bar{\Sigma})$, dedotte da (S, S_1) mediante la trasformazione T_m associata alla corrispondente D_m, sono isoterme speciali, ma di classe diversa dalla primitiva. Secondo i teoremi di Darboux, ad ogni coppia di superficie isoterme speciali complementari è coordinata una superficie applicabile sopra una quadrica ((M) § 15); le trasformazioni T_m danno pertanto il passaggio da una classe di superficie applicabili sopra una quadrica a quelle applicabili sopra una seconda quadrica. Queste due quadriche sono *coniugate* in deformazione nel senso stabilito nella mia Nota inserita nei *Rendiconti dei Lincei* (aprile 1903) cioè si corrispondono in una projettività che conserva le linee geodetiche. Un caso particolare notevole si ha quando la coppia (S, S_1) è formata da due superficie parallele a curvatura media costante; la T_m corrispondente non è altro allora che la trasformazione di Hazzidakis (Vedi le mie *Lezioni*, Vol. II, § 393) e le due quadriche coniugate sono un ellissoide allungato ed un iperboloide a due falde di rotazione. Così la trasformazione T_m delle coppie di superficie isoterme speciali complementari può riguardarsi come una generalizzazione della trasformazione di Hazzidakis.

Data una coppia (S, S_1) di superficie isoterme trasformate per una D_m di Darboux, per costruire le superficie Σ, $\bar{\Sigma}$ trasformate per mezzo della T_m associata occorre in generale integrare un'equazione di Riccati. Ma vi ha un caso molto notevole in cui *bastano quadrature* per trovare in termini finiti le superficie trasformate. Questo caso si presenta quando S, S_1 sono due superficie a curvatura media costante o nulla, che formano le due falde di un inviluppo conforme di sfere coi centri distribuiti sopra una deformata di una quadrica di rotazione. In tal caso le superficie trasformate per mezzo della corrispondente T_m sono esse stesse isoterme speciali, e precisamente danno le immagini nello spazio euclideo delle superficie a curvatura media costante dello spazio iperbolico. Ma la conseguenza più importante che si può trarre dal legame così stabilito fra i teoremi di Guichard relativi alle superficie di curvatura media costante dello spazio euclideo e le superficie analoghe nello spazio iperbolico consiste in ciò che basta conoscere una delle trasformate S_1 a curvatura media costante di una superficie iniziale S per trovare tutte le altre ∞^2 con sole quadrature. Ne segue che: *Nota una deformata di una quadrica di rotazione se ne ottengono con sole quadrature* ∞^2 *nuove e così di seguito illimitatamente.*

Il seguito del presente lavoro conduce ad una generalizzazione delle trasformazioni T_m fondata sulle considerazioni seguenti. Una trasformazione D_m di Darboux di una superficie isoterma S è definita ((M) § 1) da cinque funzioni trasformatrici λ, μ, w, φ, σ assoggettate a soddisfare al sistema di equazioni differenziali (I) di Darboux, che qui trascriviamo:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\lambda}{\partial u}=m e^{\theta}\sigma+m e^{\theta}\varphi-\frac{e^{\theta}}{r_2}w-\frac{\partial\theta}{\partial v}\mu,\quad \frac{\partial\lambda}{\partial v}=\frac{\partial\theta}{\partial u}\mu,\\
&\frac{\partial\mu}{\partial u}=\frac{\partial\theta}{\partial v}\lambda,\quad \frac{\partial\mu}{\partial v}=m e^{\theta}\sigma-m e^{-\theta}\varphi-\frac{e^{\theta}}{r_1}w-\frac{\partial\theta}{\partial u}\lambda,\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial u}=e^{\theta}\lambda,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial v}=e^{\theta}\mu,\quad \frac{\partial w}{\partial u}=\frac{e^{\theta}}{r_2}\lambda,\quad \frac{\partial w}{\partial v}=\frac{e^{\theta}}{r_1}\mu,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \frac{\partial\sigma}{\partial u}=e^{-\theta}\lambda,\quad \frac{\partial\sigma}{\partial v}=-e^{-\theta}\mu,
\end{aligned}\right\}\qquad \text{(I)}$$

ed inoltre all'equazione (II) in termini finiti

$$\lambda^2+\mu^2+w^2=2\,m\,\varphi\,\sigma. \qquad \text{(II)}$$

Ora basta conoscere cinque funzioni λ, μ, w, φ, σ che soddisfino al sistema differenziale (I) *senza verificare l'equazione* (II), perchè ne risulti determinata *intrinsecamente* una superficie isoterma la quale però, in luogo che nell'euclideo, esiste in uno spazio di curvatura costante. Espongo un breve studio di queste trasformazioni T_m generalizzate, estendendo agli spazî di curvatura costante la teoria delle trasformazioni delle superficie isoterme svolta nella Memoria per il caso euclideo.

§ 1.

La trasformazione T_m associata alla D_m di Darboux.

Abbiasi una superficie isoterma S (per la quale manteniamo tutte le notazioni della Memoria) e si conosca una superficie trasformata S_1, derivata da S per mezzo di una D_m di Darboux. Siano

$$\lambda,\quad \mu,\quad w,\quad \varphi,\quad \sigma$$

le corrispondenti funzioni trasformatrici, che soddisferanno dunque al sistema differenziale (I) ed all'equazione (II). Dimostreremo la proposizione fondamentale seguente:

Esiste una superficie isoterma Σ, il cui elemento lineare $d\,s$, riferito alle linee di curvatura u, v, ha la forma

$$d\,s^2 = \frac{e^{2\theta}}{\varphi^2}(d\,u^2 + d\,v^2) \tag{1}$$

mentre le curvature principali $\frac{1}{\rho_1}$, $\frac{1}{\rho_2}$ di Σ sono date dalle formole

$$\frac{1}{\rho_1} = w - \frac{\varphi}{r_1}, \quad \frac{1}{\rho_2} = w - \frac{\varphi}{r_2}. \tag{2}$$

Per ciò basterà provare che coi valori (2) delle curvature principali vengono ad essere soddisfatte le equazioni di Codazzi e l'equazione di Gauss, relative all'elemento lineare (1).

Se poniamo

$$e^{2\omega} = \frac{e^{2\theta}}{\varphi^2}, \quad (3) \qquad\qquad \omega = \theta - \log\varphi, \quad (3^*)$$

le equazioni di Codazzi si scrivono:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)\frac{\partial\omega}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\rho_1}\right) = 0 \\ \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)\frac{\partial\omega}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\rho_2}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

e l'equazione di Gauss diventa

$$\frac{1}{\rho_1\rho_2} = -e^{2\omega}\left[\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}\right]. \tag{5}$$

Ora se deriviamo la (3*), tenendo conto delle equazioni differenziali (I), abbiamo le:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\omega}{\partial u} = \frac{\partial\theta}{\partial u} - e^{\theta}\frac{\lambda}{\varphi} \\ \frac{\partial\omega}{\partial v} = \frac{\partial\theta}{\partial v} - e^{\theta}\frac{\nu}{\varphi}, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

onde il primo membro della prima delle (4) diventa

$$\left(\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}\right)\frac{\partial \omega}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\rho_1}\right)=\varphi\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{\partial \theta}{\partial u}-e^{\theta}\frac{\lambda}{\varphi}\right)+$$
$$+\frac{\partial w}{\partial u}-\varphi\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{r_1}\right)-\frac{1}{r_1}\frac{\partial \varphi}{\partial u};$$

sostituendo per $\frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial u}$ i loro valori dati dalle (I), troviamo

$$\left(\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}\right)\frac{\partial \omega}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\rho_1}\right)=-\varphi\left\{\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\frac{\partial \theta}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{r_1}\right)\right\},$$

espressione che è identicamente nulla a causa della prima equazione di Codazzi per la S. Del tutto analogamente si prova che anche la seconda delle (4) è soddisfatta.

Procedendo ora alla verifica della equazione (5) di Gauss, derivando le (6) ed avendo riguardo alle (I), deduciamo dapprima:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2}=\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2}+e^{2\theta}\frac{w}{\varphi}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)+e^{2\theta}\frac{\lambda^2+\mu^2-2m\varphi\sigma}{\varphi^2}. \tag{7}$$

E qui, per una futura generalizzazione, è importante osservare che fino a questo punto le nostre deduzioni si appoggiano soltanto sulle equazioni differenziali (I) e nulla affatto sulla equazione in termini finiti (II)

$$\lambda^2+\mu^2+w^2=2m\varphi\sigma.$$

Tenendo ora conto di quest'ultima, la (7) diventa:

$$-e^{-2\omega}\left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2}\right]=w^2-\varphi w\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)-\varphi^2 e^{-2\theta}\left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2}\right].$$

D'altra parte, per l'equazione di Gauss relativa alla superficie S, si ha

$$-e^{-2\theta}\left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2}\right]=\frac{1}{r_1 r_2},$$

onde la precedente diviene

$$-e^{-2\omega}\left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2}\right]=w^2-\varphi w\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)+\frac{\varphi^2}{r_1 r_2}=\frac{1}{\rho_1 \rho_2}.$$

Ne concludiamo che anche l'equazione (5) di Gauss è soddisfatta e la nostra proposizione è stabilita.

La superficie isoterma Σ di cui abbiamo dimostrata l'esistenza è definita solo *intrinsecamente* dalle formole (1), (2). Per trovare la superficie stessa in termini finiti rimarrà da integrare la corrispondente equazione di Riccati ed in questa integrazione non sembra che possano introdursi *in generale* semplificazioni.

Il passaggio dalla superficie isoterma S, o *meglio* dalla coppia (S, S_1) di trasformate di Darboux, alla nuova superficie isoterma Σ si dirà la *trasformazione T_m associata* alla D_m che fa passare da S ad S_1.

§ 2.

Effetto della trasformazione T_m sulla coppia (S, S_1).

Consideriamo ora la superficie isoterma S_1 trasformata della S mediante la D_m di Darboux. Sappiamo ((*M*) § 4) che i valori delle funzioni trasformatrici nel passaggio inverso dalla S_1 alla S sono dati dalle formole

$$\lambda_1 = -\frac{\lambda}{\varphi\,\sigma}, \quad \mu_1 = \frac{\mu}{\varphi\,\sigma}, \quad w_1 = \frac{w}{\varphi\,\sigma}, \quad \varphi_1 = \frac{1}{\sigma}, \quad \sigma_1 = \frac{1}{\varphi}. \tag{8}$$

Possiamo quindi applicare alla S_1 la medesima trasformazione T_m, e indicando con $\overline{\Sigma}$ la superficie trasformata, con $\overline{\omega}$, $\overline{\rho}_1$, $\overline{\rho}_2$ gli elementi della $\overline{\Sigma}$ corrispondenti rispettivamente a θ, r_1, r_2 della S, avremo in primo luogo dalla (1):

$$e^{2\overline{\omega}} = \frac{e^{2\theta_1}}{\varphi_1^2} = e^{-2\theta}\frac{\varphi^2}{\sigma^2}\cdot\sigma^2 = \varphi^2 e^{-2\theta},$$

ossia

$$e^{2\overline{\omega}} = e^{2\omega}. \tag{9}$$

In secondo luogo le formole (2) ci danno

$$\frac{1}{\overline{\rho}_1} = w_1 - \frac{\varphi_1}{r_1^{(1)}}, \quad \frac{1}{\overline{\rho}_2} = w_1 - \frac{\varphi_1}{r_2^{(1)}},$$

che per le (8) si scrivono

$$\frac{1}{\overline{\rho}_1} = \frac{w}{\varphi\,\sigma} - \frac{1}{\sigma\, r_1^{(1)}}, \quad \frac{1}{\overline{\rho}_2} = \frac{w}{\varphi\,\sigma} - \frac{1}{\sigma\, r_2^{(1)}},$$

e sostituendo per $\frac{1}{r_1^{(1)}}$, $\frac{1}{r_2^{(1)}}$ i loro valori dati dalle (11) (M) § 2, troviamo

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{e^{2\theta}}{\varphi^2}\left(w - \frac{\varphi}{r_1}\right), \quad \frac{1}{\rho_2} = -\frac{e^{2\theta}}{\varphi^2}\left(w - \frac{\varphi}{r_2}\right),$$

o in fine per le (2)

$$\frac{1}{\bar{\rho}_1} = \frac{e^{2\omega}}{\rho_1}, \quad \frac{1}{\bar{\rho}_2} = -\frac{e^{2\omega}}{\rho_2}. \tag{10}$$

Queste e la (9), confrontate colle formole del § 3 (M), dimostrano che la nuova superficie isoterma $\bar{\Sigma}$ non è altro che la trasformata di Christoffel della prima Σ. Abbiamo dunque il teorema:

La trasformazione T_m, associata alla D_m di Darboux, *che fa passare dalla superficie S alla S_1, cangia questa coppia (S, S_1) in una nuova coppia $(\Sigma, \bar{\Sigma})$ di superficie isoterme trasformate di* Christoffel *l'una dell'altra.*

§ 3.

Effetto della trasformazione D_m sulla coppia $(S, \bar{S})$.

Delle due superficie isoterme S, S_1 prendiamo ora le rispettive trasformate di Christoffel $\bar{S}$, $\bar{S}_1$; queste sono, alla loro volta, legate da una trasformazione D_m di Darboux ((M) § 3) e i valori $\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$, $\bar{w}$, $\bar{\varphi}$, $\bar{\sigma}$ delle funzioni trasformatrici nel passaggio da $\bar{S}$ ad $\bar{S}_1$ sono dati dalle formole

$$\bar{\lambda} = \lambda, \quad \bar{\mu} = -\mu, \quad \bar{w} = -w, \quad \bar{\varphi} = \sigma, \quad \bar{\sigma} = \varphi. \tag{11}$$

Per quanto si è visto al paragrafo precedente, la trasformazione T_m, applicata alla coppia $(\bar{S}, \bar{S}_1)$, la cangierà in una nuova coppia di superficie trasformate di Christoffel, che indicheremo rispettivamente con Σ_1, $\bar{\Sigma}_1$. Gli elementi relativi alla superficie $\bar{S}$ sono dati dalle formole

$$e^{2\bar{\theta}} = e^{-2\theta}, \quad \frac{1}{\bar{r}_1} = \frac{e^{2\theta}}{r_1}, \quad \frac{1}{\bar{r}_2} = -\frac{e^{2\theta}}{r_2},$$

e quindi se indichiamo con

$$e^{2\omega_1}; \quad \frac{1}{\rho_1^{(1)}}, \quad \frac{1}{\rho_2^{(1)}}$$

gli elementi analoghi per la Σ_1, dalle (1), (2) osservando le (11), avremo:

$$e^{2\omega_1} = \frac{e^{2\overline{\theta}}}{\overline{\varphi}^2} = \frac{e^{-2\theta}}{\sigma^2} \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\rho_1^{(1)}} &= \overline{w} - \frac{\overline{\varphi}}{\overline{r}_1} = -w - \frac{\sigma e^{2\theta}}{r_1} \\ \frac{1}{\rho_2^{(1)}} &= \overline{w} - \frac{\overline{\varphi}}{\overline{r}_2} = -w + \frac{\sigma e^{2\theta}}{r_2}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Dimostriamo ora che si passa dalla superficie isoterma Σ del § 1 alla Σ_1 attuale mediante una trasformazione D_{-r_1} di Darboux a costante $-m$, dopo di che lo stesso varrà naturalmente per la coppia $(\overline{\Sigma}, \overline{\Sigma}_1)$. Per ciò osserviamo che se con

$$\Lambda, \quad \mathrm{M}, \quad W, \quad \Phi, \quad \Sigma$$

si indicano i valori delle funzioni trasformatrici per una trasformazione D_{-m} della Σ, le equazioni differenziali (I), avendo riguardo alle (1), (2), (6) ed al cangiamento di m in $-m$, assumono la forma seguente:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \Lambda}{\partial u} = -m\frac{e^\theta}{\rho}\Sigma - m e^{-\theta}\varphi\,.\,\Phi - \frac{e^\theta}{\varphi}\left(w - \frac{\varphi}{v_2}\right)\cdot W - \left(\frac{\partial\theta}{\partial v} - e^\theta\frac{\mu}{\varphi}\right)\cdot \mathrm{M}, \\ &\qquad\qquad \frac{\partial \Lambda}{\partial v} = \left(\frac{\partial\theta}{\partial u} - e^\theta\frac{\lambda}{\varphi}\right)\cdot\mathrm{M} \\ &\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial u} = \left(\frac{\partial\theta}{\partial v} - e^\theta\frac{\mu}{\varphi}\right)\cdot\Lambda, \quad \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial v} = -m\frac{e^\theta}{\varphi}\Sigma + m e^{-\theta}\varphi\,.\,\Phi - \\ &\qquad\qquad -\frac{e^\theta}{\varphi}\left(w - \frac{\varphi}{r_1}\right)\cdot W - \left(\frac{\partial\theta}{\partial u} - e^\theta\frac{\lambda}{\varphi}\right)\cdot\Lambda \\ &\frac{\partial\Phi}{\partial u} = \frac{e^\theta}{\varphi}\Lambda, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial v} = \frac{e^\theta}{\varphi}\mathrm{M}; \quad \frac{\partial W}{\partial u} = \frac{e^\theta}{\varphi}\left(w - \frac{\varphi}{r_2}\right)\Lambda, \\ &\qquad\qquad \frac{\partial W}{\partial v} = \frac{e^\theta}{\varphi}\left(w - \frac{\varphi}{r_1}\right)\cdot\mathrm{M} \\ &\qquad \frac{\partial\Sigma}{\partial u} = \varphi e^{-\theta}\,.\,\Lambda, \quad \frac{\partial\Sigma}{\partial v} = -\varphi e^{-\theta}.\,\mathrm{M}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

L'equazione (II) in termini finiti si scrive poi:

$$\Lambda^2 + M^2 + W^2 = -2\, m\, \Phi\, \Sigma. \qquad (15)$$

Ed ora osserviamo che si soddisfano tanto le equazioni differenziali (14), come la (15) in termini finiti, ponendo

$$\Lambda = -\frac{\lambda}{\varphi}, \quad M = -\frac{\mu}{\varphi}, \quad W = \frac{w}{\varphi}, \quad \Phi = \frac{1}{\varphi}, \quad \Sigma = -\sigma, \qquad (16)$$

onde queste formole ci danno le effettive funzioni trasformatrici per una D_{-m} applicata alla superficie isoterma Σ. Calcolando poi, colle formole (9), (11) del § 2 (M), gli elementi relativi alla superficie trasformata troviamo precisamente che essi coincidono con quelli della Σ_1 individuati dalle (12), (13) del paragrafo precedente. Abbiamo dunque il risultato: *La trasformazione T_m cangia la coppia* (S, $\overline{S}$) *di trasformate di* Christoffel *nella coppia* (Σ, Σ_1) *di superficie trasformate per una D_{-m} di* Darboux, *e similmente la coppia* (S_1, $\overline{S}_1$) *nella* ($\overline{\Sigma}$, $\overline{\Sigma}_1$).

Segue ancora di qui che la trasformazione T_{-m} associata alla D_{-m}, che dà il passaggio da Σ a Σ_1, trasforma inversamente la coppia (Σ, Σ_1) nella primitiva (S, $\overline{S}$); perciò la T_{-m} è da riguardarsi come la inversa della T_m.

È da notarsi poi che, mentre per trovare la prima superficie trasformata Σ occorre in generale integrare un'equazione di Riccati, nota che sia la Σ si avrà senz'altro la Σ_1 in termini finiti, poichè dalle (16) sono note le relative funzioni trasformatrici; e in fine per trovare le due nuove superficie $\overline{\Sigma}$, $\overline{\Sigma}_1$ basteranno quadrature.

La proprietà ora dimostrata delle trasformazioni T_m prova quanto è asserito nella prefazione, che cioè esse trasformano una trasformazione di Christoffel in una di Darboux, e viceversa.

Colle considerazioni seguenti dimostriamo poi che l'attuale trasformazione T_m può riguardarsi altresì come una generalizzazione della trasformazione di Hazzidakis per le superficie di curvatura media costante. Prendasi infatti una superficie S di curvatura media costante H definita dalle formole

$$d\,s^2 = e^{2\theta}(d\,u^2 + d\,v^2)$$

$$\frac{1}{r_1} = \frac{H + e^{-2\theta}}{2}, \quad \frac{1}{r_2} = \frac{H - e^{-2\theta}}{2}.$$

e si consideri la superficie parallela S_1 colla stessa curvatura media costante, la quale è ad un tempo trasformata di CHRISTOFFEL e trasformata di DARBOUX della S per una D_m corrispondente ai valori

$$\lambda = 0, \quad \mu = 0, \quad w = H, \quad \varphi = 1, \quad \sigma = -H$$

delle funzioni trasformatrici ed al valore $m = -\frac{H}{2}$ della costante m. La superficie Σ trasformata di S per la corrispondente T_m risulterà definita, secondo le (1), (2) § 1, dalle formole

$$e^{2\omega} = e^{2\theta}$$

$$\frac{1}{\rho_1} = H - \frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_2}, \quad \frac{1}{\rho_2} = H - \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r_1}.$$

Così S, Σ sono applicabili con conservazione delle linee di curvatura ed hanno in punti corrispondenti le medesime curvature principali, ma permutate; esse sono dunque trasformate di HAZZIDAKIS l'una dell'altra (*Lezioni*, Vol. II, pag. 438).

§ 4.

LE TRASFORMAZIONI T_m PER LE COPPIE DI SUPERFICIE ISOTERME SPECIALI COMPLEMENTARI.

Consideriamo una superficie isoterma speciale S della classe (A, B, C, D) ed una sua complementare S_1, ottenuta da S mediante una trasformazione D_m di DARBOUX, la costante m essendo una delle radici dell'equazione cubica

$$(2m - A)^2 . m - Dm + 2BC = 0, \tag{17}$$

e colle funzioni trasformatrici date dalle formole

$$\lambda = e^\theta \frac{\partial H}{\partial u}, \quad \mu = e^\theta \frac{\partial H}{\partial v}, \quad w = a - M, \quad \varphi = b - L, \quad \sigma = H + c, \tag{18}$$

le costanti a, b, c avendo i valori

$$a = 2m - A, \quad b = -\frac{B}{m}, \quad c = \frac{C}{m}. \tag{19}$$

La trasformazione T_m associata a questa D_m cangia la S in una superficie isoterma Σ definita dalle (1), (2) § 1; noi vogliamo ora provare che la Σ è alla sua volta una superficie isoterma speciale. Indicando con H_0, L_0, M_0 i valori di H, L, M per la Σ, dalle citate formole (1), (2) abbiamo subito

$$H_0 = 2\,w - \varphi\,H, \quad L_0 = -\frac{L}{\varphi}, \quad M_0 = -L\frac{w}{\varphi} + M \tag{20}$$

e sostituendo per w, φ i loro valori (18):

$$H_0 = 2\,a - b\,H, \quad L_0 = \frac{L}{L-b}, \quad M_0 = \frac{a\,L - b\,M}{L-b}. \tag{20*}$$

Dal paragrafo precedente sappiamo che le funzioni trasformatrici pel passaggio dalla Σ alla trasformata Σ_1 mediante la D_{-m} di Darboux sono date dalle (16), onde risulta in particolare

$$\Sigma = -\sigma = -(H + c), \quad \Phi = \frac{1}{b - L}, \quad W = \frac{a - M}{b - L};$$

queste per le (20*) possono scriversi

$$\Sigma = \frac{H_0 - (2\,a + b\,c)}{b}, \quad \Phi = \frac{1 - L_0}{b}, \quad W = \frac{a - M_0}{b}. \tag{21}$$

Siccome la funzione trasformatrice Σ è una funzione lineare intera della curvatura media H_0, dal teorema al § 13 (M) deduciamo che la superficie Σ è alla sua volta una superficie isoterma speciale, cioè le sue curvature principali soddisfano una relazione della forma

$$\frac{e^{2\theta}}{\varphi^2}\left[\left(\frac{\partial H_0}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial H_0}{\partial v}\right)^2\right] + M_0^2 + 2\,A_0\,M_0 + 2\,B_0\,H_0 + 2\,C_0\,L_0 + D_0 = 0,$$

con A_0, B_0, C_0, D_0 costanti che si tratta di determinare. Per ciò osserviamo che se con a_0, b_0, c_0 indichiamo i valori delle costanti che per la trasformazione D_{-m} della Σ sono le analoghe delle a, b, c, dalle (21) abbiamo

$$a_0 = a, \quad b_0 = 1, \quad c_0 = -(2\,a + b\,c),$$

onde, mutando nelle (19) m in $-m$, abbiamo

$$a_0 = -2\,m - A_0, \quad b_0 = \frac{B_0}{m}, \quad c_0 = -\frac{C_0}{m},$$

cioè

$$A_0 = -2m - a, \quad B_0 = m, \quad C_0 = (2a + bc)m.$$

In fine l'equazione cubica (17), mutandovi m in $-m$ e A, B, C, D in A_0, B_0, C_0, D_0, ci dà

$$D_0 = (2m + A_0)^2 - \frac{2 B_0 C_0}{m}.$$

Esprimendo le nuove costanti per A, B, C, D, m, abbiamo così:

$$\left.\begin{aligned} A_0 = A - 4m, \quad B_0 - m, \quad C_0 = 4m^2 - 2Am - \frac{BC}{m}, \\ D_0 = D - 4m(2m - A). \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Ne concludiamo:

La trasformazione T_m associata alla D_m di Darboux, *che fa passare da una superficie isoterma speciale S della classe* (A, B, C, D) *ad una sua complementare S_1, cangia la S in una nuova superficie isoterma Σ della classe* (A_0, B_0, C_0, D_0) *individuata dalle formole* (22).

Si osserverà che la nuova classe (A_0, B_0, C_0, D_0) è *in generale* distinta da quella della S o delle superficie omotetiche ad S. Così le attuali trasformazioni T_m conducono da una classe di superficie isoterme speciali ad una classe diversa, ovvero, pei teoremi di Darboux, dalle deformate di una quadrica alle deformate di un'altra quadrica.

§ 5.

Le quadriche di Darboux coniugate in deformazione.

Ricerchiamo ora in quale relazione geometrica stanno le due classi di superficie applicabili sopra quadriche. Ricordiamo per ciò che i circoli normali in punti corrispondenti alle coppie di superficie complementari (S, S_1) generano un sistema ciclico ed i loro piani inviluppano una superficie che indicheremo con S_0, il cui elemento lineare dipende esclusivamente dalle costanti A, B, C, D della classe di S, S_1 ed appartiene ad una quadrica (immaginaria) di Darboux ((M) § 15). Similmente i piani del sistema ciclico normale alle due superficie complementari Σ, Σ_1 inviluppano un'altra superficie Σ_0 applicabile sopra una seconda quadrica. Riguardando come punti corrispondenti sopra S_0, Σ_0 quelli che corrispondono ai medesimi valori dei parametri isometrici u, v di S, Σ, dimostreremo la proprietà seguente: *Sopra le due superficie* S_0, Σ_0 *si corrispondono ad un tempo i sistemi coniugati e le linee geodetiche.* Secondo le denominazioni introdotte in due mie Note nei *Rendiconti dei Lincei* (*), le due superficie S_0, Σ_0 sono *coniugate* in deformazione e i due problemi di trovare tutte le deformate dell'una o dell'altra superficie si equivalgono perfettamente.

La corrispondenza dei sistemi coniugati sopra S_0, Σ_0 è un corollario del teorema già segnalato dal Darboux (**): *Ad ogni sistema ortogonale di* S (*o* Σ) *corrisponde un sistema coniugato di* S_0 (*o* Σ_0). Noi qui ne omettiamo la dimostrazione che si potrebbe trarre facilmente dalle formole del § 15 (M). Della corrispondenza delle linee geodetiche sopra S_0, Σ_0 ci accertiamo poi nel modo seguente. Prendasi un'altra superficie isoterma speciale *qualunque* S' della classe (A, B, C, D) e corrispondentemente si avrà una seconda superficie isoterma speciale Σ' della classe (A_0, B_0, C_0, D_0) di Σ. Indicando con S'_0, Σ'_0 le superficie dedotte da S', Σ' come S_0, Σ_0 lo sono da S, Σ, sarà S'_0 applicabile sopra S_0 e Σ'_0 sopra Σ_0; inoltre, prendendo opportunamente S', si potrà far coincidere S'_0 con una deformata qualunque di S_0. Pei risultati della mia nota *a*) nei *Rendiconti dei Lincei*, sarà provata la corrispondenza delle geodetiche sopra S_0, Σ_0 quando si dimostri che al sistema coniugato comune di S_0, S'_0 corrisponde il sistema coniugato comune di Σ_0, Σ'_0. Per questo indichiamo con (u', v') i parametri isometrici delle linee di curvatura sopra S', Σ' e con

$$H'(u', v'),\quad L'(u', v');\quad H'_0(u', v'),\quad L'_0(u', v')$$

le quantità che per S', Σ' sono le analoghe delle H, L; H_0, L_0 per S, Σ. Dal § 15 (M) segue che le formole dell'applicabilità di S_0 sopra S_0 sono date dalle seguenti:

$$H'(u', v') = H(u, v),\quad L'(u', v') = L(u, v), \tag{α}$$

(*) a) *Sopra un problema relativo alla teoria della deformazione delle superficie* (6 aprile 1902). — b) *Sulle quadriche coniugate in deformazione* (aprile 1903).

(**) Vedi la fine della nota: *Sur les surfaces isothermiques* (Comptes Rendus 29 Mai 1899), ove il teorema è enunciato sotto la forma equivalente: *Alle linee assintotiche di* S_0 *corrispondono le linee di lunghezza nulla sopra* S.

e similmente quelle per l'applicabilità di Σ_0, Σ'_0 si scrivono

$$H'_0(u', v') = H_0(u, v), \quad L'_0(u', v') = L_0(u, v). \tag{β}$$

Ma, secondo le (20*) § 4, si ha

$$H_0 = 2a - bH, \quad L_0 = \frac{L}{L-b}; \quad H'_0 = 2a - bH', \quad L'_0 = \frac{L'}{L'-b},$$

onde le (α), (β) coincidono. Ne segue che la corrispondenza stabilita fra i punti di S_0, Σ_0, conservante i sistemi coniugati, si trasforma per la deformazione simultanea di S_0 in S'_0 e di Σ_0 in Σ'_0 nella corrispondenza analoga per S'_0, Σ'_0; dunque al sistema coniugato comune di S_0, S'_0 corrisponde il sistema coniugato comune di Σ_0, Σ'_0, c. d. d.

Si osservi che nella dimostrazione superiore è sottinteso escluso il caso delle superficie a curvatura media costante; ma allora le due superficie S_0, Σ_0 sono rispettivamente applicabili l'una sull'ellissoide (allungato) l'altra sull'iperboloide (a due falde) di rotazione, che già sappiamo essere quadriche coniugate in deformazione.

§ 6.

Le trasformazioni T_m delle superficie a curvatura media costante.

Si è già detto (§ 1) che per trovare la trasformata Σ di una superficie isoterma S mediante una T_m occorre in generale integrare un'equazione di Riccati. Veniamo ora a considerare un caso particolare ben interessante in cui l'integrazione si compie con sole quadrature. È questo il caso quando S, S_1 sono due superficie di curvatura media costante *non parallele* costituenti le due falde di un inviluppo conforme di sfere, coi centri distribuiti sopra la deformata di una quadrica di rotazione (teoremi di Guichard).

Sia dunque S una superficie di curvatura media costante H, il cui elemento lineare, riferito alle linee di curvatura u, v, avrà la forma

$$ds^2 = e^{2\theta}(du^2 + dv^2), \tag{23}$$

le curvature principali avendo i valori

$$\frac{1}{r_1} = \frac{H + e^{-2\theta}}{2}, \quad \frac{1}{r_2} = \frac{H - e^{-2\theta}}{2}$$

e la funzione θ essendo una soluzione dell'equazione a derivate parziali:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} + \frac{1}{4}(H^2 e^{2\theta} - e^{-2\theta}) = 0. \tag{25}$$

Se λ, μ, w, φ, σ sono le funzioni trasformatrici della D_m nel passaggio dalla S alla S_1, il sistema differenziale (I) di Darboux possiede l'integrale primo

$$\sigma - H\varphi + 2w = \text{cost.},$$

e qui, avendo S_1 la medesima curvatura media di S, la costante del secondo membro è nulla, cioè

$$\sigma = H\varphi - 2w.$$

Introducendo questo valore di σ nelle equazioni differenziali (I) di Darboux, queste diventano:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \lambda}{\partial u} = m(He^\theta + e^{-\theta})\varphi - \left(\frac{He^\theta - e^{-\theta}}{2} + 2me^\theta\right)w - \frac{\partial \theta}{\partial v}\mu, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial u}\mu \\
&\frac{\partial \mu}{\partial u} = \frac{\partial \theta}{\partial v}\lambda, \quad \frac{\partial \mu}{\partial v} = m(He^\theta - e^{-\theta})\varphi - \left(\frac{He^\theta + e^{-\theta}}{2} + 2me^\theta\right)w - \frac{\partial \theta}{\partial u}\lambda \\
&\frac{\partial \varphi}{\partial u} = e^\theta\lambda, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = e^\theta\mu; \quad \frac{\partial w}{\partial u} = \frac{He^\theta - e^{-\theta}}{2}\lambda, \quad \frac{\partial w}{\partial v} = \frac{He^\theta + e^{-\theta}}{2}\mu.
\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Inoltre l'equazione (II) in termini finiti si traduce qui nell'altra

$$\lambda^2 + \mu^2 = 2mH\varphi^2 - 4m\varphi w - w^2. \tag{26*}$$

Osserviamo che, restando nel campo reale, la forma quadratica del secondo membro della (26*)

$$2mH\varphi^2 - 4m\varphi w - w^2 = 2m(2m + H)\varphi^2 - (w + 2m\varphi)^2$$

deve avere un valore positivo e per ciò la costante m deve verificare la disuguaglianza

$$2m(2m + H) > 0. \tag{27}$$

Consideriamo ora la trasformazione T_m associata all'attuale D_m; per la superficie Σ trasformata dalla S abbiamo dalle (1), (2) § 1:

$$\left.\begin{aligned}
&e^{2\omega} = \frac{e^{2\theta}}{\varphi^2} \\
&\frac{1}{\rho_1} = w - \frac{H + e^{-2\theta}}{2}\varphi, \quad \frac{1}{\rho_2} = w - \frac{H - e^{-2\theta}}{2}\varphi.
\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Ora diciamo che: *Se si colloca convenientemente la superficie Σ nello spazio, l'ordinata z di un suo punto mobile (u, v) ed il coseno Z dell'angolo che la sua normale fa coll'asse delle z sono dati dalle formole*

$$z = \frac{k}{\varphi}, \quad Z = k\left(\frac{w}{\varphi} + 2m\right), \tag{29}$$

dove k ha il valore costante

$$k = \frac{1}{\sqrt{2m(2m + H)}}, \tag{29*}$$

reale a causa della (27).

Secondo i principii fondamentali della teoria delle superficie, basterà dimostrare che coi valori precedenti di z, Z sono soddisfatte le equazioni

$$z_{11} = D\,Z, \quad z_{12} = D'\,Z, \quad z_{22} = D''\,Z$$

$$\Delta_1 z = 1 - Z^2,$$

dove z_{11}, z_{12}, z_{22} significano le derivate seconde covarianti e $\Delta_1 z$ il parametro differenziale primo di z mentre D, D', D'' sono i coefficienti della seconda forma quadratica fondamentale di S, cioè

$$D = -\frac{e^{2\omega}}{\rho_2} = \frac{H e^{2\theta} - 1}{2\varphi} - \frac{e^{2\theta} w}{\varphi^2}, \quad D' = 0, \quad D'' = -\frac{e^{2\omega}}{\rho_1} = \frac{H e^{2\theta} + 1}{2\varphi} - \frac{e^{2\theta}}{\varphi^2}.$$

Così le formole da dimostrarsi diventano le seguenti:

$$z_{11} = \left(\frac{H e^{2\theta} - 1}{2\varphi} - \frac{e^{2\theta} w}{\varphi_2}\right) Z, \quad z_{12} = 0, \quad z_{22} = \left(\frac{H e^{2\theta} + 1}{2\varphi} - \frac{e^{2\theta}}{\varphi_2}\right) Z \tag{30}$$

$$\Delta_1 z = 1 - Z^2. \tag{30*}$$

§ 7.

Determinazione della superficie Σ con quadrature.

Per verificare che sussistono le formole superiori cominciamo dal formare dalle (29) le derivate della z, osservando le (26). Abbiamo in primo luogo

$$\frac{\partial z}{\partial u} = -\frac{k e^\theta}{\varphi^2} \lambda, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{k e^\theta}{\varphi^2} \mu, \tag{31}$$

indi

$$\Delta_1 z = \varphi^2 e^{-2\theta} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \right] = \frac{k^2}{\varphi^2} (\lambda^2 + \mu^2).$$

Per la (26*) possiamo scrivere

$$\Delta_1 z = k^2 \left[2m(2m + H) - \left(\frac{w}{\varphi} + 2m\right)^2 \right] = 1 - Z^2,$$

e la (30*) è così verificata. Derivando ora nuovamente le (31), osservando le (26), troviamo:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \frac{k e^\theta}{\varphi^2} \left\{ -m(H e^\theta + e^{-\theta}) \varphi + \left(\frac{H e^\theta - e^{-\theta}}{2} + 2 m e^\theta\right) w + \frac{\partial \theta}{\partial v} \mu \right\} - \\ - \frac{k e^\theta}{\varphi^2} \frac{\partial \theta}{\partial u} \lambda + \frac{2 k e^{2\theta}}{\varphi^3} \lambda^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = -\frac{k e^\theta}{\varphi^2} \frac{\partial \theta}{\partial u} \mu - \frac{k e^\theta}{\varphi^2} \frac{\partial \theta}{\partial v} \lambda + \frac{2 k e^{2\theta}}{\varphi^3} \lambda \mu$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \frac{k e^\theta}{\varphi^2} \left\{ -m(H e^\theta - e^{-\theta}) \varphi + \left(\frac{H e^\theta + e^{-\theta}}{2} + 2 m e^\theta\right) w + \frac{\partial \theta}{\partial u} \lambda \right\} \\ - \frac{k e^\theta}{\varphi^2} \frac{\partial \theta}{\partial v} \mu + \frac{2 k e^{2\theta}}{\varphi^3} \mu^2.$$

D'altra parte i valori dei simboli di Christoffel per l'elemento lineare della Σ

$$d s^2 = e^{2\omega} (d u^2 + d v^2)$$

sono i seguenti:

$$\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} = - \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \frac{\partial \omega}{\partial u} = \frac{\partial \theta}{\partial u} - e^{\theta} \frac{\lambda}{\varphi}$$

$$\left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} = - \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \frac{\partial \omega}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial v} - e^{\theta} \frac{\mu}{\varphi},$$

e costruendo ora le derivate seconde covarianti z_{11}, z_{12}, z_{22} troviamo verificate le (30). Della superficie incognita conosciamo dunque, in termini finiti, l'ordinata z e il coseno Z dell'angolo della normale coll'asse delle z. In queste condizioni è ben noto come bastino quadrature per determinare completamente la superficie; e noi vogliamo qui ulteriormente specificare le quadrature a ciò necessarie.

Il quadrato $d s'^2 = d X^2 + d Y^2 + d Z^2$ dell'elemento lineare sferico di Σ è dato da

$$d s'^2 = d X^2 + d Y^2 + d Z^2 = \frac{e^{2\theta}}{\varphi^2} \left(\frac{1}{\rho_2^2} d u^2 + \frac{1}{\rho_1^2} d v^2 \right),$$

avendo $\frac{1}{\rho_1}$, $\frac{1}{\rho_2}$ i valori (28). La funzione Z essendo già nota, per determinare X, Y introduciamo un angolo ausiliario ψ, ponendo

$$X = R \cos \psi, \quad Y = R \operatorname{sen} \psi, \quad R = \sqrt{1 - Z^2},$$

e la precedente diverrà

$$d R^2 + R^2 d \psi^2 + d Z^2 = \frac{e^{2\theta}}{\varphi^2} \left(\frac{1}{\rho_2^2} d u^2 + \frac{1}{\rho_1^2} d v^2 \right) \cdot$$

Ma si ha: $R\, d R = - Z\, d Z$, $d R^2 + d Z^2 = \frac{d Z^2}{R^2}$, e per ciò

$$R^2 d \psi^2 = \frac{e^{2\theta}}{\varphi^2} \left(\frac{1}{\rho_2^2} d u^2 + \frac{1}{\rho_1^2} d v^2 \right) - \frac{1}{R^2} \left(\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial z}{\partial u} d u + \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial z}{d v} d v \right)^2,$$

cioè per le (31)

$$R^2 d \psi^2 = \frac{e^{2\theta}}{\varphi^2} \left(\frac{1}{\rho_2^2} d u^2 + \frac{1}{\rho_1^2} d v^2 \right) - \frac{k^2 e^{2\theta}}{R^2 \varphi^4} \left(\frac{\lambda}{\rho_2} d u + \frac{\mu}{\rho_1} d v \right)^2.$$

Ora, a causa di

$$R^2 = 1 - Z^2 = \Delta_1 z = \frac{k^2}{\varphi^2} (\lambda^2 + \mu^2),$$

la precedente può scriversi

$$R^2\, d\,\psi^2 = \frac{k^2\, e^{2\theta}}{R^2\, \varphi^4}\left(\frac{\mu}{\rho_2}\, d\,u - \frac{\lambda}{\rho_1}\, d\,v\right)^2$$

ed abbiamo dunque ψ con una quadratura dalla formola

$$d\,\psi = \frac{k\, e^{\theta}}{R^2\, \varphi^2}\left(\frac{\mu}{\rho_2}\, d\,u - \frac{\lambda}{\rho_1}\, d\,v\right). \tag{32}$$

Dopo ciò, essendo noti X, Y, avremo con altre due quadrature x, y dalle formole:

$$x = \int\left(\rho_2\, \frac{\partial X}{\partial u}\, d\,u + \rho_1\, \frac{\partial X}{\partial v}\, d\,v\right), \qquad y = \int\left(\rho_2\, \frac{\partial Y}{\partial u}\, d\,u + \rho_1\, \frac{\partial Y}{\partial v}\, d\,v\right).$$

§ 8.

Interpretazione della superficie Σ nello spazio iperbolico.

Le superficie isoterme Σ, che abbiamo ora dedotto con tre quadrature da una coppia nota di superficie a curvatura media costante (S, S_1) derivate l'una dall'altra per una trasformazione D_m di Darboux, possono essere riguardate sotto un secondo aspetto. Prendiamo il piano $z = 0$ come piano limite di una metrica iperbolica, definita dall'elemento lineare

$$d\,s'^2 = \frac{d\,x^2 + d\,y^2 + d\,z^2}{z^2},$$

e quindi di curvatura $K_0 = -1$. La nostra superficie Σ sarà l'immagine di una superficie dello spazio iperbolico, che indicheremo con Σ'; l'elemento lineare $d\,s'$ e le curvature principali (ridotte) $\frac{1}{\rho'_1}$, $\frac{1}{\rho'_2}$ di Σ' saranno dati dalle formule (*Lezioni*, Vol. I, pag. 514):

$$d\,s'^2 = \frac{d\,x^2 + d\,y^2 + d\,z^2}{z^2} = \frac{\varphi^2}{k^2}\,(d\,x^2 + d\,y^2 + d\,z^2)$$

$$\frac{1}{\rho'_1} = \frac{z}{\rho_1} - Z, \qquad \frac{1}{\rho'_2} = \frac{z}{\rho_2} - Z,$$

le quali per le (28), (29) si mutano nelle altre

$$d s'^2 = \frac{e^{2\theta}}{k^2}(d u^2 + d v^2) \tag{33}$$

$$\frac{1}{\rho'_1} = -k\left[2 m + \frac{H + e^{-2\theta}}{2}\right], \quad \frac{1}{\rho'_2} = -k\left[2 m + \frac{H - e^{-2\theta}}{2}\right]. \tag{34}$$

Per la curvatura media $H' = \frac{1}{\rho'_1} + \frac{1}{\rho'_2}$ della Σ' segue di qui

$$H' = -k(4m + H) = -\frac{4m + H}{\sqrt{2m(2m + H)}},$$

onde vediamo che: *La superficie Σ' dello spazio iperbolico ha la curvatura media costante* $H' = -\frac{4m + H}{\sqrt{2m(2m + H)}}$. Si osserverà che si ha $|H'| > 2$ per $H \neq 0$ ed $|H'| = 2$ per $H = 0$. Il legame così ritrovato fra le superficie a curvatura media costante $|H'| \geqq 2$ dello spazio iperbolico colle superficie a curvatura media costante o nulla dell'ordinario spazio euclideo era già noto per la parte che riguarda la determinazione *intrinseca* di queste superficie. Ma ora vediamo di più che la conoscenza di una coppia (S, S_1) di superficie ordinarie a curvatura media costante, trasformate di Darboux, ci procura *con sole quadrature* la conoscenza di una corrispondente superficie Σ' a curvatura media costante dello spazio iperbolico (e della sua parallela). Importa poi osservare che inversamente, note le superficie S, Σ' a curvatura media costante l'una nello spazio euclideo l'altra nell'iperbolico, definite intrinsecamente la prima dalle (23), (24), la seconda dalle (33), (34), se ne dedurranno i valori λ, μ, w, φ delle funzioni trasformatrici per una trasformazione D_m di Darboux della S e si avrà quindi, in termini finiti, la superficie derivata S_1 colla medesima curvatura media di S. E infatti, noti i valori dell'ordinata z e del coseno Z per la superficie Σ immagine di Σ', le (29) faranno conoscere φ, w e le formole $\lambda = e^{\theta}\frac{\partial \varphi}{\partial u}$, $\mu = e^{-\theta}\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ daranno i valori di λ, μ. Questi valori di λ, μ, u, φ verranno appunto a soddisfare le equazioni differenziali (26) e l'equazione (26*), come si prova senza difficoltà applicando al caso attuale le formole generali del § 165 delle *Lezioni* (Vol. I, pag. 359). Ma la conseguenza più interessante che si trae da queste considerazioni risulta dall'osservare che nelle formole (33), (34), che definiscono intrinsecamente Σ', figurano solo la costante m e gli elementi della superficie primitiva S, non quelli della trasformata S_1. Ne risulta che se, tenendo fissa S e la costante m della trasformazione D_m, si fa variare S'_1 entro la doppia infinità di trasformate della S: *la superficie Σ' subirà soltanto uno spostamento rigido nello spazio.* Basta dunque conoscere la Σ in una particolare posizione e, colle formole di POINCARÉ pei movimenti rigidi dello spazio iperbolico (*Lezioni*, Vol. I, § 189), conosceremo Σ' in tutte le sue posizioni. Ritroviamo così la seguente notevole proprietà del sistema differenziale (26) per la trasformazione delle superficie di curvatura media costante: *Nota una particolare quaderna* (λ, μ, w, φ) *di soluzioni del sistema* (26), (26*), *si trova l'integrale generale con tre quadrature.*

Se ricordiamo poi le relazioni stabilite dai teoremi di GUICHARD fra le superficie a curvatura media costante e le deformate delle quadriche di rotazione, possiamo dare a questo risultato la forma geometrica:

Nota una superficie applicabile sopra una quadrica di rotazione se ne deducono, con sole quadrature, ∞^2 nuove superficie applicabili sulla quadrica stessa e così di seguito illimitatamente.

§ 9.

LE TRASFORMAZIONI T_m GENERALIZZATE.

Le trasformazioni T_m delle superficie isoterme studiate fin qui, come associate alle D_m di DARBOUX, si fondavano sulla conoscenza di un sistema di funzioni trasformatrici

$$\lambda, \ \mu, \ w, \ \varphi, \ \sigma,$$

che soddisfacessero dunque le equazioni differenziali (I) di DARBOUX *ed insieme l'equazione* (II) *in termini finiti.* Supponendo ora soltanto di conoscere 5 funzioni λ, μ, φ, w, σ che verifichino il sistema differenziale (I) *ma non l'equazione* (II), dimostreremo che se ne può trarre ancora la conoscenza (intrinseca) di una nuova superficie isoterma. Per dimostrarlo basterà riprendere i calcoli del § 1, ricordando che il sistema differenziale (I) possiede l'integrale quadratico

$$\lambda^2 + \mu^2 + w^2 - 2\, m\, \varphi\, \sigma = \text{cost.};$$

indicando con $-K_0$ il valore della costante del secondo membro, avremo dunque

$$\lambda^2 + \mu^2 + w^2 = 2\, m\, \varphi\, \sigma - K_0. \tag{35}$$

Le deduzioni sviluppate al principio del § 1 fino all'equazione (7) sussistono ancora attualmente, come ivi fu osservato. Ma, a causa della (35), la (7) diventa ora:

$$\frac{\partial^2 \varpi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} + e^{2\theta} \frac{w}{\varphi}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) - e^{2\theta} \frac{w^2 + K_0}{\varphi^2},$$

e quindi

$$e^{-2\omega}\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2}\right) = -\varphi^2 e^{-2\theta}\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2}\right) + w^2 - \varphi\, w\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) + K_0,$$

ossia

$$-e^{-2\omega}\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2}\right) = \frac{\varphi^2}{r_1 r_2} + w^2 - \varphi\, w\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) + K_0 = \frac{1}{\rho_1 \rho_2} + K_0.$$

Il primo membro è la curvatura K dell'elemento lineare

$$d\, s^2 = e^{2\omega}(d\, u^2 + d\, v^2)$$

e si ha perciò $\frac{1}{\rho_1 \rho_2} = K - K_0$. Ora questa è l'equazione di Gauss per lo spazio di curvatura costante K_0; e poichè, come già si è verificato al § 1, coi valori

$$\frac{1}{\rho_1} = w - \frac{\varphi}{r_1}, \quad \frac{1}{\rho_2} = w - \frac{\varphi}{r_2}$$

sono inoltre soddisfatte le equazioni di Codazzi, abbiamo il teorema:

Se le funzioni λ, μ, w, φ, σ *soddisfano le equazioni differenziali* (I) *di* Darboux *e danno all'espressione costante:* $\lambda^2 + \mu^2 + w^2 - 2\, m\, \varphi\, \sigma$ *il valore* $-K_0$, *ne risulta individuata nello spazio di curvatura costante* K_0, *una superficie isoterma* Σ, *che riferita alle linee di curvatura* u, v *ha l'elemento lineare*

$$d\, s^2 = \frac{e^{2\theta}}{\varphi^2}(d\, u^2 + d\, v^2) \tag{36}$$

e le curvature principali

$$\frac{1}{\rho_1} = w - \frac{\varphi}{r_1}, \quad \frac{1}{\rho_2} = w - \frac{\varphi}{r_2}. \tag{36*}$$

Rappresentando nel noto modo conforme lo spazio a curvatura costante K_0 sull'euclideo, nella superficie Σ immagine di Σ si ha una nuova superficie isoterma. Così per la ricerca di nuove superficie isoterme da una iniziale data S possono utilizzarsi anche quelle funzioni λ, μ, w, φ, σ che soddisfano soltanto le equazioni differenziali (I) senza verificare la (II). Le trasformazioni così ottenute diciamo *trasformazioni* T_m *generalizzate*, o anche trasformazioni T_m.

Se applichiamo la T'_m anzichè alla superficie isoterma S, alla sua trasformata S di Christoffel, otterremo nello spazio di curvatura K una seconda superficie isoterma Σ_1 coll'elemento lineare:

$$d s_1^2 = \frac{e^{-2\theta}}{\sigma^2}(d u^2 + d v^2) \tag{37}$$

e colle curvature principali

$$\frac{1}{\rho_1^{(1)}} = - w - \sigma \frac{e^{2\theta}}{r_1}, \quad \frac{1}{\rho_2^{(1)}} = - w + \frac{\sigma e^{2\theta}}{r_2}. \tag{37*}$$

Fra breve vedremo (§ 13) che le due superficie Σ, Σ_1 sono trasformate di Darboux l'una dell'altra.

Notiamo in fine che mentre nel caso delle trasformazioni di Darboux doveva escludersi il caso $m = 0$, qui con $K_0 \neq 0$ è ammissibile anche il valore $m = 0$. Allora la costante K_0 nella (35) è necessariamente negativa, e se poniamo $K_0 = -1$, il sistema differenziale (I) coincide colle formole (2) § 1 (M), ove si sostituisca a $(\lambda, \mu, w, \varphi)$ rispettivamente (Z_1, Z_2, Z_3, z). In particolare la funzione φ diventa *l'ordinata* z della superficie primitiva S e la superficie isoterma Σ dello spazio iperbolico è precisamente quella che ha S per immagine.

§ 10.

Le trasformazioni di Darboux in geometria ellittica ed iperbolica.

Le ricerche precedenti ci hanno condotto ad introdurre in considerazione le superficie isoterme degli spazî di curvatura costante ed è ora opportuno far conoscere il sistema di formole relativo alle trasformazioni di Darboux delle superficie isoterme in questi spazî. Osserviamo subito che per tal modo non si viene a cangiare il contenuto del metodo di Darboux, poichè le consuete rappresentazioni conformi cangiano ogni inviluppo conforme di sfere dello spazio a curvatura costante in un inviluppo conforme di sfere dello spazio euclideo, e viceversa. Però la forma mutata sotto cui si presentano le formole conduce a trovare nuove applicazioni del metodo di trasformazione. Ci limiteremo qui a dar le nuove formole ed a compiere sopra di esse le opportune verifiche, senza esporne la deduzione facile a ristabilirsi.

Consideriamo uno spazio di curvatura costante K_0, e poniamo per semplicità $K_0 = \pm 1$ secondo che lo spazio è ellittico ovvero iperbolico. Abbiasi in questo spazio una superficie isoterma S, riferita alle sue linee di curvatura u, v, e mantenendo le nostre solite notazioni (Cf. *Lezioni*, Vol. I, pagina 497 e segg.) indichiamo con

$$d s^2 = e^{2\theta}(d u^2 + d v^2)$$

l'elemento lineare di S, con $\frac{1}{r_1}$, $\frac{1}{r_2}$ le sue curvature principali (ridotte). Il sistema delle equazioni differenziali (I) di Darboux prenderà qui la forma seguente:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \lambda}{\partial u} = m e^{\theta} \sigma + m e^{-\theta} \varphi - \frac{e^{\theta}}{r_2} w - \frac{\partial \theta}{\partial v} \mu - K_0 e^{\theta} \varphi, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial u} \mu \\
&\frac{\partial \mu}{\partial u} = \frac{\partial \theta}{\partial v} \lambda, \quad \frac{\partial \mu}{\partial v} = m e^{\theta} \sigma - m e^{-\theta} \varphi - \frac{e^{\theta}}{r_1} w - \frac{\partial \theta}{\partial u} \lambda - K_0 e^{\theta} \varphi \\
&\frac{\partial \varphi}{\partial u} = e^{\theta} \lambda, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = e^{\theta} \mu; \quad \frac{\partial w}{\partial u} = \frac{e^{\theta}}{r_2} \lambda, \quad \frac{\partial w}{\partial v} = \frac{e^{\theta}}{r_1} \mu; \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \frac{\partial \sigma}{\partial u} = e^{-\theta} \lambda, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial v} = - e^{-\theta} \mu.
\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{I}^*)$$

Come si vede, esso non differisce dall'analogo per lo spazio euclideo ($K_0 = 0$) che per il termine $- K_0 e^{\theta} \varphi$, dovuto alla curvatura dello spazio, aggiunto alle espressioni di $\frac{\partial \lambda}{\partial u}$, $\frac{\partial \mu}{\partial v}$. Il sistema (I*), in forza delle equazioni di Codazzi che hanno ancora la solita forma e di quella di Gauss che attualmente si scrive

$$\frac{1}{r_1 r_2} = - e^{-2\theta}\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2}\right) - K_0,$$

è un sistema illimitatamente integrabile e possiede l'integrale quadratico

$$\lambda^2 + \mu^2 + w^2 + K_0 \varphi^2 - 2\, m\, \varphi\, \sigma = \text{cost.}$$

Per trovare le trasformate di Darboux della superficie isoterma S conviene scegliere i valori iniziali di λ, μ, w, φ, σ in guisa che si annulli la costante del secondo membro e si abbia quindi

$$\lambda^2 + \mu^2 + w^2 + K_0 \varphi^2 = 2\, m\, \varphi\, \sigma. \tag{II*}$$

Supponiamo ora inversamente di conoscere cinque funzioni λ, μ, w, φ, σ che soddisfino il sistema differenziale (I*) e l'equazione in termini finiti (II*). Deduciamo dalla S una seconda superficie isoterma $\overline{S}$ colle formole seguenti:

$$\overline{x}_i = \left(K_0 \frac{\varphi}{m\sigma} - 1\right) x_i + \frac{\lambda}{m\sigma} \eta_i + \frac{\mu}{m\sigma} \zeta_i + \frac{w}{m\sigma} \xi_i \quad (i = 0,\ 1,\ 2,\ 3), \tag{38}$$

significando $\overline{x}_0$, $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, $\overline{x}_3$ le coordinate di Weierstrass del punto $\overline{P}$ di $\overline{S}$ che corrisponde al punto $P \equiv (x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3)$ della S.

Derivando le (38) rapporto ad u, v coll'osservare le (I*) e le formole alla pag. 498 delle *Lezioni* (Vol. I), troviamo:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \overline{x}_i}{\partial u} &= \frac{e^{-\theta}}{m\sigma^2} \left[- K_0 \lambda \varphi \,.\, x_i + (m \varphi \sigma - \lambda^2) \eta_i - \lambda \mu \zeta_i - \lambda w \xi_i\right] \\ \frac{\partial \overline{x}_i}{\partial v} &= \frac{e^{-\theta}}{m\sigma^2} \left[K_0 \lambda \varphi x_i + \lambda \mu \eta_i + (\mu^2 - m \varphi \sigma) \zeta_i + \mu w \xi_i\right]. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Per l'elemento lineare $d\overline{s}$ della superficie $\overline{S}$ deduciamo quindi

$$d\overline{s}^2 = d\overline{x}_1^2 + d\overline{x}_2^2 + d\overline{x}_3^2 + K_0\, d\overline{x}_0^2 = \frac{e^{-2\theta} \varphi^2}{\sigma^2} (d u^2 + d v^2),$$

il che prova intanto che le due superficie S, $\overline{S}$ sono rappresentate conformemente l'una sull'altra. Dalle (39), indicando con $\overline{\eta}$, $\overline{\zeta}$, $\overline{\xi}$ le quantità che per la $\overline{S}$ sono le analoghe delle η, ζ, ξ per la S, troviamo:

$$\left.\begin{aligned} \overline{\eta}_i &= - K_0 \frac{\lambda}{m\sigma} x_i + \left(1 - \frac{\lambda^2}{m \varphi \sigma}\right) \eta_i - \frac{\lambda \mu}{m \varphi \sigma} \zeta_i - \frac{\lambda w}{m \varphi \sigma} \xi_i \\ \overline{\zeta}_i &= K_0 \frac{\mu}{m\sigma} x_i + \frac{\lambda \mu}{m \varphi \sigma} \eta_i + \left(\frac{\mu^2}{m \varphi \sigma} - 1\right) \zeta_i + \frac{\mu w}{m \varphi \sigma} \xi_i \\ \overline{\xi}_i &= K_0 \frac{w}{m\sigma} x_i + \frac{\lambda w}{m \varphi \sigma} \eta_i + \frac{\mu w}{m \varphi \sigma} \zeta_i + \left(\frac{w^2}{m \varphi \sigma} - 1\right) \xi_i. \end{aligned}\right\} \tag{39*}$$

Infine derivando rapporto ad u, v le ξ_i, si constata che sulla S le linee u, v sono ancora le linee di curvatura ed i valori delle curvature principali $\frac{1}{r_1}$, $\frac{1}{r_2}$ sono dati dalle formole stesse che sussistevano nel caso euclideo ((M) § 2):

$$\left.\begin{aligned} \frac{e^{\bar\theta}}{\bar r_1} &= \frac{e^{\theta}}{r_1} - \frac{w}{\varphi\sigma}\left(e^{\theta}\sigma - e^{-\theta}\varphi\right) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad e^{\bar\theta} = \frac{e^{-\theta}\varphi}{\sigma} \\ \frac{e^{\bar\theta}}{\bar r_2} &= -\frac{e^{\theta}}{r_2} + \frac{w}{\varphi\sigma}\left(e^{\theta}\sigma + e^{-\theta}\varphi\right). \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Si verifica inoltre facilmente, colle formole precedenti, che le due normali alle superficie S, $\bar S$ in punti corrispondenti P, $\bar P$ si incontrano in un punto M_0 ad eguale distanza δ da P, $\bar P$ e si ha

$$\operatorname{tang}\delta = \frac{\varphi}{w}, \ \text{per} \ K_0 = +1; \quad \operatorname{tangh}\delta = \frac{\varphi}{w}, \ \text{per} \ K_0 = -1.$$

La sfera che ha il centro in M_0 e raggio $= \delta$ tocca quindi S, $\bar S$ nei punti P, $\bar P$, onde segue che S, $\bar S$ sono le due falde di un inviluppo conforme di sfere. Si osserverà poi che nello spazio iperbolico quando sia $\varphi > w$, sarà δ puramente immaginario e quindi le sfere inviluppate avranno il centro ideale.

§ 11.

Superficie isoterme speciali negli spazî di curvatura costante.

Estendiamo ora agli spazî di curvatura costante le ricerche relative alle superficie isoterme speciali ((M) § 12 e segg.). I calcoli da eseguirsi sono solo leggiermente differenti da quelli particolari al caso euclideo e basterà quindi rapidamente indicarli.

Ricorriamo per ciò alle equazioni (32) (M) § 12:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial u} &= -e^{2\theta}\frac{\partial H}{\partial u}, & \frac{\partial L}{\partial v} &= e^{2\theta}\frac{\partial H}{\partial v} \\ \frac{\partial M}{\partial u} &= \frac{1}{r_2}\frac{\partial L}{\partial u}, & \frac{\partial M}{\partial v} &= \frac{1}{r_1}\frac{\partial L}{\partial v}, \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

le quali, dipendendo unicamente dalle formole di Codazzi, sussistono ancora nello spazio curvo.

Ricerchiamo ora se esiste un sistema $(\lambda, \mu, w, \varphi, \sigma)$ di soluzioni delle equazioni fondamentali (I*), (II*) in cui la quinta funzione trasformatrice σ eguagli una funzione lineare intera della curvatura media H. Prescindendo da un fattore costante, ed escludendo il caso ovvio di coppie di superficie a curvatura media costante parallele ((M) § 13, nota), potremo supporre:

$$\sigma = H + c \quad (c \text{ costante})$$

e osservando le (41) e le (I*), ne dedurremo, come nel caso euclideo:

$$\lambda = e^{\theta}\frac{\partial H}{\partial u}, \quad \mu = -e^{\theta}\frac{\partial H}{\partial v}, \quad w = a - M, \quad \varphi = b - L, \quad w = H + c, \tag{42}$$

essendo a, b due nuove costanti. Sostituendo questi valori di λ, μ, w, φ, σ nella (II*) troviamo

$$e^{2\theta}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial v}\right)^2\right] + K_0 L^2 + M^2 + 2AM + 2BH + 2CL + D = 0, \tag{A*}$$

dove A, B, C, D hanno i valori costanti seguenti

$$\left.\begin{aligned} A = 2m - a, \quad B = -bm, \quad C = cm - K_0 b, \\ D = K_0 b^2 + a^2 - 2mbc. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Se una superficie isoterma S dello spazio di curvatura costante K_0 soddisfa ad una relazione della forma (A*), con A, B, C, D costanti, diremo come nel caso euclideo che essa è isoterma speciale della classe (A, B, C, D). Così adunque: condizione necessaria affinchè esista una soluzione delle equazioni fondamentali (I*), (II*) con $\sigma = H + c$ è che la superficie S sia isoterma speciale. Inversamente, supposto che ciò avvenga, prendiamo secondo le (43)

$$a = 2m - A, \quad b = -\frac{B}{m}, \quad c = \frac{C}{m} - K_0\frac{B}{m^2}, \tag{44}$$

dove m è una radice (non nulla) della equazione di quarto grado

$$(2\,m - A)^2\,m^2 - D\,m^2 + 2\,B\,C\,m - K_0\,B^2 = 0. \tag{45}$$

Allora le formole (42) daranno un sistema di soluzioni della (I*), (II*), come si dimostra in modo del tutto analogo a quello tenuto per lo spazio euclideo ((M) § 13). Ed anche nel medesimo modo si dimostra che la superficie trasformata $\overline{S}$ è isoterma speciale della stessa classe (A, B, C, D), poichè le formole della precedente Memoria (15) § 4 e (37) § 14, sulle quali era fondata la deduzione valgono inalterate nel caso attuale. Se chiamiamo *complementari* due tali superficie isoterme speciali S, $\overline{S}$, abbiamo dunque il risultato:

Ogni superficie isoterma speciale dello spazio di curvatura costante K_0 *possiede quattro superficie complementari, corrispondenti alle quattro radici dell'equazione di 4.° grado* (45).

Nel caso euclideo $K_0 = 0$ la (45) possiede sempre una radice nulla, che non ha significato pel nostro problema, e le superficie complementari si riducono a tre.

§ 12.

Trasformazioni delle superficie isoterme speciali.

Estendiamo ora al caso attuale i risultati dei §§ 17, 18 (M) relativi al caso euclideo. Per ogni superficie isoterma S la curvatura media soddisfa all'equazione

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial H}{\partial u} + \frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial H}{\partial v} = 0,$$

che si può scrivere sotto le due forme equivalenti:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(e^\theta\frac{\partial H}{\partial u}\right) = -\frac{\partial\theta}{\partial u}\,e^\theta\frac{\partial H}{\partial v}, \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(e^\theta\frac{\partial H}{\partial v}\right) = -\frac{\partial\theta}{\partial v}\cdot e^\theta\frac{\partial H}{\partial u}. \tag{α}$$

Supponiamo ora di più che la S sia una superficie isoterma speciale e sia quindi soddisfatta una relazione della forma (A*). Se escludiamo il caso che la S abbia costante la curvatura media o che sia una superficie di rotazione, derivando le (A*) rapporto ad u, v ed osservando le (α), otteniamo le altre

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial u}\left(e^\theta \frac{\partial H}{\partial u}\right) - e^\theta \frac{\partial \theta}{\partial v}\frac{\partial H}{\partial v} + (A+M)\frac{e^\theta}{r_2} + C e^\theta - B e^{-\theta} + K_0 e^\theta L \\ &\frac{\partial}{\partial v}\left(e^\theta \frac{\partial H}{\partial v}\right) - e^\theta \frac{\partial \theta}{\partial u}\frac{\partial H}{\partial u} - (A+M)\frac{e^\theta}{r_1} - C e^\theta - B e^{-\theta} - K_0 e^\theta L.\end{aligned}\right\} \quad (\beta)$$

Ora se consideriamo una qualunque trasformazione D_m della S, corrispondente alle funzioni trasformatrici λ, μ, w, φ, σ e poniamo

$$\psi = e^\theta \frac{\partial H}{\partial u}\lambda - e^\theta \frac{\partial H}{\partial v}\mu - (m H + K_0 L + C)\varphi +$$

$$+ (2m - A - M) w + (m L + B)\sigma,$$

formando le derivate di ψ rapporto ad u, v, coll'osservare le (I*) e le (σ), (β), troviamo:

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial v} = 0 \text{ (*)};$$

onde deduciamo il teorema:

Per ogni superficie isoterma speciale S della classe (A, B, C, D) il sistema differenziale (I*) *delle equazioni di trasformazione possiede l'integrale primo:*

$$\left.\begin{aligned}\psi = e^\theta \frac{\partial H}{\partial u}\lambda - e^\theta \frac{d H}{\partial v}\mu - (m H + K_0 L + C)\varphi + \\ + (2m - A - M) w + (m L + B)\sigma = \text{cost.}\end{aligned}\right\} \quad (\text{B})$$

Ora fra le ∞^3 trasformazioni D_m della superficie isoterma S consideriamo quella doppia infinità che si ottiene vincolando i valori iniziali delle funzioni trasformatrici in guisa che la costante del secondo membro nell'integrale primo (B) risulti nulla, e dimostriamo che ogni volta la superficie trasformata $\overline{S}$ sarà essa stessa isoterma speciale della classe (A, B, C, D) di S.

(*) Questa verifica, come le altre che seguono nel testo, si compie rapidamente riferendosi al calcolo già eseguito nel caso euclideo ed osservando che i nuovi termini dovuti alla curvatura dello spazio si elidono fra loro.

Dobbiamo per ciò dimostrare che dalla (A*) e dalla $\psi = 0$ segue l'altra

$$e^{2\theta}\left[\left(\frac{\partial \overline{H}}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{H}}{\partial v}\right)^2\right] + K_0 \overline{L}^2 + \overline{M}^2 + 2 A \overline{M} + 2 B \overline{H} + 2 C \overline{L} + D = 0;$$

tale verifica si compie precisamente come nel caso euclideo ((M) § 18). Abbiamo dunque il teorema:

Fra le ∞^3 superficie isoterme dedotte da una superficie isoterma speciale S con una trasformazione D_m di Darboux *a costante fissa m ne esistono ∞^2 isoterme speciali della classe stessa di S. Queste si ottengono vincolando i valori iniziali delle funzioni trasformatrici in guisa che la costante del secondo membro nell'integrale primo* (B) *risulti nulla.*

§ 13.

Significato delle trasformazioni T'_m.

Dopo queste ricerche sulle trasformazioni di Darboux delle superficie isoterme negli spazî di curvatura costante, ritorniamo ai risultati del § 8.

Quivi abbiamo visto che da una soluzione qualsiasi (λ, μ, w, φ, σ) delle equazioni differenziali (I) di Darboux, indicando con $-K_0$ il valore costante della espressione $\lambda^2 + \mu^2 + w^2 - 2\, m\, \varphi\, \sigma$, restano individuate due corrispondenti superficie isoterme Σ, $\overline{\Sigma}$ dello spazio a curvatura costante K_0, coi rispettivi elementi lineari

$$d s^2 = \frac{e^{2\theta}}{\varphi^2}(d u^2 + d v^2) \qquad \overline{d} s^2 = \frac{e^{-2\theta}}{\sigma^2}(d u^2 + d v^2)$$

e colle rispettive curvature principali

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\rho_1} = w - \frac{\varphi}{r_1}, && \frac{1}{\rho_2} = w - \frac{\varphi}{r_2} && \text{per la } \Sigma \\ &\frac{1}{\rho_1^{(1)}} = -w - \frac{\sigma e^{2\theta}}{r_2}, && \frac{1}{\rho_2^{(1)}} = -w + \frac{\sigma e^{2\theta}}{r_2} && \text{per la } \overline{\Sigma}. \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Ora siamo in grado di dimostrare che: *Le due superficie Σ, $\overline{\Sigma}$ sono trasformate l'una dell'altra per una D_{-m} di* Darboux.

Si prendano infatti le formole stesse (16) § 2

$$\Lambda = -\frac{\lambda}{\varphi}, \quad M = -\frac{\mu}{\varphi}, \quad W = \frac{w}{\varphi}, \quad \Phi = \frac{1}{\varphi}, \quad \Sigma = -\sigma \tag{47}$$

e si osservi che esse danno una soluzione delle equazioni (I*) per la trasformazione D_{-m} della Σ. Queste formole sono invero le stesse (14) § 2, ove soltanto alle espressioni di $\frac{\partial A}{\partial u}$, $\frac{\partial M}{\partial v}$ si sottragga il termine $K_0 \frac{e^\theta}{\varphi} \cdot \Phi$ dovuto alla curvatura dello spazio. Basta allora tener conto che attualmente la relazione in termini finiti fra λ, μ, w, φ, σ è la

$$\lambda^2 + \mu^2 + w^2 = 2\, m\, \varphi\, \sigma - K_0\, \varphi^2 \tag{48}$$

per dedurne la verifica richiesta. D'altronde, in forza della (48), si ha

$$\Lambda^2 + M^2 + W^2 + K_0\, \varphi^2 = -2\, m\, \Phi\, \Sigma,$$

che è precisamente la (II*) in termini finiti per la trasformazione D_{-m}. Ne concludiamo che le funzioni Λ, M, W, Φ, Σ, definite dalle (47), danno un sistema di funzioni trasformatrici per una D_{-m} di Σ. Ed ora se colle formole del § 9 calcoliamo l'elemento lineare e le curvature principali della superficie trasformata, troviamo che questa coincide con $\overline{\Sigma}$.

Concludiamo che le nostre trasformazioni T'_m cangiano una coppia di superficie isoterme dello spazio euclideo trasformate di Christoffel in una coppia di trasformate di Darboux dello spazio di curvatura costante.

§ 14.

Inversione dei risultati precedenti.

Qui si presenta naturale la domanda se la relazione ultimamente osservata sia invertibile ed a tale domanda risponde affermativamente la proposizione seguente:

Abbiasi nello spazio di curvatura costante K_0 una superficie isoterma Σ che, riferita alle linee di curvatura u, v, abbia l'elemento lineare

$$d\, s^2 = e^{2\theta}\, (d\, u^2 + d\, v^2)$$

e le curvature principali $\frac{1}{r_1}$, $\frac{1}{r_2}$; *si consideri una sua trasformata* Σ_1 *di* DARBOUX *per una trasformazione* D_m *colle funzioni trasformatrici* λ, μ, w, φ, σ. *Esiste allora nello spazio euclideo una superficie isoterma* S *d'elemento lineare*

$$d\,s^2 = \frac{e^{2\theta}}{\varphi^2}(d\,u^2 + d\,v^2) = e^{2\omega}(d\,u^2 + d\,v^2)$$

e colle curvature principali

$$\frac{1}{\rho_1} = w - \frac{\varphi}{r_1}, \quad \frac{1}{\rho_2} = w - \frac{\varphi}{r_2}.$$

La verifica procede qui precisamente come al § 1 per le equazioni di CODAZZI.

Per dimostrare poi che anche l'equazione di GAUSS è soddisfatta, partiamo ancora dalle formole (6) § 1:

$$\frac{\partial\omega}{\partial u} = \frac{\partial\theta}{\partial u} - e^{\theta}\frac{\lambda}{\varphi}, \quad \frac{\partial\omega}{\partial v} = \frac{\partial\theta}{\partial v} - e^{\theta}\frac{\mu}{\varphi}$$

e formiamo l'espressione $\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}$, osservando le (I*) § 10; troviamo così:

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial v^2} = \frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + \frac{e^{2\theta}}{\varphi^2}(\lambda^2 + \mu^2 - 2\,m\,\varphi\,\sigma) +$$

$$+ 2\,K_0\,e^{2\theta} + e^{\theta}\varphi\,w\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = \frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} - \frac{e^{2\theta}}{\varphi^2}(K_0\varphi^2 + w^2) + 2\,K_0\,e^{2\theta} +$$

$$+ e^{2\theta}\varphi\,w\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right),$$

e quindi

$$-e^{-2\omega}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}\right) = -\varphi^2 e^{-2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}\right) - K_0\,\varphi^2 - \varphi\,w\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) + w^2.$$

Ma si ha

$$\frac{1}{r_1 r_2} = -e^{-2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}\right) - K_0,$$

e per ciò

$$-e^{-2\omega}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}\right) = w^2 - \varphi\,w\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) + \frac{\varphi^2}{r_1 r_2} = \frac{1}{\rho_1\rho_2};$$

questa è appunto l'equazione di GAUSS per lo spazio euclideo (*). Le formole stesse (47) danno poi nel caso attuale le funzioni trasformatrici per una D_{-m} della superficie S.

Supponiamo in particolare che le due superficie (Σ, Σ_1) siano isoterme speciali complementari. I calcoli stessi del § 4 dimostrano allora che la superficie isoterma S dello spazio euclideo derivata da Σ mediante la T'_m sarà alla sua volta una superficie isoterma speciale. Così le trasformazioni T'_m danno il passaggio dalle superficie isoterme speciali dello spazio di curvatura costante a quelle dello spazio euclideo, e viceversa. Spingendo più oltre la ricerca si vedrebbe risultarne il legame fra le deformate di una superficie dello spazio euclideo e le deformate di una superficie corrispondente dello spazio ellittico od iperbolico. La corrispondenza fra le due superficie è tale da conservare i sistemi coniugati e le linee geodetiche. Per tal modo la nozione di superficie *coniugate* in deformazione viene a ricevere un più ampio significato che merita di essere approfondito.

§ 15.

APPLICAZIONE ALLE SUPERFICIE DI CURVATURA MEDIA COSTANTE.

Termineremo col generalizzare le proposizioni dei §§ 6-8 applicando i risultati conseguiti alle superficie Σ di curvatura media costante H immerse nello spazio di curvatura costante K_0.

(*) Si può notare che se le funzioni γ, μ, w, φ, σ soddisfacessero sempre il sistema differenziale (I*) ma non la (II*) e rendessero

$$\lambda^2 + \mu^2 + K_0 \varphi^2 = 2 m \varphi \sigma - K_1 \quad (K_1 \text{ cost.})$$

ne seguirebbe

$$\frac{1}{\rho_1 \rho_2} = - e^{-2\omega} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} \right) - K_1$$

e la superficie S esisterebbe nello spazio di curvatura costante K_1.

Riferendo la superficie Σ alle sue linee di curvatura u, v, avremo

$$d s^2 = e^{2\theta} (d u^2 + d v^2)$$

$$\frac{1}{r_1} = \frac{H + e^{-2\theta}}{2}, \quad \frac{1}{r_2} = \frac{H - e^{-2\theta}}{2},$$

dove θ è una soluzione dell'equazione a derivate parziali

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} + \left(K_0 + \frac{H^2}{4}\right) e^{2\theta} - \frac{e^{-2\theta}}{4} = 0.$$

Consideriamo una seconda superficie Σ_1 colla stessa curvatura media costante H che si ottenga dalla Σ per una trasformazione D_m di Darboux. Se λ, μ, w, φ, σ sono le funzioni trasformatrici, la costante del secondo membro nell'integrale primo del sistema (I*)

$$\sigma - H \varphi + 2 w = \text{cost.},$$

dovrà essere nulla e sarà perciò

$$\sigma = H \varphi - 2 w.$$

Dopo ciò il sistema differenziale (I*), eliminandone σ, diventa:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \lambda}{\partial u} = m (H e^{\theta} + e^{-\theta}) \varphi - \left(\frac{H e^{\theta} - e^{-\theta}}{2} + 2 m e^{\theta}\right) w - \\
&\qquad\qquad - \frac{\partial \theta}{\partial v} \mu - K_0 e^{\theta} \varphi, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial u} \mu \\
&\frac{\partial \mu}{\partial u} = \frac{\partial \theta}{\partial v} \lambda, \quad \frac{\partial \mu}{\partial v} = m (H e^{\theta} - e^{-\theta}) \varphi - \left(\frac{H e^{\theta} + e^{-\theta}}{2} + 2 m e^{\theta}\right) w - \\
&\qquad\qquad - \frac{\partial \theta}{\partial u} \lambda - K_0 e^{\theta} \varphi \\
&\frac{\partial \varphi}{\partial u} = e^{\theta} \lambda, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = e^{\theta} \mu ; \quad \frac{\partial w}{\partial u} = \frac{H e^{\theta} - e^{-\theta}}{2} \lambda, \quad \frac{\partial w}{\partial v} = \frac{H e^{\theta} + e^{-\theta}}{2} \mu,
\end{aligned}\right\} \quad (49)$$

e l'equazione (II*) in termini finiti prende la forma:

$$\lambda^2 + \mu^2 + w^2 + K_0 \varphi^2 = 2 m \varphi (H \varphi - 2 w). \quad (49^*)$$

Di qui, avendosi

$$\lambda^2 + \mu^2 = [2 m (2 m + H) - K_0] \varphi^2 - (w + 2 m \varphi)^2,$$

segue che, per restare nel campo reale, dobbiamo attribuire alla costante m un tale valore da soddisfare la disuguaglianza

$$2\,m\,(2\,m + H) > K_0\,. \tag{50}$$

Il teorema del paragrafo precedente ci assicura che esiste allora nello spazio euclideo una superficie isoterma S che riferita alle linee di curvatura u, v ha l'elemento lineare

$$d\,s^2 = \frac{e^{2\theta}}{\varphi^2}\,(d\,u^2 + d\,v^2) \tag{51}$$

e le curvature principali

$$\frac{1}{\rho_1} = w - \frac{\varphi}{r_1}\,, \quad \frac{1}{\rho_2} = w - \frac{\varphi}{r_2}\,. \tag{51*}$$

La superficie S è così definita dapprima solo intrinsecamente da queste formole. Ma, generalizzando i risultati dei §§ 6-7, possiamo dimostrare che bastano nel caso attuale *tre quadrature* per trovare S. Si vede infatti che l'ordinata z di S e il corrispondente coseno Z della normale possono assumersi dati dalle formole

$$z = \frac{k}{\varphi}\,, \quad Z = k\left(\frac{w}{\varphi} + 2\,m\right), \tag{52}$$

la costante k avendo il valore

$$k = \frac{1}{\sqrt{2\,m\,(2\,m + H) - K_0}}\,, \tag{52*}$$

che è reale per la (50).

Ora riguardiamo, come al § 8, la superficie S come immagine di una superficie S' dello spazio iperbolico definito dall'elemento lineare

$$d\,s^2 = \frac{d\,x^2 + d\,y^2 + d\,z^2}{z^2}\,.$$

Troviamo allora: *La superficie* S *dello spazio iperbolico a curvatura* $K_0 = -1$ *ha l'elemento lineare*

$$d\,s^2 = \frac{e^{2\theta}}{k^2}\,(d\,u^2 + d\,v^2)$$

e le curvature principali

$$\frac{1}{\rho'_1} = -k\left(2m + \frac{1}{r_1}\right), \quad \frac{1}{\rho'_2} = -k\left(2m + \frac{1}{r_2}\right);$$

quindi la curvatura media H' è costante e data dalla formola

$$H' = -\frac{4m + H}{\sqrt{2m(2m + H) - K_0}}.$$

Le considerazioni superiori stabiliscono legami notevoli fra le superficie di curvatura media costante negli spazî di curvatura costante. Come nel caso euclideo (§ 8) la conseguenza più importante si trae dal fatto che gli elementi della superficie S' restano invariati se si tiene fissa la superficie Σ e costante m e si fa variare Σ_1 entro la doppia infinità di trasformate della Σ; la superficie S' si sposta allora rigidamente nello spazio.

Ne segue come al § 8 pel caso $K_0 = 0$, che: *nota una soluzione particolare* $(\lambda, \mu, w, \varphi)$ *delle equazioni di trasformazione* (49), (49*) *bastano quadrature per dedurne la soluzione generale.*

Ricorrendo poi all'estensione dei teoremi di Guichard agli spazî di curvatura costante (*), ne deduciamo che il teorema finale del § 8 vale non soltanto nello spazio euclideo ma in qualunque spazio di curvatura costante.

(*) Vedi la mia Memoria: *Sulla deformazione delle quadriche di rotazione negli spazî di curvatura costante.* Questi Annali, tomo V, (Serie III, 1901).

Pisa, Gennaio 1905.

Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche (*).

(Di FRANCESCO SEVERI, *a Parma.)*

È noto che il concetto d'*integrale abeliano*, che ha un ufficio così importante nella teoria delle funzioni algebriche di una variabile, è stato trasportato in due modi nel campo delle funzioni algebriche di due variabili: da un lato, con CLEBSCH e NÖTHER, si sono considerati gl'integrali doppi di prima specie, e con PICARD (molto più recentemente) gl'integrali doppi di seconda specie; da un altro lato, si sono considerati, collo stesso sig. PICARD, gl'integrali di differenziali totali o integrali semplici (delle tre specie), che ormai, giustamente, a ricordo delle belle ricerche dell'eminente geometra francese, si chiamano *integrali di* PICARD.

Ma mentre pochi sono per ora i legami tra gl'integrali doppi e la geometria sulla superficie algebrica, immagine della funzione (**), numerosi si sono fatti, specialmente in questi ultimi mesi, i legami tra le proprietà trascendenti degl'integrali di PICARD, e le proprietà geometriche dei sistemi lineari di curve, tracciati sopra la superficie.

Questi risultati, di cui discorrerò diffusamente più tardi, hanno posto in luce che, prendendo come analoghi degl'integrali abeliani, gl'integrali di PICARD, il genere dell'ente algebrico ∞^1 viene ad avere per analogo l'irregolarità $p_g - p_a$ (cioè la differenza tra il *genere geometrico* ed il *genere aritmetico*) dell'ente ∞^2. Cosicchè, da questo punto di vista, le *superficie regolari*

(*) Un riassunto dei principali risultati di questa Memoria, è già apparso nei *Comptes rendus*, sotto lo stesso titolo: *Le théorème d'Abel sur les surfaces algébriques* (3 avril 1905).

(**) È noto che il numero degli integrali doppi di 1.ª specie, tra loro indipendenti, uguaglia il genere geometrico della superficie. Soltanto da poco il sig. PICARD ha trovato un legame tra il numero degl'integrali doppi distinti di 2.ª specie e i caratteri geometrici della superficie: questo numero si esprime mediante l'*invariante di* ZEUTHEN-SEGRE, l'irregolarità $p_g - p_a$ della superficie, e il numero dei sistemi continui che costituiscono la *base*. Questo risultato dovrà condurre ad altre importanti proprietà delle superficie algebriche!

($p_g = p_a$) vengono ad essere analoghe alle *curve razionali;* e come queste ultime son *caratterizzate* dal fatto di non contenere sistemi continui completi, non lineari, di gruppi di punti; così le prime son *caratterizzate* dalla mancanza di sistemi continui completi, non lineari, di curve algebriche.

Si presenta allora naturale l'estensione del teorema d'Abel, che esprime la più importante proprietà degl'integrali abeliani.

Sopra una curva di genere $p > 0$, il teorema d'Abel dà la condizione necessaria e sufficiente, affinchè un sistema continuo di gruppi di punti appartenga ad una serie lineare (cioè sia costituito da gruppi di livello costante di una data funzione razionale dell'ente). Dunque, dal punto di vista da cui ci poniamo, la questione analoga sulle superficie può presentarsi così: « Assegnare una condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema continuo « di curve algebriche, sopra una superficie d'irregolarità $p_g - p_a > 0$, sia con- « tenuto totalmente in un sistema lineare (*). »

Orbene, in questo lavoro io dimostro che *la condizione richiesta è che rimangano costanti, per una variazione continua di due curve del sistema, le somme degl'integrali di* Picard *della 1.ª specie, appartenenti alla superficie, nei punti comuni alle due curve variabili.*

È questa proposizione ch'io chiamo *il primo teorema d'*Abel *sulle superficie* (**).

Successivamente trasformo il teorema, rendendolo più espressivo e più utile nelle applicazioni.

Nel n.° 8 di questo lavoro deduco, dal 1.° teorema d'Abel, che *una superficie algebrica di generi, geometrico e aritmetico, p_g, p_a, possiede $p_g - p_a$ integrali semplici di 1.ª specie, e $2\,(p_g - p_a)$ integrali di 2.ª specie.*

Questo teorema, che trovasi enunciato con un'esposizione sommaria della dimostrazione (diversa da quella che si legge al n.° 8 della presente Memoria), in una Nota del sig. Castelnuovo (*Comptes rendus*, 23 janvier 1905),

---

(*) Veramente il teorema d'Abel dà di più la condizione perchè *due* gruppi di un ugual numero di punti (cioè appartenenti ad un medesimo sistema continuo), sieno tra loro *equivalenti.* Sicchè, sulle superficie, converrebbe proporsi di ricercare la condizione affinchè sieno equivalenti *due* curve di un medesimo sistema continuo; ma di questa maggiore determinazione della questione, mi occuperò in un altro lavoro.

(**) Non mancano estensioni del teorema d'Abel in altre direzioni; così in Humbert (*Sur le théorème d'Abel et quelques unes de ses applications à la Géométrie*, Journal de Math. 1889), trovasi un'estensione del teorema agl'integrali doppi, ed anche agl'integrali di differenziali totali (ma in una direzione diversa dalla nostra).

è il risultato complessivo di varie ricerche, che si sono succedute rapidamente in questi ultimi tempi.

In una Nota inserita nel settembre del 1904 tra i *Rendiconti dei Lincei*, io ho dimostrato che « ogni superficie la quale possegga integrali (trascendenti) « della 2.ª specie (in particolare di 1.ª), cioè che abbia l'ordine di connes- « sione lineare $p_1 > 1$, è irregolare $(p_g > p_a)$ » (*).

Questo teorema ha stabilito un primo legame qualitativo tra l'esistenza d'integrali di Picard della 2.ª specie e l'irregolarità della superficie.

Ma nella stessa Nota io ho dato la disuguaglianza

$$r - q \leq p_g - p_a, \tag{1}$$

ove r, q denotano i numeri degl'integrali indipendenti della 2.ª e della 1.ª specie appartenenti alla superficie di generi p_g, p_a.

Questa disuguaglianza, combinata coll'altra

$$r \geqq 2\,q, \tag{2}$$

che si ottiene con facilità (**), e che del resto è stata da tempo rilevata esplicitamente, p. es. dal sig. Picard (***), dà già:

$$q \leq p_g - p_a \quad (3), \qquad\qquad r \leq 2\,(p_g - p_a) \quad (4).$$

Il sig. Enriques, dimostrando poco dopo (*Rend. della R. Acc. di Bologna*, decembre 1904) l'importante teorema che « sopra una superficie ogni « sistema algebrico completo di curve (algebriche), ha la serie caratteri- « stica (****) completa », ne deduceva la caratterizzazione geometrica delle superficie irregolari; stabiliva cioè che ogni tal superficie è caratterizzata dalla presenza di sistemi continui non lineari.

Da ciò, in base al teorema che « sopra una superficie priva d'integrali « finiti di Picard, ogni sistema algebrico completo è lineare », teorema dimo-

(*) Un lavoro più ampio attorno a questo teorema, ha già preso da varî mesi il suo turno di stampa pei *Mathematische Annalen*. — Il caso di una superficie dotata di p integrali semplici a $2\,p$ periodi, era stato trattato dal sig. Enriques (Annales de Toulouse, 1901). — Vedi pure la mia Nota, *Osservazioni sui sistemi continui*... (Atti della R. Acc. di Torino, 1904).

(**) Vedi ad es. il n.° 3 della mia Nota, *Sulla differenza tra i numeri degl'integrali di* Picard... (Atti della R. Acc. di Torino, 22 gennaio 1905).

(***) Journal de Math., 1885, pag. 335.

(****) Per la definizione di serie caratteristica vedi il n.° 5 della presente Memoria.

strato dal sig. Humbert in una bella Memoria del 1894 (*Journal de Math.*) (nella quale trovansi considerazioni che ricorrono frequentemente in lavori più recenti), il sig. Enriques poteva dedurre l'inversione del teorema da me dato in settembre. Restava così stabilito che ogni superficie irregolare possiede integrali di Picard della 1.ª e della 2.ª specie, e quindi la disuguaglianza (1), e le (3), (4), che ne derivano, venivano ad acquistare validità per *tutte* le superficie irregolari.

Nel gennaio decorso il sig. Picard ed io siamo giunti, per vie diverse, all'uguaglianza

$$r - q = p_g - p_a \text{ (*)} ; \tag{5}$$

ma per ottenere il risultato definitivo mancava una disuguaglianza in senso contrario, la quale permettesse di trasformare in uguaglianze le (3), (4). Il sig. Castelnuovo potè fare quest'ultimo passo importante, e tutt'altro che agevole, mercè l'introduzione e l'uso ingegnoso del gruppo permutabile di trasformazioni birazionali, che mutano tra loro i sistemi lineari di un sistema continuo completo, di curve algebriche (**).

Nel n.° 8 di questa Memoria il lettore vedrà come la disuguaglianza del sig. Castelnuovo, possa stabilirsi pure coll'aiuto del primo teorema d'Abel.

Ho citato poc'anzi il sig. Picard, a proposito della relazione (5): debbo aggiungere che in una Nota inserita nello stesso numero dei *Comptes rendus*, in cui trovasi un riassunto del presente lavoro (3 aprile 1905), egli, continuando nello stesso ordine di idee svolto nella Nota citata del 16 gennaio, accenna ad un'altra via per arrivare alle uguaglianze

$$q = p_g - p_a , \quad r = 2 (p_g - p_a).$$

Il metodo del sig. Picard ha un indirizzo completamente diverso da quello del sig. Castelnuovo e dal mio: assunta come immagine proiettiva dell'ente ∞^2, una superficie F d'ordine m, le cui sezioni piane appartengano ad un sistema lineare regolare, l'irregolarità della F entra negli sviluppi del sig. Picard, mediante la deficienza della serie staccata sopra una sezione piana generica, dalle superficie aggiunte d'ordine $m - 3$; dopo ciò tutto procede

---

(*) Vedi le Note dei sigg. Picard ed Enriques inserite nei *Comptes rendus* del 16 gennaio; nonchè la mia Nota citata di Torino, *Sulla differenza tra i numeri degl'integrali*...

(**) [Il sig. Castelnuovo ha sviluppato diffusamente la sua dimostrazione nella Nota, *Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare* (Rendiconti dei Lincei, maggio-giugno 1905)] (9 agosto 1905).

coll'uso sistematico dell'equazione differenziale lineare E, di cui il sig. Picard profittò costantemente e in un modo così mirabile, nella sua teoria delle funzioni algebriche di due variabili, fin da quando stabilì il teorema fondamentale che « il numero degli integrali distinti di 2.ª specie, uguaglia il numero « dei loro periodi. »

Sinora ho parlato del *primo* teorema d'Abel sulle superficie. Ciò perchè, considerando il teorema d'Abel sulle curve di genere > 0 come esprimente una condizione affinchè un'*involuzione* di gruppi di punti, sia lineare, si presenta, sopra le superficie irregolari, la questione di « ricercare quand'è che « una data involuzione di gruppi di punti, è regolare. »

Il *secondo teorema* d'Abel, di cui tratto nella 2.ª parte di questo lavoro, afferma appunto che *la condizione necessaria e sufficiente perchè un'involuzione di gruppi di punti, data sopra una superficie, sia regolare, è che le somme degl'integrali finiti di* Picard, *appartenenti alla superficie, nei punti di un gruppo dell'involuzione, rimangano costanti al variare continuo di questo gruppo.*

Si deduce, dal 2.º teorema d'Abel, che *sopra una superficie, priva di fasci irrazionali, ogni involuzione di una serie continua è regolare.*

Ma tuttavia la portata del 2.º teorema d'Abel è inferiore alla portata del 1.º: basta a provarlo il fatto che, sopra una superficie irregolare, è eccezionale l'esistenza di involuzioni irregolari; mentre vi esistono sempre sistemi completi non lineari, di curve algebriche.

§ 1. Il primo teorema d'Abel e alcune sue applicazioni.

1. *Un lemma sopra le serie ∞^1 di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica.* Per ragioni di chiarezza giova staccare dalla dimostrazione del 1.º teorema d'Abel alcune questioni accessorie, che, del resto, sono già interessanti di per sè. Di tali questioni intendiamo appunto occuparci in questo numero e nel successivo.

Teorema I. *Sopra una curva algebrica (irriducibile) Γ, si abbia una serie algebrica ∞^1 (irriducibile) Σ di gruppi di ν punti, tale che l'insieme degli n gruppi di Σ che passano per un punto x variabile su Γ (inclusovi il punto x contato n volte), si muova entro una serie lineare (d'ordine $n\nu$): allora tutti i gruppi di Σ appartengono ad una medesima serie lineare (d'ordine ν).*

Fissiamo infatti l'attenzione sopra un gruppo $G \equiv (x_1 x_2 \ldots x_\nu)$ del sistema Σ, e, detto u un integrale abeliano di 1.ª specie, appartenente a Γ, formiamo la somma $u(x_1) + u(x_2) + \cdots + u(x_\nu)$.

Se entro alla superficie di Riemann Γ, il punto x_1 di G descrive il ciclo lineare σ, partendo dalla posizione iniziale fissata e ritornandovi, tra gli n gruppi di Σ che passano per x_1 si produrrà una certa permutazione, sì che, in generale, a circolazione avvenuta, il gruppo G si sarà mutato in un altro di tali gruppi. Ma è certo che se x_1 descrive $n!$ volte il ciclo σ, dopo un certo numero m di circolazioni σ (m essendo un divisore di $n!$) s'incontra la sostituzione identica, sicchè anche la circolazione $n!\,\sigma$ non produrrà alcuna permutazione tra i gruppi suddetti.

Ne deriva che, dopo tale circolazione, la somma $u(x_1) + \cdots + u(x_\nu)$ sarà aumentata di una combinazione lineare a coefficienti *interi* dei periodi, perchè si è prodotta — al più — una permutazione tra i punti $x_1 x_2 \ldots x_\nu$. Se ora il ciclo σ si deforma con continuità, assumendo una qualunque delle forme ad esso *equivalenti*, l'incremento della somma $u(x_1) + \cdots + u(x_\nu)$ per la circolazione $n!\,\sigma$, dovrà variare con continuità; e poichè i coefficienti dei periodi, che sono le sole quantità variabili durante questa deformazione, debbono mantenersi interi, si conclude che l'incremento stesso dovrà rimanere costante.

In tal modo ad ogni ciclo σ, che abbia l'origine e il termine in un punto x_i del gruppo G, viene *associato* un incremento della somma $u(x_1) + \cdots + u(x_\nu)$, il quale può bensì dipendere dalla posizione del punto x_i entro a G, ma non muta se si sostituisce a σ un ciclo equivalente.

Si può ora far variare con continuità il gruppo G, a partire dalla posizione iniziale fissata e ritornandovi, di guisa che il punto x_1, p. es., vada nel posto di uno qualunque dei punti rimanenti $x_2 \ldots x_\nu$. Considerando sopra la superficie di Riemann Γ una famiglia di cicli equivalenti σ, definiti in modo ben determinato, p. es. rispetto ai tagli normali, se ne rileva che l'incremento della somma $u(x_1) + \cdots + u(x_\nu)$, associato ad un ciclo σ che passi per x_1, è uguale all'incremento associato ad un ciclo σ che passi per x_i $(i = 2, \ldots, \nu)$, perchè, nella variazione continua di G, quell'incremento non può variare, sempre a causa del suo particolar legame coi periodi.

Dunque, allorquando un punto del gruppo $(x_1 x_2 \ldots x_\nu)$ traversa $n!$ volte, col medesimo cammino, un determinato taglio normale, ritornando alla posizione di partenza, la somma $u(x_1) + \cdots + u(x_\nu)$ subisce un incremento *in-*

dipendente dalla posizione iniziale del gruppo e dalla scelta entro al gruppo stesso, del punto che si fa circolare.

Vediamo ora a quale conclusione più precisa conduca l'ipotesi che l'insieme dei gruppi di Σ uscenti dal punto variabile su Γ, si muova entro una serie lineare d'ordine $n\nu$.

Rappresentando i gruppi di Σ coi punti di un'altra curva algebrica C, verremo ad avere tra Γ e C una corrispondenza (ν, n). Quando il punto y che rappresenta il gruppo $(x_1 x_2 \ldots x_\nu)$, descrive $\nu\,!$ volte un ciclo τ, i punti x non si permutano tra loro, così che il punto x_1, ad es., descrive un ciclo σ, ritornando alla posizione di partenza. Se, dunque, a è l'incremento di $u(x_1) + \cdots + u(x_\nu)$ quando x_1 descrive il ciclo $n\,!\,\sigma$, per la stessa circolazione $n\,!\,\sigma$ la somma U dei valori di u nei punti di tutti i gruppi di Σ, che escono da x_1, aumenterà di $n\,a$.

Non può quindi essere $a \neq 0$, perchè altrimenti la somma U non resterebbe costante per la circolazione $n\,!\,\sigma$: contrariamente al teorema di Abel.

Si conclude pertanto che la somma $u(x_1) + \cdots + u(x_\nu)$ è funzione *uniforme*, dovunque finita, del punto y; e quindi che, al variare continuo di y, essa rimane costante. In forza della sufficienza della condizione data dal teorema d'Abel, ciò significa che il gruppo $(x_1 \ldots x_\nu)$ varia in una serie lineare, c. d. d.

2. *Lemma sulle corrispondenze a valenza zero tra una curva ed una superficie.* Tra i punti di una curva algebrica Γ ed i punti di una superficie algebrica F, s'immagini una corrispondenza algebrica, che associ ad ogni punto ξ di Γ, tutti i punti di una curva algebrica C di F, in guisa che, al variare del punto ξ, la C descriva un sistema algebrico ∞^1 (irriducibile) S, di grado n e indice ν.

Ogni curva C proverrà da $k\,(\geqq 1)$ punti di Γ; così che, al variare di C entro ad S, questi k punti descriveranno su Γ un'involuzione di grado k, e le ν curve di S uscenti da un punto di F, saranno rappresentate su Γ da un gruppo di $n' = k\nu$ punti. Il sistema Σ di questi ∞^2 gruppi di n' punti, sarà birazionalmente identico ad F o ad un'involuzione ivi esistente, secondo che le ν curve di S passanti pel punto generico x di F, non passano o passano di conseguenza per altri punti della superficie, variabili con x. Se il sistema S è *composto* con un'involuzione di grado $l\,(\geqq 1)$, per due punti generici di Γ passeranno $\nu' = \frac{n}{l}$ gruppi di Σ; cioè il sistema Σ avrà l'indice ν'.

Come naturale estensione delle corrispondenze a valenza zero tra due curve (*), possiamo definire le *corrispondenze a valenza zero tra una curva ed una superficie.*

Data una corrispondenza, che faccia passare dai punti di Γ ai punti di F, diremo che essa è a valenza zero, quando le curve C omologhe dei punti di Γ, appartengono ad un medesimo sistema lineare; e diremo che è a valenza zero la corrispondenza (inversa della precedente), che fa passare dai punti di F a quelli di Γ, allorquando appartengono ad una medesima serie lineare, i gruppi di Σ, omologhi dei punti di F.

Premesse queste definizioni, passiamo a dimostrare il

Teorema II. *Tra una curva Γ ed una superficie F una corrispondenza che sia a valenza zero in un senso, lo è pure nel senso opposto.*

Supposto infatti che le C, di cui sopra, appartengano ad un medesimo sistema lineare $|C|$, prendiamo come immagine di F una superficie F (semplice o multipla), le cui sezioni iperpiane sieno immagini del sistema $|C|$; e diciamo S' il sistema degli ∞^1 iperpiani corrispondenti proiettivamente alle C del sistema S.

Per un punto di F' passano ν iperpiani di S : e poichè la F' non fa parte dell'inviluppo del sistema S' (chè altrimenti ogni iperpiano di S' toccherebbe la F' in infiniti punti), si conclude che per ogni punto dello spazio passano ν iperpiani di S (**), cioè che gli ∞^2 gruppi di ν iperpiani uscenti dai punti di F', appartengono alla serie lineare, d'ordine ν, staccata entro all'ente S' dai punti dello spazio. E siccome il sistema S è birazionalmente identico alla curva Γ (o ad un'involuzione ivi esistente, se $k>1$), i gruppi del sistema Σ dovranno appartenere ad una medesima serie lineare.

Suppongasi, viceversa, che i gruppi di Σ appartengano ad una medesima serie lineare $g_{n'}$, e si prenda come immagine della curva Γ, una curva Γ (semplice o multipla), le cui sezioni iperpiane sieno immagini dei gruppi di $g_{n'}$. Ai gruppi di Σ verranno a corrispondere proiettivamente ∞^2 iperpiani costituenti un sistema Σ', tale che per due punti generici di Γ' passeranno ν iperpiani del sistema.

(*) Vedi ad es. la mia Memoria, *Sulle corrispondenze tra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie* (Memorie della R. Acc. di Torino, (2) t. 53, 1903); n.° 14.

(**) Questa considerazione che torna utile spesso (sotto forme più o meno differenti), è dovuta al sig. Segre. Vedi la sua *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito* (Annali di Matematica, 1891), n.° 23.

Si vede, in primo luogo, che il sistema degli ∞^1 iperpiani di Σ uscenti da un punto generico di Γ', è di classe ν' (per la solita considerazione di Segre); e, in secondo luogo, che è di classe ν' il sistema degli infiniti iperpiani di Σ' che escono da un punto generico dello spazio. Onde, entro all'ente Σ', il sistema delle varietà ∞^1 *staccate* dai singoli punti di Γ', appartiene totalmente al sistema lineare di tutte le varietà ∞^1, *di ugual classe*, staccate dai singoli punti dello spazio. Tenendo conto del fatto che Σ è birazionalmente identico alla superficie F (o ad un'involuzione ivi esistente, se $l > 1$), si conclude che le curve C appartengono ad un medesimo sistema lineare.

Osservazione. Il concetto di valenza nulla e il relativo teorema II, *si estendono subito alle corrispondenze tra una curva ed una varietà algebrica di dimensione qualunque.*

Da tale estensione discende p. e. il

Corollario. *Sopra una varietà algebrica a k dimensioni V, una varietà razionale ∞^1 di M_{k-1} è sempre contenuta totalmente in un sistema lineare* (*).

Basta perciò rappresentare le M_{k-1} coi punti di una curva razionale Γ; osservare che sopra Γ tutti i gruppi di un ugual numero di punti, appartengono ad una medesima serie lineare; ed applicare il teorema II esteso.

3. *Il primo teorema d'Abel sulle superficie.* Passiamo ora a dimostrare quello che io ho chiamato il primo teorema d'Abel sulle superficie. Eccone l'enunciato:

Teorema III. *Sieno $I_1 I_2 \ldots I_q$ gl'integrali semplici di 1.ª specie (tra loro indipendenti), che appartengono ad una superficie algebrica F; e sieno $x_1 x_2 \ldots x_n$ i punti comuni a due curve algebriche, tracciate sulla superficie, e variabili con continuità entro una medesima serie algebrica S: allora, la condizione necessaria e sufficiente affinchè questa serie sia contenuta totalmente in un sistema lineare, è che le somme*

$$I_h(x_1) + \cdots + I_h(x_n), \quad (h = 1, \ldots, q),$$

restino costanti.

La necessità della condizione è un'ovvia conseguenza dell'ordinario teorema d'Abel. Invero, se il dato sistema S appartiene totalmente ad un sistema lineare, gl'infiniti gruppi segati sopra una curva C di S, dalle altre C

(*) Cfr. Enriques, *Un'osservazione relativa alla rappresentazione parametrica delle curve algebriche* (Rendiconti di Palermo, 1896).

del sistema, appartengono ad una medesima serie lineare; e quindi la somma dei valori di un integrale abeliano di 1.ª specie disteso sulla C, nei punti di uno di questi gruppi, resta costante al variare continuo di tal gruppo. Ciò accade in particolare della somma dei valori di un integrale I_h, perchè quest'integrale dà luogo sulla C fissata, ad un integrale abeliano (riducibile).

Passiamo a stabilire la sufficienza della condizione.

Senza alcuna restrizione possiamo supporre che il sistema S sia ∞^1 (e irriducibile). Ne indicheremo con ν l'indice; e, per evitare complicazioni di forma, supporremo dapprima che il sistema S sia *semplice*, cioè che le ν curve C di S uscenti da un punto generico x di F, non passino in conseguenza per altri punti di F, variabili con x.

Rappresentati birazionalmente gli elementi (curve) di S coi punti di una curva algebrica piana

$$\Gamma(\xi\,\eta) = 0,$$

su Γ verremo ad avere al solito ∞^2 gruppi di ν punti (immagini dei gruppi di curve C uscenti dai punti di F) costituenti un sistema Σ, d'indice n. Tale sistema sarà birazionalmente identico ad F; onde, detto u un integrale abeliano di 1.ª specie, appartenente a Γ, la somma $u(\xi_1) + \cdots + u(\xi_\nu)$, relativa ai ν punti $\xi_1 \ldots \xi_\nu$ che corrispondono al punto x di F, si trasformerà in un integrale finito di Picard, J, appartenente ad F (*).

Sicchè, se x assume successivamente le posizioni $x_1, x_2, \ldots, x_n$, in modo che il gruppo $(\xi_1\,\xi_2 \ldots \xi_\nu)$ assuma successivamente le posizioni:

$$(\xi'_1\,\xi'_2 \ldots \xi'_\nu)\,, \quad (\xi''_1\,\xi''_2 \ldots \xi''_\nu)\,, \ldots, \quad (\xi^n_1\,\xi^n_2 \ldots \xi^n_\nu)\,,$$

ove sarà ad es. $\xi'_1 \equiv \xi''_1 \equiv \cdots \equiv \xi^n_1$, $\xi'_2 \equiv \xi''_2 \equiv \cdots \equiv \xi^n_2$ (ξ'_1, ξ'_2 denotando i punti immagini di due C che s'intersechino secondo il gruppo $x_1 \ldots x_n$), la somma

$$\sum_{r=1}^{n} \Big[u(\xi^r_1) + u(\xi^r_2) + \cdots + u(\xi^r_\nu) \Big],$$

risulterà uguale ad

$$J(x_1) + J(x_2) + \cdots + J(x_n),$$

e quindi (per l'ipotesi da cui partiamo) rimarrà costante, al variare continuo dei punti ξ'_1, ξ'_2.

(*) Questa feconda considerazione è dovuta al sig. Humbert: *Sur quelques points de la théorie des courbes et des surfaces algébriques* (Journal de Math., (4), t. X, 1894).

In virtù dell'ordinario teorema d'Abel, se ne deduce che l'insieme dei gruppi di Σ uscenti da due punti variabili su Γ, varia entro una serie lineare (d'ordine $n\,\nu$).

Applicando il teorema I, si trae da ciò che gli ∞^1 gruppi di Σ uscenti da un punto fissato di Γ, appartengono ad una medesima serie lineare; e poichè le serie lineari complete che si ottengono a partire da due punti diversi di Γ, contengono entrambe gli n gruppi di Σ che escono da questi punti, esse dovranno coincidere: cioè *tutti i gruppi di Σ apparterranno ad una medesima serie lineare.*

La corrispondenza tra F e Γ è perciò a valenza zero, e quindi (teorema II) le curve C apparterranno ad un medesimo sistema lineare.

Si è supposto fin qui che il sistema S sia semplice. Se, al contrario, S è composto con un'involuzione di grado l, rappresentando i gruppi di questa coi punti di una nuova superficie F', avremo tra F, F' una corrispondenza $(l, 1)$, che farà passare dal sistema S ad un sistema semplice S' di curve C'.

Dicasi J' un integrale finito di Picard appartenente ad F': mediante la sostituzione razionale che lega le coordinate del punto x di F', alle coordinate del punto x di F, l'integrale $J'(x)$ si muta in un integrale di 1.ª specie $J(x)$, che appartiene ad F ed assume lo stesso valore, $J'(x)$, in tutti gli l punti x corrispondenti ad x'. Sicchè l'ipotesi che sieno costanti le somme $I_h(x_1) + \cdots + I_h(x_n)$, si traduce in ciò: che, dicendo

$$x'_1\, x'_2 \ldots x'_m \left(m = \frac{n}{l}\right)$$

i punti comuni a due curve C', ed J' un integrale qualunque di 1.ª specie appartenente ad F', la somma $l\,U$, ove si è posto

$$U = J'(x'_1) + \cdots + J'(x'_m),$$

rimane costante, al variare continuo delle due C'.

Se ora si fanno variare con continuità le due C, ritornando in fine alle posizioni iniziali, e s'indica con a l'incremento di U dopo questa circolazione, sarà $l\,a$ l'incremento corrispondente di $l\,U$; e poichè $l\,a = 0$, dovrà essere $a = 0$: cioè la somma U sarà funzione *uniforme*, ovunque finita, del gruppo $(x'_1\, x'_2 \ldots x'_m)$.

Si conclude pertanto che $U = \text{cost.}$, e quindi, pel ragionamento precedente, che le curve C' appartengono ad un medesimo sistema lineare $|\,C'\,|$.

Ne deriva che le C appartengono al sistema *lineare* trasformato di $|\,C'\,|$.

Osservazione. In particolare, quando la F sia priva di integrali finiti di Picard, la condizione richiesta dal teorema III è senz'altro soddisfatta, e si ha il teorema di Humbert (*):

Sopra una superficie priva di integrali finiti di Picard, *ogni sistema algebrico (irriducibile) di curve algebriche, è contenuto totalmente in un sistema lineare.*

4. *Un legame trascendente fra tre curve di un medesimo sistema continuo.* Al teorema d'Abel ora dimostrato, si posson dare altre forme, che lo rendono più espressivo e più utile. Una di queste forme si ottiene mediante l'applicazione del seguente

Teorema IV. *Sieno C, C_1, C_2, tre curve algebriche di un medesimo sistema continuo S, appartenente ad una superficie F. Allora, se le C_1, C_2 restano fisse e la C varia con continuità entro al sistema, la differenza tra le somme dei valori di un integrale di 1.ª specie nei punti dei gruppi $(C\,C_1)$, $(C\,C_2)$ (**), si mantiene costante.*

Supposto, com'è lecito, che il sistema S sia ∞^1 (irriducibile), di grado n e indice ν, ricorriamo alla solita rappresentazione delle curve di S coi punti della curva piana Γ. Detti $(x_1 x_2 \dots x_n)$ i punti del gruppo $(C\,C_1)$, $(\bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_n)$ i punti del gruppo $(C\,C_2)$, ed I un integrale qualunque di 1.ª specie, appartenente ad F, formiamo l'espressione

$$I(x_1) + I(x_2) + \cdots + I(x_n) - I(\bar{x}_1) - I(\bar{x}_2) - \cdots - I(\bar{x}_n).$$

Al variare della sola curva C, questa differenza risulta evidentemente uguale al valore di un certo integrale abeliano (di 1.ª specie) della curva Γ, nel punto ξ che corrisponde a C; onde avremo:

$$\left.\begin{aligned} I(x_1) + I(x_2) + \cdots + I(x_n) - I(\bar{x}_1) - \cdots - I(\bar{x}_n) = \\ = \lambda_1 u_1(\xi) + \cdots + \lambda_\pi u_\pi(\xi) + \lambda, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

ove $u_1, u_2, \dots, u_\pi$ sono i π integrali normali di 1.ª specie appartenenti a Γ, e le λ son costanti.

Facendo circolare ξ in modo che traversi il taglio che corrisponde al periodo 1 di u_1, il primo membro aumenta di una combinazione lineare a *coefficienti interi* dei periodi di I; mentre il 2.° membro aumenta di λ_1. Sicchè λ_1

(*) Loc. citato.

(**) Con $(C\,C_1)$ si rappresenta il gruppo dei punti comuni alle curve C, C_1.

risulta uguale ad una combinazione lineare a coefficienti interi dei periodi di I; e analoghe espressioni si hanno per $\lambda_2 \ldots \lambda_\pi$.

Se ora facciamo variare con continuità una delle C_1, C_2, o entrambe, le λ variano con continuità; e siccome nelle espressioni delle $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\pi$ le sole quantità che a priori risultino dipendenti dalla posizione delle C_1, C_2, sono i coefficienti interi delle combinazioni lineari, si conclude che le λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_\pi$ si mantengono costanti (mentre λ può effettivamente variare).

Sicchè l'integrale

$$v(\xi) = \lambda_1 u_1(\xi) + \cdots + \lambda_\pi u_\pi(\xi),$$

risulta indipendente dalla posizione delle C_1, C_2 entro al sistema S.

Facendo tendere con continuità la curva C_2 alla C_1, e tenendo fissa la C, il gruppo $(\bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n)$ tenderà ad $(x_1 x_2 \ldots x_n)$; sicchè, per un'opportuna scelta del cammino che porta C_2 in C_1, il 1.° membro della relazione (1) tenderà a zero, mentre nel 2.° membro varierà soltanto λ, tendendo ad un certo limite λ_0.

Al limite avremo dunque:

$$\lambda_1 u_1(\xi) + \cdots + \lambda_\pi u_\pi(\xi) + \lambda_0 = 0.$$

E poichè tale relazione vale per qualunque posizione della curva C entro ad S, cioè per qualunque posizione del punto ξ sulla Γ, e d'altra parte gli integrali $u_1 u_2 \ldots u_\pi$ sono linearmente indipendenti, si conclude che le λ son tutte nulle. La (1) riducesi perciò alla

$$I(x_1) + \cdots + I(x_n) - I(\bar{x}_1) - \cdots - I(\bar{x}_n) = \lambda,$$

la quale dimostra il teorema.

5. *Una seconda forma del teorema d'Abel.* Avendosi sopra una superficie F un sistema continuo di curve C, per *serie caratteristica* di una curva generica del sistema, s'intende la serie lineare di gruppi di punti segati sulla curva fissata, dalle C che sono infinitamente prossime ad essa *).

Chiameremo, per brevità, *somme caratteristiche* relative ad una C del sistema S, le somme dei valori assunti dagli integrali di 1.ª specie $I_1 I_2 \ldots I_q$, appartenenti ad F, nei punti di un gruppo caratteristico di C. Tali somme risultano definite a meno di multipli dei periodi.

(*) Vedi la mia Nota, *Osservazioni sui sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica* (Atti della R. Acc. di Torino, 1901).

Orbene, mediante la proposizione del numero precedente, il teorema di Abel (n.° 3) si trasforma nel modo seguente:

Teorema V. *La condizione necessaria e sufficiente affinchè le curve di un sistema continuo tracciato sopra una superficie algebrica, sieno tra loro equivalenti (cioè appartengano ad un medesimo sistema lineare), è che sieno uguali, a meno di multipli dei periodi, le corrispondenti somme caratteristiche di due curve qualunque del sistema.*

La necessità della condizione essendo evidente, occupiamoci di stabilirne la sufficienza.

Se C_1, C_2 son due curve del sistema, e G_1, G_2 due loro gruppi caratteristici, segando le C_1, C_2, una volta con una curva infinitamente prossima a C_1, e un'altra volta con una curva infinitamente prossima a C_2, avremo (teor. IV):

$$\Sigma\, G_1 - \Sigma\,(C_1\, C_2) \equiv k, \quad \Sigma\,(C_1\, C_2) - \Sigma\, G_2 \equiv k \ \text{(modd. periodi)},$$

ove $\Sigma\, G_1$, $\Sigma\,(C_1\, C_2), \dots$ indicano le somme dei valori assunti da un integrale I di 1.ª specie, nei punti dei gruppi G_1, $(C_1\, C_2), \dots$ Sommando membro a membro, e ricordando l'ipotesi $\Sigma\, G_1 \equiv \Sigma\, G_2$, si ottiene $2\, k \equiv 0$.

Ora, quando C_2 tende con continuità a C_1, la k, essendo esprimibile mediante una combinazione lineare a coefficienti interi dei semiperiodi di I, non può variare; e poichè quando C_2 coincide con C_1 si ha $k \equiv 0$, dovrà risultare:

$$\Sigma\, G_1 \equiv \Sigma\,(C_1\, C_2) \equiv \Sigma\, G_2.$$

Dunque al variare *continuo* delle curve C_1, C_2, rimane costante la $\Sigma\,(C_1\, C_2)$. Ciò prova che il sistema S appartiene totalmente ad un sistema lineare (teor. III).

6. *Un criterio di equivalenza per due curve tracciate sopra una superficie.* Prima di passare ad esporre una terza forma sotto cui può presentarsi il primo teorema d'Abel, dimostreremo una proposizione che può riescire utile anche in altre circostanze.

Ecco di cosa si tratta:

Teorema VI. *Se due curve C_1, C_2 tracciate sopra una superficie F, segano gruppi equivalenti sopra le curve A di un fascio irriducibile (razionale o irrazionale), esse sono equivalenti o differiscono per curve del fascio.*

Invero i gruppi equivalenti $(A\, C_1)$, $(A\, C_2)$ individuano sopra la curva A una serie lineare g_m^1 che li *congiunge*. Al variare della A otteniamo una semplice infinità di queste g_m^1. I loro gruppi si possono perciò rappresentare coi punti di una nuova superficie Φ, la quale verrà a contenere un fascio Σ'

di curve razionali A', immagini delle singole g^1_m. I gruppi segnati sulle C_1, C_2 dalle curve A del fascio dato Σ, verranno rappresentate dai punti di due curve C'_1, C'_2, *unisecanti* le A'.

Si può ora costruire in infiniti modi (p. e. aggiungendo ad una delle unisecanti note, un gruppo conveniente di curve A') una terza unisecante D', che non contenga come parte nè C'_1 nè C'_2.

Mediante la corrispondenza $(1, m)$ che si ha tra Φ ed F, alla D' corrisponde su F una curva D, secante ciascuna A (fuori degli eventuali punti base) in un gruppo della relativa g^1_m; sicchè mediante le terne di gruppi segati dalle tre curve C_1, C_2, D sopra due qualunque A, resta individuata una proiettività tra le relative g^1_m.

Fissato un gruppo di una g^1_m, gl'infiniti gruppi delle altre, omologhi al gruppo fissato nelle suddette proiettività, riempiono una curva L, che, al variare del gruppo entro la propria g^1_m, descrive un fascio lineare $|L|$, le cui curve segnano sulle A (fuori dei punti base) i gruppi delle g^1_m. Al fascio $|L|$ appartengono come curve parziali o totali le C_1, C_2, D; ed è chiaro che la differenza tra $|L|$ ed una di queste curve non può che equivalere ad un insieme di curve A.

Si conclude che le C_1, C_2 sono equivalenti o differiscono per curve del fascio.

Osservazione. *Se il fascio dato è lineare e le curve C_1, C_2 son dello stesso ordine, la seconda alternativa dell'enunciato è evidentemente impossibile.*

7. *La terza forma del teorema d'Abel.* Premesso il teor. VI, consideriamo ancora su F un sistema algebrico ∞^1 S (non composto con un'involuzione) di curve C, e (come al n.° 3) rappresentiamo le C coi punti di una curva piana Γ, conservando le stesse notazioni del n.° 3.

I gruppi di ν curve C uscenti dal punto x variabile sopra una curva irriducibile A della F, son rappresentati su Γ da una ∞^1 irriducibile, T, di gruppi $(\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_\nu)$.

Diciamo $(x_1 x_2 \ldots x_m)$ il gruppo dei punti segati sulla A dalla curva C variabile entro ad S.

Poichè la somma dei valori di un integrale abeliano di 1.ª specie u della Γ, nei punti del gruppo $(\xi_1 \ldots \xi_\nu)$, corrispondente al punto x di A, è uguale (come abbiamo osservato al n.° 3) al valore assunto in x da un certo integrale J, di 1.ª specie, appartenente ad F; se si ammette che la somma dei valori assunti da un integrale finito della F nei punti x_1, $x_2, \ldots, x_m$, si mantenga costante al variare continuo del gruppo (CA) (cioè al variare continuo della C), riprendendo il ragionamento del n.° 3, si perviene alla conclusione che la somma dei valori assunti da u nei punti dei gruppi di T, che passano per un punto di Γ, resta costante al variare continuo di questo punto.

Ciò significa (in virtù dell'ordinario teorema d'Abel), che l'insieme dei gruppi di T uscenti da un punto ξ variabile su Γ (compresovi il punto ξ contato m volte), varia entro una serie lineare (d'ordine $m\nu$).

Applicando il teor. I si conclude che i gruppi di T appartengono ad una medesima serie lineare, cioè che la corrispondenza (m, ν) tra i punti di A ed i punti di Γ, è a valenza zero in un senso, e quindi (teor. II) anche nell'altro. Dunque i gruppi segnati su A dalle curve C, appartengono ad una medesima serie lineare.

La stessa conclusione vale quando il sistema S sia composto con un'involuzione di grado l. Rappresentando i gruppi dell'involuzione coi punti di una nuova superficie F', se la A non appartiene, neanche parzialmente, all'involuzione, se cioè gli $l-1$ coniugati di un punto generico di A, sono tutti esterni alla curva stessa, la curva A di F' corrispondente ad A, sarà segata precisamente in m punti dalle curve C' immagini delle C; e la somma dei valori di un integrale di 1.ª specie J', relativo ad F', nei punti di un gruppo $(C'A')$, risultando uguale alla somma dei valori dell'integrale trasformato J, nei punti del gruppo omologo (CA), resterà costante al variare continuo di C'. Poichè il sistema delle C' è semplice, si conclude che i gruppi $(C'A')$, e quindi i gruppi (CA), appartengono ad una medesima serie lineare.

Se poi A appartiene all'involuzione (parzialmente o totalmente), si applicheranno a questo caso le considerazioni colle quali si chiude il n.° 3, e si concluderà ancora come sopra.

Supponendo ora che la curva A sia variabile entro un fascio lineare $|A|$, si vede in primo luogo, che i gruppi segati da due diverse A sopra una C sono equivalenti, e quindi che un integrale qualunque di 1.ª specie appartenente ad F, dà in quei gruppi le stesse somme (a meno di multipli dei periodi).

Se dunque le somme cui dànno luogo gl'integrali di 1.ª specie della F in un gruppo (CA), rimangono costanti al variare continuo della C, quando la A ha una posizione fissata entro al fascio, lo stesso accadrà per *ogni altra* posizione della A; e quindi le C segheranno gruppi equivalenti sulle curve di $|A|$: donde segue (numero precedente, Oss.) che il sistema S è contenuto totalmente in un sistema lineare.

Viceversa, partendo da quest'ultima ipotesi, si vede subito che le somme degl'integrali di 1.ª specie nei punti di un gruppo (CA), rimangono costanti al variare continuo delle curve C, A. Arriviamo così al

Teorema VII. *La condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema continuo di curve algebriche C, appartenente ad una superficie F, sia contenuto totalmente entro un sistema lineare, è che la somma dei valori di ogni integrale semplice di 1.ª specie della F, nei punti comuni ad una C e ad una curva irriducibile A, fissata entro ad un fascio lineare, resti costante al variare continuo della C.*

8. *Determinazione del numero degli integrali di Picard della 1.ª (e della 2.ª) specie appartenenti ad una superficie algebrica.* Come applicazione notevolissima del primo teorema d'Abel, possiamo determinare i numeri degli integrali di Picard delle prime due specie, che appartengono ad una superficie F, di generi p_g, p_a.

A tal uopo prendiamo su F un sistema algebrico completo $\{C\}$, di dimensione $p_g - p_a$, la cui curva generica sia isolata. In base al teorema di Enriques, che afferma la completezza della serie caratteristica di un sistema algebrico completo (*), possiamo ottenere un sistema soddisfacente alle condizioni richieste, imponendo d punti base generici ad un sistema algebrico regolare $\infty^{d+p_g-p_a}$, cioè ad un sistema la cui curva generica individui un sistema lineare regolare ∞^d.

Fissiamo su F un fascio lineare irriducibile $|A|$ e consideriamo le somme $c_1, c_2, \ldots, c_q$ (definite a meno di multipli dei periodi), cui dànno luogo gl'integrali di 1.ª specie $I_1, I_2, \ldots, I_q$ appartenenti ad F, nel gruppo (CA), comune ad una A fissata e ad una C variabile entro al dato sistema.

Vogliamo provare anzitutto che non possono esservi infinite C che dieno le stesse somme di una C_0 *generica.* Consideriamo perciò entro a $\{C\}$, un sistema algebrico (irriducibile) ∞^1, S, che contenga C_0; e rappresentiamo al solito le curve di S coi punti di una curva piana Γ; così che il gruppo delle ν curve di S che escono dal punto x variabile su A, venga rappresentato da un gruppo di ν punti $(\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_\nu)$ di Γ, variabile entro un sistema ∞^1 T.

Tenendo sempre conto del fatto che la somma dei valori assunti da un integrale qualunque di 1.ª specie della Γ, nei punti del gruppo $(\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_\nu)$, è uguale al valore assunto nel punto x, da un integrale di 1.ª specie della superficie F, si vede che, se le curve C_0, C_1 del sistema S, dànno luogo agli

(*) Enriques, *Sulla proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari* (Rend. della R. Acc. di Bologna, decembre 1904). — Per un'altra dimostrazione del teorema di Enriques, ved. la mia Nota, *Intorno alla costruzione dei sistemi completi non lineari...* (Rendiconti di Palermo, 1905.)

stessi valori per le somme $c_1 c_2 \ldots c_q$, l'insieme G_0 dei gruppi di T che escono dal punto ξ^0 di Γ omologo di C_0, dovrà essere equivalente all'insieme G_1 dei gruppi di T che escono dal punto ξ', omologo di C_1.

Ora: o tutti i gruppi G (ciascuno dei quali è costituito dall'insieme dei gruppi di T uscenti da un punto di Γ) sono equivalenti tra loro; oppure vi è soltanto un *numero finito* di gruppi G equivalenti a G_0. Nel 1.° caso tutti i gruppi di T sono equivalenti (teor. I), e quindi lo sono pure tutti i gruppi segati su A dalle curve di S (teor. II), cioè S è contenuto totalmente entro un sistema lineare (teor. VII). Ma ciò deve escludersi, per l'ipotesi che la curva generica C_0 sia isolata.

Resta dunque possibile soltanto il 2.° caso: e quindi entro ad S non potrà aversi che un numero finito di curve C, che dieno per le somme c_1, $c_2, \ldots, c_q$ valori rispettivamente uguali a quelli dati da C_0.

Ne deriva che la varietà V di tutte le curve di $|C|$ che dànno le stesse somme di C_0, ha comune un *numero finito* di curve con ogni sistema algebrico ∞^1 contenente C_0: dunque V è *algebrica.*

Ogni *parte* infinita della V, pel teor. VII, dovrebbe esser costituita da curve tra loro equivalenti. Ma ciò è inconciliabile coll'ipotesi che la curva generica di $|C|$ sia isolata. Sicchè la V non potrà contenere infiniti elementi.

Si conclude pertanto che, *al variare della C entro al sistema $|C|$, le somme $c_1, c_2, \ldots, c_q$ assumono $\infty^{p_g - p_a}$ gruppi distinti di valori.* Ciò porta di necessità la disuguaglianza

$$q \geqq p_g - p_a. \tag{1}$$

Indicando con r il numero degli integrali distinti di 2.ª specie appartenenti ad F, avremo:

$$r - q \leqq p_g - p_a \text{ (*)}, \tag{2}$$

e inoltre:

$$r \geqq 2\,q, \tag{3}$$

come si vede osservando che i $2\,q$ integrali di 2.ª specie aventi per periodi le parti reali e le parti immaginarie dei periodi di $I_1, I_2, \ldots, I_q$, sono tra loro distinti (**). Le disuguaglianze (1), (2), (3) non possono coesistere, se

---

(*) Cfr. la mia Nota citata, *Sulle superficie algebriche che posseggono integrali di* PICARD..., n.° 3 (Rendiconti dei Lincei, 1904).

(**) Vedi ad es. la mia Nota, *Sulla differenza tra i numeri degli integrali di* PICARD..., n.° 3.

non essendo

$$q = p_g - p_a, \quad r = 2(p_g - p_a).$$

Si perviene così al

TEOREMA VIII. *Una superficie algebrica di generi p_g, p_a possiede $p_g - p_a$ integrali di* PICARD *della 1.ª specie, e $2(p_p - p_a)$ integrali di* PICARD *della 2.ª specie* (*).

9. *Alcuni corollari geometrici dei teoremi precedenti.*

a) Una conseguenza immediata del teor. VII, che per quanto contenga assai meno di questo teorema, giova tuttavia rilevare per la sua forma geometrica, è la seguente:

Se sopra una superficie F le curve di un sistema continuo S segano gruppi equivalenti sopra UNA *curva irriducibile, la quale individui un sistema lineare almeno ∞^1, il sistema S sarà contenuto totalmente in un sistema lineare.*

Questa proposizione ha una certa analogia col teor. VI; ma mentre nel caso attuale, trattandosi di curve C di un sistema continuo, basta soltanto verificare l'equivalenza dei gruppi segati dalle C sopra *una* curva irriducibile di un sistema lineare infinito; nel caso trattato al n.º 6 occorreva verificare l'equivalenza dei gruppi segati dalle due date curve C_1, C_2, sulle curve di tutto un fascio.

b) Il teor. II può pure enunciarsi sotto la forma seguente:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema algebrico ∞^1, S, di curve C tracciate sopra una superficie F, sia contenuto totalmente in un sistema lineare, è che entro all'ente S, appartengano ad una medesima serie lineare i gruppi di curve C uscenti dai punti di F.

c) Dato sulla superficie F un sistema algebrico ∞^1, S, di curve C, dicansi $C_1, C_2, \ldots, C_\nu$ le ν curve di S uscenti dal punto x di F, e suppongasi che, variando x, la curva composta $C_1 + C_2 + \cdots + C_\nu$ varii entro un sistema lineare.

Presa su F una curva irriducibile A, si consideri il sistema ∞^1, U, di gruppi di punti, segato su A dalle C. Quando x si muove sulla A, l'insieme dei ν gruppi di U che passano pel punto x, si muove nella serie lineare segata su A dal sistema $|C_1 + C_2 + \cdots + C_\nu|$; onde (teor. I) i gruppi di U apparterranno ad una medesima serie lineare.

(*) Per le citazioni relative a questo teorema, veggasi l'introduzione al presente lavoro.

Supponendo che A sia una curva di un sistema lineare infinito, mediante l'applicazione del Corollario a), si giunge al teorema:

Se sopra una superficie F si ha un sistema algebrico ∞^1, S, di curve C, tale che la curva composta dalle ν C che escono da un punto variabile su F, si muova entro un sistema lineare, allora il sistema S stesso è contenuto totalmente in un sistema lineare (*).

§ 2. Il secondo teorema d'Abel e la sua applicazione alle serie continue di involuzioni.

1. *Involuzioni sopra una superficie algebrica. — Il secondo teorema d'Abel sulla superficie.* Sopra una superficie algebrica F, una serie algebrica ∞^{2r} di gruppi di n punti, tale che r punti generici di F appartengano ad un sol gruppo, si dirà un'*involuzione di grado n e specie* $2r$. Una tale involuzione si riguarderà come *regolare*, quando la varietà V_{2r} i cui punti rappresentano i gruppi dell'involuzione, è regolare, cioè priva di integrali finiti di differenziali totali.

Un particolare interesse offre lo studio delle involuzioni doppiamente infinite, le quali si chiamano semplicemente *involuzioni*, sottintendendo « di specie 2 ». Una tale involuzione si rappresenta coi punti di una superficie, ed è noto (**) che la regolarità della superficie immagine si può pure esprimere geometricamente coll'uguaglianza dei generi, aritmetico e geometrico, od anche col fatto che la superficie è priva di sistemi completi di curve, non lineari.

In opposizione alle involuzioni regolari delle varie specie, si parlerà di *involuzioni irregolari.*

Ciò premesso, *il secondo teorema d'Abel* si enuncia come appresso:

Teorema IX. *Se $I_1 I_2 \ldots I_q$ son gl'integrali semplici di 1.ª specie, tra loro indipendenti, che appartengono ad una superficie F, la condizione necessaria e sufficiente affinchè un'involuzione di grado n (e specie qualsiasi) data sulla F, sia regolare, è che la somma dei valori assunti da ciascuno*

(*) [Di questo teorema ha profittato il sig. Castelnuovo a pag. 656 della sua Nota lincea citata] (9 agosto 1905).

(**) Cfr. coll'introduzione al presente lavoro.

dei suddetti integrali, nei punti di un gruppo dell'involuzione, resti costante al variare continuo di questo gruppo.

La necessità della condizione si stabilisce in modo immediato. Infatti rappresentando i gruppi dell'involuzione coi punti della varietà V, le somme suddette risultano integrali di differenziali totali della V, e poichè, per ipotesi, questa varietà è priva di tali integrali finiti (trascendenti), ne deriva che le somme stesse riduconsi a costanti (*).

Supposto, viceversa, che si abbia:

$$\sum_{l=1}^{n} I_k(x_l) = c_k \quad (k = 1,\ 2, \ldots,\ q), \tag{1}$$

ove le c_k non mutano variando con continuità il gruppo $(x_1 x_2 \ldots x_n)$ entro alla data involuzione γ, si rappresentino ancora i gruppi della γ coi punti di una varietà V_{2r}.

Le $\infty^{2(r-1)}$ involuzioni di 2.ª specie, ciascuna delle quali si ottiene considerando i gruppi della γ dei quali fanno parte $r-1$ punti fissati su F, hanno per immagini su V le superficie Φ di un sistema algebrico Σ, di dimensione $2(r-1)$.

Un integrale di differenziale totale J, che resti finito in ogni punto di V, considerato come funzione di un punto ξ scorrente sopra una Φ, dà luogo ivi ad un integrale semplice di 1.ª specie; e poichè il punto ξ è funzione razionale del punto x variabile su F, mediante la corrispondenza $(1, n-r+1)$, che passa tra Φ ed F, l'integrale J si muta in un integrale I di 1.ª specie, che appartiene ad F e che assume il valore $J(\xi)$ in ciascuno degli $n-r+1$ punti di F corrispondenti a ξ.

Ma dall'ipotesi (1) segue che la somma dei valori di I in questi $n-r+1$ punti, si conserva costante al variare continuo del punto di Φ; dunque l'integrale $(n-r+1)J(\xi)$ si conserva costante al variare continuo di ξ. Ne segue che dovrà esser nullo il valore di J lungo un ciclo lineare *qualsiasi* di Φ, e quindi l'integrale J di V dovrà esser costante sopra ogni superficie di Σ.

Da ciò si trae facilmente che J è costante su tutta la V. Invero, se Φ_1,

(*) Pel caso di un'involuzione *razionale*, costituita dai gruppi comuni alle coppie di curve di un sistema lineare, la necessità della condizione enunciata trovasi in Poincaré (*Sur les intégrales de différentielles totales*, Comptes rendus, déc. 1881). Vedi pure l'altra Nota, *Sur une généralisation du théorème d'Abel* (Comptes rendus, janvier 1885).

Φ_2 son due superficie di Σ passanti pei punti ξ_1, ξ_2 di V, e se inoltre ξ è un punto comune alle due superficie, sarà:

$$J(\xi_1) = J(\xi) = J(\xi_2).$$

Se le due superficie non s'incontrano, come accadrà per posizioni generiche dei punti ξ_1, ξ_2, diciamo $(x'_1\, x'_2 \ldots x'_{r-1})$, $(x'_1\, x''_2 \ldots x''_{r-1})$ i punti fissi rispettivi degli ∞^2 gruppi di γ rappresentati dalle Φ_1, Φ_2, e prendiamo a considerare le superficie Φ', Φ',..., Φ^{r-2} immagini dei gruppi di γ che passano rispettivamente pei punti fissi:

$$(x''_1\, x'_2 \ldots x_{r-1}),\ (x_1\, x_2\, x_3 \ldots x_{r-1}), \ldots,\ (x_1\, x'_2 \ldots x'_{r-2}\, x'_{r-1}).$$

Le superficie Φ_1, Φ, Φ ,..., $\Phi^{r\ 2}$, Φ_2 son evidentemente tali che ciascuna incontra la successiva, onde troveremo ancora $J(\xi_1) = J(\xi_2)$.

Si conclude pertanto che ogni integrale finito di differenziale totale, appartenente a V, riducesi ad una costante; cioè che la V è regolare, c. d. d.

Osservazione. In particolare si ha che *è regolare ogni involuzione esistente sopra una superficie regolare*, il che del resto si stabilisce anche con un noto ragionamento geometrico (*).

2. *Sulle serie continue di involuzioni appartenenti ad una superficie algebrica.* Giovandosi del teorema stabilito nel numero precedente, si può dimostrare la proposizione che segue:

Teorema X. *Se sopra una superficie algebrica esiste un'infinità continua di involuzioni irregolari (doppiamente infinite), esse risultano composte con un medesimo fascio irrazionale di curve.*

Prima di esporre la dimostrazione, precisiamo che cosa deve intendersi per *involuzione composta con un fascio.*

Avendosi sopra una superficie un'involuzione $\infty^2 \gamma$, di grado n, ed un fascio Γ di curve algebriche C, privo di parti fisse, si dirà che la γ è composta col fascio, quando ogni curva C appartiene totalmente all'involuzione; cioè quando ogni C che passi per un punto x della superficie, passa in conseguenza per tutto il gruppo di γ, individuato da x.

Se le curve C sono irriducibili, è ben chiaro che la γ si genera come luogo di un'involuzione ∞^1 staccata razionalmente sulla C variabile; se la C

(*) Cfr. Castelnuovo, *Sulla razionalità delle involuzioni piane* (Mathematische Annalen, Bd. 44, 1894); n.° 10.

generica è riducibile, dicendo $D_1 D_2 \ldots D_t$ le sue parti irriducibili — necessariamente variabili in un fascio di curve D — sopra le $D_1 D_2 \ldots D_t$ la γ subordinerà altrettante involuzioni ∞^1 di grado $\frac{n}{t}$, riferite biunivocamente tra loro: onde anche in tal caso risulta chiara la genesi della γ.

Tornando ora alla nostra superficie F, contenente un'infinità continua di involuzioni irregolari γ, osserviamo anzitutto che, senza alcuna restrizione essenziale, si può supporre che quest'infinità sia semplice e algebrica, in guisa da poterne riferire gli elementi (involuzioni) ai punti di una curva algebrica irriducibile φ.

Detti $I_1 I_2 \ldots I_q$ i q integrali indipendenti di 1.ª specie, appartenenti ad F, si consideri la somma $I_k(x_1) + \cdots + I_k(x_n)$, $(k = 1, \ldots, q)$, estesa ai punti del gruppo $(x_1 x_2 \ldots x_n)$ variabile entro ad una delle involuzioni γ. Questa somma risulta uguale al valore assunto nel punto x_1 da un certo integrale J, di 1.ª specie, appartenente ad F; e poichè, quando x_1 si porta in x_2, la somma non s'altera che di multipli dei periodi, si conclude che $J(x)$ assume lo stesso valore in ciascun punto del gruppo $(x_1 x_2 \ldots x_n)$.

Ciò posto, si esprima J come combinazione lineare degl'integrali I, mediante la formola:

$$J = \lambda_1 I_1 + \cdots + \lambda_q I_q + \lambda,$$

ove le $\lambda \lambda_1 \ldots \lambda_q$ son $q+1$ costanti relative all'involuzione; e si osservi che, al variare continuo dell'involuzione, le $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_q$ (ma non già λ) risultano funzioni razionali del punto ξ scorrente sulla φ, perchè il gruppo $(x_1 x_2 \ldots x_n)$ dipende razionalmente da x_1 e da ξ, e quindi i coefficienti dei differenziali delle variabili indipendenti nell'integrale J, risultano funzioni razionali di x_1 e di ξ.

Ma per l'indipendenza lineare di $I_1 \ldots I_q$, le $\lambda_1 \ldots \lambda_q$ non posson mai divenire infinite (*): dunque esse rimarranno costanti al variare dell'involuzione γ. L'integrale

$$K = \lambda_1 I_1 + \cdots + \lambda_q I_q,$$

(*) Se infatti nell'intorno del punto ξ_0 di φ, lo sviluppo in serie di LAURENT della funzione λ_i contenesse il termine $\frac{a_i}{(\xi - \xi_0)^s}$ $(s \geq 1)$, affinchè restasse finita la somma $\lambda_1 I_1 + \cdots + \lambda_q I_q$, dovrebbe risultare $a_1 I_1 + \ldots + a_q I_q = 0$; contro l'ipotesi che gl'integrali $I_1 \ldots I_q$ sieno indipendenti.

risulta così indipendente dall'involuzione considerata, e, in virtù della relazione che lo lega a J, assume lo stesso valore nei punti di un gruppo appartenente ad una γ *qualsiasi.*

Fissiamo ora l'attenzione sugl'infiniti gruppi delle γ che passano per un punto generico x di F, e diciamo C_x la curva (algebrica) luogo di tali gruppi. Se, al variare di x, le curve C_x che si ottengono, si segano a due a due in un punto almeno, poichè l'integrale K è evidentemente costante sopra ogni C_x, avremo, su tutta la F, $K = \text{cost.}$ Onde l'integrale J, relativo ad una γ fissata, si ridurrà pure ad una costante, cioè la γ sarà regolare (teor. IX): contro il supposto.

Bisognerà dunque che due C_x qualunque non si taglino. Ora, se la C_x generica è irriducibile, il sistema di tutte le C_x sarà un fascio Γ (senza punti base) e ognuna delle γ risulterà composta con questo fascio. Di più l'involuzione di grado n subordinata da una γ sopra una C_x, appartenendo ad una infinità continua, per un noto teorema (*), sarà lineare; onde la superficie rappresentativa della γ conterrà un fascio di curve razionali, e sarà perciò riferibile ad una rigata (**), avente i moduli indipendenti dall'involuzione considerata. Inoltre il fascio Γ sarà irrazionale, perchè altrimenti ogni γ risulterebbe razionale e quindi regolare.

In conclusione le γ vengono generate intersecando le curve di un fascio irrazionale, colle curve di un fascio lineare, variabile in un sistema continuo.

Senza difficoltà, si presenta pure la discussione del caso in cui la curva C_x generica si spezza in t curve $D_1, D_2, \ldots, D_t$, variabili certamente in un fascio Δ, senza punti base, perchè due C_x non si tagliano.

La curva D di Δ, uscente da un punto x di F, conterrà $\frac{n}{t}$ punti di ciascuno di quei gruppi delle γ, di cui fa parte il punto x; cosicchè le C_x risulteranno composte mediante i gruppi di un'involuzione di grado t del fascio Δ.

Ora, se $n > t$, le infinite involuzioni subordinate dalle γ sopra una D, dovranno essere lineari, e quindi le γ si potranno generare intersecando le

---

(*) Cfr. CASTELNUOVO, *Sulla linearità delle involuzioni più volte infinite appartenenti ad una curva algebrica* (Atti della R. Acc. di Torino, 1893); HUMBERT (Comptes rendus, 1893) e *Sur quelques propriétés des courbes...* (Journal de Math. 1894).

(**) ENRIQUES, *Sopra le superficie algebriche che contengono un fascio di curve razionali* (Math. Annalen, Bd. 52).

curve composte dai gruppi di un'involuzione (irrazionale) fissata entro al fascio Δ, colle curve di un fascio lineare variabile.

Se invece $n = t$, tra due curve D costituenti una parte di una C_x, si vengono ad avere infinite corrispondenze birazionali, onde ciascuna D sarà razionale o ellittica. Sicchè in tal caso le γ risulteranno composte con un fascio irrazionale, la cui curva generica si spezza in n curve razionali o ellitiche.

Il teorema è così completamente dimostrato.

Osservazione. Il teor. X si può pure enunciare sotto la forma seguente:

Sopra una superficie algebrica, priva di fasci irrazionali, ogni involuzione d'una serie continua è regolare.

Si noti l'analogia tra questa proposizione e quella dei sigg. Humbert e Castelnuovo, che afferma l'impossibilità dell'esistenza di una serie continua di involuzioni (∞^1) irrazionali, sopra una curva algebrica qualunque.

Parma, 30 aprile 1905.

Sugl'integrali primi dell'equazioni del moto d'un corpo pesante intorno a un punto fisso.

(*Di* Pietro Burgatti, *a Roma.*)

La ricerca degli integrali primi

$$f(p, q, r, a, b, c) = \text{cost.}$$

(p, q, r componenti della rotazione rispetto agli assi fissi; a, b, c coseni degli angoli di questi assi con la verticale) per il problema che ci occupa, dipende da una equazione differenziale lineare del primo ordine con sei variabili indipendenti, la cui integrazione presenta difficoltà insuperabili; onde è necessario, per avanzare di qualche poco, introdurre delle ipotesi atte a semplificare la questione, e riguardanti la forma di f.

Il sig. R. Liouville, in una Memoria pubblicata nel tomo XX di *Acta Mathematica*, espose alcune ricerche riguardanti la determinazione dei casi in cui esiste un quarto integrale primo algebrico. Supponendo, per un teorema di Poincaré, che l'ellissoide d'inerzia sia di rotazione, egli ha trovato che esiste l'integrale in parola quando il centro di gravità è nel piano equatoriale, e

$$A = B = \frac{2\,C}{n} \quad (n \text{ intero});$$

e in questi casi soltanto. Però tale integrale, per n diverso da 1 e da 2, non è stato trovato ancora.

Io mi sono proposto una ricerca non molto diversa negli scopi da quella di Liouville: da un lato però assai più particolare, in quanto considera solamente integrali che non contengono tutti e sei gli argomenti p, q, r, a, b, c; dall'altra più generale, perchè non si limita agli integrali algebrici, ma considera integrali qualunque, e lascia arbitraria la posizione del centro di gravità e le costanti A, B, C dell'ellissoide d'inerzia. Benchè questa ricerca non m'abbia condotto alla scoperta di nuovi casi d'integrazione, ho creduto tuttavia utile di renderla nota al pubblico matematico: prima, perchè compendia in un'analisi unica, sistematica e non priva d'eleganza i casi di completa integrazione finora conosciuti; poi perchè, fra tutti gli integrali primi, quelli che dipendono da cinque al più degli argomenti p, q, r, a, b, c sono i soli, dopo gli algebrici, che offrono mezzo di sfuggire le difficoltà gravissime che la ricerca generale presenta.

CAPITOLO I.

1. Le equazioni differenziali del moto del corpo pesante intorno al punto fisso, supponendo per ora il centro di gravità nel piano (x_1, y_1) (*), sono

$$\frac{dp}{dt} = \frac{B-C}{A} q r + \eta c \qquad \frac{da}{dt} = r b - q c$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{C-A}{B} r p - \xi c \qquad \frac{db}{dt} = p c - r a$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{A-B}{C} p q + \frac{B}{C} \xi b - \frac{A}{C} \eta a \qquad \frac{dc}{dt} = q a - p b,$$

ove ξ e η sono proporzionali alle coordinate del centro di gravità, e le altre lettere hanno il significato ben noto.

Proponiamoci la ricerca degli integrali primi della forma

$$f(p, q, r, a, b) = \text{cost.},$$

che non contengono cioè il c. È chiaro che quella funzione f dei cinque argomenti p, q, r, a, b deve soddisfare alle due equazioni:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{B-C}{A} q r \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{C-A}{B} r p \frac{\partial f}{\partial q} + \left(\frac{A-B}{C} p q + \frac{B}{C} \xi b - \frac{A}{C} \eta a\right) \frac{\partial f}{\partial r} + \\ &\qquad\qquad + r b \frac{\partial f}{\partial a} - r a \frac{\partial f}{\partial b} = 0 \\ &\eta \frac{\partial f}{\partial p} - \xi \frac{\partial f}{\partial q} - q \frac{\partial f}{\partial a} + p \frac{\partial f}{\partial b} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

(*) Questa restrizione sarà poi dimostrata necessaria nell'ultimo paragrafo.

Operiamo il cambiamento di variabili definito dalle formole:

$$p_1 = \xi p + \eta q, \quad q_1 = q, \quad r_1 = r, \quad a_1 = q^2 - 2\xi a, \quad b_1 = p^2 - 2\eta b,$$

nelle quali si dovrà supporre ξ e η diverse da zero, affinchè il determinante funzionale non sia nullo.

Allora la seconda delle (1) si riduce a

$$\frac{\partial f}{\partial q_1} = 0;$$

e la prima, dopo aver annullato in essa la $\frac{\partial f}{\partial q_1}$, diventa lineare del 2.° grado rispetto a q_1. Perchè sia soddisfatta dovranno quindi annullarsi le espressioni che moltiplicano le varie potenze di q_1. Per tal modo si giunge ad ottenere, dopo alcune semplificazioni, le equazioni seguenti:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{3(A-B)}{C}\frac{\partial f}{\partial r_2} + \frac{2(C-A)+B}{B}\frac{\partial f}{\partial a_1} + \frac{2(B-C)+A}{A}\frac{\partial f}{\partial b_1} = 0\\
&\left(\frac{B-C}{A}\xi^2 - \frac{C-A}{B}\eta^2\right)\frac{\partial f}{\partial p_2} + \frac{A-2B}{C}\frac{\partial f}{\partial r_2} + \frac{C-A+B}{B}\frac{\partial f}{\partial a_1} +\\
&\qquad\qquad + \frac{B-C}{A}\frac{\partial f}{\partial b_1} = 0\\
&\frac{C-A}{B}\frac{\eta}{\xi}p_2\frac{\partial f}{\partial p_2} + \left[\frac{B}{2C}\frac{\xi}{\eta}\left(\frac{p_2}{\xi^2} - b_1\right) + \frac{A}{2C}\frac{\eta}{\xi}a_1\right]\frac{\partial f}{\partial r_2} -\\
&\qquad\qquad - \frac{\xi}{2\eta}\left(\frac{p_2}{\xi^2} - b_1\right)\frac{\partial f}{\partial a_1} - \frac{\eta}{2\xi}a_1\frac{\partial f}{\partial b_1} = 0,
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

ove $p_2 = p_1^2$ e $r_2 = r_1^2$. Affinchè l'integrale f esista è necessario e basta che questo sistema sia completo. Ma esso è tale certamente, perchè esiste l'integrale delle forze vive che non dipende da c; per conseguenza altri integrali primi della forma cercata non esistono.

Se si osserva che al sistema (2) si può sostituire il seguente:

$$\frac{\partial f}{\partial p_2} = 0, \quad \frac{B}{C}\frac{\partial f}{\partial r_2} - \frac{\partial f}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{A}{C}\frac{\partial f}{\partial r_2} - \frac{\partial f}{\partial b_1} = 0,$$

si vede subito che l'integrale è

$$f = B a_1 + A b_1 + C r_2;$$

cioè quello delle forze vive espresso colle nuove variabili.

Per completare il caso che ci occupa, bisogna ora supporre q o η uguale a zero Sia ad esempio $\eta = 0$. Operiamo allora sul sistema (1) il cambiamento di variabili seguente:

$$p_1 = p, \quad q_1 = q, \quad r_1 = r, \quad a_1 = q^2 - 2\,\xi\, a, \quad b_1 = p\,q + \xi\, b.$$

La seconda della (1) diventa ancora

$$\frac{\partial f}{\partial q_1} = 0.$$

La prima invece diventa una espressione del secondo grado rispetto a q_1; onde, uguagliando a zero le espressioni che moltiplicano le diverse potenze di q_1, si trovano, dopo facile riduzione, le tre equazioni seguenti:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{2(B-C)-A}{2A}\frac{\partial f}{\partial b_1} = 0 \\ E(f) &= \frac{B-C}{A}\frac{\partial f}{\partial p_2} + \frac{A-2B}{C}\frac{\partial f}{\partial r_2} + \frac{B+C-A}{B}\frac{\partial f}{\partial a_1} = 0 \\ G(f) &= \frac{B}{C}\, b_1 \frac{\partial f}{\partial r_2} - b_1 \frac{\partial f}{\partial a_1} + \left(\frac{a_1}{4} + \frac{C-A}{2B}\, p_2\right)\frac{\partial f}{\partial b_1} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

avendo posto per brevità $p_2 = p_1^2$, $r_1 = r_1^2$. Qui due casi son da distinguere: $2(B-C) - A \neq 0$, o $2(B-C)-A = 0$. Nel 1.° caso sarà $\dfrac{\partial f}{\partial b_1} = 0$, e il sistema (3) si riduce facilmente al seguente:

$$\frac{B}{C}\frac{\partial f}{\partial r_2} - \frac{\partial f}{\partial a_1} = 0, \qquad \frac{B-C}{C}\left(\frac{C}{A}\frac{\partial f}{\partial p_2} - \frac{\partial f}{\partial r_2}\right) = 0,$$

che dà soltanto l'integrale delle forze vive, se $B - C \neq 0$; ma anche l'integrale $p_2 =$ cost., se $B = C$. Quest'ultimo caso è quello ben noto di Lagrange.

Supponiamo ora $2(B-C) - A = 0$; il sistema (3) si riduce allora alle due ultime equazioni. Affinchè esista l'integrale cercato, oltre quello delle forze vive, bisognerà che tale sistema sia completo. Per vedere ciò, formiamoci l'equazione $E[G(f)] - G[E(f)] = 0$; si trova subito

$$\left(\frac{(B-C)(C-A)}{A} + \frac{B+C-A}{2}\right)\frac{\partial f}{\partial a_1} = 0;$$

la quale, non potendo essere una combinazione lineare delle altre, dovrà annullarsi identicamente; dunque deve essere

$$\frac{(B-C)(C-A)}{A}+\frac{B+C-A}{2}=0.$$

Questa condizione unita all'altra $2(B-C)-A=0$ dà

$$A=B=2\,C,$$

che è il caso della KOWALEVSKI. Il sistema (3) diventa

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial p_2}-2\frac{\partial f}{\partial r_2}+\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial a_1}=0\\&2\frac{\partial f}{\partial r_2}-\frac{\partial f}{\partial a_1}+\left(\frac{a_1}{2}-\frac{p_2}{2}\right)\frac{\partial f}{\partial b_2}=0\,,\quad (b_2=b_1^2)\,;\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

il quale dunque, essendo completo, ammette due soluzioni distinte, di cui una uguagliata a costante dà l'integrale delle forze vive. Per trovare subito l'altra, basta osservare che facendo in (4) $\frac{\partial f}{\partial r_2}=0$, il sistema

$$\frac{\partial f}{\partial p_2}+\frac{\partial f}{\partial a_1}=0$$

$$-\frac{\partial f}{\partial a_1}+\frac{1}{2}(a_1-p_2)\frac{\partial f}{\partial b_2}=0,$$

che ne risulta, è ancora completo. La sua soluzione evidente è

$$(a_1-p_2)^2+4\,b_2\,;$$

che uguagliata a costante dà il ben noto integrale della KOWALEVSKI.

Coll'ipotesi $\xi=0$ (*) saremmo giunti agli stessi risultati.

2. Cerchiamo adesso gl'integrali della forma

$$f(p,\ q,\ r,\ b,\ c)=\text{cost.}$$

cioè quelli che non contengono a. Tale f dovrà essere una soluzione del si-

(*) Lascieremo da parte il caso d'EULERO, cioè non supporremo mai che sia contemporaneamente $\xi=\eta=0$.

stema

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{B-C}{A}qr+\eta c\right)\frac{\partial f}{\partial p}+\left(\frac{C-A}{B}rp-\xi c\right)\frac{\partial f}{\partial q}+\\&\qquad+\left(\frac{A-B}{C}pq+\frac{B}{C}\xi b\right)\frac{\partial f}{\partial r}+pc\frac{\partial f}{\partial b}-pb\frac{\partial f}{\partial c}=0\\&\frac{A\eta}{C}\frac{\partial f}{\partial r}+r\frac{\partial f}{\partial b}-q\frac{\partial f}{\partial c}=0.\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Supponendo $\eta \neq 0$ e ponendo $\frac{A\eta}{C}=\frac{1}{\lambda}$, operiamo il cambiamento di variabili definito dalle formule

$$p_1=p,\quad q_1=q,\quad r_1=r,\quad b_1=\lambda r^2-2b,\quad c_1=\lambda qr+c.$$

La seconda equazione diventa $\frac{\partial f}{\partial r_1}=0$; e la prima, dopo aver annullato $\frac{\partial f}{\partial r_1}$, risulta lineare del terzo grado in r_1; onde uguagliando a zero le espressioni che moltiplicano le varie potenze di r_1, si ottiene il sistema:

$$\xi\frac{\partial f}{\partial b_1}=0,\quad (Lp_1+\xi Mq_1)\frac{\partial f}{\partial c_1}=0$$

$$\left(\frac{B-C}{A}-\frac{C}{A}\right)q_1\frac{\partial f}{\partial p_1}+\left(\frac{C-A}{B}p_1+\frac{C\xi}{A\eta}q_1\right)\frac{\partial f}{\partial q_1}-\xi\lambda c_1\frac{\partial f}{\partial c_1}+$$

$$+2\lambda\left(\frac{A-B}{C}p_1q_1-\frac{B\xi}{2C}b_1+p_1q_1\right)\frac{\partial f}{\partial b_1}=0$$

$$\eta c_1\frac{\partial f}{\partial p_1}-\xi c_1\frac{\partial f}{\partial q_1}+\left(\lambda\frac{A-B}{C}p_1q_1^2-\lambda\xi\frac{B}{2C}b_1q_1+\frac{b_1p_1}{2}\right)\frac{\partial f}{\partial c_1}-$$

$$-2p_1c_1\frac{\partial f}{\partial b_1}=0,$$

ove L è proporzionale a $2(C-A)-B$, e M a $2C+B$.

Se $\xi \neq 0$, deve essere necessariamente

$$\frac{\partial f}{\partial b_1}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial c_1}=0.$$

Allora il sistema si riduce a

$$\frac{B-2C}{A} q_1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + \left(\frac{C-A}{B} p_1 + \frac{C\xi}{A\eta} q_1\right) \frac{\partial f}{\partial q_1} = 0$$

$$\eta \frac{\partial f}{\partial p_1} - \xi \frac{\partial f}{\partial q_1} = 0,$$

il quale non ha soluzioni comuni, a meno che non sia $A = B = C$; caso questo ben conosciuto.

Supponiamo ora $\xi = 0$. La 1.ª equazione è una identità, e la seconda si riduce a $L \frac{\partial f}{\partial c} = 0$. Se è $L \neq 0$, dovrà essere $\frac{\partial f}{\partial c_1} = 0$; e in tal caso il sistema diventa

$$\frac{B-2C}{A} q_1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + \frac{C-A}{B} p_1 \frac{\partial f}{\partial q_1} + 2\lambda \frac{A-B+C}{C} p_1 q_1 \frac{\partial f}{\partial b_1} = 0$$

$$\eta \frac{\partial f}{\partial p_1} - 2 p_1 \frac{\partial f}{\partial b_1} = 0,$$

il quale è completo, ma conduce soltanto all'integrale delle forze vive. Se fosse poi $A = C$, si otterrebbe anche l'integrale $q_1 = \text{cost.}$ È il caso di LAGRANGE.

Resta dunque a supporre $L = 0$, cioè $2(C - A) - B = 0$. Allora il sistema si riduce alle due equazioni

$$\frac{B-2C}{A} \frac{\partial f}{\partial p_2} + \frac{C-A}{B} \frac{\partial f}{\partial q_2} + \lambda \frac{A-B+C}{C} \frac{\partial f}{\partial b_1} = 0$$

$$\eta \frac{\partial f}{\partial p_2} - \frac{\partial f}{\partial b_1} + \left(\frac{A-B}{A\eta} q_2 + \frac{b_1}{2}\right) \frac{\partial f}{\partial c_2} = 0,$$

avendo posto $p_2 = p_1^2$, $q_2 = q_1^2$, $c_2 = c_1^2$. Come al paragrafo primo, questo sistema è completo se insieme alla relazione $2(C - A) - B = 0$ sussiste l'altra $2(A - B) + C = 0$; e si ricade nel caso della KOWALEVSKI.

La ricerca di integrali della forma $f(p, q, r, a, c) = \text{cost.}$ si svolge in modo analogo, e conduce agli stessi risultati.

3. Restano da considerare gl'integrali indipendenti da una delle componenti di rotazione. Cerchiamo gl'integrali della forma

$$f(q, r, a, b, c) = \text{cost.}$$

Questa f deve soddisfare alle due equazioni

$$\left.\begin{aligned}
-\xi c \frac{\partial f}{\partial q} + \left(\frac{B}{C}\xi b - \frac{A}{C}\eta a\right)\frac{\partial f}{\partial r} + (r b - q c)\frac{\partial f}{\partial a} - \\
- r a \frac{\partial f}{\partial b} + q a \frac{\partial f}{\partial c} = 0 \\
\frac{C-A}{B} r \frac{\partial f}{\partial q} + \frac{A-B}{C} q \frac{\partial f}{\partial r} + c \frac{\partial f}{\partial b} - b \frac{\partial f}{\partial c} = 0 ;
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

le quali sono più complicate di quelle considerate finora.

Per poter procedere speditamente è necessario valersi dell'osservazione che segue.

Abbiasi il sistema

$$\left.\begin{aligned}
E(f) + a L(f) = G(f) = 0 \\
F(f) = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{0}$$

in cui $E(f)$, $F(f)$, $L(f)$ sono espressioni lineari e omogenee del 1.° ordine con coefficienti indipendenti da a; dippiù $F(f)$, $L(f)$ non contengono la derivata rispetto ad a. Affinchè quelle equazioni abbiano soluzioni comuni è necessario anzitutto che abbiano soluzioni comuni $F(f) = 0$ e $L(f) = 0$. Infatti,

$$G'(f) = [G, F] = G(F(f)) - F(G(f)) = [E, F] + a[L, F] = 0$$

non può essere una combinazione lineare delle altre due, se non è (L, F) una combinazione lineare di $L(f)$ e $F(f)$. Dunque, affinchè il sistema dato sia completo, deve essere anzitutto completo il sistema $L(f) = 0$, $F(f) = 0$. Se

$$G'(f) = E'(f) + a L'(f) = 0$$

è distinta dalle altre due, si vede, con ragionamento analogo, che il sistema $E(f) = 0$, $F(f) = 0$, $G'(f) = 0$ non può essere completo, se non è tale il sistema $L(f) = 0$, $F(f) = 0$, $L'(f) = 0$; e così via. L'asserto è dimostrato.

Ciò posto, osserviamo che il sistema (1) è della forma (0); onde quelle equazioni non potranno avere soluzioni comuni, se non ne hanno le equazioni

$$\left.\begin{aligned}
\frac{A}{C}\eta \frac{\partial f}{\partial r} + r \frac{d f}{\partial b} - q \frac{\partial f}{\partial c} = 0 \\
\frac{C-A}{B} r \frac{\partial f}{\partial q} + \frac{A-B}{C} q \frac{\partial f}{\partial r} + c \frac{\partial f}{\partial b} - b \frac{\partial f}{\partial c} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Esaminiamo dunque questo sistema, supponendo per ora $A \neq C$. Operando il cambiamento di variabili

$$q_1 = q, \quad r_1 = r, \quad b_1 = r^2 - \frac{2A}{C} \eta \, b, \quad c_1 = r\,q + \frac{A}{C} \eta \, c, \quad \eta \neq 0$$

la prima equazione diventa

$$\frac{\partial f}{\partial r_1} = 0.$$

Tenendo conto di questa, la seconda equazione diventa lineare del secondo grado in r_1; onde uguagliando a zero le espressioni che moltiplicano i coefficienti delle diverse potenze di r_1, si ottiene il sistema

$$[2\,(C - A) - B] \frac{\partial f}{\partial c_2} = 0$$

$$\frac{C - A}{B} \frac{\partial f}{\partial q_2} + \frac{A - B + C}{C} \frac{\partial f}{\partial b_1} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial b_1} - \left(\frac{A - B}{C} q_2 - \frac{b_1}{2} \right) \frac{\partial f}{\partial c_2} = 0,$$

in cui $q_2 = q_1^2$, $c_2 = c_1^2$. Se $2\,(C - A) - B \neq 0$, esso non ammette soluzioni non costanti. Sia dunque $2\,(C - A) - B = 0$; per modo che la prima equazione è una identità, e il sistema si riduce a l'insieme delle altre due. Il quale è completo, come si vede facilmente, quando risulti

$$\frac{(C - A)(A - B)}{B} + \frac{A - B - C}{2} = 0.$$

Questa condizione unita alla precedente dà $B = C = 2\,A$.

Per l'osservazione fatta in principio di questo paragrafo, possiamo dunque concludere che l'equazioni del sistema (1) (supposto $\eta \neq 0$, $A \neq C$) non possono avere delle soluzioni comuni, se non è $B = C = 2\,A$. Siamo nuovamente nel caso della KOWALEVSKI.

Sia ora $\eta = 0$, e A diversa da C o anche uguale. In tal caso il sistema (2) ha evidentemente delle soluzioni comuni; perciò bisogna esaminare il sistema (1). Notiamo intanto che esso ha la soluzione $a^2 + b^2 + c^2$, che è del tipo di quelle che noi consideriamo; ma a noi importa di vedere se ne ha delle altre distinte da quella. A tale scopo scriviamo il sistema

$$G(f)=E(f)+a\,H(f)=-\xi\,c\frac{\partial f}{\partial q}+\frac{B}{C}\,\xi\,b\frac{\partial f}{\partial r}+$$

$$+(r\,b-q\,c)\frac{\partial f}{\partial a}-a\left(r\frac{\partial f}{\partial b}-q\frac{\partial f}{\partial c}\right)=0$$

$$F(f)=\frac{C-A}{B}\,r\frac{\partial f}{\partial q}+\frac{A-B}{C}\,q\frac{\partial f}{\partial r}+c\frac{\partial f}{\partial b}-b\frac{\partial f}{\partial c}=0,$$

e formiamoci l'equazione $G(F)-F(G)=0$. Valendoci di una osservazione già fatta, si vede subito che essa è della forma

$$L(f)=E_1(f)+a\,H_1(f)=E_1(f)+$$

$$+a\left\{\frac{C+A-B}{C}\,q\frac{\partial f}{\partial b}+\frac{B-C+A}{B}\,r\frac{\partial f}{\partial c}\right\}=0,$$

e che non può essere una combinazione lineare delle altre due. Dobbiamo dunque sostituire al sistema dato il seguente:

$$G(f)=0,\quad F(f)=0,\quad L(f)=0;$$

il quale dovrà essere completo, affinchè esista una seconda soluzione diversa dall'altra già nota $f=a^2+b^2+c^2$. Ne segue che l'equazione

$$L(F)-F(L)=E_2(f)+a\,H_2(f)=E_2(f)+a\left\{N\,r\frac{\partial f}{\partial b}-M\,q\frac{\partial f}{\partial c}\right\}=0,$$

ove N e M dipendono da A, B, C, dovrebbe essere una combinazione lineare delle altre; ossia, per la sua forma speciale, di $G(f)=0$ e $L(f)=0$.

Ma $H_2(f)$ si può dedurre da $H_1(f)$ e $H(f)$ per combinazione lineare; quindi anche $E_2(f)$ dovrebbe essere una combinazione di $E_1(f)$ e $E(f)$. Ciò non è, se $C \neq B$ (*). Infatti, si ricava

$$E_1(f)=-\xi\,b\frac{A}{C}\,\frac{\partial f}{\partial q}-\xi\,c\frac{A}{C}\,\frac{\partial f}{\partial r}-(\alpha\,r\,c+\beta\,q\,b)\frac{\partial f}{\partial a}$$

$$E_2(f)=\xi\,\alpha\frac{A}{C}\,c\frac{\partial f}{\partial q}-\xi\,\beta\frac{A}{C}\,b\frac{\partial f}{\partial r}+(\alpha'\,r\,b+\beta'\,q\,c)\frac{\partial f}{\partial a},$$

(*) Avendo supposto $\eta=0$, s'intende che ξ è diversa da zero; perchè il caso d'Eulero è stato escluso fin da principio dalle nostre considerazioni.

ove

$$\alpha = \frac{B - C + A}{B}, \quad \beta = \frac{A - B + C}{C}, \quad \alpha' = \frac{\beta(C - A) - \alpha B}{B},$$

$$\beta' = \frac{\alpha(A - B) + \beta C}{C};$$

e formando il determinante dei coefficienti di $E(f)$, $E_1(f)$ e $E_2(f)$, si vede facilmente che esso è zero identicamente nel solo caso di $B = C$. Si ritrova dunque il caso di LAGRANGE.

Resta infine a supporre $\eta \neq 0$ $A = C$. In questo caso il sistema

$$G(f) = E(f) + a\,H(f) = -\xi c \frac{\partial f}{\partial q} + \frac{B}{A} \xi b \frac{\partial f}{\partial r} + (r b - q c) \frac{\partial f}{\partial a} -$$

$$- a\left(\eta \frac{\partial f}{\partial r} + r \frac{\partial f}{\partial b} - q \frac{\partial f}{\partial c}\right) = 0$$

$$F(f) = \frac{A - B}{A} q \frac{\partial f}{\partial r} + c \frac{\partial f}{\partial b} - b \frac{\partial f}{\partial c} = 0$$

$$G(F) - F(G) = E_1(f) + a\,H_1(f) = \xi b \frac{\partial f}{\partial q} - \xi c \frac{d f}{\partial r} -$$

$$-\left(c r + \frac{2A - B}{A} q b\right) \frac{\partial f}{\partial a} + a\left(\frac{2A - B}{A} q \frac{\partial f}{\partial b} + r \frac{d f}{\partial c}\right) = 0,$$

deve essere completo. Ripetendo qui il ragionamento precedente, si vede che ciò avviene soltanto nel caso di $\xi = 0$, cioè nel caso di LAGRANGE.

La ricerca degli integrali primi della forma

$$f(p, r, a, b, c) = 0), \quad f(p, q, a, b, c) = 0$$

si svolge come la precedente, e conduce agli stessi risultati.

4. Abbiamo supposto finora che il centro di gravità fosse sopra un piano principale dell'ellissoide d'inerzia. Dimostreremo adesso che questa restrizione è necessaria per l'esistenza degli integrali in parola.

Sia

$$f(p, q, r, a, b) = \text{cost.}$$

un integrale primo che non contiene c. Questa f deve soddisfare al sistema

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{B-C}{A}qr-\frac{\zeta}{A}b\right)\frac{\partial f}{\partial p}+\left(\frac{C-A}{B}rp+\frac{\zeta}{B}a\right)\frac{\partial f}{\partial q}+\\&+\left(\frac{A-B}{C}pq+\frac{\xi}{C}b-\frac{\eta}{C}a\right)\frac{\partial f}{\partial r}+rb\frac{\partial f}{\partial a}-ra\frac{\partial f}{\partial b}=0\\&\frac{\eta}{A}\frac{\partial f}{\partial p}-\frac{\xi}{B}\frac{\partial f}{\partial q}-q\frac{\partial f}{\partial a}+p\frac{\partial f}{\partial b}=0,\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

ove ξ, η, ζ sono proporzionali alle coordinate del centro di gravità e diverse da zero. Col cambiamento di variabili

$$p_1=\frac{\xi}{B}p+\frac{\eta}{A}q,\quad q_1=q,\quad r_1=r,\quad a_1=q^2-\frac{2\xi a}{B},\quad b_1=p^2-\frac{2\eta b}{A},$$

la seconda equazione diventa $\frac{\partial f}{\partial q_1}=0$; e la prima si trasforma in un'altra che contiene un termine in q_1^3, il quale uguagliato a zero, dà

$$\frac{\partial f}{\partial a_1}=0.$$

Ma se f è indipendente da a_1, essa è anche, in particolare, indipendente da a. Per conseguenza al sistema (1) possiamo sostituire il seguente:

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{B-C}{A}qr-\frac{\zeta}{A}b\right)\frac{\partial f}{\partial p}+\frac{C-A}{B}rp\frac{\partial f}{\partial q}+\left(\frac{A-B}{C}+\frac{\xi}{C}b\right)\frac{\partial f}{\partial r}=0\\&\frac{\zeta}{B}\frac{\partial f}{\partial q}-\frac{\eta}{C}\frac{\partial f}{\partial r}-r\frac{\partial f}{\partial b}=0\\&\frac{\eta}{A}\frac{\partial f}{\partial p}-\frac{\xi}{B}\frac{\partial f}{\partial q}+p\frac{\partial f}{\partial b}=0,\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

il quale dovrà essere completo, affinchè esista l'integrale in parola. Operiamo il cambiamento di variabili definito dalle formule

$$p_1=p,\quad q_1=A\xi p+B\eta q+C\zeta r,\quad r_1=r,\quad b_1=Ap^2+Cr^2-2\eta b.$$

Le due ultime equazioni si riducono a

$$\frac{\partial f}{\partial r_1}=0,\qquad\frac{\partial f}{\partial p_1}=0;$$

e la prima, tenuto conto di quest'ultime, si scinde in molte altre equazioni che contengono soltanto le derivate rispetto a b_1 e a q_1. Basta considerare due di quelle equazioni per veder subito che risulta necessariamente

$$\frac{\partial f}{\partial q_1} = \frac{\partial f}{\partial b_1} = 0.$$

Dunque l'integrale cercato non esiste. La simmetria rispetto ad a, b, e c delle equazioni del moto permette senz'altro di concludere che non esistono neppure integrali indipendenti da a e da b.

Supponiamo adesso che f non contenga una delle componenti di rotazione, per esempio la p. Dovrà essere

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\zeta}{B} a - \frac{\xi}{B} c\right)\frac{\partial f}{\partial q} + \left(\frac{\xi}{C} b - \frac{\zeta}{C} a\right)\frac{\partial f}{\partial r} + (r b - q c)\frac{\partial f}{\partial a} - \\ &\qquad\qquad - r a \frac{\partial f}{\partial b} + q a \frac{\partial f}{\partial c} = 0 \\ &\frac{C-A}{B} r \frac{\partial f}{\partial q} + \frac{A-B}{C} q \frac{\partial f}{\partial r} + c \frac{\partial f}{\partial b} - b \frac{\partial f}{\partial c} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Ma, per una osservazione fatta al terzo paragrafo, queste equazioni non possono avere soluzioni comuni se non hanno soluzioni comuni le seguenti:

$$\frac{\zeta}{B}\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\eta}{C}\frac{\partial f}{\partial r} - r \frac{\partial f}{\partial b} + q \frac{\partial f}{\partial c} = 0$$

$$\frac{C-A}{B} r \frac{\partial f}{\partial q} + \frac{A-B}{C} q \frac{\partial f}{\partial r} + c \frac{\partial f}{\partial b} - b \frac{\partial f}{\partial c} = 0.$$

Analizziamo dunque questo sistema. Col cambiamento di variabili espresso dalle formule

$$q_1 = B \eta q + C \zeta r, \quad r_1 = r, \quad b_1 = C r^2 - 2 \eta b, \quad c_1 = B q^2 - 2 \zeta c,$$

la prima equazione si riduce a $\frac{\partial f}{\partial r_1} = 0$, e la seconda, in virtù di questa, si scinde nelle seguenti:

$$[B - 2(C-A)]\frac{\partial f}{\partial c_1} - [C + 2(A-B)]\frac{\partial f}{\partial b_1} = 0$$

$$B \eta^2 (C-A)\frac{\partial f}{\partial q_2} + (C-A)\frac{\partial f}{\partial c_1} + (A - B + C)\frac{\partial f}{\partial b_1} = 0 \quad (q_2 = q^2)$$

$$\left(\frac{\zeta}{\eta}\frac{q_1}{B} - \frac{\eta}{\zeta} c_1\right)\frac{\partial f}{\partial b_1} + \frac{\zeta}{\eta} b_1 \frac{\partial f}{\partial c_1} = 0,$$

le quali evidentemente non possono avere soluzioni comuni non costanti, pur supponendo $B - 2(C - A) = 0$ e $C + 2(A - B) = 0$. Dunque anche le (3) non hanno soluzioni comuni.

Lo stesso dicasi per gl'integrali indipendenti da q o da r.

Dalle cose dette si conclude che, all'infuori dei casi già conosciuti, non esistono degli integrali primi algebrici o trascendenti dipendenti al più da cinque argomenti. In particolare gl' integrali algebrici, che secondo R. LIOUVILLE esistono quando $A = B = \frac{2C}{n}$ $(n = 1, 2)$, devono dunque contenere tutti e sei gli argomenti p, q, r, a, b, c. Ciò dà ragione della difficoltà della loro ricerca (*).

CAPITOLO II.

Sia

$$H(p, q, r, a, b, c) = 0$$

una soluzione invariante per il moto d'un corpo pesante intorno a un punto fisso; tale, cioè, che sia soddisfatta sempre quando sussiste nell'istante iniziale. Se la funzione f di p, q, r, a, b, c soddisfa l'equazione

$$\frac{df}{dt} + \rho H = 0, \tag{1}$$

ove ρ è un moltiplicatore che resta in generale finito, è chiaro che

$$f(p, q, r, a, b, c) = \text{cost.}$$

è un integrale primo delle equazioni del moto per tutti quei moti che soddisfano la relazione invariante $H = 0$, e per questi soltanto. Si dirà che $f = \text{cost.}$ è un *integrale primo associato alla relazione invariante* $H = 0$. La determinazione di questi integrali dipende dall'integrazione dell'equazione (1), che è alle derivate parziali del 1.° ordine rispetto alle sei variabili p, q, r

(*) Il sig. APPELROTH, in una Memoria scritta in lingua russa (Mosca, 1893), si propose di determinare tutti i casi in cui gl'integrali delle equazioni del moto sono uniformi, e ritrovò i casi noti di EULERO, LAGRANGE, della KOWALEVSKI, e questi soltanto. (Vedi la *Stereodinamica* del Prof. MAGGI o la *Meccanica razionale* del prof. MARCOLONGO, Volume II, pag. 193.)

a, b, c, lineare e non omogenea; integrazione che non si sa effettuare in generale. Per ottenere qualche risultato bisogna dunque fare delle ipotesi restrittive sull'ellissoide d'inerzia, sulla posizione del centro di gravità, o sulla forma della funzione f.

I sigg. Goriatchoff e Tchapliguine (*) hanno aperta la via a questo genere di ricerche colla scoperta di un integrale associato alla relazione invariante

$$A\,p\,a + B\,q\,b + C\,r\,c = 0. \tag{2}$$

Essi, infatti, hanno dimostrato che se $A = B = 4\,C$ e il centro di gravità è nel piano equatoriale, sussiste l'integral primo

$$r\,(p^2 + q^2) + \alpha\,p\,c = \text{cost.} \qquad (\alpha = \text{costante})$$

per tutti quei moti pei quali è nulla la costante delle aree.

La conoscenza di quell'integrale permette di ricondurre alle quadrature la determinazione di tali movimenti.

L'interesse che presenta questo caso particolare d'integrazione mi ha indotto a sviluppare l'idea generale che ho esposto più sopra.

Per ridurre alquanto la generalità della ricerca supporremo che il centro di gravità sia sopra un piano principale dell'ellissoide d'inerzia, per es.: il piano $(x_1\,y_1)$, e che la f sia indipendente da uno degli argomenti p, q, r, a, b, c, per esempio da c. Allora, ritenendo anche ρ indipendente da c e assumendo per relazione invariante la (2), la f deve soddisfare alle due equazioni

$$\left.\begin{aligned} &\frac{B-C}{A}\,q\,r\,\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{C-A}{B}\,p\,r\,\frac{\partial f}{\partial q} + \left(\frac{A-B}{C}\,p\,q + \xi\,\frac{B}{C}\,b - \eta\,\frac{A}{C}\,a\right)\frac{\partial f}{\partial r} + \\ &\qquad\qquad + r\,b\,\frac{\partial f}{\partial a} - r\,a\,\frac{\partial f}{\partial b} = \rho\,(A\,p\,a + B\,q\,b) \\ &\qquad\qquad \eta\,\frac{\partial f}{\partial p} - \xi\,\frac{\partial f}{\partial q} - q\,\frac{\partial f}{\partial a} + p\,\frac{\partial f}{\partial b} = \rho\,C\,r, \end{aligned}\right\} \tag{0}$$

che si ottengono sviluppando la (1) per mezzo delle equazioni del moto ricordate nel primo capitolo. Si potrebbe fare uno studio di questo sistema attribuendo a ρ espressioni particolari; ma questo modo di procedere conduce a tentativi lunghi e laboriosi, che io non ho ancora completamente esaminati.

(*) R. Marcolongo, *Osservazioni intorno alla Nota del sig.* Kolossoff, *ecc.* Rendiconti Circolo Matematico di Palermo, 1902.

Lasciando invece il ρ indeterminato, e eliminandolo tra quelle due equazioni, si è condotti a considerare la sola equazione

$$\left.\begin{aligned}
&\left\{C\frac{B-C}{A}q\,r_1-\eta\,(A\,p\,a+B\,q\,b)\right\}\frac{\partial f}{\partial p}+\\
&+\left\{C\frac{C-A}{B}p\,r_1+\xi\,(A\,p\,a+B\,q\,b)\right\}\frac{\partial f}{\partial q}+\\
&+2\,C\,r_1\left(\frac{A-B}{C}\,p\,q+\xi\,\frac{B}{C}\,b-\eta\,\frac{A}{C}\,a\right)\frac{\partial f}{\partial r_1}+\\
&+\left\{C\,b\,r_1+q\,(A\,p\,a+B\,q\,b)\right\}\frac{\partial f}{\partial a}-\\
&-\left\{C\,a\,r_1+p\,(A\,p\,a+B\,q\,b)\right\}\frac{\partial f}{\partial b}=0,
\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

ove $r_1=r^2$. Qui, per poter procedere più oltre, bisogna diminuire ancora la generalità di f. Supporremo che sia indipendente da un altro argomento, per esempio da a. Per tal modo la ricerca in quistione è ridotta alla determinazione degli integrali primi associati alla relazione invariante (2) e dipendenti da quattro argomenti al più.

Nell'ipotesi enunciata, l'equazione precedente si decompone nelle due seguenti:

$$\left.\begin{aligned}
&\left(C\,\frac{B-C}{A}\,q\,r_1-\eta\,B\,q\,b\right)\frac{\partial f}{\partial p}+\left(C\,\frac{C-A}{B}\,p\,r_1+\xi\,B\,q\,b\right)\frac{\partial f}{\partial q}+\\
&\qquad+2\,C\,r_1\left(\frac{A-B}{C}\,p\,q+\xi\,\frac{B}{C}\,b\right)\frac{\partial f}{\partial r_1}-B\,p\,q\,b\,\frac{\partial f}{\partial b}=0\\
&-\eta\,A\,p\,\frac{\partial f}{\partial p}+\xi\,A\,p\,\frac{\partial f}{\partial q}-2\,\eta\,A\,r_1\,\frac{\partial f}{\partial r_1}-(C\,r_1+A\,p^2)\,\frac{\partial f}{\partial b}=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(3')$$

Operiamo il cambiamento di variabili espresso dalle formule

$$p'=p,\quad q'=\xi\,p+\eta\,q,\quad r'=\frac{p^2}{r_1},\quad b'=C\,r_1+A\,p^2-2\,\eta\,A\,b,$$

supponendo $\eta \neq 0$. La seconda equazione diventa

$$\frac{\partial f}{\partial p'}=0\,;$$

e la prima, ordinata rispetto a p', risulta del quinto grado in p'. Poichè la f

non deve contenere p', tutte le espressioni che moltiplicano le diverse potenze di p' dovranno essere nulle. Il termine indipendente da p è

$$\frac{B}{A\eta} q' b' r'^2 \frac{\partial f}{\partial r'};$$

per conseguenza $\frac{\partial f}{\partial r'} = 0$. Il coefficiente di p'^5 si riduce a

$$\frac{\xi C}{\eta} \left\{ 2(C - A) + B + \frac{B C}{r' A} \right\} \frac{\partial f}{\partial b'};$$

quindi $\frac{\partial f}{\partial b'} = 0$, oppure $\xi = 0$. Nel primo caso la f dovrebbe essere funzione soltanto di q'; ossia, $\xi p + \eta q$ dovrebbe essere soluzione del sistema (3). Ciò avviene, come si vede subito, quando $A = B = C$; caso questo ben noto. Supponendo invece $\xi = 0$, la f potrà essere funzione soltanto di q' e di b; quindi non ne può esistere più d'una. Una soluzione esiste infatti: è il primo membro dell'integrale delle forze vive, il quale dipende soltanto da q' e da b, ed è associato a qualunque relazione invariante (*).

Esaurito così il caso degli integrali indipendenti da c e da a, passiamo a considerare quelli della forma

$$f(p, q, r, a) = \text{cost.}$$

Essendo la f indipendente da b, l'equazione (3) si decompone nelle seguenti:

$$\left(C \frac{B - C}{A} q r_1 - \eta A p a\right) \frac{\partial f}{\partial p} + \left(C \frac{C - A}{B} p r_1 + \xi A p a\right) \frac{\partial f}{\partial q} +$$

$$+ 2 C r_1 \left(\frac{A - B}{C} p q - \eta \frac{A}{C} a\right) \frac{\partial f}{\partial r_1} + A p q a \frac{\partial f}{\partial a} = 0$$

$$- \eta B q \frac{\partial f}{\partial p} + \xi B q \frac{\partial f}{\partial q} + 2 \xi B r_1 \frac{\partial f}{\partial r_1} + (C r_1 + B q^2) \frac{\partial f}{\partial a} = 0.$$

(*) Se $\eta = 0$, basta effettuare il cambiamento di variabili

$$p' = p, \quad q' = q, \quad r' = r_1, \quad b^1 = (C r_1 + A p^2) q - \xi A p b,$$

per vedere facilmente che si ha soltanto la soluzione $f = p'$ quando $B = C$. È il caso di LAGRANGE.

Se $\xi \neq 0$, tutto procede come nel caso precedente: è quindi inutile insistere. Sia dunque $\xi = 0$. Effettuando il cambiamento di variabili espresso dalle formule

$$p' = p, \quad q' = q, \quad r' = r_1, \quad a' = \eta\, B\, q\, a + p\,(C\, r_1 + B\, q^2),$$

la seconda equazione si riduce a $\dfrac{\partial f}{\partial p'} = 0$; e la prima, uguagliando a zero i coefficienti delle diverse potenze di p', si scinde nelle seguenti:

$$C\,\frac{B - C}{A}\, q'\,(C\, r' + B\, q^2)\,\frac{\partial f}{\partial a'} - \frac{2\,A\,a'}{B\,q'}\,\frac{\partial f}{\partial r'} = 0$$

$$\frac{C}{B}\,(C - 4\,A)\,\frac{a'}{q'}\,\frac{\partial f}{\partial a'} + C\,\frac{C - A}{B}\,\frac{\partial f}{\partial q'} +$$

$$+ 2\left\{ (A - B)\, q' + \frac{A}{B\,q'}\,(C\, r' + B\, q'^2) \right\} \frac{\partial f}{\partial r'} = 0$$

$$\left\{ 2\,C\,(C - B)\, q' + C\,\frac{4\,A - C}{B}\,\frac{1}{q'}\,(C\, r' + B\, q'^2) \right\} \frac{\partial f}{\partial a'} = 0.$$

Se il coefficiente di $\dfrac{\partial f}{\partial a'}$ nell'ultima equazione è diverso da zero, ne risulta $\dfrac{\partial f}{\partial a'} = 0$, ed anche $\dfrac{\partial f}{\partial r'} = 0$. Il sistema si riduce a

$$(C - A)\,\frac{\partial f}{\partial q'} = 0;$$

che ammette la soluzione q' quando $A = C$. È il solito caso di Lagrange. Supponiamo dunque nullo il coefficiente di $\dfrac{\partial f}{\partial a'}$ nell'ultima equazione. Deve essere $B = C$ e $C = 4\,A$. Allora il sistema si riduce a

$$\frac{\partial f}{\partial r'} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial q'} = 0,$$

che ammette la soluzione $f = a'$. È il caso di Goriatchoff e Tchapliguine ricordato più sopra.

Bisognerebbe ora considerare gl'integrali indipendenti da a e da b; ma si ripeterebbe gran parte di ciò che è stato detto, e si ritroverebbe il caso di Goriatchoff, quando $\eta = 0$. Passiamo dunque a considerare gl'integrali indipendenti da uno dei coseni a, b, c e da una delle componenti di rotazione p, q, r. Supponiamo anzitutto che in f manchi la c: essa allora soddisferà alla (3).

Se è anche indipendente da p, i coefficienti delle diverse potenze di p nella (3) devono annullarsi. Ma il coefficiente di p^2 è $\frac{\partial f}{\partial b}$, per conseguenza f non deve dipendere da b. Ricadiamo così in un caso già contemplato. La stessa conclusione vale quando si suppone che f non contenga q.

Se poi f è indipendente anche da r, oltre che da c, si vede subito che nelle (0) il ρ deve essere nullo; e torniamo allora ai casi studiati nel primo capitolo. Si ottengono conclusioni analoghe supponendo successivamente la f indipendente da una delle coppie d'argomenti (a, p), (a, q), (a, r) (b, p), (b, q), (b, r).

Restano infine da considerare gl'integrali indipendenti da due componenti di rotazione. Supponendo anzitutto f e ρ indipendenti da p, si trova, sviluppando le (1), che la f deve soddisfare alle equazioni

$$-\xi c \frac{\partial f}{\partial q} + \left(\xi \frac{B}{C} b - \eta \frac{A}{C} a\right) \frac{\partial f}{\partial r} + (r b - q c) \frac{\partial f}{\partial a} - r a \frac{\partial f}{\partial b} +$$

$$+ q a \frac{\partial f}{\partial c} = \rho (B q b + C r c)$$

$$\frac{C - A}{B} r \frac{\partial f}{\partial q} + \frac{A - B}{C} q \frac{\partial f}{\partial r} + c \frac{\partial f}{\partial b} - b \frac{\partial f}{\partial c} = \rho A a;$$

dalle quali, eliminando ρ, si ottiene una sola equazione a cui devono soddisfare tutte le f che non contengono l'argomento p. Se ora si suppone che f sia anche indipendente da r, quell'equazione si scinde nelle tre seguenti:

$$(C - A) \frac{\partial f}{\partial q_1} = 0$$

$$2 (C - A) q_1 \frac{\partial f}{\partial q_1} - A a b \frac{\partial f}{\partial a} + (C c^2 + A a^2) \frac{\partial f}{\partial b} - C c b \frac{\partial f}{\partial c} = 0$$

$$2 \xi A a c \frac{\partial f}{\partial q_1} + A a c \frac{\partial f}{\partial a} + B b c \frac{\partial f}{\partial b} - (B b^2 + A a^2) \frac{\partial f}{\partial c} = 0,$$

ove $q_1 = q^2$. Qui due casi son da distinguere: $C \neq A$ o $C = A$. Nel 1.° caso il sistema si riduce alle due equazioni

$$-A\,a\,b\frac{\partial f}{\partial a}+(C c^2+A a^2)\frac{\partial f}{d b}-C\,c\,b\frac{\partial f}{\partial c}=0$$

$$A\,a\,c\frac{\partial f}{\partial a}+B\,b\,c\frac{\partial f}{\partial b}-(B b^2+A a^2)\frac{\partial f}{\partial c}=0,$$

che ammettono una sola soluzione comune (ben nota) $f=a^2+b^2+c^2$.

Nel 2.° caso il sistema diventa

$$E(f)=a\,b\frac{\partial f}{\partial a}-(a^2+c^2)\frac{\partial f}{\partial b}+c\,b\frac{\partial f}{\partial c}=0$$

$$F(f)=2\xi\,A\,a\,c\frac{\partial f}{\partial q_1}+A\,a\,c\frac{\partial f}{\partial a}+B\,b\,c\frac{\partial f}{\partial b}-(B b^2+A a^2)\frac{\partial f}{d c}=0,$$

il quale ammette ancora la soluzione $f=a^2+b^2+c^2$. Perchè ne abbia un'altra distinta da questa è necessario e basta che sia completo. Se $\xi=0$, esso è completo; e la seconda soluzione è $f=q_1$. Ritroviamo così il solito caso di Lagrange. Se invece supponiamo $\xi \neq 0$, è facile vedere che l'equazione

$$E(F(f))-F(E(f)=B(a^2+b^2+c^2)\left(c\frac{\partial f}{\partial b}-b\frac{\partial f}{\partial c}\right)+$$
$$+(A-B)\,a\,b\left(a\frac{\partial f}{\partial c}-c\frac{d f}{\partial a}\right)-4\xi\,A\,a\,b\,c\,\frac{\partial f}{\partial q_1}=0$$

non è una combinazione lineare delle altre due; quindi il sistema precedente non è completo.

Si ottengono le stesse conclusioni supponendo che la f sia indipendente da q, oltre che da p; oppure da q e da r.

Dalle cose dichiarate in questo capitolo emerge che, nelle ipotesi fatte, il caso di Goriatchoff e Tchapliguine è il solo (a parte quello di Lagrange) in cui esiste, oltre gl'integrali noti, un integrale primo associato alla relazione invariante $A\,p\,a+B\,q\,b+C\,r\,c=0$ e dipendente al più da quattro argomenti.

Roma, 26 Gennaio 1905.

Sur les séries de fonctions de Stirling.

(Par Niels Nielsen, *à Copenhague.)*

---

§ 1. Remarques générales concernant les polynomes $\psi_n(x)$.

Dans mon Mémoire: *Recherches sur les nombres et les polynomes de* Stirling (*) j'ai défini la fonction $\psi_n(x)$ du rang n de Stirling comme le polynome entier de x qui satisfait à cette équation aux différences finies partielles

$$(x+2)\cdot\psi_n(x+1)=(x-n)\cdot\psi_n(x)+(x+1)\cdot\psi_{n-1}(x) \tag{1}$$

avec la condition initiale (**)

$$\psi_0(x)=\frac{1}{2}\cdot \tag{1 bis}$$

J'ai introduit les polynomes $\psi_n(x)$ pour pouvoir calculer directement les nombres de Stirling de première et de seconde espèce, savoir les nombres positifs entiers C_{n+1}^r et $\mathfrak{C}_{n+1}^r$ définis comme suit:

C_{n+1}^r est la somme des $\binom{n}{r}$ produits possibles qui contiennent r facteurs différents pris parmi les nombres $1, 2, 3, \ldots, n$, tandis que

$$\mathfrak{C}_{n+1}^r=\frac{1}{n!}\cdot\sum_{s=0}^{s=n-1}(-1)^s\binom{n}{s}(n-s)^{n+r}.$$

En effet, supposons connus les polynomes $\psi_n(x)$, nous aurons ces deux

---

(*) *Annali di Matematica,* t. 9, p. 287-318; 1904.

(**) Les conditions relatives aux valeurs de $\psi_n(0)$ indiquées dans le Mémoire susdit, p. 309, sont superflues.

formules

$$C_{n+1}^{r} = \frac{(n+1)!}{(n-r)!} \cdot \psi_{r-1}(n), \quad r \geq 1 \tag{2}$$

$$\mathfrak{C}_{n+1}^{r} = (-1)^{r-1} \frac{(n+r)!}{(n-1)!} \cdot \psi_{r-1}(-n-1), \quad r > 1. \tag{2 bis}$$

Dans mon autre Mémoire sur cette matière: *Note sur quelques applications analytiques de polynomes de Stirling* (*) j'ai introduit la série de puissances

$$\left(\frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}\right)^{-x-1} = 1 + (x+1) \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \psi_s(x) \cdot \alpha^s, \quad |\alpha| < 2\pi \tag{3}$$

qui joue un rôle assez fondamental dans plusieurs questions de l'Analyse.

En effet, dans mon troisième Mémoire sur ce sujet: *Ueber die Stirlingschen Polynome und die Gammafunktion* (**) j'ai exprimé sous forme très simple, à l'aide des polynomes $\psi_n(x)$, les coefficients des séries de factorielles de Binet concernant la fonction gamma.

Posons particulièrement dans (3) $x = n - 1$, où n désigne un positif entier plus grand que l'unité, la formule (2) nous conduira immédiatement à un résultat indiqué par Sylvester (***).

Dans le second des trois Mémoires susdits j'ai considéré aussi la série de puissances

$$\left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)^{x-1} = 1 + (x+1) \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \chi_s(x)\, \alpha^{2s+2}, \quad |\alpha| < \pi, \tag{4}$$

où les coefficients $\chi_n(x)$ sont très analogues aux polynomes de Stirling.

En affet, posons

$$\mathfrak{G}_{n+1}^{2p} = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{s=0}^{\leq \frac{n-1}{2}} (-1)^s \binom{n}{s} (n-2s)^{n+2p},$$

nous aurons

$$\mathfrak{G}_{n+1}^{2p} = (-1)^p \frac{2^{n-1}(n+2p)!}{(n-1)!} \cdot \chi_{p-1}(-n-1), \quad p \geq 1. \tag{5}$$

(*) *Annali di Matematica*, t. 9, p. 319-325; 1901.

(**) *Monatshefte für Mathematik und Physik*, t. 16, p. 135-140; 1905.

(***) *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, t. 15, p. 195; 1883.

Dans le Mémoire que voici je détermine les valeurs de $\psi_n(x)$ et $\chi_n(x)$ pour n extrêmement grand, ce qui nous conduira à des résultats singuliers relatifs aux séries de fonctions $\psi_n(x)$ ou de $\chi_n(x)$, séries parmi lesquelles (3) et (4) sont des exemples.

Or, tous les résultats que nous venons d'indiquer rendent très désirable une connaissance approfondie des propriétés des deux groupes de polynomes $\psi_n(x)$ et $\chi_n(x)$; c'est pourquoi je me suis proposé de donner dans les deux paragraphes suivants un nombre de relations élémentaires entre $\psi_n(x)$, $\chi_n(x)$ et les polynomes $\varphi_n(x)$ de Bernoulli, formules qui nous seront utiles dans nos recherches suivantes.

§ 2. Les polynomes de Stirling et de Bernoulli.

Étudions d'abord la formule (3), appliquons l'identité évidente

$$e^{\alpha(x+y+1)} \cdot \left(\frac{e^{\alpha}-1}{\alpha}\right)^{-x-1} = e^{\alpha y} \cdot \left(\frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}\right)^{-x-1},$$

puis introduisons au lieu des quatre fonctions qui y figurent les séries de puissances correspondantes, les multiplications s'effectueront d'après la règle de Cauchy, et nous aurons, en comparant les termes des deux membres de la formule ainsi obtenue qui contiennent la puissance α^{n+1}, cette première formule

$$\left.\begin{aligned} \frac{(x+y+1)^{n+1}}{(n+1)!} - (x+1) \cdot \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s (x+y+1)^{n-s}}{(n-s)!} \cdot \psi_s(x) = \\ = \frac{y^{n+1}}{(n+1)!} + (x+1) \cdot \sum_{s=0}^{s=n} \frac{y^{n-s}}{(n-s)!} \cdot \psi_s(x), \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

de laquelle nous avons à étudier les trois cas particuliers suivants:

1.° $y = 0$, ou bien $y = -x - 1$, ce qui donnera ces deux formules

$$2\,\psi_{2p}(x) = \frac{(x+1)^{2p}}{(2p+1)!} - \sum_{s=0}^{s=2p-1} \frac{(-1)^s (x+1)^{2p-s}}{(2p-s)!} \cdot \psi_s(x) \qquad (7)$$

$$\frac{(x+1)^{2p-1}}{(2p)!} = \sum_{s=0}^{s=2p-2} \frac{(-1)^s (x+1)^{2p-s-1}}{(2p-s-1)!} \cdot \psi_s(x). \qquad (7\text{ bis})$$

2.° $y = -1$, ou bien $y = -x$, nous aurons

$$2\,\psi_{2p}(x) = \frac{x^{2p+1}+1}{x+1}\cdot\frac{1}{(2p+1)!} - \sum_{s=0}^{s=2p-1}\frac{(-1)^s(x^{2p-s}+1)}{(2p-s)!}\cdot\psi_s(x) \qquad (8)$$

$$\frac{x^{2p}-1}{x+1}\cdot\frac{1}{(2p)!} = \sum_{s=0}^{s=2p-2}\frac{(-1)^s(x^{2p-s-1}-1)}{(2p-s-1)!}\cdot\psi_s(x). \qquad (8\text{ bis})$$

3.° $y = -\frac{x+1}{2}$; supposons impair l'indice n, la formule ainsi obtenue se réduit à une identité formelle, tandis que l'hypothèse $n = 2p$ donnera

$$2^{2p+1}\cdot\psi_{2p}(x) = \frac{(x+1)^{2p}}{(2p+1)!} - \sum_{s=0}^{s=2p-1}\frac{(-1)^s\,2^{s+1}(x+1)^{2p-s}}{(2p-s)!}\cdot\psi_s(x), \qquad (9)$$

formule qui est très remarquable en comparaison avec (7).

Prenons ensuite comme point de départ l'autre identité évidente

$$\frac{e^{\alpha x}\cdot\alpha}{1-e^{-\alpha}}\cdot\left(\frac{e^{\alpha}-1}{\alpha}\right)^{-x-y-1} = \left(\frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}\right)^{-x-1}\cdot\left(\frac{e^{\alpha}-1}{\alpha}\right)^{-y-1},$$

puis appliquons cette série de puissances

$$\frac{e^{\alpha x}\cdot\alpha}{1-e^{-\alpha}} = \sum_{s=0}^{s=\infty}\varphi_s(x)\,\alpha^s, \quad |\alpha| < 2\pi, \qquad (10)$$

où les $\varphi_n(x)$ sont les fonctions de Bernoulli avec la définition que j'ai proposée dans le premier de mes Mémoires susdits (*); le même procédé donnera cette autre formule générale:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_{n+1}(x) - (x+y+1)\cdot\sum_{s=0}^{s=n}(-1)^s\psi_s(x+y)\cdot\varphi_{n-s}(x) =\\ = (x+1)\,\psi_n(x) - (-1)^n(y+1)\cdot\psi_n(y) -\\ -(x+1)(y+1)\cdot\sum_{s=0}^{s=n}(-1)^s\psi_s(y)\cdot\psi_{n-s-1}(x),\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

de laquelle nous avons à étudier ces trois cas particuliers:

1.° $y = -1$; nous aurons, en mettant $x+1$ au lieu de x,

$$\varphi_{n+1}(x+1) - (x+1)\cdot\sum_{s=0}^{s=n}(-1)^s\psi_s(x)\cdot\varphi_{n-s}(x+1) = (x+2)\cdot\psi_n(x);$$

(*) Loc. cit., p. 291.

or, la formule (10) donnera

$$\varphi_r(x+1) - \varphi_r(x) = \frac{(x+1)^{r-1}}{(r-1)!},$$

appliquons ensuite les deux formules (7) puis la définition (1), nous trouverons entre les polynomes de STIRLING et ceux de BERNOULLI cette relation élégante:

$$\varphi_{n+1}(x) - (x-n) \cdot \psi_n(x) = (x+1) \cdot \sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s \psi_s(x) \cdot \varphi_{n-s}(x). \quad (12)$$

2.° $y = -x - 1$, ce qui donnera

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{n+1}(x) &= (x+1) \cdot \psi_n(x) + (-1)^n \cdot x \cdot \psi_n(-x-1) + \\ &+ x(x+1) \cdot \sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s \psi_s(-x-1) \cdot \psi_{n-s-1}(x). \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

3.° $y = 0$ nous aurons, en vertu de (12), la formule récursive pour le calcul successif des polynomes $\psi_n(x)$ que je viens de démontrer dans mon second Mémoire (*) en applicant l'identité

$$\left(\frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}\right)^{-x-1} \cdot \left(\frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}\right)^{-y-1} = \left(\frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}\right)^{-x-y-2}.$$

§ 3. Les trois polynomes $\varphi_n(x)$, $\psi_n(x)$ et $\chi_n(x)$.

Quant à la formule (4), appliquons l'identité

$$\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^{-x-1} \cdot e^{i\alpha(x+y+1)} = e^{i\alpha y} \cdot \left(\frac{1-e^{-2\alpha i}}{2\alpha i}\right)^{-x-1},$$

il résulte la formule générale

$$\left.\begin{aligned} \frac{(x+y+1)^n}{n!} + (x+1) \cdot \sum_{s=1}^{<\frac{n}{2}} \frac{(-1)^s (x+y+1)^{n-2s}}{(n-2s)!} \cdot \chi_{s-1}(x) = \\ = \frac{y^n}{n!} + (x+1) \cdot \sum_{s=1}^{s=n} \frac{2^s \cdot y^{n-s}}{(n-s)!} \cdot \psi_{s-1}(x), \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

(*) Loc. cit., p. 321.

ce qui donnera pour $y=0$ et en mettant $n+1$ au lieu de n:

$$2^{n+1}\cdot\psi_n(x)=\frac{(x+1)^n}{(n+1)!}-\sum_{s=0}^{<\frac{n-1}{2}}\frac{(-1)^s(x+1)^{n-2s-1}}{(n-2s-1)!}\cdot\chi_s(x), \tag{15}$$

tandis que l'hypothèse $y=-(x+1)$ donnera ces deux autres formules plus particulières (*)

$$\frac{(x+1)^{2n}}{(2n+1)!}=\sum_{s=0}^{s=2n}\frac{(-1)^s\,2^{2n-s+1}\cdot(x+1)^s}{s!}\cdot\psi_{2n-s}(x) \tag{16}$$

$$(-1)^{n+1}\chi_n(x)=\frac{(x+1)^{2n+1}}{(2n+2)!}+\sum_{s=0}^{s=2n+1}\frac{(-1^s)\,2^{2n-s+2}\cdot(x+1)^s}{s!}\cdot\psi_{2n-s+1}(x). \tag{16 bis}$$

Appliquons ensuite cette autre identité

$$\frac{e^{\frac{y-x-1}{2}\alpha}}{1-e^{-\alpha}}\cdot\left(\frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}\right)^{-x}=e^{\frac{y\alpha}{2}}\cdot\left(\frac{\sin\left(\frac{\alpha i}{2}\right)}{\left(\frac{\alpha i}{2}\right)}\right)^{-x-2},$$

nous aurons de même

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_{n+1}\left(\frac{y-x-1}{2}\right)+x\cdot\sum_{s=0}^{s=n}\psi_s(x-1)\cdot\varphi_{n-s}\left(\frac{y-x-1}{2}\right)=\\&=\left[\frac{y^{n+1}}{(n+1)!}-(x+1)\cdot\sum_{s=0}^{<\frac{n-1}{2}}\frac{(-1)^s\,y^{n-2s-1}}{(n-2s-1)!}\cdot\chi_s(x)\right]\cdot 2^{-n-1}.\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Posons dans (17) $y=0$, il résulte

$$\varphi_{2n+1}\left(\frac{-x-1}{2}\right)+x\cdot\sum_{s=0}^{s=2n}\varphi_{2n-s}\left(\frac{-x-1}{2}\right)\cdot\psi_s(x-1)=0 \tag{18}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{(-1)^n(x+1)}{2^{2n}}\cdot\chi_{n-1}(x)=\varphi_{2n}\left(\frac{-x-1}{2}\right)+\\&+x\cdot\sum_{s=0}^{s=2n-1}\psi_s(x-1)\cdot\varphi_{2n-s-1}\left(\frac{-x-1}{2}\right).\end{aligned}\right\} \tag{18 bis}$$

L'hypothèse $y=x+1$ nous conduira à (15); posons enfin $x=-1$,

(*) Loc. cit., p. 323.

puis remarquons que la formule (3) nous donne immédiatement la valeur de $\psi_n(-2)$, nous aurons, en mettant $2x$ au lieu de y, ce développement très connu

$$\frac{x^n}{n!} = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s}{(s+1)!} \cdot \varphi_{n-s}(x). \tag{19}$$

§ 4. Les polynomes $\psi_n(x)$ et $\chi_n(x)$ pour n très grand.

Pour déterminer maintenant la valeur des deux polynomes $\psi_n(x)$ et $\chi_n(x)$ pour n très grand, considérons d'abord $\psi_n(x)$.

A cet effet, supposons $\Re(x) < -1$, puis désignons par C la circonférence du cercle $|x| = 2\pi$, prise dans le sens direct, le théorème fondamental de Cauchy donnera (*)

$$\left(\frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}\right)^{-x-1} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_C \frac{(1-e^{-z})^{-x-1}}{(z-\alpha)\, z^{-x-1}} \cdot dz\,; \tag{20}$$

car l'hypothèse $\Re(x) < -1$ nous permet de faire usage du chemin d'intégration C, quoiqu'il contient les deux points singuliers $z = \pm 2\pi i$.

Or, la formule (3) donnera, en vertu de (20),

$$(x+1) . \psi_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_C \frac{(1-e^{-z})^{-x-1}}{z^{n-x+1}}\, dz\,;$$

posons ensuite

$$z = 2\pi . e^{\theta i},$$

où θ désigne un angle réel, il résulte

$$(x+1)\, \psi_n(x)\, (2\pi)^{n-x} = \int_{\omega}^{2\pi+\omega} \left(1 - e^{-2\pi e^{\theta i}}\right)^{-x-1} e^{(x-n)\theta i}\, d\theta, \tag{21}$$

où ω désigne un angle réel convenable; car l'intégrale qui figure au second membre de (21) est une fonction multiforme, dont la valeur dépend de ω.

(*) On voit que la formule (20) est applicable si nous supposons $\Re(x) < 0$ seulement, mais cette hypothèse ne suffise pas pour démontrer l'inégalité (22).

Ces réductions faites, une intégration par parties donnera, en vertu de (21), cette proposition, essentielle dans ce qui suit:

Supposons $\Re(x) < -1$, *il est possible de choisir le positif entier n si grand que*

$$|(2\pi)^n \cdot n^\rho \cdot \psi_n(x)| < \sigma, \tag{22}$$

où σ *désigne une quantité positive, donnée auparavant et étant aussi petite qu'on le veut, tandis que* $\rho < 1$.

Dans ce qui suit nous désignons toujours par le symbole

$$|f(n)| < \sigma$$

qu'il est possible de choisir le positif entier n si grand que la valeur absolue $|f(n)|$ ne dépasse pas à une certaine quantité positive, donnée auparavant et étant aussi petite qu'on le veut.

Cela posé prenons comme point de départ ces deux valeurs limites (*)

$$\left.\begin{aligned}(-1)^{n-1}(2\pi)^{2n} \cdot \varphi_{2n}(x) &= 2\cos(2\pi x) + \delta_n, \quad |\delta_n| < \sigma, \\ (-1)^{n-1}(2\pi)^{2n+1} \cdot \varphi_{2n+1}(x) &= 2\sin(2\pi x) + \varepsilon_n, \quad |\varepsilon_n| < \sigma,\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

puis appliquons la formule suivante (**):

$$\Phi_{n+1}(x) + \sum_{s=1}^{s=n-1} (-1)^s \Phi_{n-s+1}(x), \ \Psi_{2s}(x) + (-1)^n n \cdot \Psi_{2n}(x) = 0, \tag{24}$$

où nous avons posé pour abréger

$$\Phi_{r+1}(x) = r!\left(\varphi_{r+1}(x) - \varphi_{r+1}(0)\right)$$

$$\Psi_{2r}(x) = (x+1) \cdot x(x-1) \ldots (x-r+1) \cdot \psi_{r-1}(x);$$

mettons ensuite

$$(2\pi)^r\left(\varphi_r(x) - \varphi_r(0)\right) = f_r(x)$$

$$\Gamma_r(x) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (r-1) \cdot r^x}{x(x+1) \ldots (x+r-1)},$$

de sorte que nous aurons, pourvu que x soit ni nulle ni negatif entier, cette

(*) Loc. cit., p. 296.
(**) Loc. cit., 305.

valeur limite

$$\Gamma_n(x) = \Gamma(x) + R_n, \qquad R_n < \sigma;$$

la formule (24) s'écrira, après un simple calcul, sous cette autre forme plus commode pour les recherches qui nous occupent ici :

$$\left.\begin{aligned} & f_{n+1}(x) + \frac{x+1}{\Gamma_n(-x)} \cdot (2\pi)^{n+1} \cdot n^{-x} \cdot \psi_{n-1}(x) = \\ = \quad & (x+1) \cdot \sum_{s=1}^{s=n-1} \frac{(-1)^s f_{n-s+1}(x)}{\Gamma_s(-x)} \cdot \frac{(2\pi)^{s+1} \cdot s^{-x} \cdot \psi_{s-1}(x) \cdot (s-1)!}{n(n-1)(n-2)\ldots(n-s+1)} \cdot \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

Supposons maintenant $-1 > \Re(x) > -3$, la formule (22) montre qu'il est possible de choisir n si grand que la valeur absolue de second membre de (25) deviendra plus petits que σ. En effet, les valeurs absolues de tous les termes possèdent la propriété susdite et c'est la même chose avec les termes multipliés par n, le premier et le dernier exclus.

Cela posé, appliquons la formule *eulérienne*

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

nous aurons, en vertu de (23), ces deux formules analogues

$$\left.\begin{aligned} \frac{(2\pi)^{2n+1} \cdot \psi_{2n}(x)}{(-1)^n \cdot (2n)^x} &= \frac{2 \sin \pi x}{\Gamma(x+2)} + \delta_n, \qquad |\delta'_n| < \sigma, \\ \frac{(2\pi)^{2n+2} \cdot \psi_{2n+1}(x)}{(-1)^n \cdot (2n+1)^x} &= \frac{2 \cos \pi x}{\Gamma(x+2)} + \varepsilon_n, \qquad \varepsilon_n < \sigma. \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

Revenons maintenant à la définition (1), nous aurons

$$(x+2)\,\psi_n(x+1)\,(2\pi)^{n+1} \cdot n^{x-1} = \frac{x-n}{n} \cdot (2\pi)^{n+1} \cdot n^{x} \cdot \psi_n(x) +$$

$$+ \frac{2\pi(x+1)}{n} \cdot (2\pi)^n \cdot n^{-x} \cdot \psi_{n-1}(x),$$

ce qui donnera, en vertu de (22), cette valeur limite

$$(x+2) \cdot \lim_{n=\infty} \left((2\pi)^{n+1} \cdot n^{x-1} \cdot \psi_n(x+1)\right) = \lim_{n=\infty} \left((2\pi)^{n+1} \cdot n^{x} \cdot \psi_n(x)\right),$$

valable, pourvu que $\Re(x) < -1$, c'est-à-dire que les formules (24) sont vraies aussi dans ce cas. De plus, nous verrons que les formules (26) sont vraies encore pour $\Re(x) < 0$ et ainsi de suite, c'est-à-dire que nous avons démontré ce théorème général:

Les valeurs limites (26) *sont vraies pour une valeur finie quelconque de x.*

Quant au polynome $\chi_n(x)$, appliquons la formule (16 bis), un simple calcul donnera, en vertu de (26), ce théorème analogue au précédent:

Supposons x fini, nous aurons la valeur limite:

$$\frac{\pi^{2n+2}\cdot\chi_n(x)}{(2n+1)^x} = \frac{2}{\Gamma(x+2)} + \delta''_n, \quad |\delta''_n| < \sigma. \tag{27}$$

§ 5. Sur les séries de fonctions $\psi_n(x)$ et $\chi_n(x)$.

Les valeurs limites que nous venons de développer nous permettent de déduire quelques propriétés des séries infinies des formes suivantes, où les coefficients a_n et b_n sont indépendants de x:

$$\mathfrak{F}(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} a_s\,\psi_s(x) \tag{28}$$

$$\mathfrak{G}(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} b_s\,\chi_s(x), \tag{28 bis}$$

séries de polynomes qui présentent des analogies avec les séries de factorielles, ce qui est très singulier, ce me semble.

En effet, il est évident que les formules (26) et (27) nous donnent cette première proposition:

Supposons finis tous les termes de $\mathfrak{F}(x)$ ou de $\mathfrak{G}(x)$, les séries $\mathfrak{F}(y)$ ou $\mathfrak{G}(y)$ seront certainement absolument convergentes, pourvu que

$$\Re(y-x) < -1.$$

De plus, supposons *convergentes* les deux séries

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} |a_s\,\psi_s(x)|, \qquad \sum_{s=0}^{s=\infty} |b_s\,\chi_s(x)|, \tag{29}$$

puis désignons par λ une quantité réelle et *négative*, il est évident que ces deux autres séries

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} | a_s \psi_s (x+\lambda) | \ , \qquad \sum_{s=0}^{s=\infty} | b_s \chi_s (x+\lambda) | \ , \tag{30}$$

seront *convergentes* aussi. Inversement, supposons que les séries (24) soient *divergentes*, tandis que λ soit une quantité réelle et *positive*, les deux séries (30) seront *divergentes* aussi, d'où la proposition suivante :

Le domaine de convergence absolue d'une série $\mathfrak{F}(x)$ ou $\mathfrak{G}(x)$ est un demi-plan situé à gauche d'une certaine ligne droite, perpendiculaire à l'axe des nombres réels.

Cela posé, les formules (26) (27) nous donnent immédiatement ces deux conditions suffisantes et nécessaires pour la convergence de séries qui nous occupent :

1.° *Supposons que les séries de puissances*

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} a_s x^s \, , \qquad \sum_{s=0}^{s=\infty} b_s x^s \tag{31}$$

ayont ses rayons de convergence plus grands que 2π, respectivement π^2, les deux séries $\mathfrak{F}(x)$ et $\mathfrak{G}(x)$ seront convergentes pour une valeur finie quelconque de x, de sorte que $\mathfrak{F}(x)$ et $\mathfrak{G}(x)$, sont des fonctions transcendantes entières.

2.° *Supposons que les rayons de convergence des séries de puissances* (31) *soient 2π, respectivement π^2, la convergence de la série $\mathfrak{F}(x)$, respectivement $\mathfrak{G}(x)$, exige que les coefficients a_s et b_s satisfont aux conditions*

$$| a_n | < K \, . \, (2\pi)^n . \, n^\omega , \qquad | b_n | < K \pi^{2n} \, . \, n^\omega , \tag{32}$$

où K désigne un nombre positif fini, tandis que l'exposant ω est une quantité réelle finie; dans ce cas nos deux séries $\mathfrak{F}(x)$ et $\mathfrak{G}(x)$ sont certainement absolument convergentes, pouron que $\Re(x) < -\omega - 1$.

Il est évident que les deux formules (3) (4) nous fournissent l'exemple le plus simple d'une série $\mathfrak{F}(x)$, respectivement $\mathfrak{G}(x)$, savoir

$$\left(\frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha}\right)^{-x-1} = 1 + (x+1) . \sum_{s=0}^{s=\infty} \psi_s (x) \, . \, \alpha^{s+1}, \qquad | \alpha | < 2\pi . \tag{3}$$

$$\left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)^{-x-1} = 1 + (x+1) . \sum_{s=0}^{s=\infty} \chi_s (x) \, . \, \alpha^{2s+2}, \qquad | \alpha | < \pi . \tag{4}$$

Étudions maintenant ces deux séries pour $|\alpha| = 2\pi$, respectivement $|\alpha| = \pi$, il résulte de (26) (27):

Supposons $\Re(x) < -1$, *les deux séries* (3) (4) *sont absolument convergentes dans tous les points des circonférences de leurs cercles de convergence.*

Supposons, au contraire $0 > \Re(x) > -1$, *les séries* (3) *et* 4 *seront convergentes mais non absolument, dans les points susdits à l'exception des points singuliers* $\alpha = \pm 2\pi i$, *respectivement* $\alpha = \pm \pi$.

Posons dans (3) $x = \pm 2\pi i$, nous aurons ces deux autres developpements

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s (2\pi)^{2s+2} \cdot \psi_{2s+1}(x) \tag{33}$$

$$0 = \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s (2\pi)^{2s} \cdot \psi_{2s}(x), \tag{34}$$

séries qui sont convergentes, et cela absolument, pourvu que $\Re(x) < -1$.

La formule (34) montre évidemment que les séries $\mathfrak{F}(x)$ admettent, en tous cas, un *développement de zéro.*

Posons encore dans (4) $x = \pm \pi$, il résulte une formule analogue à (33), savoir

$$\frac{1}{1+x} = -\sum_{s=0}^{s=\infty} (2\pi)^{2s+2} \cdot \chi_s(x), \tag{35}$$

qui est applicable, pourvu que $\Re(x) < -1$.

Il est digne de remarque que plusieurs des formules élémentaires développés dans le § 2, 3 nous donnent, comme des limites, les trois formules particulières (33), (34) et (35).

Copenhague, le 30 janvier 1905.

Surfaces Analogous to the Surfaces of Bianchi.

(*By* Luther Pfahler Eisenhart.)

§ 1. Introduction.

Given a pseudospherical surface referred to its lines of curvature. The parameters of these lines can be so chosen that the linear element of the surface takes the form

$$d\,s^2 = \cos^2\omega\,d\,u^2 + \sin^2\omega\,d\,v^2 \tag{1}$$

and the linear element of the spherical representation is

$$d\,\sigma^2 = \sin^2\omega\,d\,u^2 + \cos^2\omega\,d\,v^2, \tag{2}$$

where ω satisfies the equation

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial\,u^2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial\,v^2} = \sin\omega\cos\omega. \tag{3}$$

Moreover, every solution of this equation gives a pseudospherical surface with the corresponding forms (1) and (2).

We consider now the trihedron with vertex at the origin and rotating in such a way that its axes are always parallel to the tangents to the lines of curvature and the normal of the above surface. Every solution of equation (3) gives ri e to such a trihedron which we shall call the *fundamental trihedron* of the solution and we shall denote by the *fundamental plane* that plane of this trihedron which is parallel to the tangent plane to the above surface. The line in this plane which passes through the origin and is parallel to the tangent to the line of curvature $v =$ const. we call the *initial line*. In the fundamental plane we draw through the vertex O of the trihedron the line $O\,N$ which makes with the initial line the angle θ, where θ

is the angle determining a Bäcklund transformation of the given pseudospherical surface with the linear element (1). This function θ must be a solution of the equations

$$\left.\begin{aligned} \sin\sigma\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}+\frac{\partial\omega}{\partial v}\right) &= \sin\theta\cos\omega - \cos\sigma\cos\theta\sin\omega, \\ \sin\sigma\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}+\frac{\partial\omega}{\partial u}\right) &= -\cos\theta\sin\omega + \cos\omega\sin\theta\cos\omega, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

where σ denotes the constant angle between the tangent planes to the pseudospherical surface and its transform.

Let S be any surface whose lines of curvature are represented on the sphere by the parameter lines in terms of which the linear element is given by (2). Denote by M the point of contact of the tangent plane which is parallel to the fundamental plane under consideration. In the plane through M normal to the line ON we draw the line which makes the angle σ with the fundamental plane and denote by P its point of intersection wich the latter; further we denote by R the point of intersection of the plane through M and the line ON. We designate by p, ρ, r the respective lengths OR, RP, PM. From the conditions of the problem it is found that these three functions must satisfy a system of four linear partial differential equations of the first order. In this paper we are concerned with the determination of certain particular solutions of these equations and the study of the corresponding A-surfaces (*). In § 2 we find the general equations of the problem.

In § 3 we consider the case $\sigma = \frac{\pi}{2}$ and $\rho = 0$, and find that the corresponding surfaces form one of the classes of surfaces which Bianchi called surfaces (Σ) of the parabolic type in his Memoir: *Nuove ricerche sulle superficie pseudosferiche* (*Annali di Matematica*, 1896). When ρ is a constant the surfaces satisfy the condition given by Bianchi for his so-called surfaces (Σ) of the hyperbolic type, but their coordinates have a form unlike any found by Bianchi. If a correspondence is established between points on one surface of the first class and one of the latter class such that the tangent

(*) *Surfaces with the same spherical representation of their lines of curvature as pseudospherical surfaces.* Amer. Journ., vol. 27, p. 113. — We have called surfaces of this kind A-surfaces, for the sake of brevity.

planes at these points are parallel, the locus of the point cutting the join in constant ratio is a surface of the hyperbolic type.

In § 4 we find that we may take for ρ the function r for any A-surface S_1, with the spherical representation determined by a solution θ of equations (4) in which σ is a right angle, and then the other functions p and r for the corresponding surface with the spherical representation (2) are determined by quadratures. When, in particular, one takes for S_1 a surface analogous to a surface of Bianchi of the parabolic type discussed in § 3, one finds that the corresponding A-surfaces are surfaces of Bianchi of elliptic, hyperbolic and parabolic types (*). Again, when the surface S_1 is of the hyperbolic type, as previonsly discussed, a class of new surfaces entirely distinct from the former is found. Furthermore, it is shown that the surface for which $p = 0$ is a sphere of radius r.

When σ is any angle whatever and $p = 0$, the determination of the functions p and r requires the solution of a partial differential equation and quadratures. His shown in § 5 that the surfaces corresponding to each set of solutions have the following property. We draw through the point M of the surface and in its tangent plane the line MS parallel to ON and in the plane normal to MS at M we draw the line making the angle $\frac{\pi}{2} - \sigma$ with the normal; upon this line we project the segment of the normal to the surface between the centres of curvature; the sphere erected upon this projected segment as diameter passes through O. We call these surfaces the A-surfaces of the parabolic type, for they reduce to surfaces of Bianchi of this type when σ is a right angle. If one applies a generalized Bäcklund transformation (**) to such a surface, the new surface is of the same kind.

In § 6 we prove by geometrical considerations that the function r for any A-surface, S_1, with the spherical representation determined by a solution θ of equations (4) may be taken for a solution ρ of the general equations of condition. In particular, we consider the case where S is a surface of the parabolic type, as defined in the preceding section. The corresponding surfaces are completely determined by quadratures and are of three kinds according to the value of a certain constant of integration k. If spheres are described in a manner somewhat similar to those in § 5, they cut the sphere,

(*) L. c., p. 367.

(**) *For definition* see § 5; also *Amer. Journal*, l. c., p. 148.

of radius $\sqrt{k}$ and centre at O, in great circles, when k is positive; they cut the sphere with the centre O and radius $\sqrt{-k}$, orthogonally, when k is negative; and when k is zero, the spheres pass through O. As these surfaces are a generalization of the surfaces of BIANCHI, we refer to them as A-surfaces of the elliptic, hyperbolic and parabolic types respectively. In § 7 we have shown that these surfaces possess another property similar to one known for the surfaces of BIANCHI.

BIANCHI has shown that the circles of the cyclic system for which the cyclic congruence is composed of the normals to a surface of BIANCHI of the parabolic type pass through a fixed point. In § 8 we show that the normals to such a surface are the only-ones whose circles pass through a fixed point. The paper choses with a discussion in § 9 of a certain transformation by means of which one can determine from an A-surface another A-surface with the same spherical representation of its lines of curvature.

§ 2. GENERAL FORMULAE.

From the definition of the functions p, q, r, it follows that the coordinates of M with respect to the axes of the fundamental trihedron are

$$p\cos\theta-(\rho+r\cos\sigma)\sin\theta,\quad p\sin\theta+(\rho+r\cos\sigma)\cos\theta,\quad r\sin\sigma. \tag{5}$$

From (2) it follows that the projections of a displacement of M upon the axes (*) are

$$\left.\begin{array}{c}
d\left[p\cos\theta-(\rho+r\cos\sigma)\sin\theta\right]+r\sin\sigma\sin\omega\,du-\\
-\left(\dfrac{\partial\omega}{\partial v}du+\dfrac{\partial\omega}{\partial u}dv\right)\left[p\sin\theta+(\rho+r\cos\sigma)\cos\theta\right],\\
d\left[p\sin\theta+(\rho+r\cos\sigma)\cos\theta\right]+\\
+\left(\dfrac{\partial\omega}{\partial v}du+\dfrac{\partial\omega}{\partial u}dv\right)\left[p\cos\theta-(\rho+r\cos\sigma)\cos\theta\right]-r\sin\sigma\cos\omega\,dv,\\
\sin\sigma\,dr-\cos\omega\left[p\cos\theta-(\rho+r\cos\sigma)\sin\theta\right]du+\\
+\sin\omega\left[p\sin\theta+(\rho+r\cos\sigma)\cos\theta\right]dv.
\end{array}\right\} \tag{6}$$

(*) DARBOUX, *Leçons*, vol. 2, p. 385.

In consequence of equations (4) and since S is an A-surface (*) with the given representation of its lines of curvature, it follows from (6) that the functions p, ρ, r must satisfy the equations

$$\left.\begin{aligned}
&\sin\sigma\sin\theta\frac{\partial p}{\partial u}+\sin\sigma\cos\theta\frac{\partial \rho}{\partial u}+\\
&+\sin\theta\cos\omega\,[p\cos\theta-(\rho+r\cos\sigma)\sin\theta]=0,\\
&\sin\sigma\cos\theta\frac{\partial p}{\partial v}-\sin\sigma\sin\theta\frac{\partial \rho}{\partial v}+\\
&+\cos\theta\sin\omega\,[p\sin\theta+(\rho+r\cos\sigma)\cos\theta]=0,\\
&\sin\sigma\frac{\partial r}{\partial u}=\sin\omega\,[p\cos\theta-(\rho+r\cos\sigma)\sin\theta],\\
&\sin\sigma\frac{\partial r}{\partial v}=-\cos\omega\,[p\sin\theta+(\rho+r\cos\sigma)\cos\theta].
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

It is found also that the coefficients of the linear element of S are given by

$$\left.\begin{aligned}
A&=\cos\theta\frac{\partial p}{\partial u}-\sin\theta\frac{\partial \rho}{\partial u}-\\
&-\frac{p\sin^2\theta\cos\omega-(\rho\cos\sigma+r)\sin\omega+(\rho+r\cos\sigma)\sin\theta\cos\theta\cos\omega}{\sin\sigma},\\
C&=\sin\theta\frac{\partial p}{\partial v}+\cos\theta\frac{\partial \rho}{\partial v}-\\
&-\frac{p\cos^2\theta\sin\omega+(\rho\cos\sigma+r)\cos\omega-(\rho+r\cos\sigma)\sin\theta\cos\theta\sin\omega}{\sin\sigma},
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

where

$$ds^2=A^2\,du^2+C^2\,dv^2.$$

If we denote by X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2; X, Y, Z the direction cosines of the axes of the fundamental trihedron with respect to a fixed trihedron with the same vertex, the rectangular coordinates of the point M with respect to the fixed axes are of the form

$$\left.\begin{aligned}
x&=[p\cos\theta-(\rho+r\cos\sigma)\sin\theta]\,X_1+\\
&+[p\sin\theta+(\rho+r\cos\sigma)\cos\theta]\,X_2+r\sin\sigma\,X,
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

and similar expressions for y and z.

(*) *A surface with the same spherical representation of its lines of curvature as a pseudospherical surface;* see article in *American Journal,* l. c.

Moreover, from the character of the preceding discussion it is quite clear that if we have any set of solutions whatever p, ρ, r of equations (7), then the expressions (9) will define an A-surface whose linear element will have the coefficients given by (8) and the spherical representation of its lines of curvature will have the linear element (2).

§ 3. Solution for $\sigma = \frac{\pi}{2}$, $\rho = \text{const.}$ Surfaces of Bianchi.

When σ is a right angle, equations (7) reduce to

$$\left.\begin{aligned}
&\sin\theta\frac{\partial p}{\partial u} + \cos\theta\frac{\partial \rho}{\partial u} + \sin\theta\cos\omega\,(p\cos\theta - \rho\sin\theta) = 0,\\
&\cos\theta\frac{\partial p}{\partial v} - \sin\theta\frac{\partial \rho}{\partial v} + \cos\theta\sin\omega\,(p\sin\theta + \rho\cos\theta) = 0,\\
&\frac{\partial r}{\partial u} = \sin\omega\,(p\cos\theta - \rho\sin\theta),\\
&\frac{\partial r}{\partial v} = -\cos\omega\,(p\sin\theta + \rho\cos\theta);
\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

and by means of the above the coefficients A and C can be reduced to

$$\left.\begin{aligned}
A &= -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial \rho}{\partial u} - p\cos\omega + r\sin\omega,\\
C &= \quad \frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial \rho}{\partial v} - p\sin\omega - r\cos\omega.
\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

We consider first the case where ρ is zero and put

$$p = e^{-\alpha}, \quad r = \gamma. \qquad (12)$$

Then equations (10) reduce to

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \alpha}{\partial u} = \cos\omega\cos\theta, \qquad &&\frac{\partial \alpha}{\partial v} = \sin\omega\sin\theta;\\
&\frac{\partial \gamma}{\partial u} = e^{-\alpha}\sin\omega\cos\theta, \qquad &&\frac{\partial \gamma}{\partial v} = -e^{-\alpha}\cos\omega\sin\theta,
\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

which are readily found to be consistent. We have then an A-surface with the coordinates (9)

$$x = e^{-\alpha} (\cos\theta\, X_1 + \sin\theta\, X_2) + \gamma X \tag{14}$$

and similar values for y and z. From (11) we get

$$A = -(e^{-\alpha}\cos\omega - \gamma\sin\omega), \quad C = -(e^{-\alpha}\sin\omega + \gamma\cos\omega). \tag{15}$$

If one denotes by $2\,d$ the distance from the origin to the point M of the above surface and by δ the distance to the tangent plane at M, it is found from (14) that

$$2\,d = e^{-2\alpha} + \gamma^2, \quad \delta = \gamma.$$

From (2) and (15) it is seen that the principal radii of curvature have the expressions

$$\rho_1 = -e^{-\alpha}\cot\omega + \gamma, \quad \rho_2 = e^{-\alpha}\tan\omega + \gamma.$$

Hence these functions satisfy the equation

$$2\,d - (\rho_1 + \rho_2)\,\delta + \rho_1\rho_2 = 0, \tag{16}$$

which is the condition that the sphere described on the normal to the surface and with the segment between the centres of principal curvature as diameter passes through the origin. Therefore, the surface defined by (14) is one of the surfaces considered by Bianchi (*); in fact, the expressions for the coordinates are the very ones which he has given. Elsewhere (**) we have called the surfaces satisfying conditions (16) *surfaces of* Bianchi *of the parabolic type.*

We consider now the case where ρ is a constant different from zero, say c, and introduce an auxiliary function β defined by

$$\frac{\partial \beta}{\partial u} = e^{\alpha}\cos\omega\sin\theta, \quad \frac{\partial \beta}{\partial v} = -e^{\alpha}\sin\omega\cos\theta, \tag{17}$$

which are found to be consistent. By means of this function β and σ, defined

(*) *Nuove ricerche sulle superficie pseudosferiche.* Annali di Mat., 1896, vol. 24, pgs. 347-386.

(**) *American Journal*, l. c., p 115.

by (13), the first two of equations (10) can be integrated. The integral is

$$p = e^{-\alpha} (\beta c + h),$$

where h is the constant of integration. Now we introduce the function τ defined by

$$\frac{\partial \tau}{\partial u} = (\gamma e^{\alpha} \cos \omega + \sin \omega) \sin \theta, \qquad \frac{\partial \tau}{\partial v} = -(\gamma e^{\alpha} \sin \omega - \cos \omega) \cos \theta.$$

The integral of the last two of equations (10) is found to be

$$r = \gamma (c \beta + h) - c \tau.$$

The additive constant of integration has been neglected in this case for it only tends to replace the surface, with the above value of r, by a parallel surface. From (9) we have for the coordinates of this new surface

$$\left.\begin{aligned} x = e^{-\alpha} (\beta c + h) (\cos \theta X_1 + \sin \theta X_2) + \\ + c(-\sin \theta X_1 + \cos \theta X_2) + [\gamma (c \beta + h) - c \tau] X, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

and similarly for y and z. The coefficients of the linear element are

$$\left.\begin{aligned} A &= -e^{-\alpha} (\beta c + h) \cos \omega + [\gamma (\beta c + h) - c \tau] \sin \omega, \\ C &= -e^{-\alpha} (\beta c + h) \sin \omega - [\gamma (\beta c + h) - c \tau) \cos \omega. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

If one gives to the letters d and δ the same interpretation as in the former case, one finds that for the above surface

$$2 d - c^2 - (\rho_1 + \rho_2) \delta + \rho_1 \rho_2 = 0. \tag{20}$$

This is the condition necessary and sufficient that the spheres described on the normal with the segment between the centres of curvature as diameter cut orthogonally the sphere

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2. \tag{21}$$

Bianchi (*) has considered certain surfaces which have this property and referred to them as of the hyperbolic type. We have given to all surfaces with this property the name *surfaces of* Bianchi *of the hyperbolic type.*

(*) L. c., pg. 357.

We denote for the moment by ξ, η, ζ the coordinates (14) and write

$$x_0 = e^{-\alpha} \beta (\cos\theta\, X_1 + \sin\theta\, X_2) + (-\sin\theta_1 + \cos\theta\, X_2) + (\gamma\beta - \tau) X \quad (22)$$

and similarly for y_0 and z_0. Now the expressions (18) may be written

$$x = h\,\xi + c\,x_0, \quad y = h\,\eta + c\,y_0, \quad z = h\,\zeta + c\,z_0.$$

Hence we have the theorem:

The segments joining points on a surface of Bianchi *of the parabolic type* (14) *and the corresponding points on the surface of* Bianchi *of the hyperbolic type* (22) *are cut in constant ratio by a family of surfaces of the hyperbolic type.*

§ 4. General case of $\sigma = \frac{\pi}{2}$ · Surfaces of Bianchi. Case $p = 0$.

If we introduce the functions α and β into the first two of equations (10), they can be given the form

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} e^{\alpha} p &= - e^{\alpha} \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \frac{\partial \rho}{\partial u} + \rho \frac{\partial \beta}{\partial u}, \\ \frac{\partial}{\partial v} e^{\alpha} p &= e^{\alpha} \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \frac{\partial \rho}{\partial v} + \rho \frac{\partial \beta}{\partial v}. \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

The condition of integrability of these equations is reducible to

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial u\, \partial v} - \frac{\partial \log \sin\theta}{\partial v} \frac{\partial \rho}{\partial u} - \frac{\partial \log \cos\theta}{\partial u} \frac{\partial \rho}{\partial v} = 0; \quad (24)$$

moreover, every integral of this equation leads to a surface of the kind sought and the further determination of the functions fixing the surface requires quadratures only. We have seen elsewhere (*) that this equation admits as a particular integral the expression for the distance from the origin to the tangent plane of any surface whose lines of curvature are represented on the

(*) *Amer. Journ.*, l. c., p. 118.

sphere by the parametric lines for which the linear element is

$$d\sigma_1^2 = \sin^2\theta\, d u^2 + \cos^2\theta\, d v^2. \tag{25}$$

Hence every surface with this representation of its lines of curvature leads by quadratures to a surface with the spherical representation (2). It is clear that the surface with the representation (25) which gave rise to the surface with the coordinate values (18) is the sphere of radius c and centre at the origin.

Consider now the A-surface S_1 with the spherical representation (25) and analogous to the surface defined by (14). For the general surface of this kind the functions α_1 and γ_1 would be given by equations of the form (13) and obtained from the latter by replacing ω and θ by θ and φ respectively, where φ is any solution of the equations

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\theta}{\partial v} = \sin\varphi\cos\theta, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial\theta}{\partial u} = -\cos\varphi\sin\theta. \tag{25'}$$

A solution of these equatione is $\varphi = \omega + \pi$; we take the surface S_1 corresponding to this value of φ, then

$$\alpha_1 = -\alpha, \quad \gamma_1 = -\beta.$$

Hence the coordinates of the surface S_1 are of the form

$$x_1 = -e^\alpha (\cos\omega\, X'_1 + \sin\omega\, X'_2) - \beta X', \tag{25''}$$

where the primed functions are the analogues for S_1 of the same functions without primes for S. The distance from the origin to the tangent plane to S_1 is evidently $-\beta$, so that $-\beta$ is a solution of equation (24). When this value for ρ is substituted in equations (23) and they are integrated, one finds

$$p = \frac{1}{2}\left\{ e^\alpha - e^{-\alpha}(\beta^2 + k)\right\},$$

where k denotes the constant of integration. Then r is given by the quadrature

$$\left.\begin{aligned} d r = \sin\omega\left[\frac{1}{2}\left\{e^\alpha - e^{-\alpha}(\beta^2 + k)\right\}\cos\theta + \beta\sin\theta\right] d u \\ -\cos\omega\left[\frac{1}{2}\left\{e^\alpha - e^{-\alpha}(\beta^2 + k)\right\}\sin\theta - \beta\cos\theta\right] d v. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

From (9) it is seen that the coordinates of the new surface are

$$\left. \begin{aligned} x = \frac{1}{2} \{ e^{\alpha} - e^{-\alpha} (\beta^2 + k) \} (\cos \theta \, X_1 + \text{sen}\, \theta \, X_2) + \\ + \beta (\sin \theta \, X_1 - \cos \theta \, X_2) + r \, X, \end{aligned} \right\} \tag{27}$$

and similarly for y and z. When the above values are substituted in (11), it is found that

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \{ e^{\alpha} + e^{-\alpha} (\beta^2 + k) \} \cos \omega + r \sin \omega, \\ C &= \frac{1}{2} \{ e^{\alpha} + e^{-\alpha} (\beta^2 + k) \} \sin \omega - r \cos \omega. \end{aligned} \right\} \tag{28}$$

One finds without difficulty that for the surface defined by (27) the following condition is satisfied

$$2\, d + k - (\rho_1 + \rho_2)\, \delta + \rho_1 \rho_2 = 0. \tag{29}$$

When k is zero, this equation reduces to (16), and when k is negative it can be written in the form (20). When k is positive, the sphere described as in the two former cases cuts the sphere, with radius $\sqrt{k}$ and centre at the origin, along a great circle.

Hence equations (27) define surfaces of Bianchi of the elliptic, parabolic or hyperbolic type according as k is positive, zero or negative; to within slight changes in notation they are the expressions given by Bianchi (*).

If we denote by x_0, y_0, z_0; ξ, η, ζ the coordinates of the surfaces S_0, S'_0 of the parabolic type defined by (27) and (14) respectively, the coordinates of the surfaces of the elliptic and hyperbolic types as given by (27) may be written

$$x = x_0 - \frac{k}{2} \xi, \quad y = y_0 - \frac{k}{2} \eta, \quad z = z_0 - \frac{k}{2} \zeta.$$

Hence we have the theorem:

The locus of the point which divides internally in constant ratio the segment joining the corresponding points on the surfaces S_0 and S'_0 is a surface of Bianchi *of the hyperbolic type; when the division is external, the locus is of the elliptic type.*

(*) Loc. cit., p. 368.

We shall consider the surface, with the spherical representation whose linear element is of the form (25'), which is analogous to the surface defined by (18) and corresponding to the solution $\omega + \pi$ of the system (25'). If we denote by the same letters but with subscript one the functions for this surface similar to those appearing in (18), we find that

$$\alpha_1 = -\alpha, \quad \beta_1 = -\gamma, \quad \gamma_1 = -\beta$$

and

$$d\tau_1 = (\beta e^{-\alpha} \cos\theta - \sin\theta) \sin\omega \, du - (\beta e^{-\alpha} \sin\theta + \cos\theta) \cos\omega \, dv.$$

The distance from the origin to the tangent plane to this surface is

$$\beta(c_1 \gamma + h_1) - c_1 \tau_1 .$$

Substituting this value in (23) in place of ρ, we find

$$p = -\frac{1}{2} e^{\alpha} (c_1 \gamma + h_1) + \frac{1}{2} e^{-\alpha} [(c_1 \gamma + h_1) \beta_2 + k - 2 c_1 \beta \tau_1 - 2 c_1 t],$$

where t is given by the quadrature

$$d t = \sin\omega \left[\frac{1}{2} \{ e^{\alpha} - e^{-\alpha} \beta^2 \} \cos\theta + \beta \sin\theta \right] d u -$$

$$- \cos\omega \left[\frac{1}{2} \{ e^{\alpha} - e^{-\alpha} \beta^2 \} \sin\theta - \beta \cos\theta \right] d v ;$$

from (26) it is seen that t is equal to the function r for a surface of Bianchi of the parabolic type. The function r for the present surface is given by the quadrature (10) after p and ρ have been given the above values. The coefficients of the linear element of the new surface are readily found from (11) to be

$$A = -\frac{1}{2} \cos\omega \{ e^{\alpha} (c_1 \gamma + h_1) + e^{-\alpha} [(c_1 \gamma + h_1) \beta^2 + k -$$

$$- 2 c_1 \beta \tau_1 - 2 c_1 t \} + (r - c) \sin\omega,$$

$$C = -\frac{1}{2} \sin\omega \{ e^{\alpha} (c_1 \gamma + h_1) + e^{-\alpha} [(c_1 \gamma + h_1) \beta^2 + k -$$

$$- 2 c_1 \beta \tau_1 - 2 c_1 t \} - (r - c) \cos\omega.$$

It can be shown without difficulty that this surface satisfies equation (29) only in case c is zero. By continuing the foregoing process we can find by quadratures alone a large member of A-surfaces with the given spherical representation.

We consider now the case where $p = 0$. Then the first two of equations (10) are satisfied by $\rho = 0$ and the last two give $r = \text{const}$; the corresponding surface is evidently a sphere with centre at 0 and radius r. Excluding the case where ρ is equal to zero, the first two of equations (10) may be written

$$\frac{\partial \log \rho}{\partial u} + \cos \theta \cos \omega = \frac{\cos \omega}{\cos \theta},$$

$$\frac{\partial \log \rho}{\partial v} + \sin \theta \sin \omega = \frac{\sin \omega}{\sin \theta}.$$

From (13) it follows that these equations are consistent only in case

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sin \omega}{\sin \theta}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\cos \omega}{\cos \theta}\right).$$

One finds readily that this condition is not a result of equations (4) with σ a right-angle; hence we have the theorem:

The sphere of radius r is the only surface determined by solutions of equations (10) *where* $p = 0$.

In a similar manner it can be shown that for p to be zero in the general equations (7) we must have $\rho + r \cos \sigma$ equal to zero. Then r is a constant and so also is ρ. One remarks that this gives the same result as the preceding case if we replace r in (10) by $r \sin \sigma$. From this fact it follows that *the necessary and sufficient condition that two surfaces be determined by the same functions p is that the two surfaces be parallel.*

§ 5. When σ is any angle and $\rho = 0$. Surfaces of the Parabolic Type.

When σ is any angle whatever and ρ is a constant, say c, equations (7) reduce to

$$\left.\begin{aligned}
&\sin \sigma \frac{\partial p}{\partial u} + \cos \omega \left[p \cos \theta - (c + r \cos \sigma) \sin \theta\right] = 0, \\
&\sin \sigma \frac{\partial p}{\partial v} + \sin \omega \left[p \sin \theta + (c + r \cos \sigma) \cos \theta\right] = 0, \\
&\sin \sigma \frac{\partial r}{\partial u} - \sin \omega \left[p \cos \theta - (c + r \cos \sigma) \sin \theta\right] = 0, \\
&\sin \sigma \frac{\partial r}{\partial v} + \cos \omega \left[p \sin \theta + (c + r \cos \sigma) \cos \theta\right] = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

These equations can be shown to be consistent without any difficulty. The expressions for A and C may be reduced to

$$\left.\begin{aligned} A &= -\frac{p\cos\omega - (c\cos\sigma + r)\sin\omega}{\sin\sigma}, \\ C &= -\frac{p\sin\omega + (c\cos\sigma + r)\cos\omega}{\sin\sigma}. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

When c is equal to zero, the coordinates of the surface are

$$x = (p\cos\theta - r\cos\sigma\sin\theta)\,X_1 + (p\sin\theta + r\cos\sigma\cos\theta)\,X_2 + r\sin\sigma\,X \tag{32}$$

and similar expressions for y and z. From these expressions and (31) we find that this surface satisfies the condition

$$2\,d - (\rho_1 + \rho_2)\,\delta + \sin^2\sigma\,\rho_1\,\rho_2 = 0. \tag{33}$$

In order to give an interpretation to this equation we recall that from the general definition of the A-surfaces, as given in § 1, it is clear that for the surface under discussion the point M lies on the line which is perpendicular to the initial line in the fundamental plane and is inclined at the angle σ to the latter. The length of the projection upon this line of the segment of the normal to S between the centres of curvature is evidently

$$2\,R = \sin\sigma\,|\,\rho_1 - \rho_2\,|\,. \tag{34}$$

The coordinates of the middle point of this segment with reference to the fixed axes are

$$x_0 = x - t\cos\sigma\sin\theta\,X_1 + t\cos\sigma\cos\theta\,X_2 + t\sin\sigma\,X, \tag{35}$$

and similar expressions for y_0 and z_0, where we have put

$$t = \frac{\sin\sigma\,(\rho_1 + \rho_2)}{2}. \tag{36}$$

If we denote by Δ the distance of this point from the origin, we get in consequence of (32)

$$\Delta^2 = 2\,d - (\rho_1 + \rho_2)\,\delta + \left(\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}\right)^2 \sin^2\sigma,$$

which reduces by means of (33) and (34) to

$$\Delta^2 = R^2.$$

Hence the spheres described on the projected segment as a diameter passes through the origin. We shall refer to all surfaces satisfying the equation (33) as A-surfaces of the *parabolic type* for they are surfaces of BIANCHI of this type when σ is a right angle.

We have shown (*) that if one draws in the tangent plane to an A-surface a line, which passes through the point of contact M and makes an angle θ_1 with the direction of the line of curvature $v = \text{const.}$, and through this line passes a plane inclined at a constant angle σ to the tangent plane, the former plane well envelope a new surface (A_1), provided θ_1 is any solution whatever of equations (4). The parametric lines on the new surface are the lines of curvature whose spherical representation is such that the linear element of the latter is

$$d\sigma_1^2 = \sin^2\theta_1\, d u^2 + \cos^2\theta_1\, d v^2. \tag{37}$$

The coordinates of the surface (A_1) are of the form

$$x_1 = x + (\lambda\cos\theta_1 - \mu\cos\sigma\sin\theta_1) X_1 + (\lambda\sin\theta_1 + \mu\cos\sigma\cos\theta_1) X_2 + \mu\sin\sigma X, \tag{38}$$

where

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \sin\sigma\,(A\cos\omega + C\sin\omega), \\ \mu &= \sin\sigma\,(-A\sin\omega + C\cos\omega); \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

and the coefficients of the linear element have the expressions

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \sin\sigma\left(\frac{\partial A}{\partial u} + C\frac{\partial\omega}{\partial u}\right) + \frac{\lambda\cos\theta_1 - \mu\cos\sigma\sin\theta_1}{\sin\sigma}, \\ C_1 &= \sin\sigma\left(\frac{\partial C}{\partial v} - A\frac{\partial\omega}{\partial v}\right) + \frac{\lambda\sin\theta_1 + \mu\cos\sigma\cos\theta_1}{\sin\sigma}. \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

We now apply this transformation to the surface defined by (32) and find for the coordinates of the new surface S_1 the values

$$\left.\begin{aligned} x_1 = {} & [p(\cos\theta - \cos\theta_1) - r\cos\sigma(\sin\theta - \sin\theta_1)]\, X_1 + \\ & + [p(\sin\theta - \sin\theta_1) + r\cos\sigma(\cos\theta - \cos\theta_1)]\, X_2 \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

and similar expressions for y_1 and z_1. The coefficients of the linear element are

(*) *Amer. Journ.*, l. c., p. 148.

reducible to

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= -\frac{p(\cos\theta-\cos\theta_1)-r\cos\sigma(\sin\theta-\sin\theta_1)}{\sin\sigma}, \\ C_1 &= -\frac{p(\sin\theta-\sin\theta_1)+r\cos\sigma(\cos\theta-\cos\theta_1)}{\sin\sigma}. \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Denoting by d_1 and δ_1 the quantities for this surface analogous to d and δ for S, we find

$$\left.\begin{aligned} d_1 &= [1-\cos(\theta-\theta_1)]\,(p^2+r^2\cos^2\sigma), \\ \delta_1 &= p\sin\sigma\sin(\theta-\theta_1)-r\sin\sigma\cos\sigma\,[1-\cos(\theta-\theta_1)], \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

for it can be shown that the following relations obtain between the functions X_1, X_2, X for S and the analogous functions X'_1, X'_2, X' for S_1

$$\left.\begin{aligned} X'_1 &= -\cos\omega\,(X_1\cos\theta+X_2\sin\theta)+ \\ &\qquad +\sin\omega\,[\sin\sigma\,X+\cos\sigma\,(-\sin\theta\,X_1+\cos\theta\,X_2)], \\ X'_2 &= -\sin\omega\,(X_1\cos\theta+X_2\sin\theta)- \\ &\qquad -\cos\omega\,[\sin\sigma\,X+\cos\sigma\,(-\sin\theta\,X_1+\cos\theta\,X_2)], \\ X' &= \quad \sin\sigma\,(-\sin\theta\,X_1+\cos\theta\,X_2)-\cos\sigma\,X, \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

and similar relations between the Y and Z.

One finds now that the functions d_1, δ_1, ρ'_1 and ρ'_2 satisfy an equation of the form (33), hence the theorem which is a generalization of a result we have found before (*),

The most general Bäcklund *transform of an A-surface of the parabolic type is a surface of the same kind.*

We have now to determine the lines on which to project the segment, between the centres of principal curvature, upon which the spheres are to be described as in the case of the surface S. We denote by $\varphi+\frac{\pi}{2}$ the angle which the projection of this line upon the tangent plane to S_1 makes with the direction $\sigma=$ const. at the point. The coordinates of the middle point of the projected segment are of the form

$$x_{10}=x_1-t_1\cos\sigma\sin\varphi\,X'_1+t_1\cos\sigma\cos\varphi\,X'_2+t_1\sin\sigma\,X',$$

(*) *Amer. Journ.*, l. c., p. 164.

where we have put

$$t_1 = \frac{\sin\sigma\,(\rho'_1 + \rho'_2)}{2}.$$

In consequence of the relations (44) the above expression can be written

$$x_{10} = x_1 + t_1 \cos\sigma\,[(\sin(\varphi - \omega)\cos\theta + \cos\sigma\cos(\varphi - \omega)\sin\theta)\,X_1 +$$
$$+ (\sin(\varphi - \omega)\sin\theta - \cos\sigma\cos(\varphi - \omega)\cos\theta)\,X_2] + t_1\sin\sigma\,X.$$

If we denote by Δ_1 the distance from this middle point to the origin, we find

$$\Delta_1^2 = 2\,d_1 - (\rho'_1 + \rho'_2)\,\delta_1 + \left(\frac{\rho'_1 + \rho'_2}{2}\right)^2 \sin^2\sigma + 2\,t_1\cos\sigma\,L,$$

where we have put

$$L = \sin(\varphi - \omega)\,[p\,\{1 - \cos(\theta_1 - \theta)\} + r\cos\sigma\sin(\theta_1 - \theta)] +$$
$$+ \cos\sigma\,[\cos(\varphi - \omega) + 1]\,[p\sin(\theta_1 - \theta) - r\cos\sigma\,\{1 - \cos(\theta_1 - \theta)\}].$$

If now we put

$$2\,R_1 = \sin\sigma\,|\,\rho'_1 - \rho'_2\,|$$

and recall that an equation of the form (33) is satisfied by S, it follows that when φ is so chosen that L vanishes we have

$$\Delta_1^2 = R_1^2.$$

But L vanishes when $\varphi = \omega + \pi$, so that we know exactly how to describe for S_1 the spheres which pass through the origin.

§ 6. A-Surfaces of the Elliptic, Hyperbolic and Parabolic Types.

In considering the particular case where σ is a right angle, it was found that the expression for the distance from the origin to the tangent plane to a surface S_1 with the spherical representation (25) affords a solution ρ of equations (10) and then the other functions are given by quadrature. This property can be shown to exist for the cases arising for any value of σ and for the following reason. Given a surface S with the spherical representation (2) and effect upon it a generalized Bäcklund transformation of angle θ as previously explained. Denote by $M\,T$ the line of intersection of the tangent planes to the two surfaces. From our definition of such a transformation it follows that the distance from the origin to the tangent plane to S_1 is the projection of the length ρ for S upon the plane through the line $M\,T$ and perpendicular to tangent plane to S_1. Since the angle between these planes is constant, it follows that ρ is a solution of equation (24), when θ in any solution of the system (4). Hence if we have a surface S_1 in whose definition the same value of the angle σ enters which we put in equations (7), and if we denote by r_1 the function for S_1 analogous to r for S, a solution of (7) is given by

$$\rho = r_1$$

and the complete determination of the other functions p and r requires at most the solution of a partial differential of the first order and quadratures. We have seen that when σ is a right-angle this determination requires quadratures only and we shall fund presently a case where σ is not a right-angle but for which the determination is of the latter kind. However, before we proceed to this investigation we want to call attention to the fact that it has just been shown that when one gives an A-surface S_1 and choses the value of the angle σ there are an infinity of A-surfaces of which the former is a transform by means of the generalized Bäcklund transformation.

The equations similar to (4) when the spherical representation of the surface S_1 is written in the form (25) are

$$\left.\begin{aligned} \sin\sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\theta}{\partial v}\right) &= \sin\varphi\cos\theta-\cos\sigma\cos\varphi\sin\theta, \\ \sin\sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\theta}{\partial u}\right) &= -\cos\varphi\sin\theta+\cos\sigma\sin\varphi\cos\theta. \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

A solution of this system is $\omega+\pi$. In terms of this solution the equations similar to (7) for the determination of the functions p_1, ρ_1, r_1 which determine a surface S_1 with the representation (25) are

$$\left.\begin{aligned}
&\sin\sigma\sin\omega\frac{\partial p_1}{\partial u}+\sin\sigma\cos\omega\frac{\partial \rho_1}{\partial u}-\\
&\qquad -\sin\omega\cos\theta\,[p_1\cos\omega-(\rho_1+r_1\cos\sigma)\sin\omega]=0,\\
&\sin\sigma\cos\omega\frac{\partial p_1}{\partial v}-\sin\sigma\sin\omega\frac{\partial \rho_1}{\partial v}-\\
&\qquad -\cos\omega\sin\theta\,[p_1\sin\omega+(\rho_1+r_1\cos\sigma)\cos\omega]=0,\\
&\sin\sigma\frac{\partial r_1}{\partial u}=-\sin\theta\,[p_1\cos\omega-(\rho_1+r_1\cos\sigma)\sin\omega],\\
&\sin\sigma\frac{\partial r_1}{\partial v}=\quad\cos\theta\,[p_1\sin\omega+(\rho_1+r_1\cos\sigma)\cos\omega].
\end{aligned}\right\}\quad(46)$$

Suppose now that we have given a surface S_1 determined by functions satisfying these equations. As we have seen the function r_1 may be substituted for ρ in equations (4). When this substitution has been made and p_1 has been replaced by e^a in the third of equations (46), by means of the latter the first of (4) may be written

$$\sin\sigma\sin\omega\frac{\partial}{\partial u}\left(e^a p-\frac{1}{2}e^{2a}\right)+p\left[\sin\sigma\cos\omega\frac{\partial\rho_1}{\partial u}+(\rho_1+r_1\cos\sigma)\sin^2\omega\cos\theta\right]-$$

$$-e^a\sin\sigma\cos\omega\frac{\partial\rho_1}{\partial u}-e^a\sin\omega\cos\omega\sin\theta\,(r_1+r\cos\sigma)=0.$$

By means of the third of equations (4) this can be reduced to

$$\sin\omega\frac{\partial}{\partial u}\left[e^a p-\frac{1}{2}e^{2a}+\frac{r_1^2}{2}+(\rho_1+r_1\cos\sigma)\,r\right]+$$

$$+\left[\cos\omega\,(p-e^a)-r\sin\omega\right]\frac{\partial\rho_1}{\partial u}=0.$$

In a similar manner the second of equations (4) can be given the form

$$\cos\omega\frac{\partial}{\partial v}\left[e^a p-\frac{1}{2}e^{2a}+\frac{r_1^2}{2}+(\rho_1+r_1\cos\sigma)\,r\right]-$$

$$-\left[\sin\omega\,(p-e^a)+r\cos\omega\right]\frac{\partial\rho_1}{\partial v}=0.$$

We remark that when ρ_1 is constant, the above equation can be replaced by

$$p = \frac{1}{2}\,\{e^a - e^{-a}\,[r_1^2 + 2\,(\rho_1 + r_1 \cos\sigma)\,r + k)\}, \tag{47}$$

where k is the constant of integration. Now r is given by

$$\left.\begin{aligned} \sin\sigma \frac{\partial r}{\partial u} &= \sin\omega\,[p\cos\theta - (r_1 + r\cos\sigma)\sin\theta], \\ \sin\sigma \frac{\partial r}{\partial v} &= -\cos\omega\,[p\sin\theta + (r_1 + r\cos\sigma)\cos\theta], \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

with p having the value (47); it is evident that r is given by two quadratures. Thus by quadratures alone one finds a large group of A-surfaces. Of particular interest are those for which ρ_1 is zero, that is the surface S_1 is of the parabolic type. We shall consider these at greater length.

For the sake of brevity we put

$$b = r_1^2 + 2\,r_1\,r\cos\sigma + k. \tag{49}$$

The rectangular coordinates of the surface are then of the form

$$\left.\begin{aligned} x = &\left[\frac{1}{2}\,\{e^a - e^{-a}\,b\}\cos\theta - (r_1 + r\cos\sigma)\sin\theta\right] X_1 + \\ &+ \left[\frac{1}{2}\,\{e^a - e^{-a}\,b\}\sin\theta + (r_1 + r\cos\sigma)\cos\theta\right] X_2 + r\sin\sigma\,X, \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

where r is given by (48). The coefficients of the linear element of this surface are

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{1}{\sin\sigma}\left[\frac{1}{2}\,\{e^a + e^{-a}\,b\}\cos\omega + r\sin\omega\right], \\ C &= \frac{1}{\sin\sigma}\left[\frac{1}{2}\,\{e^a + e^{-a}\,b\}\sin\omega - r\cos\omega\right]. \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

From these expressions one finds that the following relation holds

$$2\,d + k - (\rho_1 + \rho_2)\,\delta + \rho_1\,\rho_2 \sin^2\sigma = 0. \tag{52}$$

In order to give an interpretation to this equation, we draw in the tangent plane to the surface S defined by (50), and through the point of contact M the line which makes the angle φ with the tangent to the line of curvature v-const., where the angle φ has an interpretation to be given later. At M we erect the normal plane to this line and in it take the line through M

making the angle σ with the intersection of the normal and tangent planes. Upon this line we project the segment of the normal to S between the centres of curvature and with the projected segment as diameter we construct a sphere whose radius will evidently be given by (34).

The coordinates of its centre ζ_0, η_0, ξ_0 are of the form

$$\xi_0 = x - t \cos\sigma \sin\varphi\, X_1 + t \cos\sigma \cos\varphi\, X_2 + t \sin\sigma\, X \tag{53}$$

where t is given by (36). Denoting by Δ the distance from the origin to the centre of the sphere, we find that

$$\left.\begin{aligned} \Delta^2 = 2\,d - (\rho_1 + \rho_2)\,\delta + \left(\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}\right)^2 \sin^2\sigma\, - \\ - 2\,t \cos\sigma \left[\frac{1}{2}\,\{e^a - e^{-a}\, b\} \sin(\varphi - \theta) - \right. \\ \left. - (r_1 + r\cos\sigma)\cos(\varphi - \theta) + r\cos\sigma\right]. \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

We choose φ so as to satisfy the equation

$$\frac{1}{2}\,\{e^a - e^{-a}\, b\} \sin(\varphi - \theta) - (r_1 + r\cos\sigma)\cos(\varphi - \theta) + r\cos\sigma = 0; \tag{55}$$

then in consequence of equation (52) the equation (54) may be replaced by

$$\Delta^2 = R^2 - k.$$

From this it is seen that when k is zero in (50) the spheres associated with the corresponding surface pass through the origin; when k is positive they cut in great circles the sphere of radius $\sqrt{k}$ and centre at the origin; and when k is negative the fixed sphere of radius $\sqrt{-k}$ is cut orthogonally by all the spheres. These surfaces are seen to be a generalization of the surfaces of Bianchi of the parabolic, elliptic and hyperbolic types; in fact they reduce to the latter when σ is a right angle. On this account we shall call them the *A-surfaces of the parabolic, elliptic and hyperbolic types.*

We consider in particular the surfaces of the parabolic type S_0 given by (50) whose coordinates may now be written

$$\left.\begin{aligned} x_0 = \left[\frac{1}{2}\,\{e^a - e^{-a}(r_1^2 + 2\,t\,r_1\cos\sigma)\}\cos\theta - (r_1 + t\cos\sigma)\sin\theta\right] X_1 + \\ + \left[\frac{1}{2}\,\{e^a - e^{-a}(r_1^2 + 2\,t\,r_1\cos\sigma)\}\sin\theta + (r_1 + t\cos\sigma)\cos\theta\right] X_2 + t\sin\sigma\, X, \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

where now t is given by two quadratures from

$$\left.\begin{aligned}
\sin\sigma\frac{\partial t}{\partial u} &= \sin\omega\Big[\frac{1}{2}\{e^{a}-e^{-a}(r_1^2+2r_1 t\cos\sigma\}\cos\theta - \\
&\qquad -(r_1+t\cos\sigma)\sin\theta\Big], \\
\sin\sigma\frac{\partial t}{\partial v} &= -\cos\omega\Big[\frac{1}{2}\{e^{a}-e^{-a}(r_1^2+2r_1 t\cos\sigma)\}\sin\theta + \\
&\qquad +(r_1+t\cos\sigma)\cos\theta\Big].
\end{aligned}\right\} \quad (57)$$

One finds without difficulty that a solution of equations (30), in which c is zero, is given by

$$p = -e^{-a}\left(r_1 s\cos\sigma + \frac{1}{2}\right), \quad r = s. \qquad (58)$$

Hence a surface S'_0 of the parabolic type is defined by

$$\left.\begin{aligned}
x'_0 = &\Big[-e^{-a}\left(r_1 s\cos\sigma + \frac{1}{2}\right)\cos\theta - s\cos\sigma\sin\theta\Big]X_1 + \\
&\Big[-e^{-a}\left(r_1 s\cos\sigma + \frac{1}{2}\right)\sin\theta + s\cos\sigma\cos\theta\Big]X_2 + s\sin\sigma X_1
\end{aligned}\right\} \quad (59)$$

and similarly for y'_0 and z'_0, where s is given by

$$\left.\begin{aligned}
\sin\sigma\frac{\partial s}{\partial u} &= \sin\omega\Big[-e^{-a}\left(r_1 s\cos\sigma + \frac{1}{2}\right)\cos\theta - s\cos\sigma\sin\theta\Big], \\
\sin\sigma\frac{\partial s}{\partial v} &= -\cos\omega\Big[-e^{-a}\left(r_1 s\cos\sigma + \frac{1}{2}\right)\sin\theta + s\cos\sigma\cos\theta\Big].
\end{aligned}\right\} \quad (60)$$

A comparison of the expressions (56) and (59) shows that equations (50) may be replaced by

$$x = x_0 + k\,x'_0, \quad y = y_0 + k\,y'_0, \quad z = z_0 + k\,z'_0,$$

provided r is equal to $t + k\,s$, which condition is seen to be satisfied in consequence of (57), (60) and (48). We have now the following theorem:

The locus of the point which divides internally in constant ratio the segment joining corresponding points on the two surfaces of the parabolic type S_0 and S'_0 is a surface of the elliptic type; and when the division is external the locus is of the hyperbolic type.

§ 7. Another Property of Surfaces of the Elliptic, Hyperbolic and Parabolic Types.

Let us consider an A-surface of the parabolic type S_1 with the spherical representation (25), where θ is any solution of equations (4), and such that ρ_1 is zero. Such a surface may be defined by

$$\left.\begin{aligned} x_1 = & -(p_1 \cos \omega - r_1 \cos \sigma \sin \omega) X'_1 - \\ & -(p_1 \sin \omega + r_1 \cos \sigma \cos \omega) X'_2 + r_1 \sin \sigma X', \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

and similar expressions for y_1 and z_1, where p_1 and r_1 are any solutions of equations (46) after ρ_1 has been put equal to zero. By means of the relations (44) the expression (61) can be reduced to

$$x_1 = (p_1 \cos \theta - r_1 \sin \theta) X_1 + (p_1 \sin \theta + r_1 \cos \theta) X_2 . \tag{62}$$

From the form of this expression it is seen that the point M_1 lies in the fundamental plane determined by ω.

In this fundamental plane we draw a circle of radius R and centre at the point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ which passes through M, where the values of R and the coordinates of M_0 will be determined by subsequent considerations. We denote by l the projection of $M_0 M_1$ upon the line in the fundamental plane which passes through the origin and makes the angle θ with the direction $v =$ const.; the θ used in this connection is the function determining the spherical representation of S_1. In consequence of (62) it follows that

$$\left.\begin{aligned} x_0 = & [(p_1 + l) \cos \theta - (r_1 + m) \sin \theta] X_1 + \\ & + [(p_1 + l) \sin \theta + (r_1 + m) \cos \theta] X_2 \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

and similarly for y_0 and z_0. The necessary and sufficient condition that the above circle cuts a fixed sphere, with centre at the origin, in diametrically opposite points or orthogonally is

$$\Sigma x_0^2 = R^2 - k, \tag{64}$$

where k is positive in the former case and negative in the latter; furthermore, where k is zero the circle passes through the origin. Replacing p_1

in (63) by e^a as formerly, we can put (64) in the form

$$e^a + l = \frac{1}{2} \{ e^a - e^{-a} (r_1^2 + 2 r_1 m + k) \}. \tag{65}$$

Now the coordinates of M_0 are of the form

$$\left.\begin{aligned} x_0 = & \left[\frac{1}{2} \{ e^a - e^{-a} (r_1^2 + 2 r_1 m + k) \} \cos \theta - (r_1 + m) \sin \theta \right] X_1 + \\ & + \left[\frac{1}{2} \{ e^a - e^{-a} (r_1^2 + 2 r_1 m + k) \} \sin \theta + (r_1 + m) \cos \theta \right] X_2 . \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

We shall subject these circles to the further limitation that their axes form a normal congruence, and denote by x, y, z the coordinates on one of the orthogonal surfaces, which evidently are A-surfaces. The coordinates of this surface are

$$x = x_0 + t X, \quad y = y_0 + t Y, \quad z = z_0 + t Z, \tag{67}$$

where t is determined by the condition

$$\sum X d x = 0.$$

When the above values for x_0, y_0, z_0 are substituted in this equation, it is found that

$$\left.\begin{aligned} d t = & \sin \omega \left[\frac{1}{2} \{ e^a - e^{-a} (r_1^2 + 2 r_1 m + k) \} \cos \theta - (r_1 + m) \sin \theta \right] d u - \\ & - \cos \omega \left[\frac{1}{2} \{ e^a - e^{-a} (r_1^2 + 2 r_1 m + k) \} \sin \theta + (r_1 + m) \cos \theta \right] d v . \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

From our definition of t and r it is evident that

$$t = \sin \sigma \, r. \tag{69}$$

If we substitute the values for x_0, y_0, z_0 and this value for t in (67) and compare the result with the general expression (9), we see that

$$\rho + r \cos \sigma = r_1 + m.$$

We introduce an auxiliary function n, defined by

$$\rho = r_1 + n, \quad m = r \cos \sigma + n. \tag{70}$$

For this surface we have

$$p = \frac{1}{2} \{ e^{\alpha} - e^{\ \alpha} [r_1^2 + 2\, r_1 (r \cos \sigma + n) + k] \} . \tag{71}$$

If these values for p, ρ and r be substituted in the first two of equations (7), we are brought to the equations

$$(e^{\alpha} \cos \theta - r_1 \sin \theta) \frac{\partial n}{\partial u} = 0, \quad (e^{\alpha} \sin \theta + r_1 \cos \theta) \frac{\partial n}{\partial v} = 0 ;$$

from this it follows that n is a constant. If we take n equal to zero, the expressions (67) are the same as (50).

Suppose now that n is different from zero and consider the surface parallel and at the distance $n \tan \sigma$ from the surface, for which p, ρ and t have the values given by (69), (70) and (71) Denoting by r' the function r for this new surface we have

$$r' = r + \frac{n}{\cos \sigma} ,$$

and the coordinates can be got from (50) by replacing r by r'. Hence the variation of the constant n gives only parallels of the surface (50), and as these are evidently surfaces of the same type, we have shown that the A-surface of all three types, as defined by (50), can be got from an A-surface of the parabolic type in the same way that Bianchi has found his surfaces of all three types from a surface of the parabolic type.

If we introduce the angle α in such a way that the line $O M_0$ makes the angle $\alpha + \theta$ with the direction $v =$ const. of the fundamental trihedron, it is seen from (66) that

$$\sin \alpha = \frac{r_1 + r \cos \sigma}{N} , \quad \cos \alpha = \frac{\frac{1}{2} \{ e^{\alpha} - e^{-\alpha} (r_1^2 + 2\, r_1\, r \cos \sigma + k) \}}{N} ,$$

where

$$N = \sqrt{\left[(r_1 + r \cos \sigma)^2 + \frac{1}{4} \{ e^{\alpha} - e^{-\alpha} (r_1^2 + 2\, r_1\, r \cos \sigma + k) \}^2 \right]} .$$

Now equation (55) becomes

$$\sin (\alpha + \theta - \varphi) = \frac{r \cos \sigma}{N} .$$

Hence to construct the angle φ we draw through O and within the angle $\alpha + \theta$ a line upon which we take a segment of such length that it and a segment of length $r \cos\sigma$ are the sides of a right-angled triangle whose hypothenuse is $O M_0$. Then φ is the angle which the former segment makes with the initial line $v = \text{const}$.

§ 8. Normal Cyclic Congruences whose Associated Circles Pass Through a Fixed Point.

As we have pointed out before (*), it follows from the expressions (39) for λ and μ that for all of the A-surfaces S_1, obtained from a given A-surface S by means of the generalized Bäcklund transformations of the same angle σ, the points of contact corresponding to a point M of S lie in a circle whose axis is normal to S at M. Hence the circles cut the surfaces S_1 under the constant angle σ. When σ is a right angle these circles form a cyclic system; and cyclic systems of this kind are the only ones for which the associated cyclic congruence is normal (**).

Bianchi has established the following theorem (***):

Among the cyclic congruences with a common spherical representation of their developables there are an infinity whose associated circles pass through a fixed point.

We shall determine the normal cyclic congruences whose circles have this property and for convenience we take the origin for the fixid point. If ω determines the representation of these congruences, then all these congruences are known when we have found all the surfaces with this representation of their lines of curvature, that is, when we have solved completely equations (10).

Suppose that we have such a surface; from (11) it is seen that the transformation functions λ and μ have the values

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= -\frac{\cos\omega}{\sin\theta}\frac{\partial\rho}{\partial u} + \frac{\sin\omega}{\cos\theta}\frac{\partial\rho}{\partial v} - p, \\ \mu &= \quad \frac{\sin\omega}{\sin\theta}\frac{\partial\rho}{\partial u} + \frac{\cos\omega}{\cos\theta}\frac{\partial\rho}{\partial v} - r. \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

(*) *Amer. Journ.*, l. c., p. 152.
(**) Bianchi, *Lezioni*, pag. 333.
(***) Ib., p. 335.

As all of the circles are to pass through the origin, it must be looked upon as a degenerate transform and the circle must lie in the fundamental plane; consequently μ must be equal to $-r$, so that ρ must be a solution of the equation,

$$\cos\theta \sin\omega \frac{\partial \rho}{\partial u} + \sin\theta \cos\omega \frac{\partial \rho}{\partial v} = 0.$$

This equation is satisfied when ρ is a constant, say c. From (72) we have that λ is equal to $-p$, so that if we denote by M_1 the point on the transform corresponding to M on the given surface, the projection of $O M_1$ on the axes of the fundamental trihedron are

$$p(\cos\theta - \cos\theta_1) - c\sin\theta, \quad p(\sin\theta - \sin\theta_1) + c\cos\theta, \; 0,$$

where θ_1 denotes the angle of the transformation. In order that the circles may pass through the origin there must be a value for θ_1 such that these projections an always zero. If we put them equal to zero and elemente p, we get

$$c\,[\cos(\theta - \theta_1) - 1] = 0,$$

from which it follows that c is zero. Hence the surface of Bianchi of the parabolic type (14) is the only surface furnishing a solution when ρ is constant.

In consequence of (17) the above equation can be give the form

$$\frac{\partial \beta}{\partial v}\frac{\partial \rho}{\partial u} - \frac{\partial \beta}{\partial u}\frac{\partial \rho}{\partial v} = 0,$$

so that when ρ is not a constant it is a function of β, say

$$\rho = \varphi(\beta).$$

We have seen that ρ must satisfy equation (24) and also that β is a particular solution of this equation; hence we must have

$$\varphi''(\beta) = 0,$$

so that

$$\rho = c_1\beta + c_2,$$

where c_1 and c_2 are constants. From the form of equations (23) it is seen that by changing c_1 we get a homothetic system, and consequently these is no lose of generality, if we take

$$\rho = \quad (\beta + c).$$

When this value is substituted in (23), we get

$$p = \frac{1}{2}\left\{e^{\alpha} - e^{-\alpha}(\beta^2 + 2c\beta + k)\right\}.$$

From (72) it follows that

$$\lambda = -\frac{1}{2}\left\{e^{\alpha} + e^{-\alpha}(\beta^2 + 2c\beta + k)\right\}.$$

As in the preceding case, we determine the condition that there may exist a function θ_1 so that projections of OM_1 may be zero; this gives the equations

$$\frac{1}{2}e^{\alpha}(\cos\theta - \cos\theta_1) - \frac{1}{2}e^{-\alpha}(\beta^2 + 2\beta c + k)(\cos\theta + \cos\theta_1) + \\ + (\beta + c)\sin\theta = 0,$$

$$\frac{1}{2}e^{\alpha}(\sin\theta - \sin\theta_1) - \frac{1}{2}e^{-\alpha}(\beta^2 + 2\beta c + k)(\sin\theta + \sin\theta_1) - \\ - (\beta + c)\cos\theta = 0,$$

which may be replaced by

$$\sin(\theta - \theta_1), \quad \cos(\theta - \theta_1) = \frac{\beta + c, \quad \frac{1}{2}\left\{e^{\alpha} - e^{-\alpha}(\beta^2 + 2\beta c + k)\right\}}{\frac{1}{2}\left\{e^{\alpha} + e^{-\alpha}(\beta^2 + 2\beta c + k)\right\}}.$$

For the sum of the squares of these two functions to be equal to unity it is necessary that k be equal to c^2; then

$$p = \frac{1}{2}\left\{e^{\alpha} - e^{-\alpha}(\beta + c)^2\right\}.$$

When c is taken equal to zero, this gives the surface of Bianchi of the parabolic type (27). From (25″) and (27) it is seen that for values of c different from zero, the surface determined by this value of p is the surface of Bianchi of the parabolic type derived from the surface parallel to the one given by (25″) and at the distance c from it. We have then the theorem:

Given the spherical representation of the developables of a normal cyclic congruence; the infinity of cyclic congruences with this representation of their developables and for which all of the associated circles pass through a fixed point are composed of the normals to surfaces of Bianchi *of the parabolic type whose lines of curvature have the given spherical representation.*

§ 9. The Parallel Transformation of A-Surfaces.

The coordinates of an A-surface S_1 with the spherical representation of its lines of curvature determined by a solution θ_1 of equations (4) are of the form

$$x_1 = [-p_1 \cos\omega + (\rho_1 + r_1 \cos\sigma)\sin\omega]\, X'_1 - \\ - [p_1 \sin\omega + (\rho_1 + r_1\cos\sigma)\cos\omega]\, X_2 + r_1 \sin\sigma\, X\,,$$

where p_1, ρ_1 and r_1 are solutions of equations (46) in which θ has the particular value θ_1. By means of relations of the form (44) the above expression can be reduced to the form

$$\left.\begin{aligned} x_1 = [p_1\cos\theta_1 - (\rho_1\cos\sigma + r_1)\sin\theta_1]\, X_1 + \\ + [p_1 \sin\theta_1 + (\rho_1\cos\sigma + r_1)\cos\theta_1]\, X_2 + \rho_1 \sin\sigma\, X. \end{aligned}\right\} \quad (73)$$

From this it is seen that when ρ_1 is zero the points of the surface S_1 lie in the fundamental plane of the corresponding position of the trihedron determined by ω. But we found in considering equations (7) that when ρ is zero, the corresponding surface is of the parabolic type. Hence we have the theorem :

The A-surfaces with the spherical representation of their lines of curvature determined by any solution of equations (4) *and whose points lie in the corresponding positions of the fundamental plane determined by ω are surfaces of the parabolic type.*

We have seen that the A-surfaces of the parabolic type (32) are transformed by means of the generalized Bäcklund transformation into the surfaces defined by (41). The latter surfaces are of the class just considered and consequently are of the parabolic type, as we showed before in considering them in particular. From the result obtained at the end of § 5 and the fact just noted, namely that ρ_1 is zero for these transforms, it follows that the line drawn through M_1 and upon which the centre of the sphere lies is the line along which the distance r_1 is measured, when the surface is considered as obtained from the fundamental trihedron determined by θ_1. Hence the Bäcklund transform of an A-surface of the parabolic type (32) is a surface of the parabolic type and the associated spheres for the two surfaces are constructed in the same manner.

A comparison of (41) and (73) in which ρ_1 is zero gives the following values for the p_1 and q_1 determining the surface (41):

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= p\,[\cos(\theta-\theta_1)-1] - r\cos\sigma\sin(\theta-\theta_1), \\ r_1 &= p\sin(\theta-\theta_1) + r\cos\sigma\,[\cos(\theta-\theta_1)-1]. \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

The results of § 5 suggest a transformation which changes any A-surface S into an A-surface S' with the same spherical representation of its lines of curvature. Let x, y, z denote the coordinates of S; we denote by S' the surface whose coordinates are of the form

$$\left.\begin{aligned} x' = x + (p\cos\theta - r\cos\sigma\sin\theta)\,X_1 + \\ + (p\sin\theta + r\cos\sigma\cos\theta)\,X_2 + r\sin\sigma\,X, \end{aligned}\right\} \tag{75}$$

where p and r are any solutions of equations (30) in which c has the value zero. The coefficients of the linear element of this surface are

$$A' = A - \frac{p\cos\omega - r\sin\omega}{\sin\sigma}, \quad C' = C - \frac{p\sin\omega + r\cos\omega}{\sin\sigma}. \tag{76}$$

For convenience we shall refer to the above transformation as the *parallel transformation.*

Denote by λ' and μ' the Bäcklund transformation functions for the surface S analogous to the functions λ, μ for S. From (39) it follows that

$$\lambda' = \lambda - p, \quad \mu' = \mu - r, \tag{77}$$

a relation which is evidently independent of the angle θ determining the Bäcklund transformation. We effect upon S a Bäcklund transformation of angle θ_1, which is a solution of equations (4) other than the function θ appearing in equation (75); the coordinates of the new surface S'_1 may be reduced by means of (77) to the form

$$\left.\begin{aligned} x'_1 = x + \lambda(\cos\theta_1\,X_1 + \sin\theta_1\,X_2) - \\ - \mu\cos\sigma(\sin\theta_1\,X_1 - \cos\theta_1\,X_2) + \mu\sin\sigma\,X + \\ + [p(\cos\theta - \cos\theta_1) - r\cos\sigma(\sin\theta - \sin\theta_1)]\,X_1 + \\ + [p(\sin\theta - \sin\theta_1) + r\cos\sigma(\cos\theta - \cos\theta_1)]\,X_2. \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

This expression reveals the fact that the surface S_1 can be obtained also by effecting upon S the generalized Bäcklund transformation of angle θ_1 and then by applying to its transform S_1 the parallel transformation of angle $\omega + \pi$ and the values (74) of p_1 and r_1. Hence we have the theorem:

The successive application of a parallel transformation of angle θ and a Bäcklund *transformation of angle θ_1 is equivalent to a* Backlund *transformation of the same angle and a parallel transformation of angle $\omega + \pi$.*

When in particular θ_1 and θ are equal, the expressions for the coordinates of surfaces S'_1 are independent of p and r, so that we have theorem:

All the parallel transforms of a surface for which the transformation is determined by a certain angle θ are transformed into the same surface by the generalized Bäcklund *transformation of the same angle.*

By geometrical considerations one sees that this result is an evident consequence of the respective transformations.

In closing we state the following theorem which follows immediately from the form of equations (7):

The necessary and sufficient condition that two A-surfaces with the same spherical representation of their lines of curvature are determined by the same functions ρ and θ is that the one is a parallel transform of the other by means of this function θ.

Princeton University, May, 1905.

Sur les équations indéterminées
$x^\lambda + y^\lambda = c\, z^\lambda$.

(Troisième Note) (*).

(*Par* M. Edmond Maillet, à *Bourg-la-Reine.*)

INTRODUCTION.

Je me propose ici :

I. de compléter un certain nombre de résultats obtenus par moi antérieurement sur l'impossibilité en nombres entiers réels différents de 0 des équations indéterminées $x^\lambda + y^\lambda = r^\mu z^\lambda$ (λ premier non exceptionnel, r premier, $1 < \mu < \lambda$), en indiquant des catégories étendues de valeurs de λ et μ pour lesquelles il y a une infinité de valeurs de r donnant lieu à cette impossibilité :

II. de démontrer l'impossibilité en nombres entiers réels $\neq 0$ des équations indéterminées de la forme

$$x^a + y^a = b\, z^a \tag{e}$$

pour une série de valeurs de a et b qui ont toujours en commun un facteur > 2. Parmi les résultats obtenus, je mentionnerai particulièrement les suivants :

(*) C'est la suite de deux Notes antérieures parues, l'une dans les *Mém. de l'Assoc. franç. pour l'avanc. des sciences, Congrès de S.^t Etienne*, 1897, p. 156, l'autre dans les *Acta Math.*, 1900, p. 247. Sa lecture exige au minimum la connaissance, par exemple, d'un Mémoire de Kummer (*J. de Math.*, 1851), de la *Zahlentheorie de Dirichlet et Dedekind* (non compris la fin de la théorie des idéaux), de *die Lehre von der Kreistheilung* de Bachmann, et, bien entendu, de mes deux Notes précités.

L'équation indéterminée

$$x^a + y^a = a\, z^a, \quad (a > 2), \tag{E}$$

est impossible en nombres entiers réels différents de 0 :

1.° quand a est divisible par 4 ;

2.° quand a est pair et divisible par un nombre 1^er^ $4\,k + 3$;

3.° quand $2 < a \leqq 100$, a n'étant aucun des nombres 37, 59, 67 ou 74 ;

4.° quand a n'a aucun diviseur premier > 17 (*). Les résultats 1.° et 2.° subsistent pour (e) quand $b = b'\, a$, avec b' premier à a.

On peut donc en conclure que, *vraisemblablement, l'équation* (E) *ci-dessus est impossible en nombres entiers réels* $\neq 0$ *quand* $a > 2$ (probablement aussi (e) quand $b = 2\,a > 6$ ou $b = 3\,a > 9$). C'est une propriété analogue à celle qu'exprime le dernier théorème de Fermat ($x^a + y^a \neq z^a$), non encore complètement démontré, malgré les efforts de nombreux géomètres.

1.ère PARTIE.

I.

J'ai établi antérieurement (**) le théorème suivant:

Théorème I. *L'équation indéterminée*

$$x^\lambda + y^\lambda = r_1^\mu\, z^\lambda$$

(*) On trouvera un résumé plus détaillé des cas d'impossibilité dans mes communications du 8 Mai 1905 à l'Acad. des Sciences de Paris (*Comptes rendus*) et du 18 Mai 1905 à l'Académie des Sciences, Inscription et Belles-Lettres de Toulouse (*Mémoires*, 1905).

Dans ce qui suit, j'appelle, d'après Kummer (*J. de Math.*, 1851, t. 16) nombre premier *non exceptionnel* (*régulier* dans la terminologie de M. Hilbert, *Die Theorie der algebraischen Zahlkörper, Jahresbericht der Deutsch. Math. Vereinigung*, 4.ème vol., 1891-1895, Berlin, G. Reimer, 1897, p. 429) tout nombre 1^er^ $\lambda \geqq 5$ qui ne divise le numérateur d'aucun des $\frac{\lambda - 3}{2}$ premiers nombres de Bernoulli. D'après Kummer, tout nombre premier $\geqq 5$ et $\leqq 100$ autre que 37, 59 ou 67 est *non* exceptionnel.

(**) *Acta Math.*, 1900, p. 255, théorème III.

(λ 1er non exceptionnel au sens de Kummer *et* > 3, r_1 *premier*, $\mu < \lambda$) *est impossible en nombres entiers réels :*

1.° quand $r_1^\mu \equiv -1 + c_1 \lambda \pmod{\lambda^2}$, c_1 *étant un au moins des nombres* $1, 2, \ldots, \lambda - 1$, *qui dépend de* λ ;

2.° quand $\lambda = 5$, 7 *ou* 17, *et* $r_1^\mu \equiv 4 \pmod{\lambda^2}$;

3.° quand $\lambda = 11$ *et* $r_1^\mu \equiv 5$ *ou* $47 \left(\bmod \overline{11}^2\right)$;

4.° quand $\lambda = 13$ *et* $r_1^\mu \equiv 17 \left(\bmod \overline{13}^2\right)$.

Quand $\mu = 1$, on sait qu'il y a une infinité de valeurs de r_1 auxquelles ce théorème est applicable; mais peut-on affirmer la même chose quand $\mu > 1$? De ce qui suit résultera que l'on peut très-souvent répondre affirmativement; il en est ainsi, par exemple, dans le cas du 1er alinéa du théorème I quand μ est impair, quel que soit λ (non exceptionnel et > 3).

II.

Je vais m'appuyer sur le lemme suivant:

Lemme I. *La condition nécessaire et suffisante pour que la progression arithmétique* $a x + b$ (a, b *premiers entre eux*) *renferme une infinité de puissances* $\mu^{\text{èmes}}$ ($\mu > 1$) *de nombres premiers est que* b *soit un résidu de puissance* $\mu^{\text{ème}}$ (*mod* a).

Ce lemme a-t-il été énoncé? Je pense que non, sans pouvoir le certifier. Mais sa démonstration est assez facile, et j'en ai besoin pour ce qui suit.

On sait que la progression arithmétique $a_1 x + b_1$ (a_1, b_1 premiers entre eux) renferme une infinité de nombres premiers: cette proposition, que Legendre a essayé en vain de démontrer, a été établie en général, quels que soient a et b, par Lejeune-Dirichlet (*). Soit donc un nombre premier

$$p_1 = a_1 x + b_1;$$

on a

$$p_1^\mu = (a_1 x + b_1)^\mu = b_1^\mu + a_1 X.$$

(*) Dirichlet-Dedekind, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, 3.ème édit., 2.te Abtheilung, Braunschweig (Brunswick), F. Vieweg, 1881, p. 342. Voir encore Dirichlet, *Berlin. Abhandl.*, 1837, p. 45; *Oeuvres*, t. I, p. 313.

Soit b_2 le plus petit résidu de b_1^μ (mod a_1): p_1^μ est contenu dans la progression arithmétique $b_2 + a_1 X_1$. Toutes les puissances $\mu^{\text{èmes}}$ des nombres 1ers de la progression $a_1 x + b$ sont contenues dans la même progression $b_2 + a_1 X_1$. Donc la condition énoncée au lemme I est nécessaire.

Inversement, si b_3 est un résidu de puissance $\mu^{\text{ème}}$ (mod a_1), on peut trouver b_4 tel que $b_4^\mu \equiv b_3$ (mod a_1): tout nombre premier de la forme $a_1 x + b_4$ a sa puissance $\mu^{\text{ème}}$ de la forme $a_1 X + b_4^\mu = a_1 X_1 + b_3$, et la progression $a_1 X_2 + b_3$ contient une infinité de puissances $\mu^{\text{èmes}}$ de nombres 1.ers

Remarque I. Ce qui précède donne même un moyen d'avoir, d'après les résultats connus pour le nombre des nombres premiers inférieurs à N contenus dans la progression arithmétiqne $a' x + b'$ (a', b' premiers entre eux), une limite inférieure ou une valeur asymptotique du nombre des nombres p^μ (p premier) contenus dans une progression arithmétique $a x + b$.

Les puissances $\mu^{\text{èmes}}$ des nombres premiers, avec $p_1^\mu < N$, de la progression $a_1 X + b_3$ sont tels que p_1 appartient à une des progressions $a_1 x + b_4$, avec $p_1 < N^{\frac{1}{\mu}}$; et réciproquement. Le nombre des progressions $a_1 x + b_4$ telles que les puissances $\mu^{\text{èmes}}$ de leurs nombres premiers soient de la forme $a_1 X + b_3$ est alors égal au nombre v des solutions de $b_4^\mu \equiv b_3$ (mod a_1), nombre que l'on sait calculer; par exemple (*), soit $a_1 = \lambda^p$ et λ premier impair, δ le p. g. c. d. de μ et $(\lambda - 1)\,\lambda^{p-1}$: on a $v = \delta$. Chacune de ces progressions a d'ailleurs asymptotiquement (**), c. à d. pour N suffisamment grand,

$$\frac{m\, N^{\frac{1}{\mu}}}{\log N^{\frac{1}{\mu}}}(1 + \varepsilon), \quad (m \text{ constante convenable indépendante de } b_4)$$

nombres premiers inférieurs à $N^{\frac{1}{\mu}}$. Donc $a_1 X + b_3$ (a_1 1er à b_3) renferme

$$\frac{v\, m\, N^{\frac{1}{\mu}}}{\log N^{\frac{1}{\mu}}}(1 + \varepsilon_1)$$

(*) SERRET, *Algèbre supérieure*, t. II, 5.ème édition, Paris, 1885, p. 85.

(**) DE LA VALLÉE-POUSSIN, *Anna. de la Soc. Scient. de Bruxelles*, t. XX, 2.ème partie, 1896, p. 82 du Mémoire; HADAMARD, *Bull. Soc. Math.*, 1896, p. 217-219; ε, ε_1 ont pour limites 0 quand N croît indéfiniment.

puissances $\mu^{\text{èmes}}$ de nombres premiers inférieures à N, à la condition nécessaire et suffisante que b_3 soit résidu de puissances $\mu^{\text{ème}}$ (mod a_1).

Remarque II. — Quand $a_1 = \lambda^p$ (λ premier), la condition nécessaire et suffisante pour que b_3 premier à λ soit résidu de puissance $\mu^{\text{ème}}$ (mod a_1) est que $b_3 \equiv b_4^\mu$ (mod λ^p), et, si δ est le p. g. c. d. de μ et $\lambda^{p-1}(\lambda-1)$, $b_3^{\frac{\lambda^{p-1}(\lambda-1)}{\delta}} \equiv 1$ (mod λ^p) Lorsque μ, et par suite δ, sont premiers à λ,

$$b_3^{\lambda^{p-1}\frac{\lambda-1}{\delta}} \equiv 1 \pmod{\lambda^p}$$

entraîne

$$b_3^{\frac{\lambda-1}{\delta}} \equiv 1 \pmod{\lambda},$$

et inversement. Par conséquent :

La condition nécessaire et suffisante pour que la progression arithmétique $\lambda^p x + b$ (b 1^er^ à λ, λ premier impair, $p \geqq 1$) renferme une infinité de puissances $\mu^{\text{èmes}}$ (μ premier à λ) de nombres premiers est que b soit résidu de puissance $\mu^{\text{ème}}$ (mod λ).

Quand μ est premier à $\lambda(\lambda-1)$, $\delta = 1$; donc :

Toute progression arithmétique $\lambda^p x + b$ (b 1^er^ à λ, λ 1^er^ impair, $p \geqq 1$) contient une infinité de puissances $\mu^{\text{èmes}}$ de nombres premiers, pourvu que μ soit premier à $\lambda(\lambda-1)$.

III.

Je considère d'abord la progression arithmétique $-1 + c_1\lambda + \lambda^2 x$ (λ premier impair), où c_1 est un quelconque des nombres $0, 1, 2, \ldots, \lambda - 1$, et je cherche la condition nécessaire et suffisante pour qu'elle renferme une infinité de puissances $\mu^{\text{èmes}}$ de nombres premiers, avec μ premier à λ. Soit δ le p. g. c. d. de μ et $\lambda - 1$, et $\mu = \mu_1 \delta$, il faut et il suffit

$$(-1)^{\frac{\lambda-1}{\delta}} \equiv 1 \pmod{\lambda},$$

ou

$$\lambda - 1 = 2\,\delta\, y\,;$$

alors μ_1 est impair, puisqu'il est premier à $\frac{\lambda - 1}{\delta} = 2\,y$. Donc:

La condition nécessaire et suffisante pour que la progression arithmétique $\lambda^2 x + c_1 \lambda - 1$, où λ est 1^{er} impair et c_1 un quelconque des nombres 0, 1, 2,..., $\lambda - 1$, renferme une infinité de puissances $\mu^{\text{èmes}}$ de nombres premiers (μ premier à λ) est que λ soit de la forme $1 + 2\,\delta\, y$, δ étant le plus grand commun diviseur de μ et $\lambda - 1$; $\frac{\mu}{\delta}$ est impair.

Ainsi, quand $\mu = 2$, il faut et il suffit $\lambda = 4\,y + 1$. Quand $\mu = 2^n \mu'$, (μ' impair), il faut et il suffit $\delta = 2^n \delta'$, $\lambda - 1 = 2^{n+1} \delta' y'$; soit λ un nombre premier quelconque de la forme $1 + 2^{n+1} z$: on peut toujours, si δ'' est le p. g. c. d. de z et μ', le mettre sous la forme $1 + 2^{n+1} \delta'' z'$, où $2^n \delta''$ est le p. g. c. d. de μ et $\lambda - 1$; la condition énoncée plus haut est alors toujours remplie. Dès lors:

Lemme II. *Soit λ un nombre premier impair, c_1 un quelconque des nombres $0, 1, 2, \dots, \lambda - 1$ choisi arbitrairement, $\mu = 2^n \mu'$ (μ' impair) un nombre premier à λ. La condition nécessaire et suffisante pour que la progression arithmétique $\lambda^2 x + c_1 \lambda - 1$ renferme une infinité de puissances $\mu^{\text{èmes}}$ de nombres premiers est que λ soit de la forme $1 + 2^{n+1} y$, ce qui a toujours lieu pour $n = 0$, c. à. d. μ impair.*

D'après cela, *le 1^{er} alinéa du théorème I s'applique pour une infinité de valeurs de r_1^μ:*

1.° quand μ impair $< \lambda$;

2.° quand $\mu = 2\,\mu'$, (μ' impair, $\mu < \lambda$), $\lambda = 4\,h + 1$;

3.° quand $\mu = 4\,\mu'$, (μ' impair, $\mu < \lambda$), $\lambda = 8\,h + 1$; etc., λ étant un nombre 1^{er} non exceptionnel, en particulier si $\lambda \leq 100$ est $\neq 37$, 59 ou 67 et ≥ 5.

IV.

Je passe au $2^{\text{ème}}$ alinéa du théorème I.

Soit $\lambda = 5$, 7 ou 17, $r_1^\mu \equiv 4 \pmod{\lambda^2}$, δ le p. g. c. d. de μ et $\lambda - 1$, $\mu = \mu' \delta$: il faut et il suffit, d'après le lemme I et la remarque II, pour que la progression arithmétique $4 + \lambda^2 x$ renferme une infinité de puissances $\mu^{\text{èmes}}$ de nombres premiers (μ 1$^{\text{er}}$ à λ), que 4 soit résidu de puissance $\mu^{\text{ème}}$ (mod λ).

Il faut donc

$$4^{\frac{\lambda-1}{\delta}} \equiv 1 \pmod{\lambda}.$$

et cette condition est suffisante.

Quand $\lambda = 5$, $4^{\frac{4}{\delta}} \equiv 1 \equiv (-1)^{\frac{4}{\delta}} \pmod{5}$, $\delta = 1$ ou 2, $\mu = \mu' \delta$ et μ' impair, par suite $\mu = \mu'$ ou $2\mu'$; pour $\mu < 5$, $\mu = 1$, 2 ou 3.

Quand $\lambda = 17$, $4^{\frac{16}{\delta}} \equiv 1 \pmod{17}$, $\frac{16}{\delta} \geqq 4$, $\delta = 1$, 2 ou 4, $\mu = \mu' \delta$ et μ' impair; pour $\mu < 17$, μ est un des nombres 1 à 15 sauf 8.

Quand $\lambda = 7$, $4^{\frac{6}{\delta}} \equiv 1 \pmod{7}$, $\delta = 1$ ou 2, $\mu = \mu' \delta$, et μ' 1.$^{\text{er}}$ à $\frac{6}{\delta}$; pour $\mu < 7$, $\mu = 1$, 2, 4 ou 5.

En résumé, *le 2.$^{\text{ème}}$ alinéa du théorème I s'applique à une infinité de puissances $\mu^{\text{èmes}}$ d'un nombre premier :*

1.° quand $\lambda = 5$, pour $\mu = 1$, 2 ou 3 ;

2.° quand $\lambda = 7$, pour $\mu = 1$, 2, 4 ou 5 ;

3.° quand $\lambda = 17$, pour $\mu =$ un des nombres 1 à 15 sauf 8.

V.

Je m'occupe maintenant du 3$^{\text{ème}}$ alinéa du théorème I.

Soient $\lambda = 11$, $r_1'' \equiv 5 \left(\text{mod } \overline{11}^2\right)$, δ le p. g. c. d. de μ (1$^{\text{er}}$ à 11) et $\lambda - 1 = 10$, $\mu = \mu' \delta$. Pour que la progression arithmétique $5 + \lambda x^2$ renferme une infinité de puissances $\mu^{\text{èmes}}$ de nombres premiers, il faut et il suffit que 5 soit résidu de puissance $\mu^{\text{ème}}$ (mod. λ), c. à d.

$$5^{\frac{10}{\delta}} \equiv 1 \pmod{11},$$

$\delta = 1$ ou 2, $\mu = \mu' \delta$, avec μ' 1$^{\text{er}}$ à $\frac{10}{\delta}$; quand $\mu < 11$ et $\delta = 1$, $\mu = 1$, 3, 7, ou 9; quand $\mu < 11$ et $\delta = 2$, $\mu = 2$, 4, 6 ou 8: μ est un des nombres 1 à 9, sauf 5.

Le cas de $r_1^\mu \equiv 47 \left(\text{mod. } \overline{11}^2\right)$ conduit à $3^{\frac{10}{\delta}} \equiv 1$ (mod 11) et donne les mêmes valeurs de μ.

Le 3ème alinéa du théorème I s'applique à une infinité de puissances μèmes de nombres 1ers quand μ est un des nombres 1 *à* 9 *autre que* 5.

VI.

Je passe enfin au 4ème alinéa.

Soient $\lambda = 13$, $r_1^\mu \equiv 17 \left(\text{mod } \overline{13}^2\right)$, δ le p. g. c. d. de μ et $\lambda - 1 = 12$, $\mu = \mu' \delta$: on est conduit à la condition nécessaire et suffisante

$$17^{\frac{12}{\delta}} \equiv 4^{\frac{12}{\delta}} \equiv 1 \ (\text{mod } 13),$$

pour que la progression arithmétique $17 + \lambda^2 x$ contienne une infinité de puissances μèmes de nombres premiers. On a, pour $\mu < \lambda$, $\delta = 1$ ou 2, $\mu = 1$, 2, 5, 7, 10 ou 11.

Le 4ème alinéa du théorème I s'applique à une infinité de puissances μèmes de nombres premiers quand μ est un des nombres premiers 1, 2, 5, 7, 10 *ou* 11.

2.ème PARTIE.

VII.

Lemme III. *Soit ε une unité complexe formée avec une racine λème imaginaire α de l'unité ($\lambda = 3$ ou λ non exceptionnel). Si $\varepsilon \equiv k$ mod $(1 - \alpha)^{m(\lambda-1)}$, où k et m sont des entiers réels, on aura $\varepsilon = \varepsilon_m^{\lambda^m}$, ε_m étant une unité complexe; réciproquement, si $\varepsilon = \varepsilon_m^{\lambda^m}$, on a $\varepsilon \equiv k$ mod. $(1 - \alpha)^{m(\lambda-1)}$.*

En effet, pour $m = 1$, le résultat est vrai, d'après Kummer (*); j'admets qu'il le soit pour $m = i - 1 \geqq 1$, et je vais montrer qu'il est vrai pour $m = i$. Donc, si $\varepsilon \equiv k \bmod (1 - \alpha)^{(i-1)(\lambda-1)}$,

$$\varepsilon = \varepsilon_{i-1}^{\lambda^{i-1}}. \tag{1}$$

Tout nombre complexe N non idéal est de la forme

$$N = A_0 + A_1 \alpha + \cdots + A_{\lambda-2}\, \alpha^{\lambda-2};$$

je pose

$$\gamma = 1 - \alpha, \quad \alpha = 1 - \gamma,$$

$$N = B_0 + B_1 \gamma + \cdots + B_{\lambda-2}\, \gamma^{\lambda-2};$$

si B_0 est 1[er] à λ, autrement dit si $N \not\equiv 0 \pmod{\gamma}$, je dis que l'on peut choisir l'entier l de façon que

$$\alpha^l N \equiv B_0 \pmod{\gamma^2}, \tag{2}$$

autrement dit de façon que $B_1 \equiv 0 \pmod{\lambda}$; quand cette congruence sera satisfaite, je dirai, avec M. Hilbert (**), que $\alpha^l N$ est *semi-primaire*. Un nombre complexe semi-primaire est ainsi un nombre premier à γ et congru $(\bmod\ \gamma^2)$ à un nombre non complexe.

En effet,

$$\alpha^l N = (1 - \gamma)^l (B_0 + B_1 \gamma + \cdots) = B_0 + \gamma (B_1 - l B_0) + \gamma^2 C_2 + \cdots,$$

et je puis prendre l de façon que

$$B_1 - l B_0 \equiv 0 \pmod{\lambda}.$$

Je choisis alors l de façon que $\varepsilon'_{i-1} = \alpha^l \varepsilon_{i-1}$ soit semi-primaire (***), ce qui est possible puisqu'une unité complexe, dont la norme est 1, ne peut être divisible par γ, dont la norme est λ.

D'après (1)

$$\varepsilon = \varepsilon'^{\lambda^{i-1}}_{i-1} = (B_0 + C_1 \gamma + \cdots + C_{\lambda-2}\, \gamma^{\lambda-2})^{\lambda^{i-1}} \equiv k \pmod{\gamma^{i(\lambda-1)}}, \tag{3}$$

puisqu'on suppose $\varepsilon \equiv k \pmod{\gamma^{i(\lambda-1)}}$.

(*) *J. de Math.*, 1851, p. 487; à l'avant-dernière ligne de l'énoncé de Kummer il faut lire « nombre non complexe » au lieu de « nombre complexe ».

Quand $\lambda = 3$, $\varepsilon \equiv k \pmod 3$ entraîne $\varepsilon = \pm 1$, comme on le vérifie de suite (voir Bachmann, *Die Lehre von der Kreistheilung*, p. 186).

(**) Loc. cit., p. 368.

(***) Cette condition n'est pas indispensable.

Soit C_j le premier des coëfficients réels $C_2, \ldots, C_{\lambda-2}$ qui soit $\not\equiv 0 \pmod{\lambda}$, au cas où il y en aurait un: on a $j \leqq \lambda - 2$, et, puisque λ est divisible par $\gamma^{\lambda-1}$,

$$B_0^{\lambda^{i-1}} + \lambda^{i-1} B_0^{\lambda^{i-1}-1} (C_1 \gamma + \cdots + C_{\lambda-2} \gamma^{\lambda-2}) + \cdots \equiv k \pmod{\gamma^{i(\lambda-1)}};$$

Or

$$\frac{\lambda^{i-1}(\lambda^{i-1} - 1) \ldots (\lambda^{i-1} - \omega)}{\omega!},$$

avec ω et $\lambda^{i-1} - \omega \neq 0$, est toujours divisible par λ^{i-1}, et la plus petite puissance de γ qui divise

$$(C_1 \gamma + \cdots + C^{\lambda-2} \gamma^{\lambda-2})^h \quad \text{est} \quad \gamma^{jh};$$

donc:

$$B_0^{\lambda^{i-1}} + \lambda^{i-1} B_0^{\lambda^{i-1}-1} C_j \gamma^j - k \equiv 0 \mod \gamma^{j+1+(i-1)(\lambda-1)}, \tag{4}$$

j étant $\leqq \lambda - 2$. D'abord

$$B_0^{\lambda^{i-1}} - k \equiv 0 \pmod{\gamma^{j+(i-1)(\lambda-1)}};$$

$B_0^{\lambda^{i-1}} - k$ est un nombre réel de la forme

$$a_0 + a_1 \lambda + \cdots + a_n \lambda^n + \ldots$$

avec $a_0, a_1, \ldots, a_n \ldots$ positifs et $< \lambda$, ce qui exige $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ nuls tant que $n < i$; par suite, $B_0^{\lambda^{i-1}} - k$ est divisible par λ^i ou par $\gamma^{i(\lambda-1)}$. La congruence (4) montre alors que $\lambda^{i-1} C_j \gamma^j$ est divisible par $\gamma^{j+1+(i-1)(\lambda-1)}$, c. à d. C_j divisible par γ; C_j, étant réel, serait divisible par λ, contrairement à l'hypothèse.

Il en résulte que, dans (3), $C_1, \ldots, C_{\lambda-2}$ sont divisibles par λ, $\varepsilon'_{i-1} \equiv B_0 \pmod{\lambda}$, et, d'après Kummer, ε'_{i-1} est la puissance $\lambda^{\text{ème}}$ exacte d'une unité complexe ε_i (ce qui a encore lieu pour $\lambda = 3$). D'après (1),

$$\varepsilon = \varepsilon_i^{\lambda^i}.$$

Réciproquement, si ε est de cette forme, en mettant ε_i sous la forme N on voit que ε est congru à un nombre entier non complexe $\pmod{\lambda^i}$ ou $\pmod{\gamma^{(\lambda-1)i}}$, et même $\pmod{\gamma^{1+i(\lambda-1)}}$.

c. q. f. d.

Lemme IV. *La forme* $u^{\lambda^i} + v^{\lambda^i}$ $(i > 0$, λ *premier impair*), *où* u *et* v *sont* *des nombres réels ou complexes véritables* (*) *premiers entre eux et à* λ *formés avec une racine* $\lambda^{\text{ème}}$ *imaginaire* α *de l'unité, ne peut être divisible par* $\gamma = 1 - \alpha$ *que si elle l'est par* $\gamma^{2+i(\lambda-1)}$, λ *pouvant être exceptionnel ou non. Si même* u *et* v *sont réels, cette forme n'est divisible par* γ *que si elle l'est par* $\gamma^{(i+1)(\lambda-1)}$.

En effet, on a

$$u^{\lambda^i} + v^{\lambda^i} = (u^{\lambda^{i-1}} + v^{\lambda^{i-1}})(u^{\lambda^{i-1}} + \alpha\, v^{\lambda^{i-1}}) \ldots (u + \alpha^{\lambda-1} v^{\lambda^{i-1}})\,;$$

l'un des facteurs du $2^{\text{ème}}$ membre est divisible par γ;

$$u^{\lambda^{i-1}} + \alpha^r v^{\lambda^{i-1}} \quad \text{et} \quad u^{\lambda^{i-1}} + \alpha^s v^{\lambda^{i-1}}$$

ont leur p. g. c. d. qui divise $(\alpha^r - \alpha^s)\, v^{\lambda^{i-1}}$ et $(\alpha^r - \alpha^s)\, u^{\lambda^{i-1}}$, par suite $1 - \alpha = \gamma$ (r nul ou non); $u^{\lambda^{i-1}} + \alpha^r v^{\lambda^{i-1}}$ est donc divisible par γ quel que soit $r = 0, 1, \ldots, \lambda - 1$, puisqu'il l'est pour une valeur de r. D'ailleurs $(\alpha^l u)^\lambda = u^\lambda$, $(\alpha^{l'} v)^\lambda = v^\lambda$; on pourra donc encore supposer

$$u = a + \gamma^2 Q, \quad v = b + \gamma^2 R,$$

où a et b sont des entiers non complexes, Q, R des entiers complexes, c. à d. u, v semi-primaires. Alors

$$u^{\lambda^{i-1}} + v^{\lambda^{i-1}} \equiv 0 \pmod{\gamma}.$$

Quand $i = 1$,

$$u + v = a + b + \gamma^2(Q + R) \equiv 0 \pmod{\gamma},$$

d'où

$$a + b \equiv 0 \pmod{\gamma} \text{ et } a + b \equiv 0 \pmod{\lambda};$$

il en résulte $u + v \equiv 0 \pmod{\gamma^2}$,

$$u^\lambda + v^\lambda \equiv 0 \pmod{\gamma^{\lambda+1}};$$

le théorème est vrai pour $i = 1$.

J'admets qu'il le soit pour $m = 1, 2, \ldots, i - 1$. On a

$$u^{\lambda^{i-1}} + v^{\lambda^{i-1}} \equiv 0 \pmod{\gamma^{2+(i-1)(\lambda-1)}},$$

et puisque $u^{\lambda^{i-1}} + \alpha^r v^{\lambda^{i-1}}$ est divisible par γ,

$$u^{\lambda^i} + v^{\lambda^i} \equiv 0 \pmod{\gamma^{2+i(\lambda-1)}}.$$

La démonstration est presque la même quand u et v sont réels; alors $u + v \equiv 0 \pmod{\gamma^{\lambda-1}}$. c. q. f. d.

(*) C. à d. non idéaux, au sens de KUMMER.

VIII.

Ces lemmes III et IV permettent de généraliser un résultat que j'ai obtenu antérieurement (*):

Théorème II. *Soit λ un nombre premier non exceptionnel: l'équation*

$$u^{\lambda^i}+v^{\lambda^i}=E(\alpha)(1-\alpha)^{\mu\lambda-\beta}A\,w^{\lambda^i}\ (\mu>0,\ \mu\lambda-\beta>0,\ \beta=0,1,2,\dots \text{ ou } i)\quad (5)$$

est impossible en nombres entiers $\neq 0$ réels ou complexes u, v, w (u, v n'étant pas idéaux) 1ers entre eux 2 à 2 et à λ, et formés avec une racine $\lambda^{\text{ème}}$ imaginaire α de l'unité, $E(\alpha)$ étant une unité complexe, et A un nombre entier complexe 1er à λ et égal à 1 ou de la forme $q_1^{\alpha_1}\dots q_p^{\alpha_p}$, où $q_1,\dots,q_p$ sont des facteurs premiers différents, idéaux ou non, avec $p\leqq\lambda-3$.

Si en particulier $i\geqq\lambda-1$, (5) est impossible quel que soit $\mu\lambda-\beta>0$.

Ce théorème reste vrai pour $\lambda=3$, $A=1$.

J'ai établi ailleurs ce résultat pour $i=1$; grâce aux deux lemmes précédents, le même méthode réussit pour $i>1$. On peut toujours supposer u, v semi-primaires.

D'après le lemme IV, $\mu\lambda-\beta$ étant >0, il faut supposer

$$\mu\lambda-\beta\geqq 2+i(\lambda-1),$$

ou

$$(\mu-i)\lambda\geqq\beta+2-i. \quad (6)$$

On a ici pour 2 valeurs au moins r, s différentes de 0, puisque $p\leqq\lambda-3$ (**),

$$\left.\begin{aligned} u^{\lambda^{i-1}}+\alpha^r v^{\lambda^{i-1}}&=\gamma\, e_r(\alpha)\, t_r^{\lambda^i}(\alpha),\\ u^{\lambda^{i-1}}+\alpha^s v^{\lambda^{i-1}}&=\gamma\, e_s(\alpha)\, t_s^{\lambda^i}(\alpha),\end{aligned}\right\}\quad (7)$$

(*) *Acta Math.*, loc. cit., p. 248 (cas où $i=1$).

(**) Soit encore $\lambda=3$, $A=2^f$; les nombres complexes sont ici formés avec une racine cubique imaginaire de l'unité, et 2 reste premier (c. à d. est indécomposable en facteurs complexes). Les mêmes raisonnements sont encore applicables à moins que l'on ait, au lieu de (7) et (8),

$$\left.\begin{aligned} u^{3^{i-1}}+\alpha^r v^{3^{i-1}}&=\gamma\, e_r\, 2^f\, t_r^{3^i},\\ u^{3^{i-1}}+\alpha^s v^{3^{i-1}}&=\gamma\, e_s\, t_s^{3^i},\\ u^{3^{i-1}}+v^{3^{i-1}}&=\gamma^{3(\mu-1)-\beta+1}E'\,w'^{3^i},\end{aligned}\right\}\quad (7\text{ bis})$$

où e_r, e_s sont des unités complexes, $t_r^{\lambda^i}$, $t_s^{\lambda^i}$ des puissances $\lambda^{\text{ièmes}}$ exactes non idéales, puisque les 2 premiers membres de (7) ont le p. g. c. d. γ; λ n'étant pas exceptionnel, $t_r^{\lambda^{i-1}}$, $t_r^{\lambda^{i-2}}, \ldots,$ t_r^{λ}, t_r existent (c. à d. ne sont pas idéaux); de même t_s existe, car λ n'est pas exceptionnel.

---

d'où

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha^r & e_r\, 2f\, t_r^{3^i}, \\ 1 & \alpha^s & e_s\, t_s^{3^i} \\ 1 & 1 & \gamma^{3(\mu-1)-\beta}\, E'\, w'^{3^i} \end{vmatrix} = 0,$$

$$(\alpha^s - \alpha^r)\, \gamma^{3(\mu-1)-\beta}\, E'\, w'^{3^i} - (1 - \alpha^r)\, e_s\, t_s^{3^i} + (1 - \alpha^s)\, e_r\, 2f\, t_r^{3^i} = 0,$$

ou encore

$$2f\, t_r^{3^i} - \varepsilon\, t_s^{3^i} = E_1\, w'^{3^i}\, \gamma^{3(\mu-1)-\beta},$$

où ε et E_1 sont des unités complexes.

On a $\beta \geqq 0$; si $\beta + 2 - i > 0$, $\beta = i$ ou $i - 1$, $i \leqq 3$, (13) doit encore avoir lieu, et ε est la puissance $3^{i\text{ème}}$ d'une unité complexe; l'on est ramené à l'équation

$$2f\, u_1^{3^i} + v_1^{3^i} = E_1\, w'^{3^i}\, \gamma^{3\mu'-\beta},$$

au lieu de (15); ici

$$3\,\mu' - \beta = 3\,\mu - 3 - \beta \geqq 2\,i,$$

d'après (13). Je puis encore admettre, u_1 et v_1 étant premiers à γ, que

$$u_1 = c_0 + Q\,\gamma^2, \quad v_1 = d_0 + R\,\gamma^2.$$

avec Q, R entiers complexes, c_0, d_0 entiers non complexes égaux à 1 ou 2, c. à d. que u_1 et v_1 sont semi-primaires (p. 9). On en conclut:

$$2f\, c_0^{3^i} + d_0^{3^i} + S\,\gamma^{2i+2} = E_1\, w'^{3^i}\gamma^{3(\mu-1)-\beta},$$

(S entier complexe), ou

$$2f\, c_0^{3^i} + d_0^{3^i} \equiv 0 \pmod 9,$$

dès que $\beta = 0$ ou dès que $i \geqq 2$. Or $c_0^{3^i}$, $d_0^{3^i}$ sont (mod 9) d'une des formes 1 ou -1; quand $f = 3\,a + b > 0$, avec $b = 1$ ou 2, a entier, $2f$ est (mod 9) d'une des formes ± 2, ± 4; donc $2f\, c_0^{3^i} + d_0^{3^i}$ est (mod 9) d'une des formes ± 1, ± 3, ± 5. Il y a alors impossibilité.

On en conclut, comme dans le cas général, l'impossibilité pour $i = 1$ quand $\beta = 0$, pour $i = 2$ quand $\beta = 0$, 1 ou 2, et pour $i > 2$. Donc

Théorème II bis. *L'équation* $u^{3^i} + v^{3^i} = E(\alpha)\, \gamma^{\mu\lambda-\beta}\, 2^{3a+b}\, w^{3^i}$ ($\mu > 0$, $\beta \leqq 2$, $\mu\,\lambda - \beta > 0$, $b = 1$ *ou* 2, $3\,a + b \geqq 0$) *est impossible en nombres entiers* $\neq 0$ *réels ou complexes formés avec une racine cubique imaginaire de l'unité premiers entre eux* 2 *à* 2 *et au nombre* 3: *1.º quand* $i \geqq 2$; *2.º quand* $i = 1$, $\beta = 0$).

Remarque. On sait que $x^3 + y^3 = 9\,z^3$ a des solutions $\neq 0$ et premières entre elles 2 à 2 et au nombre 3 (*Nouv. Ann.*, 2ème série, t. 17, 1878, p. 454). De même $x^3 + y^3 = 2 . 3^4\, z^3$ a la solution 17, 37, 7 (id., pag. 425; P. Pépin, *J. de Math.*, t. 15 2.ème série, 1870, p. 217).

En même temps

$$u^{\lambda^{i-1}} + v^{\lambda^{i-1}} = \gamma^{\mu\lambda-\beta-\lambda+1} E'(\alpha)\, A_1\, w'(\alpha)^{\lambda^i}, \tag{8}$$

où E' est une unité complexe, $A_1\, w'(\alpha)^{\lambda^i}$ un nombre complexe véritable (ou existant) A_1 diviseur de A, t_r, t_s, w' premiers entre eux 2 à 2 et à λ. De (7) et (8) on tire, éliminant u et v:

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha^r & e_r\, t_r^{\lambda^i} \\ 1 & \alpha^s & e_s\, t_s^{\lambda^i} \\ 1 & 1 & E'\,\gamma^{\mu\lambda-\beta-\lambda} A_1\, w'^{\lambda^i} \end{vmatrix} = 0, \tag{9}$$

et, en développant,

$$e_r\, t_r^{\lambda^i}(1-\alpha^s) - e_s\, t_s^{\lambda^i}(1-\alpha^r) + (\alpha^s-\alpha^r)\,\gamma^{(\mu-1)\lambda-\beta} E'\, A_1\, w'^{\lambda^i} = 0, \tag{10}$$

ou encore

$$t_r^{\lambda^i} - \varepsilon\, t_s^{\lambda^i} = E_1\, A_1\, w'^{\lambda^i}\, \gamma^{(\mu-1)\lambda-\beta}, \tag{11}$$

ε et E_1 étant des unités complexes. Les nombres t_r, t_s sont des nombres complexes véritables, en sorte que

$$t_r^{\lambda^i} \equiv c \pmod{\lambda^i}, \quad t_s^{\lambda^i} \equiv c_1 \pmod{\lambda^i}, \tag{12}$$

où c, c_1 sont des entiers non complexes. D'ailleurs, on a

$$(\mu-1)\lambda - \beta \geqq i(\lambda-1) \tag{13}$$

dès que

$$\mu\lambda - \beta \geqq i(\lambda-1) + \lambda = (i+1)\lambda - i.$$

Je suppose (*) $\beta + 2 - i > 0$, β étant $\geqq 0$: d'après (6),

$$\mu \geqq i+1, \quad \mu\lambda - \beta \geqq (i+1)\lambda - \beta \geqq (i+1)\lambda - i,$$

dès que $\beta \leqq i$; or $\beta > i-2$; donc (13) a lieu quand

$$\beta = i \text{ ou } i-1, \quad i \leqq \beta + 1 \leqq \lambda. \tag{14}$$

(11) entraîne alors, d'après (12)

$$c - \varepsilon\, c_1 \equiv 0 \pmod{\gamma^{i(\lambda-1)}};$$

(*) Si $\beta + 2 - i \leqq 0$ et $i - \beta - 2 < \lambda$, on a $\mu \geqq i$; $(\mu-1)\lambda - \beta \geqq (i-1)\lambda - \beta$ n'est $\geqq i(\lambda-1)$ que si $i \geqq \lambda + \beta$. Si $i - \beta - 2 \geqq \lambda$, $i > \lambda$. Le cas où $i > \lambda$ est discuté plus loin.

d'après le lemme III, ε est la puissance $\lambda^{\text{ième}}$ d'une unité complexe ε_i. Posant

$$t_r = u', \quad \varepsilon_i t_s = v', \quad \mu' = \mu - 1$$

(11) donne

$$u'^{\lambda^i} + v'^{\lambda^i} = E_1 A_1 w'^{\lambda^i} \gamma^{\mu \lambda - \beta} \tag{15}$$

équation de tous points analogue à (5), mais où l'exposant de γ est diminué de λ. L'exposant de (15) doit satisfaire à (6); le même raisonnement conduit à une équation analogue à (15) où $\mu - 1$ est remplacé par $\mu - 2$; et ainsi de suite. On finira par trouver une équation analogue à (11) où l'exposant ne peut plus satisfaire aux conditions (13), et l'on est conduit à une absurdité quand (14) a lieu.

Ceci posé, on remarque, si

$$u^{\lambda^{i-j}} = U, \quad v^{\lambda^{i-j}} = V, \quad w^{\lambda^{i-j}} = W, 0 < j < i \leqq \lambda - 1 \tag{16}$$

que (5) donne

$$U^{\lambda^j} + V^{\lambda^j} = E(\alpha) \gamma^{\mu\lambda - \beta} A W^{\lambda^j}, \quad j < \lambda - 1. \tag{17}$$

D'après ce qu'on vient de voir, cette équation est impossible pour $\beta = j$ ou $j - 1$. Donnant à j les valeurs $1, 2, \ldots, i - 1$, on en conclut que (5) est impossible quand β a les valeurs $0, 1, 2, \ldots, i \; (i \leqq \lambda - 1)$, et le théorème est établi pour $i \leqq \lambda - 1$.

En particulier

$$u^{\lambda^{\lambda-1}} + v^{\lambda^{\lambda-1}} = E(\alpha) \gamma^{\mu\lambda - \beta} A W^{\lambda^{\lambda-1}} \tag{18}$$

est impossible quel que soit β, $(\beta < \mu \lambda)$.

Enfin, soit $i \geqq \lambda$: on fera encore dans (5) le changement de variables (16), mais en supposant $j = \lambda - 1$; l'équation (17) obtenue est de la forme (18), qui est impossible quel que soit β. c. q. f. d.

Corollaire. *Tout étant posé comme dans l'énoncé du théorème II, l'équation*

$$u^{\lambda^{\lambda-1}} + v^{\lambda^{\lambda-1}} = E(\alpha) \gamma^n A w^{\lambda^{\lambda-1}}, \; (n \text{ quelconque} > 0),$$

est impossible.

Voici, en nombres entiers réels, une conséquence du théorème précédent:

Théorème III. *Soit λ un nombre premier non exceptionnel: l'équation indéterminée*

$$x^{\lambda^i} + y^{\lambda^i} = A \lambda^{k\lambda + \delta} z^{\lambda^i}, \quad (k\lambda + \delta \geqq 1 \text{ et } \not\equiv 0 \; (\text{mod.} \lambda^i), \; \delta = 0, 1, \ldots, \text{ou } i), \tag{19}$$

est impossible en nombres entiers réels x, y, $z \neq 0$ (*premiers entre eux 2 à 2 ou non*) *quand* A *est réel et égal à 1 ou* $\rho_1^{h_1} \ldots \rho_p^{h_p}$, $\rho_1, \ldots, \rho_p$ *étant des nombres premiers réels différents, différents de* λ, *et appartenant* (*mod* λ) *à des exposants* $f_1, \ldots, f_m$ *tels que*

$$\sum_1^p {}_m \frac{1}{f_m} \leqq \frac{\lambda-3}{\lambda-1}. \tag{20}$$

L'équation (19) *est encore impossible sous les mêmes conditions quand* $\lambda = 3$ *et que l'on a 1.° soit* $A = 1$, *2.° soit* $A = 2^f$ *avec* $f = 3a + b > 0$, $b = 1$ *ou* 2, $i \geqq 2$.

En effet, on peut toujours supposer x, y, z premiers (*) à λ; j'admets d'abord qu'ils soient premiers entre eux deux à deux: ρ_m possède $\frac{\lambda-1}{f_m}$ facteurs premiers (**), idéaux ou non; par suite les conditions supposées dans l'énoncé du théorème II (ou II bis) pour le facteur A sont ici remplies, d'après (20). D'autre part le second membre de (19) est divisible exactement par la puissance $\gamma^{(k\lambda+\delta)(\lambda-1)}$ de γ, et

$$(k\lambda + \delta)(\lambda - 1) \equiv -\delta \pmod{\lambda};$$

si l'on prend $\delta = 0, 1, 2, \ldots,$ ou i, l'exposant de γ remplit les conditions spécifiées pour l'exposant $\mu\lambda - \beta$ dans l'énoncé du théorème II (ou II bis). Le théorème II (ou II bis) est donc applicable à (19), et cette équation est impossible quand x, y, z sont premiers entre eux deux à deux.

Je suppose maintenant que deux des nombres x, y, et z aient un facteur premier (réel) commun, non diviseur de A; il divise le 3$^{\text{ème}}$, et la suppression de la plus haute puissance de ce facteur qui divise à la fois x, y, z donne une équation analogue à (19) où un au plus de ces nombres est divisible par ce facteur; on peut donc regarder x, y, z comme ne pouvant avoir 2 à 2 d'autres facteurs communs que ceux de A.

(*) Si x est divisible par λ, il en est de même de y; on peut supposer z premier à λ, car si $z = z_1 \lambda^t$, où z_1 premier à λ, on obtient une équation en x, y, z, de même forme que (19), sur laquelle on peut raisonner. La plus haute puissance λ^g de λ qui divise à la fois x et y est $< \lambda^{k\lambda+\delta}$, puisque $k\lambda + \delta \not\equiv 0$ (mod λ^i); on pose $x = x_1\lambda^g$, $y = y_1 \lambda^g$, d'où

$$x_1^{\lambda^i} + y_1^{\lambda^i} = A\, \lambda^{k'\lambda+\delta} z_1^{\lambda^i};$$

x_1, par exemple, étant premier à λ, il en est de même de y_1.

(**) Kummer, *J. de Math.*, 1851, p. 431 et suiv.

J'admets enfin que deux des trois nombres x, y, z aient un facteur 1er commun ρ_s diviseur de A; si c'est x et z, ce facteur divise y; il suffit par suite de considérer le cas où x et y sont divisibles par ρ_s. Soient

$$x = \rho_s^{\varepsilon} x_1, \quad y = \rho_s^{\varepsilon_1} y_1, \quad z = \rho_s^{\varepsilon_2} z_1,$$

avec x_1, y_1, z_1 premiers à ρ_s, $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 \geqq 0$, et, par exemple, $\varepsilon \geqq \varepsilon_1$. (19) donne

$$\rho_s^{\varepsilon\lambda^i} x_1^{\lambda^i} + \rho_s^{\varepsilon_1\lambda^i} y_1^{\lambda^i} = \rho_s^{b_s + \varepsilon_2\lambda^i} A_s \lambda^{k\lambda+\delta} z_1^{\lambda^i}, \quad b_s > 0.$$

Deux des trois exposants $\varepsilon\lambda^i$, $\varepsilon_1\lambda^i$, $b_s + \varepsilon_2\lambda^i$ doivent être égaux, le troisième ne leur étant pas inférieur.

Si $\varepsilon\lambda^i = \varepsilon_1\lambda^i \leqq b_s + \varepsilon_2\lambda^i$, après suppression du facteur $\rho_s^{\varepsilon\lambda^i}$, (19) donne une équation analogue où x et y sont premiers à ρ_s. Si $\varepsilon_1\lambda^i = b_s + \varepsilon_2\lambda^i \leqq \varepsilon\lambda^i$, après suppression du facteur $\rho_s^{\varepsilon_1\lambda^i}$, on a l'équation

$$x_2^{\lambda^i} + y_1^{\lambda^i} = A_s \lambda^{k\lambda+\delta} z_1^{\lambda^i}$$

où $x_2 = x_1 \rho_s^{\varepsilon - \varepsilon_1}$. Cette équation est analogue à (19), car A_s renferme un facteur premier de moins, et y_1 et z_1 sont premiers à ρ_s; (20) a lieu a fortiori (*) c. q. f. d.

Corollaire. *Tout étant posé comme dans l'énoncé du théorème III, l'équation indéterminée*

$$x^{\lambda^{\lambda-1}} + y^{\lambda^{\lambda-1}} = A \lambda^n z^{\lambda^{\lambda-1}}$$

est impossible quand n est quelconque > 0 et $\not\equiv 0$ (mod $\lambda^{\lambda-1}$).

IX.

Je vais établir la propriété suivante en nombres entiers réels.

Théorème IV. *L'équation indéterminée*

$$x^{\lambda^i} + y^{\lambda^i} = v \lambda^{k\lambda+\delta} z^{\lambda^i}, \tag{21}$$

(*) On voit en même temps que le théorème ci-dessus pour $i = 1$ est un peu plus complet lorsque $k\lambda + \delta \not\equiv 0$ (mod λ), $\delta = 1$, que celui que j'avais énoncé antérieurement (*Acta Math.*, loc. cit., p. 250). Le théorème ci-dessus reste vrai quand $k\lambda + \delta \equiv 0$ (mod λ^i), à condition de supposer x, y, z premiers à λ.

($k\lambda + \delta > 0$ et $\equiv\!\!\!\!|\ 0$ ($mod\ \lambda^i$), $\delta = 0, 1, \ldots,$ *ou* i, v *premier à* λ, $\lambda \geqq 5$), *où* λ *est un nombre premier non exceptionnel,* v *l'unité ou un nombre de la forme* $\rho_1^{b_1} \ldots \rho_p^{b_p}$, ($\rho_1, \ldots, \rho_p$ *nombres premiers réels distincts différents de* λ) *est impossible en nombres entiers réels différents de* 0 *quand le produit* $r_1 \ldots r_p$ *des plus petits résidus en valeur absolue de* $\rho_1, \ldots, \rho_p$ ($mod\ \lambda$) *est* $< \lambda$, *chacun de ces résidus étant* > 1 (*).

On en déduit ce corollaire immédiat:

Corollaire. *Tout étant posé comme ci-dessus, l'équation indéterminée*

$$x^\mu + y^\mu = \mu z^\mu$$

est impossible en nombres entiers réels quand μ *est de la forme*

$$\mu = \lambda^n v,$$

où n *est quelconque* > 0 *et* $v =$ *l'unité ou* $\rho_1^{b_1} \ldots \rho_p^{b_p}$ *est premier à* λ, $\rho_1, \ldots, \rho_p$ *satisfaisant aux conditions ci-dessus.*

J'appliquerai le théorème III: l'équation (21) est impossible lorsque $v = 1$ ou lorsque $v = \rho_1^{b_1} \ldots \rho_p^{b_p}$, $\rho_1, \ldots, \rho_p$ étant des nombres premiers réels différents appartenant (mod λ) à des exposants $f_1, \ldots, f_p$ tels que

$$\sum_1^p{}_m \frac{1}{f_m} \leqq \frac{\lambda - 3}{\lambda - 1}. \tag{20}$$

Quand $p = 1$, il y a toujours impossibilité dès que $\rho_1 \equiv\!\!\!\!|\ 1$ (mod λ), car alors $f_1 \geqq 2$, $\frac{1}{2} \leqq \frac{\lambda - 3}{\lambda - 1}$ dès que $\lambda \geqq 5$.

Je suppose maintenant que $r_1, \ldots, r_p$ soient les valeurs absolues des plus petits résidus positifs ou négatifs (mod λ) de $\rho_1, \ldots, \rho_p$, supposés tous > 1, $R_1, \ldots, R_p$ étant les plus petits résidus positifs (mod λ) des mêmes nombres; de plus

$$r_1 r_2 \ldots r_p < \lambda. \tag{22}$$

On a

$$r_m = R_m \quad \text{ou} \quad R_m + r_m = \lambda. \tag{23}$$

Dans le premier cas,

$$r_m^{f_m} = R_m^{f_m} = s_m \lambda + 1, \quad s_m \geqq 1; \tag{24}$$

(*) J'ai déjà établi cette propriété pour le cas où $v = 1$, $i = 1$, $k\lambda + \delta = 1$ (*Acta Math.*, 1900, p. 236, théorème V). On remarquera que l'équation $x^3 + y^3 = 6z^3$ admet, d'après le P. Pépin (loc. cit.) et E. Lucas (*Nouv. Ann.*, 2.ème série, t. 17, 1878, p. 425), la solution $x = 17$, $y = 37$, $z = 21$.

dans le second,

$$R_m^{f_m} = (\lambda - r_m)^{f_m} \equiv 1 \pmod{\lambda},$$

$$r_m^{f_m} = s_m \lambda \pm 1, \quad s_m \geqq 1: \tag{24 bis}$$

le signe — n'est possible que si f_m est impair.

Donc, en général,

$$f_m \log r_m = \log (s_m \lambda \pm 1),$$

$$\sum_1^p \frac{1}{f_m} = \sum_1^p \frac{\log r_m}{\log (s_m \lambda \pm 1)}, \tag{25}$$

et l'impossibilité de (21) sera établie si l'on montre que

$$\sum_1^p \frac{\log r_m}{\log (s_m \lambda \pm 1)} \leqq \frac{\lambda - 3}{\lambda - 1}. \tag{26}$$

1er cas.

$s_m \geqq 2$. — On n'a $s_m = 1$

que si

$$r_m^{f_m} = \lambda \pm 1, \quad r_m^{f_m} \mp 1 = \lambda.$$

Si

$$r_m^{f_m} - 1 = \lambda = (r_m - 1) \frac{r_m^{f_m} - 1}{r_m - 1},$$

on voit, λ étant premier, que $r_m = 2$.

Si $r_m^{f_m} + 1 = \lambda$, d'après (24 bis), f_m est impair, $r_m^{f_m} + 1$ est divisible par $r_m + 1$ et n'est pas premier, par suite ne peut être égal à λ. Si donc λ n'est pas de la forme $2^a - 1$, on a $s_m \geqq 2$, et, quand $\lambda = 2^a - 1$, on a encore $s_m \lambda \pm 1 \geqq \lambda + 1$.

Ceci posé, j'admets d'abord que l'on ait, quel que soit m, $s_m \geqq 2$; il suffit pour l'impossibilité de (21), d'après (22) et (26)

$$\sum_1^p \frac{\log r_m}{\log (s_m \lambda \pm 1)} \leqq \sum_1^p \frac{\log r_m}{\log (2\lambda - 1)} \leqq \frac{\log (\lambda - 1)}{\log (2\lambda - 1)} \leqq \frac{\lambda - 3}{\lambda - 1} = 1 - \frac{2}{\lambda - 1}, \tag{26 bis}$$

$$\varphi(\lambda) = 1 - \frac{2}{\lambda - 1} - \frac{\log (\lambda - 1)}{\log (2\lambda - 1)} \geqq 0.$$

Posant $t = \lambda - 1$, il suffit a fortiori

$$1 - \frac{2}{t} - \frac{\log t}{\log 2 + \log t} = \frac{\log 2}{\log 2 + \log t} - \frac{2}{t} \geqq 0,$$

$$\psi(t) = (t - 2) \log 2 - 2 \log t \geqq 0.$$

Or

$$\psi'(t) = \log 2 - \frac{2}{t}$$

est $\geqq 0$ dès que $2^t \geqq e^2$, $t \geqq 4$, $\lambda \geqq 5$. Quand $\lambda \geqq 5$, $\psi(t)$ croît avec t; mais

$$\psi(10) = \log 2^8 - \log \overline{10}^2 > 0;$$

donc (21) est impossible quand $s_m \geqq 2$ pour $\lambda \geqq 11$.

Quand $\lambda = 5$, $r_1 \dots r_p < 5$ donne $p \leqq 2$, $R_1 = 2$ ou 3, $R_2 = 2$ ou 3, $f_1 = 4$, $f_2 = 4$, $\Sigma \frac{1}{f_m} \leqq \frac{1}{2} \leqq \frac{\lambda - 3}{\lambda - 1}$; (21) est impossible.

Quand $\lambda = 7$, $r_1 \dots r_p < 7$ donne $p \leqq 2$, R_1 et R_2 égaux à 2, 3, 4 ou 5, f_1 ou $f_2 = \frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{6}$, $\Sigma \frac{1}{f_m} \leqq \frac{2}{3} \leqq \frac{\lambda - 3}{\lambda - 1}$; (21) est impossible (même si $s_m = 1$).

Finalement l'impossibilité de (21) est établie quand $r_1 r_2 \dots r_p < \lambda$, pour le cas où les s_m sont tous $\geqq 2$, pour le cas où $r_1 r_2 \dots r_p$ est impair, pour le cas où $\lambda + 1 \neq 2^a$, enfin pour les cas où $\lambda = 5$ ou 7.

2.ème cas.

$$\lambda + 1 = 2^a.$$

D'après ce qui précède, on peut supposer $r_1 r_2 \dots r_p$ pair et $\lambda \geqq 31$.

Soient

$$\left.\begin{array}{l} r_1 = 2^{j_1}, \dots, r_{a'_1} = 2^{j_{a'_1}}, \quad r_m > 2 \quad \text{et } s_m > 1 \quad \text{pour} \quad m > a'_1, \\ j_1 + \dots + j_{a'_1} = a_1, \quad r_1 r_2 \dots r_p = 2^{a_1} r_{a'_1+1} \dots r_p < \lambda, \quad s_m \geqq 2 \\ \text{pour} \quad m \geqq a'_1 + 1, \quad a_1 \geqq a'_1. \end{array}\right\} \quad (27)$$

D'après (20) et (26) il suffit pour l'impossibilité de (21), puisque

$$f_1 \geqq \frac{a}{j_1}, \quad \frac{1}{f_1} \leqq \frac{j_1}{a}, \quad a = \frac{\log(\lambda + 1)}{\log 2}, \tag{28}$$

$$\frac{a_1 \log 2}{\log(\lambda + 1)} + \frac{\sum_{a'_1+1}^{p} \log r_m}{\log(2\lambda - 1)} \leqq \frac{\lambda - 3}{\lambda - 1} = 1 - \frac{2}{\lambda - 1},$$

ou, puisque, d'après (27),

$$\sum_{a'_1+1}^{p} \log r_m \leqq \log(\lambda - 1) - a_1 \log 2,$$

il suffit

$$\frac{a_1 \log 2}{\log(\lambda+1)} + \frac{\log(\lambda-1) - a_1 \log 2}{\log(2\lambda-1)} \leqq 1 - \frac{2}{\lambda-1}.$$

Posant $t = \lambda - 1$, il suffit a fortiori

$$\frac{a_1 \log 2}{\log t} + \frac{\log t - a_1 \log 2}{\log t + \log 2} = \frac{a_1 (\log 2)^2 + (\log t)^2}{\log t (\log t + \log 2)} \leqq 1 - \frac{2}{t},$$

$$\frac{2}{t} \leqq \frac{\log t \log 2 - a_1 (\log 2)^2}{\log t \log (2t)};$$

Or $a_1 \log 2 < \log t$; il suffit donc

$$t \frac{\log 2}{2} \geqq \frac{\log t \log 2t}{\log t - a_1 \log 2}. \tag{29}$$

α) Soit d'abord $2^{a_1+1} = \lambda + 1$, $2^{a_1} = \frac{\lambda+1}{2}$; alors tous les facteurs $r_1 \dots r_p$ sont de la forme 2^j, d'après (27); d'après (28)

$$f_m \geqq \frac{a_1+1}{j_m} = \frac{\log(\lambda+1)}{j_m \log 2}.$$

Il suffit, d'après (20), pour que (21) soit impossible,

$$\Sigma \frac{1}{f_m} \leqq \Sigma \frac{j_m}{a_1+1} = \frac{a_1}{a_1+1} = 1 - \frac{1}{a_1+1} \leqq \frac{\lambda-3}{\lambda-1} = 1 - \frac{2}{\lambda-1},$$

$$\frac{2}{\lambda-1} \leqq \frac{1}{a_1+1} = \frac{\log 2}{\log(\lambda+1)}, \quad (\lambda+1)^2 \leqq 2^{\lambda-1}; \tag{30}$$

ceci a lieu pour $\lambda \geqq 31$, comme on le voit directement et comme on va le montrer tout-à-l'heure.

β) Soit encore $2^{a_1+2} = \lambda + 1$, $2^{a_1} = \frac{\lambda+1}{4}$; $r_1 r_2 \dots r_p = 2^{a_1} r_p < \lambda$; dans le cas le plus défavorable, on a $r_p = 3$, d'après (27); d'après (28)

$$f_m \geqq \frac{a_1+2}{j_m} = \frac{\log(\lambda+1)}{j_m \log 2},$$

pour $m < p$,

$$f_p \geqq \frac{\log(2\lambda-1)}{\log r_p};$$

il suffit

$$\Sigma \frac{1}{fm} \leqq \Sigma \frac{jm}{a_1+2} + \frac{\log 3}{\log(2\lambda-1)} = \frac{a_1}{a_1+2} + \frac{\log 3}{\log(2\lambda-1)} \leqq 1 - \frac{2}{\lambda-1},$$

$$\frac{2}{\lambda-1} \leqq \frac{2}{a_1+2} - \frac{\log 3}{\log(2\lambda-1)} = \frac{2\log 2}{\log(\lambda+1)} - \frac{\log 3}{\log(2\lambda-1)}. \qquad (31)$$

On remarque d'abord que

$$\frac{\log 2}{\log(\lambda+1)} - \frac{\log 3}{\log(2\lambda-1)}$$

est < 0 si

$$\log(2\lambda)\log 2 - \log 3 \log\lambda = (\log 2)^2 - \log\frac{3}{2}\log\lambda < 0,$$

ce qui a lieu pour $\lambda \geqq 31$. Si donc on établit que (31) a lieu pour $\lambda \geqq 31$ on établit en même temps que (30) a lieu.

(31) équivaut à

$$\frac{\lambda-1}{2} \geqq \frac{\log(\lambda+1)\log(2\lambda-1)}{2\log 2\log(2\lambda-1) - \log 3\log(\lambda+1)}.$$

Le dénominateur du 2ème membre a pour dérivée

$$\frac{4\log 2}{2\lambda-1} - \frac{\log 3}{\lambda+1} = \frac{(2\lambda+2)\log 4 - (2\lambda-1)\log 3}{(\lambda+1)(2\lambda-1)} > 0;$$

ce dénominateur croît avec λ et a sa plus petite valeur M, quand $\lambda \geqq 31$, pour $\lambda = 31$:

$$M = 2\log 2\log 61 - \log 3\log 32 = 2\log 2\log\frac{61}{9\sqrt{3}}.$$

Il suffit donc, pour que (21) soit impossible,

$$\frac{\lambda-1}{2} \geqq \frac{\log(\lambda+1)\log(2\lambda-1)}{M},$$

ou a fortiori

$$X(\lambda) = \left[\frac{M}{2}(\lambda-1)\right]^{\frac{1}{2}} - \log(2\lambda-1) \geqq 0.$$

Or

$$X'(\lambda) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{M}{2}}\frac{1}{\sqrt{\lambda-1}} - \frac{2}{2\lambda-1}$$

est positif dès que

$$\frac{2\lambda - 1}{\sqrt{\lambda - 1}} \geqq 4\sqrt{\frac{2}{M}}$$

ou, a fortiori, dès que

$$\sqrt{\lambda - 1} \geqq 2\sqrt{\frac{2}{M}}, \quad \lambda - 1 \geqq \frac{8}{M},$$

ce qui a lieu pour $\lambda \geqq 31$, puisque, les logarithmes étant ici népériens, M est > 1; pour $\lambda \geqq 31$, la plus petite valeur de $X(\lambda)$ est alors

$$X(31) = \sqrt{15\, M} - \log 61\,,$$

qui est $\geqq 0$ si

$$15\, M = 30 \log 2 \log \frac{61}{9\sqrt{3}} \geqq (\log 61)^2,$$

ou (les logarithmes pouvant ici être pris vulgaires) si

$$30\,.\,0,301\,.\,0,53 \geqq (1,79)^2,$$

ce qui a évidemment lieu, et (21) est encore impossible.

γ) Soit enfin $2^{a_1+3} \leqq \lambda + 1 = 2^{a}$,

$$(a_1 + 3) \log 2 \leqq a \log 2 = \log (\lambda + 1),$$

$$a_1 \log 2 \leqq \log (\lambda + 1) - 3 \log 2.$$

Il suffit, d'après (29), pour que (21) soit impossible,

$$\frac{t \log 2}{2} \geqq \frac{\log t \log 2\, t}{\log \frac{t}{\lambda + 1} + 3 \log 2}.$$

Dès que $\lambda \geqq 31$, $\frac{t}{\lambda + 1} \geqq \frac{30}{32} = \frac{15}{16}$,

$$3 \log 2 + \log \frac{t}{\lambda + 1} \geqq \log \left(2^3 . \frac{15}{16}\right) = \log \frac{15}{2} = \log 7,5 = M_1\,;$$

il suffit alors

$$M_1\, t \frac{\log 2}{2} - \log t \log (2\, t) \geqq 0,$$

ou, a fortiori

$$X_1(t) = \left(\frac{M_1 \log 2}{2}\, t\right)^{\frac{1}{2}} - \log (2\, t) \geqq 0.$$

Or,

$$X'_1(t) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{M_1 \log 2}{2}}\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{t}$$

est positif dès que

$$\sqrt{t} \geq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{M_1 \log 2}}, \quad t \geq \frac{8}{M_1 \log 2},$$

ce qui a lieu pour $\lambda \geq 31, t \geq 30$, puisque, les logarithmes étant ici népériens, $M_1 > 1$; pour $\lambda \geq 31$, la plus petite valeur de $X_1(t)$ est

$$X_1(30) = \sqrt{15\, M_1 \log 2} - \log 60,$$

qui est positive si

$$15\, M_1 \log 2 = 15 \log 2 \log 7,5 \geq (\log 60)^2,$$

ou (les logarithmes pouvant ici être pris vulgaires) si

$$15 \,.\, 0,3 \,.\, 0,875 \geq (1,78)^2,$$

ce qui a lieu, et (21) est encore impossible.

L'impossibilité de (21) est ainsi établie pour $\lambda + 1 = 2^a$. c. q. f. d.

Incidemment, je crois bon de formuler le lemme suivant qui a été établi par moi ci-dessus indépendamment de la considération des nombres complexes, et, évidemment, quel que soit le nombre λ impair ≥ 5 (même exceptionnel):

Lemme V. *Soient $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$ des nombres premiers distincts, différents de λ (λ nombre premier quelconque > 3), appartenant (mod λ) à des exposants $f_1, f_2, \ldots, f_m$, et ayant $r_1, r_2, \ldots, r_p$, pour plus petits résidus en valeur absolue (mod λ): si $r_1, r_2, \ldots, r_p$ étant > 1, le produit $r_1 r_2 \ldots r_p$ est $< \lambda$, on a*

$$\Sigma \frac{1}{f_m} \leqq \frac{\lambda - 3}{\lambda - 1}.$$

Remarque I. Il y a d'autres nombres $v = \rho_1^{b_1} \rho_1^{b_2} \ldots \rho_p^{b_p}$ que ceux indiqués dans l'énoncé du théorème IV et auxquels un théorème analogue est applicable d'après le théorème III. Déjà j'ai signalé le cas où $v = \rho_1^{b_1}$, $\rho_1 = k_1 \lambda - 1$, car alors $\frac{1}{f_1} = \frac{1}{2} \leqq \frac{\lambda - 3}{\lambda - 1}$. Plus généralement on pourra prendre

$$v = \rho_1^{b_1} \rho_2^{b_2} \ldots \rho_p^{b_p}, \quad \rho_1 = k_1 \lambda - 1,$$

$$\sum_2^p \frac{1}{f_m} \leqq \frac{\lambda - 3}{\lambda - 1} - \frac{1}{2} = \frac{\lambda - 5}{2\lambda - 2}.$$

Je ne veux pas refaire pour ce cas une discussion analogue à la précédente. On a encore (comp. (25))

$$\sum_2^p \frac{1}{f_m} = \sum_2^p \frac{\log r_m}{\log (s_m \lambda \pm 1)}.$$

Si $\lambda + 1 \neq 2^a$, $s_m \geq 2$,

$$\sum_2^p \frac{1}{f_m} \leq \frac{\sum_2^p \log r_m}{\log (2\lambda - 1)} \leq \frac{\lambda - 5}{2\lambda - 2},$$

dès que

$$r_2 \ldots r_p \leq (2\lambda - 1)^{\frac{\lambda - 5}{2\lambda - 2}} \; (*)$$

ce qui a lieu quel que soit λ (exceptionnel ou non) par exemple dès que

$$r_2 \ldots r_p \leq (2\lambda - 1)^{\frac{1}{3}}$$

et

$$\frac{1}{3} \leq \frac{\lambda - 5}{2\lambda - 2}, \quad 2\lambda - 2 \leq 3\lambda - 15, \quad \lambda \geq 13.$$

Quand λ est $\neq 2^a - 1$ et non exceptionnel, on en déduit d'après le théorème III un théorème analogue au théorème IV et que je me dispense d'énoncer.

Remarque II. Je crois utile d'indiquer tout ce que peut donner le théorème III pour $\lambda = 5$ au 7.

1.° Soit $\lambda = 5$ et $R_1 = 2$, $R_2 = 3$, $R_3 = 4$, $f_1 = 4$, $f_2 = 4$, $f_3 = 2$. Si ρ_q, $\rho'_q, \ldots$ sont des nombres premiers distincts ayant pour plus petit résidu *positif* R_q (mod λ), il y a impossibilité de (19) quand A est d'une des formes

$$\rho_1^{b_1} \rho'^{b'_1}_1, \quad \rho_2^{b_2} \rho'^{b'_2}_2, \quad \rho_1^{b_1} \rho_2^{b_2}, \quad \rho_1^{b_1}, \quad \rho_2^{b_2}, \quad \rho_3^{b_3}.$$

2.° Soit $\lambda = 7$, et $R_1 = 2$, $R_2 = 3$, $R_3 = 4$, $R_4 = 5$, $R_5 = 6$, $f_1 = 3$, $f_2 = 6$, $f_3 = 3$, $f_4 = 6$, $f_5 = 2$. Il y a impossibilité de (19) quand A est

(*) Asymptotiquement (λ très-grand) la limite supérieure est $(2\lambda - 1)^{\frac{1}{2}} (1 - \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, $\lim \varepsilon = 0$; avec les hypothèses du théorème IV (formule (26 bis)), la limite supérieure analogue est $(2\lambda - 1)(1 - \varepsilon)$.

d'une des formes

$$\rho_q^{b_q}\,(q=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5),\quad \rho_q^{b_q}\,\rho'^{\,b'_q}_{q}\,(q=1,\ 2,\ 3,\ 4),\quad \rho_q^{b_q}\,\rho'^{\,b'_q}_{q}\,\rho''^{\,b''_q}_{q}$$

$$(q=2 \text{ ou } 4),\quad \rho_q^{b_q}\,\rho'^{\,b'_q}_{q}\,\rho''^{\,b''_q}_{q}\,\rho'''^{\,b'''_q}_{q}\,(q=2 \text{ ou } 4),\quad \rho_1^{b_1}\rho_2^{b_2},$$

$$\rho_1^{l_1}\rho_2^{b_2}\rho'^{\,b'_2}_{2},\quad \rho_1^{b_1}\rho_3^{b_3},\quad \rho_1^{l_1}\rho_4^{b_4},\quad \rho_1^{b_1}\rho_4^{b_4}\rho'^{\,b'_4}_{4},\quad \rho_1^{b_1}\rho_2^{b_2}\rho_4^{b_4},$$

$$\rho_2^{b_2}\rho_3^{b_3},\quad \rho_2^{b_2}\rho'^{\,b'_2}_{2}\rho_3^{b_3},\quad \rho_3^{b_3}\rho_4^{b_4},\quad \rho_3^{b_3}\rho_4^{b_4}\rho'^{\,b'_4}_{4},\quad \rho_2^{b_2}\rho_3^{b_3}\rho_4^{b_4},\quad \rho_2^{b_2}\rho_4^{b_4},$$

$$\rho_2^{b_2}\rho_4^{l_4}\rho'^{\,b'_4}_{4},\quad \rho_2^{b_2}\rho_4^{b_4}\rho'^{\,b'_4}_{4}\rho''^{\,b''_4}_{4},\quad \rho_2^{b_2}\rho_5^{b_5},\quad \rho_2^{b_2}\rho'^{\,b'_2}_{2}\rho_4^{l_4},\quad \rho_2^{b_2}\rho'^{\,b'_2}_{2}\rho_4^{b_4}\rho'^{\,b'_4}_{4},$$

$$\rho_2^{b_2}\rho'^{\,b'_2}_{2}\rho''^{\,b''_2}_{2}\rho_4^{b_4},\quad \rho_4^{l_4}\rho_5^{b_5}.$$

On pourrait continuer de la sorte pour toutes les valeurs de λ non exceptionnelles connues, en particulier pour toutes les valeurs des nombres premiers < 100 autres que 37, 59 et 67, et faire la nomenclature des formes de A correspondantes, en nombre très-considérable, auxquelles le théorème III est applicable, chaque forme contenant d'ailleurs une infinité de nombres, d'une part parce que la progression aritmétique $R_m + \lambda x$, $R_m < \lambda$, contient une infinité de nombres premiers, d'autre part parce que les valeurs des exposants b_m, $b'_m, \ldots$ sont arbitraires.

Remarque III. Je reprends (20) en supposant que $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$ (énoncé du théorème III) soient des racines primitives (mod λ):

$$f_m = \lambda - 1, \quad \Sigma \frac{1}{f_m} = \frac{p}{\lambda - 1},$$

et (19) sera impossible tant que $p \leq \lambda - 3$.

Plus généralement, si ρ_m ($m = 1, 2, \ldots, p$) appartient (mod λ) à un exposant $k_m d$ multiple de d, d étant un diviseur de $\lambda - 1$, $f_m = k_m d$,

$$\Sigma \frac{1}{f_m} = \frac{1}{d} \Sigma \frac{1}{k_m} \leq \frac{p}{d} \leq \frac{\lambda - 3}{\lambda - 1},$$

dès que

$$p \leq d \frac{\lambda - 3}{\lambda - 1} = d - \frac{2d}{\lambda - 1}.$$

Quand $d = \lambda - 1$, $p \leq \lambda - 3$, résultat déjà trouvé; quand $d \leq \frac{\lambda - 1}{2}$, $2d \leq \lambda - 1$, il suffit $p \leq d - 1$. On obtient ainsi cette propriété:

Théorème V. *Tout étant posé comme au théorème* III, *l'équation* (19) *est impossible en nombres entiers réels:*

1.° *quand* $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$ *sont des racines primitives* (*mod* λ), *pourvu que* $p \leqq \lambda - 3$;

2.° *quand* $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$ *appartiennent tous* (*mod* λ) *à des exposants multiples de* d, d *étant un diviseur quelconque* > 1 *et* $< \lambda - 1$ de $\lambda - 1$, *pourvu que* $p \leqq d - 1$.

Corollaire. *L'équation indéterminée*

$$x^\mu + y^\mu = \mu\, z^\mu$$

est impossible en nombres entiers réels $\neq 0$: 1.° *quand* μ $P_2^{b_2} P_3^{b}$; 2.° *quand* $\mu = P_1^{b_1} P_2^{b_2} P_3^{b_3}$, P_1, P_2, P_3 *étant dans les deux cas des nombres premiers distincts dont le plus grand* $\geqq 5$ *n'est pas exceptionnel;* 3.° *quand le plus grand diviseur premier de* μ *est* > 3 *et* $\leqq 17$.

Si $P_3 > P_2 > P_1$ par exemple, $P_3 \geqq 5$ (ce qui a toujours lieu dans le second cas), on prend $P_3 = \lambda$, et l'on applique le théorème ci-dessus pour le 1er cas; pour le second cas, on remarque que $\xi^2 - 1 \equiv 0 \pmod{\lambda}$ a pour racines $\pm 1 \pmod{\lambda}$ et que P_1, P_2 appartiennent à des exposants $\geqq 3$; alors $\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \leqq \frac{2}{3} \leqq \frac{\lambda - 3}{\lambda - 1}$.

La même méthode réussit encore fréquemment quand μ contient plus de 3 facteurs premiers distincts, il en est ainsi par exemple quand μ est un nombre quelconque dont le plus grand diviseur premier est 7, 11, 13 ou 17, car alors $\Sigma \frac{1}{f_m}$ ne peut dépasser $\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{6}$ ou $\frac{5}{8} \leqq \frac{\lambda - 3}{\lambda - 1} = \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$ ou $\frac{5}{8}$. Rien ne sera plus facile que d'étendre ces résultats en tout ou en partie aux cas où μ a son plus grand diviseur premier $= 19, 23, \ldots$ à l'aide des tables d'indices de Jacobi (*Canon arithmeticus*) et de Wertheim (*Acta Math.*, t. 17, 20, 22) (*).

X.

On peut se demander d'après les corollaires des théorèmes IV et V, si l'équation

$$x^\mu + y^\mu = \mu\, z^\mu \tag{32}$$

(*) On pourra tenir compte, pour simplifier, du corollaire du théorème VI, du corollaire II du théorème VII, enfin du théorème VIII établis plus loin.

n'est pas impossible en nombres entiers réels $\neq 0$ dès que (*) $\mu > 2$. Je ne prétends pas résoudre ici complètement cette question : la démonstration entière de cette propriété, à supposer qu'elle soit exacte, est peut-être aussi difficile, si non plus compliquée à certains égards que celle du dernier théorème de Fermat, à cause de la présence du facteur μ. Mais l'on peut se proposer de vérifier l'impossibilité de (32) en nombres entiers réels $\neq 0$ pour la plupart des valeurs de $\mu \leq 100$, par exemple, comme Kummer a vérifié l'impossibilité de $x^\mu + y^\mu = z^\mu$ pour $2 < \mu \leq 100$.

Je laisserai de côté les valeurs de μ divisibles par un nombre premier exceptionnel, à savoir $\mu = 37$, 59, 67 ou 74. L'application des corollaires des théorèmes IV et V montre que (32) est impossible quand $\mu < 2$ et ≤ 100 n'est pas un de ces nombres ou de la forme $2^f 3^g$.

D'après le théorème III et son corollaire,

$$x^3 + y^3 = 3^{3k+1} z^3 \text{ et } x^{3^n} + y^{3^n} = 3^n z^{3^n}$$

sont impossibles en nombres entiers réels différents de 0 quels que soient $k \geq 0$ et $n > 0$. On n'a donc plus à examiner que les cas où $f \geq 1$.

Quand $g \geq 2$, f premier à 3, le théorème III et son corollaire montrent que

$$x^{3^n} + y^{3^n} = 2^f . 3^n z^{3^n}$$

($n \geq 2$) est impossible en nombres entiers réels $\neq 0$. On peut donc supposer f divisible par 3 et > 0, ou $g < 2$.

Avant d'élucider ces cas, je vais établir encore en nombres entiers réels, et sans intervention des nombres complexes, les propriétés suivantes:

Théorème VI. *L'équation indéterminée*

$$x^{2^n} + y^{2^n} = 2^m B z^{2^n} \quad (n \geq 2,\ m = k . 2^n + l,\ 1 < l < 2^n) \tag{33}$$

est impossible en nombres entiers réels $\neq 0$ quel que soit l'entier impair B.

Dans la démonstration on peut supposer z impair, car si $z = 2^a z_1$ (z_1 impair),

$$2^m B z^{2^n} = 2^{m+a2^n} B z_1^{2^n} = 2^{m_1} B z_1^{2^n},$$

(*) J'ai déjà établi ce théorème quand μ est un nombre premier non exceptionnel > 3 (*Acta Math.*, 1900, p. 256, théorème V).

L'équation $x^2 + y^2 = 2z^2$ possède les solutions $(x, y, z) = (1, 1, 1)$, $(1, 7, 5)$, $(7, 17, 13)$, ...

où $m_1 = k_1 . 2^n + l$.

Si x est pair, y l'est aussi, et inversement: soient

$$x = 2^\varepsilon x_1, \quad y = 2^{\varepsilon_1} y_1, \quad x_1,\ y_1 \ \text{impairs}, \quad \varepsilon \geqq \varepsilon_1 > 0,$$

par exemple. Deux des termes de (33) sont divisibles par la même puissance de 2; donc

$$\varepsilon\, 2^n = \varepsilon_1\, 2^n \leqq m, \quad \text{ou} \quad \varepsilon_1\, 2^n = m \leqq \varepsilon\, 2^n.$$

Le second cas est impossible; le premier, après suppression du facteur $2^{\varepsilon 2^n}$, donne une équation analogue à (33), avec x_1, y_1 impairs.

Finalement on peut supposer x_1, y_1, z_1 impairs. Alors, $m \geqq 2$ donne

$$x_1^{2^n} + y_1^{2^n} = 0 \pmod 4,$$

ce qui est absurde, puisque le 1.er membre est $\equiv 2 \pmod 4$ (*). c. q. f. d.

Corollaire. *L'équation*

$$x^{2^n} + y^{2^n} = 2^n B\, z^{2^n}$$

est impossible en nombres entiers réels $\neq 0$ *quel que soit* $n \geqq 2$ *et B impair.*

Il en est de même pour l'équation

$$x^{4\mu_1} + y^{4\mu_1} = 4\, \mu_1\, z^{4\mu_1} \quad (\mu_1 \ \textit{quelconque}).$$

(*) Le même raisonnement établit l'impossibilité de

$$x_1^{2^n} + x_2^{2^n} + \ldots + x_j^{2^n} = 2^m B\, z^{2^n},$$
$$n \geqq 2, \quad m = k\, 2^n + l, \quad j < 2^l, \quad 1 < l < 2^n, \quad B \text{ impair}.$$

En effet, on peut toujours supposer z impair; si $x_1, \ldots, x_j$ sont tous pairs, le même raisonnement conduit à une équation analogue où un, par suite deux des nombres $x_1, \ldots, x_j$ sont impairs; alors le 1er membre est $\equiv i \leqq j \pmod{2^l}$ et le second $\equiv 0$; d'où l'on conclut l'impossibilité.

Ainsi, quand $n = 2$, $m = 4k + 2$ ou $4k + 3$, $j = 2$ ou 3, on voit que les équations

$$x^4 + y^4 = 2^m B\, z^4,$$
$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 2^m B\, z^4,$$

sont impossibles en nombres entiers réels $\neq 0$.

Application à titre d'exemple: il y a une infinité de nombres qui ne sont pas sommes de moins de $2^7 = 128$ puissances 8.èmes $\neq 0$ (comp. question 2721 de l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, 1904, p. 33).

Pour la 1ère équation $m = n = l < 2^n$; pour la 2ème, on peut mettre $4\mu_1$ sous la forme $2^n B$.

Théorème VII. *L'équation indéterminée*

$$x^{\lambda 2^\varphi} + y^{\lambda 2^\varphi} = \lambda^m B z^{\lambda 2^\varphi} \tag{34}$$

($m > 0$ et $\equiv\!\!\!|\;\; 0 \pmod{\lambda 2^\varphi}$), *où* 2^φ *est la plus haute puissance de* 2 *qui divise* $\lambda - 1$, B *un entier quelconque premier à* λ *est impossible en nombres entiers réels* $\neq 0$, λ *étant un nombre premier absolument quelconque* ≥ 3.

Quand

$$\lambda = 4k_1 + 3, \quad \varphi = 1,$$
$$x^{2\lambda} + y^{2\lambda} = \lambda^m B z^{2\lambda},$$

($m > 0$ *et non divisible par* 2λ) *est impossible quel que soit* B *premier à* λ.

On peut encore supposer dans (34) z premier à λ, puis x et y premiers à λ (mêmes raisonnements que précédemment).

Soient c_0, d_0 les plus petits résidus positifs de x et y (mod λ):

$$c_0^{\lambda 2^\varphi} + d_0^{\lambda 2^\varphi} \equiv 0 \pmod{\lambda},$$
$$1 \equiv c_0^{\lambda(\lambda-1)} \equiv - d_0^{\lambda(\lambda-1)} \equiv -1 \pmod{\lambda},$$

puisque $\frac{\lambda - 1}{2^\varphi}$ est impair, et l'on arrive à un résultat absurde. c. q. f. d.

Corollaire I. *L'équation indéterminée*

$$x^{2^\varphi \lambda \mu_1} + y^{2^\varphi \lambda \mu_1} = 2^\varphi \lambda \mu_1 z^{2^\varphi \lambda \mu_1}$$

est impossible en nombres entiers $\neq 0$ *quel que soit* μ_1. *En particulier pour* $\mu_1 = 1$, $\lambda = 3$, $\varphi = 1$

$$x^6 + y^6 = 6 z^6$$

est impossible.

Car si λ^{m-1} est la plus haute puissance de λ qui divise μ_1, $0 < m < \lambda^m$, et le cas où x ou y serait divisible par λ conduit à une équation de même forme que (34), mais avec m quelconque et x et y premiers à λ, équation à la quelle on peut appliquer le même raisonnement que ci-dessus quel que soit m.

Corollaire II. *L'équation indéterminée*

$$x^{2\omega} + y^{2\omega} = 2\omega z^{2\omega}$$

est impossible en nombres entiers réels $\neq 0$ *quand* ω *possède un facteur premier* λ *de la forme* $4 k_1 + 3$.

Ce dernier corollaire et, au besoin, celui du théorème VI suffisent à montrer à eux seuls l'impossibilité de

$$x^{\mu} + y^{\mu} = \mu z^{\mu}$$

quand $\mu = 2^f 3^g$ ($\mu > 2$) avec $f \geqq 1$, $g \geqq 1$.

On a vu qu'il y a encore impossibilité quand $f = 0$; enfin dans le cas où $g = 0$, l'impossibilité résulte du corollaire du théorème VI. On obtient ainsi ces résultats:

Théorème VIII. *L'équation indéterminée*

$$x^{\mu} + y^{\mu} = \mu z^{\mu}$$

est impossible en nombres entiers réels $\neq 0$ *quand* $\mu = 2^f 3^g > 2$.

Théorème IX *L'équation indéterminée*

$$x^{\mu} + y^{\mu} = \mu z^{\mu}$$

est impossible en nombres entiers réels $\neq 0$ *quand* μ *est un des nombres* > 2 *et* $\leqq 100$ *non divisibles par un des nombres exceptionnels de* Kummer 37, 59 *ou* 67, *c. à d. quand* μ *est* > 2, $\neq 37, 59, 67$ *ou* 74, *et* $\leqq 100$.

Il est intéressant de remarquer que, d'après ce qui précède, les seuls cas où l'impossibilité en nombres entiers réels $\neq 0$ de $x^a + y^a = a z^a$ pour $a > 2$ n'est pas complètement prouvée sont ceux où a est impair et où $a = 2(2b + 1)$, $2b + 1$ n'ayant d'autres diviseurs premiers que des nombres $4k + 1$ (corollaire du théorème VI et corollaire II du théorème VII). Encore dans ces deux derniers cas connaissons-nous des formes très-variées de a pour lesquelles il y a impossibilité (corollaires des théorèmes IV, V, théorèmes VIII et IX).

1.ère Note annexe.

1.° D'après le corollaire du théorème VI,

$$x^{4\mu_1} + y^{4\mu_1} = 4 \mu_1 (2\omega + 1) z^{4\mu_1}, \quad (\mu_1, \ \omega \text{ quelconques})$$

est impossible en nombres entiers réels $\neq 0$, car on peut mettre $4 \mu_1 (2\omega + 1)$ sous la forme $2^n B$.

2.° D'après le théorème VI,

$$x^{2^n} + y^{2^n} = 2^{n+1} B z^{2^n}, \quad (n \geqq 2, B \text{ impair quelconque})$$

est impossible, car

$$m = k \cdot 2^n + l = n + 1$$

donne, puisque $n + 1 < 2^n$, $1 < l = n + 1 < 2^n$. Donc

$$x^{4\mu_1} + y^{4\mu_1} = 8 \mu_1 (2 \omega + 1) z^{4\mu_1} \quad (\mu_1, \omega \text{ quelconques}),$$

est impossible, puisqu'on peut mettre $8 \mu_1 (2 \omega + 1)$ sous la forme $2^{n+1} B$.

3.° Soient

$$x^{2\omega} + y^{2\omega} = 2 \omega \beta z^{2\omega},$$

ω étant divisible par un facteur premier $\lambda = 4 h + 3$, et λ^m la plus haute puissance de λ qui divise 2ω; l'équation s'écrit

$$x_1^{2\lambda^m} + y_1^{2\lambda^m} = 2 \lambda^{m+p} \beta_1 z^{2\lambda^m},$$

où β_1 est premier à λ.

Si x_1 par exemple est divisible par λ, y_1 l'est aussi; si l'on n'a pas $m + p \equiv 0 \pmod{\lambda^m}$, ce que je suppose, la suppression de la plus haute puissance de λ qui est en facteur commun conduit à une équation de même forme avec x_1, y_1 premiers à λ.

Soient donc x_1, y_1 premiers à λ: si c_0, d_0 sont les plus petits résidus positifs de x_1, $y_1 \pmod{\lambda}$,

$$c_0^{2\lambda^m} + d_0^{2\lambda^m} \equiv 0 \pmod{\lambda},$$

$$c_0^{(\lambda-1)\lambda^m} \equiv - d_0^{(\lambda-1)\lambda^m} \pmod{\lambda},$$

ce qui est absurde. Or on n'a

$$m + p \equiv 0 \pmod{\lambda^m} \quad \text{que si} \quad p \geqq \lambda^m - m \geqq \lambda - 1 \geqq 2;$$

d'où $p \geqq 2$ si $\lambda = 3$, $p \geqq 6$, si $\lambda \geqq 7$, etc. Par conséquent

$$x^{2\omega} + y^{2\omega} = 2 \omega \beta z^{2\omega},$$

ω *étant divisible par un facteur premier* $\lambda = 4 k + 3$, *est impossible en nombres entiers réels* $\neq 0$ *quand* β *n'est pas divisible pour* $\lambda^{\lambda-1}$.

On en conclut ainsi l'impossibilité en nombres entiers réels $\neq 0$ *de*

$$x^a + y^a = b a z^a:$$

1.° *quand* a *est divisible par* 4 *sans que* b *le soit;*

2.° *quand* a *est de la forme* $4 k_1 + 2$ *et divisible par un facteur premier* $\lambda = 4h + 3$, b *n'étant pas divisible par* $\lambda^{\lambda-1}$.

En particulier, quand b *est premier à* a, *cette équation est impossible si* a *est divisible par* 4, *ou si* a *est pair et divisible par un nombre premier* $4k + 3$.

En se servant de la théorie des nombres complexes et des nombres idéaux de Kummer on peut obtenir d'autres cas d'impossibilité de la même équation; ainsi (Théorèmes IV et V), si $a = \lambda^i$ (λ nombre premier $\geqq 5$ non exceptionnel au sens de Kummer), cette équation est impossible en nombres entiers réels $\neq 0$ quand b est $< \lambda$; de même (Théorème III) si $a = 3^i$, $b = 2$ ou 4, $i \geqq 2$; au contraire $x^3 + y^3 = 6 z^3$ a des solutions (Pépin, E. Lucas).

Ceci détermine en particulier des cas étendus d'impossibilité de

$$x^a + y^a = 2 a z^a$$

pour $a > 3$ (*), *et l'on peut croire que, pour* $a > 3$, *l'impossibilité de cette équation a lieu quel que soit* a, de même que, vraisemblablement, pour $a > 2$, celle de $x^a + y^a = z^a$ (dernier théorème de Fermat) et $x^a + y^a = a z^a$.

2.ème Note annexe.

Je me reporte à la démonstration du théorème II où j'avais supposé $p \leqq \lambda - 3$, et je prends $i \geqq 2$.

Quand $p = \lambda - 2$, on aura encore de la même manière deux équations analogues à (7), s'il n'y a pas $\lambda - 2$ des quantités $u^{\lambda^{i-1}} + \alpha^r v^{\lambda^{i-1}}$ de la forme $\gamma e_r(\alpha) A' t_r^{\lambda^i}(\alpha)$, A' étant un facteur de A différent de 1, et l'on pourra raisonner comme au théorème II; sinon (8) sera remplacée par

$$u^{\lambda^{i-1}} + v^{\lambda^{i-1}} = \gamma^{(\mu-1)\lambda - \beta + 1} E'(\alpha) w'^{\lambda^i}. \qquad (8 \text{ bis})$$

Soit $i - 1 = i_1 \geqq 1$, puisque $i \geqq 2$; on peut appliquer à cette équation (8 bis) le théorème II; posant $\beta - 1 = \beta'$, on voit encore que cette équation

(*) De même pour $x^a + y^a = 3 a z^a$, $(a > 3)$; $x^3 + y^3 = 9 z^3$ au contraire a des solutions (p. 13).

est impossible pour $\beta = 0, 1, 2, \ldots, i-1$, $\beta = 1, 2, \ldots, i$. On ne peut plus rien dire pour $\beta = 0$, à moins que i ne soit $\geqq \lambda$. Donc:

L'énoncé du théorème II subsiste quand $i \geqq 2$, $p = \lambda - 2$, $\beta = 1, 2, \ldots,$ *ou* i*; mais on ne peut affirmer l'impossibilité de* (5) *quel que soit* $\mu \lambda - \beta > 0$ *que si* $i \geqq \lambda$.

On en conclut que le théorème III subsiste alors quand A satisfait à la condition

$$\Sigma \frac{1}{f_m} \leqq \frac{\lambda - 2}{\lambda - 1}, \tag{20 bis}$$

et que $\delta = 1, 2, \ldots,$ ou i, avec $i \geqq 2$.

L'équation indéterminée $x^\mu + y^\mu = \mu z^\mu$, avec $\mu = \lambda^n v$, (v premier à λ). comme dans l'énoncé du corollaire du théorème IV, est de la forme

$$x^{\lambda^n v} + y^{\lambda^n v} = v \lambda^n z^{\lambda^n v};$$

si n est $\geqq 2$, elle est alors impossible quand les facteurs premiers réels de v satisfont à la condition (20 bis); car cette équation est impossible pour $n \geqq \lambda$, et pour $n < \lambda$, on applique la modification du théorème III indiquée ci-dessus.

Bourg-la-Reine (Seine) Mai 1905.

Studii sulle equazioni differenziali lineari. Loro integrali normali.

(*Di* Uilsse Dini, *a Pisa.*)

La presente Memoria, che già annunziai in principio dell'altra pubblicata alla pag. 285 del volume precedente di questi *Annali*, può considerarsi, almeno in parte, come una continuazione di quella, e di altre due, collo stesso titolo, pubblicate nei Vol. II e III (Serie III) di questi *Annali.*

In questa io considererò il caso in cui nella equazione lineare data

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = X \tag{1}$$

alcuni o tutti i coefficienti $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ e X oltre alla solita variabile x, che, salvo avvertenza in contrario, supporremo reale, contengono una variabile z che può prendere anche valori complessi, e ne studieremo gli integrali valendoci ancora delle formole generali che trovansi ai §§ 1 e 2 della stessa Memoria, ma che allora furono richiamate dalle altre due Memorie ricordate sopra.

1. Premetterò perciò alcune osservazioni generali, del resto molto ovvie, e certo già applicate, se non già fatte esplicitamente, da altri, sopra le funzioni $f(x, z)$ che considerate pei valori di z in un campo C, e pei valori reali di x in un intervallo (a, b), sono finite e continue come funzioni di x e z; e come funzioni di z sono anche olomorfe nello stesso campo C.

E incomincierò col dimostrare che « tanto gli integrali semplici o multipli della nostra funzione $\int_\alpha^x f(x, z)\, dx$, $\int_\beta^x dx \int_\alpha^x f(x, z)\, dx, \ldots$ pei valori « di $x, \alpha, \beta, \ldots$ nell'intervallo (a, b), quanto le derivate rispetto ad x della « funzione stessa pei valori di x in quelle porzioni dell'intervallo stesso nelle « quali le derivate che si vogliono considerare esistono, e sono finite e continue

« considerate come funzioni di x e z insieme, sono sempre funzioni olomorfe « di z nello stesso campo C. »

Indichiamo infatti con z' un valore qualsiasi di z preso *nell'interno* di C, e immaginiamo un campo C_1 tutto *interno* a C (*) e di contorno σ_1, che abbia nel suo *interno* il punto z'; per ogni valore speciale di x fra a e b (gli estr. incl.) avremo la formola seguente

$$f(x, z') = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1} \frac{f(x, z_1)}{z_1 - z'}\, d z_1,$$

quando con z_1 s'intendano indicati i valori di z sul contorno σ_1; e questa, quando s'indichino, per semplicità di scrittura, con $f_x(x, z)$, $f'_x(x, z)$,... $f_x^{(p)}(x, z)$,... le successive derivate di $f(x, z)$ rispetto ad x, per le ipotesi fatte su $f(x, z)$, oltre a dar luogo evidentemente alle altre

$$\int_\alpha^x f(x, z')\, d x = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1} \frac{\int_\alpha^x f(x, z_1)\, d x}{z_1 - z'}\, d z_1,$$

$$\int_\beta^x d x \int_\alpha^x f(x, z')\, d z' = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1} \frac{\int_\beta^x d x \int_\alpha^x f(x, z_1)\, d x}{z_1 - z'}\, d z_1, \ldots$$

per tutti i valori di x, α, β,... fra a a b (gli estr. incl.), dà luogo altresì alle seguenti

$$\frac{\partial f(x, z')}{\partial x} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1} \frac{f'_x(x, z_1)}{z_1 - z'}\, d z_1, \quad \frac{\partial^2 f(x, z')}{\partial x^2} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1} \frac{f''_x(x, z_1)}{z_1 - z'}\, d z_1, \ldots$$

quando x è compreso in quelle porzioni dell'intervallo (a, b) nelle quali si suppone che esistano e siano finite e continue, come funzioni di x e z insieme, quelle derivate di $f(x, z)$ rispetto ad x che si considerano; e queste for-

(*) Un campo C_1 di contorno σ_1 si dice che è *tutto interno* a un campo C di contorno σ, quando C_1 è tutto contenuto in C, e σ_1 è tutto *interno* a C, per modo cioè che le distanze dei punti di σ_1 da quelli di σ non scendano mai al disotto di una lunghezza data, ma comunque piccola ε. E un punto m si dice *interno* a un campo C quando col centro in m si può descrivere un cerchio di raggio sia pur piccolo, ma finito, ε che sia tutto contenuto in C.

mole dimostrano appunto che sotto le condizioni indicate gli integrali e le derivate rispetto a x della nostra funzione $f(x, z)$ per gli indicati valori di x sono funzioni olomorfe di z per qualsiasi punto z entro C.

Oltre a questo poi si può aggiungere che se una funzione $f(x, z)$ di x e z è finita e continua rispetto ad x in tutto un intervallo dato, e per ogni punto x di questo intervallo, salvo tutt'al più un punto α, è anche funzione olomorfa di z finchè z è in un campo C, mentre col tendere di x ad α tende *uniformemente*, qualunque sia z nel solito campo interno C_1, verso una certa funzione $\varphi(z)$, allora « anche questa funzione $\varphi(z)$ sarà olomorfa in C ».

Avendosi infatti, per x diverso da α,

$$f(x, z') = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1} \frac{f(x, z_1)}{z_1 - z'}\, d z_1\,, \tag{2}$$

e al tendere di x ad α le $f(x, z')$ e $f(x, z_1)$ tendendo respettivamente in modo uniforme verso $\varphi(z')$ e verso $\varphi(z_1)$, ne risulterà che

$$\varphi(z') = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1} \frac{\varphi(z_1)}{z_1 - z'}\, d z_1\,;$$

e questo mostra appunto che $\varphi(z)$ sarà una funzione olomorfa di z, e la formola precedente (2) varrà anche per $x = \alpha$ quando per valore di $f(x, z)$ per $x = \alpha$ si prenda $\varphi(z)$.

Al modo stesso si proverà che sono funzioni olomorfe di z anche per $x = \alpha$ gli integrali relativi ad x di $f(x, z)$, e così pure quelle derivate rispetto ad x di $f(x, z)$ che esistono e sono finite e continue nel punto α.

2. Ora se γ è un valore qualunque di z *interno* a C, la nostra funzione $f(x, z)$ sarà sviluppabile in serie di Cauchy della forma

$$A_0 + A_1(z-\gamma) + A_2(z-\gamma)^2 + \cdots A_n(z-\gamma)^n + \cdots \tag{3}$$

pei valori di z entro un cerchio σ col centro in γ e con un raggio dipendente pure dal valore di γ, e per tutti i valori di x fra a e b; e se prendiamo un cerchio σ_1 interno a σ, col centro in γ, e che abbia nel suo interno il punto z che si considera, per modo quindi che il suo raggio r_1 sia minore di quello di σ e maggiore della distanza di z da γ, i coefficienti A_n saranno funzioni finite e continue di x, perchè per esse avremo

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1} \frac{f(x, z_1)}{(z_1-\gamma)^{n+1}}\, d z_1\,; \tag{4}$$

e quindi, considerando una porzione qualsiasi τ dell'intervallo (a, b) nella quale le derivate di $f(x, z)$ rispetto ad x almeno fino a quella di ordine i sieno finite e continue rispetto a x e z finchè z è nel cerchio σ_1 o su questo cerchio, per modo che si abbia sempre mod $\frac{\partial^p f(x, z)}{\partial x^p} < d$, essendo d un numero finito e $p \leq i$, allora nella indicata porzione τ dell'intervallo (a, b) le A_n ammetteranno anche le derivate rispetto ad x almeno fino a quelle dell'ordine i, e queste saranno date dalla formola

$$\frac{d^p A_n}{d x^p} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1} \frac{f_x^{(p)}(x, z_1)}{(z_1 - \gamma)^{n+1}} d z_1 ;$$

e avremo sempre mod $\frac{d^p A_n}{d x^p} < \frac{d}{r_1^n}$ per $p \leq i$.

Segue di qui evidentemente che la serie formata colle derivate p^e rispetto ad x dei termini della serie precedente pei valori di x nella stessa porzione τ dell'intervallo (a, b) sarà convergente in egual grado, e quindi rappresenterà la derivata p^a rispetto ad x della somma della serie stessa; e questo mentre conferma la osservazione precedente, dell'essere cioè le derivate di $f(x, z)$ funzioni olomorfe di z nel campo C finchè x è nella detta porzione τ, porta anche a dire che « queste derivate potranno anche ottenersi colla derivazione « rispetto ad x termine a termine delle serie di Cauchy corrispondenti alla no- « stra funzione $f(x, z)$ per ogni punto γ entro C dal quale si parta ».

Al modo stesso si vede che gli integrali relativi ad x di $f(x, z)$ finchè le integrazioni si fanno nell'intervallo (a, b) possono ottenersi colla integrazione per serie delle indicate serie di Cauchy.

E se mantenendo $f(x, z)$ le stesse particolarità rispetto ad x e rispetto a z, per una circostanza qualsiasi un suo sviluppo (3) per serie di Cauchy sia stato dimostrato valido ancora pei valori di z entro il cerchio σ, ma soltanto pei valori di x vicini quanto si vuole a un certo punto α, entro la porzione τ dell' intervallo (a, b) che si considera, e non pel punto α, allora è facile vedere che « esso varrà anche per questo punto, e avrà ancora le stesse « proprietà che aveva negli altri punti di τ per ciò che riguarda la derivazione « per serie ».

Infatti, pei nostri dati intorno a $f(x, z)$, uno sviluppo di Cauchy dovrà esistere anche pel punto $x = \alpha$, e lo potremo scrivere sotto la forma

$$A_{0,\alpha} + A_{1,\alpha}(z - \gamma) + A_{2,\alpha}(z - \gamma)^2 + \cdots + A_{n,\alpha}(z - \gamma)^n + \cdots,$$

essendo in generale

$$A_{n,\alpha} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1} \frac{f(\alpha, z_1)}{(z_1 - \gamma)^{n+1}} d z_1 ;$$

e questo mostra subito quanto abbiamo enunciato, perchè, potendo certamente i coefficienti A_n della serie (3) per x diverso da α scriversi ancora sotto la forma (4) qualunque sia il processo col quale lo sviluppo sarà stato trovato, e risultando queste espressioni (4) funzioni continue di x anche per $x = \alpha$ a causa della continuità che supponiamo ancora in $f(x, z)$ per $x = \alpha$ qualunque sia z entro C, è certo che i valori di $A_{n,\alpha}$ vengono ad essere appunto quelli di A_n per $x = \alpha$.

3. I risultati ottenuti valgono se $f(x, z)$, considerata come funzione di x, pei valori di x nell'intervallo dato (a, b) e mentre z è nel campo C, è sempre finita.

Se poi essa diviene infinita in qualche punto fra a e b, o ha qualche altra singolarità, ma tolto questo punto con un piccolo intorno, per tutti gli altri restano soddisfatte tutte le altre condizioni, allora per ciò che riguarda le sue derivate rispetto ad x nulla è da aggiungere, perchè queste già abbiamo detto di considerarle solo pei valori di x che cadono nelle porzioni di (a, b) *nelle quali esse esistono e sono finite e continue insieme a z, senza* escludere che per altri valori di x possano essere infinite o anche non esistere affatto.

Per quello poi che riguarda gli integrali relativi ad x di $f(x, z)$ si può osservare che i risultati ottenuti nel § 1 continuano a sussistere, cioè gli integrali stessi $\int_\alpha^x f(x, z)\, d x$ continuano ad essere funzioni olomorfe di z nel campo C anche se nel punto α la funzione $f(x, z)$ diviene infinita o ha altre singolarità, purchè nell'intorno di questo punto essa sia tale che il suo integrale $\int_\alpha^x f(x, z)\, d x$ conservi un significato qualunque sia il valore di z che si considera entro C, e gli integrali $\int_{\alpha+\varepsilon}^x f(x, z)\, d x$ col tendere di ε a zero convergano in ugual grado verso il loro valore $\int_\alpha^x f(x, z)\, d x$ *qualunque sia z*

entro ogni campo determinato di contorno σ_1 *interno* a C e sul suo contorno σ_1; e questo perchè, avendosi ancora

$$\int_{\alpha+\varepsilon}^{x} f(x, z')\, dx = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1} \frac{\int_{\alpha+\varepsilon}^{x} f(x, z_1)\, dx}{z_1 - z'}\, dz_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1} \frac{\int_{\alpha}^{x} f(x, z_1)\, dx}{z_1 - z'}\, dz_1 -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1} \frac{\int_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon} f(x, z_1)\, dx}{z_1 - z'}\, dz_1,$$

al limite per $\varepsilon = 0$ si ha ancora la formola

$$\int_{\alpha}^{x} f(x, z)\, dx = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1} \frac{\int_{\alpha}^{x} f(x, z_1)\, dx}{z_1 - z'}\, dz_1,$$

la quale mostra appunto che l'integrale $\int_{\alpha}^{x} f(x, z)\, dx$ è una funzione di z sempre finita e olomorfa anche quando $x = \alpha$; e ora da questo si deduce subito che lo stesso accade anche per gli integrali doppii, tripli, ecc.

Considerando poi la serie (3), e osservando che per quanto dicemmo nel paragrafo precedente si avrà certamente

$$\int_{\alpha+\varepsilon}^{x} f(x, z)\, dx = \int_{\alpha+\varepsilon}^{x} A_0\, dx + (z-\gamma)\int_{\alpha+\varepsilon}^{x} A_1\, dx + (z-\gamma)^2\int_{\alpha+\varepsilon}^{x} A_2\, dx + \cdots,$$

si vede che l'integrazione per serie rispetto ad x è applicabile anche da α ad x, quando gli integrali $\int_{\alpha}^{x} A_n\, dx$ hanno tutti un significato e al tempo stesso la serie $\sum_0^{\infty} (z-\gamma)^n \int_{\alpha+\varepsilon}^{x} A_n\, dx$ considerata come funzione di ε converge in ugual grado nell'intorno di $\varepsilon = 0$, o l'altra $\sum_0^\infty (z-\gamma)^n \int_\alpha^x A_n \, dx$ converge in ugual grado nell'intorno di α.

E si può anche notare, per quest'ultimo caso, che quando siano soddisfatte le condizioni qui indicate per gli integrali $\int_\alpha^x A_n \, dx$, e per la serie $\sum_0^\infty (z-\gamma)^n \int_\alpha^x A_n \, dx$, la funzione $f(x, z)$ viene di suo integrabile da α ad x pei valori di z entro il cerchio di convergenza che si ha per la serie (3) relativa al punto di partenza γ quando x è diverso da α.

4. E a proposito delle serie ordinate per le potenze di $z-\gamma$ e i cui coefficienti contengono o no altre variabili, giova di fare anche un'altra osservazione che presenta in alcune occasioni la sua utilità.

Indichiamo con R il raggio del suo cerchio C di convergenza, supposto finito; e scrivendo la serie sotto la forma $\Sigma A_n \left(\frac{z-\gamma}{R}\right)^n$, indichiamo con A'_n i moduli (o i valori assoluti) dei coefficienti) A_n che, se contengono altre variabili, s'intenderà di considerarli per valori determinati di esse.

Questa serie nell'interno del cerchio di convergenza C rappresenterà una funzione olomorfa $w(z)$ di z; e sul cerchio la serie stessa potrà essere convergente indipendentemente dall'ordine dei termini o no, ciò che equivale a dire che la serie $\Sigma A'_n$ dei moduli dei coefficienti potrà essere convergente o divergente.

Comunque sia questa serie $\Sigma A'_n$, noi ammetteremo che per essa il rapporto $\frac{A'_{n+1}}{A'_n}$ di un termine al precedente possa porsi sotto la forma $1+\frac{p_n}{n}$, dove p_n non cresce indefinitamente con n almeno negativamente; e « sotto questa ipotesi dimostreremo che derivando successivamente la serie data « rispetto a z, almeno da un certo ordine i di derivazione in poi la serie delle « derivate non solo cesserà di essere convergente indipendentemente dall'ordine dei termini sul cerchio di convergenza se anche la serie primitiva lo era, « ma i moduli dei suoi termini cresceranno indefinitamente con n; e i moduli « delle derivate della funzione $w(z)$ coll'avvicinarsi indefinitamente di z al cer- « chio di convergenza prenderanno anche valori grandi quanto si vuole (*) ».

(*) Naturalmente i potrà talvolta essere zero, e allora le particolarità qui indicate varranno anche per la funzione $w(z)$.

Si osservi infatti che, per la derivata di ordine i, entro il cerchio di convergenza avremo

$$w^{(i)}(z) = \frac{1}{R^i}\sum_{i}^{\infty} n(n-1)(n-2)\dots(n-i+1)\, A_n\left(\frac{z-\gamma}{R}\right)^{n-i},$$

e la serie dei moduli sul cerchio di convergenza sarà

$$\frac{1}{R^i}\sum_{i}^{\infty} n(n-1)(n-2)\dots(n-i+1)\, A'_n;$$

e in essa il rapporto di un termine al precedente sarà

$$\left(1+\frac{p_n}{n}\right)\frac{n+1}{n-i+1} = \left(1+\frac{p_n}{n}\right)\left(1+\frac{i}{n-i+1}\right) = 1+\frac{p_n+i+\varepsilon_n}{n},$$

essendo ε_n una quantità che tende a zero al crescere indefinito di n; quindi poichè, per la ipotesi che abbiamo fatta intorno a p_n, quando i sarà abbastanza grande il coefficiente $p_n + i + \varepsilon_n$ di $\frac{1}{n}$ non solo supererà sempre l'unità negativa, ma sarà anche sempre discosto da zero e positivo, per teoremi noti si potrà intanto affermare non solo che allora la serie stessa sarà divergente, ma anche che, almeno da un certo valore di n in poi, i suoi termini cresceranno indefinitamente con n, e anche continuamente.

Ciò posto, si osservi che, preso un cerchio σ di raggio ρ minore di R ma vicino ad R quanto si vuole e col centro in γ, per la formola precedente avremo

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-i+1)\frac{A_n}{R^n} = \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{w^{(i)}(z)}{(z-\gamma)^{n-i+1}}\, dz,$$

e quindi anche

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-i+1)\frac{A'_n}{R^n} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\operatorname{mod}\int_\sigma \frac{w^{(i)}(z)}{(z-\gamma)^{n-i+1}}\, dz \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\operatorname{mod} w^{(i)}(z)}{\rho^{n-i}}\, d\theta,$$

essendo $z-\gamma = \rho e^{i\theta}$; e da questa avremo l'altra

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-i+1)\frac{A'_n}{R^i} = \eta_{i,n,\rho} W_{i,\rho}\left(\frac{R}{\rho}\right)^{n-i},$$

nella quale abbiamo indicato con $W_{i,\rho}$ il modulo massimo di $w^{(i)}(z)$ sul cerchio di raggio ρ, e con $\eta_{i,n,\rho}$ un numero positivo non superiore ad uno; e per questo, e perchè $\frac{R}{\rho} > 1$, sarà evidentemente

$$\frac{1}{R^i}\sum_h^n n(n-1)(n-2)\ldots(n-i+1)A'_n =$$
$$= W_{i,\rho}\sum_h^n \eta_{i\,n\,\rho}\left(\frac{R}{\rho}\right)^{n-i} = \eta\, W_{i,\rho}(n-h+1)\left(\frac{R}{\rho}\right)^{n-i},$$

essendo h un numero comunque grande inferiore ad n, e η un altro numero positivo non superiore ad uno.

D'altra parte, per quanto già dicemmo, se i sarà abbastanza grande basterà prendere h (e quindi n) al di là di un certo numero perchè ogni termine nel primo membro di questa formola sia superiore a un numero λ che potrà pure prendersi grande quanto si vuole; e allora la somma del primo membro sarà superiore a $(n-h+1)\lambda$, e si avrà quindi $\lambda < \eta W_{i\rho}\left(\frac{R}{\rho}\right)^{n-i}$; mentre per essere ρ indipendente da n, per quanto grande sia n si potrà sempre supporre ρ talmente vicino ad R che $\left(\frac{R}{\rho}\right)^{n-i}$ sia vicino ad uno quanto si vuole; dunque evidentemente $W_{i,\rho}$ coll'avvicinarsi indefinito di ρ ad R dovrà crescere indefinitamente, e questo basta per poter concludere quanto abbiamo enunciato.

Inversamente, sempre sotto la nostra ipotesi intorno al rapporto $\frac{A'_{n+1}}{A'_n}$, si potrebbe vedere al modo stesso che applicando nella serie data l'integrazione successiva da un punto interno del cerchio di convergenza, per es., dal punto γ, fino ad un altro punto qualsiasi z interno al cerchio, « dopo un sufficiente numero d'integrazioni successive si giungerà sempre ad una serie che « sarà convergente indipendentemente dall'ordine dei termini anche sul cerchio « di convergenza, se anche la primitiva non lo era; e quindi la serie ottenuta « sarà convergente in ugual grado in tutto il cerchio di convergenza (il con« torno incluso), e ad essa si potranno applicare integrazioni successive finchè « si vorrà, anche arrivando fino al contorno e sopra di questo ».

Nel caso particolare poi in cui i coefficienti A_n della nostra serie $\Sigma A_n\left(\frac{z-\gamma}{R}\right)^n$ sono reali e finiscono per essere sempre dello stesso segno, p. es., positivi, considerando ancora la serie delle derivate i, con i abbastanza grande, si può osservare che movendosi su quel raggio del cerchio di convergenza che è parallelo all'asse reale nel senso positivo (per modo cioè che $z-\gamma$ sia reale e positivo), la somma di un numero sufficientemente grande (ma finito) di termini della stessa serie a incominciare dal primo, coll'avvicinarsi indefinitamente al cerchio, finirà per essere positiva e grande quanto si vuole; e per questo, e perchè i termini seguenti della serie saranno tutti positivi, si può affermare che avvicinandosi indefinitamente al cerchio di convergenza nel modo indicato (cioè sul raggio parallelo all'asse reale e nel senso positivo) le derivate i^e di $w(z)$ finiranno per crescere indefinitamente essendo sempre positive, e sul contorno saranno $+\infty$.

Se invece i coefficienti A_n saranno alternativamente positivi e negativi, una particolarità simile si avrà per le derivate i^e di $w(z)$ movendosi ancora sul raggio parallelo all'asse reale ma nel senso negativo; le derivate però allora, coll'avvicinarsi indefinitamente al contorno, essendo $+\infty$ o $-\infty$ secondochè i termini della serie per $z-\gamma$ reale e negativo finiranno per essere tutti positivi o tutti negativi.

5. Premesse queste considerazioni generali, prendiamo a considerare la equazione (1) nella quale supporremo che alcuni o tutti i coefficienti dopo il primo, cioè $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$, e X contengano anche una variabile complessa z, e per ogni valore di x fra a e b (a e b incl.) siano funzioni olomorfe di z in un campo C, e oltre a ciò per ogni valore di z in questo campo siano regolari rispetto ad x, cioè siano sempre finite e continue insieme a quelle delle loro derivate relative ad x che occorrerà di considerare nelle nostre formole, e il coefficiente a_0 contenga la sola x, e sia anch'esso finito e continuo insieme alle sue prime $n-1$ derivate nell'intervallo (a, b), e le sue derivate n^e abbiano la stessa particolarità, o almeno siano finite e atte alla integrazione da a a b (*).

E per una tale equazione proponiamoci di studiarne gli integrali, partendo per questo dalle loro espressioni per mezzo delle ricordate formole generali, in serie d'integrali multipli, che si dettero per essi nelle Memorie ci-

(*) Così $a_0, a_1, a_2, \dots a_{n-1}$ devono ammettere le derivate rispetto ad x fino agli ordini $n, n-1, n-2, \dots 1$ respettivamente, le ultime derivate però e così a_n e X bastando anche che, senza essere necessariamente sempre continue, siano finite e atte alla integrazione pei valori di x fra a e b; e propriamente queste ultime derivate e a_n e X potrebbero anche essere infinite, purchè atte alla integrazione anche ridotte ai valori assoluti.

tate, e in particolare nei §§ 1 e 2 della Memoria del Volume precedente di questi *Annali*; e supponendo che in quelle formole le costanti $c_1, c_2, \ldots c_n$ che vi figurano o non contengano z, o contenendola siano anch'esse funzioni olomorfe di z nel campo C, e le funzioni ausiliarie $z_1, z_2, \ldots z_n$ siano indipendenti da z (*), e come funzioni di x fra a e b siano funzioni regolari, e precisamente siano finite e continue esse e le loro derivate fino alla $(n-1)^a$, e ammettano anche le derivate n^e finite e integrabili.

Allora, conservando le notazioni delle Memorie suddette, e supponendo sempre in ciò che segue, quando non si avverta espressamente il contrario, che in tutto l'intervallo da a a b (gli estr. incl.) a_0 e Q siano sempre diverse da zero; e osservando che in ogni termine delle serie che danno le espressioni degli integrali della (1) i coefficienti $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}, a_n$ e X vi compariscono sotto forma intera insieme alle loro derivate rispetto ad x, e le derivazioni rispetto a questa variabile possono farsi fino all' n^a inclusive almeno, basta tener conto delle osservazioni generali che abbiamo fatto al § 1 per potere dire subito che essi e le loro derivate rispetto ad x fino alla n^a sono funzioni olomorfe di z nel campo C; e se d è un numero positivo del quale sono sempre inferiori i moduli (o i valori assoluti) delle quantità $\frac{\mathfrak{q}_{x,x_1}}{(a_0 Q)_{x_1}}$, $\frac{A_x}{(a_0 Q)_x}$, e $\frac{\int_a^x X_{x_1} q_{x,x_1} d x_1}{(a_0 Q)_x}$ per x e x_1 compresi fra a e b (a e b incl.) e per z contenuto in un campo C_1 tutto *interno* a C, evidentemente i moduli dei termini della nostra serie saranno inferiori ai valori assoluti dei termini $\frac{d^{n+1}(x-\alpha)^n}{\pi(n)}$ che sono quelli di una serie esponenziale, e quindi le serie stesse considerate come funzioni di z nel campo C saranno evidentemente convergenti in ugual grado nel campo C_1 per ogni valore speciale di x fra a e b che si consideri (gli estr. a e b incl.).

Segue da questo intanto, a causa di un teorema noto sulle funzioni di variabile complessa, che sotto le ipotesi fatte intorno alle costanti $c_1, c_2, \ldots c_n$,

---

(*) Il supporre che le $z_1, z_2, \ldots z_n$ non contengano z, almeno finchè il loro determinante Q e a_0 sono diversi da zero per x compreso fra a e b (a e b incl.), non porta alcuna limitazione nell'integrale, perchè per quanto si disse al § 9 della prima delle Memorie citate, comunque siano prese le dette funzioni ausiliarie $z_1, z_2, \ldots z_n$ purchè soddisfino alle condizioni sopra indicate, basterà prendere opportunamente le costanti $c_1, c_2, \ldots c_n$ per ottenere che le nostre formole diano qualunque integrale della nostra equazione (1).

la somma della nostra serie, e quindi l'integrale della nostra equazione, sarà una funzione olomorfa di z nel campo C_1, e quindi anche in C (escl. tutt'al più il contorno), per ogni valore di x fra a e b (a e b incl.); e questo, sempre per le osservazioni fatte nel § 1, basta anche per poter dire che le sue derivate y', y'',... rispetto ad x fino a quell'ordine (non inferiore ad n) pel quale potranno aversi, saranno esse pure funzioni olomorfe di z nel campo C finchè x si mantiene nell'intervallo da a a b (gli estr. incl.).

E siccome derivando termine a termine rispetto ad x le serie che rappresentano gli integrali della equazione data, si ottengono serie per le quali, colle considerazioni stesse che abbiamo fatto sopra, si vede che oltre ad essere convergenti in ugual grado rispetto a z nel campo C_1 sono convergenti in ugual grado anche rispetto ad x nell'intervallo (a, b), così evidentemente, oltre a ritrovare con questo le indicate particolarità rispetto alle derivate y', y'',... dell'integrale, si trova anche che queste derivate possono aversi colla derivazione per serie rispetto ad x applicata alla serie che rappresenta l'integrale stesso.

In particolare dunque se pei valori di x fra a e b (gli estr. inclusi) oltre ad essere, come già supponemmo, a_0 sempre diverso da zero, i coefficienti a_1, $a_2, \dots a_n$ e X della nostra equazione (1) sono funzioni intere di z, e tali sono pure le costanti $c_1, c_2, \dots c_n$ quando sono funzioni di z, allora tanto gli integrali (*) della nostra equazione, quanto le loro derivate rispetto ad x saranno sempre funzioni intere di z; e le nostre serie ne daranno la espressione analitica, valida in tutto il piano, per serie di funzioni intere di z, e a queste serie potranno essere applicate anche le derivazioni rispetto ad x fino a quell'ordine (non inferiore ad n) pel quale esistono le derivate y', y'', .. dell'integrale, e per tutti i valori di x fra a e b (a e b inclus.).

E naturalmente, in questo caso, con processi convenienti l'integrale potrà anche svilupparsi in serie di Cauchy per potenze di $z-\gamma$ partendo da un punto γ qualsiasi, e queste serie varranno in tutto il piano z e per qualunque valore di x fra a e b (a e b incl.); e le derivate come gli integrali rispetto ad x dell'integrale medesimo per quanto dicemmo al § 2 potranno ottenersi colla derivazione o integrazione per serie rispetto ad x applicate alle serie stesse di Cauchy.

(*) Questo teorema fu dato già dal Picard nel tomo III del suo *Traité d'Analyse* (Paris 1896) a pag. 92, supponendo i coefficienti $a_1, a_2, \dots a_n$ e X polinomii interi in z, e $a_0 = 1$.

In ogni caso poi, se anche a_0 contenesse z, e se, come potrebbe sempre farsi, anche per le funzioni ausiliarie $z_1, z_2, \ldots z_n$ fossero prese funzioni che dipendano anche da z, i risultati ora ottenuti continuerebbero a sussistere per quei campi C relativi a z pei quali a_0, $z_1, z_2, \ldots z_n$ sono funzioni olomorfe di z, e a_0 e Q sono diverse da zero; ma, malgrado questo, noi, per semplicità, ammetteremo sempre che a_0, $z_1, z_2, \ldots z_n$ siano tutti indipendenti dal parametro z.

6. I risultati qui ottenuti valgono nel supposto che le $z_1, z_2, \ldots z_n$ siano regolari fino alle loro derivate n^e, e a_0 e Q siano diverse da zero pei valori di x che si considerano fra a e b (a e b incl.).

Se poi a_0 o Q per alcuni valori di x fra a e b fossero zero, e alcune o più delle funzioni ausiliarie $z_1, z_2, \ldots z_n$ o delle loro derivate rispetto ad x fossero infinite, allora quando, come potrà sempre farsi, gli integrali multipli che figurano nelle nostre formole generali si facciano partire da un punto α fra a e b pel quale queste circostanze eccezionali non si presentino, le nostre formole, e tutti i risultati qui indicati varranno per ogni valore di x da α fino a punti vicini quanto si vuole ai primi valori α_0 o α_1 di x inferiormente o superiormente ad α pei quali tutte o alcune delle indicate circostanze si presenteranno.

E in particolare gli integrali della nostra equazione e le loro derivate rispetto ad x fino all'ordine n^o almeno, come i loro integrali si manterranno funzioni olomorfe di z nel campo C pei valori di x fino a punti vicini quanto si vuole agli stessi punti α_0 e α_1; e lo stesso avverrà anche in questi punti α_0 e α_1 per quegli integrali della nostra equazione e per quelle loro derivate rispetto ad x che si mantengano finite e continue anche negli stessi punti fissi α_0 e α_1 (§ 1).

7. Indipendentemente poi da queste considerazioni si potrebbe anche in altro modo vedere che in alcuni casi, anche se pei limiti inferiori dei nostri integrali, o pei valori di x che si considerano si presentano le indicate circostanze eccezionali, i risultati ottenuti nel paragrafo precedente continuano pure a sussistere, almeno in parte, anche agli stessi limiti o pei detti valori eccezionali di x per alcuni degli integrali della equazione data (1), e talvolta anche per tutti.

In particolare per le equazioni omogenee, e nei casi considerati nella Memoria del Volume precedente pei quali, malgrado la presenza di un infinitesimo di a_0 per un valore α di x fra a e b, si ha ancora un integrale regolare y della nostra equazione, si può affermare che l'integrale che allora trovammo sarà una funzione olomorfa di z nel campo C nel quale sono olomorfi i coefficienti a_1, $a_2, \ldots a_n$ quando x è nell'intervallo da a a b (gli estremi incl.), perchè per le considerazioni che facemmo ai §§ 12 e 14 della stessa Memoria si vede che la serie che rappresenta quell'integrale, oltre ad essere ancora la stessa, e avere i suoi termini funzioni olomorfe di z nel campo C, è ancora convergente in ugual grado rispetto a z in ogni campo C_1 interno a C; e questo basta al solito per potere concludere che la sua somma sarà una funzione olomorfa di z nel campo C; ma rispetto alle derivate y', $y'', \ldots$ dell'integrale non si potrà affermare nulla senza fare prima gli studii ai quali accennammo in modo generale nel § 19 della stessa Memoria, e che facemmo poi in particolare pel caso delle equazioni del second'ordine al § 22.

E così in particolare per quelle equazioni del second'ordine

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0,$$

nelle quali a_1 e a_2 pei valori di z nel campo C sono funzioni olomorfe di z finchè x è compreso fra a e b (a e b incl.) e a_0 è una funzione di x che diventa infinitesima in un punto α di questo intervallo (a, b); e al tempo stesso i coefficienti a_0, a_1, a_2 per ogni valore di z entro ogni campo C_1 interno a C, e pei valori di x in un certo intorno di α soddisfano alle condizioni indicate nel § 21 della Memoria ridetta, per modo cioè che si possa porre

$$a_0 = (x - \alpha)^p \, \theta_0(x), \quad a_1 = (x - \alpha)^{p-1} \, \theta_1(x, z),$$

essendo θ_0 e θ_1 funzioni regolari di x nello stesso intorno di α fino alle derivate seconda e prima rispettivamente, e $\theta_0(\alpha)$ essendo finita e diversa da zero; e inoltre per ogni valore di x fra α e b diverso da α, il limite superiore L_x del modulo del rapporto $\frac{a_2}{a_0}$ per z compreso nel campo C, è tale che i prodotti $L_x(x - \alpha)$, o $L_x(x - \alpha)\log(x - \alpha)$ risultano atti all'integrazione nell'intorno di α, allora, sempre pei risultati ottenuti nella stessa Memoria, si può affermare che la stessa equazione ammetterà sempre un integrale y che, oltre ad essere regolare come funzione di x quando x si mantiene in un intorno sufficientemente piccolo di α, sarà anche una funzione olomorfa di z nel campo C per gli stessi valori di x, e la sua derivata y' godrà sempre della stessa proprietà pei valori di x diversi da α; e ne godrà anche per $x = \alpha$ quando l'integrale $\int_\alpha^x L_x(x - \alpha)\,dx$, o l'altro $\int_\alpha^x L_x(x - \alpha)\log(x - \alpha)\,dx$ diventeranno infinitesimi almeno del prim'ordine al tendere di x ad α.

8. Torniamo ora ad ammettere che a_0, e Q siano sempre diversi da zero fra a e b (a e b incl.); e osserviamo che un caso più specialmente notevole è quello nel quale nella equazione lineare generale (1) i coefficienti $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}, a_n$ e X sono polinomii razionali interi rispetto a z, o anche più generalmente rispetto a una stessa funzione $\varphi(z)$ di z, cioè sono della forma

$$A + B\varphi(z) + C\varphi^2(z) + \cdots + K\varphi^l(z),$$

essendo $A, B, C, \ldots K$ funzioni regolari della sola x.

In questo caso, indicando con k_0 il grado di $\varphi(z)$ in X, e con k il grado massimo pure di $\varphi(z)$ nei varii polinomii che corrispondono ai coefficienti $a_1, a_2, \ldots a_n$, e supponendo che le $c_1, c_2, \ldots c_n$ siano indipendenti da z, si vede subito che la serie che rappresenta il nostro integrale è una serie di polinomii in $\varphi(z)$ dei gradi rispettivamente k_0, $k_0 + k$, $k_0 + 2k$, $k_0 + 3k, \ldots$; e così in particolare se X non conterrà z, e i coefficienti $a_1, a_2, \ldots a_n$ che contengono $\varphi(z)$ la conterranno soltanto al 1.° grado, allora nella serie che rappresenta l'integrale della nostra equazione di x fra a e b (a e b incl.) e per ogni valore reale o complesso del parametro z, cioè

$$L_0 + L_1 + L_2 + \cdots + L_m + \cdots \tag{5}$$

dove in generale $L_0 = \varepsilon_{n-1} \dfrac{A_x}{(a_0 Q)_x}$ e

$$L_m = \frac{\varepsilon_{n+1}^{m+1}}{(a_0 Q)_x} \int_a^x \frac{\mathfrak{q}_{x,x_1}}{(a_0 Q)_{x_1}} d x_1 \int_a^{x_1} \frac{\mathfrak{q}_{x_1,x_2}}{(a_0 Q)_{x_2}} d x_2 \int_a^{x_2} \cdots \int_a^{x_{m-1}} \frac{A_{x_m} \mathfrak{q}_{x_{m-1},x_m}}{(a_0 Q)_{x_m}} d x_m,$$

con $A_x = Q_c + \int_a^x X_{x_1} q_{x,x_1} d x_1$, il primo termine L_0 sarà indipendente da z, e gli altri $L_1, L_2, \ldots L_m, \ldots$ saranno polinomii in $\varphi(z)$ dei gradi $1, 2, \ldots m, \ldots$ successivamente, cioè l'integrale sarà sviluppato in serie di polinomii in $\varphi(z)$ di questi gradi.

9. E se sarà in generale $a_r = g_r \varphi(z) + l_r$, essendo g_r e l_r funzioni della sola x, mettendo in evidenza nelle nostre notazioni il parametro z, coll'indicare cioè con $E(y, z)$, $Z_r(z)$, e $\mathfrak{q}_{x,x_1}(z)$ il primo membro della equazione data e i soliti valori di Z_r e $\mathfrak{q}_{x,x_1}$ quando nei coefficienti il parametro z ha il valore z, e indicando inoltre con $G(y)$ l'espressione

$$\sum_1^n g_r y^{(n-r)} = g_1 y^{(n-1)} + g_2 y^{(n-2)} + \cdots + g_n y, \tag{6}$$

e con $Z_{g,r}$ il valore di Z_r corrispondente a questa espressione $G(y)$, cioè

$$Z_{g,r} = \varepsilon_n (g_1 z_r)^{(n-1)} + \varepsilon_{n-1} (g_2 z_r)^{(n-2)} + \cdots + \varepsilon_1 (g_n z_r), \tag{7}$$

e con γ un valore particolare finito (ma qualsiasi) di z, avremo evidentemente

$$E(y, z) = E(y, \gamma) + [\varphi(z) - \varphi(\gamma)]\, G(y),$$

$$Z_r(z) = Z_r(\gamma) + [\varphi(z) - \varphi(\gamma)]\, Z_{g,r},$$

$$\mathfrak{q}_{x,x_1}(z) = \mathfrak{q}_{x,x_1}(\gamma) + [\varphi(z) - \varphi(\gamma)]\, \mathfrak{q}_{g,x,x_1},$$

essendo $\mathfrak{q}_{g,x,x_1}$ ciò che diviene $\mathfrak{q}_{x,x_1}$ quando al posto delle $Z_1, Z_2, \ldots Z_n$ si pongono le $Z_{g,1}, Z_{g,2}, \ldots Z_{g,n}$ nelle quali sia cambiato x in x_1.

Si supponga ora che per le solite funzioni ausiliarie $z_1, z_2, \ldots z_n$ siano prese quelle di un sistema d'integrali fondamentali della equazione aggiunta della $E(y, \gamma) = 0$ corrispondente al valore γ di z; queste funzioni, se a_0 non si annullerà mai nell'intervallo (a, b), avranno ancora la particolarità voluta di essere regolari almeno fino alle derivate n^e in questo intervallo; e avendosi allora $Z_r(\gamma) = 0$ e quindi anche $\mathfrak{q}_{x,x_1}(\gamma) = 0$, è certo che, finchè restino le $c_1, c_2, \ldots c_n$ indipendenti da z, le nostre serie corrispondenti all'integrale della equazione data $E(y, z) = X$ saranno serie ordinate per le potenze di $\varphi(z) - \varphi(\gamma)$, cioè saranno della forma

$$A_0 + A_1 \{\varphi(z) - \varphi(\gamma)\} + A_2 \{\varphi(z) - \varphi(\gamma)\}^2 + A_3 \{\varphi(z) - \varphi(\gamma)\}^3 + \cdots, \tag{8}$$

essendo

$$A_0 = \varepsilon_{n-1} \frac{A_x}{(a_0 Q)_x}, \tag{9}$$

e $A_1, A_2, \ldots A_m, \ldots$ funzioni della sola x determinate dalla formola generale

$$A_m = \frac{\varepsilon_{n-1}^{m+1}}{(a_0 Q)_x} \int_\alpha^x \frac{\mathfrak{q}_{g,x,x_1}}{(a_0 Q)_{x_1}}\, d x_1 \int_\alpha^{x_1} \frac{\mathfrak{q}_{g,x_1,x_2}}{(a_0 Q)_{x_2}}\, d x_2 \int_\alpha^{x_2} \cdots \int_\alpha^{x_{m-1}} \frac{A_{x_m} \mathfrak{q}_{g,x_{m-1},x_m}}{(a_0 Q)_{x_m}}\, d x_m, \tag{10}$$

con

$$A_x = Q_c + \int_\alpha^x X_{x_1} q_{x,x_1}\, d x_1, \tag{11}$$

essendo α un punto qualsiasi fra a e b o uno di questi estremi a e b; e in particolare se $\varphi(z) = z$, esse saranno ordinate per le potenze di $z - \gamma$, cioè corrisponderanno agli sviluppi di CAUCHY

$$A_0 + A_1 (z - \gamma) + A_2 (z - \gamma)^2 + A_2 (z - \gamma)^3 + \cdots \tag{12}$$

pei nostri integrali.

E se si ricorda che la equazione aggiunta $A(\zeta, \gamma) = 0$ della $E(y, \gamma) = 0$ è la seguente

$$(a_0 \zeta)^{(n)} + \varepsilon_1 (\mathbf{a}_1 \zeta)^{(n-1)} + \varepsilon_2 (\mathbf{a}_2 \zeta)^{(n-2)} + \cdots + \varepsilon_{n-1} (\mathbf{a}_{n-1} \zeta)^1 + \varepsilon_n \mathbf{a}_n \zeta = 0,$$

dove $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{a}_n$ indicano i valori di $a, a_2, \ldots a_{n-1}, a_n$ per $z = \gamma$, applicando una nota formola di LIOUVILLE si vede subito che pei denominatori $a_0 Q$ si ha $a_0 Q = k a_0 e^{-\int \frac{n a'_0 - \mathbf{a}_1}{a_0} dx} = k a_0^{1-n} e^{\int \frac{\mathbf{a}_1}{a_0} dx}$, essendo k una costante; per modo che Q sarà finito e diverso da zero fra a e b, e se per la equazione data sarà $\mathbf{a}_1 = (n-1)\, a'_0$ (come potrà sempre ottenersi moltiplicando la equazione stessa per un fattore conveniente) avremo $a_0 Q = k$; e i valori di A_0 e A_m verranno più semplici quando col moltiplicare le z_1, $z_2, \ldots z_n$ per costanti adattate sia ridotto $a_0 Q = 1$.

E si può anche aggiungere che se $g_1, g_2, \ldots g_{n-1}$ sono tutti zero, cioè se $\varphi(z)$ figura soltanto nell'ultimo coefficiente a_n della nostra equazione $E(y, z) = X$, allora $\mathfrak{q}_{g\,x,x_1}$ si riduce a $-g_n\, q(x, x_1)$.

Se poi, contrariamente a quanto ora supponevamo, le funzioni ausiliarie z_1, $z_2, \ldots z_n$ non saranno gli integrali della equazione aggiunta della $E(y, \gamma) = 0$, per modo che non sia $\mathfrak{q}_{x,x_1}(\gamma) = 0$, allora le serie (8) e (12) che qui abbiamo scritte saranno precisamente quelle formate dai termini di grado più alto in $\varphi(z) - \varphi(\gamma)$ o in $z - \gamma$ dei singoli termini della serie generale (5), per polinomii in $\varphi(z) - \varphi(\gamma)$ o in $z - \gamma$, che si avrà allora per rappresentare l'integrale y della equazione $E(y, z) = X$.

10. Questi risultati poi che danno un processo generale per trovare gli sviluppi in serie di potenze intere e positive o di polinomii interi in $\varphi(z) - \varphi(\gamma)$ o in $z - \gamma$ per integrali della nostra equazione $E(y, z) = X$ quando il primo coefficiente a_0 è sempre diverso da zero nell'intervallo (a, b) che si considera, varranno anche quando lo stesso coefficiente a_0 diviene infinitesimo in un punto $x = \alpha$ nell'intervallo (a, b), per quegli integrali regolari della stessa equazione che, come nei casi considerati nella Memoria del Volume precedente, talvolta esistono, e possono ancora rappresentarsi per mezzo delle nostre serie generali, colla introduzione di funzioni ausiliarie particolari $z_1, z_2, \ldots z_n$ e per valori particolari delle $c_1, c_2, \ldots c_n$.

Però bisognerà naturalmente che queste funzioni ausiliarie particolari z_1, $z_2, \ldots z_n$ siano integrali particolari della equazione aggiunta della $E(y, \gamma) = 0$, se si vorrà che le serie corrispondenti agli integrali della equazione data $E(y, z) = X$ siano delle forme (8) o (12), senza di che rientreranno soltanto nella forma generale (5) di serie di polinomii interi in $\varphi(z) - \varphi(\gamma)$ o in $z - \gamma$, nei quali i termini di grado più alto saranno appunto quelli corrispondenti delle serie (8) o (12).

Indipendentemente poi da questo, per quanto si disse in generale in fine del § 2 si può affermare che gli sviluppi precedenti per potenze intere e positive di $\varphi(z) - \varphi(\gamma)$ o di $z - \gamma$ trovati soltanto pei valori di x in qualunque porzione *interna* a un intervallo (a, b) nel quale a_0 diviene infinitesimo a uno o a tutti e due gli estremi a e b varranno anche in questi estremi, salvo a prendere allora pei loro coefficienti i valori limiti (che certo devono esistere) dei coefficienti che si avevano per x diverso dall'estremo corrispondente e vicino quanto si vuole all'estremo stesso, purchè si tratti d'integrali pei quali si sappia in qualche modo che anche quando x è in questo estremo sono funzioni olomorfe di $\varphi(z)$ o di z.

11. Tutto questo però quando le $c_1, c_2, \ldots c_n$, oltre ad essere costanti rispetto alla variabile x, siano indipendenti da z.

Quando poi anche queste quantità $c_1, c_2, \ldots c_n$ dipendano da z, allora se a_0 sarà sempre diverso da zero fra a e b (a e b incl.), comunque siano scelte le funzioni ausiliarie $z_1, z_2, \ldots z_n$, e quindi in particolare anche quando siano prese per esse integrali fondamentali della solita equazione aggiunta della $E(y, \gamma) = 0$, le nostre formule condurranno ancora a qualsiasi integrale y della nostra equazione $E(y, z) = X$, ma questo non sarà più in serie di potenze intere e positive di $\varphi(z) - \varphi(\gamma)$, o di $z - \gamma$, o in serie di polinomii interi di queste quantità.

Però siccome, sotto la nostra ipotesi che fra a e b (a e b incl.) il coefficiente a_0 non divenga mai infinitesimo, le $c_1, c_2, \ldots c_n$ possono prendersi comunque, indicando con $w_1, w_2, \ldots w_n$ gli n integrali particolari della equazione omogenea $E(y, z) = 0$ che vengono dalle formole precedenti facendovi $X = 0$ e prendendo le $c_1, c_2, \ldots c_n$ tutte eguali a zero tranne respettivamente la prima, la seconda, ... la n^a che si prenderanno invece uguali ad uno, e indicando inoltre con Y l'integrale particolare della nostra equazione completa $E(y, z) = X$ corrispondente ai valori della $c_1, c_2, \ldots c_n$ tutti zero, che gode della particolarità di essere zero insieme alle sue prime $n - 1$ derivate per $x = \alpha$, ed è unico e determinato, è noto che $w_1, w_2, \ldots w_n$ costituiranno un sistema d'integrali fondamentali della equazione omogenea $E(y, z) = 0$, e le stesse $w_1, w_2, \dots w_n$ e Y verranno ancora dalle forme precedenti (5), (8) e (12), e si otterranno da queste col sostituire ad A_x respettivamente

$$\frac{Q_{1,n}}{(a_0 Q)_x}, \frac{Q_{2,n}}{(a_0 Q)_x}, \dots \frac{Q_{n,n}}{(a_0 Q)_x}, \frac{\int_\alpha^x X_{x_1} q_{x,x_1} d x_1}{(a_0 Q)_x},$$

essendo $Q_{1,n}, Q_{2,n}, \dots Q_{n,n}$ i complementi algebrici degli elementi dell'ultima colonna nel determinante Q_c, o Q; e per ogni integrale y della equazione data $E(y, z) = X$ avremo evidentemente la formola seguente

$$y = c_1 w_1 + c_2 w_2 + \dots + c_n w_n + Y,$$

per la quale lo stesso integrale, se non viene più sotto le forme dei §§ 8 e 9 quando le $c_1, c_2, \dots c_n$ contengono z, dipende però da queste forme (5), (8) o (12) in modo molto semplice.

E se a_0 o Q diverranno infinitesimi in qualche punto diverso dal punto α, questo risultato varrà per ogni valore di x a partire da α finchè non si arrivi ad un punto d'infinitesimo di a_0 o di Q, o nel quale si abbiano singolarità per gli altri coefficienti e per le funzioni $z_1, z_2, \dots z_n$.

12. In particolare dunque, quando le $c_1, c_2, \dots c_n$ siano potenze o polinomii interi o funzioni intere in $\varphi(z)$ o in z, le formole precedenti daranno sempre l'integrale y in serie di potenze o polinomii o funzioni intere di $\varphi(z) - \varphi(\gamma)$ o di $z - \gamma$; ma evidentemente non si può dire che si otterranno con questi processi tutti gli integrali della nostra equazione $E(y, z) = X$ che sono sviluppabili in serie di potenze intere di $\varphi(z) - \varphi(\gamma)$ o di $z - \gamma$ pei valori di x fra a e b.

Per questo noi prenderemo ora a considerare in modo generale il caso in cui, indipendentemente anche dalle considerazioni precedenti e dalle nostre formole generali, e seguendo un processo qualsiasi, sia stato determinato, o anche soltanto si sappia che esiste un integrale y della nostra equazione $E(y, z) = X$ che, come funzione di x, in tutto l'intervallo da a a b (questi estremi incl.) è regolare fino alle derivate n^e le quali sono ancora finite e atte alla integrazione, senza escludere ora che a_0 fra a e b, o in questi punti stessi possa anche divenire infinitesimo; e inoltre l'integrale medesimo è sviluppabile in serie di potenze intere e positive di $\varphi(z) - \varphi(\gamma)$ in un campo C relativo a z che potrà anche essere tutto il piano, per modo che in questo campo C e per x compreso fra a e b (a e b inclus.) si abbia

$$y = \sum_0^\infty B_m [\varphi(z) - \varphi(\gamma)]^n,$$

essendo le B_m funzioni di x che potranno essere diverse dalle A_m date dalle formole (9) e (10).

Si osserverà per prima cosa che per quanto si disse in generale al § 2, le funzioni B_m avranno le derivate rispetto ad x determinate e finite fra a e b (a e b incl.) almeno fino alle n^e, e all'integrale y sarà applicabile la derivazione per serie rispetto ad x nello stesso intervallo (gli estr. inclusi) sempre fino alle derivate n^e almeno.

E oltre a ciò se, tenendosi ora colla x in una porzione qualsiasi (a', b') dell'intervallo (a, b), in ogni punto della quale (a' e b' incl.) il coefficiente a_0 sia sempre diverso da zero, e che potrà quindi essere anche lo stesso intiero intervallo (a, b) quando in esso a_0 non sia mai zero, intenderemo presi per le $z_1, z_2, \ldots z_n$ i soliti integrali fondamentali della equazione aggiunta della $E(y, \gamma = 0$, e introdurremo ancora gli integrali $w_1, w_2, \ldots w_n$ e Y del paragrafo precedente, che saranno altrettante serie di potenze di $\varphi(z) - \varphi(\gamma)$, allora per x compreso fra a' e b' (a' e b' incl.) potremo sempre scrivere la equazione

$$\sum_0^\infty B_m [\varphi(z) - \varphi(\gamma)]^n - Y = c_1 w_1 + c_2 w_2 + \cdots, + c_n w_n,$$

per valori convenienti delle costanti $c_1, c_2, \ldots c_n$ (che saranno indipendenti da x, ma potranno contenere z) perchè nell'intervallo (a', b') le $w_1, w_2, \ldots w_n$ saranno integrali fondamentali della equazione omogenea $E(y, z) = 0$.

E queste $c_1, c_2, \ldots c_n$ si potranno determinare facilmente, perchè la stessa equazione, insieme alle altre $n-1$ che se ne deducono colla derivazione successiva rispetto ad x, dà luogo ad un sistema di n equazioni lineari rispetto alle stesse $c_1, c_2, \ldots c_n$; e queste equazioni, col dare ad x il valore α, che ora si intenderà preso nell'intervallo (a', b), o un altro valore speciale qualsiasi p in questo intervallo, determineranno subito i valori delle $c_1, c_1, \ldots c_n$ mediante i quali il nostro integrale y fra a' e b' si esprime per gli integrali $w_1, w_2, \ldots w_n$ della $E(y, z) = 0$ e per Y; e questi valori $c_1, c_2, \ldots c_r, \ldots c_n$ risulteranno espressi per quozienti di serie ordinate per le potenze di $\varphi(z) - \varphi(\gamma)$ nei quali il denominatore comune D sarà il determinante fondamentale degli integrali $w_1, w_2, \ldots w_n$ della $E(y, z) = 0$ per $x = p$, e il numeratore per una qualunque di esse c_r sarà il determinante che viene da D sostituendo agli elementi w_r, w'_r, $w''_r, \ldots\, w_r^{(n-1)}$ i valori di $y - Y$, $y' - Y'$, $y'' - Y''$, $y^{(n-1)} - Y^{(n-1)}$ per $x = p$ che sono naturalmente anch'essi espressi per serie di potenze di $\varphi(z) - \varphi(\gamma)$, e potranno anche talvolta ridursi a polinomii, o anche più semplicemente a quantità costanti.

Questo denominatore D, quando pel valore speciale p di x sia preso il valore α che figura come limite inferiore negli integrali delle formole (9) e (10), vedremo fra breve che si riduce a un polinomio in $\varphi(z) - \varphi(\gamma)$ che sarà *tutt'al più* del grado $\frac{n(n-1)}{2}$, e si riduce sempre a una costante quando le g_1, $g_2, \ldots\, g_{n-1}$ sono tutte zero, cioè quando $\varphi(z)$ figurerà soltanto nell'ultimo coefficiente a_n della nostra equazione, e allora le stesse c_1, $c_2, \ldots\, c_n$ saranno funzioni intere di $\varphi(z) - \varphi(\gamma)$ nel campo C, e precisamente si avrà per una qualunque di esse c_r

$$c_r = \gamma_{1r}\, y_\alpha + \gamma_{2,r}\, y'_\alpha + \cdots + \gamma_{n,r}\, y_\alpha^{(n-1)},$$

essendo le $\gamma_{1,r}$, $\gamma_{2,r}, \ldots,$ $\gamma_{n,r}$ quantità costanti rispetto ad x e rispetto a z.

In ogni caso poi, noi possiamo ora affermare che coi valori trovati per c_1, $c_2, \ldots\, c_n$ il nostro integrale dato y, qualunque sia stato il processo che avrà servito o che servirà poi a determinarlo, potrà scriversi sotto la forma $c_1 w_1 + c_2 w_2 + \cdots + c_n w_n + Y$, e si esprimerà quindi ancora sotto la forma (8) sempre pei valori di x fra a' e b' (a' e b' incl.); ma in questa espressione, per le c_1, $c_2, \ldots\, c_n$ che figurano in A_x nelle formole (9) e (10) che danno i coefficienti attuali A_0, A_1, $A_2, \ldots\, A_m, \ldots$ delle (8) stesse, dovranno prendersi le funzioni di z determinate testè come quozienti di funzioni intere in $\varphi(z) - \varphi(\gamma)$ finchè z è nel campo C; e quindi la serie stessa (8) darà ancora una espressione dell'integrale dato y, ma questa non sarà più in serie ordinata per le potenze di $\varphi(z) - \varphi(\gamma)$, a meno che i valori trovati per c_1, $c_2, \ldots\, c_n$ non risultino indipendenti da z, o sotto altre forme specialissime.

13. Fermandoci ancora su quegli integrali y della nostra equazione $E(y, z) = X$ che in tutto il piano z o in una porzione C di esso e per x compreso fra a e b (a e b incl.) sono funzioni regolari di x almeno fino alle derivate n^e in questo intervallo (gli estr. incl.), e sono sviluppabili in serie di potenze intere e positive di $\varphi(z) - \varphi(\gamma)$, per modo che si ha

$$y = \sum_0^\infty B_m\, [\varphi(z) - \varphi(\gamma)]^m,$$

qualunque sia del resto il processo col quale vengono determinati, e quando anche in a e b o in alcuni punti posti fra questi a_0 sia zero, troviamo alcune particolarità dei coefficienti B_m che sono funzioni delle sole x.

Poniamo perciò, per abbreviare, $E(y, \gamma) = E_1(y)$, e ricordiamo il significato dato a $G(y)$ nel § 9.

Siccome, per quanto dicemmo al § 2, per ogni valore di x fra a e b (a e b incl.) le B_m saranno derivabili fino all'ordine n almeno, e alla serie che dà l'integrale y che si considera sono applicabili le derivazioni relative ad x almeno fino allo stesso ordine n, si vede subito che per gli stessi valori di x avremo

$$E(y, \gamma) = \sum_0^\infty E_1(B_m)\,[\varphi(z) - \varphi(\gamma)]^m\,,$$

$$G(y) = \sum_0^\infty G(B_m)\,[\varphi(z) - \varphi(\gamma)]^m\,;$$

e quindi, per essere $E(y, z) = E(y, \gamma) + G(y)\,[\varphi(z) - \varphi(\gamma)]$, sarà

$$E(y, z) = E_1(B_0) + \sum_1^\infty \{E_1(B_m) + G(B_{m-1})\}\,[\varphi(z) - \varphi(\gamma)]^m\,;$$

ed essendo y un integrale della equazione data $E(y, z) = X$, per una nota proprietà delle serie di potenze di funzioni di variabile complessa si vede subito che le $B_0, B_1, B_2, \ldots B_m, \ldots$ dovranno soddisfare alle equazioni

$$E_1(B_0) = X, \quad E_1(B_1) + G(B_0) = 0,$$

$$E_1(B_2) + G(B_1) = 0, \ldots \quad E_1(B_n) + G(B_{n-1}) = 0, \ldots,$$

cioè le $B_0, B_1, B_2, \ldots B_m, \ldots$ dovranno essere integrali delle successive equazioni

$$\begin{aligned}
&E(B_0, \lambda) = X,\\
&E(B_1, \lambda) = -G(B_0),\\
&E(B_2, \lambda) = -G(B_1),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&E(B_m, \lambda) = -G(B_{m-1}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

che risulteranno successivamente determinati quando sia stato fissato il primo di essi B_0, se come nel caso della serie (8) dove le A_0 e A_m sono date dalle (9) e (10), i coefficienti B_1, B_2,... B_m,... dell'integrale dato contengono in modo determinato le costanti che figurano nel coefficiente B_0.

Del resto poi comunque si determinino successivamente i coefficienti B_0, B_1, B_2,... B_m,... per mezzo delle equazioni precedenti, la serie

$$\sum_0^{\infty} B_m \left[\gamma(z) - \varphi(\gamma)\right]^m$$

ci darà sempre un integrale della nostra equazione $E(y, z) = X$, per tutti quei valori di x e z pei quali risulti convergente e derivabile almeno fino all'ordine n rispetto ad x; e allora in tutte le porzioni di (a, b) nelle quali a_0 sarà diverso da zero, per quanto dicemmo nel paragrafo precedente, essa si esprimerà anche per mezzo della serie (8), colle A_0 e A_m determinate dalle (9) e (10), ma nelle quali le c_1, c_2,... c_n siano funzioni fratte di $\varphi(z) - \varphi(\lambda)$ che si determinano coi processi del paragrafo precedente.

14. Ora rispetto a queste quantità A_m, che prenderemo sempre come date dalle (9) e (10), sia che in esse le c_1, c_2,... c_n siano vere e proprie costanti anche rispetto a z, cioè che non dipendano affatto da z, come avviene nel caso degli integrali considerati al § 9, sia che esse contengano z come avverrà ordinariamente per gli integrali più generali sempre ordinati per le potenze di $\varphi(z) - \varphi(\gamma)$ che abbiamo considerato nei due ultimi paragrafi, e che abbiamo visto potersi sempre porre essi pure sotto la forma (8) in tutte le porzioni (a', b') di (a, b) nelle quali a_0 sarà diverso da zero, osserviamo che dalle loro forme (9) e (10), per mezzo d'integrali definiti da α ad x, si vede subito che per essere a_0 sempre diverso da zero fra a' e b' (a' e b' incl.), con che lo sarà anche Q (§ 9), le A_1, A_2,... A_m,... per $x = \alpha$ sono tutte zero, mentre la prima A_0 è uguale a $\left(\frac{Q_c}{a_0 Q}\right)_{x=\alpha}$, e dipenderà quindi ordinariamente da z se le c_1, c_2,... c_n contengono questa variabile.

Derivando poi successivamente le stesse espressioni di A_1, A_2,... A_n,... rispetto ad x, colle regole note, fino a quell'ordine pel quale le derivazioni sono ammissibili, si trova che, per $x = \alpha$, A_2 ha sempre uguale a zero almeno la prima derivata, A_3 ha sempre zero la prima e la seconda, A_4 ha sempre zero la prima, la seconda e la terza, e in generale A_m ha sempre zero le prime $m - 1$ derivate.

E poichè, avendo riguardo alla espressione per determinanti di η_{g,x,x_1} e a quelle delle sue derivate rispetto ad x, si trova che col farvi $x_1 = x$ il $\mathfrak{q}_{g,x,x_1}$ diviene $\varepsilon_{n-1}\, g_1\, Q$, $\frac{\partial\, \mathfrak{q}_{g,x,x_1}}{\partial x}$ diviene $\{\varepsilon_{n-1}(n-1)\, g_1 + \varepsilon_{n-2}\, g_2\}\, Q, \ldots$ e in generale $\frac{\partial^r\, \mathfrak{q}_{g,x,x_1}}{\partial x^r}$ diviene una espressione lineare delle quantità g_1, $g_2, \ldots\, g_{r+1}$ e delle loro derivate, così avendo riguardo ancora alle formole che si trovano per le successive derivate rispetto ad x di $A_1, A_2, \ldots A_{m-1}, \ldots$ si vede subito che se $g_1, g_2, \ldots g_{k-1}$ saranno zero, cioè se $\varphi(z)$ incomincierà a figurare nella equazione data soltanto al coefficiente a_k, allora per ciascuno degli integrali $A_1, A_2, \ldots A_m, \ldots$ vi saranno altre $k-1$ derivate per $x = \alpha$ che si annulleranno oltre a quelle che già dicemmo essere sempre nulle; e in particolare, se $\varphi(z)$ figurerà nella equazione data soltanto nell'ultimo coefficiente a_n, le $A_1, A_2, A_3, \ldots A_m, \ldots$ per $x = \alpha$ saranno zero insieme respettivamente alle loro prime $n-1$, n, $n+1, \ldots m+n-2$ derivate.

È al seguito di questi risultati che costruendo il determinante D relativo agli integrali $w_1, w_2, \ldots w_n$ del quale parlammo nel § 12 si trova che il suo valore per $x = \alpha$ è un polinomio del grado $\frac{n(n-1)}{2}$ al più in $\varphi(z) - \varphi(\gamma)$, e si riduce indipendente da z quando nella equazione data il $\varphi(z)$ figura soltanto nell'ultimo coefficiente a_n, perchè allora gli stessi integrali $w_1, w_2, \ldots w_n$ e le loro prime $n-1$ derivate risultano tutti indipendenti da z per $x = \alpha$.

E per questo appunto, e perchè l'integrale Y per $x = \alpha$ è sempre zero esso pure insieme alle sue prime $n-1$ derivate, resta ora dimostrato quanto dicemmo al § 12, cioè che in questo caso le $c_1, c_2, \ldots c_n$ del paragrafo stesso vengono tutte della forma $\gamma_{1,r}\, y_\alpha + \gamma_{2,r}\, y'_\alpha + \cdots + \gamma_{n,r}\, y_\alpha^{(n-1)}$, essendo le $\gamma_{1,r}$, $\gamma_{2,r}, \ldots \gamma_{n,r}$ indipendenti da z.

E del resto poi, tenendo conto della osservazione fatta intorno alle derivate di $A_1, A_2, \ldots A_m, \ldots$ e sempre pel caso in cui si suppone che $\varphi(z)$ figuri soltanto in a_n, si vede subito per la (8) che per un integrale qualsiasi y della nostra equazione i valori di esso e delle sue prime $n-1$ derivate per $x = \alpha$ saranno respettivamente uguali a quelli di $\frac{A_x}{a_0\, Q}$, $\left(\frac{A_x}{a_0\, Q}\right)'$, $\left(\frac{A_x}{a_0\, Q}\right)''$, $\ldots \left(\frac{A_x}{a_0\, Q}\right)^{(n-1)}$ per $x = \alpha$; e quindi quando l'integrale stesso y, e le sue derivate $y', y'', \ldots y^{(n-1)}$ per $x = \alpha$ debbano avere valori dati y_α, y'_α, $y''_\alpha, \ldots y_\alpha^{(n-1)}$, le costanti $c_1, c_2, \ldots c_n$ ad esso corrispondenti nella (8), anzichè coi processi del § 12, potranno essere determinate col mezzo delle equazioni

$$y_\alpha = \left(\frac{A_x}{a_0\, Q}\right)_\alpha,\ y'_\alpha = \left(\frac{A_x}{a_0\, Q}\right)'_\alpha,\ y''_\alpha = \left(\frac{A_x}{a_0\, Q}\right)''_\alpha, \ldots,\ y_\alpha^{(n-1)} = \left(\frac{A_x}{a_0\, Q}\right)^{(n-1)}_\alpha,$$

che sono lineari rispetto alle stesse $c_1, c_2, \ldots c_n$.

E queste costanti risulteranno ancora naturalmente funzioni intere di $\varphi(z)$, o di $\varphi(z) - \varphi(\gamma)$, se tali saranno i valori dati di $y_\alpha, y'_\alpha, y''_\alpha, \ldots y_\alpha^{(n-1)}$, e risulteranno indipendenti da z se tali saranno gli stessi valori $y_\alpha, y'_\alpha, y''_\alpha, \ldots y_\alpha^{(n-1)}$; e l'integrale y poi sarà quello che verrà dalla serie (8) ponendovi per le $c_1, c_2, \ldots c_n$ i valori così trovati per esse, per modo che nel caso in cui le $y_\alpha, y'_\alpha, \ldots y_\alpha^{(n-1)}$ siano indipendenti da z, lo sviluppo dell'integrale per potenze di $\varphi(z) - \varphi(\gamma)$ almeno pei valori di x nelle porzioni dell'intervallo (a, b) nelle quali a_0 è sempre diverso da zero, combinerà precisamente con quello dato al § 9, per valori delle $c_1, c_2, \ldots c_n$ indipendenti da z.

15. Prima di procedere oltre in questi studii generali vogliamo fare una applicazione dei risultati ottenuti al caso delle equazioni del secondo ordine

$$a_0\, y'' + a_1\, y' + a_2\, y = X,$$

quando in esse $\varphi(z)$ figura soltanto nel coefficiente a_2, e si può quindi scrivere $a_2 = g\, \varphi(z) + l$, o $a_2 = g\, z + l$, essendo g ed l funzioni della sola x.

Prima però osserviamo che in questo caso moltiplicandola per $\frac{1}{a_0} e^{\int \frac{a_1}{a_0} dx}$, la equazione data si riduce alla forma

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int \frac{a_1}{a_0} dx}\, y'\right) + \frac{a_2}{a_0} e^{\int \frac{a_1}{a_0} dx}\, y = \frac{X}{a_0} e^{\int \frac{a_1}{a_0} dx},$$

senza che s'introducano singolarità nei coefficienti, a meno che non si passi con x per punti nei quali già si avesse la singolarità derivante dall'essere $a_0 = 0$; quindi, volendo, le equazioni da considerarsi potremo sempre intenderle trasformate nell'altra

$$\frac{d\left(a_0 \frac{dy}{dx}\right)}{dx} + a_2\, y = X, \tag{13}$$

sotto la quale del resto bene spesso si presentano da se nelle applicazioni; e allora la equazione aggiunta di quella omogenea corrispondente ha la particolarità di coincidere colla equazione stessa.

Altre trasformazioni poi, e molto notevoli, potranno anche farsi come mostrammo dettagliatamente nel § 21 della seconda fra le Memorie citate pubblicata nel Vol. III di questa serie degli *Annali*; quali trasformazioni si fanno coll' applicare un cambiamento di variabili per mezzo della formola $dx = f(\xi)\,d\xi$, dove $f(\xi)$ può essere scelta a piacere, e poi col fare anche un cambiamento di funzione colla formola $y = t\,u$.

Si giunge subito allora alla equazione

$$\frac{a_0 t}{f} u'' + \left\{\left(\frac{a_0 t}{f}\right)' + \frac{a_0 t'}{f}\right\} u' + \left\{\left(\frac{a_0 t'}{f}\right)' + a_2 f t\right\} u = X f, \tag{14}$$

nella quale le varie derivazioni si intendono fatte rispetto alla nuova variabile ξ; e con questa, profittando della indeterminazione che si ha in f e in ξ, si ottengono varie forme sotto le quali la equazione data può porsi.

Così per fare sparire il secondo termine si vede che basta prendere $t = \sqrt{\frac{kf}{a_0}}$, o $y = \sqrt{\frac{kf}{a_0}}\,u$, con k costante, riducendosi allora la equazione alla forma

$$u'' + \left\{\frac{a_2}{a_0} f^2 - \left(\sqrt{\frac{a_0}{f}}\right)'' \sqrt{\frac{f}{a_0}}\right\} u = f\sqrt{\frac{f}{k\,a_0}}\,X,$$

nella quale f resta ancora indeterminata, e può prendersi in modo da fare acquistare alla equazione certe altre particolarità; come, ad esempio, quando sia $a_2 = g\,\varphi(z) + l$, e g non sia mai zero, si potrà scegliere f in modo che il coefficiente di $\varphi(z)$ nella equazione trasformata precedente sia uno, poichè basterà prendere $f = \sqrt{\frac{a_0}{g}}$ e quindi $y = \frac{u}{\sqrt[4]{a_0 g}}$, per far sì che la nostra equazione si riduca alla forma

$$u'' + \{\varphi(z) + l_1\}\, u = X_1,$$

essendo ora

$$l_1 = \frac{l}{g} - \frac{\sqrt[4]{a_0 g}}{g}\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{a_0}{g}}\frac{d\sqrt[4]{a_0 g}}{dx}\right), \quad X_1 = \frac{\sqrt[4]{a_0 g}}{g}\,X.$$

E senza fare sparire il secondo termine nella (14), e ancora nel supposto che sia $a_2 = g\,\varphi(z) + l$, basterà dividere la (14) stessa per $g f t$, e poi determinare t in modo che il coefficiente di u' sia la derivata rispetto a ξ di quello di u'', cioè basterà prendere $t = \sqrt{\frac{c}{fg}}$ con c costante, per ridurre la stessa equazione alla forma

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{a_0}{f^2 g}\frac{du}{d\xi}\right)+\left\{\varphi(z)+\frac{l}{g}+\frac{1}{tg}\frac{d}{dx}\left(a_0\frac{dt}{dx}\right)\right\}u=\frac{X}{tg};$$

talchè, profittando di quella indeterminazione che resta ancora in t per la presenza in t di $f(\xi)$, potremo fare in modo che il coefficiente di u sia semplicemente $\varphi(z)$, e la equazione si riduca alla forma

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{a_0}{f^2 g}\frac{du}{d\xi}\right)+\varphi(z)\,u=\frac{X}{tg},$$

bastando per questo prendere per t un integrale particolare della equazione omogenea $\frac{d}{dx}\left(a_0\frac{dt}{dx}\right)+lt=0$, che è quella che viene dalla equazione data (13) riducendola omogenea e sopprimendovi il termine in $\varphi(z)$; e allora determinato questo valore speciale t_0 di t, si avrà $f=\frac{c}{g\,t_0^2}$, $d\xi=\frac{g\,t_0^2}{c}dx$, cioè $y=t_0 u$, essendo $\xi=\frac{1}{c}\int g\,t_0^2\,dx$ la nuova variabile.

16. Ciò premesso, prendiamo a considerare la equazione omogenea del second'ordine $a_0 y''+a_1 y'+a_2 y=0$, nella quale supporremo a_0 e a_1 funzioni della sola x, e a_2 funzione di x e z di primo grado in $\varphi(z)$, per modo che la equazione stessa possa sempre intendersi ridotta alla forma

$$d\left(a_0\frac{dy}{dx}\right)+(g\,\varphi(z)+l)\,y=0, \tag{15}$$

sotto la quale appunto la prenderemo sempre; e di questa cerchiamo gli integrali y che sono funzioni intere di $\varphi(z)$ pei valori di x in un intervallo $(a,\ b)$ nel quale a_0 non è zero, salvo tutt'al più agli estremi.

Essendo α un punto di questo intervallo nel quale a_0 non è zero, avremo per l'integrale cercato

$$y=-\frac{Q_c}{(a_0 Q)_x}-[\varphi(z)-\varphi(\gamma)]\int_\alpha^x g_{x_1}\left(\frac{Q_c}{a_0 Q}\right)_{x_1} q(x,\ x_1)\,dx_1-$$

$$-[\varphi(z)-\varphi(\gamma)]^2\int_\alpha^x g_{x_1}\frac{q(x,\ x_1)}{(a_0 Q)_{x_1}}dx_1\int_\alpha^{x_1} g_{x_2}\left(\frac{Q_c}{(a_0 Q)}\right)_{x_2} q(x_1,\ x_2)\,dx_2-$$

$$-\cdots-[\varphi(z)-\varphi(\gamma)]^m\int_\alpha^x g_{x_1}\frac{q(x,\ x_1)}{(a_0 Q)_{x_1}}dx_1\int_\alpha^{x_1} g_{x_2}\frac{q(x_1,\ x_2)}{(a_0 Q)_{x_2}}dx_2\int_\alpha^{x_2}\cdots$$

$$\cdots\int_\alpha^{x_{m-1}} g_{x_m}\left(\frac{Q_c}{(a_0 Q)}\right)_{x_m} q(x_{m-1},\ x_m)\,dx_m-\cdots$$

essendo $Q_c = c_2 z_1 - c_1 z_2$, $Q = z_1 z'_2 - z_1 z'_2$, $q(x, x_1) = z_1 \mathbf{z}_2 - z_2 \mathbf{z}_1$ dove $\mathbf{z}_1$ e $\mathbf{z}_2$ sono i valori di z_1 e z_2 quando in essi si cambia x in x_1, e z_1 e z_2 sono due integrali distinti della equazione aggiunta di quella data per $z = \gamma$, che non sarà altro che la equazione stessa, cioè

$$a_0 \zeta'' + a'_0 \zeta' + [g \varphi(\gamma) + l] \zeta = 0, \tag{16}$$

per modo che sarà $Q = c\, e^{-\int \frac{a'_0}{a_0} dx} = \frac{k}{a_0}$, con k costante che potrà prendersi uguale ad uno scegliendo opportunamente le costanti che figureranno in z_1 e z_2; e avremo quindi più semplicemente

$$\left.\begin{aligned} y = &- Q_c - [\varphi(z) - \varphi(\gamma)] \int_a^x g_{x_1} Q_{c,x_1} q(x, x_1)\, d x_1 - \\ &- [\varphi(z) - \varphi(\gamma)]^2 \int_a^x g_{x_1} q(x, x_1)\, d x_1 \int_a^{x_1} g_{x_2} Q_{c,x_2} q(x_1, x_2)\, d x_2 - \\ &- \cdots - [\varphi(z) - \varphi(\gamma)]^m \int_a^x g_{x_1} q(x, x_1)\, d x_1 \int_a^{x_1} g_{x_2} q(x_1, x_2)\, d x_2 \int_a^{x_2} \cdots \\ &\cdots \int_a^{x_{m-1}} g_{x_m} Q_{c,x_m} q(x_{m-1}, x_m)\, d x_m - \cdots \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

e con questa quando siano stati determinati gli integrali z_1 e z_2 della equazione particolare (16) si determineranno gli integrali (17) della equazione generale (15), perchè i varii coefficienti risulteranno ognuno dal precedente con una nuova integrazione rispetto ad x_1 dopo avervi cambiato x in x_1 e averlo moltiplicato per $g_{x_1} q(x, x_1)$. E questo integrale (17) sarà funzione intera di $\varphi(z)$ quando lo siano le c_1 e c_2, e in particolare quando le c_1 e c_2 siano indipendenti da z.

Così in particolare se sarà $l = 0$, cioè se la equazione data sarà la seguente

$$a_0 y'' + a'_0 y' + g \varphi(z) y = 0,$$

alla quale del resto noi già vedemmo che la (15) può sempre ridursi, e se sarà $\varphi(\gamma) = 0$, cioè se γ sarà un infinitesimo di $\varphi(z)$, allora la (16) si ridurrà all'altra semplicissima $a_0 \zeta'' + a'_0 \zeta' = 0$, e potremo prendere $z_1 = 1$, $z_2 = \int_\alpha^x \frac{d\,x}{a_0}$, e sarà $Q_c = c_2 - c_1 \int_\alpha^x \frac{d\,x}{a_0}$, $q(x, x_1) = \int_\alpha^{x_1} \frac{d\,x}{a_0} - \int_\alpha^x \frac{d\,x}{a_0} = -\int_{x_1}^x \frac{d\,x}{a_0}$, e l'integrale (17) verrà a presentarsi sotto una forma più semplice, che in questo caso delle equazioni del second'ordine si ha subito anche da quella che detti al § 20 della Memoria citata del Vol. III di questi *Annali*, perchè le z_1 e z_2 che vengono così a prendersi ora sono appunto quelle stesse che furono prese allora.

E così, fermandosi in particolar modo sulla equazione

$$(1 - x^2)\,y'' - 2\,x\,y' + z\,(z + 1)\,y = 0 \tag{18}$$

che si riduce a quella delle funzioni di Legendre X_n quando il parametro z ha i valori particolari n, o $-(n + 1)$, essendo n un numero intero o positivo, avremo

$$z_1 = 1, \quad z_2 = \int_\alpha^x \frac{d\,x}{1 - x^2} = \frac{1}{2} \log \frac{1 + x}{1 - x}, \quad q_{x,x_1} = \frac{1}{2} \log \frac{1 + x_1}{1 - x_1} - \frac{1}{2} \log \frac{1 + x}{1 - x}$$

quando si parta dal punto $\alpha = 0$; e l'integrale y sarà

$$y = \frac{c_1}{2} \log \frac{1 + x}{1 - x} - c_2 + \frac{z(z + 1)}{2} \int_0^x \left(\frac{c_1}{2} \log \frac{1 + x_1}{1 - x_1} - c_2\right)\left(\log \frac{1 + x_1}{1 - x_1} - \log \frac{1 + x}{1 - x}\right) d\,x_1 +$$

$$+ \left[\frac{z(z + 1)}{2}\right]^2 \int_0^x \left(\log \frac{1 + x_1}{1 - x_1} - \log \frac{1 + x}{1 - x}\right) d\,x_1 \int_0^{x_1} \left(\frac{c_1}{2} \log \frac{1 + x_2}{1 - x_2} - c_2\right)\left(\log \frac{1 + x_2}{1 - x_2} - \log \frac{1 + x_1}{1 - x_1}\right) d\,x_2 +$$

$$+ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

e questo per qualunque valore reale o complesso di z; talchè in particolare per $z = n$ o $z = -(n + 1)$ questa formola ci darà una forma nuova ordinata per le potenze intere e positive di $\frac{n(n + 1)}{2}$ per l'integrale generale della equazione delle funzioni di Legendre X_n.

Per z qualunque questo integrale della equazione (18), che corrisponderà così a nuove funzioni più generali della X_n (*), sarà in serie ordinata per le

(*) In un'altra memoria, che spero di potere pubblicare fra breve, metterò in evidenza anche l'importanza speciale che, specialmente in vista delle rappresentazioni anapotenze di $\frac{z(z+1)}{2}$ quando le c_1, c_2 siano costanti, e sarà sempre funzione intera di $\frac{z(z+1)}{2}$ quando le stesse c_1 e c_2 siano funzioni intere di questa quantità $\frac{z(z+1)}{2}$.

In particolare, quando sia $c_1 = 0$, $c_2 = -1$ l'integrale corrispondente avrà la forma più semplice

$$y = 1 + \frac{z(z+1)}{2}\int_0^x \left(\log\frac{1+x_1}{1-x_1} - \log\frac{1+x}{1-x}\right) d\,x_1 +$$

$$+ \left[\frac{z(z+1)}{2}\right]^2 \int_0^x \left(\log\frac{1+x_1}{1-x_1} - \log\frac{1+x}{1-x}\right) d\,x_1 \int_0^{x_1} \left(\log\frac{1+x_2}{1-x_2} - \log\frac{1+x_1}{1-x_1}\right) d\,x_2 +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Quando poi per le z_1 e z_2 si prendano altre funzioni ausiliarie, allora, come dicemmo al § 9, i varii termini della serie corrispondente agli integrali della nostra equazione nel caso di c_1 e c_2 costanti saranno funzioni intere di $\frac{z(z+1)}{2}$ e successivamente dei gradi 0, 1, 2, 3...

17. Tornando ora a considerare le equazioni lineari di ordine qualunque che oltre alla solita variabile x contengono un altro parametro variabile reale o complesso z, passiamo ad estendere a queste equazioni generali le considerazioni generali e i risultati relativi alle equazioni lineari del second'ordine ottenuti da Sturm,. e completati poi negli ultimi anni, senza però raggiungere ancora tutta la generalità di cui sono suscettibili, dai signori Kneser e Stekloff.

Prendiamo perciò, in modo anche più generale, una equazione differenziale dell'ordine n della forma

$$a_0\, y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + f = 0, \tag{19}$$

nella quale la f sia una funzione qualsiasi che, oltre alla variabile x e alla

---

litiche delle funzioni di una variabile reale, presentano le funzioni più generali della X_n che qui si introducono, come altre che vengono dalla integrazione di altre equazioni lineari del second'ordine.

funzione y, contenga tutte o alcune delle derivate y', y'',... $y^{(n)}$ di questa funzione, e alcuni parametri reali o complessi ζ_1, ζ_2,... ζ_i indipendenti da x, che per ora ammetteremo che possano trovarsi anche in a_0 e a_1.

Indichiamo con y_1, y_2,... y_n un sistema di n integrali particolari di questa equazione corrispondenti a uno stesso sistema di valori dei parametri ζ_1, ζ_2... ζ_i, o anche a sistemi differenti, purchè in quest'ultimo caso questi parametri non compariscano in a_0 e a_1; e formiamo il solito determinante

$$D = \begin{vmatrix} y_1 & y'_1 & \dots & y_1^{(n-2)} & y_1^{(n-1)} \\ y_2 & y'_2 & \dots & y_2^{(n-2)} & y_2^{(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n & y'_n & \dots & y_n^{(n-2)} & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Indicando con f_1, f_2, .. f_n i valori che prende la funzione f in corrispondenza dei valori scelti pei parametri ζ_1, ζ_2,... ζ_i e di questi integrali, avremo le formole seguenti

$$\begin{gathered} a_0 y_1^{(n)} + a_1 y_1^{(n-1)} + f_1 = 0, \\ a_0 y_2^{(n)} + a_1 y_2^{(n-1)} + f_2 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_0 y_n^{(n)} + a_1 y_n^{(n-1)} + f_n = 0, \end{gathered}$$

e moltiplicandole per gli elementi reciproci $D_{1,n}$, $D_{2,n}$,... $D_{n,n}$ di quelli dell'ultima colonna di D, e sommandole coll'osservare che la derivata D' di D è il determinante che viene da D sostituendo agli elementi dell'ultima colonna gli altri $y_1^{(n)}$, $y_3^{(n)}$,.. $y_n^{(n)}$, avremo

$$a_0 D' + a_1 D + \mathbf{D} = 0,$$

quando s'indichi con $\mathbf{D}$ il determinante

$$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} y_1 & y'_1 & \dots & y_1^{(n-2)} & f_1 \\ y_2 & y'_2 & \dots & y_2^{(n-2)} & f_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n & y'_n & \dots & y_n^{(n-2)} & f_n \end{vmatrix} \tag{20}$$

al quale si riduce D quando agli elementi dell'ultima colonna si sostituiscono f_1, f_2,... f_n.

Ponendo per semplicità di scrittura

$$\Theta_c = \frac{1}{a_0} e^{\int_c^x \frac{a_1}{a_0} dx}, \tag{21}$$

dove c è un valore qualsiasi di x fra a e b pel quale a_0 e a_1 non hanno singolarità, e a_0 non è zero, e moltiplicando la equazione ottenuta per Θ_c, si ottiene l'altra

$$\frac{d\left(e^{\int_c^x \frac{a_1}{a_0} dx} D\right)}{dx} + \Theta_c \mathbf{D} = 0;$$

e da questa integrandola fra a e b, quand'anche in questo intervallo a_0 e a_1 presentino qualche singolarità, e a_0 divenga zero in uno o più punti, purchè anche allora le formule continuino ad avere un significato, si otterrà la formola seguente:

$$\left(e^{\int_c^x \frac{a_1}{a_0} dx} D\right)_b - \left(e^{\int_c^x \frac{a_1}{a_0} dx} D\right)_a = -\int_a^b \Theta_c \mathbf{D}\, dx; \tag{22}$$

e quindi, coll'osservare che sviluppando il determinante D secondo gli elementi della colonna p_a, qualunque sia p, si ha

$$D = y_1^{(p-1)} D_{1,p} + y_2^{(p-1)} D_{2,p} + \cdots + y_n^{(p-1)} D_{n,p},$$

e per s diverso da $p-1$, con s scelto pure fra i numeri $0, 1, 2, \ldots n-1$, si hanno altre $n-1$ equazioni tutte della forma

$$0 = y_1^{(s)} D_{1,p} + y_2^{(s)} D_{2,p} + \cdots + y_n^{(s)} D_{n,p},$$

troveremo subito la formola notevole

$$\left.\begin{aligned} & e^{\int_c^b \frac{a_1}{a_0} dx} \left[D_{1,q} \sum_0^{n-1} h_s y_1^{(s)} + D_{2,q} \sum_0^{n-1} h_s y_2^{(s)} + \cdots D_{n,q} \sum_0^{n-1} h_s y_n^{(s)}\right]_b - \\ & - e^{\int_c^a \frac{a_1}{a_0} dx} \left[D_{1,p} \sum_0^{n-1} k_s y_1^{(s)} + D_{2,p} \sum_0^{n-1} k_s y_2^{(s)} + \cdots D_{n,p} \sum_0^{n-1} k_s y_n^{(s)}\right]_a = -\int_a^b \Theta_c \mathbf{D}\, dx, \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

dove le $h_1, h_2, \ldots h_n$, e così le $k_1, k_2, \ldots k_n$ sono quantità costanti, e sono tutte qualsiasi meno la h_{q-1} pel primo termine, e la k_{p-1} pel secondo che devono essere uguali ad uno, p e q del resto essendo due qualunque dei numeri 1, 2,... n differenti o anche uguali fra loro.

18. Di qui risulta subito che onde sia $\int_a^b \Theta_c \mathbf{D}\, d\, x = 0$ bisognerà che il primo membro dell'ultima formola sia zero; e per questo potranno presentarsi varii casi, fra i quali, quando si continui ad ammettere, come sempre d'ora innanzi faremo, che a_0 e a_1 nell'intervallo (a, b) non abbiano singolarità, sono da distinguersi più specialmente i tre seguenti:

1.° quello in cui il fattore $e^{\int_c^x \frac{a_1}{a_2} dx}$ è zero, cioè si ha $\int_c^x \frac{a_1}{a_0}\, d\, x = -\infty$ tanto per $x = a$ che per $x = b$, nel qual caso per gli integrali $y_1, y_2, \ldots y_n$ resta soltanto la condizione che essi siano finiti anche per $x = a$ e $x = b$ insieme alle loro derivate fino alle $(n-1)^e$ inclusive; ma siccome, quando, come ora supporremo, a_0 nei punti *interni* del nostro intervallo (a, b) non sia mai zero, perchè l'esponenziale $e^{\int_c^x \frac{a_1}{a_0} dx}$ possa essere zero, o l'integrale $\int_c^x \frac{a_1}{a_0}\, d\, x$ possa essere $-\infty$ per $x = a$ e $x = b$ bisognerà che a_0 divenga infinitesimo in ambedue questi punti (a, b), così in questo caso onde essere sicuri che gli integrali che si considerano $y_1, y_2, \ldots y_n$ siano regolari anche per $x = a$ o $x = b$ almeno fino alle derivate $(n-1)^e$, bisognerà che i coefficienti della nostra equazione per questi valori a e b di x, e pei valori di $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_i$ corrispondenti ai rispettivi integrali $y_1, y_2, \ldots y_n$ soddisfino a condizioni speciali, come in particolare per le equazioni lineari fu detto diffusamente nella Memoria del Volume precedente di questi *Annali*; e quindi gli integrali stessi non sempre vi saranno (*).

(*) È da notare che quando si sia nel caso delle equazioni lineari, e un sistema d'integrali $y_1, y_2, \ldots y_n$ debbano appartenere tutti a una unica equazione con coefficienti determinati, per modo cioè che se questi contengono dei parametri variabili $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_i$ quegli integrali debbano corrispondere tutti a uno stesso sistema di valori di questi parametri, o a sistemi di valori che conservino inalterati i coefficienti della equa-

2.° che essendo zero l'esponenziale $e^{\int_c^x \frac{a_1}{a_0} dx}$, o $-\infty$ l'integrale $\int_c^x \frac{a_1}{a_0} dx$ soltanto per uno dei due valori a e b di x, p. es.: per $x=a$, sia zero la quantità fra parentesi del primo termine delle (23) per $x=b$, restando ora gli integrali $y_1, y_2, \ldots y_n$ regolari anche per $x=a$, almeno fino alle derivate dell'ordine $n-1$; e questo, per essere allora a un punto d'infinitesimo di a_0, porterà ancora che debbano essere soddisfatte condizioni speciali pei coefficienti della nostra equazione per $x=a$, come si disse pel caso precedente, talchè anche in questo caso gli integrali non sempre ci saranno.

3.° che essendo finita l'esponenziale $e^{\int_c^x \frac{a_1}{a_0} dx}$ per $x=a$, e $x=b$, pure essendo o no diversa da zero (con chè non si esclude che a_0 possa anche essere zero fra a e b o per $x=a$ e $x=b$), siano zero separatamente le quantità fra parentesi nei due termini per $x=b$ e $x=a$ respettivamente.

19. Fermandoci ora più specialmente sugli ultimi due casi, osserviamo che la forma notevole sotto la quale si sono potute mettere le quantità fra parentesi nella (23) mostra che le condizioni che si hanno nel 3.° caso saranno in particolare soddisfatte quando pei singoli integrali $y_1, y_2 \ldots y_n$ si abbiano i due sistemi di equazioni

$$\left.\begin{array}{l} \sum_0^{n-1} k_s y_1^{(s)}=0, \quad \sum_0^{n-1} k_s y_2^{(s)}=0, \ldots \quad \sum_0^{n-1} k_s y_n^{(s)}=0 \quad \text{per} \quad x=a, \\ \sum_0^{n-1} h_s y_1^{(s)}=0, \quad \sum_0^{n-1} h_s y_2^{(s)}=0 \ldots \quad \sum_0^{n-1} h_s y_n^{(s)}=0 \quad \text{per} \quad x=b, \end{array}\right\} \quad (24)$$

---

zione stessa, allora se in un punto, p. es.: a o b, a_0 sarà zero e al tempo stesso l'integrale $\int_c^x \frac{a_1}{a_0} dx$ sarà $-\infty$, uno o più degli integrali medesimi o delle loro prime $n-1$ derivate dovranno divenire infiniti in quel punto, perchè, come è noto, pel loro determinante D si ha la formola $D = D_c\, e^{\int_c^x \frac{a_1}{a_0} dx}$ con D_c diverso da zero, e questa porta che D debba essere infinita nello stesso punto.

Del resto poi questo caso di $y_1, y_2, \ldots y_n$ tutti integrali di una *stessa* equazione lineare con coefficienti determinati non ha qui nessuna importanza, perchè allora il determinante **D** viene identicamente zero.

essendo ancora le h_s e k_s costanti qualsiansi, delle quali basta ora che una almeno delle prime e una almeno delle seconde sia diversa da zero; e nel secondo caso quando sia zero l'esponenziale $e^{\int_c^x \frac{a_1}{a_0} dx}$, o sia $-\infty$ l'integrale $\int_c^x \frac{a_1}{a_0} dx$ per $x=a$, si avrà soltanto il secondo di questi due sistemi di equazioni, ciò che però equivale a considerarli ancora tutti e due, ma supponendo in questo caso tutte le k_s uguali a zero; per modo che, con questa osservazione, volendo, i due casi potranno anche trattarsi insieme.

Tenendoli però ancora separati, noi vediamo di qui che nel terzo caso i nostri integrali $y_1, y_2, \ldots y_n$ sono sottoposti ciascuno a una stessa condizione iniziale per $x=a$, e a una per $x=b$, nè si richiedono per essi altre condizioni; e si comprende quindi, come del resto troveremo effettivamente più oltre trattando delle equazioni lineari, che per gli integrali medesimi, almeno quando a_0 non è mai zero nell'intervallo (a, b), resta sempre una grande indeterminazione, salvo pel caso delle equazioni del second'ordine, nel qual caso le condizioni poste sopra si riducono alle due che ordinariamente si danno sotto la forma $Ky'-h'y=0$ per $x=a$, e $Ky'-hy=0$ per $x=b$, partendo dalla equazione

$$\frac{d K \frac{d y}{d x}}{d x} + \{F(x) \nu(z) + F_1(x)\} y = 0.$$

Nel secondo caso poi le condizioni precedenti (24) sottopongono gli integrali soltanto a una stessa condizione iniziale per $x=b$, e parrebbe quindi che dovesse restare per essi anche maggiore indeterminazione; però le condizioni che vengono dal doversi mantenere regolari sino alle derivate $(n-1)^e$ nel punto a, che allora è necessariamente un infinitesimo di a_0, potranno anche fare mancare gli integrali medesimi; e quindi converrà limitarsi ai casi nei quali integrali regolari in a esistono, e considerare allora soltanto quelli fra questi integrali che possono soddisfare alle condizioni (24) relative al limite b con valori determinati delle $h_1, h_2, \ldots h_n$; ma in ogni modo risulta di qui che, per lo meno nel terzo caso, quando a_0 non sia mai zero nell'intervallo (a, b), e sia $n>2$, almeno ordinariamente vi saranno sempre infiniti sistemi d'integrali pei quali si avrà $\int_a^b \Theta_c \mathbf{D}\, d x = 0$, essendo $\mathbf{D}$ il determinante (20), e Θ_c la espressione (21); e questo dà una proprietà generale e notevole degli integrali delle equazioni differenziali di qualunque ordine.

20. Se poi si osserva che, sviluppando il solito determinante D per gli elementi della linea r^a, si può scrivere

$$D = y_r D_{r,1} + y'_r D_{r,2} + y''_r D_{r,3} + \cdots + y_r^{(n-1)} D_{r,n},$$

e per s diverso da r si hanno $n-1$ equazioni della forma

$$0 = y_s D_{r,1} + y'_0 D_{r,2} + y''_s D_{r,3} + \cdots + y_s^{(n-1)} D_{r,n},$$

si vede subito che la (22) dà luogo anche all'altra

$$e^{\int_c^b \frac{a_1}{a_0} dx} \left[D_{r,1} \sum_1^n h_s y_s + D_{r,2} \sum_1^n h_s y'_s + D_{r,3} \sum_1^n h_s y''_s + \cdots + D_{r,n} \sum_1^n h_s y_s^{(n-1)} \right]_b -$$

$$- e^{\int_c^a \frac{a_1}{a_0} dx} \left[D_{p,1} \sum_1^n k_s y_s + D_{p,2} \sum_1^n k_s y'_s + D_{p,3} \sum_1^n k_s y''_s + \cdots + D_{p,n} \sum_1^n k_s y_s^{(n-1)} \right]_a = -\int_a^b \Theta_c \mathrm{D}\, dx,$$

e questa ci mostra che ai sistemi di condizioni (24) potranno anche sostituirsi i seguenti

$$\left.\begin{array}{l} \sum_1^n k_s y_s = 0, \quad \sum_1^n k_s y'_s = 0, \quad \sum_1^n k_s y''_s = 0, \ldots \quad \sum_1^n k_s y_s^{(n-1)} = 0 \quad \text{per} \quad x = a, \\ \sum_1^n h_s y_s = 0, \quad \sum_1^n h_s y'_s = 0, \quad \sum_1^n h_s y''_s = 0, \ldots \quad \sum_1^n h_s y_s^{(n-1)} = 0 \quad \text{per} \quad x = b, \end{array}\right\} \qquad (25)$$

nei quali il primo membro di ciascuna equazione è la derivata del primo membro della precedente per $x = a$ o $x = b$ respettivamente.

Però mentre le equazioni di ciascuno dei due sistemi (24) danno ciascuna condizioni iniziali relative a ogni singolo integrale separatamente, le precedenti legano fra loro contemporaneamente tutti gli integrali nel punto a o nel punto b; e del resto, almeno in generale, dalle une si può passare facilmente alle altre; noi perciò non ci fermeremo sulle equazioni precedenti (25), e ci limiteremo a considerare il caso delle equazioni (24).

21. Con queste condizioni, quando, come il più spesso avverrà, saremo nel 3.° dei casi del § 18, si comprende, come già dicemmo, che se n è superiore a 2, e se a_0 non è mai zero nell'intervallo (a, b) i singoli integrali $y_1, y_2, \ldots y_n$ che possono considerarsi, e così i loro sistemi non risultano affatto determinati; e quindi per ogni equazione di ordine superiore al secondo, se non si pongono altre condizioni esisteranno infiniti sistemi di questi integrali; mentre

se essendo nel secondo dei casi del § 18 sarà p. es.: $\int_c^x \frac{a_1}{a_0}\, d\,x = -\infty$ per $x = a$, bisognerà che per l'equazione data e pei coefficienti $h_0, h_1, \ldots h_n$ della condizione al limite b si verifichino condizioni speciali perchè gli integrali regolari possano esistere; come dovranno verificarsi condizioni speciali fra i coefficienti della equazione perchè possano esistere integrali regolari quando saremo nel primo dei casi del § 18.

Limitiamoci sempre d'ora innanzi alla considerazione delle equazioni lineari; e estendendo una denominazione già introdotta nell'Analisi pel caso delle equazioni del second'ordine, chiamiamo *integrali normali* delle nostre equazioni quegli integrali y che soddisfano a date condizioni ai limiti a e b che sono relazioni lineari e omogenee fra i valori dell'integrale e delle sue prime $n-1$ derivate a questi limiti, cioè sono della forma

$$\left.\begin{array}{l} k_0\, y_a + k_1\, y'_a + k_2\, y''_a + \cdots + k_{n-1}\, y_a^{(n-1)} = 0 \quad \text{quelle per} \quad x = a, \\ \text{e} \\ h_0\, y_b + h_1\, y'_b + h_2\, y''_b + \cdots + h_{n-1}\, y_b^{(n-1)} = 0 \quad \text{quelle per} \quad x = b; \end{array}\right\} \quad (27)$$

e queste relazioni saranno almeno le due qui scritte se saremo nel 3.° dei casi del § 18, e almeno una, p. es. la seconda se saremo nel secondo degli stessi casi, e non potranno mai essere più di n.

E fra gli integrali che chiamiamo normali comprenderemo (quando esistano e vogliano considerarsi) anche quelli corrispondenti al primo dei casi del § 18 nel quale si ha $a_0 = 0$, e $\int_c^x \frac{a_1}{a_0}\, d\,x = -\infty$ tanto per $x = a$ quanto per $x = b$; ma allora potrà non essere data nessuna condizione ai limiti a e b, e anzi bene spesso se saranno date alcune di queste condizioni, come anche se non saranno date, gli integrali regolari non esisteranno.

In ogni caso poi delle condizioni ai limiti, volendo, potremo scriverne sempre n introducendone, per arrivare a questo numero, alcune coi coefficienti tutti zero; ma quand'anche questo talvolta si faccia, noi naturalmente parlando di condizioni date ai limiti a o b, salvo che non si avverta espressamente il contrario, intenderemo sempre di riferirci a quelle per le quali uno almeno dei coefficienti h e k è diverso da zero; e di queste negli studii che ora faremo ammetteremo sempre che ve ne sia almeno una, riferendoci così soltanto al 2.° e 3.° dei casi del § 18.

Ciò premesso, consideriamo ora dapprima il caso delle equazioni omogenee

$$a_0\, y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\, y' + a_n\, y = 0. \tag{28}$$

Si comprenderà subito intanto che qualunque sia il numero delle condizioni date ai limiti (che, come abbiamo detto, intendiamo che abbiano almeno un coefficiente diverso da zero, per ogni sistema *determinato* di valori dei coefficienti a_0, a_1, a_2,... a_n (*) non *potranno esistere sistemi fondamentali completi* d'integrali, pei quali ciascuno di questi integrali soddisfi alle condizioni ai limiti che si saranno poste (cioè che siano tutti integrali normali), o anche soddisfino soltanto a una di queste condizioni che sia la stessa per tutti, *a meno che il loro determinante* D, che dovrebbe essere diverso da zero negli altri punti, *si annulli al limite* a *o* b *corrispondente;* perchè, se tali sistemi di integrali esistessero, scrivendo per ciascuno di essi questa equazione al limite a o b che dovrebbe essere soddisfatta, si formerebbe un sistema di n equazioni lineari e omogenee relative tutte alle h_0, h_1, h_2,... h_n, o tutte alle k_0, k_1, k_2,... k_n, il determinante delle quali sarebbe appunto il valore di D per $x = b$ o per $x = a$, e dovrebbe essere zero perchè le corrispondenti h_s e k_s non fossero tutte nulle.

E questa condizione che sia $D = 0$ per $x = a$ o per $x = b$, quando gli integrali sono fondamentali, porta che nel punto corrispondente sia zero il coefficiente a_0, e al tempo stesso sia $+\infty$ l'integrale $\int_c^x \frac{a_1}{a_0}\, dx$, perchè, appartenendo quegli integrali a una stessa equazione, si ha $D = D_c\, e^{-\int_c^x \frac{a_1}{a_0} dx}$, con D_c costante diversa da zero, e perchè sia $D = 0$ per $x = a$ o per $x = b$ bisogna che sia $\int_c^x \frac{a_1}{a_0}\, d\,x = +\infty$.

22. Però se, sotto le ipotesi ora indicate, non possono esistere per una stessa equazione omogenea (28) sistemi completi d'integrali fondamentali che

(*) Con questo si viene a dire, come nella Nota al § 18, che se in alcuni o in tutti i coefficienti a_0, a_1, a_2,... a_n oltre alla variabile x figureranno altri parametri ζ_1, ζ_2,... ζ_i, questi parametri per tutti gli integrali che ora si considerano dovranno avere gli stessi valori, o almeno valori tali che anche passando dagli uni agli altri di essi restino inalterati i coefficienti a_0, a_1, a_2,... a_n della nostra equazione.

siano al tempo stesso tutti integrali normali, ponendo ora senz'altro, per semplicizzare, la condizione che a_0 non sia mai zero nell'intervallo (a, b) (*), con che verremo a porci necessariamente nel 3.° dei casi del § 18, che porta almeno due condizioni ai limiti come le (27); e limitandoci dapprima al caso in cui non si abbiano altro che queste due condizioni (27), sarà facile vedere che esistono sempre sistemi d'integrali fondamentali che contengono $n-1$ o $n-2$ integrali normali, secondochè saranno soddisfatte o no certe condizioni, che poi indicheremo, fra i valori dei coefficienti $a_0, a_1, a_2, \dots a_n$ della equazione data per $x=a$, e $x=b$ e quelli k e h delle stesse condizioni (27).

Indichiamo infatti con $w_1, w_2, \dots w_n$ gli integrali di un sistema fondamentale della equazione data (28) che, sebbene potrebbe sceglersi comunque, quando, come ora supponiamo, a_0 non sia mai zero nell'intervallo (a, b), potremo intendere sempre che sia quello formato dagli n integrali particolari che vengono dalle nostre formole generali relative al caso delle equazioni omogenee facendovi tutte le costanti successivamente uguali allo zero, fuorchè una che sarà presa uguale ad uno.

Questi integrali saranno finiti e continui insieme alle loro derivate fino alle n^e inclusive in tutto l'intervallo da a a b (gli estremi inclusi), perchè a_0 non è mai zero in questo intervallo; e per ogni integrale y_p della (28) avremo

$$y_p = c_{p,1} w_1 + c_{p,2} w_2 + \cdots + c_{p,n} w_n, \tag{29}$$

essendo le $c_{p,1}\ c_{p,2}, \dots c_{p,n}$ costanti qualsiansi; quindi se questo integrale dovrà

(*) Per semplicizzare supponiamo ora che a_0 non sia mai zero nell'intervallo (a, b); però propriamente, colla dimostrazione che facciamo, basterebbe ancora limitarsi a supporre che l'integrale $\int_c^x \frac{a_1}{a_0}\, dx$ non fosse $+\infty$ nè per $x=a$, nè per $x=b$, quando, come in certi casi avviene, l'essere $a_0=0$ $\left(\text{senza però che sia } \int_c^x \frac{a_1}{a_0}\, dx = -\infty \text{ per quanto osservammo in Nota al § 18}\right)$ non esclude che esistano ancora n integrali fondamentali w_1, $w_2, \dots w_n$ regolari anche nei punti a e b fino alle derivate $(n-1)^e$ incl. Solo bisognerebbe porre altre condizioni, o fare studii speciali quando questi n integrali regolari fino alle derivate $(n-1)^e$ in a e b non esistessero, o si fosse incerti sulla loro esistenza.

essere un integrale normale pel quale siano soddisfatte le condizioni (27), si dovranno avere le formole seguenti

$$\left.\begin{aligned} c_{p,1}\left(\sum_0^{n-1} k_s w_1^{(s)}\right)_a + c_{p,2}\left(\sum_0^{n-1} k_s w_2^{(s)}\right)_a + \cdots + c_{p,n}\left(\sum_0^{n-1} k_s w_n^{(s)}\right)_a = 0, \\ c_{p,1}\left(\sum_0^{n-1} h_s w_1^{(s)}\right)_b + c_{p,2}\left(\sum_0^{n-1} h_s w_2^{(s)}\right)_b + \cdots + c_{p,n}\left(\sum_0^{n-1} h_s w_n^{(s)}\right)_b = 0\,; \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

e siccome ora nè le h_s nè le k_s possono essere tutte nulle, in queste equazioni nè le n somme $\sum\limits_0^{n-1} (k_s w_i^{(s)})_a$ corrispondenti ai valori $1, 2, \ldots, n-1, n$ di i, nè le n altre $\left(\sum\limits_0^{n-1} h_s w_i^{(s)}\right)_b$ potranno essere tutte zero, perchè gli integrali w_1, $w_2, \ldots w_n$ costituiscono un sistema fondamentale, e a_0 *non è zero* nè per $x=a$, nè per $x=b$; e quindi nessuna delle due equazioni precedenti (30) potrà essere una identità, e scrivendo la matrice

$$\left\| \begin{matrix} \left(\sum\limits_0^{n-1} k_s w_1^{(s)}\right)_a & \left(\sum\limits_0^{n-1} k_s w_2^{(s)}\right)_a & \cdots & \left(\sum\limits_0^{n-1} k_s w_n^{(s)}\right)_a \\ \left(\sum\limits_0^{n-1} h_s w_1^{(s)}\right)_b & \left(\sum\limits_0^{n-1} h_s w_2^{(s)}\right)_b & \cdots & \left(\sum\limits_0^{n-1} h_s w_n^{(s)}\right)_b \end{matrix} \right\|, \quad (31)$$

questa avrà necessariamente la caratteristica uguale a 1 o a 2.

Supponiamo ora dapprima che questa caratteristica sia 1, nel qual caso i coefficienti della (28) e quelli delle (27) dovranno essere tali che pei valori che ne verranno per $w_1, w_2, \ldots w_n$ e per le loro derivate per $x=a$ e $x=b$ risultino soddisfatte le condizioni che vengono dall'eguagliare a zero i determinanti di 2.° ordine ai quali dà luogo la nostra matrice (31), e conseguentemente le condizioni (30) si ridurranno in questo caso ad una sola.

Allora, se p. es.: $\left(\sum\limits_0^{n-1} h_s w_1^{(s)}\right)_b$ sarà diverso da zero, dovendo essere

$$c_{p,1} = \frac{c_{p,2}\left(\sum\limits_0^{n-1} h_s w_2^{(s)}\right)_b + c_{p,3}\left(\sum\limits_0^{n-1} h_s w_3^{(s)}\right)_b + \cdots + c_{p,n}\left(\sum\limits_0^{n-1} h_s w_n^{(s)}\right)_b}{\left(\sum\limits_0^{n-1} h_s w_1^{(s)}\right)_b}, \quad (32)$$

si vede chiaro che prendendo per le $(n-1)^2$ costanti $c_{p,2}, c_{p,3}, \ldots c_{p,n}$ corrispondenti agli $n-1$ valori $1, 2, \ldots, n-1$ di p valori qualsiansi pei quali il loro determinante

$$C_{n-1} = \begin{vmatrix} c_{1,2} & c_{1,3} & \dots & c_{1,n} \\ c_{2,2} & c_{2,3} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1,2} & c_{n-1,3} & \dots & c_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

sia diverso da zero, e contemporaneamente determinando le $c_{1,1}, c_{2,1}, \dots c_{n-1,1}$ colla (32), e poi prendendo le $c_{n,1}, c_{n,2}, \dots c_{n,n}$ in modo che *non* resti soddisfatta la condizione cui si ridurrebbe la (32) stessa per $p = n$, è certo che il determinante formato da questi valori delle $c_{p,i}$ sarà diverso da zero, perchè si potrà subito ridurre all'altro

$$\begin{vmatrix} 0 & c_{1,2} & c_{1,3} & \dots & c_{1,n} \\ 0 & c_{2,2} & c_{2,3} & \dots & c_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & c_{n-1,2} & c_{n-1,3} & \dots & c_{n-1,n} \\ \gamma & c_{n,2} & c_{n,3} & \dots & c_{n,n} \end{vmatrix} = \pm \gamma C_{n-1},$$

essendo γ un numero diverso da zero (*); quindi, ricordando quanto dicemmo al § 3 della prima delle solite Memorie più volte citate, si conclude che gli n integrali $y_1, y_2, \dots y_{n-1}, y_n$ corrispondenti ai valori precedenti delle costanti $c_{p,i}$ costituiranno un sistema fondamentale, e di essi i primi $n-1$ saranno integrali normali perchè soddisfaranno alle condizioni (27).

Se poi la matrice (31) avrà la caratteristica 2, e p. es.: il determinante λ formato dalle due prime verticali sarà diverso da zero, allora perchè risultino soddisfatte ambedue le condizioni (30) dovremo avere due formole della forma

$$\left.\begin{aligned} c_{p,1} &= \frac{1}{\lambda}\left\{\lambda_3 c_{p,3} + \lambda_4 c_{p,4} + \dots + \lambda_n c_{p,n}\right\}, \\ c_{p,2} &= \frac{1}{\lambda}\left\{\mu_3 c_{p,3} + \mu_4 c_{p,4} + \dots + \mu_n c_{p,n}\right\}, \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

(*) Il modo più semplice di soddisfare a queste condizioni sarà quello di prendere le $c_{p,2}, c_{p,3}, \dots c_{p,n}$ per $p = 1, 2, 3, \dots n-1$ tutte eguali a zero fuorchè le $c_{1,2}, c_{2,3}, \dots c_{n-1,n}$ che potranno prendersi uguali ad uno, e le $c_{n,2}, c_{n,3}, \dots c_{n,n}$ esse pure tutte eguali a zero e la $c_{n,1}$ uguale ad uno.

nelle quali le $\lambda_3, \lambda_4, \ldots \lambda_n$ e le $\mu_3, \mu_4, \ldots \mu_n$ all'infuori del segno sono i determinanti del second'ordine ai quali dà luogo la matrice (31) combinando respettivamente la seconda e la prima verticale colle verticali 3^a, $4^a, \ldots n^a$, e precisamente si ha

$$\lambda_i = \begin{vmatrix} \left(\sum_0^{n-1} k_s w_2^{(s)}\right)_a & \left(\sum_0^{n-1} k_s w_i^{(s)}\right)_a \\ \left(\sum_0^{n-1} h_s w_2^{(s)}\right)_b & \left(\sum_0^{n-1} h_s w_i^{(s)}\right)_b \end{vmatrix}, \quad \mu_i = - \begin{vmatrix} \left(\sum_0^{n-1} k_s w_1^{(s)}\right)_a & \left(\sum_0^{n-1} k_s w_i^{s}\right)_a \\ \left(\sum_0^{n-1} h_s w_1^{(s)}\right)_b & \left(\sum_0^{n-1} h_s w_i^{(s)}\right)_b \end{vmatrix};$$

quindi se la equazione data (28) sarà di ordine superiore al secondo, prendendo ora per le $(n-2)^2$ costanti $c_{p,3}, c_{p,4}, \ldots c_{p,n}$ corrispondenti agli $n-2$ valori $1, 2, \ldots n-2$ di p altrettanti valori ad arbitrio, ma pei quali il determinante

$$\begin{vmatrix} c_{1,3} & c_{1,4} & \ldots & c_{1,n} \\ c_{2,3} & c_{2,4} & \ldots & c_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n-2,3} & c_{n-2,4} & \ldots & c_{n-2,n} \end{vmatrix}$$

sia diverso da zero, e determinando in corrispondenza per ognuno degli stessi valori $1, 2, \ldots n-2$ di p i valori di $c_{p,1}$ e di $c_{p,2}$ colle formole (33), si vede che prese comunque anche le $c_{n-1,3}, c_{n-1,4}, \ldots c_{n-1,n}$ e le $c_{n,3}, c_{n,4}, \ldots c_{n,n}$ basterà poi, come sarà sempre evidentemente possibile, prendere le $c_{n-1,1}$, $c_{n-1,2}$, $c_{n,1}$ e $c_{n,2}$ in modo che coi valori così scelti per le $c_{n-1,s}$ e $c_{n,s}$ le differenze $\gamma_{n-1,1}, \gamma_{n-1,2}, \gamma_{n,1}, \gamma_{n,2}$ fra i due membri delle formole (33) per $p = n-1$ e $p = n$ non solo non vengano tutte zero, ma neppure risultino tali che venga zero il determinante $\begin{vmatrix} \gamma_{n-1,1} & \gamma_{n-1,3} \\ \gamma_{n,1} & \gamma_{n,2} \end{vmatrix}$, per essere certi che il determinante formato da tutti i valori così determinati delle $c_{p,i}$ venga diverso da zero (*); e allora gli integrali $y_1, y_2, \ldots y_{n-2}, y_{n-1}, y_n$ corrispondenti a questi valori delle costanti costituiranno un sistema fondamentale, e di essi

(*) Anche qui il modo più semplice di soddisfare a queste condizioni sarà quello di prendere le $c_{p,3}, c_{p,4}, \ldots c_{p,n}$ per $p = 1, 2, \ldots n-2$ tutte eguali a zero fuorchè le $c_{1,3}$, $c_{2,4}, \ldots c_{n-2,n}$ che si prenderanno uguali ad uno, e le $c_{n-1,1}, c_{n-2,2}, \ldots, c_{n-1,n}$ e $c_{n,1}, c_{n,2}, \ldots c_{n,n}$ tutte eguali a zero esse pure all'infuori delle $c_{n-1,1}$ e $c_{n,2}$ che si prenderanno uguali ad uno.

i primi $n-2$ saranno integrali normali perchè soddisfaranno alle condizioni (27).

Si aggiunge che con questo stesso processo si trova che in questo caso in cui la matrice (31) è di caratteristica 2, nei sistemi fondamentali non potranno esservi mai più di $n-2$ integrali normali che soddisfino alle condizioni (27), e nel caso delle equazioni del second'ordine non ve ne saranno affatto; e così si può ora affermare che, per ogni equazione omogenea (28), finchè non mutino i suoi coefficienti (pel cambiamento dei parametri ζ_1, $\zeta_2, \ldots \zeta_i$ che in essi figurino) esistono sempre infiniti sistemi d'integrali fondamentali dei quali fanno parte $n-1$ o $n-2$ integrali normali che soddisfano alle condizioni (27) e non più, secondochè la caratteristica della matrice (31) sarà 1 o 2 respettivamente.

Questo evidentemente porta anche a dire che per ogni equazione omogenea (28), e corrispondentemente a uno stesso sistema di *due sole* condizioni ai limiti (27), nel caso in cui a_0 sia diverso da zero in tutto l'intervallo (a, b), e la matrice (31) sia di caratteristica 1, esisteranno sempre $n-1$ integrali normali, e non più, linearmente distinti, cioè non legati fra loro da equazioni lineari o omogenee; e nel caso che la matrice (31) sia di caratteristica 2 ne esisteranno soltanto $n-2$; e così in particolare, nel caso delle equazioni del second'ordine non si avranno integrali normali altro che quando il determinante del second'ordine, cui allora si riduce la matrice (31), sia zero, e allora se ne avrà uno solo.

23. E si può aggiungere infine che quando non si debba considerare che una sola delle condizioni ai limiti (27), p. es.: la seconda relativa al punto b, allora ammesso sempre che a_0 per $x=b$ non sia zero, o anche ammettendo ora che se a_0 è zero per $x=b$, l'integrale $\int_c^x \frac{a_1}{a_0}\,dx$ non sia $+\infty$ per $x=b$, e $w_1, w_2, \ldots w_n$ si mantengano ancora regolari fino alle derivate $(n-1)^e$ per $x=b$, è certo che le somme $\sum_{9}^{n-1}(h_s w_i^{(s)})_b$ per $i=1, 2, \ldots n$ non potranno essere tutte nulle; e se p. es.: la $\sum_0^{n-1}(h_s w_1^{(s)})_b$ non sarà uguale a zero, coi ragionamenti stessi che si fecero nel caso in cui la caratteristica della matrice (31) si suppose essere 1, si vede che si avranno sempre $n-1$ integrali linearmente distinti $\mathrm{y}_2, \mathrm{y}_3, \ldots \mathrm{y}_n$ che soddisfaranno alla indicata condizione al limite b, e che insieme con un altro integrale y_1 che non vi soddisfa costituirà un sistema fondamentale della equazione data.

E questi integrali $y_2, y_3, \ldots y_n$ non saranno linearmente distinti da quelli che si hanno nel caso di due equazioni ai limiti (27) quando, qualunque sia la condizione relativa al punto a, quella relativa al punto b è la stessa, e la matrice (31) ad essa corrispondente è di caratteristica 1; perchè in questo caso per ciascuno degli stessi integrali $y_2, y_3, \ldots y_n$ sarà soddisfatta anche la prima delle (30) per essere questa conseguenza della seconda.

Osservando poi che ora non si tiene conto qui altro che della seconda delle condizioni (27), si può dire che i risultati qui ottenuti si applicheranno anche al 2.° dei casi del § 18 quando pel punto a il coefficiente a_0 sia zero e sia $\int_c^x \frac{a_1}{a_0}\, d\,x = -\infty$, nel qual caso però uno o più degli integrali fondamentali $w_1, w_2, \ldots w_n$, e bene spesso anche uno o più degli integrali suindicati y_2, $y_3, \ldots y_n$, cesseranno di essere regolari fino alle derivate $(n-1)^e$ nel punto a (v. nota al § 18); e si applicheranno anche al 3.° dei casi dello stesso § 18 quando la prima condizione ai limiti (27) risulti identicamente soddisfatta per qualunque integrale, ciò che del resto porterà ancora che per $x = a$ sia $a_0 = 0$, ma con $\int_c^a \frac{a_1}{a_0}\, d\,x = +\infty$ se $w_1, w_2, \ldots w_n$ devono mantenersi regolari fino alle derivate $(n-1)^e$ per $x = a$.

24. Se però la equazione data invece di essere omogenea sarà completa, cioè se sarà la seguente

$$a_0\, y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\, y' + a_n\, y = X, \tag{34}$$

allora per ogni suo integrale y_p avremo

$$y_p = c_{p,1}\, w_1 + c_{p,2}\, w_2 + \cdots + c_{p,n}\, w_n + Y, \tag{35}$$

essendo Y un suo integrale particolare, pel quale potremo fissare di prendere quello che si annulla insieme alle sue prime $n-1$ derivate per $x = a$, e che, comunque si determini, quando a_0 è diverso da zero nel punto a è unico e determinato per quanto possa presentarsi sotto forme diverse (v. Mem. del Vol. preced. al § 4); e quindi volendo che la espressione (35) di y_p sia un integrale normale della (34), sempre pel caso che si abbiano le due sole condizioni ai limiti (27), bisognerà che le $c_{p,s}$ invece di soddisfare alle equazioni (30) soddisfino alle due

$$\left.\begin{aligned}
&c_{p,1}\left(\sum_0^{n-1} k_s w_1^{(s)}\right)_a + c_{p,2}\left(\sum_0^{n-1} k_s w_2^{(s)}\right)_a + \cdots + c_{p,n}\left(\sum_0^{n-1} k_s w_n^{(s)}\right)_a = 0,\\
&c_{p,1}\left(\sum_0^{n-1} h_s w_1^{(s)}\right)_b + c_{p,2}\left(\sum_0^{n-1} h_s w_2^{(s)}\right)_b + \cdots + c_{p,n}\left(\sum_0^{n-1} h_s w_n^{(s)}\right)_b = [h_0 Y + h_1 Y' + \cdots + h_{n-1} Y^{(n-1)}]_b,
\end{aligned}\right\} \quad (36)$$

i primi membri delle quali daranno ancora luogo alla matrice (31); e se questa matrice sarà di caratteristica 1, queste due equazioni, dovendo ridursi a una sola, porteranno di necessità che la quantità

$$\mathsf{Y} = h_0\, Y + h_1\, Y' + \cdots + h_{n-1}\, Y^{(n-1)} \quad (37)$$

per $x = b$ debba essere zero, cioè bisognerà che l'integrale particolare Y della (34) che abbiamo scelto *sia esso stesso un integrale normale*; e in questo caso, ripetendo i ragionamenti fatti precedentemente, o anche, più semplicemente, osservando che allora la parte $c_{p,1}\, w_1 + c_{p,2}\, w_2 + \cdots + c_{p,n}\, w_n$ delle (35) deve essere un integrale normale della equazione omogenea, si trova che vi saranno sistemi di n integrali della (34) diversi da Y che col toglervi Y si riducono a integrali fondamentali della equazione omogenea corrispondente, e sono dotati della particolarità che di essi $n-1$, e non più di $n-1$, sono integrali normali della equazione stessa (34). E questi integrali saranno linearmente distinti, perchè se esistesse fra loro una relazione lineare e omogenea, in questa a causa della (34) la somma dei coefficienti dovrebbe essere zero, e quindi con semplici sostituzioni essa condurrebbe alla stessa relazione fra gli integrali della equazione omogenea.

Se poi la stessa matrice (31) sarà di caratteristica 2, e ad es. il determinante λ formato dalle due prime verticali sarà diverso da zero, allora le (36) daranno luogo alle due

$$\left.\begin{aligned}
c_{p,1} &= \frac{1}{\lambda}\left\{\lambda_3\, c_{p,3} + \lambda_4\, c_{p,4} + \cdots + \lambda_n\, c_{p,n}\right\} + \frac{1}{\lambda}\left(\sum_0^{n-1} k_s w_2^{(s)}\right)_a \mathsf{Y}_b,\\
c_{p,2} &= \frac{1}{\lambda}\left\{\mu_3\, c_{p,3} + \mu_4\, c_{p,4} + \cdots + \mu_n\, c_{p,n}\right\} - \frac{1}{\lambda}\left(\sum_0^{n-1} k_s w_1^{(s)}\right)_a \mathsf{Y}_b,
\end{aligned}\right\} \quad (38)$$

nelle quali le $\lambda_3, \lambda_4, \ldots \lambda_n, \mu_3, \mu_4, \ldots \mu_n$ saranno ancora i determinanti del secondo ordine che figurano nelle formole (33); e degli ultimi termini dei secondi membri uno almeno sarà diverso da zero se Y_b non sarà zero; quindi se Y_b sarà zero, cioè se il nostro integrale particolare Y della equazione data (34) sarà un suo integrale normale, avverrà, come nel caso delle equazioni omogenee, che vi saranno sempre sistemi di n integrali diversi da Y, che col toglierví Y si riducono a integrali fondamentali della equazione omogenea corrispondente, tali che di essi $n-2$, e non più di $n-2$, sono sempre integrali normali della equazione data; mentre se $\mathbf{Y}_b$ non sarà zero, cioè se Y che pure è un integrale delle (34) non sarà un suo integrale normale, allora si potranno ripetere le considerazioni fatte per le equazioni omogenee, prendendo ad es. le $(n-2)^2$ quantità $c_{p,3}, c_{p,4}, \ldots c_{p,n}$ per $p=1, 2, \ldots n-2$ in modo che il loro determinante sia diverso da zero, e le $c_{n-1,3}, c_{n-1,4}, \ldots c_{n-1,n}$ e così le $c_{n,3}, c_{n,4}, \ldots c_{n,n}$ prendendole tutte uguali allo zero, e determinando poi le $c_{p,1}$ e $c_{p,2}$ per $p=1, 2, \ldots n-2, n-1$ per mezzo delle formole (38); e per $p=n$ determinandole in modo che il determinante $\begin{vmatrix} c_{n-1,1} & c_{n-1,2} \\ c_{n,1} & c_{n,1} \end{vmatrix}$ non fosse zero; e così facendo troveremo subito che in questo caso vi saranno sistemi di n integrali che col toglierví Y danno luogo al solito ad un sistema di integrali fondamentali della equazione omogenea, e sono tali che di essi $n-1$, e non più di $n-1$, sono sempre integrali normali della equazione data (34) (*); e ciò a differenza di quanto abbiamo visto che accade quando la matrice (31) è di caratteristica 1, nel qual caso non può esistere nessun integrale normale quando non lo è Y; e questi $n-1$ integrali normali della equazione (34), come gli $n-2$ del caso precedente saranno ancora linearmente distinti.

E così, riassumendo, si può dire che nel caso delle equazioni complete (34), se l'integrale particolare Y, che è quello determinato dalla condi-

(*) Così prendendo le $c_{p,3}, c_{p,4}, \ldots c_{p,n}$ per $p=1, 2, \ldots n-1$ tutte eguali a zero, all'infuori delle $c_{p,p+2}$ che saranno prese uguali ad uno, gli integrali normali corrispondenti $y_2, y_3, \ldots y_{n-1}$ saranno dati dalle formole

$$y_2 - \left(\frac{\lambda_3}{\lambda} + \nu_1\right) w_1 + \left(\frac{\mu_3}{\lambda} + \nu_2\right) w_2 + w_3 + Y,$$

$$y_n - \left(\frac{\lambda_4}{\lambda} + \nu_1\right) w_1 + \left(\frac{\mu_4}{\lambda} + \nu_2\right) w_2 + w_4 + Y,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_{n-2} = \left(\frac{\lambda_4}{\lambda} + \nu_1\right) w_1 + \left(\frac{\mu_n}{\lambda} + \nu_2\right) w_2 + w_n + Y,$$

$$y_{n-1} = \nu_1 w_1 + \nu_2 w_2 + Y,$$

essendo ν_1 e ν_2 gli ultimi termini dei secondi membri delle (38) respettivamente.

zione di essere nullo insieme alle sue prime $n-1$ derivate per $x=a$, sarà un integrale normale, allora, oltre a questo integrale normale, ne avremo altri $n-1$ o $n-2$ linearmente distinti secondochè la matrice (31) sarà di caratteristica 1 o di caratteristica 2; e se Y non sarà un integrale normale, allora non avremo affatto integrali normali quando la detta matrice avrà la caratteristica 1, e ne avremo soltanto $n-1$ linearmente distinti quando la stessa matrice avrà la caratteristica 2; o, in altri termini, se la matrice (31) sarà di caratteristica 2 avremo sempre $n-1$ integrali normali linearmente distinti, e non più, uno dei quali sarà Y se anche Y sarà un integrale normale; e quando la stessa matrice sarà di caratteristica 1 avremo ancora $n-1$ integrali normali linearmente distinti e diversi da Y, e non più, se Y sarà un integrale normale, e non ne avremo nessuno se Y non sarà un integrale normale.

E così in particolare nel caso della equazione completa del second'ordine, se Y sarà un integrale normale ne avremo sempre un altro e uno solo quando il determinante di second'ordine al quale allora si riduce la matrice (31) sarà zero, e non lo avremo quando questo determinante sia diverso da zero; mentre al contrario, se Y non sarà un integrale normale allora non ne avremo nessuno quando l'indicato determinante sia zero, e ne avremo uno quando sia diverso da zero; o in altri termini se l'indicato determinante del second'ordine sarà diverso da zero avremo sempre uno e un solo integrale normale che sarà lo stesso Y quando Y sia un integrale normale; mentre se l'indicato determinante sarà zero ne avremo ancora uno e uno solo, diverso da Y, se questo integrale Y sarà un integrale normale; e non ne avremo nessuno se Y non sarà un integrale normale.

25. E sempre nel caso che ora consideriamo delle equazioni complete (34), tenendo conto di quanto si disse per le equazioni omogenee al § 23 si può osservare che, anche sotto le ipotesi più generali del paragrafo stesso intorno ad a_0 e agli integrali $w_1, w_2, \ldots w_n$ nell'intorno di b, per la equazione omogenea corrispondente esisteranno sempre $n-1$ integrali linearmente distinti $\mathrm{y}_2, \mathrm{y}_3, \ldots \mathrm{y}_n$ che soddisfano alla seconda delle condizioni (27) relativa al limite b, e che insieme ad un altro y_1 che *non* vi soddisfa costituiscono un sistema d'integrali fondamentali della equazione omogenea stessa; e potremo prendere

$$Y=\mathrm{y}_1\int_a^x \frac{X\,\mathbf{D}_{1,n}}{a_0\,D}\,dx+\mathrm{y}_2\int_a^x \frac{X\,\mathbf{D}_{2,n}}{a_0\,D}\,dx+\mathrm{y}_3\int_a^x \frac{X\,\mathbf{D}_{3,n}}{a_0\,D}\,dx+\cdots+\mathrm{y}_n\int_a^x \frac{X\,\mathbf{D}_{n,n}}{a_0\,D}\,dx,$$

essendo D il solito determinante del sistema d'integrali della equazione omogenea $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots \mathbf{y}_n$, e $\mathbf{D}_{1,n}, \mathbf{D}_{2,n}, \ldots \mathbf{D}_{n,n}$ gli elementi reciproci di quelli dell'ultima colonna; e quindi avuto riguardo ai valori di $Y', Y'', \ldots Y^{(n-1)}$ che si ottengono da Y colla derivazione si giunge subito ad una conclusione notevolissima, quella cioè che *la condizione necessaria e sufficiente perchè Y risulti un integrale normale della equazione completa data* (34) *è che sia zero l'integrale* $\int_a^b \frac{X\mathbf{D}_{1,n}}{a_0 D}\, dx$, *o l'altro* $\int_a^b \Theta_c X \mathbf{D}_{1,n}\, dx$, *dove al solito* $\Theta_c = \frac{1}{a_0} e^{\int_c^x \frac{a_1}{a_0} dx}$, perchè si ha $D = D_c e^{-\int_c^x \frac{a_1}{a_0} dx}$ dove D_c è il valore di D nel punto c che colle nostre ipotesi sarà diverso da zero.

E, in questo integrale, $\mathbf{D}_{1,n}$ sarà il determinante del sistema degli integrali linearmente distinti $\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \ldots \mathbf{y}_n$ della equazione omogenea che soddisfano alla seconda delle condizioni (27) relativa al limite b, e pei quali potranno anche sempre prendersi gli integrali normali della equazione omogenea stessa relativi ad ambedue le condizioni ai limiti (27) quando la matrice (31) ad esse corrispondente sia di caratteristica 1; e per semplicizzare d'ora innanzi questo determinante $\mathbf{D}_{1,n}$ sarà da noi indicato con Δ.

E ricordiamo esplicitamente che questo teorema vale anche quando a_0 nel punto b divenga zero, purchè l'integrale $\int_c^x \frac{a_1}{a_0} dx$ non sia $+\infty$, e gli integrali $w_1, w_2, \ldots w_n$ si mantengano ancora regolari fino alle derivate $(n-1)^e$ nello stesso punto b.

26. E infine, in seguito a tutto questo, si può anche aggiungere che n funzioni linearmente distinte, e fra le quali, nel caso delle equazioni lineari complete (34) non figuri l'integrale Y, non potranno mai essere tutte integrali normali corrispondenti a uno stesso sistema delle due condizioni ai limiti (27) per una stessa equazione lineare omogenea o no, quando a_0 non sia mai zero nell'intervallo (a, b), e, sotto certe condizioni che abbiamo indicato nei singoli casi, neppure quando a_0 sia zero in uno o in tutti e due gli estremi a e b; e quindi, sotto queste ipotesi, ammettendo che in alcuni o in tutti i coefficienti della nostra equazione figurino uno o più parametri variabili $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_i$, se vorremo considerare n integrali normali linearmente distinti, e che, nel caso delle equazioni complete siano anche diversi da Y, bisognerà

prenderli in parte fra gli integrali normali di una equazione corrispondente a certi valori dei coefficienti o dei parametri variabili ora indicati, e in parte fra gli integrali normali di altre equazioni; e tutt'al più, a seconda dei casi, $n-1$ di quelle funzioni potranno appartenere ad una stessa equazione o corrispondere a uno stesso sistema di valori di quei parametri, e una ad un'altra equazione o ad un altro sistema di valori degli stessi parametri.

27. Ciò premesso, e restando sempre nel caso delle equazioni lineari generali, supponiamo che le n funzioni $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots \mathbf{y}_i, y_{i+1}, y_{i+2}, \ldots y_n$ siano tutte integrali normali pei quali si abbiano le stesse condizioni ai limiti (27), ma le prime i corrispondano a una equazione

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + \mathbf{a}_r y^{(n-r)} + \cdots + \mathbf{a}_s y^{(n-s)} x + \cdots = \mathbf{X}, \qquad (39)$$

e le rimanenti corrispondano ad un'altra equazione

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_r y^{(n-r)} + \cdots + a_s y^{(n-s)} + \cdots = X, \qquad (40)$$

nella quale alcuni coefficienti dopo il secondo, p. es. $a_r, a_s, \ldots$ differiscano dai corrispondenti $\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_s, \ldots$ della prima, e anche i secondi membri X e $\mathbf{X}$ possano differire fra loro; e esaminiamo il determinante $\mathbf{D}$ corrispondente a queste funzioni $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots \mathbf{y}_i\ y_{i+1}, y_{i+2}, \ldots y_n$ che figura nelle formole del § 17 e pel quale si ha $\int_a^b \Theta_c \mathbf{D}\, d x = 0$, con $\Theta_c = \frac{1}{a_0} e^{\int_c^x \frac{a_1}{a_0} dx}$.

Togliendo in questo determinante $\mathbf{D}$ dagli elementi dell'ultima colonna quelli corrispondenti delle colonne precedenti a incominciare dalla prima, moltiplicati respettivamente per $a_n, a_{n-1}, \ldots a_2$, esso si trasformerà nell'altro

$$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}'_1 & \ldots & \mathbf{y}_1^{(n-2)} & (\mathbf{a}_r - a_r)\, \mathbf{y}_1^{(n-r)} + (\mathbf{a}_s - a_s)\, \mathbf{y}_1^{(n-s)} + \cdots - \mathbf{X} \\ \mathbf{y}_2 & \mathbf{y}'_2 & \ldots & \mathbf{y}_2^{(n-2)} & (\mathbf{a}_r - a_r)\, \mathbf{y}_2^{(n-r)} + (\mathbf{a}_s - a_s)\, \mathbf{y}_2^{(n-s)} + \cdots - \mathbf{X} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ \mathbf{y}_i & \mathbf{y}'_i & \ldots & \mathbf{y}_i^{(n-2)} & (\mathbf{a}_r - a_r)\, \mathbf{y}_i^{(n-r)} + (\mathbf{a}_s - a_s)\, \mathbf{y}_i^{(n-s)} + \cdots - \mathbf{X} \\ y_{i+1} & y'_{i+1} & \ldots & y_{i+1}^{(n-2)} & -X \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ y_n & y'_n & \ldots & y_n^{(n-3)} & -X \end{vmatrix},$$

e quindi sviluppandolo rispetto agli elementi dell'ultima colonna, e indicando al solito in generale con $D_{1,n}, D_{2,n}, \ldots D_{i,n}, D_{i+1,n}, \ldots D_{n,n}$ gli elementi reciproci di quelli della stessa colonna, sotto le fatte ipotesi avremo la formola seguente

$$\left.\begin{array}{l}
\displaystyle\int_a^b \Theta_c (\mathrm{a}_r - a_r) \{ \mathrm{y}_1^{(n-r)} D_{1,n} + \mathrm{y}_2^{(n-r)} D_{2,n} + \cdots + \mathrm{y}_i^{(n-r)} D_{i,n} \} \, d x + \\
\displaystyle + \int_a^b \Theta_c (\mathrm{a}_s - a_s) \{ \mathrm{y}_1^{(n-s)} D_{1,n} + \mathrm{y}_2^{(n-s)} D_{2,n} + \cdots + \mathrm{y}_i^{(n-s)} D_{i,n} \} \, d x + \\
+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots - \\
\displaystyle - \int_a^b \Theta_c \mathrm{X} \{ D_{1,n} + D_{2,n} + \cdots + D_{i,n} \} \, d x - \int_a^b \Theta_c X \{ D_{i+1,n} + \cdots + D_{n,n} \} \, d x = 0,
\end{array}\right\} \quad (41)$$

che nei casi particolari dà luogo a risultati molto notevoli.

28. Così, supponendo in particolare che le equazioni (39) e (40) siano omogenee, se sarà $i = 1$, ciò che richiederà che la matrice (31) corrispondente alle equazione (40) sia di caratteristica 1, avremo la formola

$$\int_a^b \Theta_c \{ (\mathrm{a}_r - a_r) \mathrm{y}_1^{(n-r)} + (\mathrm{a}_s - a_s) \mathrm{y}_1^{(n-s)} + \cdots \} \, \Delta \, d x = 0, \qquad (42)$$

essendo Δ, colla notazione del § 25, il determinante $D_{1,n}$ degli integrali normali $y_2, y_3, \ldots y_n$ della (40), cioè essendo

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_2 & y'_2 & \ldots & y_2^{(n-2)} \\ y_3 & y'_3 & \ldots & y_3^{(n-2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_n & y'_n & \ldots & y_n^{(n-2)} \end{vmatrix}; \qquad (43)$$

e se sarà $i = 2$, nel qual caso n dovrà supporsi superiore a 2, e la matrice relativa alla stessa equazione (40) potrà essere 1 o 2, avremo l'altra formola

$$\left.\begin{array}{l}
\displaystyle\int_a^b \Theta_c \{ (\mathrm{a}_r - a_r) \mathrm{y}_1^{(n-r)} + (\mathrm{a}_s - a_s) \mathrm{y}_1^{(n-s)} + \cdots \} \, \Delta_{1,n} \, d x = \\
\displaystyle = \int_a^b \Theta_c \{ (\mathrm{a}_r - a_r) \mathrm{y}_2^{(n-r)} + (\mathrm{a}_s - a_s) \mathrm{y}_2^{(n-s)} + \cdots \} \, \Delta_{2,n} \, d x,
\end{array}\right\} \quad (44)$$

quando si ponga

$$\Delta_{1,n} = \begin{vmatrix} \mathrm{y}_2 & \mathrm{y}'_2 & \dots & \mathrm{y}_2^{(n-2)} \\ y_3 & y'_3 & \dots & y_3^{(n-2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n & y'_n & \dots & y_n^{(n-2)} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{2,n} = \begin{vmatrix} \mathrm{y}_1 & \mathrm{y}'_1 & \dots & \mathrm{y}_1^{(n-2)} \\ y_3 & y'_3 & \dots & y_3^{(n-2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n & y'_n & \dots & y_n^{(n-2)} \end{vmatrix}; \qquad (45)$$

e se saremo nel caso delle equazioni dei §§ 9 e seg. per le quali si abbia in generale per $r > 1$ $a_r = g_r\,\varphi(z) + l_r$, con g_r e l_r funzioni della sola x, e z essendo il parametro variabile che col cambiarsi da z_1 in z_2 fa passare dalla equazione (39) all'altra differente (40) (*), allora, dividendo per $\varphi(z_1) - \varphi(z_2)$, nel caso di $i = 1$ avremo la formola

$$\int_a^b \Theta_c \,\{ g_r\, \mathrm{y}_1^{(n-r)} + g_s\, \mathrm{y}_1^{(n-s)} + \cdots \}\, \Delta\, d\,x = 0, \qquad (46)$$

e nel caso di $i = 2$ avremo l'altra

$$\left.\int_a^b \Theta_c \,\{ g_r\, \mathrm{y}_1^{(n-r)} + g_s\, \mathrm{y}_1^{(n-s)} + \cdots \}\, \Delta_{1,n}\, d\,x = \int_a^b \Theta_c \,\{ g_r\, \mathrm{y}_2^{(n-r)} + g_s\, \mathrm{y}_2^{(n-s)} + \cdots \}\, \Delta_{2,n}\, d\,x. \right\} \quad (47)$$

E più particolarmente ancora se il parametro z comparirà soltanto nell'ultimo coefficiente a_n dell'equazione data, e si avrà $a_n = g\,\varphi(z) + l$, allora per $i = 1$ avremo la formola

$$\int_a^b \Theta_c\, g\, \mathrm{y}_1\, \Delta\, d\,x = 0, \qquad (48)$$

e per $i = 2$ avremo l'altra

$$\int_a^b \Theta_c\, g\, \mathrm{y}_1\, \Delta_{1,n}\, d\,x = \int_a^b \Theta_c\, g\, \mathrm{y}_2\, \Delta_{2,n}\, d\,x, \qquad (49)$$

(*) Si suppone naturalmente che i valori z_1 e z_2 di z che corrispondono alla (39) e alla (40) non rendano $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$, altrimenti le due equazioni sarebbero le stesse e non potremmo dividere per $\varphi(z_1) - \varphi(z_2)$.

la prima delle quali è la generalizzazione di quella che si ha nel caso degli integrali normali delle equazioni del second'ordine perchè allora $\Delta = y_2$, e la seconda pel significato che in essa hanno $\mathbf{y}_1$ e $\mathbf{y}_2$ non può aversi che per le equazioni di ordine superiore al secondo.

29. E qui giova anche fare rilevare *esplicitamente* che *tutte* queste formole oltre a valere nel caso in cui si abbiano effettivamente le condizioni ai limiti (27), corrispondentemente cioè al 3.° dei casi del § 18, per la osservazione che facemmo al § 23 varranno anche nel secondo dei casi dello stesso § 18, quando gli integrali normali che in esse figurano siano scelti fra quelli (supposto che esistano) che si mantengono regolari fino alle derivate $(n-1)^e$ inclusive anche in quell'estremo a o b, p. es. a, pel quale, invece della solita condizione (27) corrispondente, si ha l'altra $\int_c^x \frac{a_1}{a_0} dx = -\infty$; e inoltre le formole stesse varranno anche pel primo dei casi del § 18, cioè quando non si avranno le condizioni ai limiti (27), ma invece l'integrale $\int_c^x \frac{a_1}{a_0} dx$ sarà $-\infty$ ai due estremi a e b, purchè però gli integrali $\mathbf{y}$, e y delle equazioni (39) e (40) che figurano nelle formole stesse siano di quelli che si mantengono regolari fino alle derivate $(n-1)^e$ inclusive anche ai due estremi a e b, supposto che esistano (*).

E essendo nel 3.° dei casi del § 18, la formola (48), come le due (42) e (46) non potranno aversi, come già notammo, altro che pei valori di z pei quali la matrice (31) sia di caratteristica 1 (**), per modo cioè che per ognuno di questi valori di z la equazione corrispondente (40) ridotta omogenea col farvi $X=0$ abbia $n-1$ integrali normali $y_2, y_3, \dots y_n$ il cui

(*) Gli integrali corrispondenti ai casi 1.° e 2.° del § 18, regolari fino alle derivate $(n-1)^e$ inclusive anche in a e in b, per quanto dicemmo in Nota al § 18, non potrebbero esistere in numero di n se dovessero corrispondere a una stessa equazione; ma poichè ora devono corrispondere parte alla equazione (39), e parte alla equazione (40), può darsi benissimo che se ne possano avere n tutti regolari, scegliendone alcuni fra quelli regolari della prima equazione, e gli altri fra quelli pure regolari della seconda.

(**) Questi valori di z si troveranno tra quelli che rendono nulli i determinanti distinti del second'ordine ai quali dà luogo la matrice (31), ma non sempre esisteranno quando sia $n > 2$.

determinante sia Δ, e che insieme a un altro integrale y_1 (che non sarà un integrale normale) costituiscano un sistema fondamentale della equazione omogenea stessa (*).

(*) Se di una equazione lineare omogenea di ordine n si conoscono $n-1$ integrali che facciano parte di un sistema fondamentale (cioè che non siano legati fra loro da relazioni omogenee e lineari), è noto che può aversi sempre l'n^o integrale con sole quadrature.

Un modo semplice per trovarlo può essere il seguente.

Essendo

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \tag{α}$$

la equazione omogenea data, e $y_2, y_3, \ldots y_n$ gli $n-1$ integrali di essa che si conoscono, si indichi con P il determinante

$$P = \begin{vmatrix} y & y' & y'' & \ldots & y^{(n-1)} \\ y_2 & y'_2 & y''_2 & \ldots & y_2^{(n-1)} \\ y_3 & y'_3 & y''_3 & \ldots & y_3^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n & y'_n & y''_n & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Questo uguagliato a zero darà la equazione

$$P = D_{1,n} y^{(n-1)} + D_{2,n-1} y^{(n-2)} + \ldots D_{1,2} y' + D_{1,1} y = 0, \tag{β}$$

che ha gli integrali noti $y_2, y_3, \ldots y_n$; e per mezzo di questa, avendo riguardo alla espressione di $D_{1,n}$ si troverà subito intanto la formola notevole $D'_{1,n} = -D_{1,n-1}$.

D'altra parte avendosi

$$P' = \begin{vmatrix} y & y' & \ldots & y^{(n-2)} & y^{(n)} \\ y_2 & y'_2 & \ldots & y_2^{(n-2)} & y_2^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n & y'_n & \ldots & y_n^{(n-2)} & y_n^{(n)} \end{vmatrix},$$

se si suppone che y sia un integrale qualsiasi della equazione data (α) si vede che avremo

$P' = -\dfrac{a_1}{a_0} P$, e quindi per questo valore di y sarà $P = k\, e^{-\int_c^x \frac{a_1}{a_0} dx}$, cioè si avrà

$$D_{1,n} y^{(n-1)} + D_{1,n-1} y^{(n-2)} + \ldots + D_{1,2} y' + D_{1,1} y = k\, e^{-\int_c^x \frac{a_1}{a_0} dx},$$

essendo k una costante; e evidentemente questa equazione per $k=0$ condurrà agli inte-

30. Rispetto poi al determinante Δ o $D_{1,n}$ che figura nelle nostre formole (46) e (48) si può fare l'osservazione generale seguente.

Osserviamo cioè che data una equazione lineare e omogenea $E=0$, se di essa si forma la sua aggiunta $A=0$, l'aggiunta di questa riproduce la primitiva $E=0$; e quindi se consideriamo la detta equazione aggiunta $A=0$, e le applichiamo le nostre solite formole generali per determinarne gli integrali, prendendo, nelle stesse formole, per le funzioni ausiliarie $z_1, z_2, \dots z_n$ un sistema d'integrali fondamentali $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ della primitiva, e indicando con Λ il determinante fondamentale corrispondente, si vede subito che gli elementi reciproci $\Lambda_{1,n}, \Lambda_{2,n}, \dots \Lambda_{n,n}$ di quelli dell'ultima verticale moltiplicati per $\Theta_c = \frac{1}{a_0} e^{\int_c^x \frac{a_1}{a_0} dx}$ daranno un sistema fondamentale d'integrali della equazione aggiunta $A=0$.

E osservando ora che quando siamo nel caso di equazioni omogenee (28) e di condizioni ai limiti (27) per le quali la caratteristica della matrice (31) è 1, o anche quando siamo nel caso del § 23, pel sistema testè indicato $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ d'integrali fondamentali si può prendere quello del quale parlavamo sopra formato dagli $n-1$ integrali $y_2, y_3, \dots y_n$ della (28) che figurano in Δ, o da quelli del § 23, e dall'altro integrale (non normale) y_1 al quale pure accennammo sopra e al § 23, basterà tener conto della osservazione generale che abbiamo fatta per poter dire che nelle nostre formole (46) o (48) il prodotto $\Theta_c \Delta$ rappresenta uno degli integrali **z** della equazione aggiunta che risulteranno determinati nel modo testè indicato per mezzo degli integrali normali $y_2, y_3, \dots y_n$ e dell'altro y_1.

---

grali noti $y_2, y_3, \dots y_n$, e per k diverso da zero sarà una equazione completa, della quale il solito integrale particolare darà con sole quadrature l'n^o integrale cercato y_1 della (α).

La equazione omogenea corrispondente a questa equazione completa essendo la (β), per integrali fondamentali della quale possono prendersi gli $n-1$ integrali noti $y_2, y_3, \dots y_n$, si vede subito che per l'integrale cercato y_1 avremo

$$y_1 = y_2 \int_a^x e^{-\int_c^x \frac{a_1}{a_0} dx} \frac{(D_{1,n})_{1,n-1}}{D_{1,n}^2} dx + y_3 \int_a^x e^{-\int_c^x \frac{a_1}{a_0} dx} \frac{(D_{1,n})_{2,n-2}}{D_{1,n}^2} dx + \dots + y_n \int_a^x e^{-\int_c^x \frac{a_1}{a_0} dx} \frac{(D_{1,n})_{n-1,n-1}}{D_{1,n}^2} dx,$$

essendo $(D_{1,n})_{1,n-1}$, $(D_{1,n})_{2,n-1}, \dots (D_{1,n})_{n-1,n-1}$ gli elementi reciproci di quelli della colonna $(n-1)^a$ nel determinante $D_{1,n}$.

E la condizione che trovammo nel § 24 come condizione necessaria e sufficiente perchè l'integrale particolare Y della solita equazione completa (34) che si annulla per $x=a$ insieme alle sue prime derivate sia un integrale normale, si può ora trasformare nell'altra che l'integrale $\int_a^b X\mathbf{z}\,d\,x$ sia zero.

31. E tornando ora a considerare le formole (22) o (23) del § 17, osserviamo che se saremo nel primo dei casi del § 18, cioè se sarà $\int_c^b \frac{a_1}{a_0}\,dx = -\infty$ ad ambedue gli estremi a e b, avremo sempre $\int_a^b \Theta_c \mathbf{D}\,d\,x=0$, qualunque sia il sistema d'integrali $y_1, y_2, \ldots y_n$ che si considerano, purchè siano regolari fra a e b e anche a questi estremi fino alle loro derivate n^e incl., il che, per quanto fu detto in nota al § 18, non potrà avvenire altro che quando gli integrali stessi appartengano a equazioni diverse, cioè corrispondano a valori diversi dei parametri che vi figurano, pei quali alcuni dei coefficienti della equazione abbiano valori differenti.

Se poi l'integrale $\int_c^x \frac{a_1}{a_0}\,d\,x$ non sarà $-\infty$ a nessuno dei due limiti a o b, o lo sarà soltanto ad uno di essi, che allora supporremo essere p. es. il limite a, l'integrale $\int_a^b \Theta_c\,\mathbf{D}\,d\,x$ non sarà zero altro che quando per ciascuno degli integrali $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$ siano soddisfatte le condizioni dei casi corrispondenti 3.° o 2.° del § 18 respettivamente, o altre condizioni speciali; e noi ora supporremo appunto che per $n-1$ di questi integrali $y_2, y_3, \ldots y_n$ siano soddisfatte ai limiti a e b le indicate condizioni del 3.° dei casi del § 18, quando non sia $\int_c^x \frac{a_1}{a_0}\,d\,x = -\infty$ per $x=a$, e siano soddisfatte le condizioni relative al limite b, senza curarci di quella relativa al limite a quando sia $\int_c^x \frac{a_1}{a_0}\,d\,x = -\infty$ per $x=a$; e per l'altro integrale y_1 ammetteremo che i parametri $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_i$ restino indeterminati, e per esso siano soddisfatte o no le condizioni ai limiti; e infine sia per questo che per gli altri integrali $y_2, y_3, \ldots y_n$ ammetteremo che essi siano sempre regolari almeno fino alle derivate $(n\quad 1)^e$ incl. anche agli estremi a e b; e supporremo inoltre che y_1 e le sue derivate ammettano anche almeno le derivate prime rispetto ai parametri variabili, e queste pure siano finite e continue.

Allora non avremo sempre la formola $\int_a^b \Theta_c \mathbf{D}\, d\,x = 0$, ma avremo ancora in ogni caso la formula (22), la quale ci darà la seguente

$$\int_a^b \Theta_c \mathbf{D}\, d\,x = \frac{e^{\int_c^a \frac{a_1}{a_0} dx}}{k_p}\left(D_{1,p} \sum_0^{n-1} k_s\, y_1^{(s)}\right)_a - \frac{e^{\int_c^b \frac{a_1}{a_0} dx}}{h_q}\left(D_{1,q} \sum_0^{n-1} h_s\, y_1^{(s)}\right)_b,$$

dove ai termini del secondo membro abbiamo posto i divisori k_p e h_q perchè nella (22) i coefficienti di $y^{(p)}$ e $y^{(q)}$ nelle condizioni ai limiti a e b respettivamente erano supposti uguali ad uno; e ora s'intende naturalmente che k_p e h_q siano diversi da zero, cioè che nelle condizioni ai limiti a e b figurino effettivamente i termini con $y^{(p)}$ e $y^{(q)}$. E in questa formola, p. es. il primo termine del secondo membro mancherà se a_0 sarà zero per $x = a$, e se al tempo stesso si avrà $\int_c^x \frac{a_1}{a_0}\, d\,x = -\infty$, o se l'integrale y_1 che abbiamo introdotto soddisfarà alla condizione (27) relativa al limite a qualunque siano i valori dei parametri $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_i$.

Questa formola, sotto le nostre ipotesi, potrà derivarsi rispetto a uno qualunque dei parametri ζ_l, e le derivazioni potranno farsi sotto l'integrale; e quindi essa darà luogo all'altra

$$\int_a^b \Theta_c \frac{\partial\, \mathbf{D}}{\partial\, \zeta_l}\, d\,x = \frac{e^{\int_c^a \frac{a_1}{a_0} dx}}{k_p}\left(D_{1,p} \sum_0^{n-1} k_s \frac{\partial\, y_1^{(s)}}{\partial\, \zeta_l}\right)_a - \frac{e^{\int_c^b \frac{a_1}{a_0} dx}}{h_q}\left(D_{1,q} \sum_0^{n-1} h_s \frac{\partial\, y_1^{(s)}}{\partial\, \zeta_l}\right)_b,$$

dalla quale poi altre formole simili potranno ottenersi con nuove derivazioni, se y_1 avrà finite e continue anche le derivate seconde rispetto ai parametri variabili, ecc...; e tutte queste formole serviranno a determinare gli integrali dei primi membri, e daranno luogo ad altre particolarmente notevoli quando in esse si supponga che alcuni degli integrali $y_1, y_2, \ldots y_n$, fra i quali y_1, appartengano alla (39), e gli altri appartengano alla (40) e si trasformi il $\mathbf{D}$ coi processi dei §§ 27 e 28, e segnatamente con quelli del § 28 relativi al caso di $i = 1$ per le equazioni omogenee.

32. Così, supponendo che nella (40) i parametri $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ abbiano valori determinati, in corrispondenza della formola (42) si trova la seguente

$$\left.\begin{aligned}&\int_a^b \Theta_c \left\{ \frac{\partial \mathbf{a}_r}{\partial \zeta_l} y_1^{(n-r)} + \frac{\partial \mathbf{a}_s}{\partial \zeta_l} y_1^{(n-s)} + \cdots + (\mathbf{a}_r - a_r) \frac{\partial y_1^{(n-r)}}{\partial \zeta_l} + (\mathbf{a}_s - a_s) \frac{\partial y_1^{(n-s)}}{\partial \zeta_l} + \cdots \right\} \Delta\, d\,x = \\ &= \frac{e^{\int_c^a \frac{a_1}{a_0} dx}}{k_p} \left(D_{1,p} \sum_0^{n-1} k_s \frac{\partial y_1^{(s)}}{\partial \zeta_l} \right)_a - \frac{e^{\int_c^b \frac{a_1}{a_0} dx}}{h_q} \left(D_{1\,q} \sum_0^{n-1} h_s \frac{\partial y_1^{(s)}}{\partial \zeta_l} \right)_b ;\end{aligned}\right\} \quad (50)$$

e ammesso ora che nella equazione data dei parametri $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_i$ non ve ne sia che uno z, e ζ sia il valore di questo parametro che corrisponde alla equazione (40) o agli integrali normali che figurano nel determinante Δ, se faremo tendere z a ζ, con che $\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_s, \ldots$ tenderanno a $a_r, a_s, \ldots$, basterà supporre che allora y_1 tenda uniformemente fra a e b a uno degli integrali normali $y_2, y_3, \ldots y_n$ della (40) che figurano in Δ, p. es. tenda a y_τ, per giungere alla formola

$$\left.\begin{aligned}\int_a^b \Theta_c \left\{ \frac{\partial a_r}{\partial \zeta} y_\tau^{(n-r)} + \frac{\partial a_s}{\partial \zeta} y_\tau^{(n-s)} + \cdots \right\} \Delta\, d\,x &= \frac{e^{\int_c^a \frac{a_1}{a_0} dx}}{k_p} \left(D_{1,p} \sum_0^{n-1} k_s \frac{\partial y_1^{(s)}}{\partial z} \right)_{\substack{x=a\\ z=\zeta}} - \\ &- \frac{e^{\int_c^b \frac{a_1}{a_0} dx}}{h_q} \left(D_{1\,q} \sum_0^{n-1} h_s \frac{\partial y_1^{(s)}}{\partial z} \right)_{\substack{x=b\\ z=\zeta}} ,\end{aligned}\right\} \quad (51)$$

dalla quale nel caso che si abbia in generale $a_r = g_r\, \varphi(z) + l_r$, essendo g_r e l_r le solite funzioni della sola x, e $\varphi(z)$ una funzione di z che non si annulla per $z = \zeta$, avremo l'altra

$$\left.\begin{aligned}\int_a^b \Theta_c \left\{ g_r\, y_\tau^{(n-r)} + g_s\, y_\tau^{(n-s)} + \cdots \right\} \Delta\, d\,x &= \frac{e^{\int_c^a \frac{a_1}{a_0} dx}}{k_p\, \varphi'(\zeta)} \left(D_{1\,p} \sum_0^{n-1} k_s \frac{\partial y_1^{(s)}}{\partial z} \right)_{\substack{x=a\\ z=\zeta}} - \\ &- \frac{e^{\int_c^b \frac{a_1}{a_0} dx}}{h_q\, \varphi'(\zeta)} \left(D_{1,q} \sum_0^{n-1} k_s \frac{\partial y_1^{(s)}}{\partial z} \right)_{\substack{x=b\\ z=\zeta}} ;\end{aligned}\right\} \quad (52)$$

e nel caso, più particolare ancora, che $\varphi(z)$ figuri soltanto in a_n e sia

$a_n = g\,\varphi(z) + l$, avremo l'altra

$$\int_a^b \Theta_c\, g\, y_\tau\, \Delta\, dx = \frac{e^{\int_c^a \frac{a_1}{a_0} dx}}{k_p\, \varphi'(\zeta)} \left(D_{1,p} \sum_0^{n-1} k_s \frac{\partial y_1^{(s)}}{\partial z} \right)_{\substack{x=a \\ z=\zeta}} - \frac{e^{\int_c^b \frac{a_1}{a_0} dx}}{h_q\, \varphi'(\zeta)} \left(D_{1,q} \sum_0^{n-1} h_s \frac{\partial y_1^{(s)}}{\partial z} \right)_{\substack{x=b \\ z=\zeta}}; \qquad (53)$$

e queste formole servono di complemento alle (42), (46) e (48).

In particolare nel caso di $n = 2$ questa formola (53) ci dà il valore dell'integrale $\int_a^b \Theta_c\, g\, y_\tau^2\, dx$ per gli integrali normali delle equazioni omogenee del second'ordine.

In queste formole poi, in luogo di $\frac{D_{1,p}}{k_p}$ e $\frac{D_{1,q}}{h_q}$ potremo sempre mettere $\frac{\Delta}{k_{n-1}}$ e $\frac{\Delta}{h_{n-1}}$, quando k_{n-1} e h_{n-1} non siano zero, cioè quando nelle condizioni date ai limiti a e b figurino i termini con $y^{(n-1)}$.

Derivando ancora rispetto a z la (50), e poi facendo tendere z a ζ, si otterranno altre formole pure notevoli che potranno servire specialmente nel caso in cui $\varphi'(z)$ si annulli per $z = \zeta$.

E ricordiamo, come già dicemmo, che in tutte queste formole uno dei termini del secondo membro mancherà se saremo nel secondo dei casi del § 18, cioè se a uno degli estremi a o b il coefficiente a_0 sarà zero, e al tempo stesso sarà $\int_c^x \frac{a_1}{a_0} dx = -\infty$; e mancherà pure se al limite a o b corrispondente l'integrale y_1 che è stato introdotto soddisfarà anch'esso, e qualunque sia z, alla condizione relativa al limite stesso. E ciò, ben s'intende, nel supposto sempre che siano verificate le condizioni poste per la regolarità dei varii integrali $y_1, y_2, \ldots y_n$ non solo fra a e b, ma anche agli estremi, e quella relativa al tendere uniformemente di y_1 a y_τ quando z tende a ζ, ecc....

33. Se poi a_0, oltre ad essere zero ad uno degli estremi a o b, e a darci allora $\int_c^x \frac{a_1}{a_0} dx = -\infty$, come già abbiamo ammesso che possa essere, presenterà questa particolarità anche all'altro estremo, venendo così ad essere nel 1.° dei casi del § 18, allora, se potessero continuare ad essere verificate le condizioni ora ricordate rispetto agli integrali $y_1, y_2, \ldots y_n$ ecc.,

la formola (22) condurrebbe a quelle che vengono dalle precedenti col farvi i secondi membri uguali a zero; ma poichè in particolare nel caso delle equazioni del second'ordine ci darebbe $\int_a^b \Theta_c\, g\, y_\tau^2\, d\,x = 0$, ciò che è inammissibile quando a_0 sia continua fra a e b e non si annulli che agli estremi, e g non cambii mai segno fra a e b e non sia d'integrale nullo in nessuna porzione di (a, b); così, almeno in certi casi, e in particolare per questo delle equazioni del second'ordine, le varie condizioni che abbiamo poste pei nostri integrali non potranno coesistere.

E per gli integrali normali di queste equazioni, come avviene ad es. pel caso delle funzioni di LEGENDRE X_n, per potere calcolare i nostri integrali, come ad es. l'integrale $\int_a^b \Theta_c\, g\, y_\tau^2\, d\,x$, bisognerà spezzarli in due parti, l'una da a a $\overline{a}$, e l'altra da $\overline{a}$ a b, essendo $\overline{a}$ un punto intermedio fra a e b, e calcolare poi i due integrali separatamente colle formole precedenti per le quali allora il più spesso non si presenteranno più le indicate difficoltà; o bisognerà calcolare l'integrale $\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon_1} \Theta_c\, g\, y_\tau^2\, d\,x$, e poi cercarne il limite al tendere a zero di ε e di ε_1.

34. Premessi questi studii generali sugli integrali normali delle equazioni differenziali lineari, poniamoci sempre d'ora innanzi nel caso in cui nella equazione *completa* che ora considereremo $E(y, z) = X$, o

$$a_0\, y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\, y + a_n\, y = X, \tag{54}$$

alcuni o tutti i coefficienti dopo il primo e X sono funzioni *intere* di un solo parametro reale o complesso z; e limitandoci, per semplicizzare, al caso in cui a_0 è sempre diverso da zero fra a e b e anche a questi estremi, ciò che ci pone nel 3.° dei casi del § 18 (*), prendiamo a studiare gli integrali normali, considerati come funzioni di questo parametro z.

(*) Molti dei risultati che ora otteniamo valgono, con leggiere modificazioni, anche pel caso in cui a_0 si annulla a uno degli estremi a e b, e con maggiori limitazioni anche quando a_0 si annulla a tutti e due questi estremi; ma noi ci riserviamo di trattare a parte questi casi in altro lavoro, onde non complicare di troppo le nostre considerazioni attuali.

Supponiamo ancora dapprima che si abbiano soltanto le due solite condizioni ai limiti (27) nelle quali i coefficienti h e k siano costanti anche rispetto a z; e ricordiamo le solite nostre espressioni generali in serie per gli integrali fondamentali $w_1, w_2, \ldots w_n$ della equazione omogenea corrispondente, qualunque siano in queste espressioni i valori scelti per le funzioni ausiliarie $z_1, z_2, \ldots z_n$, purchè indipendenti da z, e regolari rispetto ad x fra a e b fino alle loro derivate n^e.

Dall'esame di queste espressioni risulterà subito, come del resto già dicemmo al § 5, che gli stessi integrali $w_1, w_2, \ldots w_n$ e le loro derivate fino alla n^a inclusive saranno funzioni intere di z; e per le nostre formole generali lo stesso sarà dell'integrale Y che si annulla insieme alle sue prime $n-1$ derivate per $x=a$. E così pure saranno funzioni intere di z anche tutti i determinanti del second'ordine ai quali dà luogo la matrice (31); e quindi per quelli fra questi determinanti che non saranno identicamente nulli qualunque sia z, come per l'integrale Y, gli infinitesimi dovranno essere tutti di ordine intero.

Incominceremo ora dal considerare il caso in cui fra questi determinanti ve ne sono alcuni (se non tutti) che non sono identicamente nulli qualunque sia z, e supposto ad es. che uno di questi (non identicamente nulli) sia il determinante λ formato dalle due prime verticali della matrice (31), ammetteremo senz'altro che i suoi infinitesimi a distanza finita $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \ldots$ (quando vi siano) siano tutti del prim'ordine.

Allora pei valori di z diversi da questi infinitesimi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \ldots$ la matrice (31) sarà di caratteristica 2; e quindi, per quanto si disse al § 24, per gli stessi valori di z si avranno sempre $n-1$ integrali normali, uno dei quali sarà appunto l'integrale Y quando esso sia un integrale normale.

Questi integrali normali potranno trovarsi coi processi generali del § 24, prendendo cioè per le $c_{p,3}, c_{p,4}, \ldots c_{p,n}$, per $p=1, 2, \ldots n-2$, quantità costanti, o funzioni qualsiansi di z, che potremo supporre intere e tali che, eccettuati tutt'al più alcuni valori particolari di z, il determinante da esse formato sia sempre diverso da zero, e prendendo inoltre per semplicità le $c_{n-1,3}, c_{n-1,4}, \ldots c_{n-1,n}$ tutte uguali allo zero, e determinando poi la $c_{p,1}$ e $c_{p,2}$ per $p=1, 2, \ldots n-1$ colle formole (38); ma se le somme $\left(\sum_0^{n-1} k_s w_i^{(s)}\right)_a$ e $\left(\sum_0^{n-1} h_s w_i^{(s)}\right)_b$, o i determinanti $\lambda, \lambda_3, \lambda_4, \ldots \lambda_n, \mu_3, \mu_4, \ldots \mu_n$ e l'integrale Y non soddisfaranno a condizioni speciali, o se non saranno scelte opportunamente le prime $c_{p,i}$, evidentemente le $c_{p,1}$ e $c_{p,2}$ e quindi gli integrali normali corrispondenti, mentre saranno funzioni uniformi di z e col carattere di funzioni intere in ogni punto z diverso dai suddetti punti d'infinitesimo $\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_m,\ldots$, potranno presentare delle singolarità coll'avvicinarsi di z a questi punti; e solo per l'integrale Y, *quando esso sia fra gli integrali normali pei valori di z diversi da* $\alpha_1, \alpha_2,\ldots \alpha_m,\ldots$, saremo sicuri che non avrà singolarità negli stessi punti $\alpha_1, \alpha_2,\ldots \alpha_m,\ldots$ e in essi sarà ancora un integrale normale perchè, come già notammo, esso è una funzione intera di z.

Se però, essendo $n>2$, gli stessi infinitesimi $\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_m,\ldots$ del determinante λ apparterranno tutti anche a quegli altri fra i determinanti $\lambda_3, \lambda_4,\ldots \lambda_n$, $\mu_3, \mu_4,\ldots \mu_n$ che non sono identicamente nulli, per modo che uno qualunque di essi si possa porre sotto la forma $\lambda\,\psi$, essendo ψ una funzione *intera* di z che potrà variare da determinante a determinante; e in ogni modo, sia che la circostanza ora indicata si presenti o no, prendendo le $c_{p,i}$, per p e i uguali ai numeri $1, 2,\ldots n-2$, tutte sotto la forma $c_{p,i}=\lambda\, c'_{p,i}$, dove le $c'_{p,i}$ abbiano le particolarità che avevamo indicato sopra per le $c_{p,i}$, cioè di formare un determinante diverso da zero, allora è certo che le $c_{p,1}$ e $c_{p,2}$ che si otterranno dalle formole (38) per tutti i valori $1, 2,\ldots n-2$ di p risulteranno tutte funzioni intere di z, e tenderanno verso limiti determinati e finiti al tendere di z verso quei punti d'infinitesimo α_r di λ che abbiano al tempo stesso la particolarità di far sì che l'integrale Y sia un integrale normale; e lo stesso avverrà evidentemente anche nel caso di $n=2$, perchè allora la matrice (31) si riduce al determinante λ, e non si hanno più i determinanti $\lambda_3, \lambda_4,\ldots \lambda_n$, $\mu_3, \mu_4,\ldots \mu_n$; mentre se fra gli stessi punti d'infinitesimo $\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_m,\ldots$ ve ne saranno alcuni α_σ pei quali l'integrale Y corrispondente a questo valore α_σ di z non sia un integrale normale, allora a meno che le due somme $\left(\sum\limits_0^{n-1} k_s\, w_1^{(s)}\right)_a$, $\left(\sum\limits_0^{n-1} k_s\, w_2^{(s)}\right)_a$ non siano ambedue zero per quel valore α_σ di z, le quantità stesse $c_{p,1}$, $c_{p,2}$ col tendere di z ad α_σ non si manterranno finite altro che moltiplicandole per $z-\alpha_\sigma$.

E s'intende anche che per quelle $c_{p,i}$ che nelle (38) moltiplichino determinanti λ_i e μ_i per ambedue i quali si abbia $\lambda_i=\lambda\,\psi_i(z)$, $\mu_i=\lambda\,\theta_i(z)$ con $\psi_i(z)$ e $\theta_i(z)$ funzioni intere di z, non importerà prendere come dicevamo poc'anzi $c_{p,i}=\lambda\, c'_{p,i}$, ma basterà prendere per $c_{p,i}$ una costante o una funzione intera qualsiasi $c'_{p,i}$ di z; e anche più generalmente se sarà $\lambda_i=\bar\lambda\,\psi_i(z)$, $\mu_i=\bar\lambda\,\theta_i(z)$ essendo $\bar\lambda$ un fattore intero di λ, basterà prendere $c_{p,i}=\frac{\lambda}{\bar\lambda}\,c'_{p,i}$.

D'altra parte, per quanto si disse nel § 25, se considerando la equazione omogenea $E(y,\ \alpha_\tau)=0$ corrispondente alla equazione data pel valore α_τ di z si trovano i suoi $n-1$ integrali linearmente distinti $\mathrm{y}_2,\ \mathrm{y}_3, \ldots\ \mathrm{y}_n$ che per $x=b$ soddisfano alla seconda delle condizioni ai limiti (27), e s'indica con Δ il loro determinante, la condizione perchè il solito integale Y per $z=\alpha_\tau$ sia un integrale normale è espressa dalla formola

$$\int_a^b \Theta_c\, X \Delta\, d\,x = 0, \quad \text{per} \quad z=\alpha_\tau\,; \tag{55}$$

dunque si può ora evidentemente affermare che seguendo il processo indicato per la determinazione delle $c_{p,i}$ per p e i uguali ai numeri $1,\ 2,\ldots\ n-2,\ n-1$, quando uno almeno dei determinanti di second'ordine λ ai quali dà luogo la matrice (31) non è identicamente nullo qualunque sia z, e ha i suoi infinitesimi a distanza finita $\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots,\ \alpha_m,\ldots$ tutti di prim'ordine, gli $n-1$ integrali normali che per z diverso dai detti punti d'infinitesimo $\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots\ \alpha_m,\ldots$ risulteranno così determinati, considerati in tutto il piano z saranno funzioni uniformi di z che se la (55) sarà sempre soddisfatta per tutti gli infinitesimi α_τ di λ saranno anche funzioni intere di z, mentre se per alcuni α_σ di questi infinitesimi la stessa condizione (55) non sarà soddisfatta, questi punti α_σ saranno altrettanti poli di prim'ordine dei detti integrali normali, a meno che α_σ non sia al tempo stesso un infinitesimo di ciascuna delle due somme $\left(\sum_0^{n-1} k_s w_1^{(s)}\right)_a,\ \left(\sum_0^{n-1} k_s w_2^{(s)}\right)_a$, nel qual caso α_σ sarà un punto ordinario.

Supposto poi che α_τ sia uno dei punti d'infinitesimo del determinante λ pei quali la condizione (55) è soddisfatta, è certo che ciascuno y_p degli integrali che abbiamo trovati come integrali normali pei valori di z diversi dai detti infinitesimi e quindi anche da α_τ, quando si consideri anche per $z=\alpha_\tau$ non è altro in sostanza che il valore che, indipendentemente dalla considerazione degli integrali normali, viene dato dalle nostre formole generali per quell'integrale particolare della equazione data corrispondente a $z=\alpha_\tau$ pel quale le c_1, $c_2,\ldots\ c_n$ che figurano nelle formole stesse hanno i valori limiti $(c_{p,1})_{\alpha_\tau}$, $(c_{p,2})_{\alpha_\tau},\ldots\ (c_{p,n})_{\alpha_\tau}$ ai quali tenderanno le $c_{p,1},\ c_{p,2},\ldots\ c_{p,n}$ coll'approssimarsi indefinito di z ad α_τ; mentre poi non vi ha dubbio che esso pure soddisfa alle condizioni limiti (27), perchè queste per y_p erano soddisfatte per valori di z prossimi quanto si vuole a α_τ, e gli integrali che vengono dalle nostre espressioni generali sono funzioni continue di z anche nel punto α_τ insieme alle loro prime $n-1$ derivate rispetto ad x; dunque evidentemente il nostro integrale y_p rimarrà un integrale normale anche quando si consideri per $z = \alpha_p$, e si può quindi ora rigorosamente affermare che per ogni equazione completa 54) esistono sempre $n - 1$ integrali normali che sono funzioni uniformi di z in tutto il piano, e che non possono perdere il carattere di funzioni intere altro che per quei punti d'infinitesimo del determinante λ pei quali non sia soddisfatta la condizione (55), e saranno quindi funzioni intere di z senz'altro quando la stessa condizione sia soddisfatta per ciascuno degli infinitesimi medesimi.

35. Questo nel caso che ora abbiamo considerato in cui fra i determinanti di second'ordine ai quali dà luogo la matrice (31) ve ne siano alcuni, uno dei quali abbiamo supposto essere quello λ formato dalle due prime verticali, che non sono identicamente nulli qualunque sia z.

Quando poi questi determinanti siano tutti identicamente nulli, allora la matrice (31) sarà necessariamente di caratteristica 1, e per questo e perchè nella prima delle (36), per l'ipotesi fatta che a_0 non sia zero neppure per $x = a$, le $\left(\sum_0^{n-1} k_s w_i^{(s)}\right)_a$ non possono essere tutte nulle, il solito integrale Y dovrà essere necessariamente un integrale normale della equazione data qualunque sia z, ciò che porta che allora la condizione (55) dovrà essere soddisfatta per qualsiasi valore di z.

Riducendosi poi allora le equazioni (36) ad una sola, p. es. alla seconda, e neppure le somme $\left(\sum_0^{n-1} h_s w_i^{(s)}\right)_b$ per $i = 1, 2, \ldots n$ potendo essere contemporaneamente zero per nessun valore di z perchè a_0 non contiene z e per $x = b$ è diverso da zero, ne viene che se ad es. la prima somma $\left(\sum_0^{n-1} h_s w_1^{(s)}\right)_b$, che ora indicheremo con Λ, non è identicamente nulla qualunque sia z, e i suoi infinitesimi a distanza finita sono $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m, \ldots$, basterà prendere opportunamente le $c_{p,2}, c_{p,3}, \ldots c_{p,n}$ per $p = 1, 2, \ldots n-1$, come ad esempio prenderle tutte della forma $\Lambda c'_{p,2}$, $\Lambda c'_{p,3}, \ldots \Lambda c'_{p,n}$, essendo le $c'_{p,i}$ quantità costanti o funzioni intere di z tali che il loro determinante, eccettuati tutt'al più alcuni valori particolari di z, sia sempre diverso da zero, per giungere a trovare $n - 1$ integrali normali diversi da Y che per z diverso dai punti $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m, \ldots$ siano linearmente distinti, e che considerati in tutto il piano z siano come Y funzioni intere di z; e questi integrali anche pei punti $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m, \ldots$ saranno integrali normali, ma allora potranno non essere più linearmente indipendenti.

36. Così in particolare se la equazione data sarà quella generale del

second'ordine

$$a_0\, y'' + a_1\, y' + a_2\, y = X,$$

per la quale ammetteremo che a_0 fra a e b (gli estr. incl.) sia sempre diversa da zero, e tutte o almeno una delle a_1, a_2, X contengano il parametro z essendo funzioni intere di questo parametro, si osserverà per prima cosa che in questo caso la matrice (31) si riduce al determinante

$$(k_0\, w_1 + k_1\, w'_1)_a\, (h_0\, w_2 + h_1\, w'_2)_b - (k_0\, w_2 + k_2\, w'_2)_a\, (h_0\, w_1 + h_1\, w_1)_b\,; \qquad (56)$$

e se questo determinante (56) non sarà identicamente nullo qualunque sia z, e avrà i suoi infinitesimi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \ldots$ tutti del prim'ordine, allora quando avvenga che, indicando con y quell'integrale dell'equazione omogenea corrispondente a ciascuno α_τ di questi infinitesimi preso come valore di z, che è determinato dalla condizione al limite $k_0\, \mathsf{y} + k_1\, \mathsf{y}' = 0$ per $x = b$, e che non può differire dall'integrale normale corrispondente altro che per un fattore costante, si trovi che la funzione X è tale che resta sempre soddisfatta la condizione

$$\int_a^b \Theta_c\, X\, \mathsf{y}\; d\, x = 0, \qquad (57)$$

si potrà senz'altro affermare che esisterà sempre un integrale normale della nostra equazione che sarà una funzione intera di z.

E se questa condizione (57) sarà soddisfatta soltanto per alcuni degli infinitesimi del determinante (56) e non per altri $\alpha_\sigma, \alpha_\theta, \ldots$, l'integrale normale sarà soltanto una funzione uniforme di z che in questi punti $\alpha_\sigma, \alpha_\theta, \ldots$ avrà dei poli di prim'ordine tutte le volte che in questi punti non siano infinitesime anche le due somme $(k_0\, w_1 + k_1\, w'_1)_a$, $(k_0\, w_2 + k_1\, w'_2)_a$.

Se poi il determinante (56) sarà identicamente nullo qualunque sia z, esisterà ancora un integrale normale della nostra equazione che sarà funzione intera di z, ma ciò nel caso soltanto che il solito integrale Y sia esso stesso un integrale normale per qualsiasi valore di z, cioè quando la condizione $\int_a^b \Theta_c\, X\, \mathsf{y}\, d\, x = 0$ sia soddisfatta per ogni valore di z.

Questi risultati ci danno, come caso particolare di altre osservazioni molto più generali, un teorema dimostrato da Kneser nei *Math. Annal.*, Vol. 58, pag. 113, che in sostanza, come fa rilevare lo stesso Kneser, trovasi contenuto anche in un precedente lavoro di STEKLOFF pubblicato negli *Annales de la Fac. des Sciences de Toulouse.*

37. In ciò che precede abbiamo sempre supposto che le condizioni date ai limiti siano soltanto le due (27).

Quando poi queste condizioni siano più di due, il che naturalmente esige che l'equazione data sia di ordine n superiore al secondo, limitiamoci per semplicità al caso in cui esse siano precisamente in numero di n; e di queste, due siano ancora le (27) che indicheremo ora con $A_0 = 0$ e $B_0 = 0$, e delle rimanenti alcune, p. es. i che indicheremo con $B_1 = 0$, $B_2 = 0, \ldots$ $B_i = 0$ siano come la seconda $B_0 = 0$ delle (27) stesse e relative al limite b, e le altre $n - 2 - i$ che indicheremo con $A_1 = 0$, $A_2 = 0, \ldots$ $A_{n-2-i} = 0$, siano come la prima $A_0 = 0$ e relative al limite a.

Allora oltre alle due equazioni (36) corrispondenti alle (27), ne avremo altre $n - 2$ delle quali i saranno perfettamente simili alla seconda delle (36) medesime, e le altre saranno simili alla prima; e quindi considerando il determinante P formato dai coefficienti delle $c_{p,1}$, $c_{p,2}, \ldots$ $c_{p,n}$ in queste equazioni, che sarà certo una funzione intera di z, e limitandoci al caso in cui esso non sarà identicamente zero qualunque sia z, si riscontrerà subito che, indicando con α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_m, \ldots$ i suoi punti d'infinitesimo a distanza finita quando vi siano, le equazioni stesse pei valori di z diversi da questi infinitesimi α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_m, \ldots$ di P determineranno perfettamente tutte le costanti $c_{p,1}$, $c_{p,2}, \ldots$ $c_{p,n}$ sotto forma di altrettanti quozienti di funzioni intere che avranno tutti per denominatore comune il determinante P; e così ora per questi valori di z diversi da α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ l'integrale normale sarà unico e determinato.

Ne segue che al tendere di z a quei valori particolari α_1, α_2, $\alpha_3, \ldots$ che rendono P infinitesimo, onde le $c_{p,1}$, $c_{p,2}, \ldots$ $c_{p,n}$ così determinate in funzione di z si mantengano finite, bisognerà che anche le funzioni intere P_1, $P_2, \ldots$ P_n che figureranno nei loro denominatori divengano infinitesime dello stesso ordine di P o di ordine superiore pei valori di α_1, α_2, $\alpha_3, \ldots$ che sono infinitesimi di P, potendo poi esse divenire infinitesime anche per altri valori di z; e in questo caso l'integrale normale corrispondente ai valori trovati per le $c_{p,1}$, $c_{p,2}, \ldots$ $c_{p,n}$ sarà una funzione intera di z; mentre se per alcuni degli infinitesimi α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_m, \ldots$ di P le indicate funzioni intere di z P_1, $P_2, \ldots$ P_n non divengono tutte infinitesime, e dello stesso ordine almeno, questi punti corrisponderanno ad altrettanti poli di alcune o di tutte le stesse $c_{p,1}$, $c_{p,2}, \ldots$ $c_{p,n}$ e quindi anche, almeno ordinariamente, dell'indicato integrale normale.

Ora avendo riguardo alla forma delle funzioni $P_1, P_2, \ldots P_n$ per mezzo di determinanti si vede subito che esse hanno tutte per fattore intero $\mathbf{Y}_b$, e quindi la circostanza ora indicata che un infinitesimo α_τ di P sia un infinitesimo, dello stesso ordine almeno, di queste funzioni, si presenterà in particolare quando per P lo stesso infinitesimo sia del prim'ordine, e oltre a ciò il solito integrale Y della equazione completa $E(y, \alpha_\tau) = X$ corrispondente a $z = \alpha_\tau$ sia un integrale normale.

D'altra parte se presa una qualunque $B_l = 0$ delle $i + 1$ equazioni al limite b, e per ogni infinitesimo α_τ applicato il processo dato al § 23, si troveranno gli $n - 1$ integrali $\mathrm{y}_{2,l}, \mathrm{y}_{3,l}, \ldots \mathrm{y}_{n,l}$ linearmente distinti della equazione omogenea corrispondente $E(y, \alpha_\tau) = 0$ pei quali la condizione al limite b $B_l = 0$ è soddisfatta, allora, indicando con Δ_l il loro determinante, per quanto si disse al § 25, onde il nostro integrale Y soddisfi alla condizione $B_l = 0$ al limite b bisognerà che si abbia $\int_a^b \Theta_c X \Delta_l \, d x = 0$; quindi evidentemente onde lo stesso integrale Y che soddisfa naturalmente alle $n - i - 1$ equazioni $A_0 = 0, A_2 = 0, \ldots A_{n-2-i} = 0$ relative al limite a soddisfi anche alle altre $B_0 = 0, B_1 = 0, \ldots B_i = 0$ relative al limite b, e sia quindi un integrale normale, bisognerà che si abbiano le $i + 1$ condizioni

$$\int_a^b \Theta_c X \Delta_0 \, d x = 0, \quad \int_a^b \Theta_c X \Delta_1 \, dx = 0, \ldots, \int_a^b \Theta_c X \Delta_i \, d x = 0 \tag{58}$$

corrispondenti a ciascuna delle condizioni al limite b.

E così si può ora affermare che in questo caso in cui si hanno le n equazioni ai limiti $A_0 = 0$, $A_1 = 0, \ldots A_{n-2-i} = 0$, $B_0 = 0$, $B_1 = 0, \ldots B_i = 0$, e il determinante P non è identicamente nullo qualunque sia z, saremo certi della esistenza di un integrale normale funzione intera di z che soddisfa alle condizioni indicate ai limiti, quando P sia tale che i suoi infinitesimi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \ldots$ a distanza finita, se vi saranno, siano tutti del prim'ordine, e per ciascuno di questi infinitesimi α_τ il solito integrale Y che si annulla insieme alle sue prime $n - 1$ derivate per $x = a$ sia un integrale normale, o, il che è lo stesso, quando per ogni infinitesimo α_τ siano soddisfatte le $i + 1$ condizioni (58).

38. Senza serie difficoltà potremmo anche considerare il caso in cui il determinante P è identicamente nullo qualunque sia z, e quello in cui le

equazioni ai limiti, pure essendo in numero maggiore di due, sono in numero inferiore all'ordine $n (> 2)$ della equazione data, pel qual caso dovrebbero farsi considerazioni simili a quelle fatte ai §§ 34 e 35 pel caso di due sole equazioni ai limiti (27); ma poichè ci siamo già dilungati d'assai, lasciamo di trattare dettagliatamente anche questi casi.

Anche i risultati qui esposti del resto sono già assai interessanti, ed estendono grandemente quelli che abbiamo ricordato sopra di Kneser-Stekloff relativi alle equazioni del second'ordine, in quanto che ci assicurano che, sotto certe condizioni speciali, anche per le equazioni generali lineari (54) di ordine superiore al secondo, quando in tutti o alcuni dei coefficienti dopo il primo a_0 (che si suppone sempre diverso da zero), o in X figura un parametro z sotto forma intera, possono aversi integrali normali che siano funzioni intere di z.

E quando quelle condizioni speciali che per questo abbiamo date non risultino soddisfatte, si avranno integrali normali che se non saranno funzioni *intere di* z *saranno però funzioni uniformi di* z *con sole singolarità polari a distanza finita in punti che saranno tutti o parte di quelli d'infinitesimo del* determinante λ del § 34, o del determinante P del paragrafo precedente. E ciò nel supposto che i determinanti del second'ordine ai quali dà luogo la matrice (31) non siano tutti identicamente nulli qualunque sia z, e così non sia identicamente nullo il determinante P.

39. Le condizioni speciali che abbiamo trovato per assicurare l'esistenza di integrali normali che siano funzioni intere di z, oltre a quella che i determinanti λ o P dei §§ 34 o 37 (che si suppone che non siano identicamente nulli qualunque sia z) abbiano i loro infinitesimi a distanza finita tutti del prim'ordine, o non li abbiano affatto, si riducono alla condizione (55) o ai sistemi di condizioni (58) che devono essere soddisfatte per tutti i punti d'infinitesimo di λ o di P.

E anche nel caso del § 35 in cui, avendosi le due sole equazioni ai limiti (27), i determinanti del second'ordine ai quali dà luogo la matrice (31) siano tutti identicamente nulli qualunque sia z, si ha ancora la condizione (55) la quale però allora deve essere soddisfatta per qualunque valore di z.

Però quando ci si limiti a considerare le equazioni (54) nelle quali il parametro z figura soltanto nel coefficiente a_n di y e per modo che si abbia $a_n = g\,\varphi(z) + l$, con g e l funzioni della sola x continue o no ma finite e atte alla integrazione fra a e b, e $\varphi(z)$ funzione intera di z, allora, supponendo anche che g sia sempre dello stesso segno fra a e b e tutt'al più possa prendere il valore zero senza però essere mai d'integrale nullo in nessuna porzione di (a, b), è facile vedere che, come avviene sempre per le equazioni del second'ordine, così in casi speciali assai estesi anche per quelle di ordine superiore, il verificarsi delle condizioni stesse (55) o (58), o anche più generalmente il fatto comunque accertato dell'esistenza di un integrale normale della (54) che sia funzione intera di z, porta di necessità che debba essere $X = 0$ in tutto l'intervallo (a, b).

La dimostrazione di questo teorema, che può riguardarsi sia come relativo agli integrali delle equazioni differenziali lineari e complete, sia come relativo agli integrali normali delle equazioni lineari omogenee e alle funzioni X che soddisfano alle condizioni (55) o (58), fu data già in quest'ultimo senso, pel caso delle equazioni lineari del second'ordine, da Sturm nel 1846 nel Vol. I del *Journal de Math. de Liouville*, ma con condizioni molto restrittive per la funzione stessa X; e negli ultimi anni fu estesa rigorosamente da Stekloff e Kneser nelle Memorie citate, sempre per le sole equazioni del second'ordine, ma per casi molto più generali di quello di Sturm rispetto alla funzione X; perocchè invece delle condizioni che vengono dalla dimostrazione di Sturm essi posero soltanto quella che X dovesse essere finita e continua insieme alle derivate prima e seconda fra a e b.

Qui però, pure seguendo in sostanza il processo di Kneser opportunamente esteso, dimostreremo il teorema, oltre che per le equazioni del secondo ordine, anche per alcuni casi, molto estesi, di equazioni di ordine superiore, e sempre non facendo su X altra ipotesi che quella di essere finita e atta alla integrazione fra a e b, o che se diviene infinita resti atta alla integrazione anche quando si riduce ai suoi valori assoluti, o quando si moltiplica per funzioni finite e continue.

40. Limitiamoci perciò, come già abbiamo detto, a supporre che nella nostra equazione completa (54) il parametro z figuri soltanto nel coefficiente a_n di y, e per modo che si abbia $a_n = g\,\varphi(z) + l$, o $a_n = g\,z + l$ cambiando senz'altro per semplicità $\varphi(z)$ in z; e intendendo che g e l siano funzioni della sola x, continue o no ma finite e atte alla integrazione fra a e b, la prima delle quali supporremo anche che non cambî mai segno, e non sia d'integrale nullo in nessuna porzione di (a, b).

Siccome quando a_0 si mantenga diverso da zero fra a e b e anche a questi estremi e siano soddisfatte le varie condizioni che abbiamo poste relative ai determinanti λ a P, e alle condizioni (55) o (58), la nostra equazione, che d'ora innanzi scriveremo sempre sotto la forma $E(y, z) = X$, ammette un integrale normale y che è una funzione intera di z, così in questi casi, e anche più generalmente nel caso in cui in qualsiasi modo sia assicurata la esistenza di un tale integrale regolare y fino alle derivate n^e per ogni valore di x fra a e b (a e b incl.), nel qual caso *non è più neppure necessario di supporre che a_0 sia sempre diverso da zero nell'intervallo* (a, b), questo integrale y potremo intenderlo sviluppato per le potenze intere e positive di $z-\gamma$, dove γ è un numero reale o complesso qualsiasi; e quindi potremo scrivere

$$y = s_0 + s_1(z-\gamma) + s_2(z-\gamma)^2 + \cdots + s_p(z-\gamma)^p + \cdots \qquad (59)$$

essendo $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_p, \ldots$ funzioni della sola x dipendenti dal valore di y; e queste funzioni, per quanto si disse in generale ai §§ 12, 13 e 14, quand'anche a_0 non sia sempre diverso da zero fra a e b (a e b incl.), soddisfaranno successivamente alle equazioni

$$E(s_0, \gamma) = X,\ E(s_1, \gamma) = -g\, s_0,\ E(s_2, \gamma) = -g\, s_1, \ldots,\ E(s_p, \gamma) = -g\, s_{p-1}, \ldots \qquad (60)$$

e siccome y è integrale normale qualunque sia z, evidentemente queste funzioni $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_p, \ldots$ soddisfaranno alle stesse condizioni ai limiti per $x = a$ e $x = b$ alle quali soddisfa y quando siano date (*), cioè saranno tutte integrali normali delle respettive equazioni alle quali soddisfano, e colle stesse condizioni ai limiti a e b.

Si prenda ora a considerare la equazione generica $E(s_p, \gamma) = -g\, s_{p-1}$ nella quale, quando g non sia mai zero fra a e b, potremo comprendere anche la prima delle (60) col porre $s_{-1} = -\dfrac{X}{g}$; e moltiplicando in essa i due membri per s_q, si facciano poi in ogni termine integrazioni per parti successive da a ad x, come al § 1 della prima delle mie Memorie più volte

(*) Naturalmente, siccome partendo ora dalla ipotesi che sia assicurata in qualsiasi modo la esistenza di un integrale normale (59) che è funzione intera di z, si fa astrazione dagli studii dei paragrafi precedenti, e non si esclude quindi che a_0 possa essere zero a uno o anche a tutti e due gli estremi a e b, così le condizioni ai limiti potranno ora essere anche quelle che si hanno nei casi 2.° o 1.° del § 18, cioè che sia $\int_a^b \frac{a_1}{a_0}\, dx = -\infty$ a uno o a tutti e due quegli estremi.

citate; si otterrà la formola seguente:

$$p_0(s_q)\, s_p^{(n-1)} + p_1(s_q)\, s_p^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1}(s_q)\, s_p = c_{p,q} + \int_a^x \{ s_p\, Z(s_q) - g\, s_{p-1}\, s_q \}\, dx, \qquad (61)$$

nella quale $\varepsilon_{n+1} Z$ è il solito polinomio aggiunto del primo membro della equazione $E(y, \gamma) = X$, $c_{p,q}$ è una costante che è uguale al valore del primo membro per $x = a$, e per le p_r si ha in generale

$$p_r(s_q) = (a_r\, s_q) + \varepsilon_1 (a_{r-1}\, s_q)' + \varepsilon_2 (a_{r-2}\, s_q)'' + \cdots + \varepsilon_r (a_0\, s_q)^{(r)},$$

per modo cioè che p_r all'infuori del fattore ε_r è il solito polinomio aggiunto corrispondente al primo membro della equazione d'ordine r

$$a_0\, y^{(r)} + a_1\, y^{(r-1)} + \cdots + a_r\, y = 0,$$

e sviluppando si potrà scrivere

$$p_r(s_q) = \mu_{r,0}\, s_q + \mu_{r,1}\, s'_q + \mu_{r,2}\, s''_q + \cdots + \mu_{r,r}\, s_q^{(r)}, \qquad (62)$$

essendo

$$\left.\begin{array}{llllll}
\mu_{r,0} = a_r & + \varepsilon_1 a'_{r-1} & + \varepsilon_2 a''_{r-2} & + \varepsilon_3 a'''_{r-3} & + \cdots + & \varepsilon_r a_0^{(r)}, \\
\mu_{r,1} = & \varepsilon_1 a_{r-1} & + 2\varepsilon_2 a'_{r-2} & + 3\varepsilon_3 a''_{r-3} & + \cdots + & r_1 \varepsilon_r a_0^{(r-1)}, \\
\mu_{r,2} = & & \varepsilon_2 a_{r-2} & + 3\varepsilon_3 a'_{r-3} & + \cdots + & r_2 \varepsilon_r a_0^{(r-2)}, \\
\mu_{r,3} = & & & \varepsilon_3 a_{r-3} & + \cdots + & r_3 \varepsilon_r a_0^{(r-3)}, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\mu_{r,r} = & & & & & \varepsilon_r a_0.
\end{array}\right\} \qquad (63)$$

Valendoci ora della formola (61) si potrebbero trovare varii casi nei quali sussiste il teorema enunciato sopra, cioè che sotto le condizioni poste si ha $X = 0$ per tutti i valori di x fra a e b; noi però ci limiteremo a considerare il caso in cui la equazione data pel valore particolare γ di z, cioè la $E(y, \gamma) = X$, è di quelle per le quali la equazione aggiunta di quella omogenea corrispondente $E(y, \gamma) = 0$ coincide colla primitiva, nel qual caso per $n = 2$ si comprendono anche le equazioni di Sturm e di Kneser-Stekloff.

Allora, siccome sarà $Z(s_q) = \varepsilon_{n+1} E(s_q, \gamma) = \varepsilon_n g s_{q-1}$, la formola precedente quando si esclude il caso di $p = q = 0$ darà subito luogo all'altra

$$\left.\begin{aligned} &[p_0(s_q)\, s_p^{(n-1)} + p_1(s_q)\, s_p^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1}(s_q)\, s_p]_a^b = \\ &= \int_a^b g\,(\varepsilon_n s_p s_{q-1} - s_{p-1} s_q)\, d\,x, \end{aligned}\right\} \qquad (64)$$

il cui primo membro col calcolo effettivo per mezzo delle (62) e (63), o anche coll'osservare che mutando p in q e q in p il secondo membro cambia segno se n è pari, e resta inalterato se n è dispari, potrà anche porsi sotto le forme

$$\Sigma\,[\theta_{i,l}\,(s_p^{(i)} s_q^{(l)} - s_q^{(i)} s_p^{(l)})]_a^b, \quad \Sigma\,[\theta_{i,l}\,(s_p^{(i)} s_q^{(l)} + s_q^{(i)} s_p^{(l)})]_a^b, \qquad (65)$$

secondochè n è pari o dispari, le somme essendo estese alle combinazioni (i, l) dei numeri $0, 1, 2, \ldots, n-1$ per le quali $i + l$ non supera $n - 1$, e inclusa quella di $i = l$ nel caso della seconda somma; e le $\theta_{i,l}$ essendo funzioni di x che dipendono dai primi n coefficienti $a_0, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ della equazione data e dalle loro derivate, e quindi considerate per $x = a$ e $x = b$ dipendono soltanto dai loro valori per questi valori estremi di x; talchè quando avvenga che dipendentemente dalla equazione data e dalle condizioni ai limiti a e b che fissano i nostri integrali normali, il primo membro della (64), o la corrispondente della espressione (65) sia zero qualunque siano s_p e s_q, avremo la formola

$$\int_a^b g\, s_{p-1}\, s_q\, d\,x = \varepsilon_n \int_a^b g\, s_p\, s_{q-1}\, d\,x,$$

che, nel caso in cui g sia sempre diverso da zero da a a b (a e b inc.), varrà anche quando uno dei numeri p e q sia zero, intendendo allora che s_{-1} sia $-\dfrac{X}{g}$.

Giunti a questa formola il processo di Kneser viene del tutto applicabile, salvo le leggerissime varianti che provengono dalla presenza del fattore $\varepsilon_n = \pm 1$.

Per questa formola infatti si vede che, sotto le condizioni poste, l'integrale $\int_a^b g\, s_\mu\, s_\nu\, d\,x$ nel quale μ e ν sono numeri interi, e di essi uno solo potrà essere negativo e uguale a -1 quando g sia sempre diverso da zero fra a

e b (a e b incl.), è una espressione che in valore assoluto si mantiene sempre inalterata al mutare degli indici μ e ν quando resti la stessa la loro somma, e può quindi indicarsi col simbolo $\Omega_{\mu+\nu}$, per modo che, quando μ e ν siano numeri positivi o nulli, o tutt'al più uno di essi sia uguale a -1 e l'altro allora sia zero o positivo, potremo scrivere in valore assoluto

$$\Omega_{\mu+\nu}=\int_a^b g\, s_\mu\, s_\nu\, d\,x=\varepsilon_n\int_a^b g\, s_{\mu-1}\, s_{\nu+1}\, d\,x=\varepsilon_n^2\int_a^b g\, s_{\mu-2}\, s_{\nu+2}\, d\,x=\cdots,$$

con $\varepsilon_n=1$ o $\varepsilon_n=-1$ secondochè n è pari o dispari.

Ricordiamo ora l'osservazione fatta da SCHWARZ, cioè che se α e β sono quantità reali indipendenti da x si ha in generale, qualunque siano le funzioni u e v purchè atte alla integrazione

$$\int_a^b g\,(\alpha\, u+\beta\, v)^2\, d\,x=\alpha^2\int_a^b g\, u^2\, d\,x+2\,\alpha\,\beta\int_a^b g\, u\, v\, d\,x+\beta^2\int_a^b g\, v^2\, d\,x,$$

e in conseguenza se, come appunto abbiamo supposto, g non cambia mai segno fra a e b, la forma di 2.° grado in α o β del secondo membro di questa formola deve essere sempre positiva o nulla, o sempre negativa o nulla, e sarà quindi

$$\left(\int_a^b g\, u\, v\, d\,x\right)^2<\int_a^b g\, u^2\, d\,x\int_a^b g\, v^2\, d\,x\,;$$

e di qui prendendo $u=s_{p-1}$, e $v=s_{p+1}$ con $p\geq 1$ (*) si troverà che le nostre quantità Ω_{2p} in valore assoluto devono soddisfare alla relazione $\Omega_{2p}^2\leq\Omega_{2p-2}\,\Omega_{2p+2}$ dalla quale apparisce che le quantità stesse Ω_0, Ω_2, Ω_4, Ω_6,... o saranno tutte zero o saranno tutte diverse da zero, e in quest'ultimo caso avremo di necessità in valore assoluto

$$\frac{\Omega_2}{\Omega_0}\leq\frac{\Omega_4}{\Omega_2}<\frac{\Omega_6}{\Omega_4}\leq\frac{\Omega_8}{\Omega_6}<\cdots;$$

cioè i rapporti $\dfrac{\Omega_{2m}}{\Omega_{2m-2}}$ in valore assoluto non andranno mai decrescendo, e nessuno di essi sarà inferiore al valore assoluto di $\dfrac{\Omega_2}{\Omega_0}$.

(*) Si esclude qui il caso di $p=0$ perchè, potendo g in qualche punto essere zero, $g\, s_{-1}^2$ può essere infinito.

Ma d'altra parte, moltiplicando la (59) per $g\,s_0$ e integrando fra a e b, si trova la formola

$$\int_a^b g\,s_0\,y\,d\,x = \pm\,\Omega_0 \pm \Omega_1 (z-\gamma) \pm \Omega_2 (z-\gamma)^2 \pm \Omega_3 (z-\gamma)^3 + \cdots,$$

nella quale la serie del secondo membro deve essere convergente per qualunque valore di z, mentre quando le Ω_{2p} fossero diverse da zero i risultati precedenti porterebbero che la serie formata coi termini di posto pari fosse divergente per valori di $z-\gamma$ di modulo r sufficientemente grande, perchè in essa il rapporto di un termine al precedente avrebbe un modulo non inferiore al valore assoluto di $\frac{\Omega_2}{\Omega_0} r^2$, e allora evidentemente l'integrale $\int_a^b g\,s_0\,y\,d\,x$ non sarebbe una funzione intera di z; dunque bisogna di necessità ammettere che le Ω_0, Ω_2, Ω_4, $\Omega_6,\ldots$ siano tutte zero, e allora venendo ad essere zero l'integrale $\int_a^b g\,s_0^2\,d\,x$, anche s_0 dovrà essere sempre zero perchè s_0 è continua, e g non cambia mai segno fra a e b e non è d'integrale nullo in nessuna porzione di $(a,\,b)$; e questo per la prima delle (60) porta subito a concludere che anche X deve essere zero per ogni valore di x fra a e b.

E così, quando si tratti di equazioni (54), o $E(y,\,z) = X$, nelle quali il parametro z figuri soltanto nel coefficiente a_n di y, e sia $a_n = g\,\varphi(z) + l$, o $a_n = g\,z + l$, con g e l funzioni di x finite e atte alla integrazione fra a o b, la prima delle quali non cambii mai segno in questo intervallo, e non sia d'integrale nullo in nessuna porzione dello stesso intervallo, e inoltre i primi membri di queste equazioni siano tali che almeno per un valore speciale γ di z la equazione $E(y,\,\gamma) = 0$ si riproduca nella sua aggiunta, e per le condizioni date ai limiti a e b per gli integrali il primo membro della (64) o la espressione corrispondente (65) si annulli indipendentemente dai valori delle funzioni s_p e s_q che vi figurano, allora si può evidentemente affermare *che di necessità dovrà essere $X = 0$ per ogni valore di x nell'intervallo* $(a,\,b)$ quando ci si trovi in uno dei due casi seguenti, cioè:

1.° che, essendo a_0 sempre diverso da zero fra a e b (a e b incl., la condizione (55) nel caso del § 34, e i sistemi di condizioni (58) in quello del § 37 risultino soddisfatti pei valori di z corrispondenti respettivamente agli infinitesimi a distanza finita che si abbiano pel determinante λ nel primo caso e pel determinante P nel secondo, supposto anche che questi infinitesimi siano tutti del prim'ordine; e nel caso del § 35 la stessa condizione (55) risulti soddisfatta per qualsiasi valore di z;

2.° che in qualsiasi modo sia assicurata la esistenza di un integrale normale della (54) che sia una funzione intera di z e sia regolare rispetto ad x fino alle derivate n^e in tutto l'intervallo da a a b (gli estr. incl.), quand'anche in questo caso il coefficiente a_0 non sia sempre diverso da zero nello stesso intervallo.

E avendo riguardo alle espressioni nelle quali X è venuto a figurare in tutto il corso di questi studii, si vede che onde questi risultati valgano basta la sola condizione che X fra a e b sia atta alla integrazione, e che se non è sempre finita resti atta alla integrazione anche ridotta ai suoi valori assoluti.

41. Merita poi di essere notato che, per la forma generale sotto la quale il teorema ora dimostrato è stato enunciato, si può anche dire che per la solita nostra equazione completa $E(y, z) = X$ per la quale siano soddisfatte le condizioni poste nel paragrafo precedente rispetto alla equazione aggiunta delle $E(y, \gamma) = 0$, e rispetto al primo membro della equazione (64) o alla espressione corrispondente (65), se X non sarà sempre zero nell'intervallo (a, b), non potrà mai esistere un integrale normale che sia regolare rispetto ad x fino alle derivate n^e nell'intervallo da a a b (gli estremi incl.), e sia funzione intera di z.

E in questo caso quando fra a e b (questi estremi incl.) a_0 sia sempre diverso da zero, e le condizioni ai limiti siano soltanto le due (27) come nel § 34, o siano precisamente in numero di n uguale all'ordine della equazione come nel § 37, e nel primo caso fra i determinanti della corrispondente matrice (31) ve ne sia almeno uno λ che non sia identicamente nullo qualunque sia z, e così pure nel secondo caso il solito nostro determinante P del § 37 non sia identicamente nullo, allora esisteranno sempre integrali normali funzioni uniformi di z in tutto il piano che avranno necessariamente alcune singolarità a distanza finita; ma queste saranno soltanto singolarità polari e non potranno essere altro che nei punti α_σ d'infinitesimo di λ o di P che vi fossero di ordine superiore al primo, o pei quali il solito nostro integrale Y della equazione $E(y, \alpha_\sigma) = X$ che si annulla insieme alle sue prime $n-1$ derivate non fosse un integrale normale, o, il che è lo stesso, la condizione (55) nel primo caso, o i sistemi di condizioni (58) nel secondo non risultassero soddisfatti.

42. A proposito poi delle altre condizioni che si hanno pel teorema dimostrato, aggiungeremo che, come avviene sempre per le equazioni del second'ordine, così anche per quelle di ordine superiore, la condizione che qui abbiamo che la equazione $E(y, \gamma) = 0$ si riproduca nella sua aggiunta può rendersi soddisfatta in molti casi sostituendo alla equazione data (54) o $E(y, z) = X$ quella che se ne deduce moltiplicandola per una funzione conveniente, e poi talvolta anche scegliendo opportunamente il γ; e con questo le condizioni (55) o (58), come la matrice (31) e i determinanti λ o P non vengono evidentemente a cambiarsi, e solo vengono talvolta a cambiare il primo membro della (64) o le espressioni (65) per cambiamenti che si avranno nei coefficienti $\mu_{r,s}$ dati dalle (63).

E in generale poichè ci sarà sempre la possibilità di valersi della indeterminazione di γ, e di fare la indicata trasformazione della equazione data col moltiplicarla per una funzione conveniente, così evidentemente la indicata condizione per la $E(y, \gamma) = 0$, mentre non porta affatto restrizioni per le equazioni del second'ordine, ne porterà soltanto un numero più limitato di quello che a prima vista potrebbe apparire, nel caso delle equazioni di ordine superiore.

Altre trasformazioni poi del genere di quelle indicate al § 15 possono servire a togliere anche altre restrizioni.

43. Passando ora a trattare di casi particolari, incominciamo da quello delle equazioni del second'ordine che (come già dicemmo potersi sempre fare colla trasformazione precedente) le intenderemo ridotte alla forma

$$\left(a_0 \frac{dy}{dx}\right)' + a_2 y = X,$$

che si riproduce nella sua aggiunta.

Si osserverà che allora il primo membro della (64) o la espressione corrispondente (65) si riduce alla espressione semplice $[a_0 (s_q s'_p - s_p s'_q)]_a^b$ che, per le condizioni ai limiti $k_0 y + k_1 y' = 0$ per $x = a$ e $h_0 y + h_1 y' = 0$ per $x = b$ che ora si abbiano, o quando sia $a_0 = 0$ a uno o a tutti e due gli estremi, viene zero senz'altro; e questo ora basta per potere subito concludere che per le equazioni generali del second'ordine

$$E(y, z) = a_0 y'' + a_1 y' + (g z + l) y = X, \tag{66}$$

nelle quali a_0, a_1, g e l sono funzioni della sola x che soddisfano alle solite condizioni più volte indicate, si avrà sempre $X = 0$ quando in qualche modo sia assicurata l'esistenza di un integrale normale della stessa equazione, relativo alle condizioni ai limiti date

$$k_0 y + k_1 y' = 0 \text{ per } x = a, \quad h_0 y + h_1 y' = 0 \text{ per } x = b,$$

che sia una funzione intera di z, e rispetto ad x sia regolare in tutto l'intervallo da a a b (a e b incl.) fino alle derivate seconde, e ciò quand'anche, in questo intervallo, a_0 non sia sempre diverso da zero; e in particolare si avrà sempre $X = 0$ fra a e b quando fra a e b (gli estremi inclusi) a_0 sia sempre diverso da zero, e il determinante (56), cioè

$$(k_0 w_1 + k_1 w'_1)_a (h_0 w_2 + h_1 w'_2)_b - (k_0 w_2 + k_1 w'_2)_b (h_0 w_1 + h_1 w'_1)_a, \qquad (67)$$

cui ora si riduce la matrice (31) corrispondente alle condizioni date ai limiti, non sia identicamente zero, e i suoi infinitesimi a distanza finita, quando vi siano, siano tutti del prim'ordine, e per ciascuno di essi α_τ sia soddisfatta la condizione (55) che ora si riduce all'altra

$$\int_a^b \Theta_c X \mathsf{y} \, d x = 0, \qquad (68)$$

essendo al solito $\Theta_c = \frac{1}{a_0} e^{\int_c^x \frac{a_1}{a_0} dx}$, e essendo y quell'integrale della equazione omogenea corrispondente $E(y, \alpha_\tau) = 0$ relativa al valore α_τ di z, che soddisfa alla condizione data al limite b; o, il che è lo stesso, essendo y l'integrale normale della stessa equazione omogenea $E(y, \alpha_\tau) = 0$; e ciò quando non si abbiano per X altro che le solite condizioni d'integrabilità indicate sopra, il che estende assai il teorema di Kneser-Stekloff anche per le equazioni del second'ordine.

In questo caso poi, di a_0 sempre diverso da zero fra a e b (a e b incl.), il teorema continua a sussistere anche quando il determinante (67) sia identicamente nullo, purchè allora la condizione (68) si verifichi per qualunque valore di z.

E avendo riguardo più specialmente alla condizione 2.ª dell'enunciato del teorema del § 40, e alla circostanza che nel caso della equazione del second'ordine la espressione (65) si riduce a $[a_0 (s_p s'_q - s_q s'_p)]_a^b$, si può anche dire che se a_0 sarà zero in ambedue gli estremi a e b, basterà che in qualche modo sia assicurata la esistenza di un integrale della equazione completa data che come funzione di x sia regolare da a a b (gli estr. incl.) fino alle derivate seconde, e sia funzione intera di z, per potere affermare che si avrà sempre $X=0$, e ciò senza bisogno di avere condizioni ai limiti a e b; e se a_0 sarà zero soltanto in un estremo, p. es. in a, la condizione al limite basterà averla per l'altro estremo b, e l'integrale indicato dovrà esistere con questa condizione al limite.

44. Quanto poi alle equazioni di ordine superiore al secondo, quando già siano date sotto quella forma che, almeno per un valore particolare γ di z, si riproduce nella equazione aggiunta, o quando si possano ridurre a una tale forma moltiplicandole per una funzione conveniente, come si disse al § 42, bisognerà sempre trovare i casi nei quali il primo membro della espressione (64) o la corrispondente (65) siano zero in conseguenza delle equazioni ai limiti a e b che saranno state date per gli integrali normali, e dei valori pure per $x=a$ e $x=b$ dei primi n coefficienti a_0, a_1, $a_2, \ldots$, a_{n-1} della equazione data e delle loro derivate.

Le quantità così da studiarsi sono sempre le differenze di due espressioni perfettamente simili, l'una relativa al punto b, e l'altra relativa al pnnto a, e se circostanze speciali non daranno subito il valore di una di esse (*), o se, come ordinariamente avverrà, non si avranno legami speciali fra quello che accade per $x=a$ e quello che accade per $x=b$, converrà studiarle separatamente, cercando i casi nei quali ciascuna di esse è zero di per sè; e le ricerche che faremo per l'una di esse, p. es. per quella relativa al punto b, serviranno naturalmente anche per l'altra mutando soltanto b in a, e mutando i coefficienti delle condizioni ai limiti; e queste considerazioni varranno anche se saremo nei casi nei quali a_0 sia zero a uno o a tutti e due gli estremi a e b, pure mantenendosi senza singolarità i nostri integrali.

Tali ricerche si fanno ognor più laboriose al crescere dell'ordine della equazione; però in sostanza non presentano serie difficoltà; e qui, per dare un cenno del metodo da seguirsi, tratteremo il caso delle equazioni del terzo e del quarto ordine.

(*) Così ad es. se per qualche circostanza si sapesse che l'integrale normale (59) del quale si ammette l'esistenza è quello che si ottiene dalle solite nostre formole generali del § 9 per valori indipendenti da z delle c_1, $c_2, \ldots$, c_n, allora per quanto si disse al § 14, tutte le s_p per $p>0$ sarebbero zero per $x=a$ insieme alle loro prime $n-1$ derivate, e quindi le differenze da studiarsi (65) si ridurrebbero al solo termine relativo al punto b.

Incominciando da quelle del terz'ordine, osserveremo per prima cosa che bisognerà limitarsi a quelle che sono già della forma

$$a_0 y''' + \frac{3}{2} a'_0 y'' + a_2 y' + (g z + l) y = X, \tag{69}$$

o che vi si possono ridurre moltiplicandole per un fattore conveniente come si disse al § 42; e bisognerà inoltre che esista un valore speciale γ di z pel quale si abbia $g\gamma + l = \frac{1}{2} a'_2 - \frac{1}{4} a'''_0$, il che avverrà quando le funzioni a_0, a_2, g e l siano tali che il rapporto $\frac{2a'_2 - a'''_0 - 4l}{4g}$ sia costante; e ciò per potere essere nel caso delle equazioni che si riproducono nella loro aggiunta quando $z = \gamma$; ma questo, come si vede, lascia ancora molta arbitrarietà nella equazione da considerarsi.

Calcolato ora il primo membro della (64), e postolo sotto la seconda forma (65), si vede che esso sarà la differenza dei valori per $x = b$ e $x = a$ della espressione

$$a_0(s_p s''_q + s_q s''_p) + \frac{1}{2} a'_0 (s_p s'_q + s_q s'_p) + \left(a_2 - \frac{1}{2} a''_0\right) s_p s_q - a_0 s'_p s'_q\,; \tag{70}$$

e questa differenza dovrà essere zero in conseguenza delle condizioni date per l'integrale ai limiti a e b, e dei valori, pure per $x = a$ e $x = b$, dei coefficienti a_0 e a_2 della equazione e della derivata di a_0.

Le condizioni a ciascuno dei limiti a e b per gli integrali della (69) potranno essere una o due, e complessivamente non più di tre; e così, riferendoci p. es. a quelle relative al limite b, dovremo considerare i casi nei quali per questo limite le condizioni sono una o due, e sempre ciascuna della forma $h_0 y + h_1 y' + h_2 y'' = 0$ per $x = b$.

Supposto dapprima che di queste se ne abbia una sola, e che in essa h_0 non sia zero, potremo sempre scriverla per semplicità sotto l'altra forma $y = h_1 y' + h_2 y''$ (supponendo cioè $h_0 = -1$), per modo che avremo $s_p = h_1 s'_p + h_2 s''_p$ e $s_q = h_1 s'_q + h_2 s''_q$ sempre per $x = b$, e con h_1 e h_2 costanti che potranno anche essere zero.

In questo caso dunque la espressione (70) si ridurrà all'altra

$$\left\{ a_0 h_1 + \frac{1}{2} a'_0 h_2 + \left(a_2 - \frac{1}{2} a''_0\right) h_1 h_2 \right\} (s'_p s''_q + s'_q s''_p) +$$

$$+ \left\{ 2 a_0 h_2 + \left(a_2 - \frac{1}{2} a''_0\right) h_2^2 \right\} s''_p s''_q + \left\{ a'_0 h_1 + \left(a_2 - \frac{1}{2} a''_0\right) h_1^2 - a_0 \right\} s_p s_q\,;$$

e quindi, perchè sia zero per $x = b$ quando restano indeterminate le s'_p, s''_p, s'_q e s''_q, bisognerà che si abbiano le equazioni

$$a_0 h_1 + \frac{1}{2} a'_0 h_2 + \left(a_2 - \frac{1}{2} a''_0\right) h_1 h_2 = 0, \quad 2 a_0 h_2 + \left(a_2 - \frac{1}{2} a''_0\right) h_2^2 = 0,$$

$$a'_0 h_1 + \left(a_2 - \frac{1}{2} a''_0\right) h_1^2 - a_0 = 0,$$

nelle quali deve intendersi che i valori dei coefficienti a_0 e a_2 e delle derivate di a_0 sono quelli che essi hanno per $x = b$.

Ora la seconda di queste equazioni porta che non possano aversi altro che i due casi di $h_2 = 0$, o $h_2 = -\left(\frac{2 a_0}{a_2 - \frac{1}{2} a''_0}\right)_b$, il secondo dei quali esclude che per $x = b$ sia $a_2 - \frac{1}{2} a''_0 = 0$ quando non sia anche $a_0 = 0$; e con questa esclusione si vede che le altre due equazioni portano di necessità che debba essere sempre $a_0 = 0$ per $x = b$, e $h_1 = 0$, o $h_1 = -\left(\frac{a'_0}{a_2 - \frac{1}{2} a''_0}\right)_b$, e quindi sempre $h_2 = 0$; mentre quando sia $a_2 - \frac{1}{2} a''_0 = 0$ per $x = b$, si vede che dovrà essere $a_0 = 0$ per $x = b$, e $h_1 = h_2 = 0$ se a'_0 per $x = b$ non sarà zero, e potranno essere h_1 e h_2 qualsiansi se a_0 e a'_0 saranno ambedue zero per $x = b$; quindi, quando non si ha che una condizione al limite b pei nostri integrali normali nella quale il coefficiente h_0 di y debba essere diverso da zero, questa non può essere che una delle tre seguenti

$$y = 0, \qquad \left(a_2 - \frac{1}{2} a''_0\right) y + a'_0 y' = 0, \quad \text{o} \quad y = h_1 y' + h_2 y',$$

nelle quali in $a_2 - \frac{1}{2} a''_0$ e in a'_0 s'intende che x debba avere il valore b, e nel supposto che nei primi due casi a_0 sia zero per $x = b$, e nel secondo a'_0, e $a_2 - \frac{1}{2} a''_0$ non siano zero, e nel terzo siano zero a_0, a'_0 e $a_2 - \frac{1}{2} a'_0$ sempre per $x = b$, restando allora h_1 e h_2 qualsiansi; e ciò quando in qualche modo si sappia che l'essere $a_0 = 0$ per $x = b$ non porterà singolarità nell'integrale normale da considerare.

In modo simile si trattano i casi nei quali, essendovi ancora una sola condizione $h_0 y + h_1 y' + h_2 y'' = 0$ al limite b, le h_0 e h_2 possono essere zero senza che lo sia h_1, o le h_0 e h_1 possono essere zero senza che lo sia h_2.

E se invece di una sola condizione al limite b, se ne avranno due

$$h_0 y + h_1 y' + h_2 y'' = 0, \quad h_0 y + h_1 y' + h_2 y'' = 0, \tag{71}$$

e in queste per es. il determinante $h_0 h'_1 - h_1 h'_0$ non sarà zero, per modo che a queste condizioni possano sostituirsi le altre $y = h_{2\,0} y''$, $y' = h_{2,1} y''$, allora la (70) si trasforma nell'altra

$$\left\{ 2\, a_0\, h_{2,0} + a'_0\, h_{2,0}\, h_{2,1} + \left(a_2 - \frac{1}{2} a''_0\right) h^2_{2,0} - a_0\, h^2_{2,1} \right\} s''_p\, s''_q\,,$$

la quale mostra che in questo caso fra i valori di h e k e quelli dei coefficienti a_0 e a_2 e delle derivate di a_0 per $x = b$ deve sussistere la relazione

$$2\, a_0\, h_{2,0} + a'_0\, h_{2,0}\, h_{2,1} + \left(a_2 - \frac{1}{2} a''_0\right) h^2_{2,0} - a_0\, h^2_{2,1} = 0. \tag{72}$$

Una relazione simile si troverebbe quando nella matrice dei coefficienti delle due condizioni ai limiti (71) il determinante diverso da zero, invece del primo $h_0 h'_1 - h_1 h'_0$, dovesse essere uno degli altri due $h_0 h'_2 - h_2 h'_0$, $h_1 h'_2 - h_2 h'_1$; e ora basta combinare questi risultati con quelli simili pel limite a, per avere tutti i casi possibili per l'applicabilità del teorema alle equazioni del terz'ordine quando le s_p per $x = a$ e $x = b$ restano assolutamente indeterminate.

Così ad es. quando si debbano avere due condizioni $y = h_{2,0}\, y''$, $y' = h_{2,1}\, y''$ per $x = b$, e una $y = k_{1,0}\, y' + k_{2,0}\, y''$ per $x = a$, si vede che dovremo avere la relazione $2\, a_0\, h_{2,0} + a'_0\, h_{2,0}\, h_{2,1} + \left(a_2 - \frac{1}{2} a''_0\right) h^2_{2,0} - a_0\, h^2_{2,1} = 0$ per $x = b$, e uno dei tre casi seguenti per $x = a$

1.° $y = 0$, $a_0 = 0$;

2.° $\left(a_2 - \frac{1}{2} a''_0\right) y + a'_0\, y' = 0$, $a_0 = 0$, con a'_0 e $a_2 - \frac{1}{2} a''_0$ diversi da zero;

3.° $y = k_{1,0}\, y' + k_{2,0}\, y''$, $a_0 = 0$, $a'_0 = 0$, $a_2 - \frac{1}{2} a''_0 = 0$;

e queste condizioni si invertiranno quando si debbano invece avere due condizioni ai limiti per $x = a$ e una per $x = b$.

45. Infine trattandosi delle equazioni del quart'ordine, osserveremo prima che per queste bisognerà limitarsi a quelle che sono già della forma

$$a_0\, y^{\text{IV}} + 2\, a'_0\, y''' + a_2\, y'' + (a'_2 - a'''_0)\, y' + (g\, z + l)\, y = X, \tag{73}$$

o che vi si possono ridurre moltiplicandole per un fattore conveniente, come si disse al § 42, il che del resto lascia ancora molta arbitrarietà nelle equazioni da considerarsi.

Calcolando ora il primo membro della (64), e ponendolo sotto la prima forma (65) si trova che esso sarà la differenza dei valori per $x = b$ e $x = a$ della espressione

$$\left.\begin{array}{l} a_0 (s_q s'''_p - s_p s'''_q) + a'_0 (s_q s''_p - s_p s''_q) + \\ + (a_3 - a''_0)(s_q s'_p - s_p s'_q) - a_0 (s'_q s''_p - s'_p s''_q); \end{array}\right\} \tag{74}$$

e noi dovremo trovare i casi nei quali questa espressione sarà zero per $x = a$, e $x = b$ in conseguenza delle condizioni date ai limiti a e b per gli integrali normali, e dei valori per $x = a$, e $x = b$ dei coefficienti della equazione e delle loro derivate.

Le condizioni ai limiti a e b nel caso attuale potranno essere una, due o tre per ciascun limite, e complessivamente non più di quattro, e noi studieremo ora i tre casi che possono aversi pel limite b pel quale le varie condizioni saranno sempre della forma

$$h_0 y + h_1 y' + h_2 y'' + h_3 y''' = 0.$$

Supposto dapprima che ve ne sia una sola, e che ad es. h_0 sia diverso da zero, potremo per semplicità intenderla ridotta alla forma $y = h_1 y' + h_2 y'' + h_3 y'''$, con che allora avremo $s_p = h_1 s'_p + h_2 s''_p + h_3 s'''_p$, $s_q = h_1 s'_q + h_2 s''_q + h_3 s''_q$ sempre per $x = b$, e l'espressione precedente (74) ri ridurrà all'altra

$$\{a \cdot h_1 - (a_2 - a''_0) h_3\} (s'_q s'''_p - s'_p s'''_q) + (a_0 h_2 - a'_0 h_3)(s''_q s'''_p - s''_p s'''_q) +$$
$$+ \{a'_0 h_1 - (a_2 - a''_0) h_2 - a_0\} (s'_q s''_p - s'_p s''_q),$$

che darà luogo alle tre equazioni

$$a_0 h_1 - (a_2 - a''_0) h_3 = 0, \quad a_0 h_2 - a'_0 h_3 = 0, \quad a'_0 h_1 - (a_2 - a''_0) h_2 - a_0 = 0,$$

nelle quali si deve intendere che nei coefficienti a_0 e a_2 e nelle derivate di a_0 sia fatto $x = b$; e ora studiando queste equazioni si vede subito che esse portano per prima cosa che debba essere $a_0 = 0$ per $x = b$; e sotto questa condizione, quando possa essere soddisfatta senza che ne vengono singolarità nell'integrale normale da considerarsi, i soli casi possibili per la condizione ai limiti $y = h_1 y' + h_2 y'' + h_3 y'''$ per $x = b$ vengono ad essere i tre seguenti

1.° $h_1 = \left(\frac{a_2 - a''_0}{a'_0}\right)_b h_2$, con $h_3 = 0$ e h_2 qualunque, e a'_0 diverso da zero per $x = b$, 2.° h_1 qualunque e $h_2 = h_3 = 0$, con $a'_0 = 0$ per $x = b$,

3.° h_1, h_2, e h_3 qualunque con $a'_0 = 0$ e $a_2 - a''_0 = 0$ per $x = b$.

In modo simile si studierebbero i casi nei quali, essendovi ancora una sola condizione limite $h_0 y + h_1 y' + h_2 y'' + h_3 y''' = 0$ per $x = b$, si sapesse solo che h_1, o h_2, o h_3 rispettivamente hanno un valore diverso da zero.

Nel caso poi che invece di una sola condizione ai limiti per $x = b$ se ne abbiano due

$$h_0 y + h_1 y' + h_2 y'' + h_3 y''' = 0, \quad h'_0 y + h'_1 y' + h'_2 y'' + h'_3 y''' = 0, \qquad (75)$$

e si sappia ad es. che il determinante $h_0 h'_1 - h_1 h'_0$ non è zero, per modo da potere scrivere per semplicità le due condizioni sotto la forma

$$y = h_{2,0} y'' + h_{3,0} y''', \quad y' = h_{2,1} y'' + h_{3,1} y',$$

allora la (74) si ridurrà all'altra

$$\{ a_0 (h_{2,0} + h_{3,1}) - a'_0 h_{3,0} + (a_2 - a''_0)(h_{2,0} h_{3,1} - h_{2,1} h_{3,0}) \} (s''_q s'''_p - s''_p s'''_q),$$

la quale, per potere essere zero per $x = b$ indipendentemente dai valori delle derivate seconde e terze di s_p e s_q, richiederà che fra i coefficienti $h_{2,0}$, $h_{3,0}$, $h_{2,1}$ e $h_{3,1}$ delle condizioni ai limiti, e i valori dei coefficienti a_0 e a_2 e delle derivate di a_0 per $x = b$ sussista la relazione

$$a_0 (h_{2,0} + h_{3,1}) - a'_0 h_{3,0} + (a_2 - a''_0)(h_{2,0} h_{3,1} - h_{2,1} h_{3,0}) = 0\,;$$

e in modo simile si studierebbe il caso in cui si sapesse che dei varii determinanti cui dà luogo la matrice dei coefficienti delle condizioni (75) quello certamente diverso da zero non è il primo $h_0 h'_1 - h_1 h'_0$ ma uno degli altri cinque.

Infine se le condizioni ai limiti saranno le tre

$$\left.\begin{aligned} h_0 y + h_1 y' + h_2 y'' + h_3 y''' = 0, \quad h'_0 y + h'_1 y' + h'_2 y'' + h'_3 y''' = 0, \\ h''_0 y + h''_1 y' + h''_2 y'' + h''_3 y''' = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (76)$$

supposto ad es. che il determinante $\begin{vmatrix} h_0 & h_1 & h_2 \\ h'_0 & h'_1 & h'_2 \\ h''_0 & h''_1 & h''_2 \end{vmatrix}$ sia diverso da zero, per modo che le condizioni stesse si possano ridurre alla forma $y = h_3 y'$, $y' = h'_3 y''$, $y'' = h''_3 y'''$, si vede subito che la (75) viene soddisfatta senz'altro, e così in questo caso non si hanno condizioni nè fra i coefficienti delle condizioni al limite b, nè fra i valori dei coefficienti della equazione e delle loro derivate per $x = b$. E lo stesso avverrebbe quando nella matrice dei coefficienti delle condizioni al limite (76) fosse un altro il determinante di terz'ordine diverso da zero.

Condizioni simili si avrebbero per $x = a$, e così ad es. nel caso che si debbano avere per $x = a$ le due condizioni

$$y = k_{2\,0}\, y' + k_{3\,0}\, y'', \quad y' = k_{2\,1}\, y'' + k_{3,1}\, y''',$$

e per $x = b$ le due

$$y = h_{2,0}\, y' + h_{3,0}\, y'', \quad y' = h_{2,1}\, y'' + h_{3,1}\, y',$$

basterà che fra i varii coefficienti di queste condizioni e i valori dei coefficienti a_0 e a_2 della equazione data e delle loro derivate si abbiano le due relazioni

$$a_0\,(k_{2,0} + k_{3,1}) - a'_0\, k_{3.0} + (a_2 - a''_0)\,(k_{2\,0}\, k_{3,1} - k_{2,1}\, k_{3,0}) = 0 \quad \text{per} \quad x = a,$$

e

$$a_0\,(h_{2,0} + h_{3,1}) - a'_0\, h_{3,0} + (a_2 - a''_0)\,(h_{2,0}\, h_{3,1} - h_{2,1}\, h_{3,0}) = 0 \quad \text{per} \quad x = b.$$

46. Ammesso dunque che essendo a_0 sempre diverso da zero da a e b (a e b incl.) ci si possa assicurare che sono soddisfatte le condizioni dei §§ 34 o 35 o del § 37 tanto rispetto agli infinitesimi dei determinanti λ o P quando, essendo nei casi dei §§ 34 o 35, non sono identicamente nulli qualunque sia z, quanto rispetto alle corrispondenti condizioni (55) o (58); o ammesso più generalmente, e allora anche pel caso che fra a e b (a e b incl.) a_0 non sia sempre diverso da zero, che ci si possa in qualche modo assicurare che esiste un integrale normale della equazione data che è funzione intera di z, e che nello stesso intervallo da a a b (gli estr. incl.) è regolare fino alle derivate terze o quarte, allora i risultati ottenuti nei due ultimi paragrafi mostrano intanto che almeno per le equazioni del terzo e quart'ordine vi sono sempre molti casi nei quali il teorema del § 40 è applicabile; e vengono determinati questi casi.

La ricerca di casi simili per le equazioni di ordine anche più alto può farsi al modo stesso, ma i calcoli diventano sempre più laboriosi.

È notevole però che nel caso delle equazioni di ordine pari ma qualunque n, per le quali il primo membro della (64) viene ad avere la prima delle forme (65), se il numero delle condizioni per uno dei limiti p. es. b sarà il numero massimo $n - 1$, per modo cioè da poterle trasformare in $n - 1$

altre che determinano i valori di $n-1$ delle $y, y', y'', \dots y^{(n-1)}$ per $x=b$ per la rimanente di esso $y^{(t)}$, con formole della forma $y^{(r)} = h_{t,r}\, y^{(t)}$, allora il termine della espressione stessa (65) corrispondente al limite b, in seguito a queste condizioni applicate alle s_p e s_q verrà identicamente nullo, e quindi in questo caso pel limite b non si avrà nessuna condizione nè fra i coefficienti delle equazioni ai limiti nè fra i valori per $x=b$ dei primi n coefficienti della equazione data e delle loro derivate, e rimarranno solo le condizioni per $x=a$ che saranno conseguenza dell'unica condizione al limite stesso a che si avrà in questo caso, e che potranno trovarsi in modo analogo a quello tenuto pel caso delle equazioni di 3.° e 4.° ordine.

E nel caso delle equazioni d'ordine dispari n quando il numero delle condizioni al limite b sia ancora il numero massimo $n-1$ come nel caso precedente, per modo che $n-1$ dei valori delle $y, y', y'', \dots y^{(n-1)}$ si esprimano per la rimanente, e così pure nel caso delle equazioni di ordine pari n quando il numero delle condizioni al limite b sia $n-2$, per modo da potere esprimere $n-2$ dei valori delle $y, y', y'', \dots y^{(n-1)}$ per $x=b$ per quelli delle due rimanenti $y^{(t)}$ e $y^{(\tau)}$ per mezzo di equazioni della forma $y^{(r)} = h_{r,t}\, y^{(t)} + h_{r,\tau}\, y^{(\tau)}$, con $h_{r,t}$ e $h_{r,\tau}$ costanti, allora in seguito a queste condizioni applicate alle s_p e s_q si troverà che onde la parte relativa al limite b nel primo membro della (64) o nella espressione (65) corrispondente, siano nulli basterà che sia soddisfatta una sola condizione (che si troverà facilmente) fra i coefficienti delle condizioni limiti per $x=b$, e i valori pure per $x=b$ dei primi n coefficienti della equazione data e delle loro derivate, e si avranno poi soltanto le condizioni che saranno conseguenza di quella o di quelle condizioni al limite stesso a che dovranno esservi in questi casi, e che potranno ancora trovarsi coi processi precedenti, supposto sempre sì in questo caso che nel precedente che, ove dovesse essere zero a_0 a uno o a tutte e due gli estremi a e b, gli integrali da considerarsi non cessino per questa circostanza di essere regolari fino alle derivate n^e.

Pisa, agosto 1905,

Teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sui paraboloidi.

(Di Luigi Bianchi, *a Pisa.)*

PREFAZIONE.

Colla presente Memoria riprendo e conduco a termine gli studî: *Sulla deformazione dei paraboloidi*, da me pubblicati due anni or sono in questi medesimi *Annali* (Tomo IX della Serie 3.ª, 1903). Il risultato principale allora ottenuto consisteva in un metodo che permetteva di trovare *con sole quadrature* gli elementi intrinseci di quante si volevano superficie applicabili sui paraboloidi. Fino da allora aggiungevo però che tale risultato era da considerarsi solo come un primo passo nella teoria di queste classi di superficie applicabili, rimanendo ancora insoluta la questione del passaggio dalle *equazioni intrinseche* delle deformate dei paraboloidi alle loro forme effettive nello spazio, e principalmente poi quella di trovare l'interpretazione geometrica del metodo di trasformazione, la quale avrebbe forse permesso di costruire per le deformate dei paraboloidi una teoria perfettamente analoga a quella delle trasformazioni delle superficie pseudosferiche. Col presente lavoro viene in effetto raggiunto il perfezionamento della teoria nel senso ora indicato.

Gli studî che passo ad esporre sono così strettamente collegati colle mie ultime ricerche sulle deformate delle quadriche rotonde (*), che converrà prima brevemente parlare del principale risultato conseguito in questa Memoria. Quivi sono stato condotto a riconoscere come elemento geometrico per le trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche rotonde: *certe particolari congruenze rettilinee W* (*generalizzazione delle congruenze pseudosferiche*)

(*) *Teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche rotonde.* Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL), Tomo XIV, Serie 3.ª (1905).

le cui due falde focali sono applicabili l'una sull'altra e sopra una medesima quadrica rotonda. Con questo nuovo elemento geometrico tutta la teoria delle deformate delle quadriche rotonde viene ad assumere l'aspetto stesso, e raggiunge il medesimo grado di sviluppo, come quella delle superficie a curvatura costante, positiva o negativa. Ne risulta una divisione delle quadriche (rotonde) in due specie: le deformate delle quadriche di prima specie si comportano come le superficie a curvatura costante positiva (deformate della sfera reale), quelle delle quadriche di seconda specie si comportano invece come le superficie a curvatura costante negativa (deformate della sfera immaginaria). Nel corso delle indicate ricerche varii altri risultati complementari mi avevano già condotto a ritenere come probabile che le medesime circostanze geometriche dovessero presentarsi e serbare il loro significato fondamentale nello studio delle deformate delle *quadriche generali.* Nella presente Memoria intanto si troverà la conferma completa di queste previsioni per le deformate dei paraboloidi generali, ellittico ed iperbolico; ed anzi si vedrà che in questo caso delle *quadriche prive di centro* tutto si comporta come nel caso più semplice delle superficie pseudosferiche, dopo di che non vi ha maggiore difficoltà per costruire quante si vogliano deformate dei paraboloidi che per le deformate della pseudosfera.

Affatto analogamente come per la deformazione delle quadriche rotonde (m. c.), fonderemo qui tutta la nostra teoria delle trasformazioni per le superficie applicabili sui paraboloidi sulla proposizione principale seguente, che diremo il:

Teorema A). Ogni superficie S applicabile sopra il paraboloide generale, ellittico od iperbolico, appartiene come prima falda focale ad una doppia infinità di congruenze rettilinee W (*), *la cui seconda falda focale S_1 è applicabile sul medesimo paraboloide.*

Il passaggio dalla deformata S del paraboloide alla nuova S_1, che insieme con S forma le due falde di una congruenza W, costituisce una delle ∞^2 *trasformazioni* della superficie S.

Precisamente poi come per le trasformazioni di Bäcklund delle superficie pseudosferiche, le operazioni analitiche da compiersi per trovare le ∞^2 trasformate S_1 di una *data* deformata S del paraboloide consistono in quadrature e nell'integrazione di un'equazione differenziale del 1.° ordine del tipo

(*) Ricordiamo che col nome di *congruenze W* si indicano quelle sulle cui falde focali si corrispondono le linee assintotiche, o, ciò che è lo stesso, i sistemi coniugati.

di RICCATI. Nei coefficienti di questa equazione di RICCATI entra già una prima costante arbitraria che indicheremo con σ, e la trasformazione stessa si indicherà col simbolo B_σ; questa B_σ contiene inoltre una seconda costante arbitraria (che non importa porre in evidenza) proveniente dalla integrazione.

Una trasformazione B_σ, a costante fissa σ, fa nascere da una deformata S di un paraboloide una semplice infinità di tali deformate S_1. Ad ogni punto M di S corrisponde per ciascuna S_1 un punto M_1, situato nel piano tangente in M alla S. Quale è il luogo di questi ∞^1 punti M_1? Troviamo che esso è sempre una conica a centro, variabile bensì col variare del punto M di contatto, ma la cui forma e giacitura nel piano tangente di S non cangiano quando la superficie S si deforma seco trascinando i suoi piani tangenti. Tale risultato è da ravvicinarsi all'analogo per le trasformazioni di BÄCKLUND delle superficie pseudosferiche, ove il luogo corrispondente è un circolo (di raggio invariabile) col centro nel punto di contatto del piano tangente.

L'analogia colle trasformazioni di BÄCKLUND delle superficie pseudosferiche si spinge poi ancora più in là, sussistendo anche qui il *teorema di permutabilità*, la seconda proposizione fondamentale della teoria, che diciamo il:

Teorema B). Se da una superficie S applicabile sul paraboloide generale si ottengono due nuove superficie S_1, S_2 applicabili sul paraboloide stesso mediante due trasformazioni B_{σ_1}, B_{σ_2} a costanti σ_1, σ_2 differenti, esiste una quarta superficie S' della medesima specie, pienamente determinata e costruibile in termini finiti, che è legata alla sua volta alle medesime S_1, S_2 da due trasformazioni B'_{σ_2}, B'_{σ_1} colle costanti σ_2, σ_1 invertite.

Da questo teorema si traggono ora le medesime conclusioni come nella teoria delle trasformazioni delle superficie pseudosferiche, fra le altre questa principale che: *nell'applicazione successiva ed illimitata del metodo di trasformazione basta aver integrata la prima equazione di* RICCATI *pel passaggio dalla S alle ∞^2 superficie contigue, perchè il processo di trasformazione possa applicarsi indefinitamente alle nuove superficie ottenute, con soli calcoli di derivazione.* Un esempio effettivo in cui le circostanze qui da ultimo accennate si presentano si ha nelle deformate di traslazione dei paraboloidi (cfr. § 29).

Colle nostre due proposizioni fondamentali A) e B) la teoria delle superficie applicabili sui paraboloidi è portata, come si voleva, allo stesso punto della teoria delle superficie pseudosferiche. È ora necessario che aggiungiamo alcune osservazioni complementari allo scopo di precisare l'estensione delle classi di superficie a cui si riferiscono i nostri teoremi, in particolare il teorema A) (*). Nell'enunciato di questo teorema la denominazione di *superficie applicabili* è intesa nel suo senso generale analitico, dicendosi applicabili (o meglio secondo Voss *isometriche* (**)) due superficie quando le due forme differenziali che ne rappresentano i quadrati degli elementi lineari sono equivalenti, cioè trasformabili l'una nell'altra per mezzo di formole di trasformazione reali od immaginarie. Ora però se, restando nel campo reale, si confrontano fra loro due superficie *reali* S, S_1 che soddisfino alle dette condizioni di applicabilità, può darsi che alla regione reale considerata di S corrisponda una regione reale di S_1, ovvero una regione immaginaria. Nel primo caso l'applicabilità si dirà *dentro ai limiti* o più brevemente *propria*; nel secondo caso diremo invece che la S è applicabile sulla S_1 *fuori dei limiti*, ovvero *impropriamente* (***).

Venendo ora al caso nostro speciale dei paraboloidi le cui equazioni scriveremo sotto la formola normale

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \quad \text{(paraboloide ellittico)},$$

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \quad \text{(paraboloide iperbolico)},$$

ove p, q indicano i parametri (positivi) delle due parabole principali, noi introdurremo come coordinate curviline α, β le due

$$\alpha = \frac{x}{\sqrt{p}}, \quad \beta = \frac{y}{\sqrt{q}},$$

ed avremo così per i loro rispettivi ds^2:

$$ds^2 = (\alpha^2 + p)\, d\alpha^2 + 2\alpha\beta\, d\alpha\, d\beta + (\beta^2 + q)\, d\beta^2 \ldots \tag{a}$$

$$ds^2 = (\alpha^2 + p)\, d\alpha^2 - 2\alpha\beta\, d\alpha\, d\beta + (\beta^2 + q)\, d\beta^2 \ldots \tag{b}$$

Una superficie reale S definita dalle equazioni

$$x = x(\alpha, \beta), \quad y = y(\alpha, \beta), \quad z = z(\alpha, \beta),$$

(*) Cf. le osservazioni analoghe per le quadriche rotonde nella prefazione alla Memoria citata.

(**) Questa seconda denominazione sarebbe veramente preferibile; ma l'uso ormai invalso rende difficile l'abbandonare l'altra meno propria di applicabili.

(***) L'opportuna distinzione dell'applicabilità dentro o fuori dei limiti (propria od impropria) fu introdotta la prima volta da PETERSON, particolarmente nella Memoria: *Sur la déformation des surfaces du second ordre.* Traduit du russe par M. E. DAVAUX. *Annales de la Faculté de Toulouse*, 2.ème Série, Tome VII, che, in un campo reale per le variabili α, β, abbia l'elemento lineare (a) o (b), sarà applicabile *propriamente* sul paraboloide ellittico o sul paraboloide iperbolico rispettivamente.

Ma se nella (a) cangiamo α, β rispettivamente in $\beta\sqrt{-1}$, α, abbiamo il nuovo

$$d s^2 = (\alpha^2 + q)\, d\alpha^2 - 2\,\alpha\,\beta\, d\alpha\, d\beta + (\beta^2 - p)\, d\beta^2, \qquad (a_1)$$

equivalente nel senso generale analitico al primitivo (a). La (a_1) è una forma definita positiva nel campo reale per α, β limitato dalla disuguaglianza

$$q\,\beta^2 - p\,\alpha^2 - p\,q > 0,$$

e possiamo quindi considerare una classe di superficie *reali* d'elemento lineare (a_1) che dovremo dire applicabili *impropriamente* sul paraboloide ellittico.

Similmente se nel $d s^2$ del paraboloide iperbolico, dato dalla (b), cangiamo p. e. β in $\beta\sqrt{-1}$, avremo il $d s^2$ equivalente

$$d s^2 = (\alpha^2 + p)\, d\alpha^2 + 2\,\alpha\,\beta\, d\alpha\, d\beta + (\beta^2 \quad q)\, d\beta^2, \qquad (b_1)$$

e le superficie reali con questo elemento lineare dovranno dirsi applicabili impropriamente sul paraboloide iperbolico.

Ciò posto, precisiamo ulteriormente la proposizione fondamentale A) per le deformate dei paraboloidi aggiungendovi il complemento seguente:

Il teorema A) vale indistintamente per tutte le quattro classi (a), (b), (a_1), (b_1) *di superficie applicabili propriamente od impropriamente sui paraboloidi; ma nel caso del paraboloide iperbolico le due falde focali* S, S_1 *delle relative congruenze W sono applicabili propriamente l'una sull'altra, cioè appartengono tutte due insieme alla classe* (b) *o tutte due alla* (b_1), *laddove nel caso del paraboloide ellittico l'applicabilità dell'una falda sull'altra è sempre impropria, cioè l'una appartiene alla classe* (a), *l'altra alla classe* (a_1).

Nel caso adunque del paraboloide ellittico *una* sola trasformazione B_σ fa passare da una deformata propria (impropria) del paraboloide ad una impropria (propria), sicchè occorre eseguire un numero *pari* di tali trasformazioni successive se si vuole che la superficie finale sia applicabile propriamente sulla iniziale (*).

(*) Circostanze analoghe si presentano per le quadriche rotonde (cf. m. c.), secondo che si tratta dell'iperboloide rigato o dell'ellissoide schiacciato.

Riguardo poi al paraboloide ellittico è necessario ancora di avvertire che il teorema A) non è applicabile al caso del *paraboloide rotondo.* Per questa speciale forma del paraboloide spariscono le ∞^2 congruenze W del teorema, o meglio si riducono ad un'unica congruenza formata dalle tangenti alle deformate dei meridiani del paraboloide, onde la seconda falda focale S_1 diventa la complementare di S. È questo del resto l'unico caso in cui le nostre congruenze W sono *normali.*

Per l'esposizione della teoria che ci occupa ho trovato opportuno di far precedere allo studio delle deformate degli effettivi paraboloidi reali quello delle superficie reali applicabili sopra un particolare paraboloide *immaginario*, tangente al circolo assoluto, col $d\,s^2$ dato dalla forma

$$d\,s^2 = d\,\alpha^2 + 2\,\alpha\,d\,\alpha\,d\,\beta + 2\,\beta\,d\,\beta^2 \;(*). \qquad (c)$$

Esse derivano immediatamente, per quadrature, dalle superficie pseudosferiche secondo il nuovo metodo di WEINGARTEN per la ricerca delle superficie applicabili. Anche per le deformate reali di questo paraboloide immaginario valgono i teoremi A) e B), e le formole relative alle corrispondenti congruenze W si deducono in questo caso con facilità dalle formole della trasformazione di BÄCKLUND per le superficie pseudosferiche. I risultati così ottenuti per le superficie d'elemento lineare (c) ci indicheranno la via da seguirsi per arrivare alle formole, ben più riposte, per le trasformazioni delle superficie applicabili sui paraboloidi reali, formole che, una volta ottenute, offrono del resto lo stesso grado di semplicità e consentono senza grandi difficoltà le relative verifiche.

Da ultimo si troverà considerata nel presente scritto una classe ulteriore di superficie applicabili sopra *quadriche a centro* (immaginarie), tangenti all'assoluto che già incontrai in altri miei studii come collegate alle superficie pseudosferiche (**). Le dette superficie sono *coniugate in deformazione* alle deformate della regione ideale del paraboloide iperbolico, cioè corrispondono individualmente a queste deformate *per sistemi coniugati e per linee geodetiche.* Le proprietà geometriche che si presentano per le congruenze W relative alle due classi di superficie coniugate in deformazione (§§ 23, 24) sono

(*) Questa forma del $d\,s^2$ fu rilevata anche da PETERSON (m. c.) come appartenente ai paraboloidi *ad un parametro* immaginario (Vedi § VI, formola 19) m. c.).

(**) Vedi la mia Memoria nel Tomo VI di questi *Annali* (1901): *Sulla deformazione delle congruenze*, ecc., od anche i §§ 307-308 delle *Lezioni* (Vol. II, pag. 236).

interessanti per sè ed offrono molto probabilmente soltanto un primo esempio di proprietà analoghe che dovranno presentarsi per le quadriche generali a centro nelle ricerche successive.

§ 1.

Le superficie d'elemento lineare (c): $ds^2 = d\alpha^2 + 2\alpha\, d\alpha\, d\beta + 2\beta\, d\beta^2$.

Se scriviamo il ds^2 dato dalla (c) sotto la forma

$$ds^2 = d\alpha^2 + (2\alpha\, d\alpha + 2\beta\, d\beta)\, d\beta,$$

vediamo subito che ponendo

$$x + iy = \beta, \quad x - iy = \alpha^2 + \beta^2, \quad z = \alpha,$$

il punto di coordinate x, y, z descrive una superficie immaginaria con questo ds^2.

Abbiamo così la quadrica di equazione

$$(x + iy)^2 + z^2 = x - iy, \tag{1}$$

che è appunto un paraboloide tangente al circolo immaginario all'infinito. Secondo i risultati esposti nella mia Memoria nel Tomo IX di questi *Annali* (*), la determinazione delle superficie reali S d'elemento lineare (c) si ottiene nel modo seguente. Introduciamo i parametri u, v del sistema coniugato (u, v) a cui corrisponde un sistema coniugato sul paraboloide immaginario (1), e sia θ una funzione di u, v che soddisfi all'equazione fondamentale delle superficie pseudosferiche:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = \operatorname{sen} \theta \cos \theta. \tag{A}$$

Indicando poi con σ, β, λ, μ quattro funzioni incognite di u, v, si consideri il sistema *illimitatamente integrabile* dato dalle equazioni simul-

(*) Nel seguito, dovendo sempre riferirci a questa Memoria, la citeremo con (M).

tanee:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \alpha}{\partial u} = -\lambda \operatorname{sen} \theta, \quad \frac{\partial \beta}{\partial u} = \lambda \cos \theta, \\
&\qquad\qquad \frac{\partial \lambda}{\partial u} = \frac{\partial \theta}{\partial v} \mu + \alpha \operatorname{sen} \theta + \cos \theta, \quad \frac{\partial \mu}{\partial u} = -\frac{\partial \theta}{\partial v} \lambda, \\
&\frac{\partial \alpha}{\partial v} = \mu \cos \theta, \quad \frac{\partial \beta}{\partial v} = \mu \operatorname{sen} \theta, \\
&\qquad\qquad \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial u} \mu, \quad \frac{\partial \mu}{\partial v} = -\frac{\partial \theta}{\partial u} \lambda - \alpha \cos \theta + \operatorname{sen} \theta.
\end{aligned}\right\} \quad (B)$$

Questo sistema lineare possiede l'integrale quadratico

$$\lambda^2 + \mu^2 + \alpha^2 - 2\beta = \text{cost.},$$

e noi scegliamo i valori iniziali di α, β, λ, μ per modo che la costante del secondo membro si annulli, che si abbia cioè:

$$\lambda^2 + \mu^2 + \alpha^2 = 2\beta. \qquad (B^*)$$

Dopo ciò alle cinque funzioni θ, α, β, λ, μ di u, v corrisponderà una superficie d'elemento lineare (c), determinata intrinsecamente dalle sue due forme quadratiche fondamentali:

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \quad \Delta\,du^2 + 2\Delta'\,du\,dv + \Delta''\,dv^2 \ (*),$$

dove i sei coefficienti hanno i valori seguenti:

$$\left.\begin{aligned}
E &= [\operatorname{sen}^2 \theta - 2\alpha \operatorname{sen} \theta \cos \theta + 2\beta \cos^2 \theta]\,\lambda^2 \\
F &= [-\operatorname{sen} \theta \cos \theta + \alpha(\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) + 2\beta \operatorname{sen} \theta \cos \theta] \cdot \lambda\mu \\
G &= [\cos^2 \theta + 2\alpha \operatorname{sen} \theta \cos \theta + 2\beta \operatorname{sen}^2 \theta]\,\mu^2
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$\Delta = \frac{\lambda\mu}{\sqrt{2\beta - \alpha^2}}, \quad \Delta' = 0, \quad \Delta'' = -\frac{\lambda\mu}{\sqrt{2\beta - \alpha^2}}. \qquad (2^*)$$

Ricorriamo ora al metodo di Weingarten (**) applicato alle superficie Σ i cui raggi principali di curvatura r_1, r_2 soddisfano all'equazione

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} r_1 r_2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p\,\partial q}(r_1 + r_2) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2} = 0, \qquad (3)$$

(*) Nel corso della presente Memoria indicheremo con Δ, Δ', Δ'' i consueti coefficienti D, D', D''.

(**) *Acta Mathematica*, Bd. 20. Cf. il § 291 delle mie *Lezioni*.

dove $\varphi(p, q)$ è una funzione fissa di p, q, avendo p, q il significato loro attribuito da WEINGARTEN (*). Da queste superficie Σ si deducono *con quadrature* le superficie $\overline{S}$ d'elemento lineare

$$\overline{d s^2} = 2 q \left(d \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial q}\right)^2 + 2 p \left(d \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)\left(d \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial q}\right) + \left(d \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)^2 \qquad (4$$

mediante le formole di WEINGARTEN:

$$\left.\begin{aligned} d\overline{x} &= x\, d \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial q} + X d \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial p} \\ d\overline{y} &= y\, d \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial q} + Y d \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial p} \\ d\overline{z} &= z\, d \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial q} + Z d \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial p}, \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

dove x, y, z indicano le coordinate di un punto mobile sopra Σ, X, Y, Z i coseni di direzione della normale a Σ, ed $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ le coordinate del punto corrispondente sopra $\overline{S}$.

Ora, se poniamo $\varphi = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$, le superficie Σ integrali della equazione a derivate parziali (3) sono le superficie pseudosferiche: $r_1 r_2 = -1$, e le superficie $\overline{S}$ derivate hanno l'elemento lineare

$$\overline{d s^2} = 2 q\, d p^2 + 2 p\, d p\, d q + d q^2,$$

forma che coincide precisamente colla (c), ove si ponga $p = \beta$, $q = \alpha$.

§ 2.

PARAGONE DEI DUE METODI E SIGNIFICATO GEOMETRICO DEL SISTEMA (B).

Andiamo ora a confrontare i due modi di determinazione delle superficie $\overline{S}$ applicabili sul paraboloide immaginario (1), il primo per mezzo delle loro equazioni intrinseche (2), (2*), il secondo per quadrature dalle (5) col

(*) p distanza algebrica dell'origine dal piano tangente a Σ, $2q$ quadrato della distanza dell'origine dal punto di contatto.

metodo di Weingarten. Per ciò cominciamo dal ricordare (*Lezioni* § 373) che alla soluzione $\theta(u, v)$ dell'equazione a derivate parziali (A) corrisponde una determinata superficie pseudosferica Σ, che riferita alle linee di curvatura u, v ha l'elemento lineare

$$d s^2 = \cos^2 \theta \, d u^2 + \operatorname{sen}^2 \theta \, d v^2$$

ed i raggi principali di curvatura

$$r_1 = - \operatorname{tg} \theta, \quad r_2 = \cot \theta;$$

dimostreremo che applicando a questa Σ le formole (5) di Weingarten, si ottiene appunto la superficie $\overline{S}$ definita dalle equazioni intrinseche (2), (2*).

Per ciò, mantenendo per la Σ tutte le consuete notazioni, ricordiamo che valgono le formole fondamentali del citato § 373 delle *Lezioni:*

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial u} = \cos \theta \cdot X_1, \quad \frac{\partial X_1}{\partial u} = \frac{\partial \theta}{\partial v} X_2 - \operatorname{sen} \theta \cdot X_3, \\
&\qquad\qquad \frac{\partial X_2}{\partial u} = - \frac{\partial \theta}{\partial v} X_1, \quad \frac{\partial X_3}{\partial u} = \operatorname{sen} \theta \cdot X_1, \\
&\frac{\partial x}{\partial v} = \operatorname{sen} \theta \cdot X_2, \quad \frac{\partial X_1}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial u} X_2, \quad \frac{\partial X_2}{\partial v} = - \frac{\partial \theta}{\partial u} X_1 + \cos \theta \cdot X_3, \\
&\qquad\qquad \frac{\partial X_3}{\partial v} = - \cos \theta \cdot X_2 .
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Con queste formole è facile trovare il significato geometrico delle equazioni del sistema completo (B). Poniamo a tale scopo

$$\begin{aligned}
W_1 &= x X_1 + y Y_1 + z Z_1 \\
W_2 &= x X_2 + y Y_2 + z Z_2 \\
W_3 &= x X_3 + y Y_3 + z Z_3 ,
\end{aligned}$$

sicchè W_1, W_2, W_3 rappresentano le distanze *algebriche* dell'origine dalle tre facce del triedro principale col vertice nel punto (x, y, z) della superficie pseudosferica Σ. Se formiamo le derivate rapporto ad u, v di W_1, W_2, W_3, osservando le (6), otteniamo subito le formole seguenti:

$$\frac{\partial W_1}{\partial u} = \frac{\partial \theta}{\partial v} W_2 - \operatorname{sen} \theta \cdot W_3 + \cos \theta, \quad \frac{\partial W_2}{\partial u} = - \frac{\partial \theta}{\partial v} W_1, \quad \frac{\partial W_3}{\partial u} = \operatorname{sen} \theta \cdot W_1$$

$$\frac{\partial W_1}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial u} W_2, \quad \frac{\partial W_2}{\partial v} = - \frac{\partial \theta}{\partial u} W_1 + \cos \theta \cdot W_3 + \operatorname{sen} \theta, \quad \frac{\partial W_3}{\partial v} = - \cos \theta \cdot W_2 .$$

Queste si identificano colle formole del sistema (B) relative alle funzioni λ, μ, α, ponendo

$$\lambda = W_1, \quad \mu = W_2, \quad \alpha = -W_3.$$

Se poniamo di più

$$\rho = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2}(W_1^2 + W_2^2 + W_3^2),$$

abbiamo

$$\frac{\partial \rho}{\partial u} = \cos\theta \,.\, W_1, \quad \frac{\partial \rho}{\partial v} = \operatorname{sen}\theta \,.\, W_2,$$

e queste corrispondono nel sistema (B) alle equazioni per β fattovi $\beta = \rho$. In fine l'equazione in termini finiti (B^*) combina precisamente coll'identità

$$W_1^2 + W_2^2 + W_3^2 = 2\rho,$$

e vediamo quindi che: *Nel sistema differenziale* (B), *e nella equazione in termini finiti* (B^*), *le funzioni* λ, μ, $-\alpha$, β *rappresentano ordinatamente le distanze dell'origine dalle tre facce del triedro principale col vertice in un punto* (x, y, z) *della superficie pseudosferica* Σ, *ed il semiquadrato della distanza dell'origine stessa dal vertice del triedro.* Si osserverà anche che le ∞^2 soluzioni del sistema (B), (B^*) per una data superficie pseudosferica Σ corrispondono semplicemente a spostare l'origine.

Ciò premesso, dimostreremo che le formole (5) di Weingarten, le quali diventano nel caso nostro:

$$d\bar{x} = x\,d\beta - X_3\,d\alpha, \quad d\bar{y} = y\,d\beta - Y_3\,d\alpha, \quad d\bar{z} = z\,d\beta - Z_3\,d\alpha$$

danno appunto, per quadrature, la superficie $\bar{S}$ colle equazioni intrinseche (2), (2*). Intanto abbiamo immediatamente di qui:

$$d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2 = d\alpha^2 + 2\,\alpha\,d\alpha\,d\beta + 2\,\beta\,d\beta^2,$$

il che dà per la prima forma quadratica fondamentale di $\bar{S}$ la verifica richiesta. Per ottenere anche le altre, osserviamo che dalle precedenti e dalle (B) seguono le formole:

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = (x\cos\theta + X_3\operatorname{sen}\theta)\,.\,\lambda, \quad \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = (x\operatorname{sen}\theta - X_3\cos\theta)\cdot\mu, \tag{7}$$

colle analoghe per $\bar{y}$, $\bar{z}$. E derivando nuovamente si ha:

$$\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u^2} = (x \cos\theta + X_3 \operatorname{sen}\theta)\frac{\partial \lambda}{\partial u} - (x \operatorname{sen}\theta - X_3 \cos\theta)\frac{\partial \theta}{\partial u}\cdot\lambda + X_1 \,.\, \lambda$$

$$\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u\, \partial v} = (x \cos\theta + X_3 \operatorname{sen}\theta)\frac{\partial \lambda}{\partial v} - (x \operatorname{sen}\theta - X_3 \cos\theta)\frac{\partial \theta}{\partial v}\cdot\lambda$$

$$\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial v^2} = (x \cos\theta + X_3 \operatorname{sen}\theta)\frac{\partial \theta}{\partial v}\cdot\mu + (x \operatorname{sen}\theta - X_3 \cos\theta)\frac{\partial \mu}{\partial v} + X_2 \,.\, \mu .$$

Formando di qui i tre determinanti di 3.° ordine che definiscono i coefficienti Δ, Δ', Δ'' della seconda forma fondamentale di S (*Lezioni*, Vol. I, pag. 114), ove si tenga conto dell'identità: $\sqrt{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2} = \sqrt{2\beta - \alpha^2}\,.\,\lambda\,\mu$, che segue dalle (2), facilmente si verifica che sussistono le formole (2*), c. d. d.

§ 3.

La trasformazione di Bäcklund per le superficie d'elemento lineare (c).

Alla superficie pseudosferica Σ applichiamo ora una trasformazione B_σ di Bäcklund che la cangi in una nuova superficie pseudosferica Σ_1 d'elemento lineare

$$d\,s_1^2 = \cos^2\theta_1\, d\,u^2 + \operatorname{sen}^2\theta_1\, d\,v^2,$$

essendo θ_1 legata a θ dalle relazioni (*Lezioni*, § 373):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \theta_1}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial v} &= \frac{\cos\theta \operatorname{sen}\theta_1 + \operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}\theta\cos\theta_1}{\cos\sigma} \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u} &= -\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta_1 + \operatorname{sen}\sigma\cos\theta\operatorname{sen}\theta_1}{\cos\sigma}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Indicando con x_1, y_1, z_1; $X_1^{(1)}$, $X_2^{(1)}$, $X_3^{(1)}$ gli elementi relativi alla Σ_1, abbiamo le formole (*Lezioni*, l. c.):

$$x_1 = x + \cos\sigma\,(\cos\theta_1 \,.\, X_1 + \operatorname{sen}\theta_1 \,.\, X_2) \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} X_1^{(1)} &= A\,X_1 + B\,X_2 - \cos\sigma \operatorname{sen}\theta\,.\,X_3 \\ X_2^{(1)} &= C\,X_1 + D\,X_2 - \cos\sigma\cos\theta\,.\,X_3 \\ X_3^{(1)} &= \cos\sigma\operatorname{sen}\theta_1\,.\,X_1 - \cos\sigma\cos\theta_1\,.\,X_2 - \operatorname{sen}\sigma\,.\,X_3,\ \text{ecc.,} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

dove i coefficienti A, B, C, D rappresentano le espressioni seguenti formate con θ, θ_1:

$$\left.\begin{aligned} A &= \cos\theta\cos\theta_1 - \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta_1, \\ B &= \cos\theta\operatorname{sen}\theta_1 + \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta\cos\theta_1, \\ C &= \operatorname{sen}\theta\cos\theta_1 + \operatorname{sen}\sigma\cos\theta\operatorname{sen}\theta_1, \\ D &= \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta_1 - \operatorname{sen}\sigma\cos\theta\cos\theta_1. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Ora indichiamo con $\overline{S}_1$ la superficie d'elemento lineare (e) dedotta dalla Σ_1 come prima la $\overline{S}$ dalla Σ, cioè colle quadrature:

$$d\,\bar{x}_1 = x_1\,d\,\rho_1 + X_3^{(1)}\,d\,W_3^{(1)},\ \text{ecc.,} \tag{12}$$

dove abbiamo posto

$$\rho_1 = \frac{1}{2}\,\Sigma\,x_1^2, \quad W_1^{(1)} = \Sigma\,x_1\,X_1^{(1)}, \quad W_2^{(1)} = \Sigma\,x_1\,X_2^{(1)}, \quad W_3^{(1)} = \Sigma\,x_1\,X_3^{(1)}.$$

Dalle formole (9), (10) noi deduciamo in primo luogo che le funzioni

$$W_1^{(1)}, \quad W_2^{(1)}, \quad W_3^{(1)}, \quad \rho_1$$

si esprimono linearmente per

$$W_1, \quad W_2, \quad W_3, \quad \rho$$

colle formole:

$$\begin{aligned} W_1^{(1)} &= A\,W_1 + B\,W_2 - \cos\sigma\operatorname{sen}\theta\,.\,W_3 + \cos\sigma\cos\theta \\ W_2^{(1)} &= C\,W_1 + D\,W_2 + \cos\sigma\cos\theta\,.\,W_3 + \cos\sigma\operatorname{sen}\theta \\ W_3^{(1)} &= \cos\sigma\operatorname{sen}\theta_1\,.\,W_1 - \cos\sigma\cos\theta_1\,W_2 \quad \operatorname{sen}\sigma\,.\,W_3 \\ \rho_1 &= \cos\sigma\cos\theta_1\,.\,W_1 + \cos\sigma\operatorname{sen}\theta_1\,.\,W_2 + \rho + \frac{1}{2}\cos^2\sigma. \end{aligned}$$

Di qui, rammentando le formole del § 2

$$\lambda = W_1, \quad \mu = W_2, \quad \alpha = -W_3, \quad \beta = \rho,$$

deduciamo intanto il risultato seguente che importa fissare:

Se le funzioni λ, μ, α, β *di* u, v *soddisfano il sistema differenziale* (B) *e l'equazione in termini finiti* (B^*), *si otterrà una quaderna corrispondente*

$$\lambda_1, \quad \mu_1, \quad \alpha_1, \quad \beta_1$$

che soddisfa alle medesime equazioni (B), (B_1), *sostituitavi al posto di* θ *la sua trasformata* θ_1 *di* Bäcklund, *mediante le formole di sostituzione lineare:*

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= A\lambda + B\mu + \cos\sigma \operatorname{sen}\theta \,.\, \alpha + \cos\sigma\cos\theta \\ \mu_1 &= C\lambda + D\mu - \cos\sigma\cos\theta \,.\, \alpha + \cos\sigma \operatorname{sen}\theta \\ \alpha_1 &= -\cos\sigma \operatorname{sen}\theta_1 \,.\, \lambda + \cos\sigma\cos\theta_1 \,.\, \mu - \operatorname{sen}\sigma \,.\, \alpha \\ \beta_1 &= \cos\sigma\cos\theta_1 \,.\, \lambda + \cos\sigma \operatorname{sen}\theta_1 \,.\, \mu + \beta + \frac{1}{2}\cos^2\sigma\,, \end{aligned}\right\} \qquad (C)$$

dove i coefficienti A, B, C, D *hanno il significato loro attribuito nelle* (11).

§ 4.

Congruenze W con falde focali applicabili sul paraboloide immaginario.

Prendiamo ora a considerare la superficie $\overline{S}_1$ definita con quadrature dalle formole corrispondenti alle (7):

$$\frac{\partial \overline{x}_1}{\partial u} = (x_1 \cos\theta_1 + X_3^{(1)} \operatorname{sen}\theta_1) \,.\, \lambda_1\,, \qquad \frac{\partial \overline{x}_1}{\partial v} = (x_1 \operatorname{sen}\theta_1 - X_3^{(1)} \cos\theta_1) \,.\, \mu_1\,. \quad (7^*)$$

Mentre le superficie pseudosferiche Σ, Σ_1 hanno nello spazio una posizione relativa perfettamente determinata, come le due falde focali di una congruenza pseudosferica, invece le due superficie $\overline{S}$, $\overline{S}_1$, applicabili sul paraboloide immaginario, sono definite ciascuna dalle rispettive equazioni (7), (7*) solo a meno di una traslazione. Cerchiamo se è possibile collocare $\overline{S}$, $\overline{S}_1$ in tale posizione relativa nello spazio che le congiungenti i loro punti corrispondenti generino, alla loro volta, una congruenza colle falde focali $\overline{S}$, $\overline{S}_1$.

Se questo è possibile, dovremo avere le formole

$$\overline{x}_1 = \overline{x} + l\frac{\partial \overline{x}}{\partial u} + m\frac{\partial \overline{x}}{\partial v}$$

$$\overline{y}_1 = \overline{y} + l\frac{\partial \overline{y}}{\partial u} + m\frac{\partial \overline{y}}{\partial v}$$

$$\overline{z}_1 = \overline{z} + l\frac{\partial \overline{z}}{\partial u} + m\frac{\partial \overline{z}}{\partial v},$$

dove l, m siano convenienti funzioni di u, v. Servendoci delle formole sopra sviluppate, facilmente si trova che l, m debbono avere i valori seguenti:

$$l = \cos\sigma \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda}, \quad m = \cos\sigma \cdot \frac{\mu_1}{\mu},$$

e le formole domandate si scriveranno quindi:

$$\overline{x}_1 = \overline{x} + \cos\sigma\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\frac{\partial \overline{x}}{\partial u} + \frac{\mu_1}{\mu}\frac{\partial \overline{x}}{\partial v}\right), \text{ ecc.}, \tag{13}$$

ovvero anche, per le (7):

$$\overline{x}_1 = x + \cos\sigma\,(x\cos\theta + X_3 \operatorname{sen}\theta)\,.\,\lambda_1 + \cos\sigma\,(x\operatorname{sen}\theta - X_3\cos\theta)\,.\,\mu_1, \text{ ecc.} \tag{13*}$$

Ed ora si vede che con questi valori di $\overline{x}_1$, $\overline{y}_1$, $\overline{z}_1$ le (7*) sono in effetto soddisfatte; di più si ha identicamente:

$$(x\cos\theta + X_3\operatorname{sen}\theta)\,.\,\lambda_1 + (x\operatorname{sen}\theta - X_3\cos\theta)\,.\,\mu_1 =$$

$$= (x_1\cos\theta_1 + X_3^{(1)}\operatorname{sen}\theta_1)\,.\,\lambda + (x_1\operatorname{sen}\theta_1 - X_3^{(1)}\cos\theta_1)\,.\,\mu \text{ (*), ecc.}$$

Segue di qui che le (13) possono anche scriversi sotto la forma

$$\overline{x} = \overline{x}_1 - \cos\sigma\left(\frac{\lambda}{\lambda_1}\frac{\partial \overline{x}_1}{\partial u} + \frac{\mu}{\mu_1}\frac{\partial \overline{x}_1}{\partial v}\right), \text{ ecc.},$$

e quindi, collocate le due superficie S, $\overline{S}$ nella posizione relativa fissata

(*) Nel modo più semplice si verificano questa e le due analoghe per y, z, moltiplicando una prima volta ordinatamente per X_1, Y_1, Z_1 e sommando, indi operando nello stesso modo con X_2, Y_2, Z_2 ed una terza volta con X_3, Y_3, Z_3, ciò che dà tutte tre le volte un'identità.

dalle (13), la congiungente due punti corrispondenti

$$\overline{M} \equiv (x, y, z), \quad \overline{M} \equiv (\overline{x}_1, \overline{y}_1, \overline{z}_1)$$

di $\overline{S}$, S_1 tocca in M la superficie $\overline{S}$ ed in $\overline{M}_1$ la $\overline{S}_1$ come si voleva. Inoltre la congruenza generata da queste congiungenti è una congruenza W, perchè le due seconde forme quadratiche fondamentali di $\overline{S}$, $\overline{S}_1$ sono proporzionali fra loro ed alla differenza $d\,u^2 - d\,v^2$.

Supponiamo ora data la prima superficie $\overline{S}$ e saranno con ciò fissate le funzioni θ, α, β, λ, μ di u, v. Poichè nella trasformata θ_1 della θ per una trasformazione di Bäcklund B_σ entra, oltre σ, una seconda costante arbitraria, esisteranno ∞^2 superficie trasformate S_1, ciascuna delle quali formerà con $\overline{S}$ le due falde focali di una congruenza W. Così per le superficie applicabili sul paraboloide immaginario (1) è dimostrato il teorema A) della prefazione. In simil modo, dal teorema di permutabilità per le trasformazioni di Bäcklund, si trarrebbe il teorema B) di permutabilità per le attuali trasformazioni.

§ 5.

Le deformate del paraboloide ellittico.

Per procedere ora alle ricerche analoghe per i paraboloidi reali occorre in primo luogo che riprendiamo dalla Memoria al Tomo IX le formole che servono a definire intrinsecamente le singole deformate dei paraboloidi. Cominciamo dal paraboloide ellittico e supponendo $p < q$ (coll'escludere per ora il caso $p = q$ del paraboloide rotondo) sostituiamovi un paraboloide simile per modo che sia soddisfatta la condizione

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = 1.$$

Distinguendo allora i due casi delle deformate proprie od improprie, abbiamo i risultati seguenti:

1.° caso. Deformate proprie:

$$d\,s^2 = (\alpha^2 + p)\,d\,\alpha^2 + 2\,\alpha\,\beta\,d\,\alpha\,d\,\beta + (\beta^2 + q)\,d\,\beta^2. \tag{14}$$

Essendo $\omega(u, v)$ una soluzione dell'equazione a derivate parziali:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} = \operatorname{sen} \omega \cos \omega, \tag{I}$$

si consideri il sistema completo per le quattro funzioni incognite α, β, λ, μ di u, v dato dalle equazioni differenziali:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \alpha}{\partial u} = -\lambda \operatorname{sen} \omega, \quad \frac{\partial \beta}{\partial u} = \lambda \cos \omega, \\
&\qquad \frac{\partial \lambda}{\partial u} = -\frac{\partial \omega}{\partial v}\mu + \operatorname{sen} \omega \cdot \frac{\alpha}{p} - \cos \omega \cdot \frac{\beta}{q}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial u} = -\frac{\partial \omega}{\partial v}\lambda, \\
&\frac{\partial \alpha}{\partial v} = \mu \cos \omega, \quad \frac{\partial \beta}{\partial v} = \mu \operatorname{sen} \omega, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{\partial \omega}{\partial u}\mu, \\
&\qquad\qquad \frac{\partial \mu}{\partial v} = \frac{\partial \omega}{\partial v}\lambda + \cos \omega \cdot \frac{\alpha}{p} + \operatorname{sen} \omega \cdot \frac{\beta}{q},
\end{aligned}\right\} \tag{II}$$

coll'integrale quadratico

$$\mu^2 - \lambda^2 = \frac{H}{p\,q} + \text{cost.}, \tag{15}$$

dove

$$H = p\,\beta^2 + q\,\alpha^2 + p\,q. \tag{15*}$$

Scelta una quaderna $(\alpha, \beta, \lambda, \mu)$ di soluzioni delle (II) per modo che si annulli la costante del secondo membro della (15), cioè si abbia:

$$\mu^2 - \lambda^2 = \frac{H}{p\,q} = \frac{\alpha^2}{p} + \frac{\beta^2}{q} + 1, \tag{II*}$$

ne resta definita intrinsecamente una deformata propria S del paraboloide ellittico mediante le sue due forme quadratiche fondamentali

$$E\,d\,u^2 + 2\,F\,d\,u\,d\,v + G\,d\,v^2, \quad \Delta\,d\,u^2 + 2\,\Delta'\,d\,u\,d\,v + \Delta''\,d\,v^2,$$

i sei coefficienti avendo i valori seguenti:

$$\left.\begin{aligned}
E &= [(\alpha^2 + p)\operatorname{sen}^2 \omega - 2\,\alpha\,\beta \operatorname{sen} \omega \cos \omega + (\beta^2 + q)\cos^2 \omega] \,.\, \lambda^2 \\
F &= [-(\alpha^2 + p)\operatorname{sen} \omega \cos \omega + \alpha\,\beta\,(\cos^2 \omega - \operatorname{sen}^2 \omega) + \\
&\qquad + (\beta^2 + q)\operatorname{sen} \omega \cos \omega] \,.\, \lambda\,\mu \\
G &= [(\alpha^2 + p)\cos^2 \omega + 2\,\alpha\,\beta \operatorname{sen} \omega \cos \omega + (\beta^3 + q)\operatorname{sen}^2 \omega] \,.\, \mu^2
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

$$\Delta = \pm \frac{\sqrt{p\,q}}{\sqrt{H}} \lambda\,\mu, \quad \Delta' = 0, \quad \Delta'' = \Delta = \pm \frac{\sqrt{p\,q}}{\sqrt{H}} \lambda\,\mu \text{ (*)}. \tag{17}$$

2.° caso. Deformate improprie:

$$d\,s_1^2 = (\alpha_1^2 + q)\,d\,\alpha_1^2 - 2\,\alpha_1\,\beta_1\,d\,\alpha_1\,d\,\beta_1 + (\beta_1^2 - p)\,d\,\beta_1^2.$$

Dalle formole al § 7 (**M**), caso *c*), scambiandovi (per effetto delle nuove notazioni) p con q, deduciamo che ogni deformata impropria S_1 risulta definita intrinsecamente da cinque funzioni θ, α_1, β_1, λ_1, μ_1 di u, v assoggettate alle condizioni seguenti. La θ è una soluzione della equazione a derivate parziali:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = \operatorname{senh} \theta \cosh \theta\,, \tag{III}$$

e le α_1, β_1, λ_1, μ_1 danno una quaderna di soluzioni del sistema illimitatamente integrabile:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \alpha_1}{\partial u} = \lambda_1 \cosh \theta, \quad \frac{\partial \beta_1}{\partial u} = \lambda_1 \operatorname{senh} \theta, \\
&\qquad \frac{\partial \lambda_1}{\partial u} = -\frac{\partial \theta}{\partial v}\mu_1 - \cosh\theta\,\frac{\alpha_1}{q} + \operatorname{senh}\theta\,\frac{\beta_1}{q}\,, \quad \frac{\partial \mu_1}{\partial u} = \frac{\partial \theta}{\partial v}\lambda_1 \\
&\frac{\partial \alpha_1}{\partial v} = \mu_1 \operatorname{senh} \theta, \quad \frac{\partial \beta_1}{\partial v} = \mu_1 \cosh \theta, \quad \frac{\partial \lambda_1}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial u}\mu_1\,, \\
&\qquad \frac{\partial \mu_1}{\partial v} = -\frac{\partial \theta}{\partial u}\lambda_1 - \operatorname{senh}\theta\,\frac{\alpha_1}{q} + \cosh\theta\,\frac{\beta_1}{p}\,,
\end{aligned}\right\} \tag{IV}$$

quando siano scelti i loro valori iniziali in guisa che nell'integrale quadratico

$$\lambda_1^2 + \mu_1^2 = \frac{H_1}{p\,q} + \text{cost.},$$

ove $H_1 = q\,\beta_1^2 - p\,\alpha_1^2 - p\,q$, si annulli la costante, cioè si abbia:

$$\frac{\beta_1^2}{p} - \frac{\alpha_1^2}{q} - \lambda_1^2 - \mu_1^2 = 1. \tag{IV*}$$

Allora la corrispondente deformata S_1 della regione ideale del parabo-

(*) Col doppio segno in queste formole si lascia libera la scelta fra la superficie S ed una seconda inversamente congruente alla S.

loide ellittico viene definita dalle equazioni intrinseche:

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= [(\alpha_1^2 + q)\cosh^2\theta - 2\,\alpha_1\,\beta_1 \operatorname{senh}\theta\cosh\theta + (\beta_1^2 - p)\operatorname{senh}^2\theta]\,.\,\lambda_1^2 \\ F_1 &= [(\alpha_1^2 + q)\operatorname{senh}\theta\cosh\theta - \alpha_1\,\beta_1\,(\cosh^2\theta + \operatorname{senh}^2\theta) + \\ &\qquad + (\beta_1^2 - p)\operatorname{senh}\theta\cosh\theta]\,.\,\lambda_1\,\mu_1 \\ G_1 &= [(\alpha_1^2 + q)\operatorname{senh}^2\theta - 2\,\alpha_1\,\beta_1 \operatorname{senh}\theta\cosh\theta + (\beta_1^2 - p)\cosh^2\theta]\,\mu_1^2 \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

$$\Delta_1 = \pm\frac{\sqrt{p\,q}}{\sqrt{H_1}}\cdot\lambda_1\,{}_1\,,\quad \Delta'_1 = 0,\quad \Delta''_1 = \Delta_1 = \pm\frac{\sqrt{p\,q}}{\sqrt{H_1}}\cdot\lambda_1\,\mu_1\,. \qquad (19)$$

§ 6.

Le deformate proprie del paraboloide iperbolico.

Le deformate proprie S del paraboloide iperbolico col $d\,s^2$ dato dalla formola

$$d\,s^2 = (\alpha^2 + p)\,d\,\alpha^2 - 2\,\alpha\,\beta\,d\,\alpha\,d\,\beta + (\beta^2 + q)\,d\,\beta^2, \qquad (20)$$

dove supporremo scelte le dimensioni del paraboloide per modo che si abbia:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \qquad (20^*)$$

debbono distinguersi in due specie secondo che il sistema coniugato comune (u, v) alla deformata S ed al paraboloide è costituito da due sistemi di linee reali e distinte ovvero coniugate immaginarie; le prime diciamo deformate di 1.ª specie, le altre di 2.ª specie. Propriamente dovremmo aggiungere una classe di deformate di 3.ª specie, quelle delle rigate nelle quali i due sistemi di linee del sistema coniugato comune coincidono nelle generatrici della rigata; ma noi qui trascureremo queste rigate applicabili sul paraboloide che già si conoscono tutte in termini finiti, sicchè il loro studio offrirebbe per il problema d'integrazione un interesse ben secondario.

1.º caso. Deformate di 1.ª specie. Una tale deformata S è definita intrinsecamente (cf. (M) § 7 b)) da cinque funzioni θ, α, β, λ, μ di u, v delle quali la prima è una soluzione dell'equazione

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} = \operatorname{senh} \theta \cosh \theta, \tag{V}$$

e le altre quattro danno una quaderna di soluzioni del sistema completo:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \alpha}{\partial u} = \lambda \cosh \theta, \quad \frac{\partial \beta}{\partial u} = \lambda \operatorname{senh} \theta, \\
&\qquad\qquad \frac{\partial \lambda}{\partial u} = \frac{\partial \theta}{\partial v} \mu - \cosh \theta \frac{\alpha}{p} - \operatorname{senh} \theta \frac{\beta}{q}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial u} = \frac{\partial \theta}{\partial v} \lambda \\
&\frac{\partial \alpha}{\partial v} = \mu \operatorname{senh} \theta, \quad \frac{\partial \beta}{\partial v} = \mu \cosh \theta, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial u} \mu, \\
&\qquad\qquad \frac{\partial \mu}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial u} \lambda + \operatorname{senh} \theta \frac{\alpha}{p} + \cosh \theta \frac{\beta}{q},
\end{aligned}\right\} \tag{VI}$$

quando di più i valori iniziali di α, β, λ, μ siano scelti in guisa che nell'integrale quadratico

$$\mu^2 - \lambda^2 = \frac{H}{p\,q} + \text{cost.},$$

ove

$$H = p\,\beta^2 + q\,\alpha^2 + p\,q, \tag{21}$$

riesca nulla la costante, cioè si abbia

$$\mu^2 - \lambda^2 - \frac{\alpha^2}{p} - \frac{\beta^2}{q} = 1. \tag{VI*}$$

Abbiamo allora una corrispondente deformata propria S del paraboloide iperbolico colle equazioni intrinseche:

$$\left.\begin{aligned}
E &= [(\alpha^2 + p) \cosh^2 \theta - 2\,\alpha\,\beta \operatorname{senh} \theta \cosh \theta + (\beta^2 + q) \operatorname{senh}^2 \theta] \,.\, \lambda^2 \\
F &= [(\alpha^2 + p) \operatorname{senh} \theta \cosh \theta - \alpha\,\beta\,(\cosh^2 \theta + \operatorname{senh}^2 \theta) + \\
&\qquad\qquad + (\beta^2 + q) \operatorname{senh} \theta \cosh \theta] \,.\, \lambda\,\mu \\
G &= [(\alpha^2 + p) \operatorname{senh}^2 \theta - 2\,\alpha\,\beta \operatorname{senh} \theta \cosh \theta + (\beta^2 + q) \cosh^2 \theta] \,.\, \mu^2
\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

$$\Delta = \pm \frac{\sqrt{p\,q}}{\sqrt{H}} \lambda\,\mu, \quad \Delta' = 0, \quad \Delta'' = -\Delta = \mp \frac{\sqrt{p\,q}}{\sqrt{H}} \lambda\,\mu. \tag{23}$$

2.º caso. Deformate di 2.ª specie. La determinazione di una tale deformata S, riferita ai parametri u, v delle sue linee assintotiche, dipende da cinque funzioni θ, α, β, λ, μ, di cui la prima è una soluzione della equazione

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} + \frac{1}{2} \cosh 2\theta = 0 \qquad (VII)$$

e le altre quattro soddisfano al sistema completo:

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial \alpha}{\partial u} = \lambda \cosh\theta + \mu \operatorname{senh}\theta, \quad \dfrac{\partial \alpha}{\partial v} = \lambda \operatorname{senh}\theta - \mu \cosh\theta, \\[2ex]
\dfrac{\partial \beta}{\partial u} = \lambda \operatorname{senh}\theta + \mu \cosh\theta, \quad \dfrac{\partial \beta}{\partial v} = \lambda \cosh\theta - \mu \operatorname{senh}\theta, \\[2ex]
\dfrac{\partial \lambda}{\partial u} = \dfrac{\partial \theta}{\partial u}\, \mu - \cosh\theta \dfrac{\alpha}{p} - \operatorname{senh}\theta \dfrac{\beta}{q}, \\[2ex]
\qquad\qquad \dfrac{\partial \lambda}{\partial v} = - \dfrac{\partial \theta}{\partial v}\, \mu - \operatorname{senh}\theta \dfrac{\alpha}{p} - \cosh\theta \dfrac{\beta}{q}, \\[2ex]
\dfrac{\partial \mu}{\partial u} = \dfrac{\partial \theta}{\partial u}\, \lambda + \operatorname{senh}\theta \dfrac{\alpha}{p} + \cosh\theta \dfrac{\beta}{q}, \\[2ex]
\qquad\qquad \dfrac{\partial \mu}{\partial v} = - \dfrac{\partial \theta}{\partial v}\, \lambda \quad \cosh\theta \dfrac{\alpha}{p} - \operatorname{senh}\theta \dfrac{\beta}{q},
\end{array}\right\} \quad (VIII)$$

essendo di più i loro valori (iniziali) vincolati dalla relazione

$$\mu^2 - \lambda^2 - \frac{\alpha^2}{p} - \frac{\beta^2}{q} = 1. \qquad (VIII^*)$$

La deformata S è allora definita intrinsecamente dal suo $d\,s^2$ dato dalla (20) ed espresso per u, v e dalla condizione che le linee u, v siano le assintotiche della superficie.

§ 7.

Le deformate improprie del paraboloide iperbolico.

Di queste deformate coll'elemento lineare

$$d\,s^2 = (\alpha^2 + p)\, d\,\alpha^2 + 2\,\alpha\,\beta\, d\,\alpha\, d\,\beta + (\beta^2 - q)\, d\,\beta^2 \qquad (b_1)$$

non è trattato esplicitamente nella Memoria del Tomo IX. Però vediamo subito che questo caso rientra nel secondo del § 4 (**M**), avendosi qui

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & -q \end{vmatrix} = -pq < 0,$$

e inoltre

$$H = p\beta^2 - q\alpha^2 - pq, \quad A_{22} = -q, \quad A_{33} = p, \quad A_{23} = 0. \tag{24}$$

Applicando le formole del citato § 4 (**M**), vediamo che queste deformate sono di una sola specie, e ciascuna di esse dipende da cinque funzioni

$$\theta, \ \alpha, \ \beta, \ \lambda, \ \mu$$

delle variabili u, v, la prima delle quali è una soluzione della equazione per le ordinarie superficie pseudosferiche:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = \operatorname{sen}\theta \cos\theta, \tag{IX}$$

mentre α, β, λ, μ soddisfano al sistema differenziale completo:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \alpha}{\partial u} = -\lambda \operatorname{sen}\theta, \quad \frac{\partial \beta}{\partial u} = \lambda \cos\theta, \\
&\qquad \frac{\partial \lambda}{\partial u} = \frac{\partial \theta}{\partial v}\mu + \operatorname{sen}\theta \frac{\alpha}{p} + \cos\theta \frac{\beta}{q}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial u} = -\frac{\partial \theta}{\partial v}\lambda \\
&\frac{\partial \alpha}{\partial v} = \mu \cos\theta, \quad \frac{\partial \beta}{\partial v} = \mu \operatorname{sen}\theta, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial u}\mu, \\
&\qquad \frac{\partial \mu}{\partial v} = -\frac{\partial \theta}{\partial u}\lambda - \cos\theta \frac{\alpha}{p} + \operatorname{sen}\theta \frac{\beta}{q},
\end{aligned}\right\} \tag{X}$$

coll'integrale quadratico

$$\lambda^2 + \mu^2 = \frac{H}{pq} + \text{cost.}$$

Al solito sono da scegliersi i valori iniziali di α, β, λ, μ per modo che la costante del secondo membro nella formola superiore si annulli, e risulti quindi

$$\frac{\beta^2}{q} - \frac{\alpha^2}{p} - \lambda^2 - \mu^2 = 1\,; \tag{X*}$$

allora la corrispondente deformata S è definita dalle equazioni intrinseche:

$$\left.\begin{aligned} E &= [(\alpha^2 + p)\,\mathrm{sen}^2\,\theta - 2\,\alpha\,\beta\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + (\beta^2 - q)\cos^2\theta]\,.\,\lambda^2 \\ F &= [-(\alpha^2 + p)\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + \alpha\,\beta\,(\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\,\theta) + \\ &\qquad + (\beta^2 - q)\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta]\,.\,\lambda\,\mu \\ G &= [(\alpha^2 + p)\cos^2\theta + 2\,\alpha\,\beta\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + (\beta^2 - q)\,\mathrm{sen}^2\,\theta]\,.\,\mu^2 \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

$$\Delta = \pm\frac{\sqrt{p\,q}}{\sqrt{H}}\cdot\lambda\,\mu, \quad \Delta' = 0, \quad \Delta'' = -\Delta = \mp\frac{\sqrt{p\,q}}{\sqrt{H}}\,\lambda\,\mu. \tag{26}$$

Appoggiandosi ora sulle formole sviluppate dal § 5 in poi per le equazioni intrinseche delle deformate delle varie specie dei paraboloidi, noi andremo a cercare di estendere nei singoli casi i risultati ottenuti ai §§ 3, 4 per le deformate del paraboloide immaginario. Ci occuperemo prima delle formole, analoghe a quelle del § 3, che ci definiranno *intrinsecamente* le trasformazioni richieste, indi ne daremo l'interpretazione geometrica del tutto analoga a quella sviluppata al § 4, e perverremo così al nostro scopo finale di dimostrare i teoremi A) e B) della prefazione.

§ 8.

Le trasformazioni intrinseche per le deformate del paraboloide ellittico.

Confrontando le deformate proprie del paraboloide ellittico colle improprie, abbiamo ricordato al § 5 che le prime dipendono dalla equazione a derivate parziali (I)

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial v^2} = \mathrm{sen}\,\omega\cos\omega, \tag{I}$$

le altre dalla (III)

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = \mathrm{senh}\,\theta\cosh\theta. \tag{III}$$

Ora noi sappiamo ((M) § 9) che si passa dalla soluzione ω della (I) alle soluzioni θ della (III), e viceversa, nel modo seguente. Indicando con σ una costante arbitraria, si consideri il sistema delle due equazioni simultanee del

1.° ordine:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \omega}{\partial u}-\frac{\partial \theta}{\partial v}&=\cos\sigma\cos\omega\,\mathrm{senh}\,\theta-\mathrm{sen}\,\sigma\,\mathrm{sen}\,\omega\cosh\theta\\ \frac{\partial \omega}{\partial v}+\frac{\partial \theta}{\partial u}&=\mathrm{sen}\,\sigma\cos\omega\,\mathrm{senh}\,\theta+\cos\sigma\,\mathrm{sen}\,\omega\cosh\theta.\end{aligned}\right\}\tag{27}$$

Queste danno un sistema illimitatamente integrabile per θ, ove per ω si ponga una soluzione della (I), e l'integrale generale θ delle (27), contenente una nuova costante arbitraria oltre σ, è una soluzione della (III); inversamente ponendo per θ nelle (27) una soluzione della (III), il loro integrale generale ω contiene una seconda costante arbitraria ed è una soluzione della (I). Di due tali soluzioni ω, θ delle (I), (III) rispettivamente, che siano legate fra loro dalle (27), diremo che sono *trasformate l'una dell'altra per una trasformazione* B_σ.

Siano ω, θ due tali soluzioni delle (I), (III) e consideriamo i rispettivi sistemi completi delle equazioni (II), (II^*) § 5 cui debbono soddisfare le funzioni α, β, λ, μ per definire con ω una deformata propria S del paraboloide, e l'altro delle (IV), (IV^*) cui debbono soddisfare α_1, β_1, λ_1, μ_1 per definire con θ una deformata impropria S_1 del paraboloide stesso. Se ricordiamo i risultati del § 3, si presenta ora naturale la domanda: *È possibile passare, con formole di sostituzioni lineari, come le* (C) § 3, *della prima quaderna* $(\alpha, \beta, \lambda, \mu)$ *ad una seconda corrispondente* $(\alpha_1, \beta_1, \lambda_1, \mu_1)$?

Osservando attentamente il modo di composizione delle citate formole (C), siamo condotti a rispondere in modo affermativo alla domanda colle formole seguenti. Poniamo

$$\left.\begin{aligned}A&=\cos\sigma\cos\omega\,\mathrm{senh}\,\theta-\mathrm{sen}\,\sigma\,\mathrm{sen}\,\omega\cosh\theta\\ B&=\cos\sigma\,\mathrm{sen}\,\omega\cosh\theta+\mathrm{sen}\,\sigma\cos\omega\,\mathrm{senh}\,\theta\\ C&=\cos\sigma\cos\omega\cosh\theta-\mathrm{sen}\,\sigma\,\mathrm{sen}\,\omega\,\mathrm{senh}\,\theta\\ D&=\cos\sigma\,\mathrm{sen}\,\omega\,\mathrm{senh}\,\theta+\mathrm{sen}\,\sigma\cos\omega\cosh\theta,\end{aligned}\right\}\tag{28}$$

ed introduciamo inoltre la costante k data da

$$k=\sqrt{\frac{1}{q}+\mathrm{sen}^2\sigma}=\sqrt{\frac{1}{p}-\cos^2\sigma}\,;\tag{29}$$

le formole richieste sono allora le seguenti:

$$\left.\begin{aligned}
k\,\alpha_1 &= -\operatorname{sen}\sigma\,.\,\beta - \cosh\theta\,.\,\lambda + \operatorname{senh}\theta\,.\,\mu\\
k\,\beta_1 &= -\cos\sigma\,.\,\alpha - \operatorname{senh}\theta\,.\,\lambda + \cosh\theta\,.\,\mu\\
k\,\lambda_1 &= -\operatorname{sen}\omega\cdot\frac{\alpha}{p} + \cos\omega\cdot\frac{\beta}{q} - D\,\lambda + B\,\mu\\
k\,\mu_1 &= \cos\omega\cdot\frac{\alpha}{p} + \operatorname{sen}\omega\cdot\frac{\beta}{q} + A\,\lambda - C\,\mu.
\end{aligned}\right\}\qquad(30)$$

Si verifica infatti facilmente che ove α, β, λ, μ soddisfino al sistema (II) § 5 e ω, θ siano legate fra loro dalle (27), le α_1, β_1, λ_1, μ_1 date dalle (30) soddisfano alla loro volta il sistema (IV) § 5. Ma inoltre se dalle (30) formiamo l'espressione

$$\frac{\alpha_1^2}{q} - \frac{\beta_1^2}{p} + \lambda_1^2 + \mu_1^2,$$

troviamo che si ha identicamente

$$\frac{\alpha_1^2}{q} - \frac{\beta_1^2}{p} + \lambda_1^2 + \mu_1^2 = \frac{\alpha^2}{p} + \frac{\beta^2}{q} + \lambda^2 - \mu^2, \qquad (31)$$

e per ciò, soddisfacendo α, β, λ, μ la (II^*), le α_1, β_1, λ_1, μ_1, calcolate dalle (30), vengono a soddisfare alla loro volta la (IV^*).

Osserviamo ancora che le (30) possono risolversi rispetto ad α, β, λ, μ e danno le equivalenti:

$$\left.\begin{aligned}
k\,\alpha &= \cos\sigma\,.\,\beta_1 - \operatorname{sen}\omega\,.\,\lambda_1 + \cos\omega\,.\,\mu_1\\
k\,\beta &= -\operatorname{sen}\sigma\,.\,\alpha_1 + \cos\omega\,.\,\lambda_1 + \operatorname{sen}\omega\,.\,\mu_1\\
k\,\lambda &= -\cosh\theta\cdot\frac{\alpha_1}{q} + \operatorname{senh}\theta\cdot\frac{\beta_1}{p} - D\,\lambda_1 + A\,\mu_1\\
k\,\mu &= -\operatorname{senh}\theta\,.\,\frac{\alpha_1}{q} + \cosh\theta\,.\,\frac{\beta_1}{p} - B\,\lambda_1 + C\,\mu_1,
\end{aligned}\right\}\qquad(30^*)$$

colle quali passiamo inversamente da una quaderna $(\alpha_1, \beta_1, \lambda_1, \mu_1)$ soluzione delle (IV), (IV^*) ad una quaderna $(\alpha, \beta, \lambda, \mu)$ soluzione delle (II) (II^*).

Dopo ciò è chiaro come, data una deformata propria S del paraboloide ellittico, e fissate quindi le funzioni ω, α, β, λ, μ di u, v (cf. più avanti § 17), l'integrazione delle (27) ci farà conoscere la funzione θ, contenente due costanti arbitrarie, dopo di che dalle (30) avremo, in termini finiti, le funzioni

α_1, β_1, λ_1, μ_1, le quali insieme con θ definiranno *intrinsecamente* una doppia infinità di deformate improprie S_1 del paraboloide stesso. Così da una deformata propria S otteniamo ∞^2 deformate improprie; e similmente da una deformata impropria S_1 avremo ∞^2 deformate proprie S. L'esistenza delle nostre trasformazioni per le deformate del paraboloide ellittico è così, dal punto di vista delle equazioni intrinseche, perfettamente stabilita. Notiamo poi che, per definire intrinsecamente le ∞^2 trasformate di una assegnata deformata propria S, non abbiamo altro che da eseguire l'integrazione delle (27) rapporto a θ, essendo data ω. Ove si prenda per incognita $\operatorname{tgh} \frac{1}{2} \theta$, le (27) assumono la forma di un'equazione ai differenziali totali del tipo di Riccati. Affatto analogamente si dica ove sia data invece una deformata impropria e se ne cerchino le ∞^2 trasformate proprie.

§ 9.

Le trasformazioni intrinseche per le deformate di 1.ª specie del paraboloide iperbolico.

Le deformate di 1.ª specie del paraboloide iperbolico dipendono dalla equazione a derivate parziali (V) § 6:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} = \operatorname{senh} \theta \cosh \theta \tag{V}$$

e dalla integrazione del sistema (VI), (VI^*) ibid. per le funzioni α, β, λ, μ.

Indichiamo con σ una costante arbitraria e consideriamo il sistema di equazioni simultanee:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \theta_1}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial v} &= -(\cosh \sigma \operatorname{senh} \theta \cosh \theta_1 + \operatorname{senh} \sigma \cosh \theta \operatorname{senh} \theta_1) \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u} &= (\cosh \sigma \cosh \theta \operatorname{senh} \theta_1 + \operatorname{senh} \sigma \operatorname{senh} \theta \cosh \theta_1). \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Supposto che θ sia una soluzione della (V), queste sono compatibili in θ_1, e il loro integrale generale, che contiene una costante arbitraria oltre σ, è alla sua volta una soluzione della (V) stessa. Diremo anche qui che θ_1 deriva da θ con una trasformazione B_σ.

Ed ora ci proponiamo la questione analoga a quella risoluta colle formole (30) al paragrafo precedente, domandando se è possibile passare, con formole di sostituzione lineare, da una quaderna $(\alpha, \beta, \lambda, \mu)$ che soddisfi le (VI), (VI^*) § 6 ad una quaderna corrispondente $(\alpha_1, \beta_1, \lambda_1, \mu_1)$ che soddisfi il sistema stesso ove la θ sia sostituita da una sua trasformata θ_1 secondo le (32). Rispondiamo affermativamente a tale domanda col dare le formole effettive per tale passaggio. Poniamo per ciò:

$$\left.\begin{aligned}
A &= \cosh\sigma \operatorname{senh}\theta \operatorname{senh}\theta_1 + \operatorname{senh}\sigma \cosh\theta \cosh\theta_1 \\
B &= \cosh\sigma \operatorname{senh}\theta \cosh\theta_1 + \operatorname{senh}\sigma \cosh\theta \operatorname{senh}\theta_1 \\
C &= \cosh\sigma \cosh\theta \operatorname{senh}\theta_1 + \operatorname{senh}\sigma \operatorname{senh}\theta \cosh\theta_1 \\
D &= \cosh\sigma \cosh\theta \cosh\theta_1 + \operatorname{senh}\sigma \operatorname{senh}\theta \operatorname{senh}\theta_1,
\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

e introduciamo la costante k data da

$$k = \sqrt{\operatorname{senh}^2\sigma + \frac{1}{p}} = \sqrt{\cosh^2\sigma - \frac{1}{q}}; \tag{34}$$

le formole domandate si scrivono:

$$\left.\begin{aligned}
k\,\alpha_1 &= \cosh\theta_1 \,.\, \lambda + \operatorname{senh}\theta_1 \,.\, \mu - \operatorname{senh}\sigma \,.\, \alpha \\
k\,\beta_1 &= \operatorname{senh}\theta_1 \,.\, \lambda + \cosh\theta_1 \,.\, \mu + \cosh\sigma \,.\, \beta \\
k\,\lambda_1 &= -A\lambda - B\mu - \cosh\theta \cdot \frac{\alpha}{p} - \operatorname{senh}\theta \cdot \frac{\beta}{q} \\
k\,\mu_1 &= C\lambda + D\mu + \operatorname{senh}\theta \cdot \frac{\alpha}{p} + \cosh\theta \cdot \frac{\beta}{q}.
\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Si verifica infatti derivando che, ove α, β, λ, μ soddisfino le (VI), le α_1, β_1, λ_1, μ_1 così definite soddisfano il sistema analogo, postovi θ_1 per θ. Di più segue dalle (35) l'identità:

$$\frac{\alpha_1^2}{p} + \frac{\beta_1^2}{q} + \lambda_1^2 - \mu_1^2 = \frac{\alpha^2}{p} + \frac{\beta^2}{q} + \lambda^2 - \mu^2, \tag{36}$$

onde quando l'equazione in termini finiti (VI^*) sia soddisfatta da α, β, λ, μ, lo sarà pure da α_1, β_1, λ_1, μ_1.

Insieme alle (35), conviene tener presenti anche le formole inverse:

$$\left.\begin{aligned}
k\,\alpha &= -\cosh\theta\,.\,\lambda_1 - \operatorname{senh}\theta\,.\,\mu_1 - \operatorname{senh}\sigma\,.\,\alpha_1 \\
k\,\beta &= -\operatorname{senh}\theta\,.\,\lambda_1 - \cosh\theta\,\mu_1 + \cosh\sigma\,.\,\beta_1 \\
k\,\lambda &= -A\,\lambda_1 - C\,\mu_1 + \cosh\theta_1\cdot\frac{\alpha_1}{p} + \operatorname{senh}\theta_1\cdot\frac{\beta_1}{q} \\
k\,\mu &= \quad B\,\lambda_1 + D\,\mu_1 - \operatorname{senh}\theta_1\,\frac{\alpha_1}{p} - \cosh\theta_1\,\frac{\beta_1}{q}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{35*}$$

Con queste formole vediamo che da ogni deformata S di 1.ª specie del paraboloide iperbolico, corrispondente alle cinque funzioni θ, α, β, λ, μ, si ottiene, dopo l'integrazione del sistema (32), una doppia infinità di nuove deformate S_1 della stessa specie, definite intrinsecamente mediante le cinque funzioni θ_1, α_1, β_1, λ_1, μ_1. Come nel caso del paraboloide ellittico, diremo le S_1 le superficie trasformate della S.

§ 10.

Caso delle deformate di 2.ª specie del paraboloide iperbolico.

Per le deformate di 2.ª specie del paraboloide iperbolico l'equazione a derivate parziali è la (*VII*) § 6:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} + \frac{1}{2}\cosh 2\theta = 0. \tag{VII}$$

Come per le precedenti equazioni abbiamo anche qui per le soluzioni della (*VII*) le trasformazioni B_σ corrispondenti al seguente sistema di equazioni simultanee

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial(\theta_1-\theta)}{\partial u} &= \operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}\cosh(\theta_1+\theta) \\
\frac{\partial(\theta_1+\theta)}{\partial v} &= -\cot\frac{\sigma}{2}\operatorname{senh}(\theta_1-\theta),
\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

dove σ è una costante arbitraria.

Se θ, θ_1 sono due tali soluzioni della (VII), da una quaderna (α, β, λ, μ) che soddisfi il sistema ($VIII$), ($VIII^*$) § 6 si passa ad una quaderna corrispondente (α_1, β_1, λ_1, μ_1) che soddisfa il sistema analogo, sostituita θ_1 a θ, colle formole che andiamo a scrivere. Poniamo

$$\left.\begin{aligned} A &= \quad \operatorname{senh}\theta \operatorname{senh}\theta_1 - \cos\sigma \cosh\theta \cosh\theta_1 \\ B &= -\operatorname{senh}\theta \cosh\theta_1 + \cos\sigma \cosh\theta \operatorname{senh}\theta_1 \\ C &= \quad \cosh\theta \operatorname{senh}\theta_1 - \cos\sigma \operatorname{senh}\theta \cosh\theta_1 \\ D &= -\cosh\theta \cosh\theta_1 + \cos\sigma \operatorname{senh}\theta \operatorname{senh}\theta_1 , \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

e introduciamo la costante k data da

$$k = \sqrt{\cos^2\sigma + \frac{\operatorname{sen}^2\sigma}{q}} - \sqrt{1 - \frac{\operatorname{sen}^2\sigma}{p}} ; \tag{38*}$$

le formole richieste sono allora le seguenti:

$$\left.\begin{aligned} k\,\alpha_1 &= \operatorname{sen}\sigma \operatorname{senh}\theta_1 . \lambda - \operatorname{sen}\sigma \cosh\theta_1 . \mu - \alpha \\ k\,\beta_1 &= \operatorname{sen}\sigma \cosh\theta_1 . \lambda - \operatorname{sen}\sigma \operatorname{senh}\theta_1 . \mu - \cos\sigma . \beta \\ k\,\lambda_1 &= A\,\lambda + B\,\mu - \operatorname{sen}\sigma \operatorname{senh}\theta \cdot \frac{\alpha}{p} - \operatorname{sen}\sigma \cosh\theta \cdot \frac{\beta}{q} \\ k\,\mu_1 &= C\,\lambda + D\,\mu - \operatorname{sen}\sigma \cosh\theta \cdot \frac{\alpha}{p} - \operatorname{sen}\sigma \operatorname{senh}\theta \cdot \frac{\beta}{q} . \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Le verifiche si fanno nel solito modo per derivazione ed osservando che si ha l'identità:

$$\frac{\alpha_1^2}{p} + \frac{\beta_1^2}{q} + \lambda_1^2 - \mu_1^2 = \frac{\alpha^2}{p} + \frac{\beta^3}{q} + \lambda^2 - \mu^2. \tag{40}$$

Scriviamo ancora le (39) risolute rapporto ad α, β, λ, μ:

$$\left.\begin{aligned} k\,\alpha &= -\operatorname{sen}\sigma \operatorname{senh}\theta . \lambda_1 + \operatorname{sen}\sigma \cosh\theta . \mu_1 - \alpha_1 \\ k\,\beta &= -\operatorname{sen}\sigma \cosh\theta . \lambda_1 + \operatorname{sen}\sigma \operatorname{senh}\theta . \mu_1 - \cos\sigma . \beta_1 \\ k\,\lambda &= \quad A\,\lambda_1 - C\,\mu_1 + \operatorname{sen}\sigma \operatorname{senh}\theta_1 \cdot \frac{\alpha_1}{p} + \operatorname{sen}\sigma \cosh\theta_1 \cdot \frac{\beta_1}{q} \\ k\,\mu &= -B\,\lambda_1 + D\,\mu_1 + \operatorname{sen}\sigma \cosh\theta_1 \cdot \frac{\alpha_1}{p} + \operatorname{sen}\sigma \operatorname{senh}\theta_1 \cdot \frac{\beta_1}{q} . \end{aligned}\right\} \tag{39*}$$

Anche per questo caso troviamo adunque che da una deformata S (di

2.ª specie) del paraboloide iperbolico, integrando le equazioni (37) per θ_1, si ottengono ∞^2 superficie trasformate S_1 della medesima specie individuate mediante le loro equazioni intrinseche.

§ 11.

Caso delle deformate improprie del paraboloide iperbolico.

Veniamo all'ultimo caso che ci resta da trattare per le trasformazioni intrinseche, quello delle deformate della regione ideale del paraboloide iperbolico. Secondo il § 7, esse dipendono dalla equazione a derivate parziali (IX) delle superficie pseudosferiche

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = \operatorname{sen} \theta \cos \theta \tag{IX}$$

e dalla successiva integrazione del sistema simultaneo (X) (X^*) per la quaderna di funzioni incognite α, β, λ, μ. Ora, come al § 3 per le deformate del paraboloide immaginario, passiamo, con una trasformazione B_σ di Bäcklund, dalla soluzione θ della (IX) alla nuova soluzione θ_1, legata a θ dalle solite formole (8) § 3.

Costruito il sistema (X), (X^*) ove per θ si ponga θ_1, e per α, β, λ, μ rispettivamente α_1, β_1, λ_1, μ_1, noi passeremo dalla quaderna $(\alpha, \beta, \lambda, \mu)$ ad una quaderna corrispondente $(\alpha_1, \beta_1, \lambda_1, \mu_1)$ colle seguenti formole di sostituzione lineare.

Abbiano A, B, C, D il significato loro attribuito nelle (11) § 3, e si ponga:

$$k = \sqrt{\frac{\cos^2 \sigma}{p} + \operatorname{sen}^2 \sigma} = \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \sigma}{q}}\,; \tag{41}$$

le formole domandate si scrivono:

$$\left.\begin{aligned}
k\,\alpha_1 &= -\cos\sigma \operatorname{sen}\theta_1 \,.\, \lambda + \cos\sigma\cos\theta_1 \,.\, \mu - \operatorname{sen}\sigma \,.\, \alpha \\
k\,\beta_1 &= \cos\sigma\cos\theta_1 \,.\, \lambda + \cos\sigma \operatorname{sen}\theta_1 \,.\, \mu + \beta \\
k\,\lambda_1 &= A\lambda + B\mu + \cos\sigma\operatorname{sen}\theta \cdot \frac{\alpha}{p} + \cos\sigma\cos\theta \cdot \frac{\beta}{q} \\
k\,\mu_1 &= C\lambda + D\mu - \cos\sigma\cos\theta \cdot \frac{\alpha}{p} + \cos\sigma\operatorname{sen}\theta \cdot \frac{\beta}{q}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Le verifiche si fanno anche qui come nei casi precedenti, osservando che dalle (42) segue l'identità:

$$\frac{\beta_1^2}{q} - \frac{\alpha_1^2}{p} - \lambda_1^2 - \mu_1^2 = \frac{\beta^2}{q} - \frac{\alpha^2}{p} - \lambda^2 - \mu^2. \tag{43}$$

In fine converrà scrivere le (42), risolute rapporto ad α, β, λ, μ:

$$\left.\begin{aligned}
k\,\alpha &= \cos\sigma \operatorname{sen}\theta \,.\, \lambda_1 - \cos\sigma \cos\theta \,.\, \mu_1 - \operatorname{sen}\sigma \,.\, \alpha_1 \\
k\,\beta &= -\cos\sigma \cos\theta \,.\, \lambda_1 - \cos\sigma \operatorname{sen}\theta \,.\, \mu_1 + \beta_1 \\
k\,\lambda &= A\,\lambda_1 + C\,\mu_1 - \cos\sigma \operatorname{sen}\theta_1 \cdot \frac{\alpha_1}{p} - \cos\sigma \cos\theta_1 \cdot \frac{\beta_1}{q} \\
k\,\mu &= B\,\lambda_1 + D\,\mu_1 + \cos\sigma \cos\theta_1 \cdot \frac{\alpha_1}{p} - \cos\sigma \operatorname{sen}\theta_1 \cdot \frac{\beta_1}{q}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{42*}$$

Dopo ciò vediamo che anche per le deformate improprie del paraboloide iperbolico vale una teoria delle trasformazioni intrinseche come per gli altri casi.

§ 12.

Descrizione del metodo per le ricerche seguenti.

A questo punto abbiamo già esaurita la prima parte della ricerca, proposta alla fine del § 7, stabilendo che per le deformate di tutte le specie dei paraboloidi sussiste una teoria delle trasformazioni, per modo che da ogni tale deformata S, integrando un'equazione differenziale del tipo di Riccati, troviamo *individuate intrinsecamente* ∞^2 superficie trasformate S_1 ancora applicabili sui paraboloidi. E con questo, ove ben si osservi, si è già ottenuto, con maggiore semplicità, più di quanto trovasi esposto nel seguito della Memoria al Tomo IX.

Ma ora dobbiamo passare alla seconda e più importante parte della ricerca, dove dovremo dimostrare come le superficie trasformate S_1 possano determinarsi non solo intrinsecamente, ma ben anche per la loro posizione nello spazio in relazione colla primitiva S, sicchè, conosciuta la S, si hanno senz'altro *in termini finiti* le trasformate S_1.

Per ciò partiamo dall'osservazione che fra i punti di una deformata S dei paraboloidi e quelli di una sua trasformata S_1 è già stabilita una legge di corrispondenza, corrispondendosi due punti M, M_1 di S, S_1 ai quali competano i medesimi valori delle coordinate curvilinee u, v. La proposizione fondamentale, affatto analoga a quella stabilita al § 4 per le deformate del paraboloide immaginario, che dobbiamo ogni volta dimostrare è la seguente: *Le due superficie S, S_1 possono collocarsi in tale posizione relativa nello spazio che ogni retta congiungente due punti corrispondenti M, M_1 tocchi in M la S e in M_1 la S_1.*

Per dimostrarlo noi cercheremo, nell'ipotesi che la proposizione sussista, le formole effettive di passaggio dalla S alla S_1 e sulle formole trovate faremo poi le opportune verifiche.

Denotiamo con x, y, z le coordinate del punto M mobile sopra S e con X, Y, Z i coseni di direzione della normale alla S, e siano x_1, y_1, z_1 le coordinate del punto corrispondente M_1 di S_1. Poichè M_1 deve per ipotesi giacere nel piano tangente in M alla S, sussisteranno certamente formole del tipo seguente

$$x_1 = x + l\frac{\partial x}{\partial u} + m\frac{\partial x}{\partial v}$$

$$y_1 = y + l\frac{\partial y}{\partial u} + m\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$z_1 = z + l\frac{\partial z}{\partial u} + m\frac{\partial z}{\partial v},$$

dove l, m sono appropriate funzioni di u, v da determinarsi in guisa che la superficie S_1 luogo del punto (x_1, y_1, z_1) soddisfi alle condizioni seguenti: 1.° abbia le equazioni intrinseche assegnate, 2.° la retta congiungente i due punti (x, y, z) (x_1, y_1, z_1) giaccia nel piano tangente di S_1. S'intende facilmente che tali condizioni, se compatibili, determineranno *univocamente* l, m; ma noi urteremmo in rilevanti difficoltà ove volessimo così procedere direttamente alla ricerca di queste incognite l, m. Lasciandoci invece guidare dall'analogia col caso già trattato al § 3, possiamo congetturare la forma probabile di queste funzioni ed il successo dimostrerà che lo scopo viene così effettivamente raggiunto. Pei casi che vogliamo trattare direttamente (gli altri deducendosi da questi) basterà assumere l, m proporzionali, per un fattore costante, ai quozienti $\frac{\lambda_1}{\lambda}$, $\frac{\mu_1}{\mu}$, come avviene in effetto nelle formole (13)

§ 3 (*), così le formole domandate si scriveranno

$$x_1 = x + a\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\mu_1}{\mu}\frac{\partial x}{\partial v}\right) \qquad (a \text{ costante}), \tag{44}$$

colle analoghe per y_1, z_1, e resterà solo da determinare in modo conveniente la costante a.

Ora le formole fondamentali dalla teoria delle superficie danno:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial v} + \Delta X$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial v} + \Delta' X$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 1 \end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 2 \end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial v} + \Delta'' X,$$

dove i simboli di Christoffel sono relativi al $d s^2$ della S, e Δ, Δ', Δ'' sono i coefficienti della seconda forma quadratica fondamentale della S, e quindi

(*) Non è fuor di luogo l'osservare che le formole (già richiamate nel testo al § 3), che dànno il passaggio da una superficie pseudosferica Σ ad una sua trasformata di Bäcklund Σ_1, offrono anch'esse la circostanza qui osservata. E infatti se nelle formole al § 3 poniamo

$$\lambda = \cos\theta, \quad \mu = \operatorname{sen}\theta; \quad \lambda_1 = \cos\theta_1, \quad \mu_1 = \operatorname{sen}\theta_1,$$

le λ, μ soddisfano il sistema lineare

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u} = -\frac{\partial\theta}{\partial u}\mu, \quad \frac{\partial\mu}{\partial u} = \frac{\partial\theta}{\partial u}\lambda$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial v} = -\frac{\partial\theta}{\partial v}\mu, \quad \frac{\partial\mu}{\partial v} = \frac{\partial\theta}{\partial v}\lambda$$

e analogamente le λ_1, μ_1. Di più λ_1, μ_1 dipendono linearmente da λ, μ colle formule

$$\lambda_1 = A\lambda + C\mu, \quad \mu_1 = B\lambda + D\mu$$

e le formole (9) § 3 pel passaggio da Σ e Σ_1 si scrivono così

$$x_1 = x + \cos\sigma\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\mu_1}{\mu}\frac{\theta x}{\partial v}\right);$$

queste hanno appunto la forma (44) del testo. Così le ricerche seguenti della Memoria sono da riguardarsi come una diretta estensione alle deformate dei paraboloidi delle formole per la trasformazione di Bäcklund per le superficie pseudosferiche.

nel caso nostro $\Delta' = 0$. Se formiamo dalle (44) le derivate parziali di x_1, y_1, z_1 come occorrono nel seguito per le verifiche, troviamo le formole seguenti:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial x_1}{\partial u} &= L\frac{\partial x}{\partial u} + M\frac{\partial x}{\partial v} + a\frac{\lambda_1}{\lambda}\Delta . X\\ \frac{\partial x_1}{\partial v} &= P\frac{\partial x}{\partial u} + Q\frac{\partial x}{\partial v} + a\frac{\mu_1}{\mu}\Delta'' . X,\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

avendo posto

$$\left.\begin{aligned}L &= a\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right) + a\frac{\lambda_1}{\lambda}\begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix} + a\frac{\mu_1}{\mu}\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix} + 1\\ M &= a\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mu_1}{\mu}\right) + a\frac{\lambda_1}{\lambda}\begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix} + a\frac{\mu_1}{\mu}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\\ P &= a\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right) + a\frac{\lambda_1}{\lambda}\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix} + a\frac{\mu_1}{\mu}\begin{Bmatrix}2\,2\\1\end{Bmatrix}\\ Q &= a\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\mu_1}{\mu}\right) + a\frac{\lambda_1}{\lambda}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix} + a\frac{\mu_1}{\mu}\begin{Bmatrix}2\,2\\2\end{Bmatrix} + 1.\end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Per le ricerche ulteriori diventa ora necessario, separando i singoli casi, sostituire nelle (46) per le derivate di λ, μ; λ_1, μ_1 i valori che seguono dalle rispettive equazioni differenziali e pei simboli di Cristoffel i loro valori effettivamente calcolati.

§ 13.

Valori dei simboli di Christoffel per le deformate del paraboloide ellittico.

Cominciamo le ricerche indicate seguendo l'ordine stesso tenuto per le equazioni intrinseche nei paragrafi precedenti, ed occupiamoci dapprima delle deformate del paraboloide ellittico. Per quanto abbiamo detto sopra, converrà prima di tutto calcolare i valori dei simboli di Christoffel per la prima forma quadratica

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \tag{a}$$

di una tale deformata, definita dalle formole (16) ovvero dalle (18) § 5, secondo che la deformata è propria od impropria. Sia in primo luogo S una deformata propria e teniamo presente che la forma differenziale (a) è equivalente all'altra

$$(\alpha^2 + p)\, d\,\alpha^2 + 2\,\alpha\,\beta\, d\,\alpha\, d\,\beta + (\beta^2 + q)\, d\,\beta^2, \qquad (a')$$

ricordando inoltre che α, β, λ, μ sono tali funzioni di u, v da soddisfare le (II) § 5. Applichiamo allora le formole di Cristoffel per l'equivalenza delle due forme, secondo le quali (*Lezioni*, Vol. I, pag. 64) le derivate seconde delle α, β rapporto ad u, v si esprimono per le derivate prime. I valori dei simboli $\left\{ \begin{matrix} i\,k \\ l \end{matrix} \right\}'$ per la forma (a) sono semplicemente

$$\left\{ \begin{matrix} 1\,1 \\ 1 \end{matrix} \right\}' = \left\{ \begin{matrix} 2\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\}' = \frac{q\,\alpha}{H}, \quad \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\}' = 0$$

$$\left\{ \begin{matrix} 1\,1 \\ 2 \end{matrix} \right\}' = \left\{ \begin{matrix} 2\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\}' = \frac{p\,\beta}{H}, \quad \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\}' = 0$$

$$(H = p\,\beta^2 + q\,\alpha^2 + p\,q),$$

sicchè, applicando le dette formole di Christoffel e le (II) § 5, abbiamo le seguenti:

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial u^2} + \frac{q\,\alpha}{H}\lambda^2 = -\left\{ \begin{matrix} 1\,1 \\ 1 \end{matrix} \right\} \cdot \lambda \operatorname{sen}\omega + \left\{ \begin{matrix} 1\,1 \\ 2 \end{matrix} \right\} \cdot \mu \cos\omega$$

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial u^2} + \frac{p\,\beta}{H}\lambda^2 = \left\{ \begin{matrix} 1\,1 \\ 1 \end{matrix} \right\} \cdot \lambda \cos\omega + \left\{ \begin{matrix} 1\,1 \\ 2 \end{matrix} \right\} \cdot \mu \operatorname{sen}\omega$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial u\,\partial v} = -\left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} \cdot \lambda \operatorname{sen}\omega + \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\} \cdot \mu \cos\omega$$

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial u\,\partial v} = \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} \cdot \lambda \cos\omega + \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\} \cdot \mu \operatorname{sen}\omega$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial v^2} + \frac{q\,\alpha}{H}\mu^2 = -\left\{ \begin{matrix} 2\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} \cdot \lambda \operatorname{sen}\omega + \left\{ \begin{matrix} 2\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\} \cdot \mu \cos\omega$$

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial v^2} + \frac{p\,\beta}{H}\mu^2 = \left\{ \begin{matrix} 2\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} \cdot \lambda \cos\omega + \left\{ \begin{matrix} 2\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\} \cdot \mu \operatorname{sen}\omega.$$

Risolviamo ciascuna di queste coppie di equazioni rispetto ai due simboli Christoffel che vi figurano, ponendovi per le derivate secondo i loro valori che si traggono dalle (II) § 5, e troveremo per le formole domandate:

$$
\left.\begin{aligned}
&\left\{\begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\lambda}\frac{d\lambda}{\partial u} + \frac{p\,\beta\cos\omega - q\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\omega}{H}\cdot\lambda, \\
&\qquad\qquad\left\{\begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix}\right\} = -\frac{\partial\omega}{\partial u}\cdot\frac{\lambda}{\mu} + \frac{p\,\beta\,\mathrm{sen}\,\omega + q\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\omega}{H}\cdot\frac{\lambda^2}{\mu} \\
&\left\{\begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial v} = \frac{\partial\omega}{\partial u}\cdot\frac{\mu}{\lambda}, \qquad \left\{\begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial u} = -\frac{\partial\omega}{\partial v}\cdot\frac{\lambda}{\mu} \\
&\left\{\begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix}\right\} = \frac{\partial\omega}{\partial v}\frac{\mu}{\lambda} + \frac{p\,\beta\cos\omega - q\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\omega}{H}\frac{\mu^2}{\lambda}, \\
&\qquad\qquad\left\{\begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial v} + \frac{p\,\beta\,\mathrm{sen}\,\omega + q\,\alpha\cos\omega}{H}\mu.
\end{aligned}\right\} \tag{47}
$$

Questi sono i valori dei simboli di Christoffel per la deformata propria S del paraboloide ellittico, definita intrinsecamente dalle equazioni (16), (17) § 5.

Similmente se S_1 è una deformata impropria, corrispondente alle funzioni θ, α_1, β_1, λ_1, μ_1 e alle formole (18), (19) § 5, per i corrispondenti simboli di Christoffel, troveremo con calcolo analogo al precedente i valori:

$$
\left.\begin{aligned}
&\left\{\begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix}\right\}_1 = \frac{1}{\lambda_1}\frac{\partial\lambda_1}{\partial u} + \frac{q\,\beta_1\,\mathrm{senh}\,\theta - p\,\alpha_1\cosh\theta}{H_1}\lambda_1, \\
&\qquad\qquad\left\{\begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix}\right\}_1 = \frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{p\,\alpha_1\,\mathrm{senh}\,\theta - q\,\beta_1\cosh\theta}{H_1}\frac{\lambda_1^2}{\mu_1} \\
&\left\{\begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix}\right\}_1 = \frac{1}{\lambda_1}\frac{\partial\lambda_1}{\partial v} = \frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\mu_1}{\lambda_1}, \qquad \left\{\begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix}\right\}_1 = \frac{1}{\mu_1}\frac{\partial\mu_1}{\partial u} = \frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\lambda_1}{\mu_1} \\
&\left\{\begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix}\right\}_1 = \frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\mu_1}{\lambda_1} - \frac{q\,\beta_1\,\mathrm{senh}\,\theta - p\,\alpha_1\cosh\theta}{H_1}\lambda_1, \\
&\qquad\qquad\left\{\begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix}\right\}_1 = \frac{1}{\mu_1}\frac{\partial\mu_1}{\partial v} - \frac{p\,\alpha_1\,\mathrm{senh}\,\theta - q\,\beta_1\cosh\theta}{H_1}\mu_1,
\end{aligned}\right\} \tag{48}
$$

essendo

$$H_1 = q\,\beta_1^2 - p\,\alpha_1^2 - p\,q.$$

§ 14.

Congruenze W colle due falde focali applicabili sul paraboloide ellittico.

Prendiamo ora a considerare due deformate S, S_1 del paraboloide ellittico, la prima propria e la seconda impropria, corrispondenti rispettivamente la S alle cinque funzioni $(\omega, \alpha, \beta, \lambda, \mu)$, la S_1 alle cinque $(\theta, \alpha_1, \beta_1, \lambda_1, \mu_1)$ legate alle precedenti dalle formole della trasformazione B_σ al § 8. Vogliamo dunque dimostrare che S, S_1 possono porsi in tale posizione relativa nello spazio che vengano a costituire le due falde focali di una congruenza rettilinea W, i cui raggi siano le congiungenti dei loro punti corrispondenti. Per ciò, secondo il metodo generale descritto al § 12, cominciamo dal calcolare dalle (46) i valori dei coefficienti L, M, P, Q nel caso attuale. A tale oggetto sostituiamo in queste formole pei simboli di Christoffel i loro valori (47) e per le derivate di λ, μ, λ_1, μ_1 le espressioni date dalle rispettive equazioni differenziali (II), (IV) § 5. Avendo inoltre riguardo alle formole del § 8 per la trasformazione B_σ, ed effettuando semplici riduzioni, otteniamo così dapprima:

$$\left.\begin{aligned}
L &= \frac{a}{\lambda}\left[A\mu_1 - \cosh\theta\cdot\frac{\alpha_1}{q} + \operatorname{senh}\theta\cdot\frac{\beta_1}{p} + \frac{\lambda}{a}\right] + \\
&\qquad + a\,\frac{p\beta\cos\omega - q\alpha\operatorname{sen}\omega}{H}\cdot\lambda_1 \\
M &= \frac{a\lambda_1}{\mu}\left[\frac{p\beta\operatorname{sen}\omega + q\alpha\cos\omega}{H}\lambda - A\right] \\
P &= \frac{a\mu_1}{\lambda}\left[\frac{p\beta\cos\omega - q\alpha\operatorname{sen}\omega}{H}\mu + B\right] \\
Q &= \frac{a}{\mu}\left[-B\lambda_1 - \operatorname{senh}\theta\cdot\frac{\alpha_1}{q} + \cosh\theta\cdot\frac{\beta_1}{p} + \frac{\mu}{a}\right] + \\
&\qquad + a\,\frac{p\beta\operatorname{sen}\omega - q\alpha\cos\omega}{H}\,\mu_1 .
\end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Come si vede, M contiene il fattore λ_1, P il fattore μ_1 ed, osservando le formole (30*) § 8, risulta che i coefficienti estremi L, Q conterranno pure in fattore il primo λ_1 l'ultimo μ_1 se si dà alla costante a il valore: $a = -\frac{1}{k}$. Dimostreremo che questo è in effetto il valore conveniente per la costante a, sicchè: *le formole definitive pel passaggio dalla superficie S alla S_1 sono le seguenti:*

$$x_1 = x - \frac{1}{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\mu_1}{\mu}\frac{\partial x}{\partial v}\right) \text{ecc.,} \tag{50}$$

e non ci resterà altro che eseguire le dovute verifiche. Intanto, con $a = -\frac{1}{k}$, i valori (49) di L, M, P, Q diventano:

$$\left.\begin{aligned}
L &= \frac{\lambda_1}{k\lambda}\left[-D + \frac{q\,\alpha \operatorname{sen}\omega - p\,\beta\cos\omega}{H}\cdot\lambda\right], \\
M &= \frac{\lambda_1}{k\mu}\left[A - \frac{p\,\beta\operatorname{sen}\omega + q\,\alpha\cos\alpha}{H}\cdot\lambda\right] \\
P &= \frac{\mu_1}{k\lambda}\left[-B + \frac{q\,\alpha\operatorname{sen}\omega - p\,\beta\cos\omega}{H}\cdot\mu\right], \\
Q &= \frac{\mu_1}{k\mu}\left[C - \frac{p\,\beta\operatorname{sen}\omega + q\,\alpha\cos\omega}{H}\cdot\mu\right].
\end{aligned}\right\} \tag{49*}$$

Di più, se nelle (45) sostituiamo per a il valore $-\frac{1}{k}$ e per Δ, Δ'' i loro valori

$$\Delta = \Delta'' = \frac{\sqrt{p\,q}}{\sqrt{H}}\lambda\,\mu,$$

abbiamo:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x_1}{\partial u} &= L\frac{\partial x}{\partial u} + M\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\sqrt{p\,q}}{k\sqrt{H}}\mu\,\lambda_1\,.\,X \\
\frac{\partial x_1}{\partial v} &= P\frac{\partial x}{\partial u} + Q\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\sqrt{p\,q}}{k\sqrt{H}}\lambda\,\mu_1\,.\,X.
\end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Da queste formole calcoleremo i valori dei coefficienti della prima e seconda forma quadratica fondamentale della superficie S_1 luogo del punto (x_1, y_1, z_1), definita dalle (50). Indicando con

$$\overline{E}_2,\ \overline{F}_1,\ \overline{G}_1;\quad \overline{\Delta}_1,\ \overline{\Delta'}_2,\ \overline{\Delta''}_1$$

questi coefficienti, dovremo dimostrare che essi eguagliano rispettivamente i coefficienti E_1, F_1, G_1, Δ_1, Δ'_1, Δ''_1 dati dalle (18), (19) § 5. Dopo ciò converrà ancora provare che il piano tangente alla S_1 nel punto M_1 contiene la retta $M M_1$ e lo scopo nostro finale sarà raggiunto.

§ 15.

Verifiche relative alla prima forma fondamentale di S_1.

Dalle (51), formando le espressioni

$$\overline{E}_1 = \Sigma \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2, \qquad \overline{F}_1 = \Sigma \frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial x_1}{\partial v}, \qquad \overline{G}_1 = \Sigma \left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)^2,$$

deduciamo:

$$\overline{E}_1 = E L^2 + 2 F L M + G M^2 + \frac{p q}{k^2 H} \mu^2 \lambda_1^2$$

$$\overline{F}_1 = E L P + F (L Q + M P) + G M Q + \frac{p q}{k^2 H} \lambda \mu . \lambda_1 \mu_1$$

$$\overline{G}_1 = E P^2 + 2 F P Q + G Q^2 + \frac{p q}{k^2 H} \lambda^2 \mu_1^2 .$$

Se poniamo, secondo le (49*):

$$\left.\begin{aligned} L' &= - D + \frac{q \alpha \operatorname{sen} \omega - p \beta \cos \omega}{H} \lambda, \quad & M' &= A - \frac{p \beta \operatorname{sen} \omega + q \alpha \cos \omega}{H} \lambda \\ P' &= - B + \frac{q \alpha \operatorname{sen} \omega - p \beta \cos \omega}{H} \mu, \quad & Q' &= C - \frac{p \beta \operatorname{sen} \omega + q \alpha \cos \omega}{H} \mu, \end{aligned}\right\} \quad (52)$$

le precedenti possono scriversi:

$$\left.\begin{aligned} \frac{k^2 \overline{E}_1}{\lambda_1^2} &= \frac{E}{\lambda^2} L'^2 + 2 \frac{F}{\lambda \mu} L' M' + \frac{G}{\mu^2} M'^2 + \frac{p q}{H} \mu^2 \\ \frac{k^2 \overline{F}_1}{\lambda_1 \mu_1} &= \frac{E}{\lambda^2} L' P' + \frac{F}{\lambda \mu} (L' Q' + M' P') + \frac{G}{\mu^2} M' Q' + \frac{p q}{H} \lambda \mu \\ \frac{k^2 \overline{G}_1}{\mu_1^2} &= \frac{E}{\lambda^2} P'^2 + 2 \frac{F}{\lambda \mu} P' Q' + \frac{G}{\mu^2} Q'^2 + \frac{p q}{H} \lambda^2. \end{aligned}\right\} \quad (53)$$

In queste sostituiamo per $\frac{E}{\lambda^2}$, $\frac{F}{\lambda\mu}$, $\frac{G}{\mu^2}$ i loro valori dati dalle (16) § 5 e, raggruppando quindi i termini contenenti rispettivamente in fattore

$$\alpha^2 + p, \quad \alpha\beta, \quad \beta^2 + q$$

troveremo:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{k^2 \overline{E}_1}{\lambda^2} &= (\alpha^2 + p)(L' \operatorname{sen}\omega - M' \cos\omega)^2 - \\
&\quad - 2\alpha\beta(L' \operatorname{sen}\omega - M' \cos\omega)(L' \cos\omega + M' \operatorname{sen}\omega) + \\
&\quad + (\beta^2 + q)(L' \cos\omega + M' \operatorname{sen}\omega)^2 + \frac{pq}{H}\mu^2 \\
\frac{k^2 F_1}{\lambda\mu} &= (\alpha^2 + p)(L' \operatorname{sen}\omega - M' \cos\omega)(P' \operatorname{sen}\omega - Q' \cos\omega) - \\
&\quad - \alpha\beta\,[(L' \operatorname{sen}\omega - M' \cos\omega)(P' \cos\omega + Q' \operatorname{sen}\omega) + \\
&\quad + (L' \cos\omega + M' \operatorname{sen}\omega)(P' \operatorname{sen}\omega - Q' \cos\omega)] + \\
&\quad + (\beta^2 + q)(L' \cos\omega + M' \operatorname{sen}\omega)(P' \cos\omega + Q' \operatorname{sen}\omega) + \frac{pq}{H}\lambda\mu \\
\frac{k^2 G_1}{\mu^2} &= (\alpha^2 + p)(P' \operatorname{sen}\omega - Q' \cos\omega)^2 - \\
&\quad - 2\alpha\beta(P' \operatorname{sen}\omega - Q' \cos\omega)(P' \cos\omega + Q' \operatorname{sen}\omega) + \\
&\quad + (\beta^2 + q)(P' \cos\omega + Q' \operatorname{sen}\omega)^2 + \frac{pq}{H}\lambda^2 .
\end{aligned}\right\} \qquad (54)$$

Ora dai valori (52) di L', M', P', Q' deduciamo le formule

$$\left.\begin{aligned}
L' \operatorname{sen}\omega - M' \cos\omega &= \frac{q\alpha\lambda}{H} - \cos\sigma \operatorname{senh}\theta, \\
L' \cos\omega + M' \operatorname{sen}\omega &= -\frac{p\beta\lambda}{H} - \operatorname{sen}\sigma \cosh\theta \\
P' \operatorname{sen}\omega - Q' \cos\omega &= \frac{q\alpha\mu}{H} - \cos\sigma \cosh\theta, \\
P' \cos\omega + Q' \operatorname{sen}\omega &= -\frac{p\beta\mu}{H} - \operatorname{sen}\sigma \operatorname{senh}\theta.
\end{aligned}\right\} \qquad (55)$$

Introduciamo questi valori nelle (54), ed avendo riguardo all'identità (II^*) § 5.

$$\mu^2 - \lambda^2 = \frac{pq}{H},$$

trasformeremo le (54) nelle altre:

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{k^2 E_1}{\lambda^2} &= (\alpha^2 + p)\left(\frac{q\,\alpha\,\lambda}{H} - \cos\sigma \operatorname{senh}\theta\right)^2 + \\
&\quad + 2\,\alpha\,\beta\left(\frac{q\,\alpha\,\lambda}{H} - \cos\sigma \operatorname{senh}\theta\right)\left(\frac{p\,\beta\,\lambda}{H} + \operatorname{sen}\sigma \cosh\theta\right) + \\
&\quad + (\beta^2 + q)\left(\frac{p\,\beta\,\lambda}{H} + \operatorname{sen}\sigma \cosh\theta\right)^2 + \frac{p\,q}{H}\,\lambda^2 + 1 \\
\frac{k^2 \overline{F_1}}{\lambda\,\mu} &= (\alpha^2 + p)\left(\frac{q\,\alpha\,\lambda}{H} - \cos\sigma \operatorname{senh}\theta\right)\left(\frac{q\,\alpha\,\mu}{H} - \cos\sigma \cosh\theta\right) + \\
&\quad + \alpha\,\beta\left[\left(\frac{q\,\alpha\,\lambda}{H} - \cos\sigma \operatorname{senh}\theta\right)\left(\frac{p\,\beta\,\mu}{H} + \operatorname{sen}\sigma \cosh\theta\right) + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{q\,\alpha\,\mu}{H} - \cos\sigma \cosh\theta\right)\left(\frac{p\,\beta\,\lambda}{H} + \operatorname{sen}\sigma \cosh\theta\right)\right] + \\
&\quad + (\beta^2 + q)\left(\frac{p\,\beta\,\lambda}{H} + \operatorname{sen}\sigma \cosh\theta\right)\left(\frac{p\,\beta\,\mu}{H} + \operatorname{sen}\sigma \operatorname{senh}\theta\right) + \frac{p\,q}{H}\,\lambda\,\mu \\
\frac{k^2 \overline{G_1}}{\lambda^2} &= (\alpha^2 + p)\left(\frac{q\,\alpha\,\mu}{H} - \cos\sigma \cosh\theta\right)^2 + \\
&\quad + 2\,\alpha\,\beta\left(\frac{q\,\alpha\,\mu}{H} - \cos\sigma \cosh\theta\right)\left(\frac{p\,\beta\,\mu}{H} + \operatorname{sen}\sigma \operatorname{senh}\theta\right) + \\
&\quad + (\beta^2 + q)\left(\frac{p\,\beta\,\mu}{H} + \operatorname{sen}\sigma \operatorname{senh}\theta\right)^2 + \frac{p\,q}{H}\,\mu^2 - 1.
\end{aligned}\right\} \qquad (56)
$$

Dobbiamo ora dimostrare che questi tre valori coincidono ordinatamente con quelli dati dalle (18) § 5 per

$$\frac{k^2 E_1}{\lambda^2}, \quad \frac{k_2 F_1}{\lambda\,\mu}, \quad \frac{k^2 G_1}{\mu^2},$$

che si ha cioè:

$$\frac{k^2 \overline{E_1}}{\lambda^2} = (k^2 \alpha_1^2 + k^2 q) \cosh^2\theta - 2\,k\,\alpha_1 \,.\, k\,\beta_1 \operatorname{senh}\theta \cosh\theta + (k^2 \beta_1^2 - k^2 p) \operatorname{senh}^2\theta$$

$$\frac{k^2 F_1}{\lambda\,\mu} = (k^2 \alpha_1^2 + k^2 q) \operatorname{senh}\theta \cosh\theta - k\,\alpha_1 \,.\, k\,\beta_1 (\cosh^2\theta + \operatorname{senh}^2\theta) + \\ + (k^2 \beta_1^2 - k^2 p) \operatorname{senh}\theta \cosh\theta$$

$$\frac{k^2 G_1}{\mu^2} = (k^2 \alpha_1^2 + k^2 q) \operatorname{senh}^2\theta - 2\,k\,\alpha_1 \,.\, k\,\beta_1 \operatorname{senh}\theta \cosh\theta + (k^2 \beta_1^2 - k^2 p) \cosh^2\theta,$$

o, sotto altra forma:

$$\frac{k^2\,\overline{E}_1}{\lambda^2}=(k\,\beta_1 \operatorname{senh}\theta - k\,\alpha_1 \cosh\theta)^2 + k^2 q \cosh^2\theta - k^2 p \operatorname{senh}^2\theta$$

$$\frac{k^2\,\overline{F}_1}{\lambda\,\mu}=(k\,\beta_1 \operatorname{senh}\theta - k\,\alpha_1 \cosh\theta)(k\,\beta_1 \cosh\theta - k\,\alpha_1 \operatorname{senh}\theta) + \\ + (k^2 q - k^2 p) \operatorname{senh}\theta \cosh\theta$$

$$\frac{k^2\,\overline{G}_1}{\mu^2}=(k\,\beta_1 \cosh\theta - k\,\alpha_1 \operatorname{senh}\theta)^2 + k^2 q \operatorname{senh}^2\theta - k^2 p \cosh^2\theta.$$

Ma, a causa della (30) § 8, si ha

$$k\,\beta_1 \operatorname{senh}\theta - k\,\alpha_1 \cosh\theta = \lambda - \cos\sigma \operatorname{senh}\theta\cdot\alpha + \operatorname{sen}\sigma \cosh\theta\cdot\beta$$
$$k\,\beta_1 \cosh\theta - k\,\alpha_1 \operatorname{senh}\theta = \mu - \cos\sigma \cosh\theta\cdot\alpha + \operatorname{sen}\sigma \operatorname{senh}\theta\cdot\beta,$$

e per la (29) ibid:

$$k^2 q = q \operatorname{sen}^2\sigma + 1,\quad k^2 p = 1 - p\cos^2\sigma,$$

onde le identità da dimostrarsi diventano:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{k^2\,\overline{E}_1}{\lambda^2} &= (\lambda - \cos\sigma \operatorname{senh}\theta\,.\,\alpha + \operatorname{sen}\sigma\cosh\theta\,.\,\beta)^2 + \\
&\quad + q\operatorname{sen}^2\sigma\cosh^2\theta + p\cos^2\sigma\operatorname{senh}^2\theta + 1 \\
\frac{k^2\,\overline{F}_1}{\lambda\,\mu} &= (\lambda - \cos\sigma\operatorname{senh}\theta\,.\,\alpha + \operatorname{sen}\sigma\cosh\theta\,.\,\beta)(\mu - \cos\sigma\cosh\theta\,.\,\alpha + \\
&\quad + \operatorname{sen}\sigma\operatorname{senh}\theta\,.\,\beta) + (q\operatorname{sen}^2\sigma + p\cos^2\sigma)\operatorname{senh}\theta\cosh\theta \\
\frac{k^2\,\overline{G}_1}{\mu^2} &= (\mu - \cos\sigma\cosh\theta\,.\,\alpha + \operatorname{sen}\sigma\operatorname{senh}\theta\,.\,\beta)^2 + \\
&\quad + q\operatorname{sen}^2\sigma\operatorname{senh}^2\theta + p\cos^2\sigma\cosh^2\theta - 1.
\end{aligned}\right\}\quad (57)$$

Se nei primi membri delle (57) sostituiamo i loro valori dati dalle (56), dall'una e dall'altra parte delle identità da dimostrarsi abbiamo nella prima e nella terza funzioni intere di 2.° grado di λ, μ rispettivamente, nella seconda funzioni bilineari di λ, μ, e basta calcolare i singoli coefficienti, ricordando che si ha: $H = p\,\beta^2 + q\,\alpha^2 + p\,q$, per vederle identicamente verificate, c. d. d.

§ 16.

Verifiche relative alla seconda forma fondamentale di S_1.

Procediamo ora alle rimanenti verifiche nel modo seguente. In primo luogo dai valori (49*) di L, M, P, Q, avendo riguardo alle formole (30) § 8 ed all'identità

$$\mu^2 - \lambda^2 = \frac{H}{pq},$$

deduciamo le formole:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\lambda}{\lambda_1} L - \frac{\mu}{\mu_1} P &= \frac{\lambda_1}{\lambda}, \\ \frac{\lambda}{\lambda_1} M - \frac{\mu}{\mu_1} Q &= \frac{\mu_1}{\mu}. \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

Formando dalle (51) le espressioni: $\frac{\lambda}{\lambda_1}\frac{\partial x_1}{\partial u} - \frac{\mu}{\mu_1}\frac{\partial x_1}{\partial v}$, ne segue ora:

$$\frac{\lambda}{\lambda_1}\frac{\partial x_1}{\partial u} - \frac{\mu}{\mu_1}\frac{\partial x_1}{\partial v} = \frac{\lambda_1}{\lambda}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\mu_1}{\mu}\frac{\partial x}{\partial v}, \text{ ecc.},$$

dopo di che possiamo scrivere le (50) sotto l'altra forma:

$$x = x_1 + \frac{1}{k}\left(\frac{\lambda}{\lambda_1}\frac{\partial x_1}{\partial u} - \frac{\mu}{\mu_1}\frac{\partial x}{\partial v}\right), \text{ ecc.,} \tag{59}$$

Queste servono al passaggio inverso dalla S_1 alla S e dimostrano intanto che S, S_1 sono le due falde focali della congruenza formata dalle congiungenti i loro punti corrispondenti. Resta ora soltanto da dimostrarsi che sussistono le formole

$$\bar{\Delta}_1 = \bar{\Delta}''_1 = \pm \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{H_1}}\lambda_1\mu_1, \quad \bar{\Delta}'_1 = 0 \quad (H_1 = q\,\beta_1 - p\,\alpha_1^2 - pq). \tag{60}$$

Per questo cominciamo dall'osservare che, derivando rapporto ad u, v le (59), avremo formole della specie seguente (cf. § 12):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= L_1\frac{\partial x_1}{\partial u} + M_1\frac{\partial x_1}{\partial v} + \frac{1}{k}\left(\frac{\lambda}{\lambda_1}\bar{\Delta}_1 - \frac{\mu}{\mu_1}\bar{\Delta}'_1\right)\cdot X_1 \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= P_1\frac{\partial x_1}{\partial u} + Q_1\frac{\partial x_1}{\partial v} + \frac{1}{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\bar{\Delta}'_1 - \frac{\mu}{\mu_1}\bar{\Delta}''_1\right)\cdot X_1, \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

dove X_1, Y_1, Z_1 indicano i coseni di direzione della normale alla S_1, ed L_1, M_1, P_1, Q_1 sono coefficienti di cui non importa calcolare i valori (*). Dalle (C_1) deduciamo:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\lambda}{\lambda_1}\overline{\Delta}_1-\frac{\mu}{\mu_1}\overline{\Delta}'_1&=k\,\Sigma X_1\frac{\partial x}{\partial u}\\ \frac{\lambda}{\lambda_1}\overline{\Delta}'_1-\frac{\mu}{\mu_1}\overline{\Delta}''_1&=k\,\Sigma X_1\frac{\partial x}{\partial v}.\end{aligned}\right\} \tag{62}$$

Ora si ha

$$X_1=\frac{1}{\sqrt{E_1G_1-F_1^2}}\begin{vmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial u} & \frac{\partial z_1}{\partial u}\\ \frac{\partial y_1}{\partial v} & \frac{\partial z_1}{\partial v}\end{vmatrix}$$

colle analoghe per Y_1, Z_1, e poichè E_1, F_1, G_1 hanno precisamente, per quanto si è visto sopra, i valori (18) § 8 ne segue l'identità:

$$E_1G_1-F_1^2=H_1\,.\,\lambda_1\mu_1^2\,,\quad \text{o}\quad \sqrt{E_1G_1-F_1^2}=\lambda_1\mu_1\sqrt{H_1}\,;$$

per ciò si ha

$$X_1=\frac{1}{\lambda_s\mu_1\sqrt{H_1}}\begin{vmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial u} & \frac{\partial z_1}{\partial u}\\ \frac{\partial y_1}{\partial v} & \frac{\partial z_1}{\partial v}\end{vmatrix}$$

e ne risultano le formole:

$$\Sigma X_1\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{1}{\lambda_1\mu_1\sqrt{H_1}}\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial y_1}{\partial u} & \frac{\partial z_1}{\partial u}\\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial y_1}{\partial v} & \frac{\partial z_1}{\partial v}\end{vmatrix},$$

$$\Sigma X_1\frac{\partial x}{\partial v}=\frac{1}{\lambda_1\mu_1\sqrt{H_1}}\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\\ \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial y_1}{\partial u} & \frac{\partial z_1}{\partial u}\\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial y_1}{\partial v} & \frac{\partial z_1}{\partial v}\end{vmatrix}.$$

(*) Questi si troverebbero del resto facilmente dalle (48) § 13 (cf. paragrafo precedente).

Da queste, ponendovi per $\frac{\partial x_1}{\partial u}$, $\frac{\partial x_1}{\partial v}$ ecc. i loro valori (51), si vede in ciascuna comparire il prodotto di due determinanti di cui uno comune alle due formole è dato da:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \sqrt{E\,G - F^2} = \lambda\,\mu\,\sqrt{H};$$

così si traggono le altre:

$$\Sigma\, X_1 \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\lambda\,\mu\,\sqrt{H}}{\lambda_1\,\mu_1\,\sqrt{H_1}} \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0 \\ L, & M, & -\frac{p\,q}{k\sqrt{H}}\,\mu\,\lambda_1 \\ P, & Q, & -\frac{p\,q}{k\sqrt{H}}\,\lambda\,\mu_1 \end{vmatrix},$$

$$\Sigma\, X_1 \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\lambda\,\mu\,\sqrt{H}}{\lambda_1\,\mu_1\,\sqrt{H_1}} \begin{vmatrix} 0, & 1, & 0 \\ L, & M, & -\frac{p\,q}{k\sqrt{H}}\,\mu\,\lambda_1 \\ P, & Q, & -\frac{p\,q}{k\sqrt{H}}\,\lambda\,\mu_1 \end{vmatrix}$$

Le (62) diventano quindi, a causa delle identità (58):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\lambda}{\lambda_1}\,\overline{\Delta}_1 - \frac{\mu}{\mu_1}\,\overline{\Delta}'_1 &= -\frac{\sqrt{p\,q}}{\sqrt{H_1}}\,\lambda\,\mu_1 \\ \frac{\lambda}{\lambda_1}\,\overline{\Delta}'_1 - \frac{\mu}{\mu_1}\,\overline{\Delta}''_1 &= \frac{\sqrt{p\,q}}{\sqrt{H_1}}\,\mu\,\lambda_1, \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

che possiamo scrivere sotto l'altra forma:

$$\left.\begin{aligned} \left(\overline{\Delta}_1 + \frac{\sqrt{p\,q}}{\sqrt{H_1}}\,\lambda_1\,\mu_1\right)\frac{\lambda}{\lambda_1} - \overline{\Delta}'_1\,\frac{\mu}{\mu_1} = 0 \\ \overline{\Delta}'_1\,\frac{\lambda}{\lambda_1} - \left(\overline{\Delta}''_1 + \frac{\sqrt{p\,q}}{\sqrt{H_1}}\,\lambda_1\,\mu_1\right)\frac{\mu}{\mu_1} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{63*}$$

e da queste segue la formola

$$\left(\overline{\Delta}_1+\frac{\sqrt{p\,q}}{\sqrt{H_1}}\lambda_1\mu_1\right)\left(\overline{\Delta}''_1+\frac{\sqrt{p\,q}}{\sqrt{H_1}}\lambda_1\mu_1\right)-\overline{\Delta}'^2_1=0. \tag{64}$$

D'altronde l'elemento lineare $d\,s_1$ della S_1 essendo dato, come si è visto, da

$$d\,s_1^2=(\alpha_1^2+q)\,d\,\alpha_1^2-2\,\alpha_1\,\beta_1\,d\,\alpha_1\,d\,\beta_1+(\beta_1^2-p)\,d\,\beta_1^2,$$

indicando con K_1 la curvatura di S_1, avremo (cf. (M) § 1)

$$K_1=\frac{p\,q}{H_1^2},$$

e per ciò dalla formola di Gauss

$$\Delta_1\,\overline{\Delta}''_1-\Delta_1'^2=K_1\,(E_1\,G_1-F_1^2)=K_1\,H_1\,.\,\lambda_1^2\,\mu_1^2,$$

trarremo

$$\Delta_1\,\Delta''_1-\overline{\Delta}'^2_1=\frac{p\,q}{H_1}\cdot\lambda_1^2\,\mu_1^2\,.$$

Sottraendo quest'ultima dalla (64) deduciamo

$$\left(\Delta_1+\frac{\sqrt{p\,q}}{\sqrt{H_1}}\lambda_1\mu_1\right)+\left(\overline{\Delta}''_1+\frac{\sqrt{p\,q}}{\sqrt{H_1}}\lambda_1\mu_1\right)=0,$$

indi moltiplicando la prima delle 63*) per $\frac{\lambda_1}{\lambda}$, la seconda per $\frac{\mu_1}{\mu}$ e sottraendo, viene

$$\overline{\Delta}'_1\left(\frac{\lambda^2}{\lambda_1^2}+\frac{\mu^2}{\mu_1^2}\right)=0,$$

quindi $\overline{\Delta}'_1=0$. Dopo ciò le (63*) danno

$$\overline{\Delta}_1=\overline{\Delta}''_1=-\frac{\sqrt{p\,q}}{\sqrt{H_1}}\lambda_1\,\mu_1\,,$$

e le nostre verifiche sono così compiute.

§ 17.

Il teorema *A*) per le deformate del paraboloide ellittico.

Sarà bene ora che per questo primo caso delle deformate del paraboloide ellittico riepiloghiamo i risultati ottenuti, aggiungendovi alcune osservazioni complementari.

Supponiamo data una superficie S applicabile propriamente sul paraboloide ellittico e cerchiamo di determinare le ∞^2 congruenze W (di cui abbiamo ora stabilito l'esistenza), ciascuna delle quali ha per prima falda focale la S e per seconda falda una superficie S_1 applicabile (impropriamente) sul paraboloide stesso.

La prima questione che dobbiamo risolvere a tale oggetto è quella di determinare il sistema coniugato (u, v) comune alla S ed al paraboloide. Noi abbiamo perciò da integrare l'equazione differenziale del 1.° ordine e del 2.° grado in $\frac{du}{dv}$ che si ottiene eguagliando a zero il Jacobiano delle due seconde forme quadratiche della S e del paraboloide. Cominciamo dal dimostrare che bastano per ciò quadrature, che si ha cioè il teorema: *Nota una superficie S applicabile sul paraboloide ellittico, il sistema coniugato comune alla S ed al paraboloide si determina con quadrature* (*).

Siano

$$D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2, \quad D_1\,du^2 + 2\,D'_1\,du\,dv + D''_1\,dv^2,$$

le due seconde forme quadratiche del paraboloide e della sua deformata S, riferite ad un sistema curvilineo *qualunque* (u, v), e sia

$$E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2$$

la prima forma quadratica comune alle due superficie. Se poniamo

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} D\,du + D'\,dv, & D'\,du + D''\,dv \\ D_1\,du + D'_1\,dv, & D'_1\,du + D''_1\,dv \end{vmatrix},$$

(*) La dimostrazione che segue nel testo è perfettamente analoga a quella di Weingarten per la determinazione con quadrature delle linee di curvatura di una superficie W (cf. *Lezioni* § 131, Vol. I, pag. 284).

sarà Ω un *covariante irrazionale* simultaneo delle due forme, che eguagliato a zero darà l'equazione differenziale del sistema coniugato comune. Calcolando questo covariante Ω prendendo per variabili u, v quelle del sistema coniugato comune (u, v), abbiamo (cf. (**M**) §§ 3, 4):

$$D = \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{H}}\lambda^2, \quad D' = 0, \quad D'' = \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{H}}\mu^2$$

$$D_1 = \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{H}}\lambda\mu, \quad D'_1 = 0, \quad D''_1 = \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{H}}\lambda\mu$$

$$\sqrt{EG - F^2} = \lambda\mu\sqrt{H},$$

e quindi

$$\Omega = \frac{pq}{H\sqrt{H}}(\lambda^2 - \mu^2)\, du\, dv,$$

che, per l'identità: $\mu^2 - \lambda^2 = \frac{H}{pq}$, si scrive

$$\Omega = -\frac{du\, dv}{\sqrt{H}}.$$

Risulta di qui che: *il covariante Ω moltiplicato per $\sqrt{H} = \sqrt{p\beta^2 + q\alpha^2 + pq}$ è una forma differenziale indefinita a curvatura nulla.* Bastano dunque in effetto tre quadrature per integrare l'equazione differenziale $\Omega = 0$ (*Lezioni* § 37, Vol. I, pag. 78). La proposizione così dimostrata, che si ripete invariata per gli altri casi delle deformate dei paraboloidi, è da raffrontarsi coll'analoga che fa conoscere per quadrature le linee di curvatura di una superficie nota a curvatura costante.

Ciò premesso, noi conosceremo con sole quadrature i parametri u, v del sistema coniugato comune (u, v) alla S ed al paraboloide, e quindi anche le cinque funzioni ω, α, β, γ, μ di u, v che soddisfano alle equazioni del § 5. Supponiamo ora di più di sapere integrare l'equazione di Riccati da cui dipende la ricerca della soluzione generale θ delle due equazioni simultanee (27), § 8, per la trasformazione B_σ, e ricordiamo che θ dipende da due costanti arbitrarie, σ compresa.

Allora, colle formole (30) dello stesso § 8, calcoleremo la nuova quaderna α_1, β_1, λ_1, μ_1 e le formole (50), § 14:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x - \frac{1}{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\mu_1}{\mu}\frac{\partial x}{\partial v}\right) \\ y_1 &= y - \frac{1}{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\mu_1}{\mu}\frac{\partial y}{\partial v}\right), \quad \left(k = \sqrt{\frac{1}{q} + \operatorname{sen}^2\sigma} = \sqrt{\frac{1}{p} - \cos^2\sigma}\right) \\ z_1 &= z - \frac{1}{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\frac{d z}{d u} + \frac{\mu_1}{\mu}\frac{d z}{d v}\right) \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

ci faranno conoscere, *in termini finiti*, la deformata impropria S_1 del paraboloide, corrispondente secondo il § 5 alle funzioni: θ, α_1, β_1, λ_1, μ_1. Precisamente dalle (50) viene assegnata alla S_1 quella posizione nello spazio che rende S, S_1 le due falde focali della congruenza W, formata dalle congiungenti i loro punti corrispondenti.

Supponiamo ora invece data la deformata impropria S_1 e note quindi: θ, α_1, β_1, λ_1, μ_1. L'integrazione dell'equazione di Riccati per tg $\frac{1}{2}\omega$, equivalente al sistema simultaneo (27) § 8 per la funzione incognita ω, ci farà conoscere ω con due costanti arbitrarie, e dalle (30*) ibid. calcoleremo α, β, λ, μ. Dopo di ciò s'intende che le formole (59) del paragrafo precedente:

$$x = x_1 + \frac{1}{k}\left(\frac{\lambda}{\lambda_1}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\mu}{\mu_1}\frac{\partial x}{\partial v}\right) \text{ecc.,}$$

daranno in termini finiti la corrispondente trasformata S. Per dimostrare questo basterebbe invero ripetere calcoli simili a quelli eseguiti nei due paragrafi precedenti; soltanto bisognerebbe scambiare dappertutto S con S_1 e in particolare ricorrere alle formole (48), § 13, che dànno i valori dei simboli di Christoffel relativi alla S_1. Così abbiamo perfettamente stabilita la proposizione seguente:

Ogni deformata propria (impropria) del paraboloide generale ellittico appartiene, come prima falda focale, ad una doppia infinità di congruenze rettilinee W, la cui seconda falda è alla sua volta una deformata impropria (propria) del paraboloide stesso. Le operazioni analitiche necessarie per costruire, assegnata la prima falda focale, le ∞^2 congruenze di questa specie consistono in quadrature e nell'integrazione di un'equazione differenziale del 1.º ordine del tipo di Riccati.

Come si vede, è questo pel caso delle deformate del paraboloide ellittico il teorema fondamentale A) della prefazione precisato, nel senso che già indicammo, rispetto alla specie opposta delle due falde focali.

§ 18.

Le ∞^1 superficie trasformate per una B_σ.

I risultati e le formole che abbiamo trovato per le trasformazioni delle superficie applicabili sul paraboloide ellittico presentano evidentemente una perfetta analogia con quelli relativi alle trasformazioni di Bäcklund per le superficie pseudosferiche: e ciò tanto dal punto di vista geometrico, quanto da quello analitico delle operazioni d'integrazione necessarie per costruire le trasformate di una data superficie dell'una o dell'altra classe.

Vogliamo ora osservare un altro notevole ravvicinamento fra i due casi, che si ottiene proponendosi la questione seguente. Se di una superficie pseudosferica data S si considerano le ∞^1 trasformate di Bäcklund per mezzo di una B_σ a costante fissa σ, il luogo dei punti della S_1, corrispondenti ad un dato punto M della S, è un circolo (di raggio costante) tracciato nel piano tangente in M alla S e col centro in M.

Ora ci domandiamo: *Quale è il luogo corrispondente se prendiamo per S una deformata (propria od impropria) del paraboloide ellittico e consideriamo le ∞^1 superficie trasformate S_1 della S per mezzo di una B_σ a costante fissa σ?* Tale luogo è evidentemente, per ogni punto M di S, tracciato nel piano tangente in M alla S e noi dimostreremo che: *il luogo in discorso è una conica C a centro, di forma iperbolica od ellittica secondo che la deformata S del paraboloide è propria od impropria; la forma della conica C nel piano tangente in M alla S e la sua giacitura rispetto agli elementi di S dipendono solo dalla posizione del punto M sulla superficie e restano invariabili quando la superficie S si deforma seco trascinando i suoi piani tangenti.*

Per dimostrare questa proposizione supponiamo dapprima che la deformata S del paraboloide sia propria e ricorriamo alle formole (50) § 14, che danno le ∞^1 superficie trasformate S_1. Fissato il punto $M \equiv (x, y, z)$ di S che si considera, tutte le quantità che figurano nel secondo membro delle (50) saranno fisse tranne λ_1, μ_1 che, secondo le formole (30) § 8, contengono il parametro θ variabile con S_1. Già dal fatto che λ_1, μ_1, e per ciò x_1, y_1, z_1 dipendono linearmente da $\cosh\theta$, $\operatorname{senh}\theta$ risulta che il luogo descritto, nel piano tangente di S, dal punto (x_1, y_1, z_1) sarà un'iperbola. Per vedere meglio la forma e la giacitura di questa conica C sostituiamo in primo luogo nelle dette formole (50) alle derivate di x, y, z rapporto ad u, v quelle rapporto ad α, β secondo le formole che risultano dalle (II) § 5:

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\left(-\operatorname{sen}\omega\frac{\partial x}{\partial\alpha}+\cos\omega\frac{\partial x}{\partial\beta}\right)\cdot\lambda$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}=\left(\cos\omega\frac{\partial x}{\partial\alpha}+\operatorname{sen}\omega\frac{\partial x}{\partial\beta}\right)\mu,$$

ed avremo così:

$$x_1=x+\frac{1}{k}(\lambda_1\operatorname{sen}\omega-\mu_1\cos\omega)\frac{\partial x}{\partial\alpha}-\frac{1}{k}(\lambda_1\cos\omega+\mu_1\operatorname{sen}\omega)\frac{\partial x}{\partial\beta},\ \text{ecc.}$$

Riferiamo ora il nostro luogo C, nel piano tangente in M, ai due assi cartesiani obliqui dati dalle tangenti alle linee coordinate (α, β); se indichiamo con ξ, η queste coordinate di $M_1\equiv(x_1, y_1, z_1)$ riferite ai due detti assi, e ricordiamo che si ha

$$\Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha}\right)^2=\alpha^2+p,\quad \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial\beta}\right)^2=\beta^2+q,$$

ne dedurremo subito:

$$\xi=-\frac{\sqrt{\beta^2+q}}{k}(\lambda_1\cos\omega+\mu_1\operatorname{sen}\omega)$$

$$\eta=\frac{\sqrt{\alpha^2+p}}{k}(\lambda_1\operatorname{sen}\omega-\mu_1\cos\omega).$$

Sostituendo in queste per λ_1, μ_1 i valori tratti dalle (30) § 8, ne deduciamo:

$$\frac{k^2\xi}{\sqrt{\beta^2+q}}=-\frac{\beta}{q}+\operatorname{sen}\sigma\cosh\theta\,.\,\lambda-\operatorname{sen}\sigma\operatorname{senh}\theta\,.\,\mu$$

$$\frac{k^2\eta}{\sqrt{\alpha^2+p}}=-\frac{\alpha}{p}-\cos\sigma\operatorname{senh}\theta\,.\,\lambda+\cos\sigma\cosh\theta\,.\,\mu$$

ed eliminando θ col ricordare che si ha $\mu^2-\lambda^2=\frac{\alpha^2}{p}+\frac{\beta^2}{q}+1$, abbiamo l'equazione del luogo C:

$$\frac{1}{\cos^2\sigma}\left(\frac{k^2\eta}{\sqrt{\alpha^2+p}}+\frac{\alpha}{p}\right)^2-\frac{1}{\operatorname{sen}^2\sigma}\left(\frac{k^2\xi}{\sqrt{\beta^2+p}}+\frac{\beta}{q}\right)^2=\frac{\alpha^2}{p}+\frac{\beta^2}{q}+1.$$

La C è adunque un'iperbola la cui forma e giacitura nel piano tangente di S sono invariabili per le flessioni di S, come si era enunciato. Si osservi che le direzioni delle linee coordinate (α, β) risultano parallele a due diametri coniugati dell'iperbola. Notevoli sono poi i casi particolari in cui σ abbia i valori estremi $\sigma=0$ o $\sigma=\frac{\pi}{2}$, riducendosi allora il luogo rispettivamente alle rette

$$\xi=-\beta\sqrt{\beta^2+q}\,,\quad \eta=-\alpha\sqrt{\alpha^2+p}.$$

Similmente se consideriamo le ∞^1 trasformate S di una deformata impropria del paraboloide ellittico, ricorrendo alle formole inverse (59), § 16, troviamo che la conica C è allora l'ellisse rappresentata dalle formole:

$$\frac{k^2\xi}{\sqrt{\beta_1^2-p}}=-\frac{\beta_1}{p}+\cos\sigma\,(\operatorname{sen}\omega\,\lambda_1-\cos\omega\,\mu_1)$$

$$\frac{k^2\eta}{\sqrt{\alpha_1^2+q}}=-\frac{\alpha_1}{q}-\operatorname{sen}\sigma\,(\cos\omega\,\lambda_1+\operatorname{sen}\cos\mu_1),$$

ove ω è il parametro variabile. L'equazione di questa ellisse è quindi:

$$\frac{1}{\cos^2\sigma}\left(\frac{k^2\xi}{\sqrt{\beta_1^2-p}}+\frac{\beta_1}{p}\right)^2+\frac{1}{\operatorname{sen}^2\sigma}\left(\frac{k^2\eta}{\sqrt{\alpha_1^2+q}}+\frac{\alpha_1}{q}\right)^2=\frac{\beta_1^2}{p}-\frac{\alpha_1^2}{q}-1.$$

In fine poichè le coordinate di un punto mobile sulla conica C si esprimono nel primo caso razionalmente per $\operatorname{tgh}\frac{1}{2}\theta$, nel secondo per $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\omega$, e queste sono le incognite rispetto alle quali le equazioni di trasformazione (27), § 8, assumono la forma di Riccati, ne deduciamo: *Le coniche C, tracciate nei piani tangenti di una deformata S del paraboloide, sono incontrate da quattro delle superficie trasformate in gruppi di quattro punti il cui birapporto è costante.*

Non ritorneremo più sulle identiche circostanze che si ripetono nei casi seguenti per le deformate proprie od improprie del paraboloide iperbolico, e solo diremo che anche qui le coniche C sono iperbole per le deformate proprie, ellissi per quelle improprie.

§ 19.

Il caso singolare del paraboloide rotondo.

Dalle nostre ricerche sulle deformate del paraboloide ellittico noi abbiamo fin qui escluso il caso del paraboloide rotondo. Dimostreremo ora che questo è in effetto per la nostra teoria generale un caso d'eccezione, perchè le ∞^2 congruenze W della nostra specie, aventi per prima falda comune una deformata del paraboloide ellittico, si riducono allora ad una sola congruenza, quella delle tangenti alle deformate dei meridiani, e per ciò le ∞^2 trasformate della superficie primitiva vengono a coincidere nella sua complementare. Dal nostro punto attuale di vista (delle trasformazioni per congruenze W delle superficie applicabili sulle quadriche) si comporta dunque più semplicemente il generale paraboloide ellittico che non quello rotondo (*).

Per dimostrare quanto abbiamo asserito riprendiamo le formole del § 8 relative al paraboloide generale ellittico, ma non supponiamo più $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=1$, bensì, supposto sempre $p<q$, poniamo

$$\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=R^2$$

e modifichiamo in corrispondenza le formole. Facendo poi convergere R verso lo zero, otterremo il paraboloide rotondo come caso limite. Intanto la modificazione che si introduce per ciò nelle formole del § 5 è questa soltanto che a quelle equazioni (I), (II) si sostituiscono ora le altre.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}&=R^2\operatorname{sen}\omega\cos\omega\\ \frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}&=R^2\operatorname{senh}\theta\cosh\theta,\end{aligned}\right\}\qquad(\alpha)$$

(*) Come si sa (cf. la mia Nota nei *Rendiconti dei Lincei,* settembre 1899) anche nel caso del paraboloide rotondo si può costruire una teoria delle trasformazioni partendo dal legame che il teorema di Guichard stabilisce fra le deformate del paraboloide e le superficie d'area minima. Ma qui, essendo già note in termini finiti tutte le deformate (Darboux), la teoria è ben lungi dall'offrire l'interesse del caso generale dove si tratta di veri e proprii metodi d'integrazione.

restando immutate le rimanenti. Per la trasformazione B_σ del § 7 le formole (27) diventano

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \omega}{\partial u}-\frac{\partial \theta}{\partial v}&=R(\cos\sigma\cos\omega\operatorname{senh}\theta-\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\omega\cosh\theta)\\ \frac{\partial \omega}{\partial v}+\frac{\partial \theta}{\partial u}&=R(\operatorname{sen}\sigma\cos\omega\operatorname{senh}\theta+\cos\sigma\operatorname{sen}\omega\cosh\theta)\end{aligned}\right\}\qquad(\beta)$$

e le (30) si cangiano nelle altre

$$\left.\begin{aligned}k\,\alpha_1&=-R\operatorname{sen}\sigma\,.\,\beta-\cosh\theta\,.\,\lambda+\operatorname{senh}\theta\,.\,\mu\\ k\,\beta_1&=-R\cos\sigma\,.\,\alpha-\operatorname{senh}\theta\,.\,\lambda+\cosh\theta\,.\,\mu\\ k\,\lambda_1&=-\operatorname{sen}\omega\frac{\alpha}{p}+\cos\omega\frac{\beta}{q}-R\,D\,.\,\lambda+R\,B\,.\,\mu\\ k\,\mu_1&=\cos\omega\frac{\alpha}{p}+\operatorname{sen}\omega\frac{\beta}{q}+R\,A\,.\,\lambda-R\,C\,.\,\mu\end{aligned}\right\}\qquad(\gamma)$$

$$\left(k=\sqrt{\frac{1}{q}+R^2\operatorname{sen}^2\sigma}=\sqrt{\frac{1}{p}-R^2\cos^2\sigma}\right).$$

Passando al limite per $R=0$, le funzioni ω, θ diventano, secondo le (β), due soluzioni coniugate dell'equazione $\Delta^2\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}=0$, cui si riducono le (α), e le (γ), ponendo per semplicità $p=q=1$, danno le formole

$$\alpha_1=-\cosh\theta\,.\,\lambda+\operatorname{senh}\theta\,.\,\mu\,,\quad \beta_1=-\operatorname{senh}\theta\,.\,\lambda+\cosh\theta\,.\,\mu$$
$$\lambda_1=-\operatorname{sen}\omega\,.\,\alpha+\cos\omega\,.\,\beta\,,\quad \mu_1=\cos\omega\,.\,\alpha+\operatorname{sen}\omega\,.\,\beta.$$

Ora le linee inviluppate sulle deformate S del paraboloide rotondo dai raggi di una delle nostre congruenze hanno, per le (50) § 14, l'equazione differenziale

$$d\,u:d\,v=\frac{\lambda_1}{\lambda}:\frac{\mu_1}{\mu}\,,$$

ovvero, per le formole superiori:

$$\lambda(\cos\omega\,.\,\alpha+\operatorname{sen}\omega\,.\,\beta)\,d\,u+\mu(\operatorname{sen}\omega\,.\,\alpha-\cos\omega\,.\,\beta)\,d\,v=0.$$

A causa delle (II) § 5, questa si scrive in coordinate α, β:

$$\alpha\,d\beta-\beta\,d\alpha=0\,;$$

le linee integrali sono dunque precisamente le $\frac{\beta}{\alpha}=\text{cost.}$, cioè le deformate dei meridiani, c. d. d.

§ 20.

Trasformazioni delle deformate di 1.ª specie del paraboloide iperbolico.

Passiamo ora a considerare le deformate del paraboloide iperbolico, cominciando da quelle (proprie) di 1.ª specie. Secondo il § 9, supponiamo di conoscere, mediante le loro equazioni intrinseche, due tali deformate S, S_1, corrispondenti ai due sistemi di funzioni:

$$(\theta, \sigma, \beta, \lambda, \mu), \quad \theta_1, \alpha_1, \beta_1, \lambda_1, \mu_1),$$

legate fra loro dalle formole della trasformazione B_σ al § 9. Si tratta anche qui di dimostrare che si possono rendere S, S_1 falde focali di una congruenza W, generata dalle congiungenti i loro punti corrispondenti. Per ciò applicando al solito il metodo descritto al § 12, partiremo dall'ipotesi che le formole di passaggio dalla S alla S_1 siano le (44) § 12:

$$x_1 = x + a\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\mu_1}{\mu}\frac{\partial x}{\partial v}\right) \text{ ecc.},$$

e cercheremo di determinare la costante a in modo conveniente. Prima di tutto occorre calcolare i valori dei simboli di Christoffel per il $d s^2$ della S, e questi si trovano dati, con calcoli analoghi a quelli eseguiti nel § 13, dalle formole seguenti:

$$\left.\begin{aligned}
&\begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial u} + \frac{q\,\alpha \cosh\theta + p\,\beta \operatorname{senh}\theta}{H}\lambda, \\
&\qquad\qquad \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{\partial \theta}{\partial u}\frac{\lambda}{\mu} - \frac{q\,\alpha \operatorname{senh}\theta + p\,\beta \cosh\theta}{H}\frac{\lambda^2}{\mu}, \\
&\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial u}\frac{\mu}{\lambda}, \quad \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial u} = \frac{\partial \theta}{\partial v}\frac{\lambda}{\mu}, \\
&\begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{\partial \theta}{\partial v}\frac{\mu}{\lambda} - \frac{q\,\alpha \cosh\theta + p\,\beta \operatorname{senh}\theta}{H}\frac{\mu^2}{\lambda}, \\
&\qquad\qquad \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial v} + \frac{q\,\alpha \operatorname{senh}\theta + p\,\beta \cosh\theta}{H}\mu.
\end{aligned}\right\} \quad (65)$$

Derivando allora x_1, y_1, z_1, per le formole corrispondenti alle (45) § 12 risulta :

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial x_1}{\partial u}&=L\frac{\partial x}{\partial u}+M\frac{\partial x}{\partial v}+a\frac{\sqrt{p\,q}}{\sqrt{H}}\mu\,\lambda_1\,.\,X\\ \frac{\partial x_1}{\partial v}&=P\frac{\partial x}{\partial u}+Q\frac{\partial x}{\partial v}-a\frac{\sqrt{p\,q}}{\sqrt{H}}\lambda\,\mu_1\,.\,X,\end{aligned}\right\}\qquad(65^*)$$

dove i coefficienti L, M, P, Q hanno i valori :

$$L=\frac{a}{\lambda}\left[C\mu_1-\cosh\theta_1\,.\,\frac{\alpha_1}{p}-\operatorname{senh}\theta_1\,.\,\frac{\beta_1}{q}+\frac{\lambda}{a}\right]+a\,\frac{q\,\alpha\cosh\theta+p\,\beta\operatorname{senh}\theta}{H}\lambda_1$$

$$M=\frac{a\,\lambda_1}{\mu}\left[C-\frac{q\,\alpha\operatorname{senh}\theta+p\,\beta\cosh\theta}{H}\lambda\right]$$

$$P=-\frac{a\,\mu_1}{\lambda}\left[B+\frac{q\,\alpha\cosh\theta+p\,\beta\operatorname{senh}\theta}{H}\mu\right]$$

$$Q=\frac{a}{\mu}\left[-B\,\lambda_1+\operatorname{senh}\theta_1\,.\,\frac{\alpha_1}{p}+\cosh\theta_1\,.\,\frac{\beta_1}{q}+\frac{\mu}{a}\right]+$$
$$+\,a\,\frac{q\,\alpha\operatorname{senh}\theta+p\,\beta\cosh\theta}{H}\mu_1\,.$$

Anche qui il valore conveniente da darsi alla costante a è quello che, in base alle (35*) § 9, rende L divisibile per λ_1 e Q per μ_1; questo è il valore $a=\frac{1}{k}$.

Le formole definitive pel passaggio dalla S alla S_1 si scrivono così:

$$x_1=x+\frac{1}{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\mu_1}{\mu}\frac{\partial x}{\partial v}\right)\text{ ecc.},\qquad(66)$$

e i valori di L, M, P, Q sono i seguenti :

$$\left.\begin{aligned}L&=\frac{\lambda_1}{k\,\lambda}\left[-A+\frac{q\,\alpha\cosh\theta+p\,\beta\operatorname{senh}\theta}{H}\lambda\right],\\ M&=\frac{\lambda_1}{k\,\mu}\left[C-\frac{q\,\alpha\operatorname{senh}\theta+p\,\beta\cosh\theta}{H}\lambda\right],\\ P&=-\frac{\mu_1}{k\,\lambda}\left[B+\frac{q\,\alpha\cosh\theta+p\,\beta\operatorname{senh}\theta}{H}\mu\right],\\ Q&=\frac{\mu_1}{k\,\mu}\left[D+\frac{q\,\alpha\operatorname{senh}\theta+p\,\beta\cosh\theta}{H}\mu\right].\end{aligned}\right\}\qquad(67)$$

Ora andiamo rapidamente a verificare che la superficie S_1 data dalle (66) ha precisamente le equazioni intrinseche (22), (23) § 6, ove θ, α, β, λ, μ siano rispettivamente sostituite da θ_1, α_1, β_1, λ_1, μ_1, cioè le seguenti:

$$\left.\begin{aligned}
E_1 &= [(\alpha_1^2 + p)\cosh^2\theta_1 - 2\,\alpha_1\beta_1 \operatorname{senh}\theta_1\cosh\theta_1 + (\beta_1^2 + q)\operatorname{senh}^2\theta_1]\,.\,\lambda_1^2\\
F_1 &= [(\alpha_1^2 + p)\operatorname{senh}\theta_1\cosh\theta_1 - \alpha_1\beta_1(\cosh^2\theta_1 + \operatorname{senh}^2\theta_1) +\\
&\qquad + (\beta_1^2 + q)\operatorname{senh}\theta_1\cosh\theta_1]\,.\,\lambda_1\mu_1\\
G_1 &= [(\alpha_1^2 + p)\operatorname{senh}^2\theta_1 - 2\,\alpha_1\beta_1\operatorname{senh}\theta_1\cosh\theta_1 + (\beta_1^2 + q)\cosh^2\theta_1]\,.\,\mu_1^2
\end{aligned}\right\} \tag{68}$$

$$\Delta_1 = \pm\frac{\sqrt{p\,q}}{\sqrt{H_1}}\cdot\lambda_1, \qquad \Delta'_1 = 0, \qquad \Delta''_1 = \mp\frac{\sqrt{p\,q}}{\sqrt{H_1}}\cdot\lambda_1\mu_1. \tag{69}$$

Dopo ciò sarà dimostrato il teorema *A*) anche per le deformate di 1.ª specie del paraboloide iperbolico e le formole (66) serviranno per passare da una tale deformata S nota alle sue ∞^2 trasformate S_1.

§ 21.

Verifiche relative alla superficie S_1.

Con notazioni perfettamente analoghe a quelle usate nel § 15, troveremo dapprima:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{k^2\,\overline{E}_1}{\lambda_1^2} &= \frac{E}{\lambda^2}L'^2 + \frac{2\,F}{\lambda\,\mu}\,.\,L'\,M' + \frac{G}{\mu^2}M'^2 + \frac{p\,q}{H}\mu^2\\
\frac{k^2\,\overline{F}_1}{\lambda_1\,\mu_1} &= \frac{E}{\lambda^2}L'\,P' + \frac{F}{\lambda\,\mu}(L'\,Q' + M'\,P') + \frac{G}{\mu^2}M'\,Q' - \frac{p\,q}{H}\lambda\,\mu\\
\frac{k^2\,\overline{G}_1}{\mu_1^2} &= \frac{E}{\lambda^2}P'^2 + \frac{2\,F}{\lambda\,\mu}P'\,Q' + \frac{G}{\mu^2}Q'^2 + \frac{p\,q}{H}\lambda^2,
\end{aligned}\right\} \tag{70}$$

dove, in corrispondenza alle (67), i coefficienti L', M', P', Q' hanno i valori:

$$\left.\begin{aligned}
L' &= -A + \frac{q\alpha\cosh\theta + p\beta\,\mathrm{senh}\,\theta}{H}\lambda, \\
M' &= C - \frac{q\alpha\,\mathrm{senh}\,\theta + p\beta\cosh\theta}{H}\lambda, \\
P' &= -B - \frac{q\alpha\cosh\theta + p\beta\,\mathrm{senh}\,\theta}{H}\mu, \\
Q' &= D + \frac{q\alpha\,\mathrm{senh}\,\theta + p\beta\cosh\theta}{H}\mu.
\end{aligned}\right\} \qquad (71)$$

Sostituendo nelle (70) per E, F, G i valori dati dalle (22) § 6, indi raccogliendo i termini contenenti rispettivamente

$$\alpha^2 + p,\quad \alpha\beta,\quad \beta^2 + q,$$

si trovano formole analoghe alle (54) § 15, ove figurano i quattro binomii:

$$\cosh\theta\, L' + \mathrm{senh}\,\theta\, M' = \frac{q\alpha\lambda}{H} - \mathrm{senh}\,\sigma\cosh\theta_1,$$

$$\mathrm{senh}\,\theta\, L' + \cosh\theta\, M' = -\frac{p\beta\lambda}{H} + \cosh\sigma\,\mathrm{senh}\,\theta_1,$$

$$\cosh\theta\, P' + \mathrm{senh}\,\theta\, Q' = -\frac{q\alpha\mu}{H} - \mathrm{senh}\,\sigma\,\mathrm{senh}\,\theta_1,$$

$$\mathrm{senh}\,\theta\, P' + \cosh\theta\, Q' = \frac{p\beta\mu}{H} + \cosh\sigma\cosh\theta_1,$$

le eguaglianze scritte deducendosi dalle (71). Dopo ciò, tenendo conto della identità:

$$\mu^2 - \lambda^2 = \frac{H}{pq} = \frac{\alpha^2}{p} + \frac{\beta^2}{q} + 1,$$

in modo affatto simile a quello tenuto nel § 15, si dimostrano le identità

$$\overline{E}_1 = E_1,\quad \overline{F}_1 = F_1,\quad \overline{G}_1 = G_1,$$

compiendo così le verifiche per quanto riguarda la prima forma fondamentale della S_1.

Procedendo ora alle verifiche rimanenti, osserviamo che dai valori (67) di L, M, P, Q seguono le identità:

$$\frac{\lambda}{\lambda_1} L + \frac{\mu}{\mu_1} P = \frac{\lambda_1}{\lambda}$$

$$\frac{\lambda}{\lambda_1} M + \frac{\mu}{\mu_1} Q = \frac{\mu}{\mu_1}$$

e quindi dalle (65*) le altre

$$\frac{\lambda}{\lambda_1}\frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{\mu}{\mu_1}\frac{\partial x_1}{\partial v} = \frac{\lambda_1}{\lambda}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\mu_1}{\mu}\frac{\partial x}{\partial v} \text{ ecc.}$$

Ne segue che le (66) possono scriversi sotto la forma equivalente:

$$x = x_1 - \frac{1}{k}\left(\frac{\lambda}{\lambda_1}\frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{\mu}{\mu_1}\frac{\partial x_1}{\partial v}\right) \text{ ecc.,}$$

e queste dimostrano (cf. § 16) che S, S_1 sono le due falde focali della congruenza generata dalle congiungenti i loro punti corrispondenti. Ed ora, come al § 16, si traggono di qui per i coefficienti Δ_1, Δ_1, Δ'_1 della seconda forma fondamentale di S_1 le equazioni:

$$\left.\begin{aligned} \left(\bar{\Delta}_1 - \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{H_1}}\lambda_1\mu_1\right)\frac{\lambda}{\lambda_1} + \bar{\Delta}'_1\frac{\mu_1}{\mu} &= 0 \\ \bar{\Delta}'_1\frac{\lambda}{\lambda_1} + \left(\bar{\Delta}''_1 + \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{H_1}}\lambda_1\mu_1\right)\frac{\mu_1}{\mu} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

e quindi la relazione

$$\left(\bar{\Delta}_1 - \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{H_1}}\lambda_1\mu_1\right)\left(\bar{\Delta}''_1 + \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{H_1}}\lambda_1\mu_1\right) - \bar{\Delta}'^2_1 = 0.$$

D'altra parte, per la formola relativa alla curvatura K_1 (cf. § 16), si ha

$$\bar{\Delta}_1\bar{\Delta}''_1 - \bar{\Delta}'^2_1 = -\frac{pq}{H_1}\lambda_1^2\mu_1^2,$$

che sottratta dalla precedente dà:

$$\bar{\Delta}_1 - \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{H_1}}\lambda_1\mu_1 = \bar{\Delta}''_1 + \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{H_1}}\lambda_1\mu_1.$$

Dalle (72) si trae ora

$$\overline{\Delta}_1\left(\frac{\lambda^2}{\lambda_1^2}-\frac{\mu^2}{\mu_1^2}\right)=0,$$

e poichè, colle formole al § 9, facilmente si esclude che possa aversi $\frac{\lambda^2}{\lambda_1^2}=\frac{\mu^2}{\mu_1^2}$ ne segue $\overline{\Delta}'_1=0$, indi dalle (72):

$$\overline{\Delta}_1=\frac{\sqrt{p\,q}}{\sqrt{H_1}}\lambda_1\mu_1,\quad \overline{\Delta}'_1=-\frac{\sqrt{p\,q}}{\sqrt{H_1}}\lambda_1\mu_1,$$

conformemente alle (23) § 6, ossia alle (69) § 20; così è completata la nostra verifica.

§ 22.

Trasformazioni delle deformate di 2.ª specie del paraboloide iperbolico.

Siano S, S_1 due deformate di 2.ª specie del paraboloide iperbolico, definite dalle loro equazioni intrinseche, e corrispondenti rispettivamente, secondo il § 6, ai due sistemi di funzioni $(\theta, \alpha, \beta, \lambda, \mu)$, $(\theta_1, \alpha_1, \beta_1, \lambda_1, \mu_1)$ legate fra loro dalle formole della trasformazione B_σ al § 10. Vogliamo dimostrare anche per questo caso la proposizione generale enunciata al § 12. Ma qui, volendo condurre i calcoli nel modo stesso come ai §§ 14, 16, conviene riferirsi, anzichè ai parametri reali u, v delle linee assintotiche, alle variabili coniugate

$$u_1=u+i\,v,\quad v_1=u-i\,v.$$

In queste variabili le equazioni differenziali fondamentali ($VIII$) § 6 diventano:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial u_1}=\frac{1}{2}(\cosh\theta-i\,\mathrm{senh}\,\theta)(\lambda+i\,\mu),\quad \frac{\partial\beta}{\partial u_1}=-\frac{i}{2}(\cosh\theta+i\,\mathrm{senh}\,\theta)(\lambda+i\,\mu)$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial v_1}=\frac{1}{2}(\cosh\theta+i\,\mathrm{senh}\,\theta)(\lambda-i\,\mu),\quad \frac{\partial\beta}{\partial v_1}=\frac{i}{2}(\cosh\theta-i\,\mathrm{senh}\,\theta)(\lambda-i\,\mu)$$

$$\frac{\partial(\lambda+i\mu)}{\partial u_1}=-(\cosh\theta-i\,\mathrm{senh}\,\theta)\frac{\alpha}{p}+i(\cosh\theta+i\,\mathrm{senh}\,\theta)\frac{\beta}{q}+$$

$$+i\frac{\partial\theta}{\partial v_1}(\lambda-i\mu),\quad \frac{\partial(\lambda-i\mu)}{\partial u_1}=-i\frac{\partial\theta}{\partial v_1}(\lambda+i\mu)$$

$$\frac{\partial(\lambda+i\mu)}{\partial v_1}=i\frac{\partial\theta}{\partial u_1}(\lambda-i\mu),\quad \frac{\partial(\lambda-i\mu)}{\partial v_1}=-(\cosh\theta+i\,\mathrm{senh}\,\theta)\frac{\alpha}{p}-$$

$$-i(\cosh\theta-i\,\mathrm{senh}\,\theta)\frac{\beta}{q}-i\frac{\partial\theta}{\partial u_1}(\lambda+i\mu)$$

e pei valori dei simboli di CHRISTOFFEL troviamo:

$$\begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix}=\frac{1}{\lambda+i\mu}\frac{\partial(\lambda+i\mu)}{\partial u_1}+$$

$$+\frac{q\alpha(\cosh\theta-i\,\mathrm{senh}\,\theta)-ip\beta(\cosh\theta+i\,\mathrm{senh}\,\theta)}{2H}(\lambda+i\mu)$$

$$\begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix}=-i\frac{\partial\theta}{\partial u_1}\frac{\lambda+i\mu}{\lambda-i\mu}+$$

$$+\frac{q\alpha(\cosh\theta+i\,\mathrm{senh}\,\theta)+ip\beta(\cosh\theta-i\,\mathrm{senh}\,\theta)}{2H}\cdot\frac{(\lambda+i\mu)^2}{\lambda-i\mu}$$

$$\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}=\frac{1}{\lambda+i\mu}\frac{\partial(\lambda+i\mu)}{\partial v_1}=i\frac{\partial\theta}{\partial u_1}\frac{\lambda-i\mu}{\lambda+i\mu}$$

$$\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}=\frac{1}{\lambda-i\mu}\frac{\partial(\lambda-i\mu)}{\partial u_1}=-i\frac{\partial\theta}{\partial v_1}\frac{\lambda+i\mu}{\lambda-i\mu}$$

$$\begin{Bmatrix}2\,2\\1\end{Bmatrix}=i\frac{\partial\theta}{\partial v_1}\frac{\lambda-i\mu}{\lambda+i\mu}+$$

$$+\frac{q\alpha(\cosh\theta-i\,\mathrm{senh}\,\theta)-ip\beta(\cosh\theta+i\,\mathrm{senh}\,\theta)}{2H}\frac{(\lambda-i\mu)^2}{\lambda+i\mu}$$

$$\begin{Bmatrix}2\,2\\2\end{Bmatrix}=\frac{1}{\lambda-i\mu}\frac{\partial(\lambda-i\mu)}{\partial v_1}+$$

$$+\frac{q\alpha(\cosh\theta+i\,\mathrm{senh}\,\theta)+ip\beta(\cosh\theta-i\,\mathrm{senh}\,\theta)}{2H}\cdot(\lambda-i\mu).$$

Facendo uso di queste formole, i calcoli procedono nel modo stesso come agli indicati paragrafi, e si trova che le formole pel passaggio dalla S alla S_1

debbono assumere qui la forma

$$x_1 = x + a\left(\frac{\lambda_1 + i\mu_1}{\lambda + i\mu}\frac{\partial x}{\partial u_1} - \frac{\lambda_1 - i\mu_1}{\lambda - i\mu}\frac{\partial x}{\partial v_1}\right), \tag{73}$$

dove a è una costante pel cui valore trovasi $a = \frac{i}{k}$. Le verifiche si fanno allora affatto analogamente come ai §§ 15, 16 e la proposizione è così dimostrata. Ed ora se ripristiniamo nelle (73) i parametri reali assintotici u, v, abbiamo le formole di passaggio dalla data deformata S di 2.ª specie del paraboloide iperbolico alle sue ∞^2 trasformate S_1 sotto la forma definitiva reale:

$$x_1 = x + \frac{\mu\lambda_1 - \lambda\mu_1}{k(\lambda^2+\mu^2)}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\lambda\lambda_1 + \mu\mu_1}{k(\lambda^2+\mu^2)}\frac{\partial x}{\partial v}, \text{ ecc.} \tag{74}$$

Così per le deformate proprie, tanto di 1.ª quanto di 2.ª specie, del paraboloide iperbolico abbiamo dimostrato il teorema A). Per completare le ricerche converrebbe esaminare se anche nel caso delle deformate rigate (di 3.ª specie) sussistono le medesime proprietà, come appare probabile da quello che accade nel caso analogo delle deformate rigate dell'iperboloide rotondo (*). Noi però qui tralasciamo tale ricerca secondaria pel nostro scopo.

§ 23.

Trasformazioni delle deformate improprie del paraboloide iperbolico.

Per le deformate del paraboloide iperbolico non ci resta più da considerare che l'ultimo caso delle deformate improprie. Siano S, S_1 due tali deformate, definite intrinsecamente dalle formole (25), (26) al § 7 e corrispondenti rispettivamente ai due sistemi di funzioni $(\theta, \alpha, \beta, \lambda, \mu)$, $(\theta_1, \alpha_1, \beta_1, \lambda_1, \mu_1)$ legate fra loro dalle formole della trasformazione B_σ di Bäcklund al § 11.

Calcolando in primo luogo i valori dei simboli di Christoffel per il ds^2

(*) Vedi i §§ 22, 24 della mia Memoria citata nel Tom. XIV *degli Atti della Società dei XL.*

della prima superficie S, troviamo (cf. § 13):

$$\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial u} + \frac{p\beta\cos\theta + q\alpha\,\mathrm{sen}\,\theta}{H}\cdot\lambda,$$

$$\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} = -\frac{\partial \theta}{\partial u}\frac{\lambda}{\mu} + \frac{p\beta\,\mathrm{sen}\,\theta - q\alpha\cos\theta}{H}\cdot\frac{\lambda^2}{\mu},$$

$$\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial u}\frac{\mu}{\lambda}, \quad \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial u} = -\frac{\partial \theta}{\partial v}\frac{\lambda}{\mu},$$

$$\left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \frac{\partial \theta}{\partial v}\frac{\mu}{\lambda} + \frac{p\beta\cos\theta + q\alpha\,\mathrm{sen}\,\theta}{H}\cdot\frac{\mu^2}{\lambda},$$

$$\left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial v} + \frac{p\beta\,\mathrm{sen}\,\theta - q\alpha\cos\theta}{H}\cdot\mu.$$

Anche qui il passaggio dalla S alla S_1 si effettua, in termini finiti, con formole come le (44) al § 12, ed il valore conveniente per la costante a è dato da

$$a = \frac{\cos\sigma}{k},$$

sicchè le formole definitive si scrivono:

$$x_1 = x + \frac{\cos\sigma}{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\mu_1}{\mu}\frac{\partial x}{\partial v}\right), \text{ ecc.} \tag{75}$$

Per compiere su queste le dovute verifiche, si cominci dall'osservare che le (45) § 12 diventano qui:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial u} &= L\frac{\partial x}{\partial u} + M\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\sqrt{pq}\cos\sigma}{k\sqrt{H}}\mu\lambda_1 . X \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} &= P\frac{\partial x}{\partial u} + Q\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\sqrt{pq}\cos\sigma}{k\sqrt{H}}\lambda\mu_1 . X, \end{aligned}\right\} \tag{76}$$

coi valori seguenti per L, M, P, Q:

$$L = \frac{\lambda_1}{k\lambda}\left[A + \cos\sigma\frac{p\beta\cos\theta + q\alpha\,\mathrm{sen}\,\theta}{H}\lambda\right],$$

$$M = \frac{\lambda_1}{k\mu}\left[C + \cos\sigma\frac{p\beta\,\mathrm{sen}\,\theta - q\alpha\cos\theta}{H}\lambda\right],$$

$$P = \frac{\mu_1}{k\lambda}\left[B + \cos\sigma\frac{p\beta\cos\theta + q\alpha\operatorname{sen}\theta}{H}\mu\right],$$

$$Q = \frac{\mu_1}{k\lambda}\left[D + \cos\sigma\frac{p\beta\operatorname{sen}\theta - q\alpha\cos\theta}{H}\mu\right].$$

Dopo ciò, con un calcolo come al § 15, si constata che la superficie S_1 definita dalle (75) ha la prima forma fondamentale data dalle (25) § 7, ove si pongano θ_1, α_1, β_1, λ_1, μ_1 al posto di θ, α, β, λ, μ. Poi dalle identità

$$\frac{\lambda}{\lambda_1}L + \frac{\mu}{\mu_1}P = \frac{\lambda_1}{\lambda}$$

$$\frac{\lambda}{\lambda_1}M + \frac{\mu}{\mu_1}Q = \frac{\mu_1}{\mu}$$

si vede che le (75) possono scriversi anche

$$x - x_1 - \frac{\cos\sigma}{k}\left(\frac{\lambda}{\lambda_1}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\mu}{\mu_1}\frac{\partial x}{\partial v}\right), \text{ ecc.,} \tag{75*}$$

e ne risulta al solito che S, S_1 sono le due falde focali della congruenza formata dalle congiungenti i loro punti corrispondenti. In fine, con un procedimento come al § 16, si verifica che anche i coefficienti della seconda forma fondamentale di S_1 hanno i valori prescritti

$$\bar{\Delta}_1 = \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{H_1}}\lambda_1\mu_1, \quad \bar{\Delta}'_1 = 0, \quad \bar{\Delta}''_1 = -\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{H_1}}\lambda_1\mu_1.$$

Così anche per quest'ultimo caso delle deformate improprie del paraboloide iperbolico sussiste il teorema A) della prefazione.

§ 24.

Le superficie coniugate in deformazione delle precedenti.

Prima di chiudere le nostre ricerche sul teorema A) vogliamo trattare ancora di una classe di superficie reali applicabili sopra quadriche (immaginarie) *a centro* che spontaneamente si collegano alle deformate improprie del paraboloide iperbolico come loro *coniugate in deformazione* (*). Sono queste le speciali quadriche, tangenti al circolo immaginario all' infinito, che già si presentarono nei miei studî sulla deformazione delle congruenze rettilinee al modo di RIBAUCOUR (**), come collegate alle superficie pseudosferiche.

Noi lasciamo così per un momento il soggetto speciale della deformazione dei paraboloidi; ma le notevoli relazioni che troviamo fra le deformate delle due specie di quadriche meritano tanto più una breve digressione che esse indicano come probabile l'esistenza di relazioni analoghe pei casi superiori.

Per compiere la ricerca che abbiamo in vista, riprendiamo a considerare il sistema differenziale (X), § 7, da cui dipendono le deformate improprie del paraboloide iperbolico corrispondenti ad una data superficie pseudosferica Σ, definita da una soluzione θ dell'equazione (IX) ibid. Noi riconosciamo facilmente che, sotto altra forma, questo sistema coincide con quello delle equazioni (6), (6*) al § 310 delle *Lezioni* (Vol. II, pag. 244), ove si faccia

$$\Phi = \beta, \quad W = -\alpha, \quad \gamma = \frac{1}{p}, \quad 1 - \gamma = \frac{1}{q} \cdot$$

Risulta di qui e dai teoremi al Cap. XX delle *Lezioni* che la superficie $\overline{S}$ inviluppo dei piani normali alle linee $\beta =$ cost. della superficie Σ ha un elemento lineare fisso, esprimibile pei parametri σ, β, che appartiene ad una quadrica a centro (immaginaria) tangente all'assoluto, quadrica che indicheremo con Q. Ogni deformata impropria S del paraboloide iperbolico determina così univocamente una deformata $\overline{S}$ di questa quadrica Q. Fra i punti di S, $\overline{S}$ è stabilita una corrispondenza (corrispondendosi i punti di eguali coordinate curvilinee u, v); e siccome questa corrispondenza conserva i sistemi coniugati, ovvero le assintotiche, ne deduciamo che ad ogni sistema di assintotiche *virtuali* di S corrisponde sopra $\overline{S}$ un sistema della stessa natura, onde ad ogni flessione della S ne corrisponde una della $\overline{S}$ come sua coniugata in deformazione (n. c.). Segue di qui che alle geodetiche di S corrispondono le geodetiche di $\overline{S}$.

(*) Pel significato di questa denominazione vedi la mia Nota dell'aprile 1902 nei Rendiconti dei Lincei: *Sopra un problema relativo alla teoria della deformazione delle superficie.*

(**) Vedi la Memoria nel Tom. VI di questi *Annali* (1901) e le *Lezioni* § 307.

Diamo ora una conferma diretta di questi risultati. Se indichiamo con $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ le coordinate del punto di contatto della superficie $\bar{S}$ col piano normale nel punto (x, y, z) alla linea $\beta = \text{cost.}$ sulla superficie pseudosferica Σ, dalle formole (6) § 2, e dal sistema differenziale (X) § 7 facilmente ricaviamo le formole seguenti:

$$\bar{x} = x - \frac{q\lambda}{\beta} X_1 - \frac{q\mu}{\beta} X_2 + \frac{q\alpha}{p\beta} X_3 \quad \text{ecc.,} \tag{77}$$

che derivate danno

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} &= \frac{\lambda}{\beta^2}\left\{q\cos\theta(\lambda X_1 + \mu X_2) + \left(\beta\operatorname{sen}\theta - \frac{q\alpha}{p}\cos\theta\right) X_3\right\}, \\ \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} &= \frac{\mu}{\beta^2}\left\{q\operatorname{sen}\theta(\lambda X_1 + \mu X_2) - \left(\beta\cos\theta + \frac{q\alpha}{p}\operatorname{sen}\theta\right) X_3\right\}, \quad \text{ecc.} \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

Di qui si calcola subito, in coordinate u, v, il quadrato $d\bar{s}^2$ dell'elemento lineare di $\bar{S}$, che, espresso per mezzo delle (X) § 7 in coordinate α, β, diventa:

$$\overline{ds}^2 = \frac{p\beta^2 d\alpha^2 + 2q\alpha\beta\, d\alpha\, d\beta + q(p\beta^2 - \alpha^2 - pq)\, d\beta^2}{p\beta^4}. \tag{79}$$

Se poniamo

$$x + iy = -\frac{1}{\beta}, \quad x - iy = q\frac{\beta^2 + \alpha^2 + q}{\beta}, \quad z = \frac{\alpha}{\beta},$$

il luogo del punto (x, y, z) è una quadrica Q, a centro, di equazione

$$(x - iy)(x + iy) + q^2(x + iy)^2 + qz^2 + q = 0$$

e coll'elemento lineare

$$ds^2 = (dx + i\,dy)(dx - i\,dy) + dz^2$$

dato appunto dalla (79). Paragoniamo ora il $\overline{ds}^2$ di Q coll'altro

$$ds^2 = (\alpha^2 + p)\, d\alpha^2 + 2\alpha\beta\, d\alpha\, d\beta + (\beta^2 - q)\, d\beta^2 \tag{79*}$$

delle deformate improprie del paraboloide iperbolico ed indicando per ciò con $\left\{ {ik \atop l} \right\}$ i simboli di Christoffel pel ds^2 e con $\overline{\left\{ {ik \atop l} \right\}}$ quelli pel $\overline{ds}$, troveremo:

$$\left\{ \begin{matrix} 1\,1 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 2\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} = -\frac{q\,\alpha}{H}, \quad \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} = 0$$

$$\left\{ \begin{matrix} 1\,1 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 2\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \frac{p\,\beta}{H}, \quad \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 0$$

$$(H = p\,\beta^2 - q\,\alpha^2 - p\,q)$$

$$\left\{ \begin{matrix} \overline{1\,1} \\ 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \overline{2\,2} \\ 1 \end{matrix} \right\} = -\frac{q\,\alpha}{H}, \quad \left\{ \begin{matrix} \overline{1\,2} \\ 1 \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{\beta}$$

$$\left\{ \begin{matrix} \overline{1\,1} \\ 2 \end{matrix} \right\} = \frac{p\,\beta}{H}, \quad \left\{ \begin{matrix} \overline{1\,2} \\ 2 \end{matrix} \right\} = 0, \quad \left\{ \begin{matrix} \overline{2\,2} \\ 2 \end{matrix} \right\} = \frac{p\,\beta}{H} - \frac{2}{\beta}.$$

Sono dunque soddisfatte le quattro condizioni

$$\left\{ \begin{matrix} 1\,1 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \overline{1\,1} \\ 2 \end{matrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{matrix} 2\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \overline{2\,2} \\ 1 \end{matrix} \right\}$$

$$\left\{ \begin{matrix} 1\,1 \\ 1 \end{matrix} \right\} - 2 \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \overline{1\,1} \\ 1 \end{matrix} \right\} - 2 \left\{ \begin{matrix} \overline{1\,2} \\ 2 \end{matrix} \right\},$$

$$\left\{ \begin{matrix} 2\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\} - 2 \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \overline{2\,2} \\ 2 \end{matrix} \right\} - 2 \left\{ \begin{matrix} \overline{1\,2} \\ 1 \end{matrix} \right\},$$

le quali esprimono (n. c.) che i due $d\,s^2$ si corrispondono *geodeticamente.* Di più, se con

$$K = -\frac{1}{\rho^2}, \quad \overline{K} = -\frac{1}{\overline{\rho}^2}$$

indichiamo le loro rispettive curvature, troviamo

$$\rho = \frac{H}{\sqrt{p\,q}}, \quad \overline{\rho} = \frac{H}{p\,\beta^2}$$

indi

$$\frac{\rho}{\overline{\rho}} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}\,\beta^2.$$

Ne segue che sono ulteriormente soddisfatte le due condizioni

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\log\frac{\overline{\rho}}{\rho}=\left\{ {12 \atop 2} \right\}-\left\{ {\overline{12} \atop 2} \right\},\quad \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\beta}\log\frac{\overline{\rho}}{\rho}=\left\{ {12 \atop 1} \right\}-\left\{ {\overline{12} \atop 1} \right\},$$

le quali, unite alle precedenti, esprimono appunto che i due elementi lineari sono *coniugati in deformazione* (n. c.).

§ 25.

Corrispondenza delle congruenze W per le due classi di superficie.

Dimostriamo ora che anche per le superficie $\overline{S}$ applicabili sulla quadrica a centro Q sussiste il teorema A) della prefazione. Come al § 3, prendiamo per ciò una trasformata Σ_1 di Bäcklund della superficie pseudosferica iniziale Σ e sia $\overline{S}_1$ quella deformata dalla quadrica Q che si deduce dalla Σ_1, come prima la $\overline{S}$ dalla Σ, secondo le formole corrispondenti alle (77):

$$\overline{x}_1=x_1-\frac{q\lambda_1}{\beta_1}X_1^{(1)}-\frac{q\mu_1}{\beta_1}X_2^{(1)}+\frac{q\alpha_1}{p\beta_1}X_3^{(1)}, \tag{80}$$

deducendosi le α_1, β_1, λ_1, μ_1 dalle α, β, λ, μ colle formole (42) § 11. Le due superficie $\overline{S}$, $\overline{S}_1$ hanno così nello spazio una posizione perfettamente determinata e fra i loro punti $\overline{M}$, $\overline{M}_1$ è stabilita una legge di corrispondenza che conserva i sistemi coniugati. Dimostriamo ora che: *le congiungenti due punti corrispondenti $\overline{M}$, $\overline{M}_1$ generano una congruenza W, di cui $\overline{S}$, $\overline{S}_1$ sono le due falde focali.*

Basterà provare che la retta $\overline{M}\,\overline{M}_1$ tocca in $\overline{M}$ la $\overline{S}$ e, per ragione di simmetria, sarà anche provato che essa tocca in $\overline{M}_1$ la $\overline{S}_1$. Ora, secondo le (78), i coseni di direzione $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ della normale alla $\overline{S}$ sono proporzionali ai tre binomii

$$\mu X_1-\lambda X_2,\quad \mu Y_1-\lambda Y_2,\quad \mu Z_1-\lambda Z_2.$$

La nostra proposizione equivale quindi all'annullarsi della somma

$$\Sigma\,(\mu X_1-\lambda X_2)\,(\overline{x}-\overline{x}_1),$$

che facilmente verifichiamo aver luogo sostituendovi gli effettivi valori (77), (80) di $\overline{x}$, $\overline{x}_1$, ed avendo riguardo alle (10) § 3, (42) § 10. Così è dimostrato il teorema A) per le deformate della quadrica Q.

Ed ora paragoniamo la congruenza W, colle due falde focali $(\overline{S}, \overline{S}_1)$, coll'altra avente le falde focali (S, S_1) rispettivamente coniugate in deformazione delle precedenti. Le quattro superficie si corrispondono punto a punto, e noi vogliamo dimostrare che: *i raggi corrispondenti delle due congruenze sono condotti in direzioni corrispondenti.* Per ciò, ricordando che le linee inviluppate sopra la S (o la S_1) dai raggi della seconda congruenza hanno l'equazione differenziale

$$du : dv = \frac{\lambda_1}{\lambda} : \frac{\mu_1}{\mu},$$

basterà provare che alla medesima equazione differenziale soddisfano le linee inviluppate sopra la $\overline{S}$ (o la $\overline{S}_1$) dai raggi dell'altra congruenza. Ora, a causa della relazione fra $\overline{S}$, $\overline{S}_1$, sussistono certamente fra le coordinate dei loro punti corrispondenti relazioni del solito tipo

$$\overline{x}_1 = \overline{x} + l \frac{\partial x}{\partial u} + m \frac{\partial x}{\partial v}$$

dove l, m sono convenienti funzioni di u, v. Sostituendo in queste i valori dati dalle (77), (78), (80), facilmente troviamo

$$l = \frac{\beta \cos \sigma}{\beta_1} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda}, \quad m = \frac{\beta \cos \sigma}{\beta_1} \cdot \frac{\mu_1}{\mu},$$

e perciò $l : m = \frac{\lambda_1}{\lambda} : \frac{\mu_1}{\mu}$, il che dimostra appunto la nostra asserzione.

Riassumiamo i risultati ottenuti nella proposizione seguente:

Le superficie S applicabili sulla regione ideale del paraboloide iperbolico hanno per superficie $\overline{S}$ coniugate in deformazione quelle applicabili sulla quadrica a centro Q, e ad ogni coppia (S, S_1) di superficie della prima classe, costituenti le due falde focali di una delle nostre congruenze W, corrisponde una coppia analoga $(\overline{S}, \overline{S}_1)$ della seconda classe, dove S_1 è nuovamente coniugata in deformazione di S_1 come $\overline{S}$ di S, ed i raggi delle due congruenze sono tirati in direzioni corrispondenti.

Queste proprietà geometriche rendono palese la ragione che rende equivalenti i due problemi della ricerca delle trasformate della S o delle trasformate della sua coniugata in deformazione $\overline{S}$.

§ 26.

Il teorema di permutabilità per le equazioni intrinseche.

Esaurite le ricerche sulla prima proposizione fondamentale A) della nostra teoria, volgiamoci ora alla seconda, al teorema B) di permutabilità. Ma qui basterà che dimostriamo come si sviluppano i calcoli relativi ad uno dei casi; un procedimento affatto analogo si applicherebbe in tutti gli altri. Scegliendo il caso delle deformate (proprie) di 1.ª specie del paraboloide iperbolico, supponiamo di passare da una tale deformata S a due contigue S_1, S_2 con due trasformazioni B_{σ_1}, B_{σ_2}, le cui costanti σ_1, σ_2 siano diseguali, secondo le formole dei §§ 9 e 20. Indichiamo ordinatamente con

$$(\theta, \alpha, \beta, \lambda, \mu), \quad (\theta_1, \alpha_1, \beta_1, \lambda_1, \mu_1), \quad (\theta_2, \alpha_2, \beta_2, \lambda_2, \mu_2)$$

i tre sistemi di funzioni a cui corrispondono S, S_1, S_2, secondo le formole del § 6.

Le tre soluzioni θ, θ_1, θ_2 della equazione (V) § 6:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} = \operatorname{senh} \theta \cosh \theta \tag{V}$$

sono legate fra loro dalle formole delle rispettive trasformazioni B_{σ_1}, B_{σ_2} che fanno passare da θ a θ_1 e θ_2, sicchè per le (32) § 9 abbiamo:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \theta_1}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial v} &= -(\cosh \sigma_1 \operatorname{senh} \theta \cosh \theta_1 + \operatorname{senh} \sigma_1 \cosh \theta \operatorname{senh} \theta_1) \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u} &= (\cosh \sigma_1 \cosh \theta \operatorname{senh} \theta_1 + \operatorname{senh} \sigma_1 \operatorname{senh} \theta \cosh \theta_1) \end{aligned}\right\} \tag{81}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \theta_2}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial v} &= -(\cosh \sigma_2 \operatorname{senh} \theta \cosh \theta_2 + \operatorname{senh} \sigma_2 \cosh \theta \operatorname{senh} \theta_2) \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u} &= (\cosh \sigma_2 \cosh \theta \operatorname{senh} \theta_2 + \operatorname{senh} \sigma_2 \operatorname{senh} \theta \cosh \theta_2). \end{aligned}\right\} \tag{81*}$$

Per il teorema di permutabilità relativo a queste trasformazioni delle soluzioni della (V), di cui già ho fatto uso nella mia prima Memoria ((M) § 9), esiste allora una quarta soluzione θ' della (V) univocamente definita dalla formola

$$\operatorname{tgh}\left(\frac{\theta'-\theta}{2}\right)=\operatorname{tgh}\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)\coth\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right), \tag{82}$$

o dalle equivalenti

$$\left.\begin{aligned}\cosh(\theta'-\theta)&=\frac{\cosh(\sigma_1-\sigma_2)\cosh(\theta_1-\theta_2)-1}{\cosh(\theta_1-\theta_2)-\cosh(\sigma_1-\sigma_2)}\\ \operatorname{senh}(\theta\ -\theta)&=\frac{\operatorname{senh}(\sigma_1-\sigma_2)\operatorname{senh}(\theta_1-\theta_2)}{\cosh(\theta_1-\theta_2)-\cosh(\sigma_1-\sigma_2)}\,.\end{aligned}\right\} \tag{82*}$$

Questa quarta soluzione θ' è legata alla sua volta alle medesime θ_1, θ_2 da due trasformazioni B'_{σ_2}, B'_{σ_1} colle costanti σ_2, σ_1 invertite, secondo le formole corrispondenti alle (81), (81*):

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\theta_1}{\partial u}+\frac{\partial\theta'}{\partial v}&=-(\cosh\sigma_2\operatorname{senh}\theta'\cosh\theta_1+\operatorname{senh}\sigma_2\cosh\theta'\operatorname{senh}\theta_1)\\ \frac{\partial\theta_1}{\partial v}+\frac{\partial\theta'}{\partial u}&=\quad(\cosh\sigma_2\cosh\theta'\operatorname{senh}\theta_1+\operatorname{senh}\sigma_2\operatorname{senh}\theta'\cosh\theta_1)\end{aligned}\right\} \tag{83}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\theta_2}{\partial u}+\frac{\partial\theta'}{\partial v}&=-(\cosh\sigma_1\operatorname{senh}\theta'\cosh\theta_2+\operatorname{senh}\sigma_1\cosh\theta'\operatorname{senh}\theta_2)\\ \frac{\partial\theta_2}{\partial v}+\frac{\partial\theta'}{\partial u}&=\quad(\cosh\sigma_1\cosh\theta'\operatorname{senh}\theta_2+\operatorname{senh}\sigma_1\operatorname{senh}\theta'\cosh\theta_2).\end{aligned}\right\} \tag{83*}$$

Siccome colla B'_{σ_2} passiamo dalla θ' alla θ_1, così dalla quaderna $(\alpha_1, \beta_1, \lambda_1, \mu_1)$ che soddisfa alle (VI) § 6 relative a θ_1 dedurremo una quaderna corrispondente $(\alpha', \beta', \lambda', \mu')$ nella medesima relazione con θ', mediante le formole corrispondenti alle (35*) § 9) che si scrivono:

$$\left.\begin{aligned}k_2\,\alpha'&=-\cosh\theta'\,.\,\lambda_1-\operatorname{senh}\theta\ .\,\mu_1-\operatorname{senh}\sigma_2\,.\,\alpha_1\\ k_2\,\beta'&=-\operatorname{senh}\theta'\,.\,\lambda_1-\cosh\theta'\,.\,\mu_1+\cosh\sigma_2\,.\,\beta_1\\ k_2\,\lambda'&=-A'\,\lambda_1-C'\quad{}_1+\cosh\theta_1\,.\,\frac{\alpha_1}{p}+\operatorname{senh}\theta_1\frac{\beta_1}{q}\\ k_2\,\mu'&=\quad B'\,\lambda_1+D'\,\mu_1-\operatorname{senh}\theta_1\,.\,\frac{\alpha_1}{p}-\cosh\theta_1\,\frac{q}{\beta_1}\,,\end{aligned}\right\} \tag{84}$$

dove si è posto

$$k_2=\sqrt{\operatorname{senh}^2\sigma_2+\frac{1}{p}}=\sqrt{\cosh^2\sigma_2-\frac{1}{q}}$$

$$\left.\begin{aligned} A' &= \cosh\sigma_2 \operatorname{senh}\theta' \operatorname{senh}\theta_1 + \operatorname{senh}\sigma_2 \cosh\theta' \cosh\theta_1 \\ B' &= \cosh\sigma_2 \operatorname{senh}\theta' \cosh\theta_1 + \operatorname{senh}\sigma_2 \cosh\theta' \operatorname{senh}\theta_1 \\ C' &= \cosh\sigma_2 \cosh\theta' \operatorname{senh}\theta_1 + \operatorname{senh}\sigma_2 \operatorname{senh}\theta' \cosh\theta_1 \\ D' &= \cosh\sigma_2 \cosh\theta' \cosh\theta_1 + \operatorname{senh}\sigma_2 \operatorname{senh}\theta' \operatorname{senh}\theta_1 . \end{aligned}\right\} \quad (84^*)$$

D'altra parte, siccome si passa dalla medesima θ' alla θ_2 colla B'_{σ_1}, se invertiamo nelle considerazioni e nelle formole precedenti σ_1 con σ_2 e θ_1 con θ_2, saremo condotti ad una seconda quaderna $(\overline{\alpha}', \overline{\beta}', \overline{\lambda}', \overline{\mu}')$ relativa ancora a θ'; ma noi vogliamo dimostrare che queste due quaderne $(\alpha', \beta', \lambda', \mu')$, $(\overline{\alpha}', \overline{\beta}', \overline{\lambda}', \overline{\mu}')$ coincidono, per la qual cosa basterà provare che: le α', β', λ', μ' definite dalle (84) si compongono simmetricamente colle coppie di quantità (σ_1, σ_2), (θ_1, θ_2). Per ciò prendiamo le formole che seguono dalle (35) § 9:

$$\left.\begin{aligned} k_1\alpha_1 &= \cosh\theta_1 . \lambda + \operatorname{senh}\theta_1 . \mu - \operatorname{senh}\sigma_1 . \alpha \\ k_1\beta_1 &= \operatorname{senh}\theta_1 . \lambda + \cosh\theta_1 . \mu + \cosh\sigma_1 . \beta \\ k_1\lambda_1 &= -A_1\lambda - B_1\mu - \cosh\theta . \frac{\alpha}{p} - \operatorname{senh}\theta . \frac{\beta}{q} \\ k_1\mu_1 &= \quad C_1\lambda + D_1\mu + \operatorname{senh}\theta . \frac{\alpha}{p} + \cosh\theta . \frac{\beta}{q} , \end{aligned}\right\} \quad (85)$$

dove si è posto:

$$k_1 = \sqrt{\operatorname{senh}^2\sigma_1 + \frac{1}{p}} = \sqrt{\cosh^2\sigma_1 - \frac{1}{q}}$$

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \cosh\sigma_1 \operatorname{senh}\theta \operatorname{senh}\theta_1 + \operatorname{senh}\sigma_1 \cosh\theta \cosh\theta_1 \\ B_1 &= \cosh\sigma_1 \operatorname{senh}\theta \cosh\theta_1 + \operatorname{senh}\sigma_1 \cosh\theta \operatorname{senh}\theta_1 \\ C_1 &= \cosh\sigma_1 \cosh\theta \operatorname{senh}\theta_1 + \operatorname{senh}\sigma_1 \operatorname{senh}\theta \cosh\theta_1 \\ D_1 &= \cosh\sigma_1 \cosh\theta \cosh\theta_1 + \operatorname{senh}\sigma_1 \operatorname{senh}\theta \operatorname{senh}\theta_1 . \end{aligned}\right\} \quad (85^*)$$

Se si moltiplicano le due prime (84) per k_1 e se ne eliminano colle (85) i valori $k_1\alpha_1$, $k_1\beta_1$, $k_1\lambda_1$, $k_1\mu_1$, avendo riguardo alle (82), si trovano le formole seguenti:

$$\begin{aligned} k_1 k_2 \alpha' = {} & \frac{\operatorname{senh}(\sigma_1-\sigma_2)\left[\cosh\sigma_1\cosh\theta_2 - \cosh\sigma_2\cosh\theta_1\right]}{\cosh(\theta_1-\theta_2) - \cosh(\sigma_1-\sigma_2)}\lambda + \\ & + \frac{\operatorname{senh}(\sigma_1-\sigma_2)\left[\cosh\sigma_1\operatorname{senh}\theta_2 - \cosh\sigma_2\operatorname{senh}\theta_1\right]}{\cosh(\theta_1-\theta_2) - \cosh(\sigma_1-\sigma_2)}\mu + \\ & + \left[\frac{\cosh(\theta'-\theta)}{p} + \operatorname{senh}\sigma_1\operatorname{senh}\sigma_1\right]\alpha - \frac{\operatorname{senh}(\theta'-\theta)}{q}\beta, \end{aligned}$$

$$k_1 k_2 \beta' = \frac{\operatorname{senh}(\sigma_1 - \sigma_2)[\operatorname{senh}\sigma_2 \operatorname{senh}\theta_1 - \operatorname{senh}\sigma_1 \operatorname{senh}\theta_2]}{\cosh(\theta_1 - \theta_2) - \cosh(\sigma_1 - \sigma_2)} \lambda +$$

$$+ \frac{\operatorname{senh}(\sigma_1 - \sigma_2)[\operatorname{senh}\sigma_2 \cosh\theta_1 - \operatorname{senh}\sigma_1 \cosh\theta_2]}{\cosh(\theta_1 - \theta_2) - \cosh(\sigma_1 - \sigma_2)} \mu +$$

$$+ \frac{\operatorname{senh}(\theta' - \theta)}{p} \alpha + \left[\cosh\sigma_1 \cosh\sigma_2 - \frac{\cosh(\theta' - \theta)}{q}\right] \beta.$$

Ora i valori (82*) di $\cosh(\theta' - \theta)$, $\operatorname{senh}(\theta' - \theta)$ restano invariati permutando σ_1 con σ_2 e θ_1 con θ_2, e la medesima simmetria offrono quindi i valori precedenti di α', β'. Che la stessa cosa abbia luogo anche per λ', μ' si può constatare in modo simile con calcolo diretto, ma segue ora subito dalle formole (*VI*), § 6, secondo le quali si ha:

$$\lambda' = \frac{1}{\cosh\theta'} \frac{\partial \alpha'}{\partial u}, \quad \mu' = \frac{1}{\operatorname{senh}\theta'} \frac{\partial \alpha'}{\partial v}.$$

Così è stabilita la proposizione enunciata.

§ 27.

Dimostrazione del teorema B) di permutabilità.

Colle considerazioni superiori noi abbiamo dimostrato, per le trasformazioni delle deformate di 1.ª specie del paraboloide iperbolico, il teorema di permutabilità limitatamente alle *equazioni intrinseche.* Resta ora da fare l'ultimo passo per avere questo teorema sotto la sua forma definitiva B) enunciata nella prefazione.

Per questo osserviamo che, secondo il § 20, alla quaderna $(\alpha', \beta', \lambda', \mu')$ corrisponde una deformata S' (di 1.ª specie) del paraboloide iperbolico, di posizione perfettamente determinata nello spazio rispetto ad S_1, come seconda falda di una congruenza W che ha per prima falda la S_1. Per le formole (71*) § 21, le coordinate x', y', z' di un punto di S' sono date dalle formole

$$x' = x_1 - \frac{1}{k_2}\left(\frac{\lambda'}{\lambda_1}\frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{\mu'}{\mu_1}\frac{\partial x_1}{\partial v}\right), \quad \text{ecc.} \tag{86}$$

Ma per le (65*), (66) § 20 abbiamo:

$$x_1 = x + \frac{1}{k_1}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\mu_1}{\mu}\frac{\partial x}{\partial v}\right)$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = L\frac{\partial x}{\partial u} + M\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\sqrt{pq}}{k_1\sqrt{H}}\mu\lambda_1 . X$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial v} = P\frac{\partial x}{\partial u} + Q\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\sqrt{pq}}{k_1\sqrt{H}}\lambda\mu_1 . X,$$

onde, sostituendo nelle (86), abbiamo un risultato della forma:

$$x' = x + U\frac{\partial x}{\partial u} + V\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\sqrt{pq}}{k_1 k_2\sqrt{H}}(\lambda\mu' - \mu\lambda') . X, \quad \text{ecc.,}$$

dove i coefficienti U, V hanno le espressioni seguenti:

$$\left.\begin{aligned} U &= \frac{1}{k_1}\frac{\lambda_1}{\lambda} - \frac{1}{k_2}\left(\frac{\lambda'}{\lambda_1}L + \frac{\mu'}{\mu_1}P\right) \\ V &= \frac{1}{k_1}\frac{\mu_1}{\mu} - \frac{1}{k_2}\left(\frac{\lambda'}{\lambda_1}M + \frac{\mu'}{\mu_1}Q\right). \end{aligned}\right\} \tag{88}$$

È chiaro che nel secondo membro delle (87) il coefficiente di X è simmetrico in (σ_1, σ_2), (θ_1, θ_2), poichè tali sono λ', μ', come si è visto. Se dimostriamo che la medesima simmetria offrono U, V, sarà dimostrato il teorema B) di permutabilità, poichè, risultando la S' costruita simmetricamente rispetto alle S_1, S_2, sarà legata alla S_2 dalla B'_{σ_1} come alla S_1 dalla B'_{σ_2}.

Ora se sostituiamo nelle espressioni (88) di U, V i valori effettivi di L, M, P, Q, dati dalle (67) § 20, e ricordiamo che per le (35) § 9, si ha:

$$k_2\lambda_1 = -A'\lambda' - B'\mu' - \cosh\theta'\frac{\alpha'}{p} - \operatorname{senh}\theta'\frac{\beta'}{q}$$

$$k_2\mu_1 = \quad C\lambda' + D\mu' + \operatorname{senh}\theta'\frac{\alpha'}{p} + \cosh\theta'\frac{\beta'}{q},$$

ne deduciamo

$$\left.\begin{aligned} U &= \frac{1}{k_1 k_2 \lambda}\left[(A_1 - A')\lambda' + (B_1 - B')\mu' - \cosh\theta' \frac{\alpha'}{p} - \operatorname{senh}\theta \frac{\beta'}{q}\right] + \\ &\qquad + \frac{q\,\alpha \cosh\theta + p\,\beta \operatorname{senh}\theta}{k_1 k_2 \lambda H}(\mu\mu' - \lambda\lambda) \\ V &= \frac{1}{k_1 k_2 \mu}\left[(C' - C_1)\lambda' + (D' - D_1)\mu' + \operatorname{senh}\theta' \frac{\alpha'}{p} + \cosh\theta \frac{\beta'}{q}\right] - \\ &\qquad - \frac{q\,\alpha \operatorname{senh}\theta + p\,\beta \cosh\theta}{k_1 k_2 \mu H}(\mu\mu' - \lambda\lambda). \end{aligned}\right\} \quad (89)$$

La nostra dimostrazione sarà al termine se proviamo che ciascuna delle quattro differenze: $A_1 - A'$, $B_1 - B'$, $C_1 - C$, $D_1 - D$ è simmetrica nelle due coppie di quantità (σ_1, σ_2), (θ_1, θ_2). Per ciò formiamo queste quattro differenze dalle formole (84*), (85*), e sostituendovi per $\cosh\theta'$, $\operatorname{senh}\theta'$ i valori che seguono dalle (82*), troveremo le formole seguenti:

$$\left.\begin{aligned} A_1 - A' &= K\,\{(\operatorname{senh}\sigma_2 \operatorname{senh}\theta_2 - \operatorname{senh}\sigma_1 \operatorname{senh}\theta_1)\operatorname{senh}\theta + \\ &\qquad + (\cosh\sigma_2 \cosh\theta_2 - \cosh\sigma_1 \cosh\theta_1)\cosh\theta\} \\ B_1 - B' &= K\,\{(\operatorname{senh}\sigma_2 \cosh\theta_2 - \operatorname{senh}\sigma_1 \cosh\theta_1)\operatorname{senh}\theta + \\ &\qquad + (\cosh\sigma_2 \operatorname{senh}\theta_2 - \cosh\sigma_1 \operatorname{senh}\theta_1)\cosh\theta\} \\ C_1 - C' &= K\,\{(\cosh\sigma_2 \cosh\theta_2 - \cosh\sigma_1 \cosh\theta_1)\operatorname{senh}\theta + \\ &\qquad + (\operatorname{senh}\sigma_2 \operatorname{senh}\theta_2 - \operatorname{senh}\sigma_1 \operatorname{senh}\theta_1)\cosh\theta\} \\ D_1 - D' &= K\,\{(\cosh\sigma_2 \operatorname{senh}\theta_2 - \cosh\sigma_1 \operatorname{senh}\theta_1)\operatorname{senh}\theta + \\ &\qquad + (\operatorname{senh}\sigma_2 \cosh\theta_2 - \operatorname{senh}\sigma_1 \cosh\theta_1)\cosh\theta\}, \end{aligned}\right\} \quad (90)$$

dove si è posto

$$K = \frac{\operatorname{senh}(\sigma_1 - \sigma_2)}{\cosh(\theta_1 - \theta_2) - \cosh(\sigma_1 - \sigma_2)}.$$

Queste formole presentano, come si vede, la voluta simmetria ed il teorema di permutabilità è così dimostrato.

Similmente, colle formole date ai §§ 8, 9 (**M**) per il teorema di permutabilità relativo alle soluzioni delle tre equazioni:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} = \operatorname{sen}\omega \cos\omega$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = \operatorname{senh} \theta \cosh \theta$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + \frac{1}{2} \cosh 2\theta = 0,$$

si dimostrerebbe il teorema stesso per le deformate proprie ed improprie del paraboloide ellittico e per quelle proprie di 2.ª specie del paraboloide iperbolico. In fine per le deformate improprie di quest'ultimo paraboloide basterebbe ricorrere alle ordinarie formole del teorema di permutabilità relative alle superficie pseudosferiche.

§ 28.

Conseguenze del teorema di permutabilità.

Come per le trasformazioni di Bäcklund delle superficie pseudosferiche (*), così anche nel caso attuale il corollario più importante del teorema di permutabilità è dato dalla proposizione seguente: *Se di una deformata iniziale S di un paraboloide si conoscono tutte le* ∞^2 *trasformate, l'applicazione successiva ed illimitata del processo di trasformazione alle nuove superficie via via ottenute si compie con soli calcoli di derivazione.*

Indichiamo rapidamente la dimostrazione, simile alla corrispondente per le superficie pseudosferiche (*Lezioni*, § 385, Vol. II, pag. 417). Riferendoci sempre all'esempio scelto delle deformate di 1.ª specie del paraboloide iperbolico, supponiamo data la deformata iniziale S, e supponiamo di conoscere l'integrale generale

$$\varphi(u, v, \sigma, C) \quad (C \text{ costante arbitraria})$$

delle equazioni (32) § 9:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial v} = -(\cosh \sigma \operatorname{senh} \theta \cosh \varphi + \operatorname{senh} \sigma \cosh \theta \operatorname{senh} \varphi)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u} = \quad (\cosh \sigma \cosh \theta \operatorname{senh} \varphi + \operatorname{senh} \sigma \operatorname{senh} \theta \cosh \varphi),$$

(*) Vedi anche le ricerche analoghe per le trasformazioni di Darboux delle superficie isoterme nel Tom. XI di questi *Annali.*

e sia S_1 una particolare trasformata di S corrispondente alla soluzione particolare

$$\theta_1 = \varphi(u, v, \sigma_1, C_1).$$

Se calcoliamo θ' dalla formola (82) del teorema di permutabilità

$$\operatorname{tgh}\left(\frac{\theta'-\theta}{2}\right) = \operatorname{tgh}\left(\frac{\sigma_1-\sigma}{2}\right)\coth\left(\frac{\theta_1-\varphi}{2}\right), \tag{91}$$

e facciamo le sostituzioni corrispondenti nelle formole (87) che danno la quarta superficie S', supponendovi soltanto $\sigma \neq \sigma_1$, noi avremo tutte le trasformate S' della nuova S_1 per trasformazioni B_σ *con* σ *differente da* σ_1, come segue dal teorema stesso di permutabilità. Ma è facile ottenere un risultato analogo anche pel caso escluso, servendosi di un opportuno passaggio al limite.

Perciò nella $\varphi(u, v, \sigma, C)$ prendiamo per C una funzione $C(\sigma)$ di σ, soggetta alla sola condizione di ridursi a C_1 per $\sigma = \sigma_1$ e del resto arbitraria, onde sarà

$$[\varphi(u, v, \sigma, C)]_{\sigma=\sigma_1} = \theta_1.$$

Passando nella (91) al limite per $\sigma = \sigma_1$, il secondo membro si presenta sotto la forma indeterminata $0 \times \infty$, e calcolandone il valore limite colle note regole si ha

$$\coth\left(\frac{\theta'-\theta}{2}\right) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma} + \frac{\partial\varphi}{\partial C}\frac{dC}{d\sigma}\right)_{\sigma=\sigma_1},$$

ovvero

$$\coth\left(\frac{\theta'-\theta}{2}\right) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma} + \frac{\partial\varphi}{\partial C}\cdot C'\right)_{\sigma=\sigma_1}, \tag{92}$$

indicando con C' una nuova costante arbitraria. E qui si potrà anche verificare direttamente che la funzione θ', determinata dalla (92), è in effetto una soluzione della equazione

$$\frac{\partial^2\theta'}{\partial v^2} - \frac{\partial^2\theta'}{\partial u^2} = \operatorname{senh}\theta \cosh\theta,$$

legata alla θ_1 da una B_{σ_1}. Conoscendo così questa trasformata θ' della θ_1, avremo senz'altro in *termini finiti* la trasformata generica S della S_1 per la B_σ.

La nostra proposizione è dunque stabilita.

§ 29.

Applicazioni alle deformate di traslazione dei paraboloidi.

Da ultimo per dimostrare, almeno in un esempio, l'efficacia dei metodi di trasformazione, considereremo la seguente classe di deformate dei paraboloidi.

Come tutte le superficie di traslazione con curve generatrici in piani perpendicolari (Vedi *Lezioni*, § 252. Vol. II, pag. 85), i paraboloidi sono suscettibili di una deformazione continua ad un parametro in cui si conservano superficie di traslazione della medesima classe; allora il sistema coniugato formato dai due sistemi di curve congruenti per traslazione alle generatrici si conserva coniugato.

Troviamo subito le deformate di traslazione dei paraboloidi, procedendo nel modo seguente, che descriviamo in particolare per le deformate proprie del paraboloide ellittico.

a) Deformate proprie del paraboloide ellittico. Affinchè la deformata S di questo paraboloide corrispondente, secondo le formole del § 5, alle funzioni ω, α, β, λ, μ sia una superficie della specie voluta, occorre e basta che si annullino per essa i simboli $\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}$, $\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}$. Dalle (47) § 13 segue allora che deve aversi

$$\frac{\partial \omega}{\partial u} = \frac{\partial \omega}{\partial v} = 0,$$

cioè $\omega =$ cost., quindi per le *(I)* § 5: $\omega = 0$. Dopo ciò le formole *(II)* di questo paragrafo dimostrano che β, λ saranno funzioni della sola u, ed α, μ della sola v. L'integrazione delle corrispondenti equazioni differenziali è immediata, e ponendo: $u_1 = \frac{u}{\sqrt{q}}$, $v_1 = \frac{v}{\sqrt{p}}$ porge:

$$\lambda = a_1 \cos u_1 + a_2 \operatorname{sen} u_1, \quad \beta = \sqrt{q}\,(a_1 \operatorname{sen} u_1 - a_2 \cos u_1)$$

$$\mu = b_1 \cosh v_1 + b_2 \operatorname{senh} v_1, \quad \alpha = \sqrt{p}\,(b_1 \operatorname{senh} v_1 + b_2 \cosh v_1)$$

con a_1, a_2, b_1, b_2 costanti che, a causa della (II^*) § 5, dovranno essere legate dalla relazione

$$b_1^2 - b_2^2 = a_1^2 + a_2^2 + 1.$$

Ora, aumentando, come è lecito, u, v (e u_1, v_1) di convenienti costanti, si può fare, senza alterare la generalità, $b_2 = a_1 = 0$ e porre quindi

$$a_1 = \operatorname{senh} c, \quad b_1 = \cosh c \quad (c \text{ costante}).$$

Resta quindi

$$\lambda = \operatorname{senh} c \cos u_1, \qquad \mu = \cosh c \cosh v_1$$

$$\alpha = \sqrt{p} \cosh c \operatorname{senh} v_1, \quad \beta = \sqrt{q} \operatorname{senh} c \operatorname{sen} u_1,$$

onde per le (16) § 5:

$$E = q \operatorname{senh}^2 c (\operatorname{senh}^2 c \operatorname{sen}^2 u_1 + 1) \cos^2 u_1$$

$$F = \sqrt{p}\, q \operatorname{senh}^2 c \cosh^2 c \operatorname{sen} u_1 \cos u_1 \operatorname{senh} v_1 \cosh v_1$$

$$G = p \cosh^2 c (\cosh^2 c \operatorname{senh}^2 v_1 + 1) \cosh^2 v_1,$$

e inoltre per le (17) § 5

$$\Delta = \Delta'', \quad \Delta' = 0.$$

Dopo ciò si trova (*) che le equazioni in termini finiti della S sono le

(*) Indico brevemente come si arriva alle (93) del testo. Le equazioni della S hanno certo la forma

$$x = U, \quad y = V, \quad z = U_1 + V_1$$

con U, U_1 funzione di u, e V, V_1 di v. Le condizioni relative all'elemento lineare dànno

$$U'^2 + U_1'^2 = E, \quad U'_1 V'_1 = F, \quad V'^2 + V_1'^2 = G$$

e dalla media si ha

$$U'_1 = k \sqrt{q} \operatorname{senh}^2 c \operatorname{sen} u_1 \cos u_1, \quad V'_1 = \frac{1}{k} \sqrt{p} \cosh^2 c \operatorname{senh} v_1 \cosh v_1 \quad (k \text{ cost.}).$$

Sostituendo nelle altre due e osservando che la condizione $\Delta = \Delta''$ si scrive

$$\frac{U''}{U'} U'_1 - U''_1 = \frac{V''}{V'} V'_1 - V''_1,$$

se ne trae $k = \coth c$, indi le (93) del testo.

seguenti:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{q \operatorname{senh} c}{4}(2u_1 + \operatorname{sen} 2u_1), \quad y = \frac{p \cosh c}{4}(2v_1 + \operatorname{senh} 2v_1), \\ z &= \frac{\operatorname{senh} c \cosh c}{4}(p \cosh 2v_1 - q \cos 2u_1). \end{aligned}\right\} \tag{93}$$

Ora se a questa superficie S applichiamo la trasformazione B_σ § 8, le equazioni (27) (essendo $\omega = 0$) diventano

$$\frac{\partial \theta}{\partial u} = \operatorname{sen} \sigma \operatorname{senh} \theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial v} = -\cos \sigma \operatorname{senh} \theta,$$

e il loro integrale generale è dato da

$$\operatorname{tgh} \frac{\theta}{2} = C e^{u \operatorname{sen}\sigma - v \cos\sigma} \quad (C \text{ costante}). \tag{94}$$

Conosciamo dunque in termini finiti (§ 17) le ∞^2 trasformate S_1 della S, e il teorema del paragrafo precedente è immediatamente applicabile.

Si osservi in particolare che se nella (94) si prende $C = 0$, indi $\theta = 0$, anche la trasformata S_1 è una deformata (impropria) di traslazione del paraboloide ellittico.

Analogamente, come sopra per le deformate di traslazione proprie del paraboloide ellittico, si procede negli altri tre casi seguenti.

b) Deformate improprie del paraboloide ellittico. Le superficie di traslazione di questa classe corrispondono alla soluzione $\theta = 0$ della (*III*) § 5 e sono date dalle formole:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{q \operatorname{senh} c}{4}(2u_1 - \operatorname{sen} 2u_1), \quad y = \frac{p \cosh c}{4}(\operatorname{senh} 2v_1 - 2v_1), \\ z &= \frac{\operatorname{senh} c \cosh c}{4}(p \cosh 2v_1 - q \cos 2u_1), \\ &\left(u_1 = \frac{u}{\sqrt{q}}, \quad v_1 = \frac{v}{\sqrt{p}}\right). \end{aligned}\right\} \tag{95}$$

Le ∞^2 trasformate ω della θ sono date dalla formola

$$\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = C e^{v \cos\sigma - u \operatorname{sen}\sigma}.$$

c) Deformate proprie (di 1.ª specie) del paraboloide iperbolico. Le deformate di traslazione corrispondono alla soluzione $\theta = 0$ della (V) § 6 e sono date dalle formole:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{p \operatorname{senh} c}{4}(2 u_1 + \operatorname{sen} 2 u_1), \quad y = \frac{q \cosh c}{4}(2 v_1 + \operatorname{senh} 2 v_1) \\ z &= \frac{\operatorname{senh} c \cosh c}{4}(p \cos 2 u_1 + q \cosh 2 v_1) \\ &\left(u_1 = \frac{u}{\sqrt{p}}, \quad v_1 = \frac{v}{\sqrt{q}}\right). \end{aligned}\right\} \tag{96}$$

Le ∞^2 trasformate θ_1 della θ si hanno dalla formola

$$\operatorname{tgh} \frac{\theta_1}{2} = C e^{v \operatorname{senh} \sigma - u \cosh \sigma}. \tag{96*}$$

d) Deformate improprie del paraboloide iperbolico. Le superficie di traslazione di questo tipo corrispondono anche qui a $\theta = 0$ e sono date dalle formole:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{q \cosh c}{4}(\operatorname{senh} 2 u_1 - 2 u_1), \quad y = \frac{p \operatorname{senh} c}{4}(2 v_1 - \operatorname{sen} 2 v_1) \\ z &= \frac{\operatorname{senh} c \cosh c}{4}(q \cosh 2 u_1 + p \cos 2 v_1) \\ &\left(u_1 = \frac{u}{\sqrt{q}}, \quad v_1 = \frac{v}{\sqrt{p}}\right). \end{aligned}\right\} \tag{97}$$

Per le ∞^2 trasformate di Bäcklund θ_1 della θ si ha

$$\operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2} = C e^{\frac{u - v \operatorname{sen} \sigma}{\cos \sigma}} \tag{97*}$$

Ne concludiamo: *Per ciascuna di queste deformate di traslazione dei paraboloidi si conoscono, in termini finiti, le ∞^2 superficie trasformate e il* *processo di trasformazione si applica quindi illimitatamente senza alcun calcolo d'integrazione.*

Come nel caso delle superficie a curvatura costante (*Lezioni*, §§ 387, 406), così anche nell'attuale delle deformate dei paraboloidi otteniamo dunque un gruppo di infinite tali deformate (dipendenti da un numero grande ad arbitrio di costanti), le cui equazioni si hanno in termini finiti per sole funzioni circolari ed iperboliche.

S.t Marcel (Aosta), Settembre 1905.

INDICE DEI PARAGRAFI

Sulla costruzione dei campi fondamentali di un gruppo discontinuo.

(*Di* Guido Fubini, *a Genova.*)

Sia dato uno spazio S, in cui x_1, $x_2, \ldots$, x_n sono coordinate omogenee; e sia $\Sigma\, a_{ik}\, x_i\, x_k$ la più generale forma quadratica in queste variabili. Sia Σ lo spazio, in cui le a_{ik} sono variabili coordinate; e sia R quella regione di Σ, che corrisponde a forme definite positive. In una mia Memoria: *Sulla teoria dei gruppi discontinui* (*) (*Annali di Matematica;* 1905) io ho dimostrato che ad ogni gruppo proiettivo in S e privo di trasformazioni infinitesime corrisponde in Σ un gruppo Γ proiettivo, propriamente discontinuo entro R. Nella stessa Memoria ho dato molti altri teoremi generali, che conducono a nuove ed estese classi di gruppi propriamente discontinui. Ho dimostrato poi che tutti questi gruppi si possono considerare come gruppi di movimenti in una metrica conveniente, la quale ammette un gruppo continuo transitivo di movimenti. Ciò mi permise di estendere a tutti questi gruppi il concetto di campi fondamentali *normali*, che Klein e Fricke diedero per i gruppi poligonali e poliedrali di Poincaré, partendo dalle metriche a curvatura costante negli spazî di due o tre dimensioni.

Ora il prof. Hurwitz, in una recente Memoria pubblicata nei *Mathem. Annalen*, dà un metodo assai semplice per definire, mediante infinite disuguaglianze, il campo fondamentale di uno dei gruppi Γ, più sopra citati, nella regione R di Σ, e dimostra, in un caso particolare, che i campi fondamentali da lui definiti coincidono coi campi fondamentali normali.

§ 1. Io voglio qui dimostrare che noi possiamo sempre definire con infinite disuguaglianze il campo fondamentale di un gruppo di movimenti in una metrica qualunque, privo di trasformazioni infinitesime. Con ciò otterremo

(*) Citerò questa Mem. con la lettera (A).

la più grande estensione dei risultati dell'HURWITZ, pure usando una trattazione forse più semplice; e nello stesso tempo daremo una esposizione precisa, e non soltanto intuitiva, della teoria dei citati campi normali.

Ecco i principii del metodo da usare. Sia H una regione di uno spazio S; con W indicherò le regioni limiti di H. Dirò che una regione R di H è tutta a distanza finita, se tutti i punti di R sono a distanza finita dai punti di W. Sia $K(x)$ una funzione delle coordinate x dei punti di S, che sia sempre finita, continua e positiva per i punti di H, e tale di più che la disuguaglianza

$$K(x) \leqq \alpha \qquad (\alpha = \text{cost.})$$

determini una regione R di H, a distanza finita.

Sia G un gruppo *continuo* di trasformazioni in S, regolari in H, e trasformanti la regione H in sè stessa. Ne sia Γ un sottogruppo infinito *discontinuo*, il quale sia privo di trasformazioni infinitesime, e sia propriamente discontinuo in H. Supponiamo di più che il gruppo di punti, formato da un punto A_0 di H e dai suoi punti equivalenti A_1, A_2,... non ammetta punti limiti interni ad H, ma soltanto punti limiti posti su W. Io dico che, presa una qualunque costante α, esiste soltanto un numero finito di punti equivalenti ad A_0, tali che il valore assunto in uno qualunque di essi dalla funzione K è minore di α. Infatti i punti di H, in cui $K \leqq \alpha$, costituiscono una regione a distanza finita; e, poichè i punti A_0, A_1, A_2,... non hanno che punti limiti posti su W, è ben chiaro che in una tal regione non possono cadere infiniti punti A. Consideriamo ora le infinite quantità K_0, K_1, K_2,..., dove con K_i indico il valore di K nel punto A_i.

Queste quantità hanno un limite inferiore, positivo o nullo, λ. Questa quantità λ godrà di una delle seguenti due proprietà:

1.°) Esiste un numero *finito* di punti A, p. es. i punti A_{i_1}, A_{i_2},... A_{i_m} tali che $K_{i_1} = K_{i_2} = \cdots = K_{i_m} = \lambda$, mentre il valore di K in tutti gli altri punti A è maggiore di λ. (Non può darsi, per quanto dicemmo, che K abbia lo stesso valore in infiniti punti A.)

2.°) In nessun punto A la funzione K ha il valore λ; ma, se ε è una quantità positiva piccola a piacere, esistono infiniti punti A, in cui il valore di K è minore di $\lambda + \varepsilon$.

Questa seconda ipotesi è da escludere, per quanto noi abbiamo detto più sopra; e noi dovremo quindi adottare la prima. Noteremo anzitutto che l'intero m varierà in generale al variare del punto A. Ora, dato un numero finito m

di punti, di cui l'^{iesimo} abbia per coordinate non omogenee x_{i_1}, $x_{i_2}, \ldots,$ x_{i_n} $(i = 1, 2, \ldots, m)$, potremo sempre definire in un modo qualsiasi, ma determinato, il primo di questi punti. Così p. es. noi potremo dire che il punto $x_{k_1}, \ldots, x_{k_n}$ è il primo degli m punti precedenti, se, preso un altro punto qualunque x_{j_1}, $x_{j_2}, \ldots, x_{j_n}$ $(j = 1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, m)$ tra gli m punti considerati, distinto dal punto x_{k_1}, $x_{k_2}, \ldots, x_{k_n}$, la prima delle differenze $x_{j_1} - x_{k_1}$, $x_{j_2} - x_{k_2}, \ldots, x_{j_n} - x_{k_n}$, che non è nulla, è minore di zero. Questo punto viene così definito senza ambiguità, mediante disuguaglianze.

Consideriamo ora l'insieme P dei punti A_0, i quali godono di una delle seguenti due proprietà:

1.°) Il valore di K in un tal punto A_0 è *minore* del valore di K nei punti A_1, $A_2, \ldots$ equivalenti ad A_0.

2.°) Il valore di K in un tal punto A_0 è *minore* o *uguale* ai valori di K nei punti equivalenti. Di più, se A_1, $A_2, \ldots, A_{m-1}$ sono quelli tra i punti equivalenti ad A_0, in cui K assume lo stesso valore che in A_0, allora A_0 è il primo dei punti A_0, $A_1, \ldots, A_{m-1}$ (nel senso testè definito). (Volendo, potremmo considerare la precedente proprietà come caso particolare di quest'ultima, in cui si supponga $m = 1$.) L'insieme P di punti A_0, così definito mediante disuguaglianze, si può assumere come *campo fondamentale* del nostro gruppo in H. Esso gode infatti delle seguenti due proprietà: Un punto qualunque di H ha uno e un solo punto equivalente, che appartiene all'insieme P; due punti distinti di P non sono mai equivalenti.

Sarebbe impossibile, e del resto forse non di importanza fondamentale, studiare in generale come varia m al variare di A_0, di che natura è l'insieme P, ecc. Se noi ammettiamo che K è una funzione analitica delle x, regolare in H, si può dimostrare che i punti per cui $m-1$, e i punti equivalenti formano un insieme ovunque denso in H, ecc.

§ 2. Noi applicheremo ora quanto abbiamo svolto testè al caso particolare di gruppi discontinui di movimenti in una data metrica. E ricorderò, che tanto i gruppi Γ, studiati da Hurwitz, come gli altri svariati gruppi proiettivi studiati in (A), si possono sempre considerare come gruppi di movimenti, mentre non ogni gruppo di movimenti si può considerare come un gruppo proiettivo. Il nostro studio ha perciò una grande generalità (*).

Sia definita una metrica reale in una regione H di S, che ammetta un

(*) Per essere completo, ricorderò brevemente il significato della parola: *metrica*. Sia $F(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$ una forma differenziale, di grado $2k$ pari, con coefficienti funzioni gruppo di movimenti, regolare in H e transitivo. I punti di W siano i punti singolari, e all'infinito della metrica stessa. Per un teorema generale, dimostrato in (A), un gruppo Γ di movimenti, privo di trasformazioni infinitesime, è propriamente discontinuo in H. È poi ben evidente che nessun punto interno ad H, non appartenente a W, può essere punto limite di punti equivalenti, rispetto al gruppo Γ, ad un punto A_0 di H. Se ciò infatti avvenisse, vorrebbe dire che si possono trovare in H due punti distinti A_i, A_j, equivalenti ad A_0, la cui distanza geodetica è minore di un numero ε piccolo a piacere. Quella trasformazione di Γ, che porta A_i in A_0, porta A_j in un punto A_l, equivalente ad A_0 e tale che la distanza geodetica $A_l A_0$ è minore di ε. In ogni intorno di A_0 cadrebbe quindi un punto equivalente ad A_0: ciò, che è impossibile, poichè Γ è propriamente discontinuo in H. Prendiamo ora come funzione $K(x)$ la distanza geodetica di un punto (x), mobile in H, da un punto C_0, scelto arbitrariamente in H, ma fisso. È ben chiaro che in generale la disuguaglianza $H \leq \alpha$ ($\alpha =$ cost.) determina una regione, tutta a distanza finita in H, e che quindi, per quanto abbiamo detto più sopra, possiamo applicare le precedenti considerazioni. Siano C_1, C_2, $C_3, \ldots$ i punti equivalenti al punto C_0. Sia A_0, A_1, $A_2, \ldots$ un sistema qualunque di punti equivalenti in H. Osserviamo che il movimento di Γ, il quale porta A_i in A_0, porterà C_0 in un punto C_h, cosicchè la distanza geodetica $A_i C_0$ è uguale alla distanza geodetica $A_0 C_h$ da A_0 ad un punto C_h, equivalente a C_0. Possiamo quindi definire l'insieme P, campo fondamentale di Γ in H, nel seguente modo:

Diremo punto *ridotto di prima specie* un punto A_0, tale che sia $A_0 C_0 < A_0 C_h$ $(h = 1, 2, \ldots)$. Sarà pure in tal caso: $A_0 C_0 < A_i C_0$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$. Se invece la distanza geodetica $B_0 C_0$ da un punto B_0 al punto C_0 è uguale alla distanza geodetica da B_0 ad un numero *finito* (cfr. più sopra) di punti C (p. es. C_{i_1}, $C_{i_2}, \ldots$, $C_{i_{m-1}}$) ed è minore della distanza di B_0 da ogni

delle stesse variabili x. Si dice lunghezza di un arco (nella metrica definita assumendo F come elemento lineare) il valore dell'integrale $\int \sqrt[2k]{F}$, esteso all'arco L. La metrica si dice reale in una regione R, se ogni arco continuo tracciato in R, possiede una lunghezza reale non nulla. Condizione necessaria e sufficiente a tale scopo è che la forma F sia positiva in R, e a coefficienti reali. Si chiama *movimento* ogni trasformazione, che lasci inalterate le lunghezze, ossia che muti in sè stessa la forma F. Si dice geodetica congiungente due punti A, B la linea di minor lunghezza terminata ai punti A, B e distanza geodetica $A B$ la lunghezza di questa linea. Un movimento porta le geodetiche in geodetiche, ecc.

altro punto C, esistono $m-1$ punti $B_1, B_2, \ldots, B_{m-1}$ equivalenti a B_0 e tali che la loro distanza geodetica da C_0 è uguale alla distanza geodetica $B_0 C_0$. Il *primo* dei punti $B_0, B_1, \ldots, B_{m-1}$ (nel senso sopra definito) si dirà punto *ridotto di seconda specie.*

L'insieme P si può definire come l'*insieme dei punti ridotti di prima e seconda specie:* esso resta univocamente determinato, appena venga dato il punto C_0, cosicchè noi gli daremo il nome di *campo fondamentale normale di centro* C_0.

Le trasformazioni di Γ permutano in modo transitivo i campi fondamentali normali, che hanno rispettivamente per centri i punti $C_0, C_1, C_2, \ldots$ Tutti questi campi non hanno due a due alcun punto comune, e riempiono semplicemente la regione H.

Per veder bene la natura di questi campi fondamentali, p. es. del campo P di centro C_0, noi dimostreremo i seguenti due teoremi:

Se un punto A_0 di P *è un punto di prima specie, esiste un intorno* α_0 *di* A_0, *i cui punti sono punti ridotti di prima specie* (*e appartengono quindi a* P).

Infatti sia δ tale che $A_h C_0 - A_0 C_0 > \delta$ per $h \geqq 1$. Per le ipotesi fatte, si potrà supporre δ positivo e differente da zero. Indichiamo con r_i la distanza geodetica $C_0 A_i$ e con α_i il luogo dei punti, la cui distanza geodetica da A_i non supera $\frac{\delta}{2}$. Gli intorni α_i sono tutti equivalenti fra loro: la distanza geodetica da un punto di α_i a C_0 è compresa tra $r_i + \frac{\delta}{2}$, $r_i - \frac{\delta}{2}$. E perciò la distanza geodetica da un punto B di α_0 a C_0 è minore della distanza geodetica da C_0 a un punto qualunque equivalente a B. E per quanto abbiamo detto più sopra, se ne deduce che tutti i punti di α_0 sono punti ridotti di prima specie. c. d. d.

In una regione L, *a distanza finita, limitata da un contorno* λ, *esiste al più un numero* **finito** *di ipersuperficie, su cui cadono punti ridotti di seconda specie.*

Sia infatti β la massima distanza geodetica da C_0 a un punto di L; un punto ridotto di seconda specie, che giaccia entro L (dovendo per definizione essere equidistante da C_0 e da almeno uno dei punti equivalenti a C_0) sarà equidistante da C_0 e da uno dei punti equivalenti a C_0, posti a una distanza geodetica da C_0 non maggiore di 2β. Ora i punti equivalenti a C_0, che soddisfano a questa ultima condizione, sono, come sappiamo, in numero finito. Siano essi p. es. i punti $C_1, C_2, \ldots, C_{m-1}$. I punti ridotti di seconda specie, eventualmente esistenti in L, possono esistere soltanto sulle $m-1$ ipersuperficie V, luogo dei punti equidistanti da C_0 e da uno dei punti $C_i\,(i \leqq m-1)$. Da ciò si può dedurre:

Se una regione L, a distanza finita, non è tutta formata di punti ridotti, allora, o non esistono in L punti ridotti, oppure i punti ridotti, appartenenti a L riempiono una regione R; questa regione è il luogo dei punti di P, appartenenti a L. Il suo contorno può essere formato soltanto da pezzi del contorno λ di L, e da pezzi delle citate ipersuperficie V (*).

La teoria dei campi fondamentali normali è così portata su basi precise. Naturalmente si deve, nei singoli casi, verificare se sono soddisfatte le condizioni necessarie affinchè si possa parlare di geodetiche, di distanza geodetica, ecc.

Queste condizioni sono soddisfatte nei casi studiati in (**A**), che, per la loro intima connessione con la teoria dei gruppi proiettivi, sono i più importanti in questo ordine di ricerche.

(*) Infatti un punto ridotto di prima specie, esistente in R, non può, per il primo dei nostri teoremi, giacere su una varietà limite di R; e ciò non può neppure avvenire per un punto di R, che non sia ridotto. (Infatti si vede facilmente che, se A è un punto non ridotto, esiste un intorno α di A, tutto formato di punti non ridotti.)