

**COURS**  
**DE**  
**PHYSIQUE**



COURS  
DE  
PHYSIQUE

CONFORME AUX PROGRAMMES  
DES CERTIFICATS ET DE L'AGRÉGATION DE PHYSIQUE

PAR  
H. BOUASSE  
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

---

SIXIÈME PARTIE  
ÉTUDE DES SYMÉTRIES



PARIS  
LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE  
15, RUE SOUFFLOT



# ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DES SYMÉTRIES .

---

## INTRODUCTION

**1. Opérations de première et de seconde espèces.** — Parmi toutes les transformations qu'une figure peut éprouver (similitude, inversion par vecteurs réciproques, ...), nous n'en retiendrons que deux :

1° le déplacement proprement dit sans déformation, appelé *opération de première espèce* ;

2° la symétrie par rapport à un plan ou à un point, accompagnée ou non d'un déplacement de première espèce : toute opération qui contient l'une des deux opérations précédentes est dite de *seconde espèce*.

Deux figures superposables par une opération de première espèce sont dites *congruentes* ; elles sont donc identiques, mais différemment orientées.

Deux figures superposables par une opération de seconde espèce sont dites *énantiomorphes* ; à l'orientation près, elles sont superposables après réflexion dans un miroir.

Évidemment nous limitons infiniment le problème de la transformation de deux figures point par point l'une dans l'autre ; mais les cas précités sont seuls utiles pour le but que nous nous proposons.

Nous étudierons dans le Chapitre I les opérations élémentaires et leurs combinaisons.

**2. Opérateurs et éléments de symétrie.** — Pour définir une opération, nous devons donner son *opérateur*. Par exemple, l'*opérateur* d'une translation est le vecteur *parallèlement auquel* s'effectue la translation. Nous devons le donner en grandeur et direction.

L'*opérateur* d'une rotation est l'axe autour duquel s'effectue la rotation. Nous devons le donner en position et fixer l'angle et le sens de la rotation.

L'*opérateur* d'une opération de seconde espèce est le miroir par

---

M. Turrière a bien voulu poursuivre jusqu'au bout son aimable collaboration ; je lui en exprime toute ma reconnaissance.

Cours de Physique. — H. BOUASSE.

1

rapport auquel on prend le symétrique, ou encore le centre de symétrie.

Et ainsi de suite.

Ces opérateurs peuvent être considérés de deux points de vue très différents.

1° Donnons-nous les translations, les miroirs, les centres de symétrie; donnons-nous enfin les axes de rotation *en spécifiant pour ceux-ci que l'angle est une fraction rationnelle de la circonférence*.

*Posons qu'on pourra répéter les opérations autant de fois qu'on voudra.*

*Multiplions* la figure initiale par tous ces opérateurs; nous obtenons en définitive une figure qui occupe, suivant les cas, une portion finie de l'espace ou l'espace entier.

2° Conservons les mêmes opérateurs, mais prenons pour figure initiale celle même que nous venons d'obtenir. *Multiplions-la* par tous les opérateurs: nous n'obtenons jamais rien autre chose qu'elle-même; *chaque opération la restitue*.

Nous exprimons ce fait en disant *que les opérations sont identiques et que la figure admet les opérateurs pour éléments de symétrie*.

Il n'y a donc entre les deux expressions *opérateurs* et *éléments de symétrie* aucune autre différence que la nature de la figure à laquelle on applique les opérations. Autrement dit, quand la construction définitive n'existe pas, on a des opérateurs; quand elle existe, on a des éléments de symétrie.

### 3. Figures finies : vingt-quatre groupes de polyèdres. —

Nous pouvons d'abord chercher comment doivent être disposés les opérateurs pour donner une figure finie F à partir d'une figure finie I; autrement dit, quels sont les éléments de symétrie possibles d'une figure finie F.

Le problème est traité par Bravais dans son Mémoire classique *Sur les Polyèdres de forme symétrique*; nous le résumons dans le Chapitre II.

A ce sujet, une remarque s'impose. Nous choisissons certaines opérations, si l'on veut, certains éléments de symétrie. Nous obtenons un certain nombre de groupes de polyèdres.

Par exemple, si nous nous limitons à des miroirs, un centre de symétrie et des axes, nous trouvons 23 groupes: ce sont ceux de Bravais.

Si nous nous interdisons d'utiliser le centre, nous ne trouvons plus que 13 groupes; si nous négligeons les miroirs, il ne reste que 10 groupes, et ainsi de suite.

Il n'y a donc rien d'étonnant à ce qu'on trouve plus de 23 groupes en introduisant des opérateurs autres que les miroirs, le centre et les axes de répétition ordinaires.

Par exemple, on a fait grand bruit autour d'un 24<sup>ième</sup> groupe obtenu en utilisant les axes de seconde espèce ou, ce qui revient au même, les plans de symétrie alternes, dont nous trouverons plus loin la définition. Ce groupe ne se rencontre pas dans la symétrie des phénomènes naturels; il a évidemment son intérêt théorique. Mais où l'étonnement commence, c'est quand on voit certains auteurs prendre Bravais presque en commisération, sous le prétexte qu'il néglige ce 24<sup>ième</sup> groupe dont il ne devait pas s'occuper d'après ses hypothèses, dont cependant il discute tout au long les propriétés et qu'il maintient dans son tableau d'ensemble.

**4. Réseaux : sept systèmes, quatorze modes.** — Le problème de la symétrie est ainsi complètement traité pour les figures finies : il n'y a que 24 groupes possibles de polyèdres; du reste, toutes les propriétés vectorielles peuvent toujours se représenter par des polyèdres. Rappelons qu'à la limite une surface quelconque finie est un polyèdre.

Parmi les figures infinies, il en est de particulièrement simples qui sont des *assemblages de points géométriques* et qu'on nomme *réseaux*. Les *points* sont les *nœuds* du réseau. Les réseaux sont obtenus par un empilement régulier de parallélépipèdes. Ils peuvent posséder des éléments de symétrie et se groupent en *systèmes* et en *modes*.

Les *systèmes* sont caractérisés par l'ensemble des éléments de symétrie. Mais dans certains systèmes les points peuvent avoir plusieurs dispositions qui constituent les *modes*.

*Il y a 7 systèmes et 14 modes.*

L'étude des réseaux fait l'objet du Chapitre III.

**5. Théories cristallographiques de Bravais et Mallard.** — Je n'ai pas l'intention de faire l'historique des doctrines cristallographiques; mais comme l'exposé qui suit diffère notablement des méthodes usuelles françaises, injustement abandonnées à l'étranger, mais qui ne sont pas assez générales, je ne peux négliger les considérations qui permettent au lecteur, le cas échéant, de se reconnaître dans les ouvrages français.

Toute la Cristallographie des savants éminents Bravais et Mallard repose sur l'emploi des polyèdres plus ou moins symétriques disposés de même aux nœuds d'un réseau. Géométriquement parlant, le polyèdre peut appartenir à l'un des 24 groupes, le réseau à l'un des 14 modes et par suite à l'un des 7 systèmes.

Si le polyèdre possède tous les éléments de symétrie du système (en outre il peut en posséder d'autres), on dit que la forme est *holoèdre*. S'il lui manque quelques-uns des éléments de symétrie du système, on dit que la forme est *mérièdre* (hémioèdre, tétartoèdre, ...).

Comme en définitive le réseau n'existe pas indépendamment des polyèdres, comme il est constitué par la disposition en quinconces de

polyèdres orientés parallèlement les uns aux autres, on admet que le réseau possède la symétrie la plus élevée compatible avec la symétrie du polyèdre, en vertu de cette règle fondamentale que *toute dyssymétrie doit avoir sa cause dans une autre dyssymétrie* : règle connue de tout temps et qui est une des formes du principe de causalité. Elle est complétée par cette règle *non moins banale qu'une dyssymétrie dans la cause ne produit pas nécessairement une dyssymétrie appréciable dans l'effet*.

Cette conception de *molécules cristallographiques* ramassées aux nœuds d'un réseau manque de souplesse et doit être abandonnée.

Les travaux des savants allemands Söhncke et Schönflies ont une grande importance, comme ayant prouvé la relativité des hypothèses physiques de Bravais et Mallard. A proprement parler, ils n'ont pas édifié *une théorie de la structure* ; tout au contraire, ils ont déblayé le terrain des théories antérieures de la structure. Ils ont cherché ce que réclame la symétrie considérée *in abstracto* et sans aucune spécification. Ils ont fourni *la forme abstraite* dans laquelle toute théorie *physique* doit se loger. Leurs travaux sont inattaquables parce qu'ils sont de Géométrie pure. Mais les domaines qu'ils imaginent (domaine fondamental, domaine complexe) sont vides : c'est au physicien de les remplir.

*Ce remplissage constitue véritablement la théorie de la structure.*

Ils nous ont appris que la symétrie nous permet de disposer la matière non seulement aux nœuds d'un réseau, mais aussi dans la *maille*, d'une manière qui à la limite peut être continue.

**6. Changement de front : loi d'Haüy.** — A partir du Chapitre IV, notre méthode d'exposition se transforme. Elle devient plus générale, tout en limitant son objet. A la vérité nous pourrions, sans que la logique y perde rien, supprimer les trois premiers Chapitres, puisque nous recommençons *de plano* au Chapitre IV. Malheureusement nous serions incompréhensibles et buterions sur l'écueil habituel.

Si les Français ignorent généralement la Cristallographie telle qu'on l'enseigne actuellement à l'étranger, et si, par une réciprocité aussi lamentable, les étrangers ignorent le rôle essentiel joué par Bravais et Mallard, c'est que, pour être claires, les deux conceptions doivent être exposées toutes deux et l'une après l'autre. On s'aperçoit alors du rôle, en définitive secondaire, joué par la notion de *groupes* introduite en Allemagne. Ce n'est pas à dire qu'elle soit négligeable *dans l'étude abstraite des symétries* ; mais, *dans l'explication des phénomènes actuellement connus*, elle n'a pas l'importance que certains imaginent.

Le problème général serait inextricable : nous le limitons *au moyen de la loi des indices rationnels* d'Haüy, dont voici l'énoncé.

Prenons pour trièdre de référence la figure formée par les trois faces d'un polyèdre, et pour axes de coordonnées les intersections de ces faces. Menons un plan parallèle à une quatrième face. Il intercepte sur les axes des longueurs  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Toute autre face interceptera des longueurs  $ma$ ,  $nb$ ,  $pc$ .

*La loi des indices rationnels consiste en ceci que les trois nombres  $m$ ,  $n$ ,  $p$ , peuvent être pris entiers ou fractionnaires : ils sont généralement très simples.*

La loi d'Haüy permet de limiter l'ordre des axes de symétrie des polyèdres. Pour qu'elle soit satisfaite, les axes ne peuvent être que binaires, ternaires, quaternaires et sénaires.

L'étude des conséquences de la loi d'Haüy remplit le Chapitre IV.

**7. Groupes finis de déplacements, systèmes cristallins.** — L'ordre des axes étant ainsi limité, nous reprenons *au langage près* la théorie des polyèdres symétriques. Le Chapitre V recommence en définitive le Chapitre II. Mais si la classification se borne aux polyèdres n'ayant que des axes binaires, ternaires, quaternaires et sénaires, *elle étudie un à un les polyèdres possibles.*

*Nous montrons qu'il en existe 32 classes.*

La notion de réseau a disparu ; elle reparaitra plus loin sous une autre forme.

Nous sommes amenés à définir l'holoédrie et la mériédrie. Tout naturellement nous aboutissons à 6 systèmes cristallins. Coupant l'un en deux pour plus de commodité, nous retrouvons les 7 systèmes définis antérieurement par les réseaux.

Le fait que les deux définitions de l'holoédrie et de la mériédrie conduisent l'une à 6 systèmes, l'autre à 7, montre clairement la raison du désaccord des cristallographes sur le rôle du système rhomboédrique, dont les uns font un système distinct, les autres une mériédrie du système sénaire.

Le Chapitre VI étudie par la méthode géométrique des troncatures les 32 classes divisées en 7 systèmes. Le lecteur y apprend à se reconnaître dans les formes et les notations.

**8. Groupes infinis de déplacement.** — Mais le milieu cristallin est par essence indéfini. Il s'agit donc de remplir l'espace.

Une figure initiale dénuée de symétrie étant donnée (domaine fondamental), quels sont les groupes d'opération qu'on doit lui appliquer pour que le remplissage ne laisse aucun vide ?

*Les réseaux reparassent ici comme groupes infinis de translation.* C'est même un des avantages les plus incontestables de la méthode que nous avons choisie, de montrer le double rôle que jouent les réseaux ; on peut les envisager d'une part comme une sorte de carcasse idéale, d'autre part comme une figuration des translations possibles, définies en grandeur et direction, *mais non pas en position.*

Les réseaux définissent une *maille* déterminée en volume, indéterminée en forme, qu'on appelle *domaine complexe*. La théorie nous apprend à la remplir avec les *domaines fondamentaux*.

Naturellement, suivant les opérations admises, le nombre des groupes sera différent. Nous pouvons répéter ici ce que nous avons dit au § 3.

Par exemple, Söhncke n'admet que les opérations de première espèce : il trouve 65 groupes infinis généraux de déplacement. Schönflies admet les opérations de seconde espèce : il trouve en tout 230 groupes.

La théorie géométrique des symétries est ainsi parachevée.

**9. Résumé.** — Il ne faut pas que le lecteur s'imagine qu'il y ait la moindre difficulté à comprendre cet ensemble de théories. Toutes les propositions sont élémentaires et de la force du baccalauréat. C'est de la géométrie de débutants.

La seule difficulté est le nombre de ces propositions élémentaires. Bien entendu, nous n'étudierons pas un à un les 230 groupes de Schönflies : cela n'aurait aucun intérêt. Nous en passerons en revue une douzaine pour nous accoutumer à cette sorte de considérations.

*Comme en définitive nous n'écrivons pas un traité sur les groupes de mouvements, et que la rigueur des démonstrations est chose très secondaire pour le but que nous poursuivons, nous montrerons que les groupes ou les polyèdres symétriques existent, sans nous appesantir sur la preuve qu'il n'en existe pas d'autres.* Nous supprimons d'emblée les trois quarts de notre besogne et la partie la plus difficile. Il ne faut pas, surtout dans un pareil sujet, que les arbres empêchent de voir la forêt. C'est le grave défaut pédagogique du livre d'ailleurs admirable de Schönflies.

Pour que le lecteur se reconnaisse immédiatement dans les groupes, classes, systèmes, modes, etc., voici la classification d'ensemble.

#### CLASSIFICATION DES POLYÈDRES

Sans restriction d'aucune sorte, il existe 24 groupes dont le tableau est donné au § 40.

Avec la restriction d'axes d'ordre 2, 3, 4, 6, il existe 32 classes dont le tableau est donné au § 89.

Il va de soi que chaque classe rentre dans un certain groupe; deux ou plusieurs classes peuvent appartenir au même groupe.

#### CLASSIFICATION DES RÉSEAUX

Il existe 14 modes possibles, se classant en 7 systèmes d'après les éléments de symétrie. Ils sont énumérés au § 60.

GROUPES INFINIS DE TRANSLATIONS

Il existe 14 groupes, correspondant aux 14 modes des réseaux.

GROUPES INFINIS GÉNÉRAUX

Il existe 65 groupes, si on se limite aux opérations de première espèce; 230 groupes, si on admet les opérations de première et de seconde espèces. Le tableau résumé en est donné au § 130.





## CHAPITRE I

### DES OPÉRATIONS ET DE LEURS COMBINAISONS

**10. Opérations de première espèce.** — On appelle *opérations de première espèce* celles qui amènent en coïncidence deux figures *congruentes*, c'est-à-dire deux figures identiques à l'orientation près.

**1° TRANSLATION.** — La translation est un déplacement dans lequel tous les points de la figure décrivent des droites égales, parallèles et de même sens.

La translation peut être représentée par un vecteur parallèle et égal (ou proportionnel) au déplacement d'un point quelconque de la figure. Il est déterminé en grandeur et en direction; il n'est pas déterminé en position. L'opération est notée T; sa grandeur est représentée par les lettres  $t$  ou  $\tau$ .

**2° ROTATION.** — La rotation est un déplacement dans lequel tout point de la figure déplacée tourne du même angle et dans le même sens autour d'une droite, déterminée en position, qu'on appelle *axe de rotation*.

Après le déplacement, tout point de la figure est sur un cercle dont le plan est normal à l'axe de rotation et dont le centre est sur l'axe; il est à une distance angulaire de la position initiale qui mesure la grandeur de la rotation.

Nous sommes immédiatement conduits à classer les axes de rotation.

*Axe de rotation, de répétition ou de symétrie d'ordre  $n$ .* — Répétons un nombre indéfini de fois la rotation. Si l'angle de rotation est de la forme  $\alpha = \frac{m}{n} 2\pi$ , où  $m$  et  $n$  sont des entiers, la  $n^{\text{ième}}$  opération ramène la figure en coïncidence avec la figure initiale. Les points obtenus à partir d'un point de la figure sont aux sommets d'un polygone étoilé. Il revient au même de faire tourner dans chaque opération, non pas de  $2\pi m : n$ , mais seulement de  $2\pi : n$ . Cet angle

est la distance angulaire de deux sommets consécutifs du polygone étoilé.

L'opération définie par l'angle  $2\pi : n$ , est dite *opération réduite*; l'axe de rotation correspondant est dit *axe de répétition ou de symétrie d'ordre n*, ou encore *axe de première espèce d'ordre n*, ou plus simplement *axe d'ordre n*.

Nous désignons l'opération par le symbole  $A(\alpha)$ , ou  $A_\alpha$ . Un axe d'ordre  $n$  est généralement noté  $C_n$  ou  $L_n$ .

Quand l'axe est d'ordre 2, on dit qu'il y a *transposition*.

3° ROTATION SUIVIE D'UNE TRANSLATION, OU OPÉRATION INVERSE. — Les deux opérations simples de première espèce se combinent en une opération complexe dite *hélicoïdale*. Une rotation hélicoïdale équivaut à une rotation  $\alpha$  autour d'un axe et à une translation  $t$  le long de cet axe, ou inversement à une translation suivie d'une rotation. L'axe s'appelle *axe hélicoïdal*.

L'opération est notée  $A(\alpha, t)$ , ou  $A_\alpha, t$ .

11. **Opérations de seconde espèce.** — On appelle *opérations de seconde espèce* celles qui superposent deux figures *énantiomorphes*.

1° RÉFLEXION. — De chaque point A de la figure à déplacer, abaissons une perpendiculaire AO sur un plan P que nous appellerons *plan de symétrie ou miroir*; prolongeons-la d'une longueur égale  $\overline{OA'} = \overline{AO}$ . La figure formée par l'ensemble des points A' est l'*image* de la première; elle est dite *énantiomorphe* de la première.

L'opération est notée S.

2° INVERSION. — Joignons chaque point A de la figure à déplacer à un point C que nous appellerons *centre de symétrie ou d'inversion*; prolongeons la droite AC d'une longueur  $\overline{CA''} = \overline{AC}$ . La figure formée par l'ensemble des points A'' est l'*inverse* de la première.

L'opération est notée I.

On voit immédiatement que deux figures inverses sont *énantiomorphes*.

Menons une droite L par le point C perpendiculairement au plan P. Il est clair que le point A' *image* de A et le point A'' *inverse* de A, sont *transposés* par rapport à la droite L jouant le rôle d'axe de symétrie binaire. Ceci est vrai de tous les points des figures auxquelles appartiennent les points A, A', A''.

Donc la figure A' *image* de la figure A, et la figure A'' *inverse* de la figure A, sont *congruentes*, puisqu'elles sont superposables grâce à

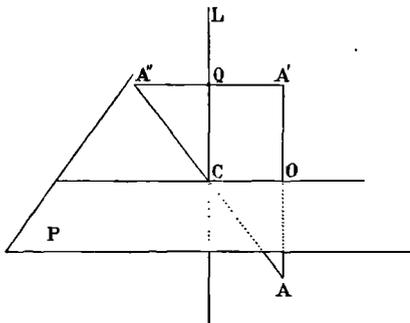


Fig. 1.

une opération de première espèce. Donc  $A''$  et  $A$  sont *énantiomorphes*.

3° RÉFLEXION SUIVIE D'UNE TRANSLATION. — La translation peut être parallèle au miroir; celui-ci prend alors le nom de *plan de glissement*.

La translation peut être normale au plan de réflexion. On obtient le même effet par une réflexion sur un miroir parallèle au miroir actuel et situé à une distance égale à la moitié de la translation.

Ces opérations complexes sont notées  $S(t)$ ,  $S_r$ ,  $S(\tau)$ ,  $S_\tau$ ; la nature de la translation est indiquée par un indice qui affecte la lettre  $t$  ou la lettre  $\tau$ .

4° RÉFLEXION SUIVIE D'UNE ROTATION. — L'axe autour duquel se fait la rotation et *qui est toujours supposé normal au miroir*, s'appelle *axe de seconde espèce d'ordre  $n$* .

L'opération dépend à titre égal du miroir ou de l'axe; on dit encore que son opérateur est un *plan de symétrie alterne d'ordre  $n$* . Les deux manières de parler sont équivalentes.

L'opération est notée  $\overline{A}(\alpha)$ , ou  $\overline{A}_\alpha$ .

## 12. Généralités sur les opérations et leurs combinaisons.

— On exécute successivement plusieurs opérations  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,...; le résultat de ces opérations est appelé le *produit* des opérations. On écrira, par exemple :

$$M = A . B . C,$$

exprimant par le signe  $=$  qu'il y a identité de résultat, soit en effectuant l'opération unique  $M$ , soit en effectuant successivement et *dans l'ordre*  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , les trois opérations  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

Il est essentiel de remarquer qu'on ne peut généralement pas *permuter* les opérations; comme nous le montrerons plus loin, il n'est généralement pas possible d'écrire :  $A . B = B . A$ . On peut au contraire les associer, c'est-à-dire considérer deux d'entre elles (effectuées dans l'ordre prescrit) comme un tout. On peut écrire :

$$A(BC) = (AB)C.$$

Quand on répète plusieurs fois de suite la même opération, on note l'opération complexe comme une *puissance* de l'opération simple. Par exemple, si on répète  $n$  fois la même rotation  $\alpha$  autour du même axe et dans le même sens, l'opération qui résulte des  $n$  opérations  $A(\alpha)$  est notée :  $A^n(\alpha)$ .

On a par définition même :

$$A^n(\alpha) . A^p(\alpha) = A^{n+p}(\alpha) = A[(n+p)\alpha].$$

L'opération est appelée *opération identique* quand la figure déplacée revient en définitive à sa position première. L'opération identique est notée 1.

Deux opérations  $U$  et  $V$  telles qu'on ait :  $UV = 1$ , sont dites *inverses*.

$$\text{On a : } U \cdot U^{-1} = U^{-1} \cdot U = 1.$$

Deux opérations inverses sont permutable; une opération  $V$  inverse de  $U$  peut être notée comme la puissance  $-1$  de  $U$ .

Par exemple, deux rotations égales et de sens contraires autour du même axe sont des opérations inverses. On peut écrire :

$$A(-\alpha) = A^{-1}(\alpha).$$

D'après les notations adoptées, la puissance zéro d'une opération quelconque est l'*opération identique*.

**13. Figure possédant des éléments de symétrie.** — On dit qu'une figure possède des *éléments de symétrie* ou est *symétrique*, quand on la transforme en elle-même, quand on la restitue, par l'une quelqu'une des opérations ci-dessus définies.

Les opérations qui jouissent de cette propriété sont commodément spécifiées par leurs opérateurs, qui sont les éléments de symétrie. Ainsi on dira que la figure possède un ou plusieurs axes de symétrie d'ordre  $n$ , un ou plusieurs plans de symétrie...

Du reste, la figure peut être finie ou indéfinie.

Les éléments de symétrie énoncent des possibilités d'opérations identiques.

Si la figure symétrique est restituée par les opérations  $A, B, C, D, \dots$  qui ont pour opérateurs les éléments de symétrie, elle est encore restituée par l'opération produit ou puissance d'un nombre quelconque de ces opérations,  $A^{\alpha}B^{\beta}C^{\gamma}D^{\delta} \dots$ .

Des éléments de symétrie choisis au hasard sont nécessairement compatibles, mais il faut bien préciser le sens de cette proposition.

*Dans la sphère*, tout diamètre est un axe de symétrie d'ordre infini, tout plan diamétral est un miroir, le centre est de symétrie. Donc quels que soient les éléments de symétrie qu'on suppose passer par un point, il existe toujours une figure qui les admet : c'est la sphère.

De même un milieu continu, homogène, isotrope, admet une infinité d'axes d'ordre infini, une infinité de plans de symétrie passant par un point quelconque qui est sûrement un centre.

Mais si des éléments de symétrie choisis au hasard sont certainement compatibles, leur coexistence peut entraîner la coexistence d'autres éléments.

Par exemple, nous avons déjà vu au § 11 qu'il ne peut exister un axe binaire (et par conséquent un axe d'ordre pair) passant par un centre d'inversion, sans qu'il existe un miroir passant par le centre et normal à l'axe. D'une manière plus générale, deux des éléments de symétrie précédents nécessitent le troisième.

De même nous pouvons supposer autant d'axes binaires que nous voudrions dans un plan. Mais soit  $\alpha$  le plus grand commun diviseur de tous les angles qu'ils font entre eux; l'existence des axes choisis entraîne l'existence au total de  $2\pi:\alpha$  axes binaires régulièrement distribués.

Quand donc nous parlerons de la compatibilité d'un groupe d'éléments de symétrie, il sera entendu que ces éléments doivent se suffire à eux-mêmes et n'entraîner l'existence d'aucun autre élément.

**14. Permutation d'une réflexion et d'une translation.** — L'opération réflexion-translation n'est permutative que si la translation est parallèle au plan de réflexion; ce plan devient alors *un plan de glissement*. Il n'en est plus ainsi dans le cas général.

Décomposons la translation en deux composantes, l'une parallèle au miroir qui pourra se faire à un instant quelconque de l'opération complexe et dont nous ne nous occuperons plus, l'autre T normale au miroir.

L'opération TS est équivalente à l'opération ST', où

$$T' = -T = T^{-1};$$

nous comptons positivement une translation qui approche (ou éloigne) du miroir, négativement une translation qui éloigne (ou approche) du miroir; la convention est arbitraire, nous la fixerons chaque fois.

Il suffit de faire la figure pour vérifier cet énoncé.

**15. Composition d'une translation et d'une rotation.** — Décomposons la translation en deux composantes: l'une  $T_p$ , parallèle à l'axe de rotation; l'autre T, normale à cet axe.

La première ne peut se composer avec la rotation; elle est de nature essentiellement différente. L'opération  $T_p A$ , qui est un déplacement hélicoïdal, est permutative; la translation  $T_p$  peut se faire à un instant quelconque de l'opération, en totalité ou en partie. Elle peut même être continue.

Considérons la translation T normale à l'axe. L'opération TA n'est pas permutative. Étudions séparément les opérations :

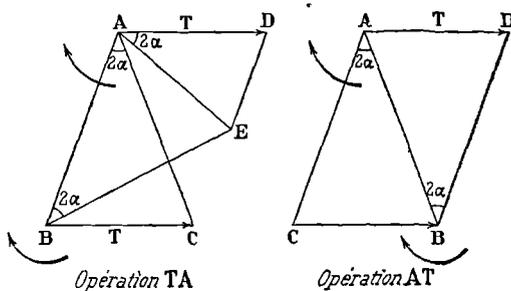


Fig. 2.

TA, AT.

Je vais montrer qu'elles valent des rotations de même grandeur et de même sens que A, autour d'axes parallèles à A.

Prenons comme plan du tableau un plan P normal à l'axe A et par conséquent parallèle à la translation T. Soit A la trace de l'axe et  $2\alpha$  la rotation dans le sens de la flèche.

Les opérations TA ou AT laissent une figure du plan P dans ce plan. D'ailleurs, la figure n'est pas modifiée. Si donc nous trouvons un point du plan que les opérations TA ou AT ne déplacent pas, nous concluons qu'elles sont équivalentes à une rotation unique autour d'un axe normal à P et passant par ce point. Les phénomènes sont en effet identiques pour tous les plans parallèles à P.

1° Construisons le triangle isocèle ABC d'angle A égal à  $2\alpha$  et dont le côté opposé est égal et parallèle à la translation T. Je dis que B n'est pas déplacé par l'opération TA et qu'on a :

$$T.A(2\alpha) = B(2\alpha).$$

En effet, la translation T amène B en C, la rotation ramène C en B. Donc l'opération vaut une rotation autour de l'axe B parallèle à A.

Je dis que cette rotation est  $2\alpha$ . Opérons en effet sur le point A. La translation l'amène en D, la rotation l'amène en E.

Évaluons l'angle ABE.

En supposant tracée la hauteur du triangle ABC, on voit que :

$$\overline{CAE} = \frac{\pi}{2} - 3\alpha, \quad \overline{BAE} = \frac{\pi}{2} - \alpha = \overline{ACB}.$$

D'ailleurs, par construction  $\overline{AE} = T$ ; donc les triangles ABC et ABE sont égaux; donc enfin l'angle ABE vaut  $2\alpha$ .

2° Construisons le même triangle isocèle que précédemment. Je dis que B n'est pas déplacé par l'opération AT et qu'on a :

$$A(2\alpha).T = B(2\alpha).$$

La rotation amène B en C; la translation ramène C en B. Donc B n'est pas déplacé. Opérons sur A. La rotation ne le déplace pas, la translation l'amène en D. Donc la rotation autour de B est bien  $2\alpha$ .

#### 16. Permutation d'une translation et d'une rotation. —

1° Il est possible de trouver deux translations T et T' telles qu'on ait :

$$T.A(2\alpha) = A(2\alpha).T' = B(2\alpha).$$

T' est égal à T, mais fait avec T l'angle  $2\alpha$  dans le sens de la rotation autour de l'axe A.

Considérons en effet la figure construite suivant les indications précédentes.

Opération TA. La translation T amène B en B', la rotation ramène B' en B.

Opération AT'. La rotation amène B en B'', la translation T' ramène B'' en B.

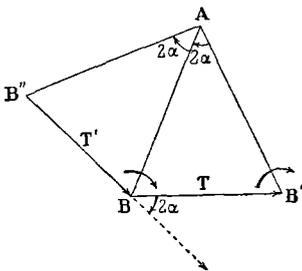


Fig. 3.

2° Il est possible de trouver deux axes parallèles, tels qu'on ait :

$$B(2\alpha) \cdot T = T \cdot B'(2\alpha).$$

On a en effet :  $TA = B$ ,  $AT = B'$ ;

$$TA \cdot T = BT, \quad T \cdot AT = TB'; \quad BT = TB'.$$

17. On peut superposer deux figures congruentes par une translation suivie d'une rotation (opération  $TA$ ) ou par l'opération inverse. — Prenons comme centres de sphères de même rayon deux *points homologues*  $O, O'$  (c'est-à-dire deux points appartenant respectivement aux deux figures et qui doivent coïncider à la fin de l'opération : ils sont évidemment disposés de même par rapport aux deux figures). Les sphères coupent les figures suivant deux figures homologues.

1° La translation  $T$  amène  $O'$  sur  $O$  : les sphères coïncident. Il s'agit donc d'amener en coïncidence des *figures congruentes* (superposables, mais non actuellement superposées) décrites sur la même sphère. Je dis que c'est possible par une rotation autour d'un axe  $OC$  qui doit évidemment passer par le centre de la sphère.

Représentons (fig. 4) la surface sphérique.

Réduisons les figures sphériques homologues chacune à deux points  $A$  et  $B, A'$  et  $B'$ . Joignons  $AA'$  et  $BB'$  par des arcs de grands cercles. Menons par les milieux de  $AA'$  et de  $BB'$  des grands cercles normaux  $aC$  et  $bC$ . Ils se coupent en  $C$ .

L'axe cherché passe par  $C$ . En effet, les triangles  $ABC$  et  $A'B'C$  sont superposables après une rotation de l'angle  $\widehat{ACA'} = \widehat{BCB'}$ .

2° Nous obtenons le même résultat en commençant par la rotation ci-dessus déterminée (le point  $O'$  restant fixe) et finissant par la translation (qui amène  $O'$  en  $O$ ).

REMARQUE I. — La translation dépend du choix des points homologues  $O$  et  $O'$ ; la rotation est la même à quelque groupe de deux points qu'on s'adresse. Appelons  $T$  la translation qui amène  $O'$  sur  $O$  et  $R$  la rotation;  $R$  sera la rotation autour d'un axe passant par  $O$ ,  $R'$  sera la même rotation autour d'un axe parallèle passant par  $O'$ .

L'équivalence des opérations ci-dessus étudiées s'exprime par l'équation :

$$TR = R'T,$$

dont l'exactitude est démontrée au § 16, 2°.

REMARQUE II. — Décomposons la translation  $O'O$  en une composante  $T_p$  parallèle à l'axe de rotation et une composante  $T_n$  normale à cet axe. Nous prouverons que la translation  $T_p$  reste la même

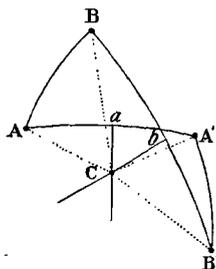


Fig. 4.

quels que soient les points homologues  $O, O'$ , choisis; mais  $T_n$  s'annule pour un certain choix. La superposition s'effectue alors au moyen d'un mouvement hélicoïdal.

**18. Déplacement résultant de deux rotations autour d'axes passant par le même point  $O$ .** — L'opération résultante est sûrement une rotation autour d'un axe passant par le point  $O$  que les deux rotations laissent immobiles.

Considérons les déplacements sur une sphère de centre  $O$ . Soit  $A$  et  $B$  les traces des axes, que nous appellerons *pôles de rotation*.

Soit  $2\alpha$  et  $2\beta$  les rotations correspondantes dirigées dans le sens des flèches. Considérons l'opération  $AB$ .

Menons le grand cercle  $AC$  faisant avec  $AB$  l'angle  $\alpha$  (demi-rotation) *en sens inverse* de la rotation  $A$ . Menons le grand cercle  $BC$  faisant avec  $AB$  l'angle  $\beta$  (demi-rotation) *dans le sens* de la rotation  $B$ . Je dis que le point  $C$  est le pôle de l'axe résultant cherché.

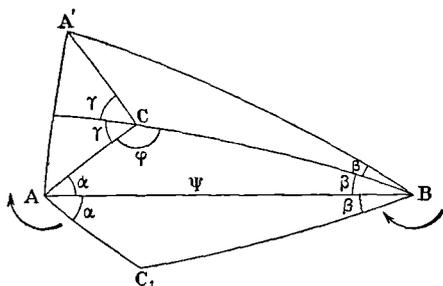


Fig. 5.

Il suffit de montrer que l'opération  $AB$  ne déplace pas le point  $C$ .

Faisons la figure  $AC_1B$  symétrique de  $ACB$  par rapport à  $AB$ . La rotation  $A(2\alpha)$  amène  $C$  en  $C_1$ ; la rotation  $B(2\beta)$  ramène  $C_1$  en  $C$ .

Calculons la rotation  $2\gamma$  autour de  $C$ . Appliquons l'opération  $AB$  au point  $A$  : il vient en  $A'$ .

Le triangle sphérique  $ABC$  donne :

$$\cos \gamma = -\cos \varphi = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \cos \Psi. \quad (1)$$

L'opération  $AB$  n'est pas permutative.

En recommençant la construction, on montrera que l'opération  $BA$  vaut une rotation  $C_1(2\gamma)$  autour du point  $C_1$  symétrique de  $C$  par rapport à  $AB$ . L'angle  $\gamma$  a la même valeur que précédemment. Il suffit d'appliquer l'opération  $BA$  au point  $B$ , pour voir que la rotation autour de  $C_1$  est de même sens que la rotation autour de  $C$ .

**19. Transpositions autour d'axes concourants.** — Il y a *transposition* autour d'un axe lorsque la rotation est de  $\pi$ ; le symbole de l'opération est  $A(\pi)$ . L'axe de symétrie qui effectue les transpositions, est un axe *binnaire* par définition.

*Deux transpositions successives autour de deux axes concourants*

valent une rotation, autour de leur perpendiculaire commune, double de celle qui amènerait le premier axe sur le second.

La construction du § 18 montre que le pôle C de l'axe cherché est le pôle du grand cercle AB.

Dans la formule (1), faisons :  $\alpha = \beta = \pi : 2$ . Il reste :  
 $\cos \gamma = -\cos \Psi$ ;  $2\gamma = 2\pi - 2\Psi$ , ou encore :  $2\gamma = -2\Psi$ .

On fera commodément la discussion des signes en traçant les figures sur un ballon de verre.

Réciproquement, on peut remplacer une rotation par deux transpositions.

On choisit arbitrairement l'un des axes de transposition dans le plan normal à l'axe de rotation donné; l'autre axe de transposition est alors déterminé.

COROLLAIRE. — Quand un système fini possède dans un plan  $q$  axes binaires et  $q$  seulement passant par le même point :

- 1° chacun d'eux fait avec le voisin un angle  $\pi : q$ ;
- 2° il existe un axe  $\Lambda$  d'ordre  $q$  normal au plan des axes binaires et passant par leur intersection.

Considérons en effet deux des axes L et L' faisant l'angle  $\alpha$ . Les deux transpositions valent une rotation  $2\alpha$  autour de la droite  $\Lambda$  normale à leur plan, rotation dans un sens ou en sens contraire suivant l'ordre des transpositions.

La rotation  $\Lambda(2\alpha)$  peut être appliquée à l'un des axes L et L'; elle doit redonner un axe binaire. Il résulte de là que tous les axes doivent faire entre eux des angles égaux et que  $\Lambda$  est bien un axe d'ordre  $q$ .

**20. Composition de rotations autour d'axes parallèles. —**

La construction du § 18 est applicable, mais la figure 5 devient plane. Le centre O de la sphère passe à l'infini; il faut poser  $\Psi = 0$ , dans la formule. D'où :

$$\gamma = \alpha + \beta.$$

L'axe de la rotation résultante est parallèle aux deux axes donnés. La rotation résultante vaut la somme algébrique des rotations composantes.

L'opération AB n'est pas permutative; on a :

$$A(2\alpha).B(2\beta) = C(2\alpha + 2\beta), \quad B(2\beta).A(2\alpha) = C_1(2\alpha + 2\beta).$$

ROTATIONS ÉGALES ET DE SIGNES CONTRAIRES. — Le point C passe à l'infini, la rotation résultante devient nulle. Deux rotations égales et

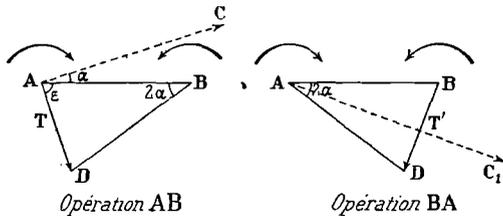


Fig. 6.

de signes contraires autour de deux axes parallèles, équivalent à une translation (rotation infiniment petite autour d'un axe infiniment éloigné).

1° Appliquons l'opération AB au point A. Il est amené en D;  $\overline{AD}$  mesure la translation :

$$\overline{AD} = T = 2\Delta \sin \alpha;$$

$\Delta$  est la distance des axes,  $\alpha$  est la demi-rotation.

La translation T est évidemment normale à la direction AC dans laquelle le point C fuit à l'infini.

2° Appliquons l'opération BA au point B. Il est amené en D :  $\overline{BD}$  mesure la translation T'. Elle a la même valeur que précédemment, est perpendiculaire à la direction AC, dans laquelle le point C, fuit à l'infini; enfin elle est symétrique de T par rapport à la normale à AB.

REMARQUE. — Nous aurions pu déduire ce théorème du § 15. Nous avons trouvé :

$$AT = B; \quad \text{d'où : } A^{-1}AT = T = A^{-1}B.$$

Deux rotations égales et de sens contraires autour de deux axes parallèles valent donc bien une translation.

**21. Transpositions autour d'axes parallèles.** — La proposition suivante se déduit immédiatement du théorème général; du reste, on la retrouve directement sans difficulté.

*Deux transpositions successives autour de deux axes parallèles équivalent à une translation parallèle à la perpendiculaire commune aux axes et double de celle qui amène le premier sur le second.*

On remarquera tout d'abord qu'une transposition peut être arbitrairement considérée comme une rotation de  $+\pi$  ou de  $-\pi$ . Deux transpositions autour d'axes parallèles rentrent donc, comme cas particulier, dans le cas des rotations égales et de signes contraires.

Pour obtenir le résultat, il suffit donc de poser  $2\alpha = \pi$ , dans la formule du paragraphe précédent; il vient  $2\Delta$  pour la translation. En second lieu, les translations T et T' sont perpendiculaires à des droites faisant l'angle  $\alpha$  (ici  $\pi : 2$ ) avec AB. Donc la translation cherchée est dirigée suivant AB.

Enfin la translation T correspond à l'opération commençant par A; donc la translation est bien dans le sens qui va du premier axe au second.

La réciproque est vraie : on peut remplacer une translation par deux transpositions autour d'axes perpendiculaires à la translation. L'un est arbitraire; l'autre est alors déterminé.

**22. Déplacements hélicoïdaux : décomposition en deux transpositions.** — L'opération hélicoïdale consiste en une rotation autour d'un axe et en une translation parallèle à cet axe.

Deux transpositions successives par rapport à deux axes A et B qui ne sont pas dans le même plan, valent un déplacement hélicoïdal qui a pour axe leur perpendiculaire commune PQ et qui est double du déplacement hélicoïdal qui amène A sur B.

Ce dernier déplacement a évidemment pour translation le vecteur  $\overline{PQ}$  et pour rotation l'angle  $\epsilon$ .

Par le point P, menons B' parallèle à B. Il résulte du § 19 que :

1° les transpositions successives autour de A et de B' valent une rotation autour de PQ ;

2° les transpositions successives autour de B' et de B valent une translation parallèle à PQ.

Or nous ne changeons pas les opérations en ajoutant deux transpositions successives autour de B', la transposition satisfaisant aux conditions :

$$T^2 = 1 = TT^{-1}.$$

Donc deux transpositions autour de deux axes qui ne sont pas dans le même plan, valent un déplacement hélicoïdal.

Réciproquement, tout déplacement hélicoïdal TR vaut deux transpositions autour d'axes A et B normaux à l'axe de la vis.

Choisissons arbitrairement l'un des axes B normal à la vis PQ. La longueur PQ est connue : c'est la moitié de la translation T.

Menons par le point P l'axe B' parallèle à B ; l'angle  $\widehat{APB'}$  est connu : c'est la moitié de la rotation R.

**23. Le déplacement résultant de plusieurs déplacements hélicoïdaux est un déplacement hélicoïdal.** — Soit deux déplacements hélicoïdaux TR et T'R'. Remplaçons-les respectivement par deux transpositions en choisissant, pour un des axes de chaque groupe de transpositions, la perpendiculaire commune aux vis. Les transpositions intermédiaires autour de cet axe se détruisent ; les quatre transpositions se réduisent donc à deux qui valent un déplacement hélicoïdal.

Donc deux, et par conséquent un nombre quelconque de déplacements hélicoïdaux, se composent en un déplacement hélicoïdal unique.

**24. Deux figures congruentes sont superposables au moyen d'un déplacement hélicoïdal.** — En effet, nous avons montré au § 17 qu'on peut superposer deux figures congruentes par une translation suivie d'une rotation (opération TR), c'est-à-dire par le produit de deux déplacements hélicoïdaux successifs :

$$TR = (T, 0)(0, R).$$

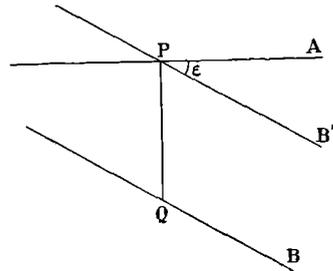


Fig. 7.

Donc on les peut superposer par un seul déplacement hélicoïdal convenablement choisi.

Reprenons de plus près la construction (fig. 8).

Pour amener les figures en coïncidence, il fallait transporter  $O'$  sur  $O$ , puis tourner de l'angle  $2\alpha$  autour de l'axe  $OR$ .

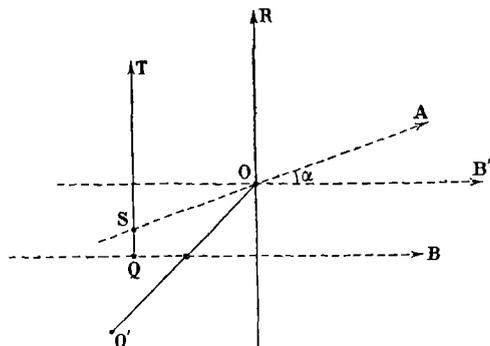


Fig. 8.

Menons  $OB'$  perpendiculaire au plan  $O'OR$ . Par le milieu de  $O'O$ , menons  $B$  parallèle à  $B'$ . Enfin dans le plan normal à  $OR$ , menons la droite  $A$  telle que l'angle  $AOB'$  vaille  $\alpha$ .

Les deux transpositions  $B, B'$ , amènent  $O'$  sur  $O$  et valent la translation. Les deux transpositions  $B', A$ , valent la rotation. Les deux transpositions  $B, A$ ,

valent la translation. Les deux transpositions  $B, A$ , valent un mouvement hélicoïdal dont la translation est  $2QS$  et dont la rotation est deux fois l'angle des droites  $A$  et  $B$ , soit précisément  $2\alpha$ .

Restent donc les transpositions  $B, A$ .

Menons la perpendiculaire commune  $QST$ . Les transpositions  $B, A$ , valent un mouvement hélicoïdal dont la translation est  $2QS$  et dont la rotation est deux fois l'angle des droites  $A$  et  $B$ , soit précisément  $2\alpha$ .

**25. Corollaires.** — 1° Quand deux corps égaux sont placés d'une manière quelconque dans l'espace, il existe toujours une droite qui, considérée comme appartenant au premier corps, coïncide avec son homologue dans le second corps.

C'est l'axe de la vis qui sert à effectuer le déplacement hélicoïdal. La translation amène les points homologues des deux droites en coïncidence; la rotation amène en coïncidence tous les autres points homologues, c'est-à-dire les figures congruentes.

2° La projection sur la vis de la droite  $\overline{OO'}$  qui joint deux points homologues quelconques, est constante. Elle est précisément égale à la translation ( $2\overline{SQ}$ ) du mouvement hélicoïdal.

3° Quels que soient les points homologues  $O'O$  choisis, la rotation  $R$  est la même, puisqu'elle est égale en grandeur et direction à la rotation du déplacement hélicoïdal.

Ce sont les propositions annoncées au § 17.

**26. Problème inverse.** — On donne le déplacement hélicoïdal; on demande de trouver le déplacement complexe équivalent (translation, rotation), l'axe de rotation passant par un point  $B$  déterminé à l'avance.

Représentons les rotations par des vecteurs terminés par un double fer. Menons par le point B deux rotations parallèles à la rotation A, égales et de sens contraires, et que nous représenterons par B (dans la direction de A) et  $B^{-1}$  en sens inverse.

1° Nous avons toujours le droit d'ajouter aux opérations deux rotations égales et de sens contraires; nous pouvons les effectuer dans l'ordre que nous voulons, à la condition que l'une vienne immédiatement après l'autre.

2° Une translation parallèle à des rotations en nombre quelconque, peut toujours être faite à un instant quelconque de l'opération complexe. Nous pouvons donc ne pas nous en occuper; il est entendu, par exemple, qu'on commencera par elle.

3° Toutes les opérations, dont nous nous occupons, sont associatives.

Ceci posé, la rotation A vaut les opérations suivantes :

$$A = A(B^{-1}B) = (AB^{-1})B = (BB^{-1})A = B(B^{-1}A).$$

Or les opérations  $AB^{-1}$  et  $B^{-1}A$  sont des translations normales aux axes. Composons-les avec la translation parallèle aux axes, il vient le théorème déjà énoncé : *Tout déplacement qui amène un corps sur un autre, peut être décomposé en une rotation suivie d'une translation, ou en une translation suivie d'une rotation.* La rotation a une grandeur et une direction invariables. La translation a une composante  $T_p$  parallèle à l'axe, de grandeur constante. Sa composante  $T_n$ , normale à l'axe, est variable en grandeur et direction suivant le point par où passe la rotation.

Les translations  $AB^{-1}$  et  $B^{-1}A$  sont (§ 20) de même longueur ( $2\Delta \sin \alpha$ ), et symétriquement placées par rapport à la droite AB. Elles font l'angle  $\alpha$  avec la normale à AB.

## 27. Théorèmes sur les plans de symétrie ou miroirs. —

I. *Le produit de deux réflexions est une rotation autour de l'intersection des miroirs.*

On voit immédiatement que si l'angle des miroirs est  $\alpha$ , la rotation équivalente au produit des réflexions est  $2\alpha$ .

Deux figures énantiomorphes d'une troisième sont donc nécessairement congruentes : on les pourra superposer par une rotation.

II. *Le produit d'une rotation et d'une réflexion sur un miroir qui passe par l'axe de rotation, est une réflexion sur un miroir passant également par cet axe.*

III. *Si q miroirs passent par une droite, ils font nécessairement des angles égaux, et la droite est un axe (première espèce) d'ordre q.*

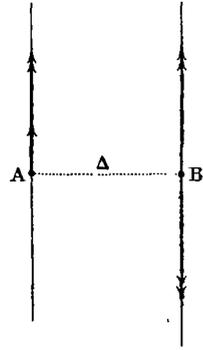


Fig. 9.

On voit immédiatement que le nombre des réflexions distinctes est  $2q$ ; les  $2q$  figures obtenues se décomposent en deux groupes de figures congruentes engendrés par l'axe d'ordre  $q$ .

IV. *Réciproquement s'il existe un axe d'ordre  $q$  et un miroir passant par cet axe, il en existe  $q$  faisant entre eux des angles égaux.*

C'est une application immédiate du principe de la multiplication des éléments de symétrie par d'autres éléments de symétrie. Nous reviendrons là-dessus en parlant des groupes d'opérations (§ 125).

**28. Une figure peut être superposée à une figure énantiomorphe au moyen d'une seule réflexion rotative.** — Il faut entendre par là : au moyen d'une rotation suivie ou précédée d'une réflexion sur un plan perpendiculaire à l'axe de la rotation; nous savons que l'opération complexe est permutative.

Ce théorème est l'analogie du théorème démontré au § 24 pour les figures congruentes.

Soit  $A'$  et  $A$  deux points homologues des figures énantiomorphes  $F'$  et  $F$  que nous voulons superposer.

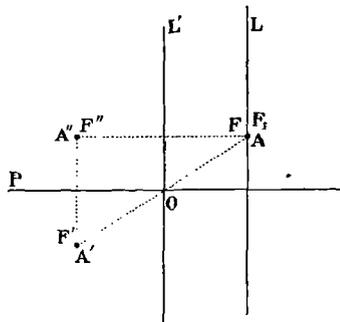


Fig. 10.

Prenons le point  $O$ , milieu de la droite  $AA'$ , comme centre d'inversion. Opérons sur la figure  $F'$ . Nous obtenons  $F_1$  énantiomorphe de  $F'$ , par conséquent congruente de  $F$ .

Nous pouvons amener  $F$  sur  $F_1$  par une rotation autour de l'axe  $L$  convenablement choisi. Nous venons donc de démontrer que nous pouvons superposer deux figures énantiomorphes par une inversion et une rotation. Allons plus loin.

Par le centre  $O$  d'inversion, menons la droite  $L'$  parallèle à  $L$ ; transposons  $F_1$  en  $F''$ . Nous savons (§ 11, 2<sup>o</sup>) que  $F''$  est l'image de  $F$  dans le miroir  $P$  qui passe par  $O$  et est normal à  $L'$ .

Donc nous amenons  $F$  à coïncider avec  $F'$  par une rotation autour de  $L$  (qui donne  $F_1$ ), une transposition autour de  $L'$  (qui donne  $F''$ ) et une réflexion sur  $P$ .

Mais les rotations autour des axes parallèles  $L$  et  $L'$  valent une rotation unique autour d'un axe parallèle aux premiers et par conséquent normal au plan  $P$ . Donc nous amenons  $F$  sur  $F'$  par une réflexion rotative.

C. Q. F. D.

## CHAPITRE II

### POLYÈDRES SYMÉTRIQUES

**29. Propositions générales.** — Nous ferons abstraction des faces et des arêtes des polyèdres pour ne considérer que leurs sommets. Tout polyèdre sera donc un assemblage de points distincts, en nombre limité, identiques et distribués d'une certaine manière autour de leur centre de gravité.

Un polyèdre symétrique possédera soit un centre de symétrie, soit un ou plusieurs axes de symétrie, soit un ou plusieurs plans de symétrie. Enfin nous admettrons qu'il peut posséder un plan de symétrie alterne (ou un axe de seconde espèce, ce qui revient au même); mais nous n'obtiendrons ainsi qu'un seul groupe distinct des groupes déjà obtenus.

*Tous les éléments de symétrie doivent se couper en un point, qui est le centre de symétrie dans le cas où il en existe un.* En effet, le centre de gravité de tous les sommets supposés également pesants doit se trouver séparément sur tous les éléments de symétrie : donc ceux-ci passent par le même point qui est le centre de gravité des sommets. On l'appelle encore *centre de figure* du polyèdre.

Lorsqu'il n'existe aucun élément de symétrie, le polyèdre est dit *asymétrique* (groupe 1 du tableau du § 40).

**30. Polyèdres symétriques dépourvus d'axes.** — Ils rentrent dans les groupes 2 et 3 du tableau; ils ont soit un centre C, soit un plan P; ils ne peuvent avoir d'autres éléments de symétrie.

En effet, ils ne peuvent avoir simultanément un centre et un miroir; nous savons que la coexistence de ces éléments entraîne l'existence d'un axe d'ordre pair perpendiculaire au miroir (§ 11).

Ils ne peuvent avoir qu'un centre de symétrie (§ 29).

Enfin il résulte du § 27 qu'ils ne peuvent avoir qu'un plan de symétrie. S'ils en avaient plusieurs, la droite d'intersection serait un axe (§ 27, III).

Nous sommes donc limités aux deux groupes :

groupe 2,    symbole C;                    groupe 3,    symbole P.

**31. Polyèdres symétriques à axe principal.** — On appelle *axe principal* un axe auquel tous les autres, s'il en existe, sont perpendiculaires, et auxquels tous les plans de symétrie, s'il en existe, sont parallèles ou normaux, pourvu d'ailleurs que l'ordre de symétrie de cet axe ne soit pas inférieur à celui des autres axes. Comme nous le verrons, les axes normaux à l'axe principal ne peuvent être que binaires.

La classification des polyèdres à axe principal repose sur les deux théorèmes suivants :

1° *Lorsqu'il existe un nombre total  $q$  de plans de symétrie se coupant suivant une même droite, cette droite est un axe d'ordre  $q$ .*

La démonstration est donnée au § 27.

2° *Lorsqu'il existe dans un plan  $q$  axes binaires (qui sont, bien entendu, régulièrement répartis), la normale à ce plan est nécessairement un axe d'ordre  $q$ .*

C'est ce que montre immédiatement la figure 11 dans le cas où  $q$  est pair, la figure 12 dans le cas où  $q$  est impair.

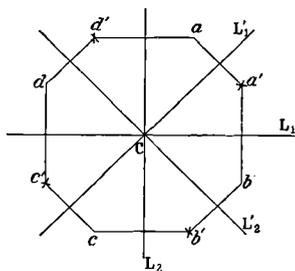


Fig. 11.

Soit (fig. 11) quatre axes binaires dans le plan du tableau. Plaçons-nous sur la normale au point d'intersection C. Donnons-nous le point  $a$  au-dessus du tableau et multiplions-le par tous les axes binaires. Nous trouvons de proche en proche : à l'aide de  $L_1$ , le point  $a'$  au-dessous du tableau ; à l'aide de  $L_2$ , le point  $b$  au-dessus du tableau ; ... et ainsi de suite. En tout huit points disposés sur deux carrés, situés dans les plans parallèles au tableau : l'un  $abcd$  au-dessus du tableau, l'autre  $a'b'c'd'$  au-dessous.

Donc la normale menée par le point C au plan du tableau est un axe quaternaire.

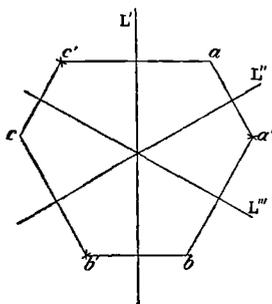


Fig. 12.

On voit immédiatement que la figure  $aa'bb'...$  ne traite pas de la même manière les quatre axes ; ils se séparent en deux groupes.

Reprenons la même construction avec trois axes binaires (fig. 12). A partir d'un point  $a$ , nous trouvons en tout six points distribués sur deux triangles équilatéraux dans deux plans parallèles au tableau. D'où un axe ternaire passant par C et normal au tableau. La figure  $aa'bb'cc'$  traite de la même manière les trois axes.

La construction est évidemment générale et s'applique à un nombre  $q$  quelconque.

**32. Polyèdres à axe principal d'ordre pair.** — Si l'axe principal  $\Lambda_{2q}$  existe seul, on a le groupe 4 du tableau.

Si nous adjoignons un centre  $C$ , nous introduisons par le fait même un plan  $\Pi$  normal à l'axe principal; et inversement. D'où le groupe 5 du tableau.

Supposons l'existence d'un axe binaire  $L_2$ , naturellement normal à l'axe principal. Par raison de symétrie, cela revient à introduire  $2q$  axes binaires régulièrement répartis dans le plan normal à  $\Lambda$ . Ils sont d'ailleurs de natures différentes, et leur nombre ne peut être supérieur à  $2q$  (§ 31). C'est le groupe 6 du tableau.

Même raisonnement pour les plans de symétrie  $P$  passant par  $\Lambda$ ; groupe 7.

Ajoutons un centre et un axe binaire; simultanément s'introduisent  $2q - 1$  autres axes binaires. Corrélativement nous créons les plans de symétrie normaux à tous les axes (groupe 8). Il est clair que, dans ce cas, les plans de symétrie contiennent les axes binaires.

Enfin nous pouvons introduire simultanément des axes binaires normaux à  $\Lambda$  et des miroirs passant par  $\Lambda$ , sans pour cela rendre nécessaires le centre  $C$  et le plan  $\Pi$ , à la condition que les axes et les plans alternent (groupe 9).

Les axes ne sont plus normaux aux plans; leur coexistence n'entraîne pas l'existence d'un centre.

**33. Polyèdres à axe principal d'ordre impair.** — Nous trouvons une classification toute semblable, à la différence près que l'axe étant d'ordre impair, la présence d'un centre  $C$  ne nécessite pas celle d'un plan de symétrie  $\Pi$  normal à l'axe. Le groupe 5, concernant les polyèdres à axe pair, se dédouble donc en deux groupes 11 et 12.

Les groupes 13 et 14 correspondent aux groupes 6 et 7, à la différence près que les plans et les axes sont maintenant de même nature (§ 31).

Le groupe 8 se dédouble en deux groupes 15 et 16.

Enfin le groupe 9 n'a pas d'équivalent.

**34. Coexistence d'axes multiples de même ordre passant par le même point.** — Prenons le point d'intersection des axes d'ordre  $p$  comme centre d'une sphère; considérons leurs traces sur cette sphère, traces qu'on appelle *pôles d'ordre  $p$* . Cherchons comment se distribuent les pôles sur la sphère.

*I. Les pôles d'ordre  $p$  sont les sommets de polygones réguliers sphériques recouvrant exactement la sphère.*

Soient  $P_1$  et  $P_2$  deux pôles tels qu'il n'existe pas de pôle plus voisin de  $P_1$  que  $P_2$  (fig. 13).

Faisons tourner le pôle  $P_1$  autour de  $P_2$  de l'angle  $2\pi : p$ : nous obtenons  $P_3$ .

Faisons tourner le pôle  $P_2$  autour de  $P_3$  de l'angle  $2\pi : p$  : nous obtenons  $P_4$ .

Et ainsi de suite.

Le polygone régulier  $P_1P_2P_3 \dots$  dont les côtés sont des arcs de grand cercle, se ferme nécessairement ; car s'il ne se fermait pas, on trouverait un pôle  $P_n$  compris entre  $P_1$  et  $P_2$ , ce qui est impossible par hypothèse.

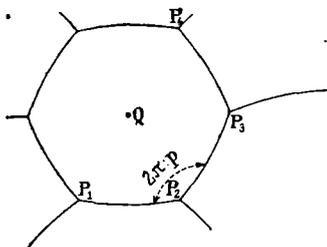


Fig. 13.

Ceci posé, faisons tourner le polygone sphérique obtenu tout entier de l'angle  $2\pi : p$  autour de l'un quelconque de ses sommets. Nous obtenons un polygone adjacent au premier ... ; et ainsi de suite. Nous couvrirons *exactement* la sphère sans empiètement des polygones,

car autrement nous finirions par trouver un pôle plus près de  $P_1$  que  $P_2$ .

On appelle *pôle du polygone* le centre  $Q$  de ce polygone.

II. Si les polygones précédents ont un nombre pair de côtés égal à  $q$ , les centres de ces polygones sont les pôles d'axes dont l'ordre est au moins égal à  $q : 2$ .

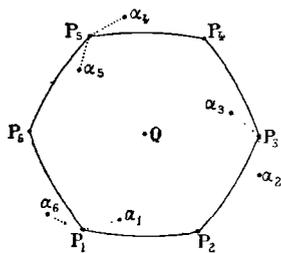


Fig. 14.

Soit, par exemple,  $q = 6$  (fig. 14).

Considérons le point  $\alpha_1$  et multiplions-le par le procédé qui nous a servi à multiplier les axes. Quand  $P_1$  tourne autour de  $P_2$  pour venir en  $P_3$ ,  $\alpha_1$  vient en  $\alpha_2$ . Quand  $P_2$  tourne autour de  $P_3$  pour venir en  $P_4$ ,  $\alpha_2$  vient en  $\alpha_3$ , ... et ainsi de suite. Nous obtenons ainsi six points disposés sur deux triangles équilatères sphériques de centre  $Q$ . Donc  $Q$  est le pôle d'un axe *au moins* ternaire. On

vérifie qu'on ne peut obtenir aucun autre point en usant des seuls axes d'ordre  $q$ .

III. Si les polygones précédents ont un nombre impair de côtés égal à  $q$ , les centres de ces polygones sont les pôles d'axes d'ordre  $q$ , et les milieux des côtés du polygone sphérique sont les pôles d'axes binaires.

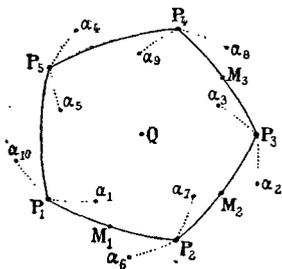


Fig. 15.

La figure 15 montre immédiatement qu'il en est ainsi. Nous procédons comme plus haut : le point  $\alpha_1$  donne successivement  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ ,  $\alpha_4$ ,  $\alpha_5$ . Mais, ces cinq points obtenus, nous pouvons recommencer. La rotation autour de  $P_1$  donne  $\alpha_6$  et  $\alpha_7$  ; la rotation autour de  $P_3$  donne  $\alpha_8$  et  $\alpha_9$  ; enfin la rota-

tion autour de  $P_5$  donne  $\alpha_{10}$ . En tout dix points, disposés sur deux pentagones réguliers de centres Q.

Les milieux M des côtés sont bien des pôles d'axes binaires.

**35. Limitation du nombre d'axes d'ordre supérieur à 2 existant simultanément. —**

LEMES. — On suppose les polygones décrits sur une sphère de rayon 1. L'aire totale de la sphère vaut  $4\pi$ .

L'aire d'un triangle sphérique est égale à la somme de ses angles diminuée de  $\pi$ .

L'aire d'un polygone sphérique de  $q$  côtés est égale à la somme de ses angles diminuée de  $\pi(q-2)$ .

IV. Soient tracés sur la sphère  $n$  polygones réguliers égaux la recouvrant entièrement. Chaque polygone a  $q$  côtés, et chacun des angles des polygones vaut  $2\pi : p$ . Écrivons que la somme des aires de ces  $n$  polygones vaut  $4\pi$  :

$$4\pi = n \left[ q \frac{2\pi}{p} - \pi(q-2) \right] = 2\pi nq \left[ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2} \right]. \quad (1)$$

Pour que cette relation soit satisfaite, il est nécessaire que :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{q} > \frac{1}{2} - \frac{1}{p}.$$

Seules les combinaisons suivantes sont admissibles :

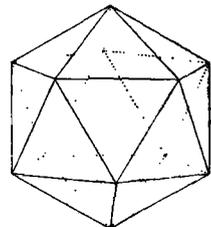
$$\left\{ \begin{array}{l} p=5 \\ q=3 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} q=5 \\ p=3 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} p=4 \\ q=3 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} q=4 \\ p=3 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} p=3 \\ q=3 \end{array} \right\}.$$

Étudions-les une à une. Les nombres  $p$  et  $q$  choisis, la formule (1) donne le nombre  $n$ .

**36. Polyèdres décemternaires. —**

**ICOSAÈDRE.**

La combinaison :  $p=5, q=3$ , donne sur la sphère  $n=20$  triangles équilatéraux, dont les sommets P sont des axes quinaires (au nombre de 6), dont les centres Q sont des axes ternaires (au nombre de 10), enfin dont les milieux des côtés sont des axes binaires (au nombre de 15). On obtient le solide représenté figure 16.



Icosaèdre  
Fig. 16.

**DODÉCAÈDRE PENTAGONAL.**

La combinaison :  $p=3, q=5$ , rentre dans la précédente; on joint par des arcs de grand cercle les pôles Q des triangles précédents. On obtient 12 pentagones dont les sommets sont des axes ternaires et les centres des axes quinaires (fig. 17).

Ces deux polyèdres admettent les mêmes éléments de symétrie :

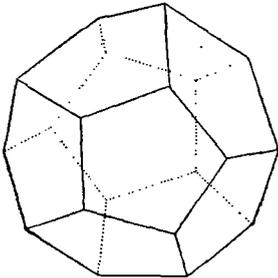
$$6L_5, \quad 10L_3, \quad 15L_2, \quad C, \quad 15P.$$

On démontre d'ailleurs qu'il peut exister d'autres polyèdres (non réguliers) dont la symétrie est :

$$6L_5, \quad 10L_3, \quad 15L_2.$$

Ils n'ont ni centres, ni plans de symétrie.

Les polyèdres décemternaires n'ont pas d'intérêt en Cristallographie, comme nous le verrons au § 59.



*Dodécaèdre pentagonal*

Fig. 17.

### 37. Polyèdres quaterternaires : combinaisons d'axes. —

1° La combinaison :  $p=4$ ,  $q=3$ , donne huit triangles sphériques trirectangles équilatéraux. Les sommets P sont les sommets d'un octaèdre régulier (fig. 18) et les pôles d'axes quaternaires. Le nombre de ces pôles est évidemment six; donc il existe trois axes quaternaires. Les huit centres Q de ces triangles sont nécessairement les pôles de quatre axes ternaires. Enfin les douze points M, milieux des côtés, sont les pôles des axes binaires.

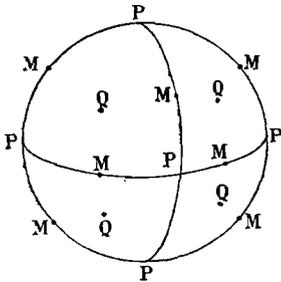


Fig. 18.

La combinaison d'axes qui résulte de cette disposition est donc :

$$3A_4, \quad 4L_3, \quad 6L_2.$$

2° La combinaison :  $p=3$ ,  $q=4$ , donne six carrés sphériques qu'on obtient en joignant les points Q par des arcs de grands cercles.

Nous savons que les pôles P peuvent alors n'être que des axes binaires. On obtient la combinaison d'axes :

$$3A_2, \quad 4L_3.$$

Il ne peut exister d'autres axes binaires. En effet, pour ne pas multiplier les axes ternaires, ces axes binaires devraient avoir leurs pôles aux points M, c'est-à-dire au milieu des arcs joignant les pôles des axes ternaires. Mais la présence de ces axes binaires rend quaternaires les axes de pôles P.

Il n'existe pas d'autres combinaisons admissibles.

3° Reste la combinaison :  $p=3$ ,  $q=3$ .

Elle correspond au tétraèdre régulier inscrit et rentre dans la précédente. Les pôles P et Q sont superposés. Il n'y a toujours que

quatre axes ternaires. Les pôles P correspondent, par exemple, aux sommets du tétraèdre, les pôles Q aux points diamétralement opposés.

**38. Polyèdres quaterternaires : classification. —**

1° COMBINAISON D'AXES :  $3\Lambda_2, 4L_3$ .

On peut d'abord supposer que les axes existent seuls : c'est le groupe 17 du tableau. Nous notons  $\Lambda$  les axes binaires pour rappeler qu'ils occupent la place des axes quaternaires dans l'autre combinaison.

Le tétraèdre régulier a bien les axes de ce groupe, mais il admet en plus six plans de symétrie passant deux par deux par les axes  $\Lambda$ . Il appartient donc au groupe 19 dont il constitue le type.

Si nous ajoutons un centre, les axes  $\Lambda$  étant pairs, nous introduisons par le fait des plans de symétrie  $\Pi$  normaux à ces axes. D'où le groupe 18 dont le type est le dodécaèdre pentagonal (§ 105).

2° COMBINAISON D'AXES :  $3\Lambda_4, 4L_3, 6L_2$ .

Deux groupes possibles.

Si les axes existent seuls, on a le groupe 20 (§ 103).

Si l'on suppose un centre (groupe 21), on arrive à la symétrie complète du cube.

**39. Groupe à plan de symétrie alterne ou à axe de seconde espèce. —** Ce groupe a fait plus de bruit à lui tout seul que les 23 autres; il n'a cependant aucun intérêt expérimental.

1° Supposons un plan de symétrie alterne d'ordre pair :  $\bar{\Lambda}_{2q}$ .

S'il est d'ordre 2, il produit exactement le même effet qu'un centre de symétrie.

Supposons-le donc d'ordre supérieur à 2, 6 par exemple.

Le point  $a$  (fig. 19) au-dessus du tableau (pris pour plan de symé-

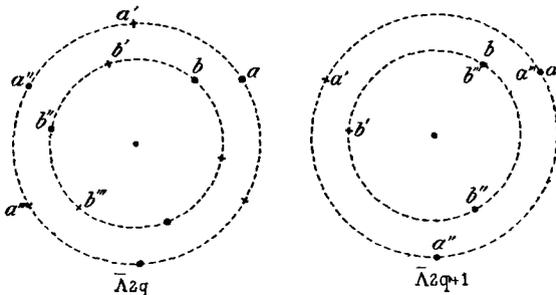


Fig. 19.

trie alterne) donne, par rotation de  $60^\circ$  et réflexion, le point  $a'$  au-dessous du tableau. Procédant de même indéfiniment, on trouve en tout six points formant deux triangles équilatéraux l'un au-dessus, l'autre au-dessous du tableau.

Recommençons pour un autre point *quelconque*  $b$ . On constate que la figure obtenue n'admet ni centre, ni plan de symétrie. Elle admet d'ailleurs autre chose qu'un axe ternaire; sa symétrie est donc différente de celles des 23 groupes déjà trouvés.

En définitive, l'axe  $\bar{\Lambda}_{2q}$  joue le rôle d'axe  $\Lambda_q$  pour deux figures énantiomorphes qui alternent entre elles.

J'ai déjà dit que Bravais signale et discute ces polyèdres : ce serait exagérer que de considérer leur mise en honneur *après Bravais* comme une marque transcendante de génie.

2° Supposons un plan de symétrie alterne d'ordre impair :  $\bar{\Lambda}_{2q+1}$ .

Il joue alors exactement le rôle d'un axe ordinaire de même ordre associé à un plan de symétrie normal.

Effectivement soit  $q=1$ . Du point  $a$  nous déduisons  $a'$ , puis  $a''$ , puis  $a'''$  qui est symétrique de  $a$  par rapport au plan de symétrie; puis  $a''''$  qui est symétrique de  $a'$ ; ... et ainsi de suite.

Comme nous pouvons recommencer pour un point *quelconque*  $b$ , il n'existe pas d'autre élément de symétrie.

40. Tableau des 24 groupes de polyèdres. —

Voici d'abord la liste des 23 groupes de Bravais obtenus en n'admettant comme éléments de symétrie que des axes de première espèce, des miroirs et un centre.

Polyèdres asymétriques	pas d'éléments de symétrie .	1
<hr/>		
Polyèdres dépourvus d'axes	C, . . . . .	2
	P. . . . .	3
<hr/>		
Polyèdres possédant un axe principal d'ordre pair $\Lambda_{2q}$	» . . . . .	4
	C, $\Pi$ , . . . . .	5
	$qL_2, qL'_2$ , . . . . .	6
	$qP, qP'$ , . . . . .	7
	C, $\Pi, qL_2, qL'_2, qP, qP'$ , . . . . .	8
	$2qL_2, 2qP'$ . . . . .	9
<hr/>		
Polyèdres possédant un axe principal d'ordre impair $\Lambda_{2q+1}$	» . . . . .	10
	C, . . . . .	11
	$\Pi$ , . . . . .	12
	$(2q+1)L_2$ , . . . . .	13
	$(2q+1)P$ , . . . . .	14
	$(2q+1)L_2, C, (2q+1)P$ , . . . . .	15
	$(2q+1)L_2, \Pi, (2q+1)P$ . . . . .	16
<hr/>		
Polyèdres quaterternaires	$3\Lambda_2, 4L_3$ , . . . . .	17
	$3\Lambda_2, 4L_3, C, 3\Pi$ , . . . . .	18
	$3\Lambda_2, 4L_3, 6P$ , . . . . .	19
	$3\Lambda_4, 4L_3, 6L_2$ , . . . . .	20
	$3\Lambda_4, 4L_3, 6L_2, C, 3\Pi, 6P$ . . . . .	21
<hr/>		
Polyèdres décemternaires	$6\Lambda_5, 10L_2, 15L_2$ , . . . . .	22
	$6\Lambda_5, 10L_3, 15L_3, C, 15P$ . . . . .	23

Le 24<sup>e</sup> groupe a pour symbole  $\bar{\Lambda}_{24}$ .

Il possède un plan de symétrie alterné d'ordre pair, ou, si l'on veut, un axe de symétrie de seconde espèce d'ordre pair.

RAPPEL DES NOTATIONS EMPLOYÉES DANS CE TABLEAU.

On dit qu'il existe un axe *principal* quand un seul axe est d'ordre supérieur à 2. On le représente par  $\Lambda$ .

Quand plusieurs axes sont d'ordre supérieur à 2, ce sont les plus élevés qui sont notés  $\Lambda$ .

Le plan de symétrie normal à l'axe  $\Lambda$  est noté  $\Pi$ ; les autres sont notés  $P$ . Quand les axes binaires ne sont pas de même espèce, on les distingue en écrivant  $L_2$  et  $L'_2$ ; les plans de symétrie normaux à ces axes sont notés  $P$  et  $P'$ .

**41. Exemple simple des groupes pour un axe quaternaire.**

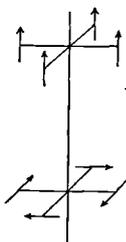
— Réalisons des exemples des six groupes 4 à 9 et 24 du tableau pour un axe quaternaire. Intentionnellement les figures ne représentent pas de spolyèdres convexes. En effet, nous avons pris le mot *polyèdre* pour désigner un assemblage quelconque fini de points pouvant figurer les sommets d'un polyèdre.

Nous ajouterons au nom du groupe le nom de la classe telle qu'elle sera définie plus loin (§ 89).

GRUPE 4. SYMBOLE :  $\Lambda_4$ . CLASSE 4. TÉTARTOÉDRIE.

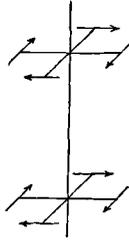
La figure 20 représente la combinaison de points correspondants. Il n'y a aucun autre élément de symétrie qu'un axe quaternaire.

GRUPE 5. SYMBOLE :  $\Lambda_4, C, \Pi$ . CLASSE 18. HÉMIÉDRIE PARAMORPHE.



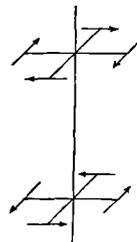
Groupe 4  
Tétartoédrie  
 $\Lambda_4$

Fig. 20.



Groupe 5  
Hémiédrie à faces  
parallèles  $C, \Pi$

Fig. 21.



Groupe 6  
Hémiédrie holoaxe  
 $2L, 2L'$

Fig. 22.

Il n'existe pas de plan de symétrie passant par  $\Lambda_4$ , vu la rotation des flèches dans le même sens pour chacune des figures planes. Si on regarde la figure 21 en se plaçant au loin sur l'axe principal, le sens de rotation des flèches n'est pas le même suivant le bout de l'axe sur lequel on se trouve. Donc on changerait le sens des flèches qu'on n'obtiendrait pas pour cela un assemblage différent du premier.

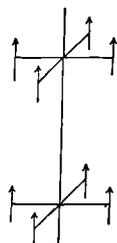
GRUPE 6. SYMBOLE :  $\Lambda_4, 2L, 2L'$ . CLASSE 8. HÉMIÉDRIE HOLOAXE.

Pas de plan de symétrie passant par l'axe (fig. 22), vu la rotation

des flèches dans le même sens pour chacune des figures planes. Deux des quatre axes binaires sont parallèles aux droites joignant les centres des flèches ; les deux autres bissectent les angles formés par les premiers.

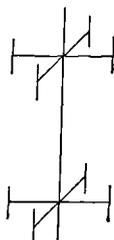
Quand on se place au loin sur l'axe principal, d'un côté ou de l'autre, on voit les flèches de la figure plane la plus rapprochée tourner dans le sens des aiguilles d'une montre ; les flèches de la figure plane la plus éloignée tournent en sens inverse. Donc en changeant le sens des flèches, on obtient une figure *non superposable* à la précédente, *énantiomorphe* par définition.

GRUPE 7. SYMBOLE :  $\Lambda_4$ ,  $2P$ ,  $2P'$ . CLASSE 22. HÉMIÉDRIE HÉMIMORPHE.  
On vérifie (fig. 23) qu'en changeant le sens des flèches, on n'obtient



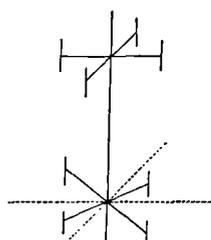
Groupe 7  
*Antihémédrie*  
 $2P, 2P'$

Fig. 23.



Groupe 8  
*Forme holédrie*  
 $2L, 2L', C, 2P, 2P', \Pi$

Fig. 24.



Groupe 9  
*Forme holédrie*  
 $4L, 4P^2$

Fig. 25.

pas un assemblage différent du premier, sauf sa position accidentelle dans l'espace. Les deux bouts de la figure sont constitués différemment.

GRUPE 8. SYMBOLE :  $\Lambda_4$ ,  $2L$ ,  $2L'$ ,  $C$ ,  $2P'$ ,  $2P$ ,  $\Pi$ . CLASSE 26. HOLOÉDRIE.

Les axes binaires (fig. 24) sont dans les plans de symétrie passant par l'axe principal.

GRUPE 9. SYMBOLE :  $\Lambda_4$ ,  $4L$ ,  $4P'$ .

L'assemblage est représenté figure 25. Les quatre plans  $P$  passent par les quatre droites horizontales. Les axes sont bissecteurs des angles des dièdres.

GRUPE 24. SYMBOLE :  $\bar{\Lambda}_4$ . CLASSE 15.

Il suffit de prendre n'importe où une autre petite droite verticale initiale et de la multiplier par tous les éléments de symétrie du groupe précédent : on supprimera ainsi les plans et les axes de symétrie dans la figure résultant de la superposition des deux figures 25 obtenues. Il ne reste qu'un plan de symétrie alterne d'ordre 4, ou un axe de seconde espèce du même ordre.

**42. Autres exemples. Axe de révolution.** — Supposons l'existence d'un axe de révolution  $\Lambda_\infty$ ; nous devons le considérer comme pair.

Les points sont placés sur des circonférences situées dans des plans perpendiculaires à l'axe; pour donner plus de généralité à nos représentations, nous devons fixer un sens de circulation sur ces circonférences.

GRUPE 4. — Un système quelconque de circonférences perpendiculaires à l'axe ne possède ni centre, ni axe binaires. *Si les circonférences ont un sens de circulation, il n'y a pas de plan de symétrie passant par l'axe.*

Le symbole se réduit à  $\Lambda_\infty$ ; nous sommes dans le groupe 4.

GRUPE 5. — Tout en maintenant un sens de circulation sur les circonférences (ce qui élimine les plans de symétrie passant par l'axe), nous pouvons choisir le système de circonférences de manière qu'il existe un centre C. Il existera alors nécessairement un plan  $\Pi$  normal à l'axe (§ 11). Le symbole est :  $\Lambda_\infty, C, \Pi$ .

*Exemple : cylindre tournant, vecteur axial.*

GRUPE 6. — Maintenons un sens de circulation et choisissons le système des circonférences de manière qu'il y ait un axe binaire normal à l'axe principal. Corrélativement il existe une infinité d'axes qui sont naturellement de même espèce. Le symbole est :  $\Lambda_\infty, \infty L_2$ .

*Exemple : cylindre régulièrement tordu, vis cylindrique.*

Il y a deux formes non superposables : on peut tordre dans deux sens différents.

GRUPE 7. — Pour introduire des plans de symétrie, il faut supprimer le sens de circulation. Nous ne voulons ni centre, ni axe de symétrie; le solide ne doit pas être fait de même suivant les deux bouts; autrement dit, l'axe principal ne doit pas être doublé.

Le symbole est :  $\Lambda_\infty, \infty P$ .

*Exemple : tronc de cône; généralement un solide quelconque de révolution; vecteur polaire.*

GRUPES 8 et 9. — Ils se confondent évidemment, car les axes binaires et les plans étant en nombre infini, il n'y a pas à distinguer si les axes alternent avec les plans ou sont dans les plans.

Le symbole est :  $\Lambda_\infty, \infty L, C, \infty P, \Pi$ .

*Exemple : un cylindre terminé par deux sections droites.*

**43. Remarque sur le nombre des polyèdres d'un même groupe.** — A. Dans chaque *groupe* possédant un axe principal, il y a autant de *sous-groupes* qu'on peut prendre de valeurs différentes pour  $q$ , de 1 à  $\infty$ .

*Chaque sous-groupe peut lui-même se diviser en groupes du troisième ordre dont les différentes formes, en nombre infini, peuvent être dérivées d'un polyèdre type.*

Expliquons ces propositions.

Prenons comme exemple, dans le groupe 8, les polyèdres de symbole :

$$\Lambda_1, 2_2L, 2L'_2, C, 2P, 2P', II.$$

Le polyèdre type du *sous-groupe* est un prisme droit à base carrée. *Tout en négligeant les dimensions absolues*, nous pouvons créer une infinité de prismes droits à base carrée, en modifiant le rapport de la longueur du côté du carré servant de base, à la longueur des arêtes latérales.

Toujours dans le groupe 8, considérons le sous-groupe :

$$L_2, L'_2, L''_2, C, P, P', P''.$$

Le polyèdre type est un prisme droit à base rectangle ou à base rhombe. Nous pouvons ici trouver deux infinités de groupes du troisième ordre, en modifiant les rapports des longueurs de deux espèces d'arêtes à la longueur de la troisième.

*B.* Considérons maintenant un groupe du troisième ordre.

Il existe dans chaque groupe du troisième ordre une infinité de polyèdres qui tous peuvent se déduire d'un polyèdre type. La proposition est fondamentale ; mais comme elle sera développée tout au long du Chapitre VI, je n'insiste pas pour l'instant.

### Projection stéréographique.

Pour représenter les faces des cristaux, on emploie couramment la projection stéréographique des pôles des faces. Afin d'éviter au lecteur de se reporter aux traités de Géométrie, nous rappellerons (le plus souvent sans démonstration) la suite des théorèmes. On n'oubliera pas que le mot *inversion* est pris ici dans un sens très différent du sens défini au § 11.

**44. Inversion par rapport à un point.** — Une figure  $F'$  est la transformée par inversion d'une autre figure  $F$  quand les points homologues des deux figures sont respectivement sur des droites passant par le point  $O$ , dit *pôle d'inversion*, à des distances telles que leur produit soit un nombre constant :

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'} = C^{\text{te}}. \quad (1)$$

I. Considérons deux points  $A, B$ , et leurs inverses  $A', B'$ . En vertu de la relation (1), ils forment un quadrilatère inscriptible. Donc les angles marqués  $\alpha$  sont égaux.

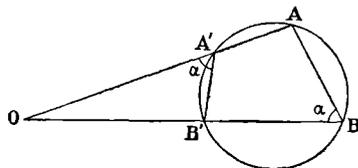


Fig. 26.

Si les points  $A$  et  $B$  deviennent très proches, les droites  $OA$  et  $OB$  se superposent. D'où la conséquence : les tangentes aux points homo-

logues de deux courbes inverses font le même angle (en sens inverse) avec le rayon vecteur.

D'où enfin le théorème : deux courbes se coupent sous le même angle que leurs inverses.

II. L'inverse d'un cercle est un cercle : la ligne des centres et les tangentes communes extérieures passent évidemment par le pôle.

Si le pôle est sur le cercle à transformer, le théorème subsiste ; mais le cercle inverse, ayant des points à l'infini, devient une droite.

L'inverse d'une sphère  $S$  est une sphère  $S'$ .

En effet, menons la droite  $D$  qui passe par le pôle et le centre de la sphère  $S$ . L'inverse  $S'$  l'admet comme axe de révolution.

Menons un plan par cette droite ; il coupe la sphère  $S$  suivant un cercle  $C$  dont l'inverse  $C'$  est un cercle. La surface  $S'$  s'obtient en faisant tourner  $C'$  autour de la droite  $D$ . Donc c'est une sphère.

Si le pôle est sur la sphère à transformer, l'inverse est un plan.

L'inverse  $C'$  d'un cercle  $C$  dont le plan ne passe pas par le pôle est un cercle. En effet, menons deux sphères  $S_1$  et  $S_2$  par ce cercle  $C$  ; les inverses sont des sphères  $S'_1$  et  $S'_2$  qui se coupent suivant l'inverse  $C'$  de  $C$ . Donc  $C'$  est un cercle.

**45. Projection stéréographique.** — Soit à représenter une sphère sur un plan. Comme la sphère n'est pas *développable*, nous devons choisir un mode de correspondance point par point.

Convenons de représenter un point  $A$  par sa perspective  $A'$  sur le

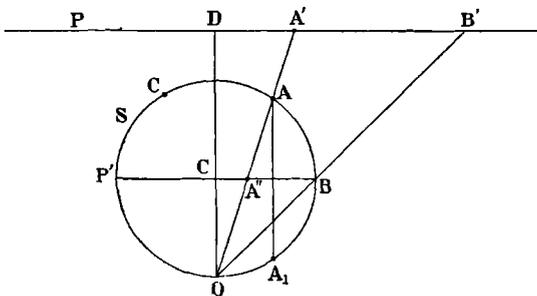


Fig. 27.

plan  $P$ , normal à la droite  $OC$  qui passe par le point de vue  $O$  et le centre  $C$  de la sphère (fig. 27).

Le plan  $P$  pouvant être considéré comme l'inverse de la sphère par rapport au pôle  $O$  (§ 44), nous sommes assurés que la projection précédente (dite *stéréographique*) con-

serve les angles, et que tout cercle tracé sur la sphère est transformé en un cercle tracé sur le plan.

Tous les points de la sphère qui sont au-dessus du plan diamétral  $P'$  normal à  $OD$ , se projettent dans le cercle de centre  $D$  et de rayon  $DB'$  ; tous les points qui sont au-dessous, se projettent hors de ce cercle jusqu'à l'infini.

Les grands cercles de la sphère, coupant le cercle  $P'$  suivant deux

points diamétralement opposés, se projettent suivant des cercles passant par les extrémités d'un diamètre du cercle  $DB'$ .

Les grands cercles de la sphère, passant par  $O$ , se projettent suivant des droites passant par le point  $D$ .

Pour représenter toute la sphère dans une portion finie du plan, on convient de donner au point  $A_1$  la même projection stéréographique qu'au point  $A$ . On les représente avec un signe distinctif particulier, suivant qu'ils sont au-dessus ou au-dessous du plan.

Par exemple, les points  $C$  et  $A_1$  de la figure 27 sont représentés comme l'indique la figure 28.

Il est évident que les projections obtenues sur tous les plans  $P$  normaux à  $OCD$  sont semblables entre elles. Nous convenons de choisir comme tableau le plan  $P'$  qui passe par le centre de la sphère.

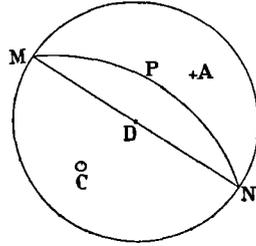


Fig. 28.

#### 46. Représentation des faces d'un polyèdre. Conventions.

— D'un point  $O$  pris dans le polyèdre comme centre, traçons une sphère  $S$ . Du point  $O$  abaissons des perpendiculaires sur toutes les faces du polyèdre et déterminons leurs traces sur la sphère : *ce sont les pôles des faces*.

Un polyèdre est donc représenté par un certain nombre de points sur la sphère  $S$ . Nous aurons sa représentation sur un plan, en construisant les projections stéréographiques des pôles.

Les pôles des faces *qui sont en zone* (§ 51), sont sur un grand cercle de la sphère  $S$ . Leurs points figuratifs sont donc sur un cercle  $MN$  passant par les extrémités d'un diamètre du cercle qui limite la projection stéréographique.

Si une face appartient à deux zones, son point figuratif est à l'intersection des circonférences de zone correspondantes.

CONVENTIONS. — Par la suite, nous représenterons les plans de symétrie par des traits PLEINS. Comme ils passent au centre du polyèdre, ce sont des cercles tels que  $MPN$ , ou des diamètres  $MDN$ .

Les lignes de construction seront des traits interrompus.

Les axes seront représentés par leurs pôles auprès desquels on inscrira leur ordre comme cote.

## CHAPITRE III

### RÉSEAUX

Nous étudions dans ce Chapitre la théorie des réseaux et de leur symétrie, indépendamment de toute application.

**47. Définition des réseaux (Bravais).** — Des points géométriques sont distribués suivant un *réseau*<sup>1</sup>, quand ils sont aux sommets de parallélépipèdes identiques, parallèles entre eux, accolés, c'est-à-dire systématiquement empilés (fig. 29).

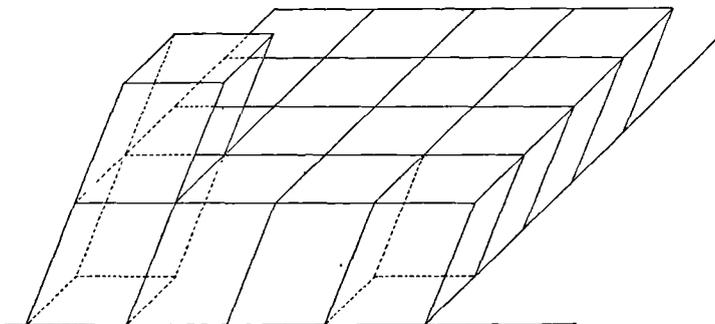


Fig. 29.

Pour réaliser cet empilement, on pose sur un plan une couche de parallélépipèdes de manière à ne laisser aucun vide et à faire coïncider les sommets quatre par quatre. On superpose ensuite les couches de manière que les sommets de deux couches consécutives coïncident. *C'est l'ensemble des points formant les sommets (qui coïncident huit par huit) qu'on appelle réseau.*

<sup>1</sup> Bravais comparait les *plans réticulaires* à des *filets*, d'où le nom de *réseaux* qu'il leur donnait. Les points qui sont aux sommets des mailles planes, étaient donc les *nœuds* des cordes du filet. Il appelait *assemblage* le système des points dans l'espace, ce qu'aujourd'hui nous appelons *réseau*.

Nous conserverons le mot *assemblage* pour désigner un système de points *géométriques* ou *matériels régulièrement distribués dans l'espace*, mais qui ne sont pas nécessairement aux sommets de parallélépipèdes empilés. Le réseau est donc un assemblage; mais il existe des assemblages qui ne sont pas des réseaux.

Les points sont les *nœuds* du réseau; les droites qui passent par au moins deux nœuds sont les *rangées*; les plans qui passent par au moins trois nœuds sont les *plans réticulaires*; le parallélépipède générateur est la *maille*.

Nous définissons *par construction* trois systèmes de rangées et trois plans réticulaires.

Mais, comme nous allons le voir, il existe une infinité de rangées et de plans réticulaires. Une infinité de parallélépipèdes différents pourraient servir de maille génératrice et fourniraient le même système de points.

De la constitution du réseau découlent immédiatement les propositions suivantes.

I. Toute droite qui passe par deux nœuds (rangée) passe par une infinité de nœuds.

II. Tout plan qui passe par trois nœuds (plan réticulaire) passe par une infinité de nœuds.

III. Toute droite parallèle à une rangée et qui passe par un nœud, est une rangée.

IV. Prenons un nœud pour origine des vecteurs; la résultante de plusieurs vecteurs qui aboutissent à des nœuds, aboutit à un nœud.

**48. Éléments limitrophes et conjugués.** — Deux rangées parallèles sont *limitrophes* lorsqu'il n'y a pas de nœuds compris entre elles.

Deux plans réticulaires parallèles sont *limitrophes* lorsqu'il n'y a pas de nœuds compris entre eux.

Deux rangées sont *conjuguées* lorsque le système de parallélogrammes construit sur elles renferme tous les nœuds du plan qu'elles déterminent. Par exemple (fig. 30), les rangées OA et OB sont conjuguées, les rangées OA et OC ne le sont pas.

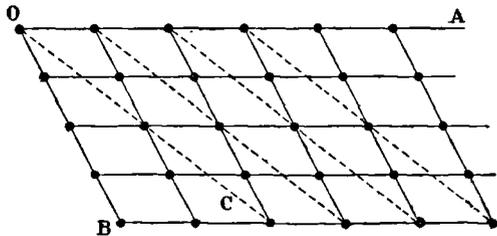


Fig. 30.

Un plan réticulaire est *conjugué* d'une rangée, lorsque le réseau construit avec les nœuds du plan

et de la rangée renferme tous les nœuds du système.

Même définition pour trois rangées conjuguées.

On appelle plans conjugués les trois plans déterminés par trois rangées conjuguées.

49. **Étude analytique d'un réseau. Nœuds et rangées.** — Prenons pour origine des coordonnées un nœud, et comme axes de coordonnées généralement obliques trois rangées conjuguées. Soit  $a, b, c$ , les distances de deux nœuds consécutifs sur  $Ox, Oy, Oz$ .

I. Tout nœud a pour coordonnées :

$$ma, \quad nb, \quad pc,$$

où  $m, n, p$ , sont des nombres entiers.

Pour ne pas traîner les *paramètres*  $a, b, c$ , convenons de mesurer les longueurs :

avec l'unité  $a$ , sur l'axe  $Ox$ ,  
 $b$ ,  $Oy$ ,  
 $c$ ,  $Oz$ .

Les coordonnées deviennent :

$$x = m, \quad y = n, \quad z = p.$$

Tout nœud a pour coordonnées trois nombres entiers quelconques.

II. Une rangée quelconque passant par l'origine a pour équation :

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p}; \quad (1)$$

$m, n, p$ , sont trois nombres entiers. On les appelle *caractéristiques* de la rangée, *s'ils sont premiers entre eux*. Sinon on appelle *caractéristiques* de la rangée, les trois nombres  $m', n', p'$  premiers entre eux et proportionnels à  $m, n, p$ .

III. Une rangée parallèle à la rangée (1) a pour équation :

$$\frac{x - m_1}{m} = \frac{y - n_1}{n} = \frac{z - p_1}{p},$$

où  $m_1, n_1, p_1$ , sont des nombres entiers : ce sont les coordonnées d'un nœud par lequel passe la rangée considérée. On peut encore l'écrire :

$$nz - py = M, \quad px - mz = N, \quad my - nx = P,$$

où  $M, N, P$ , sont des entiers.

D'après leurs expressions,  $M, N, P$ , sont encore des entiers si on a pris le soin de diviser  $m, n, p$ , par leur plus grand commun diviseur ; en d'autres termes, si  $m, n, p$ , sont les *caractéristiques* de la rangée considérée.

IV. Deux rangées du plan  $zy$  et qui ont mêmes *caractéristiques*,  $n, p$ , sont limitrophes quand les  $M$  qui leur correspondent diffèrent d'une unité ; car  $M$ , qui doit être entier, ne peut avoir une moindre variation.

V. Deux rangées qui ont pour équations caractéristiques :

$$\frac{z}{p} = \frac{y}{n}, \quad \frac{z}{p'} = \frac{y}{n'},$$

sont conjuguées dans le plan  $zy$ , si l'on a :

$$np' - n'p = \pm 1. \quad (2)$$

En effet, la rangée limitrophe de la première de ces rangées a pour équation :

$$nz - py = \pm 1. \quad (3)$$

Le premier nœud de la seconde rangée a pour coordonnées :

$$z = p', \quad y = n'.$$

Il doit être sur la rangée limitrophe (3); d'où la condition (2).

**50. Plans réticulaires; indices.** — I. L'équation d'un plan réticulaire passant par l'origine est :

$$qx + ry + sz = 0,$$

où  $q, r, s$ , sont des nombres entiers (*indices rationnels*).

Écrivons en effet qu'il passe par deux nœuds  $m, n, p$ , et  $m', n', p'$ , outre le nœud origine.

D'où les conditions :

$$qm + rn + sp = 0, \quad qm' + rn' + sp' = 0;$$

$$\frac{q}{np' - pn'} = \frac{r}{pm' - mp'} = \frac{s}{mn' - nm'}.$$

Les dénominateurs de ces fractions sont évidemment des nombres entiers.

Si  $q, r, s$ , sont premiers entre eux, ce sont les caractéristiques du plan. Sinon on les divisera par leur plus grand commun diviseur pour avoir les *caractéristiques* ou *indices* du plan.

II. Un plan réticulaire quelconque a pour équation :

$$qx + ry + sz = K,$$

où  $q, r, s$ , sont les caractéristiques,  $K$  un entier quelconque.

III. Deux plans réticulaires parallèles (ayant par conséquent mêmes caractéristiques  $q, r, s$ ,) sont limitrophes si les paramètres  $K$  qui leur correspondent diffèrent d'une unité.

IV. Un plan et une rangée passant par l'origine sont conjugués si l'on a :

$$mq + nr + ps = \pm 1.$$

Il faut écrire que le premier nœud de la rangée dont l'équation

est :

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p},$$

se trouve sur le plan limitrophe du plan donné :

$$qx + ry + sz = 0.$$

D'où la condition écrite ci-dessus.

**51. Zones.** — Lorsque les intersections de plusieurs plans réticulaires sont parallèles, on dit qu'ils forment une *zone*. Une zone est

donc définie par son *axe*, droite passant par l'origine et parallèle aux intersections.

Soit  $q_1, r_1, s_1$ , et  $q_2, r_2, s_2$ , les caractéristiques de deux plans de la zone; leur intersection satisfait aux équations :

$$\begin{aligned} q_1x + r_1y + s_1z &= 0, \\ q_2x + r_2y + s_2z &= 0; \\ \frac{x}{r_1s_2 - s_1r_2} &= \frac{y}{s_1q_2 - q_1s_2} = \frac{z}{q_1r_2 - r_1q_2}. \end{aligned}$$

L'intersection, axe de la zone, a donc pour caractéristiques :

$$m = r_1s_2 - s_1r_2, \quad n = s_1q_2 - q_1s_2, \quad p = q_1r_2 - r_1q_2.$$

Considérons une seconde zone définie par son axe de caractéristiques  $m', n', p'$ .

Le plan Q, R, S, qui appartient simultanément aux deux zones, doit être parallèle aux axes des deux zones. Ses caractéristiques satisfont aux équations :

$$\frac{Q}{np' - pn'} = \frac{R}{pm' - mp'} = \frac{S}{mn' - nm'}.$$

Elles sont donc entre elles en rapports rationnels. D'où cette loi connue sous le nom de *règle des zones* : *Tout plan contenu dans deux zones est parallèle à un plan réticulaire.*

S'il passe par un nœud, c'est un plan réticulaire.

Connaissant les caractéristiques  $m, n, p$ , de l'axe d'une zone, on vérifie immédiatement l'exactitude des caractéristiques  $q, r, s$ , d'un plan dont on sait qu'il appartient à la zone.

Écrivons en effet que la droite :

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p},$$

est dans le plan :  $qx + ry + sz = 0$ .

Il vient la condition :

$$mq + nr + ps = 0.$$

L'importance des zones tient à ce qu'il est facile de vérifier si plusieurs faces *réfléchissantes* d'un solide sont en zone. Montons-le sur la platine d'un goniomètre approprié, de manière que l'axe de zone soit parallèle à l'axe de rotation du goniomètre. Par simple rotation, on amène successivement la réflexion à se faire sur les faces de la zone, tout comme pour les faces d'un prisme dans l'expérience ordinaire de la mesure des indices.

**52. Théorème sur les aires des parallélogrammes et les volumes des mailles.** — I. Considérons un plan réticulaire quelconque de symbole  $qrs$ . *L'aire S (qrs) du parallélogramme construit*

sur les nœuds de deux rangées conjuguées quelconques, est constante, indépendante des rangées choisies.

Limitons par une courbe fermée C quelconque une aire  $\Sigma$  comprenant un très grand nombre N de nœuds. Quelle que soit la manière de décomposer le plan en parallélogrammes, si les rangées sont conjuguées (c'est-à-dire si aucun nœud ne reste à l'intérieur des parallélogrammes), le nombre N de ces figures est égal au nombre N des nœuds, à une erreur relative près qui diminue à mesure que l'aire  $\Sigma$  est prise plus grande.

L'erreur provient de ce qu'il y a des parallélogrammes incomplets au voisinage de la courbe C.

L'aire de chaque parallélogramme est donc :

$$S(grs) = \Sigma : N,$$

c'est-à-dire indépendant du mode de décomposition. *La conclusion est rigoureuse*, car les aires S sont des quantités parfaitement déterminées. Nous pouvons démontrer que pour deux décompositions différentes, les aires diffèrent aussi peu que nous voulons : *donc elles sont égales.*

II. *Le volume d'une maille quelconque, ne comprenant des nœuds qu'à ses sommets, est indépendant du mode de décomposition.*

La démonstration est identique à la précédente : il suffit de remplacer les mots *courbe* et *aire* par les mots *surface* et *volume*.

**§3. Maille simple, maille multiple.** — Il y a quelquefois intérêt à parler d'une *maille multiple*; c'est un solide qui n'est pas nécessairement un parallélépipède, avec lequel on peut remplir l'espace sans vide, et qui contient des nœuds autre part qu'à ses sommets.

Pour éviter toute ambiguïté, nous appellerons *maille simple* le solide parallélépipédique qui ne contient des nœuds qu'à ses sommets.

On démontre aisément que le volume  $\Omega_1$  de la maille multiple est un multiple du volume  $\Omega$  de la maille simple, ou généralement est en rapport rationnel simple avec lui.

Pour calculer le volume  $\Omega_1$  d'une maille multiple, on procède toujours comme au § 52. On prend un volume V assez grand qui contient N nœuds. On compte le nombre  $\nu$  (entier ou fractionnaire) de nœuds qui appartiennent à chaque maille. Le volume  $\Omega_1$  est (avec une approximation d'autant plus grande que V est plus grand) :

$$\Omega_1 = V\nu : N.$$

D'où *exactement* :  $\Omega_1 = \Omega\nu.$  (1)

Comme applications, considérons les cas simples que nous retrouverons plus loin.

1° La maille multiple ne contient des nœuds qu'à son intérieur;  $\nu$  est entier.

Son volume  $\Omega_1$  est le multiple  $\nu$  du volume  $\Omega$  de la maille simple.

2° La maille multiple est parallélépipédique et contient des nœuds à ses sommets et en son centre de figure (*maille centrée*).

Puisque chaque nœud sommet appartient à huit mailles adjacentes, il vaut pour chaque maille 1 : 8 de nœud. Comme il y a huit sommets, les nœuds sommets valent en tout un nœud. Pour avoir le nombre  $\nu$ , il faut ajouter le nœud central.

*Donc le volume de la maille centrée est double du volume de la maille simple.*

3° La maille multiple est parallélépipédique et contient des nœuds à ses sommets et aux centres de ses faces (*maille à faces centrées*). Chaque nœud centre d'une face appartient à deux mailles adjacentes; il vaut donc pour chaque maille la moitié d'un nœud. Il y a six faces : d'où trois nœuds pour les faces. Le nombre  $\nu$  est quatre.

*Donc le volume de la maille à faces centrées est quadruple du volume de la maille simple.*

4° La maille multiple est un prisme hexagonal à bases centrées (§ 66).

Chaque nœud sommet appartient à six prismes; il y en a douze : donc en tout deux nœuds. Chaque nœud de base appartient à deux prismes; il y en a deux : donc en tout un nœud. Le nombre  $\nu$  vaut trois. *Le volume de la maille multiple hexagonale est le triple du volume de la maille simple.*

#### 54. Calcul de la maille; distance de deux plans limitrophes.

— Prenons pour axes de coordonnées obliques  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ , trois rangées conjuguées quelconques.

Soient  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $\pi$ , les angles dièdres;  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , les faces du trièdre;  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , les unités de longueur sur les axes (*paramètres*).

Le volume construit sur ces unités a pour expression :

$$\Omega = abc \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}.$$

C'est le volume de la maille simple.

Il résulte des propositions du § 52 que la distance  $\Delta$  (*grs*) de deux plans réticulaires limitrophes de symbole *grs* est en raison inverse de l'aire du parallélogramme du plan réticulaire. On a en effet :

$$\Delta(\text{grs})S(\text{grs}) = \Omega.$$

55. Expression de  $\Delta$  et de  $S$  en fonction de  $q$ ,  $r$ ,  $s$ . — Quittons un instant les coordonnées numériques pour reprendre les coordonnées ordinaires. Le plan de symbole *grs* limitrophe de l'origine

a pour équation : 
$$\frac{qx}{a} + \frac{ry}{b} + \frac{sz}{c} = 1. \quad (1)$$

Posons :  $bc \sin \alpha = \varphi$ ,  $ca \sin \beta = \chi$ ,  $ab \sin \gamma = \psi$ .

$\varphi$ ,  $\chi$ ,  $\psi$ , sont les aires des parallélogrammes générateurs dans les plans de coordonnées.

D'après un théorème connu, la distance  $\Delta$  à l'origine du plan (1) est donnée par la relation :

$$\Omega^2 = \Delta^2 [q^2\varphi^2 + r^2\chi^2 + s^2\psi^2 - 2qr\varphi\chi \cos \pi - 2rs\chi\psi \cos \mu - 2sq\psi\varphi \cos \nu].$$

D'où nous tirons :

$$S^2(qrs) = q^2\varphi^2 + r^2\chi^2 + s^2\psi^2 - 2qr\varphi\chi \cos \pi - 2rs\chi\psi \cos \mu - 2sq\psi\varphi \cos \nu.$$

Il résulte de cette expression, non pas assurément que l'aire S est d'autant plus petite que les caractéristiques sont plus petites (les caractéristiques les plus petites sont 001, 010, 100 et correspondent aux faces du trièdre : or rien n'impose que les aires S des parallélogrammes dans ces faces soient minima), mais que l'aire S croît sûrement quand on prend des caractéristiques très grandes.

Si on choisit les faces du trièdre de référence de manière que les aires S y soient petites, sinon les plus petites, on peut affirmer que toutes les aires les plus petites correspondent aux plans de caractéristiques petites.

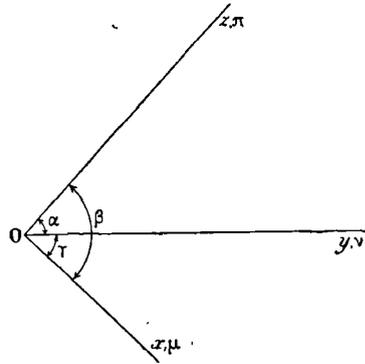


Fig. 31.

**56. Importance relative des faces.** — Le réseau est par nature indéfini. Mais supposons pour une raison quelconque qu'il se limite par des faces planes pour former ce que nous appellerons une *crystal*.

*Admettons* (nous verrons plus loin à quoi correspond cette hypothèse) que les faces non seulement possibles mais réelles du cristal correspondent à un écartement  $\Delta$  grand, et par conséquent à une aire S petite. Il résulte de là une hiérarchie des faces : *les faces qui ont le plus de chances de servir de limite à une portion finie du réseau, sont celles pour lesquelles S(qrs) a les valeurs les plus petites.*

D'où la règle pratique : *A la condition de prendre pour trièdre de référence trois plans conjugués dont les aires soient petites, les caractéristiques ou indices des faces réelles seront toujours petits. C'est le complément de la loi de rationalité des indices (§ 50).*

Ainsi non seulement le réseau de Bravais indique quelles sont les faces possibles; il interprète de plus le fait de la petitesse des caractéristiques.

**57. Assemblages et réseaux multiples (G. Friedel).** — D'après tout ce qui précède, le réseau peut être appelé un *assemblage particulier de points homologues*. Il est *particulier* en ce sens que la maille est parallépipédique ; ses nœuds sont des points *homologues* en ce sens qu'ils sont tous disposés exactement de la même manière par rapport à l'espace environnant.

Nous envisagerons plus tard le réseau sous un aspect très différent. Il ne sera plus un système de points de *positions déterminées* ; il deviendra l'image de toutes les translations possibles ou, comme on dit, *la représentation concrète des groupes infinis de translation*. Sa maille représentera dans l'espace *la période du milieu*, c'est-à-dire les translations à effectuer pour restituer le milieu. Une translation étant déterminée en grandeur et direction et non en position, on pourra construire le réseau, image de la période, à partir d'un point *quelconque* de l'espace.

Pour l'instant, continuons à l'envisager comme déterminé en position, mais généralisons la notion d'assemblage ; précisons celle de réseau multiple d'un assemblage et de réseau multiple d'un autre réseau.

L'exemple suivant est emprunté à G. Friedel, qui a très clairement élucidé la question et en a tiré d'importantes conséquences sur lesquelles nous reviendrons (§ 168).

Considérons un assemblage d'ellipsoïdes égaux et placés aux sommets de prismes droits hexagonaux régulièrement empilés. La figure 32 représente un des plans parallèles aux bases des prismes ;

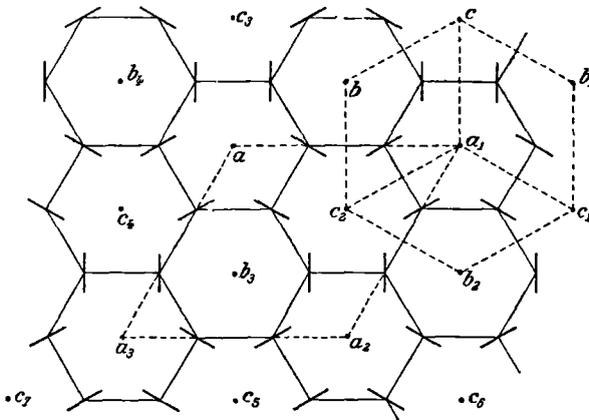


Fig. 32.

les ellipsoïdes ont un de leurs axes perpendiculaire à ce plan ; on a représenté par une petite droite la direction de l'un des deux autres.

Considérons les points homologues dans ce plan. En vertu de leur

définition, ils doivent être disposés exactement de la même manière par rapport à l'espace environnant.

Ce sont donc les points  $a, a_1, a_2, \dots$  placés aux sommets de parallélogrammes égaux. Ils forment un plan réticulaire. On vérifiera que si l'on déplace la figure d'un nombre quelconque de fois  $\overline{aa_1}$  dans la direction  $aa_1$ , et d'un nombre quelconque de fois  $\overline{aa_3}$  dans la direction  $aa_3$ , elle se superpose à elle-même.

A) Appelons 1 le plan sur lequel nous venons de raisonner; appelons 2, 3, 4, ... les plans limitrophes consécutifs.

Les centres des ellipsoïdes des plans 1, 2, 3, ... se projettent les uns sur les autres.

Mais supposons qu'ils ne sont pas orientés de même : les ellipsoïdes du plan 2 ont tourné de  $120^\circ$  autour de la normale au plan du tableau; les ellipsoïdes du plan 3 ont tourné de  $240^\circ$ ; les ellipsoïdes du plan 4 ont tourné de  $360^\circ$ ; ils sont donc orientés comme ceux du plan 1. D'où une *périodicité hélicoïdale* suivant la normale au plan du tableau.

Les points homologues des points  $a$  sont en  $b$  dans le plan 2, en  $c$  dans le plan 3, en supposant que les rotations soient dextrogyres.

On démontre aisément (nous reviendrons là-dessus au § 60) que la maille parallélépipédique dans l'espace est un rhomboèdre d'axe se projetant en  $a_1$  et dont le contour apparent est  $bc b_1 c_1 b_2 c_2$ .

Elle contient 12 ellipsoïdes; son volume est six fois plus grand que le volume du plus petit prisme hexagonal déterminé par les centres des ellipsoïdes.

B) Supposons que tous les ellipsoïdes s'orientent parallèlement entre eux, comme le montre la figure 33. Les points homologues dans tous les plans parallèles au tableau se projettent les uns sur les autres en  $a_1, a_2, \dots$ . La maille plane est le parallélogramme  $a_1 a_2 a_3 a_4$ .

Le réseau a pour maille un prisme droit à base rhombe dont le volume (six fois moindre que le volume du rhomboèdre) est égal au volume du plus petit prisme hexagonal déterminé par les centres des ellipsoïdes.

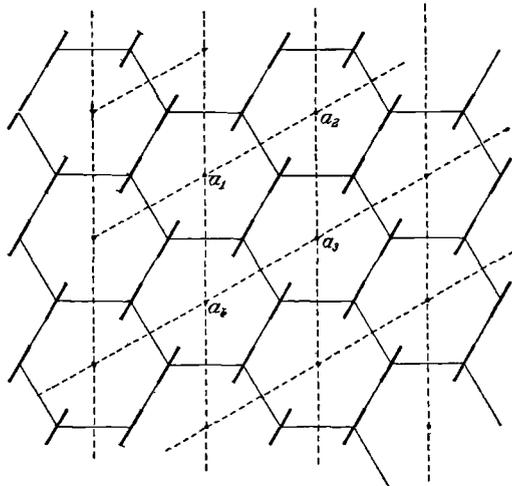


Fig. 33.

Voici donc deux réseaux très différents qui correspondent non pas exactement au même assemblage matériel, mais bien au même assemblage des centres de gravité des solides matériels. On passe de l'un à l'autre en modifiant l'orientation des solides matériels.

On dit que ces réseaux sont multiples l'un de l'autre. On entend par là qu'ils possèdent les mêmes orientations de plans réticulaires, ce qu'on vérifiera facilement, et que la maille de l'un est multiple de la maille de l'autre.

Cet exemple montre avec clarté que les points homologues d'un réseau n'ont *a priori* rien de commun avec l'assemblage matériel; *proposition essentielle dans les applications. Nous pouvons même supposer la matière continue, sans cesser de pouvoir envisager un réseau jouant le double rôle de représenter les périodes de translation et, comme nous le verrons, de déterminer les directions des faces limitant une portion d'espace.*

### Symétrie et modes des réseaux.

**58. Théorèmes généraux sur la symétrie des réseaux.** — Nous devons considérer pour l'instant les réseaux comme un assemblage de points par une infinité desquels doit nécessairement passer toute face possible d'un cristal, c'est-à-dire toute face satisfaisant à la loi de rationalité des indices (§ 50).

Si avec les faces possibles nous construisons un polyèdre, il est clair que la symétrie de ce polyèdre ne peut pas être supérieure à celle de l'assemblage de points duquel il dérive.

Pour limiter la symétrie des polyèdres formés de faces satisfaisant à la loi de rationalité des indices, nous sommes donc amenés à étudier la symétrie générale des réseaux.

De ce que le réseau est indéfini et identique dans toutes ses parties, résultent des propriétés spéciales.

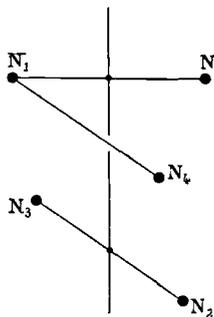


Fig. 34.

I. Un nœud quelconque est un centre de symétrie.

II. Tous les nœuds étant identiques entre eux, si par un nœud passe un axe de symétrie, par tous les autres nœuds passent des axes parallèles au premier et de même ordre.

III. Même proposition pour les plans de symétrie.

IV. Tout plan P mené par un nœud N perpendiculairement à un axe de symétrie, est un plan réticulaire, c'est-à-dire passe par une infinité de nœuds.

La proposition est évidente si l'ordre de l'axe est supérieur à 2 (§ 47, II). Admettons que l'axe soit binaire,

De l'existence du nœud  $N$  et de l'axe, nous déduisons un nœud  $N_1$  dans le plan  $P$ . Soit  $N_2$  un autre nœud quelconque; de l'existence de l'axe se déduit un quatrième nœud  $N_3$ . La droite  $N_2N_3$  est parallèle au plan  $P$ .

Par  $N_1$  menons une droite parallèle à  $N_2N_3$ , elle est dans le plan  $P$ . D'ailleurs c'est une rangée (§ 47, I et III). Donc le plan  $P$  passe par trois nœuds; c'est un plan réticulaire.

V. Un axe de symétrie passant par un nœud est une rangée. Ce théorème découle immédiatement de la définition de l'axe et de la proposition (§ 47, IV) sur la composition des vecteurs qui ont un nœud pour origine et aboutissent à des nœuds.

VI. Si par un nœud on mène une droite parallèle à un axe d'ordre  $q$ , elle est elle-même un axe d'ordre  $q$ . Nous supposons que l'axe donné ne passe par aucun nœud, car dans ce cas la proposition irait d'elle-même (II).

Soit  $O$  la trace de l'axe sur un plan perpendiculaire passant par un nœud  $N$ . Ce plan est réticulaire (IV); soit  $N_1$  un second nœud dans ce plan. Posons  $\alpha = 2\pi : q$ . Les nœuds  $N$  et  $N_1$  engendrent les nœuds  $N'$  et  $N'_1$  par rotation de la figure  $ONN_1$  de l'angle  $\alpha$  autour de  $O$ . Les nœuds  $NN'N'_1$  engendrent  $N_2$ . Je dis qu'un axe d'ordre  $q$  passe par le nœud  $N$  parallèlement à l'axe donné. Il suffit de prouver que l'angle  $N_1NN_2 = \alpha$ ; ce qui est évident.

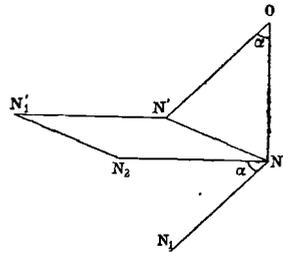


Fig. 35.

Recommençons la même construction pour  $NN_2$ : nous trouverons un nœud  $N_3$  placé par rapport à  $N_2$  comme  $N_2$  l'est par rapport à  $N_1$ . Il passe donc un axe d'ordre  $q$  par  $N$ , puisque les nœuds  $N_1, N_2, N_3, \dots$  se distribuent autour de ce point suivant des polygones réguliers, ou puisque les vecteurs  $NN_1, NN_2, NN_3, \dots$  font entre eux des angles égaux à  $\alpha = 2\pi : q$ .

**59. Un réseau ne peut avoir que des axes d'ordre 2, 3, 4, 6.**  
— Soit  $q$  l'ordre de l'axe. Nous pouvons admettre qu'il passe par un nœud  $N$  (§ 58, VI).

Posons  $\alpha = \pi : q$ . Soit  $N_1$  le nœud le plus rapproché de  $N$ ; il engendre  $N_2$  et  $N_3$  par deux rotations de l'angle  $\alpha$  (fig. 36).

Les nœuds  $N_1, N_2, N_3$ , engendrent  $N_4$  (§ 47, IV). Pour éviter la contradiction, il faut que  $N_4$  soit plus éloigné de  $N$  que  $N_1$ , ou soit à la même distance, ou se confonde avec  $N$ .

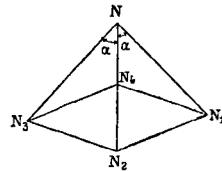


Fig. 36.

Pas de difficulté si  $q = 2$ .

Si  $q=3$ ,  $N_4$  est hors du cercle  $C$  passant par les points  $N_1, N_2, N_3$  (fig. 37).

Pour  $q=4$ , les points  $N_1, N_2, N_3, N_4$ , sont aux sommets d'un carré dont  $N$  est le centre.

Pour  $q=5$ , la condition n'est pas satisfaite;  $N_4$  est dans le cercle  $C$  au delà du centre  $N$ .

Pour  $q=6$ ,  $N$  et  $N_4$  coïncident.

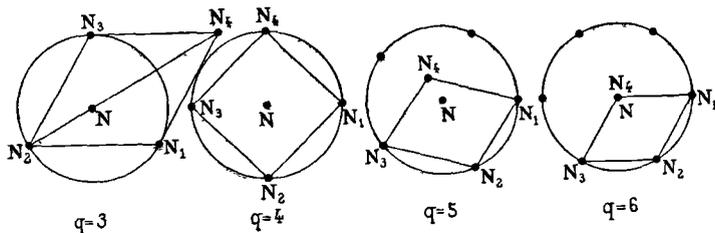


Fig. 37.

Enfin pour  $q > 6$ ,  $N_4$  est dans le cercle  $C$  en deçà du centre  $N$ , comme l'indique la figure 36. La condition n'est pas satisfaite.

*Donc un réseau n'admet que des axes d'ordre 2, 3, 4, 6.*

Nous verrons plus loin quelles dispositions doivent avoir les points du réseau pour qu'effectivement ces axes existent. Pour l'instant, il nous suffit de conclure que *la loi de rationalité des indices n'est compatible qu'avec l'existence d'axes d'ordre 2, 3, 4, 6.*

Nous parvenons à ce résultat fondamental par l'usage des réseaux. Naturellement on peut s'en passer (§ 69). La démonstration est moins rapide; du reste, il est avantageux de nous familiariser avec les réseaux qui sont nécessaires pour classer les groupes infinis de déplacements (Chapitre VII).

**60. Systèmes et modes des réseaux.** — On peut choisir la forme du parallélépipède générateur du réseau de manière qu'il admette des éléments de symétrie. Le problème qu'il s'agit de résoudre est de savoir comment ces éléments se groupent.

Il est tout d'abord à peu près évident que si le parallélépipède générateur admet des éléments de symétrie *nécessairement tous passant par un point*, ils doivent se retrouver dans le réseau, *naturellement en nombre infini*. Utilisant cette remarque qui deviendra plus évidente par la suite, nous pouvons classer les réseaux d'après la symétrie possible des parallélépipèdes.

La maille peut être un parallélépipède quelconque; un tel solide n'admet qu'un centre comme élément de symétrie (groupe 2, classe 13). Le réseau correspondant admet une infinité de centres, d'abord en tous les nœuds, ensuite au milieu de toutes les droites qui joignent

deux nœuds. C'est le système *triclinique, anorthique, doublement oblique, asymétrique* : tous ces noms signifient exactement la même chose.

La maille peut être un parallélépipède droit, prisme droit à base parallélogramme quelconque. Un tel solide a pour éléments de symétrie :

$$L_2, C, P \quad (\text{groupe 5, classe 17}).$$

C'est le système *monoclinique, clinorhombique, simplement oblique, monosymétrique*.

La maille peut être un prisme droit à base rectangle; elle a pour éléments :

$$L_2, L'_2, L''_2, C, P, P', P'' \quad (\text{groupe 8, classe 24}).$$

C'est le système *orthorhombique, rhombique, terbinaire*.

La maille peut être un prisme droit à base carrée; elle a pour éléments :

$$\Lambda_4, 2L_2, 2L'_2, C, \Pi, 2P, 2P' \quad (\text{groupe 8, classe 26}).$$

C'est le système *quadratique, quaternaire*.

La maille peut être un cube; elle a pour éléments :

$$3\Lambda_4, 4L_3, 6L_2, C, 3\Pi, 6P \quad (\text{groupe 21, classe 32}).$$

C'est le système *cubique, régulier*.

La maille peut être un prisme droit à base losange de  $60^\circ$  ou de  $120^\circ$  comme on voudra. L'association des mailles trois par trois donne un réseau multiple de symétrie hexagonale dont les éléments sont :

$$\Lambda_6, 3L_2, 3L'_2, C, \Pi, 3P, 3P' \quad (\text{groupe 8, classe 27}).$$

C'est le système *hexagonal*.

Enfin la maille peut être un rhomboèdre, cube déformé parallèlement à un axe ternaire. Les éléments de symétrie sont :

$$\Lambda_3, 3L_2, C, 3P \quad (\text{groupe 15, classe 25}).$$

C'est le système *rhomboédrique*.

Tels sont les sept groupes d'éléments de symétrie qui peuvent se rencontrer dans les réseaux et que nous appellerons *systèmes cristallins*. Mais les mailles que nous venons d'énumérer peuvent être des mailles multiples sans que le réseau cesse pour cela de posséder les éléments de symétrie d'un des sept systèmes. Il peut donc exister plus d'arrangements pour les systèmes de points qu'il n'existe de systèmes cristallins; ces arrangements prennent le nom de *modes*.

En étudiant chaque mode, nous indiquerons la classe (§ 89) à laquelle il se rapporte.

**61. Remarques générales.** — Avant de passer en revue les modes, voici quelques remarques qui facilitent la classification.

1° Un plan réticulaire à maille rectangulaire peut tout aussi bien être considéré comme à maille rhombe centrée.

2° Un plan réticulaire à maille rhombe peut tout aussi bien être considéré comme à maille rectangulaire centrée.

La figure 38 montre immédiatement le sens de ces propositions.

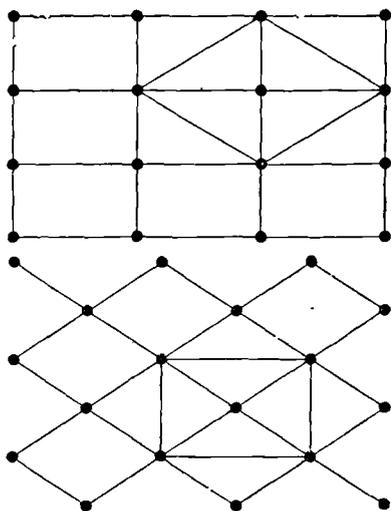


Fig. 38.

3° Si le réseau admet un axe, nous savons que tout plan mené perpendiculairement par un nœud est un plan réticulaire (§ 58, IV). A partir d'un de ces plans  $P_0$ , déplaçons un plan d'une manière continue parallèlement à lui-même; arrêtons-le dès qu'il rencontre un nœud: nous obtenons le plan  $P_1$ , limitrophe de  $P_0$ .

Projetons orthogonalement les nœuds du plan  $P_1$  sur le plan  $P_0$ ; les projections ne coïncident pas nécessairement avec les nœuds du plan  $P_0$ .

Continuons l'opération précédente; nous obtenons successivement les plans  $P_2, P_3, \dots$

Je dis que l'un d'eux,  $P_n$ , est tel que ses nœuds se projettent

orthogonalement sur les nœuds de  $P_0$ . Cela tient à ce qu'il existe sûrement des rangées parallèles à un axe de symétrie (§ 58, VII). La distance  $\overline{P_0 P_n}$  est la distance des nœuds de cette série de rangées.

En définitive, les plans réticulaires perpendiculaires aux axes de symétrie présentent généralement une périodicité hélicoïdale.

Nous verrons que trois cas sont possibles qui correspondent aux hypothèses:  $n=1, 2, 3$ .

La distance des plans  $P_0, P_1, P_2, \dots$  est constante; il en résulte immédiatement (§ 54) que le nombre des nœuds contenus dans ces plans par unité de surface est le même.

**62. Mode du système triclinique.** — Il n'y a qu'un seul mode qui correspond à la maille parallélépipédique quelconque.

Nous le noterons  $\Gamma_{tr}$ . La symétrie est celle de la classe 13,  $C_i = S_2$ .

**63. Modes du système clinorhombique ou monoclinique.** — Ils sont au nombre de deux; nous les noterons :

$$\Gamma_m, \Gamma'_m.$$

Ils ont la symétrie de la classe 17,  $C_{2h}$ .

MODE HEXAÉDRAL  $\Gamma_m$ .

La maille est un *prisme droit à base parallélogramme*. Les faces qui passent par l'axe binaire sont des rectangles; la face perpendiculaire à l'axe binaire, qui est par conséquent parallèle au plan de symétrie, est un parallélogramme quelconque.

Les nœuds des plans limitrophes normaux à l'axe se projettent orthogonalement les uns sur les autres.

On peut aussi bien considérer la maille comme un prisme *simplement oblique* à base rectangle, ou un prisme *simplement oblique* à base rhombe centrée (§ 61).

Le réseau possède naturellement une infinité de centres (tous les

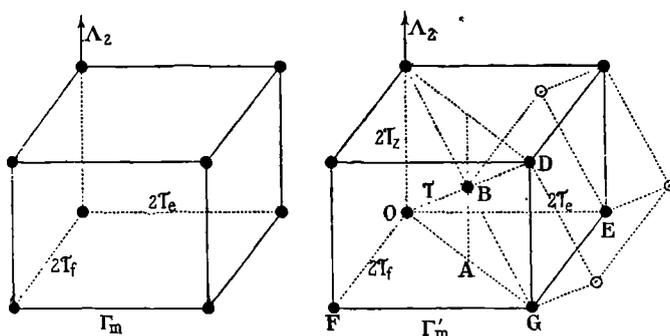


Fig. 39.

nœuds et les milieux des droites joignent deux nœuds, une infinité de plans de symétrie (tous les plans réticulaires parallèles au plan de symétrie d'une maille quelconque, et tous les plans équidistants de ces plans), une infinité d'axes de symétrie (toutes les droites parallèles à l'axe binaire d'une maille, passant par tous les nœuds et par le milieu des droites quelconques joignant deux nœuds).

Comme cette multiplication des éléments de symétrie est un phénomène général, sur lequel nous reviendrons longuement au Chapitre VII, nous n'en parlerons plus dans la suite de ce Chapitre.

MODE OCTAÉDRAL  $\Gamma'_m$ .

Il dérive du précédent *en centrant la maille*, c'est-à-dire en supposant un nœud au centre de figure de la maille.

Les nœuds de deux plans limitrophes normaux à l'axe binaire ne se projettent pas orthogonalement les uns sur les autres. Les nœuds du plan  $P_1$  se projettent aux centres des faces du plan  $P_0$ .

Le plan qui passe par deux arêtes verticales opposées est donc couvert de rectangles *centrés*; on peut aussi bien le considérer comme couvert de rhombes *non centrés* (§ 61).

La maille se présente alors comme un prisme oblique à base rhombe; l'axe binaire est parallèle à une des diagonales de la base

rhombe. C'est précisément ainsi qu'au § 115 nous choisissons la forme primitive du système clinorhombique.

Ce mode s'appelle *octaédral* parce qu'en joignant le centre de deux mailles consécutives aux sommets communs, on obtient un octaèdre.

**64. Modes du système orthorhombique.** Ils ont la symétrie de la classe 8,  $D_{2h} = V_h$ . Ils sont au nombre de quatre ; nous les noterons :

$$\Gamma_0, \quad \Gamma'_0, \quad \Gamma''_0, \quad \Gamma'''_0.$$

MODE HEXAÉDRAL RECTANGLE  $\Gamma_0$ .

La maille est un *prisme droit à base rectangle*. Les trois faces sont

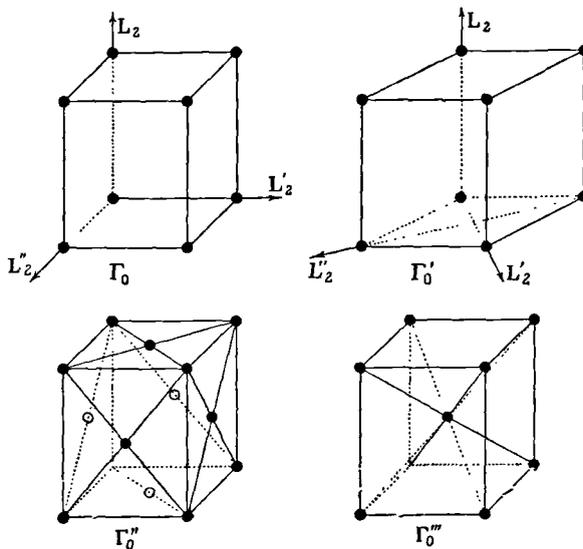


Fig. 40.

des rectangles ; les arêtes sont les axes binaires. Les nœuds de deux plans limitrophes  $P_0$  et  $P_1$  normaux à l'un des axes se projettent orthogonalement les uns sur les autres.

MODE HEXAÉDRAL RHOMBIQUE  $\Gamma'_0$ .

La maille est un *prisme droit à base rhombe*. Deux des faces sont des rectangles ; la troisième est un losange. Les axes binaires contenus dans cette face sont parallèles aux diagonales. Les nœuds de deux plans limitrophes  $P_0$  et  $P_1$  se projettent les uns sur les autres si le plan est perpendiculaire à  $L_2$ . Mais il n'en est plus de même si le plan est perpendiculaire aux axes  $L'_2$  ou  $L''_2$ . Ce sont les nœuds du plan  $P_2$  qui se projettent orthogonalement sur ceux du plan  $P_0$ .

On peut dire que la maille est un *prisme droit à base rectangle centrée*.

**MODE OCTAÉDRAL RHOMBIQUE  $\Gamma''_0$ .**

La maille est un *prisme droit à base rectangle dont les six faces sont centrées*.

Joignant les centres des faces deux par deux, on obtient un octaèdre à base rhombe, d'où le nom du mode. Dans le mode  $\Gamma''_0$ , comme dans le mode  $\Gamma_0$ , les trois axes binaires sont traités de même. Mais tandis

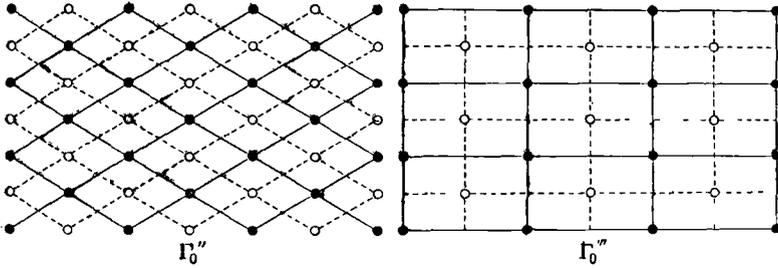


Fig. 41.

que dans le mode  $\Gamma_0$  les nœuds des plans limitrophes  $P_0$  et  $P_1$ , normaux aux axes, se projettent les uns sur les autres, dans le mode  $\Gamma'_0$ , ce sont les nœuds des plans  $P_0$  et  $P_2$  qui jouissent de cette propriété.

On peut encore dire que la maille est un *prisme droit centré à base rhombe*.

**MODE OCTAÉDRAL RECTANGLE  $\Gamma'''_0$ .**

La maille est formée d'un *prisme droit centré à base rectangle*. Comme dans les modes  $\Gamma_0$  et  $\Gamma'_0$ , les trois axes binaires sont traités de même. Comme dans le mode  $\Gamma''_0$ , les nœuds du plan  $P_1$  ne se projettent pas orthogonalement sur ceux du plan  $P_0$ . Il est clair qu'on obtient des octaèdres à bases rectangles en joignant les centres de deux mailles consécutives aux sommets communs.

Les différences de nature entre les modes  $\Gamma''_0$  et  $\Gamma'''_0$  ressortent clairement des figures 41 qui représentent deux plans limitrophes normaux à l'un des axes binaires.

**65. Modes du système quaternaire ou tétragonal.**

— Ils ont la symétrie de la classe 26,  $D_{4h}$ . Ils sont au nombre de deux ; nous les noterons :

$$\Gamma_t, \quad \Gamma'_t.$$

**MODE HEXAÉDRAL  $\Gamma_t$ .**

La maille est un *prisme droit à base carrée*. Les nœuds du plan  $P_1$  normal à l'axe quaternaire se projettent sur les nœuds du plan  $P_0$ .

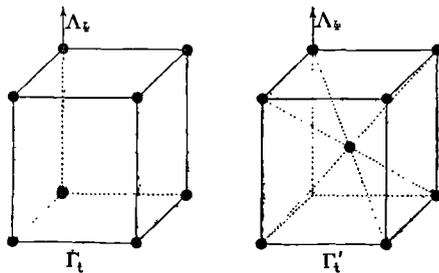


Fig. 42.

Ce mode correspond aux deux modes orthorhombiques  $\Gamma_0$  et  $\Gamma'_0$ , l'axe  $L_1$  devenant l'axe principal  $\Lambda_4$ .

MODE OCTAÉDRAL  $\Gamma'_4$ .

La maille est un prisme droit centré à base carrée. Les nœuds du plan  $P_1$  ne se projettent pas sur les nœuds du plan  $P_0$ , mais aux centres des faces de ce plan.

Ce mode correspond aux deux modes orthorhombiques  $\Gamma''_0$  et  $\Gamma'''_0$ . On voit aisément que les figures 41 deviennent identiques si la maille plane est un carré.

**66. Modes du système hexagonal et du système rhomboédrique.** — Nous les traitons simultanément, on verra pourquoi. Il n'y a qu'un mode pour chaque système, soit deux en tout; les voici :

$$\begin{array}{llll} \Gamma_h, & \text{dont la symétrie est celle de la classe 27,} & D_{6h}; \\ \Gamma_{rh}, & \text{»} & \text{»} & 23, D_{3h}. \end{array}$$

MODE HEXAGONAL  $\Gamma_h$ .

La maille est un prisme droit à base rhombe de  $60^\circ$ . Dans les plans perpendiculaires à l'axe sénaire, les nœuds sont donc aux sommets de triangles équilatéraux. La maille n'a pas la symétrie sénaire; cette symétrie n'existe que dans l'association de trois mailles (fig. 43).

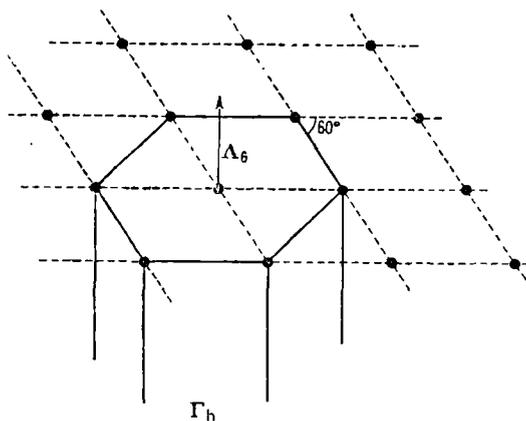


Fig. 43.

Les nœuds de deux plans limitrophes  $P_0$  et  $P_1$  normaux à  $\Lambda_6$  se projettent les uns sur les autres.

MODE RHOMBOÏDAL  $\Gamma_{rh}$ .

La maille est le rhomboèdre lui-même. La figure 44 représente trois plans limitrophes  $P_0$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ , normaux à l'axe

ternaire  $\Lambda_3$ . Les nœuds de  $P_0$  se projettent orthogonalement sur  $P_3$ ,  $P_6$ , ...; les nœuds de  $P_1$  se projettent orthogonalement sur  $P_4$ ,  $P_7$ , ...; enfin les nœuds de  $P_2$  se projettent orthogonalement sur  $P_5$ ,  $P_8$ , ...

On passe d'un plan au plan limitrophe par une translation. On vérifie sur la figure que la translation, projetée sur l'un des plans  $P$ , est par exemple du tiers de la grande diagonale du rhombe primitif.

On a représenté le rhomboèdre tel qu'il se trouve sur quatre plans

limitrophes. Les rayons visuels sont parallèles aux plans limitrophes (normaux à l'axe ternaire), tandis que dans la grande figure, les

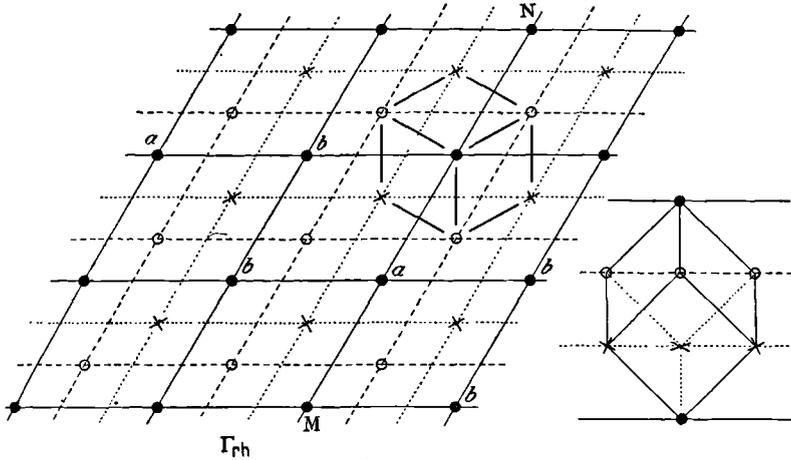


Fig. 44.

rayons visuels sont perpendiculaires aux plans limitrophes (parallèles à l'axe ternaire).

67. Modes du système régulier ou cubique.— Ils ont la symétrie de la classe 32,  $O^h$ ; ils sont au nombre trois; nous les noterons :

$$\Gamma_r, \quad \Gamma'_r, \quad \Gamma''_r.$$

MODE HEXAÉDRAL  $\Gamma_r$ .

La maille est un cube portant un nœud à chacun de ses sommets. Les nœuds des plans limitrophes normaux aux axes quaternaires se projettent orthogonalement les uns sur les autres. Le mode  $\Gamma_r$  correspond aux deux modes orthorhombiques  $\Gamma_0$  et  $\Gamma'_0$ .

MODE OCTAÉDRAL  $\Gamma'_r$ .

Les nœuds sont disposés aux sommets du cube et aux centres des

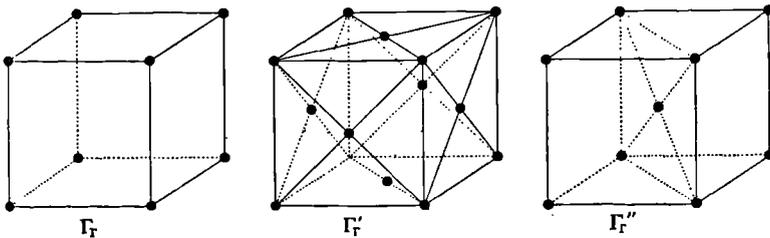


Fig. 45.

faces : le cube est à faces centrées. Il correspond au mode  $\Gamma''_0$  orthorhombique. La maille est un rhomboédre dont l'angle dièdre est de

70° 31' 44" : il a pour sommets deux sommets opposés du cube et les centres de ses faces.

MODE DODÉCAÉDRAL  $\Gamma_r''$ .

Les nœuds sont disposés aux sommets et au centre du cube; la maille est un cube centré. La vraie maille est encore un rhomboèdre dont l'angle dièdre (angle de deux faces aboutissant à l'axe ternaire) est de 120°. Si l'on joint par des droites les huit sommets du cube centré avec les six centres des cubes voisins, apposés sur les six faces, on obtient le dodécaèdre rhomboïdal centré (§ 102); d'où le nom du mode.

Dans les modes  $\Gamma_r'$  et  $\Gamma_r''$ , les nœuds du plan  $P_1$  normal à un axe quaternaire ne se projettent pas sur les nœuds du plan  $P_0$ .

**68. Théories cristallographiques de Bravais et Mallard.** — Nous pouvons maintenant revenir utilement sur les théories cristallographiques de Bravais adoptées par Mallard.

Un milieu cristallin est constitué pour Bravais par des polyèdres matériels, dits « molécules cristallographiques ou polyèdres moléculaires » identiques, identiquement orientés et situés aux nœuds d'un réseau. Le polyèdre peut avoir toutes les symétries des 23 ou 24 groupes du § 40; le réseau ne peut appartenir qu'aux 14 modes, et par conséquent aux 6 ou 7 systèmes, suivant qu'on séparera ou non le système rhomboédrique du système sénaire.

Les faces du cristal sont par hypothèse des plans réticulaires, et parmi ces plans en nombre infini, ceux dont la maille a une aire petite, dont la densité réticulaire est grande (§ 56). Nous aurons l'occasion de revenir sur cette loi capitale dite de Bravais, qui subsiste alors que ses autres hypothèses trop particulières doivent être abandonnées.

Nous avons déjà fait observer que, dans ce système d'explication, la symétrie du réseau *que rien n'empêche d'être supérieure à la symétrie de la molécule*, ne peut pas lui être *inférieure*, puisqu'en définitive le réseau n'existe que comme assemblage de molécules.

Précisons ces notions fondamentales.

Si la molécule possède un axe quaternaire, *cet axe serait-il seul*, il faut que le réseau soit quaternaire; mais si par exemple, la molécule possède seulement un axe d'ordre 7, *le réseau qui peut avoir la symétrie du cube, peut aussi bien être triclinique*, puisque l'axe d'ordre 7 ne peut influer en rien sur la construction du réseau.

On dit que le cristal est *holoèdre* quand la molécule a la symétrie du réseau; elle peut d'ailleurs posséder en plus d'autres éléments qui sont incompatibles avec la structure du réseau. Par exemple, si le polyèdre a la symétrie :

$$\Lambda_{6q+3}, \quad (6q+3)L_2, \quad C, \quad (6q+3)P, \quad (\text{groupe 15, § 40}),$$

le réseau est sûrement ternaire avec la symétrie :

$$\Lambda_3, \quad 3L_2, \quad C, \quad 3P,$$

car  $6q + 3$  est divisible par 3 et n'est pas divisible par 6.

On dit que le cristal est *mérièdre* quand la molécule a une symétrie qui *oblige* le réseau à avoir une certaine symétrie et qui pourtant est inférieure à la symétrie du réseau.

Par exemple, le polyèdre de symétrie :

$$\Lambda_{6q+3}, \quad (6q+3)L_2, \quad (\text{groupe } 13)$$

nécessite un réseau rhomboédrique, bien que sa symétrie ne soit pas égale à celle du réseau, *en ce sens qu'il lui manque le centre et les plans de symétrie.*

*Le réseau règle souverainement l'orientation des faces; mais leurs propriétés physiques, parmi lesquelles il faut ranger la fréquence ou la rareté d'apparition, dépendent de la symétrie de la molécule.*

En particulier, si la moitié des faces de la forme que ferait prévoir la symétrie du réseau, ou manque, ou jouit de propriétés particulières, on admettra que cela tient aux éléments de symétrie *défectifs à la molécule*. D'où l'explication des *mériédries* (*hémiedrie et té tartoédrie*), sur lesquelles nous reviendrons longuement aux Chapitres I et II de la Seconde Partie.

Cette théorie si remarquable manque de souplesse.

Il est impossible :

1° de supposer la matière localisée aux nœuds du réseau, qui doit être envisagé seulement comme la représentation des périodes de translation ;

2° de supposer les agrégats tous orientés de la même manière ; cette façon de concevoir l'homogénéité est trop étroite.

*Assurément la théorie de Bravais donne avec la plus grande facilité les 32 classes que nous retrouverons plus loin : il suffit de chercher, parmi les 24 groupes du tableau du § 40, quels sont les sous-groupes dont les axes sont d'ordres 2, 3, 4, 6. Mais elle échoue dans la théorie du polymorphisme, des mâcles et du pouvoir rotatoire.*

Le lecteur se demandera pourquoi nous l'avons développée en son entier. C'est parce qu'il est impossible de bien comprendre les théories actuelles *beaucoup plus abstraites*, si on ne s'est pas entraîné sur les édifices particulièrement simples *polyèdres et réseaux*.

Nous allons reprendre la question autant dire en son entier ; mais le lecteur est prévenu qu'il n'y verra quelque chose que s'il a compris ce qui précède.

## CHAPITRE IV

### LOI DES INDICES RATIONNELS ET SES CONSÉQUENCES

69. **Énoncé de la loi des indices rationnels (Haüy).** — Si tout ce que nous avons dit jusqu'à présent est inattaquable en théorie, on est en droit de se demander quel lien existe entre la structure définie dans les paragraphes précédents et la structure réelle des cristaux. C'est pour cela qu'il est avantageux de partir des lois expérimentales et de trier les hypothèses avec lesquelles elles sont compatibles. *La méthode n'est pas illusoire ici, parce qu'à une exception près, intéressante mais sans application, nous retrouvons précisément les hypothèses déjà faites.*

Il ne faut pas oublier, en vantant les mérites d'un tel procédé, qu'il est inapplicable dans la plupart des cas; le nombre des hypothèses conciliables avec les faits *généraux* est ordinairement très grand, et par conséquent le tri parfaitement arbitraire. Il vaut mieux partir tout de suite du principe qu'on croit préférable, que passer en revue une foule d'hypothèses entre lesquelles il n'est possible de faire un choix que grâce à des résultats expérimentaux *de détail*.

À la base de la Cristallographie se trouvent deux lois, dues la première à Romé de l'Isle, la seconde à Haüy.

1° Les faces et les arêtes d'un cristal peuvent avoir un développement quelconque : les angles dièdres restent constants dans une substance donnée et caractérisent la forme.

2° Prenons pour trièdre de référence la figure formée par trois faces quelconques du cristal, c'est-à-dire trois plans parallèles à des faces *réelles*; leurs intersections, parallèles à des arêtes *réelles* du cristal, sont les axes de coordonnées. Menons un plan parallèle à une quatrième face. Il intercepte sur les axes des longueurs  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

Toute autre face interceptera des longueurs  $ma$ ,  $nb$ ,  $pc$ .

*La loi des indices rationnels consiste à dire que les trois nombres  $m$ ,  $n$ ,  $p$ , sont entiers ou fractionnaires et généralement très simples.*

Dire qu'ils sont entiers ou fractionnaires n'aurait aucun intérêt; car, *aux erreurs d'expérience près*, tout résultat s'exprime par un

nombre fractionnaire. Il suffit évidemment, pour avoir une approximation donnée à l'avance, de prendre assez grands le dénominateur et le numérateur de la fraction.

La partie importante de la loi réside donc dans les derniers mots.

On remarquera l'analogie de cette loi avec celle des proportions multiples en Chimie.

Les quantités  $a, b, c$ , sont les *paramètres* du cristal. Ils dépendent du choix des quatre faces qui servent à les définir et qui sont naturellement, parmi les faces *possibles* du cristal, des faces particulièrement importantes (dont, par exemple, la présence est constante, qui correspondent à des clivages...).

Les quantités  $m, n, p$ , sont des nombres qui déterminent complètement la position des faces. *Dans le système de notation de Weiss*, elles leur servent d'*indices*.

On peut encore prendre, pour *indices* des faces, trois nombres  $q, r, s$ , inverses des précédents :

$$mq = 1, \quad nr = 1, \quad ps = 1.$$

*Dans le système de notation de Miller* (§ 97), les nombres  $q, r, s$ , sont les caractéristiques ou les indices des faces.

On peut toujours prendre pour  $m, n, p$ , et  $q, r, s$ , des nombres entiers premiers entre eux.

**70. Position du problème.** — Par le point O origine, menons des plans parallèles aux faces *possibles* du cristal. D'après la loi des indices rationnels, ils doivent satisfaire à l'équation :

$$q \frac{x}{a} + r \frac{y}{b} + s \frac{z}{c} = 0, \quad (1)$$

où  $q, r, s$ , sont des nombres entiers *simples* (c'est-à-dire inférieurs à une certaine limite L qu'on ne peut évidemment pas fixer une fois pour toutes, mais qui ne dépasse généralement pas 5 ou 6, si le choix des axes a été bien fait).

*Toute droite parallèle à une arête possible du cristal est l'intersection des plans parallèles à deux faces possibles, et réciproquement.* Écrivons les deux équations des faces et les deux équations de la droite :

$$q \frac{x}{a} + r \frac{y}{b} + s \frac{z}{c} = 0, \quad q' \frac{x}{a} + r' \frac{y}{b} + s' \frac{z}{c} = 0,$$

$$\frac{x}{ma} = \frac{y}{nb} = \frac{z}{pc}. \quad (2)$$

Les nombres  $m, n, p$ , peuvent être pris entiers et simples, si  $q, r, s, q', r', s'$ , sont eux-mêmes entiers et simples, et réciproquement.

On démontre de même aisément que *le plan qui passe par deux arêtes possibles est une face possible, et réciproquement.*

Les équations (1) et (2) définissent complètement l'*orientation* des

faces possibles et des arêtes possibles, sans aucune autre hypothèse que la loi d'Haüy. *Le problème consiste à savoir quels sont les éléments de symétrie compatibles avec un tel double faisceau de droites et de plans, que nous appellerons faisceau d'Haüy; les droites et les plans sont définis géométriquement, sans autre spécification.*

Nous voici donc ramenés à un problème très analogue à celui des polyèdres symétriques (Chapitre II); il en diffère par sa moindre généralité, puisque le double faisceau admet un centre et que nous spécifions une condition particulière à remplir pour les faces et les arêtes.

**71. Utilisation d'un réseau.** — Pour aller plus loin, utilisons des raisonnements dus à Gadolin (son mémoire, publié en français dans les Actes de la Société de Finlande, date de 1867) et simplifiés par G. Friedel.

Considérons un réseau construit sur trois arêtes *réelles* du cristal et dont les paramètres sont  $a, b, c$ . Il est évident que ses plans réticulaires et ses rangées sont *parallèles* au faisceau (1) de plans et au faisceau (2) de droites qui satisfont à la loi d'Haüy.

Est-ce à dire que l'*hypothèse réticulaire* (arrangement des points homologues de la matière du cristal suivant les nœuds d'un réseau)

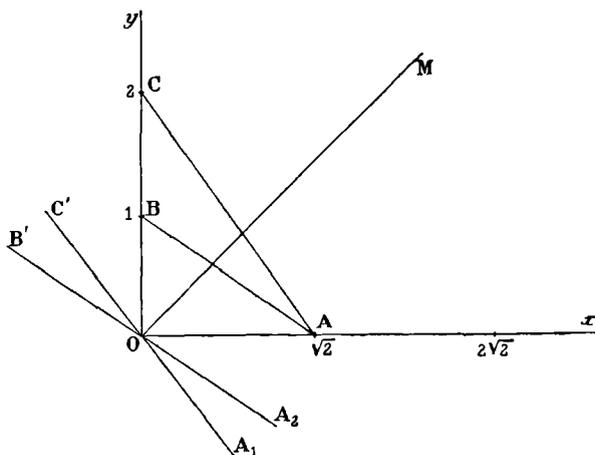


Fig. 46.

soit rigoureusement équivalente à la loi d'Haüy, de sorte que l'une puisse remplacer l'autre? C'est ce qu'admettent implicitement Bravais, Mallard et beaucoup de cristallographes.

*Nous allons montrer qu'il n'en est rien.* Cela tient à ce qu'un faisceau de plans, *passant tous par un point*, peut admettre une symétrie incompatible avec le système *parallèle* des plans d'un réseau *pour lesquels il faut faire intervenir l'orientation et la position.*

Un exemple simple dans le plan fait clairement comprendre de quoi il s'agit.

Soit un plan réticulaire de paramètres 1 (sur  $Oy$ ),  $\sqrt{2}$  (sur  $Ox$ ). On voit aisément qu'à toute rangée AB correspond une autre rangée AC qui fait le même angle avec la bissectrice OM, de sorte que les parallèles à ces rangées, menées par l'origine ET CONSIDÉRÉES INDÉPENDAMMENT DE LEURS PARAMÈTRES, admettent OM comme axe binaire.

Prouvons cette proposition.

Soit :  $a = \sqrt{2}$ ,  $b = 1$ .

Écrivons que les droites :

$$\frac{x}{ma} = \frac{y}{nb}, \quad \frac{x}{\mu a} = \frac{y}{\nu b}, \quad (2)$$

sont symétriques par rapport à OM. Il vient la condition :

$$\frac{ma}{\nu b} = \frac{nb}{\mu a}, \quad m\mu a^2 = n\nu b^2, \quad 2m\mu = n\nu.$$

Par exemple faisons :  $\nu = 2m$ ,  $\mu = n$ ; les droites symétriques ont pour équations :

$$\frac{x}{ma} = \frac{y}{nb}, \quad \frac{x}{na} = \frac{y}{2mb}.$$

On démontrerait la même proposition chaque fois que  $a^2$  et  $b^2$  sont en rapport rationnel :  $a^2 : b^2 = n\nu : m\mu$ ,

ce qui n'implique pas que  $a$  et  $b$  le soient.

Mais si OM est axe binaire du faisceau de droites, elle n'est pas axe binaire pour les rangées du plan réticulaire. Les deux rangées AB et AC qui correspondent à :  $m = 1$ ,  $\mu = n = -1$ ,  $\nu = 2$ , font bien le même angle avec OM, mais elles ne se coupent pas sur OM; il est impossible de trouver deux rangées, ne passant pas par l'origine des coordonnées, qui satisfassent simultanément aux deux conditions.

En particulier, la droite normale à OM n'est pas une rangée.

En résumé, les droites du faisceau (2) ont un élément de symétrie qui n'appartient pas au plan réticulaire.

Nous montrerons plus loin qu'il est possible de trouver quelque chose d'analogue dans l'espace; nous prouverons ainsi que la loi d'Haüy est plus générale que l'hypothèse réticulaire. Il suffit pour l'instant que le lecteur ait compris qu'user d'un réseau pour représenter les orientations de tous les plans et les directions de toutes les arêtes d'un faisceau, ne signifie pas que les points homologues de la matière du cristal (c'est-à-dire les points disposés de la même manière par rapport à cette matière) soient distribués suivant les nœuds d'un réseau.

L'emploi d'un réseau pour figurer les orientations présente l'avantage considérable de rendre intuitif le théorème suivant.

Choisissons trois arêtes possibles du cristal et supposons la loi d'Haüy vérifiée pour toutes les faces par rapport à ces trois arêtes; elle le sera nécessairement si l'on prend pour axes de référence trois autres arêtes quelconques possibles du cristal. Cela revient à prendre pour axes trois nouvelles rangées du réseau auxiliaire.

**72. Un faisceau d'Haüy ne peut admettre que des axes d'ordre 2, 3, 4, 6.** — Soit OM l'axe de symétrie; OA, OB, OC, OD, ... sont les arêtes qui forment une pyramide régulière admettant la droite OM comme axe; ELLES ONT A PRIORI DES PARAMÈTRES QUELCONQUES. Le plan MABC... est supposé normal à OM.

Pour savoir si les arêtes font partie d'un faisceau d'Haüy, faisons passer deux plans possibles par le même point d'une arête; ils doivent couper toute autre arête suivant des longueurs qui sont en rapport rationnel.

D'ailleurs, tout plan qui passe par deux arêtes possibles est un plan possible. Il en est ainsi, par exemple, de AOD et de OED.

Menons par le point C deux plans parallèles à ces plans.

Le plan parallèle à AOD passe par BC; il découpe sur l'arête OB le segment  $\overline{OB}$ .

Prolongeons ED et BC; l'intersection des plans OBC et OED est la droite OK.

Par le point C menons un plan parallèle à OED : il coupe OBC suivant CH parallèle à OK; il découpe par conséquent sur l'arête OB le segment  $\overline{OH}$ .

La loi d'Haüy exige que le rapport  $\overline{OB} : \overline{OH}$  soit rationnel.

Posons :  $\overline{BMC} = \alpha$ ,  $\overline{BM} = r$ . On a :

$$\overline{OB} : \overline{OH} = \overline{KB} : \overline{KC}.$$

$$\overline{BC} = 2r \sin \frac{\alpha}{2}, \quad \overline{NK} = \frac{\overline{BC}}{2} + \overline{CK} = r \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

$$\overline{BK} = r \sin \frac{\alpha}{2} \frac{1 + 2 \cos \alpha}{\cos \alpha}, \quad \overline{CK} = r \sin \frac{\alpha}{2} \frac{1}{\cos \alpha};$$

$$\overline{OB} : \overline{OH} = \overline{BK} : \overline{CK} = 1 + 2 \cos \alpha.$$

Le rapport  $\overline{OB} : \overline{OH}$  devant être rationnel, il faut que  $\cos \alpha$  le soit.

Or on démontre le théorème suivant : si  $\alpha$  est de la forme  $2\pi : n$ ,

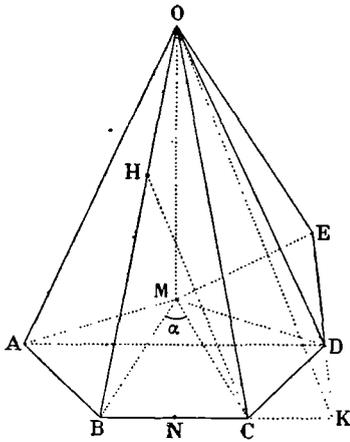


Fig. 47.

où  $n$  est en nombre entier,  $\cos \alpha$  ne peut être rationnel que pour les valeurs  $0$ ,  $\frac{1}{2}$  et  $1$ .

La valeur  $0$  donne  $\alpha = 2\pi : 4$ ; l'axe est quaternaire.

La valeur  $1 : 2$  donne  $\alpha = 2\pi : 6$ ; l'axe est sénaire.

La valeur  $1$  donne  $\alpha = 0 = 2\pi : \infty$ ; l'axe est de révolution.

Le raisonnement précédent suppose qu'il y a au moins 5 arêtes, c'est-à-dire que l'axe est au moins quinaire. Mais il est clair que rien n'empêche l'axe d'être binaire, ternaire ou quaternaire.

En définitive, un faisceau d'Haüy peut posséder des axes d'ordre 2, 3, 4, 6, ce qui est évident *a priori*; il ne peut en posséder d'ordres différents.

Nous savons qu'il en est de même pour les réseaux; *sous ce rapport*, l'hypothèse réticulaire n'est pas moins générale que la loi d'Haüy.

**73. Théorèmes sur les axes pairs d'un faisceau. —**

Les propositions suivantes résultent des théorèmes démontrés au § 70 : *toute droite parallèle à une arête possible du cristal est l'intersection des plans parallèles à deux faces possibles; le plan qui passe par deux arêtes possibles est une face possible.*

1° *Un axe d'ordre pair (2, 4, 6) est nécessairement une arête du faisceau.* Cela revient à dire qu'un axe d'ordre pair est l'intersection de deux faces possibles.

En effet, considérons deux droites OA et OB du faisceau, inclinées sur l'axe *supposé binaire* et qui ne sont pas dans le même plan avec lui (le lecteur fera la figure). La droite OA multipliée par l'axe donne OA'; le plan AOA' appartient au faisceau. La droite OB multipliée par l'axe donne OB'; le plan BOB' appartient au faisceau. Les plans AOA' et BOB' se coupent sur l'axe qui est par conséquent une arête possible du faisceau.

La démonstration, valant pour l'axe binaire, vaut *a fortiori* pour les axes quaternaires et sénaires.

2° Il résulte immédiatement de là que *les paramètres a et b des arêtes A et B, également inclinées sur un axe pair  $\Lambda$ , sont en rapport rationnel* (fig. 48).

Considérons en effet les trois arêtes possibles  $\Lambda$ , A et B; les deux dernières sont symétriques par rapport à la première, qui par hypothèse est un axe pair.

Puisque  $\Lambda$  est une arête possible, il existe un plan du faisceau qui passe par  $\Lambda$  et par conséquent une face possible passant par CD

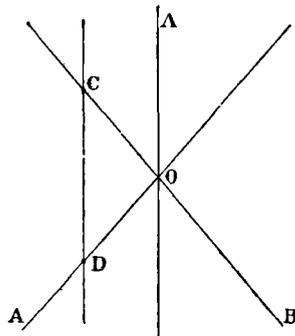


Fig. 48.

parallèle à  $\Lambda$ . Elle doit découper sur les arêtes A et B des longueurs  $ma$  et  $nb$  telles que le rapport  $m : n$  soit rationnel.

Or on a :

$$ma = \overline{OD}, \quad nb = \overline{OC}; \quad ma = nb.$$

Donc le rapport  $a : b$  est rationnel.

Cette proposition, démontrée pour un axe binaire, s'étend immédiatement aux axes quaternaires et sénaires.

3° *Le plan normal à un axe pair est nécessairement un plan du faisceau.*

Considérons en effet un plan A incliné sur l'axe  $\Lambda$ ; multiplié par cet axe, considéré comme binaire, il donne un plan A' symétrique de A et appartenant aussi au faisceau. L'intersection (A, A') des plans A et A' est une arête possible qui se trouve évidemment dans le plan normal à  $\Lambda$ .

Recommençons la construction sur une face B inclinée sur  $\Lambda$  et ne coupant pas le plan normal à  $\Lambda$  suivant la même droite que A. Nous obtiendrons une arête (B, B') qui est distincte de (A, A') et normale à  $\Lambda$ . Donc le plan normal à  $\Lambda$  est un plan du faisceau, puisqu'il passe par deux droites du faisceau.

4° *Les paramètres  $a, b, c, \dots$ , de toutes les arêtes symétriques par rapport à un axe  $\Lambda$  quaternaire ou sénaire sont en rapports rationnels.*

En effet, le plan normal à l'axe coupe sur toutes les arêtes des longueurs égales. Elles doivent être en rapports rationnels avec les paramètres  $a, b, c, \dots$ , qui correspondent à ces arêtes. Donc ces paramètres sont en rapports rationnels.

Il importe de remarquer que *si les paramètres sont en rapports rationnels, rien ne nous empêche de les prendre égaux*. Les arêtes symétriques par rapport à un axe, qui étaient symétriques seulement à la condition de n'ajouter aucune spécification à leur définition géométrique, en particulier à la condition de ne pas comparer leurs paramètres, le deviennent absolument.

**74. Conclusions pour les symétries ne contenant pas d'axes ternaires.** — Les théorèmes précédents sont ceux-là même qu'on tire de l'hypothèse réticulaire et que nous avons démontrés au § 58. Lorsqu'il n'existe pas d'axes ternaires (pour lesquels les démonstrations précédentes ne sont plus nécessairement valables), on peut toujours trouver un réseau non seulement définissant l'orientation des plans du faisceau, mais encore ayant la symétrie de ce faisceau.

Nous légitimons ainsi cinq systèmes, à savoir les systèmes triclinaire, monoclinique, terbinaire, quaternaire et sénaire qui ne contiennent pas d'axe ternaire; on peut les choisir égaux.

Passons au cas où il existe un ou plusieurs axes ternaires.

**75. Cas des axes ternaires.** — Deux cas se présentent :

1° Il peut arriver que l'axe ternaire  $\Lambda$  soit une arête du faisceau ; le plan normal est alors certainement un plan du faisceau, et les paramètres de trois droites symétriques par rapport à  $\Lambda$  sont en rapports rationnels.

Considérons, en effet, le trièdre qui provient d'un plan quelconque multiplié par l'axe  $\Lambda$ . Soit A, B, C, ses faces,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , les arêtes opposées aux faces. Puisque  $\Lambda$  est une arête du faisceau, les plans passant par  $\Lambda$  et les arêtes du trièdre sont des faces possibles. Elles coupent les faces du trièdre suivant trois droites  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\gamma_1$ , qui sont des arêtes possibles. Le plan  $\beta_1\gamma_1$  coupe la face A suivant une droite normale à  $\Lambda$  et qui appartient au faisceau ; de même pour les faces B et C du trièdre. Il existe donc trois arêtes possibles dans un plan normal à  $\Lambda$  qui est par suite un plan du faisceau.

Nous retombons sur les propriétés connues des axes de symétrie des réseaux, et ainsi se trouve légitimé le sixième système cristallin, le système cubique.

2° Mais l'axe ternaire peut ne pas être une arête du faisceau, et nous arrivons enfin au cas *théoriquement fondamental* où la loi d'Haüy est plus générale que l'hypothèse réticulaire.

De ce que l'axe n'est pas une arête du faisceau découlent deux conséquences fondamentales.

D'abord un plan parallèle à l'axe n'appartient pas au faisceau. En effet, supposons le contraire ; un tel plan entraîne l'existence de deux autres plans symétriquement disposés par rapport à l'axe. Ces trois plans se coupent deux à deux suivant des parallèles à l'axe *qui est par suite une arête du faisceau*.

En second lieu, supposons que le plan P normal à l'axe appartienne au faisceau. Considérons le trièdre qui provient d'un plan quelconque multiplié par l'axe. Soit A, B, C, ses faces,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , ses arêtes. Les faces A, B, C, coupent le plan P suivant les droites  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$ , à 120° l'une de l'autre et qui sont des arêtes du faisceau. Menons les plans  $\beta\beta'$  et  $\gamma\gamma'$  ; ils appartiennent au faisceau et se coupent suivant une droite  $\alpha_1$  qui est une arête du faisceau. Le plan  $\alpha\alpha_1$  appartient donc au faisceau. Or il est évident, par raison de symétrie, que les trois plans  $\alpha\alpha_1$ ,  $\beta\beta_1$ ,  $\gamma\gamma_1$ , se coupent sur l'axe. *Donc celui-ci est une arête du faisceau*.

Exprimons analytiquement que l'axe ternaire n'est pas une arête du faisceau.

Il suffit pour cela que les paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , de trois droites également inclinées sur l'axe ternaire *du faisceau*, ne soient pas en rapports rationnels, mais que les quantités  $a^3 : abc$ ,  $b^3 : abc$ ,  $c^3 : abc$ , le soient.

*L'axe ternaire du faisceau n'est plus axe ternaire du réseau.*

Pour bien comprendre le sens de cette proposition, on relira le § 71.

En effet, considérons le plan :

$$q \frac{x}{a} + r \frac{y}{b} + s \frac{z}{c} = 0. \quad (1)$$

Si les arêtes de référence sont symétriques par rapport à un axe ternaire, il doit exister deux autres plans où  $x, y, z$ , sont traitées de même par permutation circulaire :

$$r \frac{x}{b} + s \frac{y}{c} + q \frac{z}{a} = 0. \quad (2)$$

$$s \frac{x}{c} + q \frac{y}{a} + r \frac{z}{b} = 0. \quad (3)$$

Mais le plan (2) appartenant au faisceau (1) doit pouvoir s'écrire :

$$q' \frac{x}{a} + r' \frac{y}{b} + s' \frac{z}{c} = 0, \quad (4)$$

où  $q', r', s'$ , sont encore entiers. Identifions (2) et (4) :

$$\frac{r}{q'} \frac{a}{b} = \frac{s}{r'} \frac{b}{c} = \frac{q}{s'} \frac{c}{a}.$$

$a^2 : bc$ ,  $b^2 : ca$ ,  $c^2 : ab$ , doivent être en rapports rationnels, et par conséquent aussi  $a^3 : abc$ ,  $b^3 : abc$ ,  $c^3 : abc$ .

On peut prendre :

$$a = 1, \quad b = \sqrt[3]{\varepsilon}, \quad c = \sqrt[3]{\varepsilon^2},$$

où  $\varepsilon$  est un nombre entier. On a en effet :

$$abc = \varepsilon, \quad a^3 = 1, \quad b^3 = \varepsilon, \quad c^3 = \varepsilon^2.$$

*Ces axes ternaires portent le nom d'axes ternaires irrationnels.*

**76. Existence des axes ternaires irrationnels.** — L'identification *pratique* de la loi d'Haüy et de l'hypothèse réticulaire dépend donc de la réponse à cette question : *Existe-t-il des axes ternaires irrationnels ?*

S'ils existent, on pourra bien se servir des réseaux pour définir des *orientations* de plans; mais on ne pourra pas les considérer comme une réalité physique. On devra abandonner l'idée que, *dans les milieux cristallins*, la matière se distribue *toujours* périodiquement, l'idée que le milieu est identiquement restitué par les translations définies au moyen des vecteurs joignant deux nœuds quelconques d'un réseau.

On démontre que les seuls groupes d'éléments de symétrie où puissent intervenir les axes ternaires irrationnels, que nous notons  $\lambda$ ,

sont les suivants ( $\pi$  et  $\Pi$  désignent les plans de symétrie normaux aux axes) :

$$\begin{array}{cccccc} & \lambda_3, & C, & \pi, & & \\ 3\Lambda_2, & 4\lambda_3, & C, & 3\Pi, & 4\pi. & \end{array}$$

Le premier correspond au rhomboèdre avec cette particularité qu'il ne peut exister de faces ni parallèles, ni perpendiculaires à l'axe ternaire (ni prismes, ni bases, § 84), et que pour obtenir des caractéristiques simples pour les faces possibles, il faut prendre des paramètres irrationnels sur les arêtes symétriques par rapport à l'axe ternaire. Or, dans tous les cristaux ternaires connus, on *simplifie* les caractéristiques en prenant égaux les paramètres de trois arêtes symétriques par rapport à l'axe ternaire.

Le second système dérive du cube. Les cristaux qui lui appartiendraient ne pourraient jamais présenter les faces de l'octaèdre.

Les diagonales des faces du cube (axes binaires de l'holoédrie cubique) ne peuvent être des arêtes du faisceau; car elles se trouvent trois par trois dans les plans normaux aux axes ternaires. Si elles étaient arêtes du faisceau, ces plans seraient des faces possibles, ce qui est contraire à l'hypothèse. De ce fait, deviennent impossibles les trapézoèdres (§ 102) et les trioctaèdres (§ 102), dont deux faces se coupent suivant ces directions. Impossible aussi le dodécaèdre rhomboïdal, dont les faces sont normales à ces mêmes directions. Enfin, pour obtenir des caractéristiques simples, on devrait prendre sur les arêtes symétriques de l'axe ternaire des paramètres irrationnels.

De tout ce qui précède résulte une quasi-certitude de la non-existence des axes ternaires irrationnels, et cette conséquence fondamentale qu'on peut prendre l'hypothèse réticulaire comme pratiquement équivalente à la loi d'Haüy.

**77. Des 32 classes de cristaux.** — Quoi qu'il en soit, nous avons montré qu'il résulte de la seule loi d'Haüy la limitation de l'ordre des axes; ils ne peuvent être que binaires, ternaires, quaternaires. Nous nous retrouvons *donc en un sens* au point où nous étions à la fin du Chapitre III. Classer toutes les symétries possibles dans les cristaux est facile; il suffit de chercher tous les sous-groupes des 24 groupes pour lesquels les axes sont d'ordre 2, 3, 4, 6. Nous engageons le lecteur à faire ce petit travail, que nous reculons encore une fois.

Pour construire la théorie générale de la structure, il est commode d'employer le langage de la *Théorie des groupes de déplacements*. Nous allons donc chercher les 32 classes directement et sans nous appuyer sur les résultats du Chapitre II.

## CHAPITRE V

### GROUPES FINIS DE DÉPLACEMENTS

**78. Définition des groupes d'opérations.** — Des opérations forment un *groupe* quand elles satisfont aux deux conditions suivantes :

1° le produit de deux opérations ou le carré d'une opération est une opération du groupe ;

2° le groupe contient l'opération inverse de toute opération du groupe.

Tout groupe contient donc l'*opération identique* :  $AA^{-1} = 1$ .

Il résulte immédiatement de cette définition :

que le produit d'un nombre quelconque d'opérations du groupe fait partie du groupe ;

qu'une opération élevée à une puissance entière quelconque est une opération du groupe.

Le groupe est fini ou infini suivant que le nombre de ses opérations est fini ou infini.

Soit, par exemple, un axe sénaire; posons  $\alpha = 60^\circ$ . Les opérations du groupe sont :

$$1, \quad A(\alpha), \quad A(2\alpha), \quad A(3\alpha), \quad A(4\alpha), \quad A(5\alpha).$$

Le groupe fini est d'ordre six. Il est clair que les conditions exigées sont satisfaites.

Le produit de deux opérations du groupe est une opération du groupe. On a, par exemple :

$$A(4\alpha) \cdot A(5\alpha) = A(9\alpha) = A(2\pi + 3\alpha) = A(3\alpha).$$

L'opération inverse existe; elle consiste en une rotation de sens inverse de la rotation primitivement considérée.

Soit comme *second exemple* les trois opérations : transposition autour d'un axe ( $A_\pi$ ), réflexion sur un plan perpendiculaire à cet axe (S), inversion par rapport à la trace de l'axe sur le plan (I). Elles forment un groupe.

D'abord elles admettent toutes l'opération inverse.

$$\begin{aligned} \text{On a :} \quad & A^2 = S^2 = I^2 = 1, \\ & A \cdot S = S \cdot A = I, \\ & I \cdot S = S \cdot I = A, \\ & I \cdot A = A \cdot I = S. \end{aligned}$$

Comme il est impossible de faire d'autres produits distincts deux à deux, nous sommes assurés que les opérations forment un groupe.

On dit que *certaines opérations d'un groupe forment un sous-groupe lorsque, prises isolément, elles satisfont aux conditions de la définition d'un groupe.*

Par exemple, les opérations :

$$1, \quad A(2\alpha), \quad A(4\alpha),$$

forment un sous-groupe des opérations définies par un axe sénaire. Cela revient à dire qu'un axe sénaire peut être envisagé sans contradiction comme un axe ternaire *pour une partie* des opérations dont il est l'opérateur.

Nous admettons que *le nombre des opérations d'un groupe fini est un multiple des nombres d'opérations de tous les sous-groupes qu'il contient.*

Dans l'exemple précédent, le nombre des opérations du groupe est 6; le nombre des opérations du sous-groupe est 3.

**79. Groupes finis d'opérations; problème de la Cristallographie.** — Il est facile de montrer qu'un groupe fini de déplacements ne peut pas contenir de translations. Car s'il contenait l'opération  $T(t)$ , il contiendrait l'opération  $T^n(t) = T(nt)$ ; les translations ainsi obtenues sont toutes distinctes et nécessairement en nombre infini.

Le groupe ne contient pas davantage de rotation hélicoïdale, puisqu'une telle opération contient une translation.

S'il existe deux ou plusieurs axes de rotation, ils passent nécessairement par le même point. Sinon le produit de plusieurs rotations contiendrait nécessairement une translation (§ 19 et 20).

En définitive, un groupe fini de déplacements se compose uniquement de rotations, de réflexions et d'inversions. Les axes de rotation et les miroirs passent tous par le même point, qui est le centre d'inversion lorsque l'inversion fait partie du groupe.

Cette proposition est d'ailleurs évidente d'après le raisonnement suivant. Appliquons toutes les opérations du groupe à un système  $S$  de points matériels; nous obtenons un système  $\Sigma$  symétrique au sens du § 43. C'est dire que toutes les opérations du groupe, appliquées au système  $\Sigma$ , le restituent identique à lui-même.

Le centre de gravité du système  $\Sigma$  doit se trouver sur tous les

éléments de symétrie, axes, miroirs, centres; donc tous les éléments de symétrie passent par un point qui est le centre d'inversion lorsque l'inversion fait partie du groupe.

Le problème de la Cristallographie peut maintenant être énoncé avec précision : *On demande tous les groupes finis distincts qu'il est possible de former avec des rotations autour d'axes de première et de seconde espèces, avec des réflexions et des inversions, c'est-à-dire avec celles des opérations définies aux §§ 10 et 11 qui sont compatibles avec les groupes finis.*

Le problème est immédiatement simplifié par deux remarques.

1° Appliquons toutes les opérations d'un groupe à un plan arbitrairement choisi; les plans obtenus définiront un polyèdre. L'hypothèse que les indices des faces du polyèdre satisfont à la loi de rationalité (§ 69) limite l'ordre des axes aux valeurs 2, 3, 4, 6.

2° Supposons qu'il existe simultanément plusieurs axes d'ordre supérieur à 2; les paragraphes 24 et suivants nous apprennent que les seules combinaisons d'axes possibles sont définies par les symboles :

$$\begin{array}{ccc} 6L_5, & 10L_3, & 15L_2, \\ 3L_4, & 4L_3, & 6L_2, \\ 3L_2, & 4L_3. & \end{array}$$

La première combinaison est éliminée par le 1°; ne sont admissibles que les deux dernières.

Nous allons montrer qu'il existe 32 groupes finis satisfaisant aux conditions précédentes; ils forment ce qu'on appelle les 32 classes de cristaux.

Afin de ne pas alourdir notre exposé, nous ne chercherons pas une rigueur *formelle* inutile. Nous nous contenterons de montrer que les groupes existent, sans nous attacher à prouver qu'il n'en existe pas d'autres. Ces réciproques sont particulièrement délicates: nous appelant dessus dégoûterait le lecteur sans aucun profit. Rappelons que nous n'écrivons ni un *Traité des groupes de déplacements*, ni un *Traité de Cristallographie* proprement dit.

### Groupes finis de première espèce.

Ils ne contiennent que des opérations de première espèce, et par conséquent que des rotations et des transpositions (§ 10).

**80. Groupes cycliques.** — Les groupes *cycliques* ne possèdent qu'un axe. Ils sont donc au nombre de cinq, en y comprenant le groupe  $C_1$  qui ne contient aucune opération de symétrie :

$$C_1, \quad C_2, \quad C_3, \quad C_4, \quad C_6.$$

Le groupe  $C_n$  contient les  $n$  opérations distinctes :

$$1, \quad \Lambda, \quad \Lambda^2, \quad \Lambda^3, \quad \dots, \quad \Lambda^{n-1}.$$

Appliquons les opérations à une face représentée par la projection stéréographique de son pôle; nous obtenons la figure 49.

Nous avons autant de faces que d'opérations distinctes, si la face de laquelle nous partons est quelconque.

Le groupe  $C_1$  fournit une face.

Le groupe  $C_2$  fournit deux faces qui forment généralement un angle dièdre (*dôme*); les projections stéréographiques des faces sont représentées par la figure  $C_2$ ; l'axe binaire  $\Lambda_2$  est perpendiculaire au plan du tableau.

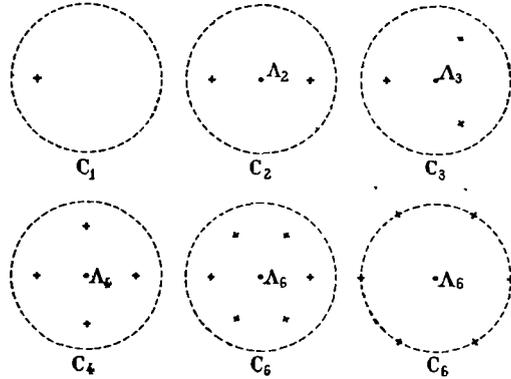


Fig. 49.

Il peut arriver que la face soit parallèle à

l'axe  $\Lambda_2$ ; la forme se compose de deux plans parallèles; les pôles sont alors sur le cercle limitant la projection.

Il peut encore arriver que la face soit perpendiculaire à l'axe; la forme qui résulte du groupe, se compose uniquement de cette face.

De même les autres groupes  $C_3, C_4, C_6$ , fournissent, suivant la position du plan auquel on applique les opérations, soit des pyramides régulières, soit des prismes droits réguliers, soit enfin une seule face normale à l'axe.

Dans tous les cas, le polyèdre obtenu est une forme *ouverte* (§ 94).

**81. Groupes diédraux.** — Les opérations des groupes *diédraux* sont définies par un axe principal et des axes binaires situés dans un plan perpendiculaire à l'axe principal. Naturellement le nombre des axes binaires est égal à l'ordre de l'axe principal.

Voici les symboles de ces groupes :

$$\begin{aligned} D_2 &= V; & L_2, & L'_2, & L''_2, \\ D_3 & & \Lambda_3, & 3L_2, \\ D_4 & & \Lambda_4, & 2L_2, & 2L'_2, \\ D_6 & & \Lambda_6, & 3L_2, & 3L'_2. \end{aligned}$$

Le nombre d'opérations distinctes du groupe  $D_n$  est  $2n$ .

Nous verrons plus tard qu'il est possible d'obtenir deux formes

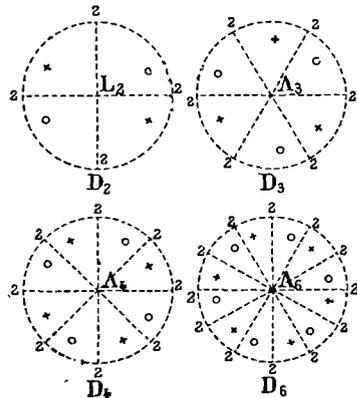


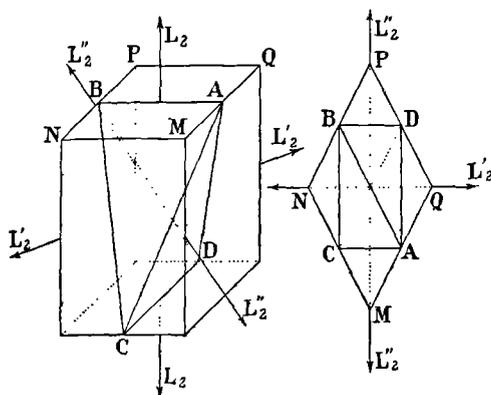
Fig. 50.

énantiomorphes, chacune d'elles admettant toutes les opérations d'un des groupes diédraux. En d'autres termes, *les formes obtenues à partir d'un plan quelconque par les opérations d'un groupe diédral jouissent de l'hémiédrie énantiomorphe*. Ce résultat est connexe de l'absence d'opérations de seconde espèce parmi les opérations de ces groupes.

Voici maintenant les formes qui conviennent à chacun des groupes (§ 93).

#### GRUPE $D_2$ .

On l'appelle en Allemagne *Viergruppe*, d'où le symbole V qu'on lui donne. Nous l'appellerons *groupe quadratique*. L'un des trois axes binaires peut être considéré comme principal.



*Tétraèdre V- $D_2$*

Fig. 51.

La forme générale est un *tétraèdre* (fig. 51) formé de deux *dômes* dont les arêtes sont normales à l'axe binaire pris pour principal et placé verticalement dans la figure. Le *prisme droit*, duquel on part pour le construire, est à base losange MNPQ. La figure à droite représente le solide vu d'en haut. Le tétraèdre s'y projette suivant ABCD.

Les axes  $L'_2$  et  $L''_2$  sont parallèles aux diagonales de la base. On voit immédiatement qu'ils sont respectivement perpendiculaires aux couples d'arêtes du tétraèdre inclinées sur l'horizon.

Le tétraèdre est disposé de même par rapport à l'un quelconque des axes binaires.

#### GROUPES $D_3$ , $D_4$ , $D_6$ .

La forme générale est composée de deux pyramides régulières ternaires, quaternaires ou sénaires, qui ont tourné l'une par rapport à l'autre d'un angle quelconque et qui s'emboîtent. Les faces sont des trapèzes irréguliers, d'où le nom de *trapézoèdres* qu'on donne aux polyèdres. Le trapézoèdre trigonal s'appelle encore *hémiscalénoèdre*.

Les axes binaires passent par le milieu des côtés opposés de la base qui est un hexagone, un octogone ou un dodécagone gauches (fig. 52).

#### SOUS-GROUPES D'OPÉRATIONS.

On remarquera que les rotations autour de l'axe principal forment un sous-groupe d'opérations. Le nombre des opérations distinctes

est  $n$ , en conformité avec ce théorème que le nombre des opérations

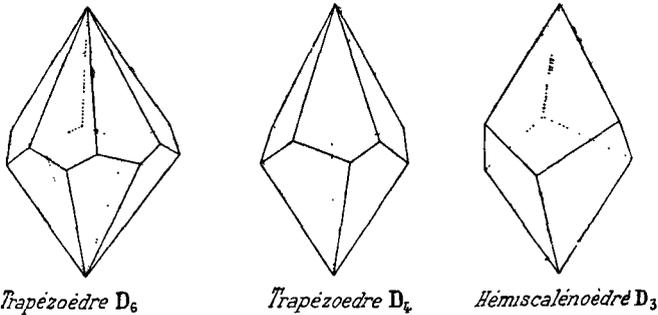


Fig. 52.

d'un groupe fini est un multiple du nombre des opérations des divers sous-groupes possibles.

**82. Axes hémimorphes, axes bilatéraux. Groupement des axes binaires.** — La considération des groupes  $D_3$ ,  $D_4$ ,  $D_6$ , précise la notion d'axes hémimorphes et d'axes bilatéraux.

Un axe est dit hémimorphe lorsque ses deux directions ne sont pas équivalentes; autrement dit, lorsqu'il n'est pas homologue de son inverse par rapport à un point pris sur lui-même. Il est bilatéral lorsqu'il est homologue de son inverse.

Les figures 12 et 11 représentent les axes binaires des groupes  $D_3$  et  $D_4$ .

L'axe  $L_2$  de la figure 11 permet de superposer  $L_1$  à son inverse; donc les axes binaires sont bilatéraux. Il en est toujours ainsi lorsqu'il existe un axe binaire perpendiculaire et par conséquent lorsque le nombre d'axes binaires contenus dans un plan est pair.

Au contraire, aucune combinaison des opérations du groupe  $D_3$  ne peut faire coïncider un axe binaire avec son inverse. Les axes de la figure 12 sont donc hémimorphes.

Les axes principaux des groupes cycliques sont hémimorphes, les axes principaux des groupes diédraux sont bilatéraux.

Les figures 11 et 12 montrent encore une différence dans la possibilité de groupement des axes binaires.

Si le nombre des axes binaires est pair, il est possible de les distinguer en deux groupes qui ne jouent pas le même rôle. C'est ce que montre immédiatement la figure 11. Si le nombre des axes est impair, il est impossible de les distinguer les uns des autres, sinon par leur position accidentelle dans le plan (fig. 12).

**83. Groupes isométriques.** — Les groupes isométriques sont caractérisés par l'existence de plusieurs axes d'ordre supérieur à 2.

Le paragraphe 79 nous apprend quels ils peuvent être ; les voici :

groupe tétraédral T       $3A_2, 4L_3$  ;  
groupe octaédral O       $3A_4, 4L_3, 6L_2$ .

Le lecteur doit immédiatement se familiariser avec le système

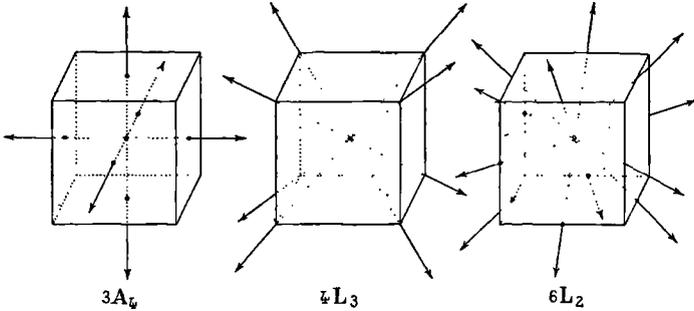


Fig. 53.

complet des axes du groupe isométrique octaédral. Ce sont ceux du cube. La figure 53 représente séparément :

- 1° les 3 axes quaternaires qui passent par le centre des faces (6 faces, 3 axes) ;
- 2° les 4 axes ternaires qui passent par les sommets opposés (8 sommets, 4 axes) ;
- 3° les 6 axes binaires qui passent par les milieux des côtés opposés (12 arêtes, 6 axes).

#### GRUPE TÉTRAÉDRAL.

Le nombre des opérations distinctes du groupe est 12. Les axes

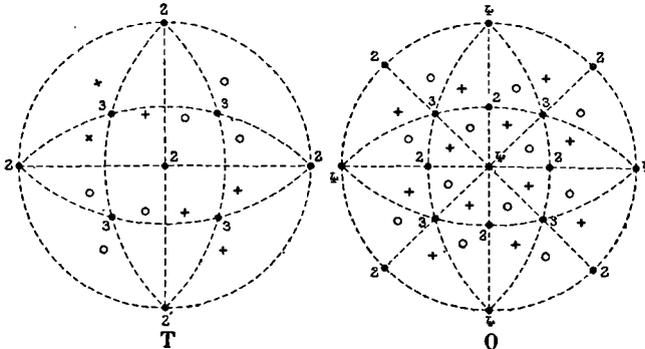


Fig. 54.

binaires du cube ont disparu ; corrélativement, les axes quaternaires sont devenus binaires. La forme est *tétartoédrique* (§ 92).

#### GRUPE OCTAÉDRAL.

Le nombre des opérations distinctes du groupe est 24.

La figure 54 représente les projections stéréographiques des groupes T et O. Les projections des pôles des axes portent un chiffre qui indique l'ordre des axes correspondants.

**Groupes finis de seconde espèce.**

Ils contiennent des opérations de seconde espèce (§ 11), réflexions et inversions.

84. **Groupes cycliques de seconde espèce.** — Les groupes *cycliques de seconde espèce* sont caractérisés par un axe de seconde espèce d'ordre 1, 2, 3, 4, 6.

Ils sont donc au nombre de cinq :

$$S_1, S_2, S_3 = C_{3a}, S_4, S_6 = C_{3i}.$$

Nous verrons plus loin pourquoi deux groupes ont deux notations.

1° GROUPE  $S_1$ .

Il contient deux opérations distinctes : 1, S. Il est donc caractérisé en tout par un plan de symétrie P. La forme générale est un *dôme* (dièdre) dont l'arête est dans le plan de symétrie. Cette forme possède d'autres éléments de symétrie ; elle a, par exemple, un plan de symétrie normal à l'arête. Mais rien n'empêche de prendre autant de dômes qu'on veut, à la seule condition qu'ils admettent tous le plan P comme miroir. Le choix étant arbitraire, il réduit à ce plan P les éléments de symétrie de la forme composée.

2° GROUPE  $S_2$ .

Il contient deux opérations distinctes : 1, I ; il est donc caractérisé par un centre de symétrie C. Nous savons en effet (§ 11) qu'une transposition suivie d'une réflexion équivaut à une inversion. La forme générale se compose donc de deux plans parallèles ; les remarques du 1° sont valables.

3° GROUPE  $S_3 = C_{3a}$ .

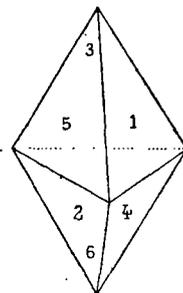
Il contient 6 opérations distinctes. La forme générale se compose de deux pyramides triangulaires régulières, ayant comme base commune un triangle équilatéral. Le plan de cette base est le miroir.

On vérifie qu'il revient au même : soit d'utiliser un axe ternaire de seconde espèce, soit d'utiliser un axe ternaire de première espèce en lui adjoignant un plan de symétrie perpendiculaire (§ 39).

Avec l'axe ternaire de seconde espèce, on obtient successivement les faces : 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Avec l'axe ternaire de première espèce, on obtient d'abord les faces : 1, 5, 3, qui multipliées par le miroir donnent : 4, 2, 6.

La pyramide triangulaire régulière a des miroirs qui passent par



Double Pyramide  
Fig. 55.

l'axe ternaire. Mais on peut associer autant de pyramides qu'on veut autour de l'axe ternaire, chacune d'elles dérivant d'un plan arbitraire; la forme composée perd les éléments de symétrie autres que  $S_3$ .

#### 4° GROUPE $S_4$ .

Il contient quatre opérations distinctes. La forme générale est un tétraèdre dérivé du prisme droit à base carrée.

Partons de la face 1 (ABC); faisant tourner de  $90^\circ$  autour de  $\Lambda$ , nous obtenons A'B'C'. Mirant dans le plan perpendiculaire passant par le centre du prisme, nous obtenons la face 2 du tétraèdre (CDB). Opérant de même, nous obtenons les faces 3 et 4.

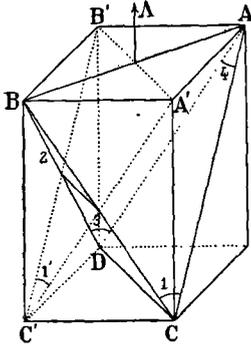


Fig. 56.

Le tétraèdre issu du prisme droit à base carrée, possède des axes binaires passant par le milieu des côtés (fig. 51). Mais rien n'empêche d'associer autour de l'axe quaternaire de seconde espèce autant de tétraèdres qu'on voudra, issus chacun d'un plan arbitraire. La forme composée perd tous les éléments de symétrie autres que  $S_4$ .

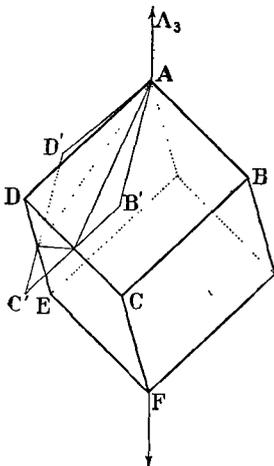
Le groupe  $S_4$  est historiquement célèbre; c'est en effet le seul qu'on ne puisse pas retrouver en utilisant les axes de première espèce, les miroirs et l'inversion. Aussi Bravais ne le donne-t-il pas dans sa classification des polyèdres symétriques; il le connaissait d'ailleurs parfaitement, puisqu'il discute ses chances d'existence (*Journal de l'École Polytechnique*, Cahier 34, p. 229) et le conserve dans sa classification des classes de cristaux (*ibid.*, p. 275). Nous avons déjà parlé de cette classe dans l'Avant-propos. Ajoutons qu'aucun corps naturel n'affecte cette symétrie.

#### 5° GROUPE $S_6 = C_{3i}$ .

Il contient six opérations distinctes. La forme générale se compose de deux pyramides triangulaires régulières, se raccordant suivant un hexagone gauche régulier: c'est un rhomboèdre.

Pour se représenter un rhomboèdre (fig. 57), qu'on imagine un cube déformé en tirant sur deux sommets opposés: il ne reste plus comme axe ternaire que celui qui passe par ces sommets.

Faisons tourner la face ABCD de  $60^\circ$  autour de l'axe sénaire de



Rhomboèdre

Fig. 57.

seconde espèce : elle devient  $AB'C'D'$ . Miron-la dans un plan perpendiculaire à l'axe ternaire ; elle fournit la face  $FCDE$ .

Le rhomboèdre a des axes de symétrie binaire et des plans de symétrie (§ 109). Mais nous pouvons associer autour de l'axe sénaire autant de rhomboèdres que nous voudrions dérivant de plans arbitrairement choisis. La forme composée ne contient plus d'autres éléments de symétrie que  $S_6$ .

Nous pouvons poser  $S_6 = C_{3i}$ . Cela revient à dire qu'à la place d'un axe sénaire de seconde espèce, nous pouvons employer un axe ternaire de première espèce multiplié par une inversion. C'est évident d'après la forme générale qu'engendre le groupe d'opérations : il est clair que le centre d'inversion existe quel que soit le nombre des rhomboèdres quelconques qu'on associe autour de l'axe.

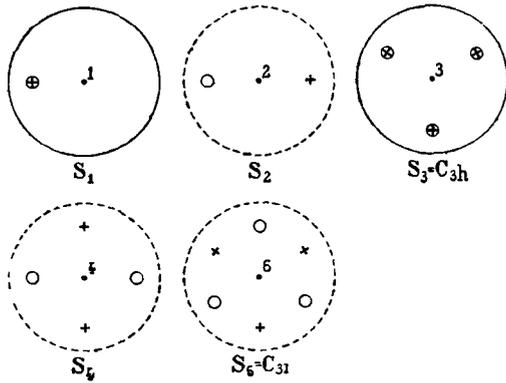


Fig. 58.

La figure 58 donne les projections stéréographiques qui correspondent aux cinq groupes cycliques de seconde espèce. Une petite croix sur un petit cercle indique deux faces symétriques par rapport au plan du tableau (§ 45).

85. **Groupes cycliques paramorphes.** — On peut les considérer comme définis par un axe de première espèce accompagné d'un plan de symétrie perpendiculaire à l'axe. Ils sont donc au nombre de 4 dont voici les symboles :

$C_{2h}$	$\Lambda_2, C, \Pi,$
$C_{3h}$	$\Lambda_3, \text{ » } \Pi,$
$C_{4h}$	$\Lambda_4, C, \Pi,$
$C_{6h}$	$\Lambda_6, C, \Pi.$

La lettre  $h$  signifie *horizontal*. Elle rappelle que l'axe principal étant supposé vertical, le plan de symétrie est horizontal. Nous avons déjà rencontré  $C_{3h}$  qui est identique à  $S_3$ . Il ne reste donc que des groupes à axe principal d'ordre pair.

Conformément au théorème du § 11, la coexistence de l'axe et du miroir entraîne l'existence d'un centre de symétrie.

La figure 59 donne la projection stéréographique des pôles des faces. Le nombre des opérations distinctes du groupe  $C_{nh}$  est  $2n$ .

Les formes générales sont des pyramides régulières doublées par le miroir. Elles admettent des axes binaires normaux à l'axe principal. Mais n'oublions pas qu'il est possible, tout en restant dans les groupes ici étudiés, d'associer un nombre quelconque de formes autour de l'axe principal, issus de plans arbitraires et ayant tourné d'angles quelconques. Comme pour les groupes cycliques de première ou de deuxième espèces, aucun élément de symétrie ne fixe un azimut.

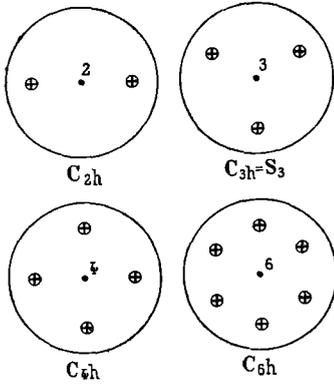


Fig. 59.

Il n'en est pas de même, comme on le verra, pour les groupes suivants.

L'axe des groupes cycliques parmorphes est bilatéral (§ 82).

**86. Groupes cycliques hémimorphes.** — Ils sont définis par un axe de première espèce d'ordre  $n$  par lequel passent  $n$  plans de symétrie, faisant naturellement les uns avec les autres des angles égaux. L'axe principal étant vertical, ces plans sont verticaux; d'où le symbole  $C_{nv}$ . Le nombre des opérations distinctes du groupe  $C_n$  est  $2n$ .

L'axe des groupes cycliques hémimorphes est hémimorphe (§ 82). Voici les symboles de ces groupes.

$C_{2v}$ ,	$\Lambda_2$ , P, P',
$C_{3v}$ ,	$\Lambda_3$ , 3P,
$C_{4v}$ ,	$\Lambda_4$ , 2P, 2P',
$C_{6v}$ ,	$\Lambda_6$ , 3P, 3P'.

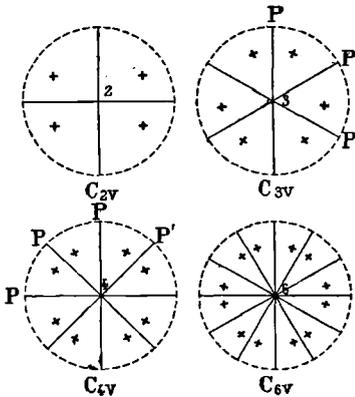


Fig. 60.

On vérifiera le même phénomène pour les plans de symétrie que pour les axes (§ 31).

Si l'axe est d'ordre impair, les plans ne sont pas distinguables les uns des autres.

Si l'axe est d'ordre pair, les plans forment deux groupes qu'on peut distinguer autrement que par leurs positions accidentelles dans l'espace. D'où les symboles adoptés.

La figure 60 donne les projections stéréographiques des pôles.

La forme générale est une pyramide de  $2n$  faces non régulière; le polyèdre est ouvert. On peut considérer ces pyramides comme for-

mées de deux pyramides régulières de  $n$  faces qui ont tourné d'un angle quelconque l'une par rapport à l'autre.

**87. Groupes diédraux.** — Les groupes *diédraux* de première espèce (§ 81) sont caractérisés par l'existence d'axes binaires perpendiculaires à l'axe principal. Nous avons expliqué au § 82 qu'il résultait de là une bilatéralité des axes principaux.

Les *groupes diédraux de seconde espèce* sont de même caractérisés par l'existence d'axes binaires normaux à l'axe principal; mais en plus de ces axes existent des opérations de seconde espèce. Le symbole des groupes diédraux est  $D_{nh}$  quand il existe un miroir normal à l'axe principal (par conséquent horizontal pour la position conventionnelle de l'axe principal); il est  $D_{nd}$  lorsque les seuls miroirs existant passent par l'axe principal et sont par conséquent verticaux. Nous verrons plus loin la signification de l'indice  $d$  (diagonale).

Le nombre d'opérations distinctes des groupes  $D_{nh}$  ou  $D_{nd}$  est  $4n$ .

I. GROUPES  $D_{nh}$ .

Ils sont au nombre de quatre dont voici les symboles :

- $D_{2h}$ ,  $L_2, L'_2, L''_2, C, P, P', P''$ ,
- $D_{3h}$ ,  $\Lambda_3, 3L_2, \Pi, 3P$ ,
- $D_{4h}$ ,  $\Lambda_4, 2L_2, 2L'_2, C, \Pi, 2P, 2P'$ ,
- $D_{6h}$ ,  $\Lambda_6, 3L_2, 3L'_2, C, \Pi, 3P, 3P'$ .

Les projections stéréographiques des pôles des polyèdres généraux engendrés sont représentées figure 61.

La comparaison avec la figure 60 montre immédiatement que les polyèdres  $D_{nh}$  ne sont que les polyèdres  $C_{nv}$  doublés par un miroir perpendiculaire à l'axe principal. On peut écrire symboliquement :

$$D_{nh} = C_{nv} \cdot S.$$

La forme générale se compose donc de deux pyramides non régulières, ayant chacune  $2n$  faces; elles sont symétriques par rapport au plan  $\Pi$ . On peut aussi bien considérer la forme générale comme engendrée par deux doubles pyramides régulières qui ont tourné l'une par rapport à l'autre d'un angle quelconque.

La forme  $D_{2h}$  est aussi notée  $V_4$  ou  $Q_4$  (Vierergruppe, Quadratischgruppe).

Les trois groupes  $D_{2h}, D_{4h}, D_{6h}$ , sont les formes holoédres ortho-

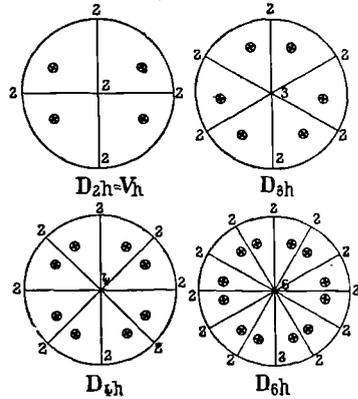


Fig. 61.

rhombique, quadratique et hexagonale. Ils ont exactement la symétrie du prisme droit à base rectangle ou losange, du prisme droit à base carrée, du prisme droit à base hexagone régulier.

## II. GROUPE $D_{nd}$ .

Ils sont au nombre de deux; voici leurs symboles :

$$D_{2d}, \quad \Lambda_2, \quad 2L_2, \quad 2P',$$

$$D_{3d}, \quad \Lambda_3, \quad 3L_2, \quad C, \quad 3P.$$

Les plans de symétrie ne contiennent pas les axes de symétrie binaires : ils sont en diagonale avec ceux-ci (d'où le symbole  $d$ ). La fig. 62

représente les projections stéréographiques des pôles des faces.

1° La forme générale des groupes  $D_{nd}$  est représentée figure 63.

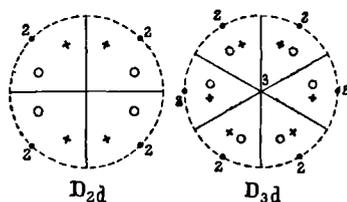


Fig. 62.

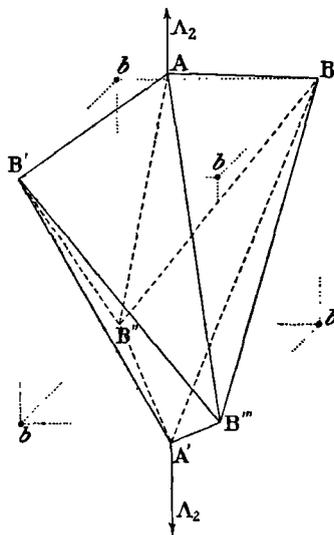


Fig. 63.

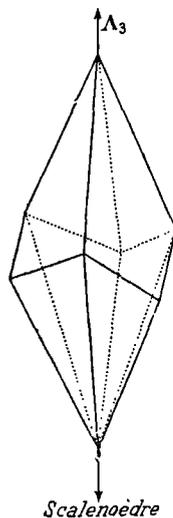


Fig. 64.

Le lecteur comparera utilement la figure à sa projection stéréographique.

Les plans de symétrie passent :

l'un par le pourtour  $A'B'ABA'$ ;

l'autre par le pourtour  $AB''A'B''A$ .

Les axes binaires passent :

l'un par le milieu des arêtes opposées :  $B'B''$ ,  $BB''$ ;

l'autre — — — — —  $BB'''$ ,  $B'B'''$ .

Le lecteur construira la figure à partir d'un prisme droit à base

carrée. Les points B sont quatre sommets de ce prisme dont l'axe quaternaire coïncide avec  $\Lambda_2$ . Pour faciliter la construction, on a mis en place les quatre autres sommets  $b$ .

2° Le groupe  $D_{3d}$  correspond à la forme holoèdre du système ternaire. On vérifiera aisément que le *rhomboèdre* (§ 60) a exactement la symétrie de ce groupe.

La forme générale, qui a douze faces, s'appelle un *scalénoèdre* : elle est représentée figure 64. Elle se compose de deux pyramides régulières hexagonales raccordées suivant un polygone gauche ; les douze faces sont des triangles scalènes égaux.

Les plans de symétrie passent par les arêtes opposées ; les axes binaires passent par les milieux des côtés opposés de l'hexagone gauche.

88. **Groupes isométriques.** — Ils contiennent plusieurs axes de symétrie d'ordre supérieur à 2 et aussi des opérations de seconde espèce. Ils sont au nombre de trois :

$T_h,$	$3\Lambda_2,$	$4L_3,$	$C,$	$3\Pi,$
$T_d,$	$3\Lambda_2,$	$4L_3,$	$6P,$	
$O_h,$	$3\Lambda_4,$	$4L_3,$	$6L_2,$	$C, 3\Pi, 6P.$

1° GROUPE  $T_h$ .

Il contient vingt-quatre opérations distinctes. La figure 65 à gauche représente la position des vingt-quatre pôles dans le cas général. Elle

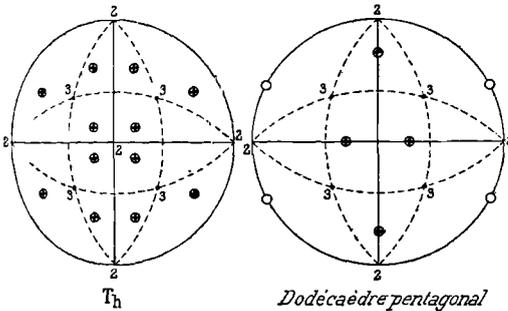


Fig. 65.

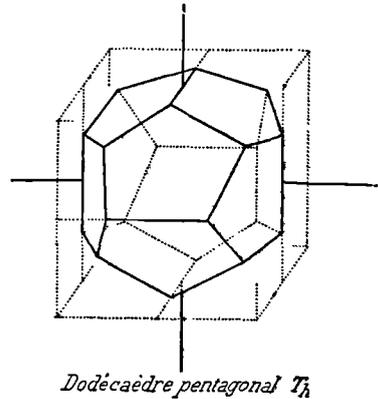


Fig. 66.

permet une remarque que nous aurions pu faire bien souvent. Supposons que le pôle de la face à laquelle on applique les opérations ne soit pas quelconque ; il est dans un des plans  $\Pi$ . Il est possible de le prendre tel que les pôles des autres faces soient conformes à la figure 65 à droite. Le nombre de faces n'est plus que 12. On obtient le dodécaèdre pentagonal dont la figure 66 montre les relations de position avec le cube dont on peut le dériver.

La remarque précédente est générale en ce sens que les faces qui correspondent respectivement à toutes les opérations d'un groupe, ne sont distinctes qu'à la condition que la face génératrice soit quelconque. Si on la prend, par exemple, normale à un plan de symétrie, on diminue de moitié le nombre des faces distinctes.

### 2° GROUPE $T_d$ .

Il contient vingt-quatre opérations distinctes. La figure 67 représente en général la position des 24 pôles. C'est un cube dont les faces sont recouvertes de pyramides quadrangulaires ; les 24 faces sont des triangles, non parallèles entre eux deux par deux.

Naturellement si le pôle initial n'est pas quelconque, on obtient

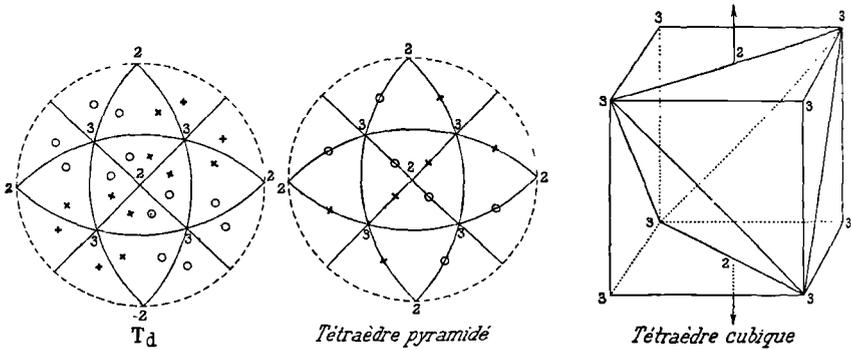


Fig. 67.

Fig. 68.

une forme dont le nombre de faces est sous-multiple de 24. Par exemple, si le pôle initial est dans un des plans de symétrie (qui passent par les axes ternaires), on obtient des polyèdres à douze faces.

Quand les pôles sont placés comme l'indique la figure 67 à droite, le polyèdre est un *tétraèdre pyramidé*, tétraèdre cubique dont les faces sont recouvertes d'un pointement ternaire régulier (fig. 86).

Si les pôles sont symétriques par rapport à l'axe ternaire de ceux que nous avons représentés, on obtient un *dodécaèdre trapézoïdal* (fig. 87).

Enfin quand les pôles coïncident avec les axes ternaires, les faces sont réduites au tiers : on obtient le *tétraèdre cubique* (fig. 68), solide à 4 faces  $[4 = 24 : (2 \times 3)]$ .

### 3° GROUPE $O_h$ .

Il a la symétrie complète du cube. La forme générale a 48 faces.

Nous n'insistons pas pour l'instant, car le cube et ses formes dérivées nous serviront plus loin comme exemple du procédé par lequel Haüy obtient les formes cristallines.

89. **Tableau des groupes finis.** — Résumons les résultats précédents en deux tableaux. Ils contiennent le numéro du groupe, le nom, le symbole, le nombre d'opérations, le nombre des axes hémimorphes et bilatéraux de première et de seconde espèce, le nombre des plans de symétrie et le centre d'inversion s'il existe.

GROUPES FINIS DE PREMIÈRE ESPÈCE

NUMÉROS	NOMS	SYMBOLE	OPÉRATIONS	AXES HÉMIMORPHES	AXES BILATÉRAUX
1	Groupes cycliques.	$C_1$	1		
2		$C_2$	2	$\Lambda_2$	
3		$C_3$	3	$\Lambda_3$	
4		$C_4$	4	$\Lambda_4$	
5		$C_6$	6	$\Lambda_6$	
6	Groupes diédraux.	$D_2$	4	$3L_2$	$L_2$ $L'_2$ $L''_2$
7		$D_3$	6		$\Lambda_3$
8		$D_4$	8		$\Lambda_4$ $2L_2$ $2L'_2$
9		$D_6$	12		$\Lambda_6$ $3L_2$ $3L'_2$
10	Groupes isométriques.	T	12	$4L_3$	$3\Lambda_2$
11		O	24		$3\Lambda_4$ $4L_3$ $6L_2$

## GROUPES FINIS DE SECONDE ESPÈCE

NUMÉ- ROS	NOMS	SYMBOLE	OPÉRA- TIONS	AXES DE SYMÉTRIE			PLAN DE SYMÉTRIE ET CENTRE
				HÉMI- MORPHES	BILATÉRAUX		
					1 <sup>re</sup> espèce.	2 <sup>e</sup> espèce.	
12	Groupes cycliques de seconde espèce.	$S_1$	2				P
13		$S_2 = C_i$	2				C
14		$S_3 = C_{3h}$	6		$\Lambda_3$		$\Pi$
15		$S_4$	4		$\Lambda_2$	$\Lambda_4$	
16		$S_6 = C_{3i}$	6		$\Lambda_3$	$\Lambda_6$	C
17	Groupes cycliques paramorphes.	$C_{2h}$	4		$\Lambda_2$		$\Pi$ C
18		$C_{4h}$	8		$\Lambda_4$		$\Pi$ C
19		$C_{6h}$	12		$\Lambda_6$		$\Pi$ C
20	Groupes cycliques hémimorphes.	$C_{2v}$	4	$\Lambda_2$			P P'
21		$C_{3v}$	6	$\Lambda_3$			3P
22		$C_{4v}$	8	$\Lambda_4$			2P 2P'
23		$C_{6v}$	12	$\Lambda_6$			3P 3P'
24	Groupes tétraux de seconde espèce.	$D_{2h}$	8	$3L_2$	$L_2 L'_2 L''_2$		P P' P'' C
25		$D_{3h}$	12		$\Lambda_3$		$\Pi$ 3P
26		$D_{4h}$	16		$\Lambda_4$ $2L_2$ $2L'_2$		$\Pi$ 2P 2P' C
27		$D_{6h}$	24		$\Lambda_6$ $3L_2$ $3L'_2$		$\Pi$ 3P 3P' C
28	Groupes diédraux de seconde espèce.	$D_{2d}$	8		$\Lambda_2$ $2L_2$	$\Lambda_4$	2P'
29		$D_{3d}$	12		$\Lambda_3$ $3L_2$	$\Lambda_6$	3P C
30	Groupes isométriques.	$T_h$	24	$4L_3$	$3\Lambda_2$ $4L_3$	$4L_6$	$3\Pi$ C
31		$T_d$	24		$3\Lambda_2$	$3\Lambda_4$	6P
32		$O_h$	48		$3\Lambda_4$ $4L_3$ $6L_2$		$3\Pi$ 6P C

90. **Holoédrie et mériédrie.** — Nous distinguons donc 32 classes. On les groupe généralement en six ou sept systèmes (suivant que l'on considère ou non le système rhomboédrique comme une dépendance du système hexagonal) en s'appuyant sur le principe suivant.

Partons d'un plan quelconque et multiplions-le par tous les éléments de symétrie. Deux cas peuvent se présenter.

1° Il n'existe pas de plans conformes à la loi d'Haüy (face possible du réseau par conséquent) qui, ajoutés au solide obtenu, en élèvent la symétrie : on dit que la symétrie est *holoédre*.

2° Il existe des plans conformes à la loi d'Haüy qui, ajoutés au solide obtenu, en élèvent la symétrie : on dit que la forme est *mériédre*.

Par exemple, considérons la classe 6 de symétrie  $L_2, L'_2, L''_2$ . Partons d'un plan quelconque de symbole  $qrs$ , et cherchons tous les plans possibles en vertu des éléments de symétrie. Nous en trouvons quatre notés :

$$qrs, \quad qr\bar{s}, \quad \bar{q}r\bar{s}, \quad \bar{q}\bar{r}s.$$

Par raison de commodité, nous plaçons le signe — au-dessus de la *caractéristique*, au lieu de le mettre avant. La rotation  $q\bar{r}\bar{s}$  équivaut à la notation  $q, -r, -s$ . Nous n'écrivons pas le signe +.

Mais toutes les combinaisons possibles des signes + et — donneront des faces possibles en vertu de la loi d'Haüy. Ce sont, outre les précédentes :

$$\bar{q}rs, \quad q\bar{r}s, \quad qr\bar{s}, \quad \bar{q}\bar{r}\bar{s}.$$

Ajoutons-les : nous obtenons un solide à huit faces de symétrie :

$$L_2, L'_2, L''_2, C, P, P', P''. \quad (\text{Classe } 24.)$$

Nous ne pouvons augmenter la symétrie obtenue par aucune adjonction de faces. Donc la classe 6 est hémihédre, la classe 24 est holoédre.

Nous n'insistons pas, parce que nous développons les mêmes notions sous une forme plus concrète dans le Chapitre VI. Nous voulons seulement mettre le lecteur en garde contre une erreur trop naturelle.

Il résulte de ce qui précède que toutes les classes d'un même système ont les mêmes réseaux *et par conséquent les mêmes faces possibles. Les milieux n'en ont pas moins des symétries et des propriétés absolument différentes.* Ce sont, par rapport aux propriétés physiques, des types absolument distincts. Il existe assurément plus de ressemblance générale entre les milieux *holoédres* hexagonaux, quaternaires et ternaires (classes 27, 26 et 25), qu'entre les diverses classes qui se rangent comme mériédries dans l'un de ces systèmes (classes 27 et 5, par exemple).

C'est pourquoi nous avons tenu à obtenir les 32 classes avant de parler des systèmes, et à les obtenir dans un ordre rationnel. Le tableau du § 89 donne une idée beaucoup plus juste des véritables affinités des classes que le tableau du § 101 par systèmes.

---

# CHAPITRE VI

## SYSTÈMES CRISTALLINS

Le lecteur ne doit s'attendre à trouver dans ce Chapitre que l'essentiel sur les formes cristallines et leurs notations. Nous n'écrivons pas un traité de Cristallographie; notre plan est plus général.

91. **Méthode des troncatures (Haüy).** — Nous allons reprendre le classement des formes cristallines en nous appuyant sur un principe différent de ceux qui nous ont servi jusqu'à présent. Nous retrouverons les résultats connus d'une manière concrète et permettant de les retenir sans effort. Cette méthode est due à l'illustre Haüy.

On prend pour points de départ sept polyèdres, appelés *formes primitives*, dont voici les éléments de symétrie.

I. Cube (fig. 69) :

$$3\Lambda_4, 4L_3, 6L_2, C, 3\Pi, 6P.$$

II. Prisme droit à base hexagone régulier (fig. 70) :

$$\Lambda_6, 3L_2, 3L'_2, C, \Pi, 3P, 3P'.$$

III. Rhomboèdre (fig. 71) :

$$\Lambda_3, 3L_2, C, 3P.$$

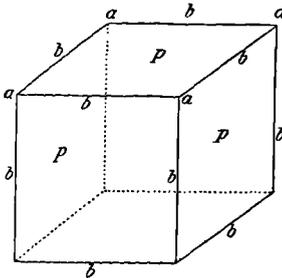


Fig. 69.

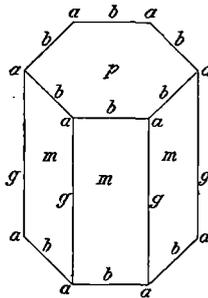


Fig. 70.

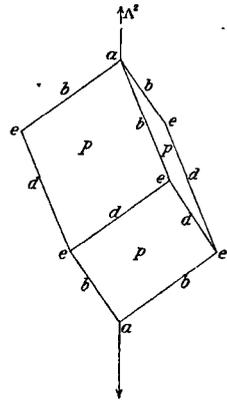


Fig. 71.

IV. Prisme droit à base carrée (fig. 72) :

$$\Lambda_4, 2L_2, 2L'_2, C, \Pi, 2P, 2P'.$$

V. Prisme droit à base losange (fig. 73) :

$$L_2, L'_2, L''_2, C, P, P', P''.$$

VI. Prisme oblique à base losange (fig. 74) :

$$L_2, C, P.$$

VII. Parallélépipède quelconque (fig. 75) :

$$C.$$

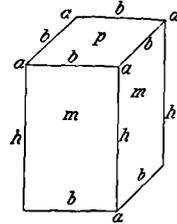


Fig. 72.

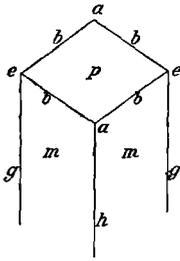


Fig. 73.

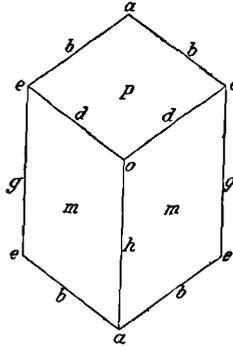


Fig. 74.

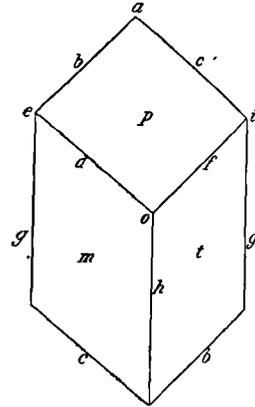


Fig. 75.

Ceci posé, voici la loi de dérivation d'Haüy : *Pour obtenir une forme dérivée, on modifie la forme primitive successivement sur chacune de ses espèces d'angles et d'arêtes, par des facettes dont le nombre et la disposition sont conformes aux éléments de symétrie.*

Les facettes sont évidemment égales entre elles, puisqu'en utilisant les éléments de symétrie de la *forme primitive*, on peut faire coïncider deux quelconques d'entre elles.

Une fois les troncatures obtenues, il suffit de les prolonger pour obtenir un polyèdre qui possède évidemment la même symétrie que la forme primitive : *c'est une des formes dérivées possibles.*

**92. Formes méridiennes : hémiedrie, tétartoédrie.** — Si toutes les troncatures indiquées par la symétrie de la forme primitive coexistent, nous obtenons une forme dérivée complète, *holoèdre*.

Mais négligeons d'utiliser certains éléments de symétrie; la forme que nous obtenons ne contiendra généralement qu'une fraction du nombre des faces de la forme holoèdre; elle est dite *méroèdre* ou *méroèdre*.

Quand elle contient la *moitié* des faces de la forme holoèdre, elle

est hémihédre; quand elle en contient seulement le quart, elle est tétrartoédre.

Supposons dérivée de la forme primitive, à partir de la même facette, d'abord une forme holoédre, puis une forme hémihédre. Il est clair que toutes les faces de la forme hémihédre appartiennent à la forme holoédre. Prenons une des faces restantes de la forme holoédre et appliquons-lui tous les éléments de symétrie conservés; nous obtenons une seconde forme hémihédre qui n'a évidemment aucune face commune avec la première forme hémihédre.

*Les deux solides hémihédres sont dits conjugués.*

La tétrartoédrie pouvant être considérée comme l'hémihédrie d'une hémihédrie, il existe simultanément quatre formes conjuguées.

Il faut naturellement que les éléments de symétrie que nous utilisons, dont nous conservons les opérations :

1° soient compatibles entre eux; cette condition est toujours satisfaite, puisque tous les éléments de symétrie de la forme primitive le sont;

2° ne redonnent pas automatiquement les éléments de symétrie supprimés.

Par exemple, si nous partons du prisme oblique à base parallélogramme dont le symbole est  $L_2, C, P$ , nous ne pouvons pas supprimer le plan; car nous savons (§ 11) que l'existence simultanée d'un axe pair et d'un plan rétablit un centre, ou que l'existence simultanée d'un axe pair et d'un centre rétablit le plan.

*Le problème consiste donc à chercher tous les groupes d'éléments de symétrie dont la coexistence n'entraîne aucun autre élément, à partir des sept symétries des formes primitives.*

*Tous les groupes d'éléments de symétrie qui dérivent d'une des formes primitives, s'appellent un système.*

Nous retrouvons ainsi 31 des 32 groupes finis de déplacements que nous avons découverts par une autre voie; seul est excepté le fameux groupe  $S_4$  qu'on ne rencontre d'ailleurs jamais dans la nature.

**93. Différentes sortes d'hémihédrie.** — Avant de donner le tableau des groupes divisés par systèmes (car il est infiniment plus clair de préjuger du résultat), définissons les termes qui s'y rencontrent et montrons à quels phénomènes ils correspondent.

Voici d'abord quelques théorèmes généraux.

1° Si une partie des axes de symétrie de la forme holoédre sont déficients, parmi eux se trouvent sûrement des axes binaires, car la présence d'axes binaires entraîne nécessairement la présence d'axes principaux (§ 31).

On vérifiera que tout polyèdre qui possède  $q$  axes binaires dans un plan et passant par un point, possède un axe d'ordre  $q$  perpendiculairement à ce plan et passant par ce point. Nous avons vu au § 31

que les axes binaires se divisent en deux *groupes* si  $q$  est pair, sont indiscernables si  $q$  est impair.

2° Si un axe binaire fait défaut, tous les axes du même groupe font défaut : l'axe principal perpendiculaire devient d'ordre moitié moindre.

I. HÉMIÉDRIE HOLOAXE, NON SUPERPOSABLE OU ÉNANTIOMORPHE (GROUPES DIÉDRAUX).

On peut supprimer tous les éléments de symétrie sauf les axes; il reste une symétrie acceptable dont la forme générale possède la moitié des faces de la forme holoèdre correspondante.

*Les deux formes conjuguées ne sont généralement pas superposables; elles sont énantiomorphes.* Les faces des formes conjuguées énantiomorphes sont dites *plagièdres*.

En effet, si elles étaient superposables, on pourrait amener la superposition en faisant tourner l'une d'elles autour d'une droite passant par le centre (supprimé) de la forme holoèdre; cette droite serait donc un axe du polyèdre holoèdre. C'est impossible, puisque par hypothèse ils sont tous conservés. Une rotation autour d'un quelconque des axes, compatible avec l'ordre de l'axe, restitue la forme elle-même et non sa conjuguée.

On peut présenter la démonstration d'une autre manière.

Admettons qu'il existe, dans la forme holoèdre de laquelle on part, des groupements de faces énantiomorphes; on passe de l'un à l'autre au moyen des réflexions sur les miroirs et de l'inversion par rapport au centre. Mais par hypothèse on supprime ces opérations; donc on laisse la moitié des faces respectivement dans chacun des polyèdres conjugués qui sont énantiomorphes.

En définitive, l'hémiédrie énantiomorphe découle des ensembles d'opérations qui ne contiennent pas d'opération de seconde espèce.

Ce raisonnement prouve que *les formes conjuguées peuvent être énantiomorphes, mais ne le sont pas nécessairement.* Il faut que le polyèdre dont on prend la moitié des faces, contienne des groupements de faces énantiomorphes, de manière que les opérations de seconde espèce interviennent dans sa construction à partir d'une des faces; sinon les formes hémièdres sont superposables.

Nous trouverons de nombreuses applications de ces règles.

II. HÉMIÉDRIE HÉMIMORPHE, ANTIMORPHE OU ANTIHÉMIÉDRIE.

Ces hémiédries caractérisent les groupes  $C_m$  et  $T_d$ .

On maintient les plans de symétrie qui sont compatibles avec la suppression du centre. Les formes conjuguées sont superposables, puisqu'on conserve des opérations de seconde espèce.

Le cristal porte des pointements différents aux bouts de l'axe principal conservé.

III. HÉMIÉDRIE PARAMORPHE, CENTRÉE OU PARAHÉMIÉDRIE.

Le centre est conservé; les faces vont deux par deux, *parallèles* entre elles, d'où le nom de cette hémiédrie.

**94. Formes simples, formes composées; formes ouvertes, formes fermées.** — Partons d'une première troncature et construisons la forme correspondante soit par la loi de dérivation d'Haüy, soit en utilisant les éléments de symétrie, ce qui revient au même. Nous obtenons une forme dite *simple*.

On appelle forme *complexe* ou *composée* la superposition de plusieurs formes simples. On obtient une forme complexe en partant de deux ou de plusieurs troncatures initiales, non superposables au moyen de tous les éléments de symétrie.

Il arrive que les formes simples soient *ouvertes*, c'est-à-dire ne limitent pas une portion d'espace; il est clair qu'on peut toujours trouver une forme *composée* qui soit fermée.

Un cristal hémihédre peut offrir l'apparence d'un cristal holoédre, *alors même que les formes conjuguées ne sont pas identiques*. La forme est alors une forme composée des deux formes conjuguées hémihédres. Les troncatures initiales à partir desquelles la dérivation est faite, ne sont pas quelconques; elles sont symétriques par rapport aux éléments de symétrie *qui subsistent ainsi comme en partie*. Mais généralement les faces correspondantes des formes conjuguées n'ont pas des propriétés identiques; par exemple, les unes sont plus rugueuses que les autres, elles sont différemment attaquées par les acides,...

### Systèmes de notations.

**95. Notation d'Haüy complétée par Lévy.** — On appelle *angles égaux, arêtes égales, faces égales*, les angles, arêtes, faces de la forme primitive qu'on peut superposer en utilisant les éléments de symétrie. Désignons par les lettres :

$p, m, t$ (primitif),	les faces,
$b, c, d, f,$	les arêtes des bases,
$g, h,$	les arêtes latérales,
$a, e, i, o,$	les angles de la forme primitive.

*Les éléments géométriques égaux étant notés de même*, nous n'utiliserons toutes les lettres que pour le polyèdre VII; pour les autres, les lettres sont répétées.

Les figures 69 à 73 représentent les sept formes primitives notées suivant la méthode qu'on vient de définir.

Pour obtenir des formes holoédres, il faut attaquer de la même manière les éléments géométriques de même notation.

**96. Troncatures sur les angles, sur les arêtes.** — La troncature la plus générale porte sur les angles.

Soit un angle (nécessairement trièdre, les formes primitives n'en admettent pas d'autres) limité par trois arêtes  $d$ ,  $f$ ,  $h$ , par exemple.

Un plan coupe sur ces arêtes trois longueurs que nous mesurerons en prenant pour unités de longueur ces arêtes elles-mêmes, ou la même fraction de ces arêtes; elles serviront donc de paramètres au sens défini au § 49.

Si le plan coupe sur l'arête  $d$  une longueur égale à  $m$  fois cette arête, sur l'arête  $f$  une longueur égale à  $n$  fois cette arête, sur l'arête  $h$  une longueur égale à  $p$  fois cette arête, la troncature est notée :

$$d^m f^n h^p.$$

Il y a double emploi des lettres  $m$  et  $p$ , mais sans ambiguïté possible. Placées en exposant, ces lettres représentent des nombres.

Les nombres  $m$ ,  $n$ ,  $p$ , sont plus petits ou plus grands que l'unité. Il résulte de la loi des indices rationnels qu'on peut les supposer fractionnaires *et simples*; en effet, ils sont pris exactement dans le sens du § 49. Enfin on peut les supposer entiers en sous-entendant un dénominateur *quelconque*.

Par exemple, le symbole  $d^1 f^1 h^1$  signifie que le plan détache non pas toute l'arête  $d$ , toute l'arête  $f$ , toute l'arête  $h$ , mais la même fraction quelconque de ces arêtes. Il représente donc une infinité de plans parallèles.

Toutes les facettes homologues découpent naturellement la même fraction.

On convient d'écrire d'abord les arêtes de base.

SIMPLIFICATIONS.

1° Si la troncature est parallèle à une arête,  $d$  par exemple, il faut écrire :

$$d^\infty f^m h^n.$$

On écrit plus simplement  $d^{m/n}$ , en commençant toujours par l'indice qui correspond à l'arête de base;  $m/n$  est donc le rapport de la longueur *namérique* horizontale à la longueur numérique verticale.

Lorsque (cube, rhomboèdre) les arêtes qui aboutissent à un même angle sont égales, on prend pour  $m/n$  le rapport de la plus grande longueur à la plus petite.

Quand une face coupe deux arêtes de base suivant des indices égaux :

$$d^m f^m h^n,$$

on la désigne par la lettre de l'angle solide affecté de l'indice  $m/n$  :

$$d^m f^m h^n = \sigma^{m/n};$$

$m/n$  est encore le rapport de la longueur horizontale à la longueur verticale.

97. **Axes de coordonnées, notation de Miller.** — On peut encore prendre, comme notations des faces, les caractéristiques  $q$ ,  $r$ ,  $s$ , définies au § 50. Elles représentent les *inverses* des nombres de fois

que les paramètres caractéristiques des axes sont contenus dans les longueurs respectivement découpées sur ces axes par le plan considéré.

Les caractéristiques  $q, r, s$ , du système de notations de Miller sont par conséquent les inverses des caractéristiques  $m, n, p$ , du système de notations de Lévy, à supposer qu'on emploie dans les deux cas le même trièdre de référence.

La notation 111 signifie qu'on prend sur les arêtes de référence des longueurs qui sont égales aux paramètres respectifs ou plus généralement la même fraction de ces paramètres. La notation 120 signifie que le plan considéré coupe sur l'une des arêtes une longueur *par exemple* égale à deux fois le paramètre correspondant, coupe sur la seconde une longueur égale au paramètre, et enfin est parallèle à la troisième (en découpe une longueur infinie).

**98. Changements d'axes de coordonnées.** — Soit un premier système d'axes  $x, y, z$ , dont les paramètres sont  $a, b, c$ . Soit un second système d'axes où l'axe des  $z$  est conservé; les axes des  $x'$  et des  $y'$  s'obtiennent en prenant les diagonales du rectangle construit sur les paramètres  $a$  et  $b$ . Les nouveaux paramètres sont (fig. 76) :

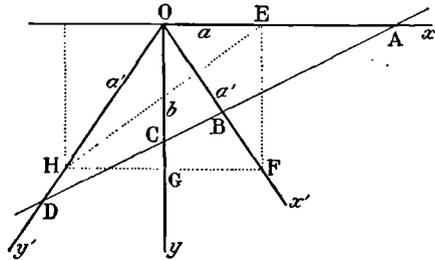


Fig. 76.

$$c' = c, \quad a' = b' = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

On donne les caractéristiques d'un plan  $q, r, s$ ; on demande les caractéristiques  $q', r', s'$ .

Nous pouvons raisonner dans le plan des  $xy$ .

La droite ABCD a, par rapport au premier système d'axes, l'équation :

$$q \frac{x}{a} + r \frac{y}{b} = 1.$$

La droite OF a pour équation :  $x : a = y : b$ .

Les coordonnées de B et la distance  $\overline{OB}$  sont donc :

$$x = \frac{a}{q+r}, \quad y = \frac{b}{q+r}; \quad \sqrt{x^2 + y^2} = x' = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{q+r} = \frac{a'}{q+r}.$$

De même la droite OH a pour équation :  $x : a = -y : b$ .

Les coordonnées de D et la distance  $\overline{OD}$  sont donc :

$$x = \frac{a}{q-r}, \quad y = \frac{-b}{q-r}; \quad \sqrt{x^2 + y^2} = y' = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{q-r} = \frac{a'}{-q+r}.$$

D'où les formules de transformation :

$$q' = q+r, \quad r' = -q+r, \quad s' = s. \quad (1)$$

On tire de là :

$$2q = q' - r', \quad 2r = q' + r', \quad 2s = 2s';$$

ou encore, puisque les caractéristiques ne sont déterminées qu'à un facteur entier près :

$$q = q' - r', \quad r = q' + r', \quad s = 2s'. \quad (2)$$

Par exemple, la ligne EH a pour caractéristiques :

$$q = 1, \quad r = 2; \quad q' = 3, \quad r' = 1.$$

Dans le système cubique, on prend comme axes les trois axes quaternaires.

Dans les systèmes *quaternaire*, *orthorhombique* et *clinorhombique*, on prend comme axe des  $z$  l'axe quaternaire, l'axe binaire vertical, ou enfin l'arête verticale.

Quant aux deux autres axes, le choix peut porter sur deux systèmes de lignes qui sont précisément disposées comme le suppose la figure 76.

Dans le système *quaternaire*, les axes  $x, y$ , sont normaux aux faces  $m$ ; les axes  $x', y'$ , passent par les arêtes  $h$ . On a :

$$a = b, \quad a' = b' = a\sqrt{2}, \quad c = c'.$$

Dans le système *orthorhombique*, les axes  $x, y$ , sont parallèles aux axes binaires; les axes  $x', y'$ , sont parallèles aux arêtes du rhombe.

Enfin dans le système *clinorhombique*, on prend pour axe des  $x$  la diagonale inclinée, pour axe des  $y$  une parallèle à l'axe binaire. Les axes  $x', y'$ , sont parallèles aux côtés du rhombe.

Les dispositions des axes dans ces deux derniers systèmes sont donc les mêmes; toute la différence provient de ce que l'axe des  $z$  est normal à l'axe des  $x$  dans le premier et incliné sur cet axe dans le second. Les formules de transformation sont d'ailleurs les mêmes.

**99. Système de notations à quatre caractéristiques; système hexagonal.** — Aucune simplification n'intervient pour le système triclinique; restent le système hexagonal et le système rhomboédrique.

Il est avantageux, pour faire apparaître la symétrie, de rapporter les formes du système hexagonal à quatre axes : l'axe vertical (sénair) et trois axes à  $120^\circ$  l'un de l'autre, disposés dans un plan normal à l'axe sénair : ce seront l'un ou l'autre des systèmes d'axes binaires. D'où quatre caractéristiques  $q, r, s, t$ , la quatrième se rapportant à l'axe vertical. Les paramètres sur les trois axes horizontaux sont égaux par raison de symétrie.

On démontre immédiatement que les caractéristiques horizontales  $q, r, s$ , satisfont à la relation :

$$q + r + s = 0.$$

CHANGEMENT D'AXES.

Supposons connues les caractéristiques  $q, r, s$ , pour trois axes parallèles à l'un des systèmes d'axes binaires; on demande les caractéristiques pour les trois axes, à  $30^\circ$  des précédents, parallèles à l'autre système d'axes binaires.

Par un procédé de calcul tout à fait analogue à celui du § 98, on trouve :

$$\begin{aligned} q' &= r - s, & r' &= s - q, & s' &= q - r; \\ q &= r' - s', & r &= s' - q', & s &= q' - r'; \end{aligned}$$

avec la condition entre les paramètres :  $a' = a\sqrt{3}$ .

Bravais choisissait son système d'axes passant par les arêtes du prisme hexagonal. On vérifie immédiatement la concordance des notations qui seront expliquées plus loin (§ 107) :

Lévy	$p$	$m$	$h^1$	$b^1$	$a^2$	etc.
Bravais	0001	10 $\bar{1}$ 0	11 $\bar{2}$ 0	10 $\bar{1}$ 1	11 $\bar{2}$ 2	etc.

100. **Système ternaire.** — On peut conserver le système à quatre caractéristiques  $q, r, s, t$ , en prenant les trois axes binaires comme axes horizontaux.

On peut encore utiliser des notations à trois caractéristiques  $q', r', s'$ ,

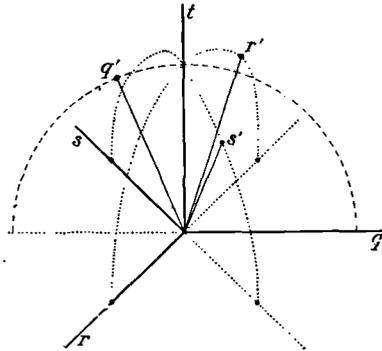


Fig. 77.

en prenant comme axes les arêtes du rhomboèdre. Les deux systèmes d'axes sont respectivement placés comme l'indique la figure.

On trouve aisément les relations :

$$\begin{aligned} t &= q' + r' + s', \\ q &= r' - s', & r &= s' - q', & s &= q' - r'. \end{aligned}$$

Nous n'insisterons pas, n'ayant pas comme but d'écrire un traité de Minéralogie.

101. Tableau des éléments de symétrie des trente-deux classes de formes cristallines, rangées par systèmes. —

On donne les symboles abrégés et les numéros d'ordre correspondants des tableaux du § 89.

I. *Système cubique.*

Holoédrie	$3\Lambda_4, 4L_3, 6L_2, C, 3\Pi, 6P$	32	$O_h$
Hémi. énantiomorphe	$3\Lambda_4, 4L_3, 6L_2$	11	O
Hémi. hémimorphe	$3\Lambda_4, 4L_3, 6P$	31	$T_d$
Hémi. paramorphe	$3\Lambda_2, 4L_3, C, 3\Pi$	30	$T_h$
Tétartoédrie	$3\Lambda_2, 4L_3$	10	T

II. *Système hexagonal.*

Holoédrie	$\Lambda_6, 3L_2, 3L'_2, C, \Pi, 3P, 3P'$	27	$D_{6h}$
Hémi. énantiomorphe	$\Lambda_6, 3L_2, 3L'_2$	9	$D_6$
Hémi. hémimorphe	$\Lambda_6, 3P, 3P'$	23	$C_{6v}$
Hémi. paramorphe	$\Lambda_6, C, \Pi$	19	$C_{6h}$
Tétartoédrie	$\Lambda_6$	5	$C_6$
Hémi. sphénoïdale	$\Lambda_3, 3L_2, 3P', \Pi$	25	$D_{3h}$
Tétar. sphénoïdale	$\Lambda_3, \Pi$	14	$S_6 = C_{3h}$

III. *Système rhomboédrique.*

Holoédrie	$\Lambda_3, 3L_2, C, 3P$	29	$D_{3d}$
Hémi. énantiomorphe	$\Lambda_3, 3L_2$	7	$D_3$
Hémi. hémimorphe	$\Lambda_3, 3P$	21	$C_{3v}$
Hémi. paramorphe	$\Lambda_3, C$	16	$C_{3h} = S_6$
Tétartoédrie	$\Lambda_3$	3	$C_3$

IV. *Système quaternaire.*

Holoédrie	$\Lambda_4, 2L_2, 2L'_2, C, \Pi, 2P, 2P'$	26	$D_{4h}$
Hémi. énantiomorphe	$\Lambda_4, 2L_2, 2L'_2$	8	$D_4$
Hémi. hémimorphe	$\Lambda_4, 2P, 2P'$	22	$C_{4v}$
Hémi. paramorphe	$\Lambda_4, C, \Pi$	18	$C_{4h}$
Tétartoédrie	$\Lambda_4$	4	$C_4$
Hémi. sphénoïdale	$\Lambda_2, 2L_2, 2P'$	28	$D_{2d} = V_d$
Téтар. sphénoïdale	$\Lambda_2$	15	$S_4$

V. *Système orthorhombique.*

Holoédrie	$L_2, L'_2, L''_2, C, P, P', P''$	24	$D_{2h} = V_h$
Hémi. énantiomorphe	$L_2, L'_2, L''_2$	6	$D_2 = V$
Hémi. hémimorphe	$L_2, P', P''$	20	$C_{2v}$

VI. *Système clinorhombique.*

Holoédrie	$L_2, C, P$	17	$C_{2h}$
Hémi. énantiomorphe	$L_2$	2	$C_2$
Hémi. hémimorphe	$P$	12	$S_1 = C_1$

VII. *Système triclinique.*

Holoédrie	$C$	13	$S_2 = C_i$
Hémiédrie	»	1	$C_1$

### I. Système cubique.

102. **Holoédrie.** — 1° La forme primitive est le cube dont les arêtes sont notées  $b$ , les angles  $a$ , les faces  $p$ . Le cube est noté  $p$  dans la notation de Lévy;  $\{100\}$  dans la notation de Miller (fig. 78).

2° *Troncatures tangentes sur les arêtes.* — On entend par là que la facette de laquelle on part, est parallèle à une arête et coupe des longueurs égales sur les arêtes adjacentes.

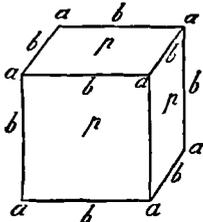


Fig. 78. — Cube.

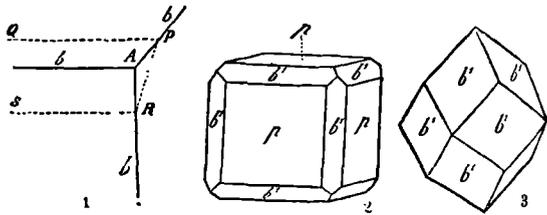


Fig. 79. — Dodécaèdre rhomboïdal.

La notation de la face est donc :

$$b^{\infty}b^1b^1 = b^1, \quad \{110\}.$$

On obtient un solide limité par douze rhombes égaux qui est le *dodécaèdre rhomboïdal* (fig. 79).

Il n'y a en effet qu'une facette par arête.

3° *Troncatures inclinées sur les arêtes.* — La facette est encore tangente à l'arête, mais ne coupe plus des longueurs égales sur les arêtes adjacentes. Celles-ci sont *égales*, au sens cristallographique du mot; elles doivent être traitées de même. Donc l'existence d'une facette entraîne l'existence d'une seconde facette parallèle à la même arête et symétrique de la première. D'où un solide à 24 faces triangulaires; c'est le *cube pyramidé* ou le *tétrahexaèdre*. En effet, on

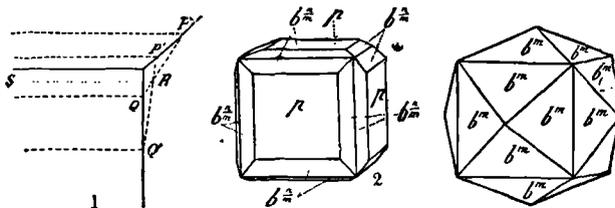


Fig. 80. — Cube pyramidé.

peut le considérer soit comme un cube dont les faces sont couvertes de pyramides quadrangulaires régulières (hexatétraèdre), soit comme l'association de quatre pointements hexagonaux autour des axes ternaires (tétrahexaèdre).

La notation est :

$$b^{\infty}b^mb^n = b^{m/n}, \quad \{qr0\}.$$

Il est noté  $b^m$  sur la figure 80 ;  $m$  est alors un nombre entier ou fractionnaire.

4° *Troncatures tangentes sur les angles.* — La facette coupe des

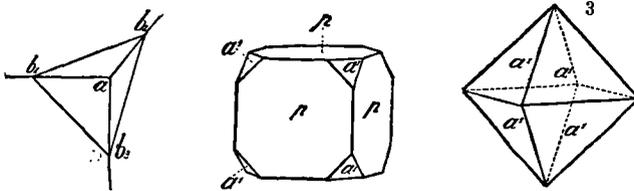


Fig. 81. — Octaèdre.

longueurs égales sur les trois arêtes adjacentes. La notation est donc :

$$b^1b^1b^1 = a^1, \quad \{111\}.$$

La forme est l'*octaèdre régulier* (fig. 81).

5° *Troncatures simplement inclinées sur les angles.* — La notation est :

$$b^mb^mb^n = a^{m/n}, \quad \{qrr\}.$$

A cause des axes ternaires, les modifications doivent aller trois par trois ; d'où un solide de  $8 \times 3 = 24$  faces.

Il y a deux cas à considérer.

$n < m$  : la longueur inégale est inférieure aux deux autres. On

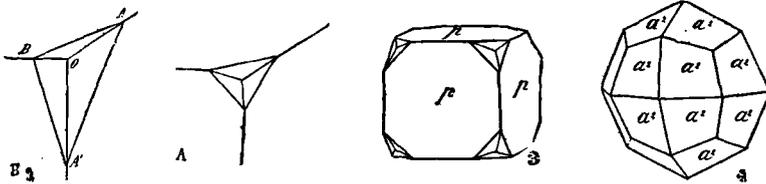


Fig. 82. — Trapezoèdre.

obtient le *trapezoèdre* (fig. 82), ainsi nommé parce que ses faces sont des *trapezoïdes*<sup>1</sup>.

$n > m$  : la longueur inégale est supérieure aux deux autres. On obtient l'*octaèdre pyramidé* (fig. 83) ou *trioctaèdre*.

6° *Troncatures doublement inclinées sur les angles.* — C'est la forme la plus générale de notation :

$$b^mb^nb^p, \quad \{qrs\}.$$

<sup>1</sup> On appelle *trapezoïde* un quadrilatère dont deux côtés consécutifs sont égaux.

Utilisant l'axe ternaire et les plans de symétrie, on obtient 6 faces

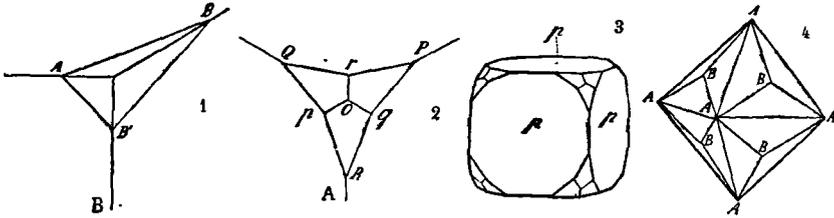


Fig. 83. — Octaèdre pyramidé ou trioctaèdre.

sur chaque angle. D'où en tout 48 faces. Le solide est l'*hexoctaèdre* (fig. 84).

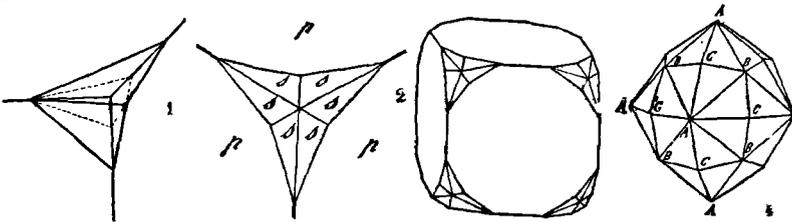


Fig. 84. — Hexoctaèdre.

**103. Hémiedrie énantiomorphe.** — Supprimons tous les éléments de symétrie en dehors des axes; partons d'une face quelconque. Nous obtenons un solide à 24 faces pentagonales qui est un *hémihexoctaèdre pentagonal*. Les deux figures conjuguées ne sont pas superposables. Comme la forme n'a jamais été rencontrée, nous n'insisterons pas.

Au lieu d'une face quelconque (6° du paragraphe précédent), choisissons la face conformément aux hypothèses des 2°, ..., 5°, du même paragraphe : nous obtenons le même solide en n'utilisant que les axes. Autrement dit, les deux formes conjuguées sont superposées entre elles et avec la forme holoèdre correspondante.

Il est bien clair, par exemple, qu'il suffit d'employer un axe ternaire et les axes binaires perpendiculaires pour réaliser l'octaèdre; peu importe donc que nous conservions ou non les autres éléments de symétrie.

On comprend maintenant l'énoncé du § 93; les formes conjuguées hémiedres fournies par l'emploi des axes seuls peuvent ne pas être superposables; elles ne le sont même jamais dans le cas général. Mais elles peuvent non seulement être superposables dans des cas particuliers, mais encore être confondues avec la forme holoèdre.

**104. Hémiedrie hémimorphe.** — Appliquons les éléments de symétrie de ce groupe à une face quelconque, nous obtiendrons un hémihexoctaèdre.

On vérifiera aisément que cette hémiedrie n'affecte ni le cube (1°, § 102), ni le dodécaèdre rhomboïdal (2°, § 102), ni le cube pyramidé (3°, § 102). Cela veut dire que prenant une face de ces solides et appliquant les éléments de symétrie caractéristiques de l'hémiedrie hémimorphe, on retrouve toutes les autres.

Restent donc l'octaèdre (4°), le trapézoèdre et le trioctaèdre (5°).

Ils donnent le tétraèdre (fig. 85), le tritéttraèdre (fig. 86) et le dodécaèdre trapézoïdal (fig. 87).

Il est à noter que la forme holoèdre, qui est composée de trapé-

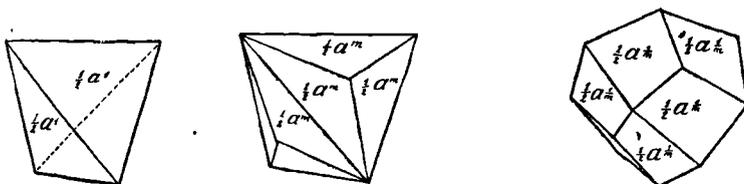


Fig. 85. — Tétraèdre. Fig. 86. — Tritéttraèdre. Fig. 87. — Dodécaèdre trapézoïdal.

zoïdes, donne une forme hémiedre composée de triangles, et inversement.

Le tritéttraèdre est noté  $\frac{1}{2} a^m$ , le dodécaèdre trapézoïdal  $\frac{1}{2} a^{\frac{1}{m}}$ ;  $m$  est supérieur à l'unité.

105. **Hémiedrie paramorphe.** — Cette hémiedrie ne porte que sur l'hexoctaèdre (naturellement) et sur le cube pyramidé.

On doit sur chaque pointement ternaire de la forme générale supprimer une face sur deux. On obtient le diploèdre (fig. 88), solide

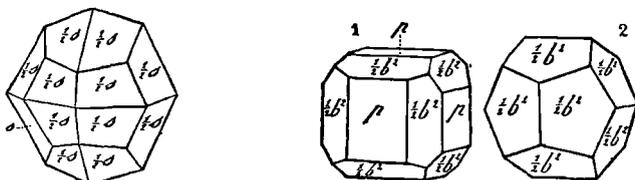


Fig. 88. — Diploèdre.

Fig. 89. — Dodécaèdre pentagonal.

analogue au trapézoèdre, à la différence près que les faces ne sont plus des trapézoïdes.

En partant de la face qui donnerait le cube pyramidé comme holoèdre, on obtient le dodécaèdre pentagonal (fig. 89).

106. **Tétartoédrie.** — On arrive au même mode de tértartoédrie en appliquant l'hémiedrie à un mode quelconque d'hémiedrie.

Dans la nature, les cristaux tértartoédriques présentent généralement la superposition du tétraèdre et du dodécaèdre pentagonal que

nous avons rencontrés, l'un comme hémiedre hémimorphe, l'autre comme hémiedre paramorphe.

Mais l'un et l'autre de ces solides sont complètement engendrés par les éléments de symétrie  $3\Lambda_2$ ,  $4L_3$ . On peut donc les considérer, si l'on veut, comme tétartoèdres.

D'ailleurs, les éléments de symétrie communs à ces formes sont *exclusivement* tétartoèdres.

Donc un cristal où elles sont superposées est certainement tétartoèdre.

Des quatre formes conjuguées, il y en a deux qui ne sont pas superposables.

Nous verrons que les cristaux cubiques tétartoèdres possèdent le pouvoir rotatoire.

Nous nous sommes longuement étendus sur le système cubique; nous irons plus rapidement pour les autres.

## II. Système hexagonal.

107. **Holoédrie.** — La forme primitive est représentée fig. 90. Elle est complètement définie si on donne le rapport de l'arête verticale  $h$  à l'arête horizontale  $b$ . Il existe donc dans le système hexagonal une infinité de solides identiques comme symétrie, mais qui diffèrent entre eux par le rapport de l'arête latérale à l'arête de base.

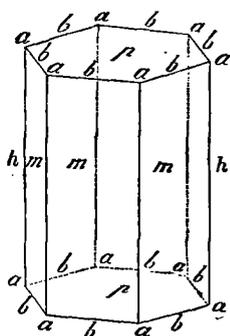


Fig. 90. — Prisme hexagonal.

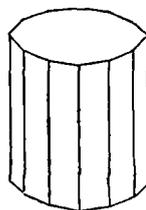


Fig. 91. — Prismes dodécagones.

Nous verrons plus loin que cette différence se traduit par des angles différents. On relira utilement le § 43.

1° Les deux bases  $p$  donnent la forme ouverte  $p$ .

2° Le *protoprisme*  $m$  est une forme ouverte composée de six bandes égales, limitées par les arêtes verticales.

3° Le *deutéoprisme*  $h^1$  est obtenu par des troncatures tangentes sur les arêtes verticales. Il est encore à six pans.

4° Les *prismes dodécagones*  $h^{m/n}$  résultent des troncatures inclinées sur les arêtes  $h$ ; ce sont des formes ouvertes à douze pans (fig. 91).

5° Les *protoisoscéloèdres* sont des pyramides doubles régulières à six pans, dont les faces sont des triangles isocèles. Ils sont obtenus par des troncatures parallèles aux arêtes de base  $b$ . Comme les arêtes de base et les arêtes latérales ne sont pas cristallographiquement égales, l'existence d'une face quelconque parallèle à l'arête  $b$  n'entraîne l'existence d'aucune autre face liée à cette arête. La forme complète est donc à douze faces. Elle est notée  $b^{m/n}$  (fig. 92).

6° Les *deutéroisoscéloèdres* sont aussi des pyramides doubles régu-

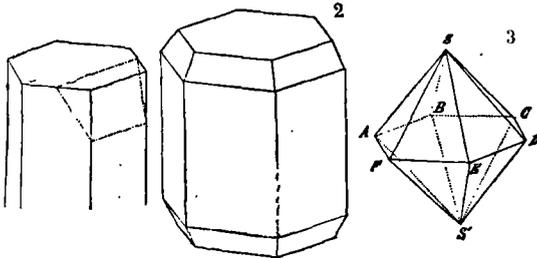


Fig. 92. — Protoisoscéloèdres.

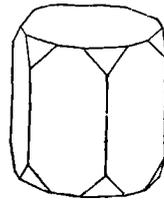


Fig. 93.  
Deutéroisoscéloèdres.

lières à six pans. Ils sont obtenus par des troncatures symétriquement placées sur les angles. Leur notation est  $a^{m/n}$  (fig. 93).

7° Les *didodécaèdres* (forme à  $12 \times 2 = 24$  faces) dérivent d'une troncature *inclinée* sur l'angle. Ce sont des pyramides doubles à

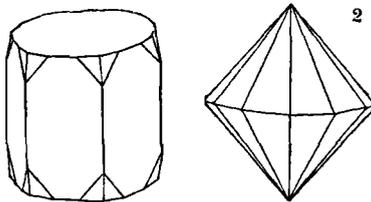


Fig. 94. — Didodécaèdres.

douze pans faisant des dièdres égaux *de deux en deux* (fig. 94). Leur notation est  $b^m b^n h^p$ .

### 108. Mériédries. —

#### HÉMIÉDRIE ÉNANTIOMORPHE.

Appliquée à la forme générale, elle fournit le *trapézoèdre*  $D_c$  (fig. 52).

Les formes conjuguées ne sont pas superposables.

#### HÉMIÉDRIE HÉMIMORPHE.

Le cristal n'a pas les deux bouts de l'axe sénaire identiques; naturellement l'hémiédrie ne s'applique pas aux formes prismatiques.

## HÉMIÉDRIE PARAMORPHE.

La forme générale est composée de deux pyramides régulières hexagonales accolées suivant une base plane, mais qui a tourné d'un angle quelconque par rapport aux faces de la forme primitive. On appelle quelquefois cette hémiedrie *pyramidale*. Associons la forme primitive à la forme hémiedre, nous obtenons la figure 95.

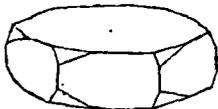


Fig. 95. — Hémiedres.

## TÉTARTOÉDRIE.

Il reste un axe sénnaire. La forme générale est une pyramide régulière (comme dans l'hémiedrie hémimorphe) qui a tourné d'un angle quelconque autour de l'axe sénnaire (comme dans l'hémiedrie paramorphe). Le cristallé tartoédre a, en effet, les éléments communs à ces deux espèces d'hémiedrie.

## HÉMIÉDRIE SPHÉNOÏDALE.

La forme générale est constituée par deux pyramides triangulaires régulières égales, qui ont tourné l'une par rapport à l'autre d'un angle quelconque, et qui sont doublées par un plan de symétrie perpendiculaire à l'axe principal devenu ternaire (§ 39).

## TÉTARTOÉDRIE SPHÉNOÏDALE.

Il ne reste plus qu'une des pyramides triangulaires de l'hémiedrie précédente.

## III. Système rhomboédrique.

109. **Holoédrie.** — La forme primitive est un rhomboèdre (fig. 96) qu'on peut se représenter comme un cube déformé par compression

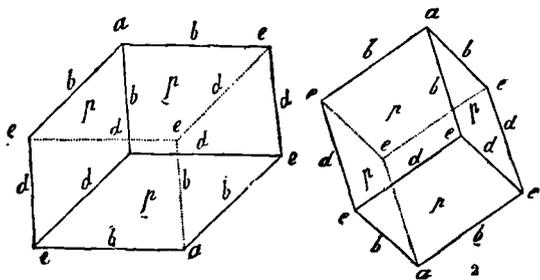


Fig. 96. — Rhomboèdres.

ou par traction dans la direction d'un axe ternaire. Il y a six arêtes *b* aboutissant trois par trois à l'axe ternaire; six arêtes *d* formant un hexagone régulier gauche (arêtes dites en zigzag); deux angles *a* sur l'axe ternaire; six angles latéraux *e*.

Dans la notation de Miller, on prend pour axes trois arêtes *b* adjacentes.

## TRONCATURES SUR LES ANGLES.

1° *Troncatures sur les angles a.* — La forme ouverte de notation  $a^1$  se compose de deux plans perpendiculaires à l'axe ternaire.

2° *Troncatures sur les angles a coupant des longueurs égales sur deux arêtes b.* — Deux cas à considérer.

Si la longueur *inéga*le est plus petite que l'autre, on obtient des rhomboèdres plus obtus, *directs*, c'est-à-dire dont les faces correspondent aux faces de la forme primitive. La notation est  $a^m$  avec la condition  $m > 1$ .

Si la longueur *inéga*le est plus grande que l'autre, on obtient des rhomboèdres *inverses*, c'est-à-dire dont les faces correspondent aux arêtes de la forme primitive. La notation est  $a^{1/m}$  avec la condition  $m > 1$ .

3° *Troncatures quelconques sur les angles a.* — On obtient la forme générale  $b^m b^n b^p$  qui est un scalénoèdre (fig. 64). La figure 97 montre la genèse du solide. Pour certaines valeurs des indices, on obtient un *isocéloèdre*, double pyramide à six plans et à base plane.

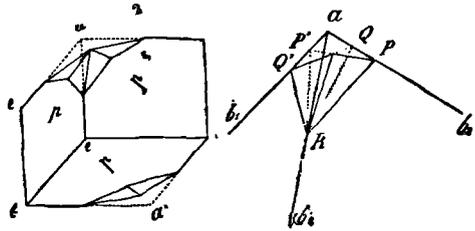


Fig. 97. — Scalénoèdre.

4° *Troncatures égales sur les angles e.* — Les arêtes *b* et *d* étant cristallographiquement *inéga*les (bien qu'elles soient de même longueur),

une facette qui en coupe des longueurs différentes, n'est multipliée par aucun élément de symétrie autour du même angle *e*. Donc la forme de notation :

$$b^m d^n d^n = e^{n/m},$$

est un solide à six faces ; c'est un *rhomboèdre*.

Supposons que *m* soit nul ; il est évident qu'on retrouve la forme primitive qui peut se noter  $e^\infty$ . Faisons décroître *n* : *m* ; nous obtenons pour  $n : m > 2$  des rhomboèdres *directs* de plus en plus aigus.

Pour  $n : m = 2$ , les faces sont parallèles à l'axe ternaire ; le rhomboèdre devient un prisme hexagonal  $e^2$ .

Pour  $n : m < 2$ , on a des rhomboèdres *inverses* de plus en plus obtus.

Pour  $n : m = 1$ , on a le rhomboèdre inverse  $e^1$  identique à la forme primitive.

Enfin pour  $n = 0$ , ce qui correspond à une troncature tangente sur l'arête *b*, on obtient un rhomboèdre inverse plus *obtus* que la forme primitive. Nous montrerons ci-dessous que le rhomboèdre  $e^0$  peut aussi être noté  $b^1$ .

5° *Troncatures quelconques sur les angles e.* — La forme dérivée de symbole  $b^m d^n d^n$  est évidemment un scalénoèdre. Pour certaines valeurs des indices, le scalénoèdre devient une pyramide hexagonale à base plane, forme appelée *isocéloèdre*.

TRONCATURES SUR LES ARÊTES.

6° *Troncatures tangentes sur les arêtes culminantes b.* — On obtient le rhomboèdre inverse  $b^1$  plus obtus que la forme primitive.

7° *Troncatures quelconques sur les arêtes culminantes  $b$ .* — La forme a pour notation  $b^m b^n b^\infty = b^{m/n}$ . C'est un scalénoèdre. On vérifiera que le solide  $b^3$  est une double pyramide hexagonale à base *plane*, c'est-à-dire un *isoscéloèdre*.

8° *Troncatures sur les arêtes en zigzag  $d$ .* — La forme a pour notation  $b^m d^\infty d^n$ . C'est un scalénoèdre, sauf dans le cas où l'on a  $m = n$ ; on trouve alors le prisme hexagonal  $d^1$ .

#### 110. Méridries. —

##### 1° HÉMIÉDRIE ÉNANTIOMORPHE.

Le solide hémiedre le plus général est le *trapézoèdre trigonal* ou *hémiscalénoèdre* (fig. 98). Il est composé de deux pyramides triangulaires régulières associées suivant un hexagone gauche.

La figure 98 montre les deux formes non superposables, symétriques par rapport à un miroir normal au plan du tableau.

Comme limite de l'hémiscalénoèdre, dont les sommets passent à l'infini, on obtient un prisme hexagonal à base non régulière, qu'on appelle *ditrigonal*. Il est engendré par deux prismes triangulaires

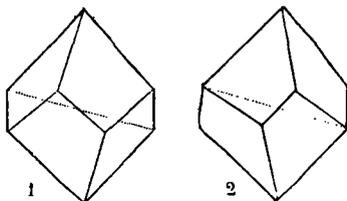


Fig. 98. — Hémiscalénoèdre.

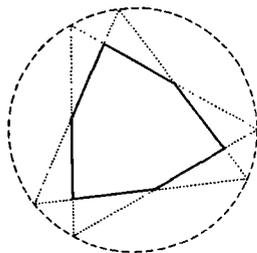


Fig. 99.

qui ont tourné l'un par rapport à l'autre d'un angle quelconque (fig. 99).

Comme cas particulier, on trouve deux pyramides triangulaires accolées par une base plane qui est un triangle équilatéral (fig. 100).

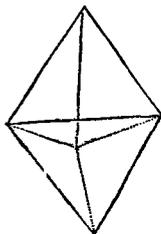


Fig. 100.  
Hémiscalénoèdre.

##### 2° HÉMIÉDRIE HÉMIMORPHE.

Le solide résultant a des pointements différents aux deux bouts de l'axe ternaire.

##### 3° HÉMIÉDRIE PARAMORPHE.

La forme générale est un rhomboèdre qui a tourné autour de l'axe ternaire d'un angle quelconque par rapport à la forme primitive.

##### 4° TÉTARTOÉDRIE.

C'est un simple pointement ternaire d'azimut quelconque par rapport à la forme primitive.

IV. Système quaternaire.

111. **Holoédrie.** — La forme primitive est un prisme droit à base carrée. L'axe quaternaire est perpendiculaire aux bases; un des groupes d'axes binaires est parallèle aux diagonales de la base, l'autre aux droites qui passent par le milieu des côtés opposés. Les plans de symétrie sont perpendiculaires aux axes.

Tout comme pour le prisme hexagonal, le rapport de l'arête verticale  $h$  à l'arête de base  $b$  est le paramètre caractéristique de l'espèce

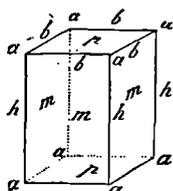


Fig. 101.  
Prisme droit à base carrée.

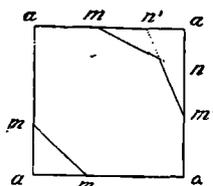


Fig. 102.  
Section droite du prisme octogone.

considérée. Il se traduit par l'angle des faces de l'octaèdre avec la base carrée (§ 43).

1° Les bases donnent une forme ouverte  $p$ .

2° Le *protoprisme*  $m$  est une forme ouverte composée de quatre bandes égales limitées par les arêtes verticales.

3° Le *deutéoprisme*  $h^1$  est obtenu par des troncatures tangentes sur les arêtes latérales.

4° Les *prismes octogones*  $h^{m/n}$  (fig. 102) résultent de troncatures inclinées sur les arêtes latérales.

5° Les *protopyramides* (fig. 103) ou *protooctaèdres* sont des pyramides doubles régulières à quatre pans dont les faces sont des triangles isocèles. Ils sont obtenus par des troncatures parallèles aux arêtes de base. Même remarque que pour le système ternaire; une facette quelconque  $b$  n'est multipliée par aucun élément de symétrie. Les *protopyramides* sont notées  $b^{m/n}$ .

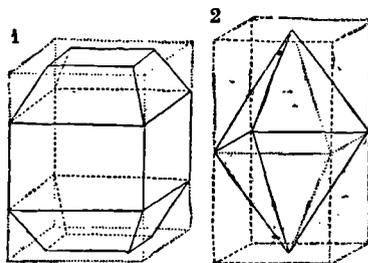


Fig. 103. — Protooctaèdre.

Un de ces solides *arbitrairement choisi* mesure la hauteur *relative* de la forme primitive. Les autres sont dits aigus ou obtus suivant qu'ils sont plus aigus ou plus obtus que le solide choisi comme type.

6° Les *deutopyramides* ou *deutooctaèdres* sont obtenus par des troncatures symétriques sur les angles. Ce sont des pyramides doubles

à quatre pans, des octaèdres par conséquent. On les note  $a^{m/n}$ . Le nombre  $m$  représentant la longueur prise sur l'arête de base (§ 96). La notation  $a^1$  signifiant que l'on prend sur les arêtes  $b$  et  $h$  des longueurs cristallographiquement égales (c'est-à-dire la même fraction de ces arêtes), l'octaèdre est plus obtus que  $a^1$  si  $m : n > 1$ ; il est plus aigu si  $m : n < 1$ .

La figure 104 représente la combinaison de l'octaèdre noté  $a^m$  (en posant  $m : n = m$ ), et de la forme primitive.

7° Les *diocèdres* (forme à  $8 \times 2 = 16$  faces) sont obtenus par des

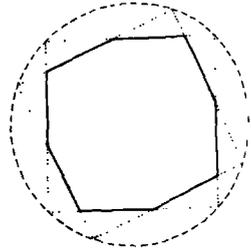
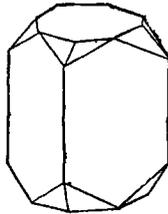
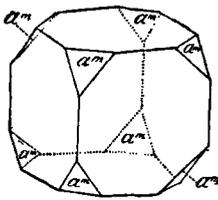


Fig. 104. — Deutoctaèdre.

Fig. 105. — Diocèdres.

Fig. 106.

modifications quelconques sur les angles (fig. 105). La base n'est pas un octogone régulier; c'est un octogone formé par deux carrés qui ont tourné d'un angle quelconque l'un par rapport à l'autre (fig. 106).

## 112. Méridries. —

### HÉMIÉDRIE ÉNANTIOMORPHE.

Appliquée à la forme générale, elle fournit le trapézoèdre  $D_4$  (fig. 52). Les formes conjuguées ne sont pas superposables.

### HÉMIÉDRIE HÉMIMORPHE.

Le cristal n'a pas les deux bouts de l'axe quaternaire identiques; naturellement l'hémiédrie ne s'applique pas aux formes prismatiques.

### HÉMIÉDRIE PARAMORPHE.

La forme générale est un octaèdre qui a tourné d'un angle quelconque par rapport aux faces de la forme primitive. On appelle aussi cette hémiédrie *pyramidale*.

### TÉTARTOÉDRIE.

Il existe un axe quaternaire. La forme générale est une pyramide quaternaire (comme dans l'hémiédrie hémimorphe) qui a tourné d'un angle quelconque autour de l'axe quaternaire (comme dans l'hémiédrie paramorphe). Le cristal tétartoèdre n'a que les éléments de symétrie communs à ces hémiédries.

### HÉMIÉDRIE SPHÉNOÏDALE<sup>1</sup>.

L'axe quaternaire devient binaire. Le dioctaèdre perd ses faces par

<sup>1</sup> Le mot sphénoïde signifie coin.

groupes de deux adjacentes ; il n'y a pas de centre de symétrie. La forme est représentée figure 63.

TÉTARTOÉDRIE SPHÉNOÏDALE.

Il manque la moitié des faces de la forme précédente. Le solide obtenu est le tétraèdre quaternaire ou *sphénoèdre* (fig. 56).

V. Système orthorhombique.

113. **Holoédrie.** — La forme primitive est un prisme droit à base losange. On place les angles *a* qui correspondent aux angles *obtus* de la base, en avant et en arrière ; à ces angles correspondent les arêtes *h*. Aux angles *aigus* *e* correspondent les arêtes *g*, géométriquement égales à *h*, mais cristallographiquement différentes (fig. 107).

Les trois axes binaires sont les trois droites qui passent par les milieux des bases et par les milieux des arêtes latérales. L'un des plans de symétrie est parallèle aux bases ; les autres passent par les arêtes latérales opposées.

Les diagonales de base sont l'une petite *aa* (*brachydiagonale*), l'autre longue *ee* (*macrodiagonale*).

Nous pouvons aller vite dans l'énumération des formes ; le lecteur suppléera aisément.

1° *Troncatures tangentes sur les arêtes latérales.* —  $b^m b^m h^\infty = h^1$  ; deux faces tangentes sur *h*, forme par conséquent ouverte. On l'ap-

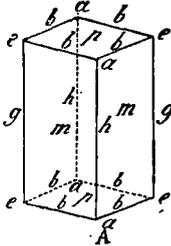


Fig. 107.  
Prisme droit à base rhombe.

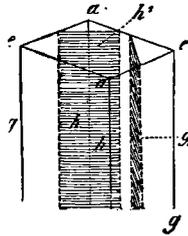


Fig. 108.  
Pinacoïdes.

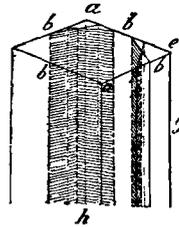


Fig. 109.  
Prismes.

pelle *macropinacoïde* pour rappeler sa forme *tabulaire* et qu'elle est parallèle à la *macrodiagonale* (fig. 108).

$b^m b^m g^\infty = g^1$  ; deux faces tangentes sur *g*, forme ouverte : *brachypinacoïde* (fig. 108).

2° *Troncatures générales sur les arêtes latérales.* — Mêmes formes généralisées (fig. 109) de symboles  $h^{m/n}$  ou  $g^{m/n}$ . Ce sont des prismes.

Si le prisme est plus aplati que le prisme primitif, on peut considérer les modifications comme faites sur l'arête *h* ; c'est un *macroprisme* de symbole  $h^{m/n}$ .

Si le prisme est moins aplati que le prisme primitif, c'est un *brachyprisme* de symbole  $g^{m/n}$ .

3° *Troncatures sur les arêtes de base.* — La forme générale est un octaèdre à base losange (fig. 110) de symbole  $b^1$  ou  $b^{m/n}$ . On donne le symbole  $b^1$  à un octaèdre choisi arbitrairement; ainsi se trouve déterminé le rapport de l'arête verticale à l'arête de base constituant avec l'angle du losange les paramètres fondamentaux de l'espèce.

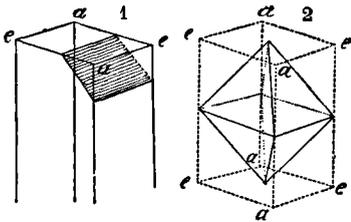


Fig. 110. — Octaèdre à base losange.

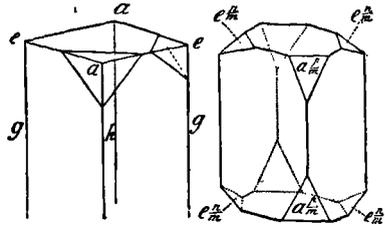


Fig. 111. — Dômes.

4° *Troncatures tangentes sur les angles.* — Comme les angles sont de deux espèces, on obtient des *dômes*, doublés par le plan de symétrie parallèle aux bases. Il y a des *brachydômes* (symboles  $e^{m/n}$ ) et des *macrodômes* (symboles  $a^{m/n}$ ), suivant qu'on agit sur les angles  $e$  ou les angles  $a$ . Les deux dômes de la même forme constituent un prisme horizontal (forme ouverte) à base rhombe (fig. 111).

5° *Troncatures quelconques sur les angles.* — La forme est un octaèdre à base rhombe. Le symbole général est  $b^m b^n h^p$  (macropyramides),  $b^m b^n g^p$  (brachypyramides).

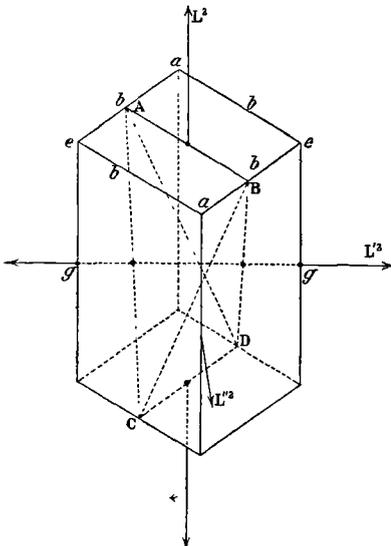


Fig. 112.

#### 114. Méridries. —

##### HÉMIÉDRIE ÉNANTIOMORPHE.

La forme générale est un hémioctaèdre, tétraèdre irrégulier (fig. 112) ou *sphénoïde*. Les formes conjuguées ne sont pas superposables. Nous reviendrons sur cette hémédrerie justement célèbre, puisque c'est avec elle que Pasteur fit son importante découverte des relations de l'hémédrerie non superposable et de la polarisation rotatoire.

##### HÉMIÉDRIE HÉMIMORPHE.

Les deux bouts du cristal ne portent pas le même pointement.

VI. Système clinorhombique.

115. **Holoédrie.** — Le solide primitif est le prisme simplement oblique à base rhombe. Même forme que pour le système précédent, à l'inclinaison près de la base sur les arêtes latérales (fig. 113).

On convient d'incliner la base d'arrière en avant.

La diagonale  $ee$  est donc normale aux arêtes correspondantes  $g$ ; on l'appelle *orthodiagonale*.

La diagonale  $ao$ , inclinée sur les arêtes  $h$ , est la *clinodiagonale*.

Les arêtes de base ne sont plus cristallographiquement égales.

Voici les formes principales.

1°  $h_1$ : couple de faces, *orthopinacoïde*  $g_1$ : couple de faces, *clinopinacoïde*.

2°  $h^{m/n}$ : *macroprisme* plus aplati que le primitif;  $g^{m/n}$ : *brachyprisme*, moins aplati.

3°  $d^{m/n}$ ,  $h^{m/n}$ : prismes clinorhombiques inclinés sur le primitif.

4°  $o^{m/n}$ : *hémiorthodôme antérieur*, couple de faces.

$a^{m/n}$ : *hémiorthodôme postérieur*.

5°  $e^{m/n}$ : *prismes clinorhombiques*.

6° Forme la plus générale; prismes clinorhombiques.

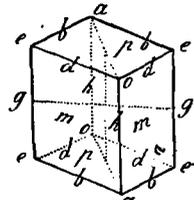


Fig. 113.  
Prisme simplement oblique.

116. **Mériédries.** —

HÉMIÉDRIE ÉNANTIOMORPHE.

Il ne reste plus qu'un axe de symétrie binaire. La figure 114 représente une forme possible. Au lieu d'une troncature sur un angle, on peut avoir une troncature sur une arête; il suffit, par exemple, de supposer que le point A passe à l'infini sur l'arête  $d$  correspondante.

HÉMIMORPHIE.

Il ne reste plus que le plan de symétrie passant par les arêtes  $h$ .

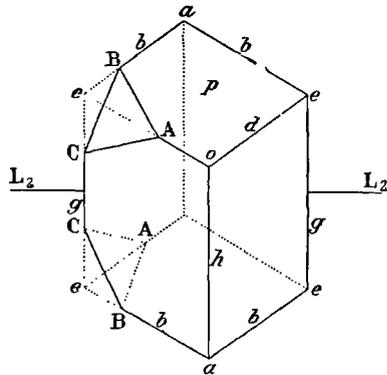


Fig. 114.

### VII. Système triclinique.

117. **Holoédrie.** — La forme primitive est un prisme doublement oblique (fig. 115).

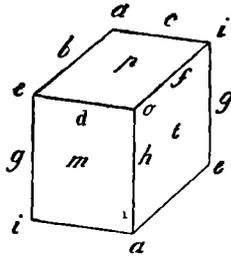


Fig. 115. — Prisme doublement oblique.

Chaque forme dérivée ne se compose plus que d'un couple de faces.

118. **Mériédrie.** — La forme générale se compose d'une face quelconque.



## CHAPITRE VII

### GROUPES INFINIS DE DÉPLACEMENTS

**119. Homogénéité anisotrope, structure cristalline, domaine fondamental.** — Ce n'est pas ici le lieu de discuter quelle structure on doit supposer aux milieux cristallins et aux cristaux : le problème est essentiellement physique, et pour l'instant nous ne faisons que de la Géométrie. Quand nous aurons limité le champ des hypothèses *possibles*, nous serons en état de leur chercher des applications. C'est le grand service rendu par Gadolin, Fedorow, Söhncke et Schönflies d'avoir construit avec les symétries un édifice de solidité incontestable, pouvant abriter toutes les hypothèses physiques qui seront nécessaires par la suite.

Un Secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences écrivait, en parlant de ces auteurs, fiers d'avoir constitué une théorie entièrement indépendante des faits : « Étrange disposition qui, dans l'étude d'une science naturelle comme la Cristallographie, regarde comme un succès de pouvoir perdre de vue la considération de la nature réelle et concrète ! »

Il est difficile d'écrire une phrase plus inintelligente : je ne ferai pas au lecteur l'injure de collectionner pour lui les erreurs qu'elle renferme.

*Nous admettrons qu'on peut remplir l'espace entier avec des solides géométriques finis, en nombre infini, semblables les uns aux autres, séparément dénués d'éléments de symétrie.*

Ils forment en général deux espèces : les espaces de chaque espèce sont respectivement identiques ; les espaces des espèces différentes sont énantiomorphes.

Dire que les espaces sont identiques signifie, non seulement qu'ils ont la même surface limite, mais qu'ils sont remplis de *vide* et de matière exactement de la même manière, D'AILLEURS QUELCONQUE, la matière n'intervenant pour le moment que comme moyen de différencier l'espace.

Dire que les espaces sont énantiomorphes signifie, non seulement

que leurs surfaces limites sont superposables au moyen d'opérations de seconde espèce, mais encore qu'il en est de même du remplissage D'AILLEURS QUELCONQUE.

Nous appellerons chacun de ces espaces *le domaine fondamental*.

Partons d'un domaine fondamental *convenable* et appliquons-lui toutes les opérations *d'un groupe infini de déplacements*; on pourra *par hypothèse* remplir exactement tout l'espace, sans lacunes ni empiètements.

Inversement, donnons-nous l'espace exactement rempli par les domaines en nombre infini; une opération quelconque du groupe *compatible* doit superposer tous les domaines, *doit restituer l'espace primitif*. Par rapport à l'espace exactement rempli d'espaces fondamentaux, toute opération du groupe est *identique*.

Considérons un point A quelconque d'un domaine et tous les points  $A_1, A_2, A_3, \dots$ , qu'il fournit en vertu des déplacements du groupe compatible, ou avec lesquels on peut le superposer quand on restitue l'espace, supposé plein de domaines, au moyen des opérations du groupe. Les points  $A_1, A_2, A_3, \dots$ , en nombre infini, sont les *homologues* de A.

Puisque le domaine fondamental est par hypothèse dénué de tout élément de symétrie, *il ne contient pas deux points homologues, sauf sur la surface limite*. On peut prendre cette proposition comme définition du domaine fondamental.

Il en résulte immédiatement que le domaine ne peut être percé par les axes de symétrie ni coupé par les plans de symétrie. *Donc les axes et les miroirs doivent faire partie de la surface limite du domaine fondamental*.

*L'espace divisible en domaines fondamentaux suffisamment petits, est dit homogène; sa structure est cristalline par définition. SUFFISAMMENT PETIT* signifie : dont les dimensions sont de l'ordre du millionième de millimètre, par exemple.

Le problème de la structure cristalline ou de l'homogénéité anisotrope se confond donc avec la recherche de tous les groupes infinis de déplacements. A chaque groupe (on démontre qu'il en existe 230 distincts) correspond du reste une infinité de domaines fondamentaux, différant entre eux non seulement par le remplissage qui est quelconque, mais par la forme de la surface limite.

**120. Figures planes : groupe de translations.** — Il importe que le lecteur se familiarise avec les idées précédentes. Nous donnerons donc quelques exemples simples. Pour faciliter les représentations, nous raisonnerons d'abord sur des figures planes se déplaçant dans leur plan. Le domaine fondamental est une figure plane avec laquelle nous devons remplir le plan exactement, sans lacunes ni empiètements.

Supposons d'abord que les opérations se réduisent aux deux translations (fig. 116) :

$$\overline{OA} = 2\tau_1, \quad \overline{OB} = 2\tau_2.$$

Le coefficient 2, que nous introduisons ici, est nécessaire pour simplifier les notations.

D'après la définition d'un groupe (§ 78), puisque le groupe possède l'opération  $T_1 = 2\tau_1$ , il possède l'opération  $T_1^{-1}$  inverse de  $T_1$ ; il possède aussi les opérations  $T_1^m$  et  $T_1^{-m}$ . Cela veut dire qu'une fois

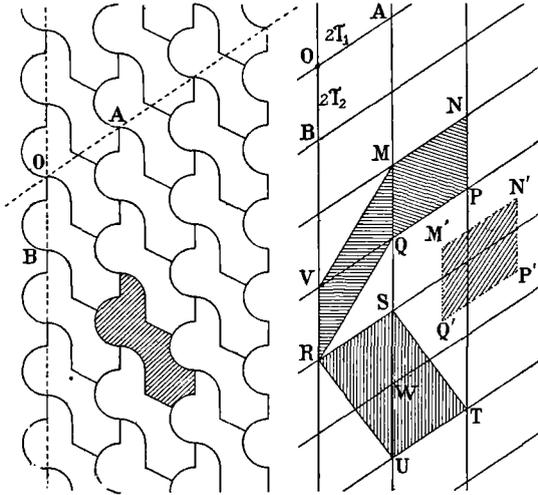


Fig. 116.

le plan rempli avec les domaines fondamentaux, on recouvrira exactement le dessin obtenu, en le déplaçant de  $m$  fois la translation  $2\tau_1$ , dans le sens de la translation ou dans le sens inverse.

De même le groupe possédant l'opération  $T_2 = 2\tau_2$ , il possède les opérations  $T_2^{-1}$ ,  $T_2^n$ ,  $T_2^{-n}$ .

Enfin le groupe possédant l'opération  $T_1^m$  et  $T_2^n$ , il possède l'opération  $T_1^m T_2^n$  : cela signifie qu'on amène le dessin en coïncidence avec lui-même par une translation  $2m\tau_1 + 2n\tau_2$ , égale à la somme géométrique de  $2m$  fois la translation  $\tau_1$  et de  $2n$  fois la translation  $\tau_2$ .

Traçons un système de lignes parallèles équidistantes déterminant entre elles des segments égaux aux translations  $2\tau_1$ ,  $2\tau_2$ . Toute translation résultante d'un nombre quelconque de ces segments est une translation possible, c'est-à-dire amenant en self-coïncidence le dessin dont le plan est supposé couvert.

DOMAINE FONDAMENTAL.

Nous pouvons choisir pour domaine fondamental initial le parallé-

logramme QMNP, déplacé comme on voudra dans le plan parallèlement à lui-même, amené par exemple en M'N'P'Q'. Nous couvrirons en effet le plan *exactement* en appliquant les opérations du groupe à ce parallélogramme M'N'P'Q'.

Nous pouvons choisir MQRV, et une infinité d'autres parallélogrammes dont les sommets coïncident avec les intersections des lignes précédemment tracées (nœuds du plan réticulaire), *mais n'en contenant aucune dans leur intérieur*. Il revient au même de dire qu'ils sont construits sur des rangées conjuguées (§ 49). Nous ne pouvons pas choisir RSTU, car il contient le point W qui est homologue des points T, U, R, S. Or le domaine fondamental ne doit pas contenir deux points homologues, sauf sur la surface limite (ici son contour).

Mais l'indétermination du domaine fondamental n'en reste pas là. La figure montre à gauche un dessin qui est superposable à lui-même par une translation :

$$T_1^m T_2^n = 2m\tau_1 + 2n\tau_2,$$

où  $m$  et  $n$  sont des entiers quelconques. Le domaine fondamental a une forme irrégulière que rien n'empêchait de rendre plus irrégulière encore.

Il est clair que *tous ces domaines fondamentaux ont même aire*.

Bien entendu, les domaines sont remplis *n'importe comment*, mais d'une manière identique. Insistons, car on pourrait commettre ici une erreur.

Les nœuds du plan réticulaire tracé au moyen des translations, forment une figure qui admet une infinité de centres de symétrie; ce sont les milieux des côtés et les points d'intersection des diagonales. Au contraire, le plan recouvert de ses domaines fondamentaux n'admet plus ces éléments de symétrie. Cela tient précisément à l'hypothèse essentielle que le remplissage des domaines est le même dans tous, *mais absolument privé de symétrie dans chacun*.

Aussi bien les centres de symétrie n'existent plus dans la partie gauche de la figure.

**121. Figures planes : groupe contenant deux translations et une réflexion.** — Il est d'abord facile de voir que l'une des translations  $T_1 = 2\tau_1$ , est nécessairement normale au miroir, l'autre  $T_2 = 2\tau_2$ , nécessairement parallèle.

S'il existe un miroir, il en existe une infinité parallèles et de distance  $\tau_1$  moitié de la translation (voir plus loin la théorie des opérations transformées d'autres opérations, § 125). Nous savons, en effet, que deux réflexions dans des plans parallèles équivalent à une translation double de la distance des plans.

En définitive, les opérations distinctes du groupe sont les translations  $2\tau_1$  et  $2\tau_2$ , et la réflexion S.

Un tel groupe d'opérations (noté  $C_2^1 = S_1^1$ , voir § 101) peut appartenir dans l'espace à un milieu cristallin indéfini monoclinique hémédrique hémimorphe. Il n'y a qu'à supposer une troisième translation  $2\tau_3$ , dirigée comme on voudra parallèlement aux plans de symétrie.

DOMAINE FONDAMENTAL.

Par définition même, le domaine ne peut être percé par des axes de symétrie ni coupé par des plans de symétrie. Il est donc limité en partie par ces plans. Sa forme est d'ailleurs indéterminée : nous en avons représenté une possible.

Si le groupe appartenait à l'espace, on pourrait prendre, comme domaine fondamental solide, un prisme oblique ayant pour base la surface ombrée et pour arêtes latérales des droites égales et parallèles à la troisième translation  $2\tau_3$ .

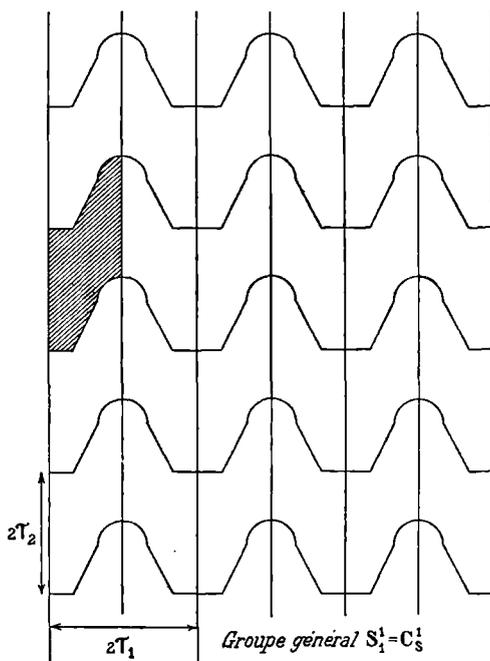


Fig. 117.

**122. Figures planes : groupe contenant deux translations et un axe binaire.** — L'axe binaire doit être normal au plan des translations. Mais nous savons que deux transpositions autour d'axes parallèles valent une translation double de la distance des axes.

Nous tirons immédiatement de là que les traces des axes sont les sommets de parallélogrammes dont les côtés  $\tau_1$  et  $\tau_2$  sont parallèles aux translations et de grandeurs moitié moindres.

La paroi du domaine fondamental doit contenir ces axes ; elle doit par conséquent satisfaire aux conditions imposées par leur existence.

Si le domaine ne contient pas deux points homologues, il n'en est pas de même de sa paroi qui en contient.

L'espace doit être divisé en domaines *tous congruents*, puisque nous n'utilisons que des opérations de première espèce.

On peut considérer l'opération dans l'espace ; il suffit de joindre

une translation  $2\tau_3$  normale au plan des translations  $T_1$  et  $T_2$ . Le solide fondamental est, par exemple, un prisme droit ayant pour base le domaine plan figuré. Le groupe est alors noté  $C_2^1$ .

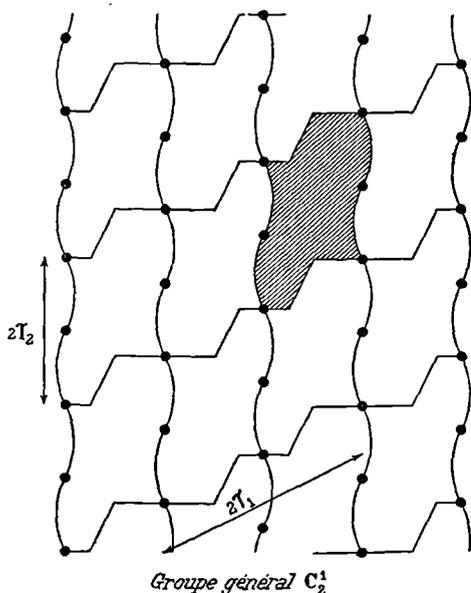


Fig. 118.

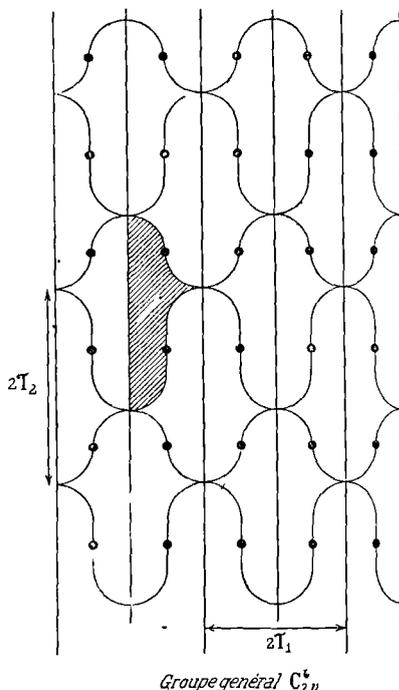


Fig. 119.

**123. Figures planes : groupes contenant deux translations, une ou plusieurs réflexions, des transpositions.** — Les figures 119 et 120 donnent deux exemples des groupes *orthorhombiques*  $C_{2v}^4$  et  $C_{2v}^{11}$ .

**GROUPE  $C_{2v}^4$ .**

Il existe une série de plans de symétrie normaux et parallèles aux translations  $T_1$  et  $T_2$  et dont la distance  $\tau_1$  est égale à la demi-translation  $T_1$ . Il existe de plus des axes binaires à égale distance des plans de symétrie et séparés par l'intervalle  $\tau_2$  égal à la demi-translation  $T_2$ .

L'espace est rempli de domaines congruents et énantiomorphes.

**GROUPE  $C_{2v}^{11}$ .** — On trouve dans l'espace deux séries de plans de symétrie rectangulaires. Les axes binaires sont ou les intersections de ces plans, ou passent par les centres des prismes formés.

124. **Retour sur la définition de l'homogénéité ; importance des groupes de translations.** — La propriété fondamentale du milieu homogène est la *périodicité*.

Le milieu est homogène non parce que toutes ses parties sont identiques, *si petites qu'on les prenne*, mais parce que ses parties se répètent identiques entre elles. La limite entre l'hétérogénéité et

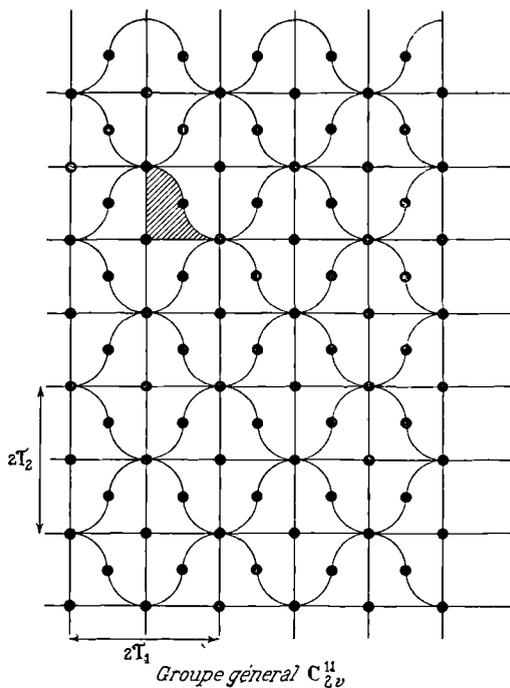


Fig. 120.

l'homogénéité dépend donc essentiellement de la perfection des moyens d'observation et de l'ordre de grandeur des phénomènes considérés. Par exemple, un milieu peut être homogène pour des ébranlements de grandes longueurs d'onde et hétérogène pour des ébranlements de petites longueurs d'onde. L'acier se conduit comme un corps homogène isotrope pour les déformations d'ensemble ; c'est un corps essentiellement hétérogène observé au microscope avec un grossissement suffisant.

Nous verrons d'ailleurs que certains cristaux présentent tous les intermédiaires entre l'hétérogénéité évidente (par exemple, le cristal se sectionne en lamelles) et l'homogénéité parfaite (les lamelles deviennent tellement minces que nous ne pouvons en prouver l'existence).

La périodicité régulière en laquelle consiste l'homogénéité anisotrope, est généralement complexe. Les opérations du groupe qui la définit, peuvent être nombreuses. Mais le groupe contient toujours des translations au nombre de trois distinctes, qui forme un sous-groupe d'opérations particulièrement importantes. Autrement dit, nous pouvons toujours considérer le cristal (milieu homogène anisotrope) comme décomposable en lamelles parallèles à deux translations. Ces lamelles ont une structure périodique plus ou moins complexe. Le cristal est formé par leur empilement, empilement du reste purement théorique dans la majorité des cas.

Nous allons reprendre la question d'une manière plus détaillée; le lecteur possède maintenant les idées directrices.

**125. Opération transformée d'une opération par le moyen d'une troisième opération.** — Le fait essentiel de la théorie de la structure, telle que nous venons de l'esquisser, est l'existence d'une infinité d'éléments de symétrie identiques, périodiquement distribués. Ils s'engendrent les uns les autres.

Par exemple, l'opération effectuée par un axe  $L'$  est la conséquence de l'opération effectuée par un axe  $L$  et de l'opération effectuée par un plan de symétrie  $P$ . On dit que l'opération  $L'$  est la transformée de  $L$  par  $P$ .

Montrons qu'elle est généralement régie par le symbole :

$$P^{-1}LP = L'. \quad (1)$$

Soit 1 le point initial; appelons  $P^{-1}$  l'opération qui donne le point 2 par réflexion sur le miroir  $P$ ; l'opération  $P$  fait passer 2 en 1. L'opération  $L$  donne 3 à partir de 2; l'opération  $P$  fait passer 3 sur 4. Donc il existe deux points 1 et 4 homologues qui entraînent l'existence

de l'axe binaire  $L'$ . Résultat exprimé par l'équation (1).

Il revient évidemment au même de dire que le plan  $P$  multiplie les éléments de symétrie comme il multiplie les points.

De même  $P'$  est le transformé de  $P$  par  $L'$  :

$$L'^{-1}PL' = P'.$$

$L'^{-1}$  fait le déplacement 41,  $P$  amène 1 en 2,  $L'$  amène 2 en 5. La coexistence de 4 et 5 implique le miroir  $P'$ .

Voici un autre exemple. Montrons que dans un cube un axe ternaire  $L'_3$  est le transformé d'un autre axe ternaire  $L_3$  par l'axe quaternaire  $\Lambda_4$  :

$$\Lambda_4^{-1}L_3\Lambda_4 = L'_3.$$

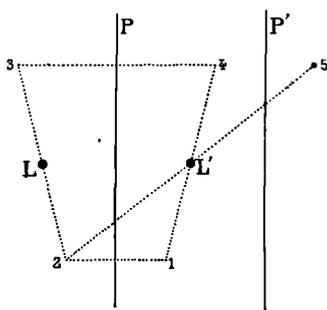


Fig. 121.

L'opération  $\Lambda_4^{-1}$  amène 1 sur 2 (faire attention au sens positif choisi pour la rotation).

$L_3$  amène 2 sur 3;  $\Lambda_4$  amène 3 sur 4. La coexistence des points 1 et 4 nécessite l'axe ternaire  $L_3'$ .

Nous avons maintes fois appliqué ces résultats dans les Chapitres précédents; il n'était pas alors besoin de les systématiser.

Tout groupe de déplacements qui contient les opérations A et B, contient par définition (§ 78) l'opération :

$$A^{-1}BA = B',$$

qui est la transformée de B par A.

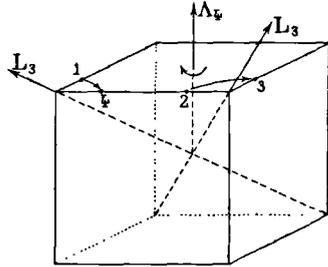


Fig. 122.

### Groupes infinis de translations.

**126. Les groupes de translations sont représentés par des réseaux.** — Il est d'abord évident :

1° qu'il n'existe sur une droite qu'une translation finie distincte; c'est la distance  $2\tau_1$  de deux points homologues consécutifs;

2° qu'il n'existe dans un plan que deux translations finies distinctes non parallèles  $2\tau_1$  et  $2\tau_2$  : toutes les autres peuvent être considérées comme la somme géométrique  $2m\tau_1 + 2n\tau_2$ , d'un nombre quelconque de translations primitives;

3° enfin qu'il n'existe dans l'espace que trois translations finies distinctes, non parallèles à un plan; toute translation est la somme géométrique :

$$T = 2m\tau_1 + 2n\tau_2 + 2p\tau_3. \tag{1}$$

Il revient au même de dire que les opérations en nombre infini d'un groupe de translations sont représentées par les segments qui joignent deux nœuds quelconques d'un réseau.

Réciproquement, soit construit le réseau représentatif du groupe de translations. Toute translation T, formule (1), amène le réseau à coïncider avec lui-même (§ 47, IV).

Dans ce qui suit, nous parlerons indifféremment d'un groupe de translations ou d'un réseau. Mais le réseau peut être considéré sous deux aspects très différents.

Le réseau considéré comme assemblage de points, a des éléments de symétrie (par exemple, ses nœuds sont toujours des centres d'inversion), tandis que le réseau considéré comme symbole d'un groupe de translations, n'a pas d'éléments de symétrie.

Comme ces considérations sont importantes, j'insiste.

*Strictement* on appelle maille d'un réseau le volume du parallélépipède qui a des nœuds seulement à ses sommets (§ 53). Nous savons que, suivant le *mode* du réseau, la maille possède une symétrie qui va jusqu'à celle du cube, à la condition que son remplissage ne diminue pas cette symétrie. Car la symétrie d'un ensemble résulte des éléments communs de symétrie appartenant aux parties de cet ensemble.

Considérons maintenant la maille comme le domaine fondamental d'un groupe de déplacements. Elle n'a aucune symétrie, alors même qu'elle serait un cube. Son remplissage s'y oppose, puisqu'il est tel par définition que le domaine fondamental ne contienne jamais deux points homologues.

Nous emploierons le mot *réseau* dans les deux sens spécifiés; il n'y aura jamais ambiguïté.

**127. Les groupes de translations sont des sous-groupes ÉMINENTS des groupes infinis généraux.** — Il est d'abord évident que les translations forment un sous-groupe. Elles satisfont aux conditions requises : l'opération inverse existe; le produit de deux translations faisant partie d'un groupe est une translation faisant partie du groupe. Ces conditions sont exprimées par l'équation symbolique :

$$(2m\tau_1 + 2n\tau_2 + 2p\tau_3) + (2m'\tau_1 + 2n'\tau_2 + 2p'\tau_3) = 2(m + m')\tau_1 + 2(n + n')\tau_2 + 2(p + p')\tau_3.$$

Voici ce qu'on entend par sous-groupe éminent (*ausgezeichnete Untergruppe de Schönflies*). Des opérations forment un sous-groupe ÉMINENT quand elles sont transformées les unes dans les autres par TOUTES les opérations du groupe.

Montrons d'abord que l'opération transformée d'une translation T par une opération A quelconque est une translation T' :

$$A^{-1}TA = T'.$$

C'est évident pour un plan de symétrie, un plan de glissement et pour un centre d'inversion. Prouvons-le pour une rotation.

Nous pouvons sans inconvénient restreindre la généralité du problème en supposant l'axe de rotation normal à la translation, ce qui revient à négliger la composante de la translation parallèle à l'axe. Il est clair qu'elle n'est pas modifiée par la transformation.

L'équation (1) s'écrit :

$$A^{-1}TA = T', \quad AA^{-1}TA = AT', \quad TA = AT'; \quad (2)$$

la relation (2) est démontrée exacte au § 16.

L'opération T' transformée d'une translation par une opération

quelconque est donc une translation, mais généralement différente de  $T$ . Le sous-groupe des translations contenant toutes les translations indépendantes,  $T'$  doit être une opération de ce sous-groupe.

D'ailleurs, il est facile de voir qu'une rotation hélicoïdale  $A(\alpha, t)$  ou une réflexion suivie d'un glissement parallèle au plan de réflexion  $S(t)$ , donnent respectivement, à partir de la translation  $T$ , la même translation  $T'$  que la rotation  $A(\alpha)$  ou la simple réflexion  $S$ .

Il résulte de là que toutes les rotations simples ou réflexions simples d'un groupe général doivent transformer une translation  $T$  du groupe de translations compatible, en une autre translation  $T'$  de ce groupe. Les opérations d'un groupe infini quelconque sont donc les opérations compatibles avec la symétrie des réseaux considérés comme des assemblages de points, auxquelles on ajoute au besoin des translations convenables transformant une rotation simple en une rotation hélicoïdale, une réflexion simple en une réflexion avec glissement.

Toutes les opérations du groupe infini n'amènent donc pas en self-coïncidence un réseau de points homologues construit avec les translations du groupe; il doit seulement en être ainsi pour les réflexions et les rotations réduites, parce qu'elles font nécessairement partie des éléments de symétrie du réseau.

C'est là, comme nous allons le voir, une très importante généralisation des idées de Bravais.

**128. Modes et symétries des groupes infinis de translation.** — Nous voici donc assurés que les groupes infinis n'ont d'autres éléments de symétrie que ceux des réseaux de points homologues, éléments généralisés au besoin comme il vient d'être dit. Nous sommes donc amenés à étudier la symétrie des réseaux.

Mais ce travail est complètement exécuté au Chapitre III. Le réseau est défini quand on se donne le triplet des translations primitives que nous noterons généralement  $2\tau_1, 2\tau_2, 2\tau_3$ . Les translations peuvent avoir des relations particulières de position et de grandeur qui différentient les quatorze modes. Ces modes appartiennent à un certain nombre de groupes de symétrie qui sont les six ou sept systèmes, comme on voudra.

Le lecteur comprend maintenant pourquoi nous avons tenu à exposer d'abord les idées de Bravais : c'est qu'en effet, si les théories modernes en généralisent heureusement l'application, ces idées leur servent encore de base. Comme elles sont très claires, elles forment un échelon de connaissances dont il serait absurde de se priver.

### Groupes infinis généraux.

Nous venons de classer les 14 groupes infinis de translations. Nous appellerons *groupes infinis généraux* les groupes de déplacements qui contiennent, outre les translations, des rotations et des réflexions. Leur nombre est de 230. Nous n'avons évidemment pas l'intention de les étudier un à un. Nous voulons seulement en dire ce qu'il faut pour comprendre la nature du problème et permettre au lecteur de se débrouiller dans le traité de Schönflies (*Krystallsysteme und Krystallstruktur*), s'il désire approfondir ces matières.

Nous énoncerons d'abord quelques propositions générales.

**129. Opérations isomorphes.** — Deux opérations sont *isomorphes* lorsqu'elles s'effectuent autour d'axes parallèles avec les mêmes angles de rotations, ou par rapport à des miroirs de même direction.

Deux opérations isomorphes A et A' sont donc telles qu'on ait :

$$A' = AT,$$

où T est une translation.

Il résulte de cette définition qu'on peut toujours faire correspondre à une opération A' une opération A isomorphe de A' et qui laisse immobile un point O de la figure.

Par exemple, l'opération A' est un déplacement hélicoïdal; l'opération A est une rotation autour d'un axe parallèle passant par le point O.

Autre exemple : les opérations A et A' sont des rotations autour d'axes parallèles.

Troisième exemple : A est un mirage, A' est un mirage dans un plan de glissement.

Soient A', B', deux opérations d'un groupe  $\Gamma$ ; l'opération  $C' = A'B'$ , appartient par définition au groupe  $\Gamma$ . Considérons les trois opérations A, B, C, isomorphes des précédentes et laissant immobile un point de la figure; il est facile de voir, en prenant successivement toutes les opérations que nous étudions (§§ 10 et 11), qu'on a :

$$C = AB.$$

D'où la proposition : *au groupe infini général  $\Gamma$  correspond un groupe G d'opérations isomorphes qui laissent immobile un point arbitraire de la figure. Toute opération de  $\Gamma$  est isomorphe d'une opération de G.*

On voit l'importance de cette proposition : il en résulte immédiatement que *tout groupe général de déplacements est isomorphe de l'une des trente-deux classes de groupes finis de déplacements.*

Pour trouver les groupes généraux, nous voici donc conduits à associer les groupes de translations aux trente-deux groupes d'éléments de symétrie qui forment les classes. C'est la nature de cette association que nous allons préciser par des exemples. Nous montrerons en particulier qu'un même groupe de translations et une même classe peuvent donner plusieurs groupes généraux; qu'inversement une classe peut être associée à plusieurs groupes de translations sans fournir pour cela plusieurs groupes généraux distincts.

**130. Notations et tableau des groupes généraux.** — Un groupe général isomorphe d'une classe est noté comme cette classe avec un numéro d'ordre supplémentaire. Ainsi il existe 6 groupes généraux qui jouissent de l'holoédrie du système rhomboédrique; ils seront notés :

$$D_{3d}^1, D_{3d}^2, \dots, D_{3d}^6.$$

Ceci posé, voici le tableau des groupes infinis généraux : nous le donnerons pour préciser la relation des exemples traités avec l'ensemble des groupes.

TABLEAU ABRÉGÉ DES DEUX CENT TRENTE GROUPES GÉNÉRAUX DE DÉPLACEMENTS

I. *Système cubique* (36).

$O_h$	Holoédrie	$\Gamma_r$	4	$\Gamma'_r$	4	$\Gamma''_r$	2	10
O	Hémi. énantiomorphe		4		2		2	8
$T_d$	Hémi. hémimorphe		2		2		2	6
$T_h$	Hémi. paramorphe		3		2		2	7
T	Tétartoédrie		2		1		2	5

II. *Système hexagonal* (27).

$D_{6h}$	Holoédrie	$\Gamma_h$	4
$D_6$	Hémi. énantiomorphe		6
$C_{6v}$	Hémi. hémimorphe		4
$C_{6h}$	Hémi. paramorphe		2
$C_6$	Tétartoédrie		6
$D_{3h}$	Hémi. sphénoïdale		4
$S_6$	Téтар. sphénoïdale		1

III. *Système rhomboédrique* (25).

$D_{3d}$	Holoédrie	$\Gamma_h$	4	$\Gamma_{2h}$	2	6
$D_3$	Hémi. énantiomorphe		6		1	7
$C_{3v}$	Hémi. hémimorphe		4		2	6
$C_{3i}$	Hémi. paramorphe		1		1	2
$C_3$	Tétartoédrie		3		1	4

IV. *Système quaternaire* (68).

$D_{4h}$	Holoédrie	$\Gamma_4$	16		$\Gamma'_4$	4		20
$D_4$	Hémi. énantiomorphe		8			2		10
$C_{4v}$	Hémi. hémimorphe		8			4		12
$C_{4h}$	Hémi. paramorphe		4			2		6
$C_4$	Tétartoédrie		4			2		6
$D_{2d}$	Hémi. sphénoïdale		8			4		12
$S_4$	Téтар. sphénoïdale		1			1		2

V. *Système orthorhombique* (59).

$D_{2h}$	Holoédrie	$\Gamma_0$	16		$\Gamma'_0$	6		$\Gamma''_0$	2		$\Gamma'''_0$	4		28
$D_2$	Hémi. énantiomorphe		4			2			1			2		9
$C_{2v}$	Hémi. hémimorphe		10			7			2			3		22

VI. *Système clinorhombique* (13).

$C_{2h}$	Holoédrie	$\Gamma_m$	4		$\Gamma'_m$	2		6
$C_2$	Hémi. énantiomorphe		2			1		3
$S_1$	Hémi. hémimorphe		2			2		4

VII. *Système triclinique* (2).

$S_2 = C_i$	Holoédrie	$\Gamma_r$	1
$C_1$	Hémiédrie		1

$$\text{Total : } 36 + 27 + 25 + 68 + 59 + 13 + 2 = 230$$

131. **Groupes généraux du système triclinique.** — Le réseau ou, si l'on veut, le groupe de translations qui caractérise le système triclinique, est défini par trois translations *quelconques*; mais, et ceci est fondamental, le réseau serait-il cubique, ou, si l'on veut, les trois translations formeraient-elles un trièdre trirectangle et seraient-elles égales, qu'il n'en serait ni plus ni moins pour le groupe général  $C_1^1$ , à la seule condition de prendre un domaine fondamental aussi volumineux que la maille du réseau. La dyssymétrie du domaine fondamental détruirait la symétrie du groupe de translations envisagé isolément.

Le groupe général *hémièdre*  $C_1^1$  est donc caractérisé par trois translations *généralement quelconques, mais qui peuvent avoir telles relations qu'on voudra*. Cela revient à dire qu'un cristal triclinique a généralement un réseau triclinique; mais il peut avoir un réseau

cubique sans cesser d'être triclinique. Il suffit de remplir la maille cubique d'une manière absolument dyssymétrique (elle devient ainsi le domaine fondamental), ou plus généralement de prendre un domaine de même volume que la maille de translation.

Voilà ce que signifie la proposition qu'une classe peut être associée à plusieurs groupes de translations sans fournir pour cela plusieurs groupes généraux distincts, les groupes se classant d'après le nombre de leurs opérations distinctes.

Le groupe holoèdre,  $C_i^1$ , possède comme opérations, outre trois

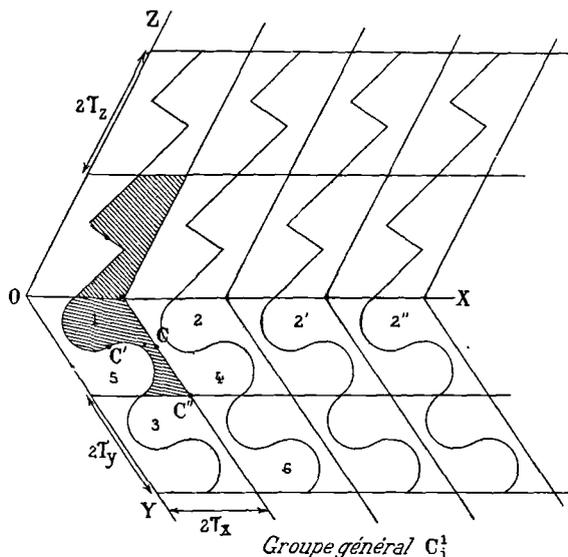


Fig. 123.

translations quelconques, une inversion. Il existe donc une infinité de centres de symétrie. On vérifie aisément qu'ils coïncident avec tous les nœuds du réseau et avec les milieux des droites qui joignent deux nœuds quelconques. Le domaine fondamental a maintenant pour volume la moitié de celui de la maille parallélépipédique.

Tout ce que nous avons dit du groupe  $C_i^1$ , quant aux relations qui peuvent exister entre les translations, est absolument général et s'applique ici.

Représentons une des formes en nombre infini qu'on peut donner au domaine fondamental (fig. 123).

Nous pouvons choisir un profil dans le plan OXY qui contient deux des translations, arbitrairement, sous condition de satisfaire aux translations et à l'inversion; son pourtour doit passer par tous les centres (§ 119). La figure ombrée est une des aires fondamentales

possibles. De la figure 1, on passe par la translation  $2m\tau_x$  aux figures 2, 2', 2'', ...; on passe par la translation  $2n\tau_y$  aux figures 3, 3', ... On vérifie de plus qu'il existe des centres aux nœuds (par exemple, C'' transporte 1 sur 6, ...) aux milieux des côtés (C transporte 1 sur 4, ...), aux centres des parallélogrammes (C' transporte 1 sur 5, ...).

Le plan XOY n'admet aucune autre opération.

Menons le plan XOZ dans lequel la translation est  $2\tau_z$ . Nous pouvons encore choisir arbitrairement dans ce plan le pourtour de l'aire fondamentale, sous condition de satisfaire aux translations et à l'inversion; son pourtour doit passer par tous les centres.

En effet, une inversion quelconque transforme le plan XOY en un plan parallèle, et par conséquent les figures du plan en figures situées dans des plans parallèles. Aucun point du pourtour choisi dans le plan XOY ne doit venir coïncider avec les points du pourtour choisi dans le plan XOZ, sauf les points des arêtes parallèles à OX qui doivent être communs aux deux pourtours. Donc les pourtours sont bien indépendants.

Le domaine fondamental solide se déduit des deux pourtours choisis.

**132. Groupes hémimorphes du système clinorhombique ou monoclinique.** — Ces groupes sont isomorphes du groupe fini (classe) hémimorphe clinorhombique dont les éléments de symétrie se réduisent à un plan P. Ils vont nous apprendre comment interviennent les plans de réflexion et les plans de glissement. Ils sont au nombre de quatre : deux sont construits avec le réseau  $\Gamma_m$ , deux avec le réseau  $\Gamma'_m$ . Voici leurs symboles :

$$\begin{aligned} C_1^2 &= (\Gamma_m, S), & C_2^2 &= \{ \Gamma_m, S(t) \}; \\ C_1^3 &= (\Gamma'_m, S), & C_2^3 &= \{ \Gamma'_m, S(t) \}. \end{aligned}$$

Le symbole S signifie généralement une réflexion,  $S(t)$  une réflexion suivie d'un glissement parallèle au plan de réflexion. Les symboles  $\Gamma_m$  et  $\Gamma'_m$  signifient les trois translations définies par les réseaux correspondants.

GROUPES DÉPENDANT DU RÉSEAU  $\Gamma_m$ .

Le réseau  $\Gamma_m$  a pour maille (§ 63) un prisme droit à base parallélogramme; considéré comme assemblage de points, sa symétrie est  $\{ L_2, C, P \}$ ; considéré comme groupe de translations, il n'a pas d'éléments de symétrie.

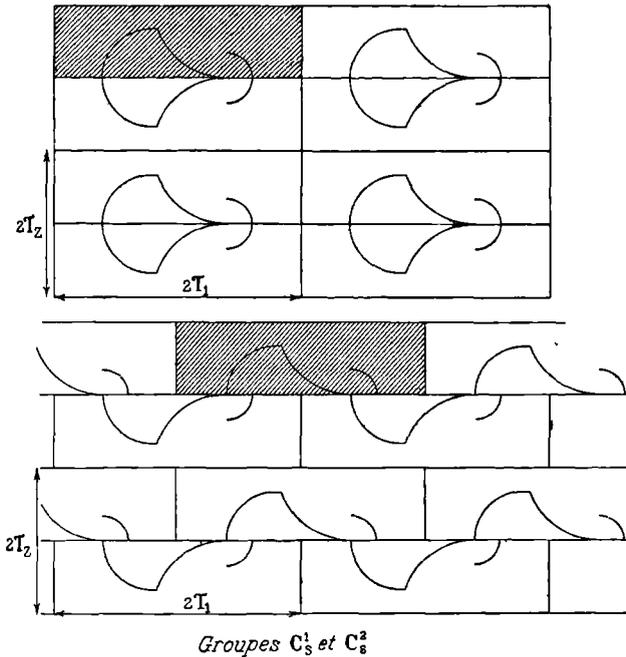
Nous multiplierons ses opérations par des plans de symétrie ou de glissement; ces plans doivent être parallèles aux plans de symétrie que le réseau possède si on le considère comme assemblage de points; ils sont donc parallèles aux plans de base de la maille.

Toute droite normale à ces plans et passant par un nœud serait un

axe binaire du réseau considéré comme assemblage de points; elle n'a aucune autre propriété que d'être normale aux plans de symétrie ou de glissement dans les groupes étudiés. Appelons  $2\tau_z$  la translation primitive parallèle.

Le produit de deux opérations S ou S(t) est une translation qui doit être une des translations du groupe. D'où les conséquences suivantes.

1° Les plans S et S(t) forment une série de plans parallèles dont l'équidistance est  $\tau_z$ .



Groupes  $C_3^1$  et  $C_2^2$

Fig. 124.

2° La translation t, qui accompagne la réflexion quand S est un plan de glissement, est moitié d'une des translations possibles parallèle aux plans de glissement; par exemple, elle est parallèle à l'un des côtés du parallélogramme de base et de grandeur moitié moindre.

Prenons comme plan de tableau un plan normal à la base et passant par l'un de ses côtés.

La figure représente un dessin possible. J'ai pris comme domaine fondamental le rectangle formant l'une des faces latérales de la maille, mais je l'ai orné d'un dessin qui lui enlève toute symétrie.

Dans la figure supérieure, on ramène en self-coïncidence par les translations  $2\tau_z$  et  $2\tau_1$ , et par les mirages sur tous les plans horizontaux dont les traces sont marquées.

Dans la figure inférieure, on ramène en self-coïncidence par les mêmes translations  $2\tau_z$  et  $2\tau_1$ , et par les mirages sur les mêmes plans, mirages suivis d'une translation  $\tau_1$ .

GROUPES DÉPENDANT DU RÉSEAU  $\Gamma'_m$ .

On se reportera à la figure 39 représentant le prisme droit centré à base parallélogramme quelconque qu'on peut prendre pour maille du réseau. Ce n'est pas la maille au sens strict. Celle-ci peut être formée par les trois translations :

$$2\tau_e, \quad 2\tau_f, \quad \tau_e + \tau_f + \tau_z.$$

La translation  $\overline{OA}$  est en effet égale à  $\tau_e + \tau_f$ ; la translation

$$\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB}.$$

Il s'agit de combiner des plans de symétrie et de glissement; ils

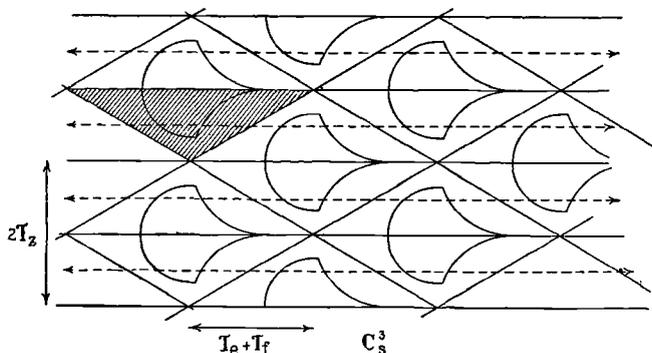


Fig. 125.

doivent être horizontaux, et redonner les translations du groupe par leur produit deux à deux.

La figure 125 montre une coupe du groupe  $C_3^3$  par le plan OAB.

Dans la période  $2\tau_z$  se trouvent deux plans de symétrie S ordinaires (leurs traces sur OAB sont marquées en traits pleins) séparés par l'intervalle  $\tau_z$ , et deux plans de glissement S ( $t$ ) (leurs traces sur OAB sont marquées en traits interrompus armés de flèches aux extrémités), également équidistants de  $\tau_z$ ; le glissement dans ces plans est :

$$t = \overline{OA} = \tau_e + \tau_f.$$

Le produit de deux opérations S est une translation  $\tau_z$ ; le produit S.S ( $t$ ) est une translation isomorphe de la translation  $\overline{OB}$ .

Le dernier groupe  $C_3^3$  est difficile à représenter, mais facile à comprendre.

Il existe outre les translations :  $2\tau_e$ ,  $2\tau_f$ ,  $\tau_e + \tau_f + \tau_z$ , des réflexions avec glissement.

Les plans de glissement forment encore deux séries. Dans la

période  $2\tau_z$ , il y en a quatre. Les plans de glissement d'une série admettent le glissement  $\tau_e$ , les autres admettent le glissement  $\tau_f$ .

Le carré de deux opérations de même espèce  $S^2(\tau_e)$  ou  $S^2(\tau_f)$  est une translation  $2\tau_e$  ou  $2\tau_f$ .

Cherchons ce que représente l'opération  $S(\tau_e)S(\tau_f)$ . C'est certainement une translation. Puisque les plans sont distants de  $\tau_z : 2$ , cette double opération produit une translation verticale  $\tau_z$ . Elle produit naturellement une translation horizontale dirigée suivant OF et égale à  $\tau_f$ , une translation horizontale dirigée suivant OE et égale à  $\tau_e$ . Bref, l'opération complexe vaut la translation  $\overline{OB}$ .

En définitive, ce groupe divise la période  $2\tau_z$  en deux groupes de sous-périodes. Voici les opérations.

1. Mirage, translation  $\tau_e$ ;

2. mirage, translation  $\tau_f$ ;

ces opérations valent la translation  $\tau_z + \tau_e + \tau_f$ .

3. Mirage, translation  $\tau_e$ ;

4. mirage, translation  $\tau_f$ ;

ces deux opérations valent une translation  $\tau_z + \tau_e + \tau_f$ .

Les quatre opérations valent la translation  $\overline{OD}$ .

### 133. Groupes énantiomorphes du système clinorhombique.

— Ces groupes sont isomorphes du groupe fini hémédrique énantiomorphe dont les éléments de symétrie se réduisent à un axe binaire  $L_2$ . Ils vont nous apprendre comment interviennent les axes binaires et les déplacements hélicoïdaux.

Ils sont au nombre de trois. Voici leurs symboles :

$$C_2^1 = (\Gamma_m, A_{\pi, 0}),$$

$$C_2^2 = (\Gamma_m, A_{\pi, \tau}),$$

$$C_2^3 = (\Gamma'_m, A_{\pi, 0}).$$

L'opération  $A_{\pi, \tau}$  est une rotation d'un angle  $\pi$  (transposition par un axe binaire) suivie d'une translation parallèle à l'axe et de longueur  $\tau$ . Cette translation est nulle dans les groupes  $C_2^1, C_2^2$ ; elle vaut  $\tau_z$  (soit une demi-translation du groupe  $\Gamma'_m$ ) dans le groupe  $C_2^3$ .

La répartition des axes dans l'espace résulte immédiatement de la proposition, que le produit de deux transpositions autour d'axes parallèles est une translation égale à deux fois la distance des axes (§ 21). La plus petite distance de deux axes devant donner les translations  $2\tau_e$  ou  $2\tau_f$ , comme produit de transpositions autour d'eux, est donc  $\tau_e$  ou  $\tau_f$ .

Dans le groupe  $C_2^3$  construit avec le réseau  $\Gamma_m$ , les axes sont simplement de transposition : ils sont à des distances  $\tau_e$  et  $\tau_f$  les uns des autres. La figure 126 à gauche représente ce que peut être le domaine fondamental d'un tel groupe.

Dans le groupe  $C_2^3$ , construit également avec le réseau  $\Gamma_m$ , on suppose que les axes sont hélicoïdaux. De la condition que le produit de deux transpositions hélicoïdales est une translation qui doit être une de celles du groupe  $\Gamma_m$ , résulte que la translation est de longueur  $\tau_z$ . Les axes sont, du reste, distribués comme dans le groupe  $C_2^1$ .

Il est intéressant de comparer la forme des domaines fondamentaux dans ces deux groupes. Leur volume est le même et moitié du volume de la maille du réseau.

Prenons cette maille comme domaine fondamental quand il n'existe aucun élément de symétrie.

Dans le groupe  $C_2^1$ , la maille se décompose par exemple comme

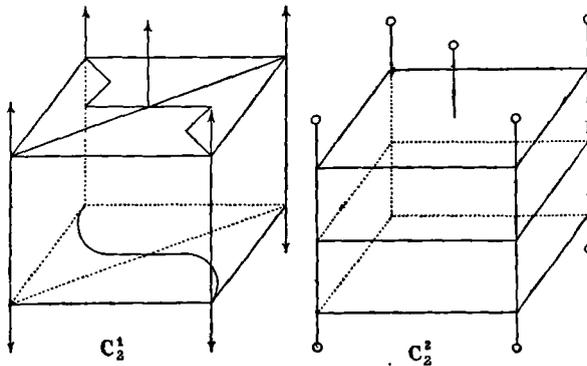


Fig. 126.

l'indique la figure : le domaine fondamental est un prisme droit à base triangulaire. Tout ce qui arrive dans une mince section perpendiculaire aux axes de l'un des prismes triangulaires, arrive *symétriquement* dans l'autre prisme.

Dans le groupe  $C_2^2$  au contraire, la maille est coupée en deux par un plan horizontal : le domaine fondamental est un prisme droit à base parallélogramme de hauteur  $\tau_z$ . Tout ce qui arrive dans une section perpendiculaire aux axes des prismes quadrangulaires, arrive *symétriquement* dans l'autre, à une distance  $\tau_z$  de la première section droite.

La distribution dans les sections droites de chaque domaine fondamental est arbitraire par définition.

Passons au groupe  $C_2^3$ , qui dérive du groupe de translations  $\Gamma_m$ .

Il est facile de voir qu'il existe des axes binaires avec des équidistances minima  $\tau_x$  et  $\tau_y$ , tout comme dans les groupes précédents. Il existe de plus des axes de transposition hélicoïdaux (de translation  $\tau_z$ ) passant par les milieux des translations  $\overline{OA}$  (fig. 39),  $\overline{AG}$ , et des translations analogues  $\overline{FA}$  et  $\overline{AE}$  sur l'autre diagonale de la base.

Il est clair que le produit de la transposition autour de l'axe binaire passant en O et de la transposition hélicoïdale autour de l'axe passant au milieu de OA est précisément la translation  $\overline{OB}$ .

**134. Groupes té tartoédriques du système quaternaire.** — Il ne peut entrer dans mon plan de décrire 230 groupes de déplacements. Je choisis ceux qui, tout en restant très simples, permettent de préciser la nature du problème. C'est pure paresse si les Français ignorent généralement ce sujet, car il ne présente aucune difficulté. Prétendre, comme on l'a fait, qu'il faut une année pour s'initier à ces mystères, c'est reconnaître qu'on n'est pas intelligent ou tout bonnement se moquer du monde<sup>1</sup>.

Je vais décrire quelques groupes pour leur importance dans l'histoire du développement de la théorie et surtout dans l'explication des phénomènes rotatoires. Ils comprennent en effet les *spirales de points* Söhncke. Je commence par certains groupes du système quaternaire; j'étudierai ensuite quelques groupes du système ternaire.

Les groupes té tartoédriques du système quaternaire sont isomorphes du groupe fini (classe)  $C_4$  dont les éléments de symétrie se réduisent à un axe quaternaire  $\Lambda_4$ .

Nous savons d'ailleurs qu'il existe deux réseaux  $\Gamma_4, \Gamma'_4$ , qui présentent, considérés comme assemblages de points, la symétrie holoèdre  $D_{2d}$  du système quaternaire.

Il s'agit donc de trouver les groupes de déplacements isomorphes du groupe  $C_4$ . Ils dérivent des opérations de ce groupe appliquées aux groupes de translations  $\Gamma_4, \Gamma'_4$ , c'est-à-dire aux réseaux correspondants envisagés seulement comme représentatifs des groupes de translations.

Les seules opérations licites sont des rotations autour d'axes quaternaires soit ordinaires, soit hélicoïdaux, et des rotations autour des axes binaires qui résultent de ces opérations. Les transpositions sont bien isomorphes de certaines opérations du groupe  $C_4$ , puisque ce groupe, contenant un axe quaternaire, peut tout aussi bien être envisagé comme contenant un axe binaire confondu avec l'axe quaternaire.

Le groupe  $C_4$  dérive du réseau  $\Gamma_4$  dont la maille est un prisme droit à base carrée.

La figure 127 montre un dessin conforme à la symétrie dans le

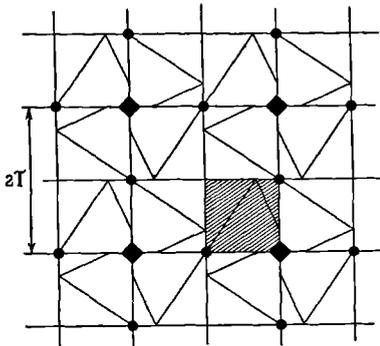
---

<sup>1</sup> Si la Sorbonne n'était pas un admirable Conservatoire d'hypothèses démodées, de théories usées et de méthodes hors de service, elle tiendrait à honneur d'offrir à ses étudiants un musée des 230 groupes de déplacements, construits de manière à en permettre l'étude quasi intuitive. Mais la seule Université française qui ait les moyens pécuniaires et le personnel nécessaires pour sortir de l'ornière, est incapable du moindre effort, sinon pour s'opposer à toutes les initiatives *scientifiques*.

plan de la base; les côtés du carré, translations égales et normales entre elles du groupe  $\Gamma$ , sont de longueur  $2\tau$ .

On vérifie immédiatement qu'il existe des axes binaires équidistants des axes quaternaires et situés sur les côtés du carré de la maille plane.

Le domaine fondamental a pour volume le quart du volume de la maille du réseau. On peut considérer comme domaine fondamental un prisme triangulaire droit (fig. 128). Le remplissage de ce prisme est naturellement quelconque.



Groupe  $C_4^1$ .

Fig. 127.

Nous appellerons  $2\tau_z$  la hauteur du prisme, c'est-à-dire la translation parallèlement à l'axe quaternaire.

Le groupe  $C_4^3$  dérive toujours du réseau  $\Gamma_1$ . Les axes quaternaires sont maintenant hélicoïdaux et de translation  $\tau_z$ . Appelons A cette opération : elle fait tourner une figure de  $90^\circ$  en la transportant de  $\tau_z$ . L'opération  $A^2$  est donc

une transposition avec déplacement de  $2\tau_z$ , c'est-à-dire de la translation du groupe de translation. Donc il faut que dans chaque plan normal à l'axe quaternaire se trouve une figure et le résultat de sa

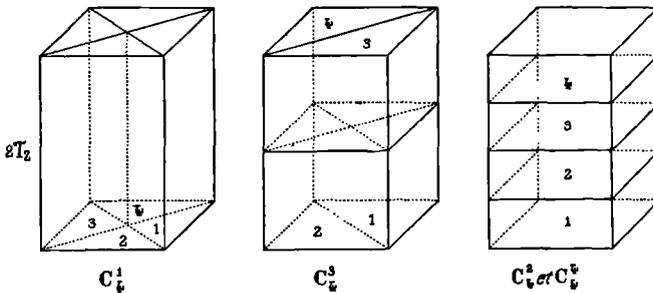


Fig. 128.

transposition. L'axe quaternaire hélicoïdal est donc aussi un axe binaire ordinaire.

Le domaine fondamental est, si l'on veut (fig. 128), un prisme triangulaire droit de hauteur  $\tau_z$ . Par rotation de  $\pi : 2$  et transport de  $\tau_z$  le prisme 1 donne le prisme 3, le prisme 2 donne le prisme 4. D'ailleurs 1 et 2, 3 et 4 sont respectivement la transposition l'un de l'autre. En définitive, la distribution des axes quaternaires et binaires

est la même que pour le groupe  $C_4^1$ , mais les axes quaternaires sont hélicoïdaux. Dans chaque plan normal à l'axe, l'aire fondamentale du groupe  $C_4^3$  est le double de l'aire qui convient au groupe  $C_4^1$ .

Les groupes  $C_4^2$  et  $C_4^4$  montrent des distributions hélicoïdales de sens inverses.

Il y a rotation autour des axes quaternaires qui deviennent hélicoïdaux et translation du *quart* de la translation du groupe, soit  $\tau_z : 2$ . Le domaine fondamental est, si l'on veut (fig. 128), un prisme droit à base carrée de hauteur  $\tau_z : 2$ , dont le remplissage est naturellement quelconque. On a l'un ou l'autre des groupes  $C_4^2$  et  $C_4^4$ , en supposant que la rotation se fait dans un sens ou dans l'autre; on peut encore imaginer qu'elle a lieu dans le même sens les deux fois, mais que pour l'un des groupes la translation est  $\tau_z : 2$ , alors qu'elle est  $3\tau_z : 2$  pour l'autre groupe; d'où leurs notations par rapport aux deux autres groupes :  $C_4^1$  (translation nulle),  $C_4^3$  (translation  $2\tau_z : 2$ ).

Outre les axes quaternaires, subsistent des axes binaires hélicoïdaux de translation  $\tau_z$ , comme on le vérifiera en faisant une figure dans l'espace.

**135. Symétrie des phénomènes physiques.** — Présentons une remarque importante.

Dans le groupe  $C_4^1$ , existe effectivement une série d'axes quaternaires *ordinaires*; dans le groupe  $C_4^3$ , ces axes quaternaires *hélicoïdaux* ne sont plus que des axes binaires *ordinaires*; enfin dans les groupes  $C_4^2$  et  $C_4^4$ , ce ne sont plus des axes de répétition au sens ordinaire du mot.

Par suite, on doit poser la question : *Dans le milieu qui réalise ces trois derniers groupes, existe-t-il un axe de symétrie pour les phénomènes physiques? de quelle nature est-il?*

La réponse est dans le fait suivant : *jamais les plans réticulaires n'interviennent isolément dans les phénomènes*; autrement dit, le phénomène est dû à la moyenne des propriétés d'une couche dont l'épaisseur est un grand nombre de fois la translation des groupes de translations qui interviennent dans la structure.

Par exemple, dans un milieu dont la structure est celle des groupes  $C_4^2$  ou  $C_4^4$ , taillons une lame normale à la direction principale, et étudions la conductibilité calorifique.

Recouvrons la lame d'une couche de cire, chauffons-la en un point et étudions la symétrie de la figure formée par la cire fondue : *elle est compatible avec l'existence d'un axe quaternaire*. Car s'il n'existe pas dans chaque plan, considéré isolément, cet axe existe cependant pour la *moyenne* des propriétés.

De même, s'il existe un cristal appartenant aux groupes étudiés ses faces iront généralement quatre par quatre et formeront des pyramides régulières.

Ces remarques sont absolument générales; elles s'appliquent en particulier à tous les groupes qui contiennent des axes hélicoïdaux.

**136. Système sénaire et système rhomboédrique.** — Il faut d'abord insister sur un point de théorie.

Au § 66, en classant les modes, nous n'avons pas séparé le système sénaire du système rhomboédrique; c'est qu'en effet ces deux systèmes sont pratiquement inséparables. Assurément le réseau  $\Gamma_{rh}$ , ne contenant pas d'axe sénaire, est incompatible avec toutes les classes qui en possèdent un. Mais la réciproque n'est pas vraie; les classes du système rhomboédrique peuvent avoir l'un ou l'autre des réseaux  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_{r_1}$ . Comme en définitive la seule classification raisonnable réside :

1° dans les groupes finis;

2° dans les groupes infinis de translations;

3° dans la recherche d'un groupe général qui admette les opérations d'un groupe infini de translations et les opérations isomorphes d'un groupe fini;

il n'y a absolument aucune raison de distinguer le système sénaire du système rhomboédrique.

Il est évident *a priori* qu'on peut trouver des groupes  $C_3^2$ , ne contenant par conséquent que des axes ternaires, possédant cependant le réseau  $\Gamma_2$ , puisque l'existence d'un réseau, envisagé comme symbole d'un groupe de translations, n'implique qu'une possibilité de symétrie et non une symétrie nécessaire.

Tout ceci devient évident par quelques exemples.

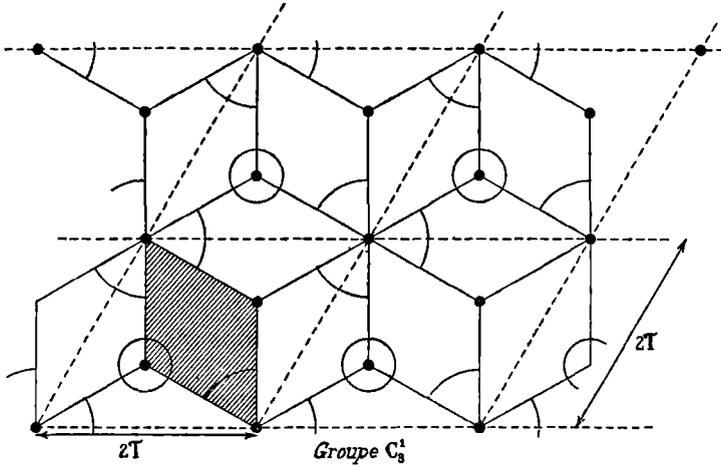
**137. Groupes  $C_3^2$  et  $C_6^2$ .** — Considérons les groupes infinis isomorphes du groupe  $C_3$ , admettant par conséquent les opérations qui résultent de la multiplication d'un axe ternaire par des translations.

Le réseau est  $\Gamma_2$ ; c'est-à-dire que les translations normales à l'axe ternaire résultent toutes de deux translations  $2\tau$  égales et qui sont à  $60^\circ$  l'une de l'autre. Nous appellerons  $2\tau_z$  la translation parallèle à l'axe ternaire.

Nous trouvons un premier groupe  $C_3^1$  qui contient des axes ternaires marqués par des points sur la figure. Ils sont aux sommets des losanges de la maille plane du réseau et aux centres des deux triangles équilatéraux en lesquels on peut la découper. Il est loisible de prendre pour domaine fondamental un prisme à base losange dont le volume est le tiers du volume de la maille du réseau. Le remplissage du domaine est quelconque; nous avons orné sa base losange de manière à supprimer la symétrie intérieure.

Nous obtenons les deux groupes  $C_3^2$ ,  $C_6^2$  (droit et gauche) en remplaçant les axes ternaires ordinaires par des axes ternaires hélicoïdaux. Pour obtenir les deux groupes, ou bien nous faisons les

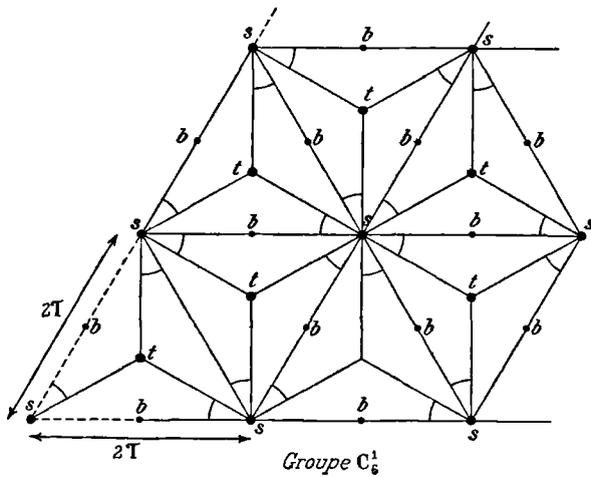
rotations dans le même sens et nous prenons respectivement pour translation  $2\tau_z : 3$ ,  $4\tau_z : 3$ ; ou bien nous prenons la même transla-



Groupe  $C_3^1$   
 Fig. 129.

tion ( $2\tau_z : 3$  ou  $4\tau_z : 3$ ) et nous faisons les rotations en sens contraires.

Le domaine fondamental est maintenant, par exemple, un prisme



Groupe  $C_6^1$   
 Fig. 130.

hexagonal de hauteur  $2\tau_z : 3$  et de remplissage quelconque. Son volume est naturellement le même que dans le premier cas.

Nous passons très aisément aux groupes isomorphes de la classe  $C_6$ ; le réseau est le même.

Pour avoir le groupe  $C_6^1$ , il n'y a qu'à supprimer, dans le dessin de la figure 129, les ornements qui diminuent la symétrie.

Chaque losange peut être décomposé en deux triangles de remplissage quelconque mais identique. Les axes précédemment ternaires qui sont aux sommets de la maille losange primitive, deviennent sénaires. Les autres restent ternaires. Enfin il naît des axes binaires aux milieux des droites qui joignent les axes sénaires. Ces axes ternaires et binaires sont compatibles avec l'axe sénaire du groupe fini  $C_6$ .

Remplaçant les axes sénaires ordinaires par des axes hélicoïdaux de translation  $n\tau_z : 3$ , on obtient, en faisant  $n = 0, 1, \dots, 5$ , les groupes :

$$C_6^1, \dots, C_6^2, C_6^6.$$

Simultanément les axes ternaires et binaires deviennent hélicoïdaux.

Pour tous ces groupes, le domaine fondamental a le même volume. Sa hauteur est suivant les cas  $2\tau_z$ ,  $2\tau_z : 3$ ,  $2\tau_z : 6$ . Naturellement son aire de base est, suivant les cas, égale à l'aire du triangle que nous avons trouvé pour  $C_6^1$ , 3 fois plus grande, 6 fois plus grande.

**138. Domaine fondamental, domaine complexe, milieu indéfini.** — En résumé, pour remplir l'espace, nous imaginons trois échelons d'éléments.

1° D'abord *le domaine fondamental, solide dépourvu de symétrie*; il est rempli de matière et de vide d'une manière quelconque. C'est évidemment un être de raison; son existence physique indépendante est plus que douteuse; son existence logique est essentielle.

2° En second lieu *le domaine complexe*, formé d'un certain nombre de domaines fondamentaux juxtaposés sans vide. Il est doué de symétrie. Son volume est celui de la maille du réseau que nous allons retrouver plus loin, mais sa forme n'est pas nécessairement parallélépipédique; ses faces ne sont pas nécessairement planes.

3° Enfin *le milieu cristallin*, formé de domaines complexes en nombre infini, juxtaposés sans lacunes au moyen d'un groupe de translations défini par un réseau. Tous les domaines complexes sont disposés parallèlement entre eux.

Il ne faut pas dire que le milieu cristallin est formé de domaines complexes placés aux nœuds d'un réseau; *cela n'a pas de sens*. Les points homologues d'un point quelconque d'un des domaines complexes sont sur un réseau; tous les réseaux ainsi obtenus (un nombre infini) sont identiques et parallèles entre eux.

Le domaine complexe a le volume de la maille simple du réseau, puisque, dans un volume assez grand, il doit exister autant de mailles que de molécules complexes (§ 52).

Le domaine complexe résulte non seulement des opérations d'un

groupe fini (qui laissent un point invariable), mais des opérations hélicoïdales, des glissements, des rotations avec réflexion. Il présente donc généralement une sorte de périodicité.

On prend ordinairement comme domaine complexe la maille même du réseau; mais répétons que ce choix est arbitraire; les faces des domaines fondamentaux et des domaines complexes peuvent être courbes.

Nous avons défini maille *multiple* d'un réseau une maille dont le volume est multiple du volume de celle du réseau (§ 53). De même on trouve parfois avantage à considérer un domaine complexe multiple du vrai domaine complexe.

**139. Symétrie du domaine complexe comparée à celle du réseau.** — Un réseau envisagé comme symbole et image d'un groupe de translations n'a pas de symétrie, serait-il cubique; envisagé comme assemblage de points géométriques d'un point multiplié par ces translations, il a l'une des symétries des sept classes holoédres.

Il est d'abord évident que le domaine complexe ne peut avoir une symétrie supérieure à celle du réseau, puisque la symétrie de sa surface limite est imposée par celle de la maille du réseau envisagé comme assemblage de points. Mais rien n'empêche d'appliquer un groupe de translations égales et trirectangles à un cube dont le remplissage est quelconque; en d'autres termes, *la symétrie du réseau n'entraîne en aucune manière une symétrie égale pour le domaine complexe.*

Nous retrouvons donc sous une troisième forme la notion de mériédrie (hémiedrie, tétartoédrie,...) que nous avons déjà rencontrée aux §§ 90 et 92.

Nous n'en dirons rien de plus pour l'instant; nous y reviendrons longuement dans la Deuxième Partie de ce livre.

Ici se termine la première partie de notre tâche, l'Étude géométrique des Symétries. Nous avons maintenant notre arsenal d'hypothèses et de théorèmes: il s'agit de les mettre en œuvre.



# ÉTUDE PHYSIQUE DES SYMÉTRIES

---

## CHAPITRE I

### SYMÉTRIES DES CRISTAUX

**140. Définition du milieu cristallin.** — Le milieu cristallin est d'abord homogène et anisotrope. Définissons ces deux termes.

On dit qu'un milieu est *homogène* quand ses diverses parties ne peuvent être différenciées ni par leurs propriétés scalaires (densité, ...), ni par leurs propriétés vectorielles (conductibilité calorifique, ...), envisagées soit en grandeur, soit en direction. Autrement dit, si on isole un solide de dimensions *sensibles* et de configuration quelconque, tous les solides pareils et parallèles à celui-là, extraits du même milieu, sont identiques chimiquement et physiquement.

Cette définition est éminemment relative. L'homogénéité a pour limites la précision de nos moyens d'investigation. Strictement parlant, il est douteux qu'aucun corps soit homogène. Pratiquement, un corps le sera ou ne le sera pas suivant l'approximation exigée ou la nature du phénomène pris comme témoin.

Une roche peut être homogène par rapport à ses constantes élastiques mesurées sur des échantillons relativement volumineux, et ne plus l'être quand on l'observe en coupe mince sous le microscope polarisant. Dans le premier cas, on détermine une moyenne entre les propriétés élastiques des cristaux élémentaires et du ciment jointif; dans le second, on distingue ces éléments eux-mêmes.

Mais inversement tout corps, pour peu homogène qu'il soit, le devient pratiquement si on en considère un fragment assez petit. C'est journallement ce qu'on fait dans l'étude des corps.

L'homogénéité est donc une propriété sans grande valeur de définition.

On dit qu'un milieu est *anisotrope* quand les propriétés vectorielles ne sont pas les mêmes dans toutes les directions. Une propriété sca-

laire, telle que la densité, ne peut évidemment pas caractériser un corps anisotrope.

Un corps *anisotrope* ne décèle pas nécessairement son anisotropie par toutes ses propriétés. Les cristaux cubiques ont *généralement* des propriétés optiques isotropes. Cependant ils ne sont pas *isotropes*, *puisque'ils sont cristallisés*, c'est-à-dire puisqu'ils choisissent pour se limiter certaines faces bien déterminées en direction. Cette sélection même, quelque nom qu'on lui donne, est une propriété vectorielle anisotrope.

Nous trouvons là une importante application de cette loi fondamentale : *que les effets admettent tous les éléments de symétrie des causes, mais peuvent en posséder d'autres*. Les axes quaternaires des cristaux cubiques doivent se retrouver *au moins quaternaires* dans les phénomènes, mais peuvent y devenir d'ordre infini, c'est-à-dire de révolution.

La définition : *le milieu cristallin est homogène et anisotrope*, est certainement incomplète. Un morceau de verre comprimé peut être homogène et anisotrope : personne ne soutiendra qu'il ait cessé d'être *amorphe*. Évidemment ce sont là questions de mots, mais il importe de les choisir le mieux possible.

On peut dire avec G. Friedel qu'*un milieu cristallin est homogène, anisotrope, et jouit de propriétés vectorielles discontinues*. Ce qui caractérise en effet le milieu cristallisé homogène, c'est qu'il se limite et se clive suivant des plans de directions bien déterminées.

Un grain de fécule est anisotrope ; il n'est pas cristallisé.

Le milieu cristallin jouit aussi de propriétés vectorielles continues (propriétés optiques, par exemple) par lesquelles il est impossible de le distinguer des corps amorphes anisotropes. Un cristal cubique ne diffère pas optiquement d'un morceau de verre. On peut donner au verre identiquement les propriétés d'un biaxe.

On a découvert dans ces derniers temps des *cristaux mous* : ce sont de véritables cristaux, qui présentent exagérées des propriétés que l'on connaissait déjà chez les cristaux de plomb métallique et de sulfure d'argent.

On parle de *cristaux liquides* ; il serait plus judicieux de parler de *liquides anisotropes*. Nous reviendrons là-dessus au Chapitre XI.

La définition précédente du milieu cristallin n'implique aucune *théorie de la structure*. On ne peut pas en conclure que le milieu possède nécessairement la structure réticulaire.

**141. Cristaux, détermination du système.** — On appelle *cristal* une portion du milieu cristallin limitée par des faces planes formées spontanément. Des faces artificiellement taillées dans un milieu cristallin ne font pas un cristal.

*L'expérience prouve que les cristaux appartiennent à l'un des sept*

systèmes et à l'une des trente-deux classes précédemment énumérées. Cela ne veut pas dire qu'ils se présentent sous l'aspect de solides ayant la symétrie d'une des trente-deux classes. Cela veut dire simplement que le double faisceau de plans et d'arêtes, menés par un point parallèlement aux faces réelles d'un cristal et à ses arêtes, présente la symétrie d'une des trente-deux classes.

Le milieu cristallin auquel appartient le cristal est en effet *indéfini par essence*. Il se limite par des faces planes dont l'orientation est seule déterminée : *la position de ces faces ne l'est pas*.

On peut appeler *faisceau partiel* (§ 70) l'ensemble des plans :

$$q \frac{x}{a} + r \frac{y}{b} + s \frac{z}{c} = 0, \quad (1)$$

et des arêtes :

$$\frac{x}{ma} = \frac{y}{nb} = \frac{z}{pc}, \quad (2)$$

qui appartiennent effectivement au cristal. Le faisceau *partiel* diffère du faisceau *complet* des faces possibles en ce que les entiers  $q, r, s, m, n, p$ , sont inférieurs à une certaine limite  $L$  et que, même au-dessous de cette limite, toutes les combinaisons acceptables ne se présentent pas nécessairement.

Mais si les faces d'un cristal sont inégalement développées, leurs orientations relatives (c'est-à-dire la valeur des angles dièdres) suffisent pour déterminer le système cristallin. Entrons dans quelques détails.

**142. Mesure des angles.** — La mesure des angles dièdres se fait *en principe* par la méthode décrite au § 236 du Cours de Première. Le dièdre est fixé sur la platine d'un goniomètre de manière que son arête passe à peu près par l'axe de rotation de cette platine, et par conséquent de la lunette d'observation.

Le collimateur et la lunette faisant un angle *invariable* quelconque, on détermine les deux azimuts de la platine pour lesquels l'image de la fente du collimateur, après réflexion sur une face du cristal, coïncide avec l'un des fils du réticule de la lunette. Pour passer de l'un à l'autre azimut, il faut tourner la platine du supplément de l'angle à mesurer. En effet, la réflexion a lieu pour le premier azimut sur l'une des faces, pour le second sur l'autre face du dièdre étudié; l'angle dont il faut tourner le cristal, amène donc la seconde face dans le plan d'abord occupé par la première.

Ce procédé de haute précision n'est presque jamais employé.

C'est que les faces d'un cristal sont loin d'être des miroirs parfaits. Elles sont souvent de très petites dimensions. Elles présentent souvent des irrégularités, des stries : les faces du prisme hexagonal de quartz sont, par exemple, striées perpendiculairement à l'axe principal; la tourmaline (ternaire) est striée parallèlement à cet axe.

Les faces sont souvent courbes (diamant, gypse).

Enfin, et c'est un fait remarquable, les angles des cristaux cristallographiquement les plus beaux ne sont les mêmes d'un échantillon à l'autre ou d'un angle à son homologue qu'avec une tolérance souvent énorme. Il faut entendre par là que, mesurant, avec toute la précision possible, le même dièdre sur une série d'échantillons, ou les dièdres homologues d'un échantillon, on trouve des résultats qui peuvent différer de plus de dix minutes.

Pour toutes ces raisons, une précision extrême est illusoire; l'emploi du goniomètre ordinaire, toujours inutile, est dans bien des cas absolument impossible.

On utilise un appareil plus simple dit *goniomètre de Wollaston*, dont le principe est d'ailleurs le même.

Supposons la direction visuelle fixée par une mire T lointaine. Si la mire est à 5 mètres, un déplacement de l'œil de  $1^{\text{mm}},5$  correspond à une variation d'angle d'une minute. Disposons le cristal sur un axe horizontal dont les azimuts sont repérables; plaçons l'œil tout près. Amenons en coïncidence sur la rétine l'image de la mire T vue directement et l'image d'une seconde mire T' vue par réflexion sur une des faces du dièdre; lisons l'azimut de l'axe. Amenons en coïncidence l'image de T vue directement et celle de T' vue par réflexion sur l'autre face du dièdre; lisons le nouvel azimut.

L'angle dièdre à mesurer est le supplément de la différence des azimuts.

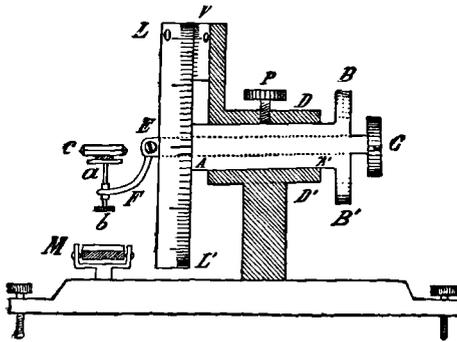


Fig. 131.

L'appareil est représenté en coupe figure 131.

Le cristal C se fixe avec un peu de cire sur une plateforme *ab* qui glisse à frottement dans un genou F articulé sur l'axe EC. Cet axe passe à frottement dans une pièce B solidaire d'un limbe gradué L, dont on lit l'azimut au moyen du vernier V. La mire T' est une ligne horizontale éloignée

(barre d'une croisée, arête d'un toit, fente horizontale dans la cheminée métallique d'une lampe, ...); la mire T est la mire T' vue dans le miroir M.

Le cristal est réglé de manière que son arête soit parallèle à l'axe du cylindre EC. Il suffit pour cela que, *sans bouger l'œil*, on puisse faire coïncider T et T', T' étant vue successivement par réflexion sur les deux faces dont on détermine l'angle dièdre. On mesure l'angle avec le limbe L qu'on laisse en place pendant le réglage: d'où l'utilité d'un axe double.

Quand plusieurs faces sont en zone, le réglage, obtenu pour deux d'entre elles, est réalisé *ipso facto* pour toutes les autres. Sans faire aucune mesure d'angle, on vérifie donc l'existence d'une zone (§ 51).

**143. Choix du système et de la forme primitive.** — La distribution des faces indique la symétrie, et par conséquent le système. Mais, sauf dans le système cubique, connaître le système est loin de résoudre le problème complet.

Même dans le système cubique, il faut encore déterminer le mode.

Pour les autres systèmes, il faut choisir deux ou plusieurs paramètres (§ 43).

Dans les systèmes sénaire, quaternaire et ternaire, il n'existe que deux paramètres distincts, dont l'un peut être pris pour unité;

dans le système orthorhombique, trois paramètres, dont un peut être pris égal à l'unité;

dans le système clinorhombique, un angle et trois paramètres linéaires, dont un peut être pris égal à l'unité;

dans le système asymétrique, deux angles et trois paramètres linéaires, dont un peut être pris égal à l'unité.

Enfin, dans tous ces systèmes, il faut encore déterminer le mode.

Comment se décider dans le choix de ces paramètres angulaires ou linéaires, ou, ce qui revient au même, quelle forme primitive choisir parmi toutes celles, *en nombre infini*, qui sont théoriquement possibles pour le même cristal?

On dit souvent, après Haüy, que ce choix doit être fait de manière que les indices de toutes les faces soient simples, les indices des plus importantes (les plus fréquentes et les plus développées) étant les plus simples.

L'application d'une telle règle laisse une large part à l'arbitraire, puisque les Cristallographes ne sont pas d'accord sur les symboles des faces, et que la même face, de notation simple pour un auteur, offre souvent une notation beaucoup plus complexe avec le système d'un autre auteur.

Dans un grand nombre de cas, les caractéristiques de faces très différentes sont les mêmes dans un ordre différent : la règle du maximum de simplicité de ces caractéristiques perd toute signification. Enfin les caractéristiques ne nous renseignent pas sur le mode du réseau.

**144. Loi de Bravais.** — Bravais a remplacé la règle vague de la simplicité des caractéristiques par la règle suivante.

*Les faces les plus importantes sont celles dont les densités réticulaires sont les plus grandes, ou, si l'on veut, celles dont les mailles planes ont les moindres aires.* Le choix de la forme primitive et des paramètres linéaires sera donc le meilleur, lorsque la liste des faces ayant les moindres aires coïncidera avec la liste des faces les plus

fréquentes, les plus développées et, comme nous verrons plus loin, des faces suivant lesquelles le cristal se clive le plus aisément.

Nous savons que les faces à grandes densités réticulaires sont les plus éloignées de leurs limitrophes : rien d'étonnant à ce que leur cohésion tangentielle soit grande, leur cohésion normale petite (§ 52).

Cette règle donne simultanément la forme primitive la meilleure et le mode.

Considérons, par exemple, le système cubique où les angles sont connus à l'avance.

Calculons les aires des faces des diverses formes dans les divers modes; nous obtenons le tableau suivant où  $S^2$  représente le carré de l'aire.

Mode hexaédral	$p$	$b^1$	$a^1$	$b^2$	$a^2$	$a^{1/2}$	$b^3$ .
$S^2$	1	2	3	5	6	9	10.
Mode octaédral	$a^1$	$p$	$b^1$	$a^3$	$a^{1/3}$	$b^2$	$a^2$ .
$S^2$	3	4	8	11	19	20	24.
Mode dodécaédral	$b^1$	$p$	$a^2$	$b^3$	$a^1$	$a^3$	$b^2$ .
$S^2$	2	4	6	10	12	18	20.

Si nous trouvons un cristal comme le *sel gemme* dont les faces, rangées dans l'ordre d'importance décroissante, sont  $p$ ,  $b^1$ ,  $a^1$ , ..., nous le placerons dans le mode hexaédral.

D'une manière générale, le premier mode est caractérisé par la fréquence du cube, le second par la fréquence de l'octaèdre, le troisième par la fréquence du dodécaèdre rhomboïdal.

Naturellement le choix est plus compliqué dans les autres systèmes, mais le principe reste le même.

Considérons, par exemple, le système ternaire; calculons les aires des faces. Nous trouvons que le rhomboèdre  $e^{1/2}$  qui donne une pyramide hexagonale avec le primitif  $p$ , n'a qu'une importance très faible. Nous concluons que le quartz, où ces deux formes seraient toujours associées *si on le considérait comme du système ternaire*, est en réalité tétrartoèdre du système sénaire. Son réseau est sénaire; c'est le remplissage de la maille qui enlève à l'édifice des éléments de symétrie.

Il est infiniment remarquable que, par un choix convenable des paramètres, on fasse coïncider le classement d'importance avec le classement des aires.

**145. Variabilité des formes.** — La loi de Bravais ne saurait avoir une rigueur mathématique, ne serait-ce qu'à cause de la variabilité des formes cristallines. On connaît l'influence des impuretés contenues dans les eaux mères. Rappelons les exemples classiques.

L'alun cubique cristallise dans une eau mère *pure* en octaèdres

présentant comme facettes peu développées les faces du dodécaèdre rhomboïdal.

A l'eau mère pure on ajoute du phosphate ou du nitrate de sodium : les facettes disparaissent.

A l'eau mère pure on ajoute de l'acide nitrique : l'alun cristallise en cuboctaèdres (cube avec des faces de l'octaèdre peu développées).

On ajoute de l'acide chlorhydrique : on obtient des cuboctaèdres avec des faces du dodécaèdre pentagonal (forme hémihédre).

On connaît un nombre infini d'observations analogues. Par exemple, le sel marin cristallise ordinairement en cubes ; mais dans l'urine, il donne des octaèdres.

En général cependant les modifications se bornent à l'apparition de facettes d'importance secondaire, de sorte que la loi de Bravais subsiste dans son ensemble.

**146. Pseudosymétrie et mériédrie.** — Si le réseau détermine absolument la disposition des faces, et par conséquent la symétrie du cristal supposé parfait (abstraction faite du nombre des faces existant simultanément et à ne considérer que leurs angles), il ne détermine pas la symétrie de la matière cristalline. A la rigueur, une matière anorthique peut se disposer en un réseau cubique.

On dit alors qu'il y a mériédrie.

Certaines mériédries exigent une symétrie bien déterminée pour le réseau ; c'est même à ces cas non douteux qu'on réserve généralement le titre de mériédries.

Quant aux mériédries plus générales, il est quasiment impossible de savoir si on a affaire à une véritable mériédrie ou à une pseudosymétrie (§ 162).

Par exemple, nous trouvons un cristal que les phénomènes optiques indiquent nettement du système orthorhombique ; l'ellipsoïde des indices possède trois axes inégaux. Nous mesurons les angles des faces et nous trouvons que le réseau est quaternaire ; la maille est un prisme droit à base carrée. *Comme les mesures sont toujours entachées d'une erreur*, nous pouvons conclure de deux manières aussi légitimes l'une que l'autre : ou nous dirons que le réseau est *rigoureusement quaternaire*, le cristal sera donc mériédre ; ou nous dirons que le réseau est *pseudo-quaternaire*, qu'il possède une pseudosymétrie supérieure à celle qui est nécessitée par ses propriétés physiques. Il va de soi que la seconde conclusion est plus prudente que la première.

Tel est le cas limite. Le plus souvent la pseudo-symétrie n'est pas tellement approchée qu'il soit difficile de déterminer la véritable symétrie du réseau. La pseudo-symétrie n'en a pas moins une importance considérable, comme permettant les groupements, les macles,

à peu près dans les mêmes conditions que la mériédrie vraie, ainsi que nous le verrons au Chapitre suivant.

**147. Cristallisation à partir d'une dissolution.** — La cristallisation peut avoir lieu quand le corps passe à l'état solide soit à partir de l'état gazeux, soit à partir de l'état liquide, soit enfin à partir de l'état dissous. Nous n'étudierons avec quelque détail que le troisième procédé, qui est le plus usuel.

Pour que la cristallisation se fasse régulièrement, il faut qu'elle soit lente. Or, si nous laissons une dissolution se concentrer soit par refroidissement, soit par évaporation, il est quasiment impossible d'éviter la sursaturation. Quand alors la cristallisation commence, elle est rapide et confuse. Aussi est-il bon de prendre un des petits cristaux formés et de le porter dans une autre dissolution (eau mère) juste saturée. La cristallisation se fait alors presque uniquement autour du petit cristal servant de germe; il s'accroît rapidement et régulièrement : *il se nourrit*.

#### CICATRISATION.

Les cristaux *se cicatrisent* en ce sens que toute modification, toute blessure imposée à un cristal tend à disparaître tout d'abord, lorsqu'on le remet dans son eau mère. Un travail plus actif s'accomplit sur la face irrégulière artificiellement créée; les faces naturelles qui correspondent à l'eau mère (§ 143) reparaissent rapidement. Le cristal se nourrit ensuite régulièrement.

Ainsi des tronçatures artificielles sur les angles ou sur les arêtes disparaissent très vite.

Pour obtenir de gros cristaux réguliers (au moins comme forme extérieure, car il est quasiment impossible d'obtenir de gros cristaux optiquement réguliers), on supprime de temps en temps les excroissances à la lime ou au couteau. Les faces artificielles ainsi produites, étant à peu près des faces naturelles, le redeviennent promptement d'une manière presque rigoureuse.

**148. Exemple du bimalate d'ammoniaque.** — Pasteur a fait une étude approfondie de la cristallisation du bimalate d'ammoniaque; elle peut servir de type (conférer §§ 113 et 114).

Le bimalate cristallise dans le système orthorhombique. Il présente habituellement très développées les faces  $g^1$ ; les faces  $m$  et  $e^1$  leur servent de biseau. Un second biseau horizontal formé par  $e^2$  existe quelquefois. Enfin le cristal possède un clivage fibreux mais facile suivant la face  $p$ , par conséquent parallèle aux biseaux horizontaux. Des stries horizontales annoncent ce clivage.

Si on brise le cristal suivant le clivage DD et qu'on le replace dans son eau mère (préalablement transportée dans une pièce voisine un peu plus froide), on voit le biseau se reformer rapidement. La face

de clivage (horizontale dans la figure) montre presque immédiatement les faces du biseau sur ses bords; le cristal se développe donc normalement à elle. Les faces du biseau s'agrandissent et finalement se rejoignent.

Les choses se passent de même lorsqu'on abat un biseau par une face suivant  $h_1$ , à la lime, puisqu'il n'y a pas de clivage dans cette direction.

On peut faire une entaille suivant ABC. Sur BC perpendiculairement au clivage, un biseau se forme qui s'avance parallèlement à lui-même. Sur AB les choses se passent différemment; on voit partir des lames qui s'avancent par des bords irréguliers et se relient au biseau. La régularité s'établit à la fin quand la blessure va disparaître.

Ainsi la partie brisée se régénère avec une rapidité extrême et indépendamment du nourissage d'ensemble.

Le bimalate est actif en dissolution (§ 333). Mais il ne porte jamais de faces *plagiédres* (§ 364), indiquant son hémiedrie holoaxe, quand il se

forme dans l'eau. Si on nourrit des cristaux hémiedres en dissolution aqueuse, ils perdent bientôt leurs faces hémiedriques.

Celles-ci sont comme une *irrégularite* artificielle; elles deviennent rugueuses, chargées de parties saillantes et de parties creuses, et finissent par disparaître.

Les faces hémiedres apparaissent constamment (fig. 132) quand l'eau mère contient un peu des produits d'altération par la chaleur de ce même bimalate. Prenons un cristal qui ne les possède pas, usons-le à la lime de manière à obtenir des faces hémiedres *artificielles*; elles deviennent naturelles dans l'eau mère impure.

Les variations de composition de l'eau mère influent non seulement sur la nature des faces qui se forment, mais aussi sur les dimensions relatives du cristal, dans l'espèce, sur le rapport

$$\overline{DD} : \overline{EE}.$$

Il va de soi que la valeur de ce rapport est *crystallographiquement* quelconque et n'influe en rien sur les valeurs des angles des faces qui sont les seules données crystallographiques.

Il peut arriver que la blessure soit d'une forme telle qu'une face inhabituelle commence par apparaître qui disparaîtra par la suite, par exemple une face hémiedre dans une dissolution aqueuse pure.

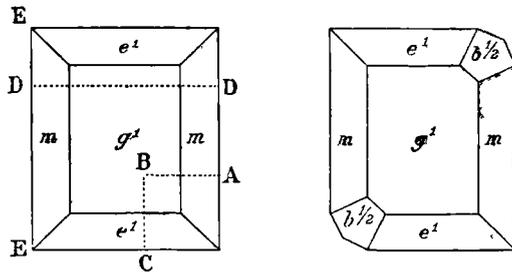


Fig. 132.

149. **Rôle de la tension superficielle.** — Nous avons admis (I, § 36) que l'existence d'une surface libre dans un liquide équivaut à une certaine quantité d'énergie potentielle, proportionnelle à l'aire de cette surface. De cette hypothèse se déduisent tous les phénomènes dits capillaires.

Plus loin (I, § 43), nous avons généralisé l'hypothèse pour les solides; rien n'empêche de généraliser pour les cristaux.

Un cristal est placé dans son eau mère. Il se dissout en certains points, détruisant ainsi une face  $\Sigma_1$ ; il se reconstruit en certains autres, produisant ainsi une face  $\Sigma_2$ , sans qu'en définitive son volume ait varié.

Arrangeons-nous de manière que la pesanteur ne travaille pas et que l'eau mère ne soit pas modifiée.

Le cristal restant par hypothèse homogène dans toute sa masse, seule son énergie potentielle de surface intervient pour produire le déplacement de matière.

Soit  $A_1$  la tension superficielle qui caractérise la face  $\Sigma_1$  d'aire  $S_1$ ,  $A_2$  la tension de la face  $\Sigma_2$ , ... La variation d'énergie potentielle est :

$$\Sigma \Delta(A_i S_i).$$

Pour que les déplacements de matière soient spontanés, il faut que les surfaces caractérisées par une grande énergie potentielle, par une grande tension, diminuent d'aire, au profit des surfaces de moindre énergie potentielle.

*Donc les faces les plus stables sont caractérisées par la petitesse de leur énergie potentielle.*

On déduit de ces principes une conséquence intéressante vérifiée par l'expérience. Plaçons dans une même eau mère des cristaux ayant la forme stable, mais de grosseurs différentes. Pour que l'énergie potentielle de l'ensemble soit minima, il faut que tous les cristaux soient réunis en un seul; c'est alors que, pour un volume déterminé et une forme déterminée, la surface est minima. Il faut donc que, dans une eau saturée, *les plus gros cristaux mangent les plus petits.*

C'est un exercice facile de calcul de se donner les constantes des faces de deux formes simples réunies en une forme composée et de calculer quelle doit être l'importance relative des aires de leurs faces. Il suffit d'exprimer que, pour un volume donné, l'énergie potentielle :  $A_1 S_1 + A_2 S_2$ , est minima.

Il résulte de cette théorie que le milieu peut intervenir en changeant d'une manière différente les tensions des diverses faces, de sorte que leur ordre d'importance soit modifié. C'est, en effet, la tension de la surface cristal-eau-mère qui intervient dans le raisonnement. Cette influence du milieu semble trop petite pour être démon-

trable. Les exemples du § 145 ne prouvent rien à cet égard : la modification des formes ne semble pas provenir de la cause ici étudiée.

**150. Figures de corrosion.** — Quand on attaque une face d'un cristal par un liquide, si l'action est suffisamment ménagée, des cavités très petites se creusent dont les faces sont des plans réticulaires *importants* et dont la section par le plan de la face attaquée (*figure de la corrosion*) est déterminée par la symétrie du cristal.

Les éléments qui déterminent la symétrie des figures de corrosion sont les plans et les axes de symétrie du cristal *normaux à la face attaquée* ; la trace de ces plans de symétrie est une droite de symétrie de la figure.

L'importance des figures de corrosion vient de ce qu'elles décèlent la symétrie réelle de la particule qui est souvent inférieure à celle du réseau. Par exemple, les figures de corrosion ne sont pas les mêmes sur les faces  $p$  et  $e^{1/2}$  de la pyramide qui termine les cristaux de quartz. Elles ne sont pas les mêmes sur toutes les faces  $e^2$  du prisme hexagonal : elles se reproduisent seulement de deux en deux faces. Ainsi sans recourir à l'existence des faces proprement hémédriques, on est assuré que l'axe principal de la *particule* du quartz est ternaire, tandis que le réseau du quartz est sénnaire (§ 144).

Les figures de corrosion des faces  $p$  d'un rhomboèdre de calcite ont une droite de symétrie ; c'est la trace des plans qui passent par une arête  $b$  et l'axe ternaire : ils sont normaux à la face  $p$  opposée.

Les figures de corrosion ne sont pas les mêmes pour les divers réactifs. Ainsi l'acide chlorhydrique et l'acide sulfurique étendus donnent sur les faces de clivage du spath des figures qui ont la même symétrie, mais qui n'ont pas la même forme.

Sur un plan  $a^1$  normal à l'axe ternaire, les figures de corrosion du spath ont la symétrie ternaire ; elles admettent de plus, comme droites de symétrie, les traces des trois plans de symétrie passant par cet axe.

**151. Inégalité dans la vitesse de dissolution.** — Un phénomène connexe du précédent est l'inégale rapidité avec laquelle les diverses faces d'un cristal se dissolvent. Pour étudier le phénomène, on fait tomber normalement à la face un jet du dissolvant. Dans quelques cas l'inégalité est telle que, si la réaction dégage des bulles, on peut juger immédiatement par leur abondance sur des faces différentes des activités inégales de la réaction.

D'une manière générale, toutes les sortes de décompositions (dégagement de vapeur d'eau par l'échauffement, dégagement de gaz par la dissociation, ...) peuvent servir à prouver la symétrie du cristal. Des figures très analogues aux figures de corrosion apparaissent, et la réaction peut n'avoir pas la même intensité pour toutes les faces.

**152. Faces de dissolution.** — Un cristal dont toutes les faces ont été supprimées et auquel on a donné, par exemple, une forme vaguement sphérique en l'usant avec une lime ou un couteau, reprend par *dissolution* la symétrie qui lui est propre.

Une *sphère* de calcite est plongée dans de l'acide azotique étendu; elle se transforme par dissolution en un scalénoèdre aplati qui devient lui-même un isoscéloèdre, solide limité par deux pyramides égales (§ 109).

En changeant le dissolvant, on modifie la forme obtenue. On la modifie aussi en remplaçant la sphère par un cylindre orienté par rapport aux directions cristallographiques de la substance étudiée.

Il doit exister un lien étroit entre les figures de corrosion et les faces de dissolution : plus précisément, les faces qui limitent les figures de corrosion sont les faces de dissolution. C'est ce que l'expérience vérifie. Comme conséquence également vérifiée, on prévoit qu'il n'existera pas de figure de corrosion pour un dissolvant, sur une face qui est de *dissolution* pour ce dissolvant.

**153. Figures d'efflorescence.** — Quand on chauffe lentement un cristal hydraté, l'eau commence à s'éliminer à partir de certains points P irrégulièrement distribués, *autour desquels se dessinent des taches régulières et en rapport avec la symétrie du milieu*; on les appelle *figures d'efflorescence*.

Les taches sont quelquefois elliptiques comme si, à partir du point P, la décomposition se propageait avec des vitesses inégales. Elles sont parfois circulaires. Mais les formes sont souvent plus compliquées. Elles sont, par exemple, quadrangulaires sur la face  $g^1$  du gypse chauffé à l'air; si le gypse est chauffé dans l'huile ou la glycérine, l'efflorescence se produit encore, mais avec formation d'aiguilles. On ne connaît rien de général : il suffit d'avoir signalé ces curieux phénomènes qui peuvent renseigner sur la symétrie du milieu.

**154. Clivages.** — Nous savons que les faces qui limitent un cristal sont des plans réticulaires dont la densité *en nœuds* est particulièrement grande. La cohésion *tangentielle* y est notable, la cohésion *normale* relativement faible. Nous devons prévoir que le cristal se *clivera* avec la plus grande facilité suivant ces plans.

Par raison de symétrie, si le cristal se clive suivant un plan, il se clive *aussi facilement* suivant tous les plans qui sont symétriquement équivalents (*plans homologues*). Ainsi la *calcite* (carbonate de chaux, spath d'Islande) cristallise en rhomboèdres  $p$ . Comme toutes les faces de ce solide sont identiques du point de vue de la symétrie, le clivage *est égal* suivant un système de trois plans parallèles aux faces de la forme primitive.

Au contraire, le *gypse* présente trois clivages *inégaux*. Il cristallise

dans le système clinorhombique. Le premier clivage *qui est parfait*, c'est-à-dire absolument net, a lieu suivant le plan  $g^1$  : grâce à lui, on obtient aisément le gypse en lames minces. Ces lames elles-mêmes peuvent se recouper suivant deux directions, car le gypse possède encore deux clivages moins parfaits suivant les plans  $p$  et  $h^1$  : on les désigne sous les noms de *clivage fibreux* ou *gras* et de *clivage vitreux* ou *sec*.

Comme le gypse est un corps usuel, il n'est pas inutile de donner quelques indications sur le bénéfice à tirer de ces clivages. Nous reviendrons plus loin sur les axes optiques. Pour le gypse, ils sont dans les lames déterminées par le clivage parfait. Leurs bissectrices sont les directions des vibrations que propagent sans déformation les ondes planes parallèles aux lames (Tome V, § 120). Il est donc intéressant de les retrouver en partant des clivages gras et vitreux.

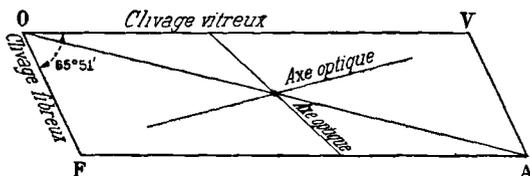


Fig. 133.

Ces clivages font un angle de  $65^{\circ} 51'$ . Traçons un parallélogramme ayant cet angle à l'un de ses sommets, ou, ce qui revient au même, dont les côtés  $OV$  et  $OF$  sont entre eux comme 360 et 111. La direction  $OA$  ainsi obtenue est bissectrice des axes optiques : c'est une des directions rectangulaires suivant lesquelles une vibration rectiligne est propagée sans déformation ; c'est l'une des sections principales de la lame de clivage.

Les micas sont clinorhombiques avec l'angle  $mm = 120^{\circ}$ . Aussi la coexistence des faces  $g^1$  avec les faces  $m$  leur donne-t-elle l'apparence hexagonale.

Ils ont un clivage remarquable suivant  $p$ .

Le sel gemme se clive aisément suivant les faces du cube, la fluo-rine parallèlement aux faces de l'octaèdre.

Le clivage permet non seulement de déterminer le système cristallin (c'est-à-dire la symétrie du réseau), mais encore son mode. Nous savons en effet que, suivant le mode, la densité réticulaire d'un plan de notation déterminée n'est pas la même.

**135. Dureté : anciennes définitions.** — Les définitions anciennes de la dureté reposent sur la rayure plus ou moins profonde que l'on obtient en déplaçant sur la face étudiée du cristal une pointe plus ou moins chargée.

La principale difficulté expérimentale consiste à mesurer la profondeur de la rayure. Disons tout de suite que les résultats numériques

ne concordent pas, ce qui n'empêche pas les résultats généraux de montrer la symétrie de la face étudiée.

Deux méthodes principales ont été préconisées.

1° On charge la pointe jusqu'à obtenir une rayure visible à la loupe ; on détermine la charge limite  $P$ .

2° On impose une charge  $P'$  notablement supérieure à  $P$  ; on détermine la perte de poids après un certain nombre de rayures de longueur donnée.

L'expérience faite sur la face étudiée pour une direction, on recommence pour d'autres directions.

On construit une courbe de dureté en prenant, à partir d'un point, des vecteurs parallèles aux directions étudiées et de longueurs mesurant la dureté définie par les nombres  $P$  ou  $P'$ . On trace une courbe pour chacune des faces du cristal.

Les résultats numériques concordent si peu, qu'il est inutile d'en transcrire. Voici quelques résultats généraux.

La dureté est la même pour toutes les directions cristallographiques égales d'une même face ou des faces de même espèce.

Il y a des relations intimes entre la dureté et le clivage. Si le cristal ne présente aucun clivage, ou ne présente que des clivages peu nets, la dureté varie peu avec la direction.

Pour les faces de clivage, la dureté est plus petite que pour les autres faces.

Pour une face  $F$  coupée par une face de clivage  $C$ , la dureté est

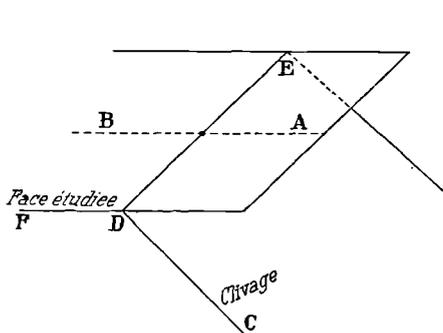


Fig. 134.

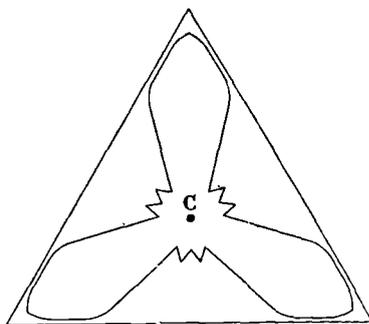


Fig. 135.

plus petite parallèlement à la trace  $ED$  que perpendiculairement suivant  $AB$ . Quand les faces  $C$  et  $F$  ne sont pas normales entre elles, la dureté est plus grande suivant  $AB$  que suivant  $BA$ . Cette expérience suffirait à prouver la relativité et la complexité de la définition : il est clair que dans le sens  $AB$ , la pointe glisse sur le clivage qu'elle accroche dans le sens  $BA$ . Pour comprendre ce qui se passe, il suffit de faire glisser une pointe obliquement sur la tranche d'un livre.

Les courbes de dureté ont les formes les plus singulières, mais toujours en relation avec la symétrie du cristal. Celle que nous donnons comme exemple, se rapporte à la section d'un rhomboèdre de calcite par un plan perpendiculaire à l'axe ternaire. Les duretés dans les diverses directions sont proportionnelles aux vecteurs menés du point C à la courbe.

**156. Dureté : définition de Hertz.** — Il est clair que les définitions de la dureté à partir de la rayure n'ont aucune prétention théorique. Hertz a voulu leur substituer une dureté théorique qui serait *la limite d'élasticité correspondant à la pression statique exercée sur une surface plane du corps par une sphère de même nature et de rayon déterminé.*

Mais l'étude de la manière suivant laquelle un solide se brise ou se déforme d'une façon permanente, prouve qu'une telle définition ne donnera rien en pratique. A lire la définition de Hertz, il semble qu'on sache ce qu'est la limite d'élasticité, alors qu'en fait on n'en possède aucune définition expérimentale. Les physiciens qui ont utilisé la définition de Hertz ont publié des nombres, parce qu'on trouve toujours des nombres; mais ils ne signifient rien.

Aussi bien cette définition de la dureté est indépendante de la direction; chaque face est caractérisée par un seul nombre: en ce sens elle est moins intéressante que la première.

Leurs valeurs théoriques sont égales, c'est-à-dire nulles.

### Formation et accroissement des cristaux.

Nous avons principalement étudié dans ce qui précède les cristaux *macroscopiques*. Mais beaucoup de forces qui agissent considérablement sur les cristaux *microscopiques*, et surtout au moment de leur formation, sont quasiment sans effet sur les gros cristaux. Nous devons revenir succinctement sur la formation et l'accroissement des cristaux à partir du germe initial.

**157. Globulites; théorie embryonnaire.** — Rappelons d'abord une théorie qui a été fort en honneur, la *théorie embryonnaire* de Vogelsang.

Voici l'expérience fondamentale qui fixera les idées.

On ajoute à du baume du Canada du sulfure de carbone; on obtient ainsi un liquide limpide et sans grande viscosité. On dissout du soufre dans le mélange. On prend une gouttelette à l'aide d'une baguette de verre et on la dépose sur un porte-objet de microscope. On observe avec un grossissement de 200 diamètres.

Le sulfure de carbone s'évapore et le soufre se solidifie. Le baume

joue le rôle *d'agent de résistance*, suivant l'expression même de Vogelsang.

Sous le microscope apparaissent, au bord de la goutte, de petites sphères de soufre qui se dirigent vers le centre : ce sont les *globulites*. Elles ne sont pas formées de soufre pur ; on peut les regarder comme une phase liquide, *dissolution sursaturée de sulfure de carbone dans le soufre*. Elles obéissent tout naturellement à la tension superficielle et se réunissent aisément *si elles sont très petites*. Plus grosses, elles se juxtaposent et s'alignent ; mais la réunion ne se produit plus nécessairement. Peu à peu le reste du sulfure s'échappe ; mais le milieu oppose aux changements de forme une résistance telle, que le soufre se solidifie définitivement à l'état de globules transparents et isotropes.

Les globulites sont donc de petits corps homogènes sphériques ou ellipsoïdaux primitivement liquides, grâce à un reste du solvant initial, devenant solides par perte de ce solvant, pouvant s'attirer, se réunir et former des groupements symétriques.

Quand ces groupements ne constituent pas un polyèdre convexe symétrique, on a des *crystallites*. On observe, par exemple, des séries de globules simulant des colliers de perles, ou encore une arborescence. Les *crystallites* prennent parfois une forme allongée sans montrer de contours polyédriques : ce sont les *longulites*. Enfin ils peuvent donner des *tables*.

Tous ces faits semblent incontestables et assez généraux. On en a tiré une théorie embryonnaire, ce qui est excessif. Une substance dissoute précipite en cristaux d'autant plus anormaux qu'elle est moins soluble, que la cristallisation est plus rapide, que la solution est plus visqueuse et de volume moindre. Or l'adjonction du baume du Canada, ou de tout autre *agent de résistance*, enlève précisément aux expériences toute prétention à représenter la cristallisation *type*.

**158. Cristallisation type.** — Pour obtenir la cristallisation *type*, il faut éliminer toutes les causes de trouble ci-dessus énumérées.

On constate alors au moyen du microscope, et en photographiant les apparences avec des poses très courtes et très rapprochées, que les cristaux présentent dès le début une forme polyédrique nette, sinon identique à la forme macroscopique, du moins possédant les mêmes éléments de symétrie.

La cristallisation se fait avec une vitesse d'abord énorme et peu à peu décroissante ; ce qui explique le peu de netteté des cristaux les plus petits, cristaux dont l'ordre de grandeur est de quelques microns. Cependant à aucun instant ils n'apparaissent comme des sphères ; leur aspect polyédrique est incontestable.

**159. Squelettes.** — On appelle *squelette* un groupement d'éléments cristallisés défini de la manière suivante. Imaginons un cristal

*unique et homogène*, de taille relativement grande, qui se dépouillerait de manière à ne plus être un polyèdre convexe, et qui en s'évidant conserverait sa symétrie : il fournirait un squelette. Bien entendu, ce n'est pas par ce procédé de démolition que le squelette se construit; nous voulons seulement dire que les molécules constituantes se disposent comme elles le seraient dans l'individu homogène qui nous sert à le définir.

Le type des squelettes est fourni par les étoiles de neige. Elles ont souvent plusieurs dixièmes de millimètre de diamètre, *tout en restant rigoureusement symétriques avec des formes (de symétrie sénaire) infiniment complexes*. On énonce seulement le résultat de l'expérience en disant que les forces de cristallisation (quelles qu'elles soient) agissent à des distances relativement considérables; elles forment en effet un édifice complexe curieusement évidé et dont les parties se correspondent et semblent s'équilibrer. Les formes différentes des étoiles de neige se comptent par centaines.

Le cas de la neige est loin d'être une exception; le sel ammoniac, le chlorure de nickel, l'iodoforme, etc., donnent de beaux squelettes, très réguliers et de grandes dimensions.

Le plus souvent les squelettes n'ont pas *dans leur ensemble* la symétrie des éléments; mais ceux-ci sont cependant disposés comme ils le seraient dans un individu unique homogène.

On obtient de curieux exemples par l'électrolyse des sels métalliques.

Si la cristallisation continue, le squelette devient un cristal régulier. Des matériaux comblent les vides. Mais on distingue le plus souvent le cristal complété d'un cristal qui se serait accru par couches successives, grâce aux *inclusions liquides* qui correspondent à des cavités non remplies par la matière cristalline.

**160. Trichites; arborescences.** — Il existe à l'intérieur de la dissolution mère des courants qui proviennent de deux causes : différences de température, différences de concentration. Ils peuvent même donner lieu à de véritables tourbillons. On conçoit qu'ils aient une influence énorme sur le développement et les associations de très petits cristaux.

En fait on observe des arborescences extrêmement curieuses, des cristaux vermiculés (trichites), des cristaux contournés de la manière la plus bizarre et *en un sens* la plus régulière.

Ces arborescences diffèrent absolument des squelettes. Elles ne peuvent plus être considérées comme obtenues en évidant un individu unique homogène : ce sont des associations de petits individus avec rotations et déplacements réguliers de leurs éléments de symétrie.

Naturellement il est très difficile de reproduire à coup sûr ces apparences, tant leurs causes sont complexes et encore inconnues.

Par exemple, une solution chaude, saturée, de nitrate de plomb et contenant du bleu de méthylène, a abandonné par refroidissement des fils de deux centimètres de longueur et de  $5\mu$  de diamètre.

**161. Sphéro-cristaux.** — On appelle *sphéro-cristaux* une association de petits cristaux (généralement de trichites) autour d'un centre, constituant un agrégat de forme vaguement sphérique.

La constitution des sphéro-cristaux est très variable.

Dans les cas les plus usuels, les éléments cristallins qui sont alors des filaments, se disposent à partir du centre suivant les rayons, constituant une sorte de macle analogue à celle des grenats (§ 162), mais beaucoup moins régulière et composée d'individus infiniment plus nombreux.

*En lumière parallèle*, entre deux nicols croisés, ces sphéro-cristaux donnent une croix noire. On en comprend la raison. Après son passage dans l'agrégat, la lumière reste par raison de symétrie rectilignement polarisée pour deux plans rectangulaires, l'un parallèle, l'autre normal à la vibration primitive; d'où l'extinction entre nicols croisés. Hors de ces plans les vibrations rectilignes incidentes sont transformées en vibrations elliptiques, ou plutôt, vu l'irrégularité du sphéro-cristal, sont partiellement dépolarisées (V, § 169) : l'extinction n'est plus complète.

L'oxalate de chaux, cristallisant en dehors de l'organisme dans un liquide épais, reproduit les sphéro-cristaux qui sont visibles dans les cellules et qui possèdent la constitution précédente.

L'inuline est une substance de même composition que l'amidon. Elle est en dissolution dans le suc cellulaire. Précipitée, elle cristallise en sphéro-cristaux dont on distingue souvent la constitution rayonnée. Un sphéro-cristal peut même envahir plusieurs cellules : l'action des formes moléculaires n'est donc pas empêchée par l'interposition d'une membrane. Les sphéro-cristaux d'inuline donnent la croix noire en lumière parallèle, entre nicols à l'extinction.

Les sphéro-cristaux rayonnés ne sont pas les seuls que l'on connaisse ; on est souvent forcé de leur attribuer une constitution encore plus complexe ; mais l'étendue de cet ouvrage nous interdit d'insister.

## CHAPITRE II

### GROUPEMENTS ET MÉLANGES

Dans ce Chapitre, nous ferons les plus larges emprunts aux beaux travaux de G. Friedel. Ils sont résumés dans un livre sur les *Grouperments cristallins*, où l'auteur s'élève avec raison contre les théories générales de Wallerant. Si, à première vue, les macles semblent n'avoir d'intérêt que pour le minéralogiste, le physicien s'apercevra bientôt qu'il lui est impossible d'aborder les phénomènes du polymorphisme et de l'isomorphisme, sans être initié au problème général des groupements cristallins.

**162. Macles par mériédries proprement dites.** — Supposons que le milieu cristallin n'ait pas la symétrie du réseau, mais possède une de ces symétries inférieures, suffisamment voisines pour imposer une certaine symétrie au réseau. Il y a *mériédrie proprement dite* (§ 146).

Dire qu'il y a mériédrie revient à dire que la maille *avec son remplissage* a une symétrie inférieure à celle de la maille *sans son remplissage*.

Dans ce qui suit, par *maille*, il faut entendre *maille avec son remplissage*.

Construisons maintenant l'édifice en nous servant de l'une des deux mailles conjuguées s'il s'agit d'hémiédrie, de l'une des quatre mailles conjuguées s'il s'agit de té tartoédrie. Nous obtenons ainsi deux ou quatre édifices différents, correspondant exactement au même réseau, *réseau auquel nous pouvons supposer la même orientation absolue dans l'espace*. Suivant la nature de la mériédrie, les mailles conjuguées peuvent être ou n'être pas superposables : il importe peu pour ce qui suit.

*L'expérience montre que non seulement on peut construire deux ou quatre édifices stables de réseaux identiques, en utilisant constamment l'une des mailles conjuguées, mais que la stabilité subsiste si, dans le cours de la construction, on substitue une maille à une autre.*

Or, si ces mailles ont même forme extérieure et par hypothèse même orientation dans l'édifice, leurs remplissages ne sont pas identiques ; ils sont seulement symétriques par rapport aux éléments de symétrie qui appartiennent au réseau sans appartenir à la matière, ce qu'on appelle les *éléments de symétrie déficients*.

Il résulte de la règle que nous venons d'énoncer, qu'à partir d'une surface de forme quelconque, la nature des matériaux de construction du réseau peut changer brusquement. *Le milieu se continue sans interruption par le milieu conjugué, s'il est hémioèdre, par l'un de ses trois milieux conjugués s'il est tétraoèdre.*

La surface de discontinuité est quelconque : d'où le nom de *macles par pénétration* donné aux groupements que nous étudions.

Nous voici donc en possession d'un édifice indéfini dont le réseau est parfaitement continu, mais qui est divisé en plages contiguës correspondant aux diverses symétries conjuguées. Chacune de ces plages tend à se limiter extérieurement par des faces planes en relation avec le remplissage de sa maille. Nous verrons donc apparaître simultanément les faces qui correspondent à une même orientation du réseau, ainsi qu'à toutes les dispositions conjuguées de la maille.

Comme les divers remplissages de la maille sont symétriques par rapport aux éléments de symétrie qui appartiennent au réseau sans appartenir à la maille (*éléments déficients pour le remplissage de la maille*), il résulte que l'ensemble des faces qui limitent le milieu complexe correspond à la forme holoèdre.

163. **Exemples.** — Soit, par exemple, un corps cubique hémioèdre, de symétrie  $3\Lambda_2$ ,  $4L_3$ ,  $6P$ , dont la maille est cubique, et dont le remplissage peut être considéré comme tétraédrique. Nous

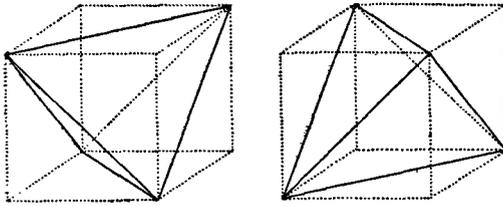


Fig. 136.

avons à notre disposition deux sortes de matériaux de construction (fig. 136). Ils sont identiques à l'orientation près ; mais nous leur pouvons donner deux orientations différentes. Nous pouvons donc construire, pour une orientation absolue donnée du réseau, deux milieux cristallins différents.

La règle d'observation énoncée au paragraphe précédent nous apprend que ces deux milieux peuvent se faire suite sans que la stabilité soit compromise. Il résulte de là un milieu complexe, limité par des faces extérieures dont l'ensemble appartient à la symétrie cubique holoèdre.

Effectivement le *diamant cubique hémimorphe* donne une macle avec pénétration complète de deux tétraèdres (fig. 137).

Le réseau du *quartz* est sénnaire ; mais son remplissage *tétartoèdre* a pour symétrie :  $\Lambda_2, 3L_2$ .

Généralement les cristaux présentent des formes non superposables affectant cette symétrie.

Mais des portions finies voisines du même réseau peuvent être construites avec des mailles sénnaires comme formes extérieures, mais *tétartoèdres* comme remplissages, circonstance grâce à laquelle l'ensemble des faces du cristal peut acquérir la symétrie sénnaire. Toutefois, si on découpe le cristal en lames minces, on vérifie que le pouvoir rotatoire est interverti quand on passe de certaines régions aux régions voisines, à travers des surfaces de discontinuité dont la forme est d'ailleurs quelconque.

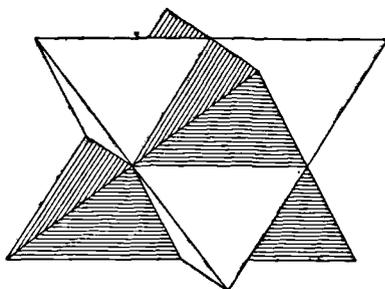


Fig. 137.

#### 164. Remarques. —

##### REMARQUE I.

On conçoit que les régions de l'édifice qui sont bâties avec une seule des mailles conjuguées, puissent être très petites. *A la limite*, un élément de volume, aussi petit qu'on voudra, contient le même nombre de mailles conjuguées. En particulier, s'il s'agit d'hémiédrie non superposable, la pénétration peut être assez intime pour que le pouvoir rotatoire disparaisse. Il y a compensation des pouvoirs rotatoires inverses, pour une traversée suivant l'axe même de peu de longueur.

Effectivement on connaît des quartz qui ne sont ni droits ni gauches : ils sont simplement uniaxes.

##### REMARQUE II.

Dans l'explication précédente, nous matérialisons en quelque sorte le réseau. On peut employer un langage un peu différent, exactement équivalent dans le cas de la mériédrie proprement dite, mais qui est plus commode pour les généralisations ultérieures.

Construisons deux ou quatre édifices en n'utilisant pour chacun d'eux qu'une seule des mailles conjuguées. Construisons un milieu par juxtaposition, après des rotations quelconques, des édifices obtenus. *Le milieu complexe est stable, si, à travers la surface de séparation des milieux constituants, un réseau de points homologues se continue exactement.*

On obtient précisément cette continuation *rigoureuse* d'un réseau, avec modification dans le remplissage, si le remplissage est mérièdre.

## REMARQUE III.

Nous disons qu'un réseau de points homologues doit se continuer exactement.

Il faut bien faire attention que si le cristal est homogène, il existe toujours une infinité de réseaux de points homologues qui se continuent exactement à travers une surface quelconque tracée dans le milieu; car il y a autant de réseaux *identiques mais translatés* qu'il y a de points dans le domaine complexe. Ce n'est plus vrai dans le cas d'une macle. Généralement il existe *plus comme se prolongeant exactement de part et d'autre de la surface de macle* que les réseaux qui correspondent à un nombre fini de points et à leurs homologues, nombre qui peut se réduire à l'unité.

Dans l'exemple cité plus haut, le réseau des centres de gravité des tétraèdres se continue exactement sans discontinuité.

**165. Macles par pseudo-mériédrie.** — Dans le cas des macles par mériédrie, la maille sans remplissage a une symétrie que ne possède pas le remplissage. L'expérience montre que des macles analogues aux précédentes se produisent quand la maille sans remplissage ne possède une symétrie supérieure à celle du remplissage que d'une manière approchée: il n'y a pas mériédrie rigoureuse, il y a seulement pseudo-mériédrie.

Avant d'entrer dans le détail du phénomène, donnons quelques exemples.

Le *grenat ouwarovite* cristallise en apparence dans le système cubique; l'expérience montre que le dodécaèdre rhomboïdal qui est sa forme dominante, se décompose en douze pyramides dont les sommets sont confondus avec le centre du cristal et dont les bases sont des lozanges. Les pyramides appartiennent au système *orthorhombique avec hémiedrie hémimorphe*. Les éléments de symétrie

sont :

$$L_2, P', P''.$$

La forme type est composée d'une pyramide ouverte ayant pour axe l'axe binaire, et d'une face rhombe normale à l'axe binaire. *Mais le réseau est très approximativement cubique*, l'axe subsistant réel de l'orthorhombe se confondant avec l'un des axes binaires du cube. On conçoit alors la possibilité d'association de douze pyramides se touchant par leurs pointes; elles forment six groupes symétriques par rapport au centre et correspondant chacune à l'un des axes binaires du cube.

La *staurotide* bien connue pour sa macle en croix, cristallise dans le système *orthorhombique*. Elle possède donc trois axes binaires. Mais l'axe binaire perpendiculaire à  $h_1$  est un axe *pseudo-quaternaire du réseau*. On conçoit qu'il puisse jouer dans les associations ce rôle

quaternaire et grouper quatre individus, donnant ainsi un polyèdre complexe ayant une symétrie quaternaire (fig. 138).

L'aragonite cristallise ordinairement dans le système *orthorhombique*. Mais le losange  $p$  de base a un angle  $a$  de  $116^\circ$ , voisin par conséquent de  $120^\circ$ . Le réseau est donc très sensiblement *sénaire*. L'axe binaire perpendiculaire à la face  $p$  est donc aussi à peu près ternaire.

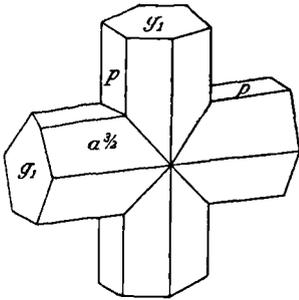


Fig. 138.

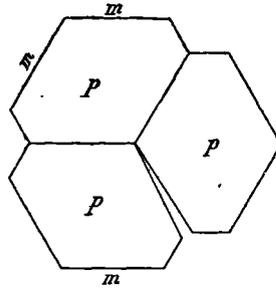


Fig. 139.

Les cristaux s'associeront trois par trois, autour d'une arête  $h$  commune, en se touchant suivant les faces  $m$ . Comme l'angle  $a$  n'est pas rigoureusement de  $120^\circ$ , il reste un vide d'environ  $12^\circ$  (fig. 139).

Dans tous ces exemples, *un même réseau se prolonge d'une manière approchée à travers tous les solides consécutifs du groupement*. Si les éléments de symétrie appartenaient rigoureusement au réseau, la prolongation serait parfaite; la prolongation approchée suffit pour créer un assemblage stable.

**166. Plan ou axe de macle.** — Revenons sur quelques détails importants de ces macles.

On peut dire que deux orientations d'un cristal pseudo-mérièdre, capables de se grouper, sont symétriques par rapport à un *plan réticulaire* qui est plan de pseudo-symétrie du réseau, ou ont tourné de  $2\pi : n$  autour d'une *rangée* qui est axe de pseudo-symétrie d'ordre  $n$  du réseau.

Par exemple, considérons un cristal triclinique et pseudo-monoclinique (fig. 140). Si le cristal était rigoureusement monoclinique, il existerait une rangée perpendiculaire à  $g^1$  située dans le plan  $p$  et qui serait un axe binaire; simultanément le plan réticulaire  $g^1$  serait plan de symétrie pour le milieu.

Par hypothèse, il n'en est pas tout à fait ainsi.

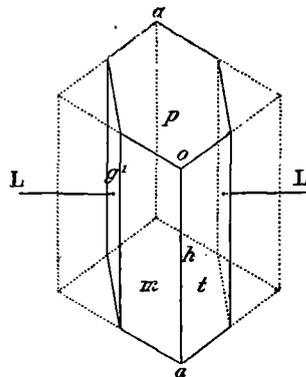


Fig. 140.

Rappelons qu'on prend dans le système triclinique  $h^1(100)$ ,  $g^1(010)$ ,  $p(001)$  comme plans de coordonnées. Autrement dit, les trois axes sont parallèles aux intersections  $pg^1$ ,  $ph^1$ ,  $g^1h^1$ . Il existe donc par hypothèse un axe de pseudo-symétrie binaire, qui est la rangée  $(010)$  trace de  $h^1$  sur  $p$ . Elle n'est pas exactement perpendiculaire à  $g^1$ .

On restitue donc à *peu près* le réseau, soit en prenant son symétrique par rapport à  $g^1$ , soit en lui faisant subir une transposition autour de  $L$  servant d'axe pseudo-binaire. Les deux opérations amènent le second cristal à *peu près* dans la même position absolue; elles ne l'amènent pas du tout dans la même position relativement au premier.

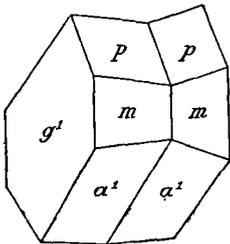


Fig. 141.

Quand on prend le cristal symétrique par rapport à  $g^1$ , cette face sert de plan d'accolement. On obtient, par exemple, la macle classique de l'albite (fig. 141).

Quand on se sert au contraire de l'axe pseudo-binaire qui est dans le plan  $p$ , celui-ci peut servir de surface d'accolement (macle du péricline,...). Mais toute autre face en zone avec  $p$  par rapport à l'arête  $(010)$  peut *a priori* jouer le même rôle.

En définitive, quand, dans la croissance du cristal, une nouvelle portion prend la position de macle définie par la condition fondamentale qu'un réseau se continue rigoureusement ou approximativement à travers tout l'édifice, elle conserve en commun avec l'ancien édifice qu'elle prolonge, soit un plan réticulaire (cas du plan de macle), soit une rangée (cas de l'axe de macle, voir plus haut l'exemple de l'aragonite).

**167. Nature de la surface d'accolement.** — Il faut donc, pour obtenir un édifice complexe stable, qu'un même réseau se prolonge (soit rigoureusement, soit approximativement) à travers la surface d'accolement. Nous avons déjà fait remarquer (§ 164, Remarque III) que le réseau dont il est ici parlé est construit à partir d'un point de la surface d'accolement, par exemple à partir du centre de gravité d'une maille située sur cette surface.

Dans les macles par méridrie rigoureuse, les réseaux se continuent absolument; il est indifférent de préciser à partir de quelle surface se fait le changement de maille.

Il n'en est plus de même pour les macles par pseudo-méridrie.

1° Supposons d'abord qu'il existe un plan  $P$  de macle. Il joue le rôle de plan de pseudo-symétrie par rapport aux deux réseaux; il est plan réticulaire possible de l'un et de l'autre. Assurément, de part et d'autre de ce plan, les rangées ne se continuent pas rigoureusement;

mais on passe des nœuds de l'un des réseaux aux nœuds de l'autre sans discontinuité parallèle à ce plan, à la seule condition qu'il serve de surface d'accolement.

C'est ce que montre immédiatement la figure 142. Supposons que la surface d'accolement coïncide avec le plan P pour les nœuds  $a$  et  $b$ , puis qu'elle s'écarte du plan P. Le réseau R se continue par ses nœuds  $c, d, \dots$ ; pour passer aux nœuds  $c', d', \dots$  du réseau R', nous rencontrons une discontinuité parallèlement à P. Les rangées qui se

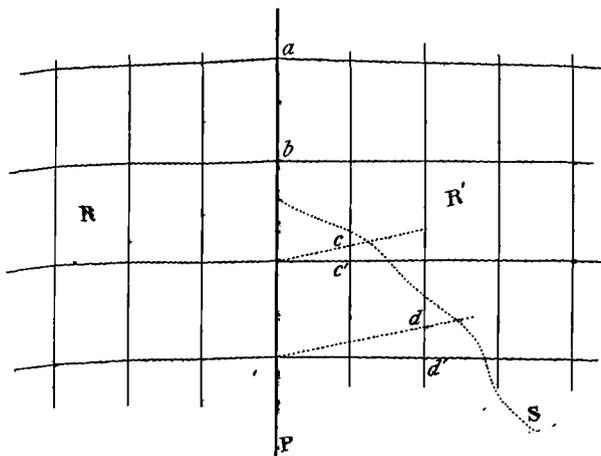


Fig. 142.

prolongent approximativement n'ont aucun nœud commun. D'où instabilité.

Conséquence : la surface d'accolement doit être le plan de pseudo-symétrie.

Cette conclusion est absolument nécessaire et rigoureusement vérifiée dans le cas des *macles répétées*, c'est-à-dire quand le changement d'orientation du réseau se fait un grand nombre de fois. On obtient ainsi des lamelles minces à *faces parallèles*; les lamelles paires et les lamelles impaires sont respectivement orientées de la même manière.

La conclusion est d'autant mieux vérifiée dans le cas général qu'on s'adresse à des cristaux plus petits. En grossissant, le développement peut devenir irrégulier sous l'action de causes nombreuses qui n'ont rien à voir avec la stabilité de la macle.

2° Supposons maintenant qu'il existe un axe de macle, c'est-à-dire une rangée possible des réseaux macles, jouant pour chacun d'eux le rôle d'axe de pseudo-symétrie. Aucun plan réticulaire ne lui est rigoureusement normal; mais il existe dans chaque réseau un plan qui lui est approximativement normal.

Pour éviter une discontinuité parallèle à l'axe dans le passage des

nœuds de l'un des réseaux aux nœuds les plus voisins de l'autre, il faut que l'axe soit *effectivement* une rangée commune aux divers réseaux maclés.

La surface d'accolement n'est pas nécessairement plane, mais elle doit passer par une droite parallèle à l'axe de macle : c'est donc un cylindre. Si elle est plane, rien ne l'oblige à être un plan réticulaire.

Tout ce qui précède résulte du principe général de moindre discontinuité dans le passage d'un individu à un autre individu de la macle.

**168. Macles par mériédrie ou pseudo-mériédrie réticulaire.** — Voici dans quelles conditions ces macles se produisent.

Il existe un plan de macle par mériédrie réticulaire, lorsqu'un plan réticulaire, sans être plan de symétrie du réseau, est exactement normal à une rangée ; il existe un axe de macle quand une rangée, sans être axe de symétrie du réseau, est exactement normale à un plan réticulaire.

Le plan ou l'axe de macle sont exactement plan ou axe de symétrie d'une maille multiple (§ 53).

Dans les macles par pseudo-mériédrie réticulaire, les conditions précédentes ne sont plus qu'approximativement réalisées.

Cette règle revient à cette autre règle : pour que l'édifice cristallin soit stable, il n'est pas nécessaire que le réseau le plus simple se prolonge dans tout l'édifice. Il suffit qu'il en soit ainsi pour un réseau multiple, c'est-à-dire pour un réseau déduit du réseau simple par suppression d'un certain nombre de nœuds suivant une loi systématique.

Un exemple fait immédiatement comprendre de quoi il s'agit.

Reportons-nous à la figure 44, qui représente les nœuds d'un réseau ternaire. Regardons suivant la direction MN, c'est-à-dire projetons sur le plan de symétrie *aaa*. Nous obtenons une figure telle que la moitié supérieure ou la moitié inférieure de la figure 143. Les nœuds *a* sont dans le plan de la figure, les nœuds *b* de part et d'autre de ce plan.

Le plan passant par *aba* (plan de la figure 44) n'est pas un plan de symétrie du réseau, car dans ce cas l'axe serait sénaire et non ternaire. Mais prenons le symétrique du réseau par rapport à ce plan ; nous obtenons précisément les deux réseaux de la figure 143.

Naturellement la maille *simple* de l'un ne se continue pas dans l'autre : cette maille est, en effet, le rhomboèdre dont la figure 143 montre les deux positions symétriques. On l'a figuré à droite après une légère rotation, pour bien montrer comment il est placé.

Mais il existe un réseau multiple (dont la maille est trois fois plus grosse que la maille simple ; elle contient deux nœuds à l'intérieur), qui se continue exactement de part et d'autre du plan P. Ce qui

revient au même, il existe une rangée exactement normale à ce plan P.

D'après la règle que nous avons énoncée, cela suffit pour que l'édifice complexe soit stable.

La macle dont nous venons de montrer la possibilité, se produit rigoureusement dans le système ternaire et par conséquent aussi dans

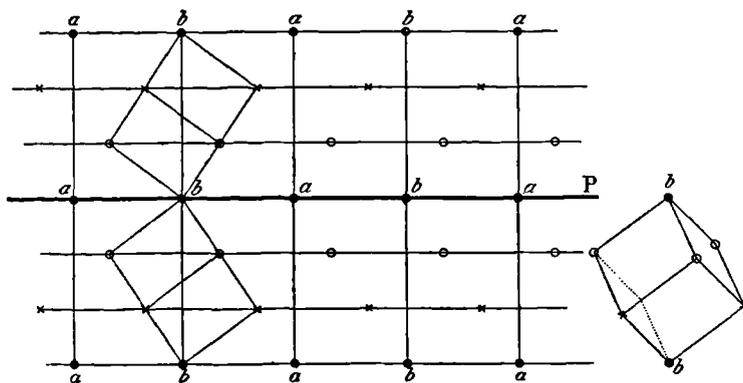


Fig. 143.

le système cubique, qui peut être considéré comme ternaire par rapport à quatre directions. Les axes deviennent sénaires dans la macle.

Par exemple, on rencontre dans la calcite des macles avec  $a^1$  comme plan de macle : l'axe binaire de macle est l'axe ternaire du cristal simple. Lorsque la macle porte sur le scalénoèdre, il en résulte un isoscéloèdre présentant des angles rentrants (fig. 144).

Telle est encore la macle des spinelles et de la magnétite. Le sys-

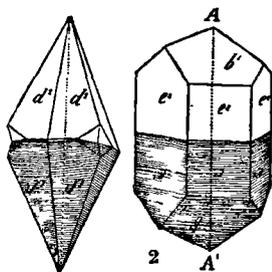


Fig. 144.

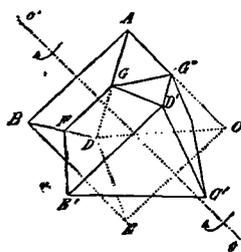


Fig. 145.

tème est cubique ; le plan de macle est une face de l'octaèdre  $a^1$  normale à l'axe ternaire (fig. 145).

Le plan de cet ouvrage nous empêche d'insister : nous en avons assez dit pour faire comprendre le principe général grâce auquel G. Friedel explique très heureusement la stabilité d'un système complexe.

169. **Mimésie (Mallard)**. — Les macles sont parfois nettement indiquées par la forme du groupement : il existe, par exemple, des angles rentrants, des gouttières, ... Mais il arrive que les macles simulent très exactement des cristaux de symétrie supérieure, d'où le nom de *mimésie* donné au phénomène. On doit l'étude capitale de cette propriété à Mallard, le continuateur des idées de Bravais.

L'exemple classique est fourni par les *grenats*. Ils paraissent cubiques ; cependant leurs propriétés optiques indiquent une symétrie très inférieure. Comme nous le verrons au § 276, en parlant des soi-disant *anomalies optiques*, on admet que les propriétés optiques décèlent toujours la véritable symétrie du milieu (et non pas celle du réseau). Donc le milieu n'est pas cubique.

En sectionnant des *grenats topazolites* (ferrico-calcaire jaune pâle,  $3\text{CaO}$ ,  $\text{Fe}^2\text{O}^3$ ,  $3\text{SiO}^2$ ), Mallard trouve qu'ils se décomposent en quarante-huit pyramides accolées, appartenant au système triclinique. Elles se disposent quatre par quatre, de manière à donner une pyramide à base rhombe ; douze de ces pyramides constituent le dodécaèdre rhomboïdal. A vrai dire, il s'agit à peine d'une macle, car les cristaux ne sont que juxtaposés.

Dans le grenat ouwarowite (chromico-calcaire,  $3\text{CaO}$ ,  $\text{Cr}^2\text{O}^3$ ,  $3\text{SiO}^2$ ), il n'y a plus que douze pyramides, appartenant au système orthorhombique. Rien n'empêche d'ailleurs de considérer ces cristaux orthorhombiques comme une macle intime, une polymorphie, à partir de cristaux de symétrie inférieure.

Nous allons montrer, en parlant de la polymorphie, l'importance de ce mimétisme.

### Polymorphisme, homéomorphisme, syncrystallisation.

170. **Polymorphisme et isomérisie**. — Deux corps de même composition centésimale peuvent ne pas posséder les mêmes propriétés physiques ; on dit qu'ils sont *polymorphes* ou que leurs états sont *allotropiques*. Par exemple, le phosphore rouge et le phosphore blanc. Réduits tous deux à l'état de vapeur, ils donnent exactement le même gaz ; dissous dans le même dissolvant, ils donnent la même dissolution : ils ne sont cependant pas identiques.

D'autre part, on appelle *corps isomères* des corps de même composition centésimale qui ont des propriétés physiques et des réactions chimiques différentes. Ils sont différents à l'état de vapeur et à l'état dissous comme ils le sont à l'état solide.

Il semble donc que la distinction entre l'isomérisie et le polymorphisme soit nette : ce serait cependant une erreur de le croire. En fait, elle ne réside que sur une idée préconçue.

L'idée d'isomérisie implique pour le chimiste des formules de cons-

titution différentes; l'idée de polymorphisme implique des formules de constitution identiques. Deux corps isomères ont par hypothèse des molécules chimiques dissemblables; deux corps polymorphes ont les mêmes molécules chimiques, mais formant des édifices différents. Comme on est très mal renseigné sur la molécule chimique des corps solides, la distinction est purement théorique et passablement arbitraire.

Le fait que les corps dits *polymorphes* à l'état solide donnent la même vapeur, ne prouve rien ni pour ni contre l'identité de la molécule chimique; car rien n'assure qu'elle ne se transforme pas en passant de l'état solide à l'état gazeux. Que d'ailleurs on attribue les divers états physiques à la diversité de la molécule chimique ou à tout autre cause, il importe assez peu pour notre objet. Toujours est-il que des corps de même composition et de propriétés très voisines peuvent se présenter sous diverses formes cristallines: étudions les relations entre ces formes.

**171. Transformations polymorphiques directes.** — La *transformation polymorphique directe* est caractérisée par un brusque changement des propriétés physiques, souvent réversible, à une température déterminée fonction de la pression; mais, et c'est là l'essentiel, *l'édifice cristallin n'est pas détruit*; le cristal est homogène et conserve, à une *petite déformation homogène* près (§ 179), la même forme extérieure.

Le système cristallin est changé, et pourtant les faces du premier cristal restent (avec ou sans déformation homogène) des plans réticulaires du réseau (faces possibles du second cristal).

Les réseaux des deux formes sont donc très approximativement des multiples l'un de l'autre (§ 53). D'ailleurs, si les faces du premier sont des faces *possibles* du second, ce sont généralement des faces peu importantes; par cristallisation directe, la seconde forme est ordinairement constituée par des faces différentes de celles qui résultent de la transformation. Ce qui est entièrement d'accord avec la loi de Bravais (§ 144).

Les réseaux sont généralement des multiples *simples* les uns des autres. Quand la déformation homogène est faible, ils ont entre eux les mêmes relations que les réseaux, en nombre souvent assez grand, qu'on peut attribuer à un cristal, pour satisfaire *sans plus* à la loi des indices rationnels.

L'explication de ces phénomènes est quasiment imposée.

Nous avons montré, au § 57, qu'un assemblage de particules matérielles douées d'éléments de symétrie peut déterminer plusieurs réseaux différents de points homologues, suivant les orientations relatives des particules dans l'espace. En particulier, nous avons trouvé que, par une simple rotation autour de leurs centres de gra-

tivité, des particules orthorhombiques convenablement disposées définissent soit un réseau ternaire, soit un réseau orthorhombique. Nous avons donc là l'image d'une transformation polymorphique directe, telle que celle qui changerait la calcite en aragonite, à supposer que l'opération directe soit possible.

La théorie très remarquable qui précède est due à G. Friedel, qui en fait honneur à Mallard, en quoi il me semble exagérer ce qu'il doit à son devancier. En tous cas, elle développe heureusement les idées de celui-ci.

**172. Relations entre le polymorphisme et les macles.** — Pour montrer les rapports entre le polymorphisme et les macles, nous ne pouvons mieux faire qu'étudier le cas célèbre de la *boracite* (Mallard).

C'est un borate de magnésie ( $6\text{MgO}, 8\text{BoO}_3 + \text{MgCl}_2$ ), qui est en apparence du système cubique et se rencontre généralement en dodécaèdres rhomboïdaux  $b^1$  (fig. 146), avec aussi les faces du cube  $p$  et du tétraèdre  $\frac{1}{2}a^1$ .

**MACLE.** — Une étude approfondie a montré que ces cristaux pseudo-cubiques sont en réalité formés de douze pyramides de symétrie orthorhombique antihémiédre ( $\Lambda_2, P', P''$ ), deux à deux opposées par les sommets, présentant par conséquent six orientations différentes.

A cause de l'hémiédrie, le cristal orthorhombique, dont les deux bouts sont différents, peut se présenter comme une simple pyramide quadrangulaire à base rhombe. Or il résulte de ce que le réseau est quasi cubique, que douze de ces pyramides s'accollent autour de leur sommet pour donner le dodécaèdre rhomboïdal.

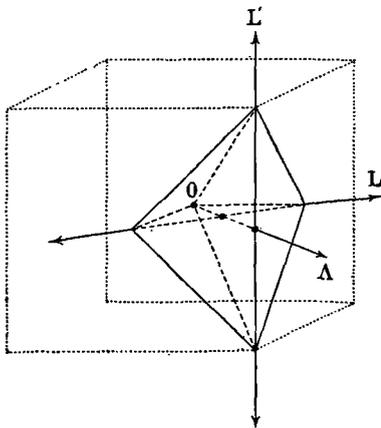


Fig. 146.

Les arêtes de chaque pyramide sont (fig. 146) deux axes ternaires et deux axes quaternaires du cube. L'un des axes binaires  $\Lambda$  du réseau orthorhombique coïncide avec un axe binaire du cube; il en est de même de l'axe binaire  $L$ . Enfin l'axe binaire  $L'$  du réseau orthorhombique coïncide avec un axe quaternaire du cube.

C'est donc la face perpendiculaire à  $\Lambda$  qui limite le dodécaèdre rhomboïdal  $b^1$ .

L'axe binaire  $\Lambda$  est la bissectrice aiguë des axes optiques qui sont

dans le plan  $\Lambda L$  (passant par la grande diagonale du rhombe de base dans le dodécaèdre romboïdal).

Dans le système de notations adopté pour le prisme orthorhombique, l'axe  $\Lambda$  est parallèle à la petite diagonale du rhombe. Les faces du pseudo-cube sont notées  $e^1$ , celles du pseudo-octaèdre  $a^1$ , celles qui limitent les pyramides intérieures  $b^{1/2}$ .

POLYMORPHISME.

Chauffons à  $265^\circ$ . La boracite subit une transformation directe réversible et devient isotrope; comme il sied à une transformation directe, il n'y a pas déplacement, sensible de matière, et la symétrie extérieure reste la même.

Les plans réticulaires restent les mêmes; mais le nouveau réseau est un multiple de l'ancien.

On peut aisément imaginer une représentation du phénomène.

Supposons des particules matérielles orthorhombiques dont les centres de gravité sont disposés suivant un réseau cubique: *c'est le réseau matériel*. Si les particules sont toutes parallèles entre elles, le réseau des points *homologues* (réseau cristallographique déterminant la période de translation) est identique au réseau matériel. Le réseau a beau être cubique, le milieu n'en est pas moins orthorhombique.

Mais supposons que les particules tournent autour de leurs centres de gravité et s'orientent six par six, comme nous avons vu qu'elles font dans les macles. Nous pouvons maintenant trouver un nouveau réseau cubique de points homologues multiple du premier, dont la maille, six fois plus grande, possède un remplissage de symétrie cubique. D'orthorhombique le milieu est devenu cubique.

Le grand intérêt de la macle est de rendre incontestable la possibilité des orientations six par six des particules matérielles. Si la chose est démontrée pour un cristal de dimensions finies, il est impossible de ne pas admettre la légitimité de l'hypothèse pour la maille où les tendances à l'orientation ont nécessairement une intensité infiniment plus grande.

**173. Transformations directes avec déformation du réseau.**

— Dans les cas précédents, la déformation homogène accompagnant la transformation est très petite. Parfois elle devient notable; elle rentre alors dans la catégorie des *glissements* que nous étudierons au § 203. Comme c'est une déformation *homogène* (§ 179), le réseau est transformé en un autre réseau, sans qu'à aucun instant l'édifice cristallin cesse d'exister.

Nous verrons que des modifications analogues *sans perte de la transparence* peuvent être obtenues par des actions mécaniques (§ 205). Elles n'ont rien d'exceptionnel.

**174. Transformations indirectes.** — Un cristal homogène se transforme en un agrégat confus de petits cristaux d'une autre forme.

Le fait caractéristique des transformations directes n'existe plus : l'édifice est détruit.

Par exemple, le soufre se rencontre dans la nature cristallisé sous forme d'*octaèdres orthorhombiques*; c'est la forme stable à froid à la pression ordinaire. Quand le soufre cristallise soit par fusion, soit par évaporation d'une solution à une température supérieure à 100°, on obtient des *prismes clinorhombiques*. Ces prismes refroidis deviennent opaques; ils se sont transformés en ces *octaèdres orthorhombiques* qu'on obtient directement en évaporant à basse température.

Bien entendu, les équilibres métastables ou retards à la transformation sont particulièrement faciles dans cette expérience, et généralement pour toutes les transformations des corps solides. On les supprime à la manière ordinaire, par exemple en touchant avec des octaèdres orthorhombiques les aiguilles clinorhombiques refroidies.

Les transformations sont parfois réversibles, parfois irréversibles.

La chaux carbonatée appartient au système rhomboédrique (calcite) ou au système orthorhombique (aragonite). A 400°, l'aragonite se transforme en calcite avec une extrême lenteur, sans conservation de l'homogénéité. On n'a pas observé la transformation inverse de la calcite en aragonite.

Le polymorphisme peut exister avec le même système cristallin. Par exemple, l'oxyde de titane  $TiO_2$  cristallise, entre autres formes, suivant deux réseaux différents quadratiques (*rutile* et *anatase*) : les rapports  $b : h$  de l'arête de base à l'arête latérale sont différents pour les deux variétés.

**175. Formes stables et métastables.** — Les variétés d'un même corps *polymorphe* cessent d'être dissemblables dès qu'elles ont quitté l'état cristallin. Fondues, vaporisées, dissoutes elles reprennent des propriétés identiques. Elles ne conservent pas leur individualité dans les combinaisons chimiques. Nous avons dit (§ 170) que la distinction entre le polymorphisme et l'isomérisie repose sur ces faits, mais qu'ils ne sont pas absolument convaincants.

Quoi qu'il en soit, nous nous appuierons sur l'identité des états fondus, dissous ou de vapeur, pour trouver les lois qui régissent les transformations réciproques des variétés polymorphes.

*La forme stable est la moins soluble et la moins volatile; son point de fusion est le plus élevé.*

En effet, considérons les deux formes *stable* et *métastable* en présence d'une dissolution saturée, à une température et sous une pression données. La forme métastable doit finir par se transformer en la forme stable; cela arrive nécessairement si la forme stable est la moins soluble. La solution saturée par rapport à la forme métastable,

est alors sursaturée par rapport à la forme stable et dépose de la matière sous cette forme. Elle devient non saturée par rapport à la forme métastable qui se dissout, ...; et ainsi de suite jusqu'à la transformation complète.

De même, considérons les deux formes en présence de leur vapeur commune (fig. 147). Un raisonnement identique apprend que la forme stable est nécessairement la moins volatile.

Traçons dans le plan températures-pressions les trois courbes de tension de vapeur : BS de la forme stable, CM de la forme métastable, DMS du liquide unique qui provient de leur fusion. Il

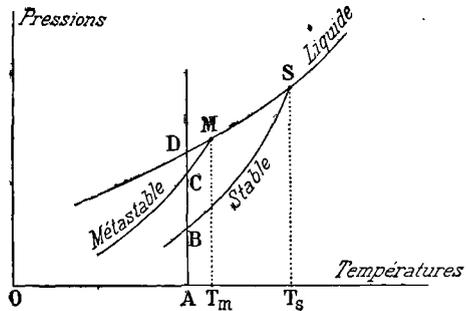


Fig. 147.

résulte immédiatement de la proposition précédente que la température de fusion  $T$  de la forme stable est plus élevée que la température de fusion  $T_m$  de la forme métastable.

Nous ne reviendrons pas sur ce que nous avons dit (Tome II, § 75) des conditions d'équilibre des deux formes en présence qui constituent un système univariant.

**176. Syncrystallisation.** — On a considéré longtemps la *syncrystallisation*, c'est-à-dire la propriété de donner des cristaux mixtes (II, § 119), comme partie constitutive essentielle de l'*isomorphisme*. Aujourd'hui on sait que le mot *isomorphisme* ne signifie rien et doit disparaître pour laisser place à l'étude de l'*homéomorphisme* (quasi identité de formes cristallines) et de la *syncrystallisation*.

Nous étudierons d'abord la seconde de ces propriétés.

*La syncrystallisation se produit entre cristaux qui ont des réseaux voisins et dont les volumes moléculaires sont à peu près les mêmes.*

Expliquons ce que cette proposition signifie.

Évidemment les réseaux sont voisins si les cristaux sont du même système et caractérisés par des paramètres voisins, c'est-à-dire s'ils sont sensiblement *homéomorphes*. Mais cela n'est pas nécessaire. Il n'est pas non plus nécessaire que la constitution soit la même.

D'autre part, les corps qui sont homéomorphes et de même constitution chimique peuvent se refuser à donner des cristaux mixtes, quand les volumes moléculaires sont trop différents.

Voici quelques exemples qui montreront de quelles analogies la syncrystallisation est la caractéristique. Nous représenterons par  $\Delta$  la densité,  $M$  le poids moléculaire,  $V$  le volume moléculaire,  $\pi$  le paramètre absolu mesuré par la racine cubique de ce volume.

HOMÉOMORPHISME ET IDENTITÉ DE CONSTITUTION SANS SYNCRISTALLISATION.  
 Considérons les corps KCl, NaCl, LiCl, tous trois cubiques et du mode hexaédral.

KCl,	M = 74,5,	$\Delta = 1,98,$	V = 37,7,	$\pi = 3,35.$
NaCl,	58,4,	2,14,	27,4,	3,01.
LiCl,	42,4,	2,04,	20,8,	2,75.

Les paramètres absolus sont trop différents pour qu'il y ait syncrystallisation.

HOMÉOMORPHISME ET IDENTITÉ DE CONSTITUTION : SYNCRISTALLISATION.  
 Carbonates spathiques, réseau rhomboédrique.

CO <sup>3</sup> Mg,	M = 84,	$\Delta = 3,00,$	V = 28,0,	$\pi = 2,88.$
CO <sup>3</sup> Fe,	116,	3,85,	30,2,	2,95.
CO <sup>3</sup> Mn,	115,	3,45,	33,3,	3,05.
CO <sup>3</sup> Zn,	125,	4,45,	28,1,	2,88.
CO <sup>3</sup> Ca,	100,	2,72,	36,8,	3,16.

La syncrystallisation se fait mieux en toutes proportions pour les quatre premiers dont les paramètres absolus sont plus voisins.

Aluns, réseau cubique.

Alun de Na,	M = 458,	$\Delta = 1,60,$	V = 286,	$\pi = 6,59.$
Alun de K,	474,	1,72,	275,	6,50.

Ce cas correspondrait à l'isomorphisme proprement dit.

HOMÉOMORPHISME SANS IDENTITÉ DE CONSTITUTION : SYNCRISTALLISATION.  
 Feldspaths plagioclases, réseaux anorthiques voisins.

Albite,	Si <sup>2</sup> O <sup>8</sup> AlNa,	M = 524,	$\Delta = 2,62,$	V = 200.
Anorthite,	Si <sup>2</sup> O <sup>8</sup> Al <sup>2</sup> Ca,	556,	2,76,	201.

IDENTITÉ DE CONSTITUTION SANS HOMÉOMORPHISME : SYNCRISTALLISATION.  
 AzO<sup>3</sup>K, orthorhombique; AzO<sup>3</sup>Rb, ternaire.

La chimie organique fournit une foule d'exemples de corps dont des cristaux mixtes, et dont cependant les analogies chimiques sont nulles. Il suffit de citer comme exemple le système *naphthaline* et *acide monochloracétique*.

**177. Réseaux et propriétés des cristaux mixtes.** — Les matières syncrystallisables n'ont pas identiquement le même réseau. Cherchons comment le réseau du cristal mixte dépend de la composition.

On a d'abord admis *la loi des mélanges*, c'est-à-dire une variation linéaire en fonction de la teneur *relative* par rapport à l'un et l'autre corps.

Soit  $a_1, a_2$ , les nombres qui mesurent une propriété des corps 1 et 2 purs; soit  $n_1, n_2$ , les nombres de molécules de ces corps contenues

dans une portion du mélange. Le nombre qui mesure la propriété du mélange devrait être :

$$a = \frac{a_1 n_1 + a_2 n_2}{n_1 + n_2}.$$

Cette loi est insuffisante.

D'une manière générale, le réseau est déterminé par six éléments : 1° les angles que font entre elles trois rangées conjuguées (c'est-à-dire les côtés du triangle sphérique formé par les points d'intersection de ces rangées avec la sphère au centre de laquelle elles se coupent); 2° les paramètres  $a, b, c$  (§ 49) de ces rangées. Généralement aucun de ces éléments ne varie proportionnellement aux quantités mélangées. Il arrive même que, pour certains mélanges, un élément soit plus grand ou plus petit que ses valeurs pour l'un ou l'autre des cristaux purs.

Le phénomène n'a rien d'extraordinaire si on le compare, par exemple, aux variations des points de fusion des mélanges (tome II, § 104, et Cours de Mathématiques, § 93).

Quelle idée pouvons-nous avoir de la constitution des cristaux mixtes ?

On a mis en avant une théorie qui supprime le problème; elle est du reste insoutenable.

Selon la teneur de l'eau mère en l'un et l'autre composants, se formeraient des particules de composition déterminée, cristallisant avec un réseau dont les éléments sont fonction de cette composition. Toutes les particules sont encore identiques entre elles comme s'il s'agissait d'un cristal simple. On n'est pas obligé de supposer une tolérance de la nature pour expliquer que deux substances de réseaux différents syncrystallisent, puisqu'en définitive il se forme une particule nouvelle se disposant aux nœuds d'un réseau nouveau. Ces particules peuvent ne pas avoir la même symétrie que les éléments dont elles sont formées.

Comme on voit, le problème est supprimé par cette explication. Mais, outre qu'elle est en opposition formelle avec la loi chimique des proportions définies, elle n'explique pas qu'en faisant varier la composition de la solution mixte pendant la cristallisation, on obtienne des cristaux parfaitement stables et réguliers dont la composition varie à volonté du centre à la périphérie. Les cristaux mixtes ne sont pas homogènes : l'édifice est pourtant stable.

Nous admettons donc que les mailles des deux composants, étant quasi identiques de forme extérieure, peuvent se substituer les unes aux autres, malgré la non identité de leurs remplissages.

On rapproche ainsi les mélanges isomorphes des macles par pseudo-mériédrie (§ 162).

De même qu'on peut constituer un édifice stable avec des mailles

de même forme ou de formes voisines, mais dont le remplissage, *tout en étant de la même matière*, n'a pas la même orientation, de même on peut constituer un édifice stable avec des mailles de même forme ou de formes voisines, mais dont le remplissage n'est pas constitué par la même matière.

Nous pouvons répéter pour une propriété quelconque ce que nous avons dit pour les réseaux. La loi des mélanges s'applique comme première et grossière approximation. Les densités, les ellipsoïdes des indices, ..., des mélanges sont approximativement calculables à partir des densités, des ellipsoïdes des indices, ..., des corps purs constituants.

**178. Homéomorphisme.** — L'*homéomorphisme* peut exister, alors même qu'il n'y a pas syncristallisation. Il faut chercher de quoi dépend cette propriété de présenter des formes très voisines.

L'homéomorphisme *avec ou sans syncristallisation* décèle des constitutions chimiques très analogues. Mais pour bien en juger, il ne faut pas oublier l'imperfection fatale du symbolisme par lequel nous représentons cette constitution. En particulier, la théorie de la valence ne peut être considérée que comme une première approximation.

Ainsi l'azotate de sodium,  $AzO^3Na$ , est homéomorphe de la calcite,  $CO^3Ca$ . D'autre part, l'azotate de potassium,  $AzO^3K$ , est homéomorphe de l'aragonite de même formule que la calcite,  $CO^3Ca$ . Il est clair que ce sont ici les règles de valence qui sont trop étroites et qui cachent certaines analogies de constitution chimique.

Des exemples analogues sont très nombreux en Chimie organique. Par exemple, l'homéomorphisme subsiste fréquemment quand on substitue  $-SO^3H$  à  $-CO^3H$ , ou encore  $=CH^2$  à  $=AzH$ .

Ces remarques faites, il n'en reste pas moins vrai que très généralement homéomorphisme et identité de formules vont de pair.

## CHAPITRE III

### DÉFORMATIONS HOMOGÈNES

179. **Définition de la déformation homogène.** — Considérons un corps ayant un point fixe ; cette hypothèse n'a rien de restrictif quand il s'agit de *déformations*, c'est-à-dire de déplacements *relatifs* des éléments constitutifs du corps.

On dit que la déformation est *homogène* quand les coordonnées  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , d'un point *après* la déformation sont reliées aux coordonnées  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , du même point *avant* la déformation par les équations linéaires :

$$\begin{aligned}x' &= d_1x + g_3y + g_2z, \\y' &= h_3x + d_2y + g_1z, \\z' &= h_2x + h_1y + d_3z.\end{aligned}\tag{I}$$

Les coefficients sont des fonctions des *variations* d'une variable  $t$  qui est l'*agent de déformation*. Pour *chaque* déformation, c'est-à-dire pour chaque variation *grande ou petite* de l'agent, ce sont des *constantes* sur lesquelles on peut ne faire aucune hypothèse de grandeur. En général, dans les cas réalisables, les  $d$  sont peu différents de 1, les  $g$  et les  $h$  peu différents de 0 : la déformation est très petite. Comme cas particulier, les neuf quantités  $d - 1$ ,  $g$ ,  $h$ , sont proportionnelles à la variation  $\Delta t$ .

Nous pouvons admettre, sans qu'il en résulte la moindre restriction, que les axes de coordonnées forment un triplet trirectangle ; car un changement d'axes ne change pas la forme des équations *qui restent linéaires*. Or les propriétés de la déformation homogène tiennent précisément à ce que les relations sont linéaires.

De la forme des équations (I), résultent immédiatement les corollaires suivants, qui justifient le nom d'*homogène*.

1° Une ligne droite du corps non déformé devient une ligne droite du corps déformé, mais dont la direction est généralement différente.

2° Un plan du corps non déformé devient un plan du corps déformé, mais dont la direction est généralement différente.

3° Toutes les droites parallèles équidistantes du corps non déformé deviennent des droites parallèles équidistantes du corps déformé.

4° Tous les plans parallèles équidistants du corps non déformé deviennent des plans parallèles équidistants du corps déformé.

5° Un réseau se transforme en un autre réseau; trois directions conjuguées du premier se transforment en trois directions conjuguées du second, mais les angles ont été généralement modifiés ainsi que les paramètres.

6° Des figures semblables et semblablement placées sont transformées en figures semblables et semblablement placées.

**180. Conservation des indices et des zones.** — Les faces d'un cristal qui subit une déformation homogène, conservent les mêmes indices; *peu importe qu'il s'agisse de faces naturelles ou artificielles, c'est-à-dire que les indices soient rationnels ou irrationnels.*

Précisons le sens de cette proposition.

Nous avons choisi dans le cristal non déformé trois axes de référence dont nous avons déterminé les paramètres :  $a, b, c$ .

Appliquons la transformation (I) : les axes prennent respectivement d'autres directions, leurs angles sont modifiés (au moins dans le cas général); il en est de même des paramètres qui deviennent  $a', b', c'$ .

Une face quelconque du cristal non déformé coupe les axes suivant les longueurs  $ma, nb, pc$ . La déformation change ces longueurs; mais les portions d'une même droite ou de droites parallèles étant modifiées dans le même rapport, les nouvelles longueurs sont  $ma', nb', pc'$ . Les nombres  $m, n, p$ , ou leurs inverses (indices)  $q, r, s$ , restent donc les mêmes.

On voit immédiatement que les faces qui sont en zone avant la déformation, sont en zone dans le cristal déformé. Les plans qui contiennent tous une direction D, sont transformés en des plans qui contiennent tous la direction D' transformée de D.

**181. Transformation d'un ellipsoïde.** — Il est d'abord évident qu'un ellipsoïde est transformé en un autre ellipsoïde. Montrons qu'un système de diamètres conjugués est transformé en un système de diamètres conjugués qui ne font généralement pas les mêmes angles relatifs, et dont aucun des trois n'occupe généralement la même position absolue dans l'espace.

Rappelons que trois droites forment un système de diamètres conjugués quand chacune est le lieu des centres des sections parallèles au plan des deux autres. Il résulte de cette définition que le plan tangent à l'ellipsoïde à l'extrémité de l'une d'elles, est aussi parallèle au plan des deux autres.

Toutes ces propriétés se conservent dans la transformation : le centre d'une courbe devient le centre de la transformée; des plans parallèles deviennent des plans parallèles.

D'où la proposition énoncée.

En particulier, une sphère devient un ellipsoïde qu'on appelle *ellipsoïde de déformation*.

Un système quelconque de trois diamètres rectangulaires de la sphère se transforme en un système de trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde de déformation.

Tout ellipsoïde possède trois diamètres conjugués formant un trièdre trirectangle; ce sont ses axes. *Il existe donc, dans toute déformation homogène, un système de trois droites rectangulaires qui se transforme en un système de trois autres droites rectangulaires n'ayant généralement pas les mêmes directions.*

D'où une représentation concrète des déformations homogènes.

Considérons une sphère dans le corps non déformé (état 1) et le système  $S_1$  de diamètres conjugués (nécessairement trirectangle), qui donnera par déformation (état 2) le système  $S_2$  des axes de déformation (axes de l'ellipsoïde en lequel se transforme la sphère initiale).

Nous pouvons considérer la déformation comme résultant :

1° d'une rotation amenant  $S_1$  sur  $S_2$ ;

2° d'une déformation *irrotationnelle* transformant la sphère en ellipsoïde par dilatations inégales des trois directions principales  $S_2$  :

$$\begin{aligned} x' &= d_1x = (1 + \delta_1)x, \\ y' &= d_2y = (1 + \delta_2)y, \\ z' &= d_3z = (1 + \delta_3)z. \end{aligned} \quad (\text{II})$$

Il peut arriver que la rotation amenant  $S_1$  sur  $S_2$  soit nulle; les axes de déformation coïncident avec les droites *atropiques* (§ 188); on dit qu'il s'agit d'une *pure déformation*.

REMARQUE. — Pour aller de l'état 1 à l'état 2, on passe par une série d'états intermédiaires définis par les valeurs intermédiaires de l'agent. Nous venons de prouver qu'il existe un système de droites du corps qui sont rectangulaires aux états 1 et 2; *généralement elles ne le sont pour aucun des états intermédiaires.*

Dans les paragraphes suivants, nous cherchons les variations de forme quand on passe de l'état 1 à l'état 2. Supposons qu'on ait déterminé le système de diamètres conjugués trirectangles  $S$  qui correspond aux deux états 1 et 2, ainsi que les dilatations parallèles à ces directions. Il est alors possible de calculer tout ce qui ne dépend pas de la position absolue; on peut ignorer la rotation nécessaire pour passer de  $S_1$  à  $S_2$ . Mais ce que nous disons ne vaut que pour les états 1 et 2, et non pour les états intermédiaires.

**182. Dilatation d'une droite quelconque.** — Toutes les propriétés qui ne dépendent pas de la position absolue, peuvent être étudiées comme s'il s'agissait d'une *pure déformation* pour laquelle on a :

$$x' = (1 + \delta_1)x, \quad y' = (1 + \delta_2)y, \quad z' = (1 + \delta_3)z. \quad (\text{II}')$$

Soit à chercher la dilatation d'une droite de longueur  $l$ . Elle fait avec les axes primitifs les angles dont les cosinus sont  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Nous pouvons supposer qu'une de ses extrémités est l'origine des coordonnées, puisque toutes les droites parallèles se dilatent de même.

Soit  $l'$  la longueur après la déformation; nous poserons :

$$l' = (1 + \delta)l = Dl.$$

On a :

$$l^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$l'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = (1 + \delta_1)^2 x^2 + (1 + \delta_2)^2 y^2 + (1 + \delta_3)^2 z^2,$$

$$\frac{l'^2}{l^2} = (1 + \delta)^2 = (1 + \delta_1)^2 \alpha^2 + (1 + \delta_2)^2 \beta^2 + (1 + \delta_3)^2 \gamma^2. \quad (1)$$

$$D^2 = d_1^2 \alpha^2 + d_2^2 \beta^2 + d_3^2 \gamma^2.$$

Si les  $\delta$  sont assez petits pour qu'on puisse négliger leurs carrés, il reste :

$$\delta = \delta_1 \alpha^2 + \delta_2 \beta^2 + \delta_3 \gamma^2. \quad (1')$$

Calculons les cosinus directeurs  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$ , de la droite dans le corps déformé par rapport aux axes principaux de déformation :

$$\alpha' = \frac{x'}{l'} = \frac{1 + \delta_1}{1 + \delta} \frac{x}{l} = \frac{1 + \delta_1}{1 + \delta} \alpha = \frac{d_1}{D} \alpha.$$

Si les  $\delta$  sont petits, on peut écrire :

$$\alpha' = (1 + \delta_1 - \delta) \alpha, \quad \beta' = (1 + \delta_2 - \delta) \beta, \quad \gamma' = (1 + \delta_3 - \delta) \gamma.$$

**183. Variation de distance de deux plans parallèles.** — Supposons qu'un des plans passe par l'origine des coordonnées. Le problème consiste à chercher la variation de la distance de l'origine au plan :

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \Delta.$$

Ce plan, dont la distance initiale à l'origine est  $\Delta$ , devient par déformation :

$$\frac{\alpha}{d_1} x' + \frac{\beta}{d_2} y' + \frac{\gamma}{d_3} z' = \Delta.$$

La nouvelle distance à l'origine est :

$$\Delta' = \frac{\Delta}{\sqrt{\frac{\alpha^2}{d_1^2} + \frac{\beta^2}{d_2^2} + \frac{\gamma^2}{d_3^2}}}.$$

Posons :  $\Delta' = (1 + \delta)\Delta$ ; il vient :

$$\frac{1}{D^2} = \frac{1}{(1 + \delta)^2} = \frac{\alpha^2}{d_1^2} + \frac{\beta^2}{d_2^2} + \frac{\gamma^2}{d_3^2}. \quad (2)$$

La formule se simplifie quand  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_3$ , sont voisins de l'unité, c'est-à-dire quand  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\delta_3$ , sont petits. On peut écrire :

$$1 : (1 + \delta_1)^2 = 1 - 2\delta_1,$$

et des expressions symétriques pour  $\delta$ ,  $\delta_2$ ,  $\delta_3$ . D'où enfin :

$$\delta = \delta_1\alpha^2 + \delta_2\beta^2 + \delta_3\gamma^2; \tag{1'}$$

formule identique à celle du paragraphe précédent.

184. **Dilatation cubique.** — Soit  $V$  le volume de la sphère de rayon 1 dans le corps non déformé; soit  $V'$  le volume de l'ellipsoïde correspondant. On a :

$$V = \frac{4\pi}{3}, \quad V' = \frac{4\pi}{3}(1 + \delta_1)(1 + \delta_2)(1 + \delta_3) = \frac{4\pi}{3}d_1d_2d_3.$$

Posons :  $V' : V = 1 + \theta.$

$$\theta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \sum \delta_i\delta_j + \delta_1\delta_2\delta_3.$$

Si les coefficients  $\delta$  sont assez petits, on a simplement :

$$\theta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3.$$

185. **Angles de deux directions.** — Soient deux directions respectivement définies par les cosinus directeurs  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ ;  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ .

Le cosinus de leur angle  $\theta$  est :

$$\cos \theta = \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2.$$

Le cosinus de leur angle  $\theta'$  après déformation est :

$$\cos \theta' = \alpha'_1\alpha'_2 + \beta'_1\beta'_2 + \gamma'_1\gamma'_2.$$

Le paragraphe 182 donne :

$$\alpha'_1 = \alpha_1 \frac{d_1}{D_1}, \quad \beta'_1 = \beta_1 \frac{d_2}{D_1}, \quad \gamma'_1 = \gamma_1 \frac{d_3}{D_1};$$

$$\alpha'_2 = \alpha_2 \frac{d_1}{D_2}, \quad \beta'_2 = \beta_2 \frac{d_2}{D_2}, \quad \gamma'_2 = \gamma_2 \frac{d_3}{D_2};$$

$$D_1^2 = d_1^2\alpha_1^2 + d_2^2\beta_1^2 + d_3^2\gamma_1^2, \quad D_2^2 = d_1^2\alpha_2^2 + d_2^2\beta_2^2 + d_3^2\gamma_2^2.$$

D'où : 
$$\cos \theta' = \frac{d_1^2\alpha_1\alpha_2 + d_2^2\beta_1\beta_2 + d_3^2\gamma_1\gamma_2}{D_1D_2}.$$

186. **Angles de deux plans.** — Soit d'abord le plan :

$$\alpha_1x + \beta_1y + \gamma_1z = 0,$$

passant par l'origine des coordonnées. Il se transforme dans le

plan : 
$$\frac{\alpha_1}{d_1}x + \frac{\beta_1}{d_2}y + \frac{\gamma_1}{d_3}z = 0.$$

Les cosinus directeurs de la normale au premier plan sont  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ . Les cosinus directeurs de la normale au second plan sont :

$$\alpha'_1 = \frac{\alpha_1}{d_1B_1}, \quad \beta'_1 = \frac{\beta_1}{d_2B_1}, \quad \gamma'_1 = \frac{\gamma_1}{d_3B_1};$$

$$B_1 = \sqrt{\frac{\alpha_1^2}{d_1^2} + \frac{\beta_1^2}{d_2^2} + \frac{\gamma_1^2}{d_3^2}}.$$

Ceci posé, cherchons la variation de l'angle de deux plans. Le cosinus de l'angle  $\Theta$  des normales avant la déformation est :

$$\cos \Theta = \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2.$$

Après la déformation, il devient :

$$\cos \Theta' = \frac{1}{B_1 B_2} \left( \frac{\alpha_1 \alpha_2}{d_1^2} + \frac{\beta_1 \beta_2}{d_2^2} + \frac{\gamma_1 \gamma_2}{d_3^2} \right).$$

**187. Cas du système clinorhombique.** — La question des dilatations thermiques étant généralement traitée par l'enseignement français d'une manière très incomplète, pour ne pas dire plus, il faut, avant d'aborder le cas général, étudier un cas particulier. Je suivrai la méthode du cristallographe anglais Fletcher.

Comme nous le verrons plus loin (§ 193 et sq.), le cas des cristaux cubiques, des cristaux présentant un axe principal et des cristaux orthorhombiques est très simple, parce que l'ellipsoïde de dilatation a ses axes atropiques, c'est-à-dire invariables comme directions. Il n'en va pas de même pour les deux derniers systèmes, le système clinorhombique et le système anorthique. Pour le premier, les phénomènes sont relativement simples, parce qu'un des axes de l'ellipsoïde de déformation coïncide toujours avec l'axe binaire. Prenons-le pour axe des  $z$ ; les équations (I) s'écrivent :

$$\begin{aligned} x' &= d_1 x + g y, \\ y' &= h x + d_2 y, \\ z' &= d_3 z. \end{aligned} \tag{III}$$

Étudier cette transformation revient à étudier la transformation générale (I) dans le plan des  $xy$ , puisque tout se ramène suivant l'axe des  $z$  à une dilatation proportionnelle.

D'une manière générale, les paramètres  $d$ ,  $\delta$ ,  $g$ ,  $h$ , sont des fonctions des variations d'une variable  $t$  (température uniforme, pression uniforme). Étudions la déformation quand on passe de la valeur  $t$  de la variable à la valeur  $t + \Delta t$ . On a :

$$\begin{aligned} \Delta x &= x' - x = \delta_1 x + g y, \\ \Delta y &= y' - y = h x + \delta_2 y. \end{aligned}$$

1° Il existe d'abord deux droites du plan des  $xy$  dont la direction ne change pas pendant la déformation. Elles sont définies par la relation :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x}{x} &= \frac{\Delta y}{y}; & \frac{\delta_1 x + g y}{x} &= \frac{h x + \delta_2 y}{y}. \\ h x^2 + (\delta_2 - \delta_1) x y - g y^2 &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Ces droites généralement obliques sont toutes deux réelles ou toutes deux imaginaires; il semble bien qu'on doive admettre comme fait d'expérience qu'elles sont réelles.

La déformation définie par la variation de l'agent de  $t$  à  $t + \Delta t$ , équivaut à des dilatations le long de ces droites fixes. En d'autres termes, par rapport à deux certains axes obliques  $O\xi, O\eta$ , on peut poser :

$$\xi' = \varepsilon_1 \xi, \quad \eta' = \varepsilon_2 \eta. \quad (II')$$

Ces équations ne valent que pour les valeurs  $t$  et  $t + \Delta t$  de la variable; pour les valeurs  $t + \Delta t$  et  $t + 2\Delta t$ , et généralement  $t_1$  et  $t_2$ , on peut employer les mêmes équations (II'), mais généralement rapportées à des axes différents et avec des constantes  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  différentes.

2° Il existe deux droites rectangulaires qui dans la déformation se transforment en deux autres droites rectangulaires.

Soit A le point initial, A' le point final. Menons les rayons vecteurs OA, OC. Soit  $r$  la distance  $\overline{OA}$ . La rotation du rayon

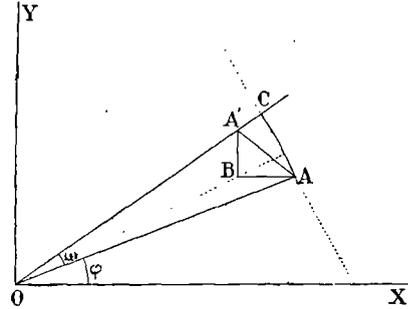


Fig. 148.

vecteur OA est :  $\overline{AC} : r$ . Or  $\overline{AC}$  est la projection sur la perpendiculaire à OA de  $\overline{AA'}$ , ou, ce qui revient au même, du parcours  $\overline{AB}, \overline{BA'}$ .

$$\begin{aligned} \overline{AC} &= \overline{BA} \sin \varphi + \overline{BA'} \cos \varphi = -\Delta x \sin \varphi + \Delta y \cos \varphi; \\ \omega r &= -(\delta_1 x + gy) \sin \varphi + (hx + \delta_2 y) \cos \varphi, \\ 2\omega &= h - g + (h + g) \cos 2\varphi - (\delta_1 - \delta_2) \sin 2\varphi. \end{aligned} \quad (2)$$

Le vecteur normal à OA, auquel correspond l'angle  $\varphi + \pi : 2$ , tourne d'un angle :

$$2\omega' = h - g - (h + g) \cos 2\varphi + (\delta_1 - \delta_2) \sin 2\varphi. \quad (3)$$

Écrivons que ces rotations sont égales; il vient :

$$2\omega = h - g, \quad \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{h + g}{\delta_1 - \delta_2}. \quad (4)$$

Nous définissons deux droites rectangulaires qui se transforment en deux autres droites rectangulaires, puisque la rotation de chacune d'elles est la même.

Pour que les droites *atropiques* soient rectangulaires, il faut donc qu'on ait  $\omega = 0, h = g$ . La déformation (conférer § 191) :

$$x' = d_1 x + gy, \quad y' = gx + d_2 y,$$

correspond donc à l'invariabilité de deux droites rectangulaires. Si nous les prenons pour axes, la déformation, qui est *pure*, satisfait aux équations :

$$x' = d_1 x, \quad y' = d_2 y.$$

3° Supposons que pour une série continue de déformations, les droites atropiques restent les mêmes.

D'après le 1°, il faut que les fonctions  $h$ ,  $\delta_2 - \delta_1$ ,  $g$ , conservent les mêmes rapports; elles sont, par exemple, proportionnelles aux variations de la variable  $t$ . L'angle  $\varphi$  est invariable : conséquemment les droites du cristal qui restent à chaque instant rectangulaires; autrement dit, les droites rectangulaires du cristal qui ont à chaque instant la même vitesse de rotation, sont également fixes. Il ne résulte d'ailleurs aucunement de là que ce soient toujours les mêmes droites du cristal qui jouissent de cette propriété : les droites qui jouissent de cette propriété coïncident, au moment où elles en jouissent, avec les droites fixes définies par l'équation (4); leur vitesse de rotation est alors :

$$2\omega = h - g.$$

4° Il existe une infinité de couples de droites du corps qui pendant la déformation conservent leur inclinaison mutuelle.

Une ligne dont l'inclinaison est  $\psi$  tourne avec une vitesse :

$$2\omega = h - g + (h + g) \cos 2\psi - (\delta_1 - \delta_2) \sin 2\psi.$$

Or on a :

$$\sin 2\varphi = k(h + g), \quad \cos 2\varphi = k(\delta_1 - \delta_2),$$

en posant :  $k^2 = 1 : [(h + g)^2 + (\delta_1 - \delta_2)^2].$

$$2\omega = h - g + k \sin 2(\varphi - \psi).$$

Cette rotation est la même pour les deux angles  $\psi$  et  $\psi'$  qui satisfont à la relation :

$$2(\varphi - \psi) = \pi - 2(\varphi - \psi'), \quad \frac{\psi + \psi'}{2} = \varphi - \frac{\pi}{4}.$$

Les droites déterminées par cette équation sont également inclinées

de part et d'autre des bissectrices B des angles que font les droites rectangulaires (marquées d'un point sur la figure 149) jouissant de la même propriété.

5° Rotation de deux droites rectangulaires. — Additionnons les équations (2) et (3) qui donnent les rotations  $\omega$  et  $\omega'$  de deux droites rectangulaires.

Il reste :

$$\omega + \omega' = h - g.$$

La somme des vitesses est à chaque instant constante.

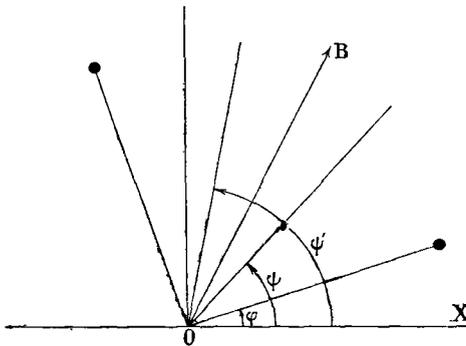


Fig. 149.

Dans le cas où cette somme est nulle (pure déformation), les vitesses sont égales et de sens contraires. C'est, par exemple, ce qui arrive (§ 196) dans les plans de symétrie d'un cristal orthorhombique.

6° *Dilatations suivant deux droites rectangulaires.* — La dilatation  $\delta$  suivant une direction quelconque (fig. 148), satisfait à la condition :

$$r\delta = \Delta r = \overline{A'C} = (\delta_1 x + gy) \cos \varphi + (hx + \delta_2 y) \sin \varphi,$$

$$\delta = \delta_1 \cos^2 \varphi + (g + h) \sin \varphi \cos \varphi + \delta_2 \sin^2 \varphi.$$

Pour une ligne perpendiculaire on a :

$$\delta' = \delta_1 \cos^2 \varphi - (g + h) \sin \varphi \cos \varphi + \delta_2 \sin^2 \varphi.$$

D'où :

$$\delta + \delta' = \delta_1 + \delta_2.$$

La somme des dilatations est constante.

RÉSUMÉ. — Nous pouvons traiter la déformation plane :

1° soit comme des dilatations le long de deux droites atropiques, généralement obliques ;

2° soit comme des dilatations suivant un couple pris parmi une infinité de couples, accompagnées d'une rotation d'ensemble. L'un de ces couples est formé de droites rectangulaires ; les dilatations le long de ces droites sont l'une maxima, l'autre minima.

188. **Directions atropiques dans le cas général.** — Maintenant que le lecteur est familiarisé avec la déformation homogène plane, passons aux cristaux tricliniques. Nous ne savons pas à l'avance où sont les droites atropiques ; en général elles sont toutes trois obliques l'une sur l'autre et ne conservent leur propriété que pour une *seule* déformation correspondant à une *certaine* variation grande ou petite de la variable. Elles satisfont aux conditions :

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} = \rho.$$

Le système (I) devient :

$$\begin{aligned} (d_1 - \rho)x + g_3y + g_2z &= 0, \\ h_3x + (d_2 - \rho)y + g_1z &= 0, \\ h_2x + h_1y + (d_3 - \rho)z &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Écrivons que ces équations sont compatibles :

$$\begin{vmatrix} d_1 - \rho & g_3 & g_2 \\ h_3 & d_2 - \rho & g_1 \\ h_2 & h_1 & d_3 - \rho \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Posons :

$$\begin{vmatrix} d_1 & g_3 & g_2 \\ h_3 & d_2 & g_1 \\ h_2 & h_1 & d_3 \end{vmatrix} = G,$$

$$d_2d_3 - g_1h_1 = G_1, \quad d_3d_1 - g_2h_2 = G_2, \quad d_1d_2 - g_3h_3 = G_3.$$

La condition (3) s'écrit :

$$\rho^3 - (d_1 + d_2 + d_3)\rho^2 + (G_1 + G_2 + G_3)\rho - G = 0. \quad (4)$$

1° Quand l'équation (4) a ses trois racines réelles, à chaque racine correspond une droite, intersection de deux quelconques des trois plans représentés par les équations (2) que nous savons compatibles; d'où la détermination des *droites atropiques*.

Prenons comme axes *généralement obliques* les droites atropiques. Le système (I) se réduit à :

$$x' = d_1x, \quad y' = d_2y, \quad z' = d_3z.$$

Un ellipsoïde, tracé dans le corps non déformé et admettant ces axes comme diamètres conjugués, a pour équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (5)$$

où  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , sont les longueurs des demi-diamètres.

L'ellipsoïde devient après la déformation :

$$\frac{x'^2}{d_1^2 a^2} + \frac{y'^2}{d_2^2 b^2} + \frac{z'^2}{d_3^2 c^2} = 1. \quad (6)$$

L'ellipsoïde déformé est encore rapporté à trois diamètres conjugués. D'une manière générale, un système de diamètres conjugués de l'ellipsoïde non déformé est transformé en un système de diamètres conjugués de l'ellipsoïde déformé (§ 181); *dans le cas actuel*, la déformation ne change pas les positions absolues du système considéré de diamètres conjugués.

Comme il ne peut exister plus de trois directions atropiques, les axes des ellipsoïdes (5) et (6) ne coïncident pas. L'existence des directions atropiques n'empêche donc pas la déformation d'être une rotation amenant un triplet trirectangle  $S_1$  sur un triplet trirectangle  $S_2$ , rotation suivie de dilatations suivant les droites de ce triplet.

C'est un résultat d'expérience que les directions atropiques sont toujours réelles quand il s'agit de petites déformations thermiques ou de compressions.

2° Quand une seule racine est réelle, il faut se garder de croire que la rotation qui amène  $S_1$  sur  $S_2$ , a cette droite pour axe. Elle ne conserve généralement pas pendant la déformation sa situation relative par rapport au triplet trirectangle  $S_1$  ou  $S_2$ .

**189. Trièdres sans déformation.** — Nous savons déjà qu'un certain trièdre trirectangle  $S_1$  dans l'état 1 se transforme en un trièdre trirectangle  $S_2$  dans l'état 2. On peut généraliser le théorème : *il existe une infinité de trièdres dans l'état 1 qui se transforment en trièdres de formes identiques dans l'état 2* (conférer avec le 4° du § 187).

Nous n'insisterons pas sur la démonstration.

En résumé, on peut passer de l'état 1 à l'état 2 :

1° par des dilatations linéaires le long de trois droites atropiques généralement obliques ;

2° par des dilatations suivant les arêtes d'une infinité de trièdres généralement obliques, suivies d'une rotation en bloc. L'un de ces trièdres est trirectangle ; c'est suivant deux de ses arêtes que la dilatation est maxima et minima.

Ce trièdre trirectangle est déterminé quand on se donne les états 1 et 2, états qui correspondent à deux valeurs  $t_1$  et  $t_2$  de la variable, soit infiniment voisines, soit différant d'une quantité finie. Mais dans ce dernier cas rien ne dit que le trièdre reste trirectangle pour les états intermédiaires.

**190. Réduction du nombre des paramètres ; cas d'une pure rotation.** — Soit  $x, y, z$ , les coordonnées d'un point du corps initial par rapport aux axes  $Ox, Oy, Oz$ . Soit  $x', y', z'$ , les coordonnées du même point, par rapport aux mêmes axes, une fois la rotation effectuée. Cherchons la relation entre ces coordonnées.

Supposons que le corps ait entraîné les axes primitifs qui sont devenus  $O\xi, O\eta, O\zeta$ . Par rapport à ces axes, les coordonnées actuelles sont les mêmes que précédemment par rapport à  $Ox, Oy, Oz$  ; elles sont donc  $x, y, z$ . Par suite, les relations qui existent entre  $x, y, z$ , et  $x', y', z'$ , sont précisément celles qui existent entre les coordonnées d'un même point rapporté à deux systèmes d'axes rectangulaires différents. Les paramètres des équations (I) sont donc les cosinus des angles que les axes font entre eux.

En définitive, il existe entre les neuf paramètres  $d, g, h$ , six relations qui sont, au choix, le système (1) ou le système (2) :

$$\begin{aligned} d_1^2 + g_3^2 + g_2^2 &= 1, & d_1g_3 + h_3d_2 + h_2h_1 &= 0, \\ h_3^2 + d_2^2 + g_1^2 &= 1, & g_3g_2 + d_2g_1 + h_1d_3 &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} h_2^2 + h_1^2 + d_3^2 &= 1, & g_2d_1 + g_1h_3 + d_3h_2 &= 0 ; \\ d_1^2 + h_3^2 + h_2^2 &= 1, & d_1h_3 + g_3d_2 + g_2g_1 &= 0, \\ g_3^2 + d_2^2 + h_1^2 &= 1, & h_3h_2 + d_2h_1 + g_1d_3 &= 0, \quad (2) \\ g_2^2 + g_1^2 + d_3^2 &= 1, & h_2d_1 + h_1g_3 + d_3g_2 &= 0. \end{aligned}$$

Il est facile de montrer que (§ 188) :

$$G = 1 ; \quad d_1 = G_1, \quad d_2 = G_2, \quad d_3 = G_3.$$

En effet, les équations en  $d_1, g_3, g_2$  :

$$\begin{aligned} d_1h_3 + g_3d_2 + g_2g_1 &= 0, \\ d_1h_2 + g_3h_1 + g_2d_3 &= 0, \end{aligned}$$

qui appartiennent au tableau, sont par hypothèse compatibles. On a donc :

$$\frac{d_1}{d_2 d_3 - g_1 h_1} = \frac{g_3}{g_1 h_2 - d_3 h_3} = \frac{g_2}{h_3 h_1 - h_2 d_2}.$$

On tire de là :

$$d_1 = G_1 : \sqrt{(d_2 d_3 - g_1 h_1)^2 + (g_1 h_2 - d_3 h_3)^2 + (h_3 h_1 - h_2 d_2)^2}.$$

La quantité sous le radical peut s'écrire :

$$(h_3^2 + d_2^2 + g_1^2)(h_2^2 + h_1^2 + d_3^2) - (h_3 h_2 + d_3 h_1 + g_1 d_3)^2 = 4.$$

On a donc :  $d_1 = G_1$ , et par suite :

$$g_3 = g_1 h_2 - d_3 h_3, \quad g_2 = h_3 h_1 - h_2 d_2.$$

Mais, d'après sa définition, G a pour expression :

$$G = d_1(d_2 d_3 - g_1 h_1) + g_3(h_2 g_1 - h_3 d_3) + g_2(h_3 h_1 - h_2 d_2)$$

d'où :  $G = d_1^2 + g_3^2 + g_2^2 = 4$ .

Ceci posé, déterminons la position de l'axe de la rotation à laquelle se réduit par hypothèse la transformation. Cet axe est nécessairement une ligne atropique.

L'équation (4) du § 188 devient :

$$\rho^3 - (d_1 + d_2 + d_3)(\rho^2 - \rho) - 4 = 0. \quad (3)$$

Elle admet la racine  $\rho = 1$ , qui, substituée dans deux des équations (2) du § 188, fournit les équations de l'axe de rotation.

Mais *a priori* l'équation (3) peut avoir ses trois racines réelles. Cherchons si l'hypothèse est admissible et à quoi elle correspond.

Divisons (3) par  $(\rho - 1)$ , il reste :

$$\rho^2 + \rho(1 - d_1 - d_2 - d_3) + 4 = 0.$$

Cette équation a ses racines imaginaires, si le coefficient de  $\rho$  est compris entre  $\pm 2$ , c'est-à-dire si la somme  $(d_1 + d_2 + d_3)$  est comprise entre  $-1$  et  $+3$ .

La somme  $(d_1 + d_2 + d_3)$  est certainement inférieure à 3, puisque les  $d$  sont des cosinus; mais elle peut être égale à 3; le coefficient de  $\rho$  peut être égal à  $-2$ . Dans ce cas on a  $\rho = 1$ , pour les trois racines.

En vertu des équations (1) ou (2), les  $g$  et les  $h$  sont nécessairement nuls : la rotation est nulle, les axes  $O\xi$ , ..., coïncident avec les axes  $Ox$ , ...; il peut donc exister sans contradiction trois axes de rotation distincts.

La somme  $(d_1 + d_2 + d_3)$  est nécessairement supérieure à  $-1$ . Écrire qu'elle est égale à  $-1$  revient à supposer qu'on passe des axes  $Ox$ , ..., aux axes  $O\xi$ , ..., par une rotation de  $\pi$  autour de l'un des axes. Si la rotation se fait autour de  $Oz$ , les axes  $Oz$  et  $O\xi$  coïncident,  $d_3 = 1$ ; les autres sont de même direction et de sens contraires;  $d_1 = d_2 = -1$ .

**191. Réduction du nombre de paramètres ; cas d'une pure déformation.** — Cherchons la forme des équations de transformation ; l'opération est définie au § 181.

Soient  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \dots; \alpha_3, \dots$ , les cosinus directeurs des axes rectangulaires de la déformation qui sont par hypothèse des directions invariables.

Rapportées à ces axes, les coordonnées  $\xi, \eta, \zeta$ , et  $\xi', \eta', \zeta'$ , avant et après la déformation, sont reliées par les équations :

$$\xi' = a_1 \xi, \quad \eta' = a_2 \eta, \quad \zeta' = a_3 \zeta.$$

Rapportons-les aux axes  $Ox, Oy, Oz$ . On a indifféremment :

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z, & x &= \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \zeta, \\ \eta &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z, & y &= \beta_1 \xi + \beta_2 \eta + \beta_3 \zeta. & (2) \\ \zeta &= \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z, & z &= \gamma_1 \xi + \gamma_2 \eta + \gamma_3 \zeta. \end{aligned} \quad (1)$$

On obtient encore deux systèmes équivalents (1') et (2') en remplaçant  $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ , par  $x', y', z', \xi', \eta', \zeta'$ .

Considérons le système (2'); on peut écrire :

$$x' = \alpha_1 \xi' + \alpha_2 \eta' + \alpha_3 \zeta' = \alpha_1 a_1 \xi + \alpha_2 a_2 \eta + \alpha_3 a_3 \zeta.$$

Substituant à  $\xi, \eta, \zeta$ , leurs valeurs tirées de (1), il vient :

$$\begin{aligned} x' &= d_1 x + g_3 y + g_2 z, \\ y' &= h_3 x + d_2 y + g_1 z, \\ z' &= h_2 x + h_1 y + d_3 z, \end{aligned} \quad (I)$$

à la condition de poser :

$$\begin{aligned} d_1 &= a_1 \alpha_1^2 + a_2 \alpha_2^2 + a_3 \alpha_3^2, & h_1 &= g_1 = a_1 \beta_1 \gamma_1 + a_2 \beta_2 \gamma_2 + a_3 \beta_3 \gamma_3, \\ d_2 &= a_1 \beta_1^2 + a_2 \beta_2^2 + a_3 \beta_3^2, & h_2 &= g_2 = a_1 \gamma_1 \alpha_1 + a_2 \gamma_2 \alpha_2 + a_3 \gamma_3 \alpha_3, \\ d_3 &= a_1 \gamma_1^2 + a_2 \gamma_2^2 + a_3 \gamma_3^2, & h_3 &= g_3 = a_1 \alpha_1 \beta_1 + a_2 \alpha_2 \beta_2 + a_3 \alpha_3 \beta_3. \end{aligned}$$

Les paramètres se réduisent donc à six distincts grâce aux conditions :

$$h_1 = g_1, \quad h_2 = g_2, \quad h_3 = g_3.$$

Réciproquement, chaque fois que le tableau des neuf paramètres  $d, h, g$ , est symétrique par rapport à la diagonale, les trois directions invariables forment un système trirectangle. La déformation se réduit à des dilatations par rapport à un système trirectangle sans rotation ; elle est *pure*.

Dans tout ce qui précède, on ne suppose rien sur l'ordre de grandeur des paramètres, exception faite pour les deux paragraphes 183 et 184, où nous calculons des formules approximatives dans l'hypothèse que les  $d$  sont voisins de l'unité.

**192. Cas de petites déformations.** — Dans tous les cas où interviennent des déformations homogènes, l'expérience prouve que

la déformation est très petite. Les équations (I) ont alors une interprétation remarquable.

Posons :

$$\begin{aligned} 2\sigma_1 &= h_1 + g_1, & 2\sigma_2 &= h_2 + g_2, & 2\sigma_3 &= h_3 + g_3, \\ 2\rho_1 &= h_1 - g_1, & 2\rho_2 &= g_2 - h_2, & 2\rho_3 &= h_3 - g_3. \end{aligned}$$

Les équations (I) s'écrivent :

$$\begin{aligned} x' &= x + (\delta_1 x + \sigma_3 y + \sigma_2 z) + (\rho_2 z - \rho_3 y), \\ y' &= y + (\sigma_3 x + \delta_2 y + \sigma_1 z) + (\rho_3 x - \rho_1 z), \\ z' &= z + (\sigma_2 x + \sigma_1 y + \delta_3 z) + (\rho_1 y - \rho_2 x). \end{aligned}$$

Posons :

$$\begin{aligned} x' - x &= \Delta x = \Delta_1 x + \Delta_2 x, \\ y' - y &= \Delta y = \Delta_1 y + \Delta_2 y, \\ z' - z &= \Delta z = \Delta_1 z + \Delta_2 z. \end{aligned}$$

Procédant comme au § 96 du tome I de ce Cours, nous décomposons la déformation en deux déformations consécutives :

1° une déformation mesurée par  $\Delta_1 x, \Delta_1 y, \Delta_1 z$ , qui est *irrotationnelle*; elle consiste en des dilatations suivant les axes de la déformation, axes invariables dans l'espace;

2° une rotation dont les composantes sont  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$ , suivant les axes de coordonnées.

Les cosinus directeurs de l'axe instantané de rotation sont :

$$\rho_1 : \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2}, \quad \rho_2 : \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2}, \quad \rho_3 : \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2}.$$

Évalué en radians, l'angle de rotation est :

$$\sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2}.$$

## Classification des cristaux.

**193. Invariabilité du système sous l'action d'une variable scalaire.** — Faisons agir *uniformément* sur un cristal une variable *scalaire*; par exemple, soumettons-le à une température uniforme et variable, à une pression<sup>1</sup> uniforme et variable, ... Je dis que les éléments de symétrie restent invariables; *la classe du cristal se conserve*.

Cette proposition mérite une discussion détaillée.

Considérons, par exemple, un cristal appartenant au système du prisme droit à base rectangle. On peut imaginer sans contradiction que les dilatations soient telles que la base devienne un carré: *ce serait une erreur de croire que le cristal deviendra pour cela du système*

<sup>1</sup> Une pression n'est généralement pas une quantité scalaire; une pression *uniforme* joue exactement le rôle d'une telle quantité.

*quaternaire*. Nous avons suffisamment insisté sur la notion de mériédrie, pour que le lecteur comprenne immédiatement que la symétrie du réseau n'entraîne pas la symétrie de la matière cristalline. Les angles dièdres du cristal pourront bien à *une certaine température* correspondre à un axe quaternaire; mais le mode d'apparition des faces, leurs propriétés physiques, ..., laissent pourtant au cristal sa symétrie inférieure.

Prenons la question d'une manière plus générale.

*L'expérience montre que toute dyssymétrie dans un phénomène doit avoir pour cause une dyssymétrie de constitution, mais que toute dyssymétrie de constitution n'entraîne pas nécessairement une dyssymétrie appréciable dans le phénomène.*

Il résulte immédiatement de là que la variation de l'action *uniforme* d'une variable, quelle qu'elle soit, ne peut diminuer la symétrie. *D'ailleurs elle ne peut pas l'augmenter*; car la variation inverse la diminuerait, ce qui est impossible.

Si donc une variation de température modifie le système cristallin, ce ne peut être que *brusquement*; nous avons étudié précédemment (§ 170 et sq.) de tels changements polymorphiques.

Il ne faut pas conclure de ce qui précède que l'étude d'un cristal à une seule température, ou sous une seule pression uniforme, ne nous renseigne pas absolument sur sa symétrie vraie. Assurément la symétrie apparente peut être *supérieure* à la symétrie vraie. Mais la détermination de la symétrie ne consiste pas uniquement à mesurer les angles des faces. Le réseau d'un cristal orthorhombique pourrait par hasard, à la température d'étude, présenter une symétrie quaternaire. Mais si les propriétés physiques des faces, ou simplement leur nombre, ne suffisaient pas pour lever l'indétermination, les propriétés optiques, par exemple, ne laisseraient aucun doute sur la vraie symétrie: il en serait de même pour toutes les propriétés dont la symétrie ne dépend pas uniquement de la symétrie du réseau.

La symétrie se conservant, il nous est dès lors possible de classer les cristaux par rapport aux déformations homogènes.

*Cette classification est importante parce que nous la retrouverons à propos de tous les phénomènes dont la grandeur est définie au moyen d'un ellipsoïde (§ 181).*

**194. Premier groupe : cristaux isotropes.** — Nous partons de ce principe formulé au paragraphe précédent, que *la symétrie du milieu se retrouve nécessairement dans le phénomène.*

Si le milieu a la *symétrie cubique*, c'est-à-dire possède des axes quaternaires, ternaires et binaires, il va de soi que tout phénomène dont la grandeur est représentée par un ellipsoïde (*peu importe comment*) doit être isotrope; car, seule parmi les ellipsoïdes, la sphère possède les éléments de symétrie d'un cube.

Un cristal cubique se conduit donc comme une matière isotrope. Nous pouvons prendre trois axes rectangulaires quelconques comme axes principaux de la déformation ; elle satisfait aux relations :

$$x' = (1 + \delta)x, \quad y' = (1 + \delta)y, \quad z' = (1 + \delta)z.$$

Le coefficient de dilatation cubique est :  $\theta = 3\delta$ .

**195. Second groupe : cristaux possédant un axe d'isotropie.**

— Un ellipsoïde ne peut admettre un axe ternaire, quaternaire ou sénaire sans être de révolution. Les *systèmes rhomboédrique, quaternaire et hexagonal* sont donc caractérisés par un ellipsoïde de révolution admettant comme *axe d'isotropie*  $\Lambda_x$  l'axe principal cristallographique.

Dans le cas de la déformation homogène, prenons cet axe pour axe des  $z$ . Les axes des  $x$  et des  $y$  sont deux droites rectangulaires quelconques dans le plan normal à l'axe d'isotropie.

Appelons  $\varphi$  l'angle de la direction considérée avec l'axe des  $z$  ; il vient :

$$\begin{aligned} x' &= (1 + \delta_1)x, & y' &= (1 + \delta_1)y, & z' &= (1 + \delta_3)z; \\ \delta &= (\alpha^2 + \beta^2)\delta_1 + \gamma^2\delta_3 = \delta_1 \sin^2 \varphi + \delta_3 \cos^2 \varphi. \end{aligned}$$

Toutes les directions faisant le même angle avec l'axe principal sont homologues.

La dilatation cubique est :

$$\theta = 2\delta_1 + \delta_3.$$

**196. Troisième groupe : cristaux orthorhombiques.** —

L'ellipsoïde est à trois axes inégaux, qui ont des directions invariables et dans l'espace et par rapport au corps. Ils sont parallèles aux axes binaires cristallographiques.

Dans le cas de la déformation homogène, on a :

$$x' = (1 + \delta_1)x, \quad y' = (1 + \delta_2)y, \quad z' = (1 + \delta_3)z,$$

formules rapportées à des axes invariables.

La dilatation cubique est :

$$\theta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3.$$

**197. Quatrième groupe : cristaux clinorhombiques.** —

L'ellipsoïde est à trois axes inégaux ; un seul de ses axes est fixé en position, il coïncide avec l'axe binaire cristallographique. Les deux autres se trouvent nécessairement dans le plan normal à l'axe binaire (plan de symétrie dans les cristaux holoèdres) ; mais leur position est a priori indéterminée dans ce plan.

Dans le cas d'une déformation homogène, voici donc quels seront les phénomènes.

Pour tout intervalle  $t_1$  à  $t_2$  de la variable, nous aurons à déterminer,

dans le plan de symétrie, un système de deux droites rectangulaires dans l'état 1 redevenant rectangulaires dans l'état 2. Non seulement la position de ce système est *a priori* indéterminée pour deux états donnés 1 et 2, mais elle peut être différente pour les diverses opérations  $(t_1, t_2)$ ,  $(t_1, t_3)$ , ... Nous retombons sur la théorie du § 187 à laquelle le lecteur se reportera.

**198. Cinquième groupe : cristaux anorthiques.** — L'ellipsoïde est à trois axes inégaux, placés n'importe comment par rapport aux directions cristallographiques (arêtes du cristal).

Dans le cas d'une déformation homogène, nous aurons donc à déterminer pour toute opération (1, 2) la position du trièdre trirectangle dans l'état 1 qui redevient trirectangle dans l'état 2. Il arrive, et l'expérience montre que c'est le cas ordinaire, que pour les diverses déformations  $(t_1, t_2)$ ,  $(t_2, t_3)$ ,  $(t_1, t_3)$ , ..., le trièdre occupe dans le corps des positions différentes.

**199. Relation des ellipsoïdes représentant divers phénomènes dans le même cristal.** — Les physiciens ont dépensé un labeur énorme à résoudre le problème suivant.

On connaît plusieurs groupes de phénomènes qui sont définis par des ellipsoïdes : 1° la dilatation thermique qui est une déformation homogène ; 2° les conductibilités thermique et électrique qui correspondent à la relation de deux quantités vectorielles ; 3° les phénomènes optiques, ...

Les axes des ellipsoïdes définissant ces phénomènes coïncident-ils, lorsque cette coïncidence n'est pas imposée par la symétrie ?

La réponse est négative, ce qu'on pouvait aisément prévoir d'après les deux paragraphes précédents. Si, en se limitant à la déformation homogène, l'ellipsoïde représentatif n'est pas unique, mais varie avec les limites de l'opération considérée, il n'y a vraiment pas grande chance pour que les autres ellipsoïdes aient leurs axes en coïncidence, comme on l'avait supposé pendant longtemps. De fait, les axes des ellipsoïdes ne coïncident même pas quand il s'agit de phénomènes théoriquement aussi voisins que la conductibilité thermique et la conductibilité électrique.

### Dilatation thermique.

**200. Étude expérimentale.** — La détermination des coefficients de dilatation se fait ordinairement par la méthode de Fizeau, décrite § 247 du tome IV de ce Cours.

On utilise aussi une méthode dans laquelle l'allongement du cristal produit la rotation d'un miroir.

Enfin la mesure de la variation de l'angle de deux faces permet de déterminer le rapport de deux des dilatations principales. Par exemple, l'angle des faces d'un octaèdre quadratique varie si l'arête de base et l'arête latérale ne se dilatent pas dans le même rapport.

Voici quelques coefficients *moyens* pour fixer les idées sur les ordres de grandeur; les cristaux choisis possèdent un axe principal cristallographique.

COEFFICIENTS	SUIVANT L'AXE	NORMALEMENT
Calcite	$26,2 \cdot 10^{-6}$	$-5,4 \cdot 10^{-6}$
Tourmaline	9,4	3,8
Quartz	7,8	14,2
Émeraude	-1,4	1,4.

On remarquera le coefficient *négalif* du spath normalement à l'axe ternaire : le rhomboèdre de spath chauffé se dilate suivant l'axe et se contracte perpendiculairement.

Comme terme de comparaison, disons que le coefficient du cuivre est voisin de  $18 \cdot 10^{-6}$ ; les coefficients des cristaux sont par conséquent du même ordre que ceux des métaux.

Les coefficients de dilatation *vrais* varient assez rapidement avec la température. Par exemple, le coefficient vrai de dilatation du diamant est :  $1,18 \cdot 10^{-6}$  à  $40^\circ$ . Sa variation est assez grande pour qu'il soit nul à  $-40^\circ$ .

**201. Dilatations dans les cristaux clinorhombiques et anorthiques.** — Pour bien comprendre ces questions, faisons le calcul complet pour un cristal clinorhombique; le calcul pour les cristaux anorthiques est trop compliqué et ne nous apprendrait pas grand-chose de plus. La méthode suivante est celle de Neumann.

Représentons en *poh* le plan de symétrie. La section du cristal par ce plan est connue si nous mesurons à chaque température l'angle  $\beta$  et le rapport  $a : b$  des paramètres parallèlement aux arêtes cristallographiques *oh*, *op* (fig. 74 et 113).

Soit OX et OY les droites du corps qui se retrouvent perpendiculaires aux deux températures  $t$  et  $t'$ . On a donc :

$$\mu + \nu = \pi : 2, \quad 1 - \cotg \mu \cotg \nu = 0. \quad (1)$$

Écrivons que les indices de ces droites restent invariables (§ 180); pour cela exprimons ces indices à chacune des deux températures en fonction des quantités expérimentalement déterminables. Prenons :

$$\overline{OC} = b, \quad \overline{MC} = a : q, \quad -\overline{NC} = a : r;$$

$q$  et  $r$  sont les indices.

Les triangles OMD et CMD donnent :

$$\cotg \mu = \overline{OD} : \overline{MD} = \left( b - \frac{a}{q} \cos \beta \right) : \frac{a}{q} \sin \beta, \quad (2)$$

$$\cotg \mu = qA - \alpha, \quad \cotg \nu = -(rA - \alpha),$$

en posant :  $A = \frac{b}{a} \frac{1}{\sin \beta}, \quad \alpha = \cotg \beta.$

Substituons dans (1) les valeurs données par (2); il vient :

$$(qA - \alpha)(rA - \alpha) + 1 = 0, \quad qrA^2 - (q + r)A\alpha + \alpha^2 + 1 = 0. \quad (3)$$

A la température  $t'$  nous aurons de même :

$$qrA'^2 - (q + r)A'\alpha' + \alpha'^2 + 1 = 0, \quad (3')$$

en accentuant les quantités qui correspondent à cette seconde température.

De (3) et de (3') nous pouvons tirer  $qr$ ,  $q + r$ , et par conséquent calculer  $q$  et  $r$ . Connaissant  $q$  et  $r$ , les équations (2) fournissent  $\mu$  et  $\nu$ .

Ces quantités sont donc connues en fonction de  $A$ ,  $A'$ ,  $\alpha$ ,  $\alpha'$  qui sont donnés par l'expérience. Ainsi se trouve complètement déterminé le système des deux droites liées au cristal qui sont rectangulaires aux deux températures  $t$  et  $t'$ .

Ce premier travail effectué, on conçoit la possibilité du calcul des dilatations suivant les directions OX et OY.

Des expériences remarquables ont été faites par Fizeau sur le feldspath orthose, l'épidote, l'amphibole, le gypse, ... Il a pu démontrer ainsi que les axes des ellipsoïdes représentatifs des divers phénomènes ne coïncident pas (§ 199).

Il semble que les droites qui se retrouvent rectangulaires à deux températures, le sont très sensiblement aux températures intermédiaires pour les cristaux clinorhombiques. Mais dans les cristaux anorthiques (où les calculs sont très compliqués), les variations sont notables. Ayant étudié l'anorthite entre 20 et 80°, puis entre 20 et 200°, Beckenkamp trouve que les droites qui redeviennent rectangulaires aux deux premières températures diffèrent des droites qui redeviennent rectangulaires aux deux dernières, d'un angle qui

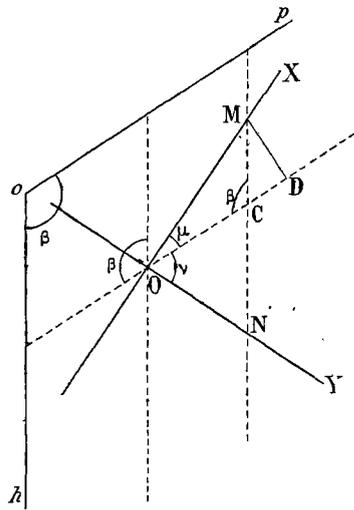


Fig. 150.

dépasse 25°. Les calculs ont été refaits, les résultats expérimentaux confirmés : non seulement les simplifications admises par Neumann (existence d'une pure déformation) sont illégitimes, mais la théorie complète est nécessaire.

Voici ce que cela signifie. Faisons passer la température de 0 à  $t$  degrés. Les neuf coefficients  $\delta$ ,  $g$ ,  $h$ , du système I sont des fonctions quelconques de  $t$  qui s'annulent pour  $t=0$ . Mais nous pouvons toujours poser le cristal sur un plan invariable P que nous prendrons pour plan  $xOy$ , et fixer en direction une des arêtes de la face qui est dans ce plan; nous la prendrons pour axe  $Oy$ . Avec ces restrictions, les équations qui expriment la déformation dans le cas général sont :

$$\begin{aligned}x' - x &= \delta_1 x + g_3 y + g_2 z, \\y' - y &= \delta_2 y + g_1 z, \\z' - z &= \delta_3 z.\end{aligned}$$

Il y a six paramètres à déterminer. L'expérience montre qu'ils sont distincts; ils ne sont généralement pas proportionnels à la température.

Pour le système *monoclinique*, ils se réduisent à quatre. Prenons pour plan P le plan de symétrie, et par suite l'axe  $Oz$  parallèle à l'axe binaire. Les équations deviennent :

$$\begin{aligned}x' - x &= \delta_1 x + g_3 y, \\y' - y &= \delta_2 y, \\z' - z &= \delta_3 z.\end{aligned}$$

Si la déformation était toujours *pure*, nous pourrions toujours réduire les paramètres à trois en choisissant convenablement la face (réelle ou artificielle) posée sur P, et la droite liée au cristal que nous fixons dans ce plan.

Dès que nous savons calculer la déformation qui résulte du passage de 0 à  $t$  degrés, nous savons calculer la déformation de  $t$  à  $t_1$  degrés. Nous admettons en effet que l'état du corps est complètement défini par sa température *actuelle*; l'opération  $(t, t_1)$  équivaut à la différence des opérations  $(0, t_1)$  et  $(0, t)$ .

### Compression uniforme.

**202. Compression uniforme.** — Nous étudierons plus loin le cas général des déformations élastiques. Le problème se simplifie beaucoup quand la compression est uniforme : la déformation est alors homogène, et les cristaux rentrent dans les cinq classes précédemment définies.

Voici quelques nombres pour fixer les idées.

Rappelons d'abord qu'on a trouvé pour coefficient de compressibilité des solides isotropes, en prenant comme unité le kilogramme par centimètre carré (atmosphère) :

VERRE	ACIER	CUIVRE
$\alpha = 0,000\cdot002\cdot2,$	$0,000\cdot000\cdot7,$	$0,000\cdot001.$

Les nombres trouvés pour les cristaux sont du même ordre de grandeur.

Pour le sel gemme (cubique) :

$$\alpha = 0,000\cdot000\cdot40.$$

Pour le spath (rhomboédrique) :  $\alpha = 2\delta_1 + \delta_3$  :

$$\alpha = 0,000\cdot000\cdot151, \quad \delta_3 = 0,000\cdot000\cdot087, \quad \delta_1 = 0,000\cdot000\cdot032.$$

Pour le quartz :

$$\alpha = 0,000\cdot000\cdot260, \quad \delta_3 = 0,000\cdot000\cdot068, \quad \delta_1 = 0,000\cdot000\cdot096.$$

### Glissements.

203. **Définition du glissement.** — On dit que la pure déformation homogène se réduit à un *glissement* quand elle satisfait aux équations :  $x' = dx, \quad y' = y, \quad z' = z + d.$

*Il n'y a pas dilatation suivant l'un des axes ; la dilatation en volume est nulle.*

Soit A un point du corps non déformé, A' le point correspondant du corps déformé. On a (fig. 151) :

$$\overline{OA'} = dx = d \cdot \overline{OA}.$$

Prenons dans le corps non déformé un point B tel que  $\overline{OB} = \overline{OA'}$ . Il lui correspond le point B dans le corps déformé, tel que :

$$\overline{OB} = d \cdot \overline{OB'}.$$

Considérons enfin la droite AB, ou, si l'on veut, le plan AB normal au tableau. Il est transformé par la déformation en le plan A'B' :

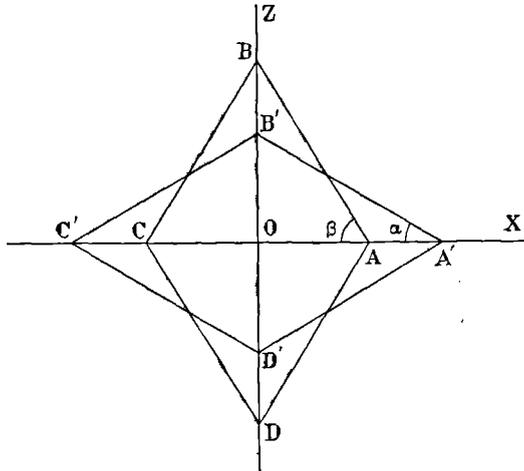


Fig. 151.

on a évidemment  $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ . Le prisme droit à base rhombe ABCD devient le prisme droit à base rhombe A'B'C'D' de même volume et de mêmes angles.

On a :  $\operatorname{tg} \alpha = 1 : d, \quad \operatorname{tg} \beta = d.$

Nous venons de définir deux directions de plans AB et BC qui restent inaltérés dans la transformation; ils ont simplement changé de direction. En particulier, un cercle tracé dans l'un de ces plans appartenant au corps non déformé, est encore un cercle dans le plan correspondant du corps déformé.

Comme une sphère est transformée en un ellipsoïde :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad \frac{x'^2}{d^2} + y'^2 + d^2 z'^2 = 1,$$

les plans précédemment définis correspondent dans le corps déformé aux sections cycliques de l'ellipsoïde.

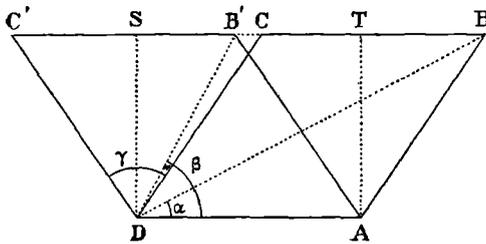


Fig. 152.

#### 204. Représentation du glissement.

— Transportons l'un sur l'autre les deux rhombes de la figure 151, comme le représente la figure 152, en faisant coïncider AD et A'D'. On voit qu'abstraction faite de la rotation du solide considéré comme rigide, la déformation peut être obtenue en maintenant invariable le plan AD normal au tableau, et en faisant glisser les plans parallèles à AD, parallèlement à eux-mêmes; CB vient, par exemple, prendre la position C'B'.

Les points correspondants C, C', B, B', ..., appartenant au second système de plans sans déformation (DC et DC' par exemple), sont symétriques par rapport aux droites DS, AT, ..., normales au premier système de plans sans déformation. On a :

Les points correspondants C, C', B, B', ..., appartenant au second système de plans sans déformation (DC et DC' par exemple), sont symétriques par rapport aux droites DS, AT, ..., normales au premier système de plans sans déformation. On a :

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{tg} \left( 2\beta - \frac{\pi}{2} \right) = -\operatorname{cotg} 2\beta = \frac{1}{2} \left( d - \frac{1}{d} \right).$$

**205. Plans de glissement.** — Quand on appuie la lame d'un couteau normalement à une des arêtes culminantes  $b$  d'un cristal de spath, en un point  $a'$  à quelque distance du sommet ternaire  $a$ , il se produit un glissement, parallèlement à l'arête  $b$ , des plans réticulaires parallèles au plan  $b'$  tangent sur cette arête.

Sans se désagréger, sans que le cristal cesse d'être transparent, la matière se dispose symétriquement à ce qu'elle était par rapport au

plan  $b^1$ . L'angle  $a$ , par où passe l'axe ternaire, devient un angle  $e$  (marqué  $e''$  sur la figure); au point  $a''$  se trouve le point d'aboutissement de l'axe ternaire du nouveau cristal.

En même temps que les plans réticulaires glissent, il faut que les particules tournent pour conserver une orientation convenable par rapport au réseau. On peut encore admettre qu'elles se déforment.

Des phénomènes analogues ne sont pas rares. Une pression exercée sur une lame de galène à l'aide d'une pointe mousse, fait ressortir

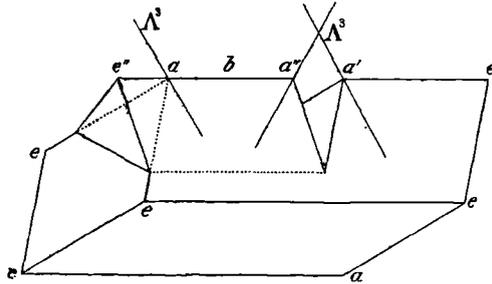


Fig. 153.

de l'autre côté une pyramide quadrangulaire : le trou a lui-même la forme pyramidale. La galène a un clivage parfait suivant les faces du cube. La pyramide est donc composée des faces du dodécaèdre rhomboïdal  $b^1$  tangentes sur les arêtes  $b$  et passant par conséquent par deux côtés opposés du cube. Les arêtes de la pyramide sont parallèles aux diagonales du cube.

La surface d'accolement des deux individus maclés par glissement est toujours une surface de très grande densité réticulaire, et par conséquent de faible cohésion normale.

Comprimons entre deux plans parallèles un rhomboèdre de spath en appuyant deux angles  $e$  opposés sur ces plans; nous le transformerons complètement en un autre rhomboèdre transparent dans lequel les angles  $e$  sont devenus des angles  $a$ .

C'est en somme l'expérience précédente; mais il ne reste plus vestige du premier individu.

## CHAPITRE IV

### RELATIONS ENTRE DEUX QUANTITÉS VECTORIELLES

**206. Relations entre deux vecteurs.** — On représente par un vecteur deux espèces de quantités : les unes sont analogues à des forces, à des vitesses, ... : le vecteur est dit *polaire*; les autres sont analogues à des couples, à des rotations, ... : le vecteur est dit *axial*. La définition du sens du vecteur implique dans les deux cas certaines conventions grâce auxquelles les vecteurs de deux espèces se traitent de même.

La *force électrique* est un vecteur *polaire*, la *force magnétique* est un vecteur *axial*.

Nous ne traiterons dans ce Chapitre et le suivant que des relations entre les vecteurs de même espèce.

Quand un milieu *isotrope* est déformé par un vecteur de composantes  $U, V, W$ , et que la propriété *indice de cette déformation* est un autre vecteur de composantes  $u, v, w$ , ces deux vecteurs coïncident par raison de symétrie; *comme première approximation*, leurs longueurs sont proportionnelles.

On a donc les relations :

$$u = KU, \quad v = KV, \quad w = KW, \quad (1)$$

où  $K$  est une constante caractéristique du milieu.

Un changement d'axes de coordonnées modifie simultanément les composantes des vecteurs, de manière que la relation (1) subsiste avec la même constante  $K$ .

La forme linéaire n'est pas nécessaire. Les raisons de symétrie qui exigent la coïncidence des vecteurs, laissent indéterminée la fonction qui les relie. Mais il est inutile de compliquer.

Quand le milieu est *anisotrope*, on peut admettre, comme première approximation, les relations linéaires à *neuf* coefficients distincts :

$$\begin{aligned} u &= d_1U + g_3V + g_2W, \\ v &= h_3U + d_2V + g_1W, \\ w &= h_2U + h_1V + d_3W. \end{aligned} \quad (2)$$

On dit qu'il y a *égalité symétrique* quand on a :

$$g_1 = h_1, \quad g_2 = h_2, \quad g_3 = h_3.$$

Puisque la relation entre les vecteurs est linéaire, ils se correspondent un à un. En résolvant par rapport à  $U, V, W$ , on obtient d'autres relations linéaires de même forme (2').

Si l'extrémité d'un des vecteurs décrit une sphère, il suffit d'élever au carré les deux membres de l'équation (2) ou (2') et d'additionner, pour prouver que l'extrémité de l'autre vecteur décrit une surface du second degré. Comme cette surface ne peut pas avoir de points à l'infini qui feraient correspondre un vecteur infini à un vecteur fini, elle est nécessairement un ellipsoïde.

**207. Changements des axes de coordonnées.** — Cherchons à simplifier les équations (2) au moyen d'un changement d'axes de coordonnées.

Multiplions les équations (2) respectivement par  $U, V, W$ , et additionnons :

$$\begin{aligned} \mathcal{C} = uU + vV + wW = d_1U^2 + d_2V^2 + d_3W^2 & \quad (1) \\ + (g_3 + h_3)UV + (g_1 + h_1)VW + (g_2 + h_2)WU. \end{aligned}$$

Le premier membre représente une quantité physique bien déterminée et dont la définition est indépendante du choix des axes de coordonnées : c'est le produit des longueurs des vecteurs par le cosinus de l'angle qu'ils font. Cette quantité ne peut pas devenir infinie ; nous admettrons en effet que des vecteurs finis se correspondent toujours. Elle ne peut devenir nulle, ce qui impliquerait : ou que le vecteur excité est nul, ou qu'il est normal au vecteur exciteur. Nous excluons le premier cas ; le second contredit la symétrie : si le vecteur excité était normal au vecteur exciteur, sa position serait indéterminée.

Donnons au vecteur  $U, V, W$ , de longueur invariable unité, toutes les directions possibles définies par les cosinus directeurs  $\alpha, \beta, \gamma$ . Posons :

$$1 : \rho^2 = a\alpha + \beta v + \gamma w; \quad \rho\alpha = x, \quad \rho\beta = y, \quad \rho\gamma = z.$$

L'équation (1) prend la forme :

$$1 = d_1x^2 + d_2y^2 + d_3z^2 + (g_3 + h_3)xy + \dots$$

Elle représente un ellipsoïde, puisque  $\rho$  ne peut être infini... D'ailleurs  $\rho$  représentant un phénomène bien déterminé indépendant du choix des axes, cet ellipsoïde ne doit pas changer malgré les changements d'axes : *c'est un invariant.*

*Rapportons-le à ses axes de symétrie : les coefficients des rectangles disparaîtront.*

*Donc on peut trouver trois directions appelées principales, formant*

un trièdre trirectangle, telles que si on leur rapporte les vecteurs excitateur et excité, il existe entre eux les relations :

$$\begin{aligned} u &= K_1 U - \rho_3 V + \rho_2 W, \\ v &= \rho_3 U + K_2 V - \rho_1 W, \\ w &= -\rho_2 U + \rho_1 V + K_3 W. \end{aligned} \quad (2)$$

Naturellement les  $U, V, W$ , des équations (2) sont les composantes suivant les nouveaux axes.

Pour l'égalité symétrique, les conditions :

$$\rho_i = -\rho_i, \quad \text{entraînent : } \rho_i = 0.$$

Donc quand existe l'égalité symétrique, on peut trouver trois directions appelées principales formant un trièdre trirectangle, telles que si on leur rapporte les vecteurs, il existe entre eux les relations :

$$u = K_1 U, \quad v = K_2 V, \quad w = K_3 W. \quad (3)$$

Généralement, quand l'extrémité de l'un des vecteurs décrit une sphère, l'extrémité de l'autre décrit un ellipsoïde : dans le cas de l'égalité symétrique, les deux vecteurs excité et excitateur coïncident suivant les axes de l'ellipsoïde.

Pour la démonstration de ce théorème, nous aurions pu renvoyer le lecteur au Chapitre précédent ; mais nous préférons lui montrer sur tous leurs aspects ces questions fondamentales.

**208. Travail.** — Si le vecteur  $u, v, w$ , est de la nature d'un déplacement, d'un débit, d'un courant..., et le vecteur  $U, V, W$ , de la nature d'une force, la quantité :

$$\mathcal{E} = uU + vV + wW,$$

est de la nature d'un travail.

Dans ce cas, la stabilité du système considéré implique que ce travail soit toujours positif.

Posons :

$$2\sigma_1 = g_1 + h_1, \quad 2\sigma_2 = g_2 + h_2, \quad 2\sigma_3 = g_3 + h_3.$$

La stabilité exige par conséquent que les coefficients  $d_1, d_2, d_3$ , soient positifs, ainsi que les quantités :

$$d_2 d_3 - \sigma_1^2, \quad d_3 d_1 - \sigma_2^2, \quad d_1 d_2 - \sigma_3^2.$$

Les secondes conditions sont évidemment satisfaites quand les premières le sont et quand simultanément l'égalité est symétrique.

### Énergies électrique et magnétique.

Avant d'étudier les phénomènes de polarisation magnétique et électrique, nous devons rappeler des propositions fondamentales sur l'énergie qui s'appliquent aux deux cas.

Nous supposons que les diélectriques sont parfaits, conséquemment caractérisés, s'ils sont isotropes, par une constante  $K$ , le *pouvoir inducteur spécifique*.

Nous supposons que les corps sont aimantés par induction, c'est-à-dire d'une manière non rigide; ils seront dépourvus d'hystérésis. Isotropes, ils sont caractérisés par leur *perméabilité*  $\mu$  et leur *susceptibilité*  $k$ . Entre ces paramètres existe la relation :

$$\mu = 1 + 4\pi k.$$

**209. Énergie électrique de déformation dans les corps isotropes.** — Nous avons démontré au § 112 du tome III que l'énergie d'un système électrisé peut être considérée comme localisée, non sur les conducteurs portant la charge ou sur les corps qui renferment les électricités libres, mais dans le milieu isolant qui les sépare. Son expression est :

$$W_{\mathbf{E}} = \frac{K}{8\pi} \iiint F^2 dv = \frac{K}{8\pi} \iiint (P^2 + Q^2 + R^2) dv. \quad (1)$$

Cette expression suppose le milieu de pouvoir diélectrique constant  $K$ , mais elle peut être étendue à un nombre quelconque de milieux différents.

Si nous introduisons le *déplacement* défini au § 118 du tome III, nous pouvons écrire cette expression :

$$f = \frac{K}{4\pi} P, \quad g = \frac{K}{4\pi} Q, \quad h = \frac{K}{4\pi} R;$$

$$W_{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} \iiint (Pf + Qg + Rh) dv. \quad (2)$$

Pour simplifier l'écriture, considérons l'unité de volume du corps et supposons les vecteurs constants en grandeur et direction. Nous

écrivons :

$$W_{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} (Pf + Qg + Rh).$$

Supposons que d'abord ce volume n'est pas *déformé*, et faisons croître le vecteur force électrique; évaluons la variation à chaque instant de l'énergie de déformation électrique.

Nous devons écrire :

$$dW_{\mathbf{E}} = Pdf + Qdg + Rdh. \quad (3)$$

Quand on passe de la valeur nulle de la force à sa valeur actuelle,

P, Q, R, et  $f, g, h$ , croissent proportionnellement; d'où l'introduction du facteur 1 : 2 dans l'intégrale.

On conçoit maintenant pourquoi Maxwell a donné le nom de *déplacement* au vecteur  $f, g, h$ . L'expression (3) est celle même qui exprime le travail quand P, Q, R, représentent les composantes d'une force, et  $df, dg, dh$ , les composantes d'un déplacement ordinaire.

Traduisons dans le langage de la théorie des ions (tome III, § 120).

Nous introduisons un déplacement dans l'éther et une polarisation dans les milieux matériels. Nous posons donc, en appelant  $k$  la *susceptibilité diélectrique* ( $1 + 4\pi k = K$ ) :

$$f = \frac{P}{4\pi}, \quad g = \frac{Q}{4\pi}, \quad h = \frac{R}{4\pi};$$

$$A = kP, \quad B = kQ, \quad C = kR;$$

$$W_E = \frac{1}{2}(Pf + Qg + Rh) + \frac{1}{2}(PA + QB + RC).$$

L'énergie de déformation se compose de deux parties qui correspondent l'une à la déformation de l'éther, l'autre à la polarisation du milieu, ou, si l'on veut, *au déplacement des ions hors de leurs positions d'équilibre*. Dans cette seconde partie, nous retrouvons bien une force et un déplacement *aux sens ordinaires des mots*.

Ne considérons que cette seconde partie; nous aurons comme précédemment :

$$dw_E = PdA + QdB + RdC. \quad (3')$$

**210. Énergie magnétique de déformation.** — Les phénomènes d'induction (tome III, § 244) nous amènent pour le magnétisme à des conclusions identiques.

Pour aimanter un milieu, il faut dépenser du travail qui se retrouve sous forme d'énergie de déformation. Considérons l'unité de volume et supposons constant le vecteur force magnétique H (de composantes X, Y, Z). L'énergie de déformation a pour expression :

$$W_M = \frac{\mu}{8\pi}(X^2 + Y^2 + Z^2).$$

Introduisons les composantes A, B, C, du vecteur aimantation  $\mathfrak{J}$  :

$$A = kX, \quad B = kY, \quad C = kZ, \quad \mu = 1 + 4\pi k;$$

$$W_M = \frac{1}{8\pi}(X^2 + Y^2 + Z^2) + \frac{1}{2}(XA + YB + ZC).$$

La première partie se rapporte à l'éther, la seconde au milieu.

Considérons enfin le milieu aimanté peu à peu; abstraction faite de l'énergie d'aimantation du vide, la variation de l'énergie d'aimantation par unité du volume est (tome III, § 299) :

$$dw_M = XdA + YdB + ZdC. \quad (3'')$$

**211. Milieux anisotropes.** — Si le milieu est anisotrope, les relations qui existent entre la polarisation de composantes A, B, C, et la force soit électrique, soit magnétique, sont généralement :

$$\begin{aligned} A &= k_1 P + k_{12} Q + k_{13} R, \\ B &= k_{21} P + k_2 Q + k_{23} R, \\ C &= k_{31} P + k_{32} Q + k_3 R. \end{aligned}$$

S'il s'agit de magnétisme, on remplace P, Q, R, par X, Y, Z. Les résultats sont identiques dans les deux cas. Raisonnons dans le langage électrique.

Cherchons à quelles conditions l'énergie de déformation est complètement déterminée quand on se donne la grandeur et la direction du champ. Il suffit que  $dw$  soit une différentielle exacte, puisque la partie de l'énergie qui correspond à la déformation de l'éther en est toujours une.

Nous devons avoir :

$$P = \frac{\partial w}{\partial A}, \quad Q = \frac{\partial w}{\partial B}, \quad R = \frac{\partial w}{\partial C},$$

et par conséquent :

$$\frac{\partial P}{\partial B} = \frac{\partial Q}{\partial A}, \quad \frac{\partial Q}{\partial C} = \frac{\partial R}{\partial B}, \quad \frac{\partial R}{\partial A} = \frac{\partial P}{\partial C}.$$

Ces relations impliquent les conditions :

$$k_{12} = k_{21}, \quad k_{23} = k_{32}, \quad k_{31} = k_{13}.$$

*L'égalité est symétrique : proposition fondamentale.*

**212. Énergie potentielle des corps polarisés.** — Nous devons revenir sur ce sujet difficile, parce que nous le retrouverons dans les applications.

Au § 53 du tome III, on trouve l'expression suivante de l'énergie potentielle par unité de volume d'un volume polarisé d'une manière rigide et placé dans un champ de composantes :

$$\begin{aligned} P &= -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Q = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad R = -\frac{\partial V}{\partial z}; \\ W &= -(PA + QB + RC). \end{aligned}$$

W représente le travail qu'abandonné à lui-même, le volume polarisé est capable d'accomplir. Il importe d'insister sur cette expression et de montrer la légitimité du signe —.

Supposons qu'un petit aimant de moment  $M = ml$ , soit disposé suivant l'axe des  $x$ . La force magnétique P varie d'une manière quelconque de sa valeur actuelle P au point  $x$  à zéro pour  $x = \infty$ . Évaluons le travail W que peut effectuer l'aimant supposé rigide :

$$W = m \int_{x_2}^{\infty} P dx - m \int_{x_1}^{\infty} P dx = -m \int_{x_1}^{x_2} P dx.$$

Comme l'aimant est petit, nous pouvons considérer  $P$  constant entre  $x_1$  et  $x_2$  et le faire sortir du signe  $\int$  :

$$W = -m \int_{x_1}^{x_2} P dx = -mP \int_{x_1}^{x_2} dx = -Pml = -PA.$$

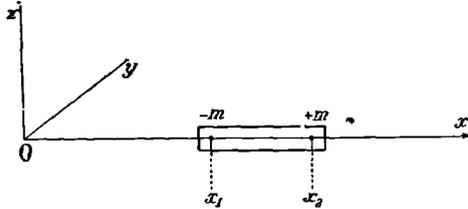


Fig. 154.

Supposons maintenant que *la polarisation n'est pas rigide*. Reprenons exactement le même raisonnement; nous trouvons :

$$W = -\frac{1}{2}(PA + QB + RC),$$

ou, si l'on veut, pour la variation élémentaire :

$$-dW = PdA + QdB + RdC.$$

C'est l'expression même de l'énergie de déformation *changée de signe*.

**213. Déplacements des corps polarisés.** — Un petit corps paramagnétique placé dans un champ variable tend à se déplacer vers les points où la force magnétique est maxima. *Pendant le déplacement, l'énergie potentielle du corps diminue, l'énergie de déformation augmente d'une quantité précisément égale.* Il n'y a d'ailleurs pas compensation entre ces deux variations; nous sommes maîtres d'utiliser sous forme de travail la diminution d'énergie potentielle, et nous pourrions recueillir plus tard l'énergie de déformation. Une source d'énergie extérieure doit fournir une quantité d'énergie égale à deux fois l'une ou l'autre espèces d'énergie.

La règle est générale : *les déplacements s'effectuent de manière que l'énergie potentielle décroisse et que l'énergie de déformation croisse d'autant.*

Ce principe est à la base des §§ 145 et suivants du tome III. Nous y exprimons l'énergie potentielle qui est nécessairement négative (tandis que l'énergie de déformation est nécessairement positive), et nous écrivons qu'elle tend à être minima; cela revient à dire que les petits corps isotropes tendent vers les points où la force est maxima.

Au § 314 du tome III nous disons que *les corps aimantables se*

déplacent toujours de manière que le circuit magnétique ait le moins de réluctance possible. Cela revient à dire qu'ils se déplacent de manière que l'énergie de déformation soit maxima.

Bien entendu, il faut que l'hystérésis soit nulle pour que les propositions précédentes soient applicables.

Pour comprendre clairement le sujet que nous traitons, le lecteur méditera les quatre expériences suivantes. L'appareil se compose : 1° d'un circuit contenant une bobine et une pile dont on supposera la force électromotrice variable de 0 à E ; 2° d'une masse aimantable qu'on peut transporter de l'infini à une position P, dans la bobine par exemple.

1° Soit la masse invariablement dans la position P. Faisons varier la force électromotrice de 0 à E ; le courant  $i$  passe de 0 à I. Simultanément la masse s'aimante et envoie dans la bobine un flux qui varie entre 0 et  $\mathcal{F}$ , flux  $Li$  qui est à chaque instant proportionnel à  $i$ .

Évaluons l'énergie d'aimantation fournie par la pile.

Pendant que le courant passe de  $i$  à  $i + di$ , le flux envoyé par la masse dans le circuit varie de  $Ldi$  ; d'où une force électromotrice induite  $Ldi : dt$  et une absorption d'énergie (tome III, § 245) :

$$i \cdot L \frac{di}{dt} dt = d \left( \frac{Li^2}{2} \right).$$

Quand le courant atteint la valeur limite I, l'énergie fournie est  $LI^2 : 2$ .

2° Plaçons la masse à l'infini, faisons passer le courant qui prend sa valeur limite I ; puis laissons la masse s'approcher de l'infini à la position P lentement, de manière que le courant reste toujours très voisin de I. Le flux envoyé à chaque instant est une fonction de la position. Sous l'influence de la force électromotrice induite, le courant est inférieur à I, tant que la masse se déplace. L'énergie perdue dans le circuit pendant le temps  $dt$  est :  $I \frac{d\mathcal{F}}{dt} dt$ . L'énergie totale perdue (sous forme de diminution apparente de la force électromotrice E) est  $I\mathcal{F}_0$ , où  $\mathcal{F}_0$  est le flux envoyé quand la masse se trouve dans la position P. Mais on a alors :  $\mathcal{F}_0 = LI$  ; l'énergie perdue est  $LI^2$ , double de l'énergie précédemment perdue.

On conçoit la raison de ce résultat : il a fallu fournir la même énergie de déformation que dans la première expérience ; il a fallu fournir, de plus, l'équivalent du travail qu'il est possible de recueillir.

3° Reconnaissons la première expérience avec un aimant absolument rigide et identique à ce que devient la masse aimantable dans la position P sous l'action du courant I. La perte d'énergie par self induction est la même que l'aimant soit ou non en place, puisqu'il ne s'aimante pas.

4° Reconnaissons la seconde expérience. La variation de flux à travers le circuit est exactement la même qu'avec la masse aimantable. La perte d'énergie (sous forme de diminution apparente de la force électromotrice  $E$  de la pile) est  $LI^2$ . Il n'y a pas contradiction avec le 2° pour les deux raisons inverses suivantes : l'énergie de déformation est nulle ; mais, l'aimant ayant toujours son moment magnétique maximum, le travail disponible du fait de la diminution d'énergie potentielle est double de ce qu'il est avec la masse aimantable qui ne s'aimante qu'à mesure de son rapprochement.

214. **Orientation d'une sphère anisotrope dans un champ uniforme.** — Au § 114 du tome III, nous avons démontré que dans le cas d'une sphère isotrope, placée dans un champ uniforme d'intensité  $F$ , l'intensité de polarisation  $\mathcal{J}$  est parallèle à  $F$  et a pour expres-

$$\text{tion :} \quad \mathcal{J} = \frac{3k}{3 + 4\pi k} F.$$

Pour les corps anisotropes (l'égalité étant symétrique), les équations reliant  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , aux composantes *effectives*  $P'$ ,  $Q'$ ,  $R'$  (équations rapportées aux axes principaux) sont :

$$A = k_1 P', \quad B = k_2 Q', \quad C = k_3 R'.$$

Les composantes effectives de la force sont égales aux composantes réelles moins la réaction du milieu aimanté (III, §§ 114 et 287). On a :

$$P' = P - \frac{4\pi A}{3}, \quad Q' = Q - \frac{4\pi B}{3}, \quad R' = R - \frac{4\pi C}{3};$$

$$A = \frac{3k_1}{3 + 4\pi k_1} P, \quad B = \frac{3k_2}{3 + 4\pi k_2} Q, \quad C = \frac{3k_3}{3 + 4\pi k_3} R.$$

L'énergie potentielle a pour expression :

$$W = -\frac{3}{2} \left( \frac{k_1}{3 + 4\pi k_1} P^2 + \frac{k_2}{3 + 4\pi k_2} Q^2 + \frac{k_3}{3 + 4\pi k_3} R^2 \right).$$

Supposons que la sphère puisse tourner autour de l'axe principal qui coïncide avec l'axe des  $z$ ; posons :

$$P = \rho \cos \theta, \quad Q = \rho \sin \theta.$$

La partie variable de l'énergie est :

$$-\frac{3\rho^2}{2} \left( \frac{k_1 \cos^2 \theta}{3 + 4\pi k_1} + \frac{k_2 \sin^2 \theta}{3 + 4\pi k_2} \right).$$

Le couple a pour expression en grandeur et en signe :

$$C = -\frac{\partial W}{\partial \theta} = \frac{\rho^2}{2} \frac{k_2 - k_1}{\left(1 + \frac{4}{3}\pi k_1\right) \left(1 + \frac{4}{3}\pi k_2\right)} \sin 2\theta = \frac{k_2 - k_1}{\left(1 + \frac{4}{3}\pi k\right)^2} \frac{\rho^2 \sin 2\theta}{2},$$

car les trois valeurs principales de la susceptibilité diffèrent toujours fort peu l'une de l'autre.

Le couple est nul pour  $\theta = 0$ ,  $\theta = \pi : 2$ , c'est-à-dire quand l'un des axes principaux coïncide avec la direction de la composante du champ qui est dans le plan  $xy$ . L'équilibre n'est stable que lorsque l'axe de plus grand coefficient  $k$  positif (ou de plus petit coefficient négatif, dans le cas du diamagnétisme) coïncide avec la force.

**215. Corps dans un diélectrique autre que l'air.** — Reportons-nous au § 108 du tome III. Supposons qu'il n'existe nulle part d'électricité libre autre que celle qui provient de la polarisation; l'équation de continuité, au passage d'un milieu de pouvoir diélectrique  $K'$  à un milieu de pouvoir diélectrique  $K''$ , est :

$$K' \frac{\partial V}{\partial n'} + K'' \frac{\partial V}{\partial n''} = 0.$$

Seul le rapport  $K' : K''$  y intervient.

Si donc nous connaissons les conditions d'équilibre d'un corps de pouvoir  $K$  placé dans l'air (où nous donnons une certaine distribution antérieure de force), nous les connaissons pour ce même corps de pouvoir  $K'$  placé dans un milieu indéfini de pouvoir  $K''$ , à la seule condition de remplacer  $K$  par  $K' : K''$ . Bien entendu, nous supposons données dans le nouveau milieu les mêmes forces; par suite, elles resteront encore les mêmes dans le corps introduit.

Tout ce que nous avons dit s'applique à un corps isotrope ou anisotrope placé dans un champ uniforme. Pour simplifier l'écriture appelons  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ , les perméabilités ou pouvoirs diélectriques principaux,  $K$  le pouvoir ou la perméabilité du milieu environnant. Il faut remplacer dans les formules :

$$1 + 4\pi k_1 \text{ par } K_1 : K, \text{ et de même pour } k_2 \text{ et } k_3.$$

Nous savons de plus que les énergies (III, § 112) ont pour expression :

$$W = \frac{K}{8\pi} \iiint F^2 dv.$$

Puisque nous multiplions les deux pouvoirs inducteurs par le même nombre, les forces restant identiques dans le milieu extérieur et par conséquent dans le corps introduit, les actions exercées sur ce corps seront multipliées par  $K$ .

Le problème est donc complètement résolu.

**216. Application à la sphère, corps diamagnétiques apparents.** — Nous avons montré au § 115 du tome III que la force qui s'exerce sur une sphère polarisable placée dans un champ uniforme  $H$

est :

$$X = \frac{3v}{8\pi} \frac{K_1 - 1}{K_1 + 2} \frac{\partial (H^2)}{\partial x}.$$

Si le milieu extérieur, au lieu d'être de l'air, est caractérisé par un paramètre  $K$ , la force est d'après ce qui précède :

$$X = \frac{3v}{8\pi} K \frac{K_1 - K}{K_1 + 2K} \frac{\partial(H^2)}{\partial x}. \quad (1)$$

Nous supposons que par un procédé quelconque la force  $H$  est maintenue la même qu'antérieurement dans le milieu extérieur.

La formule (1) prouve la possibilité d'un diamagnétisme apparent. Il suffit que  $K_1$  soit inférieur à  $K$  pour que le signe de la force soit changé; le corps, au lieu d'aller vers les forces croissantes, ira vers les forces décroissantes. Ainsi un vase, contenant une solution diluée d'un sel de fer, suspendu dans une solution plus concentrée du même sel et soumis à l'action d'un aimant, est repoussé.

*Les actions directrices dans un champ uniforme restent sensiblement les mêmes, malgré le changement du milieu extérieur.* Nous avons trouvé en effet pour le couple directeur :

$$C = \frac{k_2 - k_1}{\left(1 + \frac{4}{3}\pi k\right)^2} \frac{\rho^2 \sin 2\theta}{2} = \frac{9}{8\pi} \frac{K_2 - K_1}{(2 + K_1)^2} \rho^2 \sin 2\theta. \quad (1)$$

Remplaçons  $K_1$  et  $K_2$  par  $K_1 : K$  et  $K_2 : K$ ; multiplions par  $K$ ; il vient :

$$C = \frac{9}{8\pi} \frac{K_2 - K_1}{(2 + K_1 : K)^2} \rho^2 \sin 2\theta. \quad (2)$$

Tant qu'il s'agit de corps peu aimantables,  $K_1$ ,  $K_2$  et  $K$  diffèrent peu de l'unité, les expressions (1) et (2) ont à très peu près les mêmes valeurs.

On explique aisément ce résultat : les actions directrices dépendent non de la perméabilité, mais de la variation de la perméabilité avec la direction.

**217. Ellipsoïde polarisable dans un champ uniforme.** — La théorie de l'ellipsoïde polarisable dans un champ uniforme est très analogue à la théorie de la sphère. On démontre encore que l'aimantation est constante en tout point de l'ellipsoïde, quelle que soit son orientation par rapport au champ. La grandeur de cette aimantation et sa direction dépendent naturellement de l'orientation de l'ellipsoïde.

Nous n'insisterons pas sur les formules qui ne présentent aucun intérêt pratique; voici seulement quelques remarques sur les deux sortes d'actions directrices que subit un ellipsoïde dans un champ uniforme.

*Supposons la matière de l'ellipsoïde isotrope.* — Qu'elle soit magnétique ou diamagnétique, ou plus généralement que son paramètre caractéristique ( $K$  ou  $\mu$ ) soit plus grand ou plus petit que celui du milieu ambiant, l'ellipsoïde tend à placer son grand axe parallèle-

ment au champ. Le couple directeur contient le facteur  $(K_1 - K)^2$  ou, ce qui revient au même,  $(k_1 - k)^2$ ;  $K_1$  et  $K$  sont les pouvoirs inducteurs spécifiques de l'ellipsoïde et du milieu ambiant,  $k_1$  et  $k$  sont leurs susceptibilités.

La force directrice n'a d'ailleurs une valeur sensible que s'il s'agit du fer ou de corps analogues pour lesquels la susceptibilité est notable.

*Supposons la matière de l'ellipsoïde anisotrope.* — Du chef de l'anisotropie, c'est la direction principale de plus grande susceptibilité magnétique, ou de plus petite susceptibilité diamagnétique, qui se dirige parallèlement au champ. Le couple directeur contient le facteur  $(K_1 - K_2)$  ou  $(k_1 - k_2)$ , à supposer que la rotation se fasse autour de la direction principale notée 3.

Naturellement l'ellipsoïde est soumis à l'action directrice qui résulte de sa forme. Mais il est important de remarquer que, sauf pour le fer, le nickel et le cobalt, c'est toujours la seconde action qui l'emporte. De sorte que, *dans un champ uniforme*, l'orientation d'un fragment cristallin ne dépend ni de sa forme, ni de la nature du milieu ambiant; elle dépend seulement de la différence des paramètres suivant les directions principales.

**218. Corps allongés dans un champ variable.** — Dans un champ variable, les phénomènes ne sont simples que si l'on peut négliger la réaction de l'aimantation induite sur le champ. Chaque fragment se déplace alors comme s'il était seul; les forces et couples résultants sont les résultantes des forces et couples calculés pour chaque élément indépendamment des autres.

Un fragment magnétique tendant à se déplacer vers les points de forces intenses, un fragment diamagnétique vers les points de forces faibles, il résulte que les corps allongés, placés entre deux pôles d'aimant, tendent à mettre leur plus grande dimension *parallèlement* ou *perpendiculairement* à la ligne des pôles, suivant qu'ils sont *magnétiques* ou *diamagnétiques*.

**219. Classification des cristaux.** — Nous avons démontré ci-dessus que pour les phénomènes de polarisation électrique ou magnétique, les coefficients rotationnels sont nuls. La symétrie des phénomènes est donc celle d'un ellipsoïde (généralement à trois axes inégaux), même dans les cristaux dont la symétrie est inférieure à celle d'un ellipsoïde. C'est une application de cette règle fondamentale : *la dyssymétrie du phénomène doit trouver sa cause dans la dyssymétrie du milieu, mais la dyssymétrie du milieu ne se retrouve pas nécessairement dans le phénomène.*

Les cristaux se divisent donc en cinq groupes, comme il est expliqué aux §§ 187 et sq. :

1° cristaux isotropes (système régulier);

2° cristaux possédant un axe d'isotropie (systèmes rhomboédrique, quaternaire, hexagonal) ;

3° cristaux orthorhombiques ;

4° cristaux clinorhombiques ;

5° cristaux anorthiques.

Dans le premier cas, l'ellipsoïde est une sphère ; dans le second, il est de révolution ; dans les trois derniers, il est à trois axes inégaux. Sa position est complètement déterminée dans les trois premiers groupes ; elle est déterminée en partie dans le quatrième ; elle est indéterminée dans le cinquième.

### Polarisation magnétique.

220. **Vérifications expérimentales de la théorie.** — Les susceptibilités magnétiques étant généralement très petites, il s'ensuit que le magnétisme superficiel induit (III, § 286) ne modifie pas sensiblement le champ antérieur aux points qui se trouvent actuellement à l'intérieur du corps polarisé. Il en est ainsi pour tous les corps, excepté ceux qui contiennent du fer, du nickel, du cobalt et leurs sels.

Dans ces conditions, la théorie générale se simplifie. *Quelle que soit la forme du corps*, on a :

$$A = k_1 X, \quad B = k_2 Y, \quad C = k_3 Z,$$

en supposant que les axes de coordonnées coïncident avec les directions principales d'aimantation. L'énergie  $W$  par unité de volume est fournie par la formule :

$$-2W = k_1 X^2 + k_2 Y^2 + k_3 Z^2.$$

La détermination des susceptibilités, et concurremment la vérification de la théorie, comportent deux séries d'expériences. Les unes donnent les différences  $k_1 - k_2$ ,  $k_2 - k_3$ ,  $k_3 - k_1$  ; les autres donnent un ou plusieurs des paramètres  $k$ .

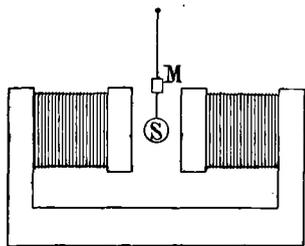


Fig. 155.

La première technique consiste (fig. 155) à suspendre le corps de manière qu'il puisse tourner autour d'une des directions principales (celle qui actuellement coïncide avec l'axe des  $z$  par exemple), à produire un champ *uniforme* normal à l'axe de rotation (parallèle au plan  $xy$  par conséquent), et à déterminer soit par une méthode statique, soit par une méthode dynamique,

la grandeur du couple auquel le cristal est soumis. Il a pour valeur (§ 216) :

$$C = (k_2 - k_1) \rho^2 \sin \theta \cos \theta,$$

où  $\theta$  représente l'angle que fait actuellement le champ avec la direction principale qui est caractérisée par le paramètre  $k_1$ .

La mesure du couple peut être obtenue à l'aide d'un appareil statique de torsion (fil métallique ou bifilaire). Pour que le couple soit maximum, on fait  $\theta = 45^\circ$  : la position d'équilibre du cristal, lorsque le champ n'existe pas, doit être telle que le champ futur bissecte les deux directions principales normales à l'axe de rotation. On excite le champ et on détermine la torsion de l'appareil (fil métallique ou bifilaire). Elle doit être assez petite pour que la condition  $\theta = 45^\circ$ , ne cesse pas d'être sensiblement satisfaite malgré la rotation. On peut encore ramener dans la position  $\theta = 45^\circ$ , par une torsion convenable du fil.

La mesure du couple peut encore résulter de la mesure des durées d'oscillation, quand le champ n'existe pas et quand il existe. Il faut alors que les positions d'équilibre avec et sans champ coïncident, c'est-à-dire que le champ coïncide avec l'un ou l'autre des axes principaux.

Dans l'un des cas, la position d'équilibre est *instable*, à supposer le corps suspendu par un fil sans torsion ; quand il est suspendu par un fil métallique ou un bifilaire, la production du champ accroît la durée d'oscillation.

Dans le second cas, la position d'équilibre est stable : la production du champ diminue la durée d'oscillation.

La seconde technique consiste à déterminer les déplacements d'un fragment du corps dans un champ *non uniforme*. S'il est magnétique (si ses trois paramètres  $k$  sont positifs), il tend à se déplacer vers les points où la force magnétique est maxima ; s'il est diamagnétique (si ses trois paramètres  $k$  sont négatifs), il tend à se déplacer vers les points où la force magnétique est minima. Comme les forces à mesurer sont toujours petites, le corps est suspendu aux extrémités d'un pendule de torsion ; la figure 156 représente une projection horizontale de l'appareil ; le fil de suspension se projette en F.

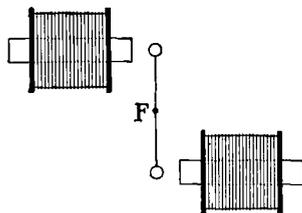


Fig. 156.

**221. Résultat des expériences.** — Les mesures ont principalement porté sur les cristaux uniaxes, pour lesquels les difficultés sont moindres.

Les paramètres  $k$  se réduisent à deux : l'un  $k_p$  correspondant aux directions parallèles à l'axe d'isotropie (axe principal cristallographique), l'autre  $k_n$  correspondant aux directions normales à l'axe d'isotropie.

On appelle cristaux uniaxes *positifs* ceux pour lesquels on a en valeurs absolues :

$$|k_p| > |k_n|.$$

Les cristaux *positifs* peuvent être *magnétiques* :

$$k_p > 0, \quad k_n > 0.$$

Les cristaux *positifs* peuvent être *diamagnétiques* :

$$k_p < 0, \quad k_n < 0.$$

En vertu de cette loi précédemment démontrée que l'axe de plus grand paramètre magnétique ou de moindre paramètre diamagnétique tend à se placer parallèlement au champ, l'axe d'isotropie se mettra : parallèlement au champ dans les cristaux *positifs magnétiques*, perpendiculairement — — *positifs diamagnétiques*.

Les cristaux uniaxes *négatifs* sont définis par la condition :

$$|k_p| < |k_n|.$$

Dans un champ uniforme, l'axe d'isotropie se mettra : perpendiculairement au champ dans les cristaux *négatifs magnétiques*, parallèlement au champ dans les cristaux *négatifs diamagnétiques*.

Le *spath* est positif diamagnétique; le rapport des paramètres est 0,91. Le *bismuth* (rhomboédrique) est positif diamagnétique; le rapport des paramètres est 0,71. Le *fer carbonaté* (rhomboédrique) est positif magnétique : le rapport des paramètres est encore 0,71.

## 222. Cas remarquables; généralisation de la théorie (Weiss).

— Il peut arriver qu'une des susceptibilités s'annule : la matière ne s'aimante que dans un plan. La *pyrrhotine*,  $\text{Fe}^7\text{S}^8$ , est hexagonale. Quand on approche un cristal d'un aimant, l'attraction est nulle quand le champ est parallèle à l'axe sénnaire; elle est relativement grande pour toute autre orientation. On a donc :  $k_p = 0$ .

Les corps cubiques devraient se conduire comme des corps isotropes, à supposer rigoureusement exacte la théorie précédente. Dans un champ uniforme, ils sont par conséquent en état d'équilibre indifférent (quelle que soit leur forme, pourvu qu'elle ne diffère pas trop de la forme sphérique).

La *magnétite* qui se rencontre sous forme de cubes, d'octaèdres et de dodécaèdres rhomboïdaux, qui appartient donc au système cubique (du moins en apparence), échappe à la règle. Comme la théorie précédente ne fait d'autre hypothèse que l'existence d'une relation linéaire entre les composantes de la force magnétique X, Y, Z, et celles de l'aimantation A, B, C, sa généralisation consistera à introduire des termes de degré supérieur au premier.

Naturellement l'indétermination est grande. Sans chercher toutes les formes d'équations conciliables avec la symétrie cubique, nous

choisissons les plus simples qui satisfassent à la fois à la symétrie et aux résultats expérimentaux.

Supposons que l'extrémité du vecteur magnétique  $H$  décrive une sphère  $S$  :

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = H^2.$$

L'extrémité du vecteur  $\mathfrak{J}$  décrira, non plus une sphère, mais une surface  $\Sigma$  différant fort peu de la sphère. Considérons  $X, Y, Z$ , comme les coordonnées des points de la sphère  $S$ ; l'expérience montre que les coordonnées  $A, B, C$ , de la surface  $\Sigma$  sont bien représentées par les relations :

$$\begin{aligned} A &= kX(1 - k'X^2), \\ B &= kY(1 - k'Y^2), \\ C &= kZ(1 - k'Z^2). \end{aligned} \quad (1)$$

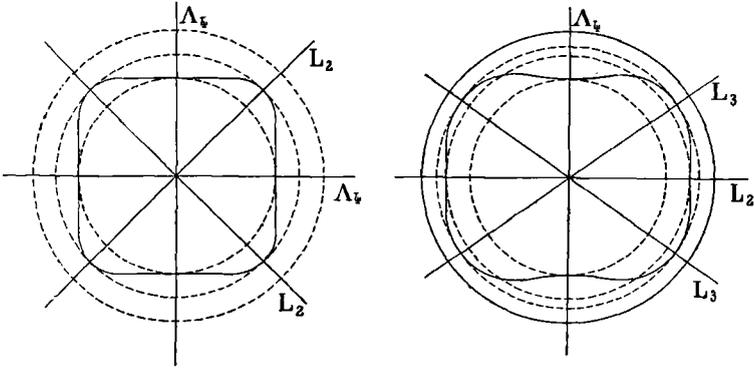


Fig. 157.

On tire de là, en additionnant les carrés et remarquant que  $k'^2$  est négligeable :

$$\mathfrak{J}^2 = k^2 H^2 - 2k^2 k' (X^4 + Y^4 + Z^4); \quad (2)$$

ou encore, au même degré d'approximation :

$$\mathfrak{J} = kH - kk' \frac{X^4 + Y^4 + Z^4}{H}.$$

Il est clair d'après l'équation (2) que les axes sont conservés, que le phénomène admet un centre; bref, que nos hypothèses sont compatibles avec la symétrie du cube.

D'une manière générale, les vecteurs  $\mathfrak{J}$  et  $H$  ne coïncident pas. Ils coïncident en particulier sur les axes. Évaluons les valeurs correspondantes de l'aimantation.

Sur les axes quaternaires (axes de coordonnées), on a :

$$\mathfrak{J} = kH(1 - k'H^2) = kH - kk'H^3.$$

Sur les axes ternaires, on a :

$$X = Y = Z = \frac{H}{\sqrt{3}}, \quad \mathfrak{J}_3 = kH - \frac{kk'H^3}{3}.$$

Sur les axes binaires, il faut faire par exemple :

$$Z = 0, \quad X = Y = \frac{H}{\sqrt{2}}, \quad \mathfrak{J}_3 = kH - \frac{kk'H^3}{2}.$$

D'où la relation :  $3\mathfrak{J}_3 + \mathfrak{J}_4 = 4\mathfrak{J}_2.$

Les figures 157 représentent les aimantations dans les plans de symétrie ; les axes par lesquels passent ces plans, sont indiqués.

Pour les plans parallèles aux faces de l'octaèdre, c'est-à-dire perpendiculaires aux axes ternaires, on a :

$$X + Y + Z = 0.$$

Le calcul montre que  $\mathfrak{J}$  varie très peu dans ces plans.

Toutes ces conséquences des formules (1) sont conformes aux expériences pour la *magnétite*. Le coefficient  $k'$  est petit devant  $k$  ; les figures exagèrent beaucoup la différence entre la surface  $\Sigma$  et une sphère.

**223. Force coercitive.** — La *force coercitive* peut intervenir. Certaines substances cristallines s'aimantent d'une manière permanente. L'exemple classique est fourni par la *magnétite* elle-même  $\text{Fe}^3\text{O}^4$ , qui se rencontre cristallisée et magnétique, sans qu'il existe de relation nécessaire entre l'orientation de son aimantation et ses directions importantes cristallographiques. Il résulte de la force coercitive une complication dans les résultats ; la théorie du paragraphe précédent ne fournit qu'une première et assez grossière approximation.

### Polarisation électrique.

**224. Rotations et déplacements des diélectriques dans les champs électriques.** — Tout ce que nous avons dit de l'orientation des cristaux dans un champ uniforme et de leur déplacement dans un champ variable, s'applique rigoureusement aux diélectriques parfaits, avec cette précision que les susceptibilités sont toujours positives : il n'existe pas de phénomène analogue au diamagnétisme réel.

Mais si la théorie est la même pour les diélectriques parfaits, on rencontre des difficultés expérimentales considérables qui proviennent et de la conductibilité ohmique, et de ce que Maxwell appelle les résidus (III, § 195), c'est-à-dire de l'imperfection de la conductibilité intramoléculaire.

Pour éliminer autant que possible ces causes d'erreur, on utilise

des champs alternatifs. On obtient un champ alternatif uniforme, en reliant les bornes d'un alternateur aux armatures suffisamment étendues d'un condensateur plan. Au besoin on survolte à l'aide d'un transformateur. On obtient un champ alternatif non uniforme, en reliant l'une des bornes d'un alternateur à un corps de forme quelconque, une sphère par exemple.

Aujourd'hui on emploie volontiers des champs de haute fréquence.

Une expérience montrera la nécessité d'utiliser des champs alternatifs. Une boule de spath est suspendue à un fil de cocon, entre les armatures d'un condensateur plan, de manière que son axe d'isotropie soit horizontal. Cet axe se place normalement aux lignes de force si le champ est alternatif (le cristal est *électriquement négatif*), parallèlement si le champ est de direction constante. Le second résultat provient de la conductibilité, meilleure suivant l'axe.

Si le diélectrique se polarisait instantanément, les actions directrices devraient être indépendantes de la période du champ alternatif. Il semble qu'il en soit ainsi à partir d'une fréquence de l'ordre de quelques centaines.

Il est important de ne pas confondre la conductibilité et les résidus.

**225. Méthode du condensateur.** — Soit  $F$  l'intensité du champ uniforme entre les armatures d'un condensateur plan dont le diélectrique est constitué par une lame planparallèle du cristal à étudier.

Prenons pour axes les directions principales de ce cristal; soit  $\alpha, \beta, \gamma$ , les cosinus directeurs de la normale aux armatures. Nous avons donc :

$$P = F\alpha, \quad Q = F\beta, \quad R = F\gamma.$$

Nous savons qu'à la limite d'un milieu polarisé, la densité de surface est (III, § 51) :

$$\sigma = A\alpha + B\beta + C\gamma.$$

D'ailleurs il existe entre la polarisation et le champ la relation :

$$A = k_1P, \quad B = k_2Q, \quad C = k_3R.$$

D'où :

$$\sigma = F(k_1\alpha^2 + k_2\beta^2 + k_3\gamma^2).$$

Tout se passe donc comme si nous avions affaire à un milieu isotrope de susceptibilité diélectrique :

$$k = k_1\alpha^2 + k_2\beta^2 + k_3\gamma^2.$$

On a l'habitude d'introduire les pouvoirs spécifiques; voici pourquoi.

Raisonnons dans la théorie de Lorentz.

Les armatures se chargent non seulement d'une densité  $\sigma$  égale à la densité de polarisation diélectrique, mais aussi d'une densité  $\sigma'$  :

$$\sigma' = F : 4\pi,$$

du fait du *déplacement* dans l'éther. La densité réelle mesurable est :

$$\begin{aligned}\sigma + \sigma' &= F \left[ k_1 \alpha^2 + k_2 \beta^2 + k_3 \gamma^2 + \frac{1}{4\pi} \right] \\ &= F \left[ \frac{1 + 4\pi k_1}{4\pi} \alpha^2 + \dots \right] = \frac{F}{4\pi} \left[ K_1 \alpha^2 + K_2 \beta^2 + K_3 \gamma^2 \right].\end{aligned}$$

Nous pouvons dire que le *pouvoir inducteur spécifique apparent* est :

$$K = K_1 \alpha^2 + K_2 \beta^2 + K_3 \gamma^2.$$

On s'est servi de condensateurs formés de lames cristallines plan-parallèles, convenablement orientées dans le cristal et argentées sur leurs deux faces. Comme elles sont toujours d'aires minimales, on utilise l'artifice de l'anneau de garde.

Voici comment on peut opérer (J. Curie).

On charge le condensateur avec une pile dont l'un des pôles est au sol; l'autre est mis en communication avec l'armature  $A_1$ , elle-même en communication avec l'aiguille d'un électromètre. L'armature  $A_2$  est au sol. On supprime la communication avec la pile, puis on ramène l'électromètre au zéro, en envoyant dans le système formé par l'armature et l'aiguille de l'électromètre une quantité connue d'électricité. Elle est fournie par un quartz piézoélectrique (§ 266).

Si la capacité de l'électromètre est préalablement déterminée, c'est-à-dire si on connaît la quantité dont il faut le charger pour qu'il donne une déviation déterminée, on peut calculer la quantité dont se charge le condensateur sous une force électromotrice connue.

**226. Relation de Maxwell.** — La Théorie électromagnétique de la lumière exige entre le pouvoir inducteur spécifique d'un corps isotrope et son indice de réfraction la relation :

$$K = n^2.$$

Elle ne se vérifie pas, mais on ne peut s'en étonner. L'indice qui entre dans la formule correspond à des longueurs d'ondes énormes par rapport à celles de la lumière : ce sont donc, non pas les indices pour la lumière qu'il faut comparer aux pouvoirs inducteurs spécifiques, mais bien les indices pour les radiations hertziennes de grandes longueurs d'onde.

On sait que  $K$  est généralement très supérieur au carré de l'indice.

Avant de pousser plus loin la comparaison numérique du pouvoir inducteur et de l'indice, généralisons pour les corps anisotropes.

Nous savons que les phénomènes optiques dépendent de l'ellipsoïde des indices (V, § 88) :

$$\frac{x^2}{n_1^2} + \frac{y^2}{n_2^2} + \frac{z^2}{n_3^2} = 1.$$

Il revient au même de dire qu'ils dépendent d'un indice variable  $n$ , fonction de la direction définie par les cosinus directeurs  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  :

$$\frac{\alpha^2}{n_1^2} + \frac{\beta^2}{n_2^2} + \frac{\gamma^2}{n_3^2} = \frac{1}{n^2}.$$

Dans la Théorie électromagnétique, ils dépendent d'un pouvoir inducteur spécifique  $K$  défini par la relation :

$$\frac{\alpha^2}{K_1} + \frac{\beta^2}{K_2} + \frac{\gamma^2}{K_3} = \frac{1}{K}.$$

Considérons les cristaux à axe d'isotropie. Deux des indices principaux sont égaux. Suivant l'axe, l'indice est  $n_o$ ; normalement à l'axe, il est  $n_e$ . On dit que le cristal est :

*positif* quand on a  $n_o < n_e$  (quartz),  
*négatif*  $n_o > n_e$  (spath).

Transportant cette définition aux pouvoirs inducteurs spécifiques, nous dirons que le cristal est :

*positif* quand on a  $K_n < K_p$ , ou  $k_n < k_p$ ,  
*négatif*  $K_n > K_p$ ,  $k_n > k_p$ ;

ce sont les définitions du § 221.

L'expérience montre que le spath est *optiquement et électriquement négatif*, le quartz est *optiquement et électriquement positif*; mais les valeurs numériques ne satisfont pas à la relation (1) :

	$K_p$	$n_e^2$	$K_n$	$n_o^2$	
Quartz	4,55	2,41	4,49	2,38	positif.
Spath	8,03	2,26	8,48	2,75	négatif.
Tourmaline	6,05	2,63	7,10	2,70	négatif.
Béryl	6,24	2,48	7,58	2,50	négatif.

Répétons que de tels résultats ne prouvent rien contre la théorie de Maxwell; les mesures de  $K$  et de  $n$  ne se rapportent pas aux mêmes phénomènes.

## CHAPITRE V

### RELATIONS ENTRE DEUX QUANTITÉS VECTORIELLES (SUITE)

#### Conductibilités thermique et électrique.

Il s'agit encore dans ce Chapitre des relations entre deux vecteurs; mais les phénomènes sont trop différents des phénomènes précédemment étudiés pour que nous les ayons rassemblés dans le même Chapitre.

227. **Le vecteur excitateur dérive d'un potentiel.** — Nous admettons que le vecteur excitateur de composantes  $U, V, W$ , dérive d'un potentiel; c'est dire qu'on a :

$$U = -\frac{\partial T}{\partial x}, \quad V = -\frac{\partial T}{\partial y}, \quad W = -\frac{\partial T}{\partial z}; \quad (1)$$

$T$  est une quantité scalaire supposée connue par sa valeur numérique en tous les points de l'espace considéré : c'est une fonction continue des coordonnées  $x, y, z$ .

La composante du vecteur excitateur en un point  $A$  suivant une direction quelconque  $D$  a pour expression :

$$-\frac{\partial T}{\partial n}; \quad (2)$$

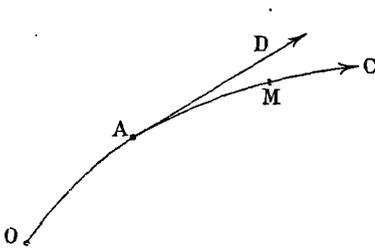


Fig. 158.

c'est la dérivée partielle de la fonction  $T$  par rapport à la variable  $n$  qui repère les points d'une courbe quelconque  $OC$  passant par le point  $A$  et tangente en ce point à la direction  $D$ . La variable  $n$  mesure la distance  $OM$  (comptée sur la courbe) du point quelconque  $M$  à une origine arbitraire  $O$ .

Si nous changeons d'axes, nous n'avons qu'à effectuer le changement sur la fonction  $T$ ; l'expression

(2) de la composante du vecteur parallèlement à une direction déterminée est indépendante du choix des axes.

Dans le cas général, les équations linéaires qui relient le vecteur excité  $u, v, w$ , au vecteur excitateur, se mettent, grâce à un choix convenable des axes, sous la forme (§ 207) :

$$\begin{aligned} u &= -k_1 \frac{\partial T}{\partial x} + \rho_3 \frac{\partial T}{\partial y} - \rho_2 \frac{\partial T}{\partial z}, \\ v &= -\rho_3 \frac{\partial T}{\partial x} - k_2 \frac{\partial T}{\partial y} + \rho_1 \frac{\partial T}{\partial z}, \\ w &= \rho_2 \frac{\partial T}{\partial x} - \rho_1 \frac{\partial T}{\partial y} - k_3 \frac{\partial T}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2)$$

Dans le cas de l'égalité symétrique, elles se réduisent à :

$$u = -k_1 \frac{\partial T}{\partial x}, \quad v = -k_2 \frac{\partial T}{\partial y}, \quad w = -k_3 \frac{\partial T}{\partial z}. \quad (3)$$

228. **Flux du vecteur  $u, v, w$ ; état permanent et état variable.** — Soit un élément de surface  $dS$  dont la normale est définie par les cosinus directeurs  $\lambda, \mu, \nu$ . Le flux du vecteur  $u, v, w$ , à travers l'élément pendant le temps  $dt$ , est d'après la définition générale des flux (III, § 12) :

$$dQ = (u\lambda + v\mu + w\nu) dS dt.$$

Nous savons (III, § 19) que l'excès de ce qui sort du parallélépipède de côtés  $dx, dy, dz$  (dont le centre est au point P de coordonnées  $x, y, z$ ) sur ce qui entre dans ce parallélépipède, est dans le temps  $dt$  :

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dx dy dz dt = \text{Div} (u, v, w) dx dy dz dt,$$

la divergence étant calculée pour le point P.

On dit que l'état est *permanent* lorsque ce qui sort compense exactement ce qui entre dans tous éléments de volume en lesquels on peut diviser l'espace considéré. La permanence s'exprime par la relation :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \text{Div} (u, v, w) = 0, \quad (4)$$

satisfaite pour tous les points de l'espace considéré.

Substituons à  $u, v, w$ , leurs valeurs tirées des équations (2); il

$$\text{vient :} \quad k_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_2 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k_3 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0. \quad (4')$$

Les coefficients *rotationnels*  $\rho$  ont disparu. La permanence s'exprime de la même manière, que l'égalité soit symétrique ou ne le soit pas.

Quand l'état est *variable*, les conditions (4) ne sont plus satisfaites. Nous admettrons que l'excès de ce qui entre sur ce qui sort d'un

élément de volume, amène un accroissement de la fonction *scalaire* T. Soit *c* une constante positive (dans le cas de la conductibilité thermique, c'est le produit de la capacité thermique par la densité); nous aurons :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dt \cdot dx dy dz = -c \frac{\partial T}{\partial t} dt \cdot dx dy dz,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = -c \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (5)$$

Substituons à *u*, *v*, *w*, leurs valeurs en fonction du potentiel; il vient :

$$k_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_2 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k_3 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -c \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (5)$$

que l'égalité soit *symétrique* ou non.

Les axes choisis sont les *axes principaux de conductibilité*.

**229. Conductibilité suivant la normale aux surfaces équipotentielles.** — Pour faciliter le langage, nous supposons qu'il s'agit de la conductibilité thermique. Le potentiel T est la *température*; les surfaces équipotentielles sont les surfaces *isothermes*; les coefficients *k* sont les *conductibilités*; les coefficients  $\rho$  sont les coefficients rotationnels; le vecteur *u*, *v*, *w*, mesure la vitesse d'écoulement de la chaleur.

Il est entendu que tout ce que nous dirons s'applique à la conductibilité électrique.

Prenons pour axes de coordonnées les axes *principaux de conductibilité*, c'est-à-dire les directions qui ramènent à la forme simple (2) les relations entre le vecteur excitateur et le vecteur excité.

Soit  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , les cosinus directeurs de la normale en un point d'une surface équipotentielle.

Repérons les points de cette normale au moyen d'une variable *n*.

Le taux de variation de la température suivant la normale, *ligne de pente des températures*, est :

$$-\frac{\partial T}{\partial n}.$$

On a :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \alpha \frac{\partial T}{\partial n}, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \beta \frac{\partial T}{\partial n}, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = \gamma \frac{\partial T}{\partial n}.$$

$$u = (-k_1 \alpha + \rho_3 \beta - \rho_2 \gamma) \frac{\partial T}{\partial n},$$

$$v = (-\rho_3 \alpha - k_2 \beta + \rho_1 \gamma) \frac{\partial T}{\partial n},$$

$$w = (\rho_2 \alpha - \rho_1 \beta - k_3 \gamma) \frac{\partial T}{\partial n}.$$

Calculons le flux à travers l'élément  $dS$  de la surface isotherme pendant l'unité de temps ; il faut poser :  $\alpha = \lambda$ ,  $\beta = \mu$ ,  $\gamma = \nu$  ;

$$dQ = (u\alpha + v\beta + w\gamma) dS.$$

$$dQ = -(k_1\alpha^2 + k_2\beta^2 + k_3\gamma^2) \frac{\partial T}{\partial n} dS; \quad (1)$$

les coefficients rotationnels ont disparu.

Si le milieu était isotrope et de conductibilité  $k$ , l'expression du flux à travers l'élément  $dS$  d'une surface équipotentielle serait :

$$dQ = -k \frac{\partial T}{\partial n} dS. \quad (2)$$

Comparant les expressions (1) et (2), nous voyons que *tout se passe comme si le milieu anisotrope était caractérisé dans chaque direction  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , par une conductibilité :*

$$k = k_1\alpha^2 + k_2\beta^2 + k_3\gamma^2;$$

$k$  est ce qu'on appelle la conductibilité suivant la pente des températures, ou la conductibilité suivant la normale aux surfaces équipotentielles, ou simplement la conductibilité normale.

Le vecteur  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , n'est pas normal aux surfaces isothermes ; la direction du flux fait avec la ligne de pente des températures l'angle  $\theta$  :

$$\cos \theta = \frac{u\alpha + v\beta + w\gamma}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}};$$

l'angle  $\theta$  dépend des coefficients rotationnels.

**230. Conductibilité dans le sens du courant.** — Nous pouvons définir la *conductibilité  $k'$  dans le sens du courant* (c'est-à-dire dans la direction du vecteur  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ) par une relation identique à l'équation (2) du paragraphe précédent : c'est le flux par unité de surface normale au courant, divisé par le taux de variation de la température dans la direction du courant :

$$k' = -\sqrt{u^2 + v^2 + w^2} : \left( \frac{\partial T}{\partial n} \cos \theta \right) = -(u\alpha + v\beta + w\gamma) : \left( \frac{\partial T}{\partial n} \cos^2 \theta \right).$$

$$k = k' \cos^2 \theta.$$

$k'$  dépend généralement des coefficients rotationnels.

On démontre que, dans le cas général,  $k'$  est égal au carré du rayon vecteur d'un certain ellipsoïde qu'on appelle *ellipsoïde des conductibilités linéaires*.

Calculons  $k'$  dans le cas où l'égalité est symétrique.

$$u = -k_1\alpha \frac{\partial T}{\partial n}, \quad v = -k_2\beta \frac{\partial T}{\partial n}, \quad w = -k_3\gamma \frac{\partial T}{\partial n}.$$

Appelons  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$ , les cosinus directeurs du courant; il vient :

$$\frac{\alpha'}{k_1\alpha} = \frac{\beta'}{k_2\beta} = \frac{\gamma'}{k_3\gamma} = \frac{1}{\sqrt{k_1^2\alpha^2 + k_2^2\beta^2 + k_3^2\gamma^2}}.$$

$$\cos \theta = \frac{k_1\alpha^2 + k_2\beta^2 + k_3\gamma^2}{\sqrt{k_1^2\alpha^2 + k_2^2\beta^2 + k_3^2\gamma^2}}, \quad \frac{\alpha'^2}{k_1} = \frac{k_1\alpha^2}{k_1^2\alpha^2 + k_2^2\beta^2 + k_3^2\gamma^2},$$

et des formules analogues pour  $\beta'^2 : k_2$  et  $\gamma'^2 : k_3$ . On tire de là :

$$\frac{1}{k'} = \frac{\cos^2 \theta}{k} = \frac{\alpha'^2}{k_1} + \frac{\beta'^2}{k_2} + \frac{\gamma'^2}{k_3}.$$

$k'$  est la conductibilité dans le sens du courant défini en direction par les cosinus directeurs  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$ .

231. **Source de chaleur punctiforme à l'intérieur d'un corps anisotrope indéfini; ellipsoïde principal.** — Nous avons démontré plus haut que l'état permanent se traduit par la rela-

$$\text{tion : } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = k_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_2 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k_3 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0, \quad (1)$$

que les coefficients rotationnels existent ou non, pourvu qu'on choisisse comme axes de coordonnées les axes principaux de conductibilité.

On a une solution de la relation (1) en posant :

$$T = \frac{\delta}{\sqrt{\frac{x^2}{k_1} + \frac{y^2}{k_2} + \frac{z^2}{k_3}}} + T_0.$$

Dans cette hypothèse, la température est constante sur les ellipsoïdes concentriques et homothétiques (*ellipsoïdes principaux*) :

$$\frac{x^2}{k_1} + \frac{y^2}{k_2} + \frac{z^2}{k_3} = R^2 = \left( \frac{\delta}{T_0 - T} \right)^2.$$

Elle varie de l'infini pour l'origine à la valeur  $T_0$  pour une distance très grande de l'origine.

Il est clair que dans la réalité on n'aura jamais à considérer les surfaces qu'à une distance de l'origine suffisante pour que la valeur  $T = \infty$  n'intervienne pas.

Pour les corps isotropes, les surfaces isothermes deviennent des sphères.

Calculons les dérivées de  $T$  par rapport à  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ; on a :

$$-k_1 \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{x\delta}{R^3}, \quad -k_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\delta}{R^3} - \frac{3\delta}{R^5} \frac{x^2}{k_1},$$

et des formules symétriques pour les autres dérivées.

On tire de là :

$$k_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_2 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k_3 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{3\delta}{R^3} + \frac{3\delta}{R^5} \left( \frac{x^2}{k_1} + \frac{y^2}{k_2} + \frac{z^2}{k_3} \right);$$

cette quantité est donc nulle sur tous les ellipsoïdes considérés.

Les surfaces isothermes qui correspondent à une source punctiforme de chaleur dans un milieu indéfini, ont même forme, que l'égalité soit symétrique ou non. Cela ne veut pas dire que les phénomènes sont identiques dans les deux cas.

Assurément la quantité de chaleur qui sort d'un ellipsoïde, ne dépend pas des coefficients rotationnels; mais la forme des courants en dépend. Dans le cas non symétrique, il existe un tourbillonnement de la chaleur autour des sources. Dans le cas symétrique, nous allons voir que le tourbillonnement n'existe pas; le flux se fait suivant les rayons vecteurs qui émanent de la source.

**232. Source punctiforme dans un milieu symétrique.** — Dans le cas de l'égalité symétrique, on a :

$$u = -k_1 \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{x\delta}{R^3}, \quad v = -k_2 \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{y\delta}{R^3}, \quad w = -k_3 \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{z\delta}{R^3};$$

d'où :

$$\frac{u}{x} = \frac{v}{y} = \frac{w}{z}.$$

*Le flux en un point se fait suivant la direction même du rayon vecteur qui part de la source punctuelle et aboutit en ce point. Les tubes de flux sont des cônes qui ont la source pour sommet.*

Montrons que le flux est conservatif à l'intérieur de chacun de ces cônes. Soit  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$ , les cosinus directeurs de la direction moyenne des génératrices d'un cône infiniment petit d'angle solide  $d\omega$ . Le flux à travers une section droite, à la distance  $r$  de l'origine, est :

$$dQ = (u\alpha' + v\beta' + w\gamma')r^2 d\omega = (ux + vy + wz)rd\omega.$$

Remplaçons  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , par leurs valeurs :

$$dQ = \frac{\delta}{R^3} (x^2 + y^2 + z^2)rd\omega = \frac{\delta r^3 d\omega}{R^3} = \frac{\delta d\omega}{\left( \frac{\alpha'^2}{k_1} + \frac{\beta'^2}{k_2} + \frac{\gamma'^2}{k_3} \right)^{\frac{3}{2}}}.$$

$dQ$  dépend de la direction et de l'angle solide, mais non de la distance  $n$ ; c'est en cela que le flux est conservatif.

**233. Ellipsoïde des conductibilités dans un milieu symétrique.** — Reprenons le calcul de la *conductibilité suivant le courant*  $k'$ , paramètre déjà défini au § 230.

Écrivons que le flux de chaleur suivant le rayon est égal au produit de  $k'$  par l'aire  $r^2 d\omega$  et par le taux de variation de la tempéra-

ture le long du rayon; égalons ce produit à la valeur trouvée au paragraphe précédent :

$$dQ = k' \frac{\partial T}{\partial r} r^2 d\omega = \frac{\delta r^3 d\omega}{R^3}.$$

On à, d'après les calculs faits plus haut :

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \alpha' \frac{\partial T}{\partial x} + \beta' \frac{\partial T}{\partial y} + \gamma' \frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{x}{r} \frac{x\delta}{R^3} \frac{1}{k_1} - \frac{y}{r} \frac{y\delta}{R^3} \frac{1}{k_2} - \frac{z}{r} \frac{z\delta}{R^3} \frac{1}{k_3};$$

d'où :

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\delta}{rR}, \quad dQ = k'\delta \frac{r}{R} d\omega = \delta \frac{r^3}{R^3} d\omega, \quad k' = \frac{r^2}{R^2};$$

$$\frac{1}{k'} = \frac{R^2}{r^2} = \frac{\alpha'^2}{k_1} + \frac{\beta'^2}{k_2} + \frac{\gamma'^2}{k_3}.$$

C'est le calcul du § 230 dans le cas d'une forme particulière des surfaces isothermes.

Considérons l'ellipsoïde :

$$A = \frac{x^2}{k_1} + \frac{y^2}{k_2} + \frac{z^2}{k_3},$$

que nous appellerons *ellipsoïde des conductibilités linéaires*. Il est identique à l'ellipsoïde principal parce que nous supposons nuls les coefficients rotationnels; *il n'en serait plus ainsi dans le cas général* (§ 238).

Cherchons la relation qui existe entre les cosinus directeurs  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$ , du rayon vecteur allant du centre de l'ellipsoïde (origine des coordonnées) à un point  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$ , de la surface, et les cosinus directeurs  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , de la normale au plan tangent à l'ellipsoïde en ce point.

Le plan tangent a pour équation :

$$\frac{xx_1}{k_1} + \frac{yy_1}{k_2} + \frac{zz_1}{k_3} = A.$$

D'après la définition des quantités  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$ , on a :

$$\frac{\alpha'}{x_1} = \frac{\beta'}{y_1} = \frac{\gamma'}{z_1}, \quad \alpha : \left(\frac{x_1}{k_1}\right) = \beta : \left(\frac{y_1}{k_2}\right) = \gamma : \left(\frac{z_1}{k_3}\right);$$

d'où :

$$\frac{\alpha'}{k_1\alpha} = \frac{\beta'}{k_2\beta} = \frac{\gamma'}{k_3\gamma};$$

ce sont précisément les relations obtenues au § 230.

COROLLAIRE.

Soit dans un milieu anisotrope des surfaces isothermes quelconques. Pour trouver la direction du courant en un point P de l'une d'elles S, construisons l'ellipsoïde des conductibilités caractéristique du milieu ou un ellipsoïde semblable. Ils ont dans le milieu une orientation parfaitement déterminée (fig. 159).

Transportons l'un ou l'autre, sans changer la direction de ses axes, jusqu'à ce qu'il tangente la surface  $S$  au point  $P$ . La direction du courant est celle de la droite  $OP$  qui joint le centre de l'ellipsoïde au point de contact.

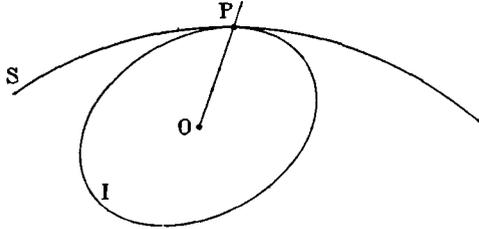


Fig. 159.

Les cosinus directeurs  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$ , du courant et, par suite, la valeur correspondante de  $k'$  sont ainsi déterminés.

**234. Courants dans les milieux asymétriques.** — Reprenons le cas général et cherchons quelles sont les trajectoires de la chaleur émise par un point dans un milieu homogène indéfini.

Considérons la trajectoire qui passe par le point  $P$ ; déplaçons-nous sur elle à partir de ce point. Soit  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , les accroissements des coordonnées. La tangente à la trajectoire étant par définition parallèle au vecteur  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , on a :

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}.$$

Les surfaces isothermes étant des ellipsoïdes homothétiques de l'ellipsoïde principal, on a :

$$-\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{x}{k_1} \frac{\delta}{R^3}, \quad -\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{y}{k_2} \frac{\delta}{R^3}, \quad -\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{z}{k_3} \frac{\delta}{R^3},$$

et par conséquent, à un facteur près :

$$u = x - \frac{\rho_3}{k_2} y + \frac{\rho_2}{k_3} z,$$

$$v = \frac{\rho_3}{k_1} x + y - \frac{\rho_1}{k_3} z,$$

$$w = -\frac{\rho_2}{k_1} x + \frac{\rho_1}{k_2} y + z.$$

Les équations différentielles de la trajectoire sont donc :

$$\begin{aligned} dx : \left[ x - \frac{\rho_3}{k_2} y + \frac{\rho_2}{k_3} z \right] &= dy : \left[ \frac{\rho_3}{k_1} x + y - \frac{\rho_1}{k_3} z \right] \\ &= dz : \left[ -\frac{\rho_2}{k_1} x + \frac{\rho_1}{k_2} y + z \right]. \end{aligned}$$

Il n'y a propagation rectiligne que dans une seule direction que nous appellerons D et qui est définie par les conditions :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}, \quad \frac{x}{k_1 \rho_1} = \frac{y}{k_2 \rho_2} = \frac{z}{k_3 \rho_3}.$$

Pour savoir ce qui se passe généralement, nous nous servirons d'un corps auxiliaire; nous remplacerons :

$$x, y, z, \text{ par } x\sqrt{k_1}, y\sqrt{k_2}, z\sqrt{k_3};$$

nous poserons :

$$\rho_1 : \sqrt{k_2 k_3} = \omega_1, \quad \rho_2 : \sqrt{k_3 k_1} = \omega_2, \quad \rho_3 : \sqrt{k_1 k_2} = \omega_3.$$

Les équations de la trajectoire deviennent :

$$\frac{dx}{x - \omega_3 y + \omega_2 z} = \frac{dy}{\omega_3 x + y - \omega_1 z} = \frac{dz}{-\omega_2 x + \omega_1 y + z}.$$

Ces équations étant linéaires, tout changement d'axes les laissera de même forme. Prenons comme nouvel axe des  $z$  la droite D' trans-

formée de D :

$$\frac{x}{\omega_1} = \frac{y}{\omega_2} = \frac{z}{\omega_3}.$$

Les équations deviennent :

$$\frac{dx}{x - \omega y} = \frac{dy}{\omega x + y} = \frac{dz}{z}. \quad (1)$$

**235. Mouvement spiraliforme.** — Discutons l'équation (1) du paragraphe précédent. Transformons en coordonnées polaires :

$$x = r \cos \psi, \quad y = r \sin \psi.$$

Substituons dans la première équation (1), il reste :

$$\omega dr = r d\psi, \quad \psi = \psi_0 + \omega \log r. \quad (2)$$

Substituant dans la dernière équation (1), il vient :

$$\frac{dz}{z} = \frac{d\psi}{\omega} = \frac{dr}{r}, \quad z = Ar. \quad (3)$$

L'équation (3) représente des cônes circulaires de révolution autour de l'axe des  $z$ . Pour  $A = 0$ , on obtient l'axe des  $z$ ; pour  $A = \infty$ , on obtient le plan des  $xy$ .

L'équation (2) représente des spirales logarithmiques. Supposons l'une de ces spirales construite dans le plan des  $xy$  avec une valeur arbitraire de  $\psi_0$ ; on obtient toutes les autres, en nombre infini, en la faisant tourner d'un angle quelconque autour de l'axe des  $z$ .

Les trajectoires cherchées sont donc des spirales enroulées sur des cônes circulaires. Voici comment elles sont obtenues.

Construisons une spirale S dans le plan des  $xy$  et un double cône circulaire admettant l'axe des  $z$  comme axe de révolution. Faisons passer par la spirale un cylindre dont les génératrices sont parallèles

à l'axe des  $z$ ; il coupe le double cône suivant deux spirales, symétriques par rapport au plan des  $xy$ .

Recommençant la construction pour toutes les spirales obtenues en faisant tourner  $S$  d'un angle quelconque, nous recouvrons le double cône de deux séries infinies de spirales, identiques entre elles et symétriques deux à deux par rapport au plan des  $xy$ .

Enfin recommençant la construction pour tous les cônes (en nombre infini) qu'on obtient quand  $A$  varie de  $0$  à  $\infty$ , nous remplissons l'espace de spirales symétriques deux à deux par rapport au plan des  $xy$ .

La solution est donc complète pour le corps auxiliaire. Pour passer

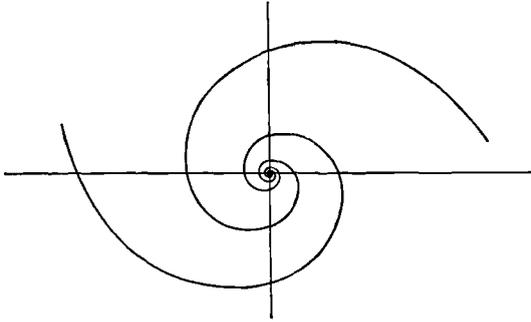


Fig. 160.

au corps réel, il faut dilater inégalement les coordonnées. D'où la solution suivante que nous ne croyons pas utile de démontrer dans ses détails : *Les courants de chaleur sont généralement des spirales construites sur des cônes à base elliptique et ayant leur sommet au point source. Les ellipses sur lesquelles s'appuient les génératrices des cônes (ellipses directrices) sont conjuguées, dans l'ellipsoïde principal, du diamètre de direction  $D$  défini au § 234.*

Voici ce qu'il faut entendre par là : menons dans l'ellipsoïde principal le diamètre de direction  $D$ ; prenons le plan diamétral conjugué  $P$ , puis considérons tous les plans parallèles  $P$ . Ils coupent l'ellipsoïde suivant des ellipses. L'une d'elles se réduit à un point;  $P$  est alors tangent à l'ellipsoïde; le cône se réduit à la droite  $D$ . Lorsque le plan  $P$  passe par le centre, le cône se réduit à un plan.

Comme les dilatations inégales de coordonnées ne détruisent pas le parallélisme, nous concluons que la tangente à une spirale construite sur un cône elliptique reprend sa direction à chaque tour, c'est-à-dire au retour de la spirale sur une génératrice donnée du cône.

**236. Classification des cristaux.** — La théorie précédente implique que, *par rapport aux phénomènes de conductibilité, les*

*cristaux homogènes admettent un centre; autrement dit, la conductibilité est la même dans les deux sens sur une même droite.* Analytiquement le renversement bout pour bout du vecteur exciteur n'a d'autre effet que de renverser bout pour bout le vecteur excité; le changement de  $U, V, W$ , en  $-U, -V, -W$ , transforme  $u, v, w$ , en  $-u, -v, -w$ .

Or il n'est pas évident *a priori* qu'il en soit ainsi dans les cristaux dépourvus de centre; par exemple, la conductibilité de la tourmaline parallèlement à l'axe pourrait différer suivant le sens d'écoulement de la chaleur. Les expériences les plus exactes montrent que la théorie est suffisante.

Il résulte des paragraphes précédents deux conséquences fondamentales.

1° Une spirale ne peut admettre de plan de symétrie; donc s'il existe des coefficients rotationnels, il ne peut exister de plan de symétrie  $P$  que normalement à la direction  $D$  (§ 235) autour de laquelle s'enroulent les spirales. Mais comme il existe un centre, cette direction  $D$  devient un axe pair: elle coïncide donc avec un des axes de l'ellipsoïde principal. Les spirales sont alors deux à deux symétriques par rapport au plan  $P$ .

2° Nous avons vu que les spirales sont enroulées sur des cônes à bases elliptiques. Or une ellipse n'admet que des axes binaires, ou bien elle se transforme en un cercle. Donc les axes de symétrie du phénomène sont nécessairement d'ordre deux ou d'ordre infini.

Ceci posé, nous allons montrer que les cristaux se classent en six groupes par rapport aux phénomènes de conductibilités calorifique ou électrique. Les numéros indiquent la classe; on se reportera au tableau du § 101.

#### PREMIER GROUPE.

*Cristaux isotropes, système cubique.*

Les coefficients rotationnels sont nuls; l'ellipsoïde principal est une sphère. Les phénomènes ne dépendent que d'un seul paramètre :

$$u = kU, \quad v = kV, \quad w = kW.$$

#### DEUXIÈME GROUPE.

*Cristaux admettant un axe d'isotropie et pour lesquels les coefficients rotationnels sont nuls.*

Système hexagonal : holoédrie (27), hémiedrie énantiomorphe (9), hémiedrie hémimorphe (23), hémiedrie sphénoïdale (25).

Système rhomboédrique : holoédrie (29), hémiedrie énantiomorphe (7), hémiedrie hémimorphe (21).

Système quaternaire : holoédrie (26), hémiedrie énantiomorphe (8), hémiedrie hémimorphe (22), hémiedrie sphénoïdale (28).

L'ellipsoïde principal est de révolution; l'axe de révolution coïncide avec l'axe d'isotropie.

Les paramètres caractéristiques se réduisent à deux :

$$u = k_1 U, \quad v = k_1 V, \quad w = k_3 W.$$

TROISIÈME GROUPE.

*Cristaux admettant un axe d'isotropie et pour lesquels les coefficients rotationnels ne sont pas nécessairement nuls.*

Système hexagonal : hémiedrie paramorphe (19), tétartoédrie (5), tétartoédrie sphénoïdale (14).

Système rhomboédrique : hémiedrie paramorphe (16), tétartoédrie (3).

Système quaternaire : hémiedrie paramorphe (18), tétartoédrie (4), tétartoédrie sphénoïdale (13).

Pour ces cristaux, la théorie faite sur le *corps auxiliaire* (§ 233) est immédiatement applicable.

Les paramètres caractéristiques se réduisent à trois :

$$\begin{aligned} u &= k_1 U - \rho V, \\ v &= \rho U + k_1 V, \\ w &= k_3 W. \end{aligned}$$

L'ellipsoïde principal est de révolution. La droite D coïncide avec un de ses axes. Les spirales s'enroulent sur des cônes circulaires.

QUATRIÈME GROUPE.

*Système orthorhombique.*

Les coefficients rotationnels sont nécessairement nuls; mais l'ellipsoïde principal est à trois axes inégaux. Rapportons le solide aux directions principales; on a :

$$u = k_1 U, \quad v = k_2 V, \quad w = k_3 W.$$

CINQUIÈME GROUPE.

*Système clinorhombique.*

La direction D coïncide nécessairement avec l'axe binaire et aussi avec l'un des axes de l'ellipsoïde principal. Les spirales sont enroulées sur des cônes elliptiques; mais elles sont deux à deux symétriques par rapport au plan de symétrie du cristal.

Prenons l'axe binaire comme axe des  $z$  et choisissons convenablement les axes des  $x$  et des  $y$ ; on a :

$$\begin{aligned} u &= k_1 U - \rho V, \\ v &= \rho U + k_2 V, \\ w &= k_3 W. \end{aligned}$$

Il y a seulement quatre coefficients distincts, grâce à un choix convenable des axes des  $x$  et  $y$ ; autrement il y a cinq coefficients distincts.

SIXIÈME GROUPE.

*Système triclinique.*

Il y a neuf coefficients distincts qu'on réduit à six par un choix convenable des axes.

### Étude expérimentale des conductibilités.

**237. Méthodes du mur et du cylindre mince.** — Une première catégorie de méthodes utilise la mesure du flux. Elle se divise naturellement en deux groupes : 1° on impose les surfaces équipotentielles ; 2° on impose les lignes de courant.

La *méthode du mur* consiste à utiliser une lame planparallèle de la substance, large relativement à son épaisseur  $e$ , et dont les faces sont portées à des températures différentes  $T_1$  et  $T_2$ , ou à des potentiels différents, s'il s'agit de conductibilité électrique. Les surfaces équipotentielles sont des plans parallèles aux faces. Le flux qui traverse par seconde l'unité d'aire d'une quelconque des surfaces équipotentielles est (§ 229) :

$$Q = k \frac{T_1 - T_2}{e}, \quad k = k_1 \alpha^2 + k_2 \beta^2 + k_3 \gamma^2;$$

$k_1, k_2, k_3$ , sont les conductibilités principales ;  $\alpha, \beta, \gamma$ , sont les cosinus directeurs de la normale aux faces de la lame par rapport aux directions principales prises pour axes de coordonnées.

La *méthode du cylindre mince* consiste à utiliser un cylindre de section aussi petite que possible. Les lignes de courant sont nécessairement parallèles aux génératrices, autant du moins qu'on peut considérer la surface latérale comme imperméable à la chaleur. On admet que le coefficient  $k'$  intervient alors : le flux est égal au produit de  $k'$  par l'aire de la section droite et par le taux de variation de la température le long de l'axe du cylindre.

Les cosinus directeurs  $\alpha', \beta', \gamma'$ , de cet axe sont déterminés par la taille. Les surfaces isothermes sont de petits éléments sensiblement plans *qui ne sont pas des sections droites des cylindres*, et dont on peut déterminer la direction d'après la relation générale qui existe entre le courant et la pente des températures (§ 233).

**238. Méthode des courbes isothermes.** — Il est naturellement impossible de loger une source punctiforme dans un cristal et de déterminer la forme des surfaces isothermes. On opère généralement comme suit.

La substance est taillée en lame mince aussi étendue que possible. On la perce d'un petit trou à travers lequel passe un fil que l'on chauffe à l'aide d'un courant électrique. La lame est couverte d'une mince couche de cire qui fond jusqu'à une distance variable suivant la direction. La courbe limitant la cire fondue est une isotherme : elle est généralement elliptique.

Reste à savoir quelle relation existe entre cette ellipse et les paramètres définissant la conductibilité.

On peut admettre comme première approximation que cette ellipse est homothétique de la courbe d'intersection de l'*ellipsoïde principal* par un plan diamétral parallèle à la plaque. En effet, si le milieu était indéfini, les surfaces isothermes seraient homothétiques de cet ellipsoïde; on admet donc que couper une plaque mince ne change rien à la distribution des températures.

Le raisonnement est valable quand les coefficients rotationnels sont nuls, si on néglige la perturbation qui provient de la perte de chaleur dans l'air. Il ne l'est plus dans les milieux asymétriques, car l'écoulement de la chaleur ne se fait plus en ligne droite; la séparation de la plaque du milieu indéfini modifie donc les trajectoires.

Boussinesq trouve que l'ellipse obtenue est concentrique et homothétique de l'ellipse d'intersection de l'*ellipsoïde des conductibilités* par la plaque mince jouant le rôle de plan diamétral. Cet ellipsoïde (§ 230 et 233), qui se confond avec l'ellipsoïde principal quand l'égalité est symétrique, dépend généralement des coefficients rotationnels.

Il a pour équation :

$$\frac{x^2}{k_1} + \frac{y^2}{k_2} + \frac{z^2}{k_3} + \frac{(\rho_1 x + \rho_2 y + \rho_3 z)^2}{k_1 k_2 k_3} = 1 + \frac{k_1 \rho_1^2 + k_2 \rho_2^2 + k_3 \rho_3^2}{k_1 k_2 k_3}.$$

D'où une méthode qui permettrait de déterminer si ces coefficients existent, à la supposer réalisable.

Mesurons par la *méthode du mur* les paramètres  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ . Utilisons la méthode des courbes isothermes et déterminons leur forme. Il est possible de calculer cette forme, connaissant les paramètres  $k$ , à supposer nuls les coefficients rotationnels. Comparons la forme expérimentale à la forme calculée : leur identité ou leur non identité permettront de savoir si les paramètres  $\rho$  sont nuls ou ne le sont pas.

Les mesures ne sont pas assez précises pour qu'il soit possible de tenter l'expérience.

**239. Résultats des expériences sur la conductibilité thermique.** — On n'a pas pu démontrer l'existence des coefficients rotationnels.

Les expériences sont très difficiles pour les corps isotropes (tome II); *a fortiori* le sont-elles pour les cristaux dont les dimensions sont toujours petites. Voici les résultats pour le quartz et le spath.

	Suivant l'axe.	Normalement à l'axe.	Rapport.
Quartz	1,576,	0,957,	1,64.
Spath	0,576,	0,472,	1,22.

**240. Résultats des expériences sur la conductibilité électrique.** — Les techniques ne diffèrent pas de celles qui sont utilisées pour les corps isotropes.

Les résultats sont à peu près nuls. La cause en est l'extrême difficulté qu'on rencontre à séparer les effets de la conductibilité proprement dite et les *résidus* qui existent même pour les diélectriques parfaits (III, § 195).

### Phénomène de Hall et phénomènes analogues.

**241. Phénomène dans une plaque isotrope par rapport aux coefficients  $k$ , mais pour laquelle les coefficients rotationnels ne sont pas nuls.** — Le vecteur excitateur  $U, V$ , et le vecteur excité  $u, v$ , sont reliés par les relations :

$$u = kU - \rho V, \quad v = \rho U + kV.$$

L'ellipse principale et l'ellipse des conductibilités (§ 238) sont toutes deux des cercles. On a :

$$k' = k + \frac{\rho^2}{k}, \quad \cos \theta = \frac{k}{\sqrt{k^2 + \rho^2}}.$$

1° *Supposons la plaque indéfinie et échauffée par une source ponctuelle* : le phénomène est cylindrique. Nous devons satisfaire aux conditions équivalentes :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0.$$

Les surfaces équipotentielles ont pour équation :

$$T = -T_0 \log r + T_1,$$

où  $r$  est la distance à l'origine.

$$-\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_0}{r^2} x, \quad -\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{T_0}{r^2} y.$$

$$u = \frac{T_0}{r^2} (kx - \rho y), \quad v = \frac{T_0}{r^2} (\rho x + ky).$$

L'équation différentielle des lignes de courant est encore (§ 235) :

$$\frac{dx}{kx - \rho y} = \frac{dy}{\rho x + ky}, \quad \psi = \psi_0 + \frac{\rho}{k} \log r.$$

*Les lignes de flux sont des spirales logarithmiques.*

2° *Supposons la plaque échauffée par deux sources de chaleur ponctuelles.* — Les deux sources égales et de signes contraires sont placées aux deux points  $O$  et  $O'$ .

On obtient une solution de la condition de continuité en additionnant les solutions qui conviennent à chacune des sources :

$$T = T_0 (\log r_1 - \log r_2) = T_0 \log \frac{r_1}{r_2}.$$

Telle est, en coordonnées bipolaires d'origines  $O$  et  $O'$ , l'équation des surfaces équipotentielles ou isothermes, suivant le problème traité. Ce sont des circonférences dont les centres sont sur la droite  $OO'$ , et qui admettent pour axe radical la droite  $PP'$  normale à  $OO'$  en son milieu.

Si  $\rho = 0$ , si la plaque est isotrope, les lignes de courant forment

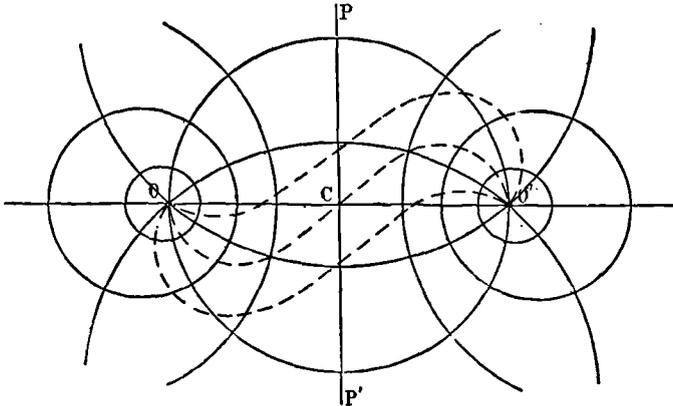


Fig. 161.

un second faisceau de cercles orthogonaux aux premiers et passant par les points  $O$  et  $O'$ . Ces cercles restent les *lignes de pente* de la température quand la plaque n'est plus isotrope.

Quand le terme rotationnel n'est pas nul, les lignes de courant sont des courbes à inflexion, marquées en pointillé dans la figure. On détermine aisément leur forme d'après la remarque que l'angle  $\theta$  entre la ligne de courant et la normale à la surface équipotentielle (c'est-à-dire la ligne de pente) est une constante absolue. Comme nous connaissons les lignes de pente, nous pouvons construire les lignes de courant.

**242. Rotation des isothermes dans un champ magnétique.** — On se sert d'une lame de bismuth dont la grande dimension est par exemple dirigée suivant l'axe des  $x$  (fig. 162).

Hors du champ magnétique, cette lame est isotrope. Quand un courant de chaleur la traverse suivant sa grande dimension, les surfaces isothermes sont par suite des sections droites de la lame.

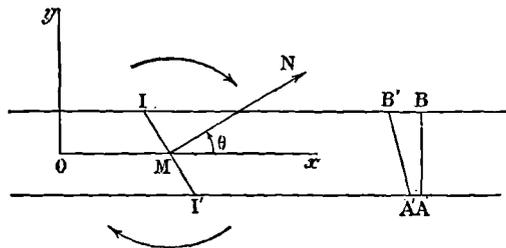


Fig. 162.

Installons un champ magnétique normalement à la lame. On peut

admettre qu'elle reste isotrope en ce qui concerne les coefficients  $k$ , mais qu'il naît un coefficient rotationnel  $\rho$ .

Comme les lignes de courant doivent encore être dirigées suivant la direction  $Ox$ , il faut que les lignes isothermes cessent d'être parallèles à  $Oy$ . Elles tournent de l'angle  $\theta$  dont la valeur approximative est :

$$\theta = \rho : k.$$

Si les coefficients  $k$  restent égaux, la valeur du paramètre unique  $k$  peut néanmoins varier.

La figure montre le sens de la rotation des lignes isothermes quand le courant magnétisant, qui est censé produire le champ, est dirigé dans le sens des flèches. Si on renverse le champ, la rotation  $\theta$  se fait naturellement en sens inverse.

**243. Rotation des lignes équipotentiellles dans le champ magnétique : phénomène de Hall.** — Lorsqu'un courant électrique passe dans la lame mince, tant qu'aucun champ n'est excité, les points A et B d'une section droite sont au même potentiel. On les relie aux bornes d'un galvanomètre; celui-ci reste au zéro.

Excitons un champ normal intense : la déviation permanente du galvanomètre montre que les points A et B ne restent pas au même potentiel.

La rotation des lignes équipotentiellles est sensiblement proportionnelle à l'intensité du champ. Pour le bismuth, elle est particulièrement grande et peut atteindre plusieurs degrés.

La variation du coefficient  $k$  (c'est-à-dire de la conductibilité normale) est considérable (III, § 296, 4°).

Dans l'or, l'argent, le nickel et le bismuth, la rotation des lignes équipotentiellles est en sens inverse du courant magnétisant (cas représenté par la figure); elle est dans le sens de ce courant pour le fer et le cobalt.

Ces phénomènes obligent d'attribuer au champ magnétique la symétrie d'un cylindre tournant : c'est un vecteur axial.

## CHAPITRE VI

### PHÉNOMÈNES DUS AUX DÉFORMATIONS

Nous commencerons par étudier la manière de produire les déformations; autrement dit, les relations qui existent entre les forces appliquées au milieu cristallin et les déformations qu'elles produisent (élasticité des cristaux). Nous étudierons ensuite les phénomènes créés par les déformations, ou, ce qui revient au même, en raison de l'étude précédente, créés par les forces. Les forces que nous considérons sont de la nature des pressions ou des tensions, c'est-à-dire sont évaluées par unité de surface. Ce n'est pas lieu de discuter comment la notion de pression se concilie avec la non continuité de la matière.

#### Élasticité des cristaux.

244. **Formules générales.** — Nous avons montré dans le Tome I de ce Cours que, pour une première approximation, les déformations sont définies par les dérivées partielles du premier ordre des déplacements par rapport aux coordonnées. Nous avons vu qu'elles dépendent seulement des six fonctions de ces dérivées que nous écrivons avec Kirchhoff :

$$\begin{aligned}x_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & y_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & z_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\y_z = z_y &= 2g_x = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \\z_x = x_z &= 2g_y = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \\x_y = y_x &= 2g_z = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}.\end{aligned}$$

Nous supposons que les termes rotationnels  $\rho_x$ ,  $\rho_y$ ,  $\rho_z$ , ne jouent aucun rôle (I, § 96).

En chaque point du milieu, l'état mécanique est défini par les six pressions ou tensions  $N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3$ . Au § 130 du tome I, nous avons fait l'hypothèse de première approximation que les  $N$  et les  $T$  sont des fonctions linéaires des déformations.

Nous posons donc *par hypothèse* les six équations à 36 constantes :

$$x_x = s_{11} N_1 + s_{12} N_2 + s_{13} N_3 + s_{14} T_1 + s_{15} T_2 + s_{16} T_3$$

$$y_y = s_{21} N_1 + s_{22} N_2 + \dots$$

$$z_z = s_{31} N_1 + s_{32} N_2 + \dots$$

$$y_z = s_{41} N_1 + s_{42} N_2 + \dots$$

$$z_x = s_{51} N_1 + s_{52} N_2 + \dots$$

$$x_y = s_{61} N_1 + s_{62} N_2 + \dots$$

Les quantités  $s_{hk}$  sont les *modules d'élasticité*.

Réolvons les équations par rapport aux  $N$  et aux  $T$ ; nous obtenons six nouvelles équations dont voici les deux premières :

$$N_1 = c_{11} x_x + c_{12} y_y + c_{13} z_z + c_{14} y_z + c_{15} z_x + c_{16} x_y,$$

$$N_2 = c_{21} x_x + \dots$$

Les quantités  $c_{hk}$  portent le nom de *constantes d'élasticité*. Elles sont connues si les  $s$  sont donnés, et inversement.

Il y a donc généralement 36 paramètres qui ne sont pas nécessairement tous distincts. Nous allons montrer qu'ils ne le sont certainement pas dans un milieu qui possède des éléments de symétrie.

Il importe peu que nous fassions la réduction sur les coefficients  $c$  ou les coefficients  $s$ ; les nombres des coefficients  $c$  ou  $s$  distincts sont nécessairement les mêmes.

**245. Hypothèse d'une énergie potentielle; théorème de Green.** — Au § 126 de la première partie de ce Cours, nous avons montré que le travail des forces extérieures contre les forces élastiques peut être mis sous la forme :

$$W = \frac{1}{2} \iiint (N_1 x_x + N_2 y_y + N_3 z_z + T_1 y_z + T_2 z_x + T_3 x_y) d\omega,$$

où  $d\omega$  représente l'élément de volume, à la seule condition que les  $N$  et les  $T$  soient des fonctions linéaires des six quantités au moyen desquelles s'expriment les déformations. Pour une déformation petite à partir d'un état 1 de déformation donnée, la variation de  $W$  est :

$$dW = \iiint (N_1 dx_x + \dots) d\omega,$$

expression qu'on pourrait écrire immédiatement d'après la seule définition des douze quantités qui entrent dans la parenthèse.

Cherchons à quelles conditions le passage de l'état de déformation 1 à l'état de déformation 2 implique un travail des forces extérieures indépendant de la loi de déformation permettant de passer de 1 à 2.

Autrement dit, cherchons à quelles conditions il existe une énergie potentielle de déformation.

Il faut et il suffit que la quantité entre parenthèses soit une différentielle exacte des six fonctions  $x_x, y_y, \dots$ . Nous aurons à poser :

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{\partial f}{\partial x_x}, & N_2 &= \frac{\partial f}{\partial y_y}, & N_3 &= \frac{\partial f}{\partial z_z}, \\ T_1 &= \frac{\partial f}{\partial y_z}, & T_2 &= \frac{\partial f}{\partial z_x}, & T_3 &= \frac{\partial f}{\partial x_y}. \end{aligned}$$

Pour qu'il en soit ainsi, nous devons écrire :

$$\begin{aligned} 2f &= c_{11}x_x^2 + c_{22}y_y^2 + \dots + c_{44}z_z^2 + \dots \\ &+ 2c_{12}x_x y_y + 2c_{13}x_x z_z + \dots \end{aligned}$$

Les conditions  $c_{hk} = c_{kh}$ , ou  $s_{hk} = s_{kh}$ , doivent être satisfaites.

Ces conditions, au nombre de quinze, réduisent à vingt et un les trente-six coefficients *a priori* distincts.

Bien que dans les déformations des cristaux on admette ordinairement l'existence d'une énergie potentielle, nous ne supposons pas d'abord cette cause de simplification; nous ne l'introduirons qu'après coup, parce que nous rencontrerons plus tard des phénomènes où se présente la même question (réduction du nombre des coefficients) et où le théorème de Green n'est pas applicable.

Les calculs suivants ne présentent aucune difficulté; ils ont le défaut d'être un peu longs, mais ils seront pour le lecteur un excellent exercice.

**246. Réduction du nombre des coefficients quand existe un plan de symétrie.** — Le principe sur lequel nous nous appuyons est le suivant : *Des déformations symétriques par rapport à un élément de symétrie produisent des forces symétriquement appliquées sur des plans symétriques par rapport à cet élément.*

Étudions le cas d'un plan de symétrie, coïncidant par exemple avec le plan  $yOz$ .

1° Considérons deux déformations symétriques par rapport au plan  $yOz$ ; cherchons les relations entre les valeurs respectives des fonctions  $x_x, y_y, \dots$  qui les caractérisent. Nous noterons :  $x_x, y_y, \dots$  les valeurs qui correspondent à la première déformation;  $x'_x, y'_y, \dots$  les valeurs qui correspondent à la seconde.

Dans le cas (qui est ici réalisé par hypothèse) où il n'y a pas de rotation des éléments de volume autour d'un axe passant par eux-

mêmes (nullité des paramètres  $\rho$ ), le déplacement d'un point de coordonnées  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ , est donné par les équations :

$$\begin{aligned} u &= x_x \Delta x + x_y \Delta y + x_z \Delta z, \\ v &= y_x \Delta x + y_y \Delta y + y_z \Delta z, \\ w &= z_x \Delta x + z_y \Delta y + z_z \Delta z. \end{aligned}$$

Les points correspondants de deux plans symétriques par rapport au plan  $zOy$ , ont mêmes  $\Delta y$  et  $\Delta z$ ; ils ont des  $\Delta x$  égaux et de signes contraires. Leurs déplacements sont par hypothèses symétriques par rapport au même plan  $zOy$ . On a donc simultanément :

$$\begin{aligned} -\Delta x &= \Delta'x, & \Delta y &= \Delta'y, & \Delta z &= \Delta'z; \\ -u &= u', & v &= v', & w &= w'. \end{aligned}$$

D'où les conditions :

$$\begin{aligned} x_x &= x'_x, & y_y &= y'_y, & z_z &= z'_z; \\ y_x &= y'_z, & -z_x &= z'_x, & x_y &= -x'_y. \end{aligned} \quad (1)$$

2° Cherchons à quelles conditions deux plans symétriques par rapport au plan  $yOz$  subissent des forces symétriques par rapport à ce plan.

$m, n, p$  étant les cosinus directeurs de la normale au premier plan,  $-m, n, p$  sont les cosinus directeurs de la normale au second.

Or on a (I, § 123) :

$$\begin{aligned} X &= mN_1 + nT_3 + pT_2, \\ Y &= mT_3 + nN_2 + pT_1, \\ Z &= mT_2 + nT_1 + pN_3. \end{aligned}$$

On a simultanément :

$$\begin{aligned} -m &= m', & n &= n', & p &= p'; \\ -X &= X', & Y &= Y', & Z &= Z'. \end{aligned}$$

D'où les conditions :

$$\begin{aligned} N_1 &= N'_1, & N_2 &= N'_2, & N_3 &= N'_3; \\ T_1 &= T'_1, & -T_2 &= T'_2, & T_3 &= -T'_3. \end{aligned} \quad (2)$$

REMARQUE. — Nous avons fait tout au long la démonstration précédente pour qu'il ne reste aucune obscurité dans l'esprit du lecteur. Mais on peut aller plus vite.

Considérons les deux figures 163 et 164, qui représentent un parallépipède auquel sont appliquées les  $N$  et les  $T$ ; pour ne pas compliquer les figures au delà de toute mesure, nous avons représenté ces forces en deux fois.

Le plan de symétrie  $yOz$  est normal au plan du tableau.

Il est clair que deux systèmes de forces qui donnent des déformations symétriques par rapport à ce plan, contiennent les mêmes valeurs

de celles des pressions  $N$  et  $T$  qui produisent des déformations elles-mêmes symétriques par rapport à ce plan (fig. 163).

C'est ce qui a lieu pour les  $N$  (qui sont normales ou parallèles à  $yOz$ ) et pour  $T_1$ , qui produit un couple dont l'axe est normal à ce plan.

Au contraire,  $T_2$  et  $T_3$  doivent être changées de signes.

Par exemple,  $T_2$  tend à rendre aigu l'angle  $\alpha$ ; la déformation symétrique par rapport à  $yOz$  correspond à l'angle  $\beta$  devenant aigu. Pour obtenir ce résultat, il faut renverser les forces  $T_2$ .

Même raisonnement pour  $T_3$ .

Même raisonnement aussi pour les six fonctions  $x_x, y_y, \dots$  qui repré-

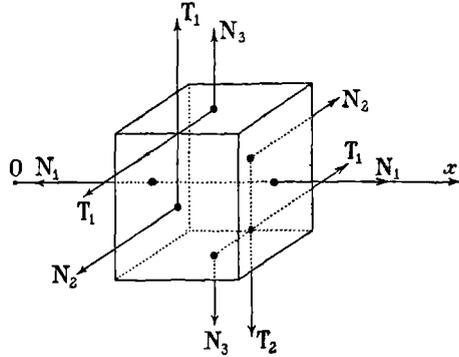


Fig. 163.

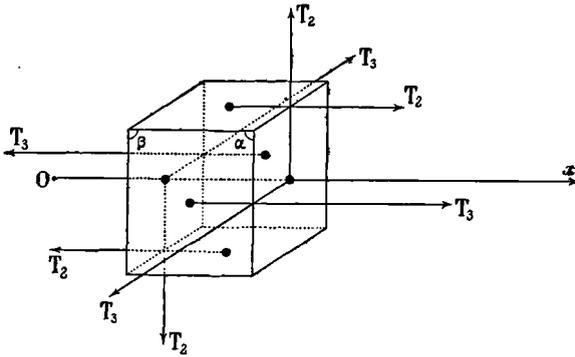


Fig. 164.

sentent soit des dilatations parallèles aux axes, soit des changements dans les angles.

3° Cherchons enfin ce que doivent être les constantes  $c$  ou  $s$  pour que les relations (1) et (2) soient simultanément satisfaites.

Le maintien du signe de  $N_1, N_2, N_3, T_1$ , et simultanément le changement du signe de  $z_x$  et de  $x_y$  impliquent :

$$c_{15} = c_{16} = c_{23} = c_{26} = c_{35} = c_{36} = c_{45} = c_{46} = 0.$$

Le changement du signe de  $T_2$  et de  $T_3$ , et simultanément le maintien du signe de  $x_x, y_y, z_x, y_z$ , impliquent :

$$c_{51} = c_{52} = c_{53} = c_{54} = c_{61} = c_{62} = c_{63} = c_{64} = 0.$$

Voici le tableau des paramètres restants :

	$x_x$	$y_y$	$z_z$	$y_z$	$z_x$	$x_y$
$N_1$	$c_{11}$	$c_{12}$	$c_{13}$	$c_{14}$	0	0
$N_2$	$c_{21}$	$c_{22}$	$c_{23}$	$c_{24}$	0	0
$N_3$	$c_{31}$	$c_{32}$	$c_{33}$	$c_{34}$	0	0
$T_1$	$c_{41}$	$c_{42}$	$c_{43}$	$c_{44}$	0	0
$T_2$	0	0	0	0	$c_{55}$	$c_{56}$
$T_3$	0	0	0	0	$c_{65}$	$c_{66}$

La réduction se fait exactement de même pour les  $s$  : on obtient le même tableau.

**247. Systèmes anorthique, clinorhombique et orthorhombique.** — Pour le *système anorthique*, on a dans le cas général trente-six constantes qui se réduisent à vingt et une, si on admet l'existence d'un potentiel.

Pour le *système clinorhombique*, on a précisément le nombre de constantes qui est déterminé au paragraphe précédent. Effectivement les phénomènes que nous étudions sont nécessairement centrés : un axe de symétrie binaire associé à un centre équivaut à un plan de symétrie.

Les cristaux du système clinorhombique admettent donc généralement vingt constantes distinctes, et treize seulement s'il existe un potentiel.

Le *système orthorhombique* admet trois plans de symétrie rectangulaires. La réduction que nous venons de faire doit se reproduire pour les trois axes de coordonnées. On obtient donc le schéma suivant :

	$x_x$	$y_y$	$z_z$	$y_z$	$z_x$	$x_y$
$N_1$	$c_{11}$	$c_{12}$	$c_{13}$	0	0	0
$N_2$	$c_{21}$	$c_{22}$	$c_{23}$	0	0	0
$N_3$	$c_{31}$	$c_{32}$	$c_{33}$	0	0	0
$T_1$	0	0	0	$c_{44}$	0	0
$T_2$	0	0	0	0	$c_{55}$	0
$T_3$	0	0	0	0	0	$c_{66}$

Donc le système orthorhombique admet généralement douze constantes distinctes, et neuf seulement quand il existe un potentiel.

248. **Réduction dans le cas d'un axe de symétrie.** — 1° Considérons deux systèmes d'axes tels que les axes des  $z$  coïncident et que les axes  $x'y'$  fassent l'angle  $\theta$  avec les axes  $xy$

On a les relations suivantes :

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \theta - y' \sin \theta, & z &= z'. \\y &= x' \sin \theta + y' \cos \theta, \\u &= u' \cos \theta - v' \sin \theta, & w &= w'. \\v &= u' \sin \theta + v' \cos \theta.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u'}{\partial x} \cos \theta - \frac{\partial v'}{\partial x} \sin \theta = \left( \frac{\partial u'}{\partial x'} \cos \theta - \frac{\partial v'}{\partial x'} \sin \theta \right) \frac{\partial x'}{\partial x} \\&\quad + \left( \frac{\partial u'}{\partial y'} \cos \theta - \frac{\partial v'}{\partial y'} \sin \theta \right) \frac{\partial y'}{\partial x},\end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u'}{\partial x'} \cos^2 \theta + \frac{\partial v'}{\partial y'} \sin^2 \theta - \left( \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \right) \cos \theta \sin \theta.$$

On obtient ainsi le système général de formules de transformation :

$$\begin{aligned}x_x &= x'_x \cos^2 \theta + y'_y \sin^2 \theta - x'_y \cos \theta \sin \theta, & z_x &= z'_x. \\y_y &= x'_x \sin^2 \theta + y'_y \cos^2 \theta + x'_y \cos \theta \sin \theta, \\y_z &= y'_z \cos \theta + z'_x \sin \theta, & z_x &= z'_x \cos \theta - y'_z \sin \theta, \\x_y &= 2(x'_x - y'_y) \cos \theta \sin \theta + x'_y (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta).\end{aligned} \tag{1}$$

S'il s'agit d'un axe ternaire :

$$\theta = 120^\circ, \quad \cos \theta = -1/2, \quad \sin \theta = \sqrt{3} : 2.$$

2° Cherchons en fonction des  $N$  et des  $T$ , les  $N'$  et les  $T'$  exercées sur les nouveaux plans coordonnés et rapportées aux nouveaux axes. Prenons comme intermédiaires les forces  $X, Y, Z$ , rapportées aux anciens axes et appliquées à ces mêmes plans.

Sur le plan  $x'Oz$  s'exercent les trois forces (I, § 123) :

$$\begin{aligned}X &= N_1 \cos \theta + T_3 \sin \theta, \\Y &= T_3 \cos \theta + N_2 \sin \theta, \\Z &= T_2 \cos \theta + T_1 \sin \theta,\end{aligned}$$

puisqu'on a :

$$m = \cos \theta, \quad n = \sin \theta, \quad p = 0.$$

Exprimons ces forces au moyen des trois composantes  $N'_1, T'_3, T'_2$ , appliquées à cette même face et rapportées aux nouveaux axes.

$$\begin{aligned}X &= N'_1 \cos \theta - T'_3 \sin \theta = N_1 \cos \theta + T_3 \sin \theta, \\Y &= N'_1 \sin \theta + T'_3 \cos \theta = T_3 \cos \theta + N_2 \sin \theta, \\Z &= T'_2 = T_2 \cos \theta + T_1 \sin \theta.\end{aligned}$$

Multiplions la première par  $\cos \theta$ , la seconde par  $\sin \theta$ , et additionnons, il vient :

$$N'_1 = N_1 \cos^2 \theta + N_2 \sin^2 \theta + 2T_3 \sin \theta \cos \theta.$$

Multiplions la première par  $-\sin \theta$ , la seconde par  $\cos \theta$ , et additionnons, il vient :

$$T'_3 = (N_2 - N_1) \sin \theta \cos \theta + T_3 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta).$$

Nous possédons ainsi les expressions de  $N'_1$ ,  $T'_3$ ,  $T'_2$ ; recommençons le même travail pour les faces  $y'Oz$ , nous arriverons aisément au tableau suivant :

$$\begin{aligned} N'_1 &= N_1 \cos^2 \theta + N_2 \sin^2 \theta + 2T_3 \sin \theta \cos \theta, \\ N'_2 &= N_1 \sin^2 \theta + N_2 \cos^2 \theta - 2T_3 \sin \theta \cos \theta, \\ N'_3 &= N_3, \\ T'_1 &= -T_2 \sin \theta + T_1 \cos \theta, \\ T'_2 &= T_2 \cos \theta + T_1 \sin \theta, \\ T'_3 &= (N_2 - N_1) \sin \theta \cos \theta + T_3 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta). \end{aligned} \quad (2)$$

3° Il s'agit d'exprimer que l'axe des  $z$  est de symétrie d'ordre  $q$ . Posons d'abord :  $\theta = 2\pi : q$ . Si l'axe des  $z$  est d'ordre  $q$ , les  $N'$  et  $T'$  s'expriment en fonction des  $x'_x, y'_y, \dots$ , comme les  $N$  et  $T$  s'expriment en fonction des  $x_x, y_y, \dots$ . Il faut écrire cette condition, en utilisant : d'une part les formules donnant les  $N'$  et  $T'$  en fonction des  $N$  et des  $T$ , de l'autre les formules donnant les  $x'_x, y'_y, \dots$  en fonction des  $x_x, y_y, \dots$

**249. Réduction dans le cas d'un axe quaternaire (système quaternaire, système cubique).** — Il faut poser dans les formules précédentes :

$$\theta = \pi : 2, \quad \cos \theta = 0, \quad \sin \theta = 1.$$

Substituant dans les équations (1), il vient :

$$\begin{aligned} x_x &= y'_y, & y_y &= x'_x, & z_z &= z'_z; \\ -x_y &= x'_y, & y_z &= z'_z, & -z_x &= y'_z. \end{aligned} \quad (1)$$

Substituant dans les équations (2), il vient :

$$\begin{aligned} N'_1 &= N_2, & N'_2 &= N_1, & N'_3 &= N_3; \\ -T'_1 &= T_2, & T'_2 &= T_1, & T'_3 &= -T_3. \end{aligned} \quad (2)$$

Écrivons les deux premières équations du système fondamental :

$$\begin{aligned} N_1 &= c_{11}x_x + c_{12}y_y + c_{13}z_z + c_{14}y_z + c_{15}z_x + c_{16}x_y, \\ N_2 &= c_{21}x_x + c_{22}y_y + c_{23}z_z + c_{24}y_z + c_{25}z_x + c_{26}x_y. \end{aligned}$$

Écrivons maintenant les équations transformées au moyen de (1) et de (2).

$$\begin{aligned} N'_2 &= c_{11}y'_y + c_{12}x'_x + c_{13}z'_z + c_{14}y'_z - c_{15}y'_z - c_{16}x'_y, \\ N'_1 &= c_{21}y'_y + c_{22}x'_x + c_{23}z'_z + c_{24}y'_z - c_{25}y'_z - c_{26}x'_y. \end{aligned}$$

Or  $N'_1$  et  $N'_2$  doivent s'exprimer en fonction de  $x'_x, \dots$ , comme  $N_1$  et  $N_2$  s'expriment en fonction de  $x_x, \dots$ . D'où les conditions :

$$\begin{aligned} c_{11} &= c_{22}, & c_{21} &= c_{12}, & c_{33} &= c_{13}; \\ c_{14} &= c_{25}, & c_{24} &= -c_{15}, & c_{26} &= -c_{16}; \\ c_{14} &= -c_{25}, & c_{24} &= c_{15}. \end{aligned}$$

D'où résulte évidemment :

$$c_{14} = c_{25} = c_{24} = c_{15} = 0.$$

Procédant de même pour les autres  $N$  et  $T$ , on arrive au schéma suivant.

	$x_x$	$y_y$	$z_z$	$y_z$	$z_x$	$x_y$
$N_1$	$c_{11}$	$c_{12}$	$c_{13}$	0	0	$c_{16}$
$N_2$	$c_{12}$	$c_{11}$	$c_{13}$	0	0	$-c_{16}$
$N_3$	$c_{31}$	$c_{31}$	$c_{33}$	0	0	0
$T_1$	0	0	0	$c_{44}$	0	0
$T_2$	0	0	0	0	$c_{44}$	0
$T_3$	$c_{61}$	$-c_{61}$	0	0	0	$c_{66}$ .

Ce schéma satisfait aux conditions de symétrie des classes suivantes du système quaternaire qui admettent seulement un axe de symétrie quaternaire :

hémiedrie paramorphe (18), tétartoédrie (4), tétartoédrie sphénoïdale (15).

Il y a généralement neuf constantes distinctes; elles se réduisent à sept lorsque la condition de Green est satisfaite. On doit poser :

$$c_{13} = c_{31}, \quad c_{16} = c_{61}.$$

Pour les autres classes du système quaternaire, la réduction est un peu plus complète. On peut la déduire immédiatement du schéma concernant le système orthorhombique, en remarquant que les axes des  $x$  et des  $y$  doivent être traités de même. Cela implique la condition :  $c_{16} = c_{61} = 0$ .

	$x_x$	$y_y$	$z_z$	$y_z$	$z_x$	$x_y$
$N_1$	$c_{11}$	$c_{12}$	$c_{13}$	0	0	0
$N_2$	$c_{12}$	$c_{11}$	$c_{13}$	0	0	0
$N_3$	$c_{31}$	$c_{31}$	$c_{33}$	0	0	0
$T_1$	0	0	0	$c_{44}$	0	0
$T_2$	0	0	0	0	$c_{44}$	0
$T_3$	0	0	0	0	0	$c_{66}$ .

Donc en général sept constantes, et six lorsque la condition de Green est satisfaite.

**250. Système cubique, corps isotropes.** — Il suffit d'exprimer que dans le tableau du système quaternaire les trois axes sont traités de la même façon.

D'où le schéma suivant :

	$x_x$	$y_y$	$z_z$	$y_z$	$z_x$	$x_y$
$N_1$	$c_{11}$	$c_{12}$	$c_{12}$	0	0	0
$N_2$	$c_{12}$	$c_{11}$	$c_{12}$	0	0	0
$N_3$	$c_{12}$	$c_{12}$	$c_{11}$	0	0	0
$T_1$	0	0	0	$c_{44}$	0	0
$T_2$	0	0	0	0	$c_{44}$	0
$T_3$	0	0	0	0	0	$c_{44}$

Il y a trois constantes distinctes.

Pour les *corps isotropes*, un changement quelconque de coordonnées doit laisser inaltérée la forme des relations. On trouve aisément qu'il n'existe plus que 2 constantes distinctes. On doit avoir :

$$2c_{44} = c_{11} - c_{12}.$$

On arrive encore à la même conclusion en remarquant qu'un corps isotrope peut être considéré comme possédant simultanément trois axes quaternaires et un axe sénaire coïncidant avec l'un des axes quaternaires. La réduction doit satisfaire aux deux réductions de ce paragraphe et du § 252.

Pour retrouver les formules classiques avec les deux constantes  $\lambda$  et  $\mu$  de Lamé (tome I, § 131), il suffit de poser :

$$c_{11} = \lambda + 2\mu, \quad c_{12} = \lambda, \quad c_{44} = \mu.$$

**251. Réduction dans le cas d'un axe ternaire; système rhomboédrique.** — Si l'axe des  $z$  est ternaire, il faut écrire dans les équations du § 248 :

$$\theta = 120^\circ, \quad \cos \theta = -1/2, \quad \sin \theta = \sqrt{3}/2.$$

Il vient les deux systèmes :

$$\begin{aligned}
 4x_x &= x'_x + 3y'_y + \sqrt{3} x'_y, \\
 4y_y &= 3x'_x + y'_y - \sqrt{3} x'_y, \\
 z_z &= z'_z, \\
 2y_z &= -y'_z + \sqrt{3} z'_x, \\
 2z_x &= -\sqrt{3} y'_z - z'_x, \\
 2x_y &= -\sqrt{3} (x'_x - y'_y) - x'_y. \\
 4N'_1 &= N_1 + 3N_2 - 2\sqrt{3} T_3, \\
 4N'_2 &= 3N_1 + N_2 + 2\sqrt{3} T_3,
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
 N'_3 &= N_3, \\
 2T'_1 &= -\sqrt{3} T_2 - T_1, \\
 2T'_2 &= -T_2 + \sqrt{3} T_1, \\
 4T'_3 &= -\sqrt{3} (N_2 - N_1) - 2T_3.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Écrivant que les  $N'$  et les  $T'$  s'expriment en fonction des  $x'_x, \dots$  comme les  $N$  et les  $T$  en fonction des  $x_x, \dots$ , il vient le schéma :

	$x_x$	$y_y$	$z_z$	$y_z$	$z_x$	$x_y$
$N_1$	$c_{11}$	$c_{12}$	$c_{13}$	$c_{14}$	$c_{15}$	0
$N_2$	$c_{12}$	$c_{11}$	$c_{13}$	$-c_{14}$	$-c_{15}$	0
$N_3$	$c_{31}$	$c_{31}$	$c_{33}$	0	0	0
$T_1$	$c_{41}$	$-c_{41}$	0	$c_{44}$	$c_{45}$	$-c_{15}$
$T_2$	$c_{51}$	$-c_{51}$	0	$-c_{45}$	$c_{44}$	$c_{14}$
$T_3$	0	0	0	$-c_{51}$	$c_{44}$	$\frac{c_{11} - c_{12}}{2}$ .

Donc la présence d'un axe ternaire réduit le nombre des constantes à onze qui sont :

$$c_{11}, c_{33}, c_{44}; c_{12}; c_{13}, c_{31}; c_{14}, c_{41}; c_{15}, c_{51}; c_{45}.$$

Si la condition de Green est satisfaite, on a :

$$c_{13} = c_{31}, \quad c_{14} = c_{41}, \quad c_{15} = c_{51}, \quad c_{45} = 0.$$

Il reste par conséquent sept constantes distinctes.

Ce schéma correspond aux classes suivantes du système rhomboédrique :

hémihédrie paramorphe (16); tétartoédrie (3).

**252. Réduction pour l'holoédrie rhomboédrique et l'holoédrie hexagonale.** — Prenons comme axe des  $x$  un des axes binaires et par conséquent comme plan des  $yz$  un plan de symétrie. N'oublions pas que d'après la nature des phénomènes, il existe nécessairement un centre.

Voici le schéma qu'on obtient facilement en associant les résultats des §§ 246 et 251.

	$x_x$	$y_y$	$z_z$	$y_z$	$z_x$	$x_y$
$N_1$	$c_{11}$	$c_{12}$	$c_{13}$	$c_{14}$	0	0
$N_2$	$c_{12}$	$c_{11}$	$c_{13}$	$-c_{14}$	0	0
$N_3$	$c_{31}$	$c_{31}$	$c_{33}$	0	0	0
$T_1$	$c_{41}$	$-c_{41}$	0	$c_{44}$	0	0
$T_2$	0	0	0	0	$c_{44}$	$c_{14}$
$T_3$	0	0	0	0	$c_{44}$	$\frac{c_{11} - c_{12}}{2}$ .

Donc généralement huit constantes :

$$c_{11}, c_{33}, c_{44}; c_{12}; c_{13}, c_{31}; c_{14}, c_{41}.$$

Il ne reste plus que six constantes lorsque l'égalité de Green est satisfaite.

Enfin pour le *système hexagonal* on trouve, en remarquant que l'axe des  $y$  est un axe binaire :

	$x_x$	$y_y$	$z_z$	$y_z$	$z_x$	$x_y$
$N_1$	$c_{11}$	$c_{12}$	$c_{13}$	0	0	0
$N_2$	$c_{12}$	$c_{11}$	$c_{13}$	0	0	0
$N_3$	$c_{31}$	$c_{31}$	$c_{33}$	0	0	0
$T_1$	0	0	0	$c_{44}$	0	0
$T_2$	0	0	0	0	$c_{44}$	0
$T_3$	0	0	0	0	0	$\frac{c_{11} - c_{12}}{2}$

Donc six constantes, et cinq lorsque la condition de Green est satisfaite.

**253. Tableau général du nombre de constantes distinctes.**  
 — Voici résumés les résultats précédents quand on suppose l'existence d'un potentiel (AP), ou quand on se place dans le cas général (SP).  
 Il y a neuf groupes différents.

Systèmes	SP	AP.
cubique	3	3
hexagonal	6	5
rhomboédrique I	8	6
II	11	7
quaternaire I	7	6
II	9	7
orthorhombique	12	9
clinorhombique	20	13
anorthique	36	24

Est-il nécessaire de faire remarquer que pour les trois derniers systèmes, la théorie est parfaitement invérifiable, même avec l'hypothèse d'un potentiel? Quand on dispose de 9, 13, ou 24 constantes arbitraires, une théorie est toujours satisfaite. Déjà pour les systèmes rhomboédriques et quadratiques, 6 ou 7 indéterminées laissent peu de prises à la discussion.

On pourrait espérer que ces constantes, qu'il n'est pas absurde de supposer différentes, ne le sont pas effectivement, que la réduction est plus complète.

Des exemples de ces réductions ne sont pas rares; pour mieux dire, elles sont la règle. L'ellipsoïde des indices convient même aux cristaux anorthiques; les phénomènes optiques y sont définis par trois constantes tout comme dans les cristaux orthorhombiques. Des termes rotationnels, qu'il ne serait pas absurde d'introduire dans la théorie de la conductibilité thermique ou électrique pour certains groupes de cristaux, sont démontrés inutiles par l'expérience.

*Il ne semble pas qu'une réduction plus complète soit réelle, autant qu'on puisse juger d'après des expériences nécessairement très difficiles.*

**254. Cylindre déformé uniformément par une force parallèle à son axe.** — C'est le cas le plus important. L'expérience doit porter sur une barre suffisamment longue par rapport à ses dimensions transversales pour que, dans la majeure partie de sa longueur, la déformation dépende seulement de la force totale et non de la répartition sur la section terminale (I, § 403).

Prenons l'axe du cylindre pour axe des  $z$ ; soit  $L$  la longueur,  $S$  la section droite,  $P$  la charge; la tension est :  $N_3 = P : S$ . D'où :

$$N_1 = N_2 = T_1 = T_2 = T_3 = 0.$$

$$Sx_x = s_{13}N_3, \quad Sy_y = s_{23}N_3, \quad Sz_z = s_{33}N_3.$$

$$Sy_z = s_{43}N_3, \quad Sz_x = s_{53}N_3, \quad Sx_y = s_{63}N_3.$$

$x_x, y_y, z_z$ , sont les dilatations dans le sens de l'axe du cylindre et normalement à cet axe;  $y_z, z_x, x_y$ , mesurent les variations angulaires. La dilatation de la section droite est mesurée par :

$$S\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = S(x_x + y_y) = (s_{13} + s_{23})N_3.$$

Bien entendu, plusieurs des déformations peuvent s'annuler si l'axe du cylindre est un axe de symétrie.

**255. Cylindre fléchi par une force agissant dans la section terminale.** — On se reportera au § 415 du tome I. La courbe axiale d'un cylindre isotrope fléchi a pour équation :

$$y = \frac{P}{2EI} x^2 \left(L - \frac{x}{3}\right).$$

Pour fixer les idées, on supposera la section droite rectangulaire;  $I$  est le moment d'inertie de cette section par rapport à une droite passant par le centre de gravité et normale à la direction de la force, horizontale par conséquent si la force est obtenue à l'aide d'un poids.

Dans ce cas, les côtés du rectangle formant la section droite sont l'un vertical, l'autre horizontal.

Le cylindre ne fléchit que parce que la partie haute de sa section droite s'allonge, que la partie basse se raccourcit. Le paramètre qui intervient est donc  $s_{33}$  tout comme au paragraphe précédent. La formule devient :

$$y = \frac{s_{33}P}{2I} x^2 \left( L - \frac{x}{3} \right).$$

A moins que les côtés de la section droite ne soient des directions principales, la flexion s'accompagne toujours d'une torsion.

Nous n'en dirons pas plus long sur ce sujet. On comprend qu'il soit possible en opérant par allongement, flexion et aussi torsion sur un certain nombre de cylindres convenablement taillés par rapport aux directions principales cristallographiques, de déterminer, avec plus ou moins de précision, les modules  $s$  des formules générales. Les observations ont porté sur le sel gemme, la fluorine, la sylvine, la pyrite, le chlorate de sodium, le béryl, le spath, le quartz, la tourmaline, la topaze, la barytine. C'est un travail expérimental formidable, qui a prouvé l'exactitude des hypothèses (Voigt).

**256. Compression homogène.** — Nous avons admis au § 202 que les cristaux se classent en cinq groupes dans le cas de la compression homogène. Montrons-le d'une manière un peu plus détaillée.

Dans le cas d'une compression homogène et quelque système d'axes qu'on utilise, les  $T$  sont nuls et les  $N$  sont égaux. Les six équations du § 244 deviennent :

$$\begin{aligned} x_x &= N(s_{11} + s_{12} + s_{13}) = s'_1 N, \\ y_y &= N(s_{21} + s_{22} + s_{23}) = s'_2 N, \\ z_z &= N(s_{31} + s_{32} + s_{33}) = s'_3 N, \\ y_z &= N(s_{41} + s_{42} + s_{43}) = s'_4 N, \\ z_x &= N(s_{51} + s_{52} + s_{53}) = s'_5 N, \\ x_y &= N(s_{61} + s_{62} + s_{63}) = s'_6 N. \end{aligned}$$

Donc six constantes au maximum. Mais nous pouvons choisir les axes de manière à faire disparaître trois constantes. Les équations sont ramenées à la forme :

$$x_x = s_1 N, \quad y_y = s_2 N, \quad z_z = s_3 N.$$

Elles signifient qu'une sphère est transformée en un ellipsoïde. Nous retrouvons donc tous les résultats précédemment démontrés et la division en cinq groupes (§ 193).

## Piézoélectricité.

257. **Énoncé général du phénomène (Curie).** — En 1882, Curie découvrit que sous l'action de pressions ou de tractions, certains cristaux s'électrisent. Voici l'énoncé général du phénomène que nous expliquerons sur quelques cas particuliers.

Nous admettrons qu'un milieu cristallin soumis à une déformation se polarise à la manière d'un diélectrique placé dans un champ de force électrique. Si la déformation est homogène, c'est-à-dire si tous les éléments sont traités de même (si toute petite sphère prise n'importe où dans le milieu est transformée en le même ellipsoïde identiquement orienté), il va de soi que le vecteur  $\mathfrak{J}$  (qui représente l'intensité de la polarisation et dont les composantes sont A, B, C) a partout même direction et même grandeur.

Avant de relier la polarisation  $\mathfrak{J}$  à la déformation définie par les six fonctions de Kirchhoff, disons comment l'expérience décele la polarisation.

Nous savons qu'à une polarisation constante correspond (III, § 51) une densité de volume  $\rho$  nulle, une densité de surface  $\sigma$  fournie par la relation :

$$\sigma = A\alpha + B\beta + C\gamma;$$

$\alpha, \beta, \gamma$ , sont les cosinus directeurs de la normale à la surface qui limite la portion du milieu considérée, normale comptée positivement vers l'extérieur. La quantité d'électricité qui affleure, qui forme comme une couche liée à l'élément de surface  $dS$ , est, si l'on veut, le flux à travers cet élément du vecteur  $\mathfrak{J}$ .

Il importe de remarquer qu'elle n'est pas libre; chaque élément en se polarisant devient comme un petit aimant; il ne peut lâcher son électricité pas plus que le petit aimant ne peut lâcher son magnétisme. C'est en ce sens que la couche de densité  $\sigma$  est une couche  *fictive*.

Si par exemple nous supposons que le volume ADQRP s'est polarisé et que l'intensité d'aimantation est représentée par le vecteur  $\mathfrak{J}$ , il affleure une couche positive le long de la surface PADQ limitée par la courbe POQ suivant laquelle le cylindre parallèle à  $\mathfrak{J}$  est tangent à la surface; il affleure une couche négative le long de la surface PRQ. La densité est nulle suivant la ligne POQ, maxima et minima lorsque le vecteur est normal à la surface.

Recouvrons l'aire AD au moyen d'un corps conducteur de forme quelconque. Le potentiel devant être constant en tout point à l'intérieur d'un conducteur, il doit naître une *couche double* sur toute la surface de contact. C'est dire que là où la densité due à la polarisation est  $\sigma$  (où par conséquent tout se passe comme s'il existait une

couche de densité  $\sigma$ ), il naît une couche parallèle de densité  $-\sigma$ , située à une distance  $\epsilon$  telle que le potentiel soit constant en tous les points à l'intérieur du conducteur.

La formule des condensateurs (III, § 96) fournit la relation suivante. Soit  $V_1$  le potentiel en un point de la surface de séparation du côté du diélectrique polarisé,  $V$  le potentiel du conducteur; on a :

$$\epsilon = \frac{V_1 - V}{4\pi\sigma}.$$

Le potentiel  $V_1$  variant d'un point à l'autre de la surface,  $\epsilon$  varie également. Mais les variations de  $\epsilon$  et de  $V_1$  ne modifient pas la quan-

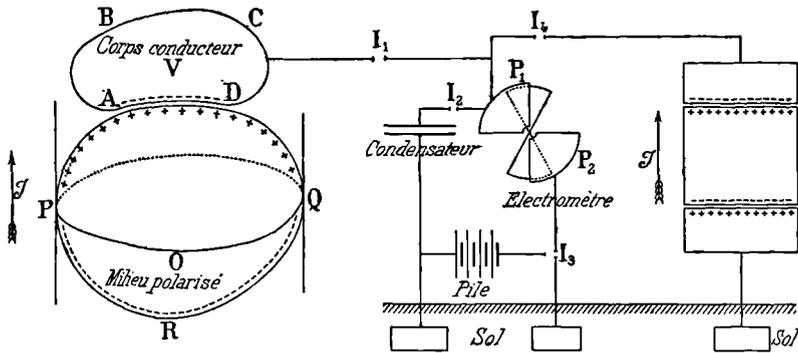


Fig. 165.

tité d'électricité attirée sur AD pour produire la couche double, et par conséquent la quantité répandue sur le reste de la surface du corps conducteur, si celui-ci est isolé.

D'où la conclusion : *quand on impose une polarisation à un corps non conducteur et qu'on en recouvre une portion quelconque par un corps conducteur isolé, la quantité d'électricité répandue sur la partie du corps conducteur qui n'est pas au contact du corps non conducteur, est égale au flux du vecteur  $\mathcal{J}$  à travers la portion qui est au contact.*

**258. Cas particulier.** — Le potentiel  $V$  dépend de la forme du corps conducteur, ainsi que de la forme et de la polarisation du corps polarisé : ou, ce qui revient au même, de la quantité distribuée sur le corps conducteur et de la couche fictive sur le corps polarisé.

Pour que l'expérience soit de discussion facile, nous admettrons que la surface du corps polarisé est recouverte par deux conducteurs. L'un est au contact du diélectrique sur tous les points où la couche fictive est positive; l'autre est au contact sur tous les points où la couche fictive est négative.

Nous mettrons l'un des conducteurs au sol, de manière que son potentiel soit nul (partie droite de la figure 165).

En définitive il existe :

1° sur le diélectrique, une polarisation constante en grandeur et direction ;

2° sur les surfaces de contact du diélectrique et des conducteurs, deux *couches doubles* formées respectivement de deux couches de densités égales et de signes contraires en chacun de leurs points (ces densités ne sont pas nécessairement constantes) ; la quantité totale de l'une ou l'autre des quatre couches est la même en valeur absolue et égale à  $m$  ;

3° sur la surface du conducteur isolé qui ne touche pas le diélectrique, une couche dont la quantité totale est  $m$  ;

4° enfin sur le conducteur au sol, ce qu'il faut pour maintenir au potentiel nul.

Dans ces conditions, le conducteur isolé possède une capacité bien déterminée ; autrement dit, son potentiel s'exprime en fonction de la polarisation par l'équation :

$$V = P\mathcal{J}.$$

Relions ce conducteur à la paire de quadrants  $P_1$  d'un électromètre dont l'autre paire  $P_2$  est au sol. L'aiguille isolée dévie (III, § 102). Ramenons l'aiguille au zéro en portant la paire  $P_2$  à des potentiels croissants. Quand l'aiguille est au zéro, les potentiels de  $P_1$  et de  $P_2$  sont égaux. D'où la mesure de  $V$ .

Pour mesurer la capacité en valeur absolue, il suffit d'utiliser un condensateur étalonné. On fait successivement deux expériences avec ou sans le condensateur.

Grâce à la disposition utilisée, il n'existe aucune électrisation apparente du diélectrique ; il intervient uniquement comme créateur des couches doubles.

**259. Formules générales (Voigt).** — Nous admettrons que la polarisation est liée à la déformation du milieu par les formules linéaires ; c'est dire que les composantes  $A, B, C$ , du vecteur  $\mathcal{J}$  s'expriment linéairement en fonction des six quantités  $x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y$ , qui définissent toute petite déformation. Supposer la déformation *homogène*, c'est dire que ces six quantités ont partout dans le milieu la même valeur : il en est par conséquent de même des composantes  $A, B, C$ .

Nous savons (§ 244) qu'il existe entre les quantités  $x_x, \dots$  et les six pressions ou tensions  $N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3$ , des relations linéaires. Nous pourrions donc exprimer les  $A, B, C$ , en fonction des  $N$  et des  $T$  par des relations linéaires. Comme ce sont les pressions qui sont le

plus directement accessibles, nous étudierons ces dernières relations et poserons avec Voïgt :

$$\begin{aligned} -A &= \delta_{11}N_1 + \delta_{12}N_2 + \delta_{13}N_3 + \delta_{14}T_1 + \delta_{15}T_2 + \delta_{16}T_3, \\ -B &= \delta_{21}N_1 + \delta_{22}N_2 + \dots && \dots, && (1) \\ -C &= \delta_{31}N_1 + \delta_{32}N_2 + \dots && \dots && \end{aligned}$$

D'où dix-huit coefficients qui ne sont différents de zéro que si le milieu présente une dyssymétrie ou asymétrie spéciale.

Remarquons en effet que A, B, C, sont des *vecteurs*, c'est-à-dire des quantités dirigées et AYANT UN SENS; au contraire, les N et les T sont des *tenseurs*, c'est-à-dire des quantités dirigées, POSITIVES OU NÉGATIVES, MAIS N'AYANT PAS DE SENS. Les premières sont représentables par une flèche  $\rightsquigarrow$ ; les secondes sont représentables par les figures  $\longleftrightarrow$  ou  $\rightarrow\leftarrow$ , suivant que ce sont des tensions ou des compressions.

Il est donc contradictoire d'admettre les relations (1) dans un cristal qui aurait un centre; car l'existence d'un centre entraîne l'identité des deux moitiés d'une droite. Dans un milieu centré, un phénomène dirigé ne peut exister que si la cause est elle-même dirigée. Un vecteur peut bien y exciter un autre vecteur; par exemple, un champ (électrique ou magnétique) peut y créer une polarisation (électrique ou magnétique). Un tenseur peut bien y exciter un autre tenseur; par exemple, une tension ou une pression y produiront une dilatation ou une contraction. *Mais un tenseur ne peut y exciter un vecteur.*

L'asymétrie, n'étant pas dans l'agent, doit se trouver dans le milieu. Les seuls milieux où la piézoélectricité soit possible sont donc dépourvus de centre.

Nous étudierons plus loin, sous le nom de *pyroélectricité*, un phénomène de polarisation dû à une *quantité scalaire*. Notre conclusion sera *a fortiori* la même : *la dyssymétrie qu'il est impossible de trouver dans l'agent, doit résider dans le milieu.*

Nous allons montrer que parmi les 21 classes (§ 101) qui n'admettent pas de centre, il y en a 20 qui sont piézoélectriques. Seule l'hémiédrie énantiomorphe du système cubique (classe 11) fait exception.

**260. Réduction du nombre des coefficients; systèmes triclinique, clinorhombique.** — Dans le cas général, c'est-à-dire pour l'hémiédrie du système triclinique (classe 1), il y a dix-huit paramètres distincts. Le tableau est :

	$N_1$	$N_2$	$N_3$	$T_1$	$T_2$	$T_3$
A	$\delta_{11}$	$\delta_{12}$	$\delta_{13}$	$\delta_{14}$	$\delta_{15}$	$\delta_{16}$
B	$\delta_{21}$	$\delta_{22}$	$\delta_{23}$	$\delta_{24}$	$\delta_{25}$	$\delta_{26}$
C	$\delta_{31}$	$\delta_{32}$	$\delta_{33}$	$\delta_{34}$	$\delta_{35}$	$\delta_{36}$

L'holoédrie du système triclinique (classe 13), possédant un centre, n'est pas piézoélectrique, pas plus que l'holoédrie du système clinorhombique.

PLAN DE SYMÉTRIE.

Supposons que le plan  $yOz$  soit un plan de symétrie. Si on se reporte au § 246 et aux figures 163 et 164, on voit que deux systèmes de pressions symétriques par rapport à ce plan ne diffèrent que par le changement de signe de  $T_2$  et de  $T_3$ . D'ailleurs, deux vecteurs symétriques par rapport au plan  $yOz$  ne diffèrent que par le signe de la composante  $A$  parallèle à l'axe des  $x$ .

Quand donc on change  $N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3$ , en  $N_1, N_2, N_3, T_1, -T_2, -T_3$ , on doit changer  $A, B, C$ , en  $-A, B, C$ .

D'où le tableau suivant, qui convient à l'hémiédrie hémimorphe du système clinorhombique (10 paramètres) :

	$N_1$	$N_2$	$N_3$	$T_1$	$T_2$	$T_3$
A	0	0	0	0	$\delta_{15}$	$\delta_{16}$
B	$\delta_{21}$	$\delta_{22}$	$\delta_{23}$	$\delta_{24}$	0	0
C	$\delta_{31}$	$\delta_{32}$	$\delta_{33}$	$\delta_{34}$	0	0.

AXE DE SYMÉTRIE BINAIRE.

On voit immédiatement sur les figures que deux systèmes de pressions admettant l'axe des  $z$  comme axe binaire, correspondant aux notations :

$$\begin{array}{cccccc} N_1 & N_2 & N_3 & T_1 & T_2 & T_3. \\ N_1 & N_2 & N_3 & -T_1 & -T_2 & T_3, \end{array}$$

deux vecteurs symétriques par rapport à cet axe correspondent aux notations :  $A, B, C, -A, -B, C$ .

D'où le tableau suivant, qui convient à l'hémiédrie énantiomorphe du système clinorhombique (8 paramètres) :

	$N_1$	$N_2$	$N_3$	$T_1$	$T_2$	$T_3$
A	0	0	0	$\delta_{14}$	$\delta_{15}$	0
B	0	0	0	$\delta_{24}$	$\delta_{25}$	0
C	$\delta_{31}$	$\delta_{32}$	$\delta_{33}$	0	0	$\delta_{36}$ .

261. **Système orthorhombique.** — L'holoédrie de ce système n'est pas piézoélectrique.

L'hémiédrie hémimorphe admet un axe binaire que nous prendrons parallèle à l'axe des  $z$ , et deux plans de symétrie passant par cet axe, plans que nous ferons coïncider avec  $yOz$  et  $xOz$ .

On trouve immédiatement, en combinant les tableaux précédents, le système des 5 paramètres :

	$N_1$	$N_2$	$N_3$	$T_1$	$T_2$	$T_3$
A	0	0	0	0	$\delta_{15}$	0
B	0	0	0	$\delta_{24}$	0	0
C	$\delta_{31}$	$\delta_{32}$	$\delta_{33}$	0	0	0.

L'hémiédrie énantiomorphe admet trois axes binaires. Il suffit de faire porter la réduction due à un axe binaire sur les trois axes. D'où le tableau à 3 paramètres :

	$N_1$	$N_2$	$N_3$	$T_1$	$T_2$	$T_3$
A	0	0	0	$\delta_{14}$	0	0
B	0	0	0	0	$\delta_{25}$	0
C	0	0	0	0	0	$\delta_{36}$ .

262. **Systèmes quaternaire et cubique.** — L'holoédrie et l'hémiédrie paramorphe du système quaternaire ne sont pas piézoélectriques. Restent cinq classes qui se divisent en deux groupes.

La té tartoédrie sphénoïdale (15) possède un axe binaire (axe des  $z$ ). On commencera donc la réduction à partir du tableau du § 260. On introduira le plan de symétrie alterne. On trouve aisément (4 paramètres) :

	$N_1$	$N_2$	$N_3$	$T_1$	$T_2$	$T_3$
A	0	0	0	$\delta_{14}$	$\delta_{15}$	0
B	0	0	0	$-\delta_{15}$	$\delta_{14}$	0
C	$\delta_{31}$	$-\delta_{31}$	0	0	0	$\delta_{36}$ .

Pour les quatre autres classes piézoélectriques (8, 22, 4, 28), il n'y a plus que 2 paramètres :

	$N_1$	$N_2$	$N_3$	$T_1$	$T_2$	$T_3$
A	0	0	0	$\delta_{14}$	0	0
B	0	0	0	0	$\delta_{14}$	0
C	0	0	0	0	0	$\delta_{36}$ .

Enfin pour le système cubique [hémiedrie hémimorphe (31), tétratoédrie (10)], il ne reste plus qu'un paramètre :

	$N_1$	$N_2$	$N_3$	$T_1$	$T_2$	$T_3$
A	0	0	0	$\delta_{14}$	0	0
B	0	0	0	0	$\delta_{14}$	0
C	0	0	0	0	0	$\delta_{14}$

La réduction est complète (tous les coefficients s'annulent) pour l'hémiedrie énantiomorphe du système cubique où le phénomène est *a priori* possible. On le montrera en cherchant à satisfaire à l'existence simultanée des axes quaternaires et ternaires (voir plus loin au § 263 ce qui se rapporte à ceux-ci).

**263. Existence d'un axe ternaire; système rhomboédrique.**  
— Nous supposons que l'axe des  $z$  coïncide avec l'axe ternaire.

Entre deux vecteurs  $A, B, C$ , et  $A', B', C'$ , dont l'un est obtenu en faisant tourner l'autre de  $120^\circ$  autour de l'axe des  $z$ , existent les relations :

$$\begin{aligned} 2A' &= -A + \sqrt{3} B, \\ 2B' &= -\sqrt{3} A - B, \\ C' &= C. \end{aligned}$$

Les systèmes de pressions qui fournissent les actions symétriques sur des plans ayant tourné de  $120^\circ$  autour de l'axe des  $z$ , satisfont aux relations (§ 251) :

$$\begin{aligned} 4N'_1 &= N_1 + 3N_2 - 2\sqrt{3} T_3, \\ 4N'_2 &= 3N_1 + N_2 + 2\sqrt{3} T_3, \\ N'_3 &= N_3, \\ 2T'_1 &= -\sqrt{3} T_2 - T_1, \\ 2T'_2 &= -T_2 + \sqrt{3} T_1, \\ 4T'_3 &= \sqrt{3} (N_1 - N_2) - 2T_3. \end{aligned}$$

Il faut maintenant écrire que le vecteur  $A', B', C'$ , s'exprime en fonction des  $N'$  et des  $T'$ , comme le vecteur  $A, B, C$ , en fonction des  $N$  et des  $T$ .

On vérifie qu'il en est ainsi pourvu que les paramètres se réduisent à six distribués comme l'indique le tableau suivant :

	$N_1$	$N_2$	$N_3$	$T_1$	$T_2$	$T_3$
A	$\delta_{11}$	$-\delta_{11}$	0	$\delta_{14}$	$\delta_{15}$	$-\delta_{22}$
B	$-\delta_{22}$	$\delta_{22}$	0	$\delta_{15}$	$-\delta_{14}$	$-\delta_{11}$
C	$\delta_{31}$	$\delta_{31}$	$\delta_{33}$	0	0	0.

Ce système convient à la *tétartoédrie du système rhomboédrique* (3).

Pour l'*hémiedrie hémimorphe* (21), nous devons supposer le plan  $yOz$  de symétrie; il faut combiner le tableau précédent, au tableau du § 260. Il reste 4 paramètres :

	$N_1$	$N_2$	$N_3$	$T_1$	$T_2$	$T_3$
A	0	0	0	0	$\varepsilon_{15}$	$-\varepsilon_{22}$
B	$-\varepsilon_{22}$	$\varepsilon_{22}$	0	$\varepsilon_{15}$	0	0
C	$\varepsilon_{31}$	$\varepsilon_{31}$	$\varepsilon_{33}$	0	0	0.

Nous reviendrons sur ce cas, qui est celui de la *tourmaline*.

Pour l'*hémiedrie énantiomorphe* (7), nous devons introduire trois axes de symétrie binaire. Faisons coïncider l'axe des  $x$  avec l'un des axes binaires. Il faut combiner le tableau des paramètres qui se rapporte à un axe ternaire, avec le tableau du § 260 qui convient à un axe binaire, en le modifiant pour que ce soit l'axe des  $x$ . Il reste le tableau à deux paramètres distincts :

	$N_1$	$N_2$	$N_3$	$T_1$	$T_2$	$T_3$
A	$\varepsilon_{11}$	$-\varepsilon_{11}$	0	$\varepsilon_{14}$	0	0
B	0	0	0	0	$-\varepsilon_{14}$	$-\varepsilon_{11}$
C	0	0	0	0	0	0.

Nous reviendrons sur ce cas, qui est celui du *quartz*.

**264. Système hexagonal.** — Cinq classes de ce système sont piézoélectriques.

Dans la *tétartoédrie sphénoïdale* (14), nous devons ajouter à l'axe ternaire un plan de symétrie normal. D'où le tableau à deux paramètres :

	$N_1$	$N_2$	$N_3$	$T_1$	$T_2$	$T_3$
A	$\varepsilon_{11}$	$-\varepsilon_{11}$	0	0	0	$-\varepsilon_{22}$
B	$-\varepsilon_{22}$	$\varepsilon_{22}$	0	0	0	$-\varepsilon_{11}$
C	0	0	0	0	0	0.

Pour l'*hémiedrie sphénoïdale*, nous devons rendre ce tableau compatible avec les deux tableaux du paragraphe précédent, en plaçant

convenablement les axes et les plans de symétrie. D'où la réduction à un seul paramètre :

	N <sub>1</sub>	N <sub>2</sub>	N <sub>3</sub>	T <sub>1</sub>	T <sub>2</sub>	T <sub>3</sub>
A	ε <sub>11</sub>	-ε <sub>11</sub>	0	0	0	0
B	0	0	0	0	0	-ε <sub>11</sub>
C	0	0	0	0	0	0.

Pour la *tétartoédrie* (5), nous devons considérer l'axe des *z* à la fois comme ternaire et binaire, ce qui fournit un axe sénaire. D'où le tableau à 4 paramètres :

	N <sub>1</sub>	N <sub>2</sub>	N <sub>3</sub>	T <sub>1</sub>	T <sub>2</sub>	T <sub>3</sub>
A	0	0	0	ε <sub>14</sub>	ε <sub>15</sub>	0
B	0	0	0	ε <sub>15</sub>	-ε <sub>14</sub>	0
C	ε <sub>31</sub>	ε <sub>31</sub>	ε <sub>33</sub>	0	0	0.

Pour l'*hémiedrie hémimorphe* (23), nous introduisons la supposition d'un plan de symétrie passant par l'axe sénaire. D'où la réduction à 3 paramètres :

	N <sub>1</sub>	N <sub>2</sub>	N <sub>3</sub>	T <sub>1</sub>	T <sub>2</sub>	T <sub>3</sub>
A	0	0	0	0	ε <sub>15</sub>	0
B	0	0	0	ε <sub>15</sub>	0	0
C	ε <sub>31</sub>	ε <sub>31</sub>	ε <sub>33</sub>	0	0	0.

Enfin pour l'*hémiedrie énantiomorphe* (9), nous introduisons outre l'axe sénaire des axes binaires perpendiculaires. Il reste 4 paramètres :

	N <sub>1</sub>	N <sub>2</sub>	N <sub>3</sub>	T <sub>1</sub>	T <sub>2</sub>	T <sub>3</sub>
A	0	0	0	ε <sub>14</sub>	0	0
B	0	0	0	0	-ε <sub>14</sub>	0
C	0	0	0	0	0	0.

Telles sont les combinaisons des constantes pour les *vingt* classes piézoélectriques.

265. **Cas du quartz (Curie).** — Les formules sont :

$$A = -\varepsilon_{11}(N_1 - N_2) - \varepsilon_{14}T_1,$$

$$B = \varepsilon_{14}T_2 + \varepsilon_{11}T_3,$$

$$C = 0.$$

On se rappellera que l'axe des  $z$  est ternaire et que l'un des axes binaires coïncide avec l'axe des  $x$ .

Taillons dans le cristal un prisme droit; deux faces sont normales à l'axe ternaire (axe des  $z$ ); deux autres sont normales à un des axes binaires (axe des  $x$ ). Représentons la section droite du prisme hexagonal de quartz dans lequel le prisme droit à base rectangle est taillé. Notons  $h$  les

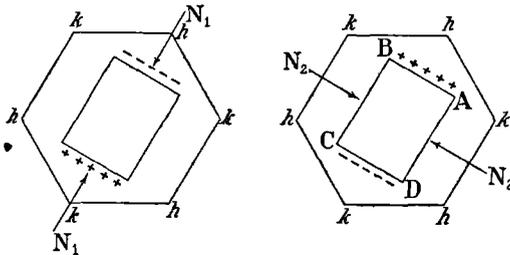


Fig. 166.

arêtes qui portent les faces tétrartoédriques les plus ordinaires et  $k$  les arêtes intermédiaires; la droite  $hk$  sera l'axe des  $x$ .

Les expériences ont porté sur les deux cas suivants.

*Pression uniforme dirigée suivant un axe binaire (fig. 166 à gauche):*

Il ne subsiste que  $N_1$ ; les équations se réduisent à :

$$A = -\varepsilon_{11}N_1, \quad B = 0, \quad C = 0.$$

La polarisation diélectrique est elle-même dirigée suivant l'axe des  $x$ .

*Pression uniforme dirigée normalement à un axe binaire (fig. 166 à droite):*

Il ne subsiste que  $N_2$ ; les équations se réduisent encore à :

$$A = \varepsilon_{11}N_2, \quad B = 0, \quad C = 0.$$

Bien entendu, les expériences vérifient la théorie précédente qui n'en est que la conséquence généralisée.

1° *Les quantités d'électricité dégagées sur les faces opposées sont égales et de signes contraires.* C'est la notion même de polarisation.

2° *Elles sont égales et de signes contraires pour des déformations inverses; elles sont proportionnelles aux forces ou aux déformations.* C'est ce que traduisent les relations linéaires.

3° *Elles ne dépendent que des pressions, c'est-à-dire des forces par unité de surface.*

4° *Elles ne dépendent pas de la distance des faces entre lesquelles s'exercent les pressions; elles sont proportionnelles aux aires des faces sur lesquelles on recueille l'électricité.* Ce sont des conséquences évidentes de l'idée de polarisation fonction de la pression.

Nous avons longuement expliqué au § 257 dans quel sens on peut parler de quantités d'électricité *dégagées*. Elles ne le sont que par suite de la production d'une couche double.

266. **Appareil fournissant des quantités connues d'électricité.** — Une lame de quartz est taillée en prisme droit, de manière que la face ABCD (fig. 166 et 167) soit normale à l'axe ternaire. Les faces AB et DC sont normales à l'axe binaire. Voici les dimensions ordinaires :

$$AB = 10^{\text{cm}}, \quad CB = 0^{\text{cm}}, 5.$$

L'épaisseur suivant l'axe ternaire est  $2^{\text{cm}}$ . Posons :

$$s = 2 \times 0,5, \quad S = 2 \times 10.$$

Les faces AB, CD, sont argentées et peuvent être mises en communication l'une avec le sol, l'autre avec l'appareil à charger. Soit P la charge en kilogrammes. La tension  $N_2$  et la polarisation A sont :

$$N_2 = P : s, \quad A = \delta_{11} P : s.$$

La quantité déchargée est :

$$SA = \delta_{11} P \frac{S}{s} = \delta_{11} P \frac{\overline{AB}}{AD}.$$

Il y a donc avantage à diminuer la largeur AD et à augmenter la longueur  $\overline{AB}$ . Bien entendu, les seules parties utiles des faces AB, CD, sont celles recouvertes par l'argenture.

Des expériences complètes ont donné pour valeur des coefficients :

$$\delta_{11} = 0,0645, \quad \delta_{14} = -0,0145.$$

Les pressions sont exprimées en kilogrammes par centimètre carré, les quantités d'électricité en CGS électrostatiques.

267. **Cas de la tourmaline.** — Les formules sont (§ 263) :

$$\begin{aligned} A &= -\delta_{15} T_2 + \delta_{22} T_3, \\ B &= \delta_{23} (N_1 - N_2) - \delta_{15} T_1, \\ C &= -\delta_{31} (N_1 + N_2) - \delta_{33} N_3. \end{aligned}$$

Les expériences ont principalement porté sur des lames taillées normalement à l'axe ternaire et comprimées suivant cet axe. Les formules donnent :

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = -\delta_{33} N_3.$$

Des expériences complètes ont fourni les résultats numériques suivants. Les pressions sont exprimées en kilogrammes par centimètre carré, et les quantités d'électricité en CGS électrostatiques :

$$\begin{aligned} \delta_{15} &= -0,1102, & \delta_{22} &= 0,0067, \\ \delta_{31} &= -0,0088, & \delta_{33} &= -0,0571. \end{aligned}$$

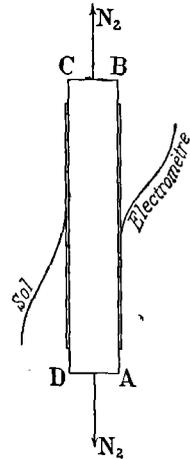


Fig. 167.

**268. Phénomène inverse de la piézoélectricité. Dilatation électrique du quartz (Lippmann).** —

Considérons par exemple une tourmaline terminée par deux bases artificielles normales à l'axe ternaire; recouvrons-les d'armatures métalliques et exerçons une pression normale  $N_3$ .

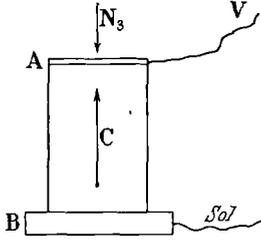


Fig. 168.

L'armature B est au sol; l'autre A est isolée, ou peut être mise en communication avec des sources permettant de lui donner tel potentiel  $V$  qu'on voudra.

La polarisation, représentée par le vecteur  $C$  (en grandeur et en sens), est par hypothèse une fonction complètement déterminée du potentiel  $V$  et de la pression  $N_3$  :

$$C = \varphi(N_3, V), \quad dC = \frac{\partial \varphi}{\partial N_3} dN_3 + \frac{\partial \varphi}{\partial V} dV.$$

La longueur  $L$  du prisme est par hypothèse une fonction complètement déterminée du potentiel et de la pression :

$$L = \psi(N_3, V), \quad dL = \frac{\partial \psi}{\partial N_3} dN_3 + \frac{\partial \psi}{\partial V} dV.$$

Si la longueur ne dépend pas du potentiel  $V$ , on a :  $\partial \psi / \partial V = 0$ .  
La question est précisément de savoir ce qu'il en est.

Cherchons comment varie l'énergie interne ou potentielle  $E$  du prisme de tourmaline, en fonction des variables  $L$  et  $C$  qui par hypothèse caractérisent son état. L'accroissement  $dE$  est le travail exécuté contre les forces extérieures; c'est par unité de surface de la base :

$$dE = N_3 dL + V dC = \left( N_3 \frac{\partial \psi}{\partial N_3} + V \frac{\partial \varphi}{\partial N_3} \right) dN_3 + \left( N_3 \frac{\partial \psi}{\partial V} + V \frac{\partial \varphi}{\partial V} \right) dV.$$

En effet, un potentiel  $V$  positif tend à produire une polarisation de sens inverse au vecteur  $C$  considéré comme positif; il tend par conséquent à empêcher l'accroissement  $dC$ . D'ailleurs  $dC$  est la quantité d'électricité dégagée, puisque  $C$  (composante de l'intensité diélectrique normale à la base) est numériquement égale à la densité;  $VdC$  est donc bien le travail effectué contre les forces extérieures pour amener la quantité  $dC$  au potentiel  $V$ .

Écrivons que  $dE$  est une différentielle exacte; il reste comme condition :

$$\frac{\partial \psi}{\partial V} = \frac{\partial \varphi}{\partial N_3}.$$

L'expérience ayant prouvé que la polarisation  $C$  est une fonction de la pression  $N_3$ , il résulte de cette relation que la longueur  $L$  est une fonction du potentiel  $V$ . Nous prévoyons donc une dilatation électrique comme phénomène inverse de la piézoélectricité.

Supposons qu'une pression  $N_3$  électrise positivement l'armature A. Il faut que :  $\partial\varphi/\partial N_3 > 0$ . On a donc :  $\partial\psi/\partial V > 0$ .

*Une électrisation positive de l'armature A tend à allonger le prisme.*

Ainsi la *pression* produit un certain phénomène ; réciproquement, ce phénomène est d'un sens tel qu'il fait naître des forces mécaniques s'opposant au raccourcissement du cristal. C'est une application de la *loi de modération*.

L'expérience prouve que :

$$\varepsilon_{33} = \partial\varphi/\partial N_3,$$

est une constante. On peut donc poser :  $L = \varepsilon_{33}V + L_0$ . L'électrisation produit un allongement proportionnel au potentiel.

Ce raisonnement suppose essentiellement que l'état du corps est une fonction bien déterminée des variables. Comme il n'en paraît être ainsi que parce que les expériences sont grossières, le raisonnement ne vaut que pour une première et probablement mauvaise approximation.

**269. Vérifications expérimentales.** — Ce que nous avons dit de la tourmaline peut être répété du quartz. C'est sur celui-ci qu'ont porté les expériences. Elles sont faciles avec l'appareil représenté figure 167. Il suffit d'électriser convenablement les armatures et de déterminer par un procédé quelconque les allongements à *traction constante*. On emploie les méthodes ordinaires (franges, miroirs, ...).

Pour la tourmaline ou le quartz comprimé suivant les axes binaires, les expériences sont moins simples (fig. 169).

Dans un cadre métallique rigide, on place le parallélépipède de quartz calé par un cube de verre. Il est séparé du verre par une armature métallique qui servira à l'électrisation. Le cadre joue le rôle de seconde armature mise au sol. On serre le tout avec des boulons. Si on électrise convenablement, le quartz s'allonge, comprime le verre qui devient biréfringent ; on mesure cette biréfringence par les procédés ordinaires (§ 295).

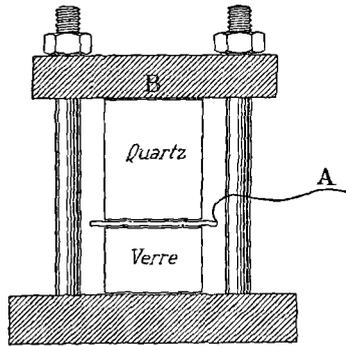


Fig. 169.

**270. Modifications optiques du quartz polarisé.** — L'expérience consiste à observer *en lumière convergente* une lame rectangle *perpendiculaire à l'axe*, dont les côtés sont parallèles et perpendiculaires à un axe binaire. Deux faces opposées parallèles à l'axe ter-

naire sont garnies d'armatures métalliques permettant de créer une polarisation.

Si l'électrisation est nulle, on obtient les franges circulaires ordinaires sans croix qui caractérisent le quartz normalement à l'axe.

L'expérience montre qu'en établissant une différence de potentiel entre deux faces opposées parallèles à l'axe ternaire, c'est-à-dire en polarisant le milieu, on transforme les cercles en ellipses. L'intervention du sens de la polarisation intervertit les positions des axes de l'ellipse, le grand axe prenant la place du petit axe et inversement.

Ainsi l'ellipsoïde optique est modifié par le fait de la polarisation, phénomène très analogue au phénomène de Kerr (§ 303).

### Pyroélectricité.

**271. Définition du phénomène.** — La *pyroélectricité* est l'étude des phénomènes de polarisation diélectrique de certains cristaux (tourmaline, calamine, topaze, acide tartrique, sucre, ...) dont on fait varier la température *en prenant la précaution essentielle de la maintenir uniforme*.

Nous admettrons d'abord le cristal *absolument privé de conductibilité*. La polarisation due à la variation de température est représentée par un vecteur  $\mathcal{J}$  (*intensité de polarisation*), dirigé suivant une direction invariable (*axe polaire*) et fonction de la température. Comme première approximation on peut poser :

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 + it.$$

La polarisation d'un fragment réagit par induction sur la polarisation du fragment voisin; mais outre que cette réaction est généralement négligeable, on peut la diminuer par un choix convenable des surfaces de contact des conducteurs qui servent à déceler la charge (§ 257).

Alors même qu'un cristal est *intérieurement* non conducteur, il l'est toujours plus ou moins par sa surface qui condense de la vapeur d'eau. Si l'on ne prend aucune précaution, le cristal se recouvre d'une couche électrique équilibrant sur tout point extérieur l'action de la couche due à la polarisation interne. Le cristal semble à l'état neutre, tandis qu'en réalité il est recouvert d'une couche double de densité :

$$\sigma = \pm \mathcal{J} \cos \theta.$$

$\theta$  est l'angle que fait l'intensité de polarisation avec la normale à la surface.

Faisons passer la température de  $t$  à  $t_1$  degrés : la *polarisation change*. Si la surface est peu conductrice, la couche *libre* n'a pas le

temps de se modifier par conduction ; le cristal semble couvert d'une couche de densité :

$$\sigma' - \sigma = (\mathfrak{J}' - \mathfrak{J}) \cos \theta.$$

Nous pouvons *décharger le cristal*. Cela ne signifie pas que nous supprimons la polarisation, ou enlevons la densité superficielle  *fictive*  par laquelle elle est décelée. Cela signifie que nous amenons une couche  *réelle*  qui annule sur tout point extérieur l'action de la couche fictive.

Si l'intensité de la polarisation est  $\mathfrak{J}$  (elle est la même en tous les points du milieu, puisque nous supposons le phénomène homogène), si elle fait l'angle  $\theta$  avec la normale à la surface qui limite le milieu polarisé (normale comptée positivement vers l'extérieur), la densité totale  *qui décharge en apparence le cristal* , est :

$$\sigma = -\mathfrak{J} \cos \theta.$$

Partons de l'état neutre  *réel ou apparent*  ; chauffons : il se produit une densité apparente  $\sigma$  due à la variation de polarisation. Déchargeons : nous amenons une couche  $-\sigma$ . Ramenons à la température initiale : la polarisation disparaît, il reste une densité  $-\sigma$ .

Il résulte de l'hypothèse fondamentale d'une polarisation, que la masse totale fictive est nulle. Cela revient à dire que le flux d'un vecteur constant en grandeur et direction  $\mathfrak{J}$ , à travers une surface fermée quelconque, est nul :

$$\iint \sigma dS = \iint \mathfrak{J} \cos \theta dS = 0.$$

Si la température n'est pas uniforme, les phénomènes se compliquent infiniment parce qu'il naît dans le cristal des tensions et compressions : la pyroélectricité se complique de piézoélectricité. Il est clair qu'alors le vecteur  $\mathfrak{J}$  n'est plus nécessairement constant en grandeur et direction : la densité intérieure  $\rho = -\text{Div}(\mathfrak{J})$ , n'est plus nécessairement nulle.

Nous dirons quelques mots de ces phénomènes au § 274.

**272. Expériences.** — Utilisons une tourmaline taillée en prisme et terminée par deux faces artificielles normales à l'axe ternaire. Recouvrons ces faces avec deux petites plaques métalliques reliées l'une au sol, l'autre à la tige d'un  *électromètre à décharges*  (fig. 170). Lorsque le potentiel croît, les feuilles se repoussent. L'une d'elles vient au voisinage d'une boule en communication avec le sol. Elle la touche, se décharge et retombe. A chaque contact, une quantité déterminée d'électricité passe dans le sol : c'est la quantité nécessaire pour charger l'appareil à un potentiel tel que la feuille touche la

boule. Le nombre des décharges est une mesure (en unités arbitraires) de la quantité d'électricité totale perdue.

On chauffe la tourmaline aussi lentement et uniformément que possible.

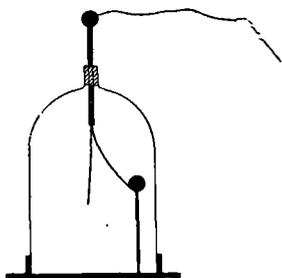


Fig. 170.

On vérifie les faits suivants.

1° *La quantité totale d'électricité dépend uniquement de la variation de température et lui est sensiblement proportionnelle; elle ne dépend pas de la vitesse de l'opération.*

Comme l'appareil maintient à peu près nulle la différence de potentiel des deux faces terminales, cette loi revient à dire que la polarisation est une fonction bien déterminée de la température. Sa variation est proportionnelle à la variation de température.

2° *La quantité d'électricité produite par un échauffement est égale et de signe contraire à celle que produit le refroidissement.*

Cela revient à dire que la polarisation reprend sa valeur initiale en même temps que la température.

3° *La quantité d'électricité est proportionnelle à la section  $S$  de la tourmaline et indépendante de sa longueur, conséquence évidente de la théorie donnée ci-dessus.*

Voici l'ordre de grandeur du phénomène : pour une variation de  $100^\circ$ , une tourmaline du Brésil fournit une densité de 165 unités CGS électrostatiques.

Les lois précédentes sont très simples, mais il ne faut pas oublier qu'elles supposent nulle la conductibilité superficielle; celle-ci vient troubler le phénomène, et ce n'est qu'en tenant péniblement compte de ses effets qu'on dégage les règles précédentes.

Si on chauffe une tourmaline isolée, elle se charge de ses couches fictives; mais peu à peu la conductibilité superficielle intervient pour la recouvrir de couches annulant complètement l'effet de la polarisation. Dans ces conditions, il est clair que l'électricité que l'on peut recueillir n'est plus proportionnelle à la variation de température et n'est plus indépendante de la vitesse de l'opération.

Quand une tourmaline est chauffée dans un vase plein d'eau isolé, le vase ne s'électrise pas : preuve que les deux électricités se développent en quantités égales et de signes contraires, ce qui est la conséquence immédiate de l'idée de polarisation.

**273. Relations entre la pyroélectricité et la forme cristalline.** — La pyroélectricité implique que les deux bouts d'une direction tracée dans le milieu n'aient pas les mêmes propriétés.

Puisque le phénomène est dirigé et que la cause est scalaire, le milieu doit avoir la dyssymétrie du phénomène (§ 259).

Cherchons quelles classes peuvent être pyroélectriques.

Nous appellerons *axe de pyroélectricité* la direction du vecteur  $\mathfrak{J}$ .

Il ne peut exister plusieurs axes de pyroélectricité.

La pyroélectricité ne peut exister dans un cristal centré.

Le milieu pyroélectrique ne peut posséder qu'un axe de symétrie; s'il possède des plans de symétrie, ils doivent passer par l'axe.

Ceci posé, voici les classes pyroélectriques.

## II. SYSTÈME HEXAGONAL.

23. *Hémiédrie hémimorphe.*

5. *Tétartoédrie.*

## III. SYSTÈME TERNAIRE.

21. *Hémiédrie hémimorphe.* Tourmaline.

3. *Tétartoédrie.*

## IV. SYSTÈME QUATERNAIRE.

22. *Hémiédrie hémimorphe.*

4. *Tétartoédrie.*

## V. SYSTÈME ORTHORHOMBIQUE.

20. *Hémiédrie hémimorphe.* Calamine, résorcine.

## VI. SYSTÈME CLINORHOMBIQUE.

20. *Hémiédrie énantiomorphe.* Sucre, acide tartrique, tartrate de potassium.

12. *Hémiédrie hémimorphe.* L'axe pyroélectrique est quelque part dans le plan de symétrie.

## VII. SYSTÈME TRICLINIQUE.

1. *Hémiédrie.* L'axe est dirigé d'une manière quelconque.

Il existe donc 10 classes qui *peuvent* présenter la pyroélectricité. Il ne s'ensuit pas que tous les cristaux de ces classes soient pyroélectriques, d'après le principe général qu'une dyssymétrie du milieu n'entraîne pas nécessairement une dyssymétrie des phénomènes.

**274. Pyroélectricité due aux variations de tension.** — Nous pouvons maintenant revenir sur des phénomènes extrêmement complexes, qui ont donné lieu à maintes discussions et dont on comprend aisément à la fois la raison d'être et le peu d'intérêt théorique.

Échauffons un cristal de quartz *sans prendre aucune précaution pour que la température reste uniforme*. Il se produit à l'intérieur un système de tensions, variables d'un point à l'autre d'une manière compliquée. D'où une polarisation variable d'un point à l'autre, qui serait calculable en chaque point par les formules du § 263 (généralisées en supposant  $\delta_{11}$  et  $\delta_{14}$  fonction de la température). Pour appli-

quer les formules, il faudrait au préalable étudier les lois de la conductibilité et de l'élasticité du cristal.

Les phénomènes extérieurs qui résultent de la polarisation de tous les points intérieurs, auront donc les aspects les plus variés suivant la loi de variation de la température. D'où les énoncés les plus divers et des discussions à perte de vue, avant que les phénomènes piézo-électriques ne fussent connus.

Le cas le plus simple est fourni par un cristal dont la forme extérieure est en relation avec la symétrie interne, qu'on chauffe uniformément, et qu'on laisse ensuite refroidir régulièrement dans l'air. On peut alors prévoir *la symétrie* de la distribution des températures, *la symétrie* de la distribution des tensions et *en gros* les phénomènes extérieurs qui résultent des polarisations internes.

Par exemple, un cristal régulier de quartz, régulièrement refroidi, s'électrise négativement suivant les arêtes *h* qui portent les facettes tétrartoédriques, positivement suivant les arêtes *k*. *Il n'existe pas trois axes de pyroélectricité; il existe seulement une distribution de température, impliquant des tensions intérieures de symétrie ternaire.*

Nous n'insisterons pas davantage sur une question dont on conçoit la solution, mais dont l'étude suffisamment embrouillée est sans grand intérêt.

## CHAPITRE VII

### SYMÉTRIE DU MILIEU ET DOUBLE RÉFRACTION

---

#### Milieux cristallins.

##### 275. **Faits généraux.** —

1° Toutes les substances biréfringentes ne possèdent qu'une double réfraction faible. L'ellipsoïde des indices diffère peu d'une sphère.

Le spath, qui est uniaxe, est remarquable par la grandeur de la différence de ses indices principaux. Elle est de 0,17 environ pour la raie D, l'indice ordinaire étant 1,658. Le calomel ( $\text{Hg}^2\text{Cl}^2$ ), qui cristallise en prismes à base carrée, est encore plus remarquable. On a pour le rouge :  $n_o = 1,96$ ,  $n_e = 2,60$ ; la biréfringence est donc :  $n_e - n_o = 0,64$ .

Mais généralement la différence des indices est de l'ordre du trentième de la différence  $n - 1$  qui mesure le pouvoir réfracteur moyen.

2° Des substances qui ont presque exactement la même forme cristalline (syncristallisant) ont des constantes optiques très différentes.

3° Des substances, se rapprochant beaucoup d'une symétrie supérieure (pseudosymétriques), présentent avec intensité les phénomènes optiques caractéristiques de leur véritable symétrie.

De ces trois faits remarquables résulte qu'il n'y a pas proportionnalité même approchée entre la cause et l'effet : au voisinage des valeurs des variables fixant la constitution du corps pour lesquelles le phénomène est nul, il peut avoir des valeurs notables.

276. **Classification. Anomalies optiques (Mallard).** — Les phénomènes optiques sont définis par l'ellipsoïde des indices. La classification des §§ 193 et sq. est donc immédiatement valable.

Les cristaux se divisent en cinq groupes :

1° le groupe *isotrope* (sphère des indices), qui comprend les cristaux cubiques ;

2° le groupe anisotrope avec axe d'isotropie (ellipsoïde de révolution), qui comprend les cristaux hexagonaux, rhomboédriques et quaternaires;

3°, 4°, 5° les groupes anisotropes sans axe d'isotropie (ellipsoïde à trois axes inégaux), qui comprend les cristaux ortho, clinorhombiques et tricliniques. Nous reviendrons plus loin sur ces derniers groupes.

Mais ici une remarque importante s'impose.

La symétrie de forme du cristal, au moins à ne considérer que les angles des faces, ne dépend que du réseau *qui peut être plus symétrique que le milieu. La symétrie des phénomènes optiques dépend au contraire de la symétrie du milieu : elle peut donc être inférieure à celle du réseau.*

Par exemple, un cristal est orthorhombique, mais son réseau est quadratique. L'ellipsoïde des indices est à trois axes *inégaux*. On ne peut voir là une *anomalie optique* qu'en prétendant mettre les phénomènes optiques sous la dépendance de la symétrie du réseau. L'anomalie disparaît s'ils sont sous la dépendance de la symétrie du milieu (maille du réseau ET remplissage).

Il y aurait véritablement anomalie optique si tous les autres phénomènes (clivages, figures de corrosion, ...) prouvaient par exemple que le milieu est vraiment quadratique, l'ellipsoïde des indices restant à trois axes inégaux. Mais le cas ne s'est jamais présenté.

*En définitive, les anomalies optiques n'existent pas.*

Mais inversement les phénomènes optiques ne suffisent pas à déterminer le réseau, et par conséquent le système cristallin. Les cristaux à réseau cubique ne sont pas nécessairement isotropes; les cristaux à réseaux sénaires, ternaires, quadratiques, ne sont pas nécessairement uniaxes. Et ainsi de suite.

Le problème pour les corps tels que le *boracite* (§ 172) ou la *fluorine* (qui, suivant les cas, est biaxe ou uniaxe avec un réseau cubique) est donc, non pas d'expliquer leurs propriétés optiques, mais leurs propriétés cristallines, de montrer pour quelle raison une maille cubique peut se constituer avec un remplissage de symétrie inférieure.

Ajoutons qu'on peut toujours se tirer d'affaire, quand un cristal à réseau cubique n'est pas isotrope, ..., en disant qu'il n'est que pseudo-cubique.

**277. Situation des axes de l'ellipsoïde des indices par rapport aux arêtes cristallographiques.** — Il s'agit de déterminer la position des axes de l'ellipsoïde des indices par rapport aux rangées du cristal et à ses plans réticulaires (arêtes et faces réelles).

Pas de difficulté pour le groupe isotrope, ni pour le groupe qui possède un axe principal.

Dans le premier cas, l'ellipsoïde est une sphère; dans le second, son axe de révolution coïncide avec l'axe principal.

Passons donc aux trois derniers systèmes ou groupes, comme on voudra.

**SYSTÈME ORTHORHOMBIQUE.**

Quand le domaine complexe appartient au système orthorhombique, les axes *inégaux* de l'ellipsoïde des indices coïncident avec ses axes binaires  $L, L', L''$ . Les axes optiques (en nombre infini; deux pour chaque radiation) sont nécessairement dans l'un des plans de symétrie. Ils se distribuent généralement dans un de ces plans en double éventail  $RV, R'V'$  (ou dans l'ordre inverse  $VR, V'R'$ ) (fig. 171).

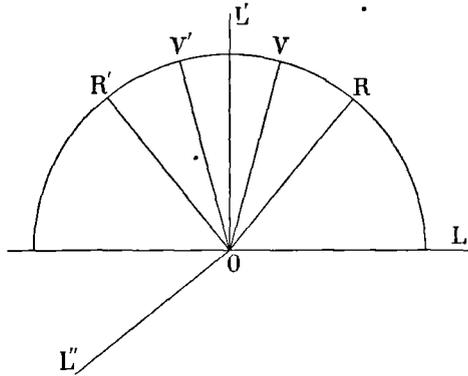


Fig. 171.

Ils peuvent encore se distribuer à la fois dans les plans rectangulaires,  $LOL', L''OL'$  par exemple. Pour une certaine radiation, le cristal est alors *uniaxe*: les deux axes optiques qui lui correspondent sont superposés suivant  $OL'$ .

**SYSTÈME CLINORHOMBIQUE.**

L'ellipsoïde est à trois axes inégaux. Un des axes coïncide avec l'axe binaire  $L_2$  du milieu; les deux autres sont placés d'une manière quelconque dans le plan  $\Pi$  de symétrie normal à l'axe. Il y a indétermination: la connaissance de la forme cristalline ne situe pas complètement l'ellipsoïde des indices.

Il résulte de cette indétermination plusieurs distributions possibles des axes optiques qui correspondent aux diverses radiations.

1° L'axe  $L_2$  correspond pour toutes les couleurs à l'indice moyen (axe des  $y$  des figures 50 et 52 du tome V). Les axes optiques sont donc distribués n'importe comment dans le plan  $\Pi$ , plan  $zOx$  des figures susdites. La dispersion est dite inclinée (gypse à froid) (fig. 172).

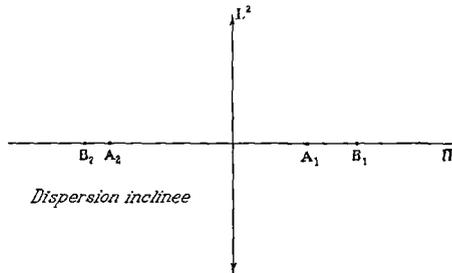


Fig. 172.

2° L'axe  $L_2$  correspond pour toutes les couleurs au plus grand indice (axe des  $x$  des figures susdites) ou au plus petit (axe des  $z$ ).

Les axes optiques pour chaque radiation ne doivent satisfaire qu'à la condition d'admettre  $L_2$  comme bissectrice, et naturellement  $\Pi$  comme plan de symétrie.

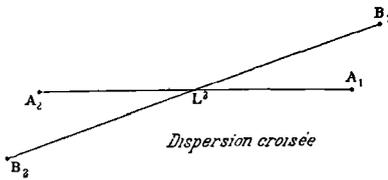


Fig. 173.

a) Quand, pour toutes les couleurs,  $L_2$  est la bissectrice aiguë, la dispersion est *croisée* (fig. 173).

b) Quand  $L_2$  est la bissectrice obtuse, la dispersion est *horizontale* (fig. 174).

Nous verrons plus loin quels phénomènes justifient ces dénominations et expliquerons la disposition des figures 172, 173 et 174.

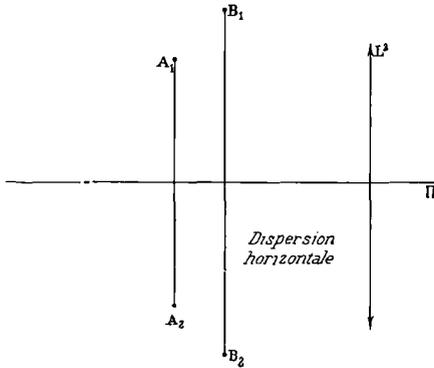


Fig. 174.

#### SYSTÈME ANORTHIQUE.

Le cristal ne possède plus qu'un centre de symétrie. L'ellipsoïde des indices est placé d'une manière quelconque par rapport aux directions cristallographiques : il en est de même des axes optiques. Suivant que leur distribution se rapproche d'un des types du système clinorhombique, on dit que la dispersion est *inclinaée*, *croisée* ou *horizontale*.

**278. Variation de la position des axes optiques avec la température.** — Les variations de température modifient les indices principaux dans des rapports différents : les axes optiques ne conservent donc pas les mêmes situations relatives à toutes températures.

Voici de curieux exemples.

Le *gypse* (sulfate de calcium) est clinorhombique. A froid, sa dispersion est inclinée (fig. 172) ; l'angle apparent des axes optiques est voisin de  $95^\circ$ . Opérons en lumière monochromatique et chauffons. Les axes se rapprochent ; ils se confondent pour une température voisine de  $92^\circ$  ; le cristal est alors *uniaxe* pour la radiation considérée. Puis ils s'écartent de nouveau dans un plan évidemment perpendiculaire à  $\Pi$  : la dispersion devient *horizontale* (fig. 174). On ne peut continuer au-dessus de  $115^\circ$ , car alors le gypse se déshydrate et donne du plâtre.

Ce qui est vrai pour une radiation l'est pour toutes. Les axes ne se confondent pas rigoureusement à la même température pour toutes

les longueurs d'onde; mais il s'en faut de peu : le cristal paraît uniaxe en lumière blanche vers  $92^\circ$ .

Le cristal reprend ses propriétés par refroidissement.

La *glaubérite* (sulfate double de sodium et de calcium, clinorhombique et de dispersion inclinée) présente les mêmes phénomènes; mais il est plus intéressant en ce sens qu'on voit le cristal devenir uniaxe pour le violet (vers  $50^\circ$ ), puis successivement pour les radiations de moins en moins réfrangibles.

**279. Franges en lumière convergente.** — Les observations en lumière convergente nous permettent de déterminer l'angle des axes optiques et la nature de la dispersion.

On n'oubliera pas que pour observer le phénomène complet (figures 99 et 100 du tome V), il est nécessaire, avec la plupart des microscopes polarisants (dont le champ est médiocre), de tailler la lame perpendiculairement à la bissectrice aiguë des axes optiques, ou suivant une ligne voisine, quand les bissectrices aiguës des axes optiques des diverses radiations ne coïncident pas.

Ceci posé, quand la dispersion est inclinée (fig. 172), on taille la lame parallèlement à l'axe binaire  $L_2$  (par suite perpendiculairement au plan de symétrie  $\Pi$ ) et de manière que les bissectrices aiguës des axes optiques soient approximativement normales à la lame.

On distingue alors nettement en lumière monochromatique, dans le plan focal principal de la lentille d'observation, les deux points  $A_1$  et  $A_2$  où aboutissent les directions *qui correspondent extérieurement aux directions intérieures des axes optiques* de la radiation A employée. La mesure de l'angle des directions extérieures permet de calculer l'angle intérieur (tome V, § 157).

Quand la dispersion est croisée, la bissectrice aiguë des axes est commune pour toutes les radiations; on taille la lame perpendiculairement.

*Pour un microscope de champ considérable*, il est clair que toute différence disparaît entre la dispersion croisée et la dispersion horizontale : la distinction ne tient en effet qu'à une différence de taille de la lame, différence nécessitée par la petitesse ordinaire du champ (§ 158 du tome V). Si le champ est petit, il faut tailler la lame perpendiculairement à une direction voisine des bissectrices aiguës des axes optiques et par suite normalement au plan de symétrie  $\Pi$ . Que le lecteur construise une figure dans l'espace, il verra que les figures 173 et 174 ne sont que des aspects différents du même phénomène.

Il est clair que l'étude successive de la position des axes pour les diverses couleurs indique la nature de la dispersion. Mais elle n'est pas nécessaire; la seule inspection de la symétrie des franges obtenues en lumière blanche suffit. On voit immédiatement si les colorations sont symétriques par rapport au centre du phénomène (*disper-*

*sion croisée*), par rapport à une droite normale aux droites qui joignent les pôles des lemniscates correspondant aux diverses couleurs (*dispersion horizontale*), ou enfin par rapport à une droite passant par les pôles des lemniscates (*dispersion inclinée*).

**280. Double réfraction de la glace.** — Les substances cristallisées ne donnent des phénomènes *réguliers* de double réfraction qu'à la condition que les cristaux élémentaires fassent un tout homogène.

Comme exemple intéressant de régularité, nous citerons le cas de la glace. Elle cristallise dans le système hexagonal.

Faisons congeler lentement de l'eau placée dans un vase suffisamment étendu. Enlevons la plaque de glace quand elle a un centimètre d'épaisseur environ. Elle donne au microscope polarisant les anneaux des uniaxes, indiquant un axe optique perpendiculaire au plan de refroidissement, ou, si l'on veut, aux surfaces isothermes. Le même résultat est obtenu, quelle que soit la direction du plan de refroidissement par rapport à la verticale.

Les *fleurs de glace*, qu'on projette aisément quand la glace fond, sont elles-mêmes symétriques par rapport à la normale à la surface de refroidissement, normale jouant le rôle d'axe sénnaire.

La glace *glaciaire*, obtenue à partir du névé par fusion et recongélation, a son axe optique normal à la surface libre, conformément aux résultats précédents.

### Pléochroïsme.

Dans les paragraphes suivants, nous revenons sur des phénomènes intéressants dont il n'est pas parlé dans le tome V.

Le lecteur se reportera au §§ 226 et sq. de ce volume pour la Théorie générale de l'absorption dans les cristaux.

**281. Phénomènes dans les lames uniaxes taillées perpendiculairement à l'axe (Bertrand).** — Nous savons que le paramètre  $\delta$  qui entre dans l'exponentielle d'absorption :

$$e^{-\delta\Delta} = \exp(-\delta\Delta),$$

est fourni par la formule (*loc. cit.*, § 228) :

$$\delta = l^2\delta_1 + m^2\delta_2 + n^2\delta_3, \quad (1)$$

où  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ , sont trois paramètres caractéristiques de la substance;  $l, m, n$ , sont les cosinus directeurs de la vibration (de Fresnel) par rapport aux axes de coordonnées.

Dans un cristal uniaxe, la relation (1) se simplifie. Nous n'avons plus que deux paramètres :  $\delta_0$  pour les vibrations ordinaires toujours perpendiculaires à l'axe,  $\delta_e$  pour celles des vibrations extraordinaires qui sont parallèles à l'axe.

Soit  $\theta$  l'angle de la normale à l'onde avec l'axe ; à la vibration extraordinaire qu'elle transporte, correspond le paramètre :

$$\delta = \delta_o \cos^2 \theta + \delta_e \sin^2 \theta ;$$

cette relation redonne bien  $\delta_o$  pour  $\theta = 0$ ,  $\delta_e$  pour  $2\theta = \pi$ .

L'expérience montre que généralement les vibrations les plus absorbées sont celles qui se propagent le plus lentement (loi de Babinet). En d'autres termes, si le cristal est positif (la vibration ordinaire va plus vite), on a  $\delta_o < \delta_e$  ; si le cristal est négatif,  $\delta_o > \delta_e$ .

Cherchons quelles seront les apparences quand nous regarderons un cristal uniaxe taillé perpendiculairement à l'axe, soit en lumière naturelle, soit en lumière polarisée d'un seul côté.

#### LUMIÈRE NATURELLE.

Prenons comme exemple le platino-cyanure de magnésium. Une lame mince parallèle à l'axe absorbe notablement toutes les couleurs, sauf le rouge, tandis qu'une lame mince perpendiculaire à l'axe laisse passer les rouges, les bleus et les violets.

Opérons en lumière bleue ; le coefficient  $\delta_o$  est donc plus petit que le coefficient  $\delta_e$ .

Dans la direction de l'axe, toute la lumière est ordinaire : elle passe le mieux possible. Considérons une direction de propagation qui entre dans le cristal dans l'aplomb de la trace de l'axe A et sort en un point quelconque M. La lumière naturelle est divisée en deux vibrations d'intensités égales à l'entrée. L'une est absorbée comme ordinaire, l'autre comme extraordinaire, *c'est-à-dire plus que la première*. D'ailleurs, à mesure que la direction de propagation s'incline sur l'axe, l'épaisseur traversée augmente : donc l'intensité totale à l'émergence décroît.

En définitive, nous apercevrons, *en nous accommodant sur l'infini*, un maximum de lumière dans la direction de l'axe, puis une extinction graduelle à mesure que la direction de visée s'écarte de l'axe. Le phénomène est évidemment de révolution.

En lumière blanche, *les rayons rouges étant plus également absorbés*, on verra un disque violacé sur fond rouge.

Le phénomène est particulièrement net pour le platino-cyanure de magnésium (positif), parce que  $\delta_e$  est plus grand et même beaucoup plus grand que  $\delta_o$ . Les deux causes d'extinction plus grande hors de la direction de l'axe (lumière en partie extraordinaire, épaisseur croissante) s'ajoutent. Pour la tourmaline (négative,  $\delta_o > \delta_e$ ), le phénomène est foncé suivant l'axe et s'éclaire hors de l'axe ; il est beaucoup plus difficile à distinguer, parce que les deux causes retranchent leurs effets. D'ailleurs, la variation d'absorption du rayon extraordinaire est moins rapide que pour le platino-cyanure.

#### LUMIÈRE POLARISÉE D'UN CÔTÉ ; HOUPPES.

Polarisons la lumière à l'entrée ou la sortie ; soit V la direction

de la vibration. Elle passe comme ordinaire en O, comme extraordinaire en E. Donc, dans le platino-cyanure et en lumière monochromatique, on verra deux houppes *sombres* représentées par la figure 175. Le champ de vision sera divisé en quatre secteurs alternativement plus ou moins éclairés et se fondant intimement les uns dans les autres.

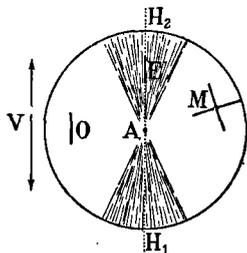


Fig. 175.

En lumière blanche, on distinguera deux houppes rouges sur fond violet; la ligne  $H_1H_2$  qui passe au milieu des houppes est parallèle à la vibration incidente, ou à celle qu'on laisse passer si on utilise un analyseur au lieu d'un polariseur.

La disposition est inverse pour les cristaux négatifs.

LUMIÈRE POLARISÉE DES DEUX CÔTÉS.

On voit les anneaux des uniaxes.

Si les nicols sont parallèles, on distingue encore les houppes.

S'ils sont croisés, les houppes disparaissent; car il résulte du raisonnement précédent qu'il en existe alors quatre donnant un fond uniformément obscur. Pour le platino-cyanure, les anneaux apparaissent alors en lumière rouge qui est la couleur la moins absorbée.

**282. Phénomènes dans les lames biaxes taillées normalement à un axe optique (Haidinger).** — Considérons les vibrations

transportées par les ondes normales à une direction OA et par les ondes voisines; OA est supposé dans le plan  $xOz$  et fait l'angle I avec Ox.

Écrivons que la vibration est normale à OA :

$$l \cos I + n \sin I = 0. \quad (1)$$

Cherchons l'angle  $\psi$  que la vibration fait avec  $Ax'$ , ligne du plan  $xOz$  normale à OA :

$$l \sin I - n \cos I = \cos \psi. \quad (2)$$

On tire de (1) et de (2) :

$$l = \sin I \cos \psi, \quad n = -\cos I \cos \psi, \quad m = \sin \psi.$$

D'où :

$$\delta = (\delta_1 \sin^2 I + \delta_3 \cos^2 I) \cos^2 \psi + \delta_2 \sin^2 \psi = \delta' \cos^2 \psi + \delta_2 \sin^2 \psi.$$

Cette formule ne suppose rien sur la droite OA.

Admettons maintenant qu'elle est l'axe optique et que la lame est taillée perpendiculairement à cet axe. Représentons le plan  $x'Ay'$  normal à l'axe.

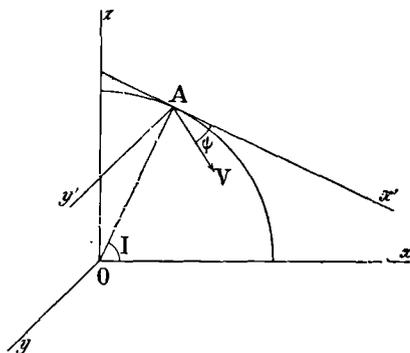


Fig. 176.

Déterminons les directions de vibration en un point quelconque R. Nous savons qu'elles sont sensiblement dirigées suivant les bissectrices des droites qui joignent le point R aux points A et A' où passent les axes (V, § 120). Comme A' est très éloigné, il suffit de mener par R une parallèle à Ax'.

Les angles  $\psi$  que font les vibrations principales avec l'axe des  $x'$ , sont  $\psi$  et  $\psi \pm \pi : 2$ ; les paramètres correspondants sont :

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \delta' \cos^2 \psi + \delta_2 \sin^2 \psi, \\ \delta_2 &= \delta' \sin^2 \psi + \delta_2 \cos^2 \psi. \end{aligned}$$

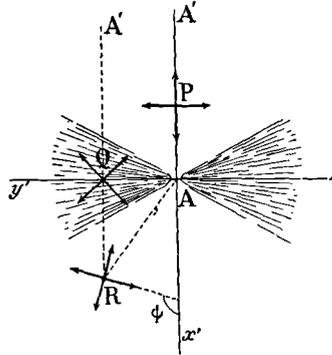


Fig. 177.

En particulier, au point Q les paramètres sont égaux entre eux et à  $(\delta' + \delta_2) : 2$ .

Au point P ils sont  $\delta'$  et  $\delta_2$ .

LUMIÈRE NATURELLE.

Ceci posé, recevons de la lumière naturelle et évaluons les intensités P en P et Q en Q.

A des facteurs près et en appelant  $\Delta$  l'épaisseur traversée, on a :

$$\begin{aligned} P &= \exp(-2\delta'\Delta) + \exp(-2\delta_2\Delta), \\ Q &= 2 \exp[-(\delta' + \delta_2)\Delta]. \end{aligned}$$

Il est facile de voir que  $P > Q$ . En effet :

$$\begin{aligned} \exp(-2\delta'\Delta) + \exp(-2\delta_2\Delta) - 2 \exp[-(\delta' + \delta_2)\Delta] \\ = [\exp(-\delta'\Delta) - \exp(-\delta_2\Delta)]^2. \end{aligned}$$

En définitive, on observe en lumière monochromatique deux houppes foncées, limitées par des espèces d'hyperboles, symétriques par rapport à la trace de l'axe optique, et dont la ligne moyenne  $Ay'$  est normale à la ligne des axes optiques  $AA'$ .

Si les axes font un angle assez petit et qu'on observe en lumière naturelle convergente avec un appareil d'un champ suffisant (microscope polarisant dont on a supprimé l'analyseur et le polariseur), on aperçoit simultanément les houppes qui correspondent aux deux axes. Elles sont courbes et se réunissent deux à deux, entourant la bissectrice aiguë.

La trace même de l'axe se détache en clair. On voit que, pour cette direction même, la lumière naturelle donne une infinité de vibrations occupant symétriquement toutes les directions.

LUMIÈRE POLARISÉE D'UN CÔTÉ.

On discutera aisément les cas d'une vibration parallèle ou normale à  $AA'$ .

L'intensité en Q est divisée par 2 dans les deux hypothèses.

En P l'intensité est  $\exp(-2\delta'\Delta)$  ou  $\exp(-2\delta_2\Delta)$ , suivant que la vibration incidente est parallèle au plan AA' des axes ou normale à ce plan. Suivant qu'on aura  $\delta' \leq \delta_2$ , les houppes seront plus nettes, ou bien il se produira deux systèmes de houppes normaux entre eux.

Il est inutile d'insister.

**283. Absorption et symétrie du milieu.** — A supposer admissible la théorie simplifiée qui a pour conséquence la formule du § 281 (voir tome V, § 227), chaque longueur d'onde est caractérisée par trois paramètres  $\delta$ ; c'est même la variation des paramètres  $\delta$  en fonction de la longueur d'onde qui donne lieu au *pléochroïsme*, c'est-à-dire à la multiplicité des teintes.

Mais indépendamment de ces variations, nous venons de voir que certains phénomènes sont sous la dépendance immédiate de la direction des axes optiques. Auprès des axes existent des variations *très rapides*, non *immédiatement* de l'absorption, mais de la direction des vibrations transmises, et par suite *indirectement* de l'absorption qu'elles subissent.

Il résulte de là que la dispersion des axes réagit sur les phénomènes de pléochroïsme.

Nous avons affaire à une infinité de systèmes de deux houppes placées les unes à côté des autres et se superposant en partie, d'une manière qui dépend du mode de dispersion des axes.

**284. Production artificielle du pléochroïsme (Sénarmont).** — Sénarmont découvrit qu'une matière colorante, disséminée avec continuité à l'intérieur d'un cristal et respectant sa forme géométrique, mais absolument étrangère à sa substance, chimiquement inerte et s'éliminant d'elle-même par quelques dissolutions suivies de cristallisation dans l'eau pure, peut lui communiquer des propriétés absorbantes considérables qui, par leur variabilité en fonction de la longueur d'onde, produisent un pléochroïsme énergétique.

Le sel qui se prête le mieux à ces expériences est l'azotate de strontium  $(\text{AzO}^3)^2\text{Sr}$ ,  $5\text{H}^2\text{O}$ . Il cristallise dans le système clinorhombique avec les faces *m* et *g*<sup>1</sup> prédominantes. Le plan des axes est *g*<sup>1</sup>; les deux axes sont visibles avec des obliquités différentes à travers *e*<sup>1</sup>. L'azotate est efflorescent, mais on protège les faces en les noyant entre deux glaces minces dans du baume du Canada.

On le fait cristalliser dans des dissolutions concentrées de campêche (amenée au pourpre par quelques gouttes d'ammoniaque), de Fernambouc, d'orseille, etc. On reconnaît un pléochroïsme très net. Avec le bois de campêche il est même si net qu'on peut, avec deux lames, construire une sorte de *pince à tourmaline* (tome V, § 138).

**Théorie du prisme absorbant.**

Nous complétons ici la théorie du prisme absorbant, bien que la question n'ait rien de particulièrement intéressant pour la symétrie, afin de combler une lacune du tome V.

**285. Ondes de constitution différente du type ordinaire dans les milieux isotropes transparents.** — Le paragraphe 200 du tome V de ce Cours commence ainsi : « *Au contraire du milieu transparent, le milieu absorbant isotrope peut transmettre dans toutes les directions une infinité d'ondes de constitutions différentes.* »

Les mots soulignés sont parfaitement exacts ; dans un milieu absorbant, l'angle du plan d'onde  $\Phi$  et du plan d'absorption  $\Phi'$  peut prendre une valeur quelconque, tandis que, dans un milieu isotrope, ou bien le plan d'absorption disparaît (type ordinaire des ondes), ou bien il a une position parfaitement déterminée par rapport au plan d'onde : il n'y a donc que deux types possibles, et non pas une infinité. Quant au second type, le lecteur n'a qu'à se reporter au § 190 du même tome V pour trouver l'étude, sous le nom d'*ondes évanescentes*, de mouvements propagés par un milieu transparent et qui ne sont pas du type habituel.

Nous revenons sur ce cas pour la raison suivante. Au § 213 du tome V, nous oublions l'existence de ces ondes de type spécial, alors que M. Brillouin a signalé depuis longtemps leur importance pour lever la contradiction dont nous parlons. Comme tout ce qui diminue la généralité de la théorie est regrettable, il paraît utile de montrer par où pêche le raisonnement du § 213.

Rétablissons d'abord, à partir des équations générales indéfinies, les propriétés des ondes du second type propagées par un milieu transparent. On a :

$$\begin{aligned} \mu K \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \Delta u, \\ \mu K \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \Delta v, \\ \mu K \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \Delta w. \end{aligned} \tag{1}$$

La vitesse de propagation des ondes d'amplitude uniforme, ondes du type ordinairement considéré, est :

$$V = 1 : \sqrt{\mu K} .$$

Substituons dans ces équations le mouvement :

$$(u, v, w) = (U, V, W) e^{-\gamma z} \cos(\omega t - \alpha x);$$

ou ce qui revient au même, en introduisant un mouvement auxiliaire imaginaire :

$$(u, v, w) = (U, V, W) \exp[-\gamma_2 z + i(\omega t - \alpha x)].$$

C'est précisément le mouvement du § 200 du tome V, dans lequel on pose :

$$\gamma_1 = 0.$$

Substituons dans (1); il vient la condition :

$$\mu K \omega^2 = \alpha^2 - \gamma_2^2. \quad (2)$$

Par définition la période  $T$ , la longueur d'onde  $\lambda'$ , la vitesse de propagation  $V'$  des ondes ainsi déterminées sont :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \lambda' = \frac{2\pi}{\alpha}, \quad V' = \frac{\lambda'}{T} = \frac{\omega}{\alpha};$$

et en raison de la condition (2) :

$$V' = \frac{1}{\sqrt{\mu K}} \sqrt{1 - \frac{\gamma_2^2}{\alpha^2}} = V \sqrt{1 - \frac{\gamma_2^2}{\alpha^2}}.$$

Introduisons le *coefficient d'extinction* (tome V, § 209), c'est-à-dire explicitons la longueur d'onde dans l'exponentielle réelle; posons donc :

$$2\pi q_0 \frac{z}{\lambda'} = \gamma_2 z; \quad \text{d'où :} \quad q_0 = \frac{\lambda' \gamma_2}{2\pi} = \frac{\gamma_2}{\alpha}.$$

La nouvelle vitesse de propagation  $V'$  est liée à l'ancienne  $V$  par la formule :

$$V' = V \sqrt{1 - q_0^2}. \quad (3)$$

Ainsi le milieu transparent peut transmettre des ondes planes pour lesquelles l'amplitude n'est plus uniforme dans le plan d'onde, *mais reste constante le long de la normale à l'onde*. Il n'y a dans ce résultat rien qui choque la notion de milieu transparent. Le mouvement reste identique à lui-même, quelle que soit la longueur du chemin parcouru. Ce n'est que par extension que nous continuons à employer l'expression *plan d'absorption*.

La normale à l'onde (direction de propagation) est ici l'axe des  $x$ ; les plans d'onde sont donc parallèles à  $yOz$ ; les plans de même amplitude (plans d'absorption) sont parallèles à  $xOy$ .

Nous reviendrons tout à l'heure sur les variations de la vitesse de propagation.

On peut tirer ces résultats du § 200 du tome V.

La condition  $C=0$  implique  $\gamma_1 \gamma_2 = 0$ . Si nous choisissons  $\gamma_2 = 0$ , nous obtenons l'onde ordinairement considérée dans le milieu transparent. Reste  $\gamma_1 = 0$ ; nous retombons sur la théorie précédente, pour laquelle le plan d'absorption et le plan d'onde sont rectangulaires.

286. **Condition pour les amplitudes.** — Le milieu ne peut transmettre que des ondes donnant une variation nulle de volume (ondes sans condensation). On a (tome V, § 3) :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

On vérifiera immédiatement que le système suivant satisfait à la condition :

$$v = Ve^{-\gamma_2 z} \cos(\omega t - \alpha x); \quad (5)$$

$$\begin{cases} u = q_0 Ue^{-\gamma_2 z} \cos(\omega t - \alpha x); \\ w = Ue^{-\gamma_2 z} \sin(\omega t - \alpha x); \end{cases} \quad (6)$$

U et V sont des constantes arbitraires.

Le milieu peut donc transmettre :

1° Une vibration (5) située à la fois dans le plan de l'onde (vibration rigoureusement transversale) et dans le plan d'absorption;

2° Une vibration (6) elliptique, dont la composante la plus importante  $w$  est dans le plan de l'onde et normale au plan d'absorption, dont l'autre très petite  $u$  est dirigée suivant la normale à l'onde. Les axes de l'ellipse sont parallèles à  $Ox$  et à  $Oz$ .

Nous avons rencontré ces mouvements dans la théorie de la réflexion totale (§§ 189 et sq. du tome V); le plan d'absorption est alors parallèle à la surface sur laquelle la lumière se réfléchit totalement; la direction de propagation est à la fois parallèle à la surface réfléchissante et dans le plan d'incidence.

287. **Passage à travers un prisme absorbant (Brillouin).** — Ce que nous disons au § 215 du tome V serait exact si nous ne pouvions disposer dans le milieu transparent que d'une seule espèce d'ondes, celles qui sont ordinairement considérées. Effectivement alors le plan d'absorption d'un rayon qui passe d'un milieu transparent dans un milieu absorbant est nécessairement parallèle à la surface réfringente. Cette proposition est évidemment indépendante du sens de propagation, *si nous voulons recueillir dans le milieu transparent une onde dont l'amplitude soit uniforme tout le long d'un plan d'onde.*

Dans le passage à travers un prisme, le plan d'absorption ne peut pas être à la fois parallèle aux deux faces. Il est donc impossible de satisfaire aux équations de continuité, simultanément à l'entrée et à la sortie, *si nous voulons qu'à l'entrée et à la sortie les ondes dans le milieu transparent soient du type ordinaire.*

Mais, ainsi que le fait remarquer très heureusement M. Brillouin, cela devient possible, si on utilise des ondes dont l'amplitude varie suivant une certaine direction du plan d'onde, par conséquent telles que celles qui sont étudiées aux paragraphes précédents.

Reprenons les §§ 201 et 202 du tome V.

Nous y supposons  $\alpha$  et  $\gamma$  réels; c'est dire que l'onde incidente dans le milieu transparent est du type ordinaire. L'égalité nécessaire des coefficients de  $x$  et de  $t$  dans les deux milieux nous donne dans le milieu absorbant un coefficient de  $x$  entièrement imaginaire ( $-i\alpha$ ), et par conséquent un plan d'absorption nécessairement parallèle à la surface réfringente prise pour plan des  $xOy$ .

Mais supposons que le premier milieu (transparent) amène une onde dont l'amplitude ne soit plus uniforme. Nous devons remplacer :

$$\alpha x + \gamma z, \quad \text{par} \quad (\alpha x + \gamma z) - \varepsilon i(\gamma x - \alpha z),$$

exprimant ainsi qu'il existe dans le milieu transparent un plan d'absorption normal au plan d'incidence et parallèle au rayon, normal par conséquent au plan d'onde.

Dans le milieu absorbant, le coefficient de  $x$  n'est plus entièrement imaginaire; le plan d'absorption n'est plus parallèle au plan réfringent. Nous pourrions imposer à l'angle  $(\Phi, \Phi')$  telle valeur que nous voudrions, grâce à l'arbitraire  $\varepsilon$ .

Inversement, quand une onde du milieu absorbant se présente pour sortir dans le milieu transparent, nous pouvons trouver une onde extérieure *non uniforme* qui satisfasse aux équations de passage, et cela quel que soit l'angle  $(\Phi, \Phi')$  du plan d'onde et du plan d'absorption dans le milieu absorbant.

Reste à savoir si l'équation (3) peut être satisfaite. Elle implique que  $q_0$  soit inférieur à l'unité; mais il est facile de voir que ce coefficient d'extinction suivant une direction du plan d'onde est très petit, au moins dans tous les cas où les expériences sont possibles. Son ordre de grandeur n'est pas nécessairement le même que le coefficient d'extinction de transmission normale dans un milieu absorbant, coefficient dont il est parlé au § 209 du tome V.

Poser  $q_0 = 1$ , c'est dire que l'amplitude est multipliée par  $e^{-6,26} = 1 : 547$ , quand on se déplace d'une longueur d'onde dans le plan d'onde, suivant la ligne de pente des amplitudes. Pour qu'une détermination de direction soit possible, il faut que l'onde plane ait une certaine largeur; il faut donc que  $q_0$  soit très petit. Cela revient à imposer à l'angle du prisme absorbant, dont on mesure la déviation, un angle dièdre extrêmement petit.

## Double réfraction comme résultat de la structure.

**288. Obtention de systèmes biréfringents à l'aide de matières monoréfringentes.** — On sait que la plupart des corps organisés sont biréfringents; par exemple, les tuyaux de plume, les fibres animales et végétales, les filaments de coton, de lin, ... Afin

d'isoler les effets de la double réfraction, on immerge les corps à étudier dans un liquide de même indice moyen.

Pour expliquer la biréfringence, on a fait appel soit à des compressions internes, soit plus simplement à une stratification régulière : disons quelques mots de cette dernière théorie.

On démontre qu'un corps stratifié, formé de couches superposées planparallèles alternativement d'indices  $n_1$  et  $n_2$  et d'épaisseurs relatives  $e_1$  et  $e_2$  ( $e_1 + e_2 = 1$ ), jouit des mêmes propriétés qu'un corps uniaxe dont l'axe optique est normal aux couches. Les indices ordinaires et extraordinaires ont pour valeurs (Wiener) :

$$n_0^2 = e_1 n_1^2 + e_2 n_2^2, \quad \frac{1}{n_e^2} = \frac{e_1}{n_1^2} + \frac{e_2}{n_2^2}.$$

Les raisons de symétrie sont conformes à cet énoncé : un corps stratifié a bien un axe de révolution perpendiculaire aux couches ; du reste, les phénomènes peuvent sans contradiction dépendre de l'inclinaison.

On démontre encore qu'un milieu est biréfringent s'il renferme des obstacles cylindriques parallèles les uns aux autres. Le milieu jouit des mêmes propriétés qu'un corps uniaxe dont l'axe optique est parallèle aux cylindres. Si  $p$  est la fraction (supposée petite) de l'espace entier occupée par les cylindres, si  $n$  est l'indice du milieu primitif, on a (L. Rayleigh) :

$$n = n_0, \quad n_e = n(1 + p).$$

**289. Expériences de vérification.** — Voici quelques expériences qui semblent confirmer ces théories (Braun) :

1° Une couche d'un millimètre d'épaisseur environ, formée de brins rectilignes de coton de verre, se comporte comme une lame biréfringente dans l'air ( $n = 1$ ), et dans le méthane dichloré ( $n = 1,74$ ). Dans l'huile de cèdre ( $n = 1,51$ ), la biréfringence disparaît. Donc le phénomène n'est pas dû à la biréfringence *propre* des fils, mais au fait qu'ils constituent des écrans à cause de la différence de leur indice et de l'indice du milieu ambiant. C'est une application de la théorie de L. Rayleigh.

2° On plonge une lame de verre 20 fois alternativement dans une solution étendue de collodion ( $n = 1,52$ ) et une solution alcoolique de résine ( $n = 1,56$ ), en laissant sécher entre deux immersions. On découpe la pellicule stratifiée en carrés de 1 centimètre carré, et on superpose quelques centaines de ces carrés. On obtient en lumière convergente les mêmes effets qu'avec une lame uniaxe taillée normalement à l'axe.

3° On plonge dans l'eau jusqu'au ramollissement des feuilles de gélatine, et on les fait sécher sur des fils *croisés en losanges*. On découpe des losanges avec les ciseaux, on plonge dans l'alcool méthylique et on empile 10 losanges entre deux plaques de verre en

les orientant de la même manière (c'est uniquement pour faciliter l'orientation qu'on découpe la feuille en lozanges; la forme des morceaux n'a évidemment aucune influence sur les phénomènes). On obtient en lumière convergente les phénomènes des biaxes. C'est une généralisation de la première expérience.

4° Des coupes de bois de pin parallèles aux fibres et imprégnées de chlorure d'or sont dichroïques et biréfringentes.

5° Par pulvérisation d'une cathode, on obtient des dépôts dont le dichroïsme et la biréfringence sont probablement dus à des orientations régulières.

Nous verrons plus loin qu'on incline à trouver dans l'orientation de particules l'explication de la biréfringence accidentelle des liquides et de la biréfringence magnétique.

#### 290. Substances stratifiées : grains d'amidon, cristallin.

— Nous dirons quelques mots des propriétés de certains corps pour nous préparer à l'étude des gouttes liquides anisotropes dont il est parlé dans le Chapitre XI.

Regardons au microscope un grain d'amidon *frais*; nous distinguons autour d'un point appelé *noyau* des stries concentriques vaguement elliptiques qui décèlent une variation d'indice et par suite une stratification. On admet que l'amidon possède une structure périodique autour du noyau.

Pour simplifier, supposons le grain sphérique et les stries circulaires; l'hypothèse revient à considérer la structure du grain comme une fonction périodique de la distance au noyau.

Les stries disparaissent quand le grain est soigneusement desséché (soit par évaporation, soit par l'alcool); d'où l'hypothèse d'une hydratation fonction périodique de la distance au noyau.

Regardons le grain *en lumière parallèle* entre deux nicols à l'extinction (V, § 439); nous apercevons une croix se détachant en noir sur le reste du grain réapparaissant en clair. Nous devons conclure de là qu'il existe une structure périodique analogue à la précédente, *mais de période beaucoup plus petite*. Les grains desséchés, qui ne montrent plus les stries en lumière naturelle, donnent encore la croix noire en lumière polarisée; preuve que la cause des deux phénomènes est analogue, mais non identique.

Doit-on parler de cristaux à propos de grains d'amidon? Rien de ce qui précède ne nous y autorise. Nous avons probablement affaire à une matière amorphe de propriétés scalaires variant périodiquement (avec une double période); ce qui suffit absolument à créer les stries (grande période) et la biréfringence (petite période).

Aussi bien nous savons que le cristallin a une structure analogue à celle que nous imaginons dans le grain d'amidon, et qu'il donne la croix en lumière parallèle entre nicols croisés.

**Double réfraction accidentelle.**

**291. Hypothèse générale pour les milieux anisotropes. —**

Par rapport aux phénomènes optiques, un milieu anisotrope est caractérisé, au moyen de l'ellipsoïde des indices; quand on déforme le milieu de manière qu'il reste homogène, les axes de l'ellipsoïde changent de grandeur et de direction. Il s'agit de relier ces modifications aux déformations de milieu.

Rapporté aux directions principales optiques du milieu non déformé, l'ellipsoïde des indices a l'équation :

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = 1. \tag{1}$$

Il devient après la déformation :

$$A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy = 1. \tag{2}$$

La déformation du milieu dépend des six fonctions (§ 244) :

$$x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y.$$

Nous admettrons que les six quantités :

$$A^2 - a^2, B^2 - b^2, C^2 - c^2, D, E, F,$$

sont des fonctions linéaires des six quantités  $x_x, \dots$ ; nous poserons donc :

$$A - a^2 = a_{11}x_x + a_{12}y_y + a_{13}z_z + a_{14}y_z + a_{15}z_x + a_{16}x_y, \tag{3}$$

et cinq équations analogues pour les autres fonctions caractéristiques des phénomènes optiques.

Mais nous savons que les  $x_x, \dots$  sont des fonctions linéaires des N et des T (§ 244).

Substituant leurs valeurs, nous pouvons encore écrire :

$$A^2 - a^2 = e_{11}N_1 + e_{12}N_2 + e_{13}N_3 + e_{14}T_1 + e_{15}T_2 + e_{16}T_3, \tag{4}$$

et cinq équations analogues.

Que nous fassions usage des équations (3) ou des équations (4), il y a donc généralement 36 coefficients distincts. Mais leur nombre est considérablement réduit par l'existence des éléments de symétrie.

**292. Réduction du nombre des coefficients. —** Le résultat est précisément celui que nous avons obtenu aux §§ 246 et sq. dans le cas le plus général où l'on ne suppose pas l'existence d'un potentiel. D'où les neuf groupes de la première colonne du tableau du § 253.

Montrons comment on procède dans un certain nombre de cas.

EXISTENCE D'UN PLAN DE SYMÉTRIE.

Il faut écrire que *des déformations symétriques par rapport au plan  $yOz$  donnent des ellipsoïdes symétriques par rapport à ce plan.*

Or les déformations sont symétriques par rapport au plan  $yOz$  quand on a :

$$\begin{aligned} x_x &= x'_x, & y_y &= y'_y, & z_z &= z'_z, \\ y_z &= y'_z, & z_x &= -z'_x, & x_y &= -x'_y. \end{aligned} \quad (1)$$

Les deux ellipsoïdes, dont suivent les équations, sont symétriques par rapport à ce plan :

$$A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy = 1 \quad (I)$$

$$A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 + 2Dyz - 2Ezx - 2Fxy = 1 \quad (2)$$

Soit l'ellipsoïde obtenu quand on introduit dans les paramètres  $A, B, \dots$ , les  $x'_x, \dots$

$$A'^2x^2 + B'^2y^2 + C'^2z^2 + 2D'yz + 2E'zx + 2F'xy = 1; \quad (II)$$

il faut écrire qu'il est identique à l'ellipsoïde (2). D'où les conditions :

$$\begin{aligned} A &= A', & B &= B', & C &= C'; \\ D &= D', & E &= -E', & F &= -F'. \end{aligned}$$

Ces équations sont identiques aux équations (2) du § 246. Donc la réduction des coefficients est la même.

EXISTENCE D'UN AXE QUATERNAIRE.

Voici un second exemple.

On vérifie aisément qu'en faisant tourner l'ellipsoïde (I) de  $90^\circ$  autour de  $Oz$ , on obtient l'ellipsoïde :

$$B^2x^2 + A^2y^2 + C^2z^2 - 2Eyz + 2Dzx - 2Fxy = 1. \quad (2')$$

D'ailleurs nous avons entre les déformations les relations (1) du § 249.

Écrivons que l'ellipsoïde (II) est identique à l'ellipsoïde (2'). Il vient les relations :

$$\begin{aligned} A' &= B, & B' &= A, & C' &= C; \\ D' &= -E, & E' &= D, & F' &= -F. \end{aligned}$$

Ce sont les relations (2) du § 249. Donc la réduction est encore la même.

Nous laissons au lecteur le soin de faire la réduction pour l'axe ternaire.

**293. Corps préalablement isotropes.** — Nous savons d'après le § 250 que les coefficients distincts se réduisent à deux.

D'une manière générale, on a le schéma suivant :

	$x_x$	$y_y$	$z_z$	$y_z$	$z_x$	$x_y$
$A^2 - a^2$	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{12}$	0	0	0
$B^2 - b^2$	$a_{12}$	$a_{11}$	$a_{12}$	0	0	0
$C^2 - c^2$	$a_{12}$	$a_{12}$	$a_{11}$	0	0	0
D	0	0	0	$a_{44}$	0	0
E	0	0	0	0	$a_{44}$	0
F	0	0	0	0	0	$a_{44}$

avec la condition :

$$2a_{44} = a_{11} - a_{12}.$$

Mais nous pouvons toujours choisir les axes de coordonnées de manière que les quantités  $y_z, z_x, x_y$ , s'annulent. Les équations deviennent :

$$A^2 - a^2 = a_{11}x_x + a_{12}(y_y + z_z),$$

et deux équations analogues. A cause de la petitesse des coefficients  $a_{11}$  et  $a_{12}$ , nous pouvons extraire la racine par approximation. Posons :

$$a_{12} = 2pa, \quad a_{11} = 2qa;$$

il vient :

$$A = a + qx_x + p(y_y + z_z),$$

$$B = a + qy_y + p(z_z + x_x),$$

$$C = a + qz_z + p(x_x + y_y).$$

Calculons les indices après la déformation. Soit V la vitesse de la lumière dans le vide :

$$V = na = n_x A = n_y B = n_z C.$$

$$\frac{V}{n_x} - \frac{V}{n} = \frac{n - n_x}{nn_x} V = qx_x + p(y_y + z_z),$$

et à cause de la petitesse des coefficients  $p$  et  $q$  :

$$n - n_x = n \left[ \frac{q}{a} x_x + \frac{p}{a} (y_y + z_z) \right].$$

On obtient deux formules analogues pour  $n_y$  et  $n_z$ . Les quantités :

$$\frac{q}{a} = \frac{a_{11}}{2a^2}, \quad \frac{p}{a} = \frac{a_{12}}{2a^2},$$

sont des *nombres*.

D'une manière générale le corps isotrope est transformé en biaxe. Pour que les formules précédentes soient applicables, il faut que les axes  $Ox, Oy, Oz$ , coïncident avec les directions principales de déformation. Sinon interviennent les termes :

$$D = a_{44}y_z, \quad E = a_{44}z_x, \quad F = a_{44}x_y,$$

avec la condition :  $2a_{44} = a_{11} - a_{12}.$

294. **Transformation des corps isotropes en uniaxes.** — Soit un bloc de verre uniformément comprimé suivant l'axe des  $z$  et traversé par une onde normale à l'axe des  $y$ ;  $e = \overline{OO'}$  est son épaisseur avant la déformation,  $n$  son indice. Soit  $E$  le module d'élasticité (I, § 103).  $P$  la charge totale,  $e' = \overline{AA'}$  la longueur,  $\sigma$  le coefficient de Poisson :

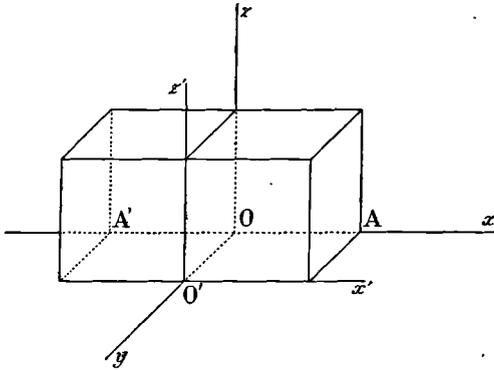


Fig. 178.

$$z_z = -\frac{P}{E} \frac{1}{ee'}$$

$$x_x = y_y = \frac{\sigma P}{E} \frac{1}{ee'}$$

L'ellipsoïde des indices, qui était une sphère, est devenu un ellipsoïde de révolution autour de  $Oz$ . On a en effet :  $A = B$ . Suivant  $Oy$  l'onde propage deux vibrations, l'une pa-

rallele à  $Ox$  avec la vitesse  $A$ , l'autre parallèle à  $Oz$  avec la vitesse  $C$ .

Calculons le retard qui résulte de la déformation. Il se compose de deux parties qui proviennent, l'une de la dilatation transversale, l'autre de la variation de l'indice. On a en longueurs d'ondes :

$$\delta_x = \frac{e}{\lambda} \left\{ (n-1)x_x - \frac{n}{a} [qx_x + p(x_x + z_z)] \right\},$$

$$\delta_z = \frac{e}{\lambda} \left\{ (n-1)x_x - \frac{n}{a} [qz_z + 2px_x] \right\}.$$

Introduisons enfin le coefficient  $\sigma$  de Poisson :

$$\delta_x = \frac{n}{\lambda} \frac{P}{E} \frac{1}{e'} \left\{ \sigma \left( 1 - \frac{1}{n} - \frac{q}{a} \right) + (1 - \sigma) \frac{p}{a} \right\},$$

$$\delta_z = \frac{n}{\lambda} \frac{P}{E} \frac{1}{e'} \left\{ \sigma \left( 1 - \frac{1}{n} - \frac{2p}{a} \right) + \frac{q}{a} \right\},$$

$$\Delta = \frac{e'}{P} (\delta_x - \delta_z) = \frac{n}{\lambda E} (1 + \sigma) \frac{p - q}{a}.$$

295. **Expériences de vérification.** — 1° Une expérience relativement facile consiste à déterminer la différence de marche entre les composantes rectangulaires  $O'x'$  et  $O'z'$ , c'est-à-dire la biréfringence de la lame planparallèle uniformément comprimée. On compense cette biréfringence avec un compensateur de Babinet.

La valeur absolue  $\Delta$  rapportée à l'unité de pression par unité de surface, dépend de  $E$  et de  $\sigma$ ; mais le signe de  $p - q$  n'en dépend

pas. Aussi tout le monde est-il d'accord pour trouver  $p - q$  positif :

$$p > q, \quad \delta_x > \delta_z.$$

Le retard porte principalement sur la composante perpendiculaire à la direction de compression, sur la vibration ordinaire par conséquent. Le cristal obtenu est négatif; l'ellipsoïde des indices, de révolution autour de la compression, est aplati. L'indice du rayon ordinaire (qui est fourni par l'intersection de l'ellipsoïde avec le plan d'onde mené

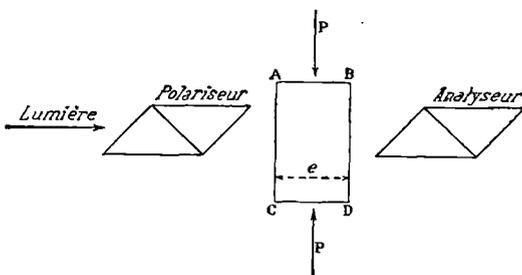


Fig. 179.

par son centre), est toujours plus grand que l'indice extraordinaire. La surface d'onde est composée d'une sphère et d'un ellipsoïde; la sphère, tangente à l'ellipsoïde suivant la direction de compression, est dans l'ellipsoïde.

2° Les difficultés commencent quand il s'agit de déterminer les valeurs séparées de  $p$  et de  $q$ .

Au moyen d'un appareil interférentiel tel que celui de Jamin et d'un compensateur interférentiel (IV, § 252 et 254), on détermine séparément les retards  $\delta_x$  et  $\delta_z$  en employant de la lumière polarisée vibrant soit dans l'azimut  $Ox$ , soit dans l'azimut  $Oz$ .

On obtient généralement pour le rapport  $\delta_x : \delta_z$  une valeur voisine de 2.

La difficulté d'interprétation consiste dans l'incertitude sur la valeur du coefficient  $\sigma$  qui entre comme facteur dans un terme relativement énorme. Tandis que  $q : a$  et  $p : a$  sont probablement de l'ordre de 0,1 et de 0,2, la partie du coefficient de  $\sigma$  qui est indépendante de  $p$  et de  $q$ , est de l'ordre de 0,3. Si donc on évalue  $\sigma$  trop grand, on trouvera aisément des valeurs négatives pour  $p$  et  $q$ . Si on l'évalue trop petit, ces valeurs seront sûrement positives.

3° Pour tourner la difficulté, on recommence ces dernières expériences en immergeant les deux lames (la lame comprimée et la lame compensatrice du retard) dans une cuve pleine d'eau et limitée par des lames à faces parallèles, maintenues immobiles.

La lame d'eau diminue de l'épaisseur dont augmente la lame de verre. Connaissant l'indice  $N$  de l'eau à la température de l'expérience, on peut, par deux déterminations faites l'une dans l'eau, l'autre hors de l'eau, déterminer la dilatation. La différence des retards est en effet :

$$\delta_x - \delta'_x = \frac{e}{\lambda} (N - 1) x_x.$$

296. **Résultats.** — On a la relation :

$$n - n_x = n \left[ \frac{q}{a} x_x + \frac{p}{a} (y_y + z_z) \right],$$

et deux relations analogues;  $x_x$ ,  $y_y$ ,  $z_z$  étant des rapports, peu importe en quelles unités les longueurs sont mesurées; les indices  $n$  et  $n_x$  sont aussi des rapports.

Par conséquent, les quantités  $q : a$  et  $p : a$  sont des nombres.

Des meilleures expériences faites, il résulte d'abord que  $p$  et  $q$  sont de même signe. D'après Kerr, l'indice extraordinaire principal resterait inaltéré; d'où :

$$n - n_x = \frac{n}{a} [qz_z + 2px_x] = 0, \quad q = 2p\sigma.$$

Mais cette relation n'est généralement pas admise.

Comme ordre de grandeur, on trouve pour les verres :

$$p : a = +0,2, \quad q : a = +0,1,$$

$p$  et  $q$  sont positifs, au contraire de ce que croyaient les premiers expérimentateurs dont les calculs sont fautifs.

Pour obtenir l'ordre de grandeur des phénomènes pour une charge donnée, on saura que  $E = 7000$  kilogrammes par millimètre carré environ;  $\sigma$  est généralement compris entre 0,20 et 0,25. D'après la définition de  $E$ , la charge de 7000 kilogrammes par millimètre carré est celle qui doublerait la longueur, à supposer qu'il n'y ait pas rupture.

La différence de marche, évaluée en longueurs d'ondes, a donc pour ordre de grandeur :

$$\Delta = \frac{n}{\lambda E} (1 + \sigma) \frac{p - q}{a} = 0,125 \frac{n}{\lambda E} = 0,125 \frac{n}{7000 \lambda}.$$

D'après les unités choisies,  $\lambda$  doit être évalué en millimètres; la différence de marche est donnée pour une lame d'un millimètre d'épaisseur supportant une charge d'un kilogramme par millimètre carré. Calculons pour  $\lambda = 0^{\mu},6$ ,  $n = 1,5$ ; il vient :

$$\Delta = 0,125 \frac{1,5}{0,0006 \times 7000} = 0,044.$$

Avec les constantes admises, une pression de 20 kilogrammes par millimètre carré établit dans la lame d'épaisseur 1 millimètre la différence de marche d'une longueur d'onde. A la vérité, suivant les verres, la pression nécessaire varie de 15 à 30 kilogrammes, c'est-à-dire de 1500 à 3000 atmosphères.

297. **Effet d'une pression uniforme.** — Soit  $\theta$  la dilatation cubique :

$$\theta = x_x + y_y + z_z.$$

Si la pression est uniforme, on a :

$$x_x = y_y = z_z = \theta : 3, \quad qx_x + p(y_y + z_z) = (q + 2p)\theta : 3.$$

Soit  $n'$  le nouvel indice; on trouve immédiatement :

$$n' = n \left[ 1 - \left( \frac{q}{a} + \frac{2p}{a} \right) \frac{\theta}{3} \right].$$

Pour une *compression* uniforme :  $\theta < 0$ ;  $n' > n$ . Il y a *diminution de la vitesse de propagation*, résultat plus conforme aux analogies que celui qu'on obtient en supposant  $p$  et  $q$  négatifs.

**298. Expérience de Fresnel. Vibration d'une verge.** — Si la biréfringence du verre obtenue par compression était suffisante, il suffirait de *comprimer* un prisme parallèlement à son arête (axe  $Oz$  de la figure 178) pour séparer les deux rayons.

Les indices pour une propagation normale à l'arête sont :  $n_x$  quand la vibration est normale à l'arête (vibration normale à l'axe optique, onde ordinaire);  $n_z$  quand la vibration est parallèle à l'arête (onde extraordinaire). La vibration ordinaire est la plus déviée :  $n_x > n_z$ .

On augmente par un artifice la grandeur de la séparation (fig. 180).

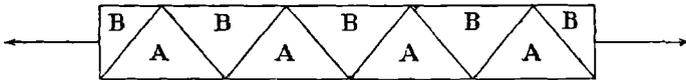


Fig. 180.

Fresnel achromatisait une série de prismes A par des prismes B formant avec les premiers une lame à faces parallèles. Les prismes sont collés avec un baume un peu flexible; les prismes A dépassent de quelques millimètres les prismes B à leurs deux extrémités. On comprime donc les premiers de bout à bout (normalement au plan de la figure), sans que la compression se transmette aux seconds. Regardant à travers ce système une fente fine parallèle aux arêtes, on la voit double quand on comprime.

Les deux images sont polarisées; le faisceau dont la direction se rapproche le plus des bases des prismes A vibre normalement aux arêtes : il correspond aux ondes ordinaires.

Une expérience très brillante prouve la biréfringence du verre comprimé (fig. 181).

On dispose une verge  $V$  de verre à faces parallèles entre deux nicols  $N_1$  et  $N_2$  dont les sections croisées sont à  $45^\circ$  de la grande dimension de la verge. La lumière réapparaît quand on fait vibrer la verge longitudinalement. Les vibrations consistent en compressions

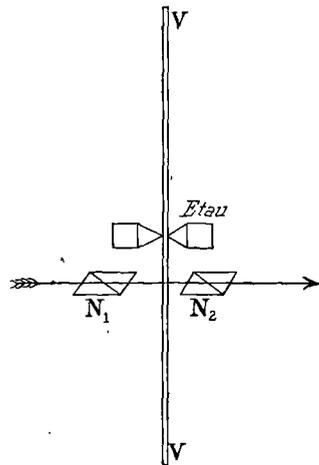


Fig. 181.

et dilatations alternatives dans le sens de la longueur; d'où transformation de la verge en lame biréfringente.

La biréfringence moyenne est maxima aux nœuds (près de l'étai si on utilise le fondamental), nulle aux ventres.

**299. Déformations par cisaillement et par torsion.** — Appliquons au prisme droit construit sur les axes, la seule tension tangentielle  $T_2$  (fig. 182).

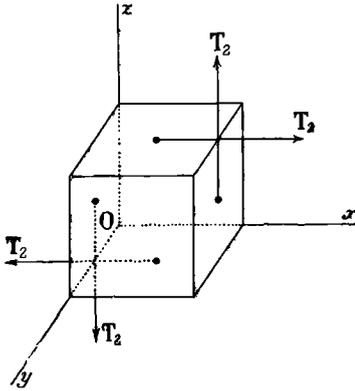


Fig. 182.

Cherchons comment sont placées les tensions principales. Il faut appliquer les formules du tome I, § 125, dans lesquelles nous posons :

$$\begin{aligned} N_1 = N_2 = N_3 = T_1 = T_3 = 0, \\ -mF + pT_2 = 0, \quad -nF = 0, \\ mT_2 - pF = 0. \end{aligned}$$

Les solutions sont :

$$\begin{aligned} m = p, \quad n = 0, \quad F_1 = T_2, \\ m = -p, \quad n = 0, \quad F_2 = -T_2, \\ m = p = 0, \quad n = 1, \quad F_3 = 0. \end{aligned}$$

Une des tensions principales (§ 311) est nulle; la seconde est une tension  $T_2$  dirigée dans le plan  $xOz$  suivant la bissectrice des droites  $Ox$ ,  $Oz$ ; la troisième est une pression  $-T_2$  dirigée dans le plan  $xOz$  suivant la bissectrice des droites  $-Ox$ ,  $Oz$ .

Un cube de verre déformé par cisaillement et traversé suivant la direction  $Oy$  propage donc sans déformation deux vibrations dirigées à  $45^\circ$  des plans de cisaillement. C'est ce que montre l'expérience; nous trouverons plus loin une application de ce résultat.

A cette question se rattache la déformation produite par torsion.

Pour simplifier, supposons qu'il s'agisse d'un cylindre circulaire : le phénomène est par conséquent de révolution. Prenons pour axe du cylindre une parallèle à  $Oz$  (fig. 182) et étudions ce qui se passe en un point  $O$  à une distance  $r$  de l'axe. Les déformations sont proportionnelles à  $r$ . Au point  $O$ , on trouve (tome I, § 131) :

$$N_1 = N_2 = N_3 = 0, \quad T_1 = T_3 = 0.$$

$T_2$  subsiste seule et est proportionnelle à  $r$ .

On montre aisément que les tensions principales A et B sont égales, de signes contraires, dans le plan tangent au cylindre concentrique au corps déformé passant par le point  $O$ , et à  $45^\circ$  de la verticale. La troisième tension radiale C est nulle.

On aboutit à des conclusions analogues si l'on ajoute à la torsion

une traction homogène définie par la tension  $N_3$ . On trouve les tensions principales :

$$A = \frac{N_3}{2} + \sqrt{\frac{N_3^2}{4} + T_2^2}, \quad B = \frac{N_3}{2} - \sqrt{\frac{N_3^2}{4} + T_2^2}, \quad C = 0.$$

La tension A fait avec l'axe du cylindre un angle :

$$\text{tg } \varepsilon = T_2 : A.$$

Ceci posé, cherchons les effets d'une torsion dans la théorie précédemment admise. Elle repose sur l'hypothèse fondamentale que les phénomènes optiques en un point sont complètement déterminés par les déformations en ce point et ne dépendent pas de ce qui arrive au voisinage. Que l'hypothèse soit vraie ou fausse, nous ne pouvons demander à la théorie que ce que nous y avons mis.

Il résulte de la symétrie des déformations, que chaque élément est transformé en un biaxe; le plan des axes optiques est tangent au cylindre concentrique au corps déformé passant par l'élément considéré.

Coupons une lame planparallèle normalement à l'axe du cylindre tordu. Pour un faisceau normal, elle équivaut à une infinité de lames cristallines juxtaposées, dont les sections principales sont radiales et tangentielles, et dont la biréfringence croît proportionnellement à la distance à l'axe. En lumière parallèle, nous aurons entre nicols croisés une croix noire séparant les teintes de l'échelle II de Newton (tome IV, § 248).

Peu importe l'épaisseur de la lame, puisque nous superposons des lames dont les sections principales coïncident. Remarquons de plus qu'en tous les points d'une droite parallèle à l'axe du cylindre tordu, la biréfringence est la même et les axes du milieu biaxe obtenu sont parallèles. Sur l'axe même, le milieu demeure isotrope.

Ceci posé, je ne peux comprendre comment Neumann et Verdet déclarent *comme conséquence de la théorie* que la torsion donne au milieu le pouvoir rotatoire : le contraire me semble évident. Il n'y a même pas à se rejeter derrière la théorie des §§ 366 et sq. Nous n'avons pas ici un empilement de lames dont les sections principales forment un éventail, puisque les sections coïncident. Du reste, ni Wertheim ni personne n'ont pu obtenir ce pouvoir rotatoire avec le verre tordu : naturellement l'inévitable trempe du verre a bon dos.

Il semble que le pouvoir rotatoire existe avec la gélatine tordue (Ewell). Ce résultat prouverait que la théorie précédemment développée est insuffisante; conclusion qui n'a rien de bien hardi, la théorie de l'élasticité elle-même n'étant qu'une première approximation, grossière pour les corps très déformables. Ce qui n'est pas une raison de la compliquer par une potée d'équations différentielles, en lui conservant à la base les mêmes hypothèses.

**300. Trempe et phénomènes analogues.** — Quand on refroidit brusquement du verre fondu, des déformations intérieures subsistent. La surface se solidifie d'abord; quand ensuite l'intérieur devient solide, il se produit nécessairement des tensions. Naturellement les corps trempés ne sont en équilibre que grâce à l'ensemble des tensions; si on en brise une partie, le tout peut tomber en poussière: c'est ce qui arrive pour les *larmes bataviques*.

Ces tensions, quelquefois assez régulièrement réparties, produiront une biréfringence d'autant plus grande que le refroidissement sera plus brutal. Pour obtenir du verre bien isotrope, il faudra donc le refroidir lentement et au besoin le recuire.

C'est d'une manière analogue qu'on explique la biréfringence de la gélatine, des colles, en général des matières qui se solidifient pour une raison quelconque.

La cristallisation non parfaitement homogène peut laisser des tensions; on explique ainsi la biréfringence d'un grand nombre de cristaux cubiques (alun, sel gemme, ...)

**301. Tensions produites dans un milieu isotrope par un échauffement non uniforme; double réfraction.** — Écrivons l'expression des forces élastiques (I, § 131) en supposant que l'élévation de la température est  $T$ .

Soit  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , les déplacements d'un point. Pour que les déplacements soient nuls malgré l'élévation de la température, il faut exercer une pression (I, § 133) qui, en vertu de la valeur du coefficient de compressibilité cubique, est :

$$(3\lambda + 2\mu)kT,$$

où  $k$  mesure le coefficient de dilatation. On a donc :

$$N_1 = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + (3\lambda + 2\mu)kT,$$

$$T_1 = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad \left( \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right),$$

et quatre formules symétriques pour  $N_2$ ,  $N_3$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ .

Si les forces extérieures sont nulles, nous devons satisfaire à l'équation (I, § 124) :

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} = 0,$$

et à deux autres symétriques. D'où la condition (I, § 138) :

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \Delta u + \gamma \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad [\gamma = (3\lambda + 2\mu)k],$$

et deux autres symétriques. Le problème des tensions est donc complètement résolu, si nous donnons la température en fonction des coordonnées.

Appliquons à un problème simple.

Soit une lame planparallèle *indéfinie* en équilibre à la température conventionnelle 0° : portons brusquement ses faces planes P<sub>1</sub> et P<sub>2</sub> aux températures T. Cherchons la distribution des tensions (fig. 183).

Il est d'abord évident, par raison de symétrie, qu'on a :

$$\frac{\partial}{\partial x}(u, v, w, T) = \frac{\partial}{\partial y}(u, v, w, T) = 0.$$

Mais la lame étant indéfinie et tous les points d'un plan parallèle à xOy devant être traités de même, il n'y a aucune raison pour que nous supposions que les diverses couches parallèles au plan xOy se dilatent parallèlement à ce plan.

Nous devons poser :  $u = v = 0$ . Il vient :

$$N_1 = N_2 = \lambda \frac{\partial w}{\partial z} + \gamma T,$$

$$N_3 = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z} + \gamma T,$$

$$T_1 = T_2 = T_3 = 0.$$

En vertu de la condition :

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \gamma \frac{\partial T}{\partial z} = 0,$$

il reste :  $N_1 = N_2 = \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \gamma T, \quad N_3 = 0.$

Donc tout se passe comme si on exerçait une compression latérale uniforme sur les différentes tranches de la lame parallèles au plan xOy. Elle se transforme donc en un milieu anisotrope uniaxe. En tous les points, l'axe est parallèle à Oz ; la biréfringence, nulle pour la partie moyenne de la lame, augmente à mesure qu'on s'approche des faces terminales.

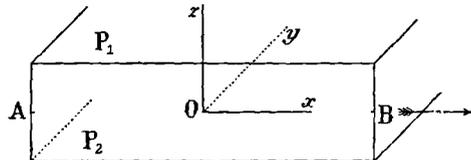


Fig. 183.

Pour réaliser l'expérience, il suffit de prendre entre les doigts les faces P<sub>1</sub> et P<sub>2</sub> d'un

bloc de verre. On le place entre deux nicols à l'extinction, de manière que la lumière traverse suivant la flèche. Aussitôt la lumière réapparaît, laissant une frange sombre au milieu. En attendant plus longtemps, la biréfringence peut devenir suffisante pour qu'on aperçoive de part et d'autre de la frange centrale deux franges latérales correspondant à un retard relatif d'une longueur d'onde.

302. **Expériences dans le cas des cristaux (Pockels).** — On peut se demander si toutes les constantes auxquelles la théorie permet d'être distinctes, le sont effectivement. Par exemple, dans l'étude de l'Élasticité des cristaux, on est conduit à des réductions identiques; mais l'application du principe de la conservation de l'énergie fournit la condition supplémentaire :

$$a_{kk} = a_{kk}.$$

Aucune raison *a priori* ne permet de la poser ici : c'est à l'expérience de décider.

Pour le quartz, l'expérience donne sensiblement :

$$a_{31} = a_{13}, \quad a_{14} = a_{41},$$

ce qui réduit à six le nombre des constantes. Les voici;  $V$  est la vitesse de la lumière.

$$\begin{aligned} a_{11} : V^2 &= 0,1345, & a_{12} : V^2 &= 0,2485, & a_{13} : V^2 &= 0,2575, \\ a_{33} : V^2 &= 0,098, & a_{14} : V^2 &= -0,0324, & a_{44} : V^2 &= -0,0593. \end{aligned}$$

Les nombres trouvés sont du même ordre que pour le verre.

Il y a réduction du nombre des constantes, mais elles sont encore assez nombreuses pour que des pressions normales à l'axe ternaire produisent des effets variables suivant leurs positions par rapport aux axes binaires.

Dans la fluorine cubique, on trouve trois constantes distinctes comme le veut la théorie :

$$a_{11} : V^2 = +0,055, \quad a_{12} : V^2 = +0,228, \quad a_{44} : V^2 = +0,024.$$

### Double réfraction électrique dans les solides.

303. **Phénomène de Kerr.** — Le phénomène de Kerr a une définition très simple. *Un diélectrique isotrope polarisé se conduit comme un cristal uniaxe; la direction de l'axe optique coïncide avec la direction du champ électrique.* Pour définir complètement le phénomène, il ne reste plus qu'à dire comment l'ellipsoïde des indices se déduit de la sphère des indices quand on se donne le champ.

D'après Kerr, la vitesse de l'onde ordinaire est égale à la vitesse dans le milieu non polarisé. *L'ellipsoïde des indices du milieu polarisé est donc tangent à la sphère des indices du milieu isotrope suivant l'équateur* (fig. 184).

Autrement dit, pour que la vitesse de propagation d'une vibration soit modifiée, il faut qu'une de ses composantes soit parallèle aux lignes de force. Les vibrations ordinaires, étant toujours perpendiculaires à l'axe optique et par conséquent au champ, conservent la vitesse caractéristique du milieu non polarisé.

Le phénomène est donc complètement défini par une seule donnée : la différence AB des axes de la sphère et de l'ellipsoïde dans la direction du champ. Cette différence mesure la différence des indices  $N_e - N_o$  des deux vibrations propagées dans une direction normale au champ. Supposons cette direction normale au plan du tableau : l'indice ordinaire  $N_o$  convient à la vibration dirigée suivant OE, l'indice  $N_e$  à la vibration dirigée suivant OAB. La différence de marche entre les deux vibrations pour une épaisseur  $l$  traversée est (en phase) :

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} l(N_e - N_o).$$

L'expérience montre que la différence  $N_e - N_o$  est proportionnelle au carré du champ électrique F. Nous poserons :

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} l(N_e - N_o) = \gamma F^2 l,$$

$\gamma$  s'appelle la constante de Kerr et caractérise le milieu ; F est exprimé en CGS électrostatiques.

**304. Expériences et résultats.** — On place le diélectrique solide dans un champ uniforme connu, par exemple entre les armatures  $A_1, A_2$ , planes et parallèles d'un condensateur. Elles sont à une distance connue l'une de l'autre. On établit une différence de potentiel mesurée par un électromètre absolu (fig. 185).

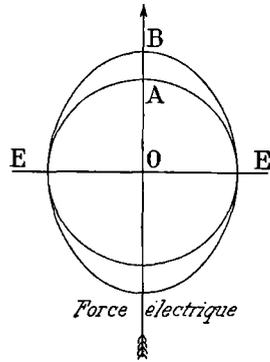
Le diélectrique est traversé normalement au champ par un faisceau de lumière que polarise à  $45^\circ$  du champ le nicol  $N_1$ . Au moyen d'un compensateur de Babinet (non représenté) et d'un second nicol, on déterminera à la sortie la différence de marche entre les composantes principales. On fera abstraction pour l'instant des miroirs M et des lentilles L dont nous nous servirons plus tard (§ 305) ; S est la source lumineuse.

Le champ n'est pas uniforme : il faut tenir compte des perturbations aux bords du condensateur.

Le retard optique a pour expression :

$$\gamma \int_{-\infty}^{+\infty} F^2 dx;$$

$x$  est compté sur la direction de propagation ; F est le champ normal à cette direction exprimé en fonction de  $x$ . La correction se calcule d'ailleurs aisément d'après la théorie complète des condensateurs plans.



Sphère et ellipsoïde des indices

Fig. 184.

Le champ intervenant au carré, on peut le renverser sans changer le phénomène.

Les diélectriques se classent en *positifs* et *négatifs*, suivant que  $N_e \leq N_o$ , c'est-à-dire suivant que la composante parallèle au champ est retardée ou avancée. Si l'ellipsoïde des indices du milieu polarisé est extérieur à la sphère des indices du milieu non polarisé (fig. 184),

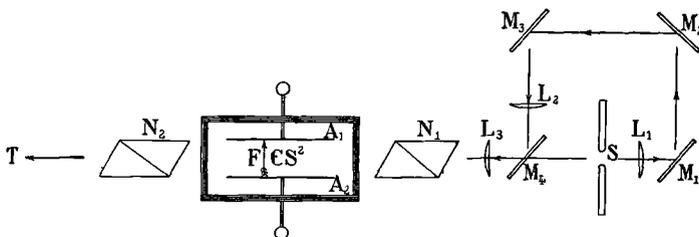


Fig. 185.

le diélectrique est positif. Il est négatif si l'ellipsoïde est intérieur à la sphère. Ces appellations sont conformes à celles que nous avons employées pour classer les cristaux uniaxes.

Le sulfure de carbone est parmi les diélectriques liquides le plus sensible à l'action du champ. Il est *positif*; sa constante absolue a pour expression :

$$\gamma = 3,70 \cdot 10^{-9}.$$

Les diélectriques positifs sont plus nombreux que les négatifs. Le verre est négatif, la résine positive.

**305. Disparition instantanée du phénomène de Kerr.** — On prouve que le phénomène de Kerr cesse rigoureusement en même temps que la force électrique  $F$  au moyen d'une méthode curieuse (Abraham et Lemoine).

Prenons pour source lumineuse une étincelle éclatant en  $S$  entre deux pièces métalliques *reliées aux armatures du condensateur* dans lequel se trouve le diélectrique polarisé (sulfure de carbone, par exemple). En choisissant convenablement le circuit, on obtient une étincelle de durée extrêmement courte; pour simplifier les raisonnements, admettons qu'elle soit instantanée.

Au lieu d'amener la lumière *directement* à travers le diélectrique, on allonge son chemin à l'aide des miroirs  $M_1, M_2, M_3, M_4$ . Elle ne parvient donc dans le sulfure de carbone qu'un certain temps après que la force électrique a disparu. Si les nicols sont rigoureusement à l'extinction, *et si la biréfringence cesse aussitôt que la force électrique*, la lumière se présente pour passer quand le milieu est redevenu isotrope : le chemin est barré. Si au contraire le phénomène s'amortit avec une lenteur relative, la biréfringence n'a pas complètement disparu : la lumière passe en partie.

L'expérience montre que pour un chemin ajouté de 3 mètres, il ne passe rien : le temps d'amortissement est donc inférieur à un cent millionième de seconde. A la vérité, l'étincelle n'est pas instantanée, mais l'interprétation est la même.

On peut opérer autrement.

Supprimons les lentilles et les miroirs. Au lieu de chercher à obtenir une étincelle très courte, rendons-la nettement oscillante ; regardons le phénomène réfléchi sur un miroir tournant placé en T. Il est installé de manière à faire une révolution unique : l'axe du miroir porte un treuil sur lequel est enroulée une corde tendue par un ressort à boudin. On bande le ressort en tournant le miroir d'un tour. Quand on abandonne le miroir à lui-même, il vient brusquement à sa position première. Des contacts produisent la décharge juste au moment où il se trouve dans l'azimut convenable.

Si le phénomène suit sans retard les variations périodiques de potentiel pendant la décharge, et si le miroir tourne assez vite, nous verrons dans le miroir des alternatives d'obscurité et de lumière. Si au contraire il existe un retard notable, on n'obtiendra qu'un phénomène moyen ; les bandes lumineuses ne seront plus distinctes.

L'expérience en montre cinq ou six bien distinctes, ce qui prouve l'instantanéité du phénomène (Blondlot).

On peut employer les méthodes précédentes pour prouver l'instantanéité de la polarisation rotatoire magnétique (§ 383).

### Anisotropie des liquides.

Les liquides *semblent* nécessairement isotropes. Pourtant une étude plus approfondie montre que l'anisotropie n'est pas contradictoire avec l'état liquide plus ou moins imparfait. Nous allons d'abord prouver qu'il résulte du *frottement intérieur* la possibilité d'acquisition momentanée d'une structure anisotrope. Mais on conçoit que même à l'état de repos les molécules *anisotropes* d'un liquide puissent, sous l'action d'un champ suffisamment intense, s'orienter de manière à constituer un milieu homogène anisotrope.

Cette explication est toute naturelle quand il s'agit d'un liquide *mixte*, c'est-à-dire contenant en suspension des particules anisotropes décelables par l'observation microscopique ou ultramicroscopique.

Pour l'instant nous laissons de côté les liquides anisotropes de Lehmann qui seront étudiés au Chapitre XI.

**306. Hypothèse de Maxwell.** — Imaginons un milieu déformable tel que la force  $C$  résultant d'une déformation  $\alpha$  soit proportionnelle à  $\alpha$ , mais seulement jusqu'à ce que la limite  $C_0$  soit atteinte. Au delà de cette limite, il y a simultanément pendant le temps  $dt$  :

d'une part *gain de force* proportionnel à  $d\alpha$ , d'autre part *perte de force, relaxation* proportionnelle au temps  $dt$  et à l'excès  $C - C_0$ . L'équation différentielle du phénomène est :

$$dC = \Gamma d\alpha - \frac{1}{\tau} (C - C_0) dt, \quad (1)$$

pour toute valeur de  $C$  supérieure à  $C_0$ . Telle est l'hypothèse que Maxwell applique aux liquides;  $C$  est une force tangentielle ou normale,  $\alpha$  est la déformation correspondante.

Étudions les conséquences de l'hypothèse.

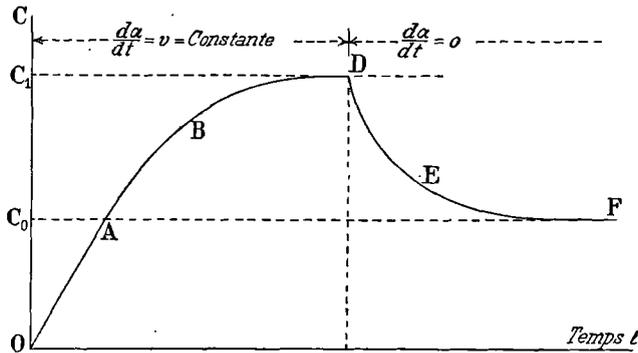


Fig. 186.

Pour intégrer l'équation (1), il faut nous donner la fonction :  $\alpha = \varphi(t)$ .

1° Supposons d'abord  $d\alpha : dt = v = \text{Constante}$ .

Représentons  $C$  en fonction du temps (fig. 186).

Après une portion  $OA$  de droite suivant laquelle la force croît proportionnellement à  $\alpha$  (c'est-à-dire au temps), on trouve une portion  $ABD$  exponentielle asymptote à l'horizontale :

$$C_1 = C_0 + \Gamma \tau v. \quad (2)$$

2° Parvenu en un point  $D$  quelconque de cette asymptote, maintenons constante la déformation; faisons  $d\alpha : dt = 0$ . Il reste :

$$\frac{dC}{C - C_0} = -\frac{dt}{\tau}, \quad C = C_0 + (C_1 - C_0) e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (3)$$

La force tend asymptotiquement suivant une loi exponentielle (courbe  $DEF$ ) vers la valeur limite  $C_0$ .

REMARQUE I. — La limite  $C_0$  peut être nulle, même dans un milieu susceptible de réagir. La portion  $OA$  de droite disparaît alors; l'horizontale  $AF$  coïncide avec l'axe des temps.

Ainsi un milieu peut réagir pour deux raisons : soit parce que  $C_0$  n'est pas nul, soit parce que  $\Gamma \tau$  n'est pas nul.

REMARQUE II. — Rien *a priori* n'impose la forme (1); nous la choisissons parce que c'est la plus simple. *Il est plus que probable qu'elle est toujours insuffisante.* Pour les métaux visqueux tels que le plomb, la relation (3) ne s'applique pas; loin d'être une exponentielle du temps, l'expérience fournit la fonction inverse, c'est-à-dire un logarithme. La loi de déperdition, rapide au début, devient ensuite extrêmement lente (Bouasse).

307. **Valeur du frottement liquide.** — Au § 55 du tome I, nous avons calculé les phénomènes dus à la viscosité des liquides au moyen d'un paramètre  $\eta$  qui est le *frottement intérieur*. Nous admettons que le frottement qui s'exerce à la surface de séparation de deux couches liquides, est proportionnel au produit de  $\eta$  par le taux de variation de la vitesse normalement à ces couches. Interprétons le paramètre  $\eta$  dans les hypothèses du paragraphe précédent.

Reprenons l'expérience décrite au § 61 du tome I excellente pour fixer les idées.

Elle consiste à placer un liquide entre deux cylindres concentriques dont l'un est immobile et l'autre animé d'une vitesse angulaire  $\Omega$ . On mesure le couple d'entraînement. Posons  $e = R_1 - R_0$ ; le taux de variation de la vitesse linéaire entre les deux cylindres par rapport à la distance  $R$  à l'axe, est (si  $e$  est assez petit) :

$$\frac{\Omega R}{R_1 - R_0}.$$

Le couple par unité de surface et pour un taux de variation unité

de la vitesse, est :  $\frac{C}{2\pi R_1 h} : \frac{\dot{\Omega} R}{R_1 - R_0} = \eta R_1,$

expression conforme à la définition du § 55, tome I. En effet, la force par unité de surface et pour un taux de variation unité de la vitesse linéaire est simplement égale au paramètre  $\eta$ . Nous allons retrouver tout à l'heure une application de cette expérience; pour l'instant elle éclaircira les considérations suivantes.

Supposons qu'on exerce sur les deux faces d'une lame *solide, plan-parallèle, parfaitement élastique, indéfinie*, des forces tangentielles égales et opposées; *elle se déforme.* La déformation crée un couple et équilibre les forces appliquées.

Supposons en second lieu qu'il existe une limite d'élasticité  $C_0$  parfaitement déterminée. Si le couple extérieur est au-dessous de cette limite, *après un déplacement fini des faces auquel il est appliqué*, l'équilibre est atteint. Si le couple extérieur est au-dessus de cette limite, la réaction élastique reste toujours égale à la limite, *malgré le déplacement indéfini des faces de la lame.* L'équilibre n'est jamais atteint.

Supposons enfin (et nous voici ramenés d'une part au frottement des liquides, de l'autre à la théorie du paragraphe précédent) que la limite d'élasticité soit nulle, mais qu'il existe une réaction élastique *momentanée* proportionnelle à la vitesse relative des faces de la lame. Les phénomènes sont évidemment identiques à ceux qu'engendre le frottement des liquides; d'ailleurs ils pourront s'interpréter dans la théorie de Maxwell.

Il résulte de là que l'hypothèse d'un *coefficient de viscosité*  $\eta$  constant ou, ce qui revient au même, d'une réaction proportionnelle à la vitesse, revient à écrire :

$$C_0 = 0, \quad C = \Gamma\tau v.$$

Le coefficient de viscosité  $\eta$  serait donc proportionnel au produit de la rigidité  $\Gamma$  du liquide par la constante  $\tau$  qu'on appelle quelquefois *module de relaxation*.

Maxwell pose :

$$\eta = \Gamma\tau. \quad (4)$$

On voit immédiatement que la formule (4) est seulement un cas particulier de l'hypothèse exprimée par l'équation (1). D'une manière générale le couple n'est pas proportionnel à la vitesse; il se compose de deux termes, l'un constant, l'autre proportionnel à la vitesse :

$$C = C_0 + \eta v. \quad (2')$$

**308. Expérience prouvant l'existence de la limite  $C_0$  dans certains liquides.** — Voici comment on peut procéder (Schwedoff). — Un fil AB supporte une éprouvette plongeant dans le liquide à étudier. L'extrémité supérieure est solidaire d'un tube reposant sur une pièce mobile DE dont on repère l'azimut sur une échelle grâce à un miroir  $M_1$ . Le miroir  $M_2$  voisin permet de repérer l'azimut de l'éprouvette sur une autre échelle et dans la même lunette. Les échelles sont installées de manière que les images correspondantes des traits, vus par réflexion dans les

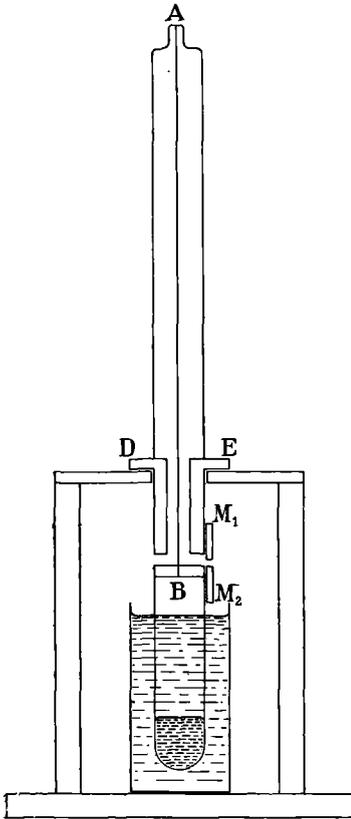


Fig. 187.

deux miroirs, soient rigoureusement dans le prolongement les unes des autres.

On tord le fil AB d'un certain angle  $\alpha$  en agissant sur la pièce DE : l'image de l'échelle dans  $M_1$  se déplace.

1° Si  $C_0 = 0$ , l'image dans  $M_2$  se déplace plus ou moins vite; mais au bout d'un certain temps elle a tourné d'un angle rigoureusement égal à  $\alpha$  : les traits correspondants des deux images sont redevenus dans le prolongement les uns des autres.

2° Si  $C_0 > 0$ ,  $M_2$  tourne en définitive d'un angle  $\alpha' < \alpha$ ; la différence  $\alpha - \alpha'$  correspond au couple limite  $C_0$ .

Il semble que pour certains liquides la limite  $C_0$  ne soit pas nulle. Elle est toujours très petite.

309. **Double réfraction résultant des mouvements (Maxwell, Kundt).** — Disposons un liquide entre deux cylindres *horizontaux* : l'un extérieur, de rayon  $R_1$ , est fixe et fermé à ses bouts par des parois percées de deux trous recouverts avec des glaces travaillées  $G_1$  et  $G_2$ ; l'autre intérieur, de rayon  $R_0$ , est mobile autour de son axe de figure. Quand il tourne, les couches cylindriques con-

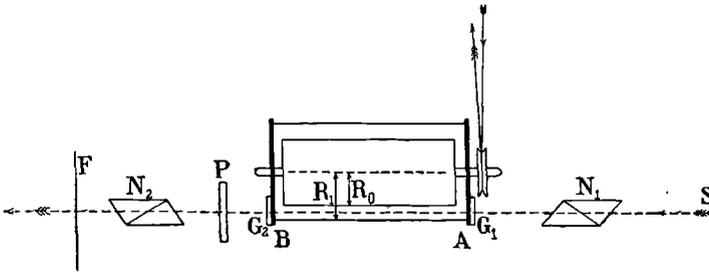


Fig. 188.

centriques du liquide prennent une vitesse angulaire  $\omega$  fonction de leur rayon  $r$ . Un raisonnement calqué sur celui du tome I, § 61, montre que la vitesse  $\omega$  est reliée à la distance  $r$  à l'axe par la relation :

$$\omega = \Omega \frac{R_0^2 R_1^2}{R_1^2 - R_0^2} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{R_1^2} \right);$$

elle donne  $\omega = \Omega$ , pour  $r = R_0$ , et  $\omega = 0$ , pour  $r = R_1$ .

Un faisceau polarisé traverse l'espace inférieur compris entre les cylindres et délimité par les glaces.

La source est en S, les nicols en  $N_1$  et  $N_2$ ; P est une lame de gypse qui fournit un spectre cannelé (V, § 127); F est un écran dans lequel est percée une fente verticale.

On analyse la lumière qui sort de la fente avec un spectroscopie (non représenté). Par le déplacement des franges, on décèle la biréfringence de la colonne liquide AB.

Les sections des nicols sont croisées; les sections de la lame de

gypse sont à  $45^\circ$  de celles des nicols, et parallèles aux sections de la lame *biréfringente équivalente au liquide*; c'est l'expérience qui détermine l'azimut de ces dernières.

On peut supprimer la lame de gypse et le spectroscope. Si, par suite de la rotation du cylindre, le liquide devient biréfringent, la lumière réapparaît. Elle est le plus intense quand les sections des nicols sont à  $45^\circ$  des sections de la lame *obtenue*; elle est nulle quand les sections des nicols sont parallèles aux sections de cette lame : ce qui détermine les azimuts de ces sections.

**310. Résultats des expériences.** — Soit  $\overline{AB} = 15$  centimètres par exemple,  $R_1 = 6$  centimètres,  $R_0 = 5$  centimètres; le nombre de tours par seconde est de l'ordre d'une centaine. Dans ces conditions on constate la biréfringence dans l'huile d'olive, de lin, de colza, de ricin, dans les dissolutions de gomme arabique et de gélatine dans l'eau, de baume du Canada dans le benzol,...

*Certains liquides ne donnent rien* : par exemple, la glycérine, la dissolution fluide d'acide métaphosphorique, les dissolutions concentrées de chlorure de calcium, d'hyposulfite de soude, de sucre, de dextrine, d'albumine,...

Une première constatation s'impose : *il n'existe aucune relation nécessaire entre la double réfraction obtenue et la grandeur de la viscosité*. Certains liquides très visqueux ne donnent rien; d'autres, *qui sont quasiment des liquides mécaniquement parfaits*, donnent une biréfringence relativement intense.

La biréfringence est sensiblement proportionnelle à la vitesse de rotation.

Les axes de la lame biréfringente obtenue sont, pour la plupart des liquides, à  $45^\circ$  de la direction de la vitesse angulaire (par conséquent à  $45^\circ$  de la verticale dans la disposition figurée); mais pour quelques liquides, comme le collodion, l'angle avec la direction de frottement diffère beaucoup de  $45^\circ$  et atteint  $65^\circ$ .

Il peut arriver que la double réfraction ne cesse pas aussitôt que cesse le mouvement; elle diminue d'abord rapidement, puis lentement; elle reste quelquefois sensible pendant plusieurs minutes.

**311. Interprétation des expériences par une déformation du milieu.** — Disons tout de suite qu'elle est plus que douteuse.

Comme le phénomène ne dépend pas directement de la viscosité mesurée par le paramètre  $\eta$ , il est nécessaire d'introduire quelque autre propriété. *En restant dans les idées développées au § 306*, nous pouvons invoquer soit la limite  $C_0$ , soit le paramètre  $\Gamma$  ou, ce qui revient au même, le coefficient de rigidité (I, § 110), soit enfin la constante de relaxation  $\tau$ .

Maxwell et Kundt admettent que la double réfraction dépend de

ce dernier paramètre. Les liquides, comme le baume du Canada, qui agissent énergiquement sur la lumière polarisée, auraient, pour une valeur donnée de la viscosité  $\eta$ , une petite rigidité  $\mu$  et un grand module de relaxation  $\tau$ ; ceux qui n'agissent pas seraient plus rigides, mais devraient leur fluidité égale à la petitesse du module  $\tau$ .

Quoi qu'il en soit, les difficultés ne seraient pas aplanies par cette hypothèse difficilement contrôlable. Admettons en effet que les axes optiques d'un liquide en mouvement en un point donné coïncident avec les déformations principales (I, § 96 et 127) et aussi avec les tensions principales (I, § 125).

Il est facile de montrer que les axes de la lame biréfringente, équivalente à la colonne AB dans l'expérience précédente, devraient être toujours très approximativement à  $43^\circ$  de la direction de la vitesse (à  $43^\circ$  de la verticale dans la disposition représentée). C'est à peu près la seule proposition hors de doute parmi toutes celles que nous allons énoncer, et elle est contredite par l'expérience.

Considérons en effet le point  $a$  sur la verticale de l'axe O des cylindres (fig. 189). Traçons trois axes rectangulaires  $ax$ ,  $ay$ ,  $az$ , ce dernier parallèle aux génératrices des cylindres. Raisonnons sur le liquide comme sur un solide. C'est l'hypothèse même du § 306; mais le solide fictif doit être à chaque instant reconstitué par l'effet des vitesses relatives.

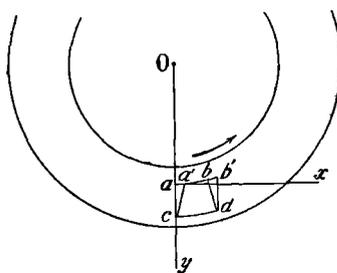


Fig. 189.

Toutes choses égales d'ailleurs, les phénomènes dans le milieu doivent dépendre de la quantité (I, § 61) :

$$r \frac{d\omega}{dr},$$

qui définit le couple produisant en chaque point la déformation. Cette quantité est elle-même une fonction de  $\Omega$  et de  $r$  aisément calculable d'après la formule du § 309. Les six quantités N et T qui définissent mécaniquement le milieu en doivent dépendre. Par raison de symétrie  $T_1$  et  $T_2$  sont nulles, puisque le seul effet de cisaillement tend à déformer le petit prisme de base  $abcd$  en un prisme de base  $a'b'dc$ .

Les formules du tome I, § 125, permettent de calculer les directions des tensions principales. L'une d'elles est dirigée suivant l'axe des  $z$ , puisque  $T_1$  et  $T_2$  sont nulles. Soit  $\theta$  l'angle que fait la seconde avec l'axe des  $x$ . Nous avons :

$$\cos \theta (N_1 - F) + \sin \theta \cdot T_3 = 0, \quad \cos \theta \cdot T_3 + \sin \theta (N_2 - F) = 0.$$

$$\cotg 2\theta = - \frac{N_2 - N_1}{2T_3}.$$

Soit  $p$  la pression hydrostatique. On peut poser, en dehors de toute hypothèse particulière :

$$\begin{aligned} N_1 &= p + a_1\Omega + b_1\Omega^2, \\ N_2 &= p + a_2\Omega + b_2\Omega^2, \quad N_1 - N_2 = a\Omega + b\Omega^2; \quad (1) \\ 2T_3 &= c\Omega + d\Omega^2, \end{aligned}$$

où  $\Omega$  est la vitesse angulaire du cylindre intérieur ; les constantes sont des fonctions de  $r$ . Il vient :

$$\cotg 2\theta = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \Omega. \quad (2)$$

Or il semble qu'il faille poser  $a = 0$  : c'est le résultat des théories actuelles de la viscosité.

La formule (2) montre de plus que le coefficient de  $\Omega$  ne peut être calculé que si l'on connaît les développements (1) jusqu'au terme en  $\Omega^2$  inclusivement, ce qu'aucune théorie ne permet actuellement de faire. Tout ce qu'on peut conclure, c'est la nullité probable de  $a$ , la petitesse de  $b$  vis-à-vis de  $c$ , et par suite que  $\theta$  diffère peu de  $45^\circ$ .

La théorie de la double réfraction des liquides basée sur les déformations n'est pas même ébauchée.

Si intéressantes que soient les vues de Maxwell, on risque de se payer de mots en parlant du *module de relaxation* ; la définition expérimentale d'un tel paramètre ne concorde pas avec l'équation (3) du § 306, dans tous les cas où elle est accessible. La notion de frottement intérieur dans les substances très visqueuses est infiniment plus compliquée que Stokes ne le supposait. Les relations entre les déformations du milieu et celles de l'ellipsoïde des indices ne sont pas élucidées.

Enfin on peut se demander si le mouvement variable d'un point à l'autre d'un liquide n'intervient pas en tant que mouvement, et non seulement pour les variations de tension dont il est supposé la cause. La biréfringence s'expliquerait alors par une orientation, sous l'influence du mouvement, des particules anisotropes constituant le liquide. Les paragraphes suivants montreront la réussite de ce système d'explication pour des phénomènes analogues, et avec des transitions telles entre le pur énoncé des faits et l'hypothèse invérifiable, que celle-ci en devient toute naturelle.

### 312. Orientation des particules dans un milieu hétérogène.

— Dans un milieu hétérogène, des particules peuvent s'orienter sous l'action d'un champ magnétique, d'un champ électrique ou même d'un champ tel que celui de la pesanteur ou de la force centrifuge, pour deux raisons différentes : ou bien elles sont isotropes, et l'action directrice résulte de leur forme qui est plus ou moins allongée ; ou

bien elles sont anisotropes, et l'action directrice résulte des propriétés variables avec la direction.

1° Si par exemple elles sont isotropes, allongées, et plus magnétiques que le milieu qui les renferme, elles sont soumises à un couple directeur qui tend à placer leur grande dimension dans la direction des lignes de force (§ 217). Quand on peut admettre une perméabilité constante, on sait que le couple est proportionnel au carré du champ (§ 212). Si aucune cause ne tendait à rétablir le désordre primitif, les frottements étant faibles, les particules s'orienteraient toutes et complètement, même pour des champs relativement peu intenses. Mais on peut admettre que les mouvements browniens, qui persistent même dans des champs très intenses, s'opposent à la régularité d'orientation que le champ tend à produire. Posant que ce *dérèglement* est indépendant du champ, on est conduit à une *régularité* proportionnelle au carré du champ. Posant que la perméabilité décroît avec le champ, ou inversement que le champ l'emporte beaucoup sur la cause dérégulante, on est conduit pour la *régularité* à une limite plus ou moins rapidement atteinte.

Ce que nous venons de dire du champ magnétique s'applique sans y rien changer au champ électrique.

2° Si les particules sont anisotropes, elles tendent à s'orienter du fait même de cette anisotropie (§ 217). La question se complique, puisqu'il faut maintenant tenir simultanément compte du couple dû à la forme et du couple dû à l'anisotropie. Mais nous avons vu (§ 217) que, dans la plupart des cas, celui-ci doit l'emporter.

Dans le cas de dissolutions colloïdales où les particules sont ultramicroscopiques, il est difficile de décider si leur anisotropie est de forme ou de constitution. Mais on peut réaliser des liquides, dits *mixtes*, tenant en suspension des poussières très fines mais microscopiques, et dont on sait qu'elles sont cristallisées. Dans ce cas, il est clair que les phénomènes décrits aux paragraphes suivants doivent être rapportés à la seconde espèce d'anisotropie.

3° On rencontre des liquides que l'observation ultramicroscopique démontre parfaitement homogènes, absolument privés de particules (les composés de la série aromatique, la nitrobenzine en particulier), qui deviennent sûrement anisotropes sous l'influence d'un champ magnétique ou d'un champ électrique. Il semble naturel de conserver le système d'explication précédent : ce sont les molécules elles-mêmes qui s'orientent. Elles devraient, étant anisotropes, s'orienter spontanément en raison de leurs actions mutuelles (*homéotropie spontanée*) : on peut imaginer que les forces directrices sont trop petites, et qu'il est nécessaire d'en créer de plus intenses pour obtenir un effet sensible.

Étudions les phénomènes par lesquels se traduit l'anisotropie.

### 313. Biréfringence et dichroïsme magnétique (Majorana).

— La cuve contenant le liquide est placée dans un champ magnétique (horizontal pour préciser) d'un électro puissant. La lumière émise par la source S traverse, outre la cuve, les nicols  $N_1$  et  $N_2$  croisés et dont les sections sont à  $45^\circ$  du champ. Quand on excite l'électro, la

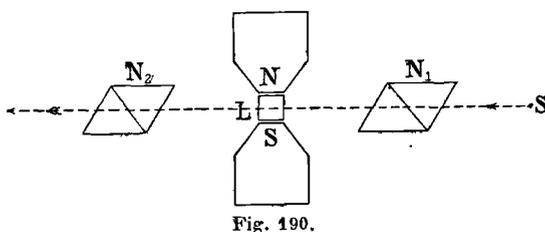


Fig. 190.

lumière réapparaît; les teintes dépendent de l'intensité du champ.

En utilisant le fer Bravais (hydrate ferrique colloïdal dialysé), on obtient des retards de plusieurs longueurs d'onde.

Les deux vibrations principales (parallèle et normale au champ) sont généralement absorbées d'une manière différente : la biréfringence s'accompagne de dichroïsme.

Suivant les corps, la double réfraction est positive ou négative; tout se passe en gros comme si le liquide était transformé en un milieu uniaxe positif ou négatif et dont l'axe coïncide avec la direction des lignes de force.

Il revient au même de dire que la double réfraction est *positive* si les vibrations (de Fresnel) parallèles aux lignes de force (parallèles à l'axe optique, donc *extraordinaires*) se propagent *moins vite* que les vibrations perpendiculaires aux lignes de force (donc *ordinaires*). La double réfraction est *négative* dans le cas contraire.

Le dichroïsme est *positif*, lorsque les vibrations *extraordinaires* sont *plus absorbées* que les autres. Dans la plupart des cristaux dichroïques, la biréfringence et le dichroïsme sont de même signe (§ 281).

Avec certaines dissolutions, la biréfringence est positive pour des champs faibles; puis il y a *inversion*; elle devient négative pour les champs intenses.

Le retard est parfois proportionnel au carré du champ jusqu'aux champs les plus intenses; parfois il tend rapidement vers une limite.

Dans certains liquides, le dichroïsme apparaît seul. La vibration émergente est encore rectiligne, mais elle n'est plus parallèle à la vibration incidente : elle se rapproche de la direction la moins absorbée. Il y a donc une sorte de *rotation magnétique* du plan de polarisation; mais comme le sens de cette rotation est indépendant du sens du courant et qu'elle n'a aucun rapport avec la polarisation rotatoire magnétique, on la désigne sous le nom de *rotation bima-gnétique*. Elle est dite positive si le dichroïsme est positif; la vibration s'éloigne des lignes de force et tend à leur être normale. Elle

est dite négative, lorsque la vibration se rapproche des lignes de force et tend à leur être parallèle.

Dans certains liquides, la biréfringence et le dichroïsme obéissent sans retard sensible aux variations du champ; ils apparaissent et disparaissent en même temps que lui. Mais le fait n'est pas général : dans les liquides visqueux, le phénomène s'établit et disparaît lentement.

**314. Explication des phénomènes : colloïdes (Schmauss, Cotton, Mouton).** — Un grand nombre des liquides qui présentent le phénomène de Majorana sont colloïdaux, c'est-à-dire tiennent en suspension des particules *ultramicroscopiques*.

On admet que *l'orientation des particules dans le champ est la cause du phénomène*.

Si on ajoute à un colloïde actif de la glycérine et qu'on laisse le mélange se prendre en gelée *dans le champ magnétique*, la gelée obtenue reste biréfringente. De même, en laissant évaporer une goutte de fer Bravais *dans le champ magnétique*, le dépôt se conduit comme une lame cristalline.

Si on filtre du fer Bravais ancien sur du collodion, la partie qui n'a pas traversé la membrane est extraordinairement biréfringente; le liquide qui a passé est inactif.

Le phénomène est dû à des granules dont les dimensions peuvent être relativement grandes. On peut modifier son intensité en modifiant la grosseur des granules, par exemple en chauffant longtemps le liquide : l'observation ultramicroscopique (IV, § 349) montre que les granules grossissent par ce traitement.

Reste à savoir comment cette orientation amène la biréfringence et le dichroïsme; nous n'avons qu'à renvoyer au § 289, où nous étudions ces phénomènes comme résultats de la structure.

**315. Phénomènes pour les liquides tenant en suspension des particules microscopiques (liqueurs mixtes).** — On obtient la biréfringence et le dichroïsme magnétiques et électriques, en plaçant dans un champ des liquides tenant en suspension des cristaux *microscopiques* réalisés par pulvérisation, ou mieux encore par réaction chimique. Par exemple, on mélange des solutions étendues de carbonate de sodium et de nitrate de calcium; d'où un précipité en voie de formation qui constitue une transition entre un liquide colloïdal et une suspension de grains grossiers. Les cristaux ont des dimensions de l'ordre du micron.

La biréfringence est nette et de signe bien déterminé. Elle est due à l'orientation des cristaux.

Soit d'abord des cristaux de forme suffisamment régulière, *assez gros pour qu'on puisse négliger les phénomènes de diffraction* et dont les directions de symétrie magnétique ou électrique sont orientées

par le champ. Le dichroïsme peut provenir de ce que deux rayons polarisés à angle droit se réfléchissent à l'entrée et à la sortie du cristal avec une inégale intensité. Le plus affaibli est celui dont l'indice dans le corps biréfringent est le plus différent du milieu ambiant. Si cette explication est exacte, on modifiera le dichroïsme en modifiant l'indice de ce milieu : l'expérience prouve que la même poudre placée successivement dans deux liquides d'indices l'un plus grand, l'autre plus petit que les indices du solide, donne des dichroïsmes de signes contraires.

Si les poudres sont très irrégulières, le dichroïsme seul est observable; un liquide qui renferme un grand nombre de particules irrégulières, *pouvant exercer individuellement une action sensible*, ne peut pas produire entre les composantes principales une différence de phase définie.

Si la lumière à l'entrée est rectilignement polarisée, elle est généralement à la sortie *partiellement polarisée, ce qui ne veut pas dire du tout qu'elle est encore rectilignement polarisée*. Un faisceau partiellement polarisé est constitué par de la lumière non polarisée à laquelle est superposée de la lumière rectilignement polarisée. Par exemple, de la lumière naturelle réfléchie n'importe comment est partiellement polarisée (tome V, § 169).

Dans le cas où le faisceau reste rectilignement polarisé, le dichroïsme se traduit par la *rotation bimagnétique* de Majorana; l'azimut de la vibration se rapproche de l'azimut de moindre absorption.

Avec des poudres régulières et très fines, la biréfringence est aussi nette que le dichroïsme et a une explication analogue. On l'obtient soit avec un champ magnétique, soit avec un champ électrique.



Dans chaque direction se propagent deux ondes transportant chacune sans déformation une vibration elliptique dont les axes sont dirigés suivant NE et NO. Puisque d'après le principe des petits mouvements les lois de propagation sont indépendantes de l'intensité de la lumière, ces vibrations sont définies par le rapport de leurs axes et le sens du mobile qui les parcourt. Le problème sera donc complètement résolu si nous connaissons en fonction de  $\theta$  les rapports des axes et les vitesses de propagation, soit quatre fonctions de  $\theta$ .

Mais il faut écarter tout de suite une difficulté.

Supposons que deux vibrations de même nature puissent être transmises successivement; d'après le principe des petits mouvements, elles peuvent se propager simultanément. Donc les ellipses sont telles que la résultante de deux ou plusieurs ellipses, satisfaisant à la même définition, satisfasse elle-même à cette définition. Il en est ainsi à la condition que les axes des ellipses composantes coïncident, qu'elles tournent dans le même sens et que le rapport des axes soit le même.

Soit en effet les ellipses :

$$\begin{aligned}x_1 &= A_1 \sin(\omega t - \delta_1), & x_2 &= A_2 \sin(\omega t - \delta_2), \\y_1 &= hA_1 \cos(\omega t - \delta_1), & y_2 &= hA_2 \cos(\omega t - \delta_2).\end{aligned}$$

Calculons l'ellipse résultante :

$$\begin{aligned}x &= \sum x_1 = X \sin(\omega t - \Delta), \\y &= \sum y_1 = Y \cos(\omega t - \Delta').\end{aligned}$$

On trouve aisément :

$$\Delta = \Delta', \quad Y = hX.$$

On montrerait sans peine que ces conditions suffisantes sont nécessaires.

**317. Formes des ellipses en fonction de  $\theta$ .** — Nous appellerons *ellipse ordinaire* celle dont le grand axe est dirigé suivant NO, c'est-à-dire normalement à l'axe ternaire cristallographique; si le quartz était uniaxe ordinaire, elle s'aplatirait jusqu'à donner la vibration rectiligne ordinaire.

Nous appellerons *ellipse extraordinaire* celle dont le grand axe est dirigé suivant NE, c'est-à-dire suivant la projection de l'axe ternaire sur le plan de l'onde.

*Les mobiles, sur les deux ellipses qui se propagent suivant la même direction, tournent en sens contraires.*

*Dans le quartz, qui est positif, l'ellipse ordinaire se propage plus vite que l'ellipse extraordinaire.*

*On dit que le quartz est droit quand l'ellipse ordinaire est dextrorsum; il est gauche, quand l'ellipse ordinaire est sinistrorsum.*

Nous verrons plus loin comment on détermine le rapport  $h$  des axes des ellipses en fonction de  $\theta$ ; le rapport des axes  $h$  est le même pour les deux ellipses dans la même direction  $\theta$  de propagation.

Pour  $\theta = 0$ ,  $h = 1$  : les deux ellipses sont des cercles.

Pour  $\theta > 0$ ,  $h$  diminue avec une rapidité extrême; le petit axe des ellipses tend vers zéro et devient pratiquement nul à  $20^\circ$  de l'axe. Voici quelques nombres pour fixer les idées :

$\theta = 6^\circ,$	$h = 0,33,$	$\theta = 12^\circ,$	$h = 0,08.$
$8^\circ,$	$0,18,$	$13^\circ,$	$0,07.$
$10^\circ,$	$0,13,$	$15^\circ,$	$0,05.$

Ainsi à  $20^\circ$  de l'axe, l'ellipse ordinaire devient à peu près rigoureusement la vibration rectiligne ordinaire des uniaxes holoèdres; l'ellipse extraordinaire devient la vibration rectiligne extraordinaire des uniaxes holoèdres. C'est donc légitimement que nous utilisons toujours, comme dénuées de pouvoir rotatoire, des lames de quartz taillées parallèlement à l'axe.

**318. Vitesses de propagation.** — Reste à déterminer les indices.

Nous savons que dans les cristaux uniaxes la surface des vitesses normales se compose de deux nappes (tome V, § 92) *tangentes suivant l'axe de révolution*;

la sphère :  $V_o = b$ ;

la surface de révolution :  $V_e = \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}$ .

Dans le quartz, la surface des vitesses normales se décompose encore en deux nappes très peu différentes des précédentes. Elles ne se touchent pas suivant l'axe : elles le coupent en des points différents.

Nous avons appelé  $n_o, n_e$ , les indices principaux pour la propagation perpendiculaire à l'axe ( $n_o < n_e$ , dans le quartz); nous désignerons par  $n'_o$  et  $n'_e$  les indices correspondants pour la propagation suivant l'axe.

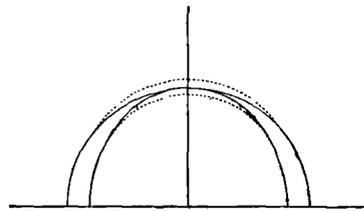


Fig. 192.

L'onde ordinaire est à peu près une sphère;  $n'_o$  diffère peu de  $n_o$ . L'expérience montre que  $n'_e$  diffère peu de  $n_e$  et qu'on a :

$$n'_o + n'_e = 2n_o.$$

En définitive, les deux nappes de la surface des vitesses normales des cristaux uniaxes holoèdres se déforment légèrement dans le quartz au voisinage de l'axe. La sphère (qui dans le quartz est

extérieure à l'autre nappe) s'allonge un peu dans le sens de l'axe (trait pointillé de la figure 192); l'autre nappe s'aplatit légèrement.

La figure exagère énormément la différence  $n_e - n_o$ , et la différence beaucoup plus petite  $n'_e - n'_o$ .

**319. Diverses formes de l'elliptique résultant de l'interférence de deux elliptiques issus d'un rectiligne.** — Soit le rectiligne :

$$x = (1 + h^2) \sin \omega t, \quad (1)$$

dirigé suivant l'une des directions principales de propagation. Dans un uniaxe ordinaire, il se propagerait sans déformation. Dans le

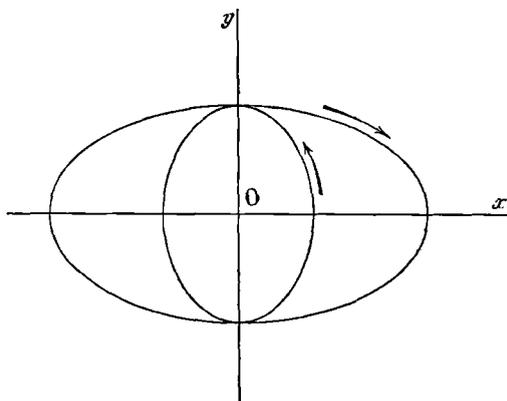


Fig. 193.

quartz, il se décompose en deux elliptiques de sens contraires qui sont propagés sans déformation (fig. 193).

Le mouvement (1) est cinématiquement équivalent aux elliptiques :

$$\begin{array}{ll} \text{droit :} & x_1 = \sin \omega t, \\ & y_1 = h \cos \omega t; \\ \text{gauche :} & x_2 = h^2 \sin \omega t, \\ & y_2 = -h \cos \omega t. \end{array}$$

Admettons que le quartz soit droit. C'est l'ellipse gauche qui prend du retard. Soit  $n_a$  et  $n_g$  les indices,  $e$  l'épaisseur traversée : le retard (en phase) de l'ellipse gauche est :

$$\delta = \frac{2\pi e}{\lambda} (n_g - n_a).$$

Changeant convenablement l'origine du temps, nous avons après la traversée de l'épaisseur  $e$  de quartz :

$$\begin{array}{ll} \text{droit :} & x_1 = \sin \omega t, \\ & y_1 = h \cos \omega t; \\ \text{gauche :} & x_2 = h^2 \sin (\omega t - \delta), \\ & y_2 = -h \cos (\omega t - \delta). \end{array}$$

L'ensemble équivaut à un elliptique :

$$x = x_1 + x_2, \quad y = y_1 + y_2,$$

dont il faut étudier la forme. Posons :

$$x = X \sin(\omega t - \varphi), \quad y = Y \sin(\omega t - \varphi').$$

Identifiant, on trouve aisément :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{h^2 \sin \delta}{1 + h^2 \cos \delta}, \quad \operatorname{tg} \varphi' = \frac{1 - \cos \delta}{\sin \delta}.$$

$$\operatorname{tg}(\varphi' - \varphi) = \frac{1 - h^2}{1 + h^2} \frac{1 - \cos \delta}{\sin \delta} = \frac{1 - h^2}{1 + h^2} \operatorname{tg} \frac{\delta}{2}.$$

$$X^2 = 1 + h^4 + 2h^2 \cos \delta, \quad Y^2 = 2h^2(1 - \cos \delta).$$

$$\frac{Y^2}{X^2} = 2h^2 \frac{1 - \cos \delta}{1 + h^4 + 2h^2 \cos \delta}.$$

En particulier quand  $h = 1$ , les elliptiques sont circulaires. On trouve :

$$\varphi = \varphi', \quad \frac{Y}{X} = \pm \operatorname{tg} \frac{\delta}{2}.$$

La vibration restituée est rectiligne; elle a tourné de l'angle  $\delta : 2$ , à droite si la vibration droite est avancée, généralement dans le sens de la vibration *circulaire* qui se propage le plus rapidement.

**320. Forme et position de l'elliptique résultant.** — Supposons  $h$  différent de l'unité. On a l'elliptique :

$$\begin{aligned} x &= \sin \omega t + h^2 \sin(\omega t - \delta), \\ y &= h \cos \omega t - h \cos(\omega t - \delta). \end{aligned}$$

Développons, résolvons par rapport à  $\sin \omega t$  et  $\cos \omega t$ , élevons au carré et additionnons; il reste l'équation de l'ellipse :

$$\begin{aligned} 2h^2(1 - \cos \delta)x^2 + 2h \sin \delta(1 + h^2)xy + (1 + 2h^2 \cos \delta + h^4)y^2 \\ = h^2(1 - h^2)^2(1 - \cos \delta)^2. \end{aligned}$$

Soit  $\Theta$  l'angle que fait l'un des axes de cette ellipse avec l'axe des  $x$ . On trouve immédiatement :

$$\operatorname{tg} 2\Theta = - \frac{2h(1 + h^2) \sin \delta}{(1 - h^2)^2 + 4h^2 \cos \delta}.$$

Le signe — provient de la disposition ordinaire des axes, de la manière dont on compte positivement les angles (de  $Ox$  vers  $Oy$ ) et de l'hypothèse que le retard  $\delta$  porte sur la vibration gauche. Faisons par exemple  $h = 1$ , il reste :

$$\operatorname{tg} 2\Theta = - \operatorname{tg} \delta, \quad -\Theta = \delta : 2.$$

Or nous savons que si  $\delta > 0$  (c'est-à-dire si la vibration circulaire gauche est retardée), la vibration rectiligne tourne à droite (c'est-à-dire dans un sens où l'angle  $\theta$  est compté négativement).

Égalons à 0 la dérivée de  $\text{tg } 2\Theta$  par rapport à  $\delta$ ; il vient pour les maxima ou les minima :

$$\cos \delta_m = -\frac{4h^2}{(1-h^2)^2}, \quad \text{tg } 2\Theta_m = \pm \frac{2h}{\sqrt{1-6h^2+h^4}}.$$

L'un des axes de l'ellipse coïncide avec la vibration incidente pour les valeurs de  $\delta$  qui annulent  $\sin \delta$ , qui satisfont par conséquent à la condition  $\delta = k\pi$ .

Deux cas à considérer suivant la valeur de  $h$ .

ROTATION CONTINUE DU GRAND AXE DE L'ELLIPSE.

Si  $h$  est assez voisin de l'unité, les quantités  $\delta_m$  et  $\Theta_m$  sont imaginaires. La condition à satisfaire est :

$$1 - 2h - h^2 > 0, \quad 1 - 6h^2 + h^4 < 0, \quad h > 0,41.$$

Le grand axe de l'ellipse tourne d'une manière continue dans le même sens, à droite si l'on suppose que le retard porte sur la vibration gauche. La rotation vaut  $\pi : 2$  pour  $\delta = \pi$ ; elle vaut  $\pi$  pour  $\delta = 2\pi$ ; mais dans les intervalles elle ne reste pas proportionnelle à  $\delta$ . Nous avons ici la généralisation de ce qui se passe pour  $h = 1$ .

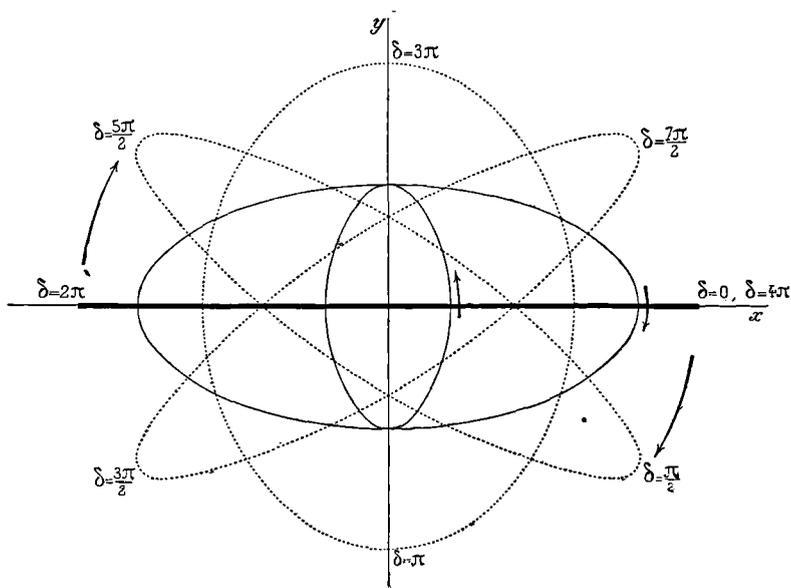


Fig. 194.

La vibration n'est rectiligne que pour  $\delta = 2k\pi$ ; pour tous les autres retards, elle est elliptique et de forme variable d'un retard à l'autre.

La figure 194 montre les variations de forme pour  $h = 0,5$ . Le rapport des axes de l'ellipse résultante est égal à :

$$0 \text{ pour } \delta = 0, \quad (1 - h^2) : 2h \text{ pour } \delta = \pi;$$

il repasse ensuite par les mêmes valeurs pour les valeurs de  $\delta$  comprises entre  $\pi$  et  $2\pi$ .

OSCILLATION DU GRAND AXE DE L'ELLIPSE.

Pour  $h < 0,41$ , les quantités  $\delta_m$  et  $\Theta_m$  sont réelles; le grand axe oscille de part et d'autre de la position qu'il occupe pour  $\delta = 0$  ou  $h\pi$ .

Lorsque  $\delta$  varie entre 0 et la plus petite valeur  $\delta_m$ , le grand axe tourne *dans le sens direct* (à droite si la vibration droite est avancée) jusqu'au maximum  $\alpha_m$ . Il *rétrograde* ensuite pour revenir occuper sa position quand  $\delta = \pi$ ; mais pour ce retard la vibration n'est pas rectiligne.

Les mêmes phénomènes se produisent en sens inverse quand  $\delta$  varie entre  $\pi$  et  $2\pi$ .

Le rapport des axes, nul pour  $\delta = 0$ , est maximum pour  $\delta = \pi$ ; il prend alors la valeur  $(1 - h^2) : 2h$ .

La figure 195 montre les variations de forme pour  $h = 0,3$ .

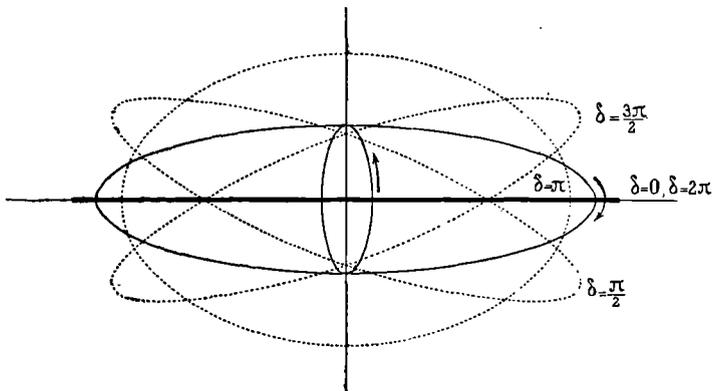


Fig. 195.

CAS INTERMÉDIAIRE.

Quand  $h = 0,41$ , le phénomène est singulier.

On remarquera d'abord que dans le cas précédent,  $\alpha_m$  est toujours inférieur à  $45^\circ$ . Il atteint  $45^\circ$  pour le cas limite.

On remarquera en second lieu que les vitesses de rotation de l'axe, quand  $\delta$  croît d'une manière uniforme, ne sont pas uniformes. En particulier  $\delta_m$  est toujours supérieur à  $\pi : 2$ . La vitesse moyenne *rétrograde* est toujours plus grande que la vitesse moyenne *directe*.

Pour  $h = 0,41$ , on a précisément  $\delta_m = \pi$ .

Voici donc comment les choses se passent (fig. 196).

La vibration couchée sur l'axe des  $x$  pour  $\delta = 0$ , devient elliptique pour  $\delta > 0$ . Elle tourne dans le sens direct jusqu'au retard  $\delta = \pi$ , pour lequel son grand axe OA fait un angle de  $45^\circ$  avec l'axe des  $x$ .

Le rapport des axes de l'ellipse a cru pendant ce temps de 0 à 1 : la vibration est devenue circulaire.

*Brusquement* alors le grand axe tourne de  $90^\circ$  dans le sens rétrograde et vient en  $OA'$  ; ce qui du reste n'implique aucune discontinuité physique, puisque la vibration est circulaire.

Quand  $\delta$  varie de  $\pi$  à  $2\pi$ , le grand axe tourne de  $45^\circ$  dans le sens direct, tandis que le rapport des axes diminue de 1 à 0.

En définitive, c'est la vitesse de rotation rétrograde qui devient infinie.

On peut encore retrouver la rotation continue dans le sens direct ; il suffit de poser qu'instantanément le grand axe  $OA$  vient en  $OB'$ .

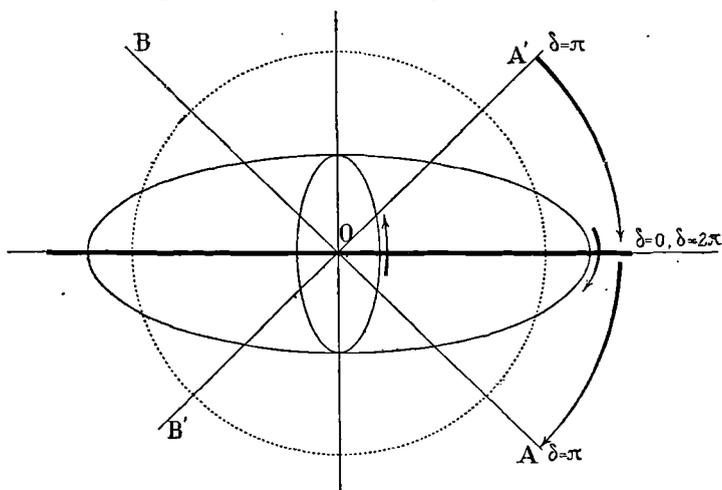


Fig. 196.

Nous ne saurions trop engager le lecteur à construire les vibrations résultantes à partir des composantes elliptiques, en donnant aux mobiles de ces composantes des retards convenables.

**321. Détermination de la différence  $n_o - n_a$  et des valeurs de  $h$  en fonction de  $\theta$ .** — Si le retard est  $2\pi$ , les vibrations elliptiques issues d'un rectiligne restituent évidemment un rectiligne ; d'où un procédé pour déterminer  $n_o - n_a$  (fig. 197).

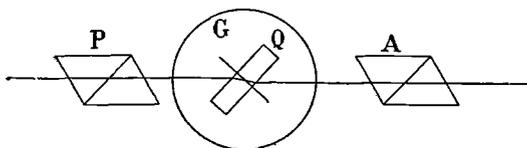


Fig. 197.

Disposons un nicol P, une lame de quartz Q perpendiculaire à l'axe et un second nicol A. La lame peut tourner sur la platine d'un goniomètre G à laquelle elle est normale. La

lumière tombe parallèlement à la platine. Nous mesurons l'angle d'incidence, et par conséquent pouvons calculer l'angle de propagation intérieure.

Plaçons la petite diagonale du nicol P parallèlement ou perpendiculairement à la platine; la vibration sera dirigée suivant l'une ou l'autre des directions principales dans le quartz: nous sommes dans les cas étudiés dans les paragraphes précédents.

PREMIÈRE MÉTHODE.

Cherchons les incidences  $i$  pour lesquelles l'extinction complète est possible. Elles correspondent à des directions intérieures  $\theta$  et à des épaisseurs  $e'$  telles que la différence de marche  $e'(n_g - n_d)$  soit un nombre entier de longueurs d'onde. Nous avons sensiblement:

$$e' \cos \theta = e, \quad \sin i = n_o \sin \theta,$$

puisque nous supposons  $i$  petit. Nous pouvons donc calculer  $n_g - n_d$  en fonction de  $\theta$ .

Voici quelques résultats pour fixer les idées: ils se rapportent à la raie D.

$n_o = 1,54423,$	$n_e = 1,55338,$	$n_e - n_o = 0,00915.$
$\theta = 0$	$n_g - n_d = 0,000069$	
$5^{\circ}57'$		123
$10^{\circ}34'$		280
$16^{\circ}31'$		938
$90^{\circ}$		0,009150.

La différence, extrêmement petite suivant l'axe, devient 130 fois plus grande perpendiculairement à l'axe.

La même expérience fournit les valeurs de  $h$ .

Déterminons les incidences  $i$ , intermédiaires aux précédentes, pour lesquelles  $\delta$  est un nombre impair de fois  $\pi$ . La vibration restituée est elliptique; ses axes sont dirigés suivant les directions principales (parallèlement et perpendiculairement à la section du polariseur); le rapport des axes est donc:

$$2h : (1 - h^2).$$

Un mica quart d'onde convenablement orienté transforme l'elliptique en un rectiligne dont l'angle  $2\psi$  avec l'axe des  $x$  est fourni par

la relation :

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{2h}{1 - h^2}.$$

La mesure de  $2\psi$  fournit la valeur  $h = \operatorname{tg} \psi$ .

SECONDE MÉTHODE.

On peut utiliser un compensateur de Babinet ou de Bravais, et déterminer la forme de l'elliptique pour un retard quelconque. On utilise alors les formules générales du § 319, qui donnent le retard relatif

des composantes rectilignes principales et le rapport de leurs amplitudes. Il suffit de résoudre ces formules par rapport à  $h$  et  $\delta$ , ce qui ne présente aucune difficulté, puisque la seconde est linéaire en  $\cos \delta$ .

**322. Double réfraction circulaire.** — Il est intéressant de prouver directement que le quartz transmet suivant l'axe deux vibrations circulaires qui ne se propagent pas avec la même vitesse. L'expérience est facile si l'on dispose d'une lunette de suffisant pouvoir séparateur et d'un prisme taillé de manière que l'axe ternaire du quartz soit normal au plan bissecteur du dièdre de l'arête.

Un collimateur envoie un faisceau cylindrique de lumière dans la section du prisme *placé au minimum de déviation*; la lunette reçoit le faisceau émergent. On observe dans le plan focal *deux* images de la fente du collimateur. On vérifie avec un analyseur circulaire (tome IV, § 235) qu'elles sont polarisées circulairement en sens inverses.

Les faisceaux émergents font l'angle :

$$\varepsilon = 2 \frac{n'_e - n'_o}{n_o} \operatorname{tg} i;$$

$i$  est donné par la condition que l'angle de réfraction correspondant soit la moitié de l'angle du prisme.

Soit :

$$A = 60^\circ, \quad r = 30^\circ, \quad \sin i = n_o \sin 30^\circ = 0,5 n_o;$$

$$i = 50^\circ 33', \quad \operatorname{tg} i = 1,215; \quad \varepsilon = 2,43 \frac{n'_o - n'_e}{n_o}.$$

On trouve aisément (§ 321) :  $\varepsilon = 1 : 9200$ .

Si la distance focale principale de la lunette est d'un mètre, les deux images sont distantes de 100  $\mu$  environ.

On peut compléter l'expérience.

On superpose en les collant deux prismes de quartz. L'axe ternaire de l'un est dirigé comme il est dit plus haut; l'axe ternaire de l'autre est dirigé suivant l'arête. On leur donne exactement le même angle et on les utilise au minimum de déviation.

On obtient dans la lunette quatre images qui correspondent aux indices  $n_o$ ,  $n_e$ ,  $n'_o$ ,  $n'_e$ . L'image  $n_o$  est très éloignée des trois autres. L'expérience prouve que *l'image  $n_o$  rectilignement polarisée est équidistante des deux autres qui sont circulairement polarisées en sens inverses*. On a donc :

$$n'_o + n'_e = 2n_o.$$

Étude détaillée des phénomènes suivant l'axe.

323. **Rotation d'une vibration rectiligne proportionnellement à l'épaisseur de la lame.** — Reprenons avec quelque détail l'étude de la propagation suivant l'axe.

Considérons un circulaire gauche permanent se propageant parallèlement à l'axe. Les mobiles hypothétiques M se déplacent, dans le même sens et avec la même vitesse angulaire, suivant des cercles parallèles, de même rayon, normaux à l'axe. La figure 198 en représente cinq équidistants; la lumière se propage de haut en bas.

Le mobile M<sub>2</sub> est en retard sur le mobile M<sub>1</sub>; c'est en cela que consiste la propagation. Dire que la vitesse de propagation est uniforme, c'est dire que l'angle γ est proportionnel à la distance  $\overline{AB} = x$ , qui sépare les cercles considérés. D'après les définitions de la longueur d'onde et de l'indice, on peut poser :

$$\gamma = 2\pi \frac{x}{\lambda_g}, \quad \gamma = \frac{2\pi x}{\lambda} n_g;$$

λ est la longueur d'onde dans le vide de la radiation considérée.

Le lieu des points M est une hélice de pas  $\lambda_g = \lambda : n_g$ . Pour l'observateur placé en bas et regardant venir la lumière, l'hélice s'enroule *dextrorsum*; l'angle γ est compté positivement dans le sens *dextrorsum*.

Quand le temps fuit, chaque mobile décrit son cercle : l'hélice tourne en bloc avec une vitesse angulaire constante  $\omega = 2\pi : T$ .

Un raisonnement analogue apprend que le lieu des mobiles qui correspondent à une vibration circulaire droite, est une hélice de pas  $\lambda_d = \lambda : n_d$  qui s'enroule *sinistrorsum*. L'angle δ a pour expression :

$$\delta = \frac{2\pi x}{\lambda} n_d.$$

Envoyons sur une lame, taillée normalement à l'axe dans un quartz *droit*, un rayon vibrant rectilignement suivant AM<sub>1</sub>. Il se décompose en deux circulaires égaux, de sens contraires, qui se propagent dans le quartz avec des indices n<sub>d</sub> et n<sub>g</sub>. Le quartz étant droit, n<sub>d</sub> < n<sub>g</sub> : le circulaire droit se propage plus vite que le gauche.

Mais pour un mouvement permanent, il n'y a pas à proprement parler propagation. Si l'éther était visible, nous verrions seulement

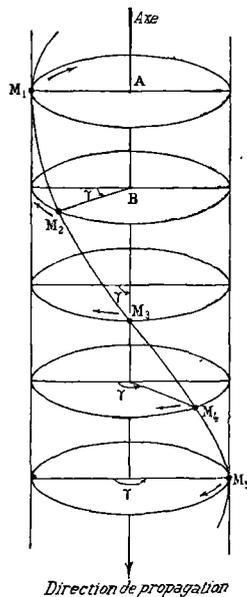


Fig. 198.

les mobiles qui correspondent à la vibration résultante des vibrations circulaires inverses, résultante que nous savons rectiligne (tome IV, §§ 236 et sq.). Or, sous l'influence de chacune des circulaires, les lieux des mobiles sont deux hélices de pas :  $\lambda : n_d$ , pour l'hélice droite;  $\lambda : n_g$ , pour l'hélice gauche. Dans l'hypothèse du quartz droit ( $n_d < n_g$ ), l'hélice gauche a un pas plus grand que l'hélice droite.

Le mobile correspondant à la vibration rectiligne résultante est le mobile résultant des mobiles situés sur ces hélices dans un plan normal à l'axe.

A la distance  $x$  du point A, le mobile gauche fait avec  $AM_1$  un angle compté vers la gauche et égal à :

$$\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} n_g;$$

le mobile droit fait avec  $AM_1$  un angle compté vers la droite et égal à :

$$\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} n_d.$$

Soit  $e$  l'épaisseur de la lame. La vibration résultante est dirigée suivant la bissectrice de ces angles; elle fait avec  $AM_1$  l'angle  $\alpha$  compté vers la droite :

$$\alpha = \frac{1}{2} \left[ \left( \omega t - \frac{2\pi e}{\lambda} n_d \right) - \left( \omega t - \frac{2\pi e}{\lambda} n_g \right) \right] = \frac{\pi e}{\lambda} (n_g - n_d).$$

La rotation est donc (pour le quartz droit et pour l'observateur qui reçoit la lumière) droite, proportionnelle à l'épaisseur  $e$  et à la différence des indices  $n_g - n_d$ .

### 324. **Lame perpendiculaire à l'axe placée entre deux nicols.**

— Soit OA la direction de la vibration que laisse passer le premier nicol; le quartz la fait tourner d'un angle  $\alpha$ ; elle est reçue sur un second nicol qui laisse seulement passer la composante dirigée suivant OC. L'amplitude transmise est proportionnelle à  $\cos(\alpha - s)$ ; l'intensité transmise est proportionnelle à

$$\cos^2(\alpha - s).$$

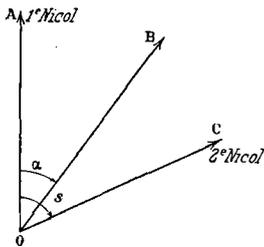


Fig. 199.

Si les nicols sont d'abord croisés, l'interposition du quartz restitue la lumière; pour obtenir à nouveau l'extinction, il faut tourner le second nicol d'un angle  $\alpha$  dans le sens même de la rotation : c'est la méthode la plus simple pour déterminer le pouvoir rotatoire, ou, connaissant l'épaisseur  $e$  de la lame et la longueur d'onde  $\lambda$  dans le vide de la radiation considérée, pour déterminer la différence  $n_g - n_d$ .

L'expérience effectuée avec les diverses radiations montre que l'on a sensiblement :  $\alpha = \frac{a\pi e}{\lambda^2}$ ,

où  $a$  est une constante. Il en résulte :  $n_o - n_e = \frac{a}{\lambda}$ .

La loi de dispersion est donc toute différente que pour la double réfraction ordinaire. Nous savons que dans ce cas, comme première approximation, la différence des indices correspondant à une même direction de propagation est à peu près indépendante de la longueur d'onde (tome V, § 127).

Nous poserons  $\alpha = \rho e$  ;

$\rho$  est la rotation qui correspond à l'unité d'épaisseur.

PHÉNOMÈNES AVEC LA LUMIÈRE BLANCHE.

Si la lumière utilisée est blanche, il passe à travers le système nicol-lame-nicol une teinte représentée *symboliquement* par l'expression (tome IV, § 248) :

$$\sum \Lambda_1 \cos^2 (s - \alpha) = \sum \Lambda_1 \cos^2 \left( s - \frac{a\pi e}{\lambda^2} \right).$$

Pour une lame donnée, on obtient une série de teintes différentes en modifiant l'angle  $s$  des nicols : on passe à la complémentaire en augmentant  $s$  de  $\pm \pi : 2$ .

On ne modifie pas la teinte en faisant tourner la lame autour d'une droite quelconque parallèle à l'axe, qui est ici la direction de propagation.

On obtient d'autres séries de teintes avec des lames d'épaisseurs différentes, ou en faisant varier d'une manière continue l'épaisseur d'une lame par un procédé que nous étudierons plus loin (§ 327).

Les échelles de teintes n'ont aucune analogie avec les échelles de Newton (tome IV, § 248).

**325. Teinte sensible.** — La rotation  $\alpha$  étant à peu près en raison inverse de  $\lambda^2$ , le violet visible extrême ( $\lambda = 0^{\mu}, 40$ ) est dévié environ 3,24 fois plus que le rouge visible extrême ( $\lambda = 0^{\mu}, 72$ ).

Les vibrations rectilignes émergentes provenant d'une lumière blanche incidente rectiligne, forment un éventail où le violet est le plus dévié. Si l'épaisseur est 3<sup>mm</sup>,75 environ, le jaune moyen ( $\lambda = 0^{\mu}, 55$ ) est dévié de 90°.

Supposons le quartz *droit* et l'épaisseur de cet ordre.

Si l'analyseur est d'abord perpendiculaire au polariseur et si nous le tournons vers la droite, nous éteindrions d'abord la couleur la moins déviée, le rouge : la teinte tire sur le violet.

Continuons la rotation : nous éteignons le jaune moyen, c'est-à-dire la partie la plus lumineuse du spectre. Il reste un mélange de rouge et de violet : c'est le *pourpre teinte sensible*.

Augmentons la rotation : le rouge prédomine.

Cette expérience détermine le sens de la rotation de la lame : faisons tourner l'analyseur à droite ; nous traversons la teinte sensible, en passant du violet au rouge si le quartz est droit.

Tant que la lame n'est pas trop épaisse, les teintes sensibles sont à peu près de compositions identiques. En effet, la teinte a pour expression symbolique :

$$\sum \Lambda_1 \cos^2 (s - \alpha_1). \quad (1)$$

Écrivons que le jaune moyen est éteint :

$$\cos (s - \alpha_j) = 0, \quad s = \alpha_j + \pi : 2,$$

équation qui détermine  $s$ . La composition (1) devient :

$$\sum \Lambda_1 \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} + \alpha_j - \alpha_1 \right) = \sum \Lambda_1 \sin^2 (\alpha_j - \alpha_1).$$

Si l'éventail des couleurs visibles n'est pas trop étendu, nous pouvons écrire :

$$\sum \Lambda_1 \sin^2 (\alpha_j - \alpha_1) = \sum \Lambda_1 \sin^2 e (\rho_j - \rho_1) = e^2 \sum \Lambda_1 (\rho_j - \rho_1)^2.$$

La teinte est donc indépendante de  $e$  qui entre seulement comme facteur d'intensité.

**326. Biquartz.** — Le biquartz se compose de deux lames parallèles, normales à l'axe, d'égales épaisseurs et de gyrations contraires, accolées par une face parallèle à l'axe du cristal. Quel que soit l'azimut du biquartz, ses deux lames font tourner les vibrations

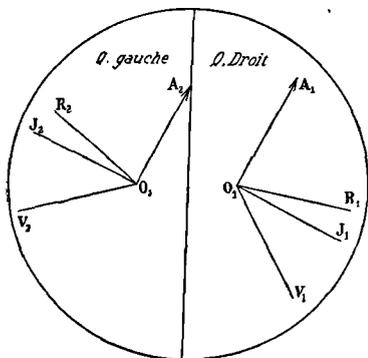


Fig. 200.

d'angles égaux et de sens contraires. Pour que, reçue dans un nicol, la lumière soit pour les deux lames de même intensité, si elle est monochromatique, de même teinte, si elle est complexe, il faut que la section du nicol soit parallèle ou perpendiculaire à l'azimut de la vibration avant la traversée du biquartz.

La combinaison biquartz-analyseur permet donc de reconnaître, par l'égalité de deux teintes, l'azimut (pratiquement le changement d'azimut) d'une vibration. Si l'appareil est d'abord réglé pour l'identité des

teintes, toute rotation de la vibration initiale détruit cette identité.

On donne habituellement aux lames du biquartz l'épaisseur ( $3^{\text{mm}}, 75$ ) qui fait tourner le jaune moyen de  $90^\circ$ . Si la section de l'analyseur est parallèle à la vibration initiale, les deux lames présentent la



lution à étudier, d'un compensateur Soleil, d'un biquartz, d'un nicol analyseur. Éclairons avec de la lumière blanche.

Enlevons le tube, mettons le compensateur au zéro et disposons l'analyseur de manière que les deux moitiés du biquartz aient la

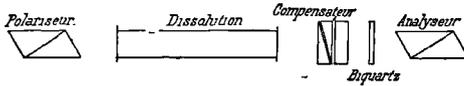


Fig. 202.

même teinte. Plaçons la dissolution active. Elle fait tourner les plans de polarisation des diverses radiations : les teintes du biquartz ne restent pas identiques. Agissons sur

le compensateur jusqu'à ce qu'elles le redeviennent : nous avons alors compensé la rotation due à la dissolution par celle d'une épaisseur convenable de quartz (que la graduation donne en centièmes de millimètre).

La compensation ne peut être rigoureuse que si la dispersion rotatoire du milieu étudié est identique à celle du quartz. C'est parce qu'il en est ainsi pour les dissolutions sucrées que le dispositif de Soleil est utilisable.

**329. Saccharimètre à pénombre.** — Cet appareil est basé sur l'emploi d'une lame *demi-onde*, c'est-à-dire (tome IV, § 234) d'une lame qui établit une différence de marche d'une demi-longueur d'onde entre les composantes principales de la vibration qu'elle propage normalement à sa surface.

Soit XX (fig. 203) une des sections principales de la lame. Décomposons la vibration incidente en

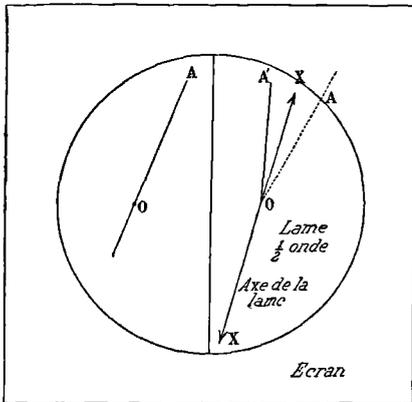


Fig. 203.

deux composantes, l'une parallèle, l'autre normale à XX. Dire que l'une des composantes prend sur l'autre une avance (ou un retard, peu importe) de  $\pi$ , revient à retourner cette composante bout pour bout. La lame transforme donc la vibration d'azimut OA en une vibration d'azimut OA' symétrique de OA par rapport à l'une ou l'autre des sections principales.

Plaçons entre deux nicols un écran percé d'une ouverture circulaire. La moitié droite est couverte d'une lame demi-onde, la

moitié gauche est libre. Éclairons avec de la lumière monochromatique (généralement le jaune du sodium).

Pour que les deux moitiés du champ paraissent également éclairées, il faut que les projections des vibrations OA, OA', sur la sec-

tion principale du nicol analyseur, soient égales. Il faut donc qu'elle soit perpendiculaire ou parallèle à la bissectrice de ces directions. Cela revient à dire qu'elle doit être parallèle à l'une des sections principales de la demi-onde.

Quand l'angle  $AOA'$  est petit, il y a égale intensité et simultanément *presque extinction, pénombre*, quand la section principale de l'analyseur est perpendiculaire à la bissectrice aiguë des vibrations. A partir de cette position, une très petite rotation de l'analyseur se traduit par une différence notable d'intensité entre les moitiés du champ. C'est donc avec précision qu'on amène la section principale de l'analyseur dans l'azimut qui vient d'être défini.

Ceci posé, voici la description du saccharimètre à pénombre (fig. 204).

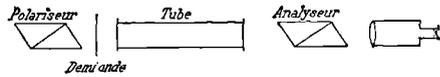


Fig. 204.

La lumière d'un bec Bunsen chargé de sel marin traverse un polariseur et l'écran dont le trou est à moitié couvert par la lame demi-onde. Après l'écran, il existe donc dans les deux moitiés du champ de la lumière rectilignement polarisée, dont les vibrations parallèles à  $OA$  et à  $OA'$  font entre elles un angle de quelques degrés. La lumière traverse ensuite le tube contenant la dissolution (ou généralement le milieu actif quelconque taillé en lame planparallèle), et enfin le nicol analyseur. On vise sur le trou de l'écran avec une petite lunette de Galilée.

Supposons le tube enlevé : par une rotation convenable de l'analyseur, nous ramenons à l'égalité les deux moitiés du champ. Installons le tube : *il fait tourner également les deux vibrations*  $OA$  et  $OA'$  ; par suite, il fait tourner du même angle leur bissectrice aiguë. Pour ramener les deux moitiés du champ au même éclaircissement, il faut rendre la section principale de l'analyseur normale à la nouvelle bissectrice aiguë des vibrations, et par conséquent *faire tourner l'analyseur d'un angle égal à la rotation due à la dissolution*.

Il est avantageux que l'angle  $AOA'$  soit petit. Mais si le milieu dont on étudie la rotation est coloré et absorbant, un angle  $AOA'$  trop petit a l'inconvénient de donner une pénombre trop sombre. Aussi les appareils portent-ils un dispositif qui, tout en laissant invariable l'azimut de la bilame, permet de modifier l'azimut du polariseur et par conséquent l'angle  $AOA'$ . Comme la bissectrice aiguë des vibrations ne change pas, l'égalité des plages, obtenue pour un azimut du polariseur, doit se maintenir pour tous les azimuts.

Il faut observer que la demi-onde de mica ne satisfait à sa définition que pour une radiation déterminée. On la choisit pour le jaune du sodium ; par conséquent l'appareil ne peut mesurer la rotation que pour cette radiation, ce qui n'a aucun inconvénient pratique.

Le dispositif de Jellett peut servir pour une radiation quelconque.

Le système des deux vibrations OA, OA' est obtenu par une sorte de double nicol formé de deux moitiés de nicol sciées et accolées, dont les sections principales font un petit angle. L'inconvénient de l'appareil est (outre une construction plus difficile) de ne pouvoir faire varier cet angle.

Généralement la lumière du bec Bunsen est purifiée par la traversée d'une cuve contenant une dissolution saturée de bichromate de potassium.

330. **Spectres cannelés.** — Si l'épaisseur du canon de quartz est assez grande, l'expérience du § 324 fournit du blanc d'ordre supé-

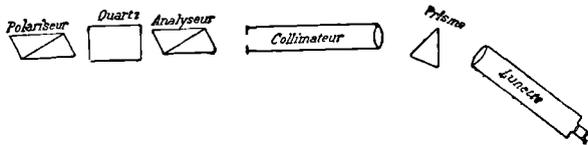


Fig. 205.

rieur. Analysons-le à l'aide d'un spectroscopie : le spectre est cannelé (fig. 205).

L'intensité est nulle pour les  $\lambda$  qui satisfont à la relation :

$$\cos(s - \rho e) = 0, \quad s = \rho e + (2k + 1)\pi : 2;$$

c'est-à-dire sensiblement à la condition :

$$s = \frac{a\pi e}{\lambda^2} + (2k + 1)\frac{\pi}{2}.$$

Soient  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  les radiations qui correspondent à deux minimums consécutifs ; on a :

$$s = \frac{a\pi e}{\lambda_1^2} + (2k + 1)\frac{\pi}{2}, \quad s = \frac{a\pi e}{\lambda_2^2} + (2k + 3)\frac{\pi}{2}; \quad \Delta\lambda = \frac{\lambda^3}{2ae}.$$

Dans le spectre normal, les franges sont donc beaucoup plus serrées dans le violet que dans le rouge ; il en est de même dans les spectres prismatiques, malgré le tassement qu'y présentent toujours les rouges par rapport aux violets (comparer tome V, § 128).

Les franges sont d'autant plus serrées que  $e$  est plus grand, ce qui était évident *a priori*.

Chaque frange a son numéro d'ordre ; c'est la valeur de  $k$  correspondante. Lorsqu'on tourne le nicol analyseur, les franges se déplacent dans le spectre de manière à conserver leur numéro d'ordre. On a donc :

$$\Delta s = - \frac{2a\pi e}{\lambda^3} \Delta\lambda.$$

Admettons que les  $\Delta s$  soient positifs quand on tourne l'analyseur à droite ; il faudra alors prendre  $a$  positif pour le quartz droit (fig. 199).

Donc les franges se déplacent vers les  $\lambda$  décroissants, c'est-à-dire vers le violet. D'où un procédé pour reconnaître si le quartz est droit ou gauche : *on tourne le nicol analyseur à droite; si les franges vont vers le violet, le quartz est droit.*

Nous supposons dans notre discussion une certaine formule de dispersion; réciproquement, la position des franges dans le spectre cannelé permet de vérifier cette formule et d'en trouver une autre

plus approchée : 
$$n_g - n_d = \frac{a}{\lambda} + \frac{b}{\lambda^3}.$$

Les constantes  $a$  et  $b$  se déterminent comme nous l'avons vu dans le cas de la double réfraction ordinaire (tome V, § 130).

Voici quelques nombres pour fixer les idées; les angles sont donnés en degrés et centièmes de degré.

Raies :

B	$\lambda = 0^{\mu},687$	$\rho =$ (par mm.)	$15^{\circ},30$	$\frac{n_g - n_d}{n_0} = 0,000\cdot0379,$
C	589		$21^{\circ},67$	459,
F	486		$32^{\circ},50$	564.

**331. Additions des rotations.** — Si on place à la suite les uns des autres des canons de quartz taillés perpendiculairement à l'axe, tous droits ou tous gauches, les rotations s'ajoutent. L'intervalle d'air qui sépare les blocs successifs n'intervient pas dans le phénomène. Si les canons sont les uns droits, les autres gauches, il faut additionner séparément les rotations de même signe et faire la différence des deux sommes.

On peut cependant s'arranger de manière que les rotations s'ajoutent encore, en plaçant entre deux blocs, l'un droit, l'autre gauche, et dans un azimut convenable, une lame demi-onde pour la radiation considérée.

En effet deux blocs égaux, l'un droit, l'autre gauche, donnent deux éventails étalés en sens contraires *symétriquement par rapport à la vibration primitive*. D'autre part, l'on sait qu'une demi-onde transforme une vibration rectiligne en une autre vibration rectiligne *symétrique de la première par rapport à l'une ou l'autre de ses sections principales*. Donc nous obtiendrons le même résultat, soit avec un quartz droit, soit avec un gauche suivi d'une lame demi-onde dont une des sections est parallèle à la vibration primitive.

On réalise une très curieuse expérience avec deux canons de même longueur et de rotations contraires. On les place entre deux nicols et on analyse la lumière émergente : le spectre ne contient pas de franges; tout se passe comme si les canons n'existaient pas.

On introduit entre eux une lame demi-onde; brusquement les franges apparaissent. Elles sont nombreuses, si les canons ont cha-

cun plusieurs *centimètres* d'épaisseur. Comme la lame demi-onde ne l'est pas absolument pour toutes les radiations, la loi de distribution des franges n'est pas tout à fait celle qui correspondrait à un canon d'épaisseur double; d'autre part, la lumière n'est pas partout rectiligne, les minimums ne sont pas nuls.

**332. Influence d'une réflexion.** — Lorsqu'on fait revenir sur lui-même, par une réflexion normale, un rayon qui a traversé un canon de quartz parallèlement à l'axe, les rotations s'annulent. Dans les deux traversées, la rotation est en effet de même sens *par rapport à l'observateur qui reçoit la lumière*. Mais *comme l'observateur doit se retourner* pour recevoir le rayon réfléchi, les rotations sont de sens contraires; elles s'annulent donc.

Nous pouvons *doubler* la rotation en interposant entre le quartz et le miroir un mica quart d'onde dont l'une des sections principales est parallèle au plan primitif de vibration. Comme il est traversé deux fois, avant et après la réflexion normale sur le miroir M, il joue le rôle de la demi-onde de l'expérience du paragraphe précédent.

La vibration 1 donne pour l'observateur O la vibration 2, après

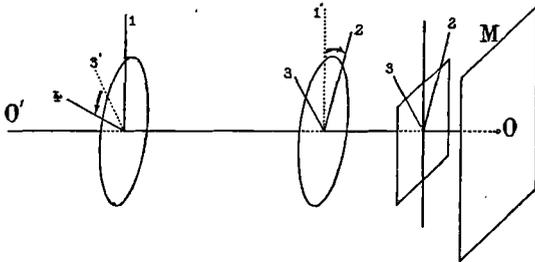


Fig. 206.

une rotation que nous supposons *dextrogyre*. Après les deux passages dans le quart d'onde séparés par la réflexion sur le miroir M, la vibration est venue en 3, symétrique de 2 par rapport à l'une ou l'autre des sections du quart d'onde.

Pour l'observateur O', elle tourne ensuite de 3 en 4 dans le sens dextrogyre. La rotation définitive est doublée.

Le procédé a de l'intérêt pour étudier, non pas la rotation d'une radiation, mais la dispersion, c'est-à-dire la loi de rotation en fonction de la longueur d'onde. A l'aide d'une glace sans tain recevant en O' et à 45° les rayons réfléchis par M, on réalise un spectre cannelé.

Nous conseillons au lecteur de faire la théorie de l'appareil en envisageant isolément les vibrations circulaires.

**333. Production de franges d'interférences avec les trous de Young recouverts d'un quartz perpendiculaire à l'axe.** — Le problème que nous allons traiter est le pendant de celui des §§ 134 et sq. du tome V. Au lieu de la biréfringence ordinaire, nous utiliserons la double réfraction circulaire.

Considérons d'abord le cas où les faisceaux interférents sont séparables (fig. 207).

Plaçons un canon de quartz perpendiculaire à l'axe (droit pour fixer les idées) sur les fentes d'Young ou sur les images réelles des bilentilles. Mettons en avant de la fente un nicol polariseur et regardons dans le plan du tableau à travers un second nicol; nous voyons *trois systèmes de franges*. L'expérience réalisée est l'analogue de l'expérience du § 136 du tome V (sections parallèles).

Le système central est visible sans nicol.

1° On peut le considérer comme le résultat de la superposition de deux systèmes de franges identiques, résultant l'un de l'interférence des circulaires droits  $D_1, D_2$ , provenant respectivement des deux faisceaux  $T_1$  et  $T_2$ , l'autre de l'interférence des circulaires gauches  $G_1$

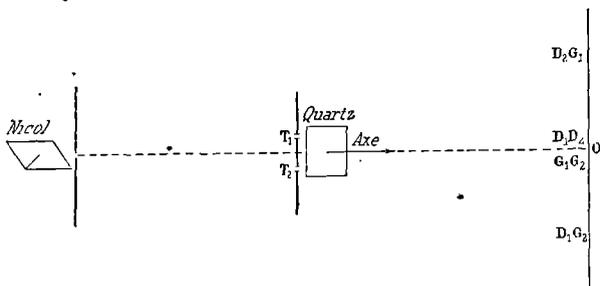


Fig. 207.

et  $G_2$ . Nous savons (IV, § 238) que l'interférence des circulaires de même sens donne des franges visibles à l'œil nu.

2° On peut encore considérer le système central comme résultant de l'interférence de deux faisceaux *polarisés rectilignement*, auxquels le quartz communique des rotations égales. Cette rotation ne change pas la position des franges, pas plus que ne ferait la rotation du nicol polariseur.

Les systèmes latéraux ne sont visibles qu'avec un nicol.

Le quartz étant droit par hypothèse, le circulaire droit y prend une avance relative. L'interférence du dextrogyre  $D_2$  émis par  $T_2$  et du lévogyre  $G_1$  émis par  $T_1$  donne un système déplacé de manière que la différence de marche *géométrique* soit compensée par la différence des chemins *optiques* dans la traversée du canon. De même pour l'autre système latéral provenant de l'interférence du circulaire droit  $D_1$  et du circulaire gauche  $G_2$ .

Grâce à la diminution des différences de marche, les franges sont visibles en lumière blanche; mais comme ce sont des circulaires de sens inverses qui interfèrent (IV, § 238), ils ne sont visibles que pour l'œil armé d'un nicol.

On peut réaliser une expérience tout à fait analogue à l'expérience du § 136 du tome V (sections croisées). Il faut recouvrir les fentes avec deux canons de même épaisseur, *mais de rotations inverses*. Ce sont maintenant les franges latérales *provenant de circulaires de même sens* qui sont visibles sans nicol; le système central n'est visible qu'avec un nicol.

Bien entendu, avec de la lumière homogène, les trois systèmes de franges n'en font plus qu'un seul.

**334. Position de la frange achromatique.** — Cherchons la position de la frange achromatique (IV, § 270) définie par la condition que le numéro d'ordre  $m$  soit le même pour toutes les couleurs voisines de la plus brillante  $\lambda_0 = 5500$  U.A.

Soit  $x$  la distance de la frange considérée au centre du système central. Le retard optique est proportionnel à l'épaisseur  $e$  du canon et sensiblement en raison inverse du carré de la longueur d'onde (§ 324); le numéro d'ordre de la frange est :

$$m = \frac{kx}{\lambda} - \frac{k'e}{\lambda^2}.$$

La condition d'achromatisme est :

$$\frac{\partial m}{\partial \lambda} = -\frac{kx}{\lambda^2} + \frac{2k'e}{\lambda^3} = 0, \quad x = \frac{2k'e}{k\lambda}.$$

L'expérience vérifie cette relation.

GÉNÉRALITÉ DU PHÉNOMÈNE.

Il n'est pas nécessaire que les faisceaux interférents soient séparés. L'expérience réussit tout aussi bien avec les miroirs de Fresnel ou le biprisme. Ce que nous avons dit au § 138 du tome V s'applique sans y rien changer. Avec l'appareil de Newton on obtient une *couronne d'anneaux* d'autant plus éloignée du centre que le canon est plus épais.

La double réfraction circulaire étant beaucoup moins énergique que la double réfraction ordinaire, on emploiera des lames beaucoup plus épaisses pour avoir le même écart. On utilisera, par exemple, un canon de quartz de 5 centimètres d'épaisseur.

### Phénomènes dans les directions inclinées sur l'axe : lumière convergente.

**335. Position de la question.** — Le problème que nous allons, sinon résoudre, du moins poser, est analogue à celui des §§ 124, 143 et sq. du tome V. La lumière est analysée ou polarisée rectilignement ou circulairement. On interpose normalement aux rayons entre le polariseur et l'analyseur une lame planparallèle qui propage suivant sa normale deux vibrations ellip-

tiques caractérisées par le paramètre  $h$ . Elle établit entre ces vibrations une différence de phase  $\delta$ . On demande quelle est l'intensité de la lumière qui passe.

Pour simplifier l'écriture, nous appellerons  $1 + h^2$  l'amplitude de la vibration incidente.

**336. Lumière polarisée et analysée rectilignement.** — Conformément aux notations du § 148 du tome V, nous appelons :

$s$  l'angle du polariseur avec l'une des sections principales de la lame planparallèle,

$\varphi$  l'angle de l'analyseur avec la même section,

$\psi = \varphi - s$ , l'angle de l'analyseur et du polariseur.

Une vibration rectiligne tombant sur la lame est décomposée en deux vibrations :

l'une suivant  $Ox$  d'amplitude  $(1 + h^2) \cos s$ ,

l'autre suivant  $Oy$   $(1 + h^2) \sin s$ .

Elles équivalent évidemment aux quatre elliptiques :

	$x_1 = \cos s \sin \omega t,$		$x_2 = h^2 \cos s \sin \omega t,$
droit		gauche	
	$y_1 = h \cos s \cos \omega t;$		$y_2 = -h \cos s \cos \omega t;$
	$x'_1 = -h \sin s \cos \omega t,$		$x'_2 = h \sin s \cos \omega t,$
droit		gauche	
	$y'_1 = h^2 \sin s \sin \omega t;$		$y'_2 = \sin s \sin \omega t.$

Conformément à la théorie, les amplitudes des composantes suivant l'axe des  $y$  des elliptiques droits sont  $h$  fois les amplitudes des composantes suivant l'axe des  $x$ , tandis que c'est l'inverse pour les elliptiques gauches.

Après la traversée de la lame, les elliptiques gauches ont pris le retard  $\delta$  relatif (nous supposons avoir toujours affaire à un quartz droit). Les vibrations deviennent :

	$x_1 = \cos s \sin \omega t,$		$x_2 = h^2 \cos s \sin(\omega t - \delta),$
droit		gauche	
	$y_1 = h \cos s \cos \omega t;$		$y_2 = -h \cos s \cos(\omega t - \delta);$
	$x'_1 = -h \sin s \cos \omega t,$		$x'_2 = h \sin s \cos(\omega t - \delta),$
droit		gauche	
	$y'_1 = h^2 \sin s \sin \omega t;$		$y'_2 = \sin s \sin(\omega t - \delta).$

Posons :

$$x = x_1 + x_2 + x'_1 + x'_2, \quad y = y_1 + y_2 + y'_1 + y'_2.$$

Cherchons la vibration qui passe à travers l'analyseur; elle est :

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi.$$

Trouver l'intensité de cette vibration n'est plus qu'une question de calcul; c'est extrêmement long, mais sans difficulté.

On arrive à l'expression :

$$I^2 = (1 + h^2)^2 \cos^2 \psi - 4h^2 \cos 2\psi \sin^2 \frac{\delta}{2} - h(1 + h^2) \sin 2\psi \sin \delta \\ - (1 - h^2)^2 \sin 2s \sin 2(\psi + s) \sin^2 \frac{\delta}{2}.$$

Cette formule redonne bien celle du § 148 du tome V dans le cas d'une double réfraction ordinaire pour laquelle on a :  $h = 0$ .

Pour  $h = 1$ , nous savons que le phénomène se réduit à une rotation d'un angle égal à  $\delta : 2$ .

La formule donne, après des transformations simples :

$$4 \cos^2 \left( \psi - \frac{\delta}{2} \right);$$

résultat conforme aux prévisions, puisque la vibration émergente fait avec l'analyseur un angle égal à  $\psi$  diminué de la rotation. Le facteur 4 provient de ce que l'amplitude de la vibration incidente est prise égale à  $1 + h^2$ , ici 2.

**337. Phénomènes en lumière convergente.** — Observons à l'aide du microscope polarisant une lame planparallèle de quartz taillée normalement à l'axe.

Il est d'abord évident que pour les obliquités assez grandes,  $h$  étant très petit, les phénomènes ne différeront pas de ceux que présente une lame de spath taillée normalement à l'axe. Nous aurons des anneaux circulaires coupés de croix noires, blanches ou grises suivant les cas (tome V, § 153).

Comme second cas limite fourni par une lame extrêmement épaisse, supposons  $h = 1$ , pour toutes les obliquités utilisées. Le phénomène consiste en une rotation variable avec l'obliquité.

La vibration est partout rectiligne et son azimut est le même en tous les points de cercles concentriques. Donc, en lumière monochromatique, on éteint simultanément tous les points des cercles pour lesquels la vibration est normale à la section de l'analyseur. En lumière blanche, les courbes isochromatiques sont des cercles. Il n'y a plus de croix.

En tournant l'analyseur, on modifie la position des cercles où l'intensité est nulle.

En définitive, on voit en lumière monochromatique des cercles alternativement brillants et obscurs. Suivant son sens, la rotation de l'analyseur ou du polariseur dilate ces cercles et en même temps fait éclore d'autres cercles hors du centre; ou bien la rotation contracte ces cercles qui vont disparaître au centre du phénomène.

A cela près que les lieux des minimums ne sont pas circulaires ( $h$  n'est plus égal à 1 dès qu'on s'écarte de l'axe), l'expérience donne un phénomène analogue à celui que nous venons de décrire. Quand

on tourne le polariseur ou l'analyseur, on voit les apparences sortir du centre ou y rentrer. Si même la lame est très épaisse, le centre du phénomène est strictement conforme à notre description.

Il est facile de vérifier la règle suivante due à Delezenne : *Si la rotation du polariseur est dextrorsum, l'éclosion centrale des anneaux caractérise les quartz droits, l'absorption centrale caractérise les quartz gauches.* La rotation à droite du polariseur équivaut à la rotation à gauche de l'analyseur, puisque la lame de quartz jouit de propriétés de révolution autour de sa normale et qu'une rotation d'ensemble de l'appareil ne change rien aux apparences.

**338. Nicols parallèles ou croisés.** — Ces préliminaires posés, revenons au cas général où  $h$  est différent de 0 et de 1.

Les phénomènes se simplifient quand les nicols sont parallèles ou croisés.

NICOLS PARALLÈLES,  $\psi = 0$ .

$$I^2 = (1 + h^2)^2 - [4h^2 + (1 - h^2) \sin^2 2s] \sin^2 \frac{\delta}{2}.$$

NICOLS CROISÉS,  $\psi = \pi : 2$ .

$$I^2 = [4h^2 + (1 - h^2) \sin^2 2s] \sin^2 \frac{\delta}{2}.$$

Les phénomènes sont complémentaires (fig. 208).

Les courbes isochromatiques et les courbes pour lesquelles l'intensité est nulle ou maxima en lumière monochromatique sont rigoureusement des cercles.

Si  $h$  est très voisin de 1, le coefficient du terme en  $s$  s'annule : comme nous l'avons prévu, la croix disparaît. Si  $h$  n'est pas très voisin de 1, elle est visible, blanche dans le premier cas, noire dans le second.

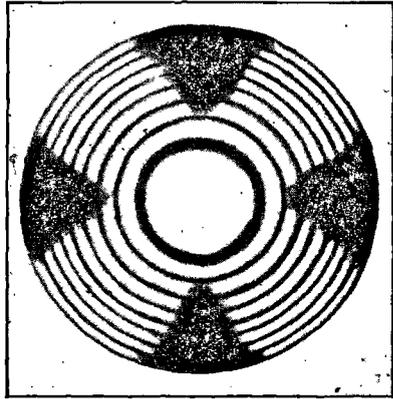


Fig. 208.

**339. Cas général; définition analytique des franges.** — Dans le cas général, le terme coloré  $\sum \Lambda \sin \delta$ , de la formule générale du § 336, ne disparaît pas. Nous avons donc deux termes colorés correspondant à deux teintes différentes; l'un  $\sum \Lambda \sin \delta$ , dont le coefficient est constant tout le long d'un cercle de même inclinaison (puisque  $h$  et  $\psi$  sont constants); l'autre  $\sum \Lambda \sin^2 (\delta : 2)$ , dont le coefficient est variable le long des cercles de même inclinaison. D'une manière générale il n'y a plus à proprement parler de courbes

isochromatiques, c'est-à-dire de lignes pour lesquelles la teinte reste la même, plus ou moins lavée de blanc. En tous cas, les lignes dont la teinte est peu variable ne sont plus des cercles.

Considérons le phénomène en lumière monochromatique.

Il nous suffit, pour faire comprendre la nature du problème et la manière de le traiter dans le cas général, d'étudier les cas particuliers  $\psi = \pm 45^\circ$ . Soit  $\psi = 45^\circ$ , il vient :

$$2I^2 = (1 + h^2)^2 - 2h(1 + h^2) \sin \delta - (1 - h^2)^2 \sin 4s \sin^2 \frac{\delta}{2}.$$

L'intensité est une fonction de deux variables qui sont les coordonnées polaires habituelles, l'angle  $s$  et le rayon vecteur  $r$ . Menons par le second point nodal du système de projection une droite perpendiculaire à la lame de quartz. Elle coupe le plan focal principal en un point O. Menons par ce point une droite D parallèle à la section principale du polariseur; toute autre droite passant par O fait avec la droite D un angle qui est précisément égal à  $s$ .

La distance  $r$  d'un point du plan focal au point O est liée à l'angle que fait la normale à l'onde, dans sa traversée du quartz, avec l'axe de celui-ci; les quantités  $h$  et  $\delta$  sont donc des fonctions de  $r$ .

Ceci posé, comment définir analytiquement les franges?

Le problème est identique à celui des lignes de faite ou des thalwegs en Topographie. La frange la plus brillante est la courbe perpendiculairement à laquelle on ne peut se déplacer sans que l'intensité décroisse; la frange la plus sombre est celle perpendiculairement à laquelle on ne peut se déplacer sans que l'intensité croisse.

Pour déterminer les lignes de faite ou les thalwegs, on peut tracer un faisceau de courbes les coupant orthogonalement et déterminer les maximums et les minimums de l'altitude *le long de ces courbes*. Les lignes de faite ou les thalwegs sont les lieux des points ainsi déterminés. *On peut même employer sans grande erreur des courbes les coupant sous un angle non droit, à la condition que les crêtes ou les vallées soient assez abruptes*. La tolérance angulaire dépend de l'approximation admise.

Dans le cas qui nous occupe, nous savons que pour  $\psi = 0$ , ou  $\psi = \pi : 2$ , les franges sont circulaires. Elles ne diffèrent donc pas beaucoup de cette forme pour  $\psi$  quelconque. Conséquemment nous déterminons assez exactement les franges (lignes de faite ou thalwegs) en cherchant les maximums et minimums le long des différents rayons : les franges sont le lieu des points ainsi déterminés.

Analytiquement cela revient à écrire :

$$\frac{\partial(I^2)}{\partial r} = 0.$$

Mais  $h$  est une fonction compliquée de  $r$ . Nous simplifierons en posant que  $h$  est constant sur la courbe presque circulaire.

La définition analytique approchée des franges devient donc :

$$\frac{\partial(I^2)}{\partial\delta} = 0. \tag{1}$$

340. **Courbes quadratiques.** — La condition (1) donne :

$$h(1 + h^2) \cotg \delta + (1 - h^2)^2 \sin 4s = 0; \tag{1'}$$

c'est l'équation des franges.

Il est facile de voir qu'elles ont la forme de carrés à angles arrondis.

Déterminons la position des angles par rapport aux sections du polariseur et de l'analyseur, qui par hypothèse sont à 45° l'une de l'autre. On a :

$$\text{tg } \delta = -\frac{A}{\sin 4s},'$$

où A est une constante. Quand s varie de  $\pi : 2$ , tg  $\delta$  et par conséquent  $\delta$  parcourent une période entière. Donc les apparences se répètent identiques dans les quatre quadrants.

Déterminons ce qui a lieu quand s varie de 0 à  $\pi : 2$ .

Pour  $s=0$ ,  $\text{tg } \delta = -\infty$ ; posons  $\delta = \pi : 2$ .

Quand s croît jusqu'à  $\pi : 8$ , tg  $\delta$  décroît en valeur absolue;  $\delta$  varie entre  $\pi : 2$  et un maximum que nous appellerons  $\pi - \delta_1$  et qui est compris entre  $\pi : 2$  et  $\pi$ .

Quand s croît de  $\pi : 8$  à  $\pi : 4$ ,  $\delta$  passe de  $\pi - \delta_1$  à  $\pi : 2$ .

Quand s croît de  $\pi : 4$  à  $3\pi : 8$ ,  $\delta$  passe de  $\pi : 2$  à  $\delta_1$ .

Enfin quand s croît de  $3\pi : 8$  à  $\pi : 2$ ,  $\delta$  passe de  $\delta_1$  à  $\pi : 2$ .

En définitive,  $\delta$  oscille entre  $\delta_1$  et  $\pi - \delta_1$  : il passe par sa valeur maxima pour  $s = \pi : 8$  et sa valeur minima pour  $s = 3\pi : 8$ .

Les franges sont donc comprises entre deux circonférences concentriques; elles ont la forme de carrés aux angles arrondis, d'où le nom de *quadratiques* qu'on leur donne (fig. 209).

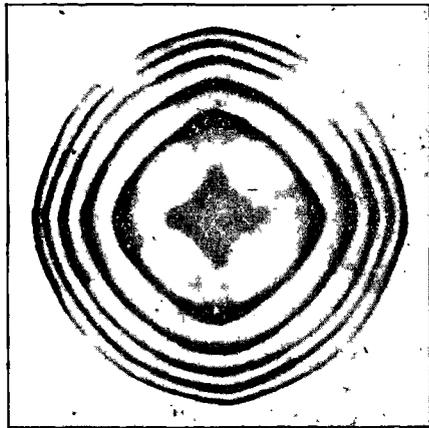


Fig. 209.

Les angles sont sur les bissectrices des sections principales de l'analyseur et du polariseur, ou sur les droites à 45° des précédentes; cela dépend du sens de rotation du cristal

et du fait que pour passer de la section de l'analyseur à celle du polariseur, il faut tourner de 45° à droite ou à gauche.

**341. Lumière polarisée circulairement, analysée rectilignement (Airy).** — Nous n'avons pas l'intention de pousser bien loin l'étude de ces questions complexes et dont l'intérêt théorique est faible. Nous n'en disons que le nécessaire pour préciser les idées du lecteur et lui montrer comment on traite les vibrations elliptiques.

Supposons la lumière incidente circulaire. Elle fournit à l'entrée quatre elliptiques qu'il est facile d'écrire.

La vibration circulaire, droite par exemple, est la résultante de deux vibrations égales, dirigées suivant  $Ox$  et  $Oy$ , la composante suivant  $Ox$  ayant un retard de  $\pi : 2$ .

$$x = (1 + h^2) \sin \omega t, \quad y = (1 + h^2) \cos \omega t.$$

Elle est cinématiquement équivalente aux quatre elliptiques :

	$x_1 = \sin \omega t,$		$x_2 = h^2 \sin \omega t,$
droit		gauche	
	$y_1 = h \cos \omega t;$		$y_2 = -h \cos \omega t;$
	$x'_1 = h \sin \omega t,$		$x'_2 = -h \sin \omega t,$
droit		gauche	
	$y'_1 = h^2 \cos \omega t;$		$y'_2 = \cos \omega t.$

A la sortie de la lame on a :

	$x_1 = \sin \omega t,$		$x_2 = h^2 \sin (\omega t - \delta),$
droit		gauche	
	$y_1 = h \cos \omega t;$		$y_2 = -h \cos (\omega t - \delta);$
	$x'_1 = h \sin \omega t,$		$x'_2 = -h \sin (\omega t - \delta),$
droit		gauche	
	$y'_1 = h^2 \cos \omega t;$		$y'_2 = \cos (\omega t - \delta).$

Posons :  $x = x_1 + x_2 + x'_1 + x'_2, \quad y = y_1 + y_2 + y'_1 + y'_2.$

Cherchons la vibration qui passe à travers l'analyseur; elle est :

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi.$$

On trouve :

$$2I^2 = (1 + h^2)^2 + 2h(1 - h^2) \cos 2\varphi - 2h(1 - h^2) \cos 2\varphi \cos \delta \\ - (1 - h^2)(1 + h^2) \sin 2\varphi \sin \delta.$$

Pour  $h=0$ , on retrouve la forme du § 143, tome V.

**342. Spirales quadratiques.** — Observons en lumière convergente. Nous pouvons répéter tout ce qui est dit au § 339 à propos de l'obtention des franges. Ici encore (sauf tout à fait au centre) les lignes de faite et les thalwegs ne diffèrent pas trop de courbes circulaires. Leur définition analytique est celle du § 339.

On trouve l'équation :

$$2h \operatorname{tg} \delta = (1 + h^2) \operatorname{tg} 2\varphi. \quad (2)$$

Elle représente une double spirale dite *spirale quadratique* (fig. 210).

Quand  $\varphi$  croît de  $2\pi$ ,  $\delta$  croît de  $4\pi$ . Les points de la courbe qui se trouvent sur des droites dont l'angle avec une droite de référence augmente continûment, sont à des distances de plus en plus grandes du centre du phénomène; la vitesse d'éloignement est telle que pour une rotation de  $2\pi$ , le retard relatif  $\delta$  (fonction de la distance au centre du phénomène) augmente de  $4\pi$ .

Pour une valeur donnée de  $\delta$ , l'équation (2) fournit quatre azimuts  $\varphi$ ; deux correspondent aux lignes de faite, deux aux thalwegs.

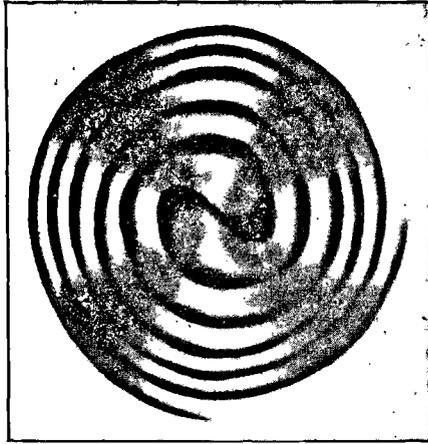


Fig. 210.

**343. Spirales d'Airy : lumière polarisée et analysée rectilignement traversant deux quartz de même épaisseur et de rotations contraires.** — A la sortie du premier quartz, nous aurons les quatre elliptiques du § 341. La complication vient de ce que ces elliptiques, caractérisés par un sens de rotation et un certain rapport d'axes, ne seront plus transmis sans déformation dans le second quartz dont la rotation est inverse du premier.

Nous devons donc remanier les elliptiques. Chacune de leurs composantes donnera deux nouveaux elliptiques, d'où en tout seize vibrations se propageant sans déformation dans le second cristal. On les écrit d'ailleurs sans la moindre difficulté à l'entrée et à la sortie du second cristal.

Il ne reste plus qu'à calculer l'intensité à la sortie de l'analyseur. Les calculs sont prodigieusement longs. Nous n'insisterons pas : on trouve des spirales.

Tous ces phénomènes pouvaient avoir de l'intérêt comme vérification d'une théorie que beaucoup jugeaient compliquée il y a 70 ans. Aujourd'hui personne ne doute de la valeur des hypothèses d'Airy ; le calcul des spirales est parfaitement oiseux.

### Superposition de la double réfraction ordinaire et de la polarisation rotatoire.

344. **Équivalence cinématique de la double réfraction elliptique et de la combinaison d'une double réfraction ordinaire et d'une polarisation rotatoire.** — Gouy a remarqué l'équivalence cinématique de la double réfraction elliptique d'Airy et de la combinaison d'une double réfraction ordinaire et d'une rotation.

1° Une vibration elliptique traverse une lame biréfringente ordinaire : elle se déforme. Supposons que, dans la position où on la considère, ses axes soient parallèles aux sections principales de la lame. Montrons que sa déformation *instantanée* est une simple rotation.

Soit :  $x = a \sin \omega t, \quad y = b \cos \omega t,$

les vibrations principales. Elles prennent un retard relatif  $\Delta$  que nous supposons très petit et portant sur la vibration  $y$  :

$$x = a \sin \omega t, \quad y = b \cos (\omega t - \Delta).$$

Les ellipses avant et après le passage ont pour équations :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy \sin \Delta}{ab} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 \Delta. \quad (1) \quad (2)$$

Il s'agit de prouver que l'ellipse (2) est simplement l'ellipse (1) tournée d'un petit angle  $\varphi$ .

Faisons tourner la première ellipse d'un angle  $\varphi$ . Un point A, lié

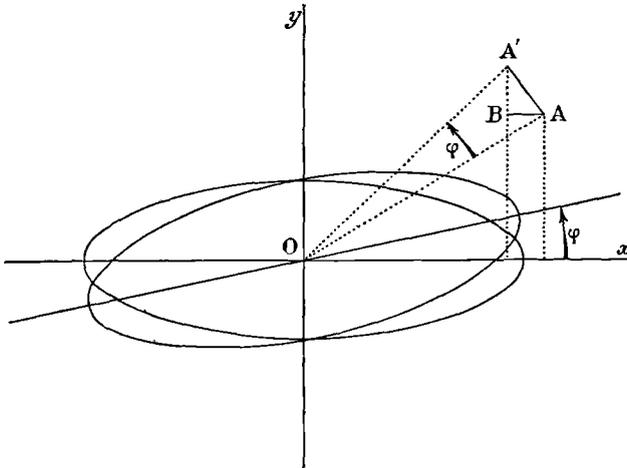


Fig. 211.

à cette ellipse et situé à une distance  $r$  de l'origine, vient en  $A'$  (fig. 211).

Ses nouvelles coordonnées  $x'$  et  $y'$  sont :

$$\begin{aligned} x' &= x - \overline{AB} = x - r\varphi \cos \overline{BAA'} = x - \varphi y, \\ y' &= y + \overline{BA'} = y + r\varphi \cos \overline{BA'A} = y + \varphi x, \\ x &= x' + \varphi y, \quad y = y' - \varphi x. \end{aligned}$$

Dans le terme petit multiplié par  $\varphi$ , on peut remplacer  $x$  et  $y$  par  $x'$  et  $y'$ . En définitive, supprimant les ' pour simplifier l'écriture, on a la nouvelle équation de l'ellipse en remplaçant :

$$x \text{ par } x + \varphi y, \quad y \text{ par } -\varphi x + y.$$

Substituons dans (1), négligeons les termes en  $\varphi^2$ ; d'autre part, récrivons (2) en supposant  $\Delta$  très petit :

$$\frac{x^2}{a^2} + 2xy\varphi \left( \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad (1')$$

$$\frac{x^2}{a^2} - 2xy\Delta \frac{1}{ab} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2')$$

Pour identifier (1') et (2'), il suffit de poser :

$$\frac{a}{b} = h, \quad \varphi \left( \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) = -\frac{\Delta}{ab}, \quad \varphi = \Delta \frac{h}{h^2 - 1}.$$

On remarquera :

que la rotation dépend seulement du rapport des axes de l'ellipse et non du sens de circulation du mobile fictif sur cette ellipse;

que la même rotation est imposée aux deux ellipses dont les rapports des axes satisfont à la condition :  $hh' = 1$ . Si  $h > 1$ , on a  $h' < 1$ , et inversement. En effet :

$$\varphi = \Delta \frac{h}{h^2 - 1} = \frac{\Delta}{h'} : \left( \frac{1}{h'^2} - 1 \right) = \Delta \frac{h'}{1 - h'^2};$$

$\varphi$  a dans les deux cas même valeur et même signe.

2° Toute vibration elliptique peut être considérée comme la résultante de deux vibrations elliptiques de circulations inverses, et dont les directions et le rapport des axes sont arbitrairement donnés.

En effet, elle peut être d'abord remplacée par un couple de deux vibrations rectilignes de directions rectangulaires arbitrairement choisies. Chacune d'elles peut être remplacée (§ 319) par deux vibrations elliptiques inverses admettant leurs axes dans ces directions et pour lesquelles  $h$  est donné. Enfin nous savons (§ 315) que deux vibrations elliptiques, de même sens de circulation, de mêmes directions d'axes et ayant le même paramètre  $h$ , équivalent à une vibration de mêmes directions d'axes et caractérisée par le même  $h$ .

Nous pouvons donc toujours décomposer la vibration elliptique donnée en deux elliptiques de circulations inverses, dont les axes sont dirigés suivant les sections principales de la lame cristalline, et dont

le rapport des axes est à notre choix ; le grand axe de l'une coïncide avec le petit axe de l'autre.

3° Supposons enfin qu'outre sa biréfringence, le milieu ait un pouvoir rotatoire, c'est-à-dire que la traversée d'une lame fasse tourner en bloc toutes les vibrations rectilignes ou elliptiques d'un angle proportionnel à l'épaisseur (angle généralement variable avec l'orientation de la lame dans le cristal). Par hypothèse, la rotation n'empêche en rien les autres modifications : elle se superpose à elles purement et simplement.

Soit  $\rho$  la rotation (comptée positivement de  $Ox$  vers  $Oy$ ) qui correspond au retard  $\Delta$ , et par conséquent à l'unité d'épaisseur. *Ecrivons qu'elle compense exactement la rotation  $\varphi$  due à la double réfraction.* Nous avons la relation :

$$\rho = \Delta \frac{h}{h^2 - 1}. \quad (3)$$

En définitive, quelle que soit la vibration elliptique donnée, décomposons-la en deux elliptiques de sens inverses dont les axes sont dirigés suivant les sections principales de la lame biréfringente. Choisissons le rapport  $h$  des axes de manière que l'équation (3) (où entrent la biréfringence ordinaire  $\Delta$  et le pouvoir rotatoire  $\rho$  de la lame) soit satisfaite.

La biréfringence et le pouvoir rotatoire produisent à chaque instant exactement les mêmes effets, mais en sens inverses.

*Les deux elliptiques sont donc transmis sans déformation.*

Telle est l'équivalence cinématique trouvée par Gouy.

Si  $\Delta = 0$  (direction de l'axe d'un cristal uniaxe, direction des axes optiques d'un cristal biaxe),  $h = 1$  ; les vibrations *privilégiées* sont circulaires.

Si au contraire la double réfraction l'emporte beaucoup sur le pouvoir rotatoire,  $\Delta$  est très grand vis-à-vis de  $\rho$  ;  $h$  est quasiment nul. Les vibrations *privilégiées* sont rectilignes.

### 345. Biréfringence des vibrations privilégiées elliptiques.

— Considérons une vibration rectiligne parallèle à l'une des sections de la lame :

$$x = (1 + h^2) \sin \omega t.$$

Elle n'est pas déformée du fait de la double réfraction ; elle tourne de l'angle  $\rho$  du fait du pouvoir rotatoire.

Nous pouvons la décomposer en deux vibrations privilégiées (§ 319) :

$$\begin{array}{ll} \text{droite} & x_1 = \sin \omega t; \\ & x_2 = h^2 \sin \omega t, \\ & \text{gauche} \\ & y_1 = h \cos \omega t; \\ & y_2 = -h \cos \omega t. \end{array}$$

Dans la théorie d'Airy, ces vibrations se transportent sans déformation (§ 315), mais avec des vitesses différentes.

Soit  $\delta$  le retard relatif qui porte sur la vibration gauche. A la sortie d'une lame infiniment mince, nous aurons :

$$\begin{array}{ll} \text{droite} & x_1 = \sin \omega t, \\ & y_1 = h \cos \omega t; \\ \text{gauche} & x_2 = h^2 \sin(\omega t - \delta), \\ & y_2 = -h \cos(\omega t - \delta). \end{array}$$

Composons ces vibrations en supposant  $\delta$  petit et ne conservant que le terme principal :

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 = (1 + h^2) \sin \omega t, \\ y &= -h \delta \sin \omega t. \end{aligned}$$

Appliquons l'équivalence cinématique de Gouy (§ 338, 1°).

Quand une vibration, d'abord dirigée suivant  $Ox$ , tourne d'un petit angle  $\rho$  dans le sens de  $Ox$  vers  $Oy$ , la composante  $x$  ne change pas; la composante  $y$  croît de  $\rho x$ . On doit poser :  $y = \rho x$ ,

et par suite :

$$-h\delta = \rho(1 + h^2); \quad \delta = -\rho \frac{1 + h^2}{h} = \sqrt{\Delta^2 + 4\rho^2}. \quad (4)$$

En particulier, si la rotation (évaluée en radians) est  $\rho$ , le retard (évalué en phase) entre les vibrations circulaires qui peuvent interpréter cette rotation est  $2\rho$ .

D'où l'énoncé suivant : *le carré de la différence de phase des vibrations privilégiées elliptiques de la théorie d'Airy est égal, dans la théorie de Gouy, à la somme des carrés de la différence de phase que la double réfraction produit entre les vibrations rectilignes, et de la différence de phase que le pouvoir rotatoire produit entre les vibrations circulaires.*

**346. Remarque sur la théorie précédente.** — La théorie de Gouy est très intéressante, mais elle ne constitue pas à vraiment parler une théorie. On considère à juste titre l'idée de Fresnel de ramener le pouvoir rotatoire à l'étude de vibrations *se propageant sans déformation*, comme un immense progrès. Or Gouy fait exactement l'inverse : il ramène l'étude des vibrations privilégiées elliptiques à l'étude du pouvoir rotatoire.

Il va de soi que la question théorique n'a pas avancé d'un pas par cette substitution. Il est ni plus ni moins difficile d'expliquer l'existence de vibrations privilégiées elliptiques que d'expliquer le pouvoir rotatoire.

*Le fait expérimental est que ces vibrations privilégiées existent, puisqu'on les sépare par réfraction, ce qui définit l'existence optique.*

Comme il apparaîtra plus loin, la théorie de Gouy revient à considérer séparément les divers termes des équations différentielles posées depuis quatre-vingts ans pour représenter les phénomènes. Elle reprend sous une autre forme l'hypothèse de Mac Cullagh de la

superposition des effets des causes qu'on peut imaginer comme modifiant la propagation.

L'équivalence cinématique que nous venons d'établir, n'en a pas moins un très réel intérêt : elle permet d'écrire immédiatement des relations que nous ne retrouverons que par d'assez longs calculs (§§ 375 et 377). Surtout elle prévoit, au moins comme première approximation, les phénomènes qui résultent de la superposition *expérimentale* de la double réfraction et du pouvoir rotatoire. Elle vaut exactement ce que vaut le principe des petits mouvements dans la superposition de phénomènes différents.

**347. Calcul des propriétés du quartz pour une hypothèse simple.** — Les formules de Gouy permettent de calculer les propriétés du quartz pour les directions obliques à l'axe comme conséquence de l'hypothèse simple de Mac Cullagh (§§ 373 et sq.) : *il y a superposition d'un pouvoir rotatoire constant à la biréfringence d'un uniaxe ordinaire.*

1° CALCUL DE LA QUANTITÉ  $\Delta$  POUR UN UNIAXE.

Soit  $a$  la vitesse de propagation pour l'onde qui porte des vibrations perpendiculaires à l'axe optique; soit  $c$  la vitesse de propagation pour l'onde qui porte des vibrations parallèles à l'axe optique.

Si la direction de propagation normale fait un angle  $\theta$  avec l'axe optique, nous savons (V, § 92) que les deux vitesses sont :

$$a, \quad C = \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + c^2 \sin^2 \theta} = \sqrt{a^2 - (a^2 - c^2) \sin^2 \theta}.$$

Pour  $\theta = 0$ , on retrouve naturellement deux vitesses égales à  $a$ . Dans le quartz, cristal positif, on a :  $c < a$  et par conséquent  $C < a$ .

Calculons la différence de phase  $\Delta$  des deux rectilignes pour une épaisseur unité et des directions  $\theta$  pas trop inclinées sur l'axe :

$$\Delta = 2\pi \left( \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) = \frac{2\pi}{T} \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{a} \right) = \frac{2\pi}{T} \frac{a - C}{aC}.$$

Or  $(a^2 - c^2) \sin^2 \theta$  est très petit vis-à-vis de  $a^2$ , d'abord parce que  $a^2 - c^2$  est petit, ensuite parce que la direction de propagation normale est peu inclinée sur l'axe. On trouve l'expression très approchée :

$$\Delta = \omega \frac{a - C}{aC} = \omega \frac{a - C}{a^2} = \omega \frac{a^2 - C^2}{2a^3} = \omega \frac{(a^2 - c^2) \sin^2 \theta}{2a^3}.$$

Introduisons les indices ordinaire et extraordinaire du quartz (§ 318) :

$$an_o = cn_e, \quad \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} n_o \frac{n_e^2 - n_o^2}{2n_e^2} \sin^2 \theta = \Delta_o \sin^2 \theta.$$

2° VALEUR NUMÉRIQUE DES PARAMÈTRES POUR LE QUARTZ.

Calculons la valeur numérique du paramètre  $\Delta_o$  dans le quartz.

On a pour la raie D (V, § 235) :

$$n_o = 1,54423, \quad n_e = 1,53338, \quad n_o - n_e = 0,00915.$$

$$\frac{n_o}{\lambda} \frac{n_e^2 - n_o^2}{2n_e^2} = 153,4, \quad \Delta_o = 964.$$

Cela signifie que le retard pour une lame d'un centimètre de quartz, taillée parallèlement à l'axe et traversée normalement, serait de 154 longueurs d'onde environ, si la formule était exacte jusqu'à  $\theta = 90^\circ$ . Mais nous savons que la formule n'est qu'approchée. En fait, pour une telle lame le retard est un peu plus grand :

$$\frac{n_o - n_e}{\lambda} = \frac{0,00915}{0,0000589} = 155.$$

Nous venons d'évaluer le retard en longueurs d'onde. Le retard en phase, naturellement évalué en radians, est :  $\Delta_o = 964$ .

Avant d'aller plus loin, calculons la valeur numérique du pouvoir rotatoire, mesuré pour la propagation parallèle à l'axe ternaire.

La rotation pour la raie D est de  $21^\circ,72$  pour un millimètre d'épaisseur, soit :

$$217,2 \text{ pour un centimètre; } \rho = 3,791 \text{ en radians.}$$

Le quotient  $\Delta_o : 2\rho$ , qu'on rencontrera plus loin, a pour valeur :

$$\Delta_o : 2\rho = 127.$$

### 3° CALCUL DE $\delta$ .

Appliquons la théorie de Gouy : appelons  $\rho$  le pouvoir rotatoire supposé constant, c'est-à-dire indépendant de la direction de propagation.

L'équation (4) du § 345 devient :

$$\delta^2 = \Delta_o^2 \sin^4 \theta + 4\rho^2.$$

Si, compliquant l'hypothèse, on admet que le pouvoir rotatoire diminue avec l'obliquité sur l'axe, on introduira un facteur en  $\cos \theta$ . Par exemple, on a proposé :

$$\delta^2 = \Delta_o^2 \sin^4 \theta + 4\rho^2 \cos^4 \theta.$$

Vu la précision des expériences et l'influence négligeable de  $\cos \theta$  quand  $\theta$  est petit, cette complication n'a qu'un intérêt médiocre.

### 4° CALCUL DE $h$ .

$$\text{On a : } \frac{\rho}{\Delta} = \frac{h}{h^2 - 1}, \quad h = \frac{\Delta}{2\rho} \pm \sqrt{\frac{\Delta^2}{4\rho^2} + 1}.$$

Substituant à  $\Delta$  sa valeur, il vient :

$$h = \frac{\Delta_o}{2\rho} \sin^2 \theta \pm \sqrt{\frac{\Delta_o^2}{4\rho^2} \sin^4 \theta + 1}.$$

Les deux valeurs de  $h$  se présentent sous la forme :

$$h_1 = M + \sqrt{M^2 + 1}, \quad h_2 = M - \sqrt{M^2 + 1}.$$

On a : 
$$h_1 h_2 = -1,$$

comme le veut la théorie d'Airy.

Toutes ces formules sont connues depuis longtemps : ce sont celles mêmes de Mac Cullagh.

**348. Polarisation rotatoire magnétique dans le spath.** — Nous verrons que la polarisation rotatoire magnétique diffère profondément de la polarisation rotatoire naturelle. Il serait donc illogique d'en parler ici, s'il ne s'agissait pas uniquement d'équivalences cinématiques ; l'exemple de la polarisation rotatoire magnétique imposée au spath montre immédiatement l'intérêt des formules de Gouy.

L'expérience prouve que la polarisation rotatoire par unité de longueur, imposée à un milieu amorphe (tel que le verre) par un champ magnétique, dans une direction donnée de propagation, est proportionnelle à la composante H du champ parallèle à cette direction. On a donc :

$$\rho = AH,$$

où A est une constante caractéristique du milieu.

Dans le spath, la biréfringence  $\Delta$  est considérable, *dès qu'on s'écarte tant soit peu de la direction de l'axe* ; d'ailleurs le pouvoir  $\rho$  est toujours petit, même pour des champs de plusieurs milliers de gauss. La formule (3) nous apprend que les vibrations privilégiées sont quasi rectilignes dès qu'on s'écarte notablement de la direction de l'axe. La formule (4) nous apprend de plus que, sauf pour des directions extrêmement voisines de l'axe, on a :  $\delta = \Delta$ . La différence de marche des vibrations privilégiées est exactement la même que si le pouvoir rotatoire n'existait pas.

Conséquemment on ne pourra déceler une influence du champ magnétique sur les phénomènes que pour des directions extrêmement voisines de l'axe, puisque autrement les vibrations privilégiées sont rectilignes et ont les mêmes vitesses de propagation que si le champ n'existait pas. Toutes ces conséquences de l'hypothèse de la superposition pure et simple de la biréfringence et du pouvoir rotatoire sont conformes à l'expérience.

On peut aller plus loin et chercher des vérifications numériques.

Reprenons les méthodes expérimentales décrites au § 321 à propos du quartz.

Nous savons que si la différence de marche des elliptiques privilégiés est un multiple pair de  $\lambda : 2$ , la vibration incidente étant dirigée suivant une des sections principales, la vibration émergente est rectiligne. Si la différence de marche des deux elliptiques privilégiés est un multiple impair de  $\lambda : 2$ , l'ellipse émergente a ses axes dans la direction de la vibration incidente et dans la direction normale. Un mince quart d'onde convenablement orienté transforme l'elliptique

en un rectiligne dont l'angle  $2\psi$  avec la vibration incidente est fourni par la relation :

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{2h}{1 - h^2}, \quad h = \operatorname{tg} \psi.$$

L'expérience montre que les directions pour lesquelles la différence de marche des elliptiques privilégiés est un multiple de  $\lambda : 2$  (directions déterminées par les expériences précédentes), sont très voisines de celles qui correspondent aux mêmes différences de marche entre les rayons ordinaire et extraordinaire dans le spath non aimanté : résultat contenu dans la relation  $\delta = \Delta$ . Les premières sont cependant un peu plus rapprochées de l'axe que les secondes ; ce qui vérifie la relation complète :

$$\delta^2 = \Delta^2 + 4\rho^2;$$

$\delta^2 > \Delta^2$ , pour une direction donnée.

Conformément aux résultats du § 320, dès qu'en s'éloignant de l'axe le paramètre  $h$  devient  $< 0,41$ , la rotation apparente est, pour le même champ, droite ou gauche suivant le retard dû à la biréfringence. Il suffit d'ailleurs d'une dizaine de minutes d'angle à partir de l'axe pour qu'il en soit ainsi pour le spath.

En résumé, on peut admettre que la polarisation rotatoire magnétique imposée au spath est indépendante de la direction considérée dans le cristal ; elle ne dépend que de la composante du champ suivant cette direction. Elle se superpose purement et simplement à la biréfringence ; les phénomènes sont alors calculables par les formules de Gouy.

**349. Polarisation rotatoire magnétique et double réfraction du verre déformé.** — Il est possible de modifier à son gré les deux variables  $\Delta$  et  $\rho$ , en étirant avec des poids variables  $P$  un morceau

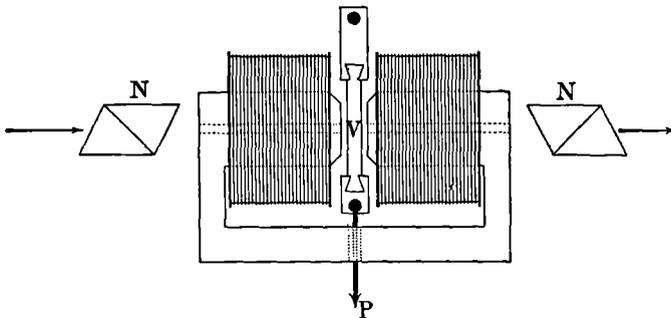


Fig. 212.

de verre  $V$  placé dans un champ magnétique  $H$ . La charge  $P$  crée la biréfringence (§ 294) : le champ  $H$  crée le pouvoir rotatoire (§ 382).

On peut mesurer séparément les quantités  $\Delta$  (en supprimant le champ) et  $\rho$  (en supprimant la charge). Imposant simultanément le

champ et la charge, on vérifie si les phénomènes résultants sont effectivement calculables comme superposition pure et simple des phénomènes constituants. L'expérience confirme cette hypothèse.

Laissons le pouvoir rotatoire  $\rho$  constant (champ invariable) et augmentons la charge  $P$ , ce qui augmente la biréfringence  $\Delta$ . En vertu de l'équation (3), les vibrations privilégiées (dont les axes sont verticaux et horizontaux), deviennent de plus en plus aplaties, en même temps que leur différence de marche  $\delta$  augmente [équation (4)].

Supposons la vibration rectiligne incidente verticale ou horizontale.

Conformément au § 320, on constate, pour des valeurs croissantes de  $\Delta$ , des changements de sens de la rotation. *Un pouvoir rotatoire invariable  $\rho$  produit des rotations  $\theta$  de sens différents suivant l'intensité de la double réfraction.*

Nous avons démontré au § 320 la formule suivante :

$$\operatorname{tg} 2\Theta = - \frac{2h(1+h^2)\sin\delta}{(1-h^2)^2 + 4h^2\cos\delta},$$

où  $\Theta$  est l'angle que fait avec la vibration initiale (supposée dirigée suivant l'une des sections principales) le grand axe de l'ellipse émergente;  $\Theta$  mesure donc la rotation. On remarquera qu'il conserve la même valeur quand on remplace  $h$  par  $1:h$ .

Introduisant dans le second membre le pouvoir rotatoire  $\rho$  et la biréfringence ordinaire  $\Delta$ , il vient :

$$\operatorname{tg} 2\Theta = \frac{2\delta\rho\sin\delta}{\Delta^2 + 4\rho^2\cos\delta}. \quad (5)$$

Comme cas particulier et vérification de la formule, faisons  $\Delta = 0$ ; l'hypothèse correspond à la propagation suivant l'axe d'un quartz.

La formule (4) donne :  $\delta = -2\rho$ ,

d'où :  $\operatorname{tg} 2\Theta = -\operatorname{tg} \delta, \quad \Theta = -\delta : 2.$

La rotation est mesurée, comme on sait (§ 323), par la moitié du retard (en phase) des vibrations circulaires.

Ces résultats rappelés, soit  $\rho$  constant et assez petit pour que le dénominateur de la formule (5) ne s'annule jamais, quand on fait croître la biréfringence  $\Delta$ .

Le dénominateur a pour expression :

$$D = \Delta^2 + 4\rho^2 \cos \sqrt{\Delta^2 + 4\rho^2}.$$

Si on construit les deux courbes :

$$y_1 = \Delta^2, \quad y_2 = 4\rho^2 \cos \sqrt{\Delta^2 + 4\rho^2},$$

on constate immédiatement que la condition  $y_1 + y_2 = 0$ , ne peut être satisfaite que pour un arc  $\sqrt{\Delta^2 + 4\rho^2}$  compris entre  $\pi : 2$  et

3π : 2. Sans calculer sa valeur exacte, écrivons que D s'annule pour un arc précisément intermédiaire :

$$\sqrt{\Delta^2 + 4\rho^2} = \frac{3\pi}{4}, \quad \cos\sqrt{\Delta^2 + 4\rho^2} = -\frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\Delta^2 - 4\rho^2 : \sqrt{2} = 0, \quad \rho = 0,3 \cdot \pi.$$

En prenant par exemple  $\rho = \pi : 4$ , nous sommes sûrs que la condition énoncée est satisfaite quel que soit  $\Delta$ .

Ceci posé, la théorie fait prévoir et l'expérience confirme que la rotation  $\Theta$  du grand axe de l'ellipse est d'abord dans le sens du pouvoir rotatoire  $\rho$ , puis qu'elle diminue, change de signe, ... et ainsi de suite, subissant des oscillations d'amplitudes décroissantes.

Les zéros sont donnés par la condition :  $\delta = k\pi$ .

Dès que  $\Delta$  est un peu grand, on peut substituer à la formule (3) l'expression plus simple :

$$\text{tg } 2\Theta = 2\rho \frac{\sin \Delta}{\Delta}.$$

350. **Phénomènes dans le quartz comprimé.** — Nous verrons plus tard que les phénomènes dans le quartz *non comprimé* s'expliquent par l'hypothèse d'un pouvoir rotatoire *constant*, indépendant de la direction, associé à la biréfringence ordinaire des uniaxes. Nous avons calculé les phénomènes dans cette hypothèse au § 347.

Soit une lame de quartz taillée normalement à l'axe et traversée

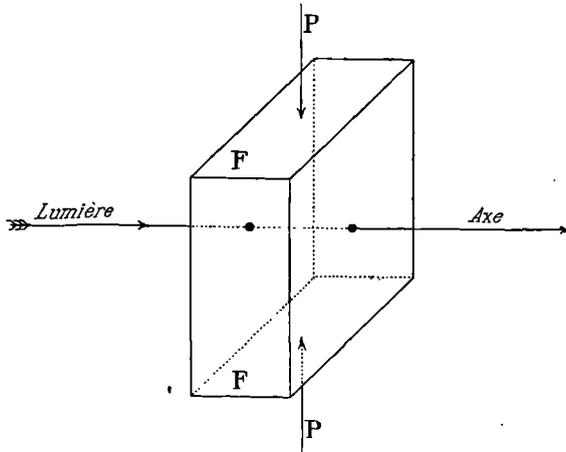


Fig. 213.

par la lumière suivant l'axe. Elle est comprimée normalement à deux faces F parallèles à l'axe ; d'où une biréfringence variable avec cette compression (fig. 213).

Nous pouvons admettre (l'expérience confirme cette hypothèse) que *le pouvoir rotatoire reste inaltéré*. Nous lui superposons donc une biréfringence uniquement due à la compression, puisque la biréfringence *naturelle* du quartz est nulle pour la propagation suivant l'axe. Nous sommes en quelque sorte ramenés au cas du verre (§ 349), avec cette différence que dans le quartz le pouvoir rotatoire préexiste, tandis que dans le verre il est créé par le champ magnétique.

Les phénomènes sont identiques à ceux des paragraphes précédents. On a vérifié :

- 1° que le pouvoir rotatoire  $\rho$  n'est pas modifié par la compression ;
- 2° que la biréfringence  $\Delta$  est proportionnelle à la compression, comme les expériences l'ont prouvé pour les corps amorphes tels que le verre (§ 294).

Conformément à la formule (5) du § 349, on peut obtenir pour des compressions convenables des rotations de sens contraire à la rotation résultant du pouvoir rotatoire.

### Polarisation rotatoire dans les biaxes.

**351. Observation des phénomènes dans les biaxes.** — Quelle que soit la grandeur du pouvoir rotatoire, les phénomènes qui en dépendent sont complètement masqués dès que la biréfringence est notable. Il résulte de là que, pour les biaxes, ils ne peuvent être observables qu'au voisinage des axes optiques ; et encore l'observation est-elle beaucoup plus difficile que pour les uniaxes.

Dans les uniaxes, en effet, l'onde ordinaire a une vitesse constante ; l'onde extraordinaire a une vitesse maxima ou minima dans la direction de l'axe. D'où une égalité de vitesse et partant une valeur nulle pour la biréfringence dans des directions relativement éloignées de l'axe.

Dans les biaxes, au contraire, l'axe de réfraction conique intérieure est une direction pour laquelle les vitesses deviennent accidentellement égales, sans passer ni l'une ni l'autre par un maximum ou un minimum. La biréfringence, nulle dans la direction des axes, croît rapidement à partir de ceux-ci : d'où une difficulté plus grande pour mettre le pouvoir rotatoire en évidence.

Il est facile de donner une expression approximative de la biréfringence  $\Delta$ . Appelons  $t_1$  et  $t_2$  (V, § 118) les angles que fait la direction de propagation normale considérée avec les axes de réfraction conique intérieure. On a (V, § 151) :

$$\Delta = 2\pi \left( \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) = \omega \left( \frac{1}{V''} - \frac{1}{V'} \right).$$

Cette expression serait assez compliquée à calculer. Au contraire, nous obtiendrons une expression très simple en procédant comme au § 151 du tome V, c'est-à-dire en confondant les rayons avec les directions de propagation normale et les axes de réfraction conique intérieure avec les axes de réfraction conique extérieure.

$$\Delta = \omega \left( \frac{1}{r''} - \frac{1}{r'} \right).$$

Remplaçons  $r'$ ,  $r''$ ,  $c$ , par  $a$  dans les termes additifs. Il vient (V, § 119) :

$$\left( \frac{1}{r''^2} - \frac{1}{r'^2} \right) = \frac{2}{a} \left( \frac{1}{r''} - \frac{1}{r'} \right) = \left( \frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2} \right) \sin t_1 \sin t_2.$$

$$\Delta = \omega \frac{a^2 - c^2}{2a^3} \sin t_1 \sin t_2.$$

Superposons à cette biréfringence un pouvoir rotatoire  $\rho$ , constant ou variable avec la direction; les paramètres qui définissent la polarisation elliptique dans une direction quelconque pas trop éloignée des axes, sont donnés par les formules (§ 347) :

$$\delta = \sqrt{\Delta^2 + 4\rho^2}, \quad h = \frac{\Delta}{2\rho} \pm \sqrt{\frac{\Delta^2}{4\rho^2} + 1}.$$

**352. Résultat des expériences; variation du pouvoir rotatoire avec la direction.** — Reprenons d'abord l'expérience avec le quartz comprimé (§ 350). Il devient évidemment biréfringent. On peut pousser la compression assez loin pour que les nouveaux axes optiques fassent l'un avec l'autre un angle d'une dizaine de degrés. Nous avons étudié au § 350 les résultats de l'expérience quand la lumière traverse le cristal suivant la direction qu'occupait l'axe avant la compression. Étudions les phénomènes dans la direction des deux nouveaux axes optiques.

On constate un pouvoir rotatoire précisément égal à celui qui existe dans la direction de l'axe quand la compression est supprimée; ce qui confirme l'hypothèse de Mac Cullagh (§ 375).

Pourtant cette hypothèse n'est pas suffisante pour tous les cristaux.

*Non seulement le pouvoir rotatoire est généralement variable avec la direction, mais encore il peut changer de signe.*

Par exemple, le sucre cristallise dans le système clinorhombique avec hémiedrie non superposable (classe 2, symbole  $L_2$ ). Les axes optiques sont dans le plan symétrie (d'ailleurs déficient en vertu de l'hémiedrie) de notation  $g^1$ . L'un est à peu près exactement normal à la face  $h^1$  qui est un plan de clivage parfait; l'autre fait un angle d'environ  $48^\circ$  avec le premier.

L'expérience montre que, suivant l'axe optique normal au plan de

clivage, le pouvoir rotatoire est *gauche* et de  $-22^\circ$  par centimètre; suivant l'axe optique incliné sur le plan de clivage, le pouvoir rotatoire est *droit* et de  $+64^\circ$  par centimètre.

Le pouvoir rotatoire pour le sucre fondu calculé d'après le pouvoir rotatoire des dissolutions est de  $+10^\circ$ .

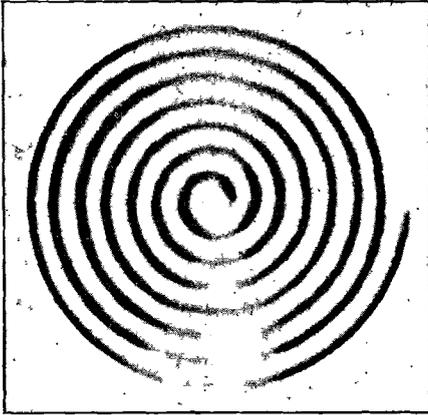


Fig. 214.

En lumière convergente et avec un analyseur circulaire, on trouve *une spirale* (fig. 214); elle ressemble à l'une des spirales quadratiques qu'on observe avec le quartz dans les mêmes conditions (§ 342).

Les spirales sont de rotations inverses pour les deux axes du sucre.

Pour certains corps biaxes, les pouvoirs rotatoires sont de même signe pour les deux axes, mais de grandeurs très différentes. Pour le rhamnose,

par exemple, on trouve  $-129^\circ$  et  $-54^\circ$  par centimètre.

Ces faits montrent à quel point l'hypothèse d'une indépendance du pouvoir rotatoire et de la direction de propagation est généralement erronée. L'étude des biaxes est particulièrement instructive à cet égard, parce que les propriétés rotatoires peuvent être décelées dans deux directions très différentes entre elles.

## CHAPITRE IX

### SYMETRIE DES MILIEUX ACTIFS

---

#### Polarisation rotatoire des corps pseudo-isotropes.

**353. Pouvoir rotatoire des corps vitreux ou liquides et des dissolutions.** — Certaines substances vitreuses, liquides ou dissoutes, *par conséquent pseudo-isotropes*, jouissent du pouvoir rotatoire.

*Pour une même épaisseur traversée, la rotation est la même quelle que soit la direction du rayon (la substance est supposée homogène); elle est de sens invariable par rapport à l'observateur.*

Dans les solutions, le pouvoir rotatoire est caractérisé par un paramètre dont voici la définition. Soit  $R$  la rotation mesurée en degrés et fraction décimale de degré,  $V$  le volume de la solution en centimètres cubes,  $p$  le poids en grammes de la substance dissoute,  $l$  la longueur en décimètres; on pose :

$$R = \rho \frac{pl}{V} : \quad (1)$$

$\rho$  est, par définition, le pouvoir rotatoire spécifique. C'est la rotation produite par une colonne d'un décimètre d'une dissolution contenant 1 gramme de substance par centimètre cube.

S'il s'agit d'un corps liquide pur (essences de térébenthine), on définit le pouvoir rotatoire spécifique  $\rho$  comme la rotation produite par une colonne d'un décimètre.

Pour que la définition de  $\rho$  ait un intérêt dans le cas des solutions, il faut que  $\rho$  soit approximativement une constante. En particulier  $V : l$  représentant la section droite de la colonne, il faut que la dissolution étendue de manière à remplir des tubes de même section et de longueurs quelconques produise sensiblement la même rotation  $R$ .

On peut encore dire que la matière dissoute doit produire le même

effet quelle que soit sa dilution, pourvu que la quantité de matière traversée par la lumière reste la même.

C'est ce qui a lieu pour le sucre dissous dans l'eau, l'essence de térébenthine dissoute dans l'éther, ... Il ne faut cependant considérer la constance du pouvoir rotatoire que comme une première et souvent même assez grossière approximation.

Dans certains cas, on peut augmenter la concentration *jusqu'à obtenir un solide*, sans que le pouvoir rotatoire varie beaucoup. Ainsi on obtient des plaques de sucre diaphanes et amorphes qui ont à peu près le même pouvoir spécifique qu'une dissolution de sucre.

Indépendamment d'ailleurs de cette constance, il est intéressant de remarquer que l'état solide ne s'oppose pas nécessairement à l'existence du pouvoir rotatoire des substances qui le possèdent à l'état liquide ou dissous. La térébenthine peut être solidifiée par refroidissement; la dextrine, obtenue sous forme de poudre impalpable, chauffée et comprimée, se prend en plaques transparentes; l'acide tartrique peut être fondu en masses transparentes amorphes. Ces corps solides font encore tourner le plan de polarisation; le pouvoir rotatoire est à peu près égal à celui que les dissolutions font prévoir.

On peut obtenir par fusion des mélanges solides et amorphes d'acides tartrique et borique; ils jouissent du pouvoir rotatoire.

Quand le solvant agit chimiquement sur le corps actif, il y a naturellement modification du pouvoir rotatoire. Le pouvoir des solutions d'essence de térébenthine dans l'alcool et l'acide acétique augmente pendant des mois. Le glucose de raisin, aussitôt après sa dissolution dans l'eau, fait tourner le plan de polarisation deux fois plus qu'au bout de quelques heures.

Nous n'insisterons pas sur ces phénomènes dont l'intérêt est surtout chimique.

**354. Dispersion.** — On peut compenser presque absolument une lame de quartz par une colonne d'essence de térébenthine ou une dissolution de sucre (§ 328): donc la dispersion est la même. Mais c'est un hasard; chaque substance possède une loi de dispersion propre.

Il arrive même que la dispersion est *anormale*. Pour les dissolutions d'acide tartrique dans l'eau et l'extrémité rouge du spectre, la rotation croît bien quand la longueur d'onde décroît, mais il y a un maximum dans la région moyenne du spectre visible; puis la rotation décroît vers le violet. Il n'existe plus de teinte sensible avec la lumière blanche.

Les résultats sont encore plus singuliers avec des mélanges en proportion convenables d'essences de térébenthine dextrogyres et lévogyres; ce qui prouve qu'elles n'ont pas la même loi de dispersion.

**355. Pouvoir rotatoire des vapeurs.** — Puisque le pouvoir rotatoire existe dans les liquides et dans les solides amorphes, il faut bien l'attribuer, non pas au mode d'agrégation, mais à la symétrie des molécules. On sait au contraire que le quartz fondu ou dissous dans l'acide fluorhydrique perd son pouvoir rotatoire. Le pouvoir est dû, dans ce cas et les cas analogues, non aux propriétés des molécules, mais à l'arrangement cristallin.

Rien n'empêche d'ailleurs que le corps soit actif simultanément en dissolution et sous forme de cristaux : nous reviendrons là-dessus plus loin.

Rien n'empêche aussi qu'il existe des vapeurs actives; mais le pouvoir rotatoire est alors plus difficile à mettre en évidence, vu la longueur des colonnes que la lumière doit traverser et qu'on doit maintenir à température élevée.

Toutes les essences actives à l'état liquide, le sont à l'état gazeux. *Le pouvoir rotatoire rapporté à la masse*, pouvoir qui varie avec la température, n'éprouve pas de changement brusque quand le liquide se vaporise.

**356. Absorption inégale des circulaires droits et gauches.** — Certains corps ne se contentent pas de propager les circulaires droits et gauches avec des vitesses différentes; ils leur font subir d'autres traitements *différents*.

La liqueur de Fehling, qui contient du tartrate de cuivre coloré, par exemple, absorbe inégalement les circulaires droits et les circulaires gauches qu'elle propage sans déformation. Quand elle reçoit de la lumière rectiligne (c'est-à-dire deux circulaires inverses de rayons égaux), elle restitue de la lumière elliptique provenant de la composition à l'émergence de deux circulaires inverses de rayons inégaux (tome IV, § 239) (Cotton).

La mesure de l'ellipticité et la détermination de l'azimut du grand axe de l'ellipse permettent de déterminer la rotation et la différence des absorptions.

En utilisant un polariseur circulaire droit ou gauche, on peut montrer l'inégalité des absorptions par les méthodes photométriques.

**357. Symétrie des milieux qui jouissent du pouvoir rotatoire.** — Dans un corps isotrope, tout point est un centre, toute direction est un axe de révolution (axe de répétition d'ordre  $\infty$ ), tout plan est un plan de symétrie. Dans un corps pseudo-isotrope jouissant du pouvoir rotatoire, *les plans de symétrie ne peuvent subsister*. Considérons en effet (fig. 215) deux rayons également inclinés sur le plan P supposé de symétrie : ils devraient être traités d'une manière symétrique. Donc les vibrations circulaires qui se propagent avec la même vitesse, devraient être de sens contraires. Il résulterait de là

des rotations de sens contraires. Or nous savons que le sens de la rotation est invariable.

*Il ne peut exister de centre.* En effet, les circulaires de même sens absolus  $m_1$  et  $m_2$  (fig. 216) devraient être traités de même; or ils sont de sens contraires pour deux observateurs  $O_2$  et  $O_1$  placés symétriquement par rapport au centre C. Donc, en changeant le sens de propagation, la rotation devrait changer de sens. Ce qui n'est pas.

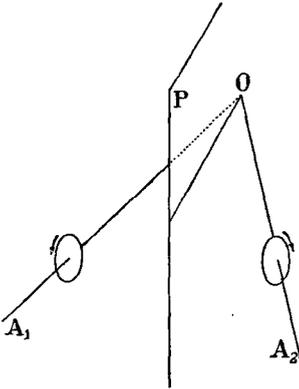


Fig. 215.

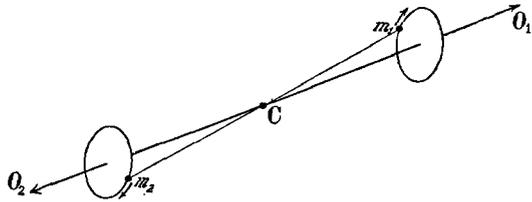


Fig. 216.

Le changement de sens de rotation avec le sens de propagation se présente dans la polarisation magnétique (§ 374).

Dans les corps pseudo-isotropes actifs, les axes de révolution des corps isotropes subsistent, comme on le vérifiera facilement.

Ainsi, entre les corps isotropes et les corps pseudo-isotropes actifs, existe la même différence qu'entre les formes holoédres et les formes hémiedres énantiomorphes.

Supposons en dissolution des *molécules* dont la symétrie soit celle d'un des types énantiomorphes ou tétartoédres pouvant jouir du pouvoir rotatoire (§ 358) à l'état de cristaux. Elles sont orientées d'une manière absolument irrégulière dans la solution. Chacune ne possédant pas de plan de symétrie, l'ensemble ne peut en avoir. Nous réaliserons donc un milieu dans lequel il n'est pas contradictoire d'imaginer l'existence du pouvoir rotatoire.

**358. Classes des cristaux pouvant donner des solutions actives.**— Elles sont au nombre de onze, dont voici l'énumération.

**SYSTÈME CUBIQUE.**

- |   |         |         |         |
|---|---------|---------|---------|
| 1. <i>Hémiédrie énantiomorphe</i> (classe 11) | $3A_4,$ | $4L_3,$ | $6L_2.$ |
| 2. <i>Tétartoédrie</i> (classe 10)            | $3A_2,$ | $4L_3.$ |         |

SYSTÈME HEXAGONAL.

- |  |                           |
|--|---------------------------|
| 3. <i>Hémiédrie énantiomorphe</i> (classe 9) | $\Lambda_6, 3L_2, 3L'_2.$ |
| 4. <i>Tétartoédrie</i> (classe 3)            | $\Lambda_6.$              |

SYSTÈME RHOMBOÉDRIQUE.

- |  |                    |
|--|--------------------|
| 5. <i>Hémiédrie énantiomorphe</i> (classe 7) | $\Lambda_3, 3L_2.$ |
| 6. <i>Tétartoédrie</i> (classe 3)            | $\Lambda_3.$       |

SYSTÈME QUATERNAIRE.

- |  |                           |
|--|---------------------------|
| 7. <i>Hémiédrie énantiomorphe</i> (classe 8) | $\Lambda_4, 2L_2, 2L'_2.$ |
| 8. <i>Tétartoédrie</i> (classe 4)            | $\Lambda_4.$              |

SYSTÈME ORTHORHOMBIQUE.

- |  |                     |
|--|---------------------|
| 9. <i>Hémiédrie holoaxe</i> (classe 6) | $L_2, L'_2, L''_2.$ |
|--|---------------------|

SYSTÈME CLINORHOMBIQUE.

- |   |        |
|---|--------|
| 10. <i>Hémiédrie énantiomorphe</i> (classe 2) | $L_2.$ |
|---|--------|

SYSTÈME TRICLINIQUE.

- |                                 |                             |
|---------------------------------|-----------------------------|
| 11. <i>Hémiédrie</i> (classe 1) | pas d'éléments de symétrie. |
|---------------------------------|-----------------------------|

359. **Constitution des milieux amorphes actifs.** — Nous ne pouvons expliquer l'existence du pouvoir rotatoire dans les milieux amorphes que par l'existence d'une *molécule chimique à mériédrie non superposable, molécule qu'il faut soigneusement distinguer du remplissage de la maille de la matière cristallisée.*

Quand les molécules chimiques existent sous les deux formes conjuguées, les solutions sont les unes droites, les autres gauches. Si dans une solution existe le même nombre de molécules conjuguées, le pouvoir rotatoire disparaît par compensation.

Une solution ne renfermant qu'une espèce de molécules, active par conséquent, donne nécessairement par cristallisation une forme affectant la mériédrie non superposable. S'il existe deux espèces de dissolutions, elles donnent par cristallisation des formes conjuguées.

La réciproque n'est pas vraie : les cristaux peuvent être dyssymétriques et donner des dissolutions inactives. *La dyssymétrie résulte alors de la cristallisation.* Ainsi une solution de sulfate de zinc et de magnésium à 7 molécules d'eau donne des cristaux appartenant aux deux formes conjuguées. Si on recueille l'une des espèces de cristaux et qu'on les dissout, on obtient une solution *inactive* qui donne de nouveau par cristallisation les deux espèces de cristaux.

Bien qu'une solution active donne nécessairement un cristal à mériédrie non superposable, il est impossible de prévoir si elle donnera un cristal *optiquement actif* : 1° parce que la rotation dans la solution n'est qu'un effet moyen dû à toutes les molécules distribuées dans tous les azimuts ; 2° parce que la cristallisation peut introduire de nouvelles dyssymétries, ce que prouve l'existence de cristaux actifs dont les solutions sont inactives.

360. **Représentation de la molécule chimique. Carbone asymétrique (Van t'Hoff).** — On a cherché à représenter la dyssymétrie de la molécule que l'existence du pouvoir rotatoire rend nécessaire. On y est parvenu en disposant les parties constitutives de la molécule *dans l'espace*; d'où le nom de *Stéréochimie* donné au système de ces notations.

On a d'abord remarqué que les dérivés du méthane du type  $CR_1R_2R_3R_4$  [par exemple l'acide lactique,  $C(CH^3)H(OH)(CO^2H)$ ],

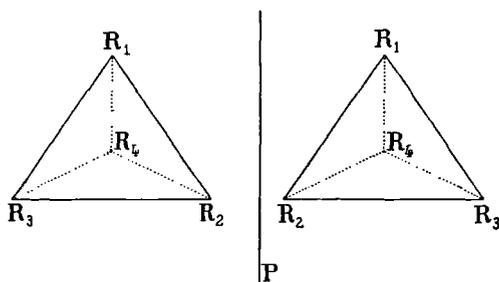
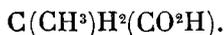


Fig. 217.

dans lesquels le carbone est lié à quatre groupes *différents*, présentent toujours deux isomères de pouvoirs rotatoires égaux et de sens contraires, qu'on appelle *antipodes optiques*.

Il faut que les groupes soient différents; si on remplace dans l'acide lactique l'oxydride par un

hydrogène, les deux acides lactiques inverses donnent le même acide propionique *inactif* :



Comme conséquence de ces faits, Van t'Hoff a imaginé l'hypothèse du *carbone asymétrique* placé au centre d'un tétraèdre régulier dont les sommets sont occupés par les quatre groupes différents. On obtient bien ainsi deux dispositions non superposables, symétriques par rapport à un plan; on en obtient deux seulement (fig. 217).

Il est clair que si les groupes  $R_2$  et  $R_3$  deviennent identiques, les deux tétraèdres sont superposables.

A l'égard de molécules *symétriques*, les antipodes ont identiquement les mêmes propriétés.

Il n'en est plus de même à l'égard de molécules elles-mêmes *dyssymétriques*. On obtient alors des réactions *dyssymétriques*; les produits résultants ne sont plus des antipodes optiques. Comme pour les isomères ordinaires, leurs propriétés (solubilités,...) peuvent différer considérablement. Ces réactions dyssymétriques sont précisément utilisées pour la séparation des antipodes.

Il n'entre pas dans le cadre de cet ouvrage de pousser plus loin l'étude des notations stéréochimiques, par exemple de chercher comment se relie entre eux plusieurs carbones asymétriques. Nous admettrons seulement qu'il en existe dans toutes les substances actives.

361. **Combinaisons racémiques; séparation des antipodes.**  
 — Partons d'un corps inactif  $CR_1R_2(R_3)^2$  et introduisons un quatrième groupe  $R_4$  pour obtenir le corps actif  $CR_1R_2R_3R_4$ . Les deux groupes  $R_3$  étant symétriquement placés par rapport au carbone dans le corps primitif, il se forme la même quantité des deux antipodes.

On obtient ainsi soit un corps inactif et non dédoublable en deux corps actifs, soit un corps inactif et dédoublable en deux corps actifs; dans ce dernier cas, on dit que le corps est une *combinaison racémique*.

Proposons-nous de dédoubler la combinaison racémique en ses antipodes.

L'opération est d'autant plus difficile qu'ils jouissent de propriétés physiques identiques (le pouvoir rotatoire excepté).

On peut employer une *opération dyssymétrique*. Par exemple, une dissolution *sursaturée* de racémate double de sodium et d'ammonium laisse déposer un tartrate actif sous l'influence d'un cristal de ce tartrate.

Les organismes agissent généralement d'une manière dyssymétrique. Ainsi le *glucose droit* est seul capable de fermenter : il se forme donc à partir du glucose inactif.

Les antipodes optiques apparaissent quelquefois spontanément par cristallisation. On peut les diviser en deux groupes suivant la disposition relative des courbes de solubilité de la combinaison racémique et des antipodes optiques.

Si la courbe de solubilité des antipodes est au-dessous de la courbe de la combinaison racémique (fig. 218), si donc celle-ci est plus soluble, il y a séparation spontanée. En effet, au-dessous de AB, la liqueur n'est pas saturée en combinaison racémique; dans la région ABD au contraire, elle est sursaturée par rapport aux antipodes; ceux-ci se déposeront donc. Mais il faut que la température soit inférieure à  $T_0$ . Au-dessus de cette température, on obtient toujours par cristallisation la combinaison racémique.

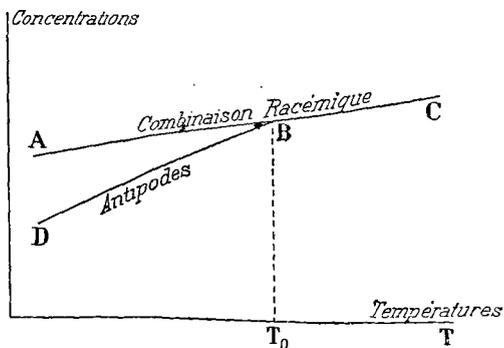


Fig. 218.

Si la combinaison racémique est moins soluble que les antipodes, c'est elle qui cristallise. La séparation est impossible par dissolution.

## Symétrie des cristaux actifs.

362. **Existence des éléments de symétrie.** — On trouve dans tous les livres que le pouvoir rotatoire ne peut exister que dans les milieux cristallins ou amorphes ne possédant ni plans de symétrie, ni centres : ce qui revient à dire que les cristaux actifs appartiennent nécessairement aux onze classes énumérées au § 358. En fait, les milieux actifs connus satisfont à cette loi ; *mais elle ne vaut en théorie que grâce à une hypothèse passée généralement sous silence.*

On admet implicitement que la substance doit être droite pour toutes les directions ou gauche pour toutes les directions. Cette hypothèse, valable pour les milieux pseudo-isotropes (§ 357), paraît insoutenable pour les cristaux, d'après les expériences dont il est parlé au § 352 ; il faut donc reprendre la question *de plano*.

Admettons que, dans chaque direction, se propagent deux ellipses de rotations inverses, géométriquement semblables et ayant leurs grands axes rectangulaires.

La figure 219 montre immédiatement que pour deux directions A et B symétriques par rapport au plan P, les ellipses identiques de forme sont de rotations inverses ; que pour deux directions B et C

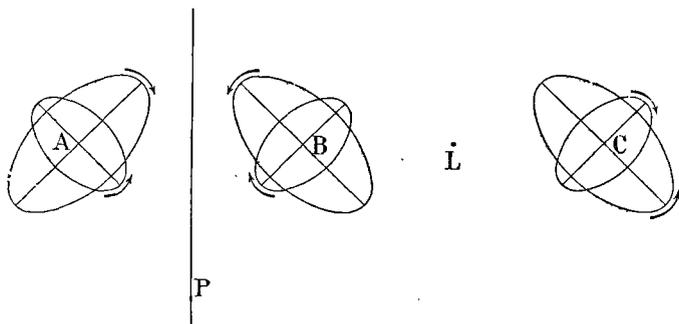


Fig. 219.

symétriques par rapport à l'axe binaire L, les ellipses identiques de forme sont de mêmes rotations. On verrait de même, sans qu'il soit nécessaire de faire une figure nouvelle et en se reportant à la figure 216, que dans deux directions symétriques par rapport à un centre, c'est-à-dire dans la même direction absolue, la lumière se propageant dans les deux sens, les ellipses identiques sont de rotations inverses *par rapport à l'observateur qui les reçoit.*

Si donc *on pose* que le pouvoir rotatoire doit être de même signe pour toutes les directions, il va de soi qu'il faut supprimer les centres

et les plans de symétrie; d'où la réduction des 32 classes à 11 dans lesquelles doit rentrer le cristal, forme limitée du milieu.

Effectivement les cristaux actifs connus sont dans ce cas (§ 365).

Bien entendu, des cristaux peuvent appartenir à ces onze classes sans posséder le pouvoir rotatoire, une dyssymétrie n'entraînant pas nécessairement un effet dyssymétrique. Ainsi les nitrates de plomb, de baryum, de strontium cubiques de la classe 11 (hémiedres énantiomorphes) sont dans ce cas. Tous les cristaux cubiques actifs sont té tartoédres (classe 10).

**363. Hypothèse généralisée.** — Quand on abandonne l'hypothèse que le pouvoir rotatoire doit avoir le même signe dans toutes les directions, on peut trouver d'autres classes actives. *Nous maintiendrons seulement que, suivant deux directions opposées, les pouvoirs sont égaux et de même signe.*

CRISTAUX A AXE PRINCIPAL CRISTALLOGRAPHIQUE, UNIAXES OPTIQUES.

Le système quadratique offre deux classes possibles.

1° *Hémiedrie sphénoïdale* (classe 28,  $D_{2d}$ );  $\Lambda_2$ ,  $2L_2$ ,  $2P'$ .

Les deux plans de symétrie  $P'$  passent par l'axe  $\Lambda$ ; les axes binaires alternent avec les plans de symétrie. La première figure 62 représente la projection stéréographique des faces; la figure 63 représente le solide le plus général. La figure 220 montre comment le pouvoir rotatoire, qu'on peut considérer comme ajouté à la double réfraction (§ 344), se répartit.

Le pouvoir rotatoire, changeant de signe quand on traverse les plans de symétrie, doit être nul sur ces plans, et par conséquent sur leur intersection qui est l'axe  $\Lambda_2$ . La figure représente ce qui se passe au-dessus de l'équateur.

Les axes binaires dont les pôles sont en 2, nécessitent que le pouvoir soit égal et de même sens au-dessus et au-dessous du tableau.

En définitive, le pouvoir rotatoire serait maximum sur ces axes même, c'est-à-dire dans les directions normales à l'axe optique. Sa coexistence avec la double réfraction ordinaire rendrait son étude très difficile.

2° *Té tartoédrie sphénoïdale* (classe 15,  $S_4$ );  $\Lambda_2$ .

Il existe un axe de seconde espèce d'ordre 4, ou, si l'on veut, un plan de symétrie alterne du même ordre. Les phénomènes seraient les mêmes que pour la symétrie précédente. La condition que suivant deux directions opposées le pouvoir soit le même, rétablit les éléments de symétrie qui font ici défaut.

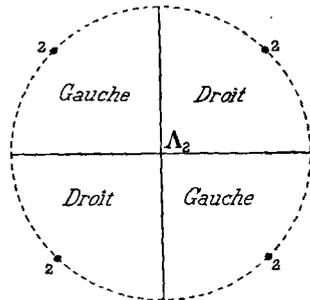


Fig. 220.

CRISTAUX A DEUX AXES OPTIQUES.

1° *Système orthorhombique, hémiédrie hémimorphe* (classe 20,  $C_{2v}$ );  $L_2$ ,  $P'$ ,  $P''$ .

La figure 220 peut servir, on supposera seulement que les axes binaires n'existent pas. La répartition du pouvoir rotatoire est celle indiquée. Si les axes optiques sont dans le plan de la figure, c'est-à-dire normaux à l'axe d'hémimorphisme, il existera deux directions nécessairement symétriques par rapport aux plans  $P'$  et  $P''$ , pour lesquels le pouvoir rotatoire sera maximum et la double réfraction nulle : conditions excellentes pour observer le phénomène. *On aura suivant les deux axes optiques des rotations égales et de sens contraires.*

2° *Système clinorhombique, hémiédrie* (classe 12,  $S_1$ );  $P$ .

Pour que le pouvoir rotatoire soit facilement observable, il faudrait que l'une des bissectrices des axes soit normale au plan de symétrie.

**364. Faces plagiédres.** — Si donc le pouvoir rotatoire *dans les cristaux* n'est pas nécessairement lié à l'hémiédrie non superposable (à l'inverse de ce qui a lieu pour les substances *en dissolution* qu'on peut toujours amener à cristalliser avec cette hémiédrie), toujours est-il que les cristaux actifs *connus* sont hémiédres énantiomorphes. On appelle *faces plagiédres* les faces qui décèlent cette hémiédrie.

Quelques remarques sont ici nécessaires.

Les faces plagiédres existent ou n'existent pas, comme toute autre face. On connaît par exemple une foule de cristaux de quartz qui ne les portent pas, bien que droits ou gauches. De ce qu'une face est possible, il ne résulte pas qu'elle existe nécessairement.

On trouve des échantillons de quartz *de rotation parfaitement déterminée* dont certains angles portent les faces plagiédres à droite, dont d'autres portent les faces à gauche. Rien d'étonnant à cela. N'oublions pas que c'est le réseau qui détermine les faces. Tout cristal hémiédre admet donc *comme possibles* toutes les faces de la forme holoédre. L'hémiédrie se traduit généralement par la suppression de la moitié des faces; mais il n'y a rien de contradictoire à l'existence simultanée de l'ensemble.

D'ailleurs, même en supposant qu'il n'existe que la moitié des faces *de chaque forme*, il peut exister simultanément plusieurs formes dont les unes conservent les faces qui sont à droite sur les angles, dont les autres conservent les faces qui sont à gauche.

Il peut même arriver que *sur les mêmes angles* existent des faces plagiédres à droite et des faces plagiédres à gauche *appartenant à des formes holoédres différentes*, alors même que le cristal serait en tous ses points de rotation unique.

Si nous insistons sur ces points, c'est pour combattre l'idée qu'on

se fait généralement d'une relation nécessaire entre la situation des faces plagiédres et le sens de la rotation.

Autre remarque. Prenons un corps comme le formiate de strontium (orthorhombique), qui n'est pas actif en dissolution et qui ne le paraît pas davantage en cristaux. Il est pourtant hémiedre énantiomorphe, et l'on trouve deux espèces conjuguées de cristaux. Si on redissout des cristaux ayant les faces plagiédres disposées de même, et qu'on fasse de nouveau cristalliser, on obtient simultanément des cristaux des deux espèces. Le poids total de l'une des espèces diffère toujours du poids de l'autre, mais dépend des conditions de cristallisation et pas du tout de l'espèce des cristaux qu'on a fait dissoudre. Ces phénomènes montrent nettement que l'hémiedrie ici est une pure affaire de cristallisation.

**365. Liste des cristaux cubiques et des cristaux uniaxes possédant le pouvoir rotatoire à l'état de cristaux.** — Le nombre des cristaux possédant le pouvoir rotatoire est relativement petit. On en connaît une vingtaine dont voici la liste.

CRISTAUX CUBIQUES.

Chlorate de sodium, bromate de sodium, acétate urano-sodique, sulfo-antimoniate de sodium, alun d'amylamine.

CRISTAUX HEXAGONAUX OU RHOMBOÉDRIQUES.

Quartz, cinabre, maticocamphre, hyposulfates de potassium, de rubidium, de plomb, de strontium, de calcium, de césium, métapériodate de sodium, benzile.

CRISTAUX QUADRATIQUES.

Sulfate de strychnine, diacétyl-phéno-phtaléine, carbonate de guanidine, sulfate d'éthylène diamine.

Les cristaux cubiques sont pseudo-isotropes en ce sens qu'ils possèdent exactement les mêmes propriétés dans toutes les directions. On peut comparer leurs effets à ceux des liquides actifs, comme l'essence de térébenthine. La surface d'onde se compose de deux sphères concentriques.

*Toutes les substances que nous avons énumérées présentent une forme méridrique non superposable.* Elles appartiennent aux huit classes : 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11.

**366. Obtention des phénomènes rotatoires par un empilement régulier de lamelles cristallines.** — Les phénomènes dus à des empilements de lamelles ont été étudiés d'une manière très générale; nous nous garderons de reproduire la théorie complète, qui n'a qu'un intérêt médiocre. Nous nous limiterons immédiatement à des paquets obtenus avec  $n$  lamelles *identiques* dont les sections principales font avec les sections de la suivante ou de la précédente un angle  $\pi : n$ . Si on ajoute une lamelle au paquet, ses sections sont par conséquent parallèles à celles de la première lamelle.

Les figures 221, 222 et 223 représentent les sections principales de paquets formés de trois, quatre et six lamelles; l'empilement est à droite.

Soit  $\delta$  le retard relatif (évalué en phase) de la vibration dirigée suivant les sections 1', 2', 3', ... par rapport à la vibration dirigée suivant les sections 1, 2, 3, ...

Après la traversée normale d'un paquet, une vibration rectiligne est généralement transformée en une vibration elliptique. Mais supposons le retard  $\delta$  petit : nous allons démontrer que la différence de phase entre les composantes rectangulaires dirigées suivant les sections de la dernière lame du paquet, est nulle aux termes en  $\delta^2$  près. Autrement dit, les retards de ces composantes sont de la forme :

$$\varphi = A\delta + B\delta^3 + \dots, \quad \psi = A\delta + B'\delta^3 + \dots;$$

le paramètre A est le même pour les deux.

La vibration quasi rectiligne émergente fait avec la vibration rectiligne incidente un angle  $\alpha$  qui est de la forme :

$$\alpha = M\delta^2 + N\delta^3 + \dots$$

Ceci posé, cherchons à reproduire au moyen de paquets superposés les propriétés d'une substance dont le pouvoir rotatoire par unité d'épaisseur est  $\rho$ . Les lamelles sont caractérisées par des indices  $\nu_0$  et  $\nu_1$ ; il y a  $m$  paquets et  $mn$  lamelles par unité d'épaisseur. On a donc :

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\nu_0 - \nu_1}{mn}, \quad \rho = m\alpha = \frac{4\pi^2 M}{\lambda^2 n^2} \frac{(\nu_0 - \nu_1)^2}{m}.$$

Nous pouvons prendre  $m$  et  $\nu_0 - \nu_1$  de manière que  $\rho$  ait telle valeur choisie à l'avance. Si nous prenons  $m$  suffisamment grand,  $\delta$  sera très petit : l'ellipticité qui dépend de  $\delta^2$ , sera par conséquent aussi négligeable que nous voudrons. Nous aurons réalisé une substance ayant le pouvoir rotatoire comme conséquence de sa structure.

A la vérité, cette théorie n'est admissible qu'à la condition que nous ne soyons pas forcés de prendre  $m$  et par conséquent  $\nu_0 - \nu_1$  trop grands. Nous ne pouvons en juger qu'après avoir calculé la valeur numérique de M.

Avant de commencer les calculs, observons que toute vibration incidente peut être décomposée suivant les sections 1 et 1' de la première lamelle. Nous étudierons donc les vibrations ainsi dirigées.

**367. Paquets ternaires.** — Posons :

$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \sqrt{3} : 2 = p,$$

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = 1 : 2 = q.$$

Voici le tableau des composantes qui dérivent d'une composante suivant 1 (fig. 221) et sont à l'émergence dirigées suivant 3 et 3'.

	123	12'3	123'	12'3'
Amplitudes	$q^2$	$-p^2$	$-pq$	$-pq$
Retards	0	$\delta$	$\delta$	$2\delta$ .

La composante 123 est obtenue comme suit.

La vibration 1 se projette sur 2; on doit multiplier par  $\cos 60^\circ = q$ . Après la traversée de la lame 2, elle se projette sur 3, d'où nouvelle multiplication par  $q$ . En définitive, l'amplitude est  $q^2$  et le retard *relatif* nul.

Passons à la composante 12'3.

La composante 1 se projette suivant 2'; il faut multiplier par :

$$\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -p.$$

La lumière traverse la lamelle 2; comme elle est dirigée dans la section 2', elle prend un retard relatif  $\delta$ . Elle se projette ensuite suivant 3; il faut multiplier par  $\cos 30^\circ = p$ . En définitive, l'amplitude est  $-p^2$  et le retard *relatif*  $\delta$ .

Et ainsi de suite pour les autres vibrations.

Cherchons la vibration émergente. On a : suivant 3,

$$q^2 \sin \omega t - p^2 \sin (\omega t - \delta) = A \sin (\omega t - \varphi);$$

suitant 3',

$$-pq \sin (\omega t - \delta) - pq \sin (\omega t - 2\delta) = B \sin (\omega t - \psi).$$

Identifions, il vient :

$$4A \cos \varphi = 1 - 3 \cos \delta,$$

$$4A \sin \varphi = -3 \sin \delta;$$

$$4B \cos \psi = -\sqrt{3} (\cos \delta + \cos 2\delta),$$

$$4B \sin \psi = -\sqrt{3} (\sin \delta + \sin 2\delta).$$

Calculons  $\text{tg } \varphi$  et  $\text{tg } \psi$  (ce qui est immédiat); développons les seconds membres. On trouve aisément, aux termes en  $\delta^3$  près :

$$\varphi = \psi = 3\delta : 2.$$

Pour calculer A et B, portons cette valeur de la phase dans les équations donnant  $A \cos \varphi$  et  $B \cos \psi$ ; il vient :

$$4A \left(1 - \frac{9\delta^2}{8}\right) = -2 - \frac{3\delta^2}{2},$$

$$A = -\frac{1}{2} - \frac{3\delta^2}{16};$$

$$4B \left(1 - \frac{9\delta^2}{8}\right) = -\sqrt{3} \left[2 - \frac{5\delta^2}{2}\right],$$

$$B = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{16} \delta^2.$$

(1)

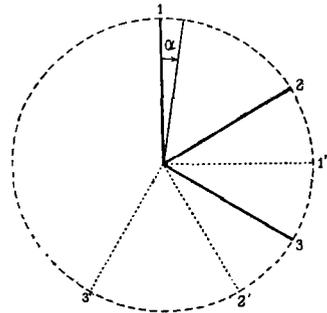


Fig. 221.

Cherchons quelles seraient les valeurs de A et de B, à supposer que la vibration 1 ait tourné d'un angle  $\alpha$  dans le sens dextrorsum (sens de l'empilement). On aurait :

$$A = -\cos(60^\circ + \alpha) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha. \quad (2)$$

$$B = -\cos(30^\circ - \alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\alpha}{2}.$$

Identifions les équations (1) et (2); il vient :

$$\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{8}\delta^2, \quad M = -\frac{\sqrt{3}}{8}. \quad (3)$$

*La rotation est sinistrorsum si l'empilement est dextrorsum.*

Nous vérifions donc la proposition énoncée pour la vibration incidente 1. Reconnençons pour 1'. Nous avons maintenant le tableau :

	1'23	1'2'3	1'23'	1'2'3'
Amplitudes	$pq$	$pq$	$-p^2$	$q^2$
Retards	$\delta$	$2\delta$	$2\delta$	$3\delta$ .

On continuera les calculs comme précédemment et on arrivera aux mêmes résultats : vibration quasi rectiligne (aux termes en  $\delta^3$  près), rotation donnée par la formule (3).

Une vibration quelconque peut être décomposée en deux vibrations dirigées suivant 1 et 1'; elle est donc quasi rectiligne après son passage à travers le paquet, et sa rotation est donnée par l'équation (3).

**368. Paquets quaternaires.** — Nous traiterons encore les paquets quaternaires en passant rapidement sur les points élucidés au para-

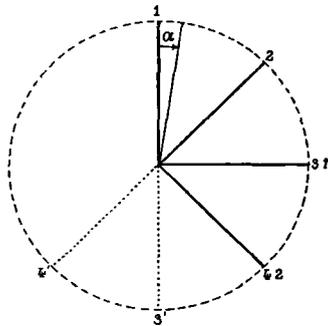


Fig. 222.

graphe précédent. La figure 222 représente les sections principales.

Posons :  $p = \cos 45^\circ = \sin 45^\circ = 1 : \sqrt{2}.$

La vibration 1 donne les huit composantes du tableau suivant :

	1234	12'34	123'4	12'3'4
Amplitudes	$p^3$	$-p^3$	$-p^3$	$-p^3$
Retards	0	$\delta$	$\delta$	$2\delta$ .
	1234'	12'34'	123'4'	12'3'4'
Amplitudes	$-p^3$	$+p^3$	$-p^3$	$-p^3$
Retards	$\delta$	$2\delta$	$2\delta$	$3\delta$ .

Identifications avec les deux composantes :

suivant 4,  $A \sin(\omega t - \varphi)$ ,  
 suivant 4',  $B \sin(\omega t - \psi)$ .

On trouve les conditions :

$$A \cos \varphi = p^3(1 - 2 \cos \delta - \cos 2\delta), \quad A \sin \varphi = -p^3(2 \sin \delta + \sin 2\delta);$$

$$B \cos \psi = -p^3(\cos \delta + \cos 3\delta), \quad B \sin \psi = -p^3(\sin \delta + \sin 3\delta).$$

Aux termes en  $\delta^3$  près, on a :

$$\psi = \varphi = 2\delta.$$

Transportant dans les expressions de  $A \cos \varphi$  et de  $B \cos \psi$ , il vient :

$$A = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\delta^2}{2\sqrt{2}}, \quad B = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\delta^2}{2\sqrt{2}}. \quad (1)$$

Écrivons d'autre part que tout se réduit à une rotation  $\alpha$  :

$$A = -\cos(45^\circ + \alpha) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}, \quad (2)$$

$$B = -\cos(45^\circ - \alpha) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\alpha}{\sqrt{2}},$$

Identifications (1) et (2), il reste :

$$\alpha = -\frac{\delta^2}{2}, \quad M = -\frac{1}{2}.$$

369. **Paquets sénaires et d'ordre supérieur.** — La méthode de calcul précédente est inapplicable dès que nous avons affaire à six lames et *a fortiori* à plus de six lames. Le nombre des combinaisons devient rapidement énorme : par exemple, il faut traiter seize composantes quand on a six lames, pour savoir ce qu'une vibration dirigée suivant 1 donne à la sortie suivant 6 (ou encore suivant 6').

On applique une méthode générale qui consiste à chercher la modification introduite dans une vibration elliptique quasi rectiligne par le passage à travers une lame très mince.

La vibration est caractérisée avant le passage dans la lame par le rapport (très petit) de ses axes, défini par la tangente d'un angle I,

par l'angle que fait le grand axe avec une des sections de la lame, enfin par la phase de la vibration dirigée suivant ce grand axe.

La modification due à la traversée de la lame s'exprime par une variation  $dI$  du rapport des axes, une rotation  $d\alpha$  du grand axe et une variation de phase de la vibration dirigée suivant ce grand axe.

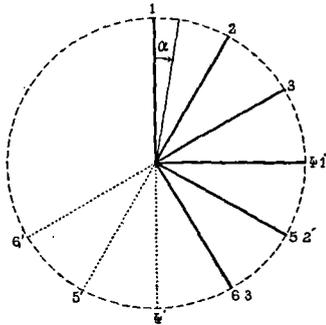


Fig. 223.

Toutes ces quantités sont *du premier ordre* par rapport au retard relatif  $\delta$  introduit par la lame entre les composantes qui vibrent parallèlement à ses sections principales.

Ces formules, établies pour une lame, donnent successivement les paramètres de l'ellipse pour un empilement de lames. On montre facilement que pour un paquet composé de  $n$  lames dont les sections font avec celles de la suivante ou de la précédente un angle  $\pi : n$ , les termes du premier et du second ordres en  $\delta$  disparaissent dans l'expression

de la variation du rapport des axes (où il ne reste que des termes en  $\delta^3$ ); dans l'expression de la rotation du grand axe, il ne reste que des termes en  $\delta^2$ .

C'est précisément le résultat démontré directement pour des paquets de trois et de quatre lames.

**370. Applications.** — L'expression de la rotation par unité d'épaisseur est donnée au § 366 :

$$\rho = \frac{4\pi^2 M}{\lambda^2 n^2} \frac{(\nu_0 - \nu_1)^2}{m} \quad (1)$$

On a généralement :

$$\nu_0 - \nu_1 = a + \frac{b}{\lambda^2} + \dots \quad (2)$$

Comme première approximation,  $\nu_0 - \nu_1$  est indépendant de  $\lambda$ . Nous retrouvons donc une loi de dispersion rotatoire en raison inverse du carré de la longueur d'onde, ce qui est conforme à l'expérience.

En introduisant la série (2), on obtient une loi de dispersion qui satisfait mieux aux expériences.

On a fait toute une série de vérifications en empilant régulièrement des lames de mica de même épaisseur. On a trouvé une remarquable concordance entre l'expérience et la théorie. Bien entendu, comme le nombre des paquets est toujours restreint, la polarisation elliptique n'est pas rigoureusement nulle; mais l'analogie des phénomènes avec ceux que présente le quartz est évidente, même avec un petit nombre de paquets.

Cette façon de considérer le pouvoir rotatoire comme dû à un empilement hélicoïdal est du reste absolument d'accord avec la symétrie énantiomorphe des milieux actifs.

Cherchons s'il n'y a pas contradiction *numérique* entre la formule (1) et la différence des indices  $\nu_0 - \nu_1$ , qu'il est nécessaire d'admettre. Pour que la polarisation rotatoire ne soit elliptique que d'une manière négligeable, il résulte de nos calculs que  $m$  doit être très grand; mais pour réaliser une valeur de  $\rho$  donnée, il faut que  $\nu_0 - \nu_1$  soit proportionnel à  $\sqrt{m}$ ; d'où une contradiction possible.

Supposons que les paquets soient ternaires et qu'il s'agisse de construire un milieu analogue au quartz suivant l'axe. En prenant le millimètre comme unité de longueur, on a pour la raie D :

$$\rho (= 21^\circ, 72) = 0,379, \quad \lambda = 0,589 \cdot 10^{-8}.$$

$$m = 7,22 \cdot 10^6 (\nu_0 - \nu_1)^2.$$

Soit 0,01 pour la différence des indices (la différence des indices principaux du quartz est 0,009), on trouve :  $m = 722$ . Chaque paquet a donc  $1^{\mu}, 385$ ; chaque lame  $0^{\mu}, 462$  d'épaisseur.

Nous n'insisterons pas sur les phénomènes obtenus avec des paquets pour les directions inclinées : ils sont en gros conformes aux phénomènes dans le quartz.

**371. Constitution des cristaux jouissant du pouvoir rotatoire.** — Nous venons de voir qu'on simule le pouvoir rotatoire au moyen d'un empilement régulier de lames qui séparément ne le possèdent pas. De là à conclure que telle est la structure des cristaux qui jouissent du pouvoir rotatoire, il n'y a qu'un pas. Mais il est bon de ne le franchir qu'avec prudence.

En effet, *il ne faut pas conclure des faits précédents qu'il sera toujours possible de séparer les lamelles que prévoit la théorie*. Les discussions, qui n'ont pas manqué, sont fort instructives à cet égard. Précisons par un exemple.

L'expérience montre qu'il existe des quartz droits, gauches et aussi des quartz inactifs.

Les uns disent que le *vrai* quartz n'a pas de pouvoir rotatoire, mais qu'en empilant convenablement des lames de ce vrai quartz, on obtient les quartz droits et les quartz gauches.

Les autres disent que le *vrai* quartz est droit ou gauche, mais (§ 163) que pour constituer un édifice stable, on peut utiliser des matériaux de deux espèces; d'où les cristaux inactifs par compensation.

En réalité, les deux théories ne diffèrent que par l'ordre de grandeur des lamelles; l'empilement que la première fait avec des lames d'épaisseur relativement grande et *séparables dans certains cas*, est réalisé par l'autre dans la maille même du réseau. C'est ce que

montre immédiatement l'étude des groupes infinis généraux qui admettent des déplacements hélicoïdaux ternaires et quaternaires. Les calculs précédents prouvent simplement qu'il n'est pas nécessaire d'invoquer une propriété nouvelle; à cet égard, peu importe l'ordre de grandeur de l'épaisseur des lamelles qu'on empile régulièrement.

### Théorie de la polarisation rotatoire.

**372. Généralité sur les équations aux dérivées partielles capables de représenter la polarisation rotatoire.** — Nous nous proposons de chercher quelle doit être la forme générale des équations qui peuvent représenter les phénomènes rotatoires, en posant :

- 1° que ces équations sont linéaires;
  - 2° que le pouvoir rotatoire est le même dans la même direction pour les deux sens, par rapport à l'observateur qui reçoit la lumière.
- Représentons les opérations :

$$\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial t}, \quad \text{par :} \quad \xi, \eta, \zeta, \tau.$$

Soient  $u, v, w$ , les déplacements parallèles aux axes. Les équations du mouvement peuvent être écrites sous la forme symbolique :

$$\begin{aligned} \tau^2 u &= F_1 u + F_2 v + F_3 w, \\ \tau^2 v &= G_1 u + G_2 v + G_3 w, \\ \tau^2 w &= H_1 u + H_2 v + H_3 w, \end{aligned} \tag{1}$$

où les  $F, G, H$ , sont neuf fonctions symboliques de  $\xi, \eta, \zeta, \tau$ . Par exemple, on peut écrire également :

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \Delta u - g \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\ \frac{\tau^2 u}{a^2} &= (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) u - g \tau^2 (\xi v - \eta w). \end{aligned}$$

Nous verrons précisément que la polarisation rotatoire elliptique (propagation dans la même direction, sans déformation et avec des vitesses différentes, de deux vibrations elliptiques de rotations inverses) est représentée par des équations contenant des termes de degré impair en  $\xi, \eta, \zeta, \tau$ . Le sens de gyration des elliptiques change si l'on change simultanément le signe de tous les termes impairs.

Admettons cette proposition, qu'une simple substitution permet

d'établir. Nous sommes donc ramenés à choisir, parmi les fonctions de degré impair en  $\xi, \eta, \zeta, \tau$ , la forme des fonctions  $F, G, H$ , de manière que l'hypothèse 2<sup>o</sup> soit vérifiée.

Pour simplifier, supposons le milieu transparent; substituons l'onde plane :

$$\begin{aligned} u &= u_0 \exp i [\omega t - (\alpha x + \beta y + \gamma z)], \\ v &= v_0 \exp i [\omega t - (\alpha x + \beta y + \gamma z)], \\ w &= w_0 \exp i [\omega t - (\alpha x + \beta y + \gamma z)], \end{aligned} \tag{2}$$

dans les équations (1). Cela revient à remplacer :

$$\begin{array}{ccccccc} u, & v, & w; & \xi, & \eta, & \zeta, & \tau; \\ \text{par :} & u_0, & v_0, & w_0; & -\alpha i, & -\beta i, & -\gamma i, & \omega i. \end{array}$$

Considérons les directions opposées  $D$  et  $D'$ ; elles correspondent à des valeurs de  $\alpha, \beta, \gamma$ , égales et de signes contraires. On passera donc d'une direction  $D$  à son opposée  $D'$  en changeant les signes de  $\alpha, \beta, \gamma$ , dans le système (1') résultant de la substitution des équations (2) dans les équations (1). La période n'est pas modifiée :  $\tau$  reste le même.

Si on veut représenter la polarisation rotatoire uniquement par des termes en  $\tau^3$ , les équations (1') sont identiques pour  $D$  et  $D'$  : d'où résulte que les rotations sont inverses pour l'observateur qui reçoit toujours la lumière, et qui par conséquent a dû se retourner pour passer de  $D$  à  $D'$ . Donc les termes en  $\tau^3$  sont insuffisants pour expliquer la polarisation rotatoire naturelle.

Même conclusion si, à côté des termes en  $\tau^3$ , il existe des termes impairs  $\xi, \eta, \zeta$ , disposés de manière à *ne pas* donner à eux seuls la polarisation rotatoire elliptique.

Inversement, si la polarisation est due à des termes impairs en  $\xi, \eta, \zeta$ , son sens change pour un observateur immobile quand on passe de  $D$  à  $D'$ ; il reste invariable pour l'observateur qui reçoit toujours la lumière.

Enfin si le pouvoir rotatoire dépend à la fois de termes impairs en  $\tau$  et de termes impairs en  $\xi, \eta, \zeta$ , sa valeur absolue change quand on passe de  $D$  à  $D'$ , puisque les termes impairs en  $\tau$  donnent une rotation qui change de sens, et que les termes impairs en  $\xi, \eta, \zeta$ , en donnent une qui ne change pas de sens pour l'observateur.

La conclusion s'impose; pour satisfaire aux hypothèses admises, il faut que la polarisation rotatoire ne dépende que de termes impairs en  $\xi, \eta, \zeta$ . Nous allons trouver deux solutions très générales qui satisfont à ces conditions.

**373. Premier type d'équations représentant les phénomènes dans les milieux pseudo-isotropes.** — On vérifie aisément que les équations :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \Delta u - g \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= a^2 \Delta v - g \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= a^2 \Delta w - g \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right),\end{aligned}\quad (I)$$

sont satisfaites par deux vibrations circulaires de sens inverses qui se propagent avec des vitesses différentes dans une direction quelconque.

Les équations précédentes gardent leurs formes et leurs coefficients quand on remplace les axes par d'autres axes trirectangles quelconques. Les termes entre parenthèses sont de petites rotations ayant précisément pour axes les axes correspondants (tome I, § 96); *ce sont des invariants*. Il en est de même des  $\Delta u$ ,  $\Delta v$ ,  $\Delta w$ , qui représentent des quantités physiques parfaitement déterminées (densité du flux d'un vecteur, tome III, § 21).

Nous pouvons donc examiner les propriétés de ces équations pour la propagation parallèle à l'axe des  $z$ , par exemple, sans diminuer la généralité de notre étude.

Pour une onde plane perpendiculaire à  $Oz$ , le déplacement  $w$  est identiquement nul et les déplacements  $u$  et  $v$  sont indépendants de  $x$  et de  $y$ . Les équations (I) se réduisent donc à :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - g \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + g \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t^2}.\end{aligned}\quad (I')$$

Substituons l'onde plane :

$$u = u_0 \exp i(\omega t - \gamma z), \quad v = v_0 \exp i(\omega t - \gamma z).$$

Il vient comme équations de condition :

$$\begin{aligned}u_0(\omega^2 - a^2 \gamma^2) &= -i v_0 g \gamma \omega^2, & v_0(\omega^2 - a^2 \gamma^2) &= i u_0 g \gamma \omega^2, \\ u_0^2 + v_0^2 &= 0, & u_0 &= \pm i v_0.\end{aligned}\quad (2)$$

Or on a :  $\pm i = \exp\left(\pm i \frac{\pi}{2}\right)$ ;

On peut donc écrire :

$$u = u_0 \exp i(\omega t - \gamma z), \quad v = u_0 \exp i\left(\omega t - \gamma z \pm \frac{\pi}{2}\right).$$

Revenant aux quantités réelles :

$$u = u_0 \cos(\omega t - \gamma z), \quad v = u_0 \cos\left(\omega t - \gamma z \pm \frac{\pi}{2}\right).$$

Le signe  $+$  correspond à une vibration circulaire gauche, le signe  $-$  à une vibration circulaire droite, les axes formant un système à droite.

Ces deux vibrations ne se propagent pas avec la même vitesse. Substituons la condition (3) dans l'une des équations (2), il vient :

$$\omega^2 - a^2\gamma^2 = \mp g\gamma\omega^2.$$

Comme  $g$  est petit, la valeur approchée de  $\gamma$  est  $\omega : a$ . Substituant cette valeur dans le terme petit, il reste :

$$\gamma = \frac{\omega}{a} \sqrt{1 \pm \frac{g\omega}{a}} = \frac{\omega}{a} \pm \frac{g}{2} \frac{\omega^2}{a^2}, \quad \delta = \gamma_1 - \gamma_2 = \frac{g\omega^2}{a^2}.$$

Soit  $\lambda$  la longueur d'onde dans le vide de la radiation considérée,  $V$  la vitesse de la lumière dans le vide; on a :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi V}{\lambda}.$$

Le pouvoir rotatoire est par unité de longueur (§ 323) :

$$\rho = \frac{\delta}{2} = \frac{1}{2} (\gamma_1 - \gamma_2) = \frac{g}{2} \frac{\omega^2}{a^2} = 2\pi^2 \frac{g}{a^2} \frac{V^2}{\lambda^2}.$$

Nous retrouvons la loi de dispersion, en raison inverse du carré de la longueur d'onde, très sensiblement vérifiée par l'expérience.

$\delta = \gamma_1 - \gamma_2$ , représente la différence de phase (évaluée en radians) des deux circulaires pour l'épaisseur unité.

**374. Équations aux dérivées partielles pour les cristaux uniaxes.** — La généralisation la plus simple des équations du § 80 du tome V consiste à poser :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \Delta u - a^2 \frac{\partial \Theta}{\partial x} - g \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= a^2 \Delta v - a^2 \frac{\partial \Theta}{\partial y} - g \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= c^2 \Delta w - c^2 \frac{\partial \Theta}{\partial z} - g \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (I'')$$

Pour une direction de propagation normale parallèle à l'axe optique, qui est ici  $Oz$ , nous retrouvons les équations (I') déjà discutées; il y a polarisation rotatoire circulaire.

Étudions ce qui se passe pour les directions obliques à l'axe optique, en remarquant que le coefficient  $g$  est très petit devant la différence  $a^2 - c^2$ .

Supposons la normale  $OO'$  à l'onde dans le plan  $xOz$  et faisant avec l'axe optique  $Oz$  l'angle  $\theta$  (le lecteur remarquera qu'au § 317, nous mettons l'axe optique suivant  $Ox$ ; il n'y a aucun inconvénient

à modifier nos conventions). Menons dans l'onde deux nouveaux axes de coordonnées  $O'x$  et  $O'y$ .

Les vitesses de propagation de l'onde MN dans un cristal simplement uniaxe sont :

$a$ , pour l'onde portant les vibrations parallèles à  $O'y$ , c'est-à-dire normales à l'axe optique ;

$$C = \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + c^2 \sin^2 \theta} = \sqrt{a^2 - (a^2 - c^2) \sin^2 \theta},$$

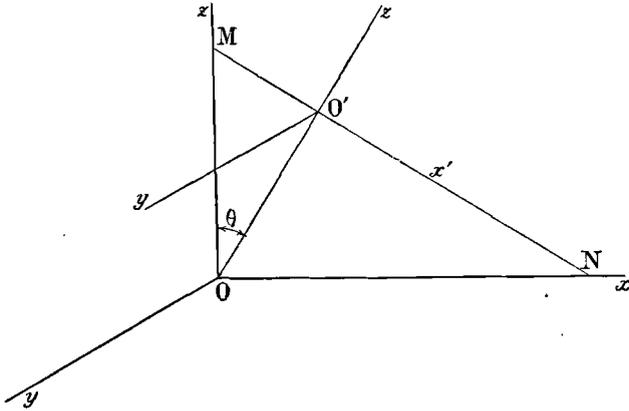


Fig. 224.

pour l'onde portant les vibrations parallèles à  $O'x$ , c'est-à-dire dont la direction rencontre l'axe.

Dans le quartz on a :  $c < a$ ,  $C < a$ .

**375. Polarisation elliptique.** — De la petitesse de  $g$  résulte, pour une direction  $OO'$  quelconque, le système d'équations rapportées aux axes dont l'origine est en  $O'$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - g \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + g \frac{\partial^3 u}{\partial z \partial t^2}. \end{aligned} \quad (I''')$$

Si  $g$  est nul, nous retrouvons bien les vitesses de propagation  $a$  et  $C$  caractéristiques du cristal uniaxe. Le système précédent coïncide avec le système (I') du § 373 pour  $\theta = 0$ .

Substituons le mouvement :

$$u = u_0 \exp i(\omega t - \gamma z), \quad v = v_0 \exp i(\omega t - \gamma z).$$

Il vient comme conditions :

$$u_0(\omega^2 - C^2 \gamma^2) = -i v_0 g \gamma \omega^2, \quad v_0(\omega^2 - a^2 \gamma^2) = i u_0 g \gamma \omega^2.$$

D'après la forme de ces équations, nous pouvons immédiatement poser :

$$hu_0 = iv_0. \tag{2}$$

Revenant aux quantités réelles, la solution prend la forme :

$$u = u_0 \cos(\omega t - \gamma z), \quad v = hu_0 \cos\left(\omega t - \gamma z + \frac{\pi}{2}\right).$$

Les vibrations sont elliptiques et leurs axes sont dirigés suivant  $O'x$  et  $O'y$ .

Substituons la relation (2) dans les équations de condition ; elles deviennent :

$$\omega^2 - C^2\gamma^2 = -hg\gamma\omega^2, \quad \omega^2 - a^2\gamma^2 = -\frac{1}{h}g\gamma\omega^2. \tag{3}$$

Éliminons  $h$  entre ces deux équations :

$$(\omega^2 - a^2\gamma^2)(\omega^2 - C^2\gamma^2) = g^2\gamma^2\omega^4.$$

D'où on tire aisément, en remplaçant  $\gamma^2$  par sa valeur approchée  $\omega^2 : a^2$  et  $C$  par  $a$  dans le terme multiplié par  $g^2$  :

$$\gamma^2 = \frac{a^2 + C^2}{2a^2C^2} \omega^2 \pm \frac{\omega^2}{2a^2C^2} \sqrt{(a^2 - C^2)^2 + 4g^2a^2\omega^2}. \tag{4}$$

Si  $g = 0$ , on retrouve les racines connues  $\omega : C$ , et  $\omega : a$ . On retrouve aussi la valeur de la différence de phase  $\Delta$  calculée au § 347 :

$$\Delta = \frac{\omega(a^2 - c^2)\sin^2\theta}{2a^3}.$$

Si  $a = C$ , on a, avec une approximation très suffisante :

$$\gamma^2 = \frac{\omega^2}{a^2} \pm g \frac{\omega^3}{a^3}, \quad \gamma = \frac{\omega}{a} \pm g \frac{\omega^2}{2a^2}.$$

D'où le pouvoir rotatoire :

$$\rho = g \frac{\omega^2}{2a^2}.$$

Dans le cas général, il y a deux valeurs admissibles pour  $\gamma$  : l'une  $\gamma_1$  très voisine de  $\omega : a$ , l'autre  $\gamma_2$  très voisine de  $\omega : C$ .

La valeur presque constante  $\gamma_1$  (signe  $+$  pour le radical) correspond à la vibration elliptique *ordinaire* dont le grand axe est dirigé suivant  $O'y$  ; la valeur absolue correspondante de  $h$  est  $|h_1| > 1$ .

La valeur plus variable  $\gamma_2$  (signe  $-$  pour le radical) correspond à la vibration elliptique *extraordinaire* dont le grand axe est dirigé suivant  $O'x$  ; la valeur absolue correspondante de  $h$  est  $|h_2| < 1$ .

Cherchons à partir de (4) l'expression de la différence de phase.

$$\delta = \gamma_1 - \gamma_2 = (\gamma_1^2 - \gamma_2^2) : (\gamma_1 + \gamma_2) = (\gamma_1^2 - \gamma_2^2) a : 2\omega.$$

Substituant à  $a^2 - C^2$  la valeur approchée calculée au § 347, il vient :

$$a^2 - C^2 = (a^2 - c^2) \sin^2 \theta,$$

$$\delta = \frac{\omega}{2a^3} \sqrt{(a^2 - c^2)^2 \sin^4 \theta + 4g^2 a^2 \omega^2} = \sqrt{\Delta^2 + 4\rho^2} = \sqrt{\Delta_0^2 \sin^4 \theta + 4\rho^2}.$$

C'est précisément la formule du § 345.

Passons au calcul de  $h$ .

Appelons  $R$  le radical toujours petit de l'expression (4); on a :

$$\omega^2 - C^2 \gamma_1^2 = \frac{a^2 - C^2}{2a^2} \omega^2 + \frac{\sqrt{R}}{2a^2},$$

$$\omega^2 - a^2 \gamma_2^2 = \frac{C^2 - a^2}{2C^2} \omega^2 - \frac{\sqrt{R}}{2C^2}.$$

Additionnons membre à membre, nous obtenons une expression qui contient  $a^2 - C^2$  en facteur et qui, indépendamment des termes en  $a^2 - C^2$ , serait rigoureusement nulle si on posait  $a = C$ . Elle est donc très petite.

Retournons aux équations (3) qui sont équivalentes pour la détermination de  $h$ . Nous pouvons écrire :

$$-h_1 = \frac{\omega^2 - C^2 \gamma_1^2}{g \gamma_1 \omega^2}, \quad -\frac{1}{h_2} = \frac{\omega^2 - a^2 \gamma_2^2}{g \gamma_2 \omega^2}.$$

Nous venons de voir que les numérateurs sont presque égaux et de signes contraires, les dénominateurs sont peu différents. On a donc  $h_1 h_2$  négatif et très voisin de l'unité. La conséquence est fondamentale : *les elliptiques tournent en sens inverses et les rapports de leurs axes, qui sont croisés, sont sensiblement les mêmes.*

Calculons la valeur approximative de  $h$  en remplaçant dans les termes additifs  $\gamma$  par  $\omega : a$  et  $C$  par  $a$  :

$$h = \frac{a^2 - C^2}{2ag\omega} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2 - C^2}{2ag\omega}\right)^2 + 1} = \frac{\Delta}{2\rho} \pm \sqrt{\frac{\Delta^2}{4\rho^2} + 1}.$$

Ce sont les formules du § 347. On peut écrire :

$$\Delta_0 = \omega \frac{a^2 - c^2}{2a^3}, \quad h = \frac{\Delta_0}{2\rho} \sin^2 \theta \pm \sqrt{\frac{\Delta_0^2}{4\rho^2} \sin^4 \theta + 1}.$$

Il n'y a rien de surprenant à ce que nous retrouvions les formules déduites de l'hypothèse de Gouy, car nous nous appuyons exactement sur le même principe *de la superposition des petits mouvements*. Ces formules sont dues à Mac Cullagh et sont connues depuis quatre-vingts ans.

**376. Second type d'équations représentant les phénomènes dans les milieux pseudo-isotropes.** — Nous allons recommencer

le travail du § 373 sur d'autres équations proposées pour représenter la polarisation rotatoire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \Delta \left[ a^2 u - g \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right], \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \Delta \left[ a^2 v - g \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right], \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \Delta \left[ a^2 w - g \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]. \end{aligned} \quad (II)$$

Le symbole  $\Delta$  porte sur toute la parenthèse; il représente comme d'habitude :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Pour une onde plane se propageant suivant l'axe Oz, les équations se réduisent à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - g \frac{\partial^3 v}{\partial z^3}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + g \frac{\partial^3 u}{\partial z^3}. \end{aligned} \quad (II')$$

Substituons l'onde plane :

$$u = u_0 \exp i(\omega t - \gamma z), \quad v = v_0 \exp i(\omega t - \gamma z).$$

Il vient comme équations de condition :

$$u_0(\omega^2 - a^2 \gamma^2) = i v_0 g \gamma^3, \quad v_0(\omega^2 - a^2 \gamma^2) = -i u_0 g \gamma^3, \quad (1)$$

$$u_0^2 + v_0^2 = 0, \quad u_0 = \pm i v_0. \quad (2)$$

On a donc comme au § 373 :

$$u = u_0 \cos(\omega t - \gamma z), \quad v = u_0 \cos\left(\omega t - \gamma z \pm \frac{\pi}{2}\right).$$

Ces deux vibrations circulaires ne se propagent pas avec la même vitesse. Substituons (2) dans l'une des équations (1), il vient :

$$\omega^2 - a^2 \gamma^2 = \pm g \gamma^3.$$

Comme  $g$  est petit en valeur absolue, la valeur approchée de  $\gamma$  est  $\omega : a$ . Substituant cette valeur dans le terme petit, il vient :

$$\gamma = \frac{\omega}{a} \sqrt{1 \mp g \frac{\omega}{a^3}} = \frac{\omega}{a} \mp g \frac{\omega^2}{2a^4}, \quad \delta = \gamma_1 - \gamma_2 = g \frac{\omega^2}{a^4}.$$

Soit  $\lambda$  la longueur d'onde dans le vide de la radiation considérée,  $V$  la vitesse de la lumière dans le vide; on a :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi V}{\lambda}.$$

Le pouvoir rotatoire est par unité de longueur :

$$\rho = \frac{\delta}{2} = \frac{1}{2} (\gamma_1 - \gamma_2) = \frac{g\omega^2}{2a^4} = 2\pi^2 \frac{g}{a^4} \frac{V^2}{\lambda^2}.$$

Nous retrouvons encore la loi de dispersion en raison inverse du carré de la longueur d'onde.

**377. Polarisation elliptique.** — De la petitesse de  $g$ , nous concluons comme au § 375 que pour une direction  $OO'$  quelconque, nous pouvons employer le système d'équations :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - g \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + g \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (\text{II}''')$$

rapportées aux axes dont l'origine est  $O'$  (fig. 224).

Opérant comme au § 375, il vient les conditions :

$$u_0(\omega^2 - C^2\gamma^2) = -iv_0g\gamma^3, \quad v_0(\omega^2 - a^2\gamma^2) = iu_0g\gamma^3.$$

Nous pouvons poser :  $hu_0 = iv_0$ .

Les vibrations sont elliptiques et leurs axes dirigés suivant  $O'x$  et  $O'y$ .

Les équations de condition deviennent :

$$\omega^2 - C^2\gamma^2 = -hg\gamma^3, \quad \omega^2 - a^2\gamma^2 = -\frac{1}{h}g\gamma^3.$$

Éliminant  $h$  entre ces équations, on a pour déterminer  $\gamma$  :

$$(\omega^2 - C^2\gamma^2)(\omega^2 - a^2\gamma^2) = g^2\gamma^6.$$

Remplaçons  $\gamma^6$  par  $\omega^6 : a^6$  dans le terme multiplié par  $g^2$ . Il reste :

$$\gamma^2 = \frac{a^2 + C^2}{2a^2C^2} \omega^2 \pm \frac{1}{2a^2C^2} \sqrt{(a^2 - C^2)^2 \omega^4 + \frac{4g^2\omega^6}{a^2}}.$$

Si  $g = 0$ , on retrouve les racines connues  $\omega : C$  et  $\omega : a$ . On retrouve aussi la valeur de la différence de phase  $\Delta$  (§ 347) :

$$\Delta = \omega \frac{(a^2 - c^2) \sin^2 \theta}{2a^3}.$$

Si  $a = C$ , il reste :

$$\gamma = \frac{\omega}{a} \pm \frac{g\omega^2}{2a^4}, \quad \rho = \frac{g\omega^2}{2a^4}.$$

Calculons comme plus haut (§ 375) la différence de phase

$$\delta = \gamma_1 - \gamma_2;$$

il vient :  $\delta = \sqrt{\Delta^2 + 4\rho^2} = \sqrt{\Delta_0^2 \sin^4 \theta + 4\rho^2}$ .

On démontrerait comme plus haut que *les ellipses tournent en sens*

contraires et que les rapports de leurs axes, qui sont croisés, sont sensiblement les mêmes.

Enfin on arrive aisément pour  $h$  à l'expression :

$$h = \frac{\Delta}{2\rho} \pm \sqrt{\frac{\Delta^2}{4\rho^2} + 1} = \frac{\Delta_0}{2\rho} \sin^2 \theta \pm \sqrt{\frac{\Delta_0^2}{4\rho^2} \sin^4 \theta + 1}.$$

Les deux théories précédentes sont donc indiscernables et reviennent l'une et l'autre à superposer un pouvoir rotatoire constant  $\rho$  à la biréfringence d'un uniaxe.

Du reste, les équations aux dérivées partielles des deux théories satisfont aux conditions générales de symétrie (§ 372) : elles contiennent des dérivées partielles impaires par rapport aux coordonnées, paires par rapport au temps.

**378. Interprétation dans la théorie des ions.** — On conçoit que, connaissant depuis longtemps la forme des équations auxquelles on doit aboutir, ce ne soit qu'un jeu de les retrouver dans la théorie des ions. Ce qui n'empêche pas ces interprétations d'être passablement arbitraires.

Rappelons ce que dit la Théorie électromagnétique en supposant le milieu isotrope absorbant. On se reportera aux §§ 250 et 251 du tome V.

Nous avons entre les composantes  $X, Y, Z$ , de la force magnétique,  $P, Q, R$ , de la force électrique,  $u, v, w$ , du courant,  $\varphi, \chi, \psi$ , du déplacement des ions, les relations suivantes :

Relations de Faraday :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \\ -\frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \\ -\frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}; \end{aligned} \tag{1}$$

Relations d'Ampère :

$$\begin{aligned} 4\pi u &= \frac{\partial P}{\partial t} + 4\pi \mathcal{U} \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \\ 4\pi v &= \frac{\partial Q}{\partial t} + 4\pi \mathcal{U} \varepsilon \frac{\partial \chi}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \\ 4\pi w &= \frac{\partial R}{\partial t} + 4\pi \mathcal{U} \varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}; \end{aligned} \tag{2}$$

Mouvement des ions :

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 \varphi}{dt^2} &= \varepsilon P - \varepsilon^2 \frac{4\pi}{\theta} \varphi - r\varepsilon^2 \frac{d\varphi}{dt}, \\ m \frac{d^2 \chi}{dt^2} &= \varepsilon Q - \varepsilon^2 \frac{4\pi}{\theta} \chi - r\varepsilon^2 \frac{d\chi}{dt}, \\ m \frac{d^2 \psi}{dt^2} &= \varepsilon R - \varepsilon^2 \frac{4\pi}{\theta} \psi - r\varepsilon^2 \frac{d\psi}{dt}. \end{aligned} \tag{3}$$

Si le milieu est isotrope transparent, il faut poser  $r = 0$  dans les équations (3).

Passons aux milieux pseudo-isotropes transparents. Sans expliquer pour l'instant pourquoi, introduisons dans les équations (3) une force supplémentaire agissant sur les ions et proportionnelle au curl de la force électrique. Elles prennent la forme :

$$\begin{aligned} m \frac{d^2\varphi}{dt^2} &= \varepsilon \left[ P + g_1 \left( \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) \right] - \varepsilon^2 \frac{4\pi}{\theta} \varphi, \\ m \frac{d^2\chi}{dt^2} &= \varepsilon \left[ Q + g_1 \left( \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) \right] - \varepsilon^2 \frac{4\pi}{\theta} \chi, \\ m \frac{d^2\psi}{dt^2} &= \varepsilon \left[ R + g_1 \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \right] - \varepsilon^2 \frac{4\pi}{\theta} \psi. \end{aligned} \quad (3')$$

Les éliminations seraient très difficiles ; mais bornons-nous aux mouvements sinusoidaux. La composante  $\varphi$  et sa dérivée seconde par rapport au temps sont proportionnelles ;  $\varphi$ ,  $\chi$ ,  $\psi$ , sont donc proportionnelles aux quantités entre crochets qui leur correspondent.

Substituons dans les équations (2) ; elles prennent la forme :

Relations d'Ampère :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[ KP + g_1 \left( \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) \right] &= \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[ KQ + g_1 \left( \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) \right] &= \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[ KR + g_1 \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \right] &= \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2')$$

Dérivons les deux membres par rapport à  $t$  ; utilisons les équations (1) ; posons :

$$\Theta = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z};$$

$$\text{il vient : } \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ KP + g_1 \left( \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) \right] = \Delta P - \frac{\partial \Theta}{\partial z},$$

et deux équations symétriques.

Ce sont les équations (I'') du § 374.

Le calcul n'est pas plus compliqué en laissant subsister les termes amortissants dans l'équation (3'). On use de l'artifice exposé au tome V, § 202, et utilisé au tome V, § 251.

On trouve pour le pouvoir rotatoire une loi de dispersion analogue à celle qui convient aux corps vraiment isotropes (tome V, § 253).

Reste à savoir de quel droit on introduit les composantes du curl de la force électrique dans les équations du mouvement des ions.

J'avoue trouver dans les raisonnements qui essaient de légitimer cette introduction un tel arbitraire, le procédé employé consiste si évidemment à dire qu'on les met parce qu'on en a besoin (ce qui du reste est la justification suprême de toutes les théories), que je me garde d'insister<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> J'espère que le lecteur se rend maintenant un compte exact des procédés qui règlent en Optique la genèse du nombre infini de théories mathématiques nées ou à naître. On se limite à des équations linéaires; on réduit ainsi le nombre des combinaisons possibles entre des termes nécessairement peu nombreux. D'autre part on connaît, et depuis longtemps, un certain nombre de groupes de termes qui s'imposent quand il s'agit de tel ou tel phénomène. Il y a des groupes pour la polarisation rotatoire naturelle, pour la polarisation rotatoire magnétique, pour l'absorption, ... Tout cela est classé, archiclassé.

Pour créer une nouvelle théorie mathématique, on puise dans les tiroirs.

Par exemple, veut-on une théorie de la polarisation rotatoire naturelle des corps absorbants? On introduit les groupes que nous venons d'étudier et qui, je le répète (car ce sont des choses bonnes à ressasser), sont étiquetés depuis quatre-vingts ans; puis on adjoint des groupes amortissants. Là encore on a le choix; le lecteur voudra bien se reporter au tome V. Il ne reste plus qu'à substituer une onde plane et qu'à discuter la formule.

De bonnes âmes s'imaginent que la Théorie des ions a bouleversé l'Optique: c'est tout au plus si elle a changé les noms. On a trouvé (voici cinquante ans) qu'il n'y avait pas assez de diversité: il fallait deux systèmes de mobiles. On les a d'abord appelés *l'éther et la matière* (Boussinesq, Helmholtz, Ketteler, ...); on les appelle maintenant *l'éther et les ions*. Évidemment, c'est un progrès considérable!

Si le lecteur a bien compris ce qu'on appelle *théories mathématiques*, s'il en a reconnu le caractère éminemment artificiel et les procédés toujours les mêmes, il ne s'en fait un objet ni d'épouvante, ni d'admiration béate. Il ne s'effare pas de leur uniforme diversité. Mais les mathématiciens cherchent à lui persuader que c'est très difficile et précisément génial; ils se posent en inaccessibles. La réalité diffère profondément de ce bluff; rien ne ressemble à une théorie comme une théorie; la science est bornée et surfaite.

Quant aux explications *physiques* qui ont la prétention d'interpréter les équations, ce sont images d'Épinal pour amuser les petits enfants.

## CHAPITRE X

### SYMÉTRIE DU CHAMP MAGNÉTIQUE

**379. Le champ magnétique a la symétrie d'un vecteur axial.** — La symétrie du champ magnétique est celle d'un *cylindre tournant autour de son axe* (§ 42). On peut le représenter par une flèche comme un vecteur; mais c'est un *vecteur axial*.

Cette conclusion résulte d'abord des relations entre les champs et les courants ou les forces électromotrices, quantités qui doivent être considérées comme des *vecteurs polaires*. La différence de symétrie d'un champ et d'un courant s'exprime par les équations fondamentales; l'un des vecteurs est le *curl* de l'autre (tome III, § 26).

Toute une série de phénomènes rotatoires sont créés par les champs magnétiques et décèlent leur symétrie. Dès l'origine, Ampère émit l'hypothèse que l'aimantation a pour cause de petits courants stationnaires; cela revenait à considérer le champ comme un vecteur axial.

Par exemple, un fil de fer aimanté dans le sens de sa longueur par un solénoïde, et dans lequel on envoie un courant, se tord. Si les vecteurs *champ magnétique* (ou *aimantation*) et *courant* étaient tous deux polaires, la torsion n'aurait aucune cause. Elle est possible, en raison de la symétrie, si le vecteur *champ* est axial et le vecteur *courant* polaire. Elle est possible, mais elle n'est pas nécessaire, en vertu du principe que l'effet n'a pas nécessairement la dyssymétrie de la cause.

De même si on tord un fil de fer parcouru par un courant (et par conséquent aimanté transversalement), il s'aimante longitudinalement, conformément à la symétrie.

#### Polarisation rotatoire magnétique.

**380. Description du phénomène.** — Dans un solénoïde et parallèlement à son axe, plaçons un bloc de verre cylindrique dont les faces terminales droites sont parallèles aux spires du solénoïde. Le bloc est traversé normalement à ses faces terminales par un faisceau de lumière polarisé à l'entrée.

Envoyons un courant dans le solénoïde; nous constatons que la lumière émergente est encore rectilignement polarisée, mais que le plan de vibration a tourné d'un certain angle.

Le verre jouit donc du pouvoir rotatoire quand il est placé dans un champ magnétique.

A la vérité, la grandeur de la rotation est petite et on doit user de champs intenses pour la montrer. Pratiquement on place le bloc entre les armatures d'un électro à l'intérieur desquelles est percé un trou pour le passage de la lumière (voir fig. 212).

On dit que la rotation est *positive* quand elle a lieu dans le sens suivant lequel tourne le courant magnétisant, pour l'observateur qui reçoit la lumière et regarde le solénoïde censément producteur du champ. La rotation est *négative* quand elle a lieu en sens inverse du courant.

Le verre, l'eau, le sulfure de carbone, éprouvent des rotations *positives*; les dissolutions de sels de fer sont *négatives*. On avait d'abord généralisé en disant que les corps diamagnétiques sont positifs, les corps magnétiques négatifs. Mais la règle n'est pas exacte : le fer, le cobalt, le nickel, l'oxygène, les sels de cobalt, de nickel, de manganèse, de cuivre, qui sont magnétiques, sont pourtant positifs.

La rotation est proportionnelle à l'épaisseur  $e$  traversée, à la composante de l'intensité du champ parallèle à la direction de propagation et à un coefficient  $\rho$  caractéristique de la substance étudiée. Si  $\theta$  est l'angle du champ  $H$  et de la direction de propagation, on a :

$$\alpha = \rho e H \cos \theta.$$

Plus généralement, supposons le champ variable le long du rayon. Soit  $V_0$  et  $V_1$  les potentiels magnétiques aux points d'entrée et de sortie, on a :

$$\alpha = \int d\alpha = \rho \int H \cos \theta de = \rho (V_1 - V_0).$$

A la vérité, le rayon est théoriquement courbe du fait de la variation du champ et par conséquent des indices; mais cette courbure est insignifiante.

ORDRE DE GRANDEUR DU PHÉNOMÈNE.

On a trouvé pour le sulfure de carbone et la raie D :  $\rho = 0',043$ .

Si l'on place une colonne de sulfure de carbone d'un centimètre de longueur dans un champ d'un CGS parallèle à la direction de propagation, la rotation est :

$$\alpha = \rho = 0',043.$$

Opérons sur une colonne d'un mètre ( $e = 100$ ) et réalisons un champ uniforme de 100 gauss. La rotation est :

$$\alpha = 0'043 \times 10^4 = 430' = 7^{\circ}10'.$$

381. **Comparaison des polarisations rotatoires magnétique et naturelle.** — Il existe entre les deux espèces de polarisation rotatoire une différence importante.

*Le sens apparent de la rotation naturelle est indépendant du sens de propagation; le sens apparent de la rotation magnétique pour un champ donné est renversé quand on renverse le sens de propagation.*

*Autrement dit, le sens ABSOLU de la rotation naturelle dépend du sens de propagation; le sens ABSOLU de la rotation magnétique en est indépendant.*

La figure 225 montre immédiatement la signification de ces règles.

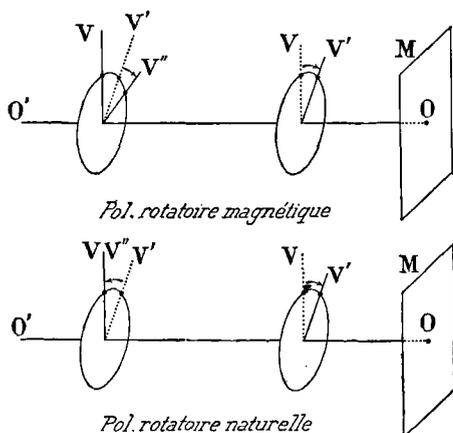


Fig. 225.

Supposons d'abord l'observateur en O et soit la rotation dextrogyre; la vibration V vient en V'.

Plaçons un miroir en M et amenons l'observateur en O'.

Pour le phénomène magnétique, le sens absolu restant le même, la nouvelle rotation (V'V'') sera lévogyre pour l'observateur déplacé. La rotation définitive est :

$$(VV'') = 2(VV').$$

Pour le phénomène naturel, le sens relatif restant le même, la nouvelle rotation (V'V'') est dextrogyre; elle ramène

le vecteur V' sur le vecteur V''. D'où :  $(VV'') = 0$ .

Nous pouvons encore utiliser l'artifice dont il est parlé au § 331 : interposition d'un mica quart d'onde avant le miroir. Comme il est traversé deux fois, il joue le rôle de demi-onde. Quand l'une de ses sections principales est parallèle à la vibration primitive, la rotation magnétique est annulée après l'aller et le retour.

Il résulte, de l'indépendance du sens absolu de rotation et du

sens de propagation, une conséquence curieuse. On peut imaginer un appareil qui ne laisse passer la lumière que dans un sens.

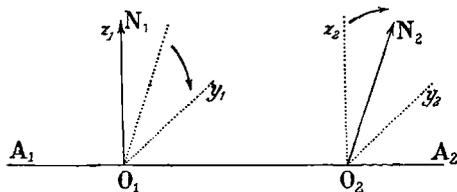


Fig. 226.

Soit en effet deux nicols N<sub>1</sub> et N<sub>2</sub> dont les sections sont à 45° l'une de l'autre. Interposons entre eux un milieu dans un champ tel que la rotation soit de 45°, dans le sens des

flèches, pour fixer les idées. Si la propagation se fait dans le sens  $O_1O_2$ , la vibration  $O_1N_1$  vient en  $O_2N_2$ ; elle passe par conséquent. Si la propagation se fait dans le sens  $O_2O_1$ , la vibration  $O_2N_2$  vient en  $O_1y_1$ ; elle est arrêtée par conséquent. Donc l'observateur  $A_2$  voit l'observateur  $A_1$ , mais la réciproque n'est pas vraie.

L'expérience est intéressante pour les questions qu'elle suggère.

Elle semble contredire de la façon la plus formelle le postulat de Clausius : que deux corps à la même température s'envoient des quantités égales de chaleur. Mais M. Brillouin a montré que, correctement et complètement interprétée, elle ne va pas contre le postulat : quand on s'arrange de manière que les corps à la même température soient placés dans une enceinte parfaitement réfléchissante et soient les seuls corps *absorbants* contenus dans l'enceinte, ils reçoivent l'un de l'autre simultanément la même quantité de chaleur, malgré l'existence de corps faisant tourner le plan de polarisation toujours dans le même sens absolu.

La polarisation rotatoire magnétique n'en est pas moins une curieuse exception à ce théorème énoncé par Helmholtz : Lorsque deux rayons de lumière, traversant en sens opposés un nombre quelconque de milieux réfringents, suivent la même droite dans un de ces milieux, ils coïncident partout; ce qui est le principe du retour des rayons ou du renversement (tome V, § 172).

### 382. Pouvoir rotatoire du fer, du nickel et du cobalt. —

On peut obtenir des couches de fer, de nickel et de cobalt assez minces pour être encore transparentes. Aimantons-les *normalement* : elles acquièrent un pouvoir rotatoire énorme. La rotation par le fer est 38 000 fois celle d'une plaque de verre de même épaisseur. Elle est du même ordre pour le cobalt que pour le fer; elle est plus faible pour le nickel.

Pour le fer il n'y a plus proportionnalité entre la rotation et le champ. On peut admettre que la proportionnalité subsiste entre la rotation et l'aimantation : elle tend donc vers une limite.

### 383. Durée d'établissement du phénomène. —

Quand on utilise un électroaimant, il semble que le phénomène ne s'établisse que progressivement. Mais la cause du retard réside dans la self-induction : c'est le courant qui s'établit lentement. En fait, on peut obtenir la polarisation rotatoire à l'aide de décharges oscillantes, ce qui prouve la quasi-instantanéité de son établissement (fig. 227).

La lumière émise par la fente F traverse deux nicols à l'extinction et le corps transparent AB entouré d'une bobine *sans fer*. L'observateur O regarde dans le miroir tournant M. Un dispositif mécanique facile à imaginer produit la décharge oscillante du condensateur C au

moment où le miroir  $M$  renvoie à l'observateur la lumière émise par  $F$  (à supposer qu'elle passe).

On voit dans le miroir tournant de larges bandes lumineuses séparées par des bandes obscures plus étroites. Le plan de polarisation oscille donc, obéissant aux variations alternatives du courant.

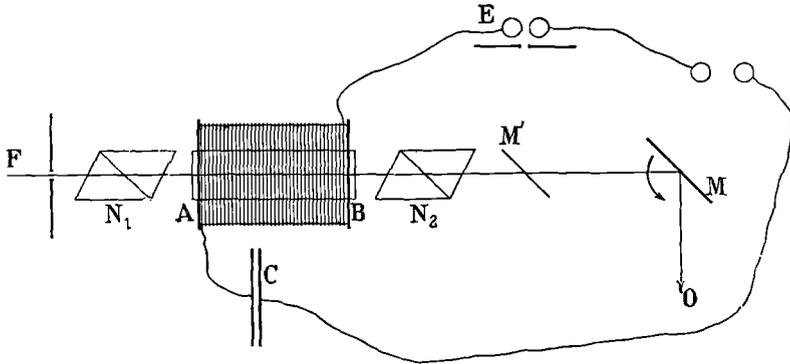


Fig. 227.

Grâce au miroir fixe  $M'$ , on peut recevoir simultanément la lumière envoyée par l'étincelle.

L'expérience montre que les bandes lumineuses des deux phénomènes sont exactement dans le prolongement les unes des autres. Il n'y a donc aucun retard appréciable entre le champ et le phénomène optique.

**384. Forme de la surface d'onde.** — Nous admettrons, pour la polarisation rotatoire magnétique, la même interprétation que pour la polarisation rotatoire naturelle : *dans chaque direction se propagent avec des vitesses différentes deux ondes transportant des vibrations circulaires.*

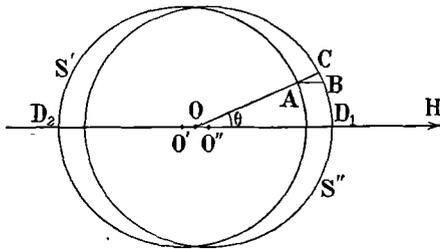


Fig. 228.

Soit  $O$  le centre d'ébranlement (fig. 228); on demande la forme de la surface d'onde.

Nous allons montrer qu'elle se compose de deux sphères égales  $S'$  et  $S''$  ayant pour centres les points  $O'$  et  $O''$  symétriques de  $O$  et placés sur une droite parallèle au

champ. L'une des sphères  $S'$  correspond aux vibrations circulaires droites, l'autre  $S''$  aux vibrations circulaires gauches. Le rayon des sphères est égal à la vitesse  $V$  de propagation pour un champ nul.

Considérons une direction faisant l'angle  $\theta$  avec le champ ; évaluons la différence des vitesses :

$$V'' - V' = \overline{OC} - \overline{OA} = \overline{AB} \cos \theta = \overline{O'O''} \cos \theta.$$

Posons :  $O'O'' = 2a.$

$$V'' = V + a \cos \theta, \quad V' = V - a \cos \theta;$$

$$V'' - V' = 2a \cos \theta, \quad V'' + V' = 2V.$$

Ces formules redonnent bien la loi de rotation expérimentale. Nous savons en effet que la rotation  $\alpha$  par unité d'épaisseur est égale à la moitié de la phase évaluée en radians :

$$\alpha = \frac{\pi}{\lambda} (n' - n'') = \frac{\pi}{\lambda} \left( \frac{V}{V'} - \frac{V}{V''} \right) = \frac{\pi}{\lambda V} (V'' - V'),$$

vu la petitesse du changement de vitesses. D'où :

$$\alpha = \frac{2\pi a}{\lambda V} \cos \theta.$$

D'après nos hypothèses, dans le sens  $OD_1$ , c'est la vitesse du circulaire gauche qui l'emporte : la rotation est gauche. Dans le sens  $OD_2$ , c'est la vitesse du circulaire droit qui l'emporte : la rotation est droite. Elle change donc de sens pour l'observateur ; corrélativement elle conserve le même sens absolu.

Il y a généralement double réfraction ; mais l'écart des deux rayons est très petit ; on ne peut le mettre en évidence qu'à l'aide d'artifices sur lesquels il est inutile d'insister.

### Réflexion sur un pôle d'aimant.

**385. Phénomènes généraux.** — Les lois de la réflexion sur le fer, le nickel et le cobalt *aimantés* ne diffèrent pas *dans leurs grandes lignes* des lois de la réflexion sur un métal quelconque. Mais si l'on pousse la précision des expériences à leur limite, on décele des phénomènes spéciaux qui sont dus au magnétisme.

Supposons la lumière vibrant *perpendiculairement au plan d'incidence*.

Prenons pour unité l'amplitude de la vibration incidente. La réflexion multiplie l'amplitude par un facteur  $a$  fonction de l'angle d'incidence ; la vibration réfléchie *perpendiculaire au plan d'incidence* prend un certain retard  $\delta$  du fait de la réflexion. C'est là le phénomène général. De plus, il apparaît *dans le plan d'incidence* une composante dite *magnéto-optique* d'amplitude  $m$  et de phase à déterminer.

Supposons la lumière vibrant *dans le plan d'incidence*. La réflexion

multiplie l'amplitude par un facteur  $a'$  fonction de l'angle d'incidence; la vibration réfléchiée dans le plan d'incidence prend un certain retard  $\delta'$  du fait de la réflexion. C'est là le phénomène général. De plus, il apparaît *perpendiculairement au plan d'incidence* une composante dite *magnéto-optique* d'amplitude  $m'$  et de phase à déterminer.

. Les retards absolus  $\delta, \delta'$ , sont difficiles à mesurer. On convient de rapporter tous les retards à la composante *réfléchiée* vibrant perpendiculairement au plan d'incidence.

Par rapport à cette composante, le retard de la vibration située dans le plan d'incidence est  $\Delta$ . Les retards des deux composantes magnéto-optiques rapportés à la vibration réfléchiée perpendiculaire au plan d'incidence seront :

$\varphi$  pour la composante située dans le plan d'incidence,

$\varphi'$  pour la composante perpendiculaire au plan d'incidence.

Pour comprendre le sens des méthodes d'observation, on saura que les composantes magnétiques ont des amplitudes  $m$  et  $m'$  qui sont de l'ordre de quelques dix-millièmes de l'amplitude de la vibration incidente. Leur valeur maxima est environ  $0,8 \cdot 10^{-3}$ .

En définitive, quand la vibration incidente est dans l'une des deux positions fondamentales, elle fournit par réflexion, non plus de la lumière rectiligne, mais de la lumière elliptique. L'ellipse est toujours extrêmement allongée.

**386. Méthode générale d'étude.** — Voici en quelques mots comment on peut diriger les expériences.

Réglons le polariseur dans un des azimuts principaux; supposons, par exemple, la vibration incidente normale au plan d'incidence. Réglons l'analyseur à l'extinction.

Tournons alors le polariseur d'un *très petit* angle  $P$  dans un certain sens, l'analyseur d'un très petit angle  $A$  dans le même sens. Enfin aimantons.

Vu la petitesse de  $A$  et de  $P$ , nous pouvons poser :

$$\cos A = \cos P = 1, \quad \sin A = A, \quad \sin P = P.$$

Cherchons la vibration qui passe dans ces conditions; elle est avec les conventions du § 385 :

$$Aa \sin \omega t - Pa' \sin (\omega t - \Delta) + m \sin (\omega t - \varphi).$$

L'intensité est :

$$I^2 = (Aa - Pa' \cos \Delta + m \cos \varphi)^2 + (Pa' \sin \Delta - m \sin \varphi)^2.$$

L'expérience consiste : soit à se donner  $A$  ou  $P$  et à chercher pour quelle valeur de  $P$  ou de  $A$  l'intensité est minima; soit à déterminer par tâtonnements les valeurs de  $A$  et de  $P$  qui rendent l'intensité nulle. Les formules se trouvent immédiatement.

Si la vibration incidente est dans le plan d'incidence, on a pour la vibration transmise dans les mêmes conditions :

$$-a'A \sin (\omega t - \Delta) + aP \sin \omega t + m' \sin (\omega t - \varphi')$$

$$I^2 = (-a'A \cos \Delta + aP + m' \cos \varphi')^2 + (a'A \sin \Delta + m' \sin \varphi')^2.$$

387. **Réflexion normale sur un pôle d'aimant.** — C'est le cas le plus simple. Une vibration est transformée par réflexion normale sur un pôle d'aimant en une ellipse très allongée. L'angle du grand axe de l'ellipse ne coïncide pas avec la vibration incidente : pour des aimantations puissantes, il peut faire un angle atteignant un demi-degré.

Si l'on regarde le courant produisant un pôle positif placé devant soi, il tourne en sens inverse du mouvement des aiguilles d'une montre.

Soit OA la direction de la vibration incidente ; la vibration elliptique réfléchiée a son grand axe suivant OB. L'angle  $\overline{AOB} = \alpha$  est en sens contraire du courant magnétisant ;  $\overline{OC}$  représente la composante magnéto-optique.

Tout effet disparaît si l'on recouvre le pôle d'une couche d'or, ce qui prouve que le phénomène ne se produit pas dans l'air.

Le phénomène a lieu dans le même sens par réflexion sur le fer, le nickel et le cobalt.

La rotation  $\alpha$  dépend de la longueur d'onde et croît avec elle.

388. **Réflexion polaire.** — Quand l'aimantation est normale à la surface réfléchissante, on dit que la réflexion est *polaire*. Le cas étudié au paragraphe précédent est donc le plus simple concernant la réflexion polaire. Supposons maintenant l'incidence oblique.

Comme pour l'incidence normale, une vibration rectiligne, située dans les azimuts fondamentaux, est transformée en une vibration elliptique. Le grand axe OB de l'ellipse a tourné par rapport à la vibration OA initiale en sens inverse du courant magnétisant.

Quand la vibration incidente OA est perpendiculaire au plan d'incidence, l'angle  $\alpha$  décroît d'une manière continue, à mesure que l'in-

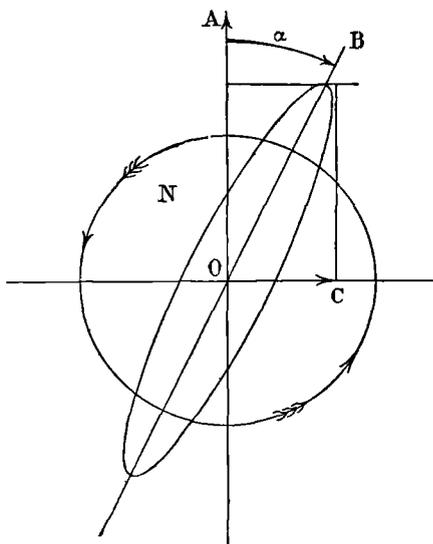


Fig. 229.

cidence augmente, à partir de la valeur  $\alpha_0$  qui correspond à l'incidence normale.

Quand la vibration OA est dans le plan d'incidence, la rotation, qui est  $\alpha_0$  pour l'incidence normale, passe par un maximum pour un angle voisin de  $60^\circ$ . La rotation est toujours plus grande dans le second cas que dans le premier, sauf naturellement pour l'incidence normale.

**389. Réflexion équatoriale.** — Nous supposons maintenant que les lignes de force du champ sont tangentes à la surface réfléchissante.

*Il n'existe aucun phénomène dû à l'aimantation quand le plan d'incidence est normal aux lignes de force : corrélativement il n'en existe aucun quand l'angle d'incidence est nul.*

En effet, dans ce dernier cas, on peut toujours dire que le plan d'incidence (indéterminé) est normal aux lignes de force.

Supposons donc le plan d'incidence parallèle aux lignes de force et l'incidence oblique.

VIBRATION INCIDENTE NORMALE AU PLAN D'INCIDENCE.

La rotation pour passer de la vibration initiale au grand axe de la vibration elliptique réfléchie, est toujours en sens inverse du sens de rotation du courant magnétisant.

Elle est donc dans le sens de la flèche  $f$  de la figure.

Au voisinage de  $i = 60^\circ$ , l'ellipse se réduit à une vibration rectiligne. La composante magnéto-optique, qui est située dans le plan d'incidence, a donc même phase que la composante principale.

Nous savons que la composante magnéto-optique est nulle pour  $i = 0$ .

VIBRATION INCIDENTE DANS LE PLAN D'INCIDENCE.

Entre  $0$  et  $80^\circ$ , le sens de la rotation pour passer de la vibration initiale au grand axe de la vibration elliptique réfléchie, est le même que le sens de la rotation du courant magnétisant.

La rotation s'annule pour  $80^\circ$ ; c'est dire que pour cet angle les axes de l'ellipse réfléchie se trouvent l'un dans le plan d'incidence, l'autre normal au plan d'incidence.

Entre  $80^\circ$  et  $90^\circ$ , la rotation est en sens contraire de la rotation du courant magnétisant.

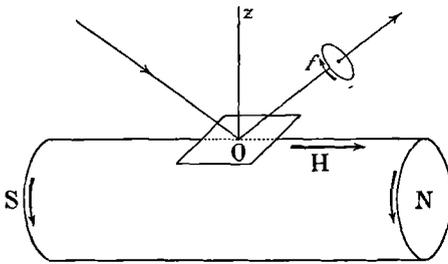


Fig. 230.

### Théorie des phénomènes magnétiques.

390. **Phénomène de Hall.** — Les principales théories proposées pour expliquer la polarisation rotatoire magnétique et la réflexion sur les pôles d'aimant, rapprochent ces phénomènes du phénomène de Hall dont nous avons déjà parlé au § 181 du tome III, et sur lequel nous revenons au § 241 de ce présent volume.

Nous développerons la théorie de Rowland en prévenant qu'il en existe d'autres et qu'on discute encore sur leurs valeurs respectives.

Quand on place une substance siège d'un courant dans un champ magnétique, il existe, outre la *force électromotrice* poussant le courant, une *force pondéromotrice* (ou électrodynamique) agissant à angle droit du courant et du champ et tendant à déplacer le siège du courant. Par exemple, plaçons un conducteur dans un champ et attelons une pile : la pile fournit la force électromotrice, le champ produit la force pondéromotrice.

*Mais on peut admettre, et c'est une des interprétations du phénomène de Hall, qu'il existe aussi une force électromotrice dirigée précisément dans la direction de la force pondéromotrice.*

Le champ produit donc deux actions : il tend à entraîner le courant par rapport à son siège (*force électromotrice*), il tend à entraîner le siège du courant (*force pondéromotrice*).

A la vérité, on peut donner du phénomène de Hall plusieurs interprétations. On peut dire, par exemple, que la symétrie du milieu est modifiée par le champ (§ 241), de sorte que la relation existant entre les vecteurs *flux d'électricité* et *force électromotrice* doit être complétée par des termes rotationnels. Mais on peut aussi voir dans ce phénomène une action directe du champ sur les particules électrisées en mouvement.

391. **Équations générales pour les milieux isolants (transparents).** — Que nous fassions agir la force électromotrice ci-dessus définie sur les courants de déplacement de la théorie de Maxwell ou sur les courants dus aux déplacements effectifs d'ions mobiles chargés (devant toutefois rester dans la sphère d'activité de leurs molécules respectives, puisqu'il s'agit de corps isolants), la forme des équations est la même. Nous ferons l'hypothèse de Maxwell pour simplifier l'écriture.

Écrivons que les déplacements sont proportionnels aux forces électromotrices totales. Soit  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ , des quantités proportionnelles aux composantes du champ magnétique *imposé*. Les composantes du courant sont :

$$u = \frac{\partial f}{\partial t}, \quad v = \frac{\partial g}{\partial t}, \quad w = \frac{\partial h}{\partial t}.$$

La force électromotrice ci-dessus définie a pour composantes (III, § 180) à un facteur constant près :

$$m_3 \frac{\partial g}{\partial t} - m_2 \frac{\partial h}{\partial t},$$

et deux expressions symétriques.

Nous continuerons à désigner par P, Q, R, les composantes de la force électromotrice d'induction; elles sont reliées aux variations du champ par les équations (de Faraday) :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \\ -\frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \\ -\frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}. \end{aligned} \quad (1)$$

Les équations de l'Électrodynamique (d'Ampère) restent :

$$\begin{aligned} 4\pi u &= 4\pi \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \\ 4\pi v &= 4\pi \frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \\ 4\pi w &= 4\pi \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2)$$

La seule différence avec le cas des corps isotropes non aimantés réside dans la relation qui existe entre le déplacement et la force électromotrice. Nous n'avons plus proportionnalité entre  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , et P, Q, R; nous devons ajouter la force électromotrice (de Hall).

D'où les relations :

$$\begin{aligned} 4\pi f : K &= P + \left( m_3 \frac{\partial g}{\partial t} - m_2 \frac{\partial h}{\partial t} \right), \\ 4\pi g : K &= Q + \left( m_1 \frac{\partial h}{\partial t} - m_3 \frac{\partial f}{\partial t} \right), \\ 4\pi h : K &= R + \left( m_2 \frac{\partial f}{\partial t} - m_1 \frac{\partial g}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Les relations (1), (2) et (3) résolvent le problème.

Posons : 
$$\frac{\partial}{\partial \omega} = m_1 \frac{\partial}{\partial x} + m_2 \frac{\partial}{\partial y} + m_3 \frac{\partial}{\partial z}.$$

On tire de (1) et (3) :

$$-\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{4\pi}{K} \left( \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (4)$$

grâce à la relation :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = 0.$$

On a de même par raison de symétrie :

$$-\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{4\pi}{K} \left( \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{\partial g}{\partial t}. \quad (5)$$

Utilisant la troisième relation (2), dérivant (4) par rapport à  $y$ , (5) par rapport à  $x$ , soustrayant (5') de (4'), il vient :

$$4\pi \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{K} \Delta h - \frac{\partial^2}{\partial \omega \partial t} \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} \right), \quad (6)$$

et deux équations analogues.

Changeons de notations pour faire concorder avec les autres formules de ce tome.

Appelons  $u, v, w$ , les déplacements d'un mobile fictif; nous pouvons écrire (6) sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \Delta u - \frac{\partial^2}{\partial \omega \partial t} \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= a^2 \Delta v - \frac{\partial^2}{\partial \omega \partial t} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= a^2 \Delta w - \frac{\partial^2}{\partial \omega \partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (7)$$

en posant toujours :

$$\frac{\partial}{\partial \omega} = m_1 \frac{\partial}{\partial x} + m_2 \frac{\partial}{\partial y} + m_3 \frac{\partial}{\partial z},$$

où  $m_1, m_2, m_3$ , sont de nouvelles quantités proportionnelles aux composantes du champ magnétique imposé.

**392. Symétrie des équations.** — Nous avons montré au § 372 que si le pouvoir rotatoire est le même dans la même direction pour les deux sens par rapport à l'observateur qui reçoit la lumière, les dérivées partielles doivent être impaires par rapport à  $x, y, z$ , et conséquemment paires par rapport au temps; puisque nous nous bornons à utiliser les dérivées troisièmes.

La polarisation rotatoire magnétique est au contraire identique dans l'espace absolu, quelle que soit la direction de propagation. Autrement dit, elle change par rapport à l'observateur, qui se retourne quand on intervertit le sens de propagation.

Il résulte de là, indépendamment de toute théorie, et en se basant uniquement sur la symétrie, que :

1° les équations linéaires interprétant la polarisation rotatoire *naturelle*, contiennent :

ou les dérivées  $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial}{\partial(x, y, z)}$ , (§ 373);

ou les dérivées  $\frac{\partial^3}{\partial(x, y, z)^3}$ , (§ 376);

2° les équations linéaires interprétant la polarisation rotatoire *magnétique*, contiennent :

ou les dérivées  $\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2}{\partial(x, y, z)^2}$ , (§ 394);

ou les dérivées  $\frac{\partial^3}{\partial t^3}$ , ou même les dérivées  $\frac{\partial}{\partial t}$ .

Indépendamment de toute théorie, il est possible de choisir entre les diverses hypothèses admissibles *par raison de symétrie* pour la polarisation rotatoire magnétique, quand on se borne aux dérivées troisièmes. Elles conduisent en effet à des lois de dispersion différentes.

L'expérience confirme, sinon les hypothèses sur lesquelles nous avons établi les relations (7), du moins la forme que nous avons obtenue.

**393. Vibrations transmises.** — Soit  $Ox$  la direction du champ magnétique; le plan  $xOy$  contient la normale à l'onde dont l'équation

est :  $(u, v, w) = (u_0, v_0, w_0) \exp i[\omega t - (ax + \beta y)]$ . (1)

Nous poserons :

$$m_2 = m_3 = 0, \quad m_1 = m, \quad \frac{\partial}{\partial \omega} = m \frac{\partial}{\partial x}.$$

Les équations générales deviennent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \Delta u + m \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= a^2 \Delta v - m \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= a^2 \Delta w - m \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Substituons dans (2) les expressions (1); il vient comme conditions :

$$\begin{aligned} Au_0 &= [(a^2 + \beta^2)a^2 - \omega^2] u_0 = -mi\omega\alpha\beta w_0, \\ Av_0 &= mi\omega\alpha^2 w_0, \\ Aw_0 &= mi\omega\alpha(\beta u_0 - \alpha v_0). \end{aligned} \quad (3)$$

On tire immédiatement des deux premières équations (3) :

$$\alpha u_0 + \beta v_0 = 0,$$

le mouvement vibratoire est donc dans le plan de l'onde : *l'onde est transversale*.

La dernière équation (3) peut s'écrire grâce à cette relation :

$$-Aw_0 = mi\omega(\alpha^2 + \beta^2)v_0$$

Multiplions-la par la seconde; il vient, en extrayant la racine :

$$A = \pm m\omega\alpha\sqrt{\beta^2 + \alpha^2}, \quad a^2 = \frac{\omega^2}{\alpha^2 + \beta^2} \pm \frac{m\omega\alpha}{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2}}.$$

Or  $\omega : \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = V_{12}$ , est la vitesse de propagation. Quand le champ est nul, c'est-à-dire quand  $m = 0$ , elle se réduit à  $a$ . Comme le second terme du second membre est toujours petit, on a, en extrayant la racine carrée par approximation :

$$V_{12} = a \mp \frac{m\omega}{2a} \cos \theta,$$

car  $\alpha : \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$  est le cosinus de l'angle  $\theta$  que fait la direction de propagation avec l'axe des  $x$ , c'est-à-dire avec la direction du champ magnétique imposé. On peut encore écrire :

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad aT = \lambda_1, \quad V_{12} = a \mp \frac{m\pi}{\lambda_1} \cos \theta.$$

Donc le milieu transmet dans chaque direction deux ondes avec des vitesses différentes  $V_1$  et  $V_2$ ; ces vitesses sont égales à la vitesse quand le champ est nul,  $\pm$  une quantité proportionnelle à ce champ, à un coefficient caractéristique du milieu, et au cosinus de l'angle que fait la direction de propagation avec le champ.

**394. Pouvoir rotatoire.** — Cherchons la forme des vibrations transmises.

De la valeur de  $A$ , on tire immédiatement :

$$\begin{aligned} \pm v_0 &= \frac{i\beta w_0}{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2}} = i \sin \theta w_0. \\ \pm v_0 &= -\frac{i\alpha w_0}{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2}} = -i \cos \theta w_0. \\ u_0^2 + v_0^2 + w_0^2 &= 0. \end{aligned}$$

Ces équations signifient que la résultante des amplitudes des vecteurs  $u$  et  $v$  est égale à l'amplitude du vecteur  $w$ . Les deux vecteurs  $u$  et  $v$  sont synchrones, mais ils sont décalés de  $\pm \pi/2$  sur le vecteur  $w$ .

Le milieu transporte donc dans toutes les directions deux vibrations circulaires, l'une droite, l'autre gauche, avec des vitesses différentes  $V_1$  et  $V_2$ . Suivant le signe de  $m$ , c'est la vibration droite qui est avancée ou retardée.

Le milieu jouit donc du pouvoir rotatoire. Cherchons la loi de dispersion. Nous savons que si  $n_1$  et  $n_2$  sont les indices des deux ondes

propagées,  $\lambda$  la longueur d'onde dans le vide de la radiation considérée,  $\rho$  la rotation, on a :

$$\rho = \frac{\pi}{\lambda} (n_1 - n_2), \quad n = \frac{V}{a}, \quad n_1 = \frac{V}{V_1}, \quad n_2 = \frac{V}{V_2},$$

où  $V$  est la vitesse dans le vide,  $n$  l'indice de réfraction en l'absence du champ.

$$n_1 = \frac{V}{V_1} = \frac{V}{a + m\omega \cos \theta} : 2a = n - \frac{m\omega V}{2a^2} \cos \theta = n - \frac{\pi mn^2}{V} \frac{\cos \theta}{\lambda} \\ \pm \rho = \frac{2\pi^2 mn^2}{V} \frac{\cos \theta}{\lambda^2}.$$

*La rotation est en raison inverse du carré de la longueur d'onde.*

**395. Généralisation.** — La formule de dispersion à laquelle nous sommes parvenus dans le paragraphe précédent ne tient pas compte de la variation de la vitesse  $a$  en fonction de la longueur d'onde, c'est-à-dire néglige la dispersion du milieu quand le champ magnétique est nul.

Pour tenir compte de la dispersion, on peut s'appuyer sur le principe de la superposition de petites causes. Ce qui fait qu'il y a dispersion, c'est-à-dire inégalité de vitesse, c'est que la longueur d'onde n'est pas la même pour les diverses radiations. Or l'existence du champ modifie la longueur d'onde; elle doit donc modifier la vitesse : d'abord par les termes que nous avons calculés ci-dessus, ensuite d'une manière indirecte parce que la dispersion intervient.

En d'autres termes, la loi de dispersion, *en l'absence du champ*, s'exprime par une relation :

$$n = f(\lambda_1),$$

où  $\lambda_1$  est la longueur d'onde de la radiation de période  $T$  dans le milieu. Pour une raison quelconque, la longueur d'onde tend à devenir :

$$\lambda_1 + d\lambda_1 = \lambda_1 - \frac{\lambda_1 dn}{n};$$

corrélativement l'indice de cette radiation tend à changer et à devenir  $n + dn$ . *Du fait même de la variation de  $\lambda_1$ , la loi de dispersion entre en jeu*; l'indice prend une nouvelle variation :

$$\frac{\partial n}{\partial \lambda_1} d\lambda_1 = \frac{\partial f(\lambda_1)}{\partial \lambda_1} d\lambda_1 = - \frac{\lambda_1}{n} \frac{\partial n}{\partial \lambda_1} dn.$$

D'où une variation totale :

$$n + dn \left[ 1 - \frac{\lambda_1}{n} \frac{\partial n}{\partial \lambda_1} \right] = n + dn \left[ 1 - \frac{\lambda}{n} \frac{\partial n}{\partial \lambda} \right],$$

où  $\lambda$  est la longueur d'onde dans le vide; le changement de  $\lambda_1$  en  $\lambda$  revient à multiplier haut et bas par l'indice.

Appliquons cette théorie générale au cas qui nous occupe :

$$\pm \rho = \frac{2\pi^2 m \cos \rho}{V} \frac{n^2}{\lambda^2} \left[ n - \lambda \frac{\partial n}{\partial \lambda} \right].$$

Le crochet se calcule au moyen du résultat des expériences de dispersion sur le milieu non modifié par la cause dont on étudie l'effet. Cette manière d'introduire la correction a l'avantage d'être indépendante de la théorie particulière à laquelle on a recours pour expliquer la loi de dispersion  $n = f(\lambda_1)$ .

**396. Théorie de la réflexion.** — Il n'entre pas dans le cas de cet ouvrage de pousser plus loin la théorie précédente.

On peut d'abord l'appliquer aux milieux absorbants. La généralisation ne présente aucune difficulté ; on imagine des ions qui vibrent avec frottement. Les calculs restent les mêmes, à la seule condition d'introduire une constante imaginaire et de calculer par imaginaires. Le procédé est identique à celui que nous avons utilisé aux §§ 202 et 251 du tome V. Les résultats sont conformes à ceux de l'expérience.

On peut appliquer la théorie à la réflexion. Malheureusement les équations de continuité sont incertaines et les calculs très compliqués. Nous insisterons d'autant moins que plusieurs théories sont en présence qui, tout en admettant la même symétrie pour les équations, diffèrent profondément dans leur interprétation.



## CHAPITRE XI

### CRISTAUX MOUS; LIQUIDES ANISOTROPES

Nous allons résumer très brièvement les intéressants travaux de O. Lehmann et de ses élèves, parmi lesquels il faut citer R. Schenck,

---

#### Cristaux mous.

**397. Existence des cristaux mous.** — L'existence de cristaux plastiques, se déformant aisément, est connue depuis longtemps. Les exemples abondent. La paraffine, le blanc de baleine, le camphre se présentent en masses nettement cristallines et cependant très facilement déformables. Le sulfure d'argent, le plomb cristallisé, le chlorure d'ammonium sont malléables.

On sait qu'il existe pour les corps amorphes tous les états intermédiaires entre l'état solide et l'état liquide; on ne voit pas pourquoi il en serait différemment pour les corps cristallisés.

Mais l'intérêt des *cristaux mous* nouvellement découverts est de présenter une fluidité telle, que certains phénomènes de déformation et de réunion de cristaux deviennent possibles.

Naturellement, et surtout si les cristaux sont petits, la malléabilité permet le jeu des forces superficielles. Les angles seront donc généralement émoussés et les arêtes remplacées par un cylindre arrondi. N'oublions pas que la tension superficielle agissant seule transforme le corps en une sphère. Son rôle est ici limité par les forces d'orientation dont l'effet est précisément la constitution d'un milieu cristallin.

Les meilleurs exemples de cristaux mous sont fournis par l'*azoxybenzoate d'éthyle*, le *benzoate de cholestéryle* et les *oléates*.

Le premier de ces corps, qui se comporte comme l'iodure d'argent, est solide au-dessous de 113° et liquide au-dessus de 120°. Si on le refroidit à partir de l'état liquide, on peut obtenir entre ces deux températures des cristaux mous. Pour les avoir isolés, il faut employer un solvant, par exemple la colophane. Les cristaux sont microscopiques et, les observations devant se faire à chaud, il est commode d'utiliser un microscope spécial.

Les cristaux se présentent sous forme d'aiguilles longues et fines, prismes quadratiques combinés avec les bases. Leur réfrangibilité moyenne est beaucoup plus grande que celle de la solution environnante, de sorte que leurs contours apparaissent extraordinairement nets et qu'on peut suivre aisément leurs variations de forme. Dichroïques, ils sont jaunes ou incolores suivant que la vibration est parallèle ou perpendiculaire à la longueur.

Parmi les autres corps donnant des cristaux particulièrement mous, on peut citer les oléates (dissous dans l'alcool à chaud et qu'on laisse refroidir; l'oléate d'ammonium est recommandé) et le benzoate de cholestéryle.

**398. Homéotropie.** — Lehmann appelle *homéotropie spontanée* la tendance à l'orientation et à la constitution d'éléments symétriques. Un cristal est brisé en plusieurs fragments : chacun d'eux tend à reprendre la forme normale.

Tiré dans une direction autre que sa longueur, un cristal mou d'oléate d'ammonium prend une structure parallèle à la direction de tiraillement : c'est l'*homéotropie contrainte*. Un peu d'oléate est placé entre un porte-objet et un couvre-objet sous le microscope ; on donne au couvre-objet un mouvement de va-et-vient dans une direction déterminée ; en lumière parallèle, on obtient une extinction uniforme entre nicols croisés, indice d'une orientation uniforme des éléments cristallins. Ils se disposent dans le sens même du va-et-vient.

**399. Réunions et macles.** — Deux gouttes liquides qui viennent au contact, fusionnent pour n'en plus faire qu'une ; c'est le résultat de l'action de la tension superficielle.

Les cristaux mous présentent des phénomènes qui diffèrent du

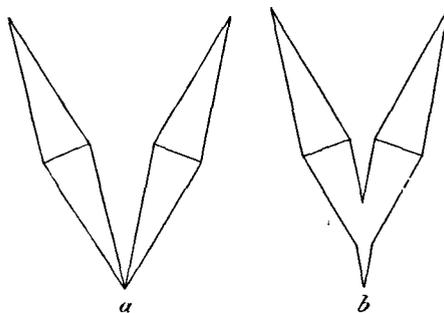


Fig. 231.

précèdent par l'existence de forces d'orientation cristallogéniques. Voici quelques exemples de ces curieuses réunions.

Deux cristaux se rencontrent en pointe (fig. 231, a) ; ils se pénètrent

comme l'indique la figure *b*, en tendant vers le parallélisme. Ils finissent par ne plus faire qu'un individu.

S'ils se trouvent quasi-parallèles, mais les bouts non alignés (fig. 232, *a*), ils donnent un individu plus long que les constituants (fig. 232, *b*).

Enfin s'ils sont à peu près à angle droit (fig. 233, *a*), ils se placent

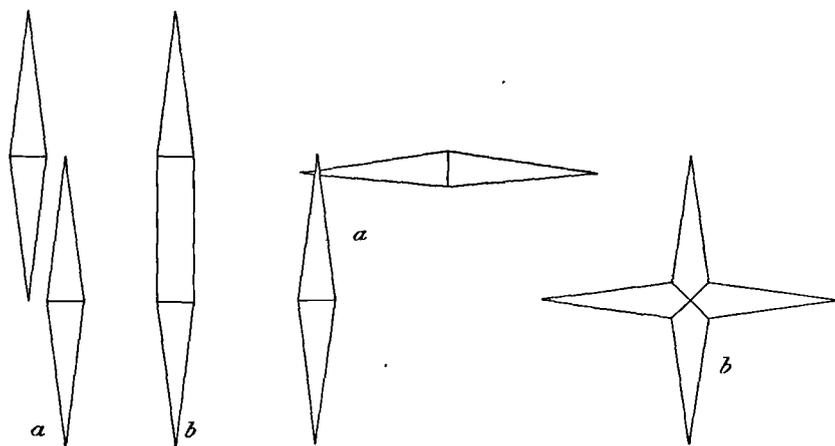


Fig. 232.

Fig. 233.

rigoureusement à angle droit et se pénètrent de manière à constituer une macle.

Du reste, la pénétration effectuée, l'individu constitué est homogène, comme le prouve l'observation en lumière polarisée.

Les déplacements peuvent être extrêmement rapides, surtout si on est au voisinage d'une position de pénétration.

Une macle peut être obtenue avec un seul cristal. Ployé, il commence par se courber. Il se brise ensuite, et les deux morceaux peuvent se réunir en se maclant.

**400. Tension superficielle.** — Quand une aiguille d'azoxybenzoate d'éthyle vient en contact *par sa pointe* avec une bulle d'air en suspension dans le liquide, elle s'étale peu à peu comme le montre la figure 234, jusqu'à se transformer en une sorte de pyramide à base courbe. Pendant l'extension, les éléments cristallins se disposent de manière que l'axe principal soit normal à la surface de contact cristal air. En lumière parallèle, entre deux nicols croisés, l'extinction se fait aux points où l'une des sections principales des nicols est normale à la surface de contact.

On comprend pourquoi l'étalement n'a lieu que si l'aiguille touche la bulle par sa pointe; si elle la touche par sa surface latérale, rien ne se produit. Le phénomène est sous la dépendance des valeurs

relatives des tensions superficielles (cristal dissolution, air dissolution, cristal air), en remarquant que le cristal est caractérisé par plusieurs constantes suivant les plans réticulaires de contact avec le

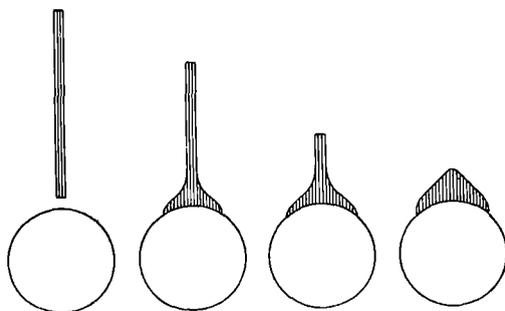


Fig. 234.

fluide voisin. L'étalement résulte de ce que la tension (cristal air), est plus petite que la tension (dissolution air).

Plusieurs cristaux s'étalant sur la même bulle (fig. 235), peuvent

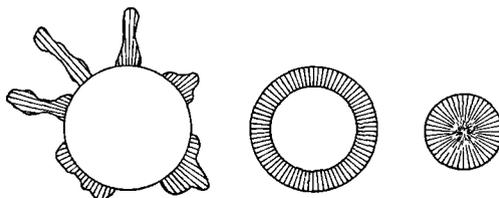


Fig. 235.

la recouvrir d'une couche continue. Si pour une raison quelconque la bulle (air ou vapeur) se résorbe, il reste un sphéro-cristal, c'est-à-dire un *assemblage de symétrie radiée* (§ 161).

**401. Adsorption.** — On admet qu'à la surface de contact d'un solide et d'un liquide ou encore d'un solide et d'un gaz, existe une couche où les éléments sont dans un état spécial. Si le liquide est pur, la densité de cette couche peut différer de la densité générale; s'il s'agit d'une dissolution, la concentration peut différer de la concentration générale. C'est à cette action qu'on donne le nom d'*adsorption*, par opposition avec l'*absorption* qui est la dissolution du liquide ou du gaz par le solide.

La notion d'*adsorption* a pris de l'importance dans ces dernières années, par suite de l'étude des colloïdes. S'il existe en suspension dans un liquide un grand nombre de granules extrêmement petits, leur surface totale devient énorme par rapport à leur masse totale;

en effet, le rapport de ces deux quantités varie en raison inverse des dimensions moyennes des granules. On conçoit que les modifications dues à l'*adsorption*, finissent par l'emporter de beaucoup sur les modifications dues à l'*absorption*.

Si l'une des substances au contact est anisotrope, l'*adsorption* pourra jouer le rôle de force directrice; si la couche de matière anisotrope comprise entre deux solides isotropes est mince, l'action directrice superficielle pourra s'étendre à toute la masse.

Les phénomènes sont nombreux qui prouvent une tendance à l'orientation par rapport à la surface limitrophe, c'est-à-dire l'existence de phénomènes d'*adsorption*.

De l'oléate d'ammoniaque placé entre un porte-objet et un couvre-objet et abandonné à lui-même, paraît être devenu isotrope : il y a extinction entre nicols croisés. Cela prouve simplement qu'au repos les axes optiques se sont orientés normalement aux surfaces de verre (fig. 236). Sur les surfaces de contact avec la dissolution environ-

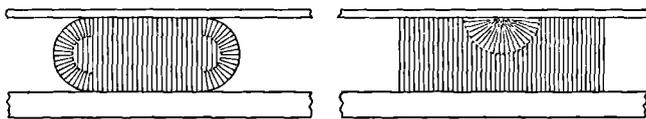


Fig. 236.

nante, les axes s'orientent normalement, comme le montre la figure. Mais si on soulève le couvre-objet ou si on appuie dessus, autour des poussières et des bulles d'air qui lui sont adhérentes se produiront des moitiés de sphérocrystal qui donnent la croix noire entre nicols croisés.

402. **Cristaux mixtes, formes myéliques.** — Quand deux gouttes de liquides isotropes (fig. 237, *a* et *b*) viennent au contact et qu'elles ne sont pas miscibles, elles s'entourent l'une l'autre comme le montre la figure *c*. C'est ce qui arrive, par exemple, pour l'huile qui s'étale sur l'eau. Si elles sont miscibles, elles donnent une sphère liquide (fig. *d*).

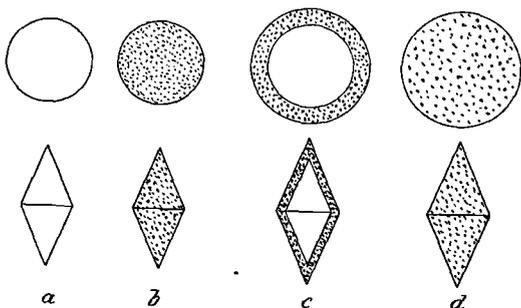


Fig. 237.

S'il s'agit de cristaux mous, on peut obtenir l'un ou l'autre des phénomènes précédents.

Supposons maintenant qu'il s'agisse d'un cristal mou et d'un liquide

ordinaire, le cristal peut constituer une mince couche autour du liquide (fig. 238, *a*). Mais les molécules s'orientent. Il se produit un sphérocrystal creux donnant la croix noire entre nicols croisés en lumière parallèle. La croix ne varie pas quand on tourne la préparation.

Si le volume du liquide inclus est assez petit, la tension superficielle est incapable de s'opposer aux forces d'orientation moléculaires. La sphère s'étire en un cylindre (fig. 238, *b*) et donne ce qu'on appelle une *forme myélique*.

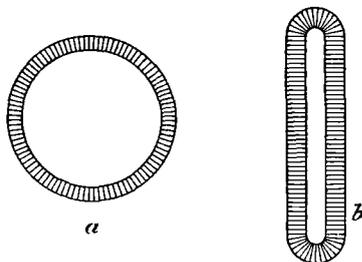


Fig. 238.

Les lois d'accroissement de ces formes sont curieuses, mais nous ne pouvons insister.

C'est à ces formes qu'on rapporte un grand nombre d'arborescences indûment comparées à des végétations naturelles.

### Liquides anisotropes.

**403. Liquides anisotropes.** — Ils jouissent tous des propriétés suivantes. A froid ce sont des solides cristallisés. A une certaine température  $T_i$ , dite de *transformation*, ils donnent un liquide trouble, biréfringent, anisotrope; à une température plus élevée  $T_f$ , dite de *fusion*, ils fournissent un liquide limpide et isotrope.

Le liquide trouble n'est pas une émulsion; soumis à l'action de la force centrifuge, il ne se sépare pas en deux parties; c'est bien un liquide pur. La viscosité du liquide anisotrope est généralement *moindre* que celle du liquide limpide; de plus, il y a discontinuité pour la viscosité au passage d'une forme à l'autre.

Les liquides qui possèdent ces propriétés à un degré éminent sont: le *p-azoxyanisol* ( $T_i=16^\circ$ ,  $T_f=134^\circ$ ), le *p-azoxyphénétol* ( $T_i=137^\circ$ ,  $T_f=168^\circ$ ), le *p-azoxyanisolphénétol* ( $T_i=93^\circ$ ,  $T_f=150^\circ$ ).

**404. Structure homogène.** — En prenant quelques précautions, on peut obtenir des *lames liquides anisotropes homogènes*, c'est-à-dire jouissant des propriétés des lames cristallines ordinaires, fournissant par exemple les teintes de l'échelle de Newton entre deux nicols en lumière parallèle.

Disposons sur le porte-objet quelques cristaux solides, plaçons un couvre-objet, faisons fondre et refroidissons. Il se forme des cristaux solides, diversement orientés suivant des plages juxtaposées, très biréfringents et dichroïques.

Chauffons alors lentement la préparation au-dessus de la température de transformation. Le solide fond en donnant naissance au liquide anisotrope. Il est remarquable que, pendant la fusion, les molécules conservent leur orientation initiale, de sorte que (à une petite diminution de la biréfringence près) les colorations des plages restent ce qu'elles étaient auparavant.

Si l'on appuie sur le couvre-objet, les lamelles s'étalent tout en conservant leur homogénéité. Si l'on fait glisser le couvre-objet, tout se passe comme si les surfaces des lamelles étaient invariablement liées aux faces de verre en contact (*adsorption*). Le nouveau phénomène se déduit d'un chevauchement de deux phénomènes identiques au premier, mais correspondant à des épaisseurs moitié moindres, et qui auraient glissé l'un par rapport à l'autre.

Deux portions de liquide anisotrope peuvent donc se maintenir au contact *avec des orientations différentes pour leurs molécules*. D'où l'explication du trouble qu'offre le liquide anisotrope pris en masse : il est dû aux variations irrégulières de réfrangibilité.

On peut dire, si l'on veut, que les liquides anisotropes constituent de véritables cristaux.

Nous avons expliqué au § 140 pourquoi il semble préférable de maintenir le nom de cristal aux assemblages qui présentent des propriétés vectorielles discontinues. Aussi bien cette question de définition n'a pas grande importance.

Si on ne prend aucune précaution, la préparation ne présente plus de plages homogènes.

Cependant elle ne se conduit généralement pas comme un milieu *isotrope par compensation*. Il se forme autour de certains points des agrégats de molécules possédant une certaine symétrie. En lumière parallèle entre deux nicols, on aperçoit des franges irrégulières, se coupant en des sortes de pôles où elles aboutissent en s'amincissant. L'aspect est analogue à celui que présente une lame de verre fortement et irrégulièrement trempé.

Pour donner aux phénomènes une simplicité relative, il est préférable d'isoler une petite portion du liquide. La tension superficielle lui impose la forme d'une sphère; elle constitue une *gouttelette anisotrope*, ce que Lehmann appelle un *cristal liquide*.

**405. Gouttelettes anisotropes; première position principale.** — Pour obtenir les gouttelettes anisotropes, il faut supprimer l'adsorption qui existe entre la matière étudiée et le verre du porte-objet et du couvre-objet. On ajoute une trace d'huile ou de colophane qui forme une couche extrêmement mince sur le verre. En vertu de la tension superficielle qui n'est plus gênée, le liquide se résout en gouttelettes.

L'observation en lumière naturelle suffit à prouver leur biréfringence.

Les phénomènes sont très variés, mais se ramènent à deux principaux et à leurs intermédiaires.

La gouttelette possède un axe de symétrie; si l'axe est normal au plan de la préparation, on dit qu'elle est dans la première position principale (fig. 239, I); si l'axe est parallèle au plan de la préparation, on dit qu'elle est dans la seconde position principale (fig. 239, II).

1° Dans la première position principale, en lumière parallèle et naturelle, les éclaircissements sont de révolution autour du centre. Il existe une tache noire centrale, puis une région annulaire grise bordée extérieurement par un anneau noir.

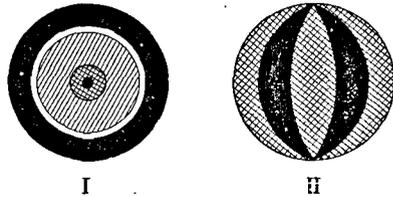


Fig. 239.

On ne peut expliquer ces apparences que par une distribution des chemins optiques totaux parallèles à l'axe, telle que la produirait la lentille représentée figure 240, supposée immergée dans une sphère homogène d'indice différent. Cette image n'est d'ailleurs valable que pour les directions de propagation parallèles à l'axe. Les parties axiales du faisceau de lumière parallèle, tombant parallèlement à l'axe, se trouveraient écartées de l'axe, tandis que les parties périphériques seraient rapprochées de l'axe. D'où la tache noire centrale, l'anneau noir périphérique et la région grise intermédiaire.

On peut se représenter les molécules comme distribuées uniformément sur les parallèles des couches sphériques très minces concentriques en lesquelles la gouttelette peut être considérée comme décomposée. Ce seront des sortes de tables avec leurs grandes dimensions parallèles à la surface. L'indice radial est supposé beaucoup plus petit que l'indice tangentiel.

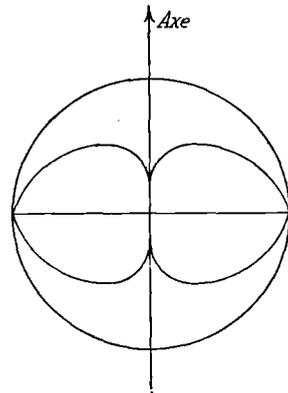


Fig. 240.

Suivant l'axe, toutes les molécules sont traversées radialement, c'est-à-dire suivant la direction à laquelle correspond le plus petit indice. On s'explique donc que le chemin optique parallèlement à l'axe puisse *croître* quand on s'éloigne de l'axe, malgré la *diminution* de l'épaisseur. Très loin de l'axe, cette diminution finit par l'emporter; le chemin optique s'annule évidemment à la périphérie.

2° Si la lumière est polarisée d'un seul côté, on aperçoit, se dessinant sur le phénomène précédent, une séparation en quatre secteurs

se raccordant au centre et deux à deux identiques. Leurs colorations diffèrent.

Ils ne sont pas orientés symétriquement par rapport à la vibration incidente. De plus, l'orientation varie quand on remplace le polariseur par un analyseur parallèle; l'orientation est la même, quand le polariseur et l'analyseur successivement employés sont à angles droits.

Ces phénomènes indiquent l'existence d'un dichroïsme et d'une polarisation rotatoire.

3° Enfin si la lumière est polarisée des deux côtés, on a une croix noire; l'orientation de cette croix et ses colorations décèlent encore le dichroïsme et la polarisation rotatoire.

Il peut d'ailleurs se produire dans la gouttelette des espèces de tourbillons qui transforment la croix en une spirale à quatre branches. Cela arrive quand on chauffe la face inférieure de la préparation, de sorte que la température varie dans la direction de l'axe. Il semble alors que les couches sphériques extérieures tournent plus vite que les couches sphériques intérieures.

#### 406. Gouttelettes anisotropes; seconde position principale.

— Dans la position II, on peut admettre que l'axe de la gouttelette est normal à la direction de visée: les variations d'éclairement sont progressives, beaucoup moins brutales que ne l'indique la figure.

On admet que ces apparences sont dues à des réflexions intérieures.

407. Réunion de plusieurs gouttelettes anisotropes. — Les gouttes tendent à se réunir en vertu de la tension superficielle; elles donnent par leur réunion un ensemble sphérique où la constitution des individus primitifs se maintient en partie. Il résulte de là des agrégats à plusieurs noyaux, présentant des apparences extrêmement complexes, mais où l'on retrouve plusieurs fois les positions principales correspondant à une goutte et leurs intermédiaires, déformés par l'association.

408. Orientation par le magnétisme. — Les gouttes sont orientées par le magnétisme; l'axe de symétrie tend à se mettre parallèlement aux lignes de force. Si le microscope est vertical et le champ horizontal, la goutte apparaît dans la position II; s'il est normal au porte-objet, elle apparaît dans la position I.

Non seulement les gouttes tendent à s'orienter en bloc, mais, à l'intérieur même des gouttes, les éléments cristallins tendent à s'aligner sous l'influence du champ; d'où une déformation des aspects I et II.

## ERRATA

---

Négligeant des fautes sans importance et qui seront corrigées dans les éditions suivantes, je signale dans le tome IV deux fautes plus graves, la première que le lecteur aura certainement corrigée, la seconde plus difficile à démêler.

Au § 81, il est dit que « l'une des droites caustiques dues à une lentille cylindrique est à l'infini », ce qui est évidemment faux et contradictoire avec les propositions générales, par exemple avec le § 74. La lentille cylindrique est formée de deux dioptries de symétrie telle que l'ensemble possède deux plans de symétrie rectangulaires. Il résulte du § 74 que la position des focales de Sturm, et par conséquent des droites caustiques, s'obtient en cherchant les images du point lumineux successivement dans les deux plans de symétrie. D'où résulte que, le système dans un de ces plans étant assimilable à une bande mince à faces parallèles, une des droites caustiques est virtuelle et passe par le point lumineux lui-même.

Au § 98, page 114, est donnée une condition inexacte. Faisant  $\beta$  grand devant l'unité et par suite  $b = d$ , la relation qui termine la page 113 devient :

$$a = \frac{\alpha f d}{\sqrt{d'^2 - \alpha^2 \beta^2}} = \frac{\beta' d}{\sqrt{1 - \beta'^2}}, \quad (2)$$

en posant :

$$d' = d, \quad \beta' = \alpha \beta : d.$$

$\beta$  et  $d$  sont choisis arbitrairement; la relation (2) donne le paramètre  $a$  de l'hyperbole en fonction de  $\beta'$ , et par suite en fonction du paramètre  $\alpha$  qui fixe la position de la droite en laquelle l'hyperbole est transformée.

---



# TABLE DES MATIÈRES

## ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DES SYMÉTRIES

### INTRODUCTION

§	1. Opérations de première et de seconde espèces . . . . .	1
§	2. Opérateurs et éléments de symétrie . . . . .	1
§	3. Figures finies : vingt-quatre groupes de polyèdres . . . . .	2
§	4. Réseaux : sept systèmes, quatorze modes . . . . .	3
§	5. Théories cristallographiques de Bravais et Mallard . . . . .	3
§	6. Changement de front : loi d'Haüy . . . . .	4
§	7. Groupes finis de déplacements, systèmes cristallins . . . . .	5
§	8. Groupes infinis de déplacement . . . . .	5
§	9. Résumé . . . . .	6

### CHAPITRE I

#### Des opérations et de leurs combinaisons.

§	10. Opérations de première espèce . . . . .	9
§	11. Opérations de seconde espèce . . . . .	10
§	12. Généralités sur les opérations et leurs combinaisons . . . . .	11
§	13. Figure possédant des éléments de symétrie . . . . .	12
§	14. Permutation d'une réflexion et d'une translation . . . . .	13
§	15. Composition d'une translation et d'une rotation . . . . .	13
§	16. Permutation d'une translation et d'une rotation . . . . .	14
§	17. On peut superposer deux figures congruentes par une translation suivie d'une rotation (opération TA) ou par l'opération inverse . . . . .	15
§	18. Déplacement résultant de deux rotations autour d'axes passant par le même point O . . . . .	16
§	19. Transpositions autour d'axes concourants . . . . .	16
§	20. Composition de rotations autour d'axes parallèles . . . . .	17
§	21. Transpositions autour d'axes parallèles . . . . .	18
§	22. Déplacements hélicoïdaux : décomposition en deux transpositions . . . . .	18
§	23. Le déplacement résultant de plusieurs mouvements hélicoïdaux est un mouvement hélicoïdal . . . . .	19
§	24. Deux figures congruentes sont superposables au moyen d'un déplacement hélicoïdal . . . . .	19
§	25. Corollaires . . . . .	20
§	26. Problème inverse . . . . .	20
§	27. Théorèmes sur les plans de symétrie ou miroirs . . . . .	21
§	28. Une figure peut être superposée à une figure énantiomorphe au moyen d'une seule réflexion rotative . . . . .	22

## CHAPITRE II

**Polyèdres symétriques.**

§ 29. Propositions générales . . . . .	23
§ 30. Polyèdres symétriques dépourvus d'axes . . . . .	23
§ 31. Polyèdres symétriques à axe principal . . . . .	24
§ 32. Polyèdres à axe principal d'ordre pair . . . . .	25
§ 33. Polyèdres à axe principal d'ordre impair . . . . .	25
§ 34. Coexistence d'axes multiples de même ordre passant par le même point . . . . .	25
§ 35. Limitation du nombre d'axes d'ordre supérieur à 2 existant simultanément . . . . .	27
§ 36. Polyèdres décemternaires . . . . .	27
§ 37. Polyèdres quaternaires : combinaisons d'axes . . . . .	28
§ 38. Polyèdres quaternaires : classification . . . . .	29
§ 39. Groupe à plan de symétrie alterne ou à axe de seconde espèce . . . . .	29
§ 40. Tableau des 24 groupes de polyèdres . . . . .	31
§ 41. Exemple simple des groupes pour un axe quaternaire . . . . .	32
§ 42. Autres exemples. Axe de révolution . . . . .	34
§ 43. Remarque sur le nombre des polyèdres d'un même groupe . . . . .	34

**Projection stéréographique.**

§ 44. Inversion par rapport à un point . . . . .	35
§ 45. Projection stéréographique . . . . .	36
§ 46. Représentation des faces d'un polyèdre. Conventions . . . . .	37

## CHAPITRE III

**Réseaux.**

§ 47. Définition des réseaux (Bravais) . . . . .	38
§ 48. Éléments limitrophes et conjugués . . . . .	39
§ 49. Étude analytique d'un réseau. Nœuds et rangées . . . . .	40
§ 50. Plans réticulaires . . . . .	41
§ 51. Zones . . . . .	41
§ 52. Théorème sur les aires des parallélogrammes et les volumes des mailles . . . . .	42
§ 53. Maille simple, maille multiple . . . . .	43
§ 54. Calcul de la maille; distance de deux plans limitrophes . . . . .	44
§ 55. Expression de $\Delta$ et de $S$ en fonction de $q, r, s$ . . . . .	44
§ 56. Importance relative des faces . . . . .	45
§ 57. Assemblages et réseaux multiples (G. Friedel). . . . .	46

**Symétrie et modes des réseaux.**

§ 58. Théorèmes généraux sur la symétrie des réseaux . . . . .	48
§ 59. Un réseau ne peut avoir que des axes d'ordre 2, 3, 4, 6 . . . . .	49
§ 60. Systèmes et modes des réseaux . . . . .	50
§ 61. Remarques générales . . . . .	51

§ 62. Mode du système triclinique . . . . .	52
§ 63. Modes du système clinorhombique ou monoclinique . . . . .	52
§ 64. Modes du système orthorhombique . . . . .	54
§ 65. Modes du système quaternaire ou tétragonal . . . . .	55
§ 66. Modes du système hexagonal et du système rhomboédrique . . . . .	56
§ 67. Modes du système régulier ou cubique . . . . .	57
§ 68. Théories cristallographiques de Bravais et Mallard . . . . .	58

## CHAPITRE IV

### Loi des indices rationnels et ses conséquences.

§ 69. Énoncé de la loi des indices rationnels (Haüy) . . . . .	60
§ 70. Position du problème . . . . .	61
§ 71. Utilisation d'un réseau . . . . .	62
§ 72. Un faisceau d'Haüy ne peut admettre que des axes d'ordre 2, 3, 4, 6. . . . .	64
§ 73. Théorèmes sur les axes pairs d'un faisceau . . . . .	65
§ 74. Conclusions pour les symétries ne contenant pas d'axes ternaires . . . . .	66
§ 75. Cas des axes ternaires . . . . .	66
§ 76. Existence des axes ternaires irrationnels . . . . .	68
§ 77. Des 32 classes de cristaux . . . . .	69

## CHAPITRE V

### Groupes finis de déplacements.

§ 78. Définition des groupes d'opérations . . . . .	70
§ 79. Groupes finis d'opérations; problème de la Cristallographie . . . . .	71

### Groupes finis de première espèce.

§ 80. Groupes cycliques . . . . .	72
§ 81. Groupes diédraux . . . . .	73
§ 82. Axes hémimorphes, axes bilatéraux. Groupement des axes binaires . . . . .	75
§ 83. Groupes isométriques . . . . .	75

### Groupes finis de seconde espèce.

§ 84. Groupes cycliques de seconde espèce . . . . .	77
§ 85. Groupes cycliques paramorphes . . . . .	79
§ 86. Groupes cycliques hémimorphes . . . . .	80
§ 87. Groupes diédraux . . . . .	81
§ 88. Groupes isométriques . . . . .	83
§ 89. Tableau des groupes finis . . . . .	85
§ 90. Holoédrie et mériédrie . . . . .	87

## CHAPITRE VI

**Systèmes cristallins.**

§ 91. Méthode des troncatures (Haüy) . . . . .	89
§ 92. Formes méridiennes : hémiedrie, tétartoédrie . . . . .	90
§ 93. Différentes sortes d'hémiedrie . . . . .	91
§ 94. Formes simples, formes composées; formes ouvertes, formes fermées. . . . .	93

**Systèmes de notations.**

§ 95. Notation d'Haüy complétée par Lévy . . . . .	93
§ 96. Troncatures sur les angles, sur les arêtes . . . . .	93
§ 97. Axes de coordonnées, notation de Miller . . . . .	94
§ 98. Changements d'axes de coordonnées . . . . .	95
§ 99. Système de notations à quatre caractéristiques; système hexagonal.	96
§ 100. Système ternaire . . . . .	97
§ 101. Tableau des éléments de symétrie des trente-deux classes de formes cristallines, rangées par systèmes. . . . .	98

**I. Système cubique.**

§ 102. Holoédrie . . . . .	100
§ 103. Hémiedrie énantiomorphe . . . . .	102
§ 104. Hémiedrie hémimorphe . . . . .	102
§ 105. Hémiedrie paramorphe . . . . .	103
§ 106. Tétartoédrie . . . . .	103

**II. Système hexagonal.**

§ 107. Holoédrie. . . . .	104
§ 108. Méridiennes . . . . .	105

**III. Système rhomboédrique.**

§ 109. Holoédrie . . . . .	106
§ 110. Méridiennes . . . . .	108

**IV. Système quaternaire.**

§ 111. Holoédrie . . . . .	109
§ 112. Méridiennes . . . . .	110

**V. Système orthorhombique.**

§ 113. Holoédrie . . . . .	111
§ 114. Méridiennes . . . . .	112

**VI. Système clinorhombique.**

§ 115. Holoédrie . . . . .	113
§ 116. Mériédries . . . . .	113

**VII. Système triclinique.**

§ 117. Holoédrie . . . . .	114
§ 118. Mériédrie . . . . .	114

**CHAPITRE VII**

**Groupes infinis de déplacements.**

§ 119. Homogénéité anisotrope, structure cristalline, domaine fondamental. . . . .	115
§ 120. Figures planes : groupe de translations . . . . .	116
§ 121. Figures planes : groupe contenant deux translations et une réflexion. . . . .	118
§ 122. Figures planes : groupe contenant deux translations et un axe binaire. . . . .	119
§ 123. Figures planes : groupes contenant deux translations, une ou plusieurs réflexions, des transpositions. . . . .	120
§ 124. Retour sur la définition de l'homogénéité; importance des groupes de translations . . . . .	121
§ 125. Opération transformée d'une opération par le moyen d'une troisième opération . . . . .	122

**Groupes infinis de translations.**

§ 126. Les groupes de translations sont représentés par des réseaux. . . . .	123
§ 127. Les groupes de translations sont des groupes ÉMINENTS des groupes infinis généraux . . . . .	124
§ 128. Modes et symétries des groupes infinis de translations. . . . .	125

**Groupes infinis généraux.**

§ 129. Opérations isomorphes . . . . .	126
§ 130. Notations et tableau des groupes généraux. . . . .	127
§ 131. Groupes généraux du système triclinique. . . . .	128
§ 132. Groupes hémimorphes du système clinorhombique ou monoclinique. . . . .	130
§ 133. Groupes énantiomorphes du système clinorhombique . . . . .	133
§ 134. Groupes téartoédriques du système quaternaire. . . . .	135
§ 135. Symétrie des phénomènes physiques. . . . .	137
§ 136. Système sénnaire et système rhomboédrique. . . . .	138
§ 137. Groupes $C_3^n$ et $C_6^n$ . . . . .	138
§ 138. Domaine fondamental, domaine complexe, milieu indéfini . . . . .	140
§ 139. Symétrie du domaine complexe comparée à celle du réseau . . . . .	141

## ÉTUDE PHYSIQUE DES SYMÉTRIES

## CHAPITRE I

## Symétries des cristaux.

§ 140.	Définition du milieu cristallin . . . . .	143
§ 141.	Cristaux, détermination du système . . . . .	144
§ 142.	Mesure des angles. . . . .	145
§ 143.	Choix du système et de la forme primitive . . . . .	147
§ 144.	Loi de Bravais . . . . .	147
§ 145.	Variabilité des formes. . . . .	148
§ 146.	Pseudosymétrie et mériédrie. . . . .	149
§ 147.	Cristallisation à partir d'une dissolution . . . . .	150
§ 148.	Exemple du bimalate d'ammoniaque . . . . .	150
§ 149.	Rôle de la tension superficielle. . . . .	152
§ 150.	Figures de corrosion . . . . .	153
§ 151.	Inégalités dans la vitesse de dissolution. . . . .	153
§ 152.	Faces de dissolution. . . . .	154
§ 153.	Figures d'efflorescence . . . . .	154
§ 154.	Clivages . . . . .	154
§ 155.	Dureté : anciennes définitions . . . . .	155
§ 156.	Dureté : définition de Hertz . . . . .	157

## Formation et accroissement des cristaux.

§ 157.	Globulites ; théorie embryonnaire. . . . .	157
§ 158.	Cristallisation type . . . . .	158
§ 159.	Squelettes . . . . .	158
§ 160.	Trichites, arborescences . . . . .	159
§ 161.	Sphéro-cristaux. . . . .	160

## CHAPITRE II

## Groupements et mélanges.

§ 162.	Macles par mériédries proprement dites. . . . .	161
§ 163.	Exemples. . . . .	162
§ 164.	Remarques . . . . .	163
§ 165.	Macles par pseudo-mériédrie. . . . .	164
§ 166.	Plan ou axe de macle . . . . .	165
§ 167.	Nature de la surface d'accolement . . . . .	166
§ 168.	Macles par mériédrie ou pseudo-mériédrie réticulaire . . . . .	168
§ 169.	Mimésie (Mallard). . . . .	170

**Polymorphisme, homéomorphisme, syncrystallisation.**

§ 170. Polymorphisme et isométrie . . . . .	170
§ 171. Transformations polymorphiques directes . . . . .	171
§ 172. Relations entre le polymorphisme et les macles . . . . .	172
§ 173. Transformations directes avec déformation du réseau . . . . .	173
§ 174. Transformations indirectes . . . . .	173
§ 175. Formes stables et métastables . . . . .	174
§ 176. Syncrystallisation . . . . .	175
§ 177. Réseaux et propriétés des cristaux mixtes . . . . .	176
§ 178. Homéomorphisme . . . . .	178

**CHAPITRE III**

**Déformations homogènes.**

§ 179. Définition de la déformation homogène . . . . .	179
§ 180. Conservation des indices et des zones . . . . .	180
§ 181. Transformation d'un ellipsoïde . . . . .	180
§ 182. Dilatation d'une droite quelconque . . . . .	181
§ 183. Variation de distance de deux plans parallèles . . . . .	182
§ 184. Dilatation cubique . . . . .	183
§ 185. Angles de deux directions . . . . .	183
§ 186. Angles de deux plans . . . . .	183
§ 187. Cas du système clinorhombique . . . . .	184
§ 188. Directions atropiques dans le cas général . . . . .	187
§ 189. Trièdres sans déformation . . . . .	188
§ 190. Réduction du nombre des paramètres; cas d'une pure rotation . . . . .	189
§ 191. Réduction du nombre de paramètres; cas d'une pure déformation . . . . .	191
§ 192. Cas de petites déformations . . . . .	191

**Classification des cristaux.**

§ 193. Invariabilité du système sous l'action d'une variable scalaire . . . . .	192
§ 194. Premier groupe : cristaux isotropes . . . . .	193
§ 195. Second groupe : cristaux possédant un axe d'isotropie . . . . .	194
§ 196. Troisième groupe : cristaux orthorhombiques . . . . .	194
§ 197. Quatrième groupe : cristaux clinorhombiques . . . . .	194
§ 198. Cinquième groupe : cristaux anorthiques . . . . .	195
§ 199. Relation des ellipsoïdes représentant divers phénomènes dans le même cristal . . . . .	195

**Dilatation thermique.**

§ 200. Étude expérimentale . . . . .	195
§ 201. Dilatations dans les cristaux clinorhombiques et anorthiques . . . . .	196

**Compression uniforme.**

§ 202. Compression uniforme . . . . .	198
---------------------------------------	-----

**Glissements.**

§ 203. Définition du glissement. . . . .	198
§ 204. Représentation du glissement . . . . .	199
§ 205. Plans de glissement. . . . .	200

**CHAPITRE IV****Relations entre deux quantités vectorielles.**

§ 206. Relation entre deux vecteurs. . . . .	201
§ 207. Changements des axes de coordonnées . . . . .	203
§ 208. Travail. . . . .	204

**Énergies électrique et magnétique.**

§ 209. Énergie électrique de déformation dans les corps isotropes . . . . .	205
§ 210. Énergie magnétique de déformation . . . . .	206
§ 211. Milieux anisotropes. . . . .	207
§ 212. Énergie potentielle des corps polarisés. . . . .	207
§ 213. Déplacements des corps polarisés . . . . .	208
§ 214. Orientation d'une sphère anisotrope dans un champ uniforme . . . . .	210
§ 215. Corps dans un diélectrique autre que l'air . . . . .	211
§ 216. Application à la sphère ; corps diamagnétiques apparents. . . . .	211
§ 217. Ellipsoïde polarisable dans un champ uniforme . . . . .	212
§ 218. Corps allongés dans un champ variable. . . . .	213
§ 219. Classification des cristaux . . . . .	213

**Polarisation magnétique.**

§ 220. Vérifications expérimentales de la théorie. . . . .	214
§ 221. Résultat des expériences. . . . .	215
§ 222. Cas remarquables ; généralisation de la théorie (Weiss) . . . . .	216
§ 223. Force coercitive . . . . .	218

**Polarisation électrique.**

§ 224. Rotations et déplacements des diélectriques dans les champs électriques . . . . .	218
§ 225. Méthode du condensateur . . . . .	219
§ 226. Relation de Maxwell. . . . .	220

**CHAPITRE V****Relation entre deux quantités vectorielles (suite).****Conductibilités thermique et électrique.**

§ 227. Le vecteur excitateur dérive d'un potentiel . . . . .	222
§ 228. Flux du vecteur $u, v, w$ ; état permanent et état variable. . . . .	223
§ 229. Conductibilité suivant la normale aux surfaces équipotentiellles. . . . .	224
§ 230. Conductibilité dans le sens du courant . . . . .	225
§ 231. Source de chaleur punctiforme à l'intérieur d'un corps anisotrope indéfini ; ellipsoïde principal . . . . .	226

§ 232. Source punctiforme dans un milieu symétrique . . . . .	227
§ 233. Ellipsoïde des conductibilités dans un milieu symétrique. . . . .	227
§ 234. Courants dans les milieux asymétriques . . . . .	229
§ 235. Mouvement spiraliforme . . . . .	230
§ 236. Classification des cristaux . . . . .	231

**Étude expérimentale des conductibilités.**

§ 237. Méthodes du mur et du cylindre mince . . . . .	234
§ 238. Méthode des courbes isothermes. . . . .	234
§ 239. Résultats des expériences sur la conductibilité thermique . . . . .	235
§ 240. Résultats des expériences sur la conductibilité électrique . . . . .	235

**Phénomène de Hall et phénomènes analogues.**

§ 241. Phénomène dans une plaque isotrope par rapport aux coefficients $k$ , mais pour laquelle les coefficients rotationnels ne sont pas nuls . . . . .	236
§ 242. Rotation des isothermes dans un champ magnétique. . . . .	237
§ 243. Rotation des lignes équipotentielles dans le champ magnétique : phé- nomène de Hall . . . . .	238

CHAPITRE VI

**Phénomènes dus aux déformations.**

**Élasticité des cristaux.**

§ 244. Formules générales . . . . .	239
§ 245. Hypothèse d'une énergie potentielle; théorème de Green. . . . .	240
§ 246. Réduction du nombre des coefficients quand existe un plan de symétrie. . . . .	241
§ 247. Systèmes anorthique, clinorhombique et orthorhombique . . . . .	244
§ 248. Réduction dans le cas d'un axe de symétrie. . . . .	245
§ 249. Réduction dans le cas d'un axe quaternaire (système quaternaire, système cubique) . . . . .	246
§ 250. Système cubique, corps isotropes . . . . .	248
§ 251. Réduction dans le cas d'un axe ternaire; système rhomboédrique. . . . .	248
§ 252. Réduction pour l'holoédrie rhomboédrique et l'holoédrie hexagonale. . . . .	249
§ 253. Tableau général du nombre de constantes distinctes. . . . .	250
§ 254. Cylindre déformé uniformément par une force parallèle à son axe. . . . .	251
§ 255. Cylindre fléchi par une force agissant dans la section terminale. . . . .	251
§ 256. Compression homogène . . . . .	252

**Piézoélectricité.**

§ 257. Énoncé général du phénomène (Curie). . . . .	253
§ 258. Cas particulier . . . . .	254
§ 259. Formules générales (Voigt) . . . . .	255
§ 260. Réduction du nombre des coefficients; systèmes triclinique, clino- rhombique . . . . .	256
§ 261. Système orthorhombique . . . . .	257
§ 262. Systèmes quaternaire et cubique. . . . .	258
§ 263. Existence d'un axe ternaire; système rhomboédrique . . . . .	259

§ 264. Système hexagonal . . . . .	260
§ 265. Cas du quartz (Curie)... . . . .	261
§ 266. Appareil fournissant des quantités connues d'électricité . . . . .	263
§ 267. Cas de la tourmaline . . . . .	263
§ 268. Phénomène inverse de la piézoélectricité. Dilatation électrique du quartz (Lippmann). . . . .	264
§ 269. Vérifications expérimentales . . . . .	265
§ 270. Modifications optiques du quartz polarisé . . . . .	265

### Pyroélectricité.

§ 271. Définition du phénomène . . . . .	266
§ 272. Expériences . . . . .	267
§ 273. Relations entre la pyroélectricité et la forme cristalline . . . . .	268
§ 274. Pyroélectricité due aux variations de tension . . . . .	269

## CHAPITRE VII

### Symétrie du milieu et double réfraction.

#### Milieux cristallins.

§ 275. Faits généraux . . . . .	271
§ 276. Classification. Anomalies optiques (Mallard). . . . .	271
§ 277. Situation des axes de l'ellipsoïde des indices par rapport aux arêtes cristallographiques . . . . .	272
§ 278. Variation de la position des axes optiques avec la température . . . . .	274
§ 279. Franges en lumière convergente . . . . .	275
§ 280. Double réfraction de la glace. . . . .	276

#### Pléochroïsme.

§ 281. Phénomènes dans les lames uniaxes taillées perpendiculairement à l'axe (Bertrand). . . . .	276
§ 282. Phénomènes dans les lames biaxes taillées normalement à un axe optique (Haidinger) . . . . .	278
§ 283. Absorption et symétrie du milieu . . . . .	280
§ 284. Production artificielle du pléochroïsme (Sénarmont). . . . .	280

#### Théorie du prisme absorbant.

§ 285. Ondes de constitution différente du type ordinaire dans les milieux isotropes transparents . . . . .	281
§ 286. Condition pour les amplitudes . . . . .	283
§ 287. Passage à travers un prisme absorbant (Brillouin). . . . .	283

#### Double réfraction comme résultat de la structure.

§ 288. Obtention de systèmes biréfringents à l'aide de matières monoréfringentes. . . . .	284
§ 289. Expériences de vérification . . . . .	285
§ 290. Substances stratifiées : grains d'amidon, cristallin. . . . .	286

**Double réfraction accidentelle.**

§ 291.	Hypothèse générale pour les milieux anisotropes . . . . .	287
§ 292.	Réduction du nombre des coefficients. . . . .	287
§ 293.	Corps préalablement isotropes . . . . .	288
§ 294.	Transformation des corps isotropes en uniaxes . . . . .	290
§ 295.	Expériences de vérification . . . . .	290
§ 296.	Résultats. . . . .	292
§ 297.	Effet d'une pression uniforme . . . . .	292
§ 298.	Expérience de Fresnel. Vibration d'une verge . . . . .	293
§ 299.	Déformations par cisaillement et par torsion. . . . .	294
§ 300.	Trempe et phénomènes analogues . . . . .	296
§ 301.	Tensions produites dans un milieu isotrope par un échauffement non uniforme; double réfraction . . . . .	296
§ 302.	Expériences dans le cas des cristaux (Pockels) . . . . .	298

**Double réfraction électrique dans les solides.**

§ 303.	Phénomène de Kerr. . . . .	298
§ 304.	Expériences et résultats. . . . .	299
§ 305.	Disparition instantanée du phénomène de Kerr . . . . .	300

**Anisotropie des liquides.**

§ 306.	Hypothèse de Maxwell. . . . .	301
§ 307.	Valeur du frottement liquide. . . . .	303
§ 308.	Expérience prouvant l'existence de la constante $C_0$ dans certains liquides. . . . .	304
§ 309.	Double réfraction résultant des mouvements (Maxwell, Kundt). . . . .	305
§ 310.	Résultats des expériences . . . . .	306
§ 311.	Interprétation des expériences par une déformation du milieu . . . . .	306
§ 312.	Orientation des particules dans un milieu hétérogène . . . . .	308
§ 313.	Biréfringence et dichroïsme magnétique (Majorana) . . . . .	310
§ 314.	Explication des phénomènes : colloïdes (Schmauss, Cotton, Mouton). . . . .	311
§ 315.	Phénomènes pour les liquides tenant en suspension des particules microscopiques (liqueurs mixtes) . . . . .	311

**CHAPITRE VIII**

**Phénomènes dans le quartz, polarisation rotatoire.**

**Double réfraction elliptique.**

§ 316.	Définition de la double réfraction elliptique (Airy) . . . . .	313
§ 317.	Formes des ellipses en fonction de $\theta$ . . . . .	314
§ 318.	Vitesses de propagation . . . . .	315
§ 319.	Diverses formes de l'elliptique résultant de l'interférence de deux ellip- tiques issus d'un rectiligne . . . . .	316
§ 320.	Forme et position de l'elliptique résultant. . . . .	317
§ 321.	Détermination de la différence $n_p - n_d$ et des valeurs de $h$ en fonc- tion de $\theta$ . . . . .	320
§ 322.	Double réfraction circulaire . . . . .	322

### Étude détaillée des phénomènes suivant l'axe.

§ 323. Rotation d'une vibration rectiligne proportionnellement à l'épaisseur de la lame . . . . .	323
§ 324. lame perpendiculaire à l'axe placée entre deux nicols . . . . .	324
§ 325. Teinte sensible . . . . .	325
§ 326. Biquartz . . . . .	326
§ 327. Obtention de rotations variables. Compensateur de Soleil . . . . .	327
§ 328. Saccharimètre Soleil . . . . .	327
§ 329. Saccharimètre à pénombre. . . . .	328
§ 330. Spectres cannelés . . . . .	330
§ 331. Additions des rotations . . . . .	331
§ 332. Influence d'une réflexion. . . . .	332
§ 333. Production de franges d'interférences avec les trous d'Young recouverts d'un quartz perpendiculaire à l'axe . . . . .	332
§ 334. Position de la frange achromatique . . . . .	334

### Phénomènes dans les directions inclinées sur l'axe : lumière convergente.

§ 335. Position de la question . . . . .	334
§ 336. Lumière polarisée et analysée rectilignement . . . . .	335
§ 337. Phénomènes en lumière convergente . . . . .	336
§ 338. Nicols parallèles ou croisés . . . . .	337
§ 339. Cas général; définition analytique des franges. . . . .	337
§ 340. Courbes quadratiques . . . . .	339
§ 341. Lumière polarisée circulairement, analysée rectilignement (Airy) . . . . .	340
§ 342. Spirales quadratiques . . . . .	340
§ 343. Spirales d'Airy : lumière polarisée et analysée rectilignement traversant deux quartz de même épaisseur et de rotations contraires . . . . .	341

### Superposition de la double réfraction ordinaire et de la polarisation rotatoire.

§ 344. Équivalence cinématique de la double réfraction elliptique et de la combinaison d'une double réfraction ordinaire et d'une polarisation rotatoire (Gouy). . . . .	342
§ 345. Biréfringence des vibrations privilégiées elliptiques . . . . .	344
§ 346. Remarque sur la théorie précédente . . . . .	345
§ 347. Calcul des propriétés du quartz pour une hypothèse simple . . . . .	346
§ 348. Polarisation rotatoire magnétique dans le spath . . . . .	348
§ 349. Polarisation rotatoire magnétique et double réfraction du verre déformé . . . . .	349
§ 350. Phénomènes dans le quartz comprimé. . . . .	351

### Polarisation rotatoire dans les biaxes.

§ 351. Observation des phénomènes dans les biaxes . . . . .	352
§ 352. Résultat des expériences; variation du pouvoir rotatoire avec la direction . . . . .	353

## CHAPITRE IX

## Symétrie des milieux actifs.

## Polarisation rotatoire des corps pseudo-isotropes.

§ 353. Pouvoir rotatoire des corps vitreux ou liquides, et des dissolutions.	355
§ 354. Dispersion . . . . .	356
§ 355. Pouvoir rotatoire des vapeurs. . . . .	357
§ 356. Absorption inégale des circulaires droits et gauches. . . . .	357
§ 357. Symétrie des milieux qui jouissent de pouvoir rotatoire . . . . .	357
§ 358. Classes des cristaux pouvant donner des solutions actives . . . . .	358
§ 359. Constitution des milieux amorphes actifs . . . . .	359
§ 360. Représentation de la molécule chimique. Carbone asymétrique (Van t'Hoff) . . . . .	360
§ 361. Combinaisons racémiques ; séparation des antipodes . . . . .	361

## Symétrie des cristaux actifs.

§ 362. Existence des éléments de symétrie . . . . .	362
§ 363. Hypothèse généralisée. . . . .	363
§ 364. Faces plagiédres . . . . .	365
§ 365. Liste des cristaux cubiques et des cristaux uniaxes possédant le pouvoir rotatoire à l'état de cristaux . . . . .	365
§ 366. Obtention des phénomènes rotatoires par un empilement régulier de lamelles cristallines . . . . .	365
§ 367. Paquets ternaires . . . . .	366
§ 368. Paquets quaternaires . . . . .	368
§ 369. Paquets sénaires et d'ordre supérieur. . . . .	369
§ 370. Applications . . . . .	370
§ 371. Constitution des cristaux jouissant du pouvoir rotatoire . . . . .	371

## Théories de la polarisation rotatoire.

§ 372. Généralité sur les équations aux dérivées partielles capables de représenter la polarisation rotatoire . . . . .	372
§ 373. Premier type d'équations représentant les phénomènes dans les milieux pseudo-isotropes. . . . .	374
§ 374. Équations aux dérivées partielles pour les cristaux uniaxes. . . . .	375
§ 375. Polarisation elliptique . . . . .	376
§ 376. Second type d'équations représentant les phénomènes dans les milieux pseudo-isotropes. . . . .	378
§ 377. Polarisation elliptique . . . . .	380
§ 378. Interprétation dans la Théorie des ions . . . . .	381

## CHAPITRE X

## Symétrie du champ magnétique.

§ 379. Le champ magnétique a la symétrie d'un vecteur axial. . . . .	384
--	-----

**Polarisation rotatoire magnétique.**

§ 380.	Description du phénomène. . . . .	384
§ 381.	Comparaison des polarisations rotatoires magnétique et naturelle . . . . .	386
§ 382.	Pouvoir rotatoire du fer, du nickel et du cobalt . . . . .	387
§ 383.	Durée d'établissement du phénomène. . . . .	387
§ 384.	Forme de la surface d'onde . . . . .	388

**Réflexion sur un pôle d'aimant.**

§ 385.	Phénomènes généraux. . . . .	389
§ 386.	Méthode générale d'étude . . . . .	390
§ 387.	Réflexion normale sur un pôle d'aimant. . . . .	391
§ 388.	Réflexion polaire . . . . .	391
§ 389.	Réflexion équatoriale . . . . .	392

**Théorie des phénomènes magnétiques.**

§ 390.	Phénomène de Hall . . . . .	393
§ 391.	Équations générales pour les milieux isolants (transparents) . . . . .	393
§ 392.	Symétrie des équations . . . . .	395
§ 393.	Vibrations transmises . . . . .	396
§ 394.	Pouvoir rotatoire . . . . .	397
§ 395.	Généralisation . . . . .	398
§ 396.	Théorie de la réflexion. . . . .	399

**CHAPITRE XI****Cristaux mous, liquides anisotropes.****Cristaux mous.**

§ 397.	Existence des cristaux mous . . . . .	400
§ 398.	Homéotropie . . . . .	401
§ 399.	Réunions et macles . . . . .	401
§ 400.	Tension superficielle. . . . .	402
§ 401.	Adsorption . . . . .	403
§ 402.	Cristaux mixtes, formes myéliques. . . . .	404

**Liquides anisotropes.**

§ 403.	Liquides anisotropes . . . . .	405
§ 404.	Structure homogène. . . . .	405
§ 405.	Gouttelettes anisotropes; première position principale. . . . .	406
§ 406.	Gouttelettes anisotropes; seconde position principale . . . . .	408
§ 407.	Réunion de plusieurs gouttelettes anisotropes . . . . .	408
§ 408.	Orientation par le magnétisme. . . . .	408