ANNALI

DI

MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

GIÀ DIRETTI DA

Francesco Brioschi

e continuati dai professori:

Eugenio Beltrami *in Roma* | **Ulisse Dini** *in Pisa*

Luigi Cremona *in Roma* | **Giuseppe Jung** *in Milano*

SERIE III.ª – TOMO III.º

MILANO,

TIPOGRAFIA BERNARDONI DI C. REBESCHINI E C.

1899.

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NEL TOMO III.° (SERIE III.ª)

Sur les fonctions de variables réelles.

(*Par* R. Baire *à Bar-le-Duc.*)

INTRODUCTION.

Le mot *fonction*, qui a servi primitivement à désigner les différentes puissances d'une même quantité, a pris une signification de plus en plus étendue, jusqu'à ce que Dirichlet ait donné à ce mot le sens qu'on lui attribue aujourd'hui.

Il y a *fonction*, dès qu'on imagine une correspondance entre des nombres, qu'on convient de considérer comme les états de grandeur d'une même variable y, avec d'autres nombres, tous distincts, qu'on convient de considérer comme les états de grandeur d'une même variable x. On ne s'occupe pas, dans cette définition, de rechercher par quels moyens la correspondance peut être effectivement établie; on ne cherche même pas s'il est possible de l'établir. La notion de fonction, entendue de cette manière, est entièrement contenue dans la notion de *détermination*; ce point de vue s'oppose à celui qui consiste à partir de certaines fonctions simples, et à considérer des expressions composées avec ces fonctions simples, en réservant le mot de fonction aux expressions ainsi obtenues.

Après avoir défini, d'après Dirichlet, la fonction la plus générale, on est conduit à distinguer les fonctions en différentes catégories, suivant qu'elles possèdent ou ne possèdent pas telle ou telle propriété; c'est ainsi, par exemple, qu'une fonction peut être continue ou discontinue, ponctuellement ou totalement discontinue, intégrable ou non intégrable, posséder ou non une dérivée, etc.... Chacune de ces distinctions conduit à une étude particulière, et toutes ces études présentent le caractère suivant: on recherche si le fait d'imposer à la fonction la plus générale telle ou telle restriction s'exprimant par une définition simple entraîne d'autres conséquences simples.

Par exemple, on a reconnu, contrairement à ce qui avait été longtemps admis, qu'il existe des fonctions continues n'admettant pas de dérivée. Ce résultat doit être entendu de la manière suivante: le fait d'imposer à une fonction la continuité n'entraîne pas comme conséquence l'existence d'une dérivée; il en résulte que les fonctions continues qui admettent une dérivée ne forment qu'une classe particulière dans l'ensemble des fonctions continues; autrement dit, *c'est par exception qu'une fonction continue admet une dérivée.*

Indiquons un autre exemple: on démontre qu'une fonction *continue* est *uniformément continue*; ces deux propriétés, la continuité et la continuité uniforme, sont définies d'une manière différente l'une de l'autre; on pouvait croire *a priori* que l'une n'entraîne pas l'autre, c'est-à-dire qu'il existe des fonctions continues, mais non uniformément continues; le théorème que je rappelle montre que cela n'est pas.

D'une manière générale, étant donné un ensemble de propriétés bien définies qu'on impose à une fonction, il y a lieu d'étudier aussi complètement que possible les propriétés qui sont des conséquences nécessaires des premières. C'est, à ce qu'il me semble, la manière la plus nette d'interpréter les résultats des différents travaux entrepris sur les fonctions de variables réelles; parmi ces travaux, qui sont nombreux, je me contenterai de citer le mémoire de M. Darboux: « Sur les fonctions discontinues », et l'ouvrage de M. Dini: « Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali ».

Le présent travail est conçu dans cet ordre d'idées; je vais indiquer brièvement la nature des questions que je me suis proposé de résoudre.

Après avoir, dans le premier chapitre, exposé quelques considérations générales qui s'appliquent à toutes les fonctions, et donné des définitions dont j'ai besoin dans la suite du travail, j'aborde, dans le chapitre II, l'étude des deux problèmes suivants:

1. Une fonction de deux variables x et y etant assujettie à être continue par rapport à chacune d'elles, les valeurs qu'elle prend sur une ligne quelconque forment une fonction d'une variable qui peut être discontinue: je me propose d'en déterminer la nature.

2. Quelles sont les fonctions discontinues qu'il est possible de représenter par des séries dont les termes sont des fonctions continues?

Je suis parvenu à résoudre complètement ces deux problèmes, qui se trouvent admettre la même solution, ce qui m'a conduit à les traiter simultanément: il existe une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction discontinue puisse être obtenue, soit dans les conditions du premier problème, soit dans les conditions du second; le chapitre II est tout entier consacré à l'établissement de cette condition, que j'ai été conduit à énoncer ainsi: *il* *faut et il suffit que la fonction donnée soit ponctuellement discontinue relativement à tout ensemble parfait.*

Les questions traitées dans les deux chapitres suivants, qui sont des généralisations en divers sens des questions précédentes, sont loin d'être résolues d'une manière aussi complète. Dans le chapitre III, où il ne s'agit que de fonctions d'une seule variable, je définis, en particulier, les *fonctions développables en séries doubles de fonctions continues*; n'étant pas parvenu, en ce qui concerne ces fonctions, à trouver une condition caractéristique aussi complète que celle du chapitre II, je me suis contenté d'exposer les résultats partiels que j'ai obtenus sur la question. Dans le chapitre IV, je donne quelques propriétés des fonctions de plusieurs variables, continues par rapport à chacune d'elles.

Enfin j'étudie, dans le chapitre V, une question en apparence assez distincte de celles qui précédent. Je fais remarquer tout d'abord que les raisonnements par lesquels on intègre les équations aux dérivées partielles les plus simples, par exemple l'équation: $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, introduisent l'hypothèse de la continuité des dérivées qu'on emploie. Il est donc légitime de se proposer le problème suivant: rechercher toutes les fonctions assujetties seulement aux conditions indispensables pour que les éléments qui entrent dans l'équation donnée aient un sens et vérifient cette équation. Par exemple, en ce qui concerne l'équation : $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, on sait que, si l'on assujettit une fonction à être continue ainsi que ses dérivées, et à satisfaire à l'équation, elle doit être constante sur chaque droite : $x - y =$ Constante; il s'agit de savoir si, lorsqu'on supprime l'hypothèse de la continuité des dérivées, le résultat subsiste ou non.

D'une manière générale, il arrive très souvent qu'une question d'analyse étant posée, on introduit, pour traiter cette question, des hypothèses plus restrictives qu'elle n'en comporte par elle-même; on peut donc dire qu'on laisse inachevée une partie du problème; il s'agirait de traiter, au moins dans quelques cas simples, cette partie de la question qu'on a, pour ainsi dire, abandonnée en chemin; c'est ce que j'ai essayé de faire pour l'exemple traité dans le chapitre V; je suis arrivé, comme on le verra, à résoudre en partie la question.

Les principaux résultats contenus dans ce travail ont été communiqués à l'Académie des Sciences dans les séances du 8 novembre 1897, du 21 mars, des 6 et 13 juin 1898.

CHAPITRE I.

Généralités sur les fonctions de n variables.

1. Considérons une fonction *quelconque* des n variables $x_1, x_2, \dots x_n$; cela veut dire que, dans un certain domaine D de l'espace à n dimensions, nous supposons qu'à chaque système $(x_1)_0, (x_2)_0, \dots (x_n)_0$, appartenant au domaine D correspond un nombre, que nous désignons par $f((x_1)_0, (x_2)_0, \dots (x_n)_0)$.

Soit un point P du domaine D, de coordonnées $(x_1)_0, (x_2)_0, \dots (x_n)_0$; considérons la sphère à n dimensions de centre P et de rayon ρ_1, c'est-à-dire l'ensemble des points pour lesquels on a :

$$[x_1 - (x_1)_0]^2 + [x_2 - (x_2)_0]^2 + \cdots + [x_n - (x_n)_0]^2 \leqq \rho_1^2 .$$

L'ensemble des valeurs de la fonction en tous les points dont les coordonnées satisfont à cette condition a une limite supérieure (ou maximum) M_1. Prenons une suite décroissante de nombres positifs, tendant vers 0. Soit:

$$\rho_1 > \rho_2 > \cdots > \rho_p > \cdots$$

On prendra successivement les sphères de centre P et de rayons $\rho_1, \rho_2, \dots \rho_p, \dots$; soient $M_1, M_2, \dots M_p, \dots$ les limites supérieures de f dans ces sphères; chaque sphère étant comprise dans la précédente, on a évidemment la suite d'inégalités :

$$M_1 \geqq M_2 \geqq \cdots \geqq M_p \geqq \cdots \tag{1}$$

La quantité M_p, qui ne croît jamais, a une limite déterminée quand p croît indéfiniment; je désignerai par $M[(x_1)_0, (x_2)_0, \dots (x_n)_0]$ ou M_0 cette limite, et je dirai que M_0 est le *maximum de la fonction au point P.*

2. On sera conduit au même nombre M_0, si au lieu d'une suite de sphères, on considère une suite de domaines de forme quelconque $D_1, D_2, \dots D_q, \dots$ pourvu qu'ils satisfassent aux conditions suivantes:

1.° Le point P est intérieur à chacun de ces domaines, en entendant par là qu'il existe une sphère de centre P et de rayon positif dont tous les points intérieurs font partie du domaine.

2.° La plus grande dimension de D_q tend vers 0, en entendant par là que, si petit que soit ρ, il existe une valeur de q telle que D_q est contenu tout entier à l'intérieur de la sphère de centre P et de rayon ρ.

Supposons en effet ces deux conditions remplies, et soient M'_1, $M'_2, \dots M'_q, \dots$ les limites supérieures de la fonction dans D_1, $D_2, \dots D_q, \dots$ En vertu des deux propriétés précédentes, il existe pour tout nombre M'_q deux nombres $M_{p'}$, $M_{p''}$ de la suite (1) tels que l'on a:

$$M_{p'} \geqq M'_q \geqq M_{p''},$$

et de plus, p', et par suite p'', croissent indéfiniment avec q. Donc M'_q a pour limite M_0.

3. Les propriétés fondamentales du nombre M_0, qui résultent immédiatement de sa définition, sont les suivantes:

1.° Si petit que soit le nombre positif ε, il existe un nombre positif ρ tel que, dans la sphère de centre P et de rayon ρ, on a en tout point:

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) < M_0 + \varepsilon.$$

2.° Si petits que soient ε et ρ, il existe dans la sphère de rayon ρ au moins un point pour lequel on a:

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) > M_0 - \varepsilon.$$

4. Etant donnée une fonction f, j'aurai souvent besoin de considérer simultanément, d'une part la limite supérieure de f dans un certain domaine continu à n dimensions, d'autre part le *maximum en un point*, tel que je viens de le définir. Je préciserai, lorsque cela sera nécessaire, en désignant par $M[f, D]$ le maximum de f dans le domaine D, et par $M[f, P]$ le maximum de f au point P.

Remarquons que, d'après nos définitions, si un point P est *à l'intérieur* d'un domaine D (c'est-à-dire s'il existe une sphère de centre P contenue dans D), on a certainement:

$$M[f, P] \leqq M[f, D].$$

5. J'appelle l'attention sur un cas particulier intéressant. Supposons qu'en un point P on ait:

$$M[f, P] = f.$$

Alors, si petit que soit le nombre positif ε, on peut trouver un nombre ρ tel que, dans la sphère de centre P et de rayon ρ, on ait en tout point:

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) < f((x_1)_0, (x_2)_0, \dots (x_n)_0) + \varepsilon.$$

La fonction possède donc au point P l'une des deux propriétés dont l'ensemble constitue la continuité; l'autre serait exprimée par la condition:

$$f(x_1\, x_2, \dots x_n) > f((x_1)_0,\ (x_2)_0, \dots (x_n)_0) - \varepsilon.$$

Nous conviendrons de dire que la fonction possède au point P la *semi-continuité supérieure.* Si la propriété a lieu pour tous les points d'un domaine, nous dirons que la fonction, dans ce domaine, est *semi-continue supérieurement.* On peut dire aussi qu'elle est toujours *égale à son maximum.*

6. Pour donner tout de suite des exemples de fonctions possédant la propriété précédente, partons d'une fonction *quelconque* $f(x_1,\ x_2, \dots x_n)$, et appelons $\varphi(x_1,\ x_2, \dots x_n)$ la fonction qui a pour valeur en chaque point le *maximum en ce point* de f.

La première des propriétés indiquées au § 3, peut s'exprimer de la manière suivante:

Etant donné ε, on peut trouver un domaine D entourant le point P_0, et tel que:

$$M[f,\ D] \leqq M[f,\ P_0] + \varepsilon.$$

Si maintenant nous prenons dans D un point quelconque P, on a en ce point:

$$M[f,\ P] \leqq M[f,\ D],$$

et par suite:

$$M[f,\ P] \leqq M[f,\ P_0] + \varepsilon,$$

ce qui s'écrit:

$$\varphi(x_1,\ x_2, \dots x_n) \leqq \varphi((x_1)_0,\ (x_2)_0, \dots (x_n)_0) + \varepsilon.$$

C'est la propriété qui caractérise les fonctions que j'ai appelées *semi-continues supérieurement.*

On peut faire la démonstration d'une manière un peu différente. J'énonce d'abord quelques remarques sur les domaines à n dimensions.

Etant donné, par exemple, une sphère de centre P_0, je considère, d'une part, l'ensemble S des points pour lesquels:

$$\Sigma\, [x_i - (x_i)_0]^2 \leqq \rho^2,$$

d'autre part l'ensemble S' des points pour lesquels:

$$\Sigma\, [x_i - (x_i)_0] < \rho^2.$$

Je dirai que S est une sphère fermée, S' une sphère ouverte. La différence essentielle entre ces deux ensembles réside dans le fait suivant:

Etant donné un point *quelconque* de S', il existe une sphère ayant ce point pour centre et de rayon positif, dont tous les points font partie de S'. J'appelle d'une manière générale *domaine ouvert à n dimensions* tout ensemble de points possédant cette propriété. On voit que l'ensemble S ne rentre pas dans cette catégorie de domaines.

Cela posé, je dis que, dans tout domaine ouvert, les deux fonctions f et φ ont même limite supérieure; cela tient à ce que, λ étant un nombre quelconque, si l'une des deux fonctions peut dépasser dans le domaine la valeur $\lambda - \varepsilon$, quel que soit ε, cela est également vrai pour l'autre fonction. (On voit aisément que le raisonnement ne s'applique plus si le domaine n'est pas ouvert.)

Ce point étant établi, pour définir le maximum en un point de f et de φ, nous pouvons employer une suite de domaines ouverts D_1, $D_2, \ldots$ $D_q, \ldots$; les limites supérieures de f et φ dans chacun de ces domaines sont égales; par suite, les maxima de f et φ au point P sont définis comme limites de suites identiques; il sont donc égaux. Ainsi, on a, en tout point P:

$$M[\varphi, P] = M[f, P],$$

et comme, par définition, on a:

$$\varphi(P) = M[f, P),$$

on voit que:

$$M[\varphi, P] = \varphi(P),$$

c'est-à-dire que la fonction φ est égale à son maximum, autrement dit, elle est semi-continue supérieurement.

7. De même que nous avons défini $M[f]$, nous définirons, en chaque point P, le minimum m de la fonction $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$; m sera la limite vers laquelle tend le minimum de f dans un domaine entourant P, lorsque la plus grande dimension de ce domaine tend vers 0.

Si en un point P on a:

$$m[f, P] = f(P),$$

on dira qu'en ce point la fonction possède la *semi-continuité inférieure.*

En partant d'une fonction quelconque $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, et en appelant $\psi(x_1, x_2, \ldots x_n)$ la fonction qui a pour valeur en chaque point le minimum de f, on reconnaît que ψ est semi-continue inférieurement.

8. Remarquons tout de suite que si une fonction ψ est semi-continue inférieurement, la fonction $-\psi$ est semi-continue supérieurement; à toute propriété de l'une correspond évidemment une propriété de l'autre; il nous suffira donc d'étudier les fonctions de l'une de ces catégories.

Donnons, à titre d'exemple, quelques propriétés simples de ces fonctions.

La somme de plusieurs fonctions semi-continues supérieurement, est une fonction semi-continue supérieurement.

Si, dans un certain domaine, une fonction semi-continue supérieurement a pour limite supérieure λ, elle atteint, en un certain point du domaine, la valeur λ. Il suffit, pour s'en rendre compte, de reprendre le raisonnement qu'on emploie lorsqu'on suppose la fonction continue: on divise le domaine donné en un nombre fini de domaines partiels; dans l'un au moins de ces domaines la limite supérieure est λ; on démontre ainsi l'existence d'un point où le maximum de la fonction est λ, et où par suite la fonction est elle-même égale à λ.

Indiquons enfin une propriété qui est, en un certain sens, la propriété caractéristique des fonctions semi-continues supérieurement.

Soit P_0 un point limite de points P_1, $P_2, \ldots P_n, \ldots$; supposons que la suite $f(P_1)$, $f(P_2), \ldots f(P_n), \ldots$ ait une limite α, ou, plus généralement, soit α un nombre tel que, si petit que soit ε supposé positif, les quantités de la suite précédente surpassent, à partir d'un certain rang, $\alpha - \varepsilon$; on peut affirmer que l'on a:

$$f(P_0) \geqq \alpha,$$

car si l'on avait $f(P_0) < \alpha$, la fonction ne posséderait pas au point P_0 la semi-*continuité supérieure.*

Sous une autre forme, nous pourrons dire que *si une fonction f est semi-continue supérieurement, l'ensemble des points où l'on a $f \geqq \alpha$ est toujours un ensemble fermé, c'est-à-dire un ensemble contenant son dérivé.*

De même, *si une fonction est semi-continue inférieurement, l'ensemble des points où $f \leqq \alpha$ est essentiellement fermé.*

9. Soit f une fonction *quelconque*, φ son maximum, ψ son minimum, et soit g une fonction *continue*. Je dis que la fonction $f + g$ a pour maximum $\varphi + g$ et pour minimum $\psi + g$.

Démontrons par exemple que $f + g$ a, au point P_0, son maximum égal à $\varphi_0 + g_0$. En effet, si on se donne un nombre positif ε, on peut déterminer autour de P_0 un domaine en tout point duquel on aura à la fois:

$$f < \varphi_0 + \frac{\varepsilon}{2},$$

et:

$$g < g_0 + \frac{\varepsilon}{2},$$

et par suite :

$$f+g<\varphi_0+g_0+\varepsilon.$$

Il est donc certain qu'on a :

$$M[f+g,\ P_0] \leqq \varphi_0+g_0.$$

En second lieu, on peut trouver un domaine autour de P_0 où l'on aura partout :

$$g>g_0-\frac{\varepsilon}{2}.$$

Dans ce domaine, il y a *au moins un point* où l'on a :

$$f>\varphi_0-\frac{\varepsilon}{2},$$

et par suite :

$$f+g>\varphi_0+g_0-\varepsilon.$$

ce qui montre que l'on a :

$$M[f+g,\ P_0]=\varphi_0+g_0.$$

10. Continuons à employer les notations f, φ, ψ pour désigner respectivement une fonction quelconque, son maximum et son minimum. On a, en tout point :

$$\varphi \geqq f \geqq \psi.$$

Chacune des deux fonctions $\varphi-f$, $f-\psi$ est positive ou nulle.

Je dis que, dans tout domaine à n dimensions, $\varphi-f$ a pour limite inférieure 0. Je peux toujours, dans le domaine donné, prendre un domaine ouvert; il me suffit donc de démontrer la chose pour un domaine ouvert. Supposons donc que la limite inférieure de $\varphi-f$ dans le domaine ouvert D puisse être un nombre positif λ. On aurait, en chaque point de ce domaine:

$$\varphi-f \geqq \lambda,$$

ou :

$$\varphi \geqq f+\lambda.$$

On pourrait en conclure :

$$M[\varphi,\ D] \geqq M[f+\lambda,\ D],$$

et d'après le § 9, on a :

$$M[f+\lambda,\ D]=M[f,\ D]+\lambda.$$

Donc on aurait :

$$M[\varphi, D] \geqq M[f, D] + \lambda,$$

ce qui n'est pas possible, puisque nous savons qu'on a :

$$M[\varphi, D] = M[f, D].$$

On reconnaît de même que $f - \psi$ a pour minimum 0 dans tout domaine à n dimensions.

On peut aussi conclure de là que chacune des deux fonctions $\varphi - f$, $f - \psi$, a pour minimum 0 en tout point.

11. En chaque point P je pose :

$$\omega(x_1, x_2, \ldots x_n) = \varphi(x_1, x_2, \ldots x_n) - \psi(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

et je conviens d'appeler ω *l'oscillation au point* P; c'est aussi, comme on le voit, la limite de l'oscillation de la fonction dans un domaine contenant P à son intérieur et dont la plus grande dimension tend vers 0.

Comme pour M et m, nous emploierons les notations $\omega[f, D]$ et $\omega[f, P]$ pour désigner l'oscillation de f dans le domaine D et l'oscillation au point P.

De par sa nature même, la fonction ω est positive ou nulle. En un point où elle est nulle, la fonction f est continue; au contraire, en un point où elle est positive, il y a une discontinuité pour f. On peut dire, en quelque sorte, que la fonction $\omega[f]$ relative à la fonction f *caractérise le degré de discontinuité* de f aux différents points.

Je dis que $\omega[f]$ est semi-continue supérieurement. En effet, si on se donne un nombre positif ε, on peut trouver autour de tout point P_0 un domaine où l'on aura partout :

$$\varphi < \varphi_0 + \frac{\varepsilon}{2}\cdot$$

et :

$$\psi > \psi_0 - \frac{\varepsilon}{2},$$

inégalités d'où l'on conclut, par soustraction :

$$\omega < \omega_0 + \varepsilon.$$

On pourrait d'ailleurs démontrer la chose directement, en employant un raisonnement analogue à celui du § 6.

Enonçons la remarque suivante, qui résulte immédiatement de ce qui précède : *Etant donnée une fonction quelconque, l'ensemble des points où l'oscillation de cette fonction est* $\geqq \sigma$ *est fermé.*

12. Je vais considérer une catégorie particulière de fonctions, celles pour lesquelles l'oscillation ω a son minimum nul dans tout domaine à n dimensions, et par suite en tout point. La considération de ces fonctions s'introduit d'une manière naturelle; on peut dire en effet que, pour une fonction de cette nature, il y a, dans tout domaine, des points où elle *se rapproche autant qu'on veut d'une fonction continue.* Mais nous allons préciser cette idée un peu vague, en montrant qu'il existe effectivement dans tout domaine des points où la fonction est continue.

Je vais d'abord établir un théorème qui me sera souvent utile dans la suite.

Si une fonction χ est semi-continue supérieurement, et si elle a en tout point son minimum nul, il existe, dans tout domaine, des points où χ est nul.

En effet, prenons un domaine D quelconque. Puisque, dans ce domaine, χ a son minimum nul, si on se donne un nombre positif ε, on peut trouver un point P à l'intérieur de D où l'on a :

$$\chi(P) < \frac{\varepsilon}{2} \cdot$$

Ensuite, à cause de la semi-continuité supérieure, on peut trouver un domaine D_1 entourant P où l'on aura partout :

$$\chi < \chi(P) + \frac{\varepsilon}{2},$$

c'est-à-dire :

$$\chi < \varepsilon.$$

Nous voyons ainsi que, dans tout domaine D, et quel que soit ε, on peut trouver un domaine D_1 où l'on a partout :

$$\chi < \varepsilon.$$

Prenons maintenant une suite décroissante de nombres positifs tendant vers 0, par exemple $\varepsilon, \frac{\varepsilon}{2}, \cdots \frac{\varepsilon}{2^n}, \cdots$

Dans D_1 nous trouverons un domaine D_2 où l'on aura partout :

$$\chi < \frac{\varepsilon}{2},$$

dans D_2 un domaine D_3 où l'on aura :

$$\chi < \frac{\varepsilon}{2^2},$$

etc,

Les domaines D_1, $D_2, \dots D_n, \dots$ étant tels que chacun d'eux est contenu dans le précédent, il existe au moins un point limite contenu à l'intérieur de tous les D_n. On doit avoir, en ce point, $\omega < \frac{\varepsilon}{2^n}$, quel que soit n, c'est-à-dire $\omega = 0$, ce qui démontre le théorème.

Il n'est pas inutile de remarquer que les deux conditions données dans l'énoncé du théorème sont indispensables. En effet, il est bien évident d'une part qu'une fonction peut avoir en tout point son minimum nul, sans jamais atteindre la valeur 0; citons, par exemple, la fonction $f(x)$ qui est égale à 1 pour x irrationnel, et à $\frac{1}{q}$ pour les valeurs de la forme $x = \frac{p}{q}$. D'autre part, une fonction assujettie à être semi-continue supérieurement, peut ne jamais atteindre la valeur 0, et cependant avoir son minimum nul en un point, ou même en tous les points d'un certain domaine à $n - 1$ dimensions, s'il s'agit d'une fonction de n variables; pour former un tel exemple, prenons dans le plan un arc de courbe AB, et formons une fonction continue ayant la valeur 0 aux points de cet arc, une valeur positive aux autres points du plan; remplaçons ensuite les valeurs aux points de l'arc AB par une succession continue de valeurs positives; la nouvelle fonction est semi-continue supérieurement en tout point; elle a, en chaque point de AB, son minimum nul, et cependant n'atteint jamais la valeur 0.

Je vais maintenant tirer une conséquence du théorème que je viens de démontrer, ou, pour mieux dire, énoncer ce théorème sous une autre forme. Nous reconnaissons que si χ est semi-continue supérieurement, et si l'on a partout:

$$\chi > 0,$$

les points où le minimum de χ est nul ne peuvent pas former un domaine continu à n dimensions, car alors il existerait, d'après la démonstration que nous venons d'exposer, des points où l'on aurait $\chi = 0$. L'ensemble de ces points est d'ailleurs fermé; il ne peut donc pas être dense (*) par rapport à un domaine à n dimensions; je déduis de cette remarque l'énoncé suivant, qui est une transformation de celui de tout à l'heure:

Si une fonction χ est semi-continue supérieurement et est toujours positive, il existe dans tout domaine à n dimensions un domaine de même nature dans lequel χ a son minimum positif.

(*) On dit qu'un ensemble est *dense* par rapport à un domaine si son ensemble dérivé contient tous les points de ce domaine. Voir, par exemple: Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, page 38.

Revenons aux fonctions pour lesquelles ω a son minimum nul en tout point; d'après ce que nous venons de voir, il existe dans tout domaine à n dimensions (autrement dit, au voisinage de tout point) des points en chacun desquels on a $\omega = 0$, et où par suite la fonction est continue.

Une telle fonction est dite *ponctuellement discontinue*; toute fonction qui n'est pas ponctuellement discontinue est dite *totalement discontinue.* On voit que, si une fonction est totalement discontinue, il existe nécessairement un domaine à n dimensions dans lequel *l'oscillation en chaque point* de cette fonction a son minimum positif.

Les fonctions ponctuellement discontinues sont caractérisées par ce fait que, en tout point, et dans tout domaine, le minimum de ω est nul. On peut encore dire que l'ensemble des points où $\omega \geqq \sigma$, σ étant un nombre positif, n'est dense dans aucun domaine à n dimensions.

Montrons qu'une fonction semi-continue, supérieurement par exemple, rentre dans cette catégorie de fonctions. Soit en effet f la fonction considérée; en reprenant les notations déjà employées aux § 9 et 10, on a, dans le cas actuel:

$$\varphi = f,$$

et par suite:

$$\omega = \varphi - \psi = f - \psi,$$

or, nous avons montré que, dans tous les cas, $f - \psi$ a son minimum nul partout. Donc ω a son minimum nul en tout point, et f est ponctuellement discontinue.

13. Pour terminer ce chapitre, je vais donner un théorème sur les fonctions quelconques, qui comprendra comme cas particulier le théorème connu relatif aux fonctions continues: *La continuité est uniforme.*

Soit $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ une fonction quelconque. Considérons un point P, et une sphère à n dimensions de centre P et de rayon ρ; dans cette sphère (considérons la sphère fermée, par exemple), la fonction a une oscillation déterminée ω; si je fais varier ρ, je pourrai considérer ω comme une fonction de ρ définie pour les valeurs positives de ρ. Pour $\rho = 0$, j'attribuerai à la fonction ω la valeur limite des valeurs qu'elle prend lorsqu'on fait tendre ρ vers 0, c'est-à-dire ce que j'ai appelé *l'oscillation au point P.*

Cela posé, donnons-nous un nombre positif λ; le seul fait que ω est une fonction de ρ non décroissante suffit pour qu'on soit assuré de l'existence d'un nombre r parfaitement déterminé, tel que:

$$\text{pour} \quad 0 \leqq \rho < r \quad \text{on a:} \quad \omega(\rho) \leqq \lambda$$

$$\text{pour} \quad \rho > r \quad \text{on a:} \quad \omega(\rho) > \lambda.$$

Pour $\rho = r$, on peut avoir, soit $\omega(r) < \lambda$, soit $\omega(r) = \lambda$, soit $\omega(r) > \lambda$. Nous pouvons définir r comme *la limite supérieure des nombres ρ pour lesquels on a: $\omega(\rho) \leqq \lambda$.*

On peut être conduit, par la définition précédente, à attribuer à r la valeur $+\infty$; cela ne créera, d'ailleurs, aucune difficulté dans les applications.

On reconnaît tout de suite que si l'on avait pris des sphères ouvertes au lieu de sphères fermées, on aurait trouvé le même nombre limite r; il suffit de remarquer que toute sphère ouverte de rayon $< r$ est contenue dans une sphère fermée de rayon $< r$, tandis que toute sphère ouverte de rayon $> r$ contient une sphère fermée de rayon $> r$.

Au lieu de considérer des sphères de centre P et de rayon variable, on pourrait considérer des domaines de forme quelconque, mais assujettis aux conditions suivantes: l'ensemble des points qui constituent le domaine variable est déterminé par la valeur d'un paramètre unique ρ, qui prend les valeurs positives et nulle; si l'on a $\rho' < \rho''$, le domaine D' qui correspond à ρ' est contenu tout entier dans le domaine D'' qui correspond à ρ''; enfin, si ρ tend vers 0, la plus grande dimension du domaine tend vers 0. Dans ces conditions, le raisonnement précédent est applicable, il existe un nombre r tel que, pour $\rho < r$, l'oscillation dans le domaine correspondant à ρ est $\leqq \lambda$, tandis que pour $\rho > r$, cette oscillation est $> \lambda$.

Reprenons le cas où les domaines considérés sont des sphères, et soit λ un nombre positif déterminé, que nous laissons fixe, tandis que nous faisons varier le point P; r devient alors une fonction du point P; je vais démontrer que *cette fonction est continue*; il suffira, pour s'en rendre compte, de reprendre un raisonnement employé par M. Lüroth dans le cas où f est une fonction continue (*Math. Annalen*, Bd. VI).

Il s'agit de démontrer que, au voisinage de P_0, $r(P)$ est aussi voisin qu'on veut de $r(P_0) = r_0$. Pour cela, considérons la sphère Σ_0 de centre P_0 et de rayon r_0; en supposant d'abord r_0 positif, prenons un point P à l'intérieur de Σ_0, et soit $P_0 P = \delta$. Décrivons de P comme centre les sphères S_1 et S_2 de rayons respectifs $r_0 - \delta$ et $r_0 + \delta$; tous les points de S_1 appartiennent à Σ_0, et tous les points de Σ_0 appartiennent à S_2.

Considérons maintenant toutes les sphères S décrites de P comme centre, avec le rayon variable ρ. Si $\rho < r_0 - \delta$, la sphère S est comprise *à l'intérieur* de S_1, et par suite *à l'intérieur* d'une certaine sphère Σ_1 de centre P_0 et de rayon ***inférieur*** à r_0; donc l'oscillation dans S est $\leqq \lambda$. On déduit de là :

$$r(P) \geqq r_0 - \delta.$$

Si l'on a $\rho > r_0 + \delta$, la sphère S contient *à son intérieur* S_2; par suite elle contient aussi *à son intérieur* une sphère Σ_2 de rayon *supérieur* à r_0; l'oscillation dans S est donc $> \lambda$. On a par suite :

$$r(P) \leqq r_0 + \delta.$$

En réunissant ces deux résultats, on voit que si on se donne un nombre positif ε quelconque, il suffit de prendre P à l'intérieur de la sphère de centre P_0 et de rayon ε pour que l'on ait :

$$|r(P) - r(P_0)| < \varepsilon.$$

Dans le cas où l'on aurait $r(P_0) = 0$, il suffirait d'appliquer la seconde partie du raisonnement pour voir que la conclusion reste la même.

En résumé, $r(P)$ est une fonction continue du point P. Donnons une application de cette propriété.

Etant donnée la fonction $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, nous avons défini la fonction $\omega(x_1, x_2, \ldots x_n)$ qui représente en chaque point l'oscillation de f. Soit D un certain domaine; appelons λ le maximum de ω dans ce domaine, et prenons un nombre λ' supérieur à λ.

Puisque, en chaque point, on a $\omega < \lambda'$, la fonction r relative à λ' a en chaque point une valeur positive (jamais nulle). Ainsi r est une fonction continue dans le domaine, toujours positive; son minimum dans le domaine est donc un certain nombre positif α. Nous déduisons de là le résultat suivant:

Si λ' est un nombre supérieur au maximum de ω dans le domaine, il existe un nombre positif α tel que, dans toute sphère de rayon égal ou inférieur à α, l'oscillation est inférieure ou égale à λ'.

Sous une autre forme, on peut dire qu'*il existe un nombre positif β tel que, si deux points P et Q sont à une distance $\leqq \beta$ l'un de l'autre, on a :*

$$|f(P) - f(Q)| \leqq \lambda'.$$

Ce théorème doit être considéré comme la généralisation du théorème: La continuité est uniforme. En effet, appliquons notre résultat à une fonction continue; il suffira de faire $\lambda = 0$, $\lambda' = \varepsilon$; on voit qu'on retrouve l'énoncé connu.

14. J'ajoute, pour terminer ce premier chapitre, que beaucoup des résultats qui précèdent peuvent s'étendre au cas où l'on étend encore la notion de fonction, en considérant des fonctions multiformes.

Supposons qu'au lieu de considérer un seul nombre $f((x_1)_0, (x_2)_0, \ldots (x_n)_0)$ attaché au point $[(x_1)_0, (x_2)_0, \ldots (x_n)_0]$, on en considère plusieurs, ou même une infinité pouvant former un ensemble d'une nature absolument quelconque. Le seul point essentiel que nous avons besoin d'admettre est que la question suivante ait un sens précis: Un nombre donné y_0 est-il, oui ou non, une valeur de la fonction f au point $(x_1)_0, (x_2)_0, \ldots (x_n)_0$?

Pour une fonction de cette nature, on peut définir, comme pour une fonction uniforme, les limites supérieure et inférieure dans un domaine, puis en partant de là le maximum, le minimum, l'oscillation en un point. Les fonctions φ, ψ, ω, qui représentent respectivement ces trois quantités en chaque point, possédent les propriétés que nous avons étudiées dans ce chapitre, en supposant qu'on etait parti d'une fonction uniforme. Enfin, les résultats du § 13 sont applicables aux nouvelles fonctions que nous considérons maintenant. J'aurai occasion, dans la suite, de faire usage de cette remarque.

CHAPITRE II.

Fonctions discontinues développables en séries de fonctions continues.

I. Enoncé des problèmes.

15. Quand on considère, au point de vue de la continuité, une fonction de plusieurs variables, il y a lieu de distinguer la continuité par rapport à l'ensemble de ces variables et la continuité par rapport à ces variables considérées séparément. On sait, en effet, qu'une fonction des deux variables réelles x et y peut être, en tout point, continue par rapport à chacune d'elles, sans être toujours continue par rapport à leur ensemble; cette remarque est énoncée depuis longtemps par M. Dini dans ses cours à l'Université de Pise.

Citons, comme exemple, la fonction qui est égale à 0 pour l'origine, et à $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ pour les autres points du plan; on voit qu'en tout point distinct de l'origine, la fonction est continue, au sens ordinaire; à l'origine, elle est encore continue par rapport à x et par rapport à y, puisqu'elle est nulle sur chacun de ces deux axes; mais elle éprouve une discontinuité si on déplace le point de coordonnées (x, y) suivant une direction oblique; suivant la direction $x = y$, par exemple, elle saute brusquement de la valeur 0 à la valeur $\frac{1}{2}$.

En partant de cet exemple ou d'autres exemples analogues, on peut former une fonction qui sera toujours continue par rapport à chacune des deux variables, *et telle cependant qu'il n'existe aucune aire où elle soit toujours continue par rapport à leur ensemble.* Pour cela, rangeons tous les points du plan dont les deux coordonnées sont rationnelles en une suite simplement infinie (α_1, β_1), $(\alpha_2, \beta_2), \ldots (\alpha_n, \beta_n), \ldots$ ce qui peut se faire, puisque ces points forment un ensemble dénombrable. Soit u_{α_n, β_n} une fonction telle que la précédente, discontinue par rapport à l'ensemble (x, y) au seul point (α_n, β_n), où elle est continue par rapport à x et par rapport à y, et de plus, inférieure en valeur absolue à un nombre fixe. Si $\Sigma\, a_n$ est une série absolument convergente, $\Sigma\, a_n\, u_{\alpha_n, \beta_n}$ sera une fonction possédant les propriétés indiquées: elle sera partout continue par rapport à chacune des variables, et dans toute aire il existera des points de discontinuité par rapport à l'ensemble (x, y).

16. On est ainsi conduit à se poser les questions suivantes. En premier lieu, si l'on assujettit une fonction de deux variables à être continue par rapport à chacune d'elles, cette condition entraîne-t-elle des conséquences simples relativement à la manière d'être de la fonction? En particulier, et c'est l'une des questions qui feront l'objet de ce chapitre, la succession de valeurs prises par la fonction sur une courbe du plan, par exemple sur la droite $x = y$, constitue une fonction d'une variable qui, nous venons de le voir, n'est pas nécessairement continue; cette fonction est-elle assujettie à des conditions, et quelles sont ces conditions?

En se plaçant au point de vue en quelque sorte réciproque du précédent, on se donnera *a priori* une succession de valeurs sur $x = y$, et l'on cherchera s'il est possible ou non de former une fonction de x et y, toujours continue par rapport à chacune de ces deux variables, et prenant sur la droite $x = y$ les valeurs données. Ce sera le problème I.

17. Indiquons maintenant une autre question d'analyse dont le rapport avec la précédente est très étroit.

Supposons qu'on ait une fonction continue par rapport à (x, y) *à l'intérieur* d'une aire A limitée par un contour C, et supposons qu'en chaque point de C il y ait *continuité suivant la normale*; j'entends par là que, lorsque le point M se rapproche indéfiniment du point M_0 de C en suivant la normale à C en M_0, la fonction $f(M)$ tend vers une limite déterminée, qui est égale à $f(M_0)$. La succession des valeurs $f(M_0)$ prises par la fonction sur la courbe C peut être discontinue, comme on en trouve des exemples dans des questions classiques d'Analyse; nous nous proposons d'examiner si cette succession de valeurs est assujettie à certaines lois.

Je fais remarquer tout de suite que nous n'enleverons évidemment rien à la généralité de la question en supposant que le contour C est constitué par une portion de l'axe $0x$. Nous supposerons donc que, dans le rectangle:

$$\alpha \leqq x \leqq \beta$$
$$0 \leqq y \leqq \gamma,$$

on a une fonction continue par rapport à l'ensemble (x, y) en tout point sauf aux points de $0x$, où elle est seulement continue par rapport à y. Il s'agira de savoir ce qu'est la fonction sur $0x$. Ce sera le problème II.

18. Nous verrons dans la suite qu'il y a lieu de traiter simultanément les deux problèmes I et II. Montrons d'abord qu'on peut les considérer tous deux comme cas particuliers d'un troisième problème, dans lequel les conditions imposées à la fonction sont un peu plus générales.

Supposons une fonction $f(x, y)$ définie dans le rectangle:

$$\alpha \leqq x \leqq \beta$$
$$\gamma \leqq y \leqq \delta,$$

en tout point, il y a continuité par rapport à y; en ce qui concerne l'autre variable x, nous supposons seulement que, entre deux droites parallèles à $0x$, $y = y_1$, $y = y_2$, il existe toujours une droite $y = y_3$ sur laquelle il y a continuité par rapport à x; en d'autres termes, il y a un ensemble de parallèles à $0x$ sur chacune desquelles la fonction est continue par rapport à x, et cet ensemble est dense par rapport à l'ensemble de toutes les parallèles à $0x$. On se propose de voir ce qu'est la fonction sur une courbe du plan. Ce sera le problème III.

Il est bien évident que les conditions des problèmes I et II rentrent dans les conditions du problème III.

19. Passons maintenant à un autre ordre de questions, relatives à la théorie des séries.

Reprenons le cas du problème II, indiqué au § 17, où l'on suppose que la fonction $f(x, y)$ n'a de discontinuités qu'aux points de $0x$; il y a, en chacun de ces points, continuité par rapport à la variable y.

Prenons une suite décroissante de quantités positives et tendant vers 0; soit $y_1, y_2, \dots y_n, \dots$, et traçons dans le plan les parallèles à $0x$ ayant pour ordonnées ces nombres $y_1, y_2, \dots y_n, \dots$ Chacune des fonctions de x: $f(x, y_1)$, $f(x, y_2), \dots f(x, y_n), \dots$ est une fonction continue de x, tandis qu'au contraire la fonction $f(x, 0)$ peut être discontinue. D'autre part, si on donne à x une valeur fixe, la suite $f(x, y_1)$, $f(x, y_2), \dots f(x, y_n), \dots$ a pour limite $f(x, 0)$.

D'une manière générale, nous dirons qu'*une fonction $f(x)$ est la limite de la suite de fonctions $f_1(x), f_2(x), \dots f_n(x), \dots$ dans un certain champ de variation de x, si, pour chaque valeur x_0 appartenant à ce champ, la suite de quantités $f_1(x_0), f_2(x_0), \dots f_n(x_0), \dots$ a pour limite $f(x_0)$.*

On voit, d'après cette définition, que dans la question précédente, la fonction discontinue $f(x, 0)$ est la *limite de la suite de fonctions continues* $f(x, y_1)$, $f(x, y_2), \dots f(x, y_n) \dots$ ou, ce qui revient au même, *la somme de la série de fonctions continues:*

$$f(x, y_1) + \sum_{n=1}^{n=\infty} [f(x, y_{n+1}) - f(x, y_n)],$$

série qui est convergente pour toute valeur de x, au moins dans un certain intervalle de variation.

Ces remarques nous conduisent tout naturellement à étudier le problème suivant. Etant donnée une série, dont les termes sont des fonctions continues de x, et que nous supposons convergente pour chaque valeur de x (dans un certain intervalle de variation), la somme de cette série est une fonction déterminée de x; on sait que, lorsque la convergence est uniforme (ou même uniforme simplement, au sens donné à cette expression par M. Dini (*)), cette fonction est continue; mais si on suppose seulement la convergence, la fonction peut être discontinue, comme la théorie des séries trigonométriques en fournit des exemples; il y a donc lieu de rechercher quelle est la nature de cette fonction; en d'autres termes, existe-t-il un critérium précis, caractérisant *les fonctions qui peuvent être représentées par des séries de fonctions continues?*

20. Je veux montrer ici comment ce problème se ramène complètement au problème II (§ 17). Soit la série:

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

Posons:

$$S_n(x) = u_1(x) + \cdots + u_n(x)$$
$$S(x) = u_1(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

$S(x)$ est la limite de $S_n(x)$.

(*) U. Dini, *Fondamenti*, etc., page 103.

Prenons, comme plus haut, une suite décroissante tendant vers 0: y_1, $y_2,\dots y_n,\dots$ et traçons dans le plan les droites: $y=y_1$, $y=y_2,\dots y=y_n,\dots$ En supposant que la série soit convergente quand x varie de α à β, considérons le rectangle $A\,B\,A_1\,B_1$ limité par les droites $x=\alpha$, $x=\beta$, $y=0$, $y=y_1$ (fig. 1); appelons $A_2\,B_2$, etc..., $A_n\,B_n,\dots$ les droites $y=y_2,\dots$ $y=y_n,\dots$ Je définirai dans cette région une fonction $f(x,\ y)$ de la manière suivante.

Sur chacune des droites $y=y_n$, je pose:

$$f(x,\ y_n)=S_n(x),$$

et sur l'axe $0\,x$:

$$f(x,\ 0)=S(x).$$

Cela fait, chacun des points où la fonction n'est pas encore définie se trouve

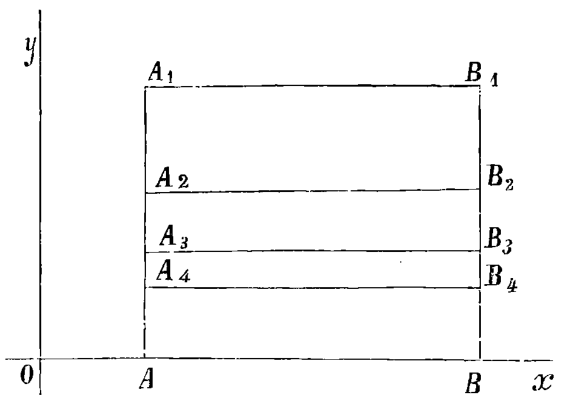

Fig. 1.

situé entre deux droites $y=y_p$ et $y=y_{p+1}$. Soit $(x,\ y)$ un tel point. En supposant:

$$y_p>y>y_{p+1},$$

je poserai:

$$f(x,\ y)=\frac{y_p-y}{y_p-y_{p+1}}f(x,\ y_{p+1})+\frac{y-y_{p+1}}{y_p-y_{p+1}}f(x,\ y_p), \tag{1}$$

c'est-à-dire que, sur le segment parallèle à $0\,y$ qui joint les deux points $(x,\ y_p)$ et $(x,\ y_{p+1})$ je fais varier la fonction linéairement.

D'après cette définition, la fonction sera continue par rapport à l'ensemble $(x,\ y)$ dans chacun des rectangles partiels tels que $A_1\,B_1\,A_2\,B_2$,

$A_2 B_2 A_3 B_3$, etc.... En effet, les différents termes qui figurent dans le second membre de la formule (1) sont des fonctions continues de l'ensemble (x, y).

J'énonce à ce sujet une remarque. J'aurai souvent occasion, dans la suite, de définir une fonction continue dans une aire A limitée par un contour C, en supposant que, sur C ou sur certaines portions de C, la fonction doive prendre des valeurs formant une succession continue donnée; il est bien évident que la chose peut toujours se faire; j'ajoute qu'on peut s'assujettir à ce que les limites supérieure et inférieure de la fonction dans A soient les mêmes que les limites supérieure et inférieure de la fonction donnée sur C. C'est ce qui a lieu, par exemple, pour chacun des rectangles partiels $A_1 B_1 A_2 B_2$, etc.... d'après la manière dont nous avons défini $f(x, y)$.

Je dis que $f(x, y)$, qui se trouve définie maintenant dans tout le rectangle $A B A_1 B_1$, satisfait aux conditions du problème II. D'abord, en tout point pour lequel $y > 0$, il y a continuité par rapport à l'ensemble (x, y), d'après ce que nous venons de voir. Si maintenant nous considérons un point de l'axe $0x$, je dis qu'il y a en ce point continuité par rapport à y. D'une part en effet, la suite $f(x, y_1)$, $f(x, y_2)\ldots$ $f(x, y_n)\ldots$ tend vers $f(x, 0)$; d'autre part la quantité $f(x, y)$, lorsque y est compris entre y_n et y_{n+1}, est comprise entre $f(x, y_n)$ et $f(x, y_{n+1})$; il en résulte que, quelle que soit la manière dont y tende vers 0, $f(x, y)$ a pour limite $f(x, 0)$.

21. Nous voyons en résumé qu'il y a identité complète entre les fonctions discontinues qu'on peut obtenir comme fonctions limites, dans les conditions du problème II, et celles qu'on peut représenter par des séries de fonctions continues.

Nous reconnaîtrons que ces fonctions sont aussi celles qu'on peut obtenir sur la droite $x = y$, quand on suppose une fonction continue par rapport à chacune des variables, comme dans le problème I.

Je m'occuperai d'abord de trouver des propriétés générales que possèdent les fonctions assujetties aux conditions du problème III et *a fortiori* les fonctions assujetties aux conditions des problèmes I et II; nous obtiendrons ainsi des conditions nécessaires; nous démontrerons ensuite que ces conditions sont suffisantes; nous aurons alors complétement caractérisé ces fonctions.

II. Conditions nécessaires.

22. Je suppose donc une fonction $f(x, y)$ satisfaisant aux conditions du problème III, c'est-à-dire qu'elle est partout continue par rapport à y, et que, entre deux droites parallèles à $0x$, il en existe toujours une troisième sur laquelle la fonction est continue par rapport à x. Nous pourrons énoncer cette seconde condition de la manière suivante: si on représente chaque parallèle à $0x$ par son point d'intersection avec $0y$, il existe sur $0y$ un ensemble de points, *dense dans toute portion de* $0y$, tel que, y' étant l'ordonnée d'un de ces points, la fonction, en tout point de coordonnées (x, y'), est continue par rapport à x. J'appellerai E l'ensemble des points qui appartiennent aux droites $y = y'$; ainsi, en tout point de E, il y a continuité par rapport à x.

Je vais définir, en chaque point, une fonction qui jouera un rôle important dans l'étude que je me propose de faire.

Pour cela, prenons un point A, de coordonnées (x_0, y_0), et considérons, sur la droite $x = x_0$, un segment BC dont le milieu soit A, et de longueur variable 2ρ; soit donc $BA = AC = \rho$.

Appelons $\omega(\rho)$ l'oscillation de la fonction dans le segment BC; c'est une fonction non décroissante de ρ; de plus, puisque la fonction, considérée sur la droite $x = x_0$, est continue, on a:

$$\omega(0) = 0$$

on peut remarquer en outre que $\omega(\rho)$ est fonction continue de ρ.

Soit maintenant σ un nombre positif; j'appelle α_σ *la limite supérieure des valeurs de* ρ *telles que* $\omega(\rho) \leqq \sigma$. Le nombre α_σ est ainsi complétement caractérisé par ce fait que:

$$\text{pour} \quad \rho \leqq \alpha_\sigma \quad \text{on a} \quad \omega(\rho) \leqq \sigma$$
$$\text{pour} \quad \rho > \alpha_\sigma \quad \text{on a} \quad \omega(\rho) > \sigma.$$

Si dans la première de ces inégalités je peux écrire $\rho \leqq \alpha_\sigma$ et non pas seulement $\rho < \alpha_\sigma$ (*), c'est à cause de la continuité de $\omega(\rho)$ par rapport à ρ, qui provient elle-même de la continuité de la fonction sur $x = x_0$.

En supposant la définition précedente faite pour chaque point du plan, nous aurons ainsi défini une fonction $\alpha_\sigma(x, y)$ parfaitement déterminée, et qui,

(*) Cf. § 13.

d'après l'hypothèse de la continuité par rapport à y, a en chaque point une valeur *positive.* Je vais démontrer, en faisant usage de l'autre condition imposée à $f(x, y)$, que $\alpha_\sigma(x, y)$ est *semi-continue supérieurement par rapport à l'ensemble* (x, y).

23. Il faut montrer pour cela que, si je considère un point quelconque $A_0\,[x_0, y_0]$, et si je prends un nombre positif quelconque ε, je peux déterminer autour de A_0 une aire assez petite pour que, $A\,[x, y]$ étant un point quelconque de cette aire, on ait:

$$\alpha_\sigma(x, y) < \alpha_\sigma(x_0, y_0) + \varepsilon$$

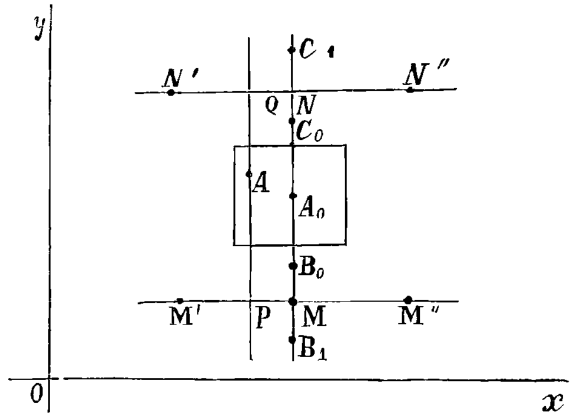

Fig. 2.

Prenons (fig. 2):

$$B_0 A_0 = A_0 C_0 = \alpha_\sigma(x_0, y_0),$$

prenons ensuite:

$$B_1 A_0 = A_0 C_1 = \alpha_\sigma(x_0, y_0) + \frac{\varepsilon}{2}\cdot$$

D'après la signification de $\alpha_\sigma(x_0, y_0)$, l'oscillation de la fonction, dans le segment $B_1 C_1$, est un nombre supérieur à σ; je peux le représenter par $\sigma + k$. Si je prends un nombre positif k_1 inférieur à k, je peux certainement trouver, entre B_1 et C_1, deux points M et N tels que l'on ait:

$$|f(M) - f(N)| > \sigma + k_1 \tag{1}$$

De plus, je peux supposer que ces points M et N sont situés sur deux parallèles à $0x$ sur lesquelles il y a continuité par rapport à x, autrement dit font partie de l'ensemble E. Nous savons en effet que E est dense dans toute portion de $B_1 C_1$; si donc le point M de l'inégalité (1) ne fait pas partie de E, je peux le remplacer par un point M_1 faisant partie de E et suffisamment voisin de M pour qu'on ait encore:

$$|f(M_1) - f(N)| > \sigma + k_1.$$

Je suppose donc que dans (1), les deux points M et N soient des points de E; considérons maintenant les parallèles à $0x$ menées par ces points M et N; la fonction étant continue sur chacune de ces droites, on peut déterminer deux segments $M' M''$, $N' N''$, parallèles à $0x$, ayant pour milieux M et N, et de même longueur 2δ, tels que, si P et Q sont deux points quelconques pris respectivement sur ces segments, on ait:

$$|f(P) - f(M)| < \frac{k_1}{2},$$

$$|f(Q) - f(N)| < \frac{k_1}{2}.$$

De ces inégalités et de l'inégalité (1) on déduit:

$$|f(P) - f(Q)| > \sigma, \tag{2}$$

P et Q étant deux points quelconques pris, le premier sur $M' M''$, le second sur $N' N''$.

Prenons maintenant le carré de centre A_0 et dont les côtés parallèles aux axes sont à une distance de A_0 égale à η, η étant inférieur au plus petit des nombres $\frac{\varepsilon}{2}$ et δ. Dans ces conditions, si A est un point quelconque pris dans ce carré, la distance de A à chacune des droites $M' M''$, $N' N''$ est moindre que $\alpha_\sigma(x_0, y_0) + \varepsilon$. Menons alors par A la parallèle à $0y$, et prenons sur cette droite le segment dont A est milieu et dont la demi-longueur est $\alpha_\sigma(x_0, y_0) + \varepsilon$; ce segment *traversera* $M' M''$ et $N' N''$; il contiendra donc un couple de points P et Q satisfaisant à l'inégalité (2); par suite, l'oscillation dans ce segment est supérieure à σ; donc la fonction α_σ relative au point A est inférieure à $\alpha_\sigma(x_0, y_0) + \varepsilon$; c'est-à-dire que $\alpha_\sigma(x, y)$ est *semi-continue supérieurement par rapport à* (x, y); c'est la propriété que je voulais établir.

24. Je vais maintenant tirer des conséquences du résultat précédent.

Considérons une courbe quelconque C coupant toutes les parallèles à $0y$, ou, avec précision, l'ensemble des points représentés par l'équation: $y = \varphi(x)$, $\varphi(x)$ étant une fonction continue quelconque définie dans un certain intervalle. En chacun des points de cette courbe, α_σ a une valeur déterminée; je considère α_σ comme fonction du point variable de la courbe C; cette fonction a, en chaque point, un *minimum par rapport à la courbe*; on peut dire aussi que, dans les conditions où nous nous plaçons, α_σ est une fonction de x; je considère en chaque point le minimum de cette fonction, tel que je l'ai défini au § 7.

En premier lieu, je dis que, si en un point $A_0(x_0, y_0)$ de C, la fonction α_σ a son minimum par rapport à C positif, l'oscillation de $f(x, y)$ en ce point par rapport à l'ensemble (x, y) est $\leq 2\sigma$. Soit en effet γ ce minimum et soit γ_1

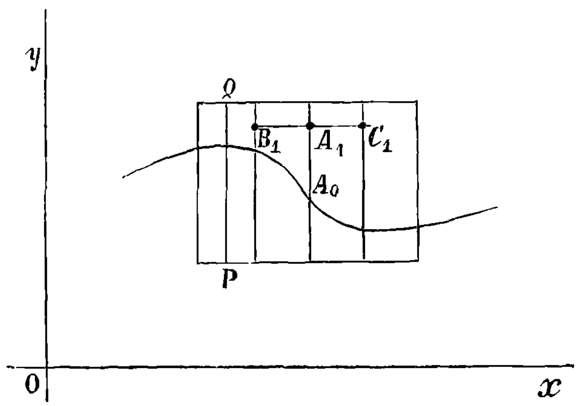

Fig. 3.

un nombre positif inférieur à γ. Je prends d'abord, autour de x_0, un intervalle $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ assez petit pour qu'on ait dans cet intervalle:

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \frac{\gamma_1}{2},$$

je réduis ensuite cet intervalle, s'il le faut, de manière que, en tous les points de C correspondant aux valeurs de x qui s'y trouvent, on ait:

$$\alpha_\sigma > \gamma_1.$$

La chose est possible, puisque j'ai choisi γ_1 inférieur au *minimum de α_σ au point A_0 relativement à C.*

Prenons alors (fig. 3) le rectangle R:

$$x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta, \quad y_0 - \frac{\gamma_1}{2} \leq y \leq y_0 + \frac{\gamma_1}{2}.$$

Sur tout segment tel que PQ, parallèle à $0y$, et joignant les deux bases du rectangle, l'oscillation de la fonction est $\leqq \sigma$, car il y a sur ce segment un point A de la courbe C, et le segment de milieu A et de demi-longueur $\alpha_\sigma(A) > \gamma_1$ contient tout le segment PQ.

Je dis maintenant qu'étant donné ε, on peut trouver une aire autour de A_0 dans laquelle l'oscillation soit $\leqq 2\sigma + \varepsilon$. Je prends pour cela, sur l'ordonnée de A_0 et dans le rectangle R, un point $A_1(x_0, y_1)$ où il y ait continuité par rapport à x; puis, sur la droite $y = y_1$, un segment $B_1C_1[x_0 - \delta', x_0 + \delta']$, où l'oscillation soit $< \varepsilon$, en prenant, de plus: $\delta' \leqq \delta$. Si on considère la portion du rectangle R limitée par les droites $x = x_0 - \delta'$, $x = x_0 + \delta'$, c'est-à-dire le rectangle R':

$$x_0 - \delta' \leqq x \leqq x_0 + \delta', \quad y_0 - \frac{\gamma_1}{2} \leqq y \leqq y_0 + \frac{\gamma_1}{2},$$

l'oscillation dans ce rectangle est $< 2\sigma + \varepsilon$. Soit en effet M et N deux points quelconques pris dans ce rectangle, projetons-les en M_1 et N_1 sur B_1C_1, on aura:

$$|f(M) - f(M_1)| \leqq \sigma, \quad |f(N) - f(N_1)| \leqq \sigma, \quad |f(M_1) - f(N_1)| < \varepsilon,$$

d'où nous déduisons:

$$|f(M) - f(N)| < 2\sigma + \varepsilon.$$

Comme le raisonnement s'applique, quel que soit ε, on voit qu'au point A_0 l'oscillation par rapport à (x, y) est $\leqq 2\sigma$. J'emploierai ce résultat, soit sous la forme que je lui ai donnée plus haut, soit sous la forme suivante. *Si au point A_0 l'oscillation est $> 2\sigma$, on peut affirmer qu'en ce point le minimum de α_σ par rapport à C est nul.*

25. Rapprochons les deux propriétés de la fonction $\alpha_\sigma(x, y)$ considérée sur la courbe C, d'être positive et d'être semi-continue supérieurement. D'après le § 12, il existe dans tout arc D de la courbe C un arc D_1 où α_σ a son minimum positif.

Prenons maintenant une suite décroissante de quantités positives et tendant vers 0; soit $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n, \ldots$ Dans l'arc D_1 il existe un arc D_2 sur lequel α_{σ_1} a son minimum positif, dans D_2 un arc D_3 où α_{σ_2} a son minimum positif, etc.... On voit de cette manière que, dans l'arc D, et par suite dans toute portion de la courbe C, il existe un point où α_σ a son minimum positif par rapport à la courbe, *si petit que soit* σ. En ce point, l'oscillation par rapport à (x, y) ne peut être que 0, puisqu'elle doit être inférieure ou égale à 2σ, quel que soit σ; on a donc là un point de continuité par rapport à (x, y), et nous pouvons énoncer le résultat suivant:

Dans toute portion de courbe représentable par une équation de la forme $y = \varphi(x)$, $\varphi(x)$ *étant fonction continue, il existe des points où* $f(x, y)$ *est continue par rapport à l'ensemble* (x, y).

On peut dire, *a fortiori*, que, *dans toute aire*, il existe des points de continuité, c'est-à-dire que la fonction $f(x, y)$ est *ponctuellement discontinue.*

En ayant plus spécialement égard aux valeurs prises par la fonction sur la courbe considérée, ce qui est mon principal objet en ce moment, on voit aussi que la fonction d'une variable ainsi déterminée est *ponctuellement discontinue.*

C'est là un premier résultat sur la nature de cette fonction. Pour en obtenir d'autres, je commencerai par poser de nouvelles définitions, qui me permettront d'étendre une partie des résultats déjà acquis.

26. Soit une fonction de la variable t définie dans un certain intervalle; comme toujours, j'imagine qu'on représente t par un point variable sur un segment de droite. Prenons, sur ce segment, un ensemble de points E, que je supposerai *parfait*, c'est-à-dire coïncidant avec son dérivé E'. Considérons une portion BC du segment, contenant *à son intérieur* au moins un point de E, et par suite une infinité. Les valeurs que prend la fonction en tous les points de E qui font partie de BC ont une limite supérieure M, une limite inférieure m, et une oscillation $\omega = M - m$. Soit maintenant $A\ [t_0]$ un point quelconque de E; l'intervalle $(t_0 - \alpha,\ t_0 + \alpha)$, si petit que soit α, contient des points de E; les trois nombres précédents relatifs à l'intervalle $(t_0 - \alpha,\ t_0 + \alpha)$, quand α tend vers 0, tendent vers des limites déterminées, que j'appellerai le *maximum*, le *minimum*, l'*oscillation* de la fonction en A *relativement à l'ensemble parfait* E.

On voit que ces définitions sont toutes semblables à celles que nous avons données dans le premier chapitre; la seule différence consiste en ce que nous nous occupons seulement des valeurs de la fonction en certains points, négligeant complètement les autres points. Il est bien évident d'ailleurs que ces mêmes notions peuvent être définies pour un ensemble E absolument quelconque; si je ne considère que des ensembles parfaits, c'est parce que c'est seulement dans ce cas que ces notions me seront utiles.

Lorsqu'il y aura lieu de préciser, je désignerai par $M[f(t), E, \alpha\beta]$ le maximum de $f(x)$ aux différents points de E contenus dans l'intervalle $\alpha\beta$, et par $M[f(t), E, P]$ le maximum en P de $f(t)$ relativement à E.

27. Nous pouvons, grâce aux définitions précédentes, définir la *continuité et la discontinuité relativement à l'ensemble E.*

Je dirai qu'en un point A où l'on a $\omega = 0$, ω étant l'oscillation en ce point par rapport à E, la fonction est *continue par rapport à E*; si au contraire on a $\omega > 0$, nous dirons qu'il y a *discontinuité par rapport à cet ensemble.*

D'une manière générale, trois cas sont possibles:

1.° On a, en tout point de E (dans l'intervalle qu'on considère): $\omega = 0$; dans ce cas il y a continuité en chaque point; nous dirons alors que la fonction est *continue relativement à E.*

2.° Il existe des points où l'on a $\omega > 0$; mais, dans tout intervalle $\alpha\beta$ contenant à son intérieur des points de E (autrement dit, au voisinage de tout point de E), il existe des points de E pour lesquels $\omega = 0$. Par analogie avec une notion que nous avons déjà étudiée, nous sommes conduits à dire que, dans ce cas, la fonction est *ponctuellement discontinue relativement à E.*

3.° Si l'on ne se trouve pas dans l'un des deux cas précédents, c'est qu'il existe un intervalle $\alpha\beta$ contenant à son intérieur des points de E, ω étant positif en chacun de ces points; nous dirons alors que la fonction est *totalement discontinue relativement à E.*

J'emploierai également la notion de fonction *semi-continue sur un ensemble parfait.*

28. Ces nouvelles notions étant acquises, nous pouvons généraliser un certain nombre de résultats précédemment obtenus. Je commencerai par le suivant, démontré au § 12: Une fonction positive, semi-continue supérieurement, ne peut pas avoir son minimum nul en tous les points d'un segment.

Cet énoncé va devenir un cas particulier du suivant: *Une fonction, définie aux points d'un ensemble parfait E, positive et semi-continue supérieurement, ne peut pas avoir son minimum (par rapport à E) nul en tous les points de E.* Il me suffira de reprendre, avec quelques modifications, la démonstration du théorème qui précède.

Supposons d'abord une fonction définie sur E, positive ou nulle, semi-continue supérieurement, et ayant, en tous les points de E (au moins entre deux limites déterminées), son minimum nul. Je conviendrai, pour abréger, de dire qu'un intervalle est *relatif à E* s'il contient *à son intérieur* des points de E; dans ce qui suit, je considère exclusivement des intervalles satisfaisant à cette condition. D'après la dernière hypothèse faite sur notre fonction, on voit que, dans tout intervalle α relatif à E, et si petit que soit ε, il existe un point A de E où l'on a :

$$f(A) < \frac{\varepsilon}{2} \cdot$$

En vertu de l'hypothèse de la semi-continuité supérieure, on peut déterminer autour de A un intervalle α_1 où l'on aura partout, c'est-à-dire pour tous les points de E contenus dans α_1 :

$$f < f(A) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

On peut donc trouver, dans tout intervalle α un autre intervalle α_1 où l'on aura partout :

$$f < \varepsilon,$$

dans α_1 on trouvera α_2 où l'on aura :

$$f < \frac{\varepsilon}{2},$$

et ainsi de suite; chacun des intervalles α_n étant contenu dans le précédent, et l'ensemble E contenant tous ses points limites, il existe au moins un point de E contenu dans tous ces intervalles; on a nécessairement en ce point :

$$f = 0.$$

On déduit de là que *si une fonction définie sur E est positive* (jamais nulle) *et semi-continue supérieurement, l'ensemble des points où cette fonction a son minimum nul*, ensemble qui est essentiellement fermé, *ne peut coïncider avec l'ensemble E dans aucune portion du segment.*

29. Ceci nous amène à poser quelques nouvelles définitions au sujet des ensembles.

Nous dirons qu'un ensemble F contenu dans un ensemble parfait E est *dense par rapport à E*, dans une certaine portion de droite, si le dérivé de F comprend tous les points de E situés sur cette portion de droite. Si cette condition n'est remplie pour aucune portion du segment considéré, c'est que, dans tout intervalle relatif à E, on peut trouver un intervalle relatif à E ne contenant aucun point de F'; dans ces conditions, nous dirons que F n'est dense nulle part par rapport à E, ou plus brièvement que F est *non dense par rapport à E.*

On peut dire que *si une fonction est positive et semi-continue supérieurement sur l'ensemble E, l'ensemble des points où le minimum de la fonction* *est nul est un ensemble non dense par rapport à E*; sous une forme différente, nous dirons que, *dans tout intervalle relatif à E, il existe un intervalle relatif à E, dans lequel le minimum de la fonction par rapport à E est positif.*

Comme application immédiate de ce théorème, on reconnait que si une fonction est totalement discontinue par rapport à un ensemble parfait, il existe certainement un intervalle relatif à cet ensemble, dans lequel ω a son minimum positif.

30. Reprenons maintenant la fonction $f(x, y)$, assujettie toujours aux conditions du problème III; soit une courbe $y = \varphi(x)$; prenons un ensemble parfait E de points sur cette courbe, ou, ce qui revient au même, un ensemble parfait de valeurs de x.

Remarquons d'abord que, en un point de E où α_σ a son minimum par rapport à E positif, l'oscillation de la fonction par rapport à E est $\leqq 2\sigma$. Il suffit, pour le voir, d'appliquer le raisonnement du § 24, en considérant seulement les parallèles à $0y$ sur lesquelles se trouvent des points de E.

Cela posé, d'après les propriétés de α_σ, on peut trouver dans tout intervalle relatif à E un autre intervalle où α_σ a son minimum positif, dans celui-ci un autre où $\alpha_{\frac{\sigma}{2}}$ a son minimum positif, etc.; on démontre ainsi l'existence d'un point de E où α_σ a son minimum positif par rapport à E, *quel que soit σ*, et où par suite l'oscillation par rapport à E est 0. Ainsi, il existe, au voisinage de tout point de E, des points de continuité par rapport à E; en d'autres termes, la fonction est *ponctuellement discontinue relativement à tout ensemble parfait E.*

Ce résultat comprend évidemment comme cas particulier celui du § 25, qu'on obtiendra en supposant que E est une portion de courbe continue. On voit, que, dans les raisonnements que nous avons employés, les propriétés essentielles du continu sur lesquelles nous avons raisonné, sont celles qui appartiennent aux ensembles parfaits en général: le continu n'est qu'une espèce particulière d'ensemble parfait.

Tous les résultats obtenus jusqu'à présent sur la question qui fait l'objet essentiel de ce chapitre peuvent se résumer de la manière suivante:

Une fonction qui peut être obtenue dans les conditions du problème III (et *a fortiori* dans les conditions des problèmes I et II) est *ponctuellement discontinue relativement à tout ensemble parfait.*

III. Conditions suffisantes.

31. Je vais suivre maintenant la marche inverse de celle que j'ai suivie jusqu'ici. Je me propose d'étudier la nature de la condition que nous venons de trouver, et de montrer que toute fonction qui la remplit, c'est-à-dire qui est *ponctuellement discontinue relativement à tout ensemble parfait*, peut être obtenue dans les conditions des problèmes I et II. Pour cela, je m'occuperai d'abord de construire *a priori* une catégorie de fonctions présentant des discontinuités de plus en plus compliquées, mais satisfaisant à la condition précédente, et je démontrerai pour ces fonctions la possibilité des problèmes. J'aborderai ensuite le cas général, que je parviendrai à traiter complètement en le ramenant à celui des fonctions de cette catégorie particulière. En outre, la méthode que je suivrai nous permettra de transformer la condition fondamentale, et nous donnera un moyen en quelque sorte pratique de reconnaître si une fonction donnée satisfait ou non à cette condition.

Je rappelle que les problèmes à étudier sont les suivants :

Problème I. Que doit être la fonction $\varphi(x)$ définie pour $\alpha \leq x \leq \beta$, pour qu'il soit possible de déterminer une fonction $f(x, y)$ définie dans le carré : $\alpha \leq x \leq \beta$, $\alpha \leq y \leq \beta$, continue en tout point par rapport à x et par rapport à y, et égale sur $x = y$ à $\varphi(x)$?

Je conviendrai de dire qu'une fonction $\varphi(x)$ est *représentable* dans les conditions du problème I, si le problème précédent est possible pour cette fonction. J'énonce tout de suite à ce sujet une remarque qui me sera souvent utile.

Supposons $\varphi(x)$ représentable. Si $f(x, y)$ est une solution, on en aura d'autres en ajoutant à $f(x, y)$ une fonction $f_1(x, y)$ continue partout par rapport à (x, y), et égale à 0 sur $x = y$. On peut évidemment choisir f_1 de manière que $f + f_1$ prenne sur le *périmètre* du carré une succession de valeurs continue *donnée à l'avance*, assujettie seulement aux conditions : $f_1(\alpha, \alpha) = 0$, $f_1(\beta, \beta) = 0$.

Problème II. Que doit être $\varphi(x)$ définie pour $\alpha \leq x \leq \beta$, pour qu'il existe une fonction $f(x, y)$ définie dans le rectangle: $\alpha \leq x \leq \beta$, $0 \leq y \leq y_0$, continue par rapport à (x, y) en tout point pour lequel $y > 0$, continue par rapport à y aux points de $y = 0$, et égale sur $0x$ à $\varphi(x)$?

Nous dirons que $\varphi(x)$ est représentable dans les conditions du problème II, si ce problème a une solution.

Remarquons, comme dans le cas précédent, que si cela a lieu, on peut se donner arbitrairement les valeurs de $f(x, y)$ sur le périmètre du rectangle, moins le côté $y = 0$.

32. Je vais, comme je l'ai dit plus haut, former *a priori* des fonctions discontinues représentables. Pour prendre d'abord le cas le plus simple, je considère une fonction $\varphi(x)$ définie pour $0 \leqq x \leqq 1$, et qui n'a de discontinuité qu'au point $x = 0$. Je rappelle à ce propos qu'une telle discontinuité est dite de première ou de seconde espèce (*) suivant que $\varphi(x)$ a ou non une limite déterminée quand x tend vers 0; mais il n'y aura pas lieu, dans la question dont je m'occupe en ce moment, d'insister davantage sur cette distinction.

Considérons d'abord le problème I. Je prends le carré $OABC$ (fig. 4): $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$.

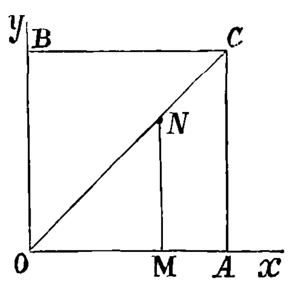

Fig. 4.

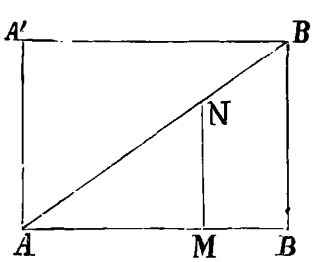

Fig. 5.

Je définis d'abord la fonction sur la diagonale OC par la condition:

$$f(x, x) = \varphi(x).$$

Sur l'axe $0x$, c'est-à-dire sur OA, je place une fonction continue quelconque, assujettie seulement à la condition d'être égale à $\varphi(0)$ pour $x = 0$.

Pour les points du triangle OAC, on a: $y < x$; je prendrai en ces points:

$$f(x, y) = f(x, 0) + \frac{y}{x}\,[f(x, x) - f(x, 0)].$$

Autrement dit, sur tout segment MN parallèle à $0\,y$ et reliant les droites OA et OC, je fais varier linéairement $f(x, y)$. Enfin, je complète la définition de $f(x, y)$ par symétrie autour de $x = y$. Il est évident que $f(x, y)$ satisfait aux conditions du problème.

La solution du problème II est analogue. Soit (fig. 5) $A\,B\,A'\,B'$ le rectangle où il s'agit de définir la fonction $f(x, y)$. On a, sur AB, une fonction

(*) Cf. Dini, *Fondamenti,* etc.

continue en tout point, sauf au point A. Je trace dans ce rectangle une courbe quelconque partant de A, par exemple la diagonale $A B'$; je définis, dans l'aire $A' A B'$, une fonction continue de (x, y), la seule condition imposée étant que cette fonction prenne en A la valeur donnée; cela fait, sur chaque segment MN reliant $A B$ et $A B'$, je fais varier la fonction linéairement de $f(M)$ à $f(N)$; $f(x, y)$ est alors partout définie, et cette fonction constitue une solution du problème.

33. On conçoit tout de suite que le résultat s'étend à une fonction qui présente un nombre fini quelconque de discontinuités. Je donne à ce sujet le théorème général suivant:

Une fonction étant définie dans l'intervalle $\alpha \leq x \leq \beta$, si on peut partager cet intervalle en n portions par des points de division $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$, de

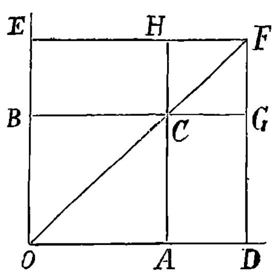

Fig. 6.

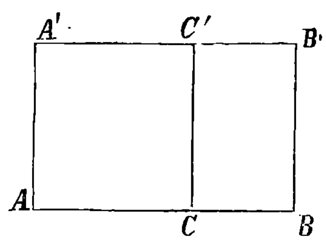

Fig. 7.

telle sorte que, sur chaque portion $\alpha_i \leq x \leq \alpha_{i+1}$, la fonction soit représentable, la fonction, considérée dans l'intervalle entier, est représentable.

Il suffira évidemment de vérifier ce théorème dans le cas de $n = 2$.

S'il s'agit du problème I, considérons la fig. 6.

On suppose que, sur chacun des segments $O C$, $C F$, la fonction est représentable; on peut donc définir dans chacun des carrés $O A C B$, $C G F H$, une fonction $f(x, y)$ satisfaisant aux conditions du problème; il suffit alors de définir dans $A D G C$ une fonction continue prenant sur $A C$ et $C G$ une succession continue de valeurs, qui se trouve déterminée par la définition précédente; il en est de même pour $B C H E$. On voit alors que *la fonction donnée, considérée sur $O F$, est représentable.*

Dans le cas du problème II, je considère la fig. 7. Le problème est supposé possible, si on considère la fonction, seulement sur $A C$, ou seulement sur $C B$. Donnons-nous sur $C C'$ une succession continue de valeurs arbitraire. D'après l'hypothèse et d'après une remarque faite au § 31, on peut achever la définition de $f(x, y)$ dans $A\,C\,C'\,A'$ et dans $C\,B\,B'\,C'$, de manière que, dans chacun de ces deux rectangles, les conditions fondamentales soient vérifiées; considérons alors la fonction qui se trouve définie dans tout le rectangle $A\,B\,B'\,A'$; elle constitue une solution du problème proposé.

En résumé, nous connaissons, jusqu'à présent, comme fonctions représentables, toutes les fonctions dont *les discontinuités sont en nombre fini.*

34. Pour passer au cas où les discontinuités peuvent être en nombre infini, je vais démontrer un autre théorème général.

Supposons qu'on ait, sur le segment où la fonction est définie, une suite de points $A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots$ d'abscisses $x_1 > x_2 \ldots > x_n \ldots$, ayant pour limite un point A, de telle sorte que, sur chaque portion $A_n A_{n-1}$, la fonc-

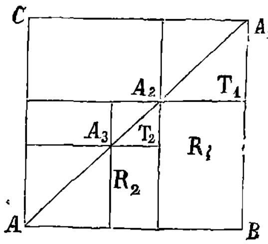

Fig. 8.

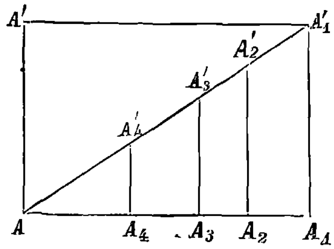

Fig. 9.

tion soit représentable; je dis qu'elle sera représentable sur le segment total $A\,A_1$.

Problème I. Soit $A\,B\,A_1\,C$ le carré où il faut définir $f(x, y)$ (fig. 8); à cause de la symétrie par rapport à $x = y$, je considérerai seulement le triangle $A\,B\,A_1$. La fonction est donnée sur $A\,A_1$; je me donne sur $A\,B$ une fonction continue; puis, je définis $f(x, y)$ successivement dans les aires suivantes: triangle T_1, rectangle R_1, triangle T_2, rectangle R_2, etc. Je peux définir $f(x, y)$ dans chacun des triangles T_1, T_2, etc...., en observant, bien entendu, les conditions de continuité, parce que, d'après les hypothèses, la fonction donnée est représentable sur chacun des segments $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, etc. Si on imagine l'opération prolongée indéfiniment, la fonction $f(x, y)$ se trouve définie en tous les points du carré et satisfait à toutes les conditions du problème.

Problème II. Considérons la fig. 9. Je définis d'abord la fonction dans le triangle $A\,A'\,A'_1$, puis je mène les droites $A_2\,A'_2$, $A_3\,A'_3$, etc...., qui relient $A\,A_1$ et $A\,A'_1$, et je définis la fonction successivement dans chacun des trapèzes formés: $A_1\,A'_1\,A_2\,A'_2$, $A_2\,A'_2\,A_3\,A'_3, \ldots$ etc.... Il est évident que chacune de ces opérations est possible, puisque, sur chacun des segments $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, etc., la fonction est représentable. En tout point qui n'est pas sur le côté $A A_1$, il y aura continuité par rapport à (x, y), et en tout point de ce côté, il y aura continuité par rapport à y.

35. Le théorème est donc démontré; je vais en transformer l'énoncé de la manière suivante. Supposons que nous prenions sur $A A_1$ un point A' différent de A, mais aussi voisin que nous voulons de A; si nous considérons alors le segment $A' A_1$, le théorème du § 33 suffit pour nous apprendre que la fonction est représentable sur ce segment, car il est décomposable en un nombre fini de portions sur chacune desquelles la fonction est représentable. On voit alors que nous pouvons donner au théorème que nous venons d'établir la forme suivante :

Si une fonction est représentable dans tout segment $A' B'$ intérieur à $A B$, elle est représentable sur le segment $A B$.

Enfin, en combinant ce résultat avec celui du § 33 que je viens de rappeler à l'instant, on obtient l'énoncé suivant, qui résume l'étude que je viens de faire :

Théorème I. *Etant donnée une fonction définie sur un segment $A B$, s'il existe sur $A B$ un nombre fini de points, tels qu'en entourant ces points d'intervalles aussi petits qu'on veut et en retranchant ces intervalles de $A B$, la fonction, sur chacun des segments qui restent, est représentable, elle est représentable sur le segment $A B$.*

36. Nous pouvons déjà, à l'aide de ce théorème, obtenir une catégorie étendue de fonctions discontinues représentables.

Supposons d'abord que $\varphi(x)$ ait des discontinuités en nombre infini, mais que l'ensemble P des points où ces discontinuités ont lieu n'ait qu'un nombre fini de points limites; en adoptant pour les ensembles dérivés les notations de MM. Cantor et Bendixson (*), nous dirons que P' se compose d'un nombre fini de points. Dans ces conditions, si nous entourons ces points de P' d'intervalles très petits que nous retranchons de l'intervalle total, la fonction, sur chacun des segments qui restent, n'a qu'un nombre fini de discontinuités, et est par suite représentable; donc, d'après le théorème I, elle est représentable sur le segment total.

On voit tout de suite comment, en appliquant de nouveau le théorème I, on passera du cas que nous venons d'examiner au cas où il existe un en-

(*) *Acta Mathematica*, Tome II.

semble P'' composé d'un nombre fini de points, puis au cas où il existe pour P des ensembles dérivés d'ordre 3, 4,... n, etc....

Pour voir exactement jusqu'où nous pouvons aller dans cette voie, rappelons brièvement les définitions de M. Cantor relatives aux ensembles dérivés d'ordre supérieur (*). Si un ensemble P est de telle nature que le dérivé d'ordre n, P^n, existe, quel que soit n, il y a des points qui appartiennent à P^n, quel que soit n; on désigne l'ensemble de ces points par P^ω, et l'on convient de dire que P^ω est l'ensemble dérivé de P d'ordre ω. On désigne les ensembles dérivés successifs de P^ω par la notation $P^{\omega+1}$, $P^{\omega+2}$,... $P^{\omega+n}$,...; s'il en existe, quel que soit n, les points qui appartiennent à tous ces ensembles forment un nouvel ensemble qu'on appelle $P^{2\omega}$, etc.; on est ainsi conduit à la notion d'ensemble dérivé d'ordre α, α étant un quelconque des symboles définis par M. Cantor et qu'il appelle nombres de la deuxième classe.

Je ferai remarquer à ce sujet, une fois pour toutes, que nous n'aurons jamais à nous préoccuper des difficultés que peut comporter en soi la notion abstraite de *nombre transfini*, bien que cette expression puisse être employée par nous dans la suite de ce travail. Dans le cas actuel, par exemple, l'ensemble P^α, α étant un nombre déterminé de la deuxième classe de nombres, représente quelque chose de parfaitement déterminé, indépendamment de toute considération abstraite relative aux symboles de M. Cantor; il n'y a donc, dans l'usage que nous pourrons faire de la locution *nombre transfini*, rien de plus que l'emploi d'un langage commode. Il en sera toujours de même dans la suite.

Rappelons encore quelques résultats. Il existe des nombres transfinis de deux espèces différentes; α est un nombre de première ou de seconde espèce, suivant qu'il existe ou non un nombre qui le précède immédiatement. Au point de vue des ensembles dérivés, qui nous intéresse ici, on peut dire que, si α est de première espèce, P^α est l'ensemble dérivé de $P^{\alpha-1}$; si α est de seconde espèce, P^α est par définition l'ensemble des points qui appartiennent à tous les ensembles $P^{\alpha'}$, α' étant un quelconque des nombres inférieurs à α. Si α est de seconde espèce, et si P^α est nul, il existe certainement un nombre α' de première espèce, inférieur à α, et tel que $P^{\alpha'}$ est nul.

Nous pouvons maintenant étendre les résultats obtenus sur les fonctions représentables. Je dis que, en appelant P l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction et α un nombre quelconque de la première ou de la

(*) Voir *Acta*, Tome II.

deuxième classe, s'il est démontré que toute fonction pour laquelle $P^\alpha = 0$ est représentable, une fonction pour laquelle P^α se compose d'un nombre fini de points est aussi représentable. En effet, j'entoure les points de P^α d'intervalles très petits que je retranche de l'intervalle total; dans chaque portion qui reste, on a $P^\alpha = 0$, la fonction est donc représentable dans cette portion; comme les intervalles retranchés peuvent être pris aussi petits qu'on veut, la fonction, d'après le théorème I, est représentable sur tout l'intervalle donné.

Nous savons déjà qu'une fonction est représentable si, en appelant α le plus petit nombre pour lequel $P^\alpha = 0$, on a: $\alpha = 1$, ou $\alpha = 2$. Le théorème qui précède montre que le résultat subsiste si l'on a $\alpha = 3, 4, \dots n, \dots \omega, \omega + 1, \dots 2\omega, \dots$ etc., de sorte qu'on peut énoncer le résultat suivant:

Toute fonction pour laquelle P^α est nul, α étant un nombre quelconque de la première ou de la deuxième classe, est représentable.

Il est bon de faire voir qu'il existe effectivement des fonctions représentables pour lesquelles P^α existe, α étant un nombre donné arbitrairement. Il suffit de rappeler qu'on sait former un ensemble P pour lequel P^α existe (*); si on prend une fonction égale à 1 aux points de P, à 0 en tous les autres points, les points de discontinuité de cette fonction sont les points de P'; on a donc là un exemple d'une fonction représentable pour laquelle P^α existe.

On peut dire que les fonctions représentables que nous connaissons jusqu'à présent sont celles pour lesquelles *l'ensemble P des points de discontinuité a son dérivé P' dénombrable,* autrement dit est un *ensemble réductible.*

37. Nous allons chercher maintenant à construire des exemples de fonctions représentables pour lesquelles l'ensemble des points de discontinuité ne sera pas dénombrable. J'aurai besoin de rappeler d'abord quelques résultats sur les *ensembles parfaits linéaires qui ne sont denses dans aucun intervalle.*

Soit donc P un *ensemble parfait non dense par rapport au continu;* cela veut dire que, dans toute portion de segment, on peut trouver une autre portion qui ne contienne aucun point de P. Soit M un point ne faisant pas partie de P; il n'est pas non plus point-limite de P, puisque P est parfait; donc on peut trouver un intervalle contenant M à son intérieur, et dont aucun point *intérieur* ne fait partie de P; si les points extrêmes de cet intervalle ne sont pas des points de P, on peut reculer les limites de l'intervalle d'une longueur finie; on voit donc qu'on peut attribuer un sens précis à l'expression:

(*) Voir Cantor, *Acta Mathematica*, Tome II, page 360.

prendre l'intervalle précédent aussi grand que possible; ce sera déterminer un intervalle AB contenant M, et ne contenant aucun point de P si ce n'est A et B, qui devront être des points de cet ensemble.

On reconnaît ainsi que l'ensemble parfait P peut être défini de la manière suivante: Il existe, sur le segment de droite qu'on considère, une infinité dénombrable d'intervalles $A_1 B_1$, $A_2 B_2, \ldots A_n B_n, \ldots$ tels que deux quelconques de ces intervalles n'ont aucun point commun, et tels que toute portion de droite contient un de ces intervalles ou fait partie de l'un deux; l'ensemble complémentaire de P est constitué par les points *intérieurs* aux intervalles; l'ensemble P comprend des points de deux espèces distinctes: en premier lieu, les points $A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots B_1, B_2, \ldots B_n, \ldots$ qui sont les extrémités des intervalles précédents, et qui forment un ensemble dénombrable; en second lieu, l'ensemble non dénombrable des points C tels que chacun d'eux est extérieur à tous les intervalles $A_n B_n$.

Etant donné un *ensemble parfait non dense,* nous imaginerons que les intervalles $A_n B_n$ dont nous venons de rappeler la définition, et qu'on peut appeler intervalles *contigus* à P, sont rangés dans un ordre déterminé, par exemple dans un ordre tel que chacun d'eux ne surpasse en longueur aucun de ceux qui le précèdent. Concevons que, de l'intervalle total, on retranche successivement $A_1 B_1$, puis $A_2 B_2$, $A_3 B_3$, etc....; au bout de n opérations, l'intervalle total se trouve partagé en intervalles partiels, les uns retranchés, ce sont précisément $A_1 B_1, A_2 B_2, \ldots A_n B_n$, les autres conservés; soit λ_n la plus grande longueur d'un segment conservé; je dis que, si n croît indéfiniment, λ_n tend vers 0; si en effet cela n'était pas, λ_n aurait une limite positive λ; on démontrerait l'existence d'une portion de droite de longueur λ dans laquelle il n'y aurait jamais de segments à retrancher, par suite dont tous les points feraient partie de P; cela est impossible, puisque P est *non dense.*

Remarquons aussi que, si l'on effectue l'opération précédente, les points de P de la deuxième espèce sont ceux qui se trouvent, quel que soit n, à *l'intérieur* d'un intervalle conservé.

Comme type d'ensemble parfait non dense, citons celui qui est obtenu comme il suit: on retranche de l'intervalle (0, 1) l'intervalle $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, puis on opère sur chacun des deux intervalles restants comme on vient d'opérer sur (0, 1), c'est-à-dire qu'on retranche $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ et $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{9}, \frac{2}{3}+\frac{2}{9}\right)$, et d'une manière générale, après un nombre quelconque d'opérations analogues, on opère sur chacun des intervalles conservés comme on a opéré sur (0, 1). Tous les points de l'ensemble P ainsi défini sont ceux qui correspondent à une valeur de x donnée par la formule :

$$x = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \frac{c_3}{3^3} + \cdots + \frac{c_n}{3^n} + \cdots$$

le nombre des fractions étant fini ou infini, et chaque quantité c pouvant prendre l'une des valeurs 0 ou 2.

38. Ces notions étant rappelées, considérons un ensemble parfait non dense P situé sur un segment AB, en supposant, pour plus de commodité, que A et B appartiennent à cet ensemble. Imaginons une fonction définie sur AB et satisfaisant aux deux conditions suivantes : d'une part, les discontinuités n'ont lieu qu'en des points faisant partie de P ; d'autre part, la fonction, considérée sur l'ensemble P, est continue. Un exemple de ce cas nous sera fourni par la fonction qui est égale à 1 aux points de P, à 0 aux autres points. Je me propose de montrer qu'une fonction qui satisfait aux deux conditions précédentes est représentable. Cela résultera, comme cas particulier, du théorème général suivant :

Theorème II. *S'il existe un ensemble parfait non dense P sur lequel la fonction est continue, et si, sur tout segment contigu à P, la fonction est représentable, elle est représentable sur l'intervalle total.*

Je ferai une remarque générale très simple au sujet de la notion de fonction continue relativement à un ensemble parfait non dense. Soit $\varphi(x)$ une telle fonction, que nous supposons continue sur P. Je dis qu'on peut trouver une fonction $\psi(x)$, définie en tous les points de l'intervalle, égale à $\varphi(x)$ aux points de P, et partout continue.

Il s'agit de définir $\psi(x)$ aux points qui n'appartiennent pas à P, c'est-à dire aux points qui sont situés *à l'intérieur* des segments $A_n B_n$ contigus à P. Il suffira par exemple d'adopter la loi suivante : dans chaque segment $A_n B_n$, on fera varier linéairement $\psi(x)$ depuis $\psi(A_n)$ jusqu'à $\psi(B_n)$. Je dis que, dans ces conditions, la fonction $\psi(x)$ est continue ; la chose est évidente pour les points qui ne font pas partie de P ; soit maintenant $M[x_0]$ un point de P. D'après l'hypothèse faite sur $\varphi(x)$, à tout nombre ε correspond un nombre α tel que, en tous les points de P compris dans l'intervalle $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$, on a :

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon.$$

Diminuons, s'il y a lieu, cet intervalle, de manière que ses points extrêmes fassent partie de P. Si alors nous considérons dans cet intervalle un point H

quelconque, il se trouve sur un segment $A_n B_n$ *contigu* à P, et $\psi(H)$ est compris entre $\psi(A_n)$ et $\psi(B_n)$, c'est-à-dire entre $\varphi(A_n)$ et $\varphi(B_n)$. On a donc, pour tous les points de l'intervalle:

$$|\psi(x) - \psi(x_0)| < \varepsilon,$$

ce qui exprime la continuité de $\psi(x)$.

Reprenons maintenant la fonction assujettie aux conditions du théorème II qu'il s'agit d'établir; soit $\varphi(x)$ cette fonction; nous pouvons, d'après ce qui précède, définir une fonction $\psi(x)$ continue partout, et égale à $\varphi(x)$ aux points de P. Posons alors:

$$\varphi_1(x) = \varphi(x) - \psi(x).$$

La fonction $\varphi_1(x)$ sera dans les mêmes conditions que $\varphi(x)$; car, puisqu'elle

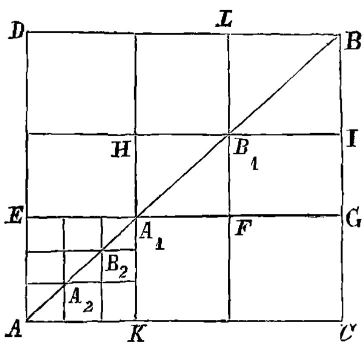

Fig. 10.

ne diffère de φ que d'une fonction continue, elle est représentable sur tout segment *contigu* à P; mais elle présente cette particularité d'avoir la valeur 0 en tous les points de P.

Le théorème II sera démontré pour $\varphi(x)$, si nous le démontrons pour $\varphi_1(x)$, qui n'en diffère que par une fonction continue; le fait que φ_1 est nul aux points de P rendra plus claires nos démonstrations.

39. Je me place donc dans les hypothèses suivantes: Sur $A B$ on a un ensemble parfait non dense P, dont A et B font partie; on a une fonction $\varphi(x)$ égale à 0 aux points de P, et qui, sur chacun des segments $A_n B_n$ *contigus* à P, est représentable; il faut montrer que $\varphi(x)$, considérée sur $A B$, est représentable.

Problème I. Soit $A C B D$ le carré où il s'agit de définir $f(x, y)$ satisfaisant aux conditions du problème I (fig. 10). La fonction a, en A et B, la valeur 0; je lui attribue la valeur 0 sur tout le périmètre $A C B D$.

Je suppose, comme plus haut, que les segments $A_n B_n$ *contigus* à P sont rangés dans un ordre déterminé; soit $A_1 B_1$ le premier d'entre eux. Menons par A_1 et B_1 les parallèles à $0x$ et à $0y$; nous divisons ainsi le carré donné en plusieurs aires partielles, que je distingue en trois catégories:

1.° Le carré $A_1 F B_1 H$, qui a pour diagonale $A_1 B_1$; sur le périmètre de ce carré je donne à la fonction la valeur 0, et je définis, à l'intérieur, une fonction continue par rapport à chaque variable, ce qui est possible, puisque d'après l'hypothèse la fonction est représentable sur $A_1 B_1$.

2.° Les carrés $A K A_1 E$, $B_1 I B L$, qui ont pour diagonales $A A_1$ et $B_1 B$; pour le moment, je me borne à définir la fonction sur le contour de chacun de ces carrés: je lui attribue la valeur 0.

3.° Il reste les deux aires $D E A_1 H B_1 L$, $A_1 K C I B_1 F$; sur chacun des deux contours de ces aires, la fonction a la valeur 0; je lui attribue la valeur 0 en tous les points intérieurs.

Cette première opération étant effectuée, la fonction se trouve définie partout, sauf à l'intérieur des carrés qui ont pour diagonales $A A_1$ et $B_1 B$; et on reconnaît que chacun de ces carrés se trouve exactement dans les mêmes conditions que le carré primitif $A C B D$.

Supposons que le second segment *contigu* à P, $A_2 B_2$, se trouve sur la portion $A A_1$. On répétera l'opération précédente, $A_2 B_2$ jouant dans le carré de diagonale $A A_1$ le même rôle que $A_1 B_1$ dans le carré $A C B D$. On continuera ensuite de la même manière, en opérant successivement sur $A_3 B_3, \ldots A_n B_n, \ldots$ Quand on a enlevé de $A B$ les segments $A_1 B_1$, $A_2 B_2, \ldots A_n B_n$, il reste sur $A B$ des segments conservés; les seuls points où la fonction ne se trouve pas définie sont ceux qui sont à l'intérieur d'un carré ayant pour diagonale un segment conservé. Il résulte de là qu'en répétant l'opération précèdente indéfiniment, la fonction se trouvera définie en tous les points qui ne se trouvent pas sur la diagonale $A B$; en effet, la distance d'un tel point à $A B$ est un nombre positif λ, et il existe un entier n tel que, après n opérations, la plus grande longueur des segments conservés est inférieure à 2λ; à ce moment, il est certain que la fonction se trouve définie au point considéré. D'autre part la fonction est donnée sur $A B$; elle est donc définie dans toute la région $A C B D$.

Démontrons maintenant que les conditions de continuité sont remplies. La chose est évidente pour tous les points situés en dehors de $A B$, car la fonction est définie en un quelconque de ces points au bout d'un nombre fini d'opérations; et d'après la construction, elle est continue par rapport a x et par rapport à y. Pour un point de AB ne faisant pas partie de P, le fait est aussi certain, car un tel point se trouve à l'intérieur d'un carré ayant pour diagonale un segment $A_n B_n$.

Il reste à étudier les points de P. Remarquons que, d'après la construction, les seuls points où la fonction n'a pas la valeur 0 sont ceux qui sont à l'intérieur d'un carré ayant pour diagonale un segment $A_n B_n$. Si donc M est un point de P, et si l'on mène par M les parallèles à $0x$ et à $0y$, la fonction a, en tous les points de ces droites, la valeur 0; il y a donc continuité en M par rapport à x et à y, ce qui achève de démontrer la proposition.

On peut résumer la construction de $f(x, y)$ dans le carré $ACBD$ de la manière suivante: on prend les carrés C_1, $C_2, \ldots C_n, \ldots$ qui ont pour diagonales les segments $A_1 B_1$, $A_2 B_2, \ldots A_n B_n, \ldots$; sur les périmètres de ces carrés, on pose $f = 0$, et on définit f à l'intérieur de chacun d'eux en observant les conditions de continuité; enfin, en tous les autres points du carré $ACBD$, on pose $f = 0$.

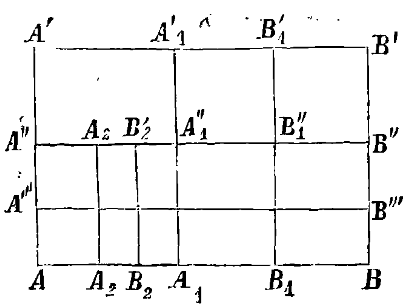

Fig. 11.

Problème II. Soit (fig. 11) le rectangle $ABA'B'$: $\alpha \leq x \leq \beta$, $0 \leq y \leq y_0$. Imaginons qu'on trace toutes les parallèles à $0y$ menées par les points de P; sur chacune de ces droites, j'attribue à la fonction la valeur 0, ainsi que sur $A'B'$; de cette manière, il y aura certainement, en tout point de P, continuité par rapport à y.

Considérons le rectangle $A_1 B_1 A'_1 B'_1$, correspondant au segment $A_1 B_1$; puisque, par hypothèse, la fonction donnée $\varphi(x)$ est représentable sur $A_1 B_1$, je peux, dans ce rectangle, définir $f(x, y)$ continue par rapport à (x, y) en tout point, sauf en ceux de $A_1 B_1$, où il y aura seulement continuité par rapport à y.

Traçons maintenant la droite $A'' B'$: $y = \frac{y_0}{2}$; si nous considérons le rectangle $A' B' A'' B''$, la fonction se trouve actuellement définie, d'une part dans la portion $A'_1 B'_1 A''_1 B''_1$, d'autre part sur toutes les parallèles à $0y$ dont le point d'intersection avec AB est un point de P; j'achève la définition de $f(x, y)$ dans ce rectangle, en donnant à f la valeur 0 en tous les points où elle n'est pas encore définie; on voit alors que f aura la valeur 0 en tous les points de chacun des deux rectangles $A' A'_1 A'' A''_1$, $B'_1 B' B''_1 B''$; et, dans tout le rectangle $A' B' A'' B''$, ce sera une fonction continue.

Prenons maintenant le segment $A_2 B_2$, supposons qu'il soit sur $A A_1$, par exemple; considérons le rectangle $A_2 B_2 A'_2 B'_2$, limité supérieurement à la droite : $y = \frac{y_0}{2}$; dans ce rectangle, je peux définir $f(x, y)$, puisque la fonction $\varphi(x)$ est représentable sur $A_2 B_2$; je trace ensuite la droite $A''' B''$: $y = \frac{y_0}{4}$, et j'achève la définition de $f(x, y)$ dans le rectangle $A'' B'' A''' B'''$, en donnant à f la valeur 0 en tous les points où elle ne se trouve pas encore définie. On voit aisément comment le procédé de définition se généralise pour ce qui concerne les segments $A_3 B_3, \ldots, A_n B_n, \ldots$ En tout point où l'on a $y > 0$, la fonction se trouve définie au bout d'un nombre fini d'opérations, et par conséquent, d'après la construction de f, il y a continuité en ce point par rapport à (x, y); nous avons remarqué en commençant qu'aux points de P il y avait continuité par rapport à y; il reste à considérer les points de AB qui ne font pas partie de P: chacun d'eux est intérieur à un segment $A_n B_n$; d'après la construction précédente, il y a encore, en un tel point, continuité par rapport à y.

En résumé, le théorème II est établi d'une manière complète; on voit que c'est pour une simple raison de commodité que j'ai ramené le cas général à celui de la fonction qui est nulle en tous les points de P; on aurait pu faire la démonstration directement pour le cas général.

40. Appelons toujours P l'ensemble des points de discontinuité de la fonction donnée $\varphi(x)$; je supposerai toujours, dans ce qui suit, que P est un ensemble fermé; si cela n'était pas, il suffirait d'adjoindre à P ses points limites; autrement dit, on remplacerait la considération de P par la considération de l'ensemble formé par la réunion de P et de P'.

Il résulte des raisonnements de M. Bendixson exposés dans les *Acta Mathematica* (Tome II) que, si P est un ensemble *fermé non dense*, il peut se présenter deux cas :

1.° P est dénombrable; alors il existe un nombre α de la première ou de la deuxième classe, tel que $P^\alpha = 0$.

2.° P n'est pas dénombrable; la condition précédente n'est remplie pour aucun nombre α; mais il existe un nombre α tel que:

$$P^\alpha = P^{\alpha+1} = \cdots$$

On est conduit à dire qu'il existe dans tous les cas un ensemble P^Ω, dérivé d'ordre Ω de P, Ω représentant le premier nombre transfini de la troisième classe de nombres; dans le premier cas, on a $P^\Omega = 0$; dans le second:

$$P^\alpha = P^{\alpha+1} = \cdots = P^\Omega.$$

L'équation $P^\Omega = 0$ caractérise les ensembles pour lesquels P est dénombrable; on dit encore dans ce cas que P est *réductible.*

Dans le second cas, P^Ω est un ensemble parfait, et P est constitué de la manière suivante: dans chaque intervalle *contigu à* P^Ω, P forme un ensemble réductible (*).

Nous avons appris jusqu'ici à former des fonctions discontinues représentables de deux sortes: celles pour lesquelles P est *réductible*, et celles pour lesquelles P est *parfait*, la fonction étant *continue sur* P; nous pouvons tout de suite en former une troisième catégorie, comprenant les deux premières. Supposons que P soit un ensemble non dense, et qu'il existe un dérivé d'ordre Ω, P^Ω; nous prendrons une fonction *continue sur* P^Ω, et, dans chaque intervalle *contigu à* P^Ω, nous définirons la fonction de manière qu'il y ait des discontinuités aux points de P (qui forment, dans un tel intervalle, un ensemble réductible). Le théorème II montre que la fonction ainsi définie sera représentable, car elle est continue sur l'ensemble parfait P^Ω, et elle est représentable sur tout segment contigu à P^Ω.

41. Nous sommes conduits à une extension des remarques faites au § 37 sur les ensembles. Etant donné sur AB un ensemble P *fermé* et *non dense*, il existe sur AB des intervalles parfaitement déterminés, dont les points extrêmes sont des points de P, et dont aucun point intérieur ne fait partie de P; deux quelconques de ces segments n'empiètent pas l'un sur l'autre, mais ils peuvent avoir une extrémité commune; comme cas particulier, on voit que si cette dernière condition n'est jamais remplie, l'ensemble P est

(*) Les démonstrations de ces théorèmes se trouvent dans le Mémoire de M. Bendixson (*Acta*, T. II). J'aurai d'ailleurs occasion plus loin (§ 47), d'établir sur les ensembles des théorèmes qui comprendront ceux-ci comme cas particuliers.

parfait; au contraire, si un quelconque des segments en touche deux autres par ses points extrêmes, l'ensemble P est réductible.

Réciproquement, si, par un moyen quelconque, on arrive à définir sur une droite une infinité dénombrable d'intervalles, dont deux quelconques n'empiètent jamais l'un sur l'autre, et tels que, dans toute portion de la droite, il y ait des points appartenant à ces segments, l'ensemble P formé par leurs extrémités et par les points limites de ces extrémités est un ensemble fermé non dense. Nous dirons encore que chacun de ces intervalles est *contigu à P*.

Le dernier résultat obtenu sur les fonctions représentables est celui du § 40, qu'on peut énoncer ainsi : S'il existe un ensemble P fermé et non dense, tel que la fonction est continue sur P^Ω et continue dans tout segment *intérieur* à un segment contigu à P, elle est représentable.

Ce résultat n'est qu'un cas particulier d'un théorème général, qui sera une combinaison des théorèmes I et II et qui résumera tout ce qui précède.

Généralisons d'abord les résultats obtenus au § 36; nous y avons reconnu que si, en dehors de tout point d'un ensemble P pour lequel $P^\alpha = 0$, la fonction est continue, elle est représentable. Cet énoncé peut être considéré comme cas particulier du suivant: *Si, dans tout segment contigu à P* (en supposant P réductible, c'est-à-dire $P^\alpha = 0$ pour une certaine valeur de α), *la fonction est représentable, elle est représentable dans tout le segment.* La démonstration est identique à celle du § 36; le théorème a déjà été démontré pour le cas de $\alpha = 1$, $\alpha = 2$; on a, dans ces cas, les propositions des § 33 et 34. Il suffit de montrer que si le théorème est vrai quand P est de telle nature que $P^\alpha = 0$, il est encore vrai si P^α comprend un nombre fini de points; en effet, si on entoure ces points d'intervalles très petits qu'on retranche de l'intervalle total, la fonction, dans chaque intervalle restant, où l'on a $P^\alpha = 0$, est représentable; le théorème I montre alors qu'elle est représentable sur tout le segment.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème général suivant:

Théorème III. *S'il existe un ensemble P, fermé et non dense, tel que la fonction est continue sur P^Ω et est représentable sur tout segment contigu à P, elle est représentable sur le segment total.*

En effet, dans tout intervalle contigu à P^Ω, la fonction est représentable, d'après ce que nous venons de voir; le théorème II nous montre qu'elle l'est sur l'intervalle total.

Pour que le théorème III résume tout ce qui a été démontré jusqu'ici, nous conviendrons de faire rentrer le cas de $P^\Omega = 0$ dans celui où, P^Ω existant effectivement, la fonction est continue sur cet ensemble.

42. Grâce au théorème III, nous allons pouvoir donner une extension considérable aux résultats acquis. Supposons que l'ensemble des points de discontinuité P (complété, s'il y a lieu, par ses points-limites) soit non dense, contienne un ensemble P^{Ω}, mais qu'il existe sur P^{Ω} un nombre *fini* de points qui soient points de discontinuité *par rapport à* P^{Ω}; le théorème I suffit pour montrer que la fonction est représentable, car en isolant ces points de discontinuité par de petits intervalles, la fonction est représentable sur chaque portion restante. Nous avons donc là un nouvel exemple de fonction représentable que nous n'avions pas obtenu jusqu'ici; mais on peut tout de suite donner à cette remarque toute sa portée, en introduisant d'une manière systématique la considération des points de discontinuité par rapport à P^{Ω}.

J'appellerai d'une manière générale P_1 l'ensemble des points de P^{Ω} qui sont points de discontinuité par rapport à P^{Ω}, ou qui sont points limites de points de discontinuité, de telle sorte que P_1 sera essentiellement fermé. Nous venons de voir que si P_1 est fini, la fonction est représentable. D'une manière plus générale, supposons que P_1 soit, ou bien un ensemble réductible, ou bien un ensemble non réductible, mais tel que, sur P_1^{Ω} (dérivé d'ordre Ω de P_1) la fonction soit continue. Nous pouvons, dans ces conditions, appliquer le théorème III, en faisant jouer à l'ensemble P_1 que nous venons de définir le rôle de l'ensemble P dont il est parlé dans ce théorème; en effet, P_1, d'après sa définition même, est d'une nature telle que, dans tout intervalle *contigu à* P_1, la fonction est représentable, puisque, si dans cet intervalle il existe une portion de P^{Ω}, il y a, en chaque point de P^{Ω} *intérieur* à l'intervalle, continuité par rapport à P^{Ω}. On reconnaît ainsi que le théorème III est applicable à l'ensemble P_1; il en résulte que la fonction est représentable.

Montrons comment on pourra effectivement former des exemples de fonctions pour lesquelles P_1 existe. Prenons un point A, juxtaposons des segments qui auront ce point pour limite, soient $A_1 A_2$, $A_2 A_3, \ldots, A_{n-1} A_n, \ldots$; dans chacun des segments de rang impair, je placerai un ensemble parfait, où je donnerai à φ la valeur 1, tandis que je donnerai à φ la valeur 0 aux autres points du segment; au contraire, dans chacun des segments de rang pair, je donnerai à φ la valeur 0 aux points d'un certain ensemble parfait, et la valeur 1 aux autres points; en chacun des points A_1, $A_2, \ldots A_n, \ldots, A$, je donne arbitrairement à la fonction l'une des valeurs 0 ou 1. On voit que, dans un tel exemple, il y a pour la fonction des points de discontinuité formant un ensemble parfait P, identique à P^{Ω}; de plus, il y a des points de P^{Ω} qui sont *points de discontinuité par rapport à* P^{Ω}: ce sont les points A_1, A_2,... A_n,..., A; dans le cas actuel, P_1 se compose donc d'une infinité de points ayant un point limite.

On conçoit tout de suite comment, en partant des mêmes principes, on pourra construire des exemples où P_1 aura des ensembles dérivés jusqu'à l'ordre 2, 3,... n,... ω, $\omega+1$,... 2ω,... α,..., en d'autres termes, sera un ensemble réductible quelconque. Enfin, pour former un exemple où P_1^{Ω} existe, prenons *a priori* un ensemble parfait, qui sera P_1^{Ω}; dans chacun des intervalles *contigus à* P_1^{Ω}, plaçons une fonction de la catégorie précédente, en ayant soin que les points extrêmes de ces intervalles soient effectivement des points limites de points de discontinuité relatifs à P^{Ω}; de plus, prenons la fonction continue sur P_1^{Ω}: on aura ainsi une fonction représentable.

Il est utile de remarquer que, dans tous ces exemples, l'ensemble P_1 est *non dense par rapport à* P^{Ω}.

43. Les notions nouvelles introduites par la considération de P_1 se prêtent à une généralisation immédiate. Etant donnée une fonction $\varphi(x)$, nous appellerons P_2 l'ensemble des points de P_1^{Ω} qui sont, *par rapport à* P_1^{Ω}, points de discontinuité ou points limites de tels points. Nous définirons ainsi successivement P_2, P_3,... P_n,..., chacun de ces ensembles se déduisant du précèdent exactement comme P_1 se déduit de P. Nous serons conduit à dire que, si P_{n-1} est réductible, ou bien si P_{n-1}^{Ω}, son dérivé d'ordre Ω, existe, mais si la fonction est continue sur P_{n-1}^{Ω}, on a $P_n = 0$.

L'application du théorème III montre que toute fonction pour laquelle un nombre entier n existe, tel que $P_n = 0$, est représentable. On reconnaîtra d'ailleurs facilement qu'il existe des fonctions pour lesquelles P_n comprend effectivement des points.

Je conviendrai d'appeler fonctions représentables d'ordre n, celles pour lesquelles P_{n-1} existe, tandis que P_n est nul. Par exemple, les fonctions dont nous nous sommes occupés en premier lieu, celles pour lesquelles P est réductible, ou bien pour lesquelles P^{Ω} existe, la fonction étant continue sur cet ensemble, seront des fonctions d'ordre 1.

44. Imaginons maintenant que la formation des ensembles P_1, P_2,... P_n,... puisse se prolonger indéfiniment, sans qu'on rencontre jamais d'ensemble nul. On est conduit à introduire une notion analogue à celle que M. Cantor a introduite dans la considération des ensembles dérivés, sous le nom d'ensemble dérivé d'ordre ω.

Nous avons une suite d'ensembles fermés, tels que:

$$P_1 > P_2 > \cdots > P_n > \cdots$$

j'exprime, par cette suite d'inégalités, que chaque ensemble est tout entier contenu dans le précédent. Je dis qu'il existe au moins un point appartenant à tous les P_n; en effet, si on décompose le segment donné en plusieurs portions, il y a au moins un de ces segments partiels dans lequel P_n renferme des points, quel que soit n; prenons l'un d'eux, décomposons-le à son tour, et répétons cette opération indéfiniment en faisant tendre vers 0 la dimension du segment, nous avons ainsi une suite de segments dont chacun est contenu dans le précédent et contient des points de P_n, quel que soit n; il y a un point intérieur à tous ces segments, il est donc point limite de P_n, et par suite fait partie de P_n, quel que soit n.

Pour conserver les analogies avec la théorie des ensembles dérivés, nous appellerons P_ω l'ensemble des points qui appartiennent à tous les ensembles P_n; P_ω est un ensemble fermé.

On peut former une fonction pour lequelle P_ω se composera d'un point A donné d'avance; je prendrai une suite de points $A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots$ tendant vers A, et dans le segment $A_n A_{n+1}$ je placerai une fonction d'ordre n. Dans ces conditions, il existe, quel que soit n, un ensemble P_n, qui comprend toujours le point A. Cette fonction sera évidemment représentable.

45. On définira de même l'ensemble $P_{\omega+1}$, déduit de P_ω comme P_1 de P, puis les ensembles $P_{\omega+2}, \ldots P_{\omega+n}, \ldots P_{2\omega}, \ldots P_\alpha, \ldots$ D'une manière générale, soit α un nombre de la première ou de la deuxième classe de nombres. Si α est de première espèce, c'est-à-dire si $\alpha - 1$ existe, P_α sera l'ensemble des *points de discontinuité de* $P_{\alpha-1}^{\Omega}$ *par rapport à* $P_{\alpha-1}^{\Omega}$ (complété par ses points limites); dans le cas où $P_{\alpha-1}^{\Omega}$ n'existe pas, ou dans le cas où la fonction est continue sur cet ensemble, nous dirons que P_α est nul. Si α est de seconde espèce, P_α est par définition l'ensemble de tous les points communs à tous les ensembles $P_{\alpha'}$, α' représentant un nombre quelconque inférieur à α; si l'on a $P_\alpha = 0$, il existe certainement un nombre α' inférieur à α, et de première espèce, pour lequel on a $P_{\alpha'} = 0$.

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition suivante: *S'il est démontré qu'une fonction pour laquelle $P_{\alpha-1}$ est nul est représentable, la chose est encore vraie d'une fonction pour laquelle P_α est nul.* En effet, puisque P_α est nul, c'est que, ou bien $P_{\alpha-1}$ est réductible, ou bien $P_{\alpha-1}^{\Omega}$ existe, mais la fonction est continue sur cet ensemble; de plus, si on considère un intervalle contigu à $P_{\alpha-1}$, comme il n'y a aucun point de $P_{\alpha-1}$ à l'intérieur de cet intervalle, la fonction, d'après l'hypothèse, est représentable dans tout segment contenu à l'intérieur de cet intervalle, et par suite dans cet intervalle lui-même; on peut donc appliquer le théorème III, ce qui montre que la fonction est représentable encore dans le cas où P_α est nul.

On conclut de là que, en formant pour une fonction $\varphi(x)$ la suite d'ensembles :

$$P,\ P_1,\ P_2,\ldots\ P_n,\ldots,\ P_\omega,\ldots\ P_{2\omega},\ldots\ P_\alpha,\ldots$$

si, pour un certain nombre α *de la première ou de la deuxième classe, on a* $P_\alpha = 0$, *on peut affirmer que la fonction est représentable.*

46. Nous avons, dans ce qui précède, obtenu une première catégorie de résultats dans la voie que nous nous étions tracée, en ce sens que nous avons démontré, pour certaines fonctions, la possibilité d'être représentées dans les conditions des problèmes I et II. Notre but, est, je le rappelle, de démontrer que toute fonction qui est *ponctuellement discontinue relativement à tout ensemble parfait*, est représentable. Avant d'aborder le cas général, je commencerai par traiter complètement un cas particulier; on pourra se rendre compte d'une manière nette sur ce cas particulier de la méthode que j'emploierai et qui est fondée sur la considération des ensembles à indices inférieurs, définis précédemment.

Ce cas particulier est le suivant: on considère une fonction $\varphi(x)$ qui ne peut prendre que l'une des deux valeurs 0 ou 1. Il s'agit de savoir quelles sont les fonctions de cette nature qui sont représentables, de sorte que la question pourrait se poser dans les termes suivants : Décomposer le continu en deux ensembles, de telle sorte qu'en attribuant à une fonction la valeur 0 aux points de l'un, la valeur 1 aux points de l'autre, cette fonction soit représentable.

D'après la nature même de la fonction $\varphi(x)$, l'oscillation en chaque point (par rapport au continu, ou par rapport à un ensemble parfait quelconque), ne peut être que l'un des deux nombres 0 ou 1; si, dans un intervalle continu, la fonction est continue, elle est nécessairement constante dans cet intervalle.

Une première condition que doit remplir $\varphi(x)$ est d'être ponctuellement discontinue; dans le cas général, cela veut dire que l'ensemble des points où l'oscillation est $\geqq \sigma$ est *non dense*, σ étant un nombre *positif* quelconque; dans le cas actuel, cela veut dire que l'ensemble de *tous les points de discontinuité* est non dense. On reconnaît, par exemple, qu'une fonction égale à 0 pour x rationnel, à 1 pour x irrationnel, n'est pas représentable, car en tout point l'oscillation est égale à 1: la fonction est totalement discontinue.

Supposons donc que $\varphi(x)$ remplisse cette première condition, et soit P l'ensemble des points de discontinuité. Formons, s'il y a lieu, P^{Ω}, et soit P_1 l'ensemble des points de P^{Ω} qui sont *points de discontinuité par rapport à* P^{Ω}. L'ensemble P_1, comme P, est essentiellement fermé, car en chacun de ses points l'oscillation par rapport à P^{Ω} est égale à 1. Si, dans un certain intervalle, P_1 est *dense par rapport à* P^{Ω} (par suite coïncide avec P^{Ω}), la fonction n'est pas représentable, car alors elle est *totalement discontinue relativement à* P^{Ω}, puisque, dans l'intervalle considéré, en chaque point de P^{Ω} l'*oscillation par rapport à* P^{Ω} est 1. Construisons un exemple où cela a lieu: pour cela, prenons un ensemble parfait non dense P; les points de P sont de trois sortes: 1.° les points A, extrémités gauches des intervalles contigus à P; 2.° les points B, extrémités droites des mêmes intervalles; 3.° les points C, points extérieurs à tous ces intervalles; chaque point de l'ensemble, qu'il soit A, B, ou C, est point limite de points des trois catégories; nous attribuons à $\varphi(x)$ la valeur 0 en tout point, sauf aux points A où nous lui attribuons la valeur 1; dans ces conditions, la fonction est discontinue en tous les points de P, et de plus, si on considère cet ensemble, chaque point de P est point de discontinuité par rapport à P, l'oscillation étant 1; la fonction est donc *totalement discontinue sur* P.

On voit donc que, pour que $\varphi(x)$ soit représentable, il est nécessaire que P_1 soit *non dense par rapport à* P^{Ω}. D'une manière générale, appelons, comme plus haut, $P_{\alpha+1}$ l'ensemble des points de discontinuité de P_{α}^{Ω} par rapport à P_{α}^{Ω}; nous reconnaissons que si la fonction est ponctuellement discontinue relativement à tout ensemble parfait, $P_{\alpha+1}$ est *non dense par rapport à* P_{α}^{Ω}. Bien entendu, si α est un nombre de seconde espèce, P_{α} se compose des points qui appartiennent à tous les ensembles $P_{\alpha'}$ dont l'indice est inférieur à α, de sorte qu'on peut écrire:

$$P_{\alpha} = \underset{\alpha'<\alpha}{D} [\ldots, P_{\alpha'}, \ldots].$$

47. Je vais démontrer que, quelle que soit la fonction $\varphi(x)$ (égale à 0 ou 1) qu'on considère, il existe un nombre α de la première ou de la deuxième classe de nombres pour lequel on a $P_{\alpha} = P_{\alpha+1}$. Les raisonnements que je ferai sont imités de ceux que M. Bendixson a employés pour démontrer ses théorèmes relatifs aux ensembles dérivés d'ordre quelconque (*Acta*, Tome II).

D'une manière générale, supposons qu'on ait des ensembles correspondants aux différents nombres de la première et de la deuxième classe,

$$P_1,\ P_2, \ldots\ P_n, \ldots\ P_\omega, \ldots\ P_{2\omega}, \ldots\ P_\alpha, \ldots$$

satisfaisants aux conditions suivantes:

1.° Chacun de ces ensembles est fermé.

2.° Si $\alpha_1 < \alpha_2$, tous les points de P_{α_2} appartiennent à P_{α_1}.

3.° Si un ensemble ne comprend qu'un nombre fini de points, l'ensemble suivant est nul.

Ces conditions, qui se trouvent évidemment remplies par les ensembles dérivés d'un ensemble donné, suffisent pour qu'on puisse appliquer les raisonnements de M. Bendixson, que je reprends ici, avec quelques modifications de détail.

Il est d'abord évident que deux cas seulement peuvent se présenter: ou bien il existe un nombre α tel que $P_\alpha = 0$, et alors, tous les ensembles qui suivent sont également nuls; ou bien, quel que soit α pris dans la deuxième classe de nombres, P_α contient des points. Dans le premier cas, on a évidemment $P_\alpha = P_{\alpha+1}$; il suffit donc d'examiner le second cas.

Nous supposons donc que, dans le segment AB, l'ensemble P_α renferme des points, quel que soit α; on en conclut aisément, par un procédé que j'ai déjà eu l'occasion d'employer, qu'il existe dans AB au moins un point M possédant la propriété suivante: dans tout intervalle contenant M à son intérieur, si petit qu'il soit, l'ensemble P_α renferme des points, quel que soit α; ce point M fait donc partie de tous les P_α, puisque ce sont des ensembles fermés. Nous avons ainsi démontré qu'il existe des points appartenant à tous les P_α; il est naturel de désigner l'ensemble de ces points par P_Ω; nous savons déjà que P_Ω comprend un point au moins.

Je vais démontrer que P_Ω ne contient pas de points isolés. Remarquons d'abord que si un intervalle ne contient pas de points de P_Ω (en comptant les points extrêmes), il existe un nombre α tel que $P_\alpha = 0$ dans l'intervalle; en effet, si cela n'avait lieu pour aucune valeur de α, d'après ce que nous venons de voir, P_Ω contiendrait au moins un point dans l'intervalle. Supposons pour un instant que A soit un point isolé de P_Ω; soit BC un intervalle contenant A *à son intérieur* et ne contenant pas d'autre point de P_Ω; dans BC, prenons, à droite de A, une suite de points A_1, $A_2, \ldots\ A_n, \ldots$ tendant vers A; dans chacun des segments $A_n A_{n+1}$, comme il n'y a aucun point de P_Ω, il existe un nombre α_n tel que P_{α_n} est nul dans ce segment.

On peut de même déterminer à gauche de A une suite de segments $A'_1 A'_2, \ldots, A'_n A'_{n+1}, \ldots$ tendant vers A; il y a, pour chacun d'eux, un nombre α'_n tel que $P_{\alpha'_n}$ est nul dans $A'_n A'_{n+1}$. Servons-nous maintenant du théorème de M. Cantor: *Une suite dénombrable de nombres appartenant à l'une des classes 1 ou 2 a une limite supérieure, qui est un nombre appartenant à l'une de ces mêmes classes* (*). On voit alors que les nombres α_n et α'_n ont une limite supérieure α; dans l'intervalle BC, l'ensemble P_α ne peut pas contenir d'autre point que A; par suite, $P_{\alpha+1}$ est nul, le point A ne peut donc pas faire partie de P_Ω. La démonstration fait voir en outre que, si BC est un intervalle ne contenant *à son intérieur* aucun point de P_Ω, *les points extrêmes pouvant faire partie de* P_Ω, il existe un α tel que $P_\alpha = 0$ dans l'*intérieur* de l'intervalle.

Il résulte de là que P_Ω, qui ne peut pas contenir de points *isolés*, est un ensemble *dense en lui-même*; il est d'ailleurs *fermé*, car si un point est limite d'une suite de points dont chacun appartient à tous les P_α, il a lui-même cette propriété. En résumé, l'ensemble P_Ω est *parfait*. Considérons alors un intervalle *contigu* à P_Ω (dont aucun point intérieur n'appartient à P_Ω, les points extrêmes seuls en faisant partie). Dans cet intervalle, il existe un nombre β tel que P_β ne contient aucun point *intérieur* à l'intervalle. Il y a une infinité *dénombrable* d'intervalles analogues, et les points *intérieurs* à ces intervalles forment l'ensemble complémentaire de P_Ω; les différents nombres β qui correspondent à tous ces intervalles ont une limite supérieure α, qui est un nombre de la première ou de la deuxième classe, et l'on voit que l'ensemble P_α ne peut pas contenir d'autres points que ceux de P_Ω; il les contient d'ailleurs tous, de sorte qu'on a:

$$P_\alpha = P_{\alpha+1} = \cdots\cdots = P_\Omega,$$

et cet ensemble est essentiellement parfait.

48. Revenons maintenant à la fonction $\varphi(x)$, qui ne peut prendre que l'une des deux valeurs 0 ou 1; imaginons qu'on forme les ensembles P, P_1, $P_2, \ldots P_\alpha, \ldots$ que nous avons définis. Il ne peut se présenter que deux cas:

Ou bien il existe un ensemble P_α qui est nul. Dans ce cas, la fonction est représentable, d'après la conclusion qui termine le § 45.

Ou bien il n'existe pas d'ensemble de cette nature. Alors il existe un nombre α tel qu'on a:

$$P_\alpha = P_{\alpha+1},$$

(*) *Acta*, Tome II, page 388.

d'où je déduis, comme on a toujours: $P_\alpha \geqq P_\alpha^\Omega \geqq P_{\alpha+1}$:

$$P_{\alpha+1} = P_\alpha^\Omega,$$

ce qui exprime que tous les points de l'ensemble parfait P_α^Ω sont points de discontinuité par rapport à cet ensemble, l'oscillation étant égale à 1; autrement dit, la fonction est *totalement discontinue par rapport à l'ensemble parfait* P_α^Ω. Elle n'est donc pas représentable.

On peut exprimer le résultat d'une manière différente; convenons d'appeler, dans tous les cas, P_Ω l'ensemble des points qui appartiennent à tous les P_α. *La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction* $\varphi(x)$ *soit représentable est que:*

$$P_\Omega = 0.$$

Le problème que nous nous sommes proposé est ainsi complètement résolu dans le cas particulier que nous venons d'examiner.

49. Pour passer à l'étude du cas général, j'aurai besoin de quelques théorèmes auxiliaires sur les fonctions discontinues d'une variable.

Soit une fonction $\varphi(x)$ définie sur le segment AB, les extrêmes compris; supposons que le maximum de l'oscillation de $f(x)$ en chaque point, dans cet intervalle, soit λ, et prenons $\lambda' > \lambda$. Je dis qu'on peut poser:

$$\varphi(x) = g(x) + \psi(x),$$

$g(x)$ étant une fonction continue, et $\psi(x)$ une fonction dont la valeur en chaque point est comprise entre 0 et λ'.

D'après ce que nous avons vu au § 13, puisque l'oscillation en chaque point est inférieure à λ', on peut trouver un nombre ρ tel que, dans toute portion du segment dont la longueur ne surpasse pas ρ, l'oscillation relative à cette portion soit $\leqq \lambda'$. Partageons le segment en portions dont chacune ait une longueur inférieure à $\frac{\rho}{2}$; soit $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 \ldots$ la suite de points de division ainsi obtenue, à partir de l'extrémité A, que je désigne par A_1.

Considérons d'abord les segments suivants: $A_1 A_3$, $A_3 A_5$, $A_5 A_7, \ldots$ La longueur de chacun de ces segments étant inférieure à ρ, on peut certainement, dans chacun d'eux, déterminer un nombre m tel que la fonction soit, dans toute l'étendue du segment partiel considéré, comprise entre m et $m + \lambda'$; on peut par exemple prendre pour m le minimum de la fonction dans l'intervalle; (mais il n'est pas toujours indispensable de choisir m de cette manière). Soient m_1, m_3, $m_5, \ldots$ les quantités ainsi choisies, relatives aux segments $A_1 A_3$, $A_3 A_5$, $A_5 A_7, \ldots$ Je représenterai géométriquement les choses en traçant dans le plan xy (fig. 12) les segments $B_1 B_3$, $B'_1 B'_3$, d'ordonnées m_1 et $m_1 + \lambda'$ et correspondant à $A_1 A_3$, les segments $C_3 C_5$, $C'_3 C'_5$, d'ordonnées m_3 et $m_3 + \lambda'$, correspondant à $A_3 A_5$, etc....

Je prends maintenant les segments $A_2 A_4$, $A_4 A_6$,... dont chacun empiète sur deux des précédents. Considérons, par exemple, $A_2 A_4$; si nous supposons, pour fixer les idées, $m_1 < m_3$, comme dans le cas de la figure, on peut trouver m_2 compris entre m_1 et m_3, et tel que, dans $A_2 A_4$, la fonction

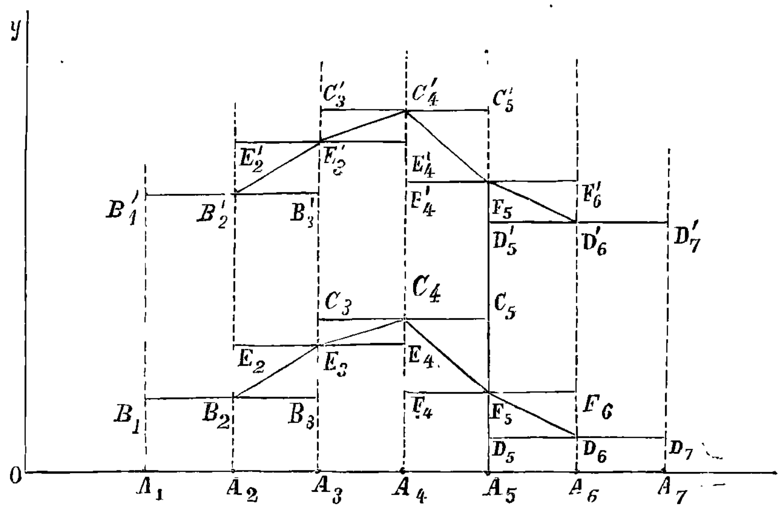

Fig. 12.

soit comprise entre m_2 et $m_2 + \lambda'$. Soient $E_2 E_4$, $E'_2 E'_4$ les segments correspondant à $A_2 A_4$, d'ordonnées m_2 et $m_2 + \lambda'$.

Traçons maintenant les lignes brisées parallèles: $B_2 E_3 C_4$, $B'_2 E'_3 C'_4$; je désignerai par $g(x)$ la fonction continue qui est représentée par la ligne $B_1 B_2 E_3 C_4$, et qui est ainsi définie jusqu'à prèsent de A_1 à A_4; la ligne brisée $B'_1 B'_2 E'_3 C'_4$ représente évidemment la fonction $g(x) + \lambda'$. Dans le segment $A_2 A_3$, la fonction donnée est comprise, d'une part entre m_1 et $m_1 + \lambda'$, d'autre part entre m_2 et $m_2 + \lambda'$, par suite entre m_2 et $m_1 + \lambda'$, représentés par les segments $E_2 E_3$, $B'_2 B'_3$; elle est donc *a fortiori* comprise entre les fonctions représentées par $B_2 E_3$ et $B'_2 E'_3$, c'est-à-dire entre $g(x)$ et $g(x) + \lambda'$. On voit de même que, dans le segment $A_3 A_4$, elle est comprise aussi entre $g(x)$ et $g(x) + \lambda'$, qui sont représentés par $E_3 C_4$, $E'_3 C'_4$.

Pour prolonger la fonction $g(x)$ au délà de A_4, on prendra le segment $A_4 A_6$, qui empiète sur $A_3 A_5$ et sur $A_5 A_7$, on opérera sur lui comme on vient d'opérer sur $A_2 A_4$; la fonction $g(x)$ sera, dans ce segment, représentée par une ligne brisée telle que $C_4 F_5 D_6$; on continuera l'application de la méthode jusqu'à ce que $g(x)$ se trouve définie dans tout l'intervalle donné; nous aurons alors, en tout point:

$$g(x) \leqq \varphi(x) \leqq g(x) + \lambda',$$

ce qui démontre qu'on peut poser:

$$\varphi(x) = g(x) + \psi(x),$$

avec la condition:

$$0 \leqq \psi(x) \leqq \lambda'.$$

50. Dans le cas que je viens d'examiner, j'ai supposé la fonction définie sur tout un segment, les extrêmes compris. J'ai maintenant besoin d'examiner le cas où l'on considère la fonction seulement pour les points *intérieurs* au segment. On voit tout de suite qu'il y a une différence essentielle avec le cas qui précède: si l'on sait que, en chaque point *intérieur* à AB, l'oscillation est inférieure à λ', on ne peut pas en déduire la possibilité de la division en un nombre fini de segments partiels, dans chacun desquels l'oscillation serait inférieure à λ'; citons, par exemple, la fonction $\sin \frac{1}{x}$ définie pour $x > 0$; en chaque point où $x > 0$ la fonction est continue, mais, dans un intervalle comprenant le point $x = 0$, la continuité n'est pas uniforme.

Voici comment il convient de modifier la méthode précédente, dans le cas où le point A, par exemple, est exclu. Si on remplaçait le point A par un point A' voisin, si petit que soit AA', les raisonnements que nous avons faits s'appliqueraient au segment $A'B$. Il résulte de là qu'on peut déterminer une suite infinie de points $A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots$ tendant vers A, et tels que dans tout segment $A_n A_{n+2}$ l'oscillation de la fonction soit inférieure à λ'. En imaginant que la méthode indiquée dans le numéro précédent soit appliquée à $A_2 A_4$, $A_4 A_6, \ldots$ indéfiniment, on définira ainsi une fonction $g(x)$, en tous les points *intérieurs* au segment considéré, qui sera continue en chacun de ces points, et l'on aura:

$$\varphi(x) = g(x) + \psi(x),$$

$\psi(x)$ étant compris entre 0 et λ' (en chaque point intérieur).

51. Ces résultats suffiraient pour les applications que je me propose de faire; mais il n'est pas sans intérêt de montrer qu'on peut aller plus loin, et s'arranger de manière que, dans la décomposition de φ en $g + \psi$, la fonction ψ soit toujours comprise entre 0 et λ.

Soit donc $\varphi(x)$ la fonction donnée, définie, soit sur tout le segment AB comme au § 49, soit seulement aux points *intérieurs,* comme au § 50; les raisonnements seront les mêmes dans les deux cas; si λ est le maximum de l'oscillation en chaque point, je prends $\lambda' = \lambda + \sigma$; d'après ce que nous venons de voir, on peut poser:

$$\varphi(x) = g_0(x) + \psi_0(x).$$

$g_0(x)$ est continue en tout point où $\varphi(x)$ est définie, et l'on a:

$$0 \leq \psi_0(x) \leq \lambda + \sigma.$$

Je vais maintenant appliquer de nouveau la méthode, en mettant la fonction $\psi_0(x)$ à la place de $f(x)$, et en remplaçant σ par $\frac{\sigma}{2}\cdot$ Faisons ici une remarque: la fonction ψ_0, qui ne diffère de $\varphi(x)$ que par une fonction continue, a, en tout point, son oscillation $\leq \lambda$; de plus, elle ne dépasse en aucun point la valeur $\lambda + \sigma$. Je peux donc, en appliquant à $\psi_0(x)$ la méthode précédente, m'astreindre à prendre tous les nombres m_1, m_2, m_3, etc...., positifs ou nuls et inférieurs ou égaux à $\lambda + \sigma - \left(\lambda + \frac{\sigma}{2}\right)$, c'est-à-dire à $\frac{\sigma}{2}\cdot$ J'arriverai ainsi à mettre $\psi(x)$ sous la forme:

$$\psi_0(x) = g_1(x) + \psi_1(x),$$

$g_1(x)$ étant une fonction continue, et $\psi_1(x)$ étant compris entre 0 et $\lambda + \frac{\sigma}{2}\cdot$ On voit en outre que $g_1(x)$, qui reste toujours compris entre les valeurs extrêmes des quantités m_1, m_2, m_3,..., est compris entre 0 et $\frac{\sigma}{2}\cdot$

J'appliquerai ensuite la méthode à $\psi_1(x)$ en remplaçant $\frac{\sigma}{2}$ par $\frac{\sigma}{4}$, et j'aurai:

$$\psi_1(x) = g_2(x) + \psi_2(x),$$

$g_2(x)$ étant continue; de plus on a:

$$0 \leq g_2(x) \leq \frac{\sigma}{4},$$

$$0 \leq \psi_2(x) \leq \lambda + \frac{\sigma}{4}\cdot$$

On voit qu'au bout de n opérations analogues, on a l'identité:

$$\varphi(x) - [g_0(x) + g_1(x) + g_2(x) + \cdots + g_n(x)] = \psi_n(x). \tag{1}$$

Imaginons qu'on répète l'opération indéfiniment; la série de fonctions continues:

$$g_0(x) + g_1(x) + \cdots + g_n(x) + \cdots$$

est uniformément convergente, puisque les termes, à partir du second, sont positifs et respectivement inférieurs à ceux de la série:

$$\frac{\sigma}{2}, \frac{\sigma}{4}, \ldots \frac{\sigma}{2^n}, \ldots$$

cette série représente donc une fonction continue $g(x)$.

Posons:

$$\varphi(x) - g(x) = \psi(x).$$

Il est facile de déduire de l'égalité (1) que, pour chaque valeur de x, on a, quel que soit n:

$$0 \leq \psi(x) \leq \psi_n(x).$$

Par suite, $\psi(x)$ est une fonction déterminée de x qui est comprise entre 0 et $\lambda + \frac{\sigma}{2^n}$, quel que soit n, par suite entre 0 et λ.

Il est ainsi démontré qu'on peut effectuer la décomposition:

$$\varphi(x) = g(x) + \psi(x),$$

$g(x)$ étant continue, et $f(x)$ compris entre 0 et λ.

52. Ajoutons une remarque. Si, au lieu de supposer une fonction définie pour tous les points d'un intervalle continu (les extrêmes étant compris ou non), on suppose qu'elle n'est définie que pour les points d'un certain *ensemble parfait* (les points extrêmes pouvant être exceptés), des considérations analogues aux précédentes s'appliquent, et l'on peut énoncer le théorème suivant:

Si λ est le maximum de l'oscillation en un point de la fonction par rapport à l'ensemble, on peut poser:

$$\varphi(x) = g(x) + \psi(x),$$

g étant une fonction continue relativement à l'ensemble donné, du moins en tout point où φ est définie, et ψ étant compris entre 0 et λ.

On peut d'ailleurs ramener cette question à la précédente; soit φ la fonction, donnée seulement aux points de l'ensemble parfait P; je complèterai la définition de φ aux points du continu qui ne font pas partie de P de la manière suivante: sur tout intervalle *contigu* à P, tel que $A_n B_n$, je fais varier linéairement φ depuis $\varphi(A_n)$ jusqu'à $\varphi(B_n)$. Il est facile de vérifier que pour la fonction ainsi définie, l'oscillation en chaque point (par rapport au continu) est $\leq \lambda$; on en déduit immédiatement le théorème.

Enfin, pour terminer cette étude, je ferai remarquer que les raisonnements que nous avons faits s'appliquent encore si $\varphi(x)$ est une fonction *multiforme;* nous donnerons alors à l'expression: *oscillation en un point* le sens défini au § 14; on pourra écrire:

$$\varphi(x) = g(x) + \psi(x),$$

$g(x)$ étant une fonction continue, et $\psi(x)$ une fonction *multiforme* comprise entre 0 et λ.

53. Abordons maintenant la question qui fait l'objet essentiel de ce chapitre: *Si une fonction est ponctuellement discontinue relativement à tout ensemble parfait, elle est représentable.*

Je commencerai par démontrer le théorème suivant: *Si une fonction $\varphi(x)$ est ponctuellement discontinue relativement à tout ensemble parfait, et si σ est un nombre positif quelconque, on peut poser:*

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \psi(x),$$

$\varphi_0(x)$ étant une fonction dont nous pourrons affirmer qu'elle est représentable, d'après les théorèmes donnés dans la première partie de cette étude, et $\psi(x)$ étant compris entre 0 et σ.

Soit P l'ensemble des points où l'oscillation de $\varphi(x)$ est $\geqq \sigma$; formons P^{Ω}; soit P_1 l'ensemble des points de P^{Ω} où l'oscillation par rapport à P^{Ω} est $\geqq \sigma$. D'une manière générale, soit $P_{\alpha+1}$ l'ensemble des points de P_{α}^{Ω} où *l'oscillation par rapport à* P_{α}^{Ω} est $\geqq \sigma$; si *maintenant* α est un nombre de seconde espèce, P_{α} sera par définition l'ensemble des points qui appartiennent à tous les ensembles $P_{\alpha'}$, dont l'ordre α' est $< \alpha$.

Puisque, par hypothèse, $\varphi(x)$ est ponctuellement discontinue relativement à tout ensemble parfait, il en résulte que, quel que soit α, l'ensemble $P_{\alpha+1}$ (qui est d'ailleurs fermé) est *non dense par rapport à* P_{α}^{Ω}; *a fortiori* cet ensemble ne peut pas coïncider avec P_{α}, à moins que P_{α} ne soit nul. Il existe donc, d'après le § 47, un nombre β de la première ou de la deuxième classe, tel que $P_{\beta} = 0$.

Cela posé, pour définir φ_0 et ψ de manière à satisfaire aux conditions imposées, je procéderai de la manière suivante.

Considérons d'abord l'ensemble P. Dans tout intervalle *contigu* à P, l'oscillation en chaque point *intérieur* est un nombre $< \sigma$. D'après le théorème du

§ 51, on peut, dans chacun de ces intervalles, effectuer la décomposition:

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \psi(x).$$

φ_0 et ψ seront ainsi définis en tous les points du continu, que je représente par E, sauf en ceux de P, autrement dit aux points de $E - P$. En tout point de $E - P$, φ_0 est continue, et ψ a une valeur comprise entre 0 et σ.

Il reste à définir φ_0 et ψ aux points de P. Considérons, en supposant que P ne soit pas réductible, l'ensemble $P - P^{\Omega}$; cet ensemble est constitué par les points de P qui sont *à l'intérieur* des intervalles *contigus à l'ensemble parfait* P^{Ω}; aux points de $P - P^{\Omega}$ je pose:

$$\varphi_0(x) = \varphi(x)$$
$$\psi(x) = 0.$$

Si AB est l'un quelconque des intervalles *contigus* à P^{Ω}, P forme dans cet intervalle un ensemble *réductible;* il en résulte que φ_0, qui, dans chaque intervalle *contigu* à P, est représentable, sera représentable dans toute l'étendue de l'intervalle AB, (ou, plus exactement, dans tout intervalle compris dans AB, puisque φ_0 n'est pas encore définie aux points A et B).

La définition de φ_0 et ψ est maintenant faite partout, sauf aux points de P^{Ω}; j'ai appelé P_1 l'ensemble des points de P^{Ω} où *l'oscillation par rapport à* P^{Ω} *est* $\geqq \sigma$; P_1 est *non dense par rapport à* P^{Ω}. Soit AB un intervalle *contigu* à P_1; cet intervalle peut contenir à son intérieur des points de P^{Ω}, mais nous savons qu'en chacun de ces points, l'oscillation par rapport à P^{Ω} est $< \sigma$. Il en résulte que, dans l'intérieur de l'intervalle, nous pourrons définir φ_0 et ψ aux points de P^{Ω} qui s'y trouvent, de manière qu'on ait en tous ces points: $\varphi = \varphi_0 + \psi$, que φ_0 soit continue par rapport à P^{Ω}, et que ψ soit compris entre 0 et σ. Nous aurons, par cette opération supposée effectuée dans chacun des intervalles *contigus* à P_1, défini φ_0 et ψ dans l'ensemble $P^{\Omega} - P_1$. Il ne restera plus à les définir que sur P_1, et, dans tout intervalle *contigu* à P_1, φ_0 sera représentable.

On voit que la marche à suivre est la suivante: on effectue la décomposition de φ en $\varphi_0 + \psi$ successivement dans les ensembles:

$$E - P,\ P - P^{\Omega},\ P^{\Omega} - P_1,\ P_1 - P_1^{\Omega}, \ldots,\ P_{n-1}^{\Omega} - P_n,\ P_n - P_n^{\Omega}, \ldots$$

Si on suppose cette suite d'opérations prolongée indéfiniment, la décomposition se trouvera effectuée en tous les points de E, sauf en ceux de P_{ω}, qui est l'ensemble des points communs à tous les P_n; de plus, dans tout intervalle *contigu* à P_ω, la fonction φ_0 sera représentable. On continuera ensuite de la même manière, c'est-à-dire qu'on définira φ_0 et ψ sur $P_\omega - P_\omega^\Omega$, puis sur $P_\omega^\Omega - P_{\omega+1}$, etc....; après avoir appliqué cette méthode une infinité de fois, on aura défini φ_0 et ψ sur $E - P_{2\omega}$.

Pour justifier d'une manière complète et rigoureuse ce que je viens de dire, je suppose, d'une manière générale, que la décomposition soit effectuée sur l'ensemble $E - P_{\alpha-1}$, et que, dans chaque intervalle *contigu* à $P_{\alpha-1}$, la fonction φ_0 soit représentable. Considérons l'ensemble $P_{\alpha-1}^\Omega$; dans tout intervalle *contigu* à $P_{\alpha-1}^\Omega$, l'ensemble des points de $P_{\alpha-1}$ qui s'y trouvent est réductible; en ces points je pose:

$$\varphi_0(x) = \varphi(x)$$
$$\psi(x) = 0.$$

la fonction φ_0, qui par hypothèse est représentable dans chaque intervalle *contigu* à $P_{\alpha-1}$, est encore représentable dans tout segment *contigu* à $P_{\alpha-1}^\Omega$. Prenons maintenant P_α, qui est l'ensemble des points de $P_{\alpha-1}^\Omega$ où l'oscillation par rapport à cet ensemble est $\geqq \sigma$. Dans un intervalle *contigu* à P_α, on peut, aux points de $P_{\alpha-1}^\Omega$ qui s'y trouvent, effectuer la décomposition, de manière que φ_0 soit représentable dans tout cet intervalle.

Il est ainsi démontré que, si φ_0 et ψ sont définies sur l'ensemble $E - P_{\alpha-1}$, elles peuvent être définies sur l'ensemble $E - P_\alpha$, les conditions fondamentales étant encore observées.

Si maintenant α est un nombre de deuxième espèce, on peut toujours le considérer comme la limite supérieure d'une suite dénombrable de nombres:

$$\alpha'_1,\ \alpha'_2, \ldots\ \alpha'_n, \ldots$$

de telle sorte que α joue par rapport à cette suite le même rôle que ω par rapport à la suite:

$$1,\ 2, \ldots\ n, \ldots$$

Imaginons qu'il soit possible de définir φ_0 et ψ sur $E - P_{\alpha'_1}$, sur $E - P_{\alpha'_2}, \ldots$ et généralement sur $E - P_{\alpha'_n}$; si on suppose cette suite d'opérations prolongée indéfiniment, la décomposition se trouvera effectuée sur tout l'ensemble $E - P_\alpha$. Dans toute portion contenue à l'intérieur d'un intervalle *contigu* à P_α, il existe un nombre n déterminé tel que $P_{\alpha'_n}$ est nul dans cette portion; φ_0 est donc représentable dans cette portion, et par suite, dans tout intervalle *contigu* à P_α.

On voit ainsi que, quel que soit α, il est possible d'effectuer la décomposition sur l'ensemble $E - P_\alpha$, de telle sorte que sur tout intervalle *contigu* à P_α la fonction φ_0 soit représentable. Or, il existe un nombre β tel que P_β est nul. Quand la décomposition se trouvera effectuée sur $E - P_\beta$, qui est identique à E, *on aura, en tous les points du segment donné :*

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \psi(x), \tag{2}$$

$\varphi_0(x)$ *étant représentable dans toute l'étendue du segment, et* $\psi(x)$ *ayant en chaque point une valeur comprise entre* 0 *et* σ.

54. J'arrive maintenant à la démonstration du théorème général. En supposant $\varphi(x)$ *ponctuellement discontinue relativement à tout ensemble parfait*, et en prenant arbitrairement un nombre positif σ, nous venons d'obtenir l'égalité (2). Appliquons maintenant la même méthode à la fonction $\psi(x)$ de cette égalité, en remplaçant σ par $\frac{\sigma}{2}$; remarquons en outre que, comme on a : $0 \leqq \psi \leqq \sigma$, on peut, en définissant φ_1 et ψ_1 de manière que :

$$\psi(x) = \varphi_1(x) + \psi_1(x),$$

s'arranger de façon qu'en tout point on ait :

$$0 \leqq \varphi_1(x) \leqq \frac{\sigma}{2},$$

$$0 \leqq \psi_1(x) \leqq \frac{\sigma}{2}.$$

Cela résulte d'une remarque énoncée au § 51 ; bien entendu, $\varphi_1(x)$ est une fonction représentable.

On posera ensuite :

$$\psi_1(x) = \varphi_2(x) + \psi_2(x),$$

avec les conditions :

$$0 \leqq \varphi_2(x) \leqq \frac{\sigma}{4},$$

$$0 \leqq \psi_2(x) \leqq \frac{\sigma}{4}.$$

D'une manière générale, on aura :

$$\psi_{n-1}(x) = \varphi_n(x) + \psi_n(x),$$

avec :

$$0 \leq \varphi_n(x) \leq \frac{\sigma}{2^n},$$

$$0 \leq \psi_n(x) \leq \frac{\sigma}{2^n},$$

et $\varphi_n(x)$ étant une fonction représentable.

Quand n croît indéfiniment, la fonction $\psi_n(x)$ tend uniformément vers 0; on peut donc écrire :

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \cdots + \varphi_n(x) + \cdots \tag{3}$$

la série étant uniformément convergente.

Chacune des fonctions qui figurent dans le second membre de l'égalité (3) est représentable dans les conditions des problèmes I et II. Considérons, pour fixer les idées, le problème I; il correspond à $\varphi_n(x)$ une fonction $f_n(x, y)$, continue en tout point par rapport à chacune des variables, et égale sur $x = y$ à $\varphi_n(x)$; cela résulte de ce que $\varphi_n(x)$ fait partie de la catégorie de fonctions que nous avons appris à construire dans les § 33 à 45; ce qui distingue ces fonctions, c'est que l'ensemble de *tous les points* de discontinuité relatifs à un ensemble parfait quelconque est non dense par rapport à cet ensemble. On reconnaît aisément que, dans tous les théorèmes qui ont été démontrés pour établir que ces fonctions sont représentables, on peut s'astreindre à ce que la fonction $f(x, y)$ que l'on définit, ait pour limites supérieure et inférieure dans toute l'aire les limites supérieure et inférieure de $\varphi(x)$.

Nous supposerons donc que la fonction $f_n(x, y)$ qui correspond à $\varphi_n(x)$ compris entre 0 et $\frac{\sigma}{2^n}$, est elle-même comprise entre 0 et $\frac{\sigma}{2^n}$. Nous pouvons alors poser :

$$f(x, y) = f_0(x, y) + f_1(x, y) + \cdots + f_n(x, y) + \cdots$$

le second membre est une série uniformément convergente. Il en résulte que $f(x, y)$ est une fonction parfaitement déterminée, qui possède tous les caractères de continuité des fonctions $f_n(x, y)$, et qui, pour $x = y$, se réduit à $\varphi(x)$. Il est ainsi démontré que $\varphi(x)$ est une fonction représentable dans les conditions du problème I. La démonstration est évidemment analogue pour le problème II.

En résumé, nous avons prouvé que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit représentable, est qu'elle soit ponctuellement discontinue relativement à tout ensemble parfait.*

Nous avons aussi donné un moyen de reconnaître si cette condition est remplie ou non. Etant donné un nombre positif σ, on forme la suite d'ensembles P, P_1, $P_2, \ldots P_n, \ldots P_\omega, \ldots P_{2\omega}, \ldots P_\alpha, \ldots$ correspondant à cette valeur de σ. Soit P_Ω l'ensemble des points qui appartiennent à tous les P_α.

Il faut et il suffit, pour que la fonction soit représentable, qu'on ait, quel que soit σ:

$$P_\Omega = 0.$$

Si, pour une certaine valeur de σ, *on a* $P_\Omega > 0$, *la fonction est totalement discontinue sur cet ensemble parfait, et par suite n'est pas représentable.*

IV. Propriétés générales.

55. Nous avons, dans ce qui précède, caractérisé une catégorie parfaitement déterminée de fonctions discontinues, qui, entre autres propriétés, possèdent la suivante: *Une quelconque de ces fonctions est représentable par une série qui a pour termes des fonctions continues, et qui est convergente pour chaque valeur de* x. Nous avons déjà fait observer que cet énoncé revenait au suivant: *la fonction est limite d'une suite de fonctions continues.*

Servons-nous maintenant du théorème de Weierstrass (*): si une fonction est continue, et si on se donne un nombre ε, aussi petit qu'on veut, il est possible de trouver un polynôme qui diffère de la fonction en chaque point de moins de ε.

Soit $f(x)$ une fonction discontinue limite d'une suite de fonctions continues $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots f_n(x), \ldots$ Prenons une suite de quantités tendants vers 0: ε_1, $\varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n, \ldots$ Nous pouvons, d'une manière générale, faire correspondre à la fonction $f_i(x)$ un polynôme $\varphi_i(x)$ qui en diffère de moins de ε_i. Dans ces conditions, la suite de polynômes:

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x), \ldots \varphi_n(x), \ldots$$

a pour limite $f(x)$, comme la suite des fonctions $f_i(x)$. Ainsi, une fonction qui est limite d'une suite de fonctions continues peut aussi être considérée comme limite d'une suite de polynômes, et par suite peut être développée en série de polynômes. Nous pouvons donc énoncer ce théorème:

(*) Une démonstration très simple du théorème de Weierstrass a été donnée par M. Lebesgue dans une Note: *Sur l'approximation des fonctions.* (Bulletin des sciences mathématiques, novembre 1898.)

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit représentable par une série convergente de polynômes est qu'elle soit ponctuellement discontinue relativement à tout ensemble parfait.

56. Indiquons quelques exemples de fonctions *représentables;* je dis que toute fonction *semi-continue* est *représentable;* nous avons vu au § 12 qu'une fonction qui possède en tout point la semi-continuité supérieure, par exemple, est ponctuellement discontinue; on démontrera par la même méthode cet énoncé plus général: *une fonction semi-continue par rapport à un ensemble parfait, est ponctuellement discontinue sur cet ensemble.* Il résulte de là que *toute fonction semi-continue* satisfait à la condition d'être ponctuellement discontinue relativement à tout ensemble parfait, et par suite *peut être considérée comme limite d'une suite de fonctions continues, ou de polynômes.*

57. Donnons une autre application dans un ordre d'idées différent. Supposons qu'une fonction continue $f(x)$ ait en tout point une dérivée déterminée $f'(x)$. Cela veut dire que la quantité:

$$\frac{f(x+y)-f(x)}{y},$$

lorsque y tend vers 0, tend vers une limite déterminée, qui est $f'(x)$. Considérons alors la fonction $\varphi(x, y)$ définie de la manière suivante:

$$\text{pour} \quad y \gtrless 0 \quad \text{on a:} \quad \varphi(x, y) = \frac{f(x+y)-f(x)}{y},$$
$$\text{pour} \quad y = 0 \quad \text{on a:} \quad \varphi(x, 0) = f'(x).$$

Cette fonction des deux variables réelles x et y est une fonction continue de l'ensemble (x, y) en tous les points du plan qui n'appartiennent pas à $0x$; de plus, en chaque point de $0x$, elle est continue par rapport à y. Donc *la fonction dérivée $f'(x)$ est une fonction représentable par une série de fonctions continues.*

On peut même remarquer que si l'on suppose seulement pour la fonction $f(x)$ l'existence en chaque point d'une *dérivée à droite* déterminée, $f_d(x)$, le raisonnement qui précède s'applique à cette fonction $f_d(x)$, qui est, par suite, une fonction représentable.

58. Je me propose maintenant d'approfondir la nature des fonctions représentables, en tirant des conséquences de la condition fondamentale qui les caractérise.

Considérons d'abord une fonction $f(x)$ que nous supposons ponctuellement discontinue. La propriété caractéristique est que, dans tout intervalle, il existe au moins un point où la fonction est continue; nous en avons déduit que l'ensemble des points où l'oscillation est $\geqq \sigma$, est un ensemble non dense. Prenons maintenant une suite décroissante de nombres positifs tendant vers 0, par exemple:

$$\sigma, \frac{\sigma}{2}, \frac{\sigma}{2^2}, \ldots \frac{\sigma}{2^n}, \ldots$$

J'appelle d'une manière générale P_n l'ensemble des points où l'oscillation ω est $\geqq \frac{\sigma}{2^n}$. Si A est un point de discontinuité pour $f(x)$, il existe un entier p tel que A fait partie de l'ensemble P_n, dès que n est égal ou supérieur à p. En appelant P l'ensemble de tous les points de discontinuité, nous sommes conduits à dire que *P est limite de l'ensemble P_n*, quand n croît indéfiniment. L'ensemble P peut évidemment être d'une nature tout à fait différente de celle des ensembles P_n; en particulier, il peut être *dense dans tout un intervalle;* de plus, il n'est pas nécessairement *fermé*, car ses points limites peuvent être des points de continuité pour la fonction.

59. Mais on voit que ces remarques conduisent tout naturellement à étudier les propriétés d'un ensemble linéaire P satisfaisant à la condition suivante: Il existe une infinité dénombrable d'ensembles P_1, $P_2, \ldots P_n, \ldots$ dont chacun est non dense, et tels que tout point de P fait partie de l'un au moins des ensembles P_1, $P_2, \ldots P_n, \ldots$ Je dirai qu'un ensemble de cette nature est de *première catégorie.* Tout ensemble qui ne possède pas cette propriété sera dit de *deuxième catégorie.*

Je commence par démontrer la proposition suivante: Si P est un ensemble de première catégorie, il existe, dans toute portion $\alpha\beta$ du segment sur lequel il est défini, au moins un point (et par suite une infinité) n'appartenant pas à P. En effet, d'après les hypothèses, on peut déterminer dans $\alpha\beta$ un intervalle fini $\alpha_1\beta_1$ ne contenant aucun point de P_1; dans $\alpha_1\beta_1$, un intervalle $\alpha_2\beta_2$ ne contenant aucun point de P_2, etc....; dans $\alpha_{n-1}\beta_{n-1}$, un intervalle $\alpha_n\beta_n$ ne contenant aucun point des n premiers ensembles P_1, $P_2, \ldots P_n$; il existe au moins un point M compris à l'intérieur de tous les segments $\alpha_n\beta_n$; ce point M ne fait partie d'aucun ensemble P_n et par suite ne fait pas partie de P.

Il résulte immédiatement de là que *le continu constitue un ensemble de deuxième catégorie;* nous venons en effet de démontrer qu'on ne peut pas obtenir tous les points d'un intervalle continu au moyen d'une infinité dénombrable d'ensembles non denses.

L'ensemble formé par la réunion d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles de première catégorie est encore un ensemble de première catégorie; cela résulte de la définition même.

Le continu, dont on a retranché un ensemble de première catégorie, autrement dit, l'ensemble complémentaire d'un ensemble de première catégorie, est de seconde catégorie.

Si on a, d'une part, un ensemble $E-P$, complémentaire par rapport au continu E d'un ensemble de première catégorie, et d'autre part un ensemble Q qu'on sait être de deuxième catégorie, on peut affirmer que $E-P$ et Q ont des points communs. Si en effet cela n'était pas, c'est que tous les points de Q appartiendraient à P, et Q serait alors de première catégorie.

On voit la différence profonde qui existe entre les ensembles des deux catégories; cette différence ne réside, ni dans la dénombrabilité, ni dans la condensation dans un intervalle continu, puisqu'un ensemble de première catégorie peut avoir la puissance du continu, et peut aussi être dense dans toute l'étendue du segment qu'on considère; mais elle est en quelque sorte une combinaison des deux notions précédentes.

60. Revenons aux fonctions ponctuellement discontinues; on voit que, pour une telle fonction, l'ensemble des points de discontinuité est de première catégorie, tandis que l'ensemble des points de continuité est au contraire de deuxième catégorie.

Je déduis maintenant de l'étude précédente un théorème donné par M. Volterra en 1881 (*). Considérons un nombre fini, ou même une infinité dénombrable de fonctions ponctuellement discontinues, définies dans un même intervalle de variation de x. L'ensemble P des points où l'une au moins des fonctions est discontinue, est formé par la réunion des ensembles P_1, $P_2, \ldots P_n, \ldots$, P_n étant l'ensemble des points de discontinuité de $f_n(x)$. Donc, d'après ce que nous avons vu, P est un ensemble de première catégorie. On en déduit que, *dans tout intervalle, il y a des points où toutes les fonctions considérées sont continues.*

Tirons une conséquence de la proposition qui précède. Supposons qu'une suite de fonctions ponctuellement discontinues $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots f_n(x), \ldots$, tende *uniformément* vers une limite $f(x)$, c'est-à-dire que $|f(x)-f_n(x)|$ devienne inférieur à ε, si petit que soit ε, indépendamment de x, quand n est suffi-

(*) Volterra, *Alcune osservazioni sulle funzioni punteggiate discontinue.* (Giornale di Battaglini, 1881.)

samment grand. Dans ces conditions, je dis que $f(x)$ est ponctuellement discontinue; il suffit de montrer que si A $[x_0]$ est un point de continuité commun à tous les $f_n(x)$, c'est encore un point de continuité pour $f(x)$. En effet, ε étant donné, prenons d'abord n assez grand pour qu'on ait en tout point:

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \cdot$$

On aura en particulier:

$$|f(x_0) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \cdot$$

Puis, prenons autour de A un intervalle assez petit pour qu'on ait dans cet intervalle:

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \cdot$$

On déduit de ces inégalités:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

ce qui montre que $f(x)$ est continue au point A.

61. Je fais remarquer maintenant qu'on peut généraliser les notions indiquées au § 59, en prenant pour base un ensemble parfait, au lieu du continu.

Soit G un ensemble parfait quelconque; je ne considère dans ce qui suit que des ensembles qui ne contiennent que des points de G. Si P est formé par la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles $P_1, P_2, \ldots P_n, \ldots$, dont chacun est non dense par rapport à G, je dirai que P est *de première catégorie par rapport à G.* On peut tirer de cette définition des conséquences en tout point analogues à celles que nous avons indiquées au § 59.

On reconnaît de même que si l'on a une infinité dénombrable de fonctions définies sur un ensemble parfait G, et si chacune d'elles est ponctuellement discontinue sur cet ensemble, il existe, au voisinage de tout point de G, des points de G où toutes les fonctions sont continues. Si elles tendent *uniformément* vers une fonction limite $f(x)$, un point de continuité commun à toutes ces fonctions sera aussi point de continuité pour $f(x)$.

Supposons à prèsent qu'on ait une suite de fonctions *représentables*: $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots f_n(x), \ldots$, tendant *uniformément* vers une fonction limite $f(x)$. Si on considère un ensemble parfait quelconque, d'après ce que nous venons de voir, la fonction $f(x)$ sera, comme chacune des fonctions $f_n(x)$, ponctuellement discontinue sur cet ensemble parfait; il en résulte que $f(x)$ est représentable.

Nous obtenons donc ainsi un résultat qui est à rapprocher du théorème connu : *Une série uniformément convergente de fonctions continues représente une fonction continue*, et qu'on peut énoncer sous la forme suivante :

Une série uniformément convergente, dont les termes sont des fonctions représentables, est une fonction représentable.

CHAPITRE III.

Fonctions discontinues développables en séries multiples de fonctions continues.

I. Définition de ces fonctions.

62. Je me propose de définir et d'étudier dans ce chapitre, certaines catégories de fonctions discontinues, dont on peut dire qu'elles se rattachent, en un certain sens, aux fonctions continues. Je prendrai pour point de départ la notion de fonction limite d'une suite de fonctions. Nous venons de voir, dans le chapitre précédent, qu'il y a des fonctions discontinues d'une variable réelle qu'on peut obtenir comme limites de fonctions continues, et nous avons déterminé la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction possède cette propriété.

Je conviendrai de dire que les fonctions continues forment la classe 0, et que les fonctions discontinues limites de fonctions continues forment la classe 1. D'après cela, les fonctions de la première classe sont les fonctions discontinues qui sont représentables par des séries convergentes de fonctions continues, et par suite, comme nous l'avons montré, par des séries convergentes de polynômes.

63. Supposons maintenant qu'on ait une suite de fonctions appartenant aux classes 0 ou 1, et possédant une fonction limite n'appartenant à aucune de ces deux classes. Je dirai que cette fonction limite est une fonction de la seconde classe, et l'ensemble de toutes les fonctions qu'on peut obtenir de cette manière formera la classe 2. On voit d'après cela qu'une fonction de la classe 2 est développable en une série, convergente pour chaque valeur de x, et dont tous les termes sont des fonctions de classe 1; en remplaçant

chacun de ces termes par la série de polynômes qui le représente, on reconnaît qu'une fonction de classe 2 peut être représentée par une série double dont les termes sont des polynômes.

J'indique tout de suite un exemple simple de fonction de classe 2. Il suffit de considérer la fonction $\varphi(x)$ qui, dans un certain intervalle, $0 \leq x \leq 1$ par exemple, prend la valeur 0 quand x est rationnel et la valeur 1 quand x est irrationnel. En effet, considérons la fonction $\varphi_n(x)$ définie de la manière suivante : pour $x = \frac{p}{q}$, si $q \leq n$ et si $\frac{p}{q}$ est irréductible, on a $\varphi_n(x) = 0$; pour toutes les autres valeurs de x, on a $\varphi_n(x) = 1$. On voit que $\varphi(x)$ est la limite de $\varphi_n(x)$ quand n croît indéfiniment ; d'autre part, $\varphi_n(x)$, n'ayant qu'un nombre fini de discontinuités, est de la première classe ; il en résulte que $\varphi(x)$ est de classe 2. Cela nous montre qu'il existe une série double :

$$\sum_\alpha \sum_\beta P_{\alpha,\beta}(x) \qquad \begin{array}{l}(\alpha = 1, 2, \ldots n, \ldots) \\ (\beta = 1, 2, \ldots n, \ldots)\end{array}$$

les $P_{\alpha,\beta}$ étant tous des polynômes, qui est convergente pour chaque valeur de x comprise entre 0 et 1, à condition que la sommation soit effectuée d'abord par rapport à β, puis par rapport à α, et dont la somme est 0 quand x est rationnel, 1 quand x est irrationnel.

64. De même que nous avons défini les fonctions des classes 1 et 2, nous pourrons définir les fonctions de classe $3, 4, \ldots n, \ldots$

Une fonction sera dite de classe n, si elle est la limite d'une suite de fonctions appartenant aux classes $0, 1, 2, \ldots, n-1$, et si elle n'appartient pas elle-même à l'une de ces classes. Une telle fonction, s'il en existe, pourra se représenter par une série d'ordre n, dont les termes seront des polynômes :

$$\sum_{\alpha_1} \sum_{\alpha_2} \cdots \sum_{\alpha_n} P_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n}(x).$$

On peut aller plus loin, en suivant une marche analogue à celle par laquelle M. Cantor arrive à définir les ensembles dérivés d'ordre α d'un ensemble donné, α étant un nombre transfini. Supposons qu'on ait une suite de fonctions dont chacune appartienne à l'une des classes $0, 1, 2, \ldots n, \ldots$, et qu'il existe une fonction limite ne faisant partie d'aucune de ces classes ; nous conviendrons de dire que cette fonction limite appartient à la classe ω. Nous concevons de même l'existence possible de fonctions qu'on sera conduit à considérer comme faisant partie des classes $\omega + 1$, $\omega + 2, \ldots$, $2\omega, \ldots$

Pour donner une définition générale, supposons qu'on ait défini les classes de fonctions marquées par tous les nombres α' inférieurs à un nombre α. Si une suite de fonctions dont chacune appartient à une classe marquée par un nombre α' a une limite, et si cette fonction limite n'appartient à aucune de ces classes, nous dirons qu'elle appartient à la classe α.

65. Il est naturel de chercher à voir jusqu'où peut s'étendre cette formation, ou tout au moins cette conception logique de fonctions discontinues de plus en plus compliquées, mais pourtant se rattachant toujours d'une manière très précise aux fonctions continues. Nous allons tout de suite montrer que le procédé précédent s'applique seulement pour les nombres transfinis de la première et de la deuxième classe; cela résultera du théorème suivant:

Considérons l'ensemble E des fonctions appartenant aux classes marquées par un nombre de la première ou de la deuxième classe de nombres. Si une suite de fonctions appartenant à l'ensemble E a une limite, cette fonction limite appartient aussi à l'ensemble E.

La démonstration de ce théorème résulte très simplement du théorème de M. Cantor dont j'ai déjà eu l'occasion de me servir: Une suite dénombrable de nombres de la première ou de la deuxième classe a une limite supérieure, qui est un nombre appartenant à l'une de ces mêmes classes.

Soit: $f_1(x)$, $f_2(x)$,... $f_n(x)$,... la suite de fonctions; soient:

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\dots\ \alpha_n,\dots$$

les nombres qui marquent les classes auxquelles elles appartiennent; d'après le théorème de M. Cantor, il existe un nombre β, de la première ou de la deuxième classe, tel qu'on a, pour toute valeur de n:

$$\alpha_n < \beta.$$

Donc, d'après la définition des fonctions de classe β, la fonction $f(x)$, limite de $f_n(x)$, appartient certainement, soit à la classe β, soit à une classe inférieure; c'est donc une fonction faisant partie de l'ensemble E.

Nous sommes ainsi parvenus à la définition logique d'un ensemble E de fonctions *qui contient toutes ses fonctions limites*, propriété que l'ensemble des fonctions continues, par exemple, ne possède pas. Ajoutons que chacune des fonctions qui font partie de l'ensemble E peut être définie par une infinité dénombrable de conditions (*); en effet, une fonction de première classe, par

(*) Voir à ce sujet: Borel: *Leçons sur la théorie des fonctions*, Notes I et III.

exemple, est définie si on connaît la suite dénombrable de fonctions continues qui l'admet pour limite, et chacune de ces fonctions continues est définie au moyen d'une infinité dénombrable de conditions. Le théorème s'étend facilement, par voie de récurrence, à toutes les fonctions de E. Il résulte également de là que l'ensemble E a la puissance du continu; on sait d'autre part que l'ensemble de toutes les fonctions discontinues a une puissance supérieure; on voit donc que l'ensemble de fonctions E, tout en étant beaucoup plus étendu que l'ensemble des fonctions continues, ne forme qu'une catégorie très particulière par rapport à l'ensemble de toutes les fonctions qu'on peut concevoir.

Il serait intéressant d'arriver à démontrer l'existence effective de fonctions appartenant aux différentes classes que nous avons définies logiquement, et de caractériser chacune de ces classes, comme nous sommes parvenus, dans le chapitre précédent, à caractériser les fonctions de classe 1. Les difficultés deviennent très grandes dès qu'on aborde l'étude des fonctions de classe 2; je vais exposer les résultats obtenus en ce qui concerne les fonctions de cette classe.

II. Fonctions de la deuxième classe.

66. Il me sera utile, pour étudier les fonctions de deuxième classe, d'énoncer quelques remarques au sujet des fonctions de première classe; ces remarques résultent immédiatement des théorèmes généraux qui nous ont permis, dans le chapitre précédent, de caractériser complètement ces fonctions.

Supposons que le segment $A\,B$ puisse être divisé en un nombre fini de segments sur chacun desquels la fonction soit de première classe; elle est alors de première classe sur $A\,B$.

Si l'on sait que, sur tout segment $A'\,B'$ intérieur à $A\,B$, si voisins que soient A' et B' de A et B, la fonction est de première classe, elle l'est encore sur $A\,B$.

Il est bien évident que ces énoncés subsistent, si l'on y remplace l'expression: fonction de première classe, par celle-ci: fonction de deuxième classe.

Si une fonction est de première classe, on peut changer ses valeurs en un nombre fini de points d'une manière arbitraire, sans qu'elle cesse d'être de première classe; on peut de même modifier d'une manière absolument quelconque les valeurs de la fonction aux points d'un ensemble *réductible.*

67. Indiquons maintenant un moyen d'obtenir une catégorie étendue de fonctions de deuxième classe.

Partons d'une fonction de première classe, et remplaçons par des valeurs arbitraires les valeurs de cette fonction aux points d'un certain ensemble E dénombrable: je dis que la fonction ainsi obtenue est de deuxième classe au plus.

Soit en effet $f(x)$ la fonction primitive, $\varphi(x)$ la fonction modifiée; nous supposons que $\varphi(x)$ ne diffère de $f(x)$ qu'aux points $A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots$ Définissons une suite de fonctions de la manière suivante:

$$\begin{array}{llll} f_1(x) = f(x) & \text{sauf en} & A_1 & \text{où } f_1(x) = \varphi(x) \\ f_2(x) = f(x) & \text{sauf en} & A_1, A_2 & \text{où } f_2(x) = \varphi(x) \\ \cdots & & & \\ f_n(x) = f(x) & \text{sauf en} & A_1, A_2, \ldots, A_n & \text{où } f_n(x) = \varphi(x). \end{array}$$

Chaque fonction $f_n(x)$ ne différant de $f(x)$ qu'en un nombre fini de points, est de première classe, comme $f(x)$. D'ailleurs il est évident que $f_n(x)$ a pour limite $\varphi(x)$; donc $\varphi(x)$ est de la deuxième classe.

Je vais m'occuper en premier lieu de cette catégorie particulière de fonctions, et je vais poser de nouvelles définitions qui me permettront de donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction ne diffère d'une fonction de première classe qu'en un ensemble dénombrable de points.

68. Considérons une fonction quelconque; soit $\alpha\beta$ une portion de l'intervalle dans lequel cette fonction est définie; je désignerai par $M_0(\alpha\beta)$ et $m_0(\alpha\beta)$ les limites supérieure et inférieure de la fonction dans $\alpha\beta$.

Soit λ un nombre quelconque inférieur à M_0; il existe dans $\alpha\beta$ un ensemble bien déterminé de points où l'on a: $f(x) \geqq \lambda$, cet ensemble contenant au moins un point; il peut se présenter deux cas: ou bien cet ensemble est dénombrable (ou fini), et alors la même chose a lieu pour tous les nombres compris entre λ et M_0; ou bien au contraire cet ensemble est non dénombrable, et la chose est vraie pour tous les nombres inférieurs à λ.

Cela suffit pour qu'on soit assuré de l'existence d'un nombre que je désignerai par $M_1(\alpha\beta)$, qui sépare les nombres en deux catégories de telle manière que:

si $\lambda > M_1$, l'ensemble des points où l'on a $f(x) \geqq \lambda$ (ou $f(x) > \lambda$) cet dénombrable;

si $\lambda < M_1$, l'ensemble des points où $f(x) \geqq \lambda$ (ou $f(x) > \lambda$) n'est pas dénombrable.

Il y a d'ailleurs doute pour $\lambda = M_1$. On peut dire que $M_1(\alpha\beta)$ est la *limite supérieure des nombres λ tels que les points où $f(x) \geqq \lambda$ forment un* *ensemble non dénombrable,* et la *limite inférieure des nombres* λ *tels que ces points forment un ensemble dénombrable.*

De la même manière, nous appellerons $m_1(\alpha\beta)$ la *limite inférieure des nombres* λ *tels que les points où* $f(x) \leqq \lambda$ *forment un ensemble non dénombrable.*

Il résulte de ces définitions qu'on a certainement:

$$M_0(\alpha\beta) \geqq M_1(\alpha\beta) \geqq m_1(\alpha\beta) \geqq m_0(\alpha\beta).$$

Pour montrer qu'on a: $M_1(\alpha\beta) \geqq m_1(\alpha\beta)$, il suffit de faire voir que tout nombre qui est supérieur à M_1 est aussi supérieur à m_1; soit donc $\lambda > M_1$; l'ensemble des points où $f(x) > \lambda$ est dénombrable, d'après la définition de M_1; par suite, l'ensemble des points où $f(x) \leqq \lambda$, qui est le complémentaire du précédent, est non dénombrable; donc, d'après la définition de m_1, on a $m_1 \leqq \lambda$.

Faisons une remarque importante. Si E est un ensemble *dénombrable* quelconque, mais déterminé, on peut, pour définir $M_1(\alpha\beta)$ et $m_1(\alpha\beta)$, faire complètement abstraction des valeurs de la fonction aux points de E; cela résulte de la propriété fondamentale qui caractérise ces nombres.

Je poserai:

$$\omega_1(\alpha\beta) = M_1(\alpha\beta) - m_1(\alpha\beta),$$

et je dirai que $M_1(\alpha\beta)$, $m_1(\alpha\beta)$, $\omega_1(\alpha\beta)$, sont respectivement le maximum, le minimum, l'oscillation de $f(x)$ dans l'intervalle $\alpha\beta$, *quand on néglige les ensembles dénombrables.*

Si maintenant, au lieu de considérer un intervalle fini, nous considérons un point x_0, nous commencerons par prendre un intervalle autour de ce point, soit $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$; prenons, dans cet intervalle, les trois nombres que je viens de définir, et désignons-les par $M_1(\delta)$, $m_1(\delta)$, $\omega_1(\delta)$; lorsque δ tend vers 0, ces nombres tendent vers des limites déterminées, que j'appelle:

$$M_1(x_0),\ m_1(x_0),\ \omega_1(x_0).$$

Ces nombres seront dits *le maximum, le minimum, l'oscillation au point* x_0, *en négligeant les ensembles dénombrables.* On a: $\omega_1(x_0) = M_1(x_0) - m_1(x_0)$.

J'énonce les propriétés fondamentales du nombre $M_1(x_0)$:

1.° Si petit que soit ε supposé positif, on peut déterminer un intervalle $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ dans lequel les points où $f(x) > M_1(x_0) + \varepsilon$ forment un ensemble dénombrable.

2.° Si petits que soient ε et δ, dans l'intervalle $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$, les points où $f(x) > M_1(x_0) - \varepsilon$ forment un ensemble non dénombrable.

On aurait des propositions analogues pour $m_1(x_0)$ et $\omega_1(x_0)$; l'analogie des nouveaux nombres avec les quantités M_0, m_0, ω_0, est évidente; citons encore une propriété qui nous sera utile.

La fonction $M_1(x)$ est semi-continue supérieurement. Pour démontrer cette proposition, remarquons d'abord que si un point x se trouve à l'intérieur d'un intervalle $\alpha\beta$, on a certainement:

$$M_1(x) \leqq M_1(\alpha\beta).$$

Cela posé, si on considère un point x_0, et si on se donne un nombre ε, on peut trouver autour de x_0 un intervalle $\alpha\beta$ dans lequel on aura:

$$M_1(\alpha\beta) < M_1(x_0) + \varepsilon.$$

si x est un point quelconque de cet intervalle, on aura:

$$M_1(x) < M_1(x_0) + \varepsilon,$$

ce qui exprime la proposition.

On voit de même que $m_1(x)$ est semi-continue inférieurement, $\omega_1(x)$ semi-continue supérieurement.

Enfin, des notions en tout point analogues à celle que nous venons d'établir peuvent être définies, si on part d'un ensemble parfait quelconque G; dans un intervalle $\alpha\beta$ contenant des points de cet ensemble, on définira les quantités:

$$M_1[f(x),\ G,\ \alpha\beta],\ m_1[f(x),\ G,\ \alpha\beta],\ \omega_1[f(x),\ G,\ \alpha\beta],$$

puis, en chaque point x_0 de G, les quantités:

$$M_1[f(x),\ G,\ x_0],\ m_1[f(x),\ G,\ x_0],\ \omega_1[f(x),\ G,\ x_0].$$

69. Considérons maintenant une fonction $f(x)$ obtenue en modifiant d'une manière arbitraire les valeurs d'une fonction de première classe $\varphi(x)$ aux points d'un ensemble dénombrable. D'après les remarques que nous avons faites, la fonction ω_1 relative à $f(x)$ sera en tout point identique à la fonction ω_1 relative à $\varphi(x)$, car on peut, dans la définition de ω_1, faire abstraction des points où les deux fonctions ne sont pas égales, puisque ces points forment un ensemble dénombrable.

On a donc:

$$\omega_1 [f(x)] = \omega_1 (\varphi (x)].$$

D'ailleurs on a, pour $\varphi(x)$:

$$\omega_1 [\varphi (x)] \leqq \omega_0 [\varphi (x)].$$

Comme, par hypothèse, $\varphi(x)$ est de première classe, c'est-à-dire développable en série de fonctions continues, elle est ponctuellement discontinue, ce qu'on peut exprimer en disant que la fonction $\omega_0 [\varphi(x)]$ a son minimum nul en tout point; la fonction $\omega_1 [\varphi(x)]$, égale ou inférieure à la précédente, possède *a fortiori* la même propriété; on peut donc dire que $f(x)$ est une fonction telle que $\omega_1 [f(x)]$ a son minimum nul en tout point.

Le raisonnement est valable, soit quand ω_1 est relatif au continu, soit quand ω_1 est relatif à un ensemble parfait quelconque. Ainsi on peut dire que, G étant un ensemble parfait, la quantité $\omega_1 [f(x), G]$ a son minimum nul en tout point de G.

70. Je me propose de démontrer la réciproque de ce théorème, c'est-à-dire que si $\omega_1 [f(x), G]$ a son minimum nul en tout point de G, quel que soit l'ensemble parfait G, la fonction $f(x)$ peut être obtenue en modifiant les valeurs d'une fonction de première classe aux points d'un ensemble dénombrable.

Je commencerai par démontrer le théorème suivant: Si, en tout point d'un intervalle continu, on a:

$$\omega_1 (x) = 0,$$

la fonction $f(x)$ peut s'obtenir en partant d'une certaine fonction continue, et en changeant les valeurs de cette fonction aux points d'un ensemble dénombrable.

En effet, on a, d'après l'hypothèse:

$$\omega_1 (x) = M_1 (x) - m_1 (x) = 0.$$

Nous pouvons donc poser:

$$M_1 (x) = m_1 (x) = g (x).$$

La fonction $g(x)$, étant identique à $M_1(x)$ et à $m_1(x)$, se trouve être à la fois semi-continue supérieurement et inférieurement; c'est donc une fonction continue.

Soit σ un nombre positif; je dis que l'ensemble des points où l'on a:

$$f(x) > g(x) + \sigma,$$

est dénombrable. Si en effet cet ensemble n'était pas dénombrable, il y aurait au moins un point x_0 tel que, dans tout intervalle entourant ce point, l'ensemble ne serait pas dénombrable. On peut choisir l'intervalle $(x_0 - \delta, x_0 - \delta)$ assez petit, pour qu'on ait à son intérieur:

$$g(x) > g(x_0) - \frac{\sigma}{2},$$

et on aura, dans cet intervalle, et dans tout intervalle plus petit entourant x_0, un ensemble *non dénombrable* de points pour lesquels:

$$f(x) > g(x) + \sigma > \left[g(x_0) - \frac{\sigma}{2}\right] + \sigma,$$

c'est-à-dire:

$$f(x) > g(x_0) + \frac{\sigma}{2}\cdot$$

Par suite, la quantité $M_1(x_0)$ serait au moins égale à $g(x_0) + \frac{\sigma}{2}$, ce qui est impossible, puisqu'elle est identique à $g(x_0)$.

Ainsi l'ensemble des points où l'on a:

$$f(x) > g(x) + \sigma,$$

est dénombrable, quel que soit le nombre positif σ. Il en résulte que l'ensemble des points où l'on a:

$$f(x) > g(x),$$

qui est limite du précédent, lorsqu'on donne à σ une suite de valeurs tendant vers 0, est aussi dénombrable. Il en est évidemment de même pour l'ensemble des points où $f(x) < g(x)$.

En résumé, les points où l'on a:

$$f(x) \gtrless g(x),$$

forment un ensemble dénombrable, ce qui démontre le théorème.

71. Démontrons maintenant un autre théorème auxiliaire, qui sera analogue à ceux que nous avons établis aux § 49, 50 et 51.

Etant donnée une fonction $f(x)$, appelons λ le maximum de $\omega_1[f(x)]$ dans l'intervalle que l'on considère. D'après cela, on a, en chaque point:

$$|M_1(x) - m_1(x)| \leq \lambda.$$

D'ailleurs on sait que M_1 est semi-continue supérieurement, m_1 semi-continue inférieurement; si donc nous imaginons la fonction multiforme définie par la condition d'avoir en chaque point deux valeurs, celle de M_1 et celle de m_1, l'oscillation de cette fonction en chaque point (au sens du § 14) sera précisément égale à ω_1.

On en déduit, d'après l'extension faite du théorème du § 51 aux fonctions multiformes (§ 52), qu'il est possible de déterminer une fonction continue $g(x)$ telle que, en chaque point, les deux nombres M_1 et m_1 soient compris entre $g(x)$ et $g(x)+\lambda$.

D'autre part, en faisant un raisonnement analogue à celui que nous venons de faire dans le § précédent, on voit que l'ensemble des points où l'on a :

$$f(x) > g(x) + \lambda + \sigma,$$

est dénombrable, ainsi que celui des points où :

$$f(x) < g(x) - \sigma.$$

On en conclut que les points où la condition :

$$g(x) \leq f(x) \leq g(x) + \lambda,$$

n'est pas remplie, forment un ensemble dénombrable. Ainsi, *à part un certain ensemble dénombrable E de points, la fonction $f(x)$ reste comprise entre $g(x)$ et $g(x)+\lambda$.*

Je décomposerai $f(x)$ de la manière suivante : Aux points qui ne font pas partie de E, je poserai :

$$\varphi(x) = g(x)$$

$$\psi(x) = f(x) - g(x).$$

Aux points de E je prendrai :

$$\varphi(x) = f(x)$$

$$\psi(x) = 0.$$

En tout point, on aura :

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x),$$

avec :

$$0 \leq \psi(x) \leq \lambda.$$

$\varphi(x)$ ne diffère d'une fonction continue qu'aux points d'un ensemble dénombrable ; ce sera donc une fonction pour laquelle $\omega_1[\varphi(x)]$ a son minimum nul en tout point.

J'ai supposé, dans ce qui précède, que l'on considérait une fonction définie sur un segment, en y comprenant les extrêmes. L'extension se fera, comme au § 50, si l'on considère seulement les points *intérieurs* au segment.

Enfin, une autre extension, analogue à celle du § 52, peut se faire, si on remplace le continu par un ensemble parfait quelconque. On peut ainsi résumer tous les résultats que nous venons d'obtenir dans l'énoncé suivant :

Si G est un ensemble parfait sur lequel la fonction $f(x)$ est définie, les points extrêmes pouvant être exceptés, et si le maximum de $\omega_1 [f(x), G, x]$ est λ, on peut poser:

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x),$$

$\psi(x)$ étant compris entre 0 et λ, et $\varphi(x)$ ne différant d'une fonction continue sur G qu'aux points d'un ensemble dénombrable.

72. Supposons maintenant qu'une fonction $f(x)$ remplisse la condition suivante : Dans tout ensemble parfait G, la fonction $\omega_1 [f(x), G]$ a son minimum nul en tout point.

Prenons un nombre positif σ, et considérons l'ensemble des points où $\omega_1 [f(x)] \geqq \sigma$; il s'agit, bien entendu, de la fonction ω_1 relative au continu. Soit P cet ensemble; P est fermé, et d'après l'hypothèse, est non dense. Soit $\alpha\beta$ un intervalle contigu à P; en chaque point intérieur à cet intervalle, on a:

$$\omega_1(x) < \sigma.$$

On peut donc, dans cet intervalle, poser :

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x),$$

$\varphi(x)$ ne différant d'une certaine fonction continue $g(x)$ qu'aux points d'un ensemble dénombrable, et $\psi(x)$ étant compris entre 0 et σ.

Il reste à définir φ, ψ, g, aux points de P. Considérons P^Ω; dans un intervalle contigu à P^Ω, P forme un ensemble réductible; aux points de P qui sont intérieurs à cet intervalle, nous posons :

$$\varphi(x) = g(x) = f(x)$$
$$\psi(x) = 0.$$

Dans cet intervalle, la fonction g est de première classe, puisque ses points de discontinuité forment un ensemble réductible; φ ne diffère toujours de g qu'aux points d'un ensemble dénombrable.

Soit maintenant P_1 l'ensemble des points de P^Ω où l'on a :

$$\omega_1 [f(x), P^\Omega] \geqq \sigma.$$

D'après l'hypothèse faite sur $f(x)$, P_1 est non dense par rapport à P^{Ω}, et dans tout intervalle contigu à P_1, on a :

$$\omega_1 [f(x),\ P^{\Omega}] < \sigma.$$

Nous opérons la décomposition de f en $\varphi + \psi$ aux points de P^{Ω} qui se trouvent dans un tel intervalle; φ sera identique à une fonction continue sur cette portion de P^{Ω}, que je désignerai par g, sauf un ensemble dénombrable; de sorte que si nous considérons φ et g dans tout l'intervalle continu contigu à P_1 (sauf les extrêmes), g est de première classe, et φ n'en diffère qu'aux points d'un ensemble dénombrable.

On voit en résumé qu'en suivant une marche tout à fait analogue à celle que nous avons suivie au § 53, on arrive à mettre $f(x)$ sous la forme suivante :

$$f(x) = \varphi_0(x) + \psi(x),$$

$\varphi_0(x)$ ne différant d'une fonction de première classe $g_0(x)$ qu'en un ensemble dénombrable de points, et $\psi(x)$ satisfaisant en tout point à la condition :

$$0 \leqq \psi(x) \leqq \sigma.$$

Nous appliquerons ensuite la même méthode à $\psi(x)$, en remplaçant σ par $\frac{\sigma}{2}\cdot$ Il faut montrer d'abord que $\psi(x)$ satisfait à la condition que nous avons supposée être remplie par $f(x)$, c'est-à-dire que $\omega_1[\psi(x),\ G]$ a son minimum nul en tout point de G; cela résulte de ce que $\psi(x)$ est la différence de deux fonctions $f(x)$ et $\varphi_0(x)$ pour chacune desquelles la condition est remplie.

On peut donc poser :

$$\psi(x) = \varphi_1(x) + \psi_1(x),$$

avec les conditions suivantes :

$$0 \leqq \varphi_1(x) \leqq \sigma$$

$$0 \leqq \psi_1(x) \leqq \frac{\sigma}{2}\cdot$$

De plus, φ_1 ne diffère d'une certaine fonction de première classe g_1 qu'aux points d'un ensemble dénombrable. On a également pour g_1 :

$$0 \leqq g_1(x) \leqq \sigma.$$

On répétera la même opération pour ψ_1 en remplaçant $\frac{\sigma}{2}$ par $\frac{\sigma}{4}$, et ainsi de suite indéfiniment. On arrive ainsi à la formule suivante:

$$f(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \cdots + \varphi_n(x) + \cdots$$

cette série étant uniformément convergente, et chaque fonction $\varphi_n(x)$ ne différant qu'en un ensemble dénombrable E_n d'une fonction de première classe $g_n(x)$.

Posons:

$$g(x) = g_0(x) + g_1(x) + g_2(x) + \cdots + g_n(x) + \cdots$$

Nous avons là une série uniformément convergente dont les termes sont tous des fonctions de première classe; donc $g(x)$ est aussi une fonction de première classe. D'autre part, l'ensemble E formé par la réunion de tous les ensembles dénombrables E_n est encore dénombrable. En tout point qui n'appartient pas à E, $f(x)$ est identique à $g(x)$. Nous avons donc démontré le résultat annoncé au § 70: la fonction $f(x)$ ne diffère d'une certaine fonction de première classe qu'aux points d'un ensemble dénombrable.

73. Dans l'étude que nous venons de faire, nous avons trouvé une condition *suffisante* pour qu'une fonction soit de deuxième classe: c'est que $\omega_1[f(x), G]$ ait son minimum nul en tout point de G, quel que soit G supposé parfait. Il est bien facile de montrer que cette condition n'est pas nécessaire. Je prendrai l'exemple suivant:

Dans l'intervalle (0, 1), prenons un ensemble parfait non dense E_1; pour fixer les idées, ce sera l'ensemble type du § 37, défini par la formule:

$$z = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \cdots + \frac{c_n}{3^n} + \cdots$$

le nombre des fractions étant fini ou infini, et chaque nombre c pouvant prendre la valeur 0 ou la valeur 2.

Je formerai ensuite un ensemble E_2 de la manière suivante: dans chaque intervalle *contigu à* E_1, je formerai l'ensemble qui, par rapport à cet intervalle, a la même situation que E_1 par rapport à l'intervalle (0, 1); l'opération étant supposée effectuée dans tous les intervalles *contigus* à E_1, je désigne l'ensemble total par E_2.

Je déduirai E_3 de E_2 par le même procédé, c'est-à-dire que dans tout intervalle *contigu* à E_2, j'introduis un ensemble jouant le même rôle par rapport à cet intervalle que E_1 par rapport à (0, 1).

Je définis ainsi E_1, E_2,... E_n,... Chacun de ces ensembles contient les précédents, et est non dense par rapport au continu; mais si nous désignons par E l'ensemble limite de E_n, il est facile de voir que E est dense dans toute portion du continu; il suffit de s'assurer, par exemple, qu'en désignant par α_n le maximum de la longueur des segments *contigus* à E_n, α_n tend vers 0 quand n croît indéfiniment. L'ensemble E est ce que j'ai appelé au § 59 un ensemble de *première catégorie.*

Considérons alors la fonction $f(x)$ qui a la valeur 1 pour les points de E, la valeur 0 aux autres points; je dis que $f(x)$ est de deuxième classe. Pour cela, je prends $f_n(x)$, définie par la condition d'être égale à 1 aux points de E_n, à 0 aux autres points. Il est bien évident que $f_n(x)$ a pour limite $f(x)$; d'ailleurs $f_n(x)$ est une fonction de première classe, car elle n'a de discontinuités que sur l'ensemble parfait E_n, et elle est continue sur cet ensemble; donc $f(x)$ est de la deuxième classe.

D'autre part, si nous appliquons à cet exemple les définitions que nous avons données des nombres M_1, m_1, ω_1 (relatifs au continu), nous reconnaissons qu'on a, en tout point:

$$M_1 = 1, \quad m_1 = 0, \quad \omega_1 = 1,$$

ce qui montre que la condition du numéro précédent n'est pas remplie par cette fonction.

74. Je vais maintenant indiquer des conditions nécessaires auxquelles satisfont les fonctions de deuxième classe; il me faudra pour cela poser de nouvelles définitions.

Je rappelle qu'au § 59 j'ai appelé ensemble de *première catégorie* tout ensemble formé par la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles non denses. Considérons maintenant une fonction $f(x)$ définie dans l'intervalle $\alpha\,\beta$. Il existe un nombre $M_2(\alpha\,\beta)$ qui est *la limite inférieure des nombres* λ *tels que les points où* $f(x) > \lambda$ *forment un ensemble de première catégorie,* et ce nombre est en même temps *la limite supérieure des nombres* λ *tels que les points où* $f(x) > \lambda$ *forment un ensemble de deuxième catégorie.*

De même, il existe un nombre $m_2(\alpha\,\beta)$ tel que, suivant qu'on a $\lambda > m_2$ ou $\lambda < m_2$, les points où $f(x) < \lambda$ forment un ensemble de deuxième ou de première catégorie.

Comme pour la définition de $M_1(\alpha\,\beta)$ et de $m_1(\alpha\,\beta)$, il est indifférent de mettre $f(x) \leqq \lambda$ ou $f(x) < \lambda$.

On a d'ailleurs :

$$M_0(\alpha\beta) \geqq M_1(\alpha\beta) \geqq M_2(\alpha\beta) \geqq m_2(\alpha\beta) \geqq m_1(\alpha\beta) \geqq m_0(\alpha\beta).$$

Je me contente de démontrer l'inégalité :

$$M_2(\alpha\beta) \geqq m_2(\alpha\beta).$$

Elle résulte de ce que, si on a : $\lambda > M_2$, l'ensemble des points où $f(x) \geqq \lambda$ étant de première catégorie, l'ensemble complémentaire, en chaque point duquel on a : $f(x) < \lambda$, se trouve être de deuxième catégorie ; on a donc aussi $\lambda \geqq m_2$.

Si on considère un point x_0, nous appellerons $M_2(x_0)$ et $m_2(x_0)$ les limites vers lesquelles tendent respectivement $M_2(\alpha\beta)$ et $m_2(\alpha\beta)$ si on prend pour $\alpha\beta$ l'intervalle $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ et si l'on fait tendre δ vers 0.

Posons enfin :

$$\omega_2(\alpha\beta) = M_2(\alpha\beta) - m_2(\alpha\beta)$$

$$\omega_2(x_0) = M_2(x_0) - m_2(x_0).$$

Nous pourrons dire que les nombres M_2, m_2, ω_2, considérés, soit dans un intervalle $\alpha\beta$, soit en un point x_0, représentent le maximum, le minimum, l'oscillation de $f(x)$ *quand on néglige les ensembles de première catégorie ;* il est évident que si E est un ensemble de première catégorie, on peut, pour définir ces nombres, faire complètement abstraction des valeurs de la fonction aux points de E.

Enfin on prouvera aisément, comme au § 68, que $M_2(x)$ et $\omega_2(x)$ sont semi-continues supérieurement, $m_2(x)$ semi-continue inférieurement.

75. Supposons à prèsent qu'on ait une suite de fonctions de première classe :

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x), \dots\ \varphi_n(x), \dots$$

ayant une fonction limite $\varphi(x)$. Je vais définir une fonction $f(x, y)$ de la manière suivante : je prends d'abord une suite décroissante de quantités positives et tendant vers 0 : $y_1,\ y_2, \dots\ y_n, \dots$ et je pose :

$$f(x,\ y_n) = \varphi_n(x)$$

$$f(x,\ 0) = \varphi(x).$$

Sur chaque parallèle à $0y$, $x = x_0$, la fonction se trouve définie en des points qui ont pour limite le point $y = 0$; pour la définir aux autres points, entre $(x_0,\ y_n)$ et $(x_0,\ y_{n+1})$ par exemple, je conviens de raccorder linéairement les valeurs en ces deux points, c'est-à-dire que je pose :

$$f(x_0, y) = \frac{y_n - y}{y_n - y_{n+1}} f(x_0, y_{n+1}) + \frac{y - y_{n+1}}{y_n - y_{n+1}} f(x_0, y_n). \tag{1}$$

C'est le procédé que j'ai déjà employé au § 20; on reconnaît que la fonction ainsi définie est, en tout point de $x = x_0$, continue par rapport à y.

Si maintenant on considère une droite parallèle à $0x$, et d'ordonnée positive, la fonction, considérée sur cette droite comme fonction de x, est de première classe; cela a lieu, d'après les hypothèses, sur les droites $y = y_n$, et aussi sur les autres droites parallèles à $0x$ (sauf $y = 0$), où $f(x, y)$ est, d'après la formule (1), une combinaison linéaire de fonctions de première classe.

Rappelons un résultat obtenu au chapitre II: si on considère la suite de fonctions :

$$\varphi_1(x), \ \varphi_2(x), \ldots \ \varphi_n(x), \ldots,$$

l'ensemble P des points en chacun desquels une au moins des fonctions est discontinue, est un ensemble de première catégorie; en chaque point de l'ensemble complémentaire $E - P$ (E représentant le continu), toutes les fonctions sont continues par rapport à x. Soit $A\,(x_0)$ un point quelconque de cet ensemble $E - P$; je dis que, quel que soit y, pourvu qu'il soit positif, $f(x_0, y)$ est continue au point (x_0, y) par rapport à x. Cela a lieu, d'après l'hypothèse, quand y fait partie de la suite : $y_1, y_2, \ldots y_n, \ldots$; par suite, cela a lieu aux autres points de la droite $x = x_0$, en vertu de la formule (1).

Mon but est donc d'étudier la fonction: $\varphi(x) = f(x, 0)$, sachant que $f(x, y)$ est en tout point continue par rapport à y, que, pour $y_0 > 0$, $f(x, y_0)$ est *de première classe* par rapport à x, et que, pour toute valeur x_0 qui n'appartient pas à un certain ensemble de première catégorie P, $f(x, y)$ est continue par rapport à x au point (x_0, y) si y est positif.

76. Prenons sur $0x$ un point quelconque $A_0(x_0)$, et considérons la droite $x = x_0$. La fonction est continue sur cette droite; si donc on se donne un nombre positif σ, il existe un segment $A_0 B_0$ (fig. 13) de longueur α_σ qui possède la double propriété suivante : dans $A_0 B_0$, l'oscillation de la fonction est σ; dans un segment $A_0 B_1$ de longueur supérieure à α_σ, l'oscillation est supérieure à σ. La quantité α_σ est ainsi une fonction parfaitement déterminée de x, qui a en chaque point une valeur *positive*.

Je vais démontrer que si $A_0(x_0)$ est un point de $E - P$, $\alpha_\sigma(x)$ est, en ce point, semi-continue supérieurement par rapport à x; la démonstration est tout à fait analogue à celle du § 23.

Je prends :

$$A_0 B_1 = \alpha_\sigma(x_0) + \varepsilon.$$

Dans le segment $A_0 B_1$, l'oscillation est un nombre supérieur à σ; soit $\sigma + k$. Si je prends $k_1 < k$, je peux trouver, entre A et B_1, deux points P et Q tels que :

$$|f(P) - f(Q)| > \sigma + k_1.$$

Comme, en chacun des deux points P et Q, il y a continuité par rapport à x, on peut déterminer deux segments $P' P''$ et $Q' Q''$, parallèles à $0x$,

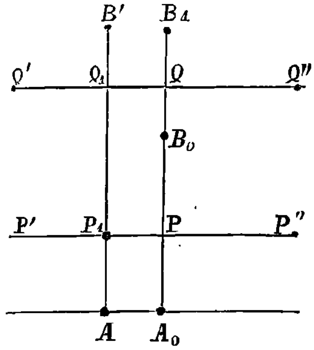

Fig. 13.

ayant pour milieux P et Q, de même longueur 2δ, tels que, si P_1 et Q_1 sont deux points quelconques pris respectivement sur ces segments, on a :

$$|f(P_1) - f(P)| < \frac{k_1}{2}$$

$$|f(Q_1) - f(Q)| < \frac{k_1}{2}.$$

Des trois inégalités écrites on déduit :

$$|f(P_1) - f(Q_1)| > \sigma,$$

P_1 et Q_1 étant deux points quelconques pris, le premier sur $P' P''$, le second sur $Q' Q''$.

Si alors on prend un point $A(x)$ d'abscisse comprise entre $x_0 - \delta$ et $x_0 + \delta$, et si on considère le segment $A B'$ correspondant à A et de longueur $\alpha_\sigma(x_0) + \varepsilon$, on voit que dans ce segment l'oscillation est $> \sigma$, puisqu'il renferme un couple de points P_1 et Q_1. Donc, toutes les fois que:

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta,$$

on a:

$$\alpha_\sigma(x) < \alpha_\sigma(x_0) + \varepsilon,$$

ce qui exprime la propriété que je voulais établir.

Considérons maintenant la fonction m_2 relative à α_σ, c'est-à-dire le minimum de α_σ *lorsqu'on néglige les ensembles de première catégorie*. Je dis que $m_2(\alpha_\sigma)$ ne peut pas être nul pour tous les points d'un intervalle continu AB. Supposons pour un instant que cela ait lieu, c'est-à-dire que, dans toute portion de l'intervalle, et si petit que soit ε, les points où $\alpha_\sigma < \varepsilon$ forment un ensemble de deuxième catégorie; cet ensemble a certainement des points communs avec $E - P$ (§ 59); donc, dans toute portion de $E - P$, et si petit que soit ε, on peut trouver un point de $E - P$ où l'on a: $\alpha_\sigma < \varepsilon$; et comme, en tout point de $E - P$, α_σ est semi-continue supérieurement, il y a, autour de ce point, un intervalle où l'on a partout:

$$\alpha_\sigma < 2\varepsilon.$$

Ainsi, dans toute portion de AB, et si petit que soit ε, il y a un intervalle en tout point duquel on a:

$$\alpha_\sigma < 2\varepsilon.$$

On en déduit l'existence d'un point où $\alpha_\sigma = 0$, ce qui montre que l'hypothèse est inadmissible.

En résumé, $m_2(\alpha_\sigma)$ ne pouvant être nul pour tous les points d'un intervalle continu, les points où $m_2(\alpha_\sigma)$ est nul forment un ensemble *non dense*. Autrement dit, dans tout intervalle il existe un autre intervalle (AB) tel que l'on a:

$$m_2[\alpha_\sigma, AB] > 0.$$

On peut aussi conclure de là qu'il existe dans tout intervalle un point x où $m_2[\alpha_\sigma, x]$ est positif, quel que soit σ.

Soit AB un intervalle tel que $m_2[\alpha_\sigma, AB]$ soit positif; prenons un nombre positif γ inférieur à ce nombre. Les points de AB où l'on a:

$$\alpha_\sigma < \gamma,$$

forment un ensemble de première catégorie Q. Traçons (fig. 14) le rectangle $ABA'B'$ qui a pour base AB et dont la hauteur est γ. Si M est un point de AB n'appartenant pas à Q, on a en ce point:

$$\alpha_\sigma \geqq \gamma.$$

Par suite, dans le segment MM' parallèle à $0y$ et qui joint les deux bases du rectangle $ABB'A'$, l'oscillation est $\leqq \sigma$.

Soit R l'ensemble formé par la réunion de P et de Q, P désignant toujours, comme plus haut, l'ensemble des points x_0 tels que, sur les points de $x = x_0$, il y a continuité par rapport à x. L'ensemble $E - R$ possède à la fois les propriétés de $E - P$ et de $E - Q$; c'est-à-dire que si M appartient à $E - R$, l'oscillation sur MM' est $\leqq \sigma$, et en tout point de MM' distinct de M, il y a continuité par rapport à x.

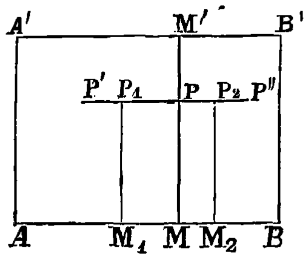

Fig. 14.

Je dis que, si $M\ (x_0)$ est un point de AB appartenant à $E - R$, l'oscillation de la fonction en ce point *par rapport aux points de* $E - R$ est $\leqq 2\sigma$. En effet, donnons-nous un nombre positif ε; prenons sur MM' un point quelconque $P(x_0, y_0)$; nous pouvons déterminer un nombre β assez petit pour que, sur le segment $P'P''$ ($x_0 - \beta \leqq x \leqq x_0 + \beta$, $y = y_0$), l'oscillation soit $< \varepsilon$. Si M_1 et M_2 sont deux points de AB appartenant à $E - R$ et pris dans l'intervalle $x_0 - \beta \leqq x \leqq x + \beta$, et si P_1 et P_2 sont les projections de ces points sur $P'\ P''$, on a:

$$|f(M_1) - f(P_1)| \leqq \sigma,$$
$$|f(M_2) - f(P_2)| \leqq \sigma,$$
$$|f(P_1) - f(P_2)| < \varepsilon,$$

d'où l'on déduit:

$$|f(M_1) - f(M_2)| < 2\sigma + \varepsilon,$$

ce qui démontre qu'au point M, quand on ne considère que les points de $E - R$, l'oscillation est $\leqq 2\sigma$.

D'ailleurs R est un ensemble de première catégorie; si donc on considère tous les points du continu E, et si en chaque point on définit $\omega_2\,[\varphi(x)]$, cette quantité sera $\leqq 2\sigma$.

Ainsi, dans toute portion de l'intervalle considéré, et si petit que soit σ, il y a un intervalle en chaque point duquel on a: $\omega_2 \leq 2\sigma$. Il en résulte que, dans toute portion de l'intervalle, il existe des points où l'on a: $\omega_2 = 0$. Autrement dit, *si une fonction $\varphi(x)$ est de deuxième classe, la fonction $\omega_2[\varphi(x)]$ a son minimum nul en tout point.*

77. On peut refaire une théorie analogue à celle que je viens d'exposer en partant d'un ensemble parfait quelconque G, qui jouera le rôle du continu dans les considérations qui précèdent. Nous définirons, dans tout intervalle $\alpha\beta$ contenant des points de G, et en chaque point de G, les nombres:

$$M_2[\varphi(x),\ G,\ \alpha\beta],\quad M_2[\varphi(x),\ G,\ x_0],\ \text{etc.}\ldots$$

Par exemple, $M_2[\varphi(x),\ G,\ \alpha\beta]$ sera la limite supérieure des nombres λ tels que les points de G situés dans l'intervalle $\alpha\beta$ où l'on a: $f(x) > \lambda$, forment un ensemble de deuxième catégorie par rapport à G.

Les raisonnements du numéro précédent s'appliquent quand on remplace le continu par un ensemble parfait G; on en déduit l'énoncé suivant:

Si une fonction est de deuxième classe, et si on considère un ensemble parfait quelconque G, la fonction $\omega_2[\varphi(x),\ G]$ a son minimum nul en tout point de G.

Nous avons ainsi obtenu des conditions nécessaires; mais il semble difficile d'obtenir des conditions suffisantes. Je bornerai donc ici l'étude des fonctions de deuxième classe.

CHAPITRE IV.

Fonctions de plusieurs variables.

78. Au sujet des fonctions de plusieurs variables, il se pose des questions tout à fait analogues à celles dont nous nous sommes occupés relativement aux fonctions d'une seule variable. En particulier, les notions indiquées au commencement du chapitre III sur les fonctions des différentes classes, s'appliquent mot pour mot, si l'on considère des fonctions de n variables. Nous appellerons classe 0 l'ensemble des fonctions continues, classe 1 l'ensemble des fonctions discontinues qui peuvent être considérées comme limites de fonctions continues, etc.... Il y aurait, comme pour le cas d'une seule variable, à étudier les fonctions de ces différentes classes, en commençant par celles

de classe 1. On conçoit tout de suite que cette étude serait plus difficile que l'étude des fonctions d'une seule variable; supposons, pour prendre le premier problème qui se pose, qu'on cherche la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $f(x, y)$ soit la limite d'une suite de fonctions $f_1(x, y)$, $f_2(x, y), \ldots f_n(x, y), \ldots$, dont chacune soit continue par rapport à l'ensemble (x, y); les résultats que nous avons démontrés dans le chapitre II nous donneront bien aisément des conditions nécessaires, mais si nous cherchons des conditions suffisantes, nous serons amenés à considérer des ensembles parfaits de points dans le plan; or, il est plus difficile de raisonner sur ces ensembles que sur les ensembles parfaits linéaires. On peut dire que la théorie de ces derniers est complète: tous les points qui ne font pas partie de l'ensemble sont constitués par les points intérieurs à une infinité d'intervalles *parfaitement déterminés*, qui sont les intervalles *contigus* à l'ensemble. Dans le cas du plan, les choses sont loin de se présenter d'une manière aussi nette; il faudrait donc en premier lieu chercher ce qui, dans le plan, remplacera la notion d'intervalle *contigu* à l'ensemble. Dans tous les cas, il faudrait faire, à un point de vue en quelque sorte géométrique, une étude de l'ensemble parfait à deux dimensions le plus général; c'est seulement alors qu'on pourrait aborder le problème relatif aux fonctions.

En ce qui concerne les fonctions de plusieurs variables en général, je me bornerai donc à ces indications; je vais, dans ce chapitre, donner quelques résultats sur les fonctions de plusieurs variables continues par rapport à chacune d'elles.

I. Fonctions de deux variables, continues par rapport à chacune d'elles.

79. Nous avons déjà obtenu, dans le chapitre II, des résultats importants sur les fonctions de deux variables, continues par rapport à chacune d'elles; je me propose de compléter ces résultats.

Soit $f(x, y)$ une telle fonction; nous avons reconnu (§ 25) que l'ensemble des points où l'oscillation par rapport à (x, y) est $\geqq \sigma$ est un ensemble qui n'est dense nulle part par rapport au continu, et qui n'est dense non plus par rapport à aucune portion de la courbe: $y = \varphi(x)$, $\varphi(x)$ étant une fonction continue. Posons-nous maintenant la question suivante: soit un rectangle parallèle aux axes:

$$\alpha \leqq x \leqq \beta, \quad \gamma \leqq y \leqq \delta.$$

Parmi les segments parallèles à $0\,y$ et contenus dans ce rectangle, c'est-à-dire parmi les segments:

$$x = x_0, \quad \gamma \leqq y \leqq \delta,$$

en supposant x_0 compris entre α et β, considérons ceux qui contiennent un point où l'oscillation est $\geqq \sigma$, et prenons leurs points d'intersection avec $0\,x$; ces points peuvent-ils former sur $0\,x$ un ensemble dense par rapport au continu? En d'autres termes, les segments en question peuvent-ils former un faisceau dense par rapport au faisceau de tous les segments parallèles à $0\,y$? C'est la question que je me propose de traiter, et qui m'amène tout naturellement à de nouvelles études sur la théorie des ensembles.

80. Supposons que, dans le rectangle:

$$\alpha \leqq x \leqq \beta, \quad \gamma \leqq y \leqq \delta,$$

il existe un ensemble de points E réparti de telle manière que, entre deux droites parallèles à $0\,y$: $x = a$, $x = b$, (supposées limitées aux bases du rectangle), il existe toujours une droite $x = c$ contenant un point de E; je suppose de plus que E est fermé.

Remarquons d'abord que ces deux conditions entraînent la suivante: Sur *toute* parallèle à $0\,y$, il y a au moins un point de E. Cela résulte du théorème suivant:

Si une droite $x = a$ est limite d'une suite de droites $x = a_1$, $x = a_2, \ldots$, $x = a_n \ldots$, dont chacune contient un point de E, supposé fermé, elle contient un point de E au moins. Soit en effet $P\,Q\,(x = a,\ \gamma \leqq y \leqq \delta)$ le segment limite de la suite de segments $P_1\,Q_1$, $P_2\,Q_2, \ldots\ P_n\,Q_n\ [x = a_n,\ \gamma \leqq y \leqq \delta], \ldots$; chacun de ces segments contient un point de E au moins. Partageons tous ces segments en deux par la droite $R_1\,R_2, \ldots\ R_n, \ldots\ R$, d'ordonnée $y = \dfrac{\gamma + \delta}{2}$. Je dis qu'un au moins des deux segments $P\,R$, $R\,Q$, a la propriété que nous supposons appartenir à $P\,Q$; en effet, ou bien, parmi les segments $P_1\,R_1$, $P_2\,R_2, \ldots\ P_n\,R_n, \ldots$, il y en a une infinité contenant des points de E et admettant $P\,R$ comme limite, ou bien la chose a lieu pour $R\,Q$; car si la propriété n'avait lieu ni pour $P\,R$, ni pour $R\,Q$, elle n'aurait pas lieu non plus pour le segment total $P\,Q$. Supposons par exemple que $P\,R$ possède la propriété; on divisera $P\,R$ en deux segments, dont un au moins la possèdera, et ainsi de suite indéfiniment. On arrive ainsi à la démonstration de l'existence d'un point $M\,(y_0)$ de $P\,Q$, qui possède la propriété suivante: si petit que soit ε, le segment:

$$x = a, \quad y_0 - \varepsilon \leq y \leq y_0 + \varepsilon,$$

est la limite d'une suite de segments:

$$x = a'_n, \quad y_0 - \varepsilon \leq x \leq y_0 + \varepsilon, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

dont chacun contient au moins un point de E. Le point M est donc un point-limite de E, et par suite fait partie de E.

Nous pouvons énoncer le résultat sous une autre forme: Si E est fermé, et si on *projette* cet ensemble sur une droite, l'ensemble projeté est fermé.

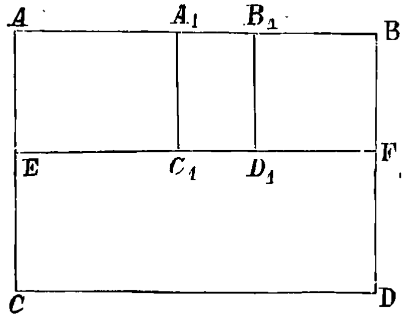

Fig. 15.

81. Cette remarque étant faite, reprenons l'ensemble E, supposé fermé, et réparti sur toutes les parallèles à $0y$ dans le rectangle $A\,B\,C\,D$ (fig. 15):

$$\alpha \leq x \leq \beta, \quad \gamma \leq y \leq \delta.$$

Traçons la droite $E\,F$:

$$y = \frac{\gamma + \delta}{2}.$$

Je dis qu'il existe certainement un rectangle parallèle aux axes, ayant pour bases des portions de $A\,B$ et de $E\,F$, ou de $E\,F$ et de $C\,D$, tel que, sur chaque segment parallèle à $0y$ joignant les bases de ce rectangle, il y a au moins un point de E.

Si en effet cela n'était pas, c'est que, en projetant sur $A\,B$ (parallèlement à $0y$) les points de l'ensemble E contenus dans le rectangle $A\,B\,F\,E$, ou ceux qui sont contenus dans $E\,F\,C\,D$, on aurait chaque fois un ensemble *non dense;* on en déduirait que, dans le rectangle total $A\,B\,C\,D$, il n'y aurait qu'un ensemble *non dense* de parallèles à $0y$ portant des points de E, ce qui serait contraire à l'hypothèse.

Il existe donc certainement un rectangle tel que $A_1 B_1 C_1 D_1$ (fig. 15), qui se trouve dans les mêmes conditions que le rectangle primitif $A\,B\,C\,D$: l'ensemble E est réparti sur toutes les parallèles à $0\,y$ contenues dans ce rectangle; de plus, la hauteur de ce nouveau rectangle est la moitié de celle du rectangle primitif. Je désigne par α_1, β_1, γ_1, δ_1 les coordonnées qui jouent le même rôle par rapport à $A_1 B_1 C_1 D_1$ que α, β, γ, δ, par rapport à $A\,B\,C\,D$, de sorte que $A_1 B_1 C_1 D_1$ peut être représenté par:

$$\alpha_1 \leqq x \leqq \beta_1, \quad \gamma_1 \leqq y \leqq \delta_1,$$

et l'on a:

$$\delta_1 - \gamma_1 = \frac{\delta - \gamma}{2}.$$

Par le même raisonnement, on voit qu'il existe dans $A_1 B_1 C_1 D_1$ un rectangle $A_2 B_2 C_2 D_2$:

$$\alpha_2 \leqq x \leqq \beta_2, \quad \gamma_2 \leqq y \leqq \delta_2,$$

possédant les mêmes propriétés que $A\,B\,C\,D$ et $A_1 B_1 C_1 D_1$, et tel que:

$$\delta_2 - \gamma_2 = \frac{\delta - \gamma}{2^2}.$$

En répétant indéfiniment l'opération, on obtient une suite de rectangles dont chacun est contenu dans celui qui le précède; de plus, on peut s'assujettir à prendre toujours:

$$\alpha_n > \alpha_{n-1}, \quad \beta_n < \beta_{n-1},$$

les inégalités excluant les égalités. Dans ces conditions, il existe au moins un point $P(x_0, y_0)$ appartenant à E, et tel qu'on a, quel que soit n:

$$\alpha_n < x_0 < \beta_n, \quad \gamma_n \leqq y_0 \leqq \delta_n.$$

Ce point possède la propriété suivante: *Si on prend une aire quelconque contenant P à son intérieur, si petite qu'elle soit, on peut trouver dans cette aire un rectangle de côtés parallèles aux axes, dans lequel l'ensemble E est réparti sur toutes les parallèles à $0\,y$, P étant contenu dans ce rectangle, mais ne se trouvant pas sur l'un des côtés parallèles à $0\,y$.*

Si nous reprenons le rectangle $A\,B\,C\,D$, et si nous considérons deux parallèles quelconques à $0\,y$, le raisonnement s'applique aussi bien à la portion de $A\,B\,C\,D$ limitée par ces deux droites qu'au rectangle total; il existe donc, entre ces deux droites, un point de même nature que le point dont je viens de démontrer l'existence; je dirai qu'un point *est un point P* s'il possède la propriété fondamentale que je viens d'énoncer. Nous pouvons dire alors que *l'ensemble des parallèles à $O y$ qui portent des points P est un ensemble dense.*

Je vais montrer que l'ensemble des points P est un ensemble *dense en lui-même*, c'est-à-dire qu'un point P ne peut pas être isolé. Supposons pour un instant qu'il puisse exister un point P_0 (x_0, y_0) isolé; je peux alors déterminer un rectangle $A B C D$ (fig. 16) contenant P_0 *à son intérieur* et ne contenant pas d'autre point P. Soit:

$$\alpha \leqq x \leqq \beta, \quad \gamma \leqq y \leqq \delta,$$

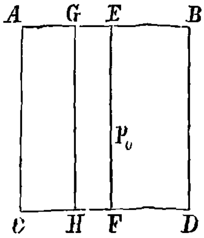

Fig. 16.

ce rectangle. On a:

$$\alpha < x_0 < \beta, \quad \gamma \leqq y_0 \leqq \delta.$$

Menons la droite $G H$:

$$x = x_0 - \varepsilon.$$

Le rectangle $A C G H$ ne contient, par hypothèse, aucun point P; donc, entre $A C$ et $G H$, il ne peut y avoir qu'un ensemble *non dense* de segments parallèles à $O y$ portant des points de l'ensemble E. Ce raisonnement s'applique, si petit que soit ε, de sorte que, dans le rectangle $A C E F$, l'ensemble des segments qui portent des points de E est *non dense;* cela est encore vrai pour le rectangle $E F B D$, et par suite pour le rectangle $A B C D$. Donc le point P_0 ne peut pas posséder la propriété caractéristique des points P, puisqu'il y a des valeurs x' de x aussi voisines qu'on veut de x_0 et telles que $x = x'$ ne contient aucun point de E. L'hypothèse faite sur P_0 est donc inadmissible: P_0 n'est pas un point isolé.

En appelant G l'ensemble des points P, on voit donc que G, qui est contenu dans E, est un ensemble *dense en lui-même;* l'ensemble G', dérivé de G, est aussi contenu dans E, et c'est un ensemble *parfait;* de plus, il est, dans le rectangle donné, réparti sur toutes les parallèles à $O y$.

Voici maintenant la conséquence que je déduis de la propriété essentielle des points P. Supposons que, en chaque point M de E, on construise le segment parallèle à $0y$, ayant ce point pour milieu, et de longueur $2h$; considérons l'ensemble de tous les points qui se trouvent appartenir aux segments ainsi construits; prenons un point $P(x_0, y_0)$; je dis que, si petit que soit h, il existe une aire contenant P à son intérieur, et dont tous les points appartiennent à l'ensemble précédent. En effet, traçons les droites:

$$y = y_0 \pm \frac{h}{2}.$$

D'après la propriété de P, il existe certainement un rectangle R ayant pour bases des portions de ces droites, comprenant P entre ses côtés parallèles à $0y$, et tel que l'ensemble E est réparti sur tous les segments parallèles à $0y$ contenus dans R. Si, par chaque point (x_1, y_1) de E contenu dans R, on mène le segment de longueur $2h$ qui a ce point pour milieu, ce segment:

$$x = x_1, \quad y_1 - h \leqq y \leqq y_1 + h,$$

contiendra tout le segment:

$$x = x_1, \quad y_0 - \frac{h}{2} \leqq y \leqq y_0 + \frac{h}{2}.$$

On pourra donc affirmer que tout point du rectangle R appartient à un segment de longueur $2h$ ayant pour milieu un point de E.

82. Considérons maintenant une fonction $f(x, y)$ continue par rapport à chacune des variables; reprenons la fonction $\alpha_\sigma(x, y)$ définie au chapitre II: c'est la demi-longueur du plus grand segment parallèle à $0y$ et de milieu $A(x, y)$, dans lequel l'oscillation est égale à σ.

Nous savons que α_σ est une fonction positive et semi-continue supérieurement; si on considère un ensemble parfait quelconque E, je dis qu'il est impossible que, en tout point de E, α_σ ait son minimum nul par rapport à E. La démonstration a déjà été faite au chapitre I (§ 12), quand on considère une fonction de n variables qui peuvent prendre toutes les valeurs comprises entre certaines limites; je l'ai étendue ensuite, au chapitre II (§ 28), au cas où la fonction est seulement définie aux points d'un ensemble parfait linéaire. D'une manière plus générale, le théorème est vrai si la fonction est définie sur un ensemble parfait absolument quelconque, dans un domaine à n dimensions; il suffit, pour le voir, de reprendre avec quelques modifications de détail, la démonstration donnée au § 28; j'admettrai donc ce résultat.

83. Cela posé, considérons la fonction $f(x, y)$ dans un certain rectangle $A\,B\,C\,D$ parallèle aux axes, et admettons pour un instant que l'ensemble E des points où l'oscillation est $\geqq \sigma$ puisse être réparti dans ce rectangle sur toutes les parallèles à $0\,y$.

L'ensemble E est essentiellement fermé; par le procédé du § 81 je déduis de E un ensemble G, dont chaque point P possède la propriété étudiée dans ce paragraphe; j'ai fait remarquer de plus que G' est parfait, et réparti sur toutes les parallèles à $0\,y$. Il est donc impossible que α_σ, considérée comme fonction définie sur G', ait, en tout point de G', son minimum nul par rapport à G'. Il est également impossible que ce minimum de α_σ par rapport à G' soit nul en tous les points de G, car alors il serait nul en tout point de G'. *Il existe donc certainement des points de G en chacun desquels α_σ a son minimum par rapport à G' positif.*

Je dis que, en un point P de G où α_σ a son minimum positif par rapport à G', l'oscillation de la fonction par rapport à (x, y) est $\leqq 2\,\sigma$. En effet, prenons un nombre positif h inférieur à ce minimum. D'après ce que nous venons de voir au § 81, si par chaque point de G' on mène le segment parallèle à $0\,y$ et de longueur $2\,h$ qui a ce point pour milieu, il existe un rectangle contenant P à son intérieur, et dont tout point fait partie d'un de ces segments; par suite, sur chaque segment parallèle à $0\,y$ contenu dans ce rectangle, l'oscillation est $\leqq \sigma$. On en déduit, en raisonnant comme au § 24, qu'au point P l'oscillation par rapport à (x, y) est $\leqq 2\,\sigma$. Nous dirons, sous une autre forme: Si, en un point P, l'oscillation est $\geqq \sigma$, et si l'on a $\sigma' < \frac{\sigma}{2}$, la fonction $\alpha_{\sigma'}$ a en P son minimum nul par rapport à G'.

Nous sommes maintenant en mesure de montrer que l'hypothèse faite plus haut aboutit à une contradiction: l'ensemble E des points où $\omega \geqq \sigma$ serait réparti sur toutes les parallèles à $0\,y$ dans $A\,B\,C\,D$. Il en résulterait que $\alpha_{\sigma'}$ aurait son minimum nul en tous les points de G; nous avons vu que cela est impossible.

En résumé, il est établi que, dans tout rectangle tel que $A\,B\,C\,D$, l'ensemble des parallèles à $0\,y$ portant des points où $\omega \geqq \sigma$, est un ensemble non dense. La conclusion de cette étude est donc le théorème suivant:

Si $f(x, y)$ est une fonction continue par rapport à chacune des variables, l'ensemble des points où l'on a: $\omega\,[f(x, y)] \geqq \sigma$, se projette sur chacun des deux axes, parallèlement à l'autre, suivant un ensemble non dense.

84. J'indique maintenant une autre propriété des fonctions séparément continues par rapport à x et y, propriété qui a été remarquée par M. Volterra.

Si on considère un point $A(x_0, y_0)$, et si on se donne un nombre ε, on peut, dans tout cercle de centre A, trouver un autre cercle en tout point duquel on a:

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon. \tag{1}$$

En effet, nous pouvons prendre, sur $0x$ par exemple, et à partir de A, un segment AB contenu tout entier dans le cercle donné, et dans lequel l'oscillation sera inférieure à $\frac{\varepsilon}{2}$. Dans le segment AB, il existe des points où la fonction est continue par rapport à l'ensemble (x, y); prenons l'un de ces points; nous pourrons trouver un cercle C ayant pour centre ce point, et dans lequel l'oscillation sera inférieure à $\frac{\varepsilon}{2}$. Il est évident qu'en tout point du cercle C, l'inégalité (1) a lieu.

Remarquons la différence qui se présente entre les points de continuité et les points de discontinuité: si en A la fonction est continue, on peut toujours choisir pour cercle C un cercle contenant A; au contraire, s'il y a une discontinuité en A, lorsque ε est suffisamment petit, on est obligé de prendre pour cercle C un cercle ne contenant pas A.

II. Fonctions de trois variables.

85. Etudions maintenant le cas d'une fonction de trois variables x, y, z, qu'on suppose, en chaque point, continue par rapport à chacune d'elles.

Soit $f(x, y, z)$ une telle fonction; soit A_0 un point (x_0, y_0, z_0); je considère une portion de surface S passant par A_0, et représentable par une équation de la forme:

$$x = \varphi(y, z),$$

avec la condition:

$$x_0 = \varphi(y_0, z_0).$$

Soit, en chaque point $A(x, y, z)$, $\alpha_\sigma(x, y, z)$ la demi-longueur du plus grand segment BC parallèle à $0x$ et de milieu A, dans lequel l'oscillation est $\leq \sigma$; je vais étudier cette fonction $\alpha_\sigma(x, y, z)$, considérée comme fonction sur la surface S.

Soit (fig. 17):

$$B_0 A_0 = A_0 C_0 = \alpha_\sigma(x_0, y_0, z_0).$$

Prenons, ε étant un nombre positif quelconque:

$$B'_0 A_0 = A_0 C'_0 = \alpha_\sigma(x_0, y_0, z_0) + \frac{\varepsilon}{2}\cdot$$

Dans le segment $B'_0 C'_0$, l'oscillation est un nombre supérieur à σ, soit $\sigma + k$; si je prends: $k' < k$, il existe entre B'_0 et C'_0 deux points P_0 et Q_0 tels que:

$$|f(P_0) - f(Q_0)| > \sigma + k'.$$

Je vais considérer des points de S voisins de A_0; je m'astreins tout d'a-

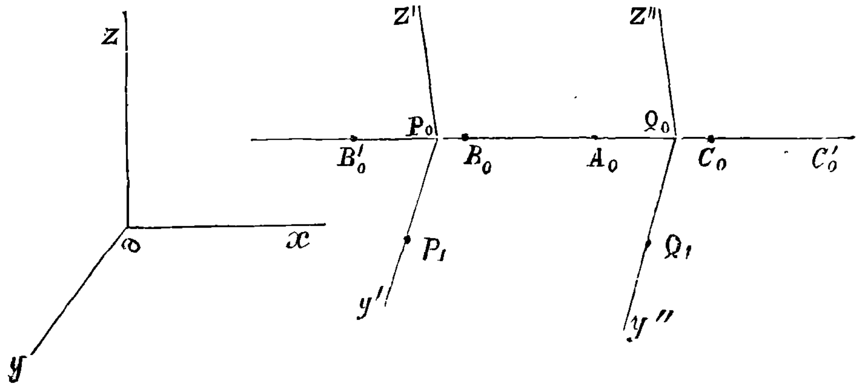

Fig. 17.

bord à faire varier y et z dans un champ suffisamment restreint autour de y_0 et z_0 pour qu'on ait toujours:

$$|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}\cdot \tag{1}$$

Menons par P_0 et Q_0 les plans parallèles au plan des yz, et dans ces plans, les parallèles à $0y$, $P_0 y'$, $Q_0 y''$; prenons, sur $P_0 y'$ et $Q_0 y''$, deux segments $P_0 P_1$ et $Q_0 Q_1$, dans chacun desquels l'oscillation soit inférieure à $\frac{k'}{4}$; nous les prenons en outre assez petits pour que les valeurs de y et z correspondant aux points intérieurs à ces segments soient comprises dans le champ de variation de y et z, précédemment défini.

Choisissons sur $P_0 P_1$ un point de continuité par rapport à l'ensemble (y, z) dans le plan $Py'z'$; soit P' un tel point; prenons dans ce plan un cercle C de centre P' et où l'oscillation soit moindre que $\frac{k'}{4}\cdot$ Prenons ensuite, sur $Q_0 Q_1$, un point Q' se projetant à l'intérieur du cercle C, et traçons dans le plan $Q_0 y'' z''$ un cercle C' de centre Q_0 où l'oscillation soit inférieure à $\frac{k'}{4}$.

Si P et Q sont deux points quelconques pris, l'un dans C et l'autre dans C', on a les différentes inégalités:

$$|f(P') - f(P_0)| < \frac{k'}{4}, \quad |f(P) - f(P')| < \frac{k'}{4},$$

$$|f(Q') - f(Q_0)| < \frac{k'}{4}, \quad |f(Q) - f(Q')| < \frac{k'}{4},$$

$$|f(P_0) - f(Q_0)| > \sigma + k',$$

d'où l'on déduit:

$$|f(P) - f(Q)| > \sigma.$$

D'après la construction des cercles C et C', ces cercles ont en projection (sur le plan $y\,z$) une partie commune; le cylindre projetant cette partie commune découpe sur la surface S une certaine aire G; si $A(x, y, z)$ est un point de cette aire, et si on trace le segment parallèle à $0\,x$ de milieu A et de demi-longueur $\alpha_\sigma(x_0, y_0, z_0) + \varepsilon$, ce segment contient certainement un couple de points P et Q, car la distance de A à chacun des plans menés par B'_0 et C'_0 parallèlement au plan des $y\,z$ est moindre que $\alpha_\sigma(x_0, y_0, z_0) + \varepsilon$, d'après l'inégalité (1). Par suite, l'oscillation dans ce segment est supérieure à σ; on a donc, au point A:

$$\alpha_\sigma(x, y, z) < \alpha_\sigma(x_0, y_0, z_0) + \varepsilon.$$

Ainsi, la fonction α_σ définie sur la surface S possède la propriété suivante: *au voisinage de tout point* (x_0, y_0, z_0), *et si petit que soit* ε, *on peut trouver sur la surface une aire où l'on a partout:*

$$\alpha_\sigma(x, y, z) < \alpha_\sigma(x_0, y_0, z_0) + \varepsilon.$$

Cette propriété, jointe à cette autre que α_σ est positif en tout point, conduit à celle-ci que α_σ ne peut avoir son minimum par rapport à S nul en tous les points d'une aire. Supposons en effet que cela puisse avoir lieu; si nous nous donnons un nombre ε, nous pouvons prendre un point où $\alpha_\sigma < \frac{\varepsilon}{2}$, puis, au voisinage de ce point, une aire en tout point de laquelle on aura:

$$\alpha_\sigma < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2},$$

c'est-à-dire:

$$\alpha_\sigma < \varepsilon.$$

De même, dans cette aire, on en trouvera une autre où l'on aura partout:

$$\alpha_\sigma < \frac{\varepsilon}{2},$$

et ainsi de suite.

On aurait finalement un point où $\alpha_\sigma = 0$, ce qui est impossible.

Ainsi, dans toute portion de S, il existe une autre portion dans laquelle le minimum de α_σ est positif. Soit C une portion dans laquelle α_σ a son minimum positif, et soit γ un nombre positif inférieur à ce minimum.

Nous pouvons déterminer un domaine à trois dimensions, un prisme de côtés parallèles aux axes, par exemple, tel que, sur chaque parallèle à $0x$ contenue dans ce prisme, il y ait un point de C, et dont la dimension parallèle à $0x$ soit au plus égale à γ; dans ces conditions, sur tout segment parallèle à $0x$ et contenu dans le prisme, l'oscillation est $\leqq \sigma$. Prenons ensuite une section de ce prisme par un plan parallèle aux yz, et dans cette section, une aire G dans laquelle l'oscillation soit $\leqq \sigma$. Considérons le cylindre qui projette G sur le plan des yz, soit L ce cylindre, limité aux faces du prisme, et soit C_1 la portion de C qu'il découpe sur la surface S. Je dis que, dans le cylindre L, l'oscillation de la fonction est $\leqq 3\sigma$. En effet, soient P et Q deux points quelconques pris dans ce cylindre, et soient P' et Q' leurs projections sur G. On a:

$$|f(P)-f(P')| \leqq \sigma, \quad |f(Q)-f(Q')| \leqq \sigma, \quad |f(P')-f(Q')| \leqq \sigma,$$

d'où:

$$|f(P)-f(Q)| \leqq 3\sigma.$$

En particulier, nous constatons que, en chaque point de C_1, l'oscillation par rapport à l'ensemble (x, y, z) est $\leqq 3\sigma$.

Ainsi, dans toute portion de la surface: $x = \varphi(y, z)$, et si petit que soit σ, il existe une aire en chaque point de laquelle l'oscillation par rapport à (x, y, z) est $\leqq 3\sigma$. On déduit de là, par un procédé de raisonnement que j'ai eu souvent l'occasion d'employer, l'existence, dans chaque portion de la surface, d'un point de continuité par rapport à l'ensemble (x, y, z).

On a, *a fortiori*, les résultats suivants:

Dans tout domaine à trois dimensions, il y a des points de continuité par rapport à l'ensemble (x, y, z); autrement dit, *la fonction est ponctuellement discontinue.*

Sur toute surface $x = \varphi(y, z)$, la fonction donnée, considérée comme fonction de y et z, est ponctuellement discontinue.

86. Nous voyons d'après cela que l'ensemble des points où l'on a: $\omega[f(x, y, z)] \geqq \sigma$ ne peut pas être dense par rapport à un volume, ni même par rapport à une surface; *mais cet ensemble peut contenir tous les points d'une ligne*, comme je vais le montrer sur un exemple très simple.

Prenons une fonction $\varphi(x, y)$ continue par rapport à chacune des deux variables x et y, en supposant que le point $x = 0$, $y = 0$, par exemple, soit point de discontinuité. Nous définirons $f(x, y, z)$ par la condition:

$$f(x, y, z) = \varphi(x. y),$$

de sorte que f sera constante sur toutes les parallèles à $0z$. Cette fonction est continue partout par rapport à chacune des variables, et l'on voit que tous les points de $0z$ sont des points de discontinuité, la valeur de l'oscillation en tous ces points étant la même.

J'indiquerai encore un autre exemple. Je fais remarquer d'abord qu'on peut prendre, dans le plan (x, y), une fonction toujours continue sur les trois séries de droites suivantes: les parallèles à $0x$, les parallèles à $0y$, et les parallèles à une troisième direction telle que celle de $x - y = 0$, cette fonction pouvant être discontinue en certains points par rapport à l'ensemble (x, y); la fonction qui est égale à 0 pour l'origine, et à:

$$\frac{xy(x-y)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

pour les autres points, possède ces propriétés. Prenons alors une fonction $f(x, y, z)$ qui sera constante sur toutes les parallèles à la droite:

$$x = y = z,$$

et qui, pour les points du plan $x0y$, sera égale à la fonction précédente. Sur la droite $x = y = z$, tous les points sont des points de discontinuité, la valeur de l'oscillation étant la même en tous ces points. D'autre part, la fonction f, qui est égale à 0 pour la droite $x = y = z$, et à:

$$\frac{(x-z)(y-z)(x-y)}{[(x-z)^2+(y-z)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

aux autres points, est partout continue par rapport à chacune des variables x, y, z.

87. Il y aurait lieu maintenant d'étudier la succession de valeurs que prend, sur une courbe quelconque de l'espace, la fonction $f(x, y, z)$, continue par rapport à chacune des variables. Je donnerai à ce sujet le résultat suivant: *la fonction d'une variable ainsi obtenue est au plus de la deuxième classe.*

Je commencerai par démontrer le théorème suivant: Si une fonction de deux variables $f(x, y)$ est continue sur chaque parallèle à $0\,x$, et est de première classe sur chaque parallèle à $0\,y$, elle est, sur une courbe quelconque,

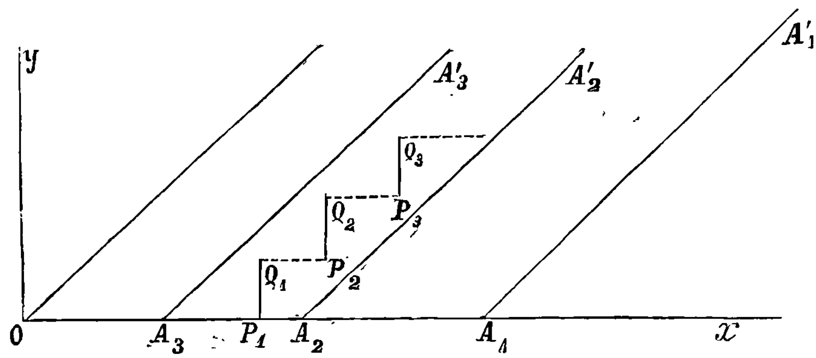

Fig. 18.

de deuxième classe au plus. Je ferai la démonstration en considérant la droite $x - y = 0$. Prenons la suite des droites (fig. 18):

$$x - y = a_1, \; x - y = a_2, \ldots \; x - y = a_n, \ldots$$

$a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ étant une suite de quantités tendant vers 0.

Soient $A_1 A'_1$, $A_2 A'_2, \ldots$ ces droites. Entre une quelconque de ces droites et la droite voisine, par exemple entre $A_2 A'_2$ et $A_3 A'_3$, je peux tracer des segments parallèles à $0\,y$, tels que $P_1 Q_1$, $P_2 Q_2$, etc...., de sorte que chaque parallèle à $0\,x$ contienne un seul point appartenant à l'un de ces segments (sauf les droites $Q_1 P_2$, $Q_2 P_3$, etc....); la succession des valeurs que prend $f(x, y)$ sur $P_1 Q_1$ (P_1 compris, Q_1 exclus), puis sur $P_2 Q_2$ (P_2 compris, Q_2 exclus), etc.... forme une fonction d'une variable, qui est de première classe, puisqu'elle est de première classe sur chacun de ces segments. En supposant que cette opération soit effectuée entre $A_n A'_n$ et $A_{n+1} A'_{n+1}$, pour toutes les valeurs de n, nous déterminons ainsi une suite de fonctions de première classe:

$$\varphi_1(y), \; \varphi_2(y), \ldots \; \varphi_n(y), \ldots$$

Si d'autre part $\varphi(y)$ est la fonction donnée, considérée sur $x - y = 0$, on reconnaît que $\varphi(y)$ est la limite de $\varphi_n(y)$. Ainsi $\varphi(y)$ est une fonction de la deuxième classe.

Reprenons maintenant la fonction $f(x, y, z)$, et soit C une courbe de l'espace. Projetons C sur le plan des (y, z) suivant C', et imaginons qu'on développe sur un plan le cylindre projetant. Dans ce plan, aux parallèles à $0x$ de l'espace qui rencontrent C correspondent les parallèles à une direction $0X$: il y aura donc continuité sur ces droites. A C' et aux courbes parallèles à C' situées sur le cylindre correspondent les parallèles à une direction $0Y$; or, dans chaque plan parallèle à yoz, comme il y a continuité sur chacune des parallèles à l'un des axes $0y$ et $0z$, la fonction est de première classe sur les courbes parallèles à C' et par suite sur les parallèles a $0Y$. Enfin, à C correspond dans le plan $X0Y$ une courbe C_1 à laquelle le théorème précédent s'applique; donc, sur C_1, et par suite sur C, la fonction est au plus de deuxième classe.

CHAPITRE V.

Le problème de l'intégration au point de vue des variables réelles.

88. Lorsqu'on se sert de la théorie du changement de variables dans une question d'Analyse, on suppose implicitement la continuité des dérivées qu'on emploie. Pour prendre un exemple très simple, soit une fonction de deux variables $f(x, y)$; faisons le changement de variables:

$$x = X + Y$$
$$y = X - Y.$$

Les formules connues:

$$\frac{\partial f}{\partial X} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y},$$
$$\frac{\partial f}{\partial Y} = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y},$$

ne sont valables que si l'on suppose $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ continues. Si l'on suppose seulement *l'existence* de ces dérivées en chaque point, il peut arriver que les formules ne s'appliquent pas; c'est ce qui a lieu, par exemple, à l'origine, pour la fonction qui est égale à 0 en ce point, et à $\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ aux autres points. On a, en effet, au point $x=0$, $y=0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

Si maintenant on déplace le point (x, y) à partir de l'origine dans la direction $y=ax$, on a, en appelant $\frac{\partial f}{\partial n_a}$ la dérivée dans cette direction:

$$\frac{\partial f}{\partial n_a}=\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Ainsi, à l'origine, il y a une dérivée déterminée dans chaque direction, mais ces dérivées ne sont pas données par les formules ordinaires.

Cette remarque correspond, au point de vue géométrique, à ce fait que si on considère la surface $z=f(x, y)$, cette surface n'a pas, au point $x=y=0$, de plan tangent déterminé.

89. Cela posé, considérons une équation aux dérivées partielles, et posons le problème de l'intégration de la manière suivante:

Rechercher toutes les fonctions de variables réelles, assujetties seulement aux conditions strictement indispensables pour que les éléments qui entrent dans l'équation aient un sens déterminé et vérifient cette équation.

En prenant comme exemple l'équation très simple:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}=0,$$

il faudra déterminer toutes les fonctions de x et y qui, en chaque point, sont continues par rapport à chacune des variables, et possèdent des dérivées $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ satisfaisant à la relation donnée.

Le problème étant ainsi posé, le raisonnement qui consiste à prendre comme nouvelle variable $X=x-y$, et à constater que la fonction ne doit dépendre que de X, est insuffisant, car il suppose la continuité des dérivées.

Pour essayer de traiter la question avec le minimum d'hypothèses possible, il convient tout d'abord de faire une étude des conséquences qu'entraîne, pour une fonction de deux variables, l'hypothèse de l'existence de dérivées partielles en chaque point.

90. Je commencerai par exposer quelques considérations générales sur les fonctions d'une seule variable.

Soit une fonction quelconque $f(x)$, définie dans l'intervalle $A\,B$. Prenons deux points $M_1(x_1)$ et $M_2(x_2)$ dans cet intervalle, et formons le rapport:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

Je désignerai dans la suite ce rapport par la notation:

$$\text{rapport}\ (x_1,\ x_2), \quad \text{ou} \quad r^t(x_1,\ x_2), \quad \text{ou} \quad r^t(M_1 M_2).$$

Il est indépendant de l'ordre dans lequel on énonce les deux points; on peut dire que c'est une fonction de l'ensemble des deux nombres $(x_1,\ x_2)$, *définie seulement pour* $x_1 \gtrless x_2$.

Dans le cas où l'on suppose la fonction $f(x)$ continue, la fonction $r^t(x_1,\ x_2)$ est, en chaque point $(x_1,\ x_2)$ où elle se trouve définie, *continue par rapport à l'ensemble* $(x_1,\ x_2)$.

Je donne une propriété élémentaire de cette fonction qui me sera utile dans la suite. Considérons trois nombres x_1, x_2, x_3, *rangés par ordre de grandeur*. Soit:

$$x_1 < x_2 < x_3.$$

On a évidemment:

$$\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\times\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}+\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}\times\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1},$$

c'est-à-dire, en posant:

$$\alpha=\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1},$$

$$r^t(x_1,\ x_3)=\alpha\, r^t(x_1,\ x_2)+(1-\alpha)\, r^t(x_2,\ x_3).$$

Comme on a:

$$0<\alpha<1,$$

on en déduit que $r^t(x_1,\ x_3)$ *est compris entre* $r^t(x_1,\ x_2)$ et $r^t(x_2,\ x_3)$.

Nous emploierons quelquefois ce résultat sous une autre forme: *Si* x_1, x_2, x_3 *sont rangés par ordre de grandeur, et si* $r^t(x_1,\ x_3)$ *est supérieur* (inférieur) *à un nombre* λ, *l'un au moins des deux nombres* $r^t(x_1,\ x_2)$, $r^t(x_2,\ x_3)$ *est supérieur* (inférieur) à λ.

Enfin le résultat s'étend au cas où l'on considère un nombre quelconque de quantités x: *Si* x_1, x_2, x_3,... x_n *sont rangés par ordre de grandeur, la* *quantité* $r^t(x_1,\ x_n)$ *est comprise entre la plus grande et la plus petite des quantités:*

$$r^t(x_1,\ x_2),\ r^t(x_2,\ x_3), \ldots\ r^t(x_{n-1},\ x_n).$$

91. Reprenons maintenant la fonction $r^t(x_1,\ x_2)$; laissons x_1 fixe, et donnons à x_2 toutes les valeurs satisfaisant à l'inégalité:

$$x_1 < x_2 \leq x_1 + h,$$

h étant un nombre positif. Les valeurs de $r^t(x_1,\ x_2)$ qui correspondent à ces diverses valeurs de x_2 forment un ensemble de nombres, qui a une limite supérieure et une limite inférieure: soient M_h et m_h ces limites (qui peuvent d'ailleurs être infinies); si h tend vers 0, M_h ed m_h tendent vers des limites déterminées Λ_d ed λ_d, qui sont les *extrêmes oscillatoires de la fonction à droite* (*); on définit de même les *extrêmes oscillatoires à gauche* Λ_g et λ_g. On a ainsi les *quatre nombres dérivés*, dont l'étude a fait l'objet de travaux de plusieurs géomètres, en particulier de MM. Dini, Volterra, L. Scheeffer.

Remarquons que, si en un point les quatre nombres dérivés sont finis, il est certain qu'en ce point la fonction est continue, mais la réciproque n'a pas nécessairement lieu.

Si, en un point, les quatre nombres dérivés sont égaux, c'est qu'il existe en ce point pour la fonction une dérivée déterminée $f'(x)$ qui a pour valeur la valeur commune de ces quatre nombres.

Supposons qu'il en soit ainsi au point $A_0(x_0)$. On peut alors, si petit que soit ε, déterminer un intervalle $B\,C\,[x_0 - \alpha,\ x_0 + \alpha]$, tel que, si M est un point quelconque de cet intervalle, *distinct de* A_0, on a:

$$|\, r^t A_0 M - f'(x_0)\,| \leq \varepsilon.$$

Prenons alors deux points P et Q dans l'intervalle $B\,C$, *situés de part et d'autre de* A_0; dans ces conditions, d'après la remarque faite au § 90, $r^t P\,Q$ est compris entre $r^t A_0 P$ et $r^t A_0 Q$. On a donc:

$$|\, r^t P\,Q - f'(x_0)\,| \leq \varepsilon.$$

D'une manière générale, $B\,C$ représentant un segment de milieu $A(x_0)$ et de longueur $2\,\alpha$, prenons, de toutes les manières possibles, un couple de points P et Q situés dans cet intervalle et de part et d'autre de A, de telle

(*) Cf. Dini, *Fondamenti*, etc., page 190.

sorte qu'on ait toujours:

$$\left.\begin{aligned} x_0 - \alpha \leqq x_P \leqq x_0 \\ x_0 \leqq x_Q \leqq x_0 + \alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

D'après ces inégalités, il y aurait lieu de considérer l'expression $r^t(x_0, x_0)$, qui n'a pas encore été définie; je poserai:

$$r^t(x_0, x_0) = f'(x_0).$$

De cette manière, pour tout système de valeurs de x_P et x_Q satisfaisant aux inégalités (1), il existe une valeur de $r^t P Q$ parfaitement déterminée; l'ensemble de ces valeurs a un maximum M et un minimum m; posons en outre: $\omega = M - m$. Si nous faisons varier α, nous pouvons considérer ω comme fonction de α; c'est évidemment une fonction qui n'est jamais décroissante; de plus, si α tend vers 0, elle tend vers 0, car, d'après ce que nous avons vu plus haut, M et m tendent tous deux vers la même quantité $f'(x_0)$.

Si donc on se donne un nombre positif σ, il existe un nombre *positif* parfaitement déterminé, que je désigne par α_σ, qui est la limite supérieure des nombres α pour lesquels $\omega \leqq \sigma$. Soit $B_0 C_0$ le segment de milieu A_0 et de longueur $2\alpha_\sigma(x_0)$; dans ce segment, le nombre ω est *inférieur ou égal à* σ (si on suppose la fonction continue); dans tout segment $B'_0 C'_0$ de milieu A_0 et de longueur supérieure à $2\alpha_\sigma$, ω est *supérieur à* σ.

92. Je considère maintenant une fonction de deux variables $f(x, y)$, sur laquelle je fais les hypothèses suivantes: elle est continue par rapport à x, par rapport à y, et possède en tout point une dérivée déterminée par rapport à x, $\frac{\partial f}{\partial x}$. En chaque point A, je considère la fonction $\alpha_\sigma(x, y)$ définie comme au numéro précédent: c'est donc la demi-longueur du plus grand segment parallèle à $0x$, et de milieu A, dans lequel la différence entre les valeurs extrêmes de $r^t(PQ)[x_P < x_A < x_Q]$ est $\leqq \sigma$. Je dis que $\alpha_\sigma(x, y)$ *est semi-continue supérieurement par rapport à* (x, y).

Pour le démontrer, prenons (fig. 19):

$$B_0 A_0 = A_0 C_0 = \alpha_\sigma(x_0, y_0)$$

$$B'_0 A_0 = A_0 C'_0 = \alpha_\sigma(x_0, y_0) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dans le segment $B'_0 C'_0$, le nombre ω est supérieur à σ; soit $\sigma + k$ sa valeur. En prenant $k' < k$, on peut déterminer, entre B'_0 et C'_0, deux couples de points $P_1\,Q_1$, $P_2\,Q_2$, tels que:

$$| r^t P_1 Q_1 - r^t P_2 Q_2 | > \sigma + k'. \qquad (1)$$

On peut d'ailleurs s'astreindre à ce qu'aucun des quatre points P_1, Q_1, P_2, Q_2, ne coïncide avec A_0; on aura ainsi:

$$x_{P_1} < x_0, \quad x_{Q_1} > x_0,$$
$$x_{P_2} < x_0, \quad x_{Q_2} > x_0.$$

Il existe un nombre positif β tel que, dans l'intervalle $(x_0 - \beta,\ x_0 + \beta)$, il n'y a aucun de ces quatre points.

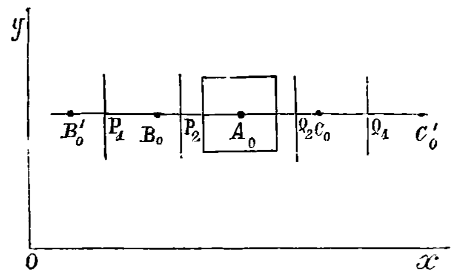

Fig. 19.

La condition (1) s'écrit:

$$\left| \frac{f(x_{P_1},\ y_0) - f(x_{Q_1},\ y_0)}{x_{P_1} - x_{Q_1}} - \frac{f(x_{P_2},\ y_0) - f(x_{Q_2},\ y_0)}{x_{P_2} - x_{Q_2}} \right| > \sigma + k'. \qquad (2)$$

Je vais maintenant utiliser la condition imposée à la fonction d'être continue en tout point par rapport à y.

Considérons les parallèles à $0\,y$ menées par les points P_1, Q_1, P_2, Q_2, et remarquons que, si dans la formule (2) on remplace y_0 par la quantité variable y, le premier membre de cette formule est une fonction continue de y; donc on peut trouver un nombre positif γ tel que, quand y sera compris entre $y_0 - \gamma$ et $y_0 + \gamma$, on aura:

$$\left| \frac{f(x_{P_1},\ y) - f(x_{Q_1},\ y)}{x_{P_1} - x_{Q_1}} - \frac{f(x_{P_2},\ y) - f(x_{Q_2},\ y)}{x_{P_2} - x_{Q_2}} \right| > \sigma. \qquad (3)$$

Appelons η le plus petit des trois nombres β, γ, $\frac{\varepsilon}{2}$, et considérons le carré de centre A_0 et de côté $2\,\eta$, soit:

$$x_0 - \eta \leqq x \leqq x_0 + \eta, \quad y_0 - \eta \leqq y \leqq y_0 + \eta.$$

Si $A(x, y)$ est un point quelconque pris dans ce carré, le segment parallèle à $0x$, de milieu A et de demi-longueur $\alpha_\sigma(x_0, y_0) + \varepsilon$, contiendra certainement deux couples de points tels que:

$$(x_{P_1}, y), \quad (x_{Q_1}, y),$$
$$(x_{P_2}, y), \quad (x_{Q_2}, y),$$

auxquels s'appliquera la relation (3); de plus, les deux points de chacune des couples seront de part et d'autre de A. Par suite, dans le segment de milieu A et de demi-longueur $\alpha_\sigma(x_0, y_0) + \varepsilon$, l'oscillation ω des $r^t(PQ)$, telle que nous l'avons définie, est supérieure à σ. On a donc:

$$\alpha_\sigma(x, y) < \alpha_\sigma(x_0, y_0) + \varepsilon,$$

ce qui montre que $\alpha_\sigma(x, y)$ *est une fonction semi-continue supérieurement.*

93. Nous déduisons de là que si E est un ensemble parfait quelconque, il y a, au voisinage de tout point de E, des points de E où α_σ a son minimum *positif* par rapport à E.

Prenons d'abord pour E le continu à deux dimensions, c'est-à-dire une aire quelconque. On peut, dans cette aire, en trouver une autre où α_σ a son minimum positif, dans celle-ci une autre où $\alpha_{\frac{\sigma}{2}}$ a son minimum positif, etc.... On voit ainsi que dans toute aire il existe des points où α_σ a son minimum par rapport à (x, y) *positif, quel que soit* σ.

Supposons que, dans une aire C, le minimum de α_σ soit positif. Je dis qu'en un point quelconque $A_0(x_0, y_0)$ de cette aire, l'oscillation de $\frac{\partial f}{\partial x}$ par rapport à (x, y) est $\leq 2\sigma$. En effet, prenons dans C un rectangle C_1 de côtés parallèles aux axes, contenant A_0, et dont la dimension parallèle à $0x$ soit inférieure au minimum de α_σ dans C; dans ces conditions, si P, Q, A, sont trois points situés dans ce rectangle C_1, sur une même parallèle à $0x$, et de manière que P et Q soient de part et d'autre de A, on aura:

$$\left| r^t PQ - \frac{\partial f}{\partial x}(A) \right| \leq \sigma. \tag{1}$$

Donnons-nous un nombre ε positif. Je prends d'abord, sur la parallèle à $0x$ menée par A_0, et de part et d'autre de A_0, deux points P_0 et Q_0 compris dans C_1; puis, sur les parallèles à $0y$ menées par P_0 et Q_0, je prends deux intervalles entourants ces points, assez petits pour que, P et Q étant deux points quelconques pris respectivement dans ces intervalles, on ait:

$$|r^t P Q - r^t P_0 Q_0| < \varepsilon. \tag{2}$$

On voit alors qu'on peut prendre autour de A_0 une aire assez petite pour que, A étant un point quelconque de cette aire, il y ait, sur la parallèle à $0x$ menée par A, une couple de points P et Q vérifiant les inégalités (1) et (2); ajoutons l'inégalité:

$$\left| r^t P_0 Q_0 - \frac{\partial f}{\partial x}(A_0) \right| \leqq \sigma.$$

Nous déduisons de là:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(A) - \frac{\partial f}{\partial x}(A_0) \right| < 2\sigma + \varepsilon,$$

et comme ε est aussi petit qu'on veut, l'oscillation de $\frac{\partial f}{\partial x}$ en A_0 est $\leqq 2\sigma$.

Nous avons reconnu qu'il existe des points où α_σ a son minimum positif, quel que soit σ; en un tel point, l'oscillation de $\frac{\partial f}{\partial x}$ est nulle, c'est-à-dire que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue.

On reconnaît ainsi que *si $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe en tout point, c'est une fonction ponctuellement discontinue.*

94. Supposons à présent que $f(x, y)$ ait, en chaque point, des dérivées partielles déterminées par rapport à x et par rapport à y. Appelons $\beta_\sigma(x, y)$ la fonction qui joue par rapport à y le même rôle que $\alpha_\sigma(x, y)$ par rapport à x. Dans toute aire il existe une autre aire où α_σ a son minimum positif, et dans celle-ci une autre où β_σ a son minimum positif; ceci ayant lieu quel que soit σ, on reconnaît qu'*il existe dans toute aire des points en chacun desquels α_σ et β_σ ont leur minimum positif, quel que soit σ.* Je dirai qu'un tel point est un *point régulier.*

Soit A un point régulier; d'après la définition, quel que petit que soit σ, les fonctions $\alpha_\sigma(x, y)$, $\beta_\sigma(x, y)$, ont en A leur minimum positif; je dis que, si petit que soit σ, il est possible de déterminer autour de A une aire assez petite pour que, si B et C sont deux points quelconques *de même ordonnée* situés dans cette aire, on ait:

$$\left| r^t B C - \frac{\partial f}{\partial x}(A) \right| < \sigma.$$

En effet, $\alpha_{\frac{\sigma}{2}}$ a son minimum positif en A; je peux prendre un nombre positif γ inférieur à ce minimum, et déterminer autour de A une aire en tout point de laquelle on aura: $\alpha_{\frac{\sigma}{2}} > \gamma$. Dans cette aire, je prendrai un rectangle de centre A et dont la dimension parallèle à $0x$ sera plus petite que γ; enfin je diminuerai, s'il le faut, les dimensions de ce rectangle, de manière que l'oscillation de $\frac{\partial f}{\partial x}$ y soit inférieure à $\frac{\sigma}{2}$. Dans ces conditions, si nous prenons, dans le rectangle obtenu en dernier lieu, et sur une même parallèle à $0x$, deux points quelconques B et C, on a, en appelant D le milieu du segment BC:

$$\left| r^t BC - \frac{\partial f}{\partial x}(D) \right| \leqq \frac{\sigma}{2},$$

et:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(D) - \frac{\partial f}{\partial x}(A) \right| \leqq \frac{\sigma}{2},$$

inégalités d'où l'on déduit:

$$\left| r^t BC - \frac{\partial f}{\partial x}(A) \right| \leqq \sigma. \tag{1}$$

On démontrerait de même que si l'aire considérée autour de A est suffisamment petite, et si on prend deux points quelconques B' et C' *de même abscisse* dans cette aire, on a:

$$\left| r^t B'C' - \frac{\partial f}{\partial y}(A) \right| \leqq \sigma. \tag{2}$$

Etudions maintenant ce qui se passe quand on considère deux points au voisinage de A, situés l'un par rapport à l'autre d'une manière quelconque. Je suppose qu'on ait déterminé autour de A une aire (un carré de centre A, par exemple), dans laquelle les conditions précédentes, exprimées par les inégalités (1) et (2), se trouvent remplies.

Soient P et Q deux points quelconques de cette aire. Je représente la longueur PQ par l, l'angle que fait la direction PQ avec $0x$ par λ; de cette manière, si les coordonnées de P sont x_1, y_1, celles de Q seront $x_2 = x_1 + l\cos\lambda$, $y_2 = y_1 + l\sin\lambda$. Considérons le point R qui a même ordonnée que P et même abscisse que Q, c'est-à-dire qui a pour coordonnées (x_2, y_1).

Je me propose de trouver une expression de la quantité:

$$r^t\, P\, Q = \frac{f(Q) - f(P)}{\text{longueur } P\, Q}.$$

Pour cela, j'écris:

$$\frac{f(Q) - f(P)}{l^r\, PQ} = \frac{f(R) - f(P)}{\overline{PR}} \cdot \frac{\overline{PR}}{l^r\, PQ} + \frac{f(Q) - f(R)}{RQ} \cdot \frac{\overline{RQ}}{l^r\, PQ},$$

c'est-à-dire:

$$r^t\, P\, Q = r^t\, P\, R \cdot \cos\lambda + r^t\, R\, Q \cdot \sin\lambda.$$

Rappelons maintenant qu'on a:

$$\left| r^t\, P\, R - \frac{\partial f}{\partial x}(A) \right| \leqq \sigma$$

$$\left| r^t\, R\, Q - \frac{\partial f}{\partial y}(A) \right| \leqq \sigma.$$

Nous avons donc:

$$\left| r^t\, P\, Q - \left[\frac{\partial f}{\partial x}(A) \cdot \cos\lambda + \frac{\partial f}{\partial y}(A) \cdot \sin\lambda\right] \right| \leqq \sigma \cdot (|\cos\lambda| + |\sin\lambda|).$$

La quantité du second membre ne surpasse pas $\sigma \cdot \sqrt{2}$. Nous pouvons tirer de cette étude la conclusion suivante:

Si A est un point régulier, à tout nombre positif ε on peut faire correspondre un cercle de centre A, tel que, P et Q étant deux points quelconques pris dans ce cercle, et λ étant l'angle de $P\,Q$ avec $0\,x$, on a:

$$\left| \frac{f(Q) - f(P)}{l^r\, PQ} - \left[\frac{\partial f}{\partial x}(A) \cos\lambda + \frac{\partial f}{\partial y}(A) \sin\lambda\right] \right| < \varepsilon.$$

95. On pourrait faire des raisonnements analogues aux précèdents, en considérant une courbe au lieu d'une aire. D'une manière plus générale, je passe tout de suite au cas où l'on considère un ensemble parfait quelconque E.

Si on considère les fonctions $\alpha_\sigma(x, y)$ et $\beta_\sigma(x, y)$ sur l'ensemble E, chacune d'elles étant positive et semi-continue supérieurement, il est impossible que l'une d'elles ait, en tout point de E, son minimum nul par rapport à E; par suite, au voisinage de tout point de E, on peut trouver un point de E où le minimum de α_σ et celui de β_σ sont positifs. On déduit de là que, au voisinage de tout point de E, il existe des points de E en chacun desquels le minimum de α_σ et de β_σ par rapport à E est positif, quel que soit σ. Je dirai qu'un point de cette nature est un point *régulier par rapport à E.*

Nous allons voir qu'un tel point possède des propriétés tout à fait analogues à celles que j'ai étudiées dans le numéro précédent.

Soit A un point régulier par rapport à E; la fonction $\alpha_{\frac{\sigma}{2}}$ a son minimum par rapport à E positif; soit γ un nombre positif inférieur à ce minimum. Je peux déterminer un carré de centre A possédant les propriétés suivantes :

1.° On a, en tout point de E situé dans ce carré :

$$\alpha_{\frac{\sigma}{2}} > \gamma.$$

2.° Le côté du carré est inférieur à γ.

3.° L'oscillation de $\frac{\partial f}{\partial x}$ par rapport à E est inférieure à $\frac{\sigma}{2}$; il est possible de réaliser cette condition, parce que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en A par rapport à E.

Dans ces conditions, si nous prenons dans ce carré un point B appartenant à E et un autre point C quelconque, mais de même ordonnée que B, nous aurons :

$$\left| r^t\, B\, C - \frac{\partial f}{\partial x}(B) \right| \leq \frac{\sigma}{2},$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(B) - \frac{\partial f}{\partial x}(A) \right| \leq \frac{\sigma}{2},$$

et par suite :

$$\left| r^t\, B\, C - \frac{\partial f}{\partial x}(A) \right| \leq \sigma.$$

Supposons qu'on ait déterminé autour de A un carré remplissant les conditions qui précèdent et celles qu'on en déduit en permutant le rôle des lettres x et y. Prenons dans cette aire deux points P et Q appartenants à E; soit R le point de même ordonnée que P, et de même abscisse que Q; (R n'appartient pas nécessairement à E). On peut, en raisonnant comme au numéro précédent, montrer qu'on a :

$$\left| \frac{f(Q) - f(P)}{l^t\, P\, Q} - \left[\frac{\partial f}{\partial x}(A) \cos\lambda + \frac{\partial f}{\partial y}(A) \sin\lambda \right] \right| \leq \sigma \cdot \sqrt{2}.$$

λ représente, comme plus haut, l'angle de $P\,Q$ avec $O\,x$.

Je résume ces résultats dans l'énoncé suivant:

Si E est un ensemble parfait, il existe, au voisinage de tout point de E, des points de E que j'appelle réguliers par rapport à E; si A est un de ces points, à tout nombre ε correspond un cercle de centre A tel que, si P et Q sont deux points de E pris dans ce cercle, on a:

$$\left| r^t P\,Q - \left[\frac{\partial f}{\partial x}(A)\cdot\cos(0\,x,\ P\,Q) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)\cdot\sin(0\,x,\ P\,Q)\right]\right| < \varepsilon. \qquad (1)$$

Comme application de ce résultat général, nous reconnaissons que si l'on considère une courbe, il y a, dans tout arc de cette courbe, des points où $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont *continues par rapport à la courbe.*

Mais il peut arriver que, pour tous les points d'un arc de courbe, $\frac{\partial f}{\partial x}$, par exemple, soit discontinue par rapport à (x, y). Citons la fonction qui, pour $x - y = 0$, est égale à 0, et qui, pour $x - y \gtrless 0$, est égale à:

$$(x-y)^2 \sin\frac{1}{x-y}\cdot$$

En tous les points de $x - y = 0$, les dérivées $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont discontinues, l'oscillation étant égale à 2.

96. Revenons maintenant au problème posé au § 89, à savoir l'intégration de l'équation:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \qquad (2)$$

Je viens de déterminer certaines conditions auxquelles satisfait toute fonction $f(x, y)$ qui possède en chaque point des dérivées déterminées; j'ajoute maintenant à ces conditions celle qui est exprimée par l'équation (2).

Interprétons alors les résultats trouvés. Prenons une quelconque des droites parallèles à $x - y = 0$, et sur cette droite un ensemble parfait quelconque E (qui, en particulier, pourra être le continu). Il existe, au voisinage de tout point de E, des *points réguliers par rapport à E*; si A est un de ces points, à tout nombre positif ε correspond un intervalle de milieu A, tel que, si P et Q sont deux points de E pris dans cet intervalle, on a:

$$\left| r^t P\,Q - \left[\frac{\partial f}{\partial x}(A)\cdot\cos\frac{\pi}{4} + \frac{\partial f}{\partial y}(A)\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right]\right| < \varepsilon.$$

Dans le cas actuel, cette relation devient simplement:

$$|r^t P Q| < \varepsilon.$$

Nous sommes ainsi conduits à rechercher les fonctions d'une variable qui possèdent les propriétés exprimées dans l'énoncé précédent. J'aurai besoin, pour cela, d'exposer encore quelques considérations générales sur les fonctions.

97. Soit une fonction quelconque $f(x)$; considérons, dans l'intervalle $A B$ où elle est définie, un ensemble parfait E, qui pourra être le continu, et prenons une portion déterminée de cet intervalle $\alpha \beta$, contenant des points de E.

Soit un couple de points P et Q appartenant à E et situés sur $\alpha \beta$; considérons toutes les quantités: $r^t P Q$; l'ensemble de ces quantités a une limite supérieure M et une limite inférieure m. Je conviendrai de dire que M et m sont *les coefficients maximum et minimum de variabilité de* $f(x)$, *par rapport à* E, *dans l'intervalle* $\alpha \beta$; et je représenterai ces nombres par $M[f(x), E, \alpha \beta]$, $m[f(x), E, \alpha \beta]$.

Si x_0 est un point appartenant à E, je prendrai, dans l'intervalle $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, les nombres que je viens de définir; quand δ tend vers 0, ces nombres tendent vers des limites déterminées: $M[f(x), E, x_0)$ et $m[f(x), E, x_0]$, qui seront *les coefficients maximum et minimum de variabilité de* $f(x)$ *par rapport à* E *au point* x_0.

Il est évident que si x_0 est compris dans $\alpha \beta$, on a:

$$M(x_0) \leqq M(\alpha \beta).$$

On déduit de là que si on considère le coefficient maximum de variabilité en un point $M(x)$ comme fonction de x, *cette fonction est semi-continue supérieurement.*

J'énonce encore une remarque qui me sera utile dans la suite. Si l'on a deux points P et Q tels que:

$$r^t P Q \geqq \lambda,$$

il existe certainement un point A situé entre P et Q, ou coïncidant avec l'un d'eux, et où l'on a:

$$M(A) \geqq \lambda,$$

la fonction M étant relative au continu. C'est une conséquence directe d'une remarque faite au § 90.

Je n'ai fait jusqu'à présent aucune hypothèse sur $f(x)$; je suppose maintenant que cette fonction est continue. Soit $\alpha \beta$ un intervalle contenant le point $A_0(x_0)$. Pour définir $M(f(x), E, \alpha\beta)$, on peut, au lieu de considérer tous les couples de points $A_1(x_1)$ et $A_2(x_2)$ appartenants à E et situés dans l'intervalle, considérer seulement ceux pour lesquels on n'a pas: $x_1 = x_2 = x_0$, en d'autres termes faire abstraction du point M_0. En effet, dans l'hypothèse de la continuité, toute quantité telle que $r^t A_0 A$ peut être regardée comme limite d'une suite de quantités telles que $r^t A_1 A_2$, A_1 et A_2 étant distincts de A_0; par suite, que l'on tienne compte ou non des quantités de la forme: $r^t A_0 A$, les limites supérieure et inférieure resteront les mêmes.

Prenons maintenant l'intervalle $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, et considérons tous les points du continu C qui sont dans cet intervalle, *en retranchant le point* x_0. La fonction $M[f(x), C, x]$ a, en chacun de ces points, une valeur déterminée; cet ensemble de valeurs a un maximum qui, quand δ tend vers 0, a une limite M'; je dis que, *dans le cas où la fonction est continue, cette limite* M' *est précisément* $M[f(x), C, x_0]$.

Nous savons déjà qu'on a:

$$M(x_0) \geqq M'.$$

Cela résulte de ce que la fonction $M(x)$ est semi-continue supérieurement; il suffit donc de démontrer qu'on ne peut pas avoir:

$$M(x_0) > M'.$$

Supposons que cela ait lieu; prenons un nombre λ tel qu'on ait:

$$M(x_0) > \lambda > M'.$$

On peut trouver, aussi près qu'on veut de x_0, deux points P et Q tels que:

$$r^t P Q > \lambda.$$

On peut d'ailleurs supposer que P et Q sont du même côté par rapport à $A(x_0)$; en effet, si cela n'a pas lieu, si l'on a, par exemple:

$$x_P < x_0 < x_Q,$$

il est certain que l'une au moins des deux quantités $r^t P A$ et $r^t A Q$, est supérieure à λ; soit, par exemple:

$$r^t P A > \lambda.$$

Nous pouvons, à cause de la continuité de la fonction, prendre un point Q_1 du même côté que P par rapport à A et assez voisin de A pour qu'on ait encore:

$$r^t P Q_1 > \lambda.$$

Il existe, entre P et Q_1, un point $B(x)$ où l'on a:

$$M(x) > \lambda,$$

ce qui est en contradiction avec l'hypothèse: $\lambda > M'$.

En résumé, dans le cas où $f(x)$ est continue, la fonction $M(x)$ relative au continu, possède une propriété caractéristique qu'on peut énoncer de la manière suivante:

La fonction $M(x)$ est égale, en chaque point, au maximum des valeurs qu'elle a aux points voisins.

Considérons maintenant une fonction $f(x)$ *continue*, et *non constante;* cette dernière condition peut s'exprimer de la manière suivante: il existe deux points P et Q tels que l'on a:

$$r^t P Q \gtrless 0.$$

On aura, ou bien: $r^t P Q > 0$, ou bien: $r^t P Q < 0$; il suffit d'envisager, par exemple, la première hypothèse. Je suppose donc qu'il existe un nombre positif σ et un couple $P Q$, pour lequel on a:

$$r^t P Q > \sigma.$$

D'après ce que nous avons vu, il existe certainement au moins un point x où l'on a:

$$M(x) > \sigma,$$

et, au voisinage de ce point, il en existe d'autres possédant la même propriété: *tout point où l'on a $M(x) > \sigma$ est point limite d'une suite de points où l'on a aussi $M(x) > \sigma$.* Autrement dit, en désignant par G l'ensemble des points où $M(x) > \sigma$, l'ensemble G est *dense en lui-même.* Son dérivé G' est donc un ensemble parfait, et en chaque point de G' on a:

$$M(x) \geqq \sigma.$$

98. J'arrive maintenant à l'étude des fonctions présentant la propriété indiquée au § 96, propriété que je peux énoncer de la manière suivante: *Si l'on considère un ensemble parfait quelconque E, il y a, au voisinage de tout point de E, des points où l'on a:*

$$M[f, E, x] = m[f, E, x] = 0.$$

On peut dire qu'un point où cette double condition est remplie est un point *stationnaire par rapport à E;* au contraire, en un point où l'un des deux nombres M et m est différent de 0, on dira que la fonction est *variable par* *rapport à E.* Nous sommes conduits à dire, par analogie avec la notion de fonction ponctuellement discontinue, que la fonction dont nous nous occupons en ce moment est *ponctuellement variable relativement à tout ensemble parfait.*

D'après cette définition, le résultat du § 96 peut s'énoncer dans les termes suivants: *Si une fonction $f(x, y)$ satisfait en tout point à l'équation: $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, sur chaque droite $x - y = C^{te}$, elle est ponctuellement variable relativement à tout ensemble parfait.*

Supposons qu'on impose à $f(x, y)$ la condition d'être continue par rapport à l'ensemble (x, y); dans ce cas, la fonction d'une variable définie sur chaque droite $x - y = C^{te}$, sera à la fois *continue* et *ponctuellement variable sur tout ensemble parfait.* Je vais démontrer qu'une telle fonction est nécessairement *constante.*

Je ferai voir pour cela qu'une fonction *continue et non constante* ne peut pas remplir la condition d'être *ponctuellement variable sur tout ensemble parfait.*

Soit donc $f(x)$ une fonction continue et non constante; j'ai montré plus haut qu'il existe (soit pour $f(x)$, soit pour cette fonction changée de signe), un nombre positif σ tel que l'ensemble G des points où $M(f(x), C, x) > \sigma$, C représentant le continu, est *dense en lui-même.* En tout point de G' on a:

$$M \geqq \sigma,$$

et en tout point qui ne fait pas partie de G', on a:

$$M \leqq \sigma.$$

Si on suppose que $f(x)$ est *ponctuellement variable relativement au continu*, G (et par suite G') est *non dense* par rapport au continu.

Soit $A(x_0)$ un point de G'. Je considère simultanément les deux nombres $M[f(x), C, x_0]$ et $M[f(x), G', x_0]$; je vais démontrer qu'ils sont égaux.

D'abord on a certainement:

$$M(G', x_0) \leqq M(C, x_0),$$

car tous les couples de points qui sont à considérer dans la définition de $M(G', x_0)$, le sont aussi dans la définition de $M(C, x_0)$.

Je dis maintenant qu'on ne peut pas avoir:

$$M(G', x_0) < M(C, x_0).$$

Supposons en effet que cela puisse avoir lieu; prenons alors un nombre λ tel qu'on ait:

$$M(G', x_0) < \lambda < M(C, x_0),$$

et en même temps:

$$\lambda > \sigma.$$

On peut, d'après cela, déterminer un intervalle BB' contenant le point $A(x_0)$, tel que, pour tout couple HK de points de G' contenus dans cet intervalle, on ait:

$$|r^t HK| < \lambda.$$

Soit alors PQ ($x_P < x_Q$) un couple de points *quelconques* pris dans l'intervalle; soit H le point de G' qui est le plus voisin de P, à droite de P, et K le point de G' qui est le plus voisin de Q, à gauche de Q; on a ainsi:

$$x_P \leqq x_H \leqq x_K \leqq x_Q.$$

De plus, il n'y a, entre P et H, ou bien entre K et Q, aucun point de l'ensemble G'. De cette manière, il est certain qu'on a:

$$|r^t PH| \leqq \sigma,$$
$$|r^t KQ| \leqq \sigma,$$

car si l'on avait, par exemple: $r^t PH > \sigma$, il y aurait entre P et H un point de G, ce qui ne peut pas être. On a en outre:

$$|r^t HK| < \lambda.$$

Or, la quantité $r^t PQ$ est comprise entre les valeurs extrêmes des quantités $r^t PH$, $r^t HK$, $r^t KQ$. On a donc:

$$|r^t PQ| < \lambda.$$

Comme P et Q sont deux points quelconques de l'intervalle BB', on devrait avoir:

$$M[C, x_0] \leqq \lambda,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

En résumé, on a:

$$M[G', x_0] = M(C, x_0),$$

ce qui montre qu'en tout point de l'ensemble parfait G', on a:

$$M(G', x_0) \geqq \sigma.$$

Donc, sur l'ensemble parfait G', la fonction considérée ne peut pas être ponctuellement variable; nous pouvons dire qu'elle est, sur G', *totalement variable*, ou même *totalement croissante.*

La conclusion de cette étude est, que, *si une fonction est continue et est ponctuellement variable relativement à tout ensemble parfait, elle est constante.*

Pour se convaincre de la nécessité des raisonnements que nous venons de faire, il suffit de se rappeler qu'une fonction peut être continue, non constante, et telle que, dans tout intervalle, il en existe un autre où elle est constante (*). Autrement dit, une fonction peut être continue et être ponctuellement variable relativement au continu, sans être constante.

D'autre part, si on supprime la condition de la continuité, le théorème ne s'applique plus. Prenons par exemple la fonction discontinue égale partout à 0, sauf en un point, où elle a la valeur 1. Cette fonction, qui n'est pas constante, est ponctuellement variable relativement à tout ensemble parfait.

99. L'application des résultats précédents à l'intégration de l'équation $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ est immédiate, et nous pouvons énoncer le résultat suivant:

Toute fonction $f(x, y)$, continue par rapport à (x, y), et possédant en tout point des dérivées $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ satisfaisant à la relation:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

est de la forme:

$$\varphi(x - y),$$

$\varphi(u)$ *représentant une fonction continue de u qui a une dérivée déterminée en chaque point.*

Si on compare ce résultat avec les résultats courants, on voit que notre démonstration est plus complète que la démonstration par le changement de variables, en ce sens que nous ne faisons sur les dérivées aucune autre hypothèse que celle de leur existence. Il resterait, pour terminer la question, à voir ce qui se passe lorsqu'on n'assujettit plus la fonction à être continue par rapport à l'ensemble des variables, mais seulement par rapport à chacune d'elles.

(*) L. Scheeffer, *Acta Mathematica,* Tome V, page 289.

100. Les résultats que nous venons d'obtenir pour l'équation simple : $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, s'étendent sans difficulté à toute équation de la forme :

$$X(x, y) \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + Y(x, y) \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{1}$$

Lorsqu'on se place au point de vue ordinaire, on cherche d'abord les courbes satisfaisant à la relation différentielle :

$$\frac{dx}{X(x, y)} = \frac{dy}{Y(x, y)}.$$

Ces courbes sont les caractéristiques de l'équation (1); si l'on admet que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont des fonctions continues, la fonction $f(x, y)$ admet une différentielle totale :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

On voit alors que cette fonction doit être constante sur les caractéristiques. Cherchons dans quelle mesure nous pouvons étendre ce résultat.

Je me place dans les hypothèses suivantes : Dans une certaine aire S, il existe une famille de courbes :

$$\varphi(x, y) = u,$$

de sorte que, par tout point de l'aire, passe une courbe et une seule de cette famille ; $\varphi(x, y)$ a en tout point des dérivées continues par rapport à (x, y) ; il y a ainsi, en chaque point (x_0, y_0), une tangente déterminée pour la courbe qui passe en ce point ; l'angle α de cette tangente avec $0x$ est donné par la formule :

$$\frac{\cos\alpha}{X(x_0, y_0)} = \frac{\sin\alpha}{Y(x_0, y_0)} = \frac{1}{\sqrt{X^2 + Y^2}}.$$

Enfin, X et Y sont *limités* dans l'aire que nous considérons.

Soit C une de ces courbes, E un ensemble parfait de points pris sur C ; je dis que *la fonction $f(x, y)$, relativement à E, est ponctuellement variable.* Il suffit, pour le démontrer, d'interpréter le résultat général énoncé au § 95 :

Il existe dans E des points *réguliers par rapport à E* ; si A est un de ces points, à ε correspond un cercle de centre A tel que, si P et Q sont deux points de E pris dans ce cercle, on a:

$$\left| r^t P Q - \left[\frac{\partial f}{\partial x}(A) \cdot \cos(0x,\ PQ) + \frac{\partial f}{\partial y}(A) \cdot \sin(0x,\ PQ)\right]\right| < \varepsilon. \quad (2)$$

Dans le cas actuel, si α est l'angle de la tangente à C en A avec $0x$, les quantités $\cos(0x,\ PQ)$, $\sin(0x,\ PQ)$, sont infiniment voisines de $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$, qui sont proportionnelles à $X(A)$, $Y(A)$; donc, en tenant compte de l'équation (1), la relation d'inégalité (2) donne lieu à celle-ci:

$$| r^t P Q | < \varepsilon_1, \quad (3)$$

ε_1 pouvant devenir aussi petit qu'on veut. Cette inégalité (3) exprime la proposition que je voulais démontrer.

On déduit de là que, si $f(x, y)$ est assujettie à être continue par rapport à (x, y), elle doit être constante sur les caractéristiques, *la chose étant démontrée indépendamment de toute hypothèse sur les dérivées autre que celle de leur existence.*

101. Nous pouvons enfin donner encore une extension à ces résultats, en considérant le cas de l'équation à n variables:

$$X_1(x_1,\ x_2, \ldots x_n) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0. \quad (1)$$

En premier lieu, on fera une étude sur les conséquences qu'entraîne, pour une fonction de n variables, l'hypothèse de l'existence de dérivées partielles en chaque point; dans le cas général, cette étude présenterait des difficultés, analogues à celles que nous avons rencontrées dans l'étude des fonctions de n variables, continues par rapport à chacune d'elles, dès que n est égal à 3.

Mais si l'on suppose que $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ est continue par rapport à l'ensemble des variables, on a immédiatement un résultat très simple; en effet, appellons $\alpha_\sigma(x_1,\ x_2, \ldots\ x_n)$ la fonction définie au § 91, et relative à x_1; dans l'hypothèse de la continuité de f, cette fonction α_σ est *semi-continue supérieurement par rapport à l'ensemble* $(x_1,\ x_2, \ldots\ x_n)$; on en déduit que, sur toute courbe caractéristique de l'équation (1), la fonction f est à la fois continue et ponctuellement variable relativement à tout ensemble parfait; elle est donc constante.

Ici encore nous avons accompli un progrès: nous avons supprimé la restriction de la continuité des dérivées.

Je ferai remarquer qu'il existe certainement des fonctions *non continues par rapport à l'ensemble des variables* et satisfaisant à l'équation (1); par exemple, si nous envisageons l'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}=0, \tag{2}$$

la fonction que j'ai déjà considérée au § 86, qui est égale à 0 pour les points de la droite $x=y=z$, et à :

$$\frac{(x-z)(y-z)(x-y)}{[(x-z)^2+(y-z)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

pour les autres points de l'espace, satisfait en tout point à l'équation aux dérivées partielles (2); cela résulte de ce qu'elle est constante sur chaque parallèle à $x=y=z$; mais on voit qu'elle est discontinue par rapport à l'ensemble (x, y, z).

CONCLUSION.

Dans l'introduction, j'ai montré comment les différentes questions traitées dans ce travail peuvent être considérées à un même point de vue. On voit à prèsent que les méthodes qui ont été employées pour les résoudre présentent aussi entre elles les plus grandes analogies. La théorie des ensembles de points joue un rôle très important dans ces méthodes; on peut même dire, d'une manière générale, que, dans l'ordre d'idées où nous nous sommes placés, tout problème relatif à la théorie des fonctions conduit à certaines questions relatives à la théorie des ensembles; et c'est dans la mesure où ces dernières questions sont avancées ou peuvent l'être qu'il est possible de résoudre plus ou moins complètement le problème donné.

Les questions dont l'étude fait l'objet de ce mémoire en appellent une foule d'autres. En ce qui concerne les fonctions d'une variable, il y aurait lieu de poursuivre l'étude des différentes classes de fonctions définies au chapitre III; il faudrait ensuite faire une étude analogue pour les fonctions de plusieurs variables, étudier en particulier, d'une manière plus approfondie qu'on ne l'a fait au chapitre IV, les fonctions de n variables, continues par rapport à chacune d'elles; il y aurait lieu aussi de chercher à résoudre, aussi complètement que possible, la question posée au chapitre V au sujet des équations aux dérivées partielles.

On voit qu'il y a là tout un groupe de problèmes, dont quelques-uns seulement, choisis parmi les plus simples, ont été étudiés dans ce travail.

TABLE DES MATIÈRES

Studî
sulle equazioni differenziali lineari.

(Di Ulisse Dini, *a Pisa.)*

1. In una Memoria collo stesso titolo pubblicata nel volume precedente di questi *Annali*, prendendo a considerare una equazione lineare:

$$\Phi(y) = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = X, \tag{1}$$

ho trovato una formola che dà in serie, e sotto infinite forme, l'integrale generale della equazione stessa in ogni tratto relativo alla variabile x nel quale la funzione X e i coefficienti $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ sono regolari (*) e a_0 è diverso da zero; ed ora di questa formola farò alcune applicazioni notevoli che condurranno alla determinazione o allo studio degli integrali di classi particolari di equazioni lineari, o di equazioni speciali.

Richiamiamo le notazioni di quella Memoria; cioè indichiamo con $z_1, z_2, \ldots, z_n$ n funzioni di x arbitrarie, ma regolari pei valori di x in quello dei tratti indicati che si considera, e tali altresì che nel tratto stesso il determinante:

$$Q = \begin{vmatrix} z_1 & z'_1 & z''_1 & \ldots & z_1^{(n-2)} & z_1^{(n-1)} \\ z_2 & z'_2 & z''_2 & \ldots & z_2^{(n-2)} & z_2^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_n & z'_n & z''_n & \ldots & z_n^{(n-2)} & z_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

(*) Notiamo una volta per tutte che quando una funzione u che non è costante è regolare nell'intorno di un punto a a distanza finita, e ammette almeno la derivata prima *finita e continua*, essa non può fare infinite oscillazioni in ogni porzione di quell'intorno a meno che queste porzioni non terminino al punto a. Se le facesse infatti, la sua derivata dovrebbe passare continuamente per zero, e questo non avverrebbe se avesse almeno un punto ove fosse diversa da zero, perchè allora per la continuità esisterebbe un intero sia diverso da zero; e indichiamo inoltre con $\varepsilon_{n+1} Z_r$ il polinomio aggiunto in z_r del primo membro della (1), essendo in generale $\varepsilon_s = (-1)^s$, e con Q_c, q_{x,x_1} e $\mathfrak{q}_{x,x_1}$ i determinanti che vengono da Q sostituendovi agli elementi dell'ultima colonna le n costanti arbitrarie $c_1, c_2, \ldots, c_n$ quando si vuole ottenere il Q_c, e le funzioni $z_1, z_2, \ldots, z_n$, o le altre $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ nelle quali sia cambiato x in x_1 quando si vogliono ottenere $q_{x\,x_1}$, o $\mathfrak{q}_{x,x_1}$; per modo che i determinanti stessi rientrano tutti in quello che al § 17 della Memoria suddetta indicammo con Θ_n e che viene da Q ponendovi al posto degli elementi dell'ultima colonna quantità qualsiansi $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$; e pel quale nei §§ 17 e 18 della Memoria stessa abbiamo dato alcune particolarità notevoli che in questa Memoria avremo occasione di richiamare fra breve.

Con queste notazioni, e coll'altra $A_x = Q_c + \int_\alpha^x X_{x_1} q_{x,x_1} dx_1$, secondo quanto si disse al § 9 della Memoria stessa, l'integrale y è dato dalla formola seguente:

$$\left.\begin{array}{l}
y = \dfrac{\varepsilon_{n-1} A_x}{(a_0 Q)_x} + \dfrac{\varepsilon^2_{n-1}}{(a_0 Q)_x} \displaystyle\int_\alpha^x \dfrac{A_{x_1} \mathfrak{q}_{x,x_1}}{(a_0 Q)_{x_1}} dx_1 + \\
+ \dfrac{\varepsilon^3_{n-1}}{(a_0 Q)_x} \displaystyle\int_\alpha^x \dfrac{\mathfrak{q}_{x,x_1}}{(a_0 Q)_{x_1}} dx_1 \int_\alpha^{x_1} \dfrac{A_{x_2} \mathfrak{q}_{x_1,x_2}}{(a_0 Q)_{x_2}} dx_2 + \\
+ \dfrac{\varepsilon^4_{n-1}}{(a_0 Q)_x} \displaystyle\int_\alpha^x \dfrac{\mathfrak{q}_{x,x_1}}{(a_0 Q)_{x_1}} dx_1 \int_\alpha^{x} \dfrac{\mathfrak{q}_{x_1,x_2}}{(a_0 Q)_{x_2}} dx_2 \int_\alpha^{x_2} \dfrac{A_{x_3} \mathfrak{q}_{x_2,x_3}}{(a_0 Q)_{x_3}} dx_3 + \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
+ \dfrac{\varepsilon^{m+1}_{n-1}}{(a_0 Q)_x} \displaystyle\int_\alpha^x \dfrac{\mathfrak{q}_{x,x_1}}{(a_0 Q)_{x_1}} dx_1 \int_\alpha^{x} \dfrac{\mathfrak{q}_{x_1,x_2}}{(a_0 Q)_{x_2}} dx_2 \int_\alpha^{x_0} \ldots \\
\ldots \displaystyle\int_\alpha^{x_{m-2}} \dfrac{\mathfrak{q}_{x_{m-2},x_{m-1}}}{(a_0 Q)_{x_{m-1}}} dx_{m-1} \int_\alpha^{x_{m-1}} \dfrac{A_{x_m} \mathfrak{q}_{x_{m-1},x_m}}{(a_0 Q)_{x_m}} dx_m + \ldots
\end{array}\right\} \quad (2)$$

---

tratto nel quale sarebbe sempre positiva o sempre negativa e in quel tratto la funzione non farebbe oscillazioni. La derivata dunque o sarebbe discontinua, e allora la funzione u non soddisfarebbe alle condizioni poste, o sarebbe zero in tutto l'intorno di a e la funzione sarebbe costante in quell'intorno.

Non potendo poi la indicata funzione u avere continui cambiamenti di segno in ogni porzione dell'intorno di a che non termini ad a, anche il suo integrale dovrà comporovvero:

$$y = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

essendo:

$$u_0 = \frac{\varepsilon_{n-1} A_x}{(a_0 Q)_x}, \quad u_n = \frac{\varepsilon_{n-1}}{(a_0 Q)_x} \int_\alpha^x u_{n-1}(x_1)\, \mathfrak{q}_{x,x_1}\, d x_1,$$

nella quale α è un valore speciale di x nel tratto che si considera; e questa formola varrà anche quando α sia infinito, o quando per $x = \alpha$ le nostre funzioni non soddisfino più a tutte le condizioni anzidette, purchè allora si rientri nei casi indicati ai §§ 10 e 11 della Memoria citata, o in altri simili.

2. Ciò premesso, passiamo a fare alcune applicazioni della formola (2) scegliendo in varî modi le funzioni ausiliarie $z_1, z_2, \ldots, z_n$, per le quali come abbiamo detto si ha tanta arbitrarietà.

Scegliamo in primo luogo per queste funzioni n esponenziali distinte $e^{\omega_1 x}, e^{\omega_2 x}, \ldots, e^{\omega_n x}$, essendo $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ quantità costanti (reali o complesse) delle quali indicheremo con σ la somma $\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n$, mentre, per abbreviare, indicheremo con σ_r la somma $\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_{r-1} + \omega_{r+1} + \cdots + \omega_n$, cioè $\sigma - \omega_r$, di tutte le stesse quantità meno la ω_r.

Avremo allora $Q = q\, e^{\sigma x}$, essendo q il prodotto $\pi_{r,s}(\omega_r - \omega_s)$ con $r > s$ delle differenze delle ω_r; e se indicheremo con:

$$\varphi(\omega) = \alpha_0 \omega^n + \varepsilon_1 \alpha_1 \omega^{n-1} + \varepsilon_2 \alpha_2 \omega^{n-2} + \cdots + \varepsilon_{n-1} \alpha_{n-1} \omega + \varepsilon_n \alpha_n = 0, \quad (3)$$

la equazione che avrà per radici le quantità stesse $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, si avrà $\sigma = \frac{\alpha_1}{\alpha_0}$, e le $z_1, z_2, \ldots, z_n$ verranno ad essere un sistema d'integrali fondamentali della equazione lineare a coefficienti costanti:

$$\alpha_0 z^{(n)} + \varepsilon_1 \alpha_1 z^{(n-1)} + \varepsilon_2 \alpha_2 z^{(n-2)} + \cdots + \varepsilon_{n-1} \alpha_{n-1} z' + \varepsilon_n \alpha_n z = 0, \quad (4)$$

e per le quantità Q_{z_r} del § 17 della Memoria citata si troverà con processi noti $\varepsilon_{n-r} Q_{z_r} = \frac{\alpha_0 Q}{\varphi'(\omega_r)} e^{-\omega_r x} = \frac{\alpha_0 q}{\varphi'(\omega_r)} e^{\sigma_r x}$.

---

tarsi al modo stesso, e quindi, come la funzione u, l'integrale non potrà fare infinite oscillazioni altro che negli *intorni* di a, cioè nei tratti ai quali appartiene anche il punto a; come avverrebbe ad es. se si trattasse della funzione:

$$u = 3(x-a)^2 \operatorname{sen}[\log(x-a)] + (x-a)^2 \cos[\log(x-a)].$$

Se poi nel punto a la funzione u divenisse infinita, pure essendo regolare negli altri punti di un intorno di a, l'integrale se anche fosse finito potrebbe a *fortiori* presentare infinite oscillazioni in ogni intorno del punto stesso a, ma non in porzioni di quell'intorno che non terminino al punto a.

Per questo le formole (38) della stessa Memoria ci daranno ora:

$$Q_c = \alpha_0\, q \sum_1^n{}_r \frac{1}{\varphi'(\omega_r)} e^{\sigma_r x} c_r\,,$$

$$q_{x,x_1} = \alpha_0\, q \sum_1^n{}_r \frac{1}{\varphi'(\omega_r)} e^{\sigma_r x + \omega_r x_1}\,,$$

$$\mathfrak{q}_{x,x_1} = \alpha_0\, q \sum_1^n{}_s \frac{1}{\varphi'(\omega_s)} e^{\sigma_s x} (Z_s)_{x_1}\,;$$

e se per abbreviare indichiamo con A_x, e v_{x,x_1} i rapporti $\frac{A_x}{q}$, e $\varepsilon_{n-1} \frac{\mathfrak{q}_{x,x_1}}{(a_0 Q)_{x_1}}$, e con a_{0,x_1} il valore di a_0 quando per x vi si pone x_1, e al tempo stesso osserviamo che, a causa della (4), Z_r si potrà considerare come dato dalla formola:

$$\varepsilon_{n+1} Z_r = \sum_0^n{}_i\, \varepsilon_i (a_i z_r)^{(n-i)} = \sum_0^n{}_i\, \varepsilon_i \left[(a_i - \alpha_i) z_r\right]^{(n-i)} =$$

$$= e^{\omega_r x} \sum_0^n{}_i\, \varepsilon_i \frac{\left[(a_i - \alpha_i) e^{\omega_r x}\right]^{(n-i)}}{e^{\omega_r x}}\,,$$

avremo:

$$\mathsf{A}_x = \frac{A_x}{q} = \alpha_0 \sum_1^n{}_r \frac{1}{\varphi'(\omega_r)} e^{\sigma_r x} \left(c_r + \int_\alpha^x X_{x_1} e^{\omega_r x_1} d x_1\right), \tag{5}$$

$$v_{x,x_1} = \varepsilon_{n-1} \frac{\mathfrak{q}_{x,x_1}}{(a_0 Q)_{x_1}} = \frac{\alpha_0}{a_{0,x_1}} \sum_1^n{}_s \frac{e^{\sigma_s(x - x_1)}}{\varphi'(\omega_s)} \sum_0^n{}_i\, \varepsilon_i \frac{\left[(a_i - \alpha_i) e^{\omega_s x}\right]_{x_1}^{(n-i)}}{e^{\omega_s x_1}}\,; \tag{6}$$

e così, sostituendo nel valore (2) di y, si troverà per l'integrale della (1):

$$\left.\begin{aligned} y = \varepsilon_{n-1} \frac{e^{-\sigma x}}{a_{0,x}} \Big\{ \mathsf{A}_x + \int_\alpha^x \mathsf{A}_{x_1} v_{x,x_1} d x_1 + \int_\alpha^x v_{x,x_1} d x_1 \int_\alpha^{x_1} \mathsf{A}_{x_2} v_{x_1,x_2} d x_2 + \cdots \\ \cdots + \int_\alpha^x v_{x,x_1} d x_1 \int_\alpha^{x_2} v_{x_1,x_2} d x_2 \ldots \int_\alpha^{x_{m-2}} v_{x_{m-2},x_{m-1}} d x_{m-1} \int_\alpha^{x_{m-1}} \mathsf{A}_{x_m} v_{x_{m-1},x_m} d x_m + \cdots \Big\}, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

essendo A_x, e v_{x,x_1}, e così in generale A_{x_m} e v_{x_{m-1},x_m}, determinati dalle (5) e (6); e supponendo in questa le $c_1, c_2, \ldots, c_n$ (che figurano in A_x) tutte nulle con X diverso da zero, si avrà un integrale particolare della equazione completa (1); mentre se $X = 0$ per ogni sistema di valori delle costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ si avrà un integrale della equazione omogenea:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0\,; \tag{8}$$

e in particolare prendendo successivamente, sempre quando $X = 0$, una delle costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ uguale ad uno, e le altre uguali a zero si avranno n integrali fondamentali della equazione stessa (8) pei valori di x in tutti gli intervalli nei quali i coefficienti $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ sono finiti e continui insieme alle loro derivate sino agli ordini $n, n-1, n-2, \ldots$ rispettivamente, e a_0 è diverso da zero.

E si può notare che queste formole sono generali, e valgono comunque si prendano le costanti $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, purchè diverse fra loro; talchè prendendo queste, e quindi anche le σ e σ_r, in modo particolare, si avranno espressioni speciali (sempre per l'integrale generale) che potranno dare luogo a risultati notevoli.

3. Invece però di darsi avanti le $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, gioverà darsi i coefficienti $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ che figurano nella equazione (3) della quale le $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ stesse sono radici, o quelli della equazione (4) della quale la (3) viene ad essere la equazione caratteristica, e le $z_1, z_2 \ldots, z_n$ vengono ad essere integrali fondamentali, scegliendo i coefficienti stessi opportunamente in relazione della equazione data (1); per modo che la equazione caratteristica (3) venga ad avere le sue radici disuguali, e che al tempo stesso colla formola (7) si possano fare facilmente studî speciali intorno agli integrali della equazione data.

Così, supponendo in particolare che questa equazione (1) sia tale che i suoi coefficienti $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ al crescere indefinito di x, ad es.: per valori positivi, tendano verso limiti determinati e finiti dei quali il primo (quello di a_0) sia anche diverso da zero, prendiamo questi limiti pei valori di $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ che figurano nelle (3) e (4), nel supposto dapprima che per essi la equazione (3) venga ad avere le radici tutte diseguali; e indichiamo con $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ le loro differenze dai coefficienti corrispondenti, cioè poniamo:

$$a_0 = \alpha_0 + \mathbf{a}_0, \quad a_1 = \alpha_1 + \mathbf{a}_1, \; a_2 = \alpha_2 + \mathbf{a}_2, \ldots, \quad a_n = \alpha_n + \mathbf{a}_n, \tag{9}$$

essendo $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ funzioni di x che tendono a zero col crescere indefinito di x e che per ogni valore finito di x al di là di un certo numero c sono derivabili almeno fino agli ordini $n, n = 1, n-2, \ldots$ rispettivamente. In altri termini ammettiamo che il primo membro della equazione data (1) o la corrispondente omogenea (8) dia luogo a una *equazione limite* d'ordine n per $x = +\infty$;

$$\alpha_0 y^{(n)} + \alpha_1 y^{(n-1)} + \alpha_2 y^{(n-2)} + \cdots + \alpha_{n-1} y' + \alpha_n y = 0, \tag{10}$$

(che abbia cioè per coefficienti i limiti, che supponiamo esistere, di quelli del primo membro della equazione data), e le funzioni ausiliarie z_1, $z_2, \ldots,$ z_n siano un sistema d'integrali fondamentali $e^{\omega_1 x}$, $e^{\omega_2 x}, \ldots,$ $e^{x_n \omega}$ della equazione aggiunta:

$$\alpha_0 z^{(n)} + \varepsilon_1 \alpha_1 z^{(n-1)} + \varepsilon_2 \alpha_2 z^{(n-2)} + \cdots + \varepsilon_{n-1} \alpha_{n-1} z' + \varepsilon_n \alpha_n z = 0,$$

della indicata equazione limite, supposto dapprima che per essa la equazione caratteristica (3) venga ad avere le radici ω_1, $\omega_2, \ldots,$ ω_n tutte diseguali, e supposto inoltre che le funzioni $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2, \ldots,$ $\mathbf{a}_n$ che rappresentano le differenze $a_0 - \alpha_0$, $a_1 - \alpha_1$, $a_2 - \alpha_2, \ldots,$ $a_n - \alpha_n$ abbiano le proprietà indicate.

Allora, considerando nella (7) il caso di $\alpha = +\infty$, con chè dovranno essere soddisfatte le condizioni dei §§ 10 o 11 della Memoria precedente o altre simili, potremo colla formola stessa studiare il modo di comportarsi al crescere indefinito di x degli integrali della equazione (1) per la quale i coefficienti a_0, a_1, $a_2, \ldots,$ a_n soddisfano alle condizioni suddette (*).

4. Incominciamo infatti per semplicità a considerare il caso delle equazioni omogenee (8), cioè supponiamo che sia $X = 0$ nella (1).

(*) Invece di studiare il modo di comportarsi degli integrali della equazione data (1) col crescere indefinito della variabile x, potremmo, lasciando α finito, studiare il loro modo di comportarsi coll'avvicinarsi indefinitamente di x ad α, e per questo basterebbe supporre che i coefficienti a_0, $a_1, \ldots,$ a_n della (1) fossero finiti e continui e derivabili anche per $x = \alpha$, e a_0 non fosse zero, e che i coefficienti α_0, α_1, $\alpha_2, \ldots,$ α_n delle (3) e (4) fossero i valori degli stessi coefficienti per $x = \alpha$.

E con queste condizioni, volendo ancora ammettere dapprima che le radici della equazione (3) dovessero risultare disuguali, il punto $x = \alpha$ potrebbe essere uno qualunque di quelli pei quali, oltre ad essere regolari i coefficienti a_0, a_1, $a_2, \ldots,$ a_n nell'intorno dei punti stessi, e all'essere in essi e nel loro intorno a_0 diverso da zero, si ha altresì che la equazione:

$$\Phi(x, \omega) = a_0 \omega^n + \varepsilon_1 a_1 \omega^{n-1} + \varepsilon_2 a_2 \omega^{n-2} + \ldots + \varepsilon_{n-1} a_{n-2} \omega + \varepsilon_n a_n = 0,$$

che è la caratteristica di quella che viene dalla equazione data (1) cambiandovi i segni alternativamente nel primo membro, e rendendola omogenea se già non lo è col farvi il secondo membro uguale zero, non ha radici uguali, cioè non si ha anche $\frac{\partial \Phi}{\partial \omega} = 0$; o in altri termini sono esclusi i punti critici della funzione ω definita da questa equazione, quando si considerino oltre ai valori reali anche i valori complessi di x e ω, cioè i punti pei quali $a_0 = 0$, e quelli di diramazione (reali e apparenti) della funzione stessa ω.

E quando si vogliano considerare anche questi punti x come punti α, allora bisognerà tener conto delle considerazioni fatte nei §§ 10 e 11 della Memoria precedente, o di altre simili.

Osservando che nelle somme:

$$\sum_0^n {}_i\, \varepsilon_i \frac{\left[(a_i - \alpha_i)\, e^{\omega_s x}\right]_{x_1}^{(n-i)}}{e^{\omega_s x_1}} = \sum_0^n {}_i\, \varepsilon_i \frac{(\mathbf{a}_i\, e^{\omega_s x})_{x_1}^{(n-i)}}{e^{\omega_s x_1}}, \tag{11}$$

che figurano nelle espressioni (6) di v_{x,x_1}, le esponenziali $e^{\omega_s x_1}$ a calcoli fatti vengono a sparire, si vede che al crescere indefinito di x queste somme tenderanno a zero come vi tendono le $\mathbf{a}_i$ e le loro derivate: e quindi, fatta astrazione da alcuni fattori sempre finiti, si può dire che i varî termini della $v_{x_{m-1} x_m}$ si comporteranno come le esponenziali $e^{\sigma_s(x_{m-1} - x_m)}$ moltiplicate per le somme stesse (11), mentre i termini delle $\mathbf{A}_{x_m}$ si comporteranno come quelle esponenziali $e^{\sigma_s x_m}$ che a seconda dei valori scelti per le c_r figureranno nelle somme che compongono le $\mathbf{A}_{x_m}$ stesse; e per conseguenza infine i varî termini dei prodotti $\mathbf{A}_{x_m} v_{x_{m-1}, x_m}$ che figurano sotto gli ultimi integrali nei varî termini della (7) si comporteranno come le esponenziali $e^{\sigma_s x_{m-1}} e^{(\omega_s - \omega_r) x_m}$ moltiplicate per le somme (11). E siccome le radici $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ della (3) potranno essere reali o complesse, evidentemente nelle esponenziali quì indicate le radici reali e così le parti reali di quelle complesse, quando non si distruggano nelle quantità σ_s o nella differenza $\omega_r - \omega_s$, figureranno in esponenziali reali della forma $e^{\lambda x}$ (λ reale), e quindi a seconda dei segni della quantità λ daranno luogo a esponenziali che crescono all'infinito o tendono a zero col crescere indefinito di x, mentre le parti immaginarie moltiplicate per la variabile x verranno a figurare soltanto sotto seni e coseni.

5. Queste considerazioni fanno già comprendere che il verificarsi o nò delle condizioni generali del § 10 o di quelle più particolari del § 11 della Memoria precedente, e l'applicabilità quindi della formola (7) per la determinazione dell'integrale y della (8) anche nel caso di $\alpha = \infty$, dipenderà dal modo di tendere a zero delle quantità $\mathbf{a}_i$ e delle loro derivate fino a quelle di ordine $n - i$ col crescere indefinito di x, e dalla natura delle radici $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ della (3), e più specialmente da queste radici stesse quando sono reali e dalle loro parti reali quando sono complesse.

Ciò premesso, s'indichino in generale con $\mu_r + i\,\nu_r$ le radici ω_r della (3), comprendendo in questa espressione anche le radici reali (per le quali sarà $\nu_r = 0$); e distinguiamo il caso in cui tutte le radici hanno la stessa parte reale, come avverrà in particolare quando le radici saranno tutte puramente immaginarie (una potendo anche essere nulla), e il caso in cui questa parte reale non è la stessa per tutte le radici.

Prendendo ora a considerare il primo caso, e indicando con μ la parte reale comune delle varie radici, si osserverà per prima cosa che allora nelle esponenziali $e^{\sigma_s x_{m-1}}\, e^{(\omega_s-\omega_r)x_m}$ che compariscono nei varii termini dei prodotti $\mathsf{A}_{x_m} v_{x_{m-1},x_m}$ gli esponenti $(\omega_s - \omega_r)\, x_m$ della seconda esponenziale saranno nulli per $r = s$, e saranno puramente immaginarî pei valori di r e s diversi fra loro; e quindi queste esponenziali non porteranno in campo altro che quantità finite.

Si indichi poi con Ω il massimo modulo dei coefficienti $\dfrac{c_r}{\varphi'(\omega_r)}$ che figurano nei termini delle A_{x_m} e che saranno al più in numero di n, e si supponga che le funzioni a_i e le loro derivate al crescere indefinito di x tendano a zero di un ordine non inferiore a quello di $\dfrac{\tau(x)}{x}$, essendo $\tau(x)$ una funzione positiva di x, come ad es. $\dfrac{1}{x^\nu}$, $\dfrac{1}{(\log x)^{1+\nu}}$, $\dfrac{1}{\log x\,(\log^2 x)^{1+\nu}}, \ldots$, con $\nu > 0$, per la quale la funzione $\dfrac{\tau(x)}{x}$ viene integrabile fino all' infinito; con chè posto $\displaystyle\int_x^\infty \frac{\tau(x)}{x}\, dx = \tau_1(x)$, la $\tau_1(x)$ è una funzione che col crescere indefinito di x tende a zero decrescendo continuamente.

Allora, indicando con Ω_1 un altro numero positivo e finito, evidentemente ogni termine di $\mathsf{A}_{x_m} v_{_{m-1},x_m}$ avrà un modulo non superiore a quello di $\Omega\,\Omega_1\, e^{\sigma_s x_{m-1}} \dfrac{\tau(x_m)}{x_m}$; e siccome questi termini sono al più in numero di n^2, il modulo dell'integrale $\displaystyle\int_{x_{m-1}}^\infty \mathsf{A}_{x_m} v_{x_{m-1},x_m} dx_m$ non supererà quello di $n^2\Omega\Omega_1 e^{\sigma_0 x_{m-1}}\, \tau_1(x_{m-1})$, essendo σ_0 una qualunque delle somme σ_1, $\sigma_2, \ldots, \sigma_n$, le quali evidentemente hanno tutte la stessa parte reale μ.

Di quì risulta subito che il modulo dell'integrale doppio:

$$\int_{x_{m-1}}^\infty v_{x_{r-2},x_{m-1}}\, d\, x_{m-1} \int_{x_{m-1}}^\infty \mathsf{A}_{x_m}\, v_{x_{m-1},x_m}\, d\, x_m,$$

non sarà superiore a quello di $n^3\,\Omega\,\Omega_1^2\, e^{\sigma_0 x_{m-2}} \displaystyle\int_{x_{m-1}}^\infty \frac{\tau(x_{m-1})\,\tau_1(x_{m-1})}{x_{m-1}}\, d\, x_{m-1}$; e così continuando, si vede infine che il modulo del termine generale del secondo membro della formola (7) non sarà superiore a quello di:

$$n^{m+1}\,\Omega\,\Omega_1{}^m\,e^{(\sigma_0-\sigma)x}\int_x^\infty \frac{\tau(x_1)}{x_1}\,d\,x_1\int_{x_1}^\infty \frac{\tau(x_2)}{x_2}\,d\,x_2\int_{x_2}^\infty\ldots\int_{x_{m-2}}^\infty \frac{\tau(x_{m-1})}{x_{m-1}}\,d\,x_{m-1}\int_{x_{m-1}}^\infty \frac{\tau(x_m)}{x_m}\,d\,x_m\,.$$

Ne segue che, fatta astrazione dal fattore comune $e^{\mu x}$, se sarà ad es. $\tau(x)=\frac{1}{x^\nu}$, o $\tau(x)=\frac{1}{(\log x)^{1+\nu}}$, o $\tau(x)=\frac{1}{\log x\,(\log^2 x)^{1+\nu}}$, ..., il modulo del detto termine generale non supererà quello di una serie esponenziale, mentre in generale, indipendentemente dall'aversi o no per $\tau(x)$ queste particolarità, si vede che in ogni caso il modulo dello stesso termine generale non supererà il numero $n^{m+1}\,\Omega\,\Omega_1{}^m\,\tau_1(x)^m$, ovvero $n\,\Omega\,(n\,\Omega_1\,\tau_1(x))^m$, che per x superiore a un certo numero c è inferiore a quello di una progressione geometrica colla ragione minore di uno, e quindi sotto le attuali ipotesi, astrazion fatta sempre del fattor comune $e^{-\mu x}$, la serie che figura nella espressione (7) viene ad essere convergente in ugual grado per ogni valore di x al di là del numero c.

Tenendo dunque conto ora anche del detto fattore $e^{-\mu x}$, e poi cambiando le variabili $x, x_1, x_2, x_3, \ldots$, in $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$, e dopo moltiplicando tutto per q_{x,x_1} o per Z_r, e osservando che con queste moltiplicazioni le esponenziali reali relative ad x_1 verranno a sparire, si trova che rispetto a questa variabile x_1 la convergenza in ugual grado rimarrà, e si potrà applicare l'integrazione anche fra x e ∞; e questo basta ora per poter dire che tutte le considerazioni dei §§ 9 e 10 della Memoria precedente rimangono applicabili.

Da ciò risulta che, sotto queste condizioni, la formola (7), nella quale sia fatto $X=0$, considerata anche per $\alpha=+\infty$ rappresenta l'integrale y della equazione omogenea (8) pei valori di x superiori a un numero sufficientemente grande c; e quindi, osservando che $a_{0,x}$ al crescere indefinito di x tende verso α_0, e a_0 diviene infinitesimo di ordine non inferiore a quello di $\frac{\tau(x)}{x}$ e quindi superiore a quello dell'integrale $\int_x^\infty \frac{\tau(x)}{x}\,d\,x$ che si ha come fattore nel primo integrale che figura nella formola (7), ecc., ecc., si conclude che, sotto le fatte ipotesi, pei valori di x al di là di un certo numero c si ha:

$$y=c'_1\,e^{\omega_1 x}+c'_2\,e^{-\omega_2 x}+\cdots+c'_n\,e^{-\omega_n x}+\theta,$$

ove con c'_r abbiamo indicato il rapporto $\frac{c_r}{\varphi'(\omega_r)}$, e con θ una somma di termini simili agli altri, ma coi coefficienti variabili e tendenti tutti a zero di un ordine non inferiore a quello di $\tau_1(x) = \int_x^\infty \frac{\tau(x)}{x}\, d\, x$, per modo cioè che si può scrivere $\theta = \varepsilon\, e^{-\mu x}$ con $\varepsilon = g \int_x^\infty \frac{\tau(x)}{x}\, d\, x$, essendo g una quantità sempre inferiore a un numero finito (che può anche tendere a zero) e μ la parte reale comune delle varie radici $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ della (3).

Passiamo ora a considerare il caso in cui le radici $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ della (3) non hanno tutte la stessa parte reale; e indicando allora con $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_h$ $(h<n)$ quelle che hanno per parte reale la massima delle parti reali stesse che indicheremo pure con μ, limitiamoci a cercare un integrale particolare della (8) col supporre cioè ora che le costanti $c_{h+1}, c_{h+2}, \ldots, c_n$ siano tutte nulle, e le altre $c_1, c_2, \ldots, c_h$ restino arbitrarie.

Allora nelle somme che compongono le A_{x_m} l'indice r prenderà soltanto i valori $1, 2, \ldots, h$, e nei prodotti $\mathsf{A}_{x_m} v_{x_{m-1} x_m}$ compariranno soltanto $n h$ esponenziali della forma $e^{\sigma_s x_{m-1}}\, e^{(\sigma_r - \sigma_s) x_m}$ ovvero $e^{\sigma_s x_{m-1}}\, e^{(\omega_s - \omega_r) x_m}$; e per ciascuno degli indicati valori di r, nella seconda esponenziale per $s = 1, 2, \ldots, h$ un esponente $(\omega_s - \omega_r)\, x_m$ sarà nullo, e gli altri avranno nulla la parte reale; e quindi la esponenziale stessa per questi valori $1, 2, \ldots, h$ di s si manterrà sempre finita come nel caso precedente. Considerato poi pei valori $h+1, h+2, \ldots, n$ di s, lo stesso esponente avrà la parte reale negativa, e l'esponenziale stessa al crescere indefinito di x per valori positivi tenderà a zero d'ordine esponenziale.

Poste dunque per le a_i e per le loro derivate le stesse condizioni che si avevano nel caso precedente, e conservati ancora gli stessi significati a Ω e a Ω_1, si vede subito che nell'integrale $\int_x^\infty \mathsf{A}_{x_m} v_{x_{m-1}, x_m}\, d\, x_m$ i termini corrispondenti a $s = 1, 2, \ldots, h$ che sono in numero di h^2 avranno un modulo non superiore a quello di $\Omega\, \Omega_1\, e^{\sigma_s x_{m-1}}\, \tau_1(x)$, mentre per quelli corrispondenti agli altri valori $h+1, h+2, \ldots, n$ di s che sono in numero di $h(n-h)$, coll'applicare all'integrale il primo teorema del valore medio, si vede che avranno un modulo non superiore a quello di $\Omega\, \Omega_1\, \frac{\tau(x)}{x} e^{\sigma\, x_{m-1}} e^{(\sigma_r - \sigma_s) x_{m-1}}$, ovvero di $\Omega\,\Omega_1\, e^{\sigma_r x_{m-1}} \frac{\tau(x)}{x}$; e quindi evidentemente quell'integrale si potrà intendere posto sotto la stessa forma $\sum_1^h{}_r\, \gamma_{r,1}\, e^{\sigma_r x_{m-1}}$ di $\mathsf{A}_{x_{m-1}}$, essendo il modulo di $\gamma_{r,1}$ non superiore a $n\,\Omega\,\Omega_1\,\tau_1(x)$.

Ne segue che per l'integrale $\int_{x_{m-2}}^{\infty} v_{x_{m-2},x_{m-1}}\, d\,x_{m-1} \int_{x_{m-1}}^{\infty} \mathsf{A}_{x_m}\, v_{x_{m-1},x_m}\, d\,x_m$ potranno ora ripetersi le stesse considerazioni, e si troverà così che esso può intendersi posto sotto la forma $\sum_1^h \gamma_{r,2}\, e^{\sigma_r x_{m-2}}$ essendo i moduli delle $\gamma_{r,2}$ non superiori a $n\,(n\,\Omega\,\Omega_1\,\tau_1(x))\,\Omega_1\,\tau_1(x)$ ovvero a $\Omega\,(n\,\Omega_1\,\tau_1(x))^2$; e così continuando si giunge a trovare che il termine generale del secondo membro della (7) si potrà intendere posto sotto la forma $e^{-\sigma x} \sum_1^h \gamma_{r,m}\, e^{\sigma_r x}$ ovvero $e^{-\mu x} \sum_1^h \gamma_{r,m}\, e^{-i\nu_r x}$, essendo i moduli delle $\gamma_{r,m}$ non superiori a $\Omega\,(n\,\Omega_1\,\tau_1(x))^m$.

Di quì si vede che astrazion fatta dal fattore comune $e^{-\mu x}$ i moduli dei termini della serie (7) pei valori di x superiori a un certo numero c saranno inferiori a quelli di una progressione geometrica colla ragione minore delle unità; e ora ripetendo i ragionamenti fatti pel caso precedente si conclude che sotto le fatte ipotesi rispetto alle quantità a_i, se $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_h$ $(h < n)$ saranno le radici della equazione (3) che hanno la parte reale massima μ, vi sarà sempre un integrale particolare della (8) (con h costanti arbitrarie) che per valori sufficientemente grandi di x prenderà la forma:

$$y = c'_1\, e^{-\omega_1 x} + c'_2\, e^{-\omega_2 x} + \cdots + c'_h\, e^{-\omega_h x} + \varepsilon\, e^{-\mu x},$$

essendo $\varepsilon = g \int_x^{\infty} \frac{\tau(x)}{x}\, d\,x$, con g quantità il cui modulo è sempre inferiore a un numero finito.

D'altra parte è da osservare che se si cambia ω in $-\omega$ nella (3), essa si trasforma subito nella equazione caratteristica della equazione limite (10) della (8), o, come diremo per abbreviare, nella *equazione caratteristica limite* della equazione stessa (8), e le sue radici $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ vengono ad essere $-\omega_1, -\omega_2, \ldots, -\omega_n$ per modo che le funzioni:

$$y_0 = c'_1\, e^{-\omega_1 x} + c'_2\, e^{-\omega_2 x} + \cdots + c'_h\, e^{-\omega_h x},$$

con $h = n$ nel primo dei casi considerati sopra, e $h < n$ nel secondo, corrispondono rispettivamente all'integrale generale, o a un integrale particolare con h costanti arbitrarie della equazione limite (10); e per questo riassumendo si può ora enunciare il teorema generale seguente:

« Se la equazione lineare omogenea data (8) d'ordine n ha una equazione « limite (10) per $x=\infty$ pure d'ordine n, e se le differenze $\mathbf{a}_i = a_i - \alpha_i$ col « crescere indefinito di x tendono a zero di un ordine non inferiore a quello « di $\frac{\tau(x)}{x}$, essendo $\tau(x)$ una funzione positiva tale che l'integrale $\int_x^\infty \frac{\tau(x)}{x}\,dx$ « venga ad avere un significato, e se al tempo stesso le radici $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ « della equazione caratteristica limite della stessa equazione sono tutte dise- « guali, allora:

« a) Se queste radici avranno tutte una stessa parte reale λ (come « avviene ad es. quando sono tutte puramente immaginarie e una al più di « esse è uguale a zero) l'integrale generale y della equazione data (8) pei « valori di x superiori a un certo numero c prenderà la forma:

$$y = y_0 + \varepsilon\, e^{\lambda x},$$

« dove y_0 è l'integrale generale della equazione limite, e $\varepsilon = g\int_x^\infty \frac{\tau(x)}{x}\,dx$, es- « sendo g una quantità il cui modulo è inferiore a un numero finito.

« b) Se le radici $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ della stessa equazione caratteristica « limite della (8) non avranno tutte la stessa parte reale, e di queste le « $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_h$ $(h < n)$ saranno quelle che hanno la parte reale minima λ, vi « sarà un integrale particolare y della (8) con h costanti arbitrarie che pei « valori di x superiori a un certo numero c prenderà la forma:

$$y = y_0 + \varepsilon\, e^{\lambda x},$$

« dove ε ha lo stesso significato che sopra, e y_0 è l'integrale particolare « $c'_1 e^{\lambda_1 x} + c'_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + c'_h e^{\lambda_h x}$ della equazione limite. »

6. E poichè negli esponenti delle esponenziali che figurano nella y_0 la parte reale è sempre uguale a λx, e delle parti immaginarie $\nu_r x$, se, come sempre abbiamo supposto, la equazione data è a coefficienti reali, una può essere zero, e le altre sono due o due uguali e di segno contrario, si vede subito che, prendendo complesse e conjugate le costanti che moltiplicano le esponenziali conjugate corrispondenti, la y_0 si porrà sotto la forma $e^{\lambda x}(\gamma_r \cos \nu_r x + \delta_r \operatorname{sen} \nu_r x)$ essendo γ_r e δ_r costanti arbitrarie; e quindi per

l'integrale y della (8) considerata sopra si avrà:

$$\frac{y}{e^{\lambda x}} = \Sigma\,(\gamma_r \cos \nu_r\, x + \delta_r \operatorname{sen} \nu_r\, x) + \varepsilon,$$

essendo $\varepsilon = g \int_x^\infty \frac{\tau(x)}{x}\, d\, x$; cioè il rapporto $\frac{y}{e^{\lambda x}}$ per valori grandissimi di x si comporterà come una somma di seni e coseni nella quale però un termine potrà talvolta ridursi a una costante perchè una delle ν_r potrà essere zero. E valendosi della formola (7) si potranno determinare anche tanti termini quanti si vorranno della parte ε che tende a zero al crescere indefinito di x.

Osservando poi che, come si disse al § 13 della Memoria precedente, alla serie (7) può anche applicarsi la derivazione termine a termine, si vede che sarà $y' = y'_0 + \varepsilon_1\, e^{\lambda x}$, essendo ε_1 un'altra quantità che come ε al crescere indefinito di x tende essa pure a zero di un ordine non inferiore a quello di $\int_x^\infty \frac{\tau(x)}{x}\, d\, x$. E la derivata di $\frac{y}{e^{\lambda x}}$ per valori grandissimi di x si comporterà essa pure come una somma di seni e coseni.

E siccome ogni termine $\gamma_r \cos \nu_r\, x + \delta_r \operatorname{sen} \nu_r\, x$, può porsi sotto la forma $\gamma'_r \cos(\nu_r\, x + \delta'_r)$ essendo γ'_r e δ'_r nuove costanti arbitrarie, si potrà anche scrivere:

$$\frac{y}{e^{\lambda x}} = \sum \gamma'_r \cos(\nu_r\, x + \delta'_r) + \varepsilon, \quad \left(\frac{y}{e^{\lambda x}}\right)' = - \sum \gamma'_r\, \nu_r \operatorname{sen}(\nu_r\, x + \delta'_r) + \varepsilon_1,$$

per modo che col crescere indefinito di x ogni integrale particolare $y_k = \gamma'_k \cos(\nu_k\, x + \delta'_k)$ che si ottenga col prendere zero tutte le costanti γ'_r all'infuori di una γ'_k, si annullerà infinite volte, e le distanze fra le radici tenderanno verso $\frac{\pi}{\nu_k}$, e lo stesso accadrà per le derivate del rapporto corrispondente $\frac{y_k}{e^{\lambda x}}$, tendendo inoltre le radici di queste derivate a venire nei punti medî fra le radici dell'integrale.

Particolarità simili potrebbero trovarsi per le derivate di ordine superiore.

E nel caso particolare che la equazione caratteristica limite (10) della equazione data (8) abbia tutte le radici puramente immaginarie e una al più uguale a zero, o almeno ne abbia alcune puramente immaginarie e una al più uguale a zero, e le altre abbiano la parte reale positiva, allora, siccome in questo caso sarà $\lambda = 0$, i risultati precedenti, anzichè pei rapporti $\frac{y}{e^{\lambda x}}$ e per le loro derivate, varranno senz'altro per gli integrali corrispondenti della equazione data e per le loro derivate.

Questa osservazione mostra che i principali dei risultati ottenuti dal sig. Kneser, nei Vol. 116 e 117 del *Journal für die reine und angewandte Mathematik* di Crelle, per le equazioni speciali del second'ordine da lui considerate, sono tutti casi particolari di quelli che quì abbiamo ottenuti per le equazioni lineari e omogenee di ordine qualunque.

7. Questi risultati generali dànno il modo di comportarsi, per valori grandissimi delle variabili, degli integrali delle equazioni differenziali lineari e omogenee di ordine n (8) che per $x = \infty$ hanno una equazione limite (10) che è pure di ordine n, e per le quali, oltre ad essere soddisfatta la condizione che l'equazione caratteristica limite ha tutte le sue radici disuguali, è soddisfatta anche l'altra che i coefficienti $a_0, a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n$ tendano verso i loro limiti $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n$ in modo che le loro differenze $\mathfrak{a}_i = a_i - \alpha_i$ da questi limiti tendano a zero di un ordine non inferiore a quello della funzione $\frac{\tau(x)}{x}$, essendo $\tau(x)$ una funzione positiva tale che l'integrale $\int_x^\infty \frac{\tau(x)}{x} dx$ abbia un significato. E ciò per gli integrali generali della (8), o soltanto per loro integrali particolari secondochè saremo nel caso *a*) o nel caso *b*) di quelli dei quali è parola in fine del § 5.

Essi poi nel caso *a*) si estendono con tutta facilità e con leggiere modificazioni anche alle equazioni non omogenee (1) quando la funzione X è tale che gli integrali $\int_x^\infty X e^{-\lambda_i x} dx$ hannno un significato per ogni radice $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ della equazione caratteristica limite (10) relativa alla equazione omogenea corrispondente.

8. Bene spesso però le due condizioni sopra indicate, di essere cioè tutte diseguali le radici della equazione caratteristica limite, e di tendere a zero la differenza $\mathfrak{a}_i$ almeno come una funzione $\frac{\tau(x)}{x}$ non saranno soddisfatte; e allora per potere dire se e in quanto i risultati precedenti siano applicabili, converrà evidentemente fare altre considerazioni.

Sul caso però in cui non fosse soddisfatta la prima condizione potremmo anche non soffermarcisi affatto, perchè fra breve tratteremo in modo generale il caso in cui la equazione caratteristica limite ha anche radici uguali; in ogni modo osserveremo intanto che quando l'una o l'altra delle due condizioni suindicate o tutte e due non siano soddisfatte, alla equazione data con opportune trasformazioni potranno in molti casi sostituirsene altre per le quali le condizioni medesime vengano a verificarsi, e allora a queste nuove equazioni saranno applicabili i risultati precedenti.

Fra queste trasformazioni, quelle che più naturalmente si presentano sono le due *b*) e *c*) del § 16 della Memoria precedente, cioè quella che consiste nel cambiare la funzione y in un'altra u colla formola $y = tu$ prendendo per t una funzione conveniente di x, e quella che consiste nel fare un cambiamento adattato della variabile indipendente x.

Così ad es.: se, essendo o nò soddisfatta la condizione che la equazione caratteristica limite (8) abbia le sue radici diseguali, mancherà di essere soddisfatta la condizione relativa ai coefficienti a_i per qualcuno di essi, come ad es. pel solo coefficiente a_1, allora si può osservare che ponendo $y = t\,u$, e calcolando le varie derivate di y, la equazione (8) si trasformerà in un'altra in u:

$$l_0\, u^{(n)} + l_1\, u^{(n-1)} + l_2\, u^{(n-2)} + \cdots + l_{n-1}\, u' + l_n\, u = 0,$$

nella quale in generale si avrà:

$$l_i = n_i\, a_0\, t^{(i)} + (n-1)_{i-1}\, a_1\, t^{(i-1)} + (n-2)_{i-2}\, a_2\, t^{(i-2)} + \cdots$$
$$\cdots + (n-i+1)_1\, a_{i-1}\, t' + (n-i)_0\, a_i\, t,$$

e se si determina t in modo che si annulli il coefficiente l_1 di $u^{(n-1)}$, cioè se si prende per t la funzione che soddisfa all'equazione $l_1 = n\, a_0\, t' + a_1\, t = 0$, la quale ci dà $t' = -\frac{a_1}{n\,a_0}\, t$, o $t = e^{-\int \frac{a_1}{n a_0} dx}$ quando si faccia astrazione della costante arbitraria che comparirebbe in t a moltiplicare, basterà intendere calcolate successivamente le varie derivate di t colle formole:

$$t' = -\frac{a_1}{n\,a_0}\, t, \quad t'' = \left\{\left(\frac{a_1}{n\,a_0}\right)^2 - \left(\frac{a_1}{n\,a_0}\right)'\right\} t,$$

$$t''' = \left\{-\left(\frac{a_1}{n\,a_0}\right)^3 + 3\,\frac{a_1}{n\,a_0}\left(\frac{a_1}{n\,a_0}\right)' - \left(\frac{a_1}{n\,a_0}\right)''\right\} t,$$

. . . .

per vedere che la equazione precedente in u viene tutta divisibile per t, e effettuata questa divisione i coefficienti della equazione stessa vengono tutti espressi per quelli della equazione data e pei rapporti $\frac{a_1}{n\,a_0}$ e per le derivate di questi rapporti.

E quindi se ad es. in particolare si avrà:

$$\frac{a_1}{n\,a_0} = \frac{\alpha_1}{n\,\alpha_0} + \frac{\mu}{x^\nu},$$

essendo ν un numero fisso e positivo non superiore ad uno, e μ una quantità che per $x = \infty$ ha un limite determinato μ_0 diverso da zero, allora se sarà $\alpha_1 = 0$ e al tempo stesso si avrà $\nu > \frac{1}{2}$, evidentemente tutte le derivate di t dopo la prima oltre al fattore t porteranno nei varî termini il divisore $x^{1+\alpha}$ con $\alpha > 0$, mentre la prima porterà soltanto il divisore x^ν, e quindi i coefficienti della nuova equazione in u soddisfaranno tutti alle condizioni volute, e allora resterà solo a vedersi se la equazione caratteristica limite di questa ultima avrà o nò le sue radici diseguali fra loro, quando di questa condizione si voglia tenere conto.

Se poi α_1 sarà diverso da zero, allora per le derivate di t non si verificheranno più queste particolarità, però si comprende che in casi speciali anche quando α_1 è diverso da zero potranno venire soddisfatte le condizioni volute pei coefficienti della nuova equazione in u.

Così ad es.: per la equazione del second'ordine, siccome calcolando il valore di l_2 si trova $l_2 = \left\{\frac{a_2}{a_0} - \left(\frac{a_1}{2\,a_0}\right)^2 - \left(\frac{a_1}{2\,a_0}\right)'\right\} a_0\,t$, si vede che la nuova equazione in u non soddisfarà alle condizioni volute quando vi soddisfino a_0 e a_2 e $\nu > \frac{1}{2}$, a meno che non siamo nel caso precedente di $\alpha_1 = 0$; ma se a_2 o $\frac{a_2}{a_0}$ non soddisfaranno alle dette condizioni, allora basterà che si abbia $-\left(\frac{a_1}{2\,a_0}\right)^2 + \frac{a_2}{a_0} = \frac{\tau(x)}{x} + k$ essendo k una costante qualsiasi diversa da zero per essere certi che la equazione in u soddisfa alle dette condizioni, e ciò anche senza richiedere che sia $\nu > \frac{1}{2}$, ma ammettendo semplicemente che ν sia un numero diverso da zero e positivo qualsiasi.

9. E così nel caso di $\alpha_1 = 0$, cioè di $a_1 = \frac{n\,\mu}{x^\nu}\,a_0$ con $1 \geqq \nu > \frac{1}{2}$, mentre gli altri coefficienti $a_0, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ della equazione data (10) soddisfano tutti

alle solite condizioni, se avverrà che ponendo $y = e^{-\int \frac{\mu}{x\nu} dx} u$, la nuova equazione in u abbia una equazione caratteristica limite per $x = \infty$ le cui radici siano tutte disuguali, allora l'integrale generale o alcuni integrali particolari della equazione (10) stessa potranno porsi sotto la forma:

$$e^{\lambda x \int \frac{\mu}{x\nu} dx} \{ \sum \gamma_r \cos (\nu_r x + \delta_r) + \varepsilon \},$$

avendo λ e ν_r i soliti significati dei paragrafi precedenti relativi alle radici della equazione caratteristica limite della equazione data (8).

In particolare se i coefficienti a_0 e a_1 della equazione data (8) saranno polinomî dei gradi m, e $m-1$ nei quali b_0 e b_1 siano i coefficienti delle potenze di grado più alto m e $m-1$, e se gli altri coefficienti $a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n$ saranno polinomi di grado non superiore a m e almeno l'ultimo dei quali sia di grado m, e divisi per a_0 soddisfaranno tutti alle solite condizioni, allora quando si riscontri che col porre $y = x^{-\frac{b_1}{nb_0}} u$ la equazione caratteristica limite della nuova equazione in u ha tutte le radici diseguali, si potrà affermare che l'integrale generale o alcuni integrali particolari della equazione data (8) si potranno porre sotto la forma:

$$\frac{e^{\lambda x} \{ \Sigma \gamma_r \cos (\nu_r x + \delta_r) + \varepsilon \}}{x^{\frac{b_1}{nb_0}}},$$

essendo le γ_r e δ_r costanti arbitrarie.

Così, più particolarmente ancora, per le equazioni di second'ordine della forma:

$$(x^m + b\, x^{m-1} + c\, x^{m-2} + \cdots) y'' + (x^{m-1} + h\, x^{m-2} + \cdots) y' +$$
$$+ \{ p\, (x^m + b\, x^{m-1} + c\, x^{m-2} + \cdots) + q\, x^{m-2} + \cdots \} y = 0,$$

delle quali le equazioni delle funzioni di Bessel sono casi particolarissimi, quando p è un numero positivo ν^2 l'integrale generale pei valori di x superiori a un certo numero positivo c prenderà la forma:

$$\frac{\gamma \cos (\nu x + \delta) + \varepsilon}{\sqrt{x}},$$

e quando p è un numero negativo $-\nu^2$ uno degli integrali prenderà la forma:

$$\frac{\gamma\, e^{-\nu x} + \varepsilon\, e^{-\nu x}}{\sqrt{x}},$$

con γ e δ costanti arbitrarie, essendo ε in ambedue i casi una quantità che col crescere indefinito di x diviene infinitesima almeno del primo ordine.

10. Talvolta poi quando per una equazione data (8) non siano soddisfatte le solite condizioni rispetto a tutti i coefficienti a_0, a_1, $a_2, \ldots, a_n$, o alle radici della equazione caratteristica limite, potrà avvenire, come già osservammo, che colla trasformazione *c*) del § 16 della Memoria precedente, cioè con un cangiamento di variabile adattato, la nuova equazione in y venga a soddisfare alle condizioni medesime, o vi si soddisfi col fare al tempo stesso anche la trasformazione precedente $y = tu$.

Così nel caso della equazione del second'ordine:

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \tag{12}$$

se il cambiamento di variabile si farà mediante le formole $dx = f(\xi)\, d\xi$, o $x = \int f(\xi)\, d\xi + \text{cost}$, l'equazione trasformata sarà evidentemente:

$$a_0 \frac{d^2 y\, dx - dy\, d^2 x}{dx^3} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 y = 0,$$

ovvero:

$$a_0 f y'' + (a_1 f^2 - a_0 f') y' + a_2 f^3 y = 0, \tag{13}$$

ove le derivate ora s'intendono prese rispetto a ξ, e nei coefficienti a_0, a_1, a_2 s'intende introdotta la variabile ξ colla formola $x = \int f(\xi)\, d\xi + \text{cost}$; e potrà darsi che con una funzione $f(\xi)$ scelta convenientemente questa nuova equazione soddisfi a tutte le condizioni volute, o venga a soddisfarvi la equazione in u quando si faccia anche la trasformazione $y = tu$.

11. Così se si parte dalla equazione:

$$y'' + [p + \varphi(x) + \theta(x)]\, y = 0, \tag{14}$$

dove p è una costante diversa da zero, $\varphi(x)$ è una funzione regolare di x che al crescere indefinito di x tende a zero di un ordine superiore a $\frac{1}{2}$ ma inferiore a quello delle solite funzioni $\frac{\tau(x)}{x}$, e $\theta(x)$ invece diventa infinitesima di ordine uguale o superiore a quello di queste funzioni, non rientreremo nei casi considerati nei paragrafi precedenti, e quindi potrà giovare di applicare il cambiamento di variabile indicato sopra per mezzo della formola $dx = f(\xi)\, d\xi$.

La nuova equazione diverrà allora:

$$y'' - \frac{f'}{f} y' + \{ p + \varphi(x) + \theta(x) \}_\xi f^2 y = 0,$$

e se si applicherà a questa la trasformazione $y = t\,u$ con $t = e^{-\int \frac{a_1}{2a_0} dx}$ del § 8, cioè col prendere ora $t = \sqrt{f}$, o $y = \sqrt{f}\,u$, si passerà all'altra equazione in u:

$$u'' + \left\{ \{ p + \varphi(x) + \theta(x) \}_\xi f^2 - \left(\frac{f'}{2f}\right)^2 + \left(\frac{f'}{2f}\right)' \right\} u = 0; \qquad (15)$$

e ora se in questa il coefficiente $\overline{I}_2$ di u verrà della forma $\pm \nu^2 + \theta_1(\xi)$ con ν diverso da zero, e $\theta_1(\xi)$ quantità che al crescere indefinito di ξ diventa infinitesima almeno come una funzione $\frac{\tau(\xi)}{\xi}$, potremo applicare a questa i risultati dei paragrafi precedenti, e quindi nel caso di $\overline{I}_2 = \nu^2 + \theta_1(\xi)$ avremo per l'integrale generale della (14):

$$y = \sqrt{f} \{ \gamma \cos(\nu \xi + \delta) + \varepsilon \},$$

e nel caso di $\overline{I}_2 = -\nu^2 + \theta_1(\xi)$ ci sarà un integrale particolare della forma:

$$y = \sqrt{f} (\gamma + \varepsilon) e^{-\nu\xi},$$

essendo ε la solita quantità che tende a zero almeno dell'ordine di $\int \frac{\tau(\xi)}{\xi} d\xi$ col crescere indefinito di ξ.

In questi casi però volendo y espresso per x bisognerà avere anche la formula $\xi = \xi(x)$ che esprime la nuova variabile ξ per x, o almeno dovremo cercare di avere ξ sotto la forma $\xi = \psi(x) + \sigma$, essendo $\psi(x)$ una funzione conosciuta di x, e σ una quantità che tende a zero col crescere indefinito di x, e poi, sostituendo negli integrali, dovremo conservare soltanto i termini principali.

Per trovare questa nuova funzione $\xi(x)$ o la $\psi(x)$, si può anche osservare che, essendo $f = x'(\xi)$, il coefficiente $\overline{I}_2$ di u nella (15) può anche scriversi sotto la forma:

$$\overline{I}_2 = \{ p + \varphi(x) + \theta(x) \}_\xi x'^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{x''}{x'}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{x''}{x'}\right)',$$

e introducendo la funzione inversa $\xi(x)$ si trasformerà nell'altra:

$$\overline{I}_2 = \{ p + \varphi(x) + \theta(x) \} \frac{1}{\xi'^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{\xi''}{\xi'^2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\xi''}{\xi'^2}\right)' \frac{1}{\xi'},$$

le derivate ora essendo prese rispetto ad x; e se si porrà:

$$\frac{1}{\xi'} = \zeta(x), \quad \text{o} \quad \xi = \int \frac{dx}{\zeta(x)} + \text{cost.},$$

lo stesso coefficiente $\overline{l}_2$ diverrà:

$$\overline{l}_2 = \{p + \varphi(x) + \theta(x)\} \zeta^2 - \frac{1}{4}\zeta'^2 + \frac{1}{2}\zeta\zeta''.$$

Di quì risulta che se si prende ad es. $\zeta = a + b\varphi(x)$, con a e b costanti da determinarsi e a diverso da zero, siccome se ne deduce:

$$\xi = \int \frac{dx}{a + b\varphi(x)} + \text{cost.} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a}\int \frac{\varphi(x)\,dx}{a + b\varphi(x)} + \text{cost.},$$

e l'ultimo integrale per le ipotesi fatte su $\varphi(x)$ col crescere indefinito di x non può divenire infinito che di ordine inferiore a $\frac{1}{2}$, si vede subito che ξ e x vengono a crescere insieme indefinitamente e dello stess'ordine, e quindi onde il valore precedente di $\overline{l}_2$ soddisfi alle condizioni volute rispetto a ξ, basterà che nel prodotto $\{p + \varphi(x) + \theta(x)\}\{a + b\varphi(x)\}^2$ manchi il termine che diverrebbe infinitesimo soltanto come $\varphi(x)$, cioè basterà che a e b siano prese in modo che si abbia $a^2 + 2abp = 0$, o $\frac{b}{a} = -\frac{1}{2p}$.

Allora il coefficiente stesso col crescere indefinito di x o di ξ tenderà verso $a^2 p$, e si avrà $f = x' = \frac{1}{\xi'} = a + b\varphi(x)$, $\xi = \frac{1}{a}\left\{x + \int \frac{\varphi(x)\,dx}{2p - \varphi(x)} + \text{cost.}\right\}$, e quindi:

$$\sqrt{f} = \sqrt{a}\sqrt{1 - \frac{1}{2p}\varphi(x)} = \sqrt{a}\,(1 + \sigma_1), \qquad \xi = \frac{x}{a} + \frac{1}{2p}\int \varphi(x)\,dx + \sigma + \text{cost.},$$

essendo:

$$\sigma_1 = -\left(\frac{1}{2}\right)_1 \frac{1}{2p}\varphi(x) + \left(\frac{1}{2}\right)_2 \frac{1}{(2p)^2}\varphi^2(x) + \cdots,$$

$$\sigma = \frac{1}{(2p)^2}\int \varphi^2(x)\,dx + \frac{1}{(2p)^3}\int \varphi^3(x)\,dx + \cdots;$$

talchè, per quanto dicemmo sopra, si può ora affermare che se p è positivo e $= \nu^2$, cioè « per la equazione:

$$y'' + \{\nu^2 + \varphi(x) + \theta(x)\}\, y = 0, \tag{16}$$

« dove le funzioni $\varphi(x)$ e $\theta(x)$ hanno i significati stabiliti sopra, l'integrale
« generale pei valori di x superiori a un certo numero c prenderà la forma:

$$y = \gamma \cos\left(\nu x + \frac{1}{2\nu}\int \varphi(x)\, dx + \delta\right) + \varepsilon_1 + \varepsilon, \tag{17}$$

« essendo ε_1 e ε quantità che col crescere indefinito di x diventano infinitesime « la prima almeno dell'ordine di $\varphi(x)$, e la seconda almeno dell'ordine di « $\int \frac{\tau(x)}{x}\, dx$.

« E se p è negativo e $= -\nu^2$, cioè « per la equazione:

$$y'' + \{-\nu^2 + \varphi(x) + \theta(x)\}\, y = 0, \tag{18}$$

« vi sarà un integrale particolare che pei valori di x superiori a un certo « numero c prenderà la forma:

$$e^{-\nu x - \frac{1}{2\nu}\int \varphi(x) dx}\{\gamma + \varepsilon_1 + \varepsilon\}, \tag{19}$$

« ove ε_1 e ε hanno ancora gli stessi significati. » E volendo, di queste quantità ε e ε_1 si potranno costruire tanti termini quanti si vorranno.

Così supponendo in particolare $\varphi(x) = \frac{\mu}{x}$ con μ costante, cioè supponendo che le equazioni date siano della forma:

$$y'' + \left\{\nu^2 + \frac{\mu}{x} + \theta(x)\right\} y = 0, \tag{20}$$

o:

$$y'' + \left\{-\nu^2 + \frac{\mu}{x} + \theta(x)\right\} y = \sigma, \tag{21}$$

i precedenti valori degli integrali y pei valori di x superiori a c prenderanno la forma:

$$y = \gamma \cos\left(\nu x + \frac{\mu}{2\nu}\log x + \delta\right) + \varepsilon_1 + \varepsilon, \tag{22}$$

$$y = e^{-\nu x}\, x^{-\frac{\mu}{2\nu}}\{\gamma + \varepsilon_1 + \varepsilon\}, \tag{23}$$

ove ε_1 in questo caso al crescere indefinito di x diverrà infinitesimo almeno del prim'ordine; e così per la equazione (20) si ritrovano i risultati ottenuti dal sig. Kneser per altra via, e con studî tutti relativi a questa equazione speciale soltanto, in una sua recentissima Memoria pubblicata nel Vol. 120 del *Journal für die reine*, ecc., von Crelle.

E supponendo $\varphi(x) = \frac{\mu}{x^{\nu_0}}$ con $\frac{1}{2} < \nu_0 < 1$, gli integrali precedenti prenderanno la forma:

$$\left.\begin{aligned} y &= \gamma \cos\left(\nu x + \frac{\mu}{2\nu(1-\nu_0)} x^{1-\nu_0} + \delta\right) + \varepsilon_1 + \varepsilon, \\ y &= e^{-\nu x - \frac{\mu}{2\nu(1-\nu_0)} x^{1-\nu_0}} (\gamma + \varepsilon_1 + \varepsilon), \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

dove ora ε_1 col crescere indefinito di x diverrà infinitesimo almeno dell'ordine di $\frac{1}{x^{\nu_0}}$.

11. Per dare un altro esempio, consideriamo anche l'equazione di second'ordine:

$$(a_0 + b_0 x) y'' + (a_1 + b_1 x) y' + (a_2 + b_2 x) y = 0, \tag{25}$$

nella quale le a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 sono costanti, e b_0 è diverso da zero, che è caso particolare di quella di ordine n coi coefficienti pure di primo grado considerata da LAPLACE.

Essa sotto questa forma, e anche quando si divida per $a_0 + b_0 x$, non rientra in nessuno dei casi considerati fin ora; ma se si fà la solita trasformazione $y = tu$ con $t = e^{-\frac{1}{2}\int \frac{a_1 + b_1 x}{a_0 + b_0 x} dx}$, cioè $y = e^{-\frac{b_1}{2b_0} x} (a_0 + b_0 x)^{\frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{2b_0^2}} u$, si trova che la equazione corrispondente in u è la seguente:

$$u'' + \left\{ \frac{a_2 + b_2 x}{a_0 + b_0 x} - \frac{(a_1 + b_1 x)^2}{4(a_0 + b_0 x)^2} - \frac{a_0 b_1 - b_1 a_0}{2(a_0 + b_0 x)^2} \right\} u = 0,$$

che pei valori sufficientemente grandi di x può scriversi:

$$u'' + \left\{ \frac{4 b_0 b_2 - b_1^2}{4 b_0^2} + \frac{\mu}{x} + \frac{\theta_0(x)}{x^2} \right\} u = 0,$$

dove:

$$\mu = \frac{4 b_0 (a_2 b_0 - a_0 b_2) + 2 b_1 (a_0 b_1 - a_1 b_0) - b_0 b_1^2}{4 b_0^3},$$

e $\theta_0(x)$ è una funzione che resta finita anche al crescere indefinito di x; e questa, quando si esclude il caso di $4 b_0 b_2 - b_1^2 = 0$, rientra nelle (20) e (21) trattate nel paragrafo precedente, e si ha quindi così anche per le equazioni come la (25) il modo di comportarsi al crescere indefinito di x dell'integrale generale quando $4\,b_0\,b_2 - b_1^2 > 0$, e di un integrale particolare quando $4\,b_0\,b_2 - b_1^2 < 0$; e propriamente nel primo caso, se si pone $\frac{4\,b_0\,b_2 - b_1^2}{4\,b_0^2} = \nu^2$, si avrà per l'integrale generale della (25) per valori sufficientemente grandi di x:

$$y = e^{-\frac{b_1}{2b_0}x}\, x^{\frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{2b_0^2}} \left\{ \gamma \cos\left(\nu\, x + \frac{\mu}{2\,\nu} \log x + \delta\right) + \varepsilon \right\}, \tag{26}$$

e nel secondo caso, se si pone $\frac{4\,b_0\,b_2 - b_1^2}{4\,b_0^2} = -\nu^2$, si avrà per un integrale particolare della stessa equazione:

$$y = e^{-\left(\frac{b_1}{2b_0}+\nu\right)x}\, x^{\frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{2b_0^2} - \frac{\mu}{2\nu}} (\gamma + \bar{\varepsilon}), \tag{27}$$

essendo ora ε e $\bar{\varepsilon}$ quantità che al crescere indefinito di x divengono infinitesime almeno come $\frac{1}{x}$.

12. Tornando ora alle equazioni lineari generali omogenee (8) che ammettono una equazione limite (10) per $x = \infty$, consideriamo il caso in cui la equazione caratteristica limite, e quindi la equazione caratteristica (3) della aggiunta della equazione limite hanno radici uguali.

Indichiamo perciò con $a, b, c, \ldots, h, k, l$ le radici della equazione (3) coi rispettivi gradi di multiplicità $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \eta, \chi, \lambda$, essendo:

$$\alpha + \beta + \gamma + \cdots + \eta + \chi + \lambda = n,$$

e prendiamo:

$$\begin{array}{llll} z_1 = e^{ax}, & z_2 = x\, e^{ax}, & z_3 = x^2\, e^{ax}, \ldots, & z_\alpha = x^{\alpha-1}\, e^{ax}, \\ z_{\alpha+1} = e^{bx}, & z_{\alpha+2} = x\, e^{bx}, & z_{\alpha+3} = x^2\, e^{bx}, \ldots, & z_{\alpha+\beta} = x^{\beta-1}\, e^{bx}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_{n-\lambda+1} = e^{lx}, & z_{n-\lambda+2} = x\, e^{lx}, & z_{n-\lambda+3} = x^2\, e^{lx}, \ldots, & z_n = x^{\lambda-1}\, e^{lx}, \end{array}$$

e applichiamo la formola (40) del § 18 della Memoria precedente, cioè la:

$$\Theta'_n + \frac{b_1}{b_0}\Theta_n = -\frac{\psi(z_n)}{b_0}\Theta_{n-1},$$

intendendo che siano riprese le notazioni che allora si avevano.

Essendo $\psi(z) = b_0\, z^{(n-1)} + b_1\, z^{(n-2)} + \cdots + b_{n-1}\, z = 0$ la equazione che ammette gli integrali $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ nella quale b_0 può intendersi preso uguale ad α_0, la sua equazione caratteristica:

$$\varphi_{n-1}(\omega) = \frac{\varphi(\omega)}{\omega - l} = b_0\,\omega^{n-1} + b_1\,\omega^{n-2} + \cdots + b_{n-2}\,\omega + b_{n-1} = 0,$$

avrà le radici $a, b, c, \ldots, h, k, l$ degli ordini di multiplicità $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \eta, \chi, \lambda - 1$, respettivamente, e se con σ indichiamo ancora la somma $\frac{\alpha_1}{\alpha_0}$ delle radici della (3), sarà $-\frac{b_1}{b_0} = \sigma - l$, e per la formola citata avremo:

$$(e^{-(\sigma-l)}\,\Theta'_n)' = -\frac{\psi(z_n)}{\alpha_0}\,e^{-(\sigma-l)}\,\Theta_{n-1}.$$

Ma in generale se $f(\omega)$ è il primo membro della equazione caratteristica di una equazione lineare omogenea qualsiasi:

$$F(y) = \beta_0\,y^{(m)} + \beta_1\,y^{(m-1)} + \cdots + \beta_{m-1}\,y' + \beta_m\,y = 0,$$

si ha, come è noto, l'identità:

$$F(x^p\,e^{\omega x}) = e^{\omega x}\,\{p_0\,\omega^p\,f(\omega) + p_1\,\omega^{p-1}\,f'(\omega) + \cdots + p_{p-1}\,\omega\,f^{(p-1)}(\omega) + p_p\,f^{(p)}(\omega)\},$$

quindi, applicando questa formola alla determinazione di $\psi(z_n)$ coll'osservare che $\varphi_{n-1}(l) = \varphi'_{n-1}(l) = \cdots = \varphi_{n-1}^{(\lambda-2)}(l) = 0$, si vede subito che si avrà:

$$\psi(z_n) = e^{lx}\,\varphi_{n-1}^{(\lambda-1)}(l),$$

e quindi sarà:

$$(e^{-(\sigma-l)x}\,\Theta'_n)' = -\frac{\varphi_{n-1}^{(\lambda-1)}(l)}{b_0}\,e^{-(\sigma-2l)x}\,\Theta_{n-1},$$

e potremo scrivere:

$$(e^{-(\sigma-l)x}\,\Theta'_n)' = L_\lambda\,e^{-(\sigma-2l)x}\,\Theta_{n-1}, \tag{28}$$

indicando con L_λ la quantità costante $-\frac{\varphi_{n-1}^{(\lambda-1)}(l)}{b_0}$, per la quale si avrà anche:

$$L_\lambda = -\frac{\varphi^{(\lambda)}(l)}{\alpha_0\,\lambda},$$

perchè essendo $\varphi(\omega) = \varphi_{n-1}(\omega)(\omega - l)$, derivando λ volte e poi facendo $\omega = l$ si ha $\varphi^{(\lambda)}(\omega) = \lambda\,\varphi_{n-1}^{(\lambda-1)}(\omega)$.

Trovata ora la formola (28), basta applicarla di nuovo cambiandovi n in $n-1$, ecc..., per ottenere:

$$(e^{-(\sigma-2l)x}\,\Theta_{n-1})' = L_{\lambda-1}\,e^{-(\sigma-3l)x}\,\Theta_{n-2},$$

essendo $L_{\lambda-1}$ un'altra costante $-\frac{\varphi_{n-2}^{(\lambda-2)}(l)}{b_0}$, ovvero:

$$L_{\lambda-1} = -\frac{\varphi^{(\lambda)}(l)}{\alpha_0(\lambda-1)\lambda},$$

perchè $\varphi(\omega) = \varphi_{n-2}(\omega)(\omega - l)^2$, ecc...; quindi, così continuando si giungerà alle seguenti:

$$(e^{-(\sigma-(\lambda-1)l)x}\,\Theta_{n-\lambda+2})' = L_2\, e^{-(\sigma-\lambda l)x}\,\Theta_{n-\lambda+1},$$

$$(e^{-(\sigma-\lambda l)x}\,\Theta_{n-\lambda+1})' = L_1\, e^{-(\sigma-(\lambda+1)l)x}\,\Theta_{n-\lambda} = L_1\, e^{-(\sigma-\lambda l-k)x}\, e^{(l-k)x}\,\Theta_{n-\lambda},$$

con:

$$L_2 = -\frac{\varphi^{(\lambda)}(l)}{\alpha_0\, 2\,.\,3\ldots(\lambda-1)\lambda},\quad L_1 = -\frac{\varphi^{(\lambda)}(l)}{\alpha_0\, 1\,.\,2\,.\,3\ldots\lambda};$$

e dalla prima di queste evidentemente, con derivazioni e sostituzioni successive si otterrà la formola:

$$(e^{-(\sigma-l)x}\,\Theta_n)^{(\lambda-1)} = L_2\, L_3\ldots L_\lambda\, e^{-(\sigma-\lambda l)x}\,\Theta_{n-\lambda+1}, \tag{29}$$

che si applicherà in particolare nel caso che la equazione (3) abbia una sola radice l multipla di ordine n; mentre pel caso di più di una radice valendosi della seconda delle precedenti si troverà l'altra:

$$e^{(k-l)x}\,(e^{-(\sigma-l)x}\,\Theta_n)^{(\lambda)} = L_0\, e^{-(\sigma-\lambda l-k)x}\,\Theta_{n-\lambda},$$

essendo:

$$L_0 = L_1\, L_2\ldots L_{\lambda-1}\, L_\lambda = (-1)^\lambda\,\frac{[\varphi^{(\lambda)}(l)]^\lambda}{\alpha_0^\lambda\, 1\,.\,2^2\,.\,3^3\ldots(\lambda-1)^{\lambda-1}\lambda^\lambda}.$$

È evidente ora che questo processo può ripetersi applicando la formola (28) alla espressione $e^{-(\sigma-\lambda l-k)x}\,\Theta_{n-1}$ coi debiti cambiamenti nelle notazioni, e così si avrà dapprima:

$$(e^{-(\sigma-\lambda l-k)x}\,\Theta_{n-\lambda})' = K_\chi\, e^{(\sigma-\lambda l-2k)x}\,\Theta_{n-\lambda-1},$$

essendo K_χ la costante $-\frac{\varphi_{\alpha-\lambda-1}^{(\chi-1)}(k)}{\alpha_0}$, ovvero $K_\chi = -\frac{\varphi^{(\chi)}(k)}{\alpha_0(k-l)^\lambda\chi}$, per essere ora $\varphi(\omega) = \varphi_{n-\lambda-1}(\omega)(\omega-k)(\omega-l)^\lambda$; e poi continuando si giungerà ad avere:

$$e^{(h-k)x}\,(e^{-(\sigma-\lambda l-k)x}\,\Theta_{n-\lambda})^{(\chi)} = K_0\, e^{-(\sigma-\lambda l-\chi k-h)x}\,\Theta_{n-\lambda-\mu},$$

essendo ora:

$$K_0 = K_1\, K_2\ldots K_\mu = (-1)^\mu\,\frac{[\varphi^{(\chi)}(k)]^\chi}{\alpha_0^\chi\,[(k-l)^\lambda]^\chi\, 1\,.\,2^2\,.\,3^3\ldots(\chi-1)^{\chi-1}\chi^\chi};$$

e così infine sarà:

$$\left(e^{(a-b)x}\left(e^{(b-c)x}\left(\ldots\left(e^{(h-k)x}\left(e^{(k-l)x}\left(e^{(\sigma-l)x}\Theta_n\right)^{(\lambda)}\right)^{(\chi)}\right)^{(\eta)}\ldots\right)^{(\gamma)}\right)^{(\beta)}\right)^{(\alpha-1)}=T_0\,\Theta_1\,, \quad (30)$$

dove T_0 è una quantità conosciuta e diversa da zero che, quando le radici a, b, c,..., h, k, l della (3) sono più d'una, non è altro che l'espressione $\frac{L_0 K_0 H_0 \ldots C_0 B_0 A_0}{A_1}$, che con semplici riduzioni può anche scriversi:

$$\left.\begin{aligned} T_0 = t_0\,[(b-a)^\alpha]^\beta\,[(c-a)^\alpha\,(c-b)^\beta]^\gamma \ldots \\ \ldots\,[(l-a)^\alpha\,(l-b)^\beta\,(l-c)^\gamma \ldots (l-h)^\eta\,(l-k)^\chi]^\lambda, \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

essendo t_0 un coefficiente numerico, e precisamente:

$$t_0 = (-1)^{n-1}\,\frac{[\pi(\alpha)]^\alpha\,[\pi(\beta)]^\beta \ldots [\pi(\lambda)]^\lambda}{1\,.\,2^2\,.\,3^3 \ldots \alpha^\alpha\;1\,.\,2^2\,.\,3^3 \ldots \beta^\beta \ldots 1\,.\,2^2\,.\,3^3 \ldots \lambda^\lambda}\,,$$

ovvero:

$$\left.\begin{aligned} t_0 = (-1)^{n-1}\,\pi(1)\,\pi(2)\ldots\pi(\alpha-1)\,\pi(1)\,\pi(2)\ldots\pi(\beta-1)\ldots \\ \ldots\pi(1)\,\pi(2)\ldots\pi(\lambda-1)\,; \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

mentre quando le radici della (3) si riducono a una sola d'ordine n, a causa della (29) si ha semplicemente:

$$T_0 = t_0 = (-1)^{n-1}\,\pi(1)\,\pi(2)\ldots\pi(n-1). \quad (33)$$

Di quì integrando successivamente $\alpha-1$ volte, e poi dividendo per $e^{(a-b)x}$ e integrando quindi di nuovo altre β volte, e poi dividendo ancora per $e^{(b-c)x}$ e integrando altre γ volte, e così continuando, si trova per Θ_n una espressione della forma:

$$\Theta_n = \Sigma\,(g_{a,\alpha-1}\,x^{\alpha-1} + g_{a,\alpha-2}\,x^{\alpha-2} + g_{a,\alpha-3}\,x^{\alpha-3} + \cdots + g_{a,1}\,x + g_{a,0})\,e^{(\sigma-a)x}, \quad (34)$$

dove la somma si estende a tutte le radici a, b, c,..., h, k, l della (3), e le $g_{a,\alpha-1}$, $g_{a,\alpha-2}$, $g_{a,\alpha-3}$,..., $g_{a,1}$, $g_{a,0}$ sono quantità costanti introdotte dalle integrazioni o dipendenti da quelle così introdotte, e che necessariamente conterranno le radici a, b, c,..., h, k, l e anche (linearmente) le quantità θ_1, θ_2,..., θ_n.

Se poi si ha riguardo alle formole successive che hanno condotto alla (30), e alle prime $\alpha-1$ integrazioni che su questa vengono fatte, si vede subito che per la prima radice a il coefficiente $g_{a,\alpha-1}$ non è altro che $\frac{T_0\,\Theta_1}{\pi(\alpha-1)}$, e gli altri $\alpha-1$ coefficienti $g_{a,\alpha-2}$, $g_{a,\alpha-3}, \ldots,$ $g_{a,1}$, $g_{a,0}$ all'infuori dei divisori $\pi(\alpha-2)$, $\pi(\alpha-3), \ldots,$ $\pi(1)$ che provengono dall'integrazione successiva delle varie potenze di x, sono le costanti che vengono introdotte successivamente dalle dette prime $\alpha-1$ integrazioni, e corrispondono precisamente ai valori per $x=0$ dei secondi membri delle ultime $\alpha=1$ equazioni che hanno condotto alla (30) stessa, cioè sono i valori per $x=0$ di:

$$\frac{T_0}{A_2}\Theta_2,\ \frac{T_0}{A_2 A_3}\Theta_3, \ldots,\ \frac{T_0}{A_2 A_3 \ldots A_\alpha}\Theta_\alpha .$$

Ma pei risultati precedenti si ha:

$$A_\alpha = -\frac{\varphi^{\alpha)}(a)}{\alpha_0 (a-b)^\beta (a-c)^\gamma \ldots (a-l)^\lambda\, \alpha} = -\frac{\pi(\alpha)}{\alpha} = -\pi(\alpha-1),$$

$$A_{\alpha-1} = -\frac{\varphi^{\alpha)}(a)}{\alpha_0 (a-b)^\beta (a-c)^\gamma \ldots (a-l)^\lambda (\alpha-1)\,\alpha} = -\frac{\pi(\alpha)}{(\alpha-1)\alpha} = -\pi(\alpha-2),$$

. . . .

$$A_3 = -\pi(2),\quad A_2 = -\pi(1),$$

e calcolando i determinanti successivi $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \ldots, \Theta_\alpha$ per $x=0$, si trova che essi sono rispettivamente uguali a:

$$\theta_1,\ \theta_2,\ \pi(1)\,\theta_3,\ \pi(1)\,\pi(2)\,\theta_4, \ldots,\ \pi(1)\,\pi(2), \ldots,\ \pi(\alpha-2)\,\theta_\alpha ;$$

quindi, si può senz'altro concludere che i coefficienti $g_{a,\alpha-1}$, $g_{a,\alpha-2}$, $g_{a,\alpha-3}, \ldots,$ $g_{a,0}$ relativi alla radice a sono respettivamente:

$$\frac{T_0}{\pi(0)\,\pi(\alpha-1)}\theta_1,\ -\frac{T_0}{\pi(1)\,\pi(\alpha-2)}\theta_2,\ \frac{T_0}{\pi(2)\,\pi(\alpha-3)}\theta_3, \ldots$$

$$\ldots,\ (-1)^{\alpha-1}\frac{T_0}{\pi(\alpha-1)\,\pi(0)}\theta_\alpha,$$

e il gruppo dei termini relativi alla radice a nel valore (34) di θ_n può scriversi sotto la forma $T_0\, e^{(\sigma-a)x} \sum_1^\alpha \varepsilon_{s-1} \frac{\theta_s}{\pi(s-1)\,\pi(\alpha-s)} x^{\alpha-s}$; e così, osservando che quello che accade per la radice a deve evidentemente accadere anche per le altre, e quei mutamenti di segno che possono aversi in T_0 col cambiare di a in b o $c, \ldots,$ si avrebbero pure collo stesso cambiamento in Θ_n, si conclude che per Θ_n si ha la formola notevolissima:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\Theta_n}{T_0} &= e^{(\sigma-a)x}\sum_1^{\alpha}\varepsilon_s\,\frac{\theta_s}{\pi(s-1)\,\pi(\alpha-s)}\,x^{\alpha-s}+\\ &+e^{(\sigma-b)x}\sum_1^{\beta}\varepsilon_{s-1}\,\frac{\theta_{\alpha+s}}{\pi(s-1)\,\pi(\beta-s)}\,x^{\beta-s}+\\ &+\cdots\cdots\cdots+\\ &+e^{(\sigma-l)x}\sum_1^{\lambda}\varepsilon_{s-1}\,\frac{\theta_{x-\lambda+s}}{\pi(s-1)\,\pi(\lambda-s)}\,x^{\lambda-s}.\end{aligned}\right\}\qquad(35)$$

dove T_0 è dato dalla (31) quando le radici $a, b, c\ldots$ sono più d'una, e dalla (33) quando queste radici si riducono a una sola multipla di ordine n, nel qual caso anche le somme del secondo membro di questa formola si riducono a una soltanto.

13. Questa espressione (35) di Θ_n dà Q_c col porvi:

$$\theta_1 = c_1,\ \theta_2 = c_2, \ldots,\ \theta_n = c_n;$$

dà q_{x,x_1} col porvi:

$$\theta_1 = e^{ax_1},\ \theta_2 = x_1\, e^{ax_1}, \ldots,\ \theta_\alpha = x_1^{\alpha-1}\, e^{ax_1},\ \theta_{\alpha+1} = e^{bx_1},\ \theta_{\alpha+2} = x_1\, e^{bx_1}, \ldots;$$

e dà $\mathfrak{q}_{x,x_1}$ col porvi:

$$\theta_1 = (Z_1)_{x_1},\ \theta_2 = (Z_2)_{x_1}, \ldots,\ \theta_n = (Z_n)_{x_1},$$

essendo ancora:

$$\varepsilon_{n+1}\, Z_r = \sum_0^n{}_i\, \varepsilon_i\,(a_i\, z_r)^{(n-i)} = \sum_0^n{}_i\, \varepsilon_i\,(\mathfrak{a}^i\, z_r)^{(n-i)},$$

per modo che se ad es. $z_r = x^{t-1}\, e^{gx}$, essendo g una radice della (3), si potrà scrivere:

$$\varepsilon_{n+1}\, Z_r = e^{gx}\sum_0^n{}_i\,\varepsilon_i\,\frac{(\mathfrak{a}_i\, x^{t-1}\, e^{gx})^{(n-i)}}{e^{gx}},$$

e in questa formola, a calcoli fatti, nella somma $\sum_0^n{}_i$ l'esponenziale e^{gx} verrà a sparire.

Osservando poi che per la nota formola di Liouville si ha $Q = q_0\, e^{\sigma x}$, essendo q_0 il valore di Q per $x = 0$, si vede che i termini dei prodotti $\frac{A_{x_m}\,\mathfrak{q}_{x_{m-1},x_m}}{(a_0\, Q)_{x_m}}$ che figurano nella (2), astrazion fatta dai coefficienti, saranno in numero finito e saranno della forma:

$$e^{(g-g_1)x_n}\, e^{(\sigma-g)x_{n-1}}\, x_m^{r_1-s}\, x_{m-1}^{r-t}\sum_0^n{}_i\,\varepsilon_i\,\frac{(\mathfrak{a}_i\, x_m^{t-1}\, e^{gx_m})^{(n-i)}}{e^{gx_m}},\qquad(36)$$

essendo g e g_1 due radici uguali o diverse della equazione (3) degli ordini di multiplicità ρ e ρ_1, e s e t essendo respettivamente i numeri 1, 2, 3,..., ρ_1 e 1, 2, 3,..., ρ; quindi, se anche ora consideriamo distintamente il caso in cui le radici a, b, c,..., h, k, l della stessa equazione (3) hanno tutte la stessa parte reale, e quello in cui non l'hanno tutte eguale, si vede che nel primo di questi casi l'esponente della esponenziale $e^{(g-g_1)x_m}$ o sarà zero o sarà puramente immaginario, e quindi questa esponenziale non porterà in campo che quantità finite.

S'indichi ora con p il massimo fra i varî gradi di multiplicità delle radici della equazione (3), e si osservi che astrazion fatta dalle esponenziali, e dai fattori $\mathbf{a}_i$ e dalle loro derivate le potenze di x_m nei termini precedenti (36) non supereranno la $(2p-2)^a$. Ne seguirà che se col crescere indefinito di x le $\mathbf{a}_i$ tenderanno tutte a zero almeno dell'ordine di $\frac{\tau(x)}{x^{2p-1}}$, essendo $\tau(x)$ al solito una funzione tale che $\frac{\tau(x)}{x}$ sia integrabile fra x e ∞, e se nella derivazione il loro ordine d'infinitesimo non andrà diminuendo, allora nella (2) il modulo dell'integrale $I_m = \int_{x_{m-1}}^{\infty} \frac{A_{x_m}\, \mathfrak{q}_{x_{m-1},x_m}}{(a_0 Q)_{x_m}}\, d\, x_m$ sarà inferiore a quello di $\Omega\, e^{(s-g)x_{m-1}}\, x_{m-1}^{\varrho - t} \int_{x_{m-1}}^{\infty} \frac{\tau(x)}{x}\, d\, x$, essendo Ω un numero finito; e ora passando all'integrale successivo $\int_{x_{m-1}}^{\infty} \frac{\mathfrak{q}_{x_{m-2},x_{m-1}}}{(a_0 Q)_{x_{m-1}}} I_m\, d\, x_{m-1}$, e poi continuando come al § 5 si giunge a concludere che sotto le fatte ipotesi la formola (2) è ancora applicabile per ogni sistema di valori delle costanti c_1, c_2,..., c_n quando x è al disopra di un certo numero finito c.

Passando poi al caso in cui le radici a, b, c,..., h, k, l non hanno tutte la stessa parte reale, se s'indica con μ, come nel § 5, la massima fra queste parti reali, con ragionamenti del tutto simili a quelli usati nel paragrafo stesso, si vede che, conservando le stesse condizioni rispetto alle quantità $\mathbf{a}_i$, la formola (2) sussiste ancora per quelli integrali particolari che si ottengono quando si suppongono zero le costanti c_1, c_2,... che corrispondono in Q_c a quelle linee nelle quali figurano le radici che non hanno per parte reale μ; quindi, introducendo ancora in campo le radici della equazione limite col cambiare ω in $-\omega$, si può ora affermare che i teoremi del § 5 restano così estesi anche al caso in cui questa equazione limite ha radici multiple, purchè se il massimo grado di multiplicità è p, le quantità $\mathbf{a}_i$ tendano a zero di un ordine non inferiore a quello di $\frac{\tau(x)}{x^{2p-1}}$.

E così in questi casi se $\lambda + i\nu_r$ sono le radici della equazione limite (10) o quelle fra queste che hanno la parte reale minima λ, e λ_r è il loro grado di multiplicità, allora pei valori di x superiori a un certo numero c si avrà, per l'integrale generale della (8), o per un integrale particolare secondo i casi:

$$y = y_0 + \varepsilon\, x^{p-1} e^{\lambda x},$$

essendo p il massimo dei gradi λ_r di multiplicità, e essendo y_0 l'integrale corrispondente della equazione limite, cioè avendosi:

$$y_0 = e^{\lambda x} \Sigma_r \{ c_{1,r} + c_{2,r}\, x \cos(\nu_r x + \delta_2) + c_{3,r}\, x^2 \cos(\nu_r x + \delta_3) + \cdots +$$
$$+ c_{\lambda_r, r}\, x^{\lambda_r - 1} \cos(\nu_r x + \delta_{\lambda_r}) \},$$

e ε essendo una quantità che col crescere indefinito di x diviene infinitesima almeno dell'ordine di $\int_x^\infty \frac{\tau(x)}{x}\, dx$.

14. S'intende che nei casi particolari le condizioni che abbiamo poste per le quantità $\mathbf{a}_i$ potranno rendersi spesso meno ristrettive. Di questi casi particolari però quì considereremo soltanto quello nel quale tutti i coefficienti della equazione omogenea data (8) all'infuori del primo tendono a zero al crescere indefinito di x; per modo che la equazione caratteristica limite (10) si riduce alla $\omega^n = 0$, cioè ha una sola radice zero multipla dell'ordine n, e le $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sono rispettivamente $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$.

Allora, supposto $a_0 = 1$, se i coefficienti $a_1, a_2, \ldots, a_n$ della equazione data al crescere indefinito di x tenderanno tutti a zero di ordine non inferiore a quello di $\frac{\tau(x)}{x^{2n-1}}$, i risultati precedenti sussisteranno certamente; ma anche quando questo non accade è facile ora di vedere che esso continua a sussistere in molti altri casi.

Si osservi intanto che in questo caso la espressione (35) di Θ_n si riduce all'altra più semplice:

$$\Theta_n = (-)^{n-1} \pi(1)\, \pi(2) \, \ldots \pi(n-1) \sum_1^n {}_s\, \varepsilon_s \, {}_1 \frac{\theta_s}{\pi(s-1)\, \pi(n-s)} x^{n-s}, \qquad (37)$$

e si ha inoltre $a_0 Q = \pi(1)\pi(2)\ldots\pi(n-1)$; e con queste le Q_c, q_{x,x_1} e $\mathfrak{q}_{x,x_1}$ e la formula (2) che darà poi l'integrale y prenderanno forme più semplici che tralascieremo di scrivere, ma che potrebbero subito essere scritte.

Quanto poi ai termini (36) che, all'infuori di certi coefficienti, compongono quelli $\frac{A_{x_m}\mathfrak{q}_{x_m,x_{m-1}}}{(a_0 Q)_{x_m}}$ che figurano sotto gli integrali della (2), si osserverà che ora si riducono agli altri più semplici:

$$x_{m-1}^{n-t}\, x_m^{n-s} \sum_0^n{}_i\, \varepsilon_i (a_i x_m^{t-1})^{(n-i)}, \tag{38}$$

e in questi t prenderà necessariamente tutti i valori $1, 2, \ldots, n$, mentre s potrà prendere essa pure questi valori, ma lascierà certamente quelli pei quali la costante c_s collo stesso indice s sarà zero, per modo che se $c_1, c_2, \ldots, c_{l-1}$ saranno nulle, e c_l sarà la prima costante diversa da zero, s incomincierà da l.

Se dunque a_i al crescere indefinito di x diviene infinitesimo di un ordine non inferiore a r_i, e per ogni derivazione quest'ordine cresce di una unità, è evidente che l'ordine d'infinitesimo rispetto a x_m degli stessi termini (38) non sarà inferiore a $r_i - t + 1 - i + s$, o anche a $r_i - t + 1 - i + l$ se c_l sarà la prima delle costanti $c_1, c_2, \ldots, c_{l-1}, c_l, \ldots, c_n$ diverse da zero; e siccome il massimo valore di t è n, per essere sicuri che questi varî termini al crescere indefinito di x_m divengono infinitesimi in modo da restare integrabili bisognerà intanto che $r_i - n + 1 - i + l$ sia positivo e non inferiore a uno, e che le a_i divengano infinitesime di un ordine non inferiore a quello di $\frac{\tau(x)}{x^{n+i-l}}$ essendo $\tau(x)$ una delle solite funzioni dei paragrafi precedenti tali che $\frac{\tau(x)}{x}$ sia integrabile col crescere indefinito di x.

Ora quando questo avvenga, è evidente che ogni termine di quelli che compongono il termine (38), e che certamente sono in numero finito, diviene infinitesimo rispetto a x_m di un ordine non inferiore a quello di $\frac{1}{x_m^{n-t}} \frac{\tau(x_m)}{x_m}$; quindi, avendo riguardo ora anche all'altro fattore x_{m-1}^{n-t} che per ogni valore di t figura nella (38), si vede che l'integrale $I_m = \int_{x_{m-1}}^{\infty} \frac{A_{x_m}\mathfrak{q}_{x_m,x_{m-1}}}{(a_0 Q)_{x_m}} d\,x_m$ prenderà la forma $\Omega\,\Omega_1 \int_{x_{m-1}}^{\infty} \frac{\tau(x_m)}{x_m} d\,x_m$ essendo Ω e Ω_1 quantità dipendenti respettivamente dai termini di A_{x_m} e di $\mathfrak{q}_{x_{m-1},x_m}$, e i cui moduli non superano un numero finito, quando x sarà superiore a un certo numero c.

Passando quindi all'integrale successivo $\int\limits_{x_{m-2}}^{\infty} \frac{\mathfrak{q}_{x_{m-2},x_{m-1}}}{(a_0\,Q)_{x_{m-1}}} I_m\, d\,x_{m-1}$, e osservando che i termini di $\frac{\mathfrak{q}_{x_{m-2},x_{m-1}}}{(a_0\,Q)_{x_{m-1}}} I_m$ sono della forma $x_{m-2}^{n-t} \sum\limits_0^n{}_i\, \varepsilon_i\,(a_i\,x_{m-1}^{t-1})^{(n-i)}\,I_m$, si riscontra che essi divengono infinitesimi rispetto a x_{m-1} di ordini non inferiori a quelli di $\Omega\,\Omega_1 \frac{x_{m-2}^{n-t}}{x_{m-1}^{n-t}} \frac{\tau(x_{m-1})}{x_{m-1}} \int\limits_{x_{m-1}}^{\infty} \frac{\tau(x_m)}{x_m}\,d\,x_m$, e quindi l'integrale stesso avrà un modulo non superiore a quello di $\Omega\,\Omega_1{}^2 \int\limits_{x_{m-2}}^{x} \frac{\tau(x_{m-1})}{x_{m-1}}\,d\,x_{m-1} \int\limits_{x_{m-1}}^{\infty} \frac{\tau(x_m)}{x_m}\,dx_m$;
e ora continuando con questi processi come si fece nei casi precedenti, si vede che, sotto le fatte ipotesi rispetto ai coefficienti a_i, la formola (2) resta completamente applicabile per le nostre equazioni pei valori di x superiori a un certo numero finito c, e per l'integrale si ha:

$$y = c_l\,x^{n-l} + c_{l+1}\,x^{n-l-1} + \cdots + c_{n-1}\,x + c_n + \varepsilon,$$

essendo ε una quantità che al crescere indefinito di x tende a zero almeno dell'ordine di $\int\limits_x^{\infty} \frac{\tau(x)}{x}\,d\,x$.

Questo integrale sarà l'integrale generale quando sia $l = 1$, cioè quando i coefficienti a_i tendano tutti a zero col crescere indefinito di x almeno dell'ordine di $\frac{\tau(x)}{x^{i+n-1}}$; quando tendano a zero di ordine minore saranno soltanto integrali particolari; e così ad es. quando tendano a zero almeno dell'ordine di $\frac{\tau(x)}{x^{i+\mu}}$ con $\mu \geqq 0$ e sia $\bar{\mu}$ il massimo intero contenuto in μ, allora esso sarà l'integrale particolare pel quale $l = n - \bar{\mu}$ che conterrà quindi $\bar{\mu} + 1$ costanti arbitrarie. E ciò sempre, bene inteso, quando le a_i oltre a tendere a zero almeno degli ordini indicati, siano tali altresì che ad ogni derivazione i loro ordini d'infinitesimo crescano sempre (come nei casi ordinarî) di una unità.

In particolare dunque se nella equazione di second'ordine:

$$y'' + a_1\,y' + a_2\,y = 0,$$

i coefficienti a_1, a_2 al crescere indefinito di x diverranno infinitesimi di ordini non inferiori a quelli di $\frac{1}{x^{2+\nu}}$, $\frac{1}{x^{3+\nu_1}}$ con ν e ν_1 positivi e diversi da zero, i suoi integrali al crescere indefinito di x si ridurranno alla forma $c_1 x + c_2 + \varepsilon$ essendo c_1 e c_2 costanti arbitrarie, e ε un infinitesimo.

Facendo poi anche in questi casi le trasformazioni dei §§ 8, 9 e 10, si intende che potremmo giungere anche ad altri risultati molto notevoli.

15. Lasciando ora queste applicazioni delle nostre formole generali alla ricerca del modo di comportarsi degli integrali delle equazioni lineari al crescere indefinito della variabile (*), facciamone altre scegliendo altri sistemi di funzioni ausiliarie $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Continuiamo perciò a prendere come nell'ultimo caso $z_1 = 1$, $z_2 = x$, $z_3 = x^2, \ldots, z_{n-1} = x^{n-2}$, e lasciamo per ora indeterminata la z_n.

La equazione $\psi(z) = 0$ che avrà per integrali le $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ sarà la $z^{(n-1)} = 0$, e la formola (40) della Memoria precedente si ridurrà ora all'altra semplicissima $\Theta'_n = - z_n^{(n-1)} \Theta_{n-1}$; e siccome la (37) del paragrafo precedente si applica evidentemente al caso delle attuali funzioni $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ col solo cambiamento di n in $n-1$, e si ha quindi:

$$\Theta_{n-1} = \varepsilon_{n-2}\, \pi(1)\, \pi(2) \ldots \pi(n-2) \sum_1^{n-1} \varepsilon_{s-1} \frac{\theta_s}{\pi(s-1)\, \pi(n-s-1)}\, x^{n-s-1},$$

sarà:

$$\Theta_n = \varepsilon_{n-1} \pi(1) \pi(2) \ldots \pi(n-2) \sum_1^{n-1} \varepsilon_{s-1} \frac{\theta_s}{\pi(s-1)\pi(n-s-1)} \int x^{n-s-1} z_n^{(n-1)}\, dx + k_n,$$

essendo k_n una quantità costante rispetto ad x, ma che conterrà certamente la θ_n, perchè questa deve figurare in Θ_n col termine $\pi(1)\pi(2)\ldots\pi(n-2)\theta_n$, e potrà contenere anche le altre quantità $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1}$ a seconda delle costanti che saranno introdotte dagli integrali che figurano negli altri termini; ma evidentemente poichè la Θ_n non può contenere le $\theta_1, \theta, \ldots, \theta_n$ che al primo grado, e non moltiplicate fra loro, la k_n non potrà essa pure contenere queste quantità altro che nello stesso modo; e quindi oltre al detto ter-

(*) Gli studî che abbiamo fatto sul modo di comportarsi degli integrali delle equazioni lineari per valori grandissimi della variabile possono giovare moltissimo nelle ricerche sulle rappresentazioni delle funzioni di variabili reali in serie di questi integrali. (Vedi ad es. il mio libro sulla *Serie di Fourier e altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di variabili reali.* Pisa 1880.)

mine $\pi(1)\pi(2)\dots\pi(n-2)\theta_n$ non potrà avere che termini di primo grado in $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}$ con coefficienti indipendenti da x e dalle $z_n, z'_n, z''_n, \dots, z_n^{(n-2)}$.

D'altra parte, siccome per gli integrali che figurano in Θ_n si ha in generale:

$$\int x^{n-s-1} z_n^{(n-1)} dx = x^{n-s-1} z_n^{(n-2)} - (n-s-1) x^{n-s-2} z_n^{(n-3)} +$$
$$+ (n-s-1)(n-s-2) x^{n-s-3} z_n^{(n-4)} - \dots + \varepsilon_{n-s-1} \pi(n-s-1) z_n^{(s-1)} + h_s,$$

essendo le h_s quantità costanti indipendenti anche dalle $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}, \theta_n$, potremo valerci di questa formola per esprimere Θ_n per gli elementi $z_n, z'_n, z''_n, \dots, z_n^{(n-2)}, \theta_n$ dell'ultima linea, e avremo così:

$$\Theta_n = \varepsilon_{n-1}\pi(1)\pi(2)\dots\pi(n-2)\Big\{ z_n^{(n-2)} \sum_1^{n-1} \varepsilon_{s-1} \frac{\theta_s}{\pi(s-1)\pi(n-s-1)} x^{n-s-1} +$$
$$+ \varepsilon_1 z_n^{(n-3)} \sum_1^{n-2} \varepsilon_{s-1} \frac{\theta_s}{\pi(s-1)\pi(n-s-2)} x^{n-s-2} +$$
$$+ \varepsilon_2 z_n^{(n-4)} \sum_1^{n-3} \varepsilon_{s-1} \frac{\theta_s}{\pi(s-1)\pi(n-s-1)} x^{n-s-3} + \dots +$$
$$+ \varepsilon_{n-2} z \frac{\theta_1}{\pi(0)\pi(0)} + \sum_1^{n-1} \varepsilon_{s-1} \frac{\theta_s}{\pi(s-1)\pi(n-s-3)} h_s \Big\} + k_n;$$

e se, come evidentemente può sempre farsi, si fissa d'intendere che gli integrali che figurano nel valore precedente di Θ_n siano precisamente quelli che vengono pei varî valori di s dalla formola scritta sopra col farvi le costanti $h_1, h_2, \dots, h_{n-1}$ tutte uguali allo zero, si vede che allora la k_n non può contenere affatto le $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}$, perchè queste nello sviluppo di Θ_n non possono comparirvi altro che moltiplicate per una delle quantità $z_n, z'_n, z''_n, \dots, z_n^{(n-2)}$; e quindi la stessa k_n si ridurrà al solo termine $\pi(1)\pi(2)\dots\pi(n-2)\theta_n$, e per Θ_n avremo sempre le due espressioni seguenti:

$$\left.\begin{aligned}
&\Theta_n = \varepsilon_{n-1}\overline{\pi}_{n-2}\Big\{ \sum_1^{n-1} \varepsilon_{s-1} \frac{\theta_s}{\pi(s-1)\pi(n-s-1)} \int x^{n-s-1} z_n^{(n-1)} dx + \varepsilon_{n-1}\theta_n \Big\}, \\
&\Theta_n = \varepsilon_{n-1}\overline{\pi}_{n-2}\Big\{ z_n^{(n-2)} \sum_1^{n-1} \varepsilon_{s-1} \frac{\theta_s}{\pi(s-1)\pi(n-s-1)} x^{n-s-1} + \\
&\qquad + \varepsilon_1 z_n^{(n-3)} \sum_1^{n-2} \varepsilon_{s-1} \frac{\theta_s}{\pi(s-1)\pi(n-s-2)} x^{n-s-2} + \\
&\qquad + \varepsilon_2 z_n^{(n-4)} \sum_1^{n-3} \varepsilon_{s-1} \frac{\theta_s}{\pi(s-1)\pi(n-s-3)} x^{n-s-3} + \\
&\qquad + \dots + \varepsilon_{n-2} z \frac{\theta_s}{\pi(0)\pi(0)} + \varepsilon_{n-1}\theta_n \Big\},
\end{aligned}\right\} \quad (39)$$

quando ora, per semplicità di scrittura, si ponga $\pi_{n-2} = \pi(1)\,\pi(2)\ldots\pi(n-2)$, e nella prima di queste s'intenda che se è data completamente z_n, e quindi sono perfettamente determinate anche $z'_n, z''_n, \ldots, z_n^{(n-2)}$ e $z_n^{(n-1)}$, gli integrali che vi figurano siano determinati dalla formola seguente:

$$\left.\begin{aligned}\int x^{n-s-1} z_n^{(n-1)}\,dx = x^{n-s-1} z_n^{(n-2)} - (n-s-1)\,x^{n-s-2} z_n^{(n-3)} + \\ +(n-s-1)(n-s-2)\,x^{n-s-3} z_n^{(n-4)} + \cdots + \varepsilon_{n-s-1}\,\pi(n-s-1)\,z_n^{s-1},\end{aligned}\right\} \quad (40)$$

pei varî valori $1, 2, \ldots, (n-1)$ di s; mentre se è data invece soltanto la $z_n^{(n-1)}$ si deve intendere che le costanti che allora verranno a figurare in $z_n^{(n-2)}, z_n^{(n-3)}, \ldots, z''_n, z'_n, z_n$ risultino successivamente determinate da queste formole (40) dopo che siano state fissate quelle che figureranno negli integrali dei primi membri.

Con queste espressioni di Θ_n, quando sarà stata scelta come vorremo la funzione z_n, avremo al solito i valori di Q_c, q_{x,x_1}, e $\mathfrak{q}_{x,x_1}$ col porvi per le $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ rispettivamente $c_1, c_2, \ldots, c_n$, e i valori di $z_1, z_2, \ldots, z_n$ o di $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ per $x = x_1$; e dopo, sostituendo nella formola (2), per ogni funzione che sarà stata scelta per z_n avremo una espressione dell'integrale della (1) in quei tratti (α, x) relativi ad x nei quali la z_n e i coefficienti $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ si mantengono regolari e a_0 è diverso da zero, e anche in tratti nei quali tutte queste particolarità non si verificano, purchè allora siano soddisfatte le condizioni dei §§ 10 e 11 della Memoria precedente o altre condizioni simili.

16. Noi applicheremo questi risultati col prendere z_n in modo da avere $a_0 Q = 1$ (*), ciò che avverrà quando sia $z_n^{(n-1)} = \dfrac{1}{\pi_{n-2}\, a_0}$, giacchè evidentemente quando si prendono $z_1 = 1$, $z_2 = x$, $z_3 = x^2, \ldots, z_{n-1} = x^{n-1}$, $z_n = z_n$ si ha

(*) È degno di nota che se, senza particolarizzare affatto le funzioni $z_1, z_2, \ldots, z_n$, si richiede soltanto che sia $a_0 Q = \text{cost.}$, indicando con:

$$l_0 z^{(n)} + l_1 z^{(n-1)} + l_2 z^{(n-2)} + \ldots + l_{n-1} z' + l_n z = 0$$

una equazione differenziale lineare e omogenea che abbia per integrali fondamentali un sistema di queste funzioni che soddisfino alla detta condizione $a_0 Q = \text{cost.}$, e ricordando la nota formola di Liouville $Q = \text{cost.}\, e^{-\int \frac{l_1}{l_0} dx}$, si vede che dovrà essere $a_0 e^{-\int \frac{l_1}{l_0} dx} = \text{cost.}$, ovvero $\int \dfrac{l_1}{l_0}\, dx = \log a_0 + \text{cost.}$ o anche $\dfrac{l_1}{l_0} = \dfrac{a'_0}{a_0}$, e viceversa; e si conclude quindi che

$Q = \overline{\pi}_{n-2}\, z_n^{(n-1)}$. Prenderemo cioè $z_n^{(n-1)} = \dfrac{1}{\overline{\pi}_{n-2}\, a_0}$, $z_n^{(n-2)} = \dfrac{1}{\overline{\pi}_{n-2}} \int \dfrac{d\,x}{a_0}$, $z_n^{(n-3)} = \dfrac{1}{\overline{\pi}_{n-2}} \int d\,x \int \dfrac{d\,x}{a_0}, \ldots, z_n = \dfrac{1}{\overline{\pi}_{n-2}} \int d\,x \int d\,x \ldots \int \dfrac{d\,x}{a_0}$, le costanti in questi integrali essendo determinate come meglio si crederà; e sostituendo ora questo valore di z_n nelle espressioni precedenti (39) di Θ_n, p. es. nella prima, si troverà:

$$\Theta_n = \varepsilon_{n-1} \sum_1^{n-1} \varepsilon_{s-1} \frac{\theta_s}{\pi\,(s-1)\,\pi\,(n-s-1)} \int \frac{x^{n-s-1}}{a_0}\, d\,x + \overline{\pi}_{n-2}\, \theta_n, \qquad (41)$$

quando s'intenda che gli integrali che figurano in questa formola debbano essere determinati colla (40) in relazione coi valori scelti per le costanti nei valori di z_n, z'_n, $z''_n, \ldots, z_n^{(n-2)}$; e ora basterà calcolare con queste le Q_c, q_{x,x_1} e $\mathfrak{q}_{x,x_1}$, e poi sostituire nella (2) per avere una espressione in serie dell'integrale della (1) che varrà in tutti quei tratti nei quali a_0 è diverso da zero e regolare, e gli altri coefficienti $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e X sono regolari, supposto, bene inteso, che anche il numero α che figura nella (2) sia preso nei tratti che si considerano.

E in questi casi il valore del polinomio aggiunto $\varepsilon_{n+1} Z_n$ che corrisponde alla funzione attuale z_n si semplicizzerà alquanto, perchè avendosi $a_0\, z^{(n-1)} =$ cost. sarà $(a_0\, z^{(n-1)})' = 0$, ovvero $a_0\, z^{(n)} = -a'_0\, z^{(n-1)}$ (come risulta anche da quanto si è detto nella nota della pagina precedente); e quindi basterà sviluppare colla formola di Leibnitz i primi termini di quel polinomio aggiunto per tro-

---

i sistemi di funzioni $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z_n$ pei quali si ha $a_0\, Q =$ cost. sono tutti e soli i sistemi d'integrali fondamentali della equazione:

$$a_0\, z^{(n)} + a'_0\, z^{(n-1)} + l_2\, z^{(n-2)} + l_3\, z^{(n-3)} + \ldots + l_{n-1}\, z' + l_n\, z = 0,$$

dove le $l_2, l_3, \ldots, l_{n-1}, l_n$ restano arbitrarie.

Prendendo $l_2 = l_3 = \ldots = l_{n-1} = l_n = 0$, si ha il sistema:

$$z_1 = 1,\ z_2 = x,\ z_3 = x^2, \ldots, z_{n-1} = x^{n-2},\ z_n = \text{cost.} \int d\,x \int d\,x \ldots \int \frac{d\,x}{a_0},$$

del quale ci occupiamo sopra.

E nel caso di $a_0 = 1$, prendendo $l_2, l_3, \ldots, l_{n-1}, l_n$ tutte quantità costanti e tali che la equazione caratteristica corrispondente:

$$\omega^n + l_2\, \omega^{n-2} + l_3\, \omega^{n-3} + \ldots + l_{n-1}\, \omega + l_n = 0$$

abbia le radici $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, che potranno anche non essere tutte diseguali, saremo in quelli dei casi considerati nei paragrafi precedenti pei quali la somma $\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n$ delle dette radici è uguale allo zero.

vare che nel caso attuale esso non conterrà affatto la derivata n^a di z_n, e i termini in $z_n^{(n-1)}$ e $z_n^{(n-2)}$ verranno ad essere i due $\left((n-1)a'_0 - a_1\right) z^{(n-1)}$, $\left(\frac{n(n-1)}{2} a''_0 - (n-1)a'_1 + a_2\right) z_n^{(n-2)}$, il primo dei quali si riduce anche a $\frac{(n-1)a'_0 - a_1}{\pi_{n-1} a_0}$, e viene a mancare del tutto nel caso particolare di $a_1 = (n-1)a'_0$; nel qual caso l'altro termine per le equazioni d'ordine n si riduce a $\left(a_2 - \frac{(n-1)(n-2)}{2} a''_0\right) z_n^{(n-2)}$, e quindi in particolare per quelle del secondo'ordine si riduce a $a_2 z_2$, essendo allora $z_2 = \int \frac{dx}{a_0}$.

17. Se poi si ha riguardo ai valori precedenti di Θ_n, e a quelli che si avranno ora pei varî polinomî aggiunti $\varepsilon_{n+1} Z_1$, $\varepsilon_{n+1} Z_2, \ldots$, $\varepsilon_{n+1} Z_{n-1}$, $\varepsilon_{n+1} Z_n$ che verranno a figurare nella formola (2), si vede che per quelle equazioni speciali (1) per le quali il coefficiente a_0 sarà una potenza positiva di x, e gli altri coefficienti $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e X saranno polinomi razionali interi pure di x, l'espressione (2) che si avrà per l'integrale, quando in essa α non sia presa uguale a zero, sarà in serie di somme di potenze intere positive e negative di x, e di potenze intere e positive di $\log x$; e questa espressione varrà in tutti quei tratti che non comprendono il punto $x = 0$ neppure agli estremi.

Più generalmente se, considerando x come una variabile complessa, a_0 e gli altri coefficienti $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e X risulteranno funzioni olomorfe di x in un campo attorno al punto $x = 0$, e in questo punto a_0 avrà un infinitesimo di ordine (intero) m, potremo intendere che $\frac{1}{a_0}$ e i varî coefficienti e X, o le funzioni di questi, siano sviluppati in serie di potenze di x colle formole di Cauchy e di Laurent, e allora i varî termini di Θ_n come quelli dei polinomi aggiunti e quelli della serie (2) verranno ad essere tutti integrali semplici o multipli di potenze intere positive o negative di x senza andare colle potenze negative di x al di là della potenza m^a. Evidentemente dunque, sempre supponendo che α non sia zero, la formola (2) in questo caso darà per l'integrale una somma di serie di potenze positive e negative di x, e di potenze intere e positive di $\log x$; ma, salvo il caso di circostanze speciali, i tratti di validità di questa formola per valori reali di x non potranno comprendere, neppure agli estremi, nè il punto zero nè gli altri punti diversi da zero nei quali a_0 si annulla, e i tratti stessi a partire dal punto $x = 0$ non potranno essere maggiori del *minimo modulo* delle radici diverse da zero della equazione $a_0 = 0$, cioè non dovranno uscire dal cerchio di convergenza della parte che resta di $\frac{1}{a_0}$ dopo tolti tutti quei termini che la rendano infinita per $x = 0$.

E mutando x in $x - k$ nelle formole precedenti, cioè prendendo $z_1 = 1$, $z_2 = x - k$, $z_3 = (x-k)^2, \ldots$, $z_{n-1} = (x-k)^{n-2}$, $z_n = \frac{1}{\pi_{n-2}} \int dx \int dx \ldots \int \frac{dx}{a_0}$, ciò che evidentemente potrà sempre farsi, si avranno sviluppi dello stesso genere per l'integrale della (1) validi per altri tratti che partano dal punto $x = k$ (questo punto però escluso quando in esso a_0 sia zero); e così evidentemente questi studî potrebbero collegarsi con quelli di tanta importanza iniziati da Fuchs, e continuati poi da molti altri, sulle equazioni differenziali lineari.

18. Le espressioni dell'integrale della (1) delle quali è parola nei due paragrafi precedenti sono dimostrate ora soltanto pel caso che nei tratti che si considerano non si trovino neppure agli estremi dei punti nei quali il primo coefficiente a_0 sia zero; ma valendosi delle considerazioni dei §§ 10 e 11 della Memoria precedente o di altre simili, è facile vedere che i risultati stessi continuano spesso a sussistere anche quando questa condizione non è soddisfatta.

Supponiamo senz'altro per semplicità che l'equazione data sia omogenea, cioè sia $X = 0$, e il punto nel quale ora ammetteremo che a_0 possa anche annullarsi sia il punto $x = 0$, pure essendo a_0 e gli altri coefficienti $a_1, a_2, \ldots, a_n$ regolari in tratti che comprendono questo punto come punto interno, o come estremo; e in questi tratti a_0 non si annulli mai, salvo tutt'al più nel detto punto $x = 0$ che ora prenderemo come punto α nella (2).

Allora a seconda del modo di tendere a zero di a_0, gli integrali indefiniti $\int \frac{dx}{a_0}$, $\int dx \int \frac{dx}{a_0}$, $\int dx \int dx \int \frac{dx}{a_0}, \ldots$, o gli altri $\int \frac{dx}{a_0}$, $\int \frac{x\,dx}{a_0}$, $\int \frac{x^2\,dx}{a_0}, \ldots$, che figurano nelle $z_n^{(n-2)}$, $z_n^{(n-3)}$, $z_n^{(n-4)}, \ldots$, e nella Θ_n e quindi anche nella $\varepsilon_{n+1} Z_n$, potranno tutti o alcuni divenire infiniti per $x = 0$; e propriamente se a_0 per $x = 0$ diverrà infinitesimo di ordine uguale o superiore a un numero intero h, i primi h degli integrali stessi potranno essere tutti infiniti per $x = 0$, mentre se al tempo stesso l'ordine d'infinitesimo di a_0 non supererà ad es. il numero $h + \mu$ con $0 < \mu < 1$, l' $(h+1)$.° di quegli integrali sarà certamente determinato e finito.

Di questi integrali in Θ_n e nel valore di $\varepsilon_{n+1} Z_n$ ne figurano $n-1$, e oltre a ciò in $\varepsilon_{n+1} Z_n$, per quanto si disse in fine del § 16 vi figura il termine $\frac{(n-1)a'_0 - a_1}{a_0}$ dal quale però spesso potremo anche fare astrazione, perchè, salvo qualche altra singolarità che talvolta potrà allora venire a comparire negli altri coefficienti, volendolo, potremo sempre farlo sparire col mezzo della trasformazione *a*) del § 16 della Memoria precedente; quindi, salvo tutt'al più la presenza di questo termine, nel caso delle equazioni di second'ordine in Θ_n e in $\varepsilon_{n+1} Z_n$ vi figurerà un solo integrale, cioè $\int \frac{dx}{a_0}$ o z_2, che potrà essere infinito per $x=0$, e questo qualunque sia l'ordine d'infinitesimo di a_0 per $x=0$; mentre se l'ordine n della equazione sarà superiore a 2 sì in Θ_n che in $\varepsilon_{n+1} Z_n$, salvo il caso di relazioni speciali fra i coefficienti, ne figurerà sempre più d'uno, a meno che a_0 non divenga infinitesimo per $x=0$ soltanto di ordine inferiore al secondo, e per modo che gl'integrali $\int \frac{x\,dx}{a_0}$, $\int dx \int \frac{dx}{a_0}$ siano determinati e finiti (*).

19. Per semplicizzare dunque i nostri studî, porremo ora la condizione che la equazione data sia del second'ordine, o, essendo di ordine superiore al

(*) L'essere determinato e finito per $x=0$ uno dei due integrali $\int \frac{x\,dx}{a_0}$, $\int dx \int \frac{dx}{a_0}$ non porta di necessità che lo sia anche l'altro quando non sono soddisfatte altre speciali condizioni, perchè, siccome per gli integrali definiti singolari $\int_\delta^\varepsilon$ con $\delta < \varepsilon$ si ha soltanto $\int_\delta^\varepsilon dx \int \frac{dx}{a_0} = \left(x \int \frac{dx}{a_0}\right)_\delta^\varepsilon - \int_\delta^\varepsilon \frac{x\,dx}{a_0}$, dalla piccolezza di uno dei due integrali $\int_\delta^\varepsilon \frac{x\,dx}{a_0}$, e $\int_\delta^\varepsilon dx \int \frac{dx}{a_0}$ non se ne può dedurre quella dell'altro, a meno che non si sappia che il prodotto $x \int \frac{dx}{a_0}$ ha un limite determinato e finito per $x=0$.

Però se si saprà che i due integrali suddetti sono entrambi determinati e finiti per $x=0$, allora siccome con ε sufficientemente piccolo e $\delta < \varepsilon$ la quantità $\left(x \int \frac{dx}{a_0}\right)_\delta^\varepsilon$ sarà piccola quanto si vuole per qualsiasi valore di δ inferiore a ε, il prodotto $x \int \frac{dx}{a_0}$ avrà certamente un limite determinato e finito per $x=0$.

secondo, il suo primo coefficiente a_0 non divenga infinito per $x=0$ altro che di ordine inferiore al secondo e per modo che la funzione $\frac{x}{a_0}$ sia atta alla integrazione per $x=0$, e lo stesso avvenga anche per l'altra $\int \frac{dx}{a_0}$ e anche quando questa si riduca ai valori assoluti; pure osservando che, volendolo, si potrebbero trattare con bastante facilità anche altri casi.

Con queste limitazioni, se indichiamo per semplicità con $\varphi(x)$ l'integrale $\int \frac{dx}{a_0}$, questa funzione $\varphi(x)$ potrà ancora divenire infinita per $x=0$, e il valore (41) di Θ_n potrà scriversi sotto la forma:

$$\Theta_n = \varepsilon_{n-1} \sum_1^{n-2} \varepsilon_{s-1} \frac{\theta_s}{\pi(s-1)\pi(n-s-1)} \int_0^x \frac{x^{n-s-1}}{a_0} dx - \frac{\theta_{n-1}}{\pi(n-2)} \varphi(x) + \overline{\pi}_{n-2}\theta_n,$$

avendo per semplicità limitati (come evidentemente ora potevamo fare) gli integrali fra 0 e x, con chè i valori di z_n e delle sue derivate, a causa della (41), verranno essi pure perfettamente determinati dalle formole $z_n^{(n-2)} = \varphi(x)$,

$$z_n^{(n-3)} = \int_0^x \varphi(x)\,dx,\ z_n^{(n-4)} = \int_0^x dx \int_0^x \varphi(x)\,dx, \ldots,\ z_n = \int_0^x dx \int_0^x dx \int_0^x \ldots \int_0^x \varphi(x) dx;$$

e in questa espressione di Θ_n i primi $n-2$ termini del secondo membro mancheranno tutti nel caso delle equazioni del second'ordine, e saranno certamente determinati e finiti per le equazioni di ordine superiore.

Ne segue che i valori di $\varepsilon_{n-1} A_x$ e $\mathfrak{q}_{x,x_1}$ che figurano nella (2) prenderanno ora la forma seguente:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{n-1} A_x = \sum_1^{n-2} \varepsilon_{s-1} \frac{c_s}{\pi(s-1)\pi(n-s-1)} \int_0^x \frac{x^{n-s-1}}{a_0} dx + \\ + \varepsilon_{n-2} \frac{c_{n-1}}{\pi(n-2)} \varphi(x) + \varepsilon_{n-1} \overline{\pi}_{n-2} c_n, \end{aligned}\right\} \quad (42)$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{q}_{x,x_1} = \sum_1^{n-2} \varepsilon_{h-1} \frac{\sum_0^n \varepsilon_i (a_i x^{h-1})_{x_1}^{(n-i)}}{\pi(h-1)\pi(n-h-1)} \int_0^x \frac{x^{n-h-1}}{a_0} dx + \\ + \varepsilon_{n-2} \frac{\varphi(x)}{\pi(n-2)} \sum_0^n \varepsilon_i (a_i x^{n-2})_{x_1}^{(n-i)} + \varepsilon_{n-1} \overline{\pi}_{n-2} \sum_0^n \varepsilon_i (a_0 z_n)_{x_1}^{(n-i)}, \end{aligned}\right\} \quad (43)$$

e in questa espressione di $\mathfrak{q}_{x,x_1}$ l'ultimo termine, per quanto si disse in fine del § 16, si potrà scrivere sotto la forma:

$$\varepsilon_{n-1}\left[\frac{(n-1)\,a'_0-a_1}{a_0}+\left(\frac{n\,(n-1)}{2}\,a''_0-(n-1)\,a'_1+a_2\right)\varphi\,(x)\right]_{x_1}+$$
$$+\,\varepsilon_{n-1}\,\overline{\pi}_{n-2}\,[q_3\,z^{(n-3)}+q_4\,z^{(n-4)}+\cdots]_{x_1},$$

essendo $q_3,\ q_4,\ldots,$ le quantità determinate dalle formole (34) del § 15 della Memoria precedente; e oltre a ciò il penultimo termine dello stesso $\mathfrak{q}_{x,x_1}$ per la solita formola di Leibnitz potrà scriversi:

$$\varepsilon_{n-2}\left(\frac{n\,(n-1)}{2}\,a'_0-(n-1)\,a'_1+a_2\right)_{x_1}\varphi\,(x)+$$
$$+\,\varepsilon_{n-2}\,(\lambda_1\,x+\lambda_2\,x^2+\cdots+\lambda_{n-2}\,x^{n-2})_{x_1}\,\varphi\,(x),$$

essendo le $\lambda_1,\ \lambda_2,\ldots,\ \lambda_{n-2}$ quantità finite composte coi coefficienti della equazione data e colle loro derivate; e queste, come le $q_3,\ q_4,\ldots,$ mancheranno tutte nel caso delle equazioni del second'ordine.

Ponendo dunque per abbreviare:

$$\left.\begin{aligned}P_{x,x_1}&=\sum_0^{n-2}\varepsilon_{h-1}\frac{\sum_0^{n}\varepsilon_i\,(a_i\,x^{h-1})_{x_1}^{(n-i)}}{\pi\,(h-1)\,\pi\,(n-h-1)}\int_0^x\frac{x^{n-h-1}}{a_0}\,d\,x+\\&\quad+\varepsilon_{n-1}\,\pi_{n-2}(q_3\,z^{(n-3)}+q_4\,z^{(n-4)}+\cdots)_{x_1},\\p\,(x)&=\lambda_1\,x+\lambda_2\,x+\cdots+\lambda_{n-2}\,x^{n-2},\end{aligned}\right\}\qquad(44)$$

potremo scrivere:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{q}_{x,x_1}&=P_{x,x_1}+\varepsilon_{n-2}\,p\,(x_1)\,\varphi\,(x)+\\&+\varepsilon_{n-2}\left[\frac{n\,(n-1)}{2}\,a''_0-(n-1)\,a'_1+a_2\right]_{x_1}\{\varphi\,(x)-\varphi\,(x_1)\}+\\&\qquad+\varepsilon_{n-1}\left[\frac{(n-1)\,a'_0-a_1}{a_0}\right]_{x_1},\end{aligned}\right\}\qquad(45)$$

e in questa le quantità P_{x,x_1} e $p\,(x_1)$ si annulleranno per $x=0$ e $x_1=0$, e mancheranno senz'altro nel caso della equazione del second'ordine.

Però, all'infuorì di P_{x,x_1}, i varî termini di $\mathfrak{q}_{x,x_1}$, come il penultimo di $\varepsilon_{n-1}\,A_x$, per la presenza di $\varphi\,(x)$ o del divisore a_0, potranno divenire infiniti per $x=0$ o $x_1=0$, e anzi l'ultimo termine di $\mathfrak{q}_{x,x_1}$ lo diverrà sempre se a_0 si annulla per $x=0$, a meno che non sia $a_1=(n-1)\,a'_0$ o che la quantità $(n-1)a'_0 - a_1$ non tenda a zero con x di un ordine non inferiore a quello di a_0; quindi per la presenza di questi termini, o dei corrispondenti in x_{m-1} e x_m, nelle quantità A_{x_m}, e $\mathfrak{q}_{x_{m-1},x_m}$ che figurano negli integrali della formola (2), potranno aversi degli inconvenienti in questa formola quando vi si supponga $\alpha = 0$.

Però la difficoltà proveniente dalla presenza dell'ultimo termine in $\mathfrak{q}_{x,x_1}$ potrà togliersi col processo a) del § 16 della Memoria precedente, perchè moltiplicando la equazione data per un fattore conveniente si potrà sempre ridurlo a soddisfare alla condizione $a_1 = (n-1)a'_0$, salvo però allora a assicurarsi che non cessino di essere regolari gli altri coefficienti della nostra equazione, e anzi allora il penultimo termine di $\mathfrak{q}_{x,x_1}$ prenderà la forma più semplice $\varepsilon_{n-2}\left(a_2 - \frac{(n-1)(n-2)}{2}a''_0\right)_{x_1}\{\varphi(x) - \varphi(x_1)\}$; e quanto al penultimo termine di $\varepsilon_{n-1}A_x$ quando porti inconvenienti si potrà sempre farlo sparire prendendo $c_{n-1} = 0$, cioè limitandosi a considerare integrali particolari invece dell'integrale generale.

Si aggiunga d'altra parte che, limitandoci ora anche per le equazioni del second'ordine al caso in cui $\varphi(x)$ è integrabile per $x = 0$ anche ridotta ai valori assoluti, e considerando l'integrale $\int_0^{x_{m-1}} \frac{A_{x_m}\mathfrak{q}_{x_{m-1},x_m}}{(a_0 Q)_{x_m}} d\,x_m$ nel quale ora si ha $a_0 Q = 1$, si vede subito che, salvi sempre gli inconvenienti che potrà portare l'ultimo termine di $\mathfrak{q}_{x_{m-1},x_m}$ quando vi sarà, se sarà stato preso $c_{n-1} = 0$, non comparendo più allora il $\varphi(x)$ in $\varepsilon_{n-1}A_x$, la presenza di $\varphi(x_{m-1})$ e $\varphi(x_m)$ in $\mathfrak{q}_{x_{m-1},x_m}$ non porterà affatto altri inconvenienti, perchè per le nostre ipotesi sì la funzione $\varphi(x_m)$ che i prodotti di essa per funzioni finite sono integrabili anche per $x_m = 0$, e similmente i prodotti della forma $\varphi(x_{m-1})\int_0^{x_{m-1}}\pi(x)\,d\,x$, ove $\pi(x)$ è finita (che proverranno da quei termini di $\mathfrak{q}_{x_{m-1},x_m}$ che hanno il fattore $\varphi(x_{m-1})$) saranno finiti finchè x_{m-1} non è zero, e in ogni modo saranno sempre integrabili rispetto a x_{m-1} anche per $x_{m-1} = 0$; quindi, ripetendo i ragionamenti fatti più volte nei paragrafi precedenti si vede che la formola (2) rappresenterà ancora un integrale della nostra equazione; e conseguentemente si può ora senz'altro affermare che supponendo nella (2) $\alpha = 0$, e sostituendovi per $\varepsilon_{n-1}A_x$, e $\mathfrak{q}_{x,x_1}$ gli ultimi valori (12) e (45) trovati sopra nei quali sia stato fatto $c_{n-1} = 0$, salvo, quando occorra, ad avere riguardo alle difficoltà che potranno provenire dalla presenza del termine

$\varepsilon_{n-1}\left[\frac{(n-1)a'_0-a_1}{a_0}\right]_{x_1}$ in $\mathfrak{q}_{x,x_1}$, la formola (2) stessa ci darà sempre integrali particolari con $n-1$ costanti arbitrarie della equazione data nei tratti che partono dal punto $x=0$, finchè nei tratti stessi i coefficienti della equazione medesima siano regolari, e a_0 divenga infinitesimo tutt'al più per $x=0$ e di un ordine inferiore al secondo e tale che la funzione $\varphi(x)=\int\frac{dx}{a_0}$ pel caso delle equazioni del second'ordine, e questa e anche l'altra $\frac{x}{a_0}$ nel caso delle equazioni di ordine superiore siano integrabili anche per $x=0$, e la $\varphi(x)$ si mantenga tale anche ridotta ai suoi valori assoluti, come appunto avverrà sempre nei casi ordinarî. E determinati così $n-1$ integrali particolari, si troverà poi coi metodi noti anche l'n^o con semplici quadrature.

Se poi non si vorrà prendere $c_{n-1}=0$, allora siccome, quando non sia sempre $\frac{n(n-1)}{2}a''_0-(n-1)a'_1+a_2=0$, nei prodotti $A_{x_m}\mathfrak{q}_{x_{m-1},x_m}$ verranno a comparire anche i quadrati di $\varphi(x_m)$, per essere sicuri che la formola (2) continuerà ancora a rappresentare l'integrale della equazione data, che allora sarà l'integrale generale, bisognerà assicurarsi che insieme a $\varphi(x)$ anche $\varphi^2(x)$ è integrabile per $x=0$, o almeno bisognerà che la quantità $\frac{n(n-1)}{2}a''_0-(n-1)a'_1+a_2$ senza essere zero tenda a zero in modo che il prodotto di essa per $\varphi^2(x)$ sia integrabile per $x=0$. E nel caso particolare in cui si abbia $\frac{n(n-1)}{2}a''_0-(n-1)a'_1+a_2=0$, allora i risultati precedenti continueranno a sussistere senz'altro anche quando c_{n-1} non sia zero, e quindi anche per l'integrale generale; e ciò sempre colle sole condizioni precedenti relative alla integrabilità di $\varphi(x)$ per $x=0$, e occorrendo anche di $\frac{x}{a_0}$, e salvi sempre gli inconvenienti che talvolta potrà portare la presenza dell'ultimo termine in $\mathfrak{q}_{x,x_1}$ quando non si sia fatto preventivamente sparire.

Non è escluso poi evidentemente che in seguito a relazioni speciali fra i coefficienti vi siano anche altri casi nei quali i risultati precedenti continuano a valere senza che siano soddisfatte tutte le condizioni indicate sopra. In particolare, pel caso delle equazioni del second'ordine potrà talvolta essere tralasciata la condizione che abbiamo posta soltanto in ultimo, quella cioè per la quale si richiede che l'ordine d'infinitesimo di a_0 per $x=0$ sia, come per le equazioni di ordine superiore, inferiore al secondo, ecc., ecc. Questo ad es. potrà farsi, nel caso delle equazioni del second'ordine, quando la quantità $a''_0 - a'_1 + a_2$ che figura nel coefficiente di $\varphi(x) - \varphi(x_1)$ in $\mathfrak{q}_{x,x_1}$ anche senza essere sempre zero, tenda a zero con x e di un ordine sufficientemente grande in relazione a quello di a_0, come avviene ad esempio per la equazione:

$$x^3 y'' + 3x^2 y' + x^p y = 0,$$

con $p > 1$, e per altre equazioni simili.

20. In particolare dunque se la equazione data sarà del second'ordine, e come potrà sempre farsi moltiplicandola per un fattore conveniente, sarà ridotta alla forma:

$$\frac{d}{dx}\left(a_0 \frac{dy}{dx}\right) + a_2 y = 0, \quad \text{o} \quad a_0 y'' + a'_0 y' + a_2 y = 0, \tag{46}$$

se sostituiremo nella (2) i valori (42) e (45) di $\varepsilon_{n-1} A_x$ e $\mathfrak{q}_{x,x_1}$ corrispondenti a questo caso, e cambieremo per comodo c_2 in $-c_2$, la (2) stessa ci darà l'integrale:

$$y = c_1 \varphi(x) + c_2 + \varepsilon_1 \int_0^x a_{2,x_1} \{c_1 \varphi(x_1) + c_2\} \{\varphi(x) - \varphi(x_1)\} dx_1 +$$

$$+ \varepsilon_2 \int_0^x a_{2,x_1} \{\varphi(x) - \varphi(x_1)\} dx_1 \int_0^{x_1} a_{2,x_2} \{c_1 \varphi(x_2) + c_2\} \{\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\} dx_2 + \cdots +$$

$$+ \varepsilon_m \int_0^x a_{2,x_1} \{\varphi(x) - \varphi(x_1)\} dx_1 \int_0^{x_1} a_{2,x_2} \{\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\} dx_2 \int_0^{x_2} \cdots$$

$$\cdots \int_0^{x_{m-1}} a_{2,x_m} \{c_1 \varphi(x_m) + c_2\} \{\varphi(x_{m-1}) - \varphi(x_m)\} dx_m + \cdots$$

che quando si ponga $\int_0^x a_{2,x} dx = \psi(x)$, $\int_0^x a_{2,x} \varphi(x) dx = \pi(x)$, e in ogni termine della serie si applichi l'integrazione per parti all'ultimo integrale coll'osservare che $\psi(0)$ e $\pi(0)$ sono nulli, si trasforma nell'altra:

$$\left.\begin{aligned} y = c_1\,\varphi(x) + c_2 + \int_0^x \frac{c_1\,\pi(x_1) + c_2\,\psi(x_1)}{a_{0,x_1}}\,d\,x_1 + \\ + \varepsilon_1 \int_0^x a_{2,x_1}\,|\,\varphi(x) - \varphi(x_1)\,|\,d\,x_1 \int_0^{x_1} \frac{c_1\,\pi(x_2) + c_2\,\psi(x_2)}{a_{0,x_2}}\,d\,x_2 + \cdots + \\ + \varepsilon_{n-1} \int_0^x a_{2,x_1}\,|\,\varphi(x) - \varphi(x_1)\,|\,d\,x_1 \int_0^{x_2} a_{2,x_2}\,|\,\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\,|\,d\,x_2 \int_0^{x_3} \ldots \\ \ldots \int_0^{x_{m-1}} \frac{c_1\,\pi(x_m) + c_2\,\psi(x_m)}{a_{0,x_m}}\,d\,x_m + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (47)$$

nella quale $\varphi(x)$, $\psi(x)$ e $\pi(x)$ rappresentano gli integrali $\int \frac{d\,x}{a_0}$, $\int_0^x a_2\,d\,x$, $\int_0^x a_2\,\varphi(x)\,d\,x$, e s'intende che a_0 per $x = 0$ se diviene infinitesimo lo divenga in modo che la $\varphi(x)$ sia atta all'integrazione anche per $x = 0$, e anche ridotta ai valori assoluti, salvo a doversi limitare a considerare soltanto l'integrale particolare:

$$\left.\begin{aligned} y = 1 + \int_0^x \frac{\psi(x_1)}{a_{0,x_1}}\,d\,x_1 + \varepsilon_1 \int_0^x a_{2,x_1}\,|\,\varphi(x) - \varphi(x_1)\,|\,d\,x_1 \int_0^{x_1} \frac{\psi(x_2)}{a_{0,x_2}}\,d\,x_2 + \cdots + \\ + \varepsilon_{n-1} \int_0^{x_1} a_{2,x_1}\,|\,\varphi(x) - \varphi(x_1)\,|\,d\,x_1 \int_0^{x_2} a_{2,x_2}\,|\,\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\,|\,d\,x_2 \int_0^{x_3} \ldots \int_0^{x_{m-1}} \frac{\psi(x_m)}{a_{0,x_m}}\,d\,x_m + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (48)$$

che corrisponde a $c_1 = 0$ (e $c_2 = 1$), nel caso in cui la presenza dei termini che contengono c_1 faccia perdere alla formola il suo significato; e sempre nel supposto che nei tratti che si considerano, con un estremo nel punto $x = 0$, a_0 e a_2 siano regolari, e a_0 si annulli tutt'al più soltanto per $x = 0$. E quando a_2 coll'avvicinarsi di x a zero tenda esso pure a zero in modo che, preso ancora ove occorra $c_1 = 0$, la formola precedente conservi un significato anche se a_0 diventa infinitesimo per $x = 0$ di ordine superiore e tale che la funzione $\varphi(x)$ non sia più integrabile per $x = 0$, allora la stessa formola (47) continuerà a rappresentare ancora un integrale della (46) nello stesso tratto.

Così in particolare nel caso della funzione I (o I_0) di Bessel, per la quale cioè si ha:

$$x I' + I' + x I = 0\,,$$

osservando che allora si ha $\varphi(x) = \int \frac{d\,x}{x} = \log x$, e che a_2 tende a zero con x, si vede subito che la formola precedente è applicabile qualunque siano i valori che si prendono per le costanti $c_1\, c_2$; e così in particolare supponendo $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, cioè fermandoci sull'integrale particolare (48), e calcolando successivamente gli integrali che vi figurano, si giunge subito alla formola:

$$I = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2\,.\,4^2} - \frac{x^6}{2^2\,.\,4^2\,.\,6^2} + \cdots$$

che dà il noto sviluppo di I in serie ordinate per le potenze di x.

E nel caso della equazione:

$$x\,y'' + (2\,\nu + 1)\,y' + x\,y = 0,$$

con ν costante diversa da zero, che si porta a rientrare nella (46) moltiplicandola per $x^{2\nu}$ con chè $a_0 = x^{2\nu+1}$, allora supponendo $2\,\nu + 1 \geqq 0$, e osservando che si avrà $\varphi(x) = \int \frac{d\,x}{x^{2\nu+1}} = -\frac{1}{2\,\nu\,x^{2\nu}}$, e limitandoci ancora al caso di $c_1 = 0$, e $c_2 = 1$, e osservando che la formola sarà applicabile anche se, per essere $2\,\nu \geqq 1$, $\varphi(x)$ non sarà integrabile per $x = 0$, basterà calcolare successivamente gli integrali della (48) per trovare subito la formola:

$$y = 1 - \frac{x^2}{2\,(2\,\nu + 2)} + \frac{x^4}{2\,.\,4\,(2\,\nu + 2)\,(2\,\nu + 4)} -$$

$$- \frac{x^6}{2\,.\,4\,.\,6\,(2\,\nu + 2)\,(2\,\nu + 4)\,(2\,\nu + 6)} + \cdots$$

che per $\nu = 0$ si riduce al valore precedente di I, e che come è facile a vedere vale anche quando $2\,\nu + 1 < 0$ purchè ν non sia un numero intero negativo.

Questa funzione y moltiplicata per x^ν dà la funzione di Bessel I_ν, giacchè se si pone $y = \frac{u}{x^\nu}$, la equazione precedente si riduce all'altra:

$$x\,u'' + u' + \left(x - \frac{\nu^2}{x}\right) u = 0,$$

che è appunto quella della funzione I_ν, ecc., ecc.

Similmente prendendo la equazione:

$$k(1-k^2)K''+(1-3k^2)K'-kK=0,$$

dei periodi delle funzioni ellittiche considerati come funzioni del modulo k, si potrà applicare all'integrale la formola (47) per qualunque valore delle costanti c_1 e c_2 coll'osservare che in questo caso sarà:

$$\varphi(x)=\log\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\quad \psi(x)=-\frac{x^2}{2},$$

$$\pi(x)=\frac{1}{4}\log(1-x^2)+\frac{x^2}{2}\log\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot$$

E così in particolare per $c_1=0$, $c_2=1$, cioè applicando la (48) si troverà:

$$K=1+\frac{1}{2}\log\sqrt{1-k^2}+\frac{1}{2}\int_0^k x_1\log\frac{k\sqrt{1-x_1^2}}{x_1\sqrt{1-k^2}}\log\sqrt{1-x_1^2}\,dx_1+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^k x_1\log\frac{k\sqrt{1-x_1^2}}{x_1\sqrt{1-k^2}}\,dx_1\int_0^{x_1} x_2\log\frac{x_1\sqrt{1-x_2^2}}{x_2\sqrt{1-x_1^2}}\log\sqrt{1-x_2^2}\,dx_2+\cdots,$$

e questa potrà servire a darci i valori di K per valori piccolissimi di k. Volendolo poi, col valersi della (2) nella quale sia supposto $\alpha=1$, si potrebbe avere anche la formola che darebbe K pei valori del modulo k vicinissimi a 1.

In modo simile si potrebbero trovare gli integrali della equazione:

$$y''+\frac{2\nu}{x}y'-m^2y=0,$$

che trovasi considerata anche negli ordinarî trattati di calcolo.

21. Fermiamoci ora in modo anche più speciale a applicare questi studî alla equazione lineare generale del second'ordine che, intendendola al solito moltiplicata, ove occorra, per un fattore conveniente, potremo sempre supporre ridotta alla forma:

$$\frac{d\left(a_0\dfrac{dy}{dx}\right)}{dx}+a_2y=X. \tag{49}$$

Applicando poi il cambiamento di variabile [§ 16. c) Mem. prec.] colla formola $dx=f(\xi)\,d\xi$, ove $f(\xi)$ potrà essere scelta a piacere, come facemmo anche al § 10, potremo trasformarla nell'altra:

$$\frac{d\left(\frac{a_0}{f}\frac{dy}{d\xi}\right)}{d\xi} + a_2 f y = f X, \tag{50}$$

che quando si prenda $f(\xi) = a_0$, o $d\xi = \frac{dx}{a_0}$, diviene $y'' + a_0 a_2 y = a_0 X$, intendendo ora che $a_0 a_2$, e $a_0 X$ siano espressi per ξ.

Indipendentemente da questo, applicando anche il cambiamento della funzione [§ 16. *b*) Mem. prec.] mediante la formola $y = t u$, la (50) diverrà:

$$\frac{a_0}{f} t u'' + \left\{\left(\frac{a^0}{f} t\right)' + \frac{a_0}{f} t'\right\} u' + \left\{\left(\frac{a_0}{f} t'\right)' + a_2 f t\right\} u = f X,$$

le varie derivate ora essendo prese rispetto a ξ; e quindi volendo che manchi il termine in u' basterà che si abbia $\left(\frac{a_0}{f} t\right)' + \frac{a_0}{f} t' = 2\frac{a_0}{f} t' + \left(\frac{a_0}{f}\right)' t = 0$, cioè basterà prendere $t = \sqrt{\frac{kf}{a_0}}$ con k costante; e allora avendosi $\left(\frac{a_0}{f} t'\right)' = -\left(\frac{a_0}{f} t\right)''$, il coefficiente di u diverrà $\left\{a_2 f - \left(\sqrt{\frac{k a_0}{f}}\right)'' \sqrt{\frac{a_0}{kf}}\right\} t$.

Ridotta dunque la nostra equazione alla forma (49) e poi alla (50), basterà porre $y = \sqrt{\frac{kf}{a_0}}\, u$, perchè la equazione in u prenda la forma:

$$u'' + \left\{\frac{a_2}{a_0} f^2 - \left(\sqrt{\frac{k a_0}{f}}\right)'' \sqrt{\frac{f}{k a_0}}\right\} u = f \sqrt{\frac{f}{k a_0}}\, X, \tag{51}$$

talchè con queste trasformazioni successive ogni equazione lineare del second'ordine potrà ridursi sempre a dipendere da un'altra della forma precedente (51), cioè del tipo:

$$y'' + a_2 y = X, \tag{52}$$

e questo potrà farsi in infiniti modi, giacchè la funzione trasformatrice $f(\xi)$ è rimasta arbitraria.

Così in particolare prendendo, con $k = 1$, $f = \sqrt{a_0}$, cioè $d\xi = \frac{dx}{\sqrt{a_0}}$ o $\xi = \int \frac{dx}{\sqrt{a_0}}$, la equazione (51) in u sarà la seguente:

$$u'' + \left\{a_2 - \left(a_0^{\frac{1}{4}}\right)'' a_0^{-\frac{1}{4}}\right\} u = a_0^{\frac{1}{4}} X, \quad \text{con} \quad y = a_0^{-\frac{1}{4}} u; \tag{53}$$

prendendo $f = 1$, cioè $x = \xi$ la equazione (51) in u sarà:

$$u'' + \left\{ \frac{a_2}{a_0} - (a_0^{\frac{1}{2}})'' a_0^{-\frac{1}{2}} \right\} u = X a_0^{-\frac{1}{2}}, \quad \text{con} \quad y = a_0^{-\frac{1}{2}} u, \tag{54}$$

e prendendo $f = a_0$, cioè $d\xi = \frac{dx}{a_0}$ o $\xi = \int \frac{dx}{a_0}$, si avrà, come già trovammo:

$$u'' + a_0 a_2 u = a_0 X, \quad \text{con} \quad y = u. \tag{55}$$

22. Partendo dunque senz'altro dalla equazione (52) alla quale, come ora abbiamo visto, ogni equazione lineare del second'ordine può sempre ridursi, potremo intanto determinare una forma del suo integrale generale con una formola del tutto simile alla (47), poichè a causa della (2) basterà sostituire per tutto in questa alla somma $c_1 \varphi(x) + c_2$ (che in essa rappresenta $\varepsilon_{n-1} A_x$) la espressione attuale di $\varepsilon_{n-1} A_{x_1}$ cioè $c_1 x + c_2 + \int_0^x X_1 (x - x_1)\, dx$; e poichè ora $a_0 = 1$ non vi saranno altre eccezioni che quelle che proverrebbero dal non essere regolari in qualche punto a_2 e X.

E così in particolare quando sia $X = 0$, cioè quando si consideri l'equazione omogenea:

$$y'' + a_2 y = 0, \tag{56}$$

facendo una volta $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, e un'altra $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, avremo le due formole notevoli:

$$\left.\begin{aligned} y = 1 &+ \varepsilon_1 \int_0^x a_{2,x_1} (x - x_1)\, dx_1 + \varepsilon_2 \int_0^x a_{2,x_1} (x - x_1)\, dx_1 \int_0^{x_1} a_{2,x_2} (x_1 - x_2)\, dx_2 + \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\ &+ \varepsilon_m \int_0^x a_{2,x_1} (x - x_1\; dx_1 \int_0^{x_1} a_{2,x_2} (x_1 - x_2)\, dx_2 \int_0^{x_2} \cdots \int_0^{x_{m-1}} a_{2,x_1} (x_{m\;1} - x_m)\, dx_m + \cdots, \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

$$\left.\begin{array}{l} y=x+\varepsilon_1\int_0^x a_{2,x_1}x_1(x-x_1)\,dx_1+\varepsilon_2\int_0^x a_{2,x_1}(x-x_1)\,dx_1\int_0^{x_1} a_{2,x_2}x_2(x_1-x_2)\,dx_2+ \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+ \\ +\varepsilon_m\int_0^x a_{2,x_1}(x-x_1)\,dx_1\int_0^{x_1} a_{2,x_2}(x_1-x_2)\,dx_2\int_0^{x_2}\ldots\int_0^{x_{m-1}} a_{2,x_m}x_m(x_{m-1}-x_m)\,dx_m+\cdots \end{array}\right\} \quad (57')$$

che daranno gli integrali fondamentali della (56) nei tratti che comprendono il punto $x=0$ e nei quali a_2 si mantiene regolare; e questi nei tratti nei quali a_2 ha sempre lo stesso segno, e quindi, nei casi ordinarî, almeno in intorni non troppo grandi del punto $x=0$ nel quale si suppone naturalmente che a_2 non abbia singolarità, con applicare agli integrali successivamente il primo teorema del valore medio, dànno le altre pure notevoli:

$$\left.\begin{array}{l} y=1-a_{2,1}\dfrac{x^2}{\pi(2)}+a_{2,2}^2\dfrac{x^4}{\pi(4)}-a_{2,3}^3\dfrac{x^6}{\pi(6)}+a_{2,4}^4\dfrac{x^8}{\pi(8)}-\cdots \\ y=x-\mathbf{a}_{2,1}\dfrac{x^3}{\pi(3)}+\mathbf{a}_{2,2}^2\dfrac{x^5}{\pi(5)}-\mathbf{a}_{2,3}^3\dfrac{x^7}{\pi(7)}+\mathbf{a}_{2,4}^4\dfrac{x^9}{\pi(9)}-\cdots \end{array}\right\} \quad (58)$$

nelle quali $a_{2,1}$, $a_{2,2}$, $a_{2,3}, \ldots$, $\mathbf{a}_{2,1}$, $\mathbf{a}_{2,2}$, $\mathbf{a}_{3,3}, \ldots$, sono valori medî di a_2 in quei tratti, ma dipendono generalmente da x.

Cambiando gli integrali estesi da 0 a x in altri estesi fra α e x e anche, per semplicizzare, cambiando le costanti c_1 e c_2 col ridurre la espressione $c_1 x+c_2$ in $c_1(x-\alpha)+c_2$, si ottiene una formola per l'integrale della (52) che vale in qualsiasi intervallo nel quale a_2 si mantiene regolare, e al quale appartenga il punto α; e in questo intervallo si hanno in particolare i due integrali (58) nei quali sia cambiato x in $x-\alpha$ quando in essi a_2 abbia sempre lo stesso segno; e di qui evidentemente risulta subito una generalizzazione di alcuni dei risultati ottenuti da Kneser nelle Memorie citate al § 6, cioè che quando a_2 al crescere indefinito di x tende *in un modo qualsiasi* verso un numero diverso da zero e negativo $-\nu^2$, vi sono integrali fondamentali della (52) che tendono a comportarsi come seni e coseni iperbolici o come esponenziali di νx.

23. Se poi invece di supporre nella (2) $z_1=1$, $z_2=x$ come erasi fatto in questo caso, si suppone $z_1=\operatorname{sen} px$, $z_2=\cos px$ con p costante, il chè, per quanto si disse nella nota al § 16 e come anche si verifica subito, dà ancora $a_0 Q=\text{cost}$; allora introducendo, per comodo, due altre costanti λ

e μ, invece delle solite c_1 e c_2, col porre $c_1 = \lambda p \operatorname{sen} p\mu$, $c_2 = \lambda p \cos p\mu$, e osservando che sarà $Q = -p$, $Q_c = \lambda p \operatorname{sen} p(x-\mu)$, $q_{x,x_1} = \operatorname{sen} p(x-x_1)$, $\mathfrak{q}_{x\,x_1} = (p^2 - a_{2,x_1}) \operatorname{sen} p(x-x_1)$, troveremo per gli integrali della (52) la forma seguente:

$$y = \lambda \operatorname{sen} p(x-\mu) + \frac{1}{p}\int_\alpha^x X_\xi \operatorname{sen} p(x-\xi)\,d\xi +$$

$$+\frac{1}{p}\int_\alpha^x\left[\lambda \operatorname{sen} p(x_1-\mu) + \frac{1}{p}\int_\alpha^{x_1} X_\xi \operatorname{sen} p(x_1-\xi)\,d\xi\right](p^2-a_{2,x_1})\operatorname{sen} p(x-x_1)\,dx_1 +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$+\frac{1}{p^m}\int_\alpha^x (p^2-a_{2,x_1})\operatorname{sen} p(x-x_1)\,dx_1\int_\alpha^{x_1}(p^2-a_{2,x_2})\operatorname{sen} p(x_1-x_2)\,dx_2\int_\alpha^{x_2}\ldots$$

$$\ldots\int_\alpha^{x_{m-1}}\left[\lambda \operatorname{sen} p(x_m-\mu) + \frac{1}{p}\int_\alpha^{x_m} X_\xi \operatorname{sen} p(x_m-\xi)\,d\xi\right](p^2-a_{2,x_m})\operatorname{sen} p(x_{m-1}-x_m)\,dx_m + \cdots$$

e nel caso di $X = 0$ si avrà:

$$\left.\begin{aligned} y = \lambda \operatorname{sen} p(x-\mu) &+ \frac{\lambda}{p}\int_\alpha^x (p^2-a_{2,x_1})\operatorname{sen} p(x_1-\mu)\operatorname{sen} p(x-x_1)\,dx_1 + \cdots \\ +\frac{\lambda}{p^m}\int_\alpha^x (p^2-a_{2,x_1})&\operatorname{sen} p(x-x_1)\,dx_1\int_\alpha^{x_1}(p^2-a_{2,x_2})\operatorname{sen} p(x_1-x_2)\,dx_2\int_\alpha^{x_2}\ldots \\ \ldots\int_\alpha^{x_{m-1}}(p^2-a_{2,x_m})&\operatorname{sen} p(x_m-\mu)\operatorname{sen} p(x_{m-1}-x_m)\,dx_m + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (59)$$

e al solito queste formole varranno in tutti i tratti nei quali a_2 e X sono regolari, e nei quali si trova compreso il punto α.

21. Così volendo applicare questa formola al caso delle funzioni sferiche di LEGENDRE X_n, per le quali si ha:

$$\frac{d\left\{(1-x^2)\dfrac{dX_n}{dx}\right\}}{dx} + n(n-1)X_n = 0,$$

trasformeremo prima di tutto questa equazione col processo del § 21 prendendo ora $f(\xi) = \sqrt{a_0} = \sqrt{1-x^2}$, o $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d\xi$, cioè ponendo $x = \cos\xi$ e $X_n = \frac{u}{\sqrt{\operatorname{sen}\xi}}$, con chè bisognerà escludere i punti $\xi = 0$, $\xi = \pi$ o $x = \pm 1$, e l'equazione in u sarà per la (53):

$$u'' + \left\{ n(n+1) - (\operatorname{sen}^{\frac{1}{2}}\xi)'' \operatorname{sen}^{-\frac{1}{2}}\xi \right\} u = 0,$$

ovvero:

$$u'' + \left\{ \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4\operatorname{sen}^2\xi} \right\} u = 0;$$

quindi, prendendo ora per semplicità nella (59) $p = n + \frac{1}{2}$, e supponendo $\alpha = \frac{\pi}{2}$, si avrà la formola data già dal Bonnet:

$$\left.\begin{aligned}
u = \sqrt{\operatorname{sen}\xi}\, X_n(\cos\xi) = \lambda \operatorname{sen} p(\xi - \mu) - \\
- \frac{\lambda}{4n+2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\xi} \frac{\operatorname{sen} p(\xi_1-\mu)\operatorname{sen} p(\xi-\xi_1)}{\operatorname{sen}^2\xi_1}\, d\xi_1 + \\
+ \frac{\lambda}{(4n+2)^2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\xi} \frac{\operatorname{sen} p(\xi-\xi_1)}{\operatorname{sen}^2\xi_1}\, d\xi_1 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\xi_1} \frac{\operatorname{sen} p(\xi_2-\mu)\operatorname{sen} p(\xi_1-\xi_2)}{\operatorname{sen}^2\xi_2}\, d\xi_2 + \cdots + \\
+ (-1)^m \frac{\lambda}{(4n+2)^m}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\xi} \frac{\operatorname{sen} p(\xi-\xi_1)}{\operatorname{sen}^2\xi_1}\, d\xi_1 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\xi_1} \frac{\operatorname{sen} p(\xi_1-\xi_2)}{\operatorname{sen}^2\xi_2}\, d\xi_2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\xi_m} \cdots \\
\cdots \int_{\frac{\pi}{2}}^{\xi_{m-1}} \frac{\operatorname{sen} p(\xi_m-\mu)\operatorname{sen} p(\xi_{m-1}-\xi_m)}{\operatorname{sen}^2\xi_m}\, d\xi_m + \cdots
\end{aligned}\right\} \quad (60)$$

dove $p = n + \frac{1}{2}$; e in queste le costanti λ e μ dovranno determinarsi opportunamente perchè il secondo membro venga ad essere precisamente la funzione $\sqrt{\operatorname{sen}\xi}\, X_n(\cos\xi)$. Questo, come è noto, si farà ricavando da questa formola colla derivazione il valore di u' (il che per quanto dicemmo al § 13 della Mem. preced. può sempre farsi) e poi servendosi dei valori noti di $X_n(x)$, e $X'_n(x)$ per $x = 0$, o di u e u' per $\xi = \frac{\pi}{2}$. Si trova allora che λ è della forma $\frac{a}{\sqrt{n}}$, essendo a una quantità che al crescere indefinito di n tende verso $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, e $\mu = -\frac{\pi}{4p}$; ed è di quì che si conclude che la $X_n(\cos\xi)$, per ξ diverso da zero e da π, al crescere indefinito di n si comporta come la funzione $\frac{2\,\text{sen}\left(p\,\xi + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2\,n\,\pi\,\text{sen}\,\xi}}$ essendo $p = \frac{2n+1}{2}$.

25. Volendo invece applicare la (59) al caso delle funzioni di Bessel I_n per le quali si ha:

$$\frac{d\left(x\frac{d I_n}{d x}\right)}{d x} + \left(x - \frac{n^2}{x}\right) I_n = 0\,,$$

trasformeremo prima di tutto questa equazione ancora col processo del § 21 prendendo ora $x = \xi$, $I_n = \frac{u}{\sqrt{x}}$, con chè bisognerà escludere il punto $x = 0$; e poichè allora la equazione in u sarà la seguente:

$$u'' + \left\{1 - \frac{n^2}{x^2} - (x^{\frac{1}{2}})''x^{-\frac{1}{2}}\right\}u = 0, \quad \text{ovvero} \quad u'' + \left\{1 - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right\}u = 0,$$

prendendo per semplicità nella (59) $p = 1$, e ponendo per abbreviare $\beta_n = n^2 - \frac{1}{4} = \frac{(2n-1)(2n+1)}{4}$, e intendendo che α e x siano numeri qualsiansi diversi da zero e dello stesso segno, avremo la formola:

$$u = \sqrt{x}\,I_n = \lambda\,\text{sen}\,(x-\mu) + \lambda\,\beta_n \int_\alpha^x \frac{\text{sen}\,(x_1-\mu)\,\text{sen}\,(x-x_1)}{x_1^2}\,d\,x_1 +$$

$$+ \lambda\,\beta_n^2 \int_\alpha^x \frac{\text{sen}\,(x-x_1)}{x_1^2}\,d\,x_1 \int_\alpha^{x_1} \frac{\text{sen}\,(x_1-\mu)\,\text{sen}\,(x_1-x_2)}{x_2^2}\,d\,x_2 + \cdots +$$

$$+ \lambda\,\beta_n^m \int_\alpha^x \frac{\text{sen}\,(x-x_1)}{x_1^2}\,d\,x_1 \int_\alpha^{x_1} \frac{\text{sen}\,(x_1-x_2)}{x_2^2}\,d\,x_2 \int_\alpha^{x_2} \cdots$$

$$\cdots \int_\alpha^{x_{m-1}} \frac{\text{sen}\,(x_m-\mu)\,\text{sen}\,(x_{m-1}-x_m)}{x^2_m}\,d\,x_m + \cdots$$

essendo ancora λ e μ quantità da determinarsi; e in questa il limite α nel caso che x sia positivo può anche supporsi infinito, con chè si avrà:

$$\left.\begin{aligned} u = \sqrt{x}\, I_n = \lambda \operatorname{sen}(x-\mu) + \varepsilon_1 \lambda \beta_n \int_x^\infty \frac{\operatorname{sen}(x_1-\mu)\operatorname{sen}(x-x_1)}{x_1^2}\, d\,x_1 + \\ + \varepsilon_2 \lambda \beta_n^2 \int_x^\infty \frac{\operatorname{sen}(x-x_1)}{x_1^2}\, d\,x_1 \int_x^\infty \frac{\operatorname{sen}(x_1-\mu)\operatorname{sen}(x_1-x_2)}{x_2^2}\, d\,x_2 + \cdots + \\ + \varepsilon_m \lambda \beta_n^m \int_x^\infty \frac{\operatorname{sen}(x-x_1)}{x_1^2}\, d\,x_1 \int_{x_1}^\infty \frac{\operatorname{sen}(x_2-\mu)}{x_2^2}\, d\,x_2 \int_{x_2}^\infty \cdots \\ \cdots \int_{x_{m-1}}^\infty \frac{\operatorname{sen}(x_m-\mu)\operatorname{sen}(x_{m-1}-x_m)}{x_2^m}\, d\,x_m + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (61)$$

e questa varrà per qualunque valore diverso da zero e positivo di x.

Questa formola evidentemente torna a darci il modo di comportarsi di I_n al crescere indefinito di x (§ 9).

Volendo si potrebbero applicare questi studî anche alla equazione dei periodi delle funzioni ellittiche già considerata al § 20, e ad altre equazioni.

26. Non lascieremo questi studî sulle equazioni differenziali lineari senza fare anche le osservazioni seguenti che, sebbene semplicissime, mettono in evidenza, alcune particolarità, non tutte note, delle equazioni medesime.

Ricordiamo che, secondo quanto si disse al § 7 della Memoria precedente, quando si abbia la solita equazione generale (1), dove X è una funzione data della x, se per le solite nostre funzioni ausiliarie $z_1, z_2, \ldots, z_n$ si prendono n integrali fondamentali della equazione aggiunta $\varepsilon_{n+1} Z = 0$ della equazione omogenea corrispondente:

$$a_0\, y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\, y' + a_n\, y = 0, \quad (62)$$

l'integrale generale della (1) medesima viene dato dalla formola:

$$y = \frac{\varepsilon_{n-1}}{a_0\, Q} \left\{ Q_c + \int_\alpha^x X_{x_1}\, q_{x,x_1}\, d\,x_1 \right\}, \quad (63)$$

dove Q_c e q_{x,x_1} hanno i soliti significati.

Ne segue che la espressione:

$$y_0 = \frac{\varepsilon_{n-1}}{a_0\, Q} \int_\alpha^x X_{x_1}\, q_{x,x_1}\, d\,x_1\,, \quad (64)$$

che corrisponde ai valori zero di tutte le costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sarà un integrale particolare della (1), e l'altra espressione:

$$\mathrm{y} = \frac{\varepsilon_{n-1}}{a_0 Q} Q_c, \tag{65}$$

darà l'integrale generale della equazione omogenea (62); e quindi ricordando la formola che si dette per Q_c al § 17 della Memoria precedente si può ora affermare che « se $z_1, z_2, \ldots, z_n$ saranno n integrali fondamentali della equa- « zione aggiunta $\varepsilon_{n+1} Z = 0$ della (62), i rapporti $\frac{Q_{z_1}}{a_0 Q}, \frac{Q_{z_2}}{a_0 Q}, \ldots, \frac{Q_{z_n}}{a_0 Q}$ lo « saranno della (62) stessa; e per questi potremo prendere le $Q_{z_1}, Q_{z_2}, \ldots, Q_{z_n}$ « senz' altro quando $a_0 Q$ sia costante », ciò che per quanto si disse nella nota al § 16 avverrà sempre quando il coefficiente di $z^{(n-1)}$ nella equazione aggiunta sarà la derivata di a_0, cioè quando si abbia $a_1 = (n-1) a'_0$ nella equazione data, il chè, come più volte abbiamo detto, potrà sempre ottenersi moltiplicando la equazione stessa per un fattore conveniente.

27. È poi da osservare che la espressione (64) dell'integrale particolare y_0 della (1), mediante il quale col porre $y = y_0 + \mathrm{y}$ l'equazione stessa viene ridotta all'altra omogenea (62) in y, presenta una particolarità che merita di essere rilevata, quella cioè che invece di darci un tale integrale sotto la forma che di solito viene data nei trattati di calcolo, per mezzo degli integrali fondamentali della equazione omogenea corrispondente, *ce lo dà per mezzo di quelli della sua aggiunta*, e sotto una forma assai semplice.

D'altra parte avendosi per la seconda della (38) del § 17 della Mem. preced. e per l'osservazione fatta nel paragrafo precedente:

$$\frac{q_{x,x_1}}{(a_0 Q)_x} = \sum_1^n y_s (z_s)_{x_1},$$

quando con y_s s'indichi l'integrale particolare $\frac{\varepsilon_{n-s} Q_{z_s}}{(a_0 Q)_x}$ della (62), si vede che la (64) può trasformarsi nell'altra:

$$y_0 = \varepsilon_{n-1} \sum_1^n y_s \int_\alpha^x X_{x_1} (z_s)_{x_1} d x_1 = \varepsilon_{n-1} \sum_1^n y_s \int_\alpha^x X z_s \, d x,$$

la quale, mostrandoci che col cambiare la costante α il secondo membro si muta soltanto di una somma della forma $\Sigma c_s y_s$, ci spiega come mutando α nel secondo membro della (63) si ottiene ancora un integrale della (1), e ci mostra che astrazione fatta da una somma finita, cioè da un integrale della equazione omogenea (62) si possa prendere anche:

$$y_0 = \varepsilon_{n-1} \sum_1^n y_s \int X z_s \, d\, x,$$

ovvero:

$$y_0 = \varepsilon_{n-1} \sum_1^n y_s \int^x X_{x_1} (z_s)_{x_1} \, d\, x_1 = \frac{\varepsilon_{n-1}}{(a_0 Q)_x} \sum_1^n \varepsilon_{n-s} \int^x X_{x_1} Q_{z_s} (z_s)_{x_1} \, d\, x_1,$$

o anche infine:

$$y_0 = \frac{\varepsilon_{n-1}}{a_0 Q} \int^x X_{x_1} q_{x,x_1} \, d\, x_1, \tag{66}$$

essendo ora in queste formole gli integrali che vi figurano definiti o indefiniti qualsiansi.

28. Dalle stesse formole poi se ne deducono altre con successive integrazioni per parti che, in moltissimi casi, ci danno l'integrale y_0 per mezzo di serie che hanno esse pure forme molte notevoli.

Si osservi perciò dapprima che, avendo riguardo alla espressione di q_{x,x_1} per mezzo di un determinante o al suo sviluppo dato al § 17 della Mem. preced. si vede subito che le sue varie derivate rispetto a x_1, e i suoi integrali successivi rispetto a x_1 presi fra α e x_1 saranno i determinanti che vengono dal q_{x,x_1} stesso sostituendo respettivamente agli elementi dell'ultima colonna le derivate dello stesso ordine delle $z_1, z_2, \ldots, z_n$ nelle quali poi sia messo x_1 al posto di x, o gli integrali corrispondenti delle stesse $z_1, z_2, \ldots, z_n$ presi fra gli stessi limiti α e x_1.

E quando, nel calcolare il primo di questi integrali di q_{x,x_1} rispetto a x_1 invece degli integrali di $z_1, z_2, \ldots, z_n$ presi fra α e x_1 si sostituiscano nel determinante di q_{x,x_1} integrali indefiniti qualsiansi di queste quantità nelle quali però al posto di x sia sempre messo x_1, i nuovi determinanti daranno un integrale indefinito $\int q_{x,x_1} \, d\, x_1$ che per le osservazioni fatte nei due paragrafi precedenti non differirà da $\int_\alpha^x q_{x,x_1} \, d\, x$ altro che per una delle solite somme $\Sigma\, c_0\, y_s$, cioè per un integrale della (62).

Ciò premesso, indichiamo per semplicità con $q', q'', q''', \ldots$, le derivate $1^a, 2^a, 3^a, \ldots$, di q_{x,x_1} rispetto alla variabile x_1, e con $q'_x, q''_x, q'''_x, \ldots$, ciò che esse divengono quando vi si fà $x_1 = x$; è evidente che, come la q_{x,x_1}, anche le prime $n-2$ di queste derivate si annulleranno per $x_1 = x$; la $(n-1)^a$ si ridurrà a Q; la n^a a causa della equazione $\varepsilon_{n+1} Z = 0$ si ridurrà a

$-\left(n\frac{a'_0}{a_0}+\varepsilon_1\frac{a_1}{a_0}\right)Q$, e le seguenti $(n+1)^a$, $(n+2)^a, \ldots$, a causa delle equazioni che vengono dalla $\varepsilon_{n+1} Z = 0$ colla derivazione successiva, verranno dalla forma $g_1 Q$, $g_2 Q$, $g_3 Q, \ldots$, essendo g_1, g_2, $g_3, \ldots$, funzioni intere dei coefficienti della (62) e delle loro derivate fino agli ordini 2°, 3°, 4°,..., respettivamente, che potranno essere successivamente determinate con tutta facilità.

Indichiamo poi con $(q)_1$, $(q)_2$, $(q)_3, \ldots$, gli integrali successivi semplici, doppî, tripli,..., di q_{x,x_1} rispetto a x_1 definiti o indefiniti, e con $(q)_{1,x}$, $(q)_{2,x}$, $(q)_{3,x}, \ldots$, i loro valori per $x_1 = x$, e con $(X)_1$, $(X)_2, \ldots$, $(X)_n, \ldots$, gli integrali analoghi di X; e nell'integrale che figura nella espressione (66) di y_0 applichiamo successivamente l'integrazione per parti col prendere per fattori finiti una volta la $q_{x x_1}$ e le sue derivate, e un'altra la X_{x_1} e le sue derivate. Si troveranno subito le due formole seguenti:

$$\left.\begin{aligned}
y_0 &= \frac{1}{a_0 Q}\Big\{ q_x^{(n-1)} X_n + \varepsilon_1 q_x^{(n)} X_{n+1} + \varepsilon_2 q_x^{(n+1)} X_{n+2} + \cdots + \\
&\qquad + \varepsilon_s q_x^{(n+s-1)} X_{n+s} + \varepsilon_{s+1}\int q^{(n+s)} (X_{n+s})_{x_1}\, d x_1 \Big\}, \\
y_0 &= \frac{\varepsilon_{n-1}}{a_0 Q}\Big\{ (q)_{1,x} X + \varepsilon_1 (q)_{2,x} X' + \varepsilon_2 (q)_{3,x} X'' + \cdots + \\
&\qquad + \varepsilon_s (q)_{s+1,x} X^{(s)} + \varepsilon_{s+1}\int (q)_{s+1} X_{x_1}^{(s+1)}\, d x_1 \Big\},
\end{aligned}\right\} \quad (67)$$

e in queste quando gli ultimi integrali siano indefiniti potremo intenderli sempre limitati fra α e x, giacchè questo, pei soliti sviluppi della q_{x,x_1} e delle sue derivate o dei suoi integrali rispetto a x_1, equivarrà a aggiungere a y_0 una delle solite somme $\Sigma\, c_s y_s$, cioè un integrale della (62), e quindi quando l'uno o l'altro degli integrali stessi $\int_\alpha^x q^{(n+s)} (X_{n+s})_{x_1}\, d x_1$, $\int_\alpha^x (q)_{s+1} X_{x_1}^{(s+1)}\, d x_1$ o tutti e due, col prendere convenientemente le costanti negli integrali X_{n+s} o $(q)_{s+1}$ quando siano indefiniti, abbiano per limite zero al crescere indefinito di s, i valori di y_0 verranno espressi dalla serie corrispondente:

$$\left.\begin{aligned}
y_0 &= \frac{1}{a_0 Q}\Big\{ q_x^{(n-1)} X_n + \varepsilon_1 q_x^{(n)} X_{n+1} + \varepsilon_2 q_x^{(n+1)} X_{n+2} + \cdots + \\
&\qquad + \varepsilon_s q_x^{(n+s-1)} X_{n+s} + \cdots \Big\}, \\
y_0 &= \frac{\varepsilon_{n-1}}{a_0 Q}\Big\{ (q)_{1,x} X + \varepsilon_1 (q)_{2,x} X' + \varepsilon_2 (q)_{3,x} X'' + \cdots + \\
&\qquad + \varepsilon_s (q)_{s+1,x} X^{(s)} + \cdots \Big\},
\end{aligned}\right\} \quad (68)$$

nella prima delle quali i coefficienti delle X_n, X_{n+1}, X_{n+2}, $X_{n+3}, \ldots$, sono Q, $\left(n\frac{a'_0}{a_0}+\varepsilon_1\frac{a_1}{a_0}\right)Q$, $\varepsilon_2 g_1 Q$, $\varepsilon_3 g_2 Q, \ldots$, ove g_1, $g_2, \ldots$, sono funzioni intere dei coefficienti della (62) e delle loro derivate come dicemmo sopra, e ciò bene inteso quando le serie precedenti risultino convergenti. E s'intende che questi valori di y_0 potranno differire dalla espressione (66) per una delle solite somme $\Sigma c_s y_s$, cioè per un integrale della (62).

29. Nei casi particolari queste formole possono condurre a risultati notevolissimi.

Così ad es. quando si abbia da integrare la equazione:

$$y''+p^2 y=X, \tag{69}$$

dove p è una costante, siccome la equazione aggiunta della $y''+p^2y=0$ è questa equazione stessa, e per suoi integrali fondamentali possono prendersi $\operatorname{sen} px$, e $\cos px$, si avrà $Q=-p$, $q_{x,x_1}=\operatorname{sen} p(x-x_1)$, e quindi la (66) ci darà per un integrale y_0 della stessa equazione (69):

$$y_0=\frac{1}{p}\int^x X_{x_1}\operatorname{sen} p(x-x_1)\,dx_1, \tag{70}$$

e le (68) ci daranno le altre:

$$\left.\begin{aligned} y_0&=X_2-p^2X_4+p^4X_6-p^6X_8+\cdots,\\ y_0&=\frac{X}{p^2}-\frac{X''}{p^4}+\frac{X^{\mathrm{IV}}}{p^6}-\frac{X^{\mathrm{VI}}}{p^8}+\cdots;\end{aligned}\right\} \tag{71}$$

ma mentre per la validità della (70) si richiede soltanto che X sia finita e continua nel tratto dove si deve considerare, per le (71) si richiede anche che le serie che in esse figurano siano convergenti, e per la prima di esse che tenda a zero l'integrale $p^{2s+1}\int_\alpha^x \operatorname{sen} p(x-x_1)(X_{2s})_{x_1}\,dx_1$, e per la seconda che tende a zero l'altro $\frac{1}{p^{2s+1}}\int_\alpha^x \cos p(x-x_1)\,X_{x_1}^{(2s)}\,dx$.

In particolare, se gli integrali X_2, X_4, $X_6, \ldots$, che si sceglieranno non supereranno mai un numero finito, e al tempo stesso sarà $p<1$, o se le derivate X'', X^{IV}, $X^{\mathrm{VI}}, \ldots$, non supereranno mai un certo numero finito, e al tempo stesso sarà $p>1$, si avranno respettivamente la prima o la seconda delle formole (71).

30. In ultimo, sempre a proposito della equazione lineare completa (1), facciamo una osservazione pressochè evidente ma che merita di essere segnalata esplicitamente; cioè osserviamo che anche indipendentemente dal processo che ordinariamente si segue nei trattati, o dai processi precedenti, la loro integrazione può ridursi a quella di una equazione lineare omogenea ma dell'ordine $n+1$.

Basta infatti dividerla per X e poi applicarvi la derivazione per trovare che tale equazione è la seguente:

$$\left(\frac{\Phi(y)}{X}\right)' = \frac{a_0}{X}y^{(n+1)} + \left\{\left(\frac{a_0}{X}\right)' + \frac{a_1}{X}\right\}y^{(n)} + \left\{\left(\frac{a_1}{X}\right)' + \frac{a_2}{X}\right\}y^{(n-1)} + \cdots +$$
$$+ \left\{\left(\frac{a_{n-1}}{X}\right)' + \frac{a_2}{X}\right\}y' + \left(\frac{a_n}{X}\right)' y = 0,$$

ovvero:

$$\left.\begin{aligned} &a_0 X y^{(n+1)} + \{a'_0 X - a_0 X' + a_1 X\}y^{(n)} + \{a'_1 X - a_1 X' + a_2 X\}y^{(n-1)} + \cdots + \\ &\quad + \{a'_{n-1}X - a_{n-1}X' + a_n X\}y' + \{a'_n X - a_n X'\}y = 0, \end{aligned}\right\} \quad (72)$$

essendo $\Phi(y)$ il primo membro della (1); e poichè se $y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1}$ sono $n+1$ integrali fondamentali di questa equazione (72) sarà $\left(\frac{\Phi(y_s)}{X}\right)' = 0$, e quindi $\frac{\Phi(y_s)}{X} = \text{cost.}$, è evidente che quando, come potrà sempre farsi, si prendano per $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \gamma_{n+1}$ $n+1$ costanti tali da far sì che si abbia $\frac{\Phi(\gamma_r y_r)}{X} = 1$, allora $\gamma_1 y_1, \gamma_2 y_2, \ldots, \gamma_n y_n, \gamma_{n+1} y_{n+1}$ saranno altrettanti integrali della equazione data (1), e le funzioni:

$$\mathrm{y}_1 = \gamma_1 y_1 - \gamma_{n+1} y_{n+1}, \; \mathrm{y}_2 = \gamma_2 y_2 - \gamma_{n+1} y_{n+1}, \ldots, \; \mathrm{y}_n = \gamma_n y_n - \gamma_{n+1} y_{n+1},$$

saranno n integrali della equazione omogenea corrispondente (62), e saranno fondamentali, perchè se fra essi sussistesse una equazione lineare omogenea, altrettanto evidentemente avverrebbe per gli integrali $y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1}$ della (72) i quali perciò non sarebbero più fondamentali, come li abbiamo supposti.

Pisa, Aprile 1899.

Sulla teoria delle trasformazioni delle superficie a curvatura costante.

(*Di* Luigi Bianchi, *a Pisa.*)

PREFAZIONE.

Per descrivere lo scopo ed i risultati delle presenti ricerche conviene risalire ai teoremi fondamentali, dovuti al sig.r Guichard, dai quali ripetono la loro origine. Questi elegantissimi teoremi, relativi alla teoria della deformazione delle quadriche di rotazione, furono fatti conoscere dall'autore, senza dimostrazione, lo scorso gennaio nei *Comptes Rendus* de l'Académie des Sciences (*); da essi io ho dedotto le nuove trasformazioni delle superficie a curvatura costante, il cui studio forma l'oggetto principale della presente Memoria (**). Si sarebbe potuto pervenire a risultati in intima connessione con questi, e precisamente a superficie aventi le stesse immagini delle linee di curvatura delle nostre superficie a curvatura costante trasformate, proseguendo le anteriori ricerche pubblicate da Guichard stesso nei *Comptes Rendus* del 1898 (***). Su queste ricerche che, per quanto riguarda la trasformazione delle superficie a curvatura costante, furono appena accennate dall'autore, ritorniamo più avanti.

Intendiamo meglio l'importanza dei teoremi di Guichard, collegandoli colla teoria della deformazione delle congruenze rettilinee normali e col celebre teorema di Weingarten, relativo alle evolute di quelle superficie i cui raggi principali sono funzioni l'uno dell'altro (superficie W). Immaginiamo perciò una superficie S_0, flessibile ed inestendibile, dai cui punti M_0 escono

(*) *Sur la déformation des quadriques de révolution* (23 janvier 1899, pag. 232).

(**) Vedi le mie Note nei *Rendiconti* della R. Accademia dei Lincei: sedute del 19 febbraio, 5 marzo, 23 aprile e 21 maggio 1899.

(***) Vedi specialmente la Nota: 6 juin 1898, pag. 1617.

segmenti rettilinei $M_0 M$ normali nei loro estremi M ad una superficie S e deformiamo comunque la superficie di partenza S_0, che seco trasporti i segmenti $M_0 M$, invariabilmente connessi nei loro punti di partenza M_0 agli elementi del piano tangente di S_0. Un noto teorema di Beltrami (*) ci dice: *in tutte le deformazioni di S_0 il luogo S degli estremi M è costantemente una superficie ortogonale ai raggi $M_0 M$.*

Supponiamo ora di più che, in una speciale configurazione della S_0, la superficie S normale ai raggi della congruenza sia una superficie W, cioè abbia i raggi principali di curvatura r_1, r_2 legati da una relazione:

$$f(r_1, r_2) = 0, \tag{α}$$

e proponiamoci il problema fondamentale seguente, che diremo il *problema* $[A]$:

$[A]$. *Quando accadrà che in tutte le deformazioni della S_0 i raggi principali di curvatura della superficie S rimangano costantemente legati dalla medesima relazione (α)*?

Il teorema di Weingarten ci fa appunto conoscere una classe assai estesa di siffatte congruenze, dalle quali anzi si ottengono tutte le possibili superficie W (**). Basta infatti che la superficie iniziale S_0 sia applicabile sopra una superficie di rotazione ed i segmenti $M_0 M$ escano *tangenzialmente* alla S_0, secondo le direzioni delle tangenti alle deformate dei meridiani; allora una qualunque delle superficie S, normali ai raggi, risulta una superficie W, i cui raggi principali di curvatura soddisfano sempre ad una medesima equazione (α).

I teoremi di Guichard, riguardati sotto un conveniente punto di vista, ci rivelano l'esistenza di soluzioni essenzialmente nuove del problema $[A]$, ove i raggi della congruenza non escono più, come nel teorema di Weingarten, tangenzialmente alla superficie S_0 di partenza (***). Possiamo infatti enunciare i teoremi fondamentali di Guichard sotto la forma seguente:

Teorema I. *La superficie iniziale S_0 sia un paraboloide di rotazione ed i segmenti $M_0 M$ siano disposti sui raggi focali $M_0 F$, trovandosi gli estremi M,*

(*) Vedi pag. 257 delle mie *Lezioni di geometria differenziale* (Pisa-Spörri, 1891). Nei frequenti richiami del testo al mio libro lo citerò semplicemente con: *Lezioni.*

(**) *Lezioni*, Cap. IX.

(***) Un altro caso assai ovvio, che conviene però notare fin d'ora, si ottiene assumendo per S_0 una superficie a curvatura costante e considerando la congruenza delle sue normali; in ogni superficie S parallela alla S_0 si ha così evidentemente una soluzione del problema $[A]$.

nella configurazione iniziale, riuniti nel fuoco F. Deformando comunque il paraboloide S_0, il luogo degli estremi M dei segmenti, trasportati da S_0 nelle sue flessioni, sarà sempre una superficie d'area minima ortogonale ai raggi $M_0 M$. Una seconda superficie d'area minima $\bar{S}$ si ottiene, ogni volta, come luogo del punto $\bar{M}$ simmetrico di M rispetto al piano tangente in M_0 alla S_0 e le normali della $\bar{S}$ sono i raggi $M_0 \bar{M}$ riflessi dei primitivi sopra S_0, che costituiscono una seconda congruenza normale legata invariabilmente alla S_0 nelle sue flessioni.

Teorema II. *La superficie S_0 sia un ellissoide allungato di rotazione, ovvero un iperboloide di rotazione a due falde, di asse principale (maggiore o trasverso) di lunghezza $= 2R$ e i raggi $M_0 M$ si dirigano verso l'uno o l'altro dei due fuochi, nel quale si trovino inizialmente riuniti gli estremi M. Deformando comunque la quadrica S_0, il luogo degli estremi M è sempre una superficie a curvatura media costante $= \frac{1}{R}$, ortogonale ai raggi.*

Notiamo che, secondo un noto teorema di Bonnet (*), ogni superficie a curvatura media costante $= \frac{1}{R}$ ne ammette una parallela, alla distanza R, di curvatura costante positiva $= \frac{1}{R^2}$, sicchè ad ogni deformata della quadrica di rotazione si collegano due superficie applicabili sulla sfera di raggio $= R$.

Per meglio ordinare le diverse ricerche contenute nella presente Memoria, ho adottato una divisione per capitoli. Nel Capitolo I, completando le ricerche delle quali nelle mie Note citate dei *Rendiconti* dei Lincei ho dato un rapido riassunto, tratto il problema fondamentale [A] pel caso in cui la superficie S, ortogonale ai raggi della congruenza che si deforma, debba restare sempre ad area minima, ovvero a curvatura costante. Nel caso che S sia una superficie minima, ovvero quando la sua curvatura è costante positiva, dimostro che non esistono altre soluzioni oltre quelle che i teoremi I e II di Guichard ci fanno conoscere, quando naturalmente si faccia astrazione dalle soluzioni che il teorema di Weingarten ci fornisce nelle evolute S_0 delle superficie d'area minima o delle superficie applicabili sulla sfera. Ma se facciamo la medesima ricerca supponendo che la S resti costantemente superficie pseudosferica di dato raggio, troviamo che (trascurando al solito le soluzioni fornite dal teorema di Weingarten nelle superficie non rigate ap-

(*) *Lezioni*, pag. 447.

plicabili sul catenoide) esistono tre casi essenzialmente distinti. La superficie S_0 risulta allora applicabile sopra una superficie di rotazione, la cui curva meridiana può offrire le tre forme seguenti: 1.° la curva logaritmica, 2.° la catenaria accorciata, 3.° la sinusoide iperbolica.

In tutti i casi i raggi della congruenza, che accompagna nelle sue flessioni la superficie S_0, sono normali ai paralleli ed i loro raggi riflessi sopra S_0 soddisfano egualmente alle condizioni imposte, talchè insieme ad una superficie S ad area minima, o a curvatura costante, se ne ottiene sempre una seconda $\overline{S}$ normale ai raggi riflessi, due punti corrispondenti M, $\overline{M}$ di S, $\overline{S}$ giacendo simmetricamente rispetto al piano tangente nel punto corrispondente M_0 della superficie riflettente S_0.

Il Capitolo II tratta delle proprietà della corrispondenza che viene, dalla costruzione stessa, a stabilirsi fra i punti di S_0 e di S ovvero fra quelli di S, $\overline{S}$, proprietà essenziali a conoscersi per venire poi all'argomento principale e più importante, alla teoria delle nuove trasformazioni che ne derivano per le superficie a curvatura costante. Ogni volta la ricerca della proprietà in considerazione viene condotta in guisa da trovare nello stesso tempo tutti gli altri casi in cui essa si verifica, il che conduce a risultati per sè notevoli.

Nel Capitolo III, che stabilisce l'esistenza delle nuove trasformazioni delle superficie a curvatura costante, si parte dall'osservazione, già fatta sopra, che ad ogni deformazione della superficie fondamentale di rotazione S_0 si coordinano *due* superficie a curvatura costante (*) S, $\overline{S}$, l'una normale ai raggi primitivi, l'altra ai loro riflessi, essendo S_0 la superficie riflettente. Importava anzi tutto risolvere la questione seguente, ove si tratta, in certo modo, della *inversione* dei teoremi di GUICHARD:

Data una superficie S a curvatura costante positiva o negativa, può essa sempre considerarsi come derivata da una superficie S_0 applicabile sopra una delle nostre superficie tipiche di rotazione in guisa che le normali alla S costituiscano una delle due congruenze collegate, secondo i teoremi di GUICHARD, *alle deformazioni di S_0?*

(*) Qui abbandoniamo affatto il caso del paraboloide di rotazione e delle superficie minime. Del resto anche in questo caso si trovano risultati affatto analoghi e si giunge ad una trasformazione delle superficie d'area minima che si collega alle ricerche esposte dal sig. THYBAUT negli *Annales de l'École Normale* (IIIème série, tom. XIV, 1897, pag. 45). Ma l'includere le relative ricerche nel presente lavoro mi avrebbe troppo allontanato dal soggetto principale. Di esse tratterò in una Nota a parte.

Se si pensa che la totalità delle flessioni della superficie fondamentale di rotazione dipende da due funzioni arbitrarie, appunto come la totalità delle superficie di data curvatura costante, facilmente si prevede che alla domanda sarà da rispondersi affermativamente. Ma la ricerca effettiva, constatando la verità della previsione, dimostra di più, ciò che non era affatto prevedibile *a priori*, che ogni data superficie S a curvatura costante deriva *in* ∞^2 *modi diversi* da superficie S_0 applicabili sulla fondamentale di rotazione; per determinare queste ∞^2 configurazioni della S_0 si ha da integrare un sistema di equazioni ai differenziali totali.

D'altronde se per ciascuna delle ∞^2 forme di S_0 immaginiamo che i raggi normali alla S si riflettano sulla S_0, fra le superficie normali ai raggi riflessi ve ne sarà una determinata $\overline{S}$ (simmetrica di S rispetto a S_0) colla medesima curvatura costante di S. Se si osserva poi che già nella forma della superficie fondamentale di rotazione entra *una* costante arbitraria, se ne conclude: *Da ogni superficie nota* S *a curvatura costante derivano, colla indicata costruzione,* ∞^3 *nuove superficie* $\overline{S}$ *colla medesima curvatura costante.* Per tal modo si giunge ad una teoria di trasformazioni *sempre reali* delle superficie a curvatura costante *positiva, o negativa.*

Nel Cap. IV, colla introduzione di convenienti funzioni ausiliarie suggerita dalla teoria dei sistemi ciclici, si cangiano le equazioni che definiscono le nostre trasformazioni in un sistema differenziale *lineare ed omogeneo*, sul quale più speditamente si fanno le verifiche relative alla illimitata integrabilità del sistema e tutte le altre che si riferiscono alle superficie a curvatura costante trasformate. Se ne deduce in particolare la notevole proprietà delle nuove trasformazioni di essere permutabili colla trasformazione involutoria di Hazzidakis. Presentate le formole di trasformazione sotto il nuovo aspetto, facilmente si è condotti ad una classe di superficie, che hanno a comune con quelle a curvatura costante l'immagine sferica delle linee di curvatura, e i cui raggi principali di curvatura r_1, r_2 sono legati alla distanza p dell'origine dal piano tangente ed al quadrato $2q$ della distanza dell'origine stessa dal punto di contatto dall'equazione:

$$k\, r_1\, r_2 - p\,(r_1 + r_2) + 2\,q = 0, \qquad (k \text{ costante}),$$

che appartiene al tipo di quelle considerate da Weingarten nelle sue ultime ricerche sull'applicabilità. Sono queste le superficie a cui un ulteriore sviluppo delle anteriori ricerche di Guichard, già sopra menzionate, avrebbe condotto.

Il Cap. V tratta delle relazioni che intercedono fra le nuove trasformazioni delle superficie a curvatura costante e quelle già prima note nella trasformazione complementare e di Bäcklund (*).

Si comincia dal dimostrare che per le superficie pseudosferiche le trasformazioni che si ottengono, secondo il Cap. III, in relazione colle superficie applicabili sulla logaritmica di rotazione e sul catenoide accorciato si riducono alle antiche, potendosi comporre nel primo caso con due trasformazioni complementari, nel secondo con due successive trasformazioni reali di Bäcklund.

Nel terzo caso, corrispondente alle flessioni del sinusoide iperbolico, possiamo bensì risolvere ancora la nostra trasformazione *reale* in due trasformazioni di Bäcklund, ma queste componenti elementari sono necessariamente immaginarie (coniugate). Passando poi al caso delle superficie a curvatura costante positiva, caso che offre il maggiore interesse come quello che era rimasto fino a qui inaccessibile alle trasformazioni *reali*, vediamo che ha sempre luogo l'ultima circostanza cioè: *la trasformazione risulta dal comporre due trasformazioni di* Bäcklund *(puramente) immaginarie coniugate e partendo da una superficie a curvatura costante positiva reale si perviene ad una superficie finale reale della medesima specie, passando per una superficie ausiliaria immaginaria.*

Ci è ora relativamente facile il dare le formole effettive per l'anzidetta composizione, con che si perviene in modo più rapido al risultato finale. Non bisogna per altro dimenticare che la nuova via più breve fu ritrovata soltanto dopo che le conseguenze dei teoremi di Guichard ci hanno fatto certi dell'esistenza delle nuove trasformazioni reali e che per essa non riconosciamo, in modo reale, tutte le interessanti circostanze geometriche che accompagnano la trasformazione. Mi piace qui ripetere ciò che ebbi già ad osservare nelle Note preliminari citate (**) e cioè che: *le nuove trasformazioni sono di natura più complicata delle antiche e si risolvono in tali trasformazioni più semplici solo ricorrendo ad opportune componenti immaginarie.* Ed in questa

(*) Quasi contemporaneamente a queste mie ricerche sull'argomento, e dopo che le mie due prime Note sulle nuove trasformazioni erano già pubblicate, comparvero nei *Comptes Rendus* de l'Académie (Séances du 27 mars, 4, 17 et 24 avril 1899) alcune Note del sig. Darboux, ove l'illustre geometra dimostra i teoremi di Guichard ed altri più generali ed, occupandosi delle trasformazioni delle superficie a curvatura costante, giunge per altra via a risultati equivalenti a quelli del presente Cap. V.

(**) Vedi specialmente la Nota del 23 aprile.

circostanza appunto che le antiche trasformazioni soltanto in certo modo colla duplicazione dànno luogo alle nuove reali è da ricercarsi, come parmi, la ragione per cui queste ultime trasformazioni sono rimaste così a lungo nascoste.

Dalla accennata composizione derivano poi, col sussidio del teorema di permutabilità, le conseguenze medesime che per le superficie pseudosferiche ho ampiamente svolto nel Cap. XVII delle *Lezioni*, in particolare questa principale: *Se di una superficie S a curvatura costante positiva o negativa si sanno determinare tutte le trasformate di* Bäcklund, *l'applicazione successiva ed illimitata delle nuove trasformazioni reali alla superficie S ed alle sue successive trasformate richiederà soltanto calcoli algebrici e di derivazione.*

In fine nel Cap. VI dimostro che le nuove trasformazioni possono applicarsi, oltre che a superficie a curvatura costante isolate, anche a serie ∞^1 di tali superficie appartenenti a sistemi tripli ortogonali (sistemi di Weingarten). Da ogni tale sistema si ottengono così ∞^3 nuovi sistemi della medesima specie.

Per tal modo, dopo un lungo periodo di tempo, vengono completate, anche pei sistemi di Weingarten a curvatura positiva, le ricerche contenute nella mia Memoria del 1885 (*).

Chiuderò questo riassunto dei principali risultati stabiliti nella presente Memoria coll'annunziare che teoremi perfettamente simili a quelli di Guichard sussistono, insieme a tutte le loro conseguenze, anche nella geometria degli spazî a curvatura costante positiva o negativa. Mi propongo di esporre queste nuove ricerche in una seconda Memoria, che tratterà appunto delle superficie ad area minima e delle superficie a curvatura costante nella geometria ellittica e nella geometria iperbolica.

(*) Questi *Annali*, tom. XIII, serie 2.ª

CAPITOLO I.

Della deformazione delle congruenze.

§ 1.

Notazioni e formole fondamentali.

Consideriamo una congruenza C di raggi ciascuno dei quali emani da un punto M_0 della superficie S_0 di partenza ed immaginiamo la congruenza invariabilmente legata alla S_0, supposta flessibile ed inestendibile. Se flettiamo comunque la S_0, che seco trascini il sistema di raggi, diremo anche talora, per abbreviare, che deformiamo la congruenza C.

A fondamento delle nostre ricerche poniamo le considerazioni e notazioni seguenti. Scegliamo sulla superficie S_0 un sistema curvilineo coordinato (u, v), assumendo a linee $u = \text{cost.}$ quelle linee di S_0 che sono normali ai raggi della congruenza C (*), indi a linee $v = \text{cost.}$ le loro traiettorie ortogonali. La S_0, in una sua speciale configurazione, sarà perfettamente definita dalle sue due forme quadratiche fondamentali (**), che indicheremo rispettivamente con:

$$d s_0^2 = E_0 \, d u^2 + G_0 \, d v^2$$

$$D_0 \, d u^2 + 2 D'_0 \, d u \, d v + D''_0 \, d v^2.$$

Sappiamo che i coefficienti di queste forme sono legati fra loro unicamente dalla equazione di Gauss:

$$\frac{D_0 D''_0 - D'^2_0}{E_0 G_0} = K_0 , \tag{I}$$

(*) Tali linee cessano di essere determinate nel solo caso, privo d'interesse, che la congruenza C sia quella delle normali di S_0. Valgono del resto anche allora tutti gli sviluppi del testo, ove soltanto resterà arbitrario il sistema coordinato (ortogonale).

(**) *Lezioni*, Cap. IV.

indicando con K_0 la curvatura di S_0, e dalle due equazioni di CODAZZI:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D'_0}{\sqrt{E_0}}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D_0}{\sqrt{E_0}}\right)+\frac{1}{\sqrt{E_0 G_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}D'_0+\frac{1}{G_0}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}D''_0=0\\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D'_0}{\sqrt{G_0}}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D''_0}{\sqrt{G_0}}\right)+\frac{1}{\sqrt{E_0 G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}D'_0+\frac{1}{E_0}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}D_0=0.
\end{aligned}\right\}\qquad\text{(II)}$$

Indichiamo poi con x_0, y_0, z_0 le coordinate cartesiane ortogonali di un punto $M_0\equiv(u,\ v)$ mobile sopra S_0 e con:

$$\begin{matrix} X_1, & Y_1, & Z_1\\ X_2, & Y_2, & Z_2\\ X_3, & Y_3, & Z_3\end{matrix}$$

rispettivamente i coseni di direzione della terna ortogonale uscente da M_0 formata: 1.° dalla tangente alla linea $v=$ cost., 2.° dalla tangente alla linea $u=$ cost., 3.° dalla normale alla superficie. Avremo allora le formole fondamentali seguenti:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial x_0}{\partial u}=\sqrt{E_0}\,X_1, \qquad \frac{\partial x_0}{\partial v}=\sqrt{G_0}\,X_2\\
&\frac{\partial X_1}{\partial u}=-\frac{1}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}X_2+\frac{D_0}{\sqrt{E_0}}X_3, \qquad \frac{\partial X_1}{\partial v}=\frac{1}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}X_2+\frac{D'_0}{\sqrt{E_0}}X_3\\
&\frac{\partial X_2}{\partial u}=\frac{1}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}X_1+\frac{D'_0}{\sqrt{G_0}}X_3, \qquad \frac{\partial X_2}{\partial v}=-\frac{1}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}X_1+\frac{D''_0}{\sqrt{G_0}}X_3\\
&\frac{\partial X_3}{\partial u}=-\frac{D_0}{\sqrt{E_0}}X_1-\frac{D'_0}{\sqrt{G_0}}X_2, \qquad \frac{\partial X_3}{\partial v}=-\frac{D'_0}{\sqrt{E_0}}X_1-\frac{D''_0}{\sqrt{G_0}}X_2,
\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

e le analoghe che se ne deducono permutando circolarmente le lettere $(x,\ y,\ z)$ $(X_i,\ Y_i,\ Z_i)$ $i=1,\ 2,\ 3$. Sia ora:

$$\sigma=\sigma(u,\ v),$$

l'angolo d'inclinazione del raggio della congruenza C, emanante dal punto $(u,\ v)$ di S_0, sulla superficie cioè sulla linea $v=$ cost. Indicando con X, Y, Z i coseni di direzione del raggio, potremo porre:

$$\left.\begin{aligned}
&X=\cos\sigma\,X_1+\operatorname{sen}\sigma\,X_3, \quad Y=\cos\sigma\,Y_1+\operatorname{sen}\sigma\,Y_3,\\
&Z=\cos\sigma\,Z_1+\operatorname{sen}\sigma\,Z_3.
\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

Da queste formole derivando, coll'aver riguardo alle (1), deduciamo:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial u} &= -\operatorname{sen}\sigma\left(\frac{D_0}{\sqrt{E_0}}+\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)X_1-\left(\operatorname{sen}\sigma\,\frac{D'_0}{\sqrt{G_0}}+\frac{\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\right)X_2+\\ &\qquad+\cos\sigma\left(\frac{D_0}{\sqrt{E_0}}+\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)X_3\\ \frac{\partial X}{\partial v} &= -\operatorname{sen}\sigma\left(\frac{D'_0}{\sqrt{E_0}}+\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right)X_1+\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}-\operatorname{sen}\sigma\,\frac{D''_0}{\sqrt{G_0}}\right)X_2+\\ &\qquad+\cos\sigma\left(\frac{D'_0}{\sqrt{E_0}}+\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right)X_3.\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

Introduciamo ora per la nostra congruenza C le notazioni di KUMMER (*):

$$\left.\begin{aligned}&E'=\Sigma\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2,\quad F'=\Sigma\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v},\quad G'=\Sigma\left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2\\ &e=\Sigma\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x_0}{\partial u},\; f=\Sigma\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x_0}{\partial v},\; f'=\Sigma\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x_0}{\partial u},\; g=\Sigma\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x_0}{\partial v},\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

e troveremo per questi coefficienti fondamentali, dalle (3), le espressioni seguenti:

$$\left.\begin{aligned}E' &= \left(\frac{D_0}{\sqrt{E_0}}+\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\operatorname{sen}\sigma\,D'_0}{\sqrt{G_0}}+\frac{\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\right)^2\\ F' &= \left(\frac{D_0}{\sqrt{E_0}}+\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)\left(\frac{D'_0}{\sqrt{E_0}}+\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right)-\left(\frac{\operatorname{sen}\sigma\,D'_0}{\sqrt{G_0}}+\right.\\ &\qquad\left.+\frac{\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\right)\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}-\frac{\operatorname{sen}\sigma\,D''_0}{\sqrt{G_0}}\right)\\ G' &= \left(\frac{D'_0}{\sqrt{E_0}}+\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}-\frac{\operatorname{sen}\sigma\,D''_0}{\sqrt{G_0}}\right)^2.\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned}e &= -\sqrt{E_0}\operatorname{sen}\sigma\left(\frac{D_0}{\sqrt{E_0}}+\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right),\quad f=-\sqrt{G_0}\left(\operatorname{sen}\sigma\,\frac{D'_0}{\sqrt{G_0}}+\frac{\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\right)\\ f' &= -\sqrt{E_0}\operatorname{sen}\sigma\left(\frac{D'_0}{\sqrt{E_0}}+\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right),\quad g=\sqrt{G_0}\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}-\frac{\operatorname{sen}\sigma\,D''_0}{\sqrt{G_0}}\right).\end{aligned}\right\}\tag{5*}$$

(*) *Lezioni*, Cap. X.

Per il seguito delle nostre ricerche ci conviene calcolare i valori delle quantità fondamentali:

$$E' G' - F'^2, \quad g E' - (f + f') F' + e G', \quad e g - f f'.$$

Ponendo per abbreviare:

$$\left.\begin{aligned} M = &\left(\frac{D_0}{\sqrt{E_0}} + \frac{\partial \sigma}{\partial u}\right)\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u} - \frac{\operatorname{sen}\sigma D''_0}{\sqrt{G_0}}\right) + \\ &+ \left(\frac{D'_0}{\sqrt{E_0}} + \frac{\partial \sigma}{\partial v}\right)\left(\frac{\operatorname{sen}\sigma D'_0}{\sqrt{G_0}} + \frac{\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial v}\right), \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

troviamo:

$$\left.\begin{aligned} &E' G' - F'^2 = M^2, \quad e g - f f' = - \operatorname{sen}\sigma \sqrt{E_0 G_0}\,.\,M, \\ &g E' - (f + f') F' + e G' = \left\{\sqrt{G_0}\left(\frac{D_0}{\sqrt{E_0}} + \frac{\partial \sigma}{\partial u}\right) - \right. \\ &\left. - \operatorname{sen}\sigma \sqrt{E_0}\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} - \frac{\operatorname{sen}\sigma D''_0}{\sqrt{G_0}}\right)\right\}\cdot M. \end{aligned}\right\} \tag{6*}$$

§ 2.

Significato dell'annullarsi del fattore M.

Le tre quantità fondamentali (6*) contengono tutte il fattore M e per semplificare i calcoli dei §§ seguenti, importa anzi tutto che esaminiamo se può darsi il caso che questo fattore M si mantenga costantemente nullo *in tutte le deformazioni della congruenza C*, ossia se può darsi che sia sempre:

$$E' G' - F'^2 = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial u} \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial v} \end{matrix} \right\|^2 = 0;$$

questa ricerca conduce, come si vedrà, a risultati per sè interessanti.

Nella nostra ipotesi X, Y, Z saranno funzioni l'uno dell'altro, sicchè la questione proposta equivale geometricamente alla seguente: *Può accadere che in tutte le deformazioni della congruenza C uno dei suoi sistemi di sviluppabili consti sempre di superficie cilindriche?*

Dovremo avere per tutte le flessioni di S_0:

$$\left(\frac{D_0}{\sqrt{E_0}}+\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}-\frac{\operatorname{sen}\sigma\, D''_0}{\sqrt{G_0}}\right)+$$
$$+\left(\frac{D'_0}{\sqrt{E_0}}+\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right)\left(\frac{\operatorname{sen}\sigma\, D'_0}{\sqrt{G_0}}+\frac{\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\right)=0;$$

se moltiplichiamo questa equazione per D_0 e ne eliminiamo D''_0 ricorrendo alla equazione di Gauss:

$$D_0\, D''_0 = D'^2_0 + K_0\, E_0\, G_0,$$

la convertiamo nella seguente relazione fra D_0, D'_0:

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{D_0}{\sqrt{E_0}}+\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)\left[\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}D_0-\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\sqrt{G_0}}(D'^2_0+K_0\,E_0\,G_0)\right]+\\&+D_0\left(\frac{D'_0}{\sqrt{E_0}}+\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right)\left(\frac{\operatorname{sen}\sigma\, D'_0}{\sqrt{G_0}}+\frac{\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\right)=0.\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

Ora noi facciamo qui l'osservazione fondamentale anche per il seguito che: *dovendo questa relazione in termini finiti fra D_0, D'_0 sussistere (per ipotesi) in tutte le flessioni di S_0 sarà necessariamente una identità.* Altrimenti, associandovi l'equazione (I) di Gauss, potremo esprimere p. e. D_0, D''_0 in funzione di D_0, u, v e sostituendo nelle equazioni (II) di Codazzi, se queste risulteranno indipendenti, ne dedurremo $\frac{\partial D_0}{\partial u}$, $\frac{\partial D_0}{\partial v}$ espresse ciascuna per D_0, u, v, ciò che lascerebbe sussistere *al massimo* nelle flessioni di S_0 una costante arbitraria. E, pur supponendo il caso più sfavorevole, avremmo sempre *una* equazione a derivate parziali del 1.° ordine per D_0, risultato assurdo perchè la *totalità* delle flessioni di S_0 dipende invece da un'equazione del 2.° ordine.

Dovendo dunque la (7) risultare *un'identità* in D_0, D_0', osserveremo in primo luogo che se fosse $\sigma=\frac{\pi}{2}$ essa si ridurrebbe a:

$$-\frac{D_0}{\sqrt{E_0\, G_0}}(D'^2_0+K_0\,E_0\,G_0)+\frac{D_0\,D'^2_0}{\sqrt{E_0\,G_0}}=0,$$

onde $K_0=0$. Ciò dà la soluzione evidente del problema fornita dalla congruenza delle normali di una sviluppabile. Supposto ora $\sigma \neq \frac{\pi}{2}$, ed eguagliando a zero nella (7) i coefficienti di D_0^2, D'^2_0, otteniamo:

$$\frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial u} = 0, \tag{7*}$$

perchè anche per $\sigma = 0$ la seconda di queste equazioni sussiste. Per le (7*) la (7) diventa, sopprimendo il fattore D_0:

$$\left(\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial \sigma}{\partial v} + \frac{\cos\sigma}{\sqrt{E_0 G_0}}\frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial v}\right) D'_0 + \frac{\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial v}\frac{\partial \sigma}{\partial v} - K_0 \operatorname{sen}\sigma \sqrt{E_0 G_0} = 0,$$

e si scinde nelle due:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}\sigma \frac{\partial \sigma}{\partial v} + \frac{\cos\sigma}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial v} = 0 \\ \frac{\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial v}\frac{\partial \sigma}{\partial v} - K_0 \operatorname{sen}\sigma \sqrt{E_0 G_0} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Ora suddistinguiamo due casi secondo che l'angolo σ, che è certamente funzione della sola v, è costante o variabile.

1.° caso: σ costante. Allora le (7*), (8) ci dànno:

$$\frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial v} = 0,$$

e cangiando i parametri u, v possiamo fare senz'altro:

$$E_0 = 1, \quad G_0 = 1,$$

onde

$$d s_0^2 = d u^2 + d v^2.$$

La superficie S_0 è in tal caso una sviluppabile e le linee (u, v), distendendo S_0 sul piano, si convertono in un doppio sistema di rette ortogonali. Viceversa se prendiamo una qualunque sviluppabile S_0 e tracciamo su di essa un sistema di geodetiche parallele, indi da ogni punto di S_0 facciamo uscire un raggio normale alla geodetica del sistema che vi passa e inclinato di un angolo costante σ qualsiasi sulla superficie, avremo sempre una soluzione del problema, essendo verificate tutte le equazioni precedenti. È questo del resto geometricamente un caso assai ovvio ed anzi vediamo che i raggi della congruenza uscenti dai punti di una medesima generatrice di S_0 riescono fra loro paralleli. Notiamo che le equazioni differenziali separate delle sviluppabili della congruenza sono nel caso attuale:

$$D_0\, d\, u + D'_0\, d\, v = 0$$

$$D_0\, d\, v - D'_0 \operatorname{sen}^2 \sigma\, d\, u = 0;$$

le prime sviluppabili segano appunto S_0 lungo le generatrici. Osserviamo ancora che risultando qui $f = f'$, la congruenza è normale (*) e le superficie ortogonali ai raggi sono esse stesse sviluppabili. Così abbiamo nello stesso tempo una semplice soluzione del problema $[A]$ della prefazione.

2.° caso: σ variabile. Possiamo prendere senza alterare la generalità $\sigma = v$ e la prima delle (8) ci dà allora:

$$\frac{\partial \log \sqrt{E_0}}{\partial v} = -\, t\, g\, v;$$

integrando, col disporre convenientemente del parametro u, possiamo porre:

$$\sqrt{E_0} = \cos v.$$

L'ultima delle (8) diventa poi:

$$K_0 = -\frac{1}{G_0};$$

ma essendo G_0 funzione della sola v, per la nota espressione della curvatura si ha:

$$K_0 = \frac{1}{\cos v \sqrt{G_0}} \frac{d}{d\, v}\left[\frac{\operatorname{sen} v}{\sqrt{G_0}}\right],$$

onde la precedente diviene:

$$\frac{d \log \sqrt{G_0}}{d\, v} = \frac{2 \cos v}{\operatorname{sen} v},$$

e integrando:

$$\sqrt{G_0} = k \operatorname{sen}^2 v,$$

essendo k una costante. Sostituendo alla S_0 una superficie simile, possiamo fare $k = 1$ e l'elemento lineare di S_0 diventa:

$$d\, s_0^2 = \cos^2 v\, d\, u^2 + \operatorname{sen}^4 v\, d\, v^2. \tag{9}$$

È questa una ben nota forma di elemento lineare, appartenente a quella classe

(*) Anche geometricamente la cosa è evidente solo che si assuma per configurazione iniziale di S_0 quella di una superficie piana.

di superficie applicabili sopra una medesima superficie di rotazione che fu una delle prime completamente determinate da WEINGARTEN, come evolute di quelle superficie W i cui raggi principali di curvatura sono legati dalla relazione:

$$2(r_2 - r_1) = \text{sen}\,[2(r_2 + r_1)].\ (*)$$

Viceversa dal nostro calcolo risulta: *se per i punti della superficie S_0 di rotazione d'elemento lineare* (9) *si conducono le rette normali ai meridiani ed inclinate sui paralleli dell'angolo* $v = \text{arc}\cos r$, *in qualunque flessione della S_0 i raggi delle congruenze si disporranno in ∞^1 serie di raggi paralleli.* Si aggiunga che, l'equazione differenziale delle sviluppabili cilindriche della congruenza essendo:

$$D_0\,d\,u + (D'_0 - \cos v)\,d\,v = 0,$$

che combina con quella delle assintotiche di un sistema, si ha l'ulteriore proprietà: *in tutte le flessioni di S_0 le linee lungo le quali i raggi della congruenza risultano fra loro paralleli sono le assintotiche di un sistema.*

Dalla nostra analisi risulta ancora che le uniche soluzioni del problema proposto al principio del paragrafo sono offerte dalle superficie sviluppabili e dalle evolute dalle superficie W corrispondenti alla relazione:

$$k(r_2 - r_1) = \text{sen}\,[k(r_2 + r_1)].$$

L'un caso poi si distingue dall'altro per questo che soltanto nel primo la congruenza è normale.

§ 3.

TRATTAZIONE DEL PROBLEMA *[A]* PEL CASO DI UNA SUPERFICIE S D'AREA MINIMA.

Veniamo a trattare il problema *[A]*, supponendo che la congruenza C che si deforma sia una congruenza normale ed una delle superficie S ortogonali ai raggi resti *in tutte le flessioni della superficie di partenza S_0 superficie d'area minima.*

(*) *Lezioni*, pag. 241.

In primo luogo la condizione che la congruenza C sia normale si traduce nella nota relazione (*):

$$f = f',$$

ovvero per le (5*) nell'altra:

$$\frac{\partial}{\partial v}(\sqrt{E_0}\cos\sigma) = 0. \tag{10}$$

Le coordinate x, y, z del punto M, ove il raggio uscente dal punto $M_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ di S_0 incontra normalmente la S sono date dalle formole:

$$x = x_0 + TX, \quad y = y_0 + TY, \quad z = z_0 + TZ, \tag{11}$$

ove T indica una *determinata* funzione della sola u che soddisfa la condizione:

$$\frac{dT}{du} = -\sqrt{E_0}\cos\sigma \text{ (**)}. \tag{12}$$

Per la S indichiamo ora colle solite notazioni:

$$E, \quad F, \quad G$$
$$D, \quad D' \quad D'',$$

i coefficienti della prima e seconda forma fondamentale. Poichè dalle (11) derivando segue:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial x_0}{\partial u} + T\frac{\partial X}{\partial u} - \sqrt{E_0}\cos\sigma X, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial x_0}{\partial v} + T\frac{\partial X}{\partial v},$$

colle analoghe per y, z, ne deduciamo le formole:

$$\left.\begin{aligned} -D = TE' + e, \quad -D' = TF' + f, \quad -D'' = TG' + g \\ E = T^2E' + 2Te + E_0\,\text{sen}^2\sigma \quad F = T^2F' + 2Tf, \\ G = T^2G' + 2Tg + G_0. \end{aligned}\right\} \tag{12*}$$

La somma $r_1 + r_2$ dei raggi principali di curvatura della S è data (***) da:

$$r_1 + r_2 = \frac{2F'D' - E'D'' - G'D}{E'G' - F'^2},$$

(*) *Lezioni*, pag. 256.
(**) *Lezioni*, ibid.
(***) *Lezioni*, pag. 121.

e però la S sarà ad area minima se si avrà:

$$2F'D' - E'D'' - G'D = 2T(E'G' - F'^2) + eG' - 2fF' + gE' = 0. \quad (13)$$

Sostituiamo in questa i valori (6*) e sopprimiamo il fattore M comune ai due termini. Ciò invero è lecito poichè, se fosse $M = 0$ *in tutte le flessioni* della congruenza normale, saremmo nel 1.° caso del paragrafo precedente, ove non si ha una soluzione dell'attuale problema, le superficie ortogonali ai raggi essendo allora sviluppabili. La (13), liberata così dal fattore M, diventa:

$$2T\left\{\left(\frac{D_0}{\sqrt{E_0}} + \frac{\partial \sigma}{\partial u}\right)\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u} - \operatorname{sen}\sigma\frac{D''_0}{\sqrt{G_0}}\right) + \left(\frac{D'_0}{\sqrt{E_0}} + \frac{\partial\sigma}{\partial v}\right)\left(\frac{\operatorname{sen}\sigma\, D'_0}{\sqrt{G_0}} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\right)\right\} + \sqrt{G_0}\left(\frac{D_0}{\sqrt{E_0}} + \frac{\partial\sigma}{\partial u}\right) - \operatorname{sen}\sigma\sqrt{E_0}\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u} - \operatorname{sen}\sigma\frac{D''_0}{\sqrt{G_0}}\right) = 0.$$

e deve, per ipotesi, sussistere in tutte le flessioni di S_0 (*). Procedendo come al paragrafo precedente, moltiplichiamo questa equazione per D_0 e sostituiamo poi $D'^2_0 + K_0 E_0 G_0$ in luogo di $D_0 D''_0$. Otteniamo per tal modo l'equazione:

$$\left.\begin{array}{l}
2T\left\{\left(\dfrac{D_0}{\sqrt{E_0}} + \dfrac{\partial\sigma}{\partial u}\right)\cdot\left[\dfrac{D_0\cos\sigma}{\sqrt{E_0}}\dfrac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u} - \dfrac{\operatorname{sen}\sigma}{\sqrt{G_0}}(D'^2_0 + K_0 E_0 G_0)\right] + \right.\\
\left. + D_0\left(\dfrac{D'_0}{\sqrt{E_0}} + \dfrac{\partial\sigma}{\partial v}\right)\left(\dfrac{\operatorname{sen}\sigma\, D'_0}{\sqrt{G_0}} + \dfrac{\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\dfrac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\right)\right\} + \sqrt{G_0}\, D_0\left(\dfrac{D_0}{\sqrt{E_0}} + \dfrac{\partial\sigma}{\partial u}\right) - \\
- \operatorname{sen}\sigma\sqrt{E_0}\left[\dfrac{D_0\cos\sigma}{\sqrt{E_0}}\dfrac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u} - \dfrac{\operatorname{sen}\sigma}{\sqrt{G_0}}(D'^2_0 + K_0 E_0 G_0)\right] = 0,
\end{array}\right\} \quad (14)$$

che dovrà, per l'osservazione fondamentale § 2, risultare identica in D_0, D'_0. Eguagliando a zero il coefficiente del prodotto $D_0 D'_0$, otteniamo intanto l'equazione:

$$\cos\sigma\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v} + \operatorname{sen}\sigma\frac{\partial\sigma}{\partial v} = 0,$$

che associata alla (10):

$$\cos\sigma\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v} - \operatorname{sen}\sigma\frac{\partial\sigma}{\partial v} = 0,$$

(*) Si potrebbe forse pensare alla possibilità che per una parte soltanto delle flessioni fosse verificata l'equazione del testo, annullandosi per l'altra parte il fattore M; ma allora le considerazioni stesse del § 2 dimostrano che l'una o l'altra equazione deve riuscire identica in D_0, D'_0, eliminato che sia D''_0 mediante l'equazione di GAUSS.

ci dimostra che si dovrà avere simultaneamente:

$$\frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial v} = 0, \tag{14*}$$

a meno che non sia $\sigma = \frac{\pi}{2}$. Ma quest'ultimo caso si esclude subito perchè allora il coefficiente di D_0^2 nella (14) sarebbe $\frac{\sqrt{G_0}}{\sqrt{E_0}}$, nè potrebbe annullarsi (*). Sussistono dunque le (14*), onde cangiando il parametro u possiamo fare $E_0 = 1$ e adottando la notazione degli accenti per le derivate delle funzioni della sola u, scriveremo la (14) così:

$$2\,T \left\{ D_0^2 \cos\sigma \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u} + D_0 \left(\sigma' \cos\sigma \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u} - \operatorname{sen}\sigma\, K_0 \sqrt{G_0} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\sigma' \operatorname{sen}\sigma}{\sqrt{G_0}} (D_0'^2 + K_0\, G_0) \right\} + \sqrt{G_0}\, D_0^2 + D_0 \left(\sigma' \sqrt{G_0} - \operatorname{sen}\sigma \cos\sigma \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u} \right) +$$

$$+ \frac{\operatorname{sen}^2\sigma}{\sqrt{G_0}} (D_0'^2 + K_0\, G_0) = 0;$$

questa si scinde nelle tre separate:

$$\left.\begin{aligned} 2\,T \cos\sigma \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u} + \sqrt{G_0} = 0 \\ 2\,T \left(\sigma' \cos\sigma \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u} - \operatorname{sen}\sigma\, K_0 \sqrt{G_0} \right) + \sigma' \sqrt{G_0} - \operatorname{sen}\sigma \cos\sigma \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u} = 0 \\ 2\,T \sigma' \operatorname{sen}\sigma = \operatorname{sen}^2\sigma. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Ora noi qui trascuriamo naturalmente il caso $\sigma = 0$, perchè allora i raggi della congruenza sarebbero tangenti alla S_0 e troveremmo (dalle (15) stesse) la nota soluzione fornita dal teorema di Weingarten nella evoluta del catenoide. Possiamo quindi dividere l'ultima delle (15) per $\operatorname{sen}\sigma$, onde si ha:

$$2\,T \sigma' = \operatorname{sen}\sigma, \tag{16}$$

e le due prime moltiplicate per σ' che è, per la (16) stessa, diverso da zero

(*) Anche geometricamente la cosa è evidente, perchè allora la congruenza sarebbe quella delle normali a S_0 e questa dovrebbe avere in tutte le flessioni i raggi di curvatura legati dalla relazione $r_1 + r_2 = \text{cost.}$, ciò che è assurdo.

diventano:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}\sigma\cos\sigma\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}+\sigma'\sqrt{G_0}=0 \\ \sigma'^2=K_0\operatorname{sen}^2\sigma. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

§ 4.

Il paraboloide di rotazione ed il primo teorema di Guichard.

Integrando la prima delle (17) otteniamo:

$$\sqrt{G_0}=V\cot\sigma,$$

indicando con V una funzione della v e, cangiando il parametro v, potremo fare $V=1$, indi $\sqrt{G_0}=\cot\sigma$. La seconda delle (17) diventa in conseguenza:

$$\sigma'^2\sqrt{G_0}+\frac{d^2\sqrt{G_0}}{d u^2}\operatorname{sen}^2\sigma=0,$$

cioè:

$$\sigma''=3\cot\sigma\,.\,\sigma'^2;$$

questa integrata porge:

$$\sigma'=k\operatorname{sen}^3\sigma, \tag{18}$$

denotando k una costante arbitraria e la (16) ci dà quindi per $2\,T$ il valore:

$$2\,T=\frac{1}{k\operatorname{sen}^2\sigma}\cdot \tag{19}$$

Così la (14) è identicamente soddisfatta e resterà solo da vedere se col valore (19) per T si soddisfa anche la condizione (12):

$$T'+\cos\sigma=0,$$

ciò che si verifica subito aver luogo a causa della (18).

Dalla nostra ricerca risulta che il problema proposto ammette sempre due soluzioni: l'una ci è fornita dall'assumere a superficie di partenza l'evoluta del catenoide e la congruenza è allora quella delle tangenti ai meridiani: l'altra si ottiene prendendo per superficie S_0 di partenza una superficie d'elemento lineare:

$$d\,s_0^2=\frac{d\,\sigma^2}{k^2\operatorname{sen}^6\sigma}+\cot^2\sigma\,d\,v^2,$$

che appartiene, come si vede, ad una superficie di rotazione. Per conoscere questa superficie scriviamo, cangiando v in $\frac{v}{k}$:

$$d s_0^2 = \frac{1}{k^2}\left(\frac{d\sigma^2}{\operatorname{sen}^6\sigma} + \cot^2\sigma \, d v^2\right),$$

e ponendo:

$$r = \frac{1}{k} \cot\sigma,$$

indi:

$$d r = -\frac{d\sigma}{k \operatorname{sen}^2\sigma},$$

avremo:

$$d s_0^2 = (1 + k^2 r^2)\, d r^2 + r^2\, d v^2.$$

Questo è l'elemento lineare del paraboloide di rotazione, la cui parabola meridiana (assumendo per asse z l'asse di rotazione) ha l'equazione:

$$z = \frac{k r^2}{2}.$$

Di più dalla formola:

$$\operatorname{tg}\sigma = \frac{1}{k r} = \frac{d z}{d r}.$$

che combina con quella che dà l'angolo d'inclinazione della tangente alla parabola sull'asse, ovvero sul raggio focale, vediamo che, quando la S_0 è conformata a paraboloide di rotazione, i raggi emanano dal fuoco ovvero sono paralleli all'asse di rotazione. Inoltre la (19) ci dà:

$$T = \frac{1}{2k}(1 + k^2 r^2),$$

ed il secondo membro rappresenta appunto la lunghezza del segmento focale. Così la prima parte del teorema I) di Guichard (prefazione) è completamente dimostrata. Per vedere chiaramente come sussista anche la seconda parte del teorema, facciamo uso delle considerazioni seguenti, che varranno poi anche senza che stiamo a ripeterle, negli altri casi. L'equazione fondamentale (18) resta verificata cangiando σ in $-\sigma$ e, per la (19), il valore di T resta il medesimo. I due sistemi di raggi che corrispondono ai valori opposti di σ sono evidentemente riflessi l'uno dell'altro, la superficie riflettente essendo la S_0; di più le due superficie (minime) S, $\overline{S}$ normali ai due sistemi di raggi date dalle rispettive formole (11):

$$x = x_0 + T(\cos\sigma\, X_1 + \operatorname{sen}\sigma\, X_3)$$

$$y = y_0 + T(\cos\sigma\, Y_1 + \operatorname{sen}\sigma\, Y_3), \quad z = z_0 + T(\cos\sigma\, Z_1 + \operatorname{sen}\sigma\, Z_3)$$

$$\bar{x} = x_0 + T(\cos\sigma\, X_1 - \operatorname{sen}\sigma\, X_3),$$

$$\bar{y} = y_0 + T(\cos\sigma\, Y_1 - \operatorname{sen}\sigma\, Y_3), \quad \bar{z} = z_0 + T(\cos\sigma\, Z_1 - \operatorname{sen}\sigma\, Z_3),$$

sono appunto tali che due loro punti corrispondenti M, $\bar{M}$ giacciono simmetricamente rispetto al piano tangente nel punto corrispondente M_0 alla superficie riflettente S_0, come è reso evidente dalle formole:

$$x - \bar{x} = 2\,T\operatorname{sen}\sigma\, X_3, \quad y - \bar{y} = 2\,T\operatorname{sen}\sigma\, Y_3, \quad z - \bar{z} = 2\,T\operatorname{sen}\sigma\, Z_3$$

$$\frac{1}{2}(x + \bar{x}) = x_0 + T\cos\sigma\, X_1, \quad \frac{1}{2}(y + \bar{y}) = y_0 + T\cos\sigma\, Y_1,$$

$$\frac{1}{2}(z + \bar{z}) = z_0 + T\cos\sigma\, Z_1.$$

Per tal modo non solo abbiamo dimostrato completamente il Teorema *I*) di Guichard, ma abbiamo provato di più che: *le uniche soluzioni del problema fondamentale (A) quando la superficie S debba restare costantemente ad area minima, sono fornite dal paraboloide di* Guichard *e dalla evoluta del catenoide come superficie di partenza; inoltre la congruenza deve avere rispetto a questa superficie rispettivamente la giacitura assegnata dal teorema stesso di* Guichard, *ovvero da quello di* Weingarten.

§ 5.

Trattazione del problema *(A)* pel caso di una superficie *S* a curvatura costante.

Ci proponiamo ora di risolvere il problema *(A)* quando la superficie *S* debba mantenersi a curvatura costante, escludendo per altro il caso della curvatura nulla, che già al § 2 ha ricevuto la sua completa soluzione.

Siccome si ha:

$$r_1 r_2 = \frac{D\,D'' - D'^2}{E'\,G' - F'^2},$$

ovvero, per le (12*):

$$r_1 r_2 = \frac{T^2(E'G'-F'^2)+T[gE'-2fF'+eG']+eg-f^2}{E'G'-F'^2},$$

se indichiamo con A il valore costante del prodotto $r_1 r_2$ (inversa della curvatura), avremo l'equazione:

$$(T^2-A)(E'G'-F'^2)+T(gE'-2fF'+eG')+eg-f^2=0.$$

In questa sostituiamo i valori (6*) § 1 e sopprimiamo il fattore M, ciò che è lecito, avendo escluso il caso del § 2. Otteniamo così l'equazione:

$$\begin{aligned}(T^2-A)\cdot\Big\{&\left(\frac{D_0}{\sqrt{E_0}}+\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}-\frac{\operatorname{sen}\sigma\, D''_0}{\sqrt{G_0}}\right)+\\&+\left(\frac{D'_0}{\sqrt{E_0}}+\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right)\left(\frac{\operatorname{sen}\sigma\, D'_0}{\sqrt{G_0}}+\frac{\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\right)\Big\}+\\&+T\cdot\left\{\sqrt{G_0}\left(\frac{D_0}{\sqrt{E_0}}+\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)-\operatorname{sen}\sigma\sqrt{E_0}\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}-\frac{\operatorname{sen}\sigma\, D''_0}{\sqrt{G_0}}\right)\right\}-\\&-\operatorname{sen}\sigma\sqrt{E_0G_0}=0.\end{aligned}$$

Moltiplicando al solito per D_0 ed eliminando D''_0, abbiamo:

$$\left.\begin{aligned}(T^2-A)\cdot\Big\{&\left(\frac{D_0}{\sqrt{E_0}}+\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)\cdot\left[\frac{\cos\sigma\, D_0}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}-\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\sqrt{G_0}}(D'^2_0+K_0E_0G_0)\right]+\\&+\left(\frac{D'_0}{\sqrt{E_0}}+\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right)\left(\frac{\operatorname{sen}\sigma\, D'_0}{\sqrt{G_0}}+\frac{\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\right)D_0\Big\}+\\&+T\Big\{\sqrt{G_0}\left(\frac{D_0}{\sqrt{E_0}}+\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)D_0-\operatorname{sen}\sigma\sqrt{E_0}\Big[\frac{\cos\sigma\, D_0}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}-\\&-\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\sqrt{G_0}}(D'^2_0+K_0E_0G_0)\Big]\Big\}-\operatorname{sen}\sigma\sqrt{E_0G_0}\,D_0=0,\end{aligned}\right\}\quad(20)$$

e questa dovrà essere un'identità in D_0, D'_0. Escludiamo il caso $\sigma=\frac{\pi}{2}$ ove seguirebbe dall'identità (20):

$$T=0,\quad K_0=\frac{1}{A},$$

e ne risulterebbe l'ovvia soluzione, già indicata in nota alla prefazione, che si ottiene assumendo per S_0 una superficie a curvatura costante $=\frac{1}{A}$ e per congruenza la congruenza delle sue normali. Osserveremo che, escluso il caso $\sigma=\frac{\pi}{2}$, non potrà aversi $T^2-A=0$, giacchè allora avremmo:

$$\sqrt{E_0}\cos\sigma=-\frac{dT}{du}=0.$$

Dopo ciò, eguagliando a zero nella (20) il coefficiente del prodotto $D_0 D'_0$, ne deduciamo, precisamente come al § 3:

$$\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}=0,\quad \frac{\partial\sigma}{\partial v}=0,$$

e potremo fare ancora $E_0=1$; la (20) diventa allora:

$$(T^2-A\left\{D_0^2\cos\sigma\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}+D_0\left(\sigma'\cos\sigma\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}-K_0\operatorname{sen}\sigma\sqrt{G_0}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\sigma'\operatorname{sen}\sigma}{\sqrt{G_0}}(D'^2_0+K_0 G_0)\right\}+T\left\{D_0^2\sqrt{G_0}+D_0\left(\sigma'\sqrt{G_0}-\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\operatorname{sen}^2\sigma}{\sqrt{G_0}}(D'^2_0+K_0 G_0)\right\}-\operatorname{sen}\sigma\sqrt{G_0}\,.\,D_0=0,$$

e si scinde quindi nelle tre relazioni:

$$\left.\begin{aligned}
&(T^2-A)\cos\sigma\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}+T\sqrt{G_0}=0\\
&(T^2-A)\left(\sigma'\cos\sigma\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}-K_0\operatorname{sen}\sigma\sqrt{G_0}\right)+\\
&+T\left(\sigma'\sqrt{G_0}-\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}\right)-\operatorname{sen}\sigma\sqrt{G_0}=0\\
&(T^2-A)\sigma'\operatorname{sen}\sigma=T\operatorname{sen}^2\sigma.
\end{aligned}\right\}\tag{21}$$

Escludendo nuovamente il caso $\sigma=0$, che riconduce alle soluzioni dipendenti dal teorema di Weingarten, avremo dunque:

$$(T^2-A)\sigma'=T\operatorname{sen}\sigma,\tag{22}$$

e sarà $\sigma'\neq 0$. Moltiplicando la prima delle (21) per σ' ed osservando la (22) deduciamo:

$$\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}+\sigma'\sqrt{G_0}=0, \tag{23}$$

e moltiplicando similmente la seconda delle (21) per σ' troviamo per le (22), (23):

$$T(\sigma'^2-K_0\operatorname{sen}^2\sigma)=\sigma'\operatorname{sen}\sigma. \tag{24}$$

Ora dalla (23), integrando e disponendo convenientemente del parametro v, potremo fare, come al § 4:

$$\sqrt{G_0}=\cot\sigma,$$

onde:

$$K_0=-\frac{1}{\sqrt{G_0}}\frac{d^2\sqrt{G_0}}{du^2}=\frac{\sigma''}{\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma}-\frac{2\sigma'^2}{\operatorname{sen}^2\sigma},$$

e però:

$$\sigma'^2-K_0\operatorname{sen}^2\sigma=3\sigma'^2-\operatorname{tg}\sigma\,.\,\sigma'',$$

dopo di che la (24) diventa:

$$T=\frac{\sigma'\cos\sigma}{3\cot\sigma\,\sigma'^2-\sigma''}. \tag{25}$$

Sostituendo questo valore di T nell'equazione (12) § 3:

$$T'+\cos\sigma=0,$$

otteniamo per σ l'equazione differenziale:

$$\frac{d}{du}\log(3\cot\sigma\,.\,\sigma'^2-\sigma'')=\frac{d}{du}\log(\operatorname{sen}^3\sigma\cos\sigma),$$

da cui integrando abbiamo:

$$3\cot\sigma\,.\,\sigma'^2-\sigma''=c\operatorname{sen}^3\sigma\cos\sigma, \tag{26}$$

indicando c una costante. Per la (26) la (25) si cangia nell'altra:

$$T=\frac{\sigma'}{c\operatorname{sen}^3\sigma}, \tag{27}$$

e rimane solo da soddisfare la (22), cioè l'equazione:

$$\frac{\sigma'^2}{c^2\operatorname{sen}^6\sigma}-\frac{1}{c\operatorname{sen}^2\sigma}=A. \tag{28}$$

Ma poichè questa produce appunto per derivazione la (26), possiamo trascurare quest'ultima e vediamo così che anche questa volta il problema proposto ammette sempre soluzioni. Queste, ove al solito si prescinda dalle soluzioni dipendenti dal teorema di WEINGARTEN, si ottengono nel modo più generale assumendo a superficie di partenza S_0 la superficie di rotazione d'elemento lineare:

$$d s_0^2 = d u^2 + \cot^2 \sigma \, d v^2, \tag{29}$$

e conducendo i raggi della congruenza normalmente ai paralleli ed inclinati sulla superficie dell'angolo σ, essendo σ una funzione della sola u, unicamente assoggettata a soddisfare l'equazione differenziale (28); in fine la lunghezza T dei segmenti da staccarsi sui raggi della congruenza, a partire da S_0, è data dalla (27).

§ 6.

L'ellissoide e l'iperboloide di rotazione ed il secondo teorema di Guichard.

Esaminiamo ora quale è la superficie di rotazione che può prendersi come tipo della superficie di partenza della nostra congruenza. Dalla (28) abbiamo:

$$d u^2 = \frac{d \sigma^2}{c \operatorname{sen}^4 \sigma (1 + c A \operatorname{sen}^2 \sigma)},$$

onde l'elemento lineare (29), cangiandovi v in $k v$ (k costante), può scriversi:

$$d s_0^2 = \frac{d \sigma^2}{c \operatorname{sen}^4 \sigma (1 + c A \operatorname{sen}^2 \sigma)} + k^2 \cot^2 \sigma \, d v^2. \tag{29*}$$

Per trovare l'equazione della curva meridiana corrispondente, conviene identificare la (29*) coll'altra:

$$d s_0^2 = \{1 + \psi'^2 (r)\} d r^2 + r^2 d v^2,$$

col porre:

$$r = k \cot \sigma,$$

indi:

$$\{1 + \psi'^2 (r)\} \left(\frac{d r}{d \sigma}\right)^2 = \frac{1}{c \operatorname{sen}^4 \sigma (1 + c A \operatorname{sen}^2 \sigma)}.$$

Se ne ricava:

$$1 + \psi'^2 (r) = \frac{1}{k^2 c} \frac{1 + \frac{r^2}{k^2}}{1 + c A + \frac{r^2}{k^2}},$$

e però:

$$\psi'^2(r) = \frac{(1 - k^2 c)\left(1 + \frac{r^2}{k^2}\right) - k^2 c^2 A}{k^2 c\left(1 + c A + \frac{r^2}{k^2}\right)}. \tag{30}$$

Si noti che per la costante k possiamo prendere il valore che più ci piace, il cangiare di k avendo solo per effetto di sostituire alla superficie un'altra superficie egualmente di rotazione, applicabile sovra di essa.

Studiamo nel presente paragrafo il caso della curvatura $\frac{1}{A}$ positiva e poniamo, come è lecito:

$$A = 1,$$

indi:

$$\psi'^2(r) = \frac{1 - k^2 c(c+1) + \frac{1 - k^2 c}{k^2} r^2}{k^2\, c(c+1) + c r^2}.$$

Ora intendendo di considerare solo, come sempre faremo, superficie reali, dovrà la costante c, del resto arbitraria, soddisfare la diseguaglianza:

$$c(c+1) > 0,$$

come risulta dalla (28) scritta sotto la forma:

$$\frac{\sigma'^2}{\operatorname{sen}^4 \sigma} = c(c+1) - c^2 \cos^2 \sigma.$$

Possiamo quindi disporre della costante k ponendo:

$$k^2 = \frac{1}{c(c+1)},$$

e otteniamo così:

$$\psi'(r) = \frac{c r}{\sqrt{1 + c r^2}},$$

da cui integrando:

$$z = \psi(r) = \sqrt{1 + c r^2},$$

ovvero:

$$z^2 - c r^2 = 1,$$

come equazione della curva meridiana.

Se c è negativa pongasi:

$$c = -\frac{1}{a^2},$$

e a causa di $c(c+1) > 0$ sarà $a < 1$; la curva meridiana è dunque l'ellisse:

$$z^2 + \frac{r^2}{a^2} = 1,$$

il cui asse maggiore, di lunghezza $= 2$, coincide coll'asse di rotazione, mentre l'asse minore ha una lunghezza arbitraria.

Quando invece c è positiva, pongasi:

$$c = \frac{1}{a^2},$$

e la curva meridiana sarà l'iperbole:

$$z^2 - \frac{r^2}{a^2} = 1,$$

il cui asse trasverso, di lunghezza $= 2$, coincide coll'asse di rotazione, rimanendo anche qui arbitraria la lunghezza dell'altro asse (coniugato).

La formola:

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{k}{r} = \frac{1}{r\sqrt{c(c+1)}},$$

confrontata con quella che dà l'inclinazione dei raggi focali sulla curva, dimostra che i raggi della nostra congruenza si dirigono verso l'uno o l'altro dei due fuochi. Di più se dalla (27) calcoliamo il valore di T in funzione di r, osservando la (28), troviamo:

$$T = \sqrt{\frac{c+1}{c} + (c+1)r^2},$$

e quindi il valore di $T+1$ combina con quello che dà la lunghezza del corrispondente raggio focale. Ora se rammentiamo che, pel teorema di Bonnet, le superficie parallele ad una di curvatura positiva $K = +1$, alla distanza ± 1 da questa, sono a curvatura media costante $= 1$, vediamo che i risultati ottenuti dimostrano completamente il teorema II) di Guichard, enunciato nella prefazione. Di più troviamo che le superficie applicabili sull'ellissoide allungato e sull'iperboloide a due falde di rotazione, insieme colle evolute delle superficie a curvatura costante positiva, dànno tutte le superficie S_0 soluzioni del problema [A], quando si esiga che una delle superficie normali ai raggi rimanga, in tutte le flessioni di S_0, a curvatura costante positiva.

§ 7.

I TRE TIPI DI SUPERFICIE S_0 DI ROTAZIONE CORRISPONDENTI AL CASO DI UNA S_0 PSEUDOSFERICA.

Veniamo da ultimo al caso della curvatura $\frac{1}{A}$ negativa e poniamo senz'altro $A = -1$. La (30) diventa:

$$\psi'^2(r) = \frac{1 - k^2 c(1-c) + \frac{1 - k^2 c}{k^2} r^2}{k^2 c(1-c) + c r^2},$$

e notiamo che, a causa della (28) si ha:

$$\frac{\sigma'^2}{c^2 \operatorname{sen}^4 \sigma} = \frac{1}{c \operatorname{sen}^2 \sigma} - 1,$$

onde, per restare nel campo reale, dovremo supporre la costante c positiva. Se volessimo anche qui annullare nel numeratore di $\psi'^2(r)$ il termine costante col porre:

$$k^2 = \frac{1}{c(c-1)},$$

otterremo ancora, come superficie tipica S_0 di rotazione, una quadrica; questa però, risultando:

$$\psi'^2(r) = -\frac{c^2 r^2}{1 + c r^2},$$

sarebbe immaginaria. Resteremo invece nel campo di superficie reali ponendo:

$$k^2 = \frac{1}{c},$$

e annullando così invece il coefficiente di r^2 al detto numeratore. Per porre in evidenza che c è positiva, poniamo:

$$c = \frac{1}{a^2}, \text{ indi } k = a,$$

ed avremo:

$$\psi'(r) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 1}}.$$

La curva meridiana ha forma diversa secondo che $a^2 - 1$ è nulla, negativa o positiva.

1.° caso: $a = 1$. Si ha:

$$z = \psi(r) = \log r,$$

e la curva meridiana è l'ordinaria curva logaritmica, l'asse di rotazione essendo l'assintoto. Osservando poi le formole:

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{k}{r} = \frac{1}{r} = \frac{dz}{dr},$$

$$T = \frac{\sigma'}{\operatorname{sen}^3 \sigma} = \sqrt{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \sigma} - 1} = r,$$

vediamo che i raggi della congruenza emananti dai punti della S_0, conformata a superficie logaritmica di rotazione, coincidono coi raggi stessi dei paralleli (ovvero coi loro riflessi) e i segmenti T eguagliano in lunghezza appunto i raggi dei paralleli. Troviamo così le seguente notevole proprietà della superficie logaritmica di rotazione: *Sui raggi dei paralleli di questa superficie S_0 si dispongano altrettanti segmenti terminati alla superficie ed al rispettivo centro. Si deformi comunque la S_0 che seco trasporti i detti segmenti, invariabilmente legati alla S_0; il luogo degli estremi liberi dei segmenti (estremi coincidenti inizialmente coi centri dei paralleli) sarà sempre una superficie pseudosferica S normale ai segmenti stessi. Una seconda superficie pseudosferica $\bar{S}$, normale ai raggi riflessi si ottiene prendendo la simmetrica di S rispetto alla S_0* (*).

Del resto questo teorema, come vedremo al Cap. V, non è altro che una conseguenza delle proprietà della trasformazione complementare delle superficie pseudosferiche.

2.° caso: $a < 1$. Allora la (31) integrata ci dà:

$$r = \sqrt{1 - a^2} \cosh z.$$

Questa curva meridiana dell'attuale superficie di rotazione S_0 deriva dalla catenaria comune: $r = \cosh z$, *accorciando* nel rapporto costante $\sqrt{1 - a^2}$ le ordinate normali alla direttrice; la diremo perciò la catenaria accorciata, e la

(*) Si osservi che quando la S_0 è conformata a superficie logaritmica di rotazione la superficie pseudosferica S si riduce all'asse e la simmetrica $\overline{S}$ è l'ordinaria pseudosfera.

superficie, generata dal rotare della curva attorno alla direttrice, il *catenoide accorciato.*

Le formole:

$$\operatorname{tg}\sigma = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}\cosh z}, \quad T = \sqrt{1-a^2}\,\operatorname{senh} z,$$

definiscono poi il sistema di raggi che colleghiamo alle deformazioni del catenoide accorciato e la lunghezza T dei segmenti compresi fra S_0 e la superficie pseudosferica S ortogonale ai raggi.

Si osserverà che nel caso limite $a=0$ il catenoide accorciato degenera nell'ordinario catenoide e i due sistemi di raggi (diventando $\sigma=0$) coincidono in quello delle tangenti ai meridiani. Otteniamo così, come caso limite, la soluzione data dal teorema di Weingarten nelle evolute delle superficie pseudosferiche, cioè nelle superficie applicabili sul catenoide.

3.º caso: $a>1$. La curva meridiana sarà allora la seguente:

$$r = \sqrt{a^2-1}\,\operatorname{senh} z;$$

diremo per brevità la corrispondente superficie di rotazione il *sinusoide iperbolico.*

Così adunque abbiamo trovato tre distinti tipi di superficie di rotazione S_0, che dànno tutte le soluzioni del problema [A], quando la superficie S normale ai raggi debba rimanere a curvatura costante negativa.

CAPITOLO II.

La corrispondenza fra i punti della superficie riflettente S_0 e quelli delle superficie S, $\overline{S}$ normali ai raggi della congruenza incidente e della riflessa.

§ 8.

Corrispondenza delle linee di curvatura sopra S, $\overline{S}$.

Nelle ricerche seguenti, per esprimerci con maggiore brevità, indicheremo col nome di *superficie fondamentale di rotazione* una qualunque delle sei superficie di rotazione che abbiamo incontrato nelle ricerche del Cap. I e cioè: il paraboloide, l'ellissoide allungato, l'iperboloide a due falde, la superficie logaritmica, il catenoide accorciato ed il sinusoide iperbolico. A ciascuna superficie fondamentale S_0 (o applicabile sovra di essa) sono collegate, come si è visto due congruenze, perfettamente determinate di raggi, riflesse l'una dell'altra, che in ogni deformazione di S_0 si conservano sempre normali a due superficie minime S, $\bar{S}$ se S_0 è il paraboloide, ovvero a due superficie S, $\bar{S}$ colla medesima curvatura costante negli altri cinque casi. Una qualunque delle due dette congruenze si dirà *la congruenza associata* alla superficie fondamentale che si considera.

Ora osserviamo che, dalla generazione geometrica stessa di S, $\bar{S}$, viene stabilita una corrispondenza fra i punti M_0 della superficie riflettente S_0 e quelli M, $\bar{M}$ della S o $\bar{S}$, ove i due raggi incidente e riflesso, uscenti da M_0, rispettivamente le incontrano. I due punti M, $\bar{M}$ giacciono simmetricamente rispetto al piano tangente in M_0 di S_0; per significare brevemente questo fatto diremo che: *le due superficie S, $\bar{S}$ sono simmetriche l'una dell'altra rispetto alla superficie riflettente S_0.*

Pel seguito del nostro studio è indispensabile conoscere le proprietà di queste corrispondenze e noi ci proponiamo di condurre la ricerca in guisa da riconoscere in pari tempo tutti i casi in cui ha luogo la proprietà in considerazione.

Una prima ed importante proprietà della corrispondenza fra i punti di S, $\bar{S}$ si ha nel teorema:

a) Sulle due superficie S, $\bar{S}$ normali rispettivamente ai raggi incidenti ed ai riflessi si corrispondono le linee di curvatura.

La dimostriamo risolvendo il problema generale seguente:

Una congruenza normale di raggi si deforma flettendo la superficie S_0 di partenza. Quale condizione deve verificarsi affinchè le sviluppabili della congruenza si mantengano per riflessione sulla S_0, in tutte le sue deformazioni?

A tale scopo utilizziamo il noto teorema di Dupin (*), secondo il quale le sviluppabili della congruenza normale si mantengono per riflessione allora soltanto quando le linee da esse tracciate sulla superficie d'incidenza formano un sistema coniugato. Ora l'equazione differenziale delle sviluppabili della

(*) V. Darboux, *Leçons,* T. II, p. 286.

congruenza, nelle notazioni del Cap. I, si scrive (*):

$$(fE'-eF')\,du^2+(gE'-eG')\,du\,dv+(gF'-fG')\,dv^2=0;$$

esse tracciano sopra S_0 un sistema coniugato quando si verifichi la condizione:

$$D_0(gF'-fG')+D'_0(eG'-gE')+D''_0(fE'-eF')=0. \qquad (1)$$

Nel caso attuale di una congruenza normale $(f=f')$, i tre binomii che moltiplicano nella (1) rispettivamente D_0, D'_0, D''_0, hanno secondo le formole fondamentali del § 1, le espressioni seguenti:

$$gF'-fG'=\sqrt{G_0}\left(\frac{D'_0}{\sqrt{E_0}}+\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right)\cdot M,$$

$$eG'-gE'=-\left\{\sqrt{G_0}\left(\frac{D_0}{\sqrt{E_0}}+\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)+\sqrt{E_0}\operatorname{sen}\sigma\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}-\frac{\operatorname{sen}\sigma\, D''_0}{\sqrt{G_0}}\right)\right\}\cdot M,$$

$$fE'-eF'=-\sqrt{E_0}\operatorname{sen}\sigma\left(\frac{\operatorname{sen}\sigma\, D'_0}{\sqrt{G_0}}+\frac{\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\right)\cdot M.$$

Se le sostituiamo nella (1), dobbiamo osservare che la soppressione del fattore M comune ai tre termini sopprime attualmente un'effettiva soluzione del problema, perchè è facile vedere che nel caso della congruenza normale del § 2 le sviluppabili si mantengono per riflessione sulla superficie sviluppabile S_0 di partenza. E infatti le equazioni differenziali di queste sviluppabili sono (§ 2):

$$D_0\,du+D'_0\,dv=0$$

$$D_0\,dv-D'_0\operatorname{sen}^2\sigma\,du=0.$$

e per la congruenza riflessa, che si ottiene cangiando σ in $-\sigma$, rimangono le stesse.

Cercando ora le altre soluzioni del problema, scriviamo la (1), liberata fattore M:

$$D_0\sqrt{G_0}\left(\frac{D'_0}{\sqrt{E_0}}+\frac{\partial\sigma}{\sigma v}\right)-D'_0\left\{\sqrt{G_0}\left(\frac{D_0}{\sqrt{E_0}}+\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)+\right.$$

$$\left.+\sqrt{E_0}\operatorname{sen}\sigma\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}-\frac{\operatorname{sen}\sigma D''_0}{\sqrt{G_0}}\right)\right\}-$$

$$-\sqrt{E_0}\operatorname{sen}\sigma\, D''_0\left(\frac{\operatorname{sen}\sigma\, D'_0}{\sqrt{G_0}}+\frac{\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\right)=0.$$

(*) *Lezioni*, pag. 252 formola *(C)*.

Per esprimere che questa è soddisfatta in tutte le flessioni di S_0, procediamo al solito moltiplicandola per D_0 e sostituendo $D'^2_0 + K_0 E_0 G_0$ a $D_0 D''_0$; otteniamo così:

$$D_0^2 \sqrt{G_0}\left(\frac{D'_0}{\sqrt{E_0}} + \frac{\partial \sigma}{\partial v}\right) - D_0 D'_0 \sqrt{G_0}\left(\frac{D_0}{\sqrt{E_0}} + \frac{\partial \sigma}{\partial u}\right) -$$

$$- D'_0 \sqrt{E_0} \operatorname{sen} \sigma \left\{\frac{\cos \sigma D_0}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u} - \frac{\operatorname{sen} \sigma}{\sqrt{G_0}} (D'^2_0 + K_0 E_0 G_0)\right\} -$$

$$- \sqrt{E_0} \operatorname{sen} \sigma (D'^2_0 + K_0 E_0 G_0)\left(\frac{\operatorname{sen} \sigma D'_0}{\sqrt{G_0}} + \frac{\cos \sigma}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial v}\right) = 0.$$

Questa, dovendo essere un'identità in D_0, D'_0, si scinde nelle tre:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial v} = 0, \quad \operatorname{sen} \sigma \cos \sigma \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u} + \sigma' \sqrt{G_0} = 0,$$

da cui integrando e disponendo convenientemente dei parametri u, v, abbiamo:

$$\sqrt{E_0} = 1, \quad \sqrt{G_0} = \cot \sigma.$$

La nostra superficie S_0 è dunque necessariamente applicabile sopra una superficie di rotazione d'elemento lineare:

$$d s_0^2 = du^2 + r^2 d v^2,$$

e si ha evidentemente:

$$r = k \cot \sigma \ (k \text{ costante}).$$

Ed ora se osserviamo che il caso, considerato a parte, della congruenza normale dal § 2 rientra in questo generale, poichè allora r e σ sono costanti, potremo enunciare il risultato:

Affinchè le sviluppabili di una congruenza normale C si conservino per riflessione sulla superficie di partenza S_0, in tutte le flessioni della superficie d'incidenza S_0, è necessario e sufficiente che questa sia applicabile sopra una superficie di rotazione e i raggi di C siano condotti normalmente alle deformate dei paralleli ed inclinati sulla superficie di un angolo σ che soddisfi alla condizione:

$$r \operatorname{tg} \sigma = \text{cost},$$

indicando r il raggio del parallelo.

In tutte le congruenze associate alle sei superficie fondamentali la condizione ora scritta è soddisfatta; ne risulta quindi, come caso particolare, il teorema a) enunciato al principio.

§ 9.

Corrispondenza delle assintotiche sopra S, $\overline{S}$.

Vogliamo ora dimostrare in secondo luogo che sulle due superficie S, $\overline{S}$ ad area minima o a curvatura costante, derivate da una superficie S_0 applicabile sopra una delle sei fondamentali, si corrispondono altresì le linee assintotiche reali od immaginarie (*). Dimostreremo anzi di più che questa (a differenza di quella del paragrafo precedente) è una proprietà *caratteristica* delle congruenze associate alle sei superficie fondamentali, quando si trascuri il caso delle congruenze normali del § 2, che del resto può riguardarsi come contenuto nel generale. Proponiamoci dunque di risolvere in generale il problema seguente:

Una congruenza normale C si deforma flettendo la superficie S_0 di partenza e si considerano due superficie S, $\overline{S}$ ortogonali rispettivamente ai raggi incidenti ed ai riflessi e simmetriche rispetto alla superficie riflettente S_0. Quando accadrà che, in tutte le flessioni della superficie d'incidenza S_0, si corrispondano sopra S, $\overline{S}$ le linee assintotiche (i sistemi coniugati)?

Per compiere la nostra ricerca osserviamo che, ritenendo per la superficie S tutte le notazioni del § 3, avremo le formule corrispondenti per la simmetrica $\overline{S}$ solo che si cangi σ in $-\sigma$, ciò che per la formola:

$$T = C - \int \cos \sigma \, d\, u,$$

non fa cangiare T. Indicando adunque con $\overline{E}'$, $\overline{F}'$, $\overline{G}'$, $\overline{e}$, $\overline{f}$, $\overline{g}$ le quantità che per la $\overline{S}$ sono le analoghe di:

$$E' \ F' \ G', \ e, \ f, \ g,$$

ne dedurremo le espressioni dalle (5), (5*) § 1 cangiandovi σ in $-\sigma$. I coefficienti:

$$\overline{D}, \ \overline{D'}, \ \overline{D''},$$

per la $\overline{S}$ avranno quindi, per le (12*) § 3, le espressioni:

$$-\overline{D} = T\overline{E}' + \overline{e}, \quad -\overline{D'} = T\overline{F}' + \overline{f}, \quad -\overline{D''} = T\overline{G'} + \overline{g}.$$

(*) In quest'ultimo caso (quando cioè S, $\overline{S}$ sono a curvatura costante positiva) per esprimere la proprietà sotto forma reale basterà parlare invece della conservazione dei *sistemi coniugati*.

Per esprimere che sopra S, $\bar{S}$ si corrispondono le linee assintotiche (i sistemi coniugati), abbiamo le proporzioni:

$$\frac{\overline{D}}{D}=\frac{\overline{D'}}{D'}=\frac{\overline{D''}}{D''},$$

ossia le due equazioni seguenti:

$$\left.\begin{array}{l} T^2(E'\overline{F'}-\overline{E'}F)+T(e\overline{F'}-\bar{e}F'+\bar{f}E'-f\overline{E'})+(e\bar{f}-\bar{e}f)=0 \\ T^2(E'\overline{G'}-\overline{E'}G)+T(e\overline{G'}-\bar{e}G'+\bar{g}E'-g\overline{E'})+(e\bar{g}-\bar{e}g)=0. \end{array}\right\} \quad (2)$$

Ora se decomponiamo le espressioni di E', F'', e, f, g, date dalle (5), (5*) § 1, ciascuna in due parti, l'una pari l'altra dispari rispetto a σ, abbiamo:

$$E'=\left\{\frac{D_0^2}{E_0}+\left(\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)^2+\frac{\operatorname{sen}^2\sigma\, D'^2_0}{G_0}+\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\right)^2\right\}+$$
$$+2\left\{\frac{D_0}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sigma}{\partial u}+\frac{D'_0\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma}{G_0}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\right\}$$

$$F''=\left\{\frac{D_0D'_0}{E_0}+\frac{\partial\sigma}{\partial u}\frac{\partial\sigma}{\partial u}+\frac{\operatorname{sen}^2\sigma\, D'_0D''_0}{G_0}-\frac{\cos^2\sigma}{\sqrt{E_0G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}\right\}+$$
$$+\left\{\frac{D_0}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sigma}{\partial v}+\frac{D'_0}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sigma}{\partial u}-\frac{D'_0\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma}{\sqrt{E_0G_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}+\frac{D''_0\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma}{G_0}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\right\}$$

$$G'=\left\{\frac{D'^2_0}{E_0}+\left(\frac{\partial\sigma}{\sigma v}\right)^2+\frac{\operatorname{sen}^2\sigma\, D''^2_0}{G}+\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}\right)^2\right\}+$$
$$+2\left\{\frac{D'_0}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sigma}{\partial v}-\frac{D''_0\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma}{\sqrt{E_0G_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}\right\}$$

$$e=-\sqrt{E_0}\operatorname{sen}\sigma\frac{\partial\sigma}{\partial u}-D_0\operatorname{sen}\sigma,\quad f=-\cos\sigma\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}-D'_0\operatorname{sen}\sigma,$$

$$g=\frac{\cos\sigma\sqrt{G_0}}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}-D''_0\operatorname{sen}\sigma,$$

e le espressioni di $\overline{E'}$, $\overline{F'}$, $\overline{G'}$, $\bar{e}$, $\bar{f}$, $\bar{g}$ si dedurranno da queste ogni volta cangiando di segno alla parte impari.

Si osservi ora che ogni coefficiente nelle (2) ha la forma:

$$\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta,$$

constando sì α che β d'una parte pari che diciamo rispettivamente α_1, β_1, e di una parte impari α_2, β_2 talchè:

$$\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta = 2(\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2).$$

Dopo queste osservazioni, calcolando per disteso la prima delle (2) si trova l'equazione seguente:

$$\begin{gathered}
T^2\left\{2\left(\frac{D_0}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sigma}{\partial u} + \frac{D'_0 \operatorname{sen}\sigma\cos\sigma}{G_0}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\right)\cdot\left(\frac{D_0 D'_0}{E_0} + \frac{\partial\sigma}{\partial u}\frac{\partial\sigma}{\partial v} + \right.\right.\\
\left. + \frac{\operatorname{sen}^2\sigma D'_0 D''_0}{G_0} - \frac{\cos^2\sigma}{\sqrt{E_0 G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}\right) - \left[\frac{D_0^2}{E_0} + \left(\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)^2 + \frac{\operatorname{sen}^2\sigma D'^2_0}{G_0} + \right.\\
\left. + \left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\right)^2\right]\cdot\left(\frac{D_0}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sigma}{\partial v} + \frac{D'_0}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sigma}{\partial u} - \frac{D'_0 \operatorname{sen}\sigma\cos\sigma}{\sqrt{E_0 G_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u} + \right.\\
\left.\left. + \frac{D''_0 \operatorname{sen}\sigma\cos\sigma}{G_0}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\right)\right\} + T\sqrt{E_0}\operatorname{sen}\sigma\frac{\partial\sigma}{\partial u}\left(\frac{D_0}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sigma}{\partial v} + \frac{D'_0}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sigma}{\partial u} - \right.\\
\left. - \frac{D'_0 \operatorname{sen}\sigma\cos\sigma}{\sqrt{E_0 G_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u} + \frac{D''_0 \operatorname{sen}\sigma\cos\sigma}{G_0}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\right) - T D_0 \operatorname{sen}\sigma\left(\frac{D_0 D'_0}{E_0} + \right.\\
\left. + \frac{\partial\sigma}{\partial u}\frac{\partial\sigma}{\partial v} + \frac{\operatorname{sen}^2\sigma D'_0 D''_0}{G_0} - \frac{\cos^2\sigma}{\sqrt{E_0 G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}\right) + T D'_0 \operatorname{sen}\sigma\left[\frac{D_0^2}{E_0} + \right.\\
\left. + \left(\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)^2 + \frac{\operatorname{sen}^2\sigma D'^2_0}{G_0} + \left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\right)^2\right] - 2T\cos\sigma\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\left(\frac{D_0}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sigma}{\partial u} + \right.\\
\left. + \frac{D'_0 \operatorname{sen}\sigma\cos\sigma}{G_0}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\right) + D_0 \operatorname{sen}\sigma\cos\sigma\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v} - D'_0\sqrt{E_0}\operatorname{sen}^2\sigma\frac{\partial\sigma}{\partial u} = 0.
\end{gathered}$$

Moltiplichiamo la precedente per D_0 e sostituiamo al solito $D'^2_0 + K_0 E_0 G_0$ al prodotto $D_0 D''_0$. Basta eguagliare a zero, nell'equazione che risulta e che deve essere un'identità in D_0, D'_0, il coefficiente di D_0^4 per dedurne:

$$\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v} = 0,$$

indi $\frac{\partial\sigma}{\partial v} = 0$ e potremo dunque fare:

$$E_0 = 1, \qquad \sigma = \sigma(u).$$

Dopo di ciò l'equazione sopra scritta, soppresso il fattore D'_0 comune a tutti i termini, diventa:

$$T^2\left\{\left(\sigma' + \frac{\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}\right)D_0^2 + \frac{\operatorname{sen}^2\sigma}{G_0}\left(\sigma' + \frac{\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}\right)D'^2_0 + \right.$$
$$\left. + 2\sigma'\operatorname{sen}^2\sigma\, K_0 - \sigma'^2\left(\sigma' - \frac{\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}\right)\right\} +$$
$$+ T\left\{2\sigma'^2\operatorname{sen}\sigma - \frac{\sigma'\operatorname{sen}^2\sigma\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u} - K_0\operatorname{sen}^3\sigma\right\} - \sigma'\operatorname{sen}^2\sigma = 0.$$

Questa ci dimostra che deve aversi:

$$\sigma' + \frac{\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u} = 0,$$

onde si conclude al solito, cangiando il parametro v:

$$\sqrt{G_0} = \cot\sigma,$$

indi:

$$d s_0^2 = d u^2 + \cot^2\sigma\, d v^2;$$

dopo di ciò la precedente diviene:

$$2\sigma'(\sigma'' - 3\cot\sigma\,.\,\sigma'^2)\,T^2 + \operatorname{sen}\sigma\,(5\cot\sigma\,.\,\sigma'^2 - \sigma'')\,T - \sigma'\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma = 0. \quad (3)$$

D'altronde anche la seconda delle (2) porta, come subito si verifica, a questa medesima equazione (3), che si tratterà dunque di soddisfare insieme all'altra:

$$T' + \cos\sigma = 0. \quad (4)$$

Lasciamo da parte il caso $\sigma' = 0$ ove la (3) è identicamente verificata, ciò che del resto è evidente geometricamente perchè allora siamo nel caso del § 2 e sulle due superficie sviluppabili S, $\overline{S}$ si corrispondono le generatrici fra loro (e a quelle di S_0).

Il discriminante dell'equazione di 2° grado (3) in T è il quadrato di:

$$\sigma''\operatorname{sen}\sigma - \sigma'^2\cos\sigma,$$

onde troviamo per T l'uno o l'altro dei due valori:

$$T = \frac{\operatorname{sen}\sigma}{2\sigma'}, \quad (5)$$

$$T = \frac{\sigma'\cos\sigma}{3\cot\sigma\,\sigma'^2 - \sigma''}. \quad (6)$$

Nel primo caso la (4) ci dà subito:

$$\sigma'' = 3 \cot \sigma \,.\, \sigma'^2 \text{ (*)},$$

e il calcolo stesso del § 4 ci dimostra che la S_0 è applicabile sul paraboloide di rotazione e la congruenza C è una delle due associate.

Quando si abbia poi la (6), basta ricordare il calcolo eseguito al § 5 sull'identica equazione ivi segnata (25) per dedurne che si avrà:

$$3 \cot \sigma \,.\, \sigma'^2 - \sigma'' = c \operatorname{sen}^3 \sigma \cos \sigma,$$

(con c costante), indi:

$$T = \frac{\sigma'}{c \operatorname{sen}^3 \sigma},$$

e:

$$\frac{\sigma'^2}{c^2 \operatorname{sen}^6 \sigma} - \frac{1}{c \operatorname{sen}^2 \sigma} = A,$$

essendo A una nuova costante. Ne segue che la superficie S_0 è applicabile sopra una delle cinque ultime superficie fondamentali e la congruenza C coincide con una delle congruenze associate.

Abbiamo dunque il teorema:

Se deformando comunque la superficie S_0 di partenza di una congruenza normale C avviene che sopra due certe superficie S, $\overline{S}$ ortogonali rispettivamente ai raggi della congruenza C e della sua riflessa sopra S_0 e simmetriche rispetto a questa, si corrispondano le linee assintotiche, la superficie S_0 sarà applicabile sopra una delle sei fondamentali e le due congruenze saranno quelle associate.

§ 10.

Corrispondenza delle assintotiche sopra S_0, S.

Ricerchiamo ora se può avvenire che, deformando comunque la superficie S_0 di partenza di una congruenza C di raggi normali ad una superficie S, abbia sempre luogo la corrispondenza delle assintotiche sopra S_0, S.

Perchè ciò avvenga dovranno sussistere, in tutte le flessioni di S_0, le proporzioni:

$$\frac{D}{D_0} = \frac{D'}{D'_0} = \frac{D''}{D''_0},$$

(*) Si osservi che in questo caso, ed in questo soltanto, la (3) scende al 1° grado in T.

ovvero, per le (12*) § 3, le due equazioni:

$$\left.\begin{aligned} T(E'D'_0 - F'D_0) + eD'_0 - fD_0 &= 0, \\ T(G'D'_0 - F'D''_0) + gD'_0 - fD''_0 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

La prima di queste, sostituendo i valori effettivi (5), (5*) § 1, diventa:

$$TD'_0\left\{\left(\frac{D_0}{\sqrt{E_0}} + \frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{sen}\sigma\, D'_0}{\sqrt{G_0}} + \frac{\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\right)^2\right\} -$$

$$- TD_0\left(\frac{D_0}{\sqrt{E_0}} + \frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)\left(\frac{D'_0}{\sqrt{E_0}} + \frac{\partial\sigma}{\partial v}\right) +$$

$$+ T\left(\frac{\operatorname{sen}\sigma\, D'_0}{\sqrt{G_0}} + \frac{\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\right)\cdot\left[\frac{D_0\cos\sigma}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u} - \left(\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\sqrt{G_0}}\left(D'^2_0 + K_0 E_0 G_0\right)\right]\right. +$$

$$+\sqrt{G_0}\,D_0\left(\operatorname{sen}\sigma\frac{D'_0}{\sqrt{G_0}} + \frac{\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\right) - \sqrt{E_0}\operatorname{sen}\sigma' D'_0\left(\frac{D_0}{\sqrt{E_0}} + \frac{\partial\sigma}{\partial u}\right) = 0\,;$$

questa deve al solito essere identica in D_0, D'_0. Eguagliando a zero il coefficiente di D_0^2, si ha $\frac{\partial\sigma}{\partial v} = 0$ indi $\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v} = 0$ e fatto quindi, come è lecito, $E_0 = 1$ la precedente, divisa per D'_0, si cangia nell'altra:

$$T\left\{\sigma'^2 - K_0\operatorname{sen}^2\sigma + \left(\sigma' + \frac{\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}\right)D_0\right\} = \sigma'\operatorname{sen}\sigma.$$

Dobbiamo dunque avere:

$$\sigma' + \frac{\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u} = 0,$$

onde risulta che possiamo fare nuovamente:

$$\sqrt{G_0} = \cot\sigma,$$

dopo di che, supposto $\sigma' \neq 0$, avremo:

$$T = \frac{\sigma'\cos\sigma}{3\cot\sigma\,\sigma'^2 - \sigma''}.$$

Anche la seconda delle (7) risulta così soddisfatta e, poichè l'equazione ora ottenuta coincide colla (6) del paragrafo precedente, valgono naturalmente le medesime conclusioni. Quanto al caso escluso $\sigma' = 0$, esso corrisponde al solito alle congruenze normali del § 2 che dànno, come è già stato osservato al paragrafo precedente, una soluzione dell'attuale problema.

Si ha dunque il teorema: *Se deformando comunque la superficie S_0 di partenza di una congruenza C normale ad una superficie S, ha sempre luogo la corrispondenza delle assintotiche fra S_0 e S, dovrà la S_0 essere applicabile sopra una delle cinque ultime* (*) *superficie fondamentali e la congruenza sarà una delle due associate, mentre la S sarà a curvatura costante.* Intendiamo incluso in questo teorema generale il caso del § 2 ove S_0 e S sono sviluppabili e le generatrici si corrispondono.

La proprietà, già dimostrata al paragrafo precedente, che sulle due superficie S, $\overline{S}$ a curvatura costante, simmetriche rispetto alla riflettente S_0, si corrispondono le assintotiche segue così nuovamente. Ma la proposizione attuale ci dimostra di più il teorema:

Gli archi corrispondenti di assintotiche sopra S, $\overline{S}$ hanno eguale lunghezza.

E invero l'elemento lineare della S è dato, per le (12*) § 3, da:

$$d s^2 = (-T D + T e + E_0 \operatorname{sen}^2 \sigma)\, d u^2 +$$
$$+ 2\,(-T D' + T f)\, d u\, d v + (-T D'' + T g + G_0)\, d v^2,$$

e siccome lungo le assintotiche si ha:

$$D\, d u^2 + 2\, D'\, d u\, d v + D''\, d v^2 = 0,$$

il quadrato del loro elemento d'arco sarà:

$$d s^2 = T (e\, d u^2 + 2 f\, d u\, d v + g\, d v^2) + E_0 \operatorname{sen}^2 \sigma\, d u^2 + G_0\, d v^2.$$

Cangiando σ in $-\sigma$, si avrà l'elemento d'arco $\overline{d} s$ delle assintotiche di $\overline{S}$, onde:

$$\overline{d} s^2 = T (\overline{e}\, d u^2 + 2 \overline{f}\, d u\, d v + \overline{g}\, d v^2) + E_0 \operatorname{sen}^2 \sigma\, d u^2 + G_0\, d v^2.$$

Dalle formole (5*) § 1 risulta quindi:

$$\overline{d} s^2 - d s^2 = 2\, T \operatorname{sen} \sigma\, (D_0\, d u^2 + 2\, D'_0\, d u\, d v + D''_0\, d v^2),$$

ciò che per l'attuale proporzionalità di D_0, D'_0, D''_0 a D, D', D'' dimostra il teorema.

(*) Era a priori evidente che il paraboloide di Guichard non poteva dare una soluzione dell'attuale problema, le sue assintotiche essendo immaginarie mentre sulla S, che è ad area minima, sono invece reali.

Si osserverà che questa proprietà della conservazione non solo delle assintotiche sopra S, $\overline{S}$, ma anche dei loro archi corrispondenti, distingue il caso delle superficie a curvatura costante da quello delle superficie minime; poichè dalla equazione precedente, che vale per gli archi di assintotiche, se si suppone:

$$\overline{d}\, s^2 = d\, s^2,$$

ne segue inversamente la proporzione:

$$D_0 : D'_0 : D''_0 = D : D' : D''.$$

Un ultimo corollario del nostro teorema merita di essere rilevato. Suppongasi di conoscere una superficie S_0 applicabile sopra una qualunque delle cinque ultime superficie fondamentali. Con quadrature si troveranno le congruenze associate e le corrispondenti superficie S, $\overline{S}$ e con quadrature altresì si otterranno le loro linee assintotiche (*) quindi quelle di S_0. Dunque: *nota una superficie S_0 applicabile sopra una delle cinque ultime superficie fondamentali di rotazione, l'equazione differenziale delle sue linee assintotiche si integra con quadrature.*

CAPITOLO III.

Le nuove trasformazioni delle superficie a curvatura costante.

§ 11.

Considerazioni preliminari.

Nei teoremi di Guichard, e negli altri stabiliti al Cap. I, si supponeva data la superficie riflettente S_0, applicabile sopra una delle sei superficie fondamentali di rotazione, e se ne deducevano (con soli calcoli di quadrature) le due congruenze associate, indi le due superficie S, $\overline{S}$ simmetriche rispetto alla S_0 e normali rispettivamente ai raggi delle due congruenze incidente e riflessa; queste due superficie S, $\overline{S}$ risultavano ad area minima nel caso del paraboloide, e colla medesima curvatura costante nei rimanenti. Importa ora

(*) *Lezioni*, pag. 235.

procedere, in certo modo, alla *inversione* di questi teoremi e, supponendo data comunque una superficie S ad area minima, o a curvatura costante, domandare se per la congruenza C delle normali di S può sempre scegliersi una tale superficie S_0 di partenza che questa risulti applicabile sopra una delle sei superficie fondamentali e la congruenza C sia una delle due associate a S_0 (Cfr. § 8). Troveremo che la risposta è sempre affermativa ed anzi si vedrà di più (ed è questo per noi un risultato della massima importanza) che, data la superficie S, *la riflettente* S_0 *non ne risulta determinata, ma può scegliersi ad arbitrio in una tripla infinità di superficie.*

Siccome poi, fissata la superficie riflettente S_0, la simmetrica $\overline{S}$ di S rapporto a S_0 viene ad essere come S ad area minima, ovvero ha la medesima curvatura costante di S, così vediamo come: *dai teoremi di* GUICHARD *scaturisce un metodo* **reale** *di trasformazione per le superficie d'area minima e per quelle a curvatura costante positiva o negativa.* Sviluppare la teoria di queste trasformazioni, studiarne in particolare le relazioni colle trasformazioni già note è lo scopo delle ricerche seguenti. Però, per le ragioni già addotte nella prefazione, lasceremo qui completamente da parte il caso delle superficie S ad area minima. Supponiamo adunque data una superficie S a curvatura costante K positiva o negativa e facciamo per semplicità, secondo il caso, $K = +1$ ovvero $K = -1$. Sulla normale ad S in ogni suo punto M portiamo, a partire dal piede M, un segmento:

$$\overline{MM_0} = T,$$

ove T sarà una conveniente funzione delle coordinate curvilinee (u, v) di M; si tratterà di determinare T in funzione di u, v in guisa che la superficie S_0 luogo dell'estremo M_0 risulti applicabile sopra una delle cinque ultime superficie fondamentali di rotazione e la congruenza C delle normali di S costituisca, per la superficie S_0, una delle due congruenze associate.

Basterà al nostro scopo tradurre in calcolo le due proprietà seguenti che le ricerche dei precedenti Capitoli ci hanno dimostrato dover aver luogo:

1.° Il segmento T di normale della S compreso fra S e S_0 deve essere legato all'angolo σ d'inclinazione del segmento sopra S_0 dalla formola:

$$T^2 = \pm 1 + \frac{1}{c \operatorname{sen}^2 \sigma}, \tag{α}$$

che risulta dal paragonare le due (27), (28) § 5, il segno superiore valendo con $K = +1$, l'inferiore con $K = -1$.

2.° Alle linee di curvatura di S deve corrispondere sopra S_0 un sistema coniugato.

Troveremo così per la nostra funzione incognita $T(u, v)$ un sistema di due equazioni simultanee alle derivate parziali l'una del 1.°, l'altra del 2.° ordine le quali esprimono, come si vedrà, tutte le condizioni necessarie e sufficienti a cui T deve soddisfare, ove si eccettui un caso semplice e privo di interesse. D'altronde si riscontrerà che il detto sistema è *illimitatamente integrabile* di guisa che la soluzione più generale T conterrà, oltre c, due nuove costanti arbitrarie di integrazione. Per tal modo si troveranno le formole per la nostra trasformazione e si dimostrerà di più che *della superficie trasformata $\overline{S}$ si può fissare ad arbitrio un punto $\overline{M}$ corrispondente ad un dato punto M di S ed il piano tangente in $\overline{M}$, purchè le due normali in M, $\overline{M}$ ai due piani tangenti di S, $\overline{S}$ si incontrino in un punto M_0 equidistante da M, $\overline{M}$; con ciò la $\overline{S}$ sarà perfettamente determinata.*

Descritto il metodo generale che terremo nei paragrafi seguenti, passiamo ai calcoli effettivi, cominciando dal caso di una superficie S a curvatura positiva $K = +1$.

§ 12.

Caso di una superficie S a curvatura positiva $K = +1$.

Riferendo la S alle sue linee di curvatura (u, v), potremo dare all'elemento lineare di S la forma (*):

$$d\,s^2 = \operatorname{senh}^2\theta\,d\,u^2 + \cosh^2\theta\,d\,v^2, \tag{1}$$

dove θ è una soluzione dell'equazione a derivate parziali:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + \operatorname{senh}\theta\cosh\theta = 0, \tag{2}$$

e i raggi principali di curvatura r_1, r_2 di S saranno:

$$r_1 = \coth\theta, \qquad r_2 = \operatorname{tgh}\theta. \tag{3}$$

(*) *Lezioni*, pag. 446.

Ritenendo le solite notazioni del § 1, avremo le formole fondamentali:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial u}=\operatorname{senh}\theta\, X_1 \qquad \frac{\partial x}{\partial v}=\cosh\theta\, X_2\\
&\frac{\partial X_1}{\partial u}=-\frac{\partial\theta}{\partial v}X_2-\cosh\theta\, X_3,\quad \frac{\partial X_2}{\partial u}=\frac{\partial\theta}{\partial v}X_1,\quad \frac{\partial X_3}{\partial u}=\cosh\theta\, X_1\\
&\frac{\partial X_1}{\partial v}=\frac{\partial\theta}{\partial u}X_2,\quad \frac{\partial X_2}{\partial v}=-\frac{\partial\theta}{\partial u}X_1-\operatorname{senh}\theta\, X_3,\quad \frac{\partial X_3}{\partial v}=\operatorname{senh}\theta\, X_2.
\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

Staccando sopra ogni normale di S, a partire da $M\equiv(x, y, z)$ il segmento:

$$\overline{MM_0}=T,$$

le coordinate x_0, y_0, z_0 dell'estremo M_0 saranno:

$$x_0=x+TX_3,\quad y_0=y+TY_3,\quad z_0=z+TZ_3,$$

e derivando otterremo, per le (4):

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x_0}{\partial u}&=(\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta)\,X_1+\frac{\partial T}{\partial u}X_3\\
\frac{\partial x_0}{\partial v}&=(\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta)\,X_2+\frac{\partial T}{\partial v}X_3,
\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

colle analoghe per y_0, z_0. Indicando con X_0, Y_0, Z_0 i coseni di direzione della normale alla S_0 e ponendo per brevità:

$$\rho^2=(\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta)^2\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2+(\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta)^2\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2+$$
$$+(\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta)^2(\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta)^2,$$

avremo dalle (5):

$$\rho X_0=(\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta)(\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta)X_3-$$
$$-(\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta)\frac{\partial T}{\partial u}X_1-(\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta)\frac{\partial T}{\partial v}X_2,$$

e analoghe per Y_0, Z_0. Di qui, essendo σ l'angolo d'inclinazione del segmento MM_0 sopra S_0, si trova:

$$\operatorname{sen}\sigma=X_0X_3+Y_0Y_3+Z_0Z_3=\frac{(\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta)(\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta)}{\rho},$$

e poichè, per le (α) § 11, dobbiamo avere:

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2\sigma}=c\,(T^2-1),$$

ne risulta intanto che T dovrà soddisfare l'equazione a derivate parziali del 1.° ordine:

$$\frac{1}{(\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta)^2}\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2+\frac{1}{(\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta)^2}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2+1=c\,(T^2-1). \quad \text{(I)}$$

Si noti che la costante c può avere un valore arbitrario, purchè sia $c(c+1)>0$ (Cf. § 6); dalla (I) si vede che per $c>0$ sarà $T^2>1$ e invece per $c<0$ avremo $T^2<1$.

Esprimiamo ora inoltre, secondo quanto abbiamo detto al § 11, che sulla S_0 il sistema (u, v) deve essere un sistema coniugato; dovrà perciò annullarsi il determinante:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x_0}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 y_0}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 z_0}{\partial u\,\partial v} \\ \frac{\partial x_0}{\partial u} & \frac{\partial y_0}{\partial u} & \frac{\partial z_0}{\partial u} \\ \frac{\partial x_0}{\partial v} & \frac{\partial y_0}{\partial v} & \frac{\partial z_0}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Ma dalle (5), avendo riguardo alle (4), si trae:

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial u\,\partial v}=\left\{(\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta)\frac{\partial\theta}{\partial v}+\cosh\theta\frac{\partial T}{\partial v}\right\}X_1+$$
$$+\left\{(\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta)\frac{\partial\theta}{\partial u}+\operatorname{senh}\theta\frac{\partial T}{\partial u}\right\}X_2+\frac{\partial^2 T}{\partial u\,\partial v}X_3;$$

per ciò la detta condizione si traduce nell'annullarsi del determinante:

$$\begin{vmatrix} (\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta)\frac{\partial\theta}{\partial v}+\cosh\theta\frac{\partial T}{\partial v} & (\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta)\frac{\partial\theta}{\partial u}+\operatorname{senh}\theta\frac{\partial T}{\partial u} & \frac{\partial^2 T}{\partial u\,\partial v} \\ \operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta & 0 & \frac{\partial T}{\partial u} \\ 0 & \cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta & \frac{\partial T}{\partial v} \end{vmatrix},$$

ossia nella equazione del 2.° ordine (*):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial u\,\partial v}&=\left(\frac{\operatorname{senh}\theta}{\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta}+\frac{\cosh\theta}{\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta}\right)\frac{\partial T}{\partial u}\frac{\partial T}{\partial v}+ \\ &+\frac{\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta}{\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial T}{\partial u}+\frac{\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta}{\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial T}{\partial v}. \end{aligned}\right\} \quad \text{(II)}$$

(*) Si noti che non può essere nullo alcuno dei binomii $\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta$, $\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta$ chè allora la S_0 sarebbe una delle falde dell'evoluta di S (caso escluso).

Queste due equazioni (I), (II), cui T deve soddisfare, formano appunto il sistema di cui è parola al § 11. Esso, come ora dimostreremo, è illimitatamente integrabile (*), sicchè la soluzione T più generale contiene, oltre c, due costanti arbitrarie.

§ 13.

Illimitata integrabilità del sistema (I), (II).

Per dimostrare le asserite proprietà del sistema simultaneo (I), (II) cominciamo dal derivare la (I) una volta rispetto ad u, una seconda rapporto a v e sostituendovi per $\frac{\partial^2 T}{\partial u \partial v}$ il valore dato dalla (II), ne trarremo anche le due derivate seconde:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial u^2}, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial v^2},$$

espresse per le derivate prime e per T.

Riunendovi anche la (II) stessa, otterremo il sistema seguente:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 T}{\partial u^2} &= \frac{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial T}{\partial u} - \frac{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial T}{\partial v} + \\
&\quad + \frac{\cosh\theta}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2 - \frac{\cosh\theta(\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta)}{(\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta)^2}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2 + cT(\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta)^2 \\
\frac{\partial^2 T}{\partial u \partial v} &= \left(\frac{\operatorname{senh}\theta}{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta} + \frac{\cosh\theta}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}\right)\frac{\partial T}{\partial u}\frac{\partial T}{\partial v} + \frac{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial T}{\partial u} + \\
&\quad + \frac{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial T}{\partial v} \\
\frac{\partial^2 T}{\partial v^2} &= -\frac{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial T}{\partial u} + \frac{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial T}{\partial v} - \\
&\quad - \frac{\operatorname{senh}\theta(\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta)}{(\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta)^2}\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2 + \frac{\operatorname{senh}\theta}{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2 + cT(\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta)^2.
\end{aligned}\right\}\ \text{(III)}$$

(*) È ben noto che due equazioni simultanee alle derivate parziali con due variabili indipendenti ed una funzione incognita, l'una del 1.° l'altra del 2.° ordine, possono avere *al massimo* una soluzione comune contenente due costanti arbitrarie e allora il sistema dicesi illimitatamente integrabile. Naturalmente qui si esclude il caso che la seconda equazione sia una conseguenza della prima, chè allora tutte le soluzioni della prima lo sono anche della seconda.

Queste equazioni (III), pel modo con cui le abbiamo dedotte, sono dunque conseguenze delle (I), (II). Siccome però nello stabilire p. e. la prima delle (III) abbiamo derivato la (I) rapporto ad u e *diviso poi per* $\frac{\partial T}{\partial u}$, così abbiamo tacitamente supposto che non sia:

$$\frac{\partial T}{\partial u}=0, \quad \text{nè} \quad \frac{\partial T}{\partial v}=0.$$

Ora questi casi possono darsi effettivamente; ma la loro trattazione diretta è così ovvia che non importa tenerne conto. E invero se si suppone per es. $\frac{\partial T}{\partial v}=0$, dovrà succedere, per la (II), che si abbia o $\frac{\partial T}{\partial u}=0$ o $\frac{\partial \theta}{\partial v}=0$. La prima cosa può darsi solo per T costante ed eguale, per la (I), a $\sqrt{1+\frac{1}{c}}$; ma non vi corrisponde alcuna soluzione del nostro problema perchè nelle relazioni studiate fra la superficie S_0, applicabile sopra una delle cinque fondamentali, e le superficie a curvatura costante S, $\overline{S}$ mai non avviene che T sia costante. L'altro caso $\frac{\partial \theta}{\partial v}=0$ porta che θ e T siano funzioni della sola u e perciò tanto S quanto S_0 hanno la forma di superficie di rotazione. Si ottengono tutte le soluzioni corrispondenti assumendo per S_0 una superficie di rotazione fra le ∞^1 deformate dell'ellissoide e dell'iperboloide e applicando la costruzione dei teoremi di Guichard.

Ora, se abbiamo riguardo alle (III), (I), troviamo che le condizioni d'integrabilità:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial u^2}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial u\,\partial v}\right)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial u\,\partial v}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial v^2}\right)=0,$$

risultano, in forza delle equazioni stesse, identicamente verificate. Queste verifiche si faranno più rapidamente, scrivendo le (III) sotto la forma equivalente seguente, che ci tornerà utile anche più tardi:

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u}\right)=-\frac{\partial\theta}{\partial v}\cdot\frac{1}{\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v}-\\
&\qquad-\cosh\theta\left(\frac{1}{\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2+c\,T(\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta),\\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u}\right)=\operatorname{senh}\theta\cdot\frac{1}{\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u}\cdot\frac{1}{\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v}+\\
&\qquad+\frac{\partial\theta}{\partial u}\cdot\frac{1}{\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v},\\
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v}\right)=\cosh\theta\cdot\frac{1}{\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u}\cdot\frac{1}{\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v}+\\
&\qquad+\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{1}{\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u},\\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v}\right)=-\frac{\partial\theta}{\partial u}\cdot\frac{1}{\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u}-\\
&\qquad-\operatorname{senh}\theta\left(\frac{1}{\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2+c\,T(\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta);
\end{aligned}\right\}\quad(\mathrm{III}^*)
$$

basterà allora derivare la 1.ª e 2.ª delle (III*), e così la 3.ª e la 4.ª, rispettivamente rapporto a v e ad u e sottrarre, avendo riguardo alle (III*) stesse, alla (I) ed alla (2), cui soddisfa θ, e si troveranno due identità.

Ne risulta che il nostro sistema è illimitatamente integrabile e, per definire nel modo più generale una soluzione T delle nostre equazioni, potremo dare ad arbitrio, per una coppia iniziale $(u_0 v_0)$ di valori delle variabili, i valori di:

$$T,\quad \frac{\partial T}{\partial u},\quad \frac{\partial T}{\partial v},$$

purchè legati fra loro dalle (I). È chiaro poi che, se non fissiamo a priori il valore della costante c, potremo prendere affatto ad arbitrio i valori iniziali di T e delle sue derivate prime.

§ 14.

Verifiche relative alla superficie riflettente S_0.

Immaginiamo scelta per T una determinata soluzione del sistema differenziale (I), (III), e considerando la superficie S_0 luogo degli estremi dei segmenti T, staccati sulla normale di S, andiamo a verificare che la S_0 sarà applicabile sull'ellissoide allungato o sull'iperboloide di rotazione a due falde di semi-asse principale $= 1$ e che la congruenza delle normali di S sarà una delle due associate a S_0, secondo il teorema di Guichard.

Giova nelle nostre verifiche tener presente l'equazione seguente, che è una immediata conseguenza delle fondamentali (I), (III*):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{1}{c(T^2-1)-1}\cdot\frac{\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta}{\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u}\right\}+\\ &+\frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{1}{c(T^2-1)-1}\cdot\frac{\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta}{\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v}\right\}=0. \end{aligned}\right\} \tag{β}$$

Dalle formole (5) troviamo intanto pei coefficienti dell'elemento lineare di S_0:

$$d s_0^2 = E_0\, d u^2 + 2 F_0\, d u\, d v + G_0\, d v^2,$$

le formole:
$$\left.\begin{aligned} &E_0=(\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta)^2+\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2, \quad F_0=\frac{\partial T}{\partial u}\frac{\partial T}{\partial v},\\ &G_0=(\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta)^2+\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

indi per la (I):

$$E_0 G_0 - F_0^2 = c\,(T^2-1)\,.\,(\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta)^2\,.\,(\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta)^2. \tag{6*}$$

Calcoliamo ora la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho_T}$ che hanno sulla S_0 le linee $T=$ cost. mediante la formola di Bonnet (*):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_T}=\frac{1}{\sqrt{E_0G_0-F_0^2}}\Bigg\{&\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{F_0\frac{\partial T}{\partial v}-G_0\frac{\partial T}{\partial u}}{\sqrt{E_0\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2-2F_0\frac{\partial T}{\partial u}\frac{\partial T}{\partial v}+G_0\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2}}\right]+\\ &+\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{F_0\frac{\partial T}{\partial u}-E_0\frac{\partial T}{\partial v}}{\sqrt{E_0\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2-2F_0\frac{\partial T}{\partial u}\frac{\partial T}{\partial v}+G_0\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2}}\right]\Bigg\}. \end{aligned}$$

(*) *Lezioni* pag. 145.

Siccome dalle (6) abbiamo:

$$\left.\begin{aligned} E_0\frac{\partial T}{\partial v}-F_0\frac{\partial T}{\partial u}&=(\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta)^2\cdot\frac{\partial T}{\partial v}\\ G_0\frac{\partial T}{\partial u}-F_0\frac{\partial T}{\partial v}&=(\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta)^2\cdot\frac{\partial T}{\partial u},\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

$$E_0\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2-2F_0\frac{\partial T}{\partial u}\frac{\partial T}{\partial v}+G_0\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2=\qquad(8)$$

$$=[c\,T^2-(c+1)]\cdot(\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta)^2(\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta)^2,$$

ne deduciamo per la (β):

$$\frac{1}{\rho_T}=\frac{-c\,T}{\sqrt{c\,(T^2-1)\,[c\,T^2-(c+1)]}}.\qquad(9)$$

Ciò dimostra intanto che sulla S_0 le linee $T=\text{cost.}$ hanno curvatura geodetica costante. Dimostriamo ora di più che queste linee sono altresì geodeticamente parallele fra loro e così sarà provato che la S_0 è applicabile sopra una superficie di rotazione. Invero l'equazione differenziale delle traiettorie ortogonali delle $T=\text{cost.}$ è data (*) da:

$$\left(E_0\frac{\partial T}{\partial v}-F_0\frac{\partial T}{\partial u}\right)d\,u+\left(F_0\frac{\partial T}{\partial v}-G_0\frac{\partial T}{\partial u}\right)d\,v=0,$$

ossia per le (7), da:

$$(\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta)^2\frac{\partial T}{\partial v}\,d\,u-(\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta)^2\frac{\partial T}{\partial u}\,d\,v=0.$$

Applicando l'altra formola di Bonnet a pag. 146 delle *Lezioni*, per la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho_g}$ di queste linee troviamo:

$$\frac{1}{\rho_g}=\frac{1}{\sqrt{E_0G_0-F_0^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial v}\left[\sqrt{\frac{c\,(T^2-1)}{c\,T^2-(c+1)}}\,\frac{\partial T}{\partial u}\right]-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial}{\partial u}\left[\sqrt{\frac{c\,(T^2-1)}{c\,T^2-(c+1)}}\,\frac{\partial T}{\partial v}\right]\right\}=0,$$

ciò che dimostra l'asserto.

Per trovare ora l'elemento lineare della superficie di rotazione su cui S_0 è applicabile, basterà calcolare, secondo la formola pag. 163 delle *Lezioni*,

(*) *Lezioni*, pag. 65.

l'arco w delle geodetiche ortogonali alle linee $T = \text{cost.}$, il che dà:

$$w = \int \sqrt{\frac{c\,(T^2 - 1)}{c\,T^2 - (c + 1)}}\, d\,T.$$

L'elemento lineare di S_0 prenderà dunque la forma:

$$d\,s_0^2 = \frac{c\,(T^2 - 1)}{c\,T^2 - (c + 1)}\, d\,T^2 + \varphi^2 (T)\, d\,v_1^2,$$

essendo $\varphi(T)$ una funzione della sola T, e a causa delle (9) dovremo avere:

$$\sqrt{\frac{c\,T^2 - (c + 1)}{c\,(T^2 - 1)}}\, \frac{1}{\varphi}\, \frac{d\,\varphi}{d\,T} = \frac{c\,T}{\sqrt{[c\,T^2 - (c + 1)]\, c\,(T^2 - 1)}},$$

cioè:

$$\frac{d \log \varphi}{d\,T} = \frac{1}{2}\, \frac{d}{d\,T} \log \sqrt{c\,T^2 - (c + 1)}.$$

Possiamo dunque scrivere:

$$d\,s_0^2 = \frac{c\,(T^2 - 1)}{c\,T^2 - (c + 1)}\, d\,T^2 + [c\,T^2 - (c + 1)]\, d\,v_1^2,$$

ovvero, introducendo l'angolo σ colla formola (α) § 11:

$$\frac{1}{\text{sen}^2 \sigma} = c\,(T^2 - 1),$$

$$d\,s_0^2 = \frac{d\,\sigma^2}{c\,\text{sen}^4 \sigma\,(1 + c\,\text{sen}^2 \sigma)} + \cot^2 \sigma\, d\,v_1^2.$$

Si ha poi:

$$\left(\frac{d\,\sigma}{d\,w}\right)^2 = c\,\text{sen}^4 \sigma\,(1 + c\,\text{sen}^2 \sigma),$$

e il confronto di queste formole con quelle del § 6, congiunto coll'osservazione che i segmenti T, essendo costanti lungo le linee $T = \text{cost.}$ ed ortogonali alla S risultano altresì ortogonali a queste linee sulla S_0, basta per dedurne:

1.° che la superficie S_0 è applicabile sull'ellissoide allungato di rotazione di semi-asse maggiore $= 1$ o sull'iperboloïde di rotazione a due falde di semi-asse traverso $= 1$, secondo che $c < 0$ ovvero $c > 0$;

2.° che la congruenza delle normali alla S è una delle due associate a S_0.

E questo è appunto quanto volevamo dimostrare.

§ 15.

Le superficie $\overline{S}$ a curvatura costante positiva trasformate.

Ci occuperemo più tardi della effettiva integrazione del sistema di equazioni differenziali (I), (III). Supposto per ora di conoscerne una soluzione particolare T, ne dedurremo colle formole:

$$x_0 = x + T X_3, \quad y_0 = y + T Y_3, \quad z_0 = z + T Z_3,$$

la corrispondente superficie S_0 applicabile, come si è visto, sull'ellissoide o sull'iperboloide di rotazione. D'altronde, per le osservazioni fondamentali del § 11, se costruiamo la superficie $\overline{S}$ simmetrica di S rispetto alla S_0, riguardata come superficie riflettente delle normali di S, abbiamo nella $\overline{S}$ una seconda superficie di curvatura $K = +1$. Si tratta ora di scrivere le formole effettive che dànno le coordinate del punto $\overline{M}$ mobile sopra $\overline{S}$, corrispondente ad un punto $M \equiv (x, y, z)$ di S.

Per ciò osserviamo che, denotando con x_1, y_1, z_1 le coordinate del punto medio M_1 del segmento $M\overline{M}$, il quale ha la direzione della normale (X_0, Y_0, Z_0) alla S_0 e ponendo $\overline{MM_1} = \Lambda$, avremo:

$$x_1 = x + \Lambda X_0, \quad y_1 = y + \Lambda Y_0, \quad z_1 = z + \Lambda Z_0.$$

Ma si ha (§ 12):

$$X_0 = \frac{1}{\sqrt{c(T^2-1)}} \left\{ X_3 - \frac{1}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta} \frac{\partial T}{\partial u} X_1 - \frac{1}{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta} \frac{\partial T}{\partial v} X_2 \right\},$$

colle analoghe per Y_0, Z_0 e poichè deve essere:

$$(x_1 - x_0) X_0 + (y_1 - y_0) Y_0 + (z_1 - z_0) Z_0 = 0,$$

ne deduciamo:

$$\Lambda = \frac{T}{\sqrt{c(T^2-1)}}.$$

Dalle formole:

$$\frac{x + \overline{x}}{2} = x_1, \quad \frac{y + \overline{y}}{2} = y_1, \quad \frac{z + \overline{z}}{2} = z_1,$$

deduciamo perciò le formole cercate:

$$\left.\begin{aligned}
\bar{x} &= x + \frac{2T}{c(T^2-1)}\left\{X_3 - \frac{1}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u}X_1 - \right.\\
&\qquad \left. - \frac{1}{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v}X_2\right\}\\
\bar{y} &= y + \frac{2T}{c(T^2-1)}\left\{Y_3 - \frac{1}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u}Y_1 - \right.\\
&\qquad \left. - \frac{1}{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v}Y_2\right\}\\
\bar{z} &= z + \frac{2T}{c(T^2-1)}\left\{Z_3 - \frac{1}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u}Z_1 - \right.\\
&\qquad \left. - \frac{1}{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v}Z_2\right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Queste ci definiscono la superficie $\overline{S}$ a curvatura $K = +1$ trasformata della primitiva S. Indicando con $\overline{X}_3$, $\overline{Y}_3$, $\overline{Z}_3$ i coseni di direzione della normale alla $\overline{S}$, questi saranno proporzionali alle differenze:

$$\bar{x} - x_0, \quad \bar{y} - y_0, \quad \bar{z} - z_0,$$

e si avrà per ciò:

$$\left.\begin{aligned}
\overline{X}_3 &= \frac{2}{c(T^2-1)}\left\{\frac{1}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u}X_1 + \right.\\
&+ \left.\frac{1}{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v}X_2 + \frac{cT^2-(c+2)}{2}X_3\right\},
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

e le analoghe per $\overline{Y}_3$, $\overline{Z}_3$. Servendosi delle (10), (11), non è difficile verificare che la $\overline{S}$ ha effettivamente la curvatura $K = +1$ e che le sue linee di curvatura sono le u, v. Differiremo queste verifiche, del resto non necessarie, al prossimo § 21.

Siamo così giunti al risultato: *Da ogni superficie S nota a curvatura costante positiva, integrando il sistema delle equazioni differenziali (I), (III) §§ 12, 13, deduciamo, mediante le (10), una tripla infinità di tali nuove superficie $\overline{S}$ ed ancora una tripla infinità di superficie applicabili sopra ellissoidi allungati ed iperboloidi di rotazione a due falde.*

Se vogliamo poi conoscere il significato geometrico delle tre costanti arbitrarie, vediamo subito che, per fissare completamente i valori iniziali di:

$$T, \quad \frac{\partial T}{\partial u}, \quad \frac{\partial T}{\partial v},$$

e quindi la trasformata $\bar{S}$ di S, basta conoscere il punto $\bar{M}$ di $\bar{S}$ che deve corrispondere ad un assegnato punto M di S ed in esso punto $\bar{M}$ il piano tangente di $\bar{S}$. Questi elementi possono, come è chiaro, assumersi ad arbitrio purchè le due normali in M, $\bar{M}$ si incontrino in un punto M_0 equidistante da M, $\bar{M}$. Si può anche dire che è lecito scegliere ad arbitrio, sulla normale in M, il punto M_0 corrispondente di S_0 e fissare inoltre arbitrariamente il piano tangente in M_0 alla S_0.

§ 16.

Le superficie d'Enneper derivate dalla soluzione $\theta = 0$.

Per dimostrare in un semplice esempio l'utilità delle conseguite trasformazioni, partiamo dalla soluzione evidente $\theta = 0$ (*) dell'equazione fondamentale (2):

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} + \operatorname{senh} \theta \cosh \theta = 0.$$

S'intende che tutte le nostre formole dei §§ 12-15 conserveranno la loro validità purchè scegliamo:

$$(x, y, z), \quad (X_i, Y_i, Z_i), \quad (i = 1, 2, 3),$$

in guisa che le (4) § 12 risultino soddisfatte. A tale scopo basterà assumere:

$$\left.\begin{array}{lll} x = 0 & y = 0 & z = v \\ X_1 = -\operatorname{sen} u & Y_1 = \cos u & Z_1 = 0 \\ X_2 = 0 & Y_2 = 0 & Z_2 = 1 \\ X_3 = \cos u & Y_3 = \operatorname{sen} u & Z_3 = 0, \end{array}\right\} \qquad (12)$$

le quali formole ci mostrano che la superficie S si riduce in tal caso all'asse delle z e le sue normali alle normali di questa retta.

(*) Cfr. *Lezioni*, pag. 440.

Le due equazioni fondamentali (I), (II) § 12 diventano nel caso attuale:

$$\frac{1}{T^2}\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2=c\,T^2-(c+1),$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial u\,\partial v}=\frac{\partial T}{\partial u}\,\frac{\partial T}{\partial v}.$$

La seconda di esse, integrata, porge:

$$T=U\,.\,V,$$

dove U indica una funzione della sola u, V della sola v, coll'avvertenza però che nessuna delle due si riduca ad una costante (v. § 13). Sostituendo nella prima e indicando con accenti le derivate, abbiamo:

$$\frac{U'^2}{U^2}+U^2(V'^2-c\,V^2)+c+1=0,$$

onde segue:

$$\left.\begin{aligned} V'^2-c\,V^2&=b\\ \frac{U'^2}{U^2}+b\,U^2+c+1&=0,\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

indicando con b una nuova costante. Osserviamo che se si moltiplica U per un fattore costante e contemporaneamente si divide V pel medesimo fattore, ciò che non altera T, veniamo ad alterare la costante b per un fattore quadrato qualsiasi. L'integrazione del sistema (13) introduce quindi due nuove costanti arbitrarie, ciò che è conforme alle nostre osservazioni generali; queste però, essendo qui additive in u, v, non hanno evidentemente influenza sulla forma delle superficie derivate.

Distinguiamo due casi a seconda del segno di c:

1.° caso $c<0$. — Poniamo:

$$c=-\frac{1}{a^2},\quad b=\frac{1}{a^2},$$

e potremo assumere:

$$V=\operatorname{sen}\left(\frac{v}{a}\right),\quad U=\frac{\sqrt{1-a^2}}{\cosh\left(\dfrac{u\sqrt{1-a^2}}{a}\right)}.$$

Per le (4), otterremo la corrispondente superficie applicabile sull'ellissoide allungato di rotazione di semi-asse maggiore $=1$, di semi asse-minore $=a$, colle formole seguenti:

$$x_0 = \frac{\sqrt{1-a^2}\cos u}{\cosh\left(\frac{u\sqrt{1-a^2}}{a}\right)} \operatorname{sen}\left(\frac{v}{a}\right), \quad y_0 = \frac{\sqrt{1-a^2}\operatorname{sen} u}{\cosh\left(\frac{u\sqrt{1-a^2}}{a}\right)} \operatorname{sen}\left(\frac{v}{a}\right), \quad z_0 = v.$$

In coordinate cilindriche:

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right), \quad z,$$

l'equazione di questa superficie si scrive evidentemente:

$$r\cosh\left(\frac{\theta\sqrt{1-a^2}}{a}\right) = \sqrt{1-a^2}\operatorname{sen}\left(\frac{z}{a}\right); \tag{14}$$

le linee $r = \text{cost.}$, cioè le intersezioni della S_0 coi cilindri di rotazione attorno all'asse delle z, sono le deformate dei paralleli dell'ellissoide.

Le (10) ci dànno poi per la superficie $\overline{S}$ applicabile sulla sfera di raggio $= 1$ le formole:

$$\left.\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{2a\sqrt{1-a^2}\operatorname{sen}\left(\frac{v}{a}\right)}{\cosh^2\left(\frac{u\sqrt{1-a^2}}{a}\right) - (1-a^2)\operatorname{sen}^2\left(\frac{v}{a}\right)}\left\{a\cosh\left(\frac{u\sqrt{1-a^2}}{a}\right)\cos u - \right.\\
&\qquad \left. - \sqrt{1-a^2}\operatorname{senh}\left(\frac{u\sqrt{1-a^2}}{a}\right)\operatorname{sen} u\right\}\\
\bar{y} &= \frac{2a\sqrt{1-a^2}\operatorname{sen}\left(\frac{v}{a}\right)}{\cosh^2\left(\frac{u\sqrt{1-a^2}}{a}\right) - (1-a^2)\operatorname{sen}^2\left(\frac{v}{a}\right)}\left\{a\cosh\left(\frac{u\sqrt{1-a^2}}{a}\right)\operatorname{sen} u + \right.\\
&\qquad \left. + \sqrt{1-a^2}\operatorname{senh}\left(\frac{u\sqrt{1-a^2}}{a}\right)\cos u\right\}\\
\bar{z} &= v - \frac{2a(1-a^2)\operatorname{sen}\left(\frac{v}{a}\right)\cos\left(\frac{v}{a}\right)}{\cosh^2\left(\frac{u\sqrt{1-a^2}}{a}\right) - (1-a^2)\operatorname{sen}^2\left(\frac{v}{a}\right)}.
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

2.° caso $c > 0$. — Poniamo:

$$c = \frac{1}{a^2}, \quad b = -\frac{1}{a^2}\ (*),$$

(*) Si noti che per la 2.ª delle (13) deve essere $b < 0$.

e le (13) integrate dànno:

$$V = \cosh\left(\frac{v}{a}\right), \quad U = \frac{\sqrt{a^2+1}}{\operatorname{sen}\left(\frac{u\sqrt{a^2+1}}{a}\right)}.$$

Per la superficie S_0 applicabile sull'iperboloide di rotazione a due falde si ha quindi:

$$x_0 = \frac{\sqrt{a^2+1}\,.\cos u}{\operatorname{sen}\left(\frac{u\sqrt{a^2+1}}{a}\right)}\cosh\left(\frac{v}{a}\right), \quad y_0 = \frac{\sqrt{a^2+1}\,.\operatorname{sen} u}{\operatorname{sen}\left(\frac{u\sqrt{a^2+1}}{a}\right)}\cosh\left(\frac{v}{a}\right), \quad z_0 = v,$$

ovvero in coordinate cilindriche:

$$r\operatorname{sen}\left(\frac{\theta\sqrt{a^2+1}}{a}\right) = \sqrt{a^2+1}\cosh\left(\frac{z}{a}\right). \tag{14*}$$

La superficie $\overline{S}$ applicabile sulla sfera è poi data dalle formole:

$$\left.\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{2a\sqrt{a^2+1}\cosh\left(\frac{v}{a}\right)}{(a^2+1)\cosh^2\left(\frac{v}{a}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{u\sqrt{a^2+1}}{a}\right)}\left\{a\operatorname{sen}\left(\frac{u\sqrt{a^2+1}}{a}\right)\cos u - \right.\\
&\qquad \left. - \sqrt{a^2+1}\cos\left(\frac{u\sqrt{a^2+1}}{a}\right)\operatorname{sen} u\right\}\\
\overline{y} &= \frac{2a\sqrt{a^2+1}\cosh\left(\frac{v}{a}\right)}{(a^2+1)\cosh^2\left(\frac{v}{a}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{u\sqrt{a^2+1}}{a}\right)}\left\{a\operatorname{sen}\left(\frac{u\sqrt{a^2+1}}{a}\right)\operatorname{sen} u + \right.\\
&\qquad \left. + \sqrt{a^2+1}\cos\left(\frac{u\sqrt{a^2+1}}{a}\right)\cos u\right\}\\
\overline{z} &= v - \frac{2a(a^2+1)\operatorname{senh}\left(\frac{v}{a}\right)\cosh\left(\frac{v}{a}\right)}{(a^2+1)\cosh^2\left(\frac{v}{a}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{u\sqrt{a^2+1}}{a}\right)}.
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Tanto nella superficie (15) quanto nella (16) le linee di curvatura $u = \text{cost.}$ sono evidentemente tracciate in piani per l'asse z e in conseguenza le altre linee di curvatura $v = \text{cost.}$ sono sopra sfere ortogonali alla superficie col centro sull'asse. Le superficie (15), (16) appartengono dunque alla classe di

ENNEPER e precisamente a quel caso limite che, sfuggito ad ENNEPER, fu avvertito da KUEN (*). Osserviamo da ultimo che: *se nella superficie (16) si dà alla costante* $\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}$ *un valore commensurabile, le linee di curvatura sferiche* $v = cost.$ *risultano curve algebriche razionali.*

§ 17.

CASO DI UNA SUPERFICIE S PSEUDOSFERICA.

Passiamo ora a considerare il caso di una superficie S a curvatura costante negativa $K = -1$. La nostra ricerca procederà, secondo le osservazioni generali del § 11, in modo del tutto analogo a quello del § 12, per cui potremo qui limitarci a indicarla sommariamente.

Riferita la superficie pseudosferica S alle sue linee di curvatura u, v, il suo elemento lineare assumerà la forma:

$$d s^2 = \cos^2 \theta \, d u^2 + \operatorname{sen}^2 \theta \, d v^2, \tag{17}$$

dove θ è una soluzione dell'equazione a derivate parziali:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = \operatorname{sen} \theta \cos \theta, \tag{18}$$

e i suoi raggi principali di curvatura saranno dati dalle formole:

$$r_1 = -\operatorname{tg} \theta, \quad r_2 = \cot \theta.$$

Colle solite notazioni, avremo qui le formole fondamentali:

$$\left.\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial x}{\partial u} = \cos \theta \, X_1 & \dfrac{\partial x}{\partial v} = \operatorname{sen} \theta \, X_2 & \\[2ex]
\dfrac{\partial X_1}{\partial u} = \dfrac{\partial \theta}{\partial v} X_2 - \operatorname{sen} \theta \, X_3, & \dfrac{\partial X_2}{\partial u} = -\dfrac{\partial \theta}{\partial v} X_1 & \dfrac{\partial X_3}{\partial u} = \operatorname{sen} \theta \, X_1 \\[2ex]
\dfrac{\partial X_1}{\partial v} = \dfrac{\partial \theta}{\partial u} X_2 & \dfrac{\partial X_2}{\partial v} = -\dfrac{\partial \theta}{\partial u} X_1 + \cos \theta \, X_3, & \dfrac{\partial X_3}{\partial v} = -\cos \theta \, X_2.
\end{array}\right\} \tag{19}$$

Staccando sulla normale in ogni punto M di S un segmento $M M_0 = T$, per

(*) *Sitzungsberichte der Akademie zu München*, 1884. Heft II.

le coordinate x_0, y_0, z_0 dell'estremo M_0 avremo:

$$x_0 = x + T X_3, \quad y_0 = y + T Y_3, \quad z_0 = z + T Z_3,$$

da cui derivando:

$$\frac{\partial x_0}{\partial u} = (\cos\theta + T \operatorname{sen}\theta)\, X_1 + \frac{\partial T}{\partial u} X_3$$

$$\frac{\partial x_0}{\partial v} = (\operatorname{sen}\theta - T\cos\theta)\, X_2 + \frac{\partial T}{\partial v} X_3,$$

indi pei coseni di direzione X_0, Y_0, Z_0 della normale alla superficie S_0 luogo di M_0:

$$\rho\, X_0 = (\operatorname{sen}\theta - T\cos\theta)\frac{\partial T}{\partial u} X_1 + (\cos\theta + T\operatorname{sen}\theta)\frac{\partial T}{\partial v} X_2 -$$

$$- (\operatorname{sen}\theta - T\cos\theta) . (\cos\theta + T\operatorname{sen}\theta)\, X_3,$$

e le analoghe per Y_0, Z_0, avendo posto:

$$\rho^2 = (\operatorname{sen}\theta - T\cos\theta)^2\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2 + (\cos\theta + T\operatorname{sen}\theta)^2\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2 +$$

$$+ (\operatorname{sen}\theta - T\cos\theta)^2 (\cos\theta + T\operatorname{sen}\theta)^2.$$

Indicando con σ l'angolo d'inclinazione del segmento MM_0 sulla S_0 avremo dunque:

$$\operatorname{sen}\sigma = X_0 X_3 + Y_0 Y_3 + Z_0 Z_3 = \frac{(\operatorname{sen}\theta - T\cos\theta)(\cos\theta + T\operatorname{sen}\theta)}{\rho}.$$

D'altronde la formola (α) § 11, valendo qui il segno inferiore, ci dà:

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2\sigma} = c\,(T^2 + 1),$$

dove porremo, come al § 7, per la costante c positiva $c = \frac{1}{a^2}$; otteniamo dunque per T l'equazione a derivate parziali del 1.° ordine:

$$\frac{1}{(\cos\theta + T\operatorname{sen}\theta)^2}\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{(\operatorname{sen}\theta - T\cos\theta)^2}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2 + 1 = \frac{1}{a^2}(T^2 + 1). \tag{20}$$

Esprimiamo ora che il sistema (u, v) deve essere sulla S_0 un sistema coniugato e, procedendo come al § 12, troveremo per T l'ulteriore equazione a derivate parziali del 2.° ordine:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 T}{\partial u\,\partial v} &= \left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta + T\operatorname{sen}\theta} - \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta - T\cos\theta}\right)\frac{\partial T}{\partial u}\frac{\partial T}{\partial v} - \\ &- \frac{\operatorname{sen}\theta - T\cos\theta}{\cos\theta + T\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial T}{\partial u} + \frac{\cos\theta + T\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta - T\cos\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial T}{\partial v}.\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Il sistema delle (20), (21) costituisce un sistema illimitatamente integrabile e la soluzione più generale T contiene quindi, oltre a, due nuove costanti arbitrarie. La dimostrazione si fa, come al § 13, scrivendo insieme alla (21) le altre due che seguono derivando la (20) $\left(\text{esclusi anche qui i casi ovvii } \frac{\partial T}{\partial u}=0 \text{ o } \frac{\partial T}{\partial v}=0\right)$; si ha così il sistema seguente:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\cos\theta+T\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial T}{\partial u}\right)=\frac{\partial\theta}{\partial v}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}\theta-T\cos\theta}\frac{\partial T}{\partial v}-\\
&\qquad-\operatorname{sen}\theta\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta-T\cos\theta}\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2+\frac{T}{a^2}(\cos\theta+T\operatorname{sen}\theta)\\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\cos\theta+T\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial T}{\partial u}\right)=-\cos\theta\frac{1}{\cos\theta+T\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial T}{\partial u}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}\theta-T\cos\theta}\frac{\partial T}{\partial v}+\\
&\qquad+\frac{\partial\theta}{\partial u}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}\theta-T\cos\theta}\frac{\partial T}{\partial v}\\
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta-T\cos\theta}\frac{\partial T}{\partial v}\right)=\operatorname{sen}\theta\frac{1}{\cos\theta+T\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial T}{\partial u}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}\theta-T\cos\theta}\frac{\partial T}{\partial v}-\\
&\qquad-\frac{\partial\theta}{\partial v}\cdot\frac{1}{\cos\theta+T\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial T}{\partial u}\\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta-T\cos\theta}\frac{\partial T}{\partial v}\right)=-\frac{\partial\theta}{\partial u}\cdot\frac{1}{\cos\theta+T\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial T}{\partial u}+\\
&\qquad+\cos\theta\left(\frac{1}{\cos\theta+T\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2+\frac{T}{a^2}(\operatorname{sen}\theta-T\cos\theta).
\end{aligned}\right\}\quad(22)$$

È bene osservare che in forza di queste equazioni si ha identicamente:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{1}{T^2+1-a^2}\frac{\operatorname{sen}\theta-T\cos\theta}{\cos\theta+T\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial T}{\partial u}\right\}+\\
&+\frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{1}{T^2+1-a^2}\frac{\cos\theta+T\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta-T\cos\theta}\frac{\partial T}{\partial v}\right\}=0.
\end{aligned}\right\}\quad(22^*)$$

§ 18.

Verifiche relative alla superficie riflettente S_0.

Supposta scelta una soluzione T delle nostre equazioni di trasformazione (20), (22), verifichiamo ora che la superficie S_0 luogo degli estremi M_0 dei segmenti T ha l'elemento lineare dato dalla formola (29*) § 6:

$$d s_0^2 = \frac{a^2 \, d \sigma^2}{\operatorname{sen}^4 \sigma \left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \sigma}{a^2}\right)} + \cot^2 \sigma \, d v_1^2. \tag{23}$$

Calcolando in primo luogo i coefficienti E_0, F_0, G_0 dell'elemento lineare di S_0, troviamo:

$$E_0 = (\cos\theta + T \operatorname{sen}\theta)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2, \quad F_0 = \frac{\partial T}{\partial u} \frac{\partial T}{\partial v},$$

$$G_0 = (\operatorname{sen}\theta - T\cos\theta)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2,$$

$$E_0 G_0 - F_0^2 = \frac{T^2 + 1}{a^2} (\operatorname{sen}\theta - T\cos\theta)^2 (\cos\theta + T\operatorname{sen}\theta)^2.$$

Se calcoliamo nuovamente, colla formola di Bonnet, la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho_T}$ delle linee $T = \text{cost.}$ sulla S_0, troviamo per le precedenti e per la (22*):

$$\frac{1}{\rho_T} = \frac{-T}{\sqrt{(T^2+1)(T^2+1-a^2)}}.$$

Medesimamente si verifica che le loro traiettorie ortogonali sono linee geodetiche e l'arco w di queste geodetiche, contato da una curva fissa $T = \text{cost.}$, è dato da:

$$w = \int \frac{\sqrt{T^2+1}}{\sqrt{T^2+1-a^2}} \, d T.$$

In conseguenza l'elemento lineare di S_0 assume la forma:

$$d s_0^2 = \frac{T^2+1}{T^2+1-a^2} \, d T^2 + \frac{T^2+1-a^2}{a^2} \, d v_1^2;$$

questa colla sostituzione:

$$T^2+1=\frac{a^2}{\operatorname{sen}^2\sigma},$$

si cangia appunto nella (23). Paragonando le formole superiori con quelle del § 7 vediamo che la superficie S_0 è applicabile sopra una delle tre ultime superficie fondamentali di rotazione e la congruenza delle normali della superficie pseudosferica S è una delle due associate alla S_0.

Ne segue che la superficie $\overline{S}$ normale alla congruenza riflessa e simmetrica di S rispetto alla superficie riflettente S_0 è essa stessa pseudosferica di raggio $=1$. Per le coordinate $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ di un punto $\overline{M}$ mobile sopra $\overline{S}$ troviamo le formole (cf. § 15):

$$\left.\begin{aligned}
\overline{x}&=x+\frac{2a^2T}{T^2+1}\left\{X_3-\frac{1}{\cos\theta+T\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial T}{\partial u}X_1-\right.\\
&\qquad\left.-\frac{1}{\operatorname{sen}\theta-T\cos\theta}\frac{\partial T}{\partial v}X_2\right\}\\
\overline{y}&=y+\frac{2a^2T}{T^2+1}\left\{Y_3-\frac{1}{\cos\theta+T\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial T}{\partial u}Y_1-\right.\\
&\qquad\left.-\frac{1}{\operatorname{sen}\theta-T\cos\theta}\frac{\partial T}{\partial v}Y_2\right\}\\
\overline{z}&=z+\frac{2a^2T}{T^2+1}\left\{Z_3-\frac{1}{\cos\theta+T\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial T}{\partial u}Z_1-\right.\\
&\qquad\left.-\frac{1}{\operatorname{sen}\theta-T\cos\theta}\frac{\partial T}{\partial v}Z_2\right\}.
\end{aligned}\right\}\qquad(24)$$

§ 19.

Le superficie pseudosferiche d'Enneper derivate dalla soluzione $\theta=0$.

Applicheremo anche qui le nostre trasformazioni al caso particolare in cui si parta dalla soluzione $\theta=0$ della (18). Le formole del paragrafo precedente conserveranno la loro validità, ove si faccia:

$$\begin{array}{lll}
x=0 & y=0 & z=u\\
X_1=0 & Y_1=0 & Z_1=1\\
X_2=\operatorname{sen}v, & Y_2=\cos v, & Z_2=0\\
X_3=\cos v, & Y_3=-\operatorname{sen}v & Z_3=0.
\end{array}$$

Le equazioni (20), (21), la cui integrazione conduce alle superficie pseudosferiche $\overline{S}$ trasformate, diventano:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{T^2}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2 + 1 = \frac{T^2+1}{a^2}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial T}{\partial u}\,\frac{\partial T}{\partial v}.$$

Se ne trae $T = U\,V$ con U funzione della sola u, V della sola v soddisfacenti alle condizioni:

$$U'^2 - \frac{U^2}{a^2} = b,$$

$$\frac{V'^2}{V^2} + b\,V^2 = \frac{1}{a^2} - 1,$$

dove b è una nuova costante.

Lasciamo da parte i casi $a = 1$ ed $a < 1$ i quali dànno, come si vedrà nel Cap. V, superficie pseudosferiche alle quali si perviene egualmente dalla soluzione $\theta = 0$ componendo due successive trasformazioni complementari o di Bäcklund (reali). Supponendo adunque $a > 1$, dovendo b essere manifestamente negativa, potremo fare $b = -1$ e integrando avremo:

$$U = a \cosh\left(\frac{u}{a}\right), \quad V = \frac{\sqrt{a^2-1}}{a \operatorname{sen}\left(\frac{v\sqrt{a^2-1}}{a}\right)}.$$

Per la superficie S_0 applicabile sul sinusoide iperbolico troviamo allora:

$$x_0 = \frac{\sqrt{a^2-1}\cosh\left(\frac{u}{a}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{v\sqrt{a^2-1}}{a}\right)}, \quad y_0 = \frac{\sqrt{a^2-1}\cosh\left(\frac{u}{a}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{v\sqrt{a^2-1}}{a}\right)}, \quad z_0 = u;$$

in coordinate cilindriche l'equazione di questa superficie è evidentemente:

$$r \operatorname{sen}\left(\frac{\theta\sqrt{a^2-1}}{a}\right) = \sqrt{a^2-1}\cosh\left(\frac{z}{a}\right). \tag{25}$$

La superficie pseudosferica $\overline{S_0}$ normale ai raggi riflessi si trova poi data dalle formole:

$$
\left.
\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{2\,a\sqrt{a^2+1}\cosh\left(\frac{u}{a}\right)}{(a^2-1)\cosh^2\left(\frac{u}{a}\right)+a^2\operatorname{sen}^2\left(\frac{v\sqrt{a^2-1}}{a}\right)}\left\{a\operatorname{sen}\left(\frac{v\sqrt{a^2-1}}{a}\right)\cos v\,-\right.\\
&\qquad\left.-\sqrt{a^2-1}\cos\left(\frac{v\sqrt{a^2-1}}{a}\right)\operatorname{sen} v\right\}\\
\bar{y} &= \frac{2\,a\sqrt{a^2-1}\cosh\left(\frac{u}{a}\right)}{(a^2-1)\cosh^2\left(\frac{u}{a}\right)+a^2\operatorname{sen}^2\left(\frac{v\sqrt{a^2-1}}{a}\right)}\left\{a\operatorname{sen}\left(\frac{v\sqrt{a^2-1}}{a}\right)\operatorname{sen} v\,+\right.\\
&\qquad\left.+\sqrt{a^2-1}\cos\left(\frac{v\sqrt{a^2-1}}{a}\right)\cos v\right\}\\
\bar{z} &= u-\frac{2\,a\,(a^2-1)\operatorname{senh}\left(\frac{u}{a}\right)\cosh\left(\frac{u}{a}\right)}{(a^2-1)\cosh^2\left(\frac{u}{a}\right)+a^2\operatorname{sen}^2\left(\frac{v\sqrt{a^2-1}}{a}\right)}\,.
\end{aligned}
\right\}\tag{26}
$$

Le linee di curvatura $v=\text{cost.}$ della $\bar{S}$ sono in piani per l'asse z e le $u=\text{cost.}$ sono quindi tracciate sopra sfere ortogonali alla superficie coi centri sull'asse. Si osservi anche qui che, ove la costante $\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}$ sia commensurabile, queste ultime linee di curvatura sono curve algebriche razionali.

CAPITOLO IV.

Le equazioni di trasformazione cangiate in un sistema lineare ed omogeneo. — Sua interpretazione geometrica.

§ 20.

Le equazioni di trasformazione (I), (III) dei §§ 12, 13 cangiate in un sistema lineare.

Al sistema di equazioni simultanee alle derivate parziali per la funzione $T(u, v)$, che definisce le nostre trasformazioni, si può dare una notevole forma *lineare ed emogenea*, di cui ci andiamo ora ad occupare (*).

(*) Procediamo nel testo per via puramente analitica. Ma non è fuor di luogo il far notare come a questa trasformazione delle equazioni fondamentali si è condotti da con-

Cominciando dal caso in cui la S sia a curvatura positiva $K=+1$, partiamo dal sistema differenziale (I), (III*) §§ 12, 13 che definisce le nostre trasformazioni. In virtù delle (III*) ibid., vediamo subito che l'espressione:

$$\frac{\operatorname{senh}\theta}{\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta}\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial u}du+\frac{\cosh\theta}{\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta}\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial v}dv,$$

è un differenziale esatto. Possiamo quindi determinare una conveniente funzione Φ di u, v, che soddisfi le due equazioni:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u}=\frac{\operatorname{senh}\theta}{\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta}\frac{\Phi}{T}\frac{\partial T}{\partial u}\cdot$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial v}=\frac{\cosh\theta}{\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta}\frac{\Phi}{T}\frac{\partial T}{\partial v},$$

e formando di qui le derivate seconde di Φ, coll'osservare le dette (III*) § 13, troveremo le formole:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}=\coth\theta\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\Phi}{\partial u}-\operatorname{tgh}\theta\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial\Phi}{\partial v}+$$
$$+c\operatorname{senh}^2\theta\,.\,\Phi+(c+1)\operatorname{senh}\theta\cosh\theta\frac{\Phi}{T},$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial v}=\coth\theta\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial\Phi}{\partial u}+\operatorname{tgh}\theta\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\Phi}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}=-\coth\theta\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\Phi}{\partial u}+\operatorname{tgh}\theta\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial\Phi}{\partial v}+$$
$$+c\cosh^2\theta\,\Phi+(c+1)\operatorname{senh}\theta\cosh\theta\frac{\Phi}{T}\cdot$$

Introduciamo ora una seconda funzione incognita W, ponendo:

$$W=\frac{\Phi}{T}\cdot$$

siderazioni geometriche tratte dalla teoria dei sistemi ciclici. Se consideriamo due superficie S, $\overline{S}$ a curvatura costante (positiva o negativa) trasformate l'una dell'altra secondo una delle nostre trasformazioni, le normali in due loro punti corrispondenti M, $\overline{M}$ si incontrano in un punto M_0, equidistante da M, $\overline{M}$. Possiamo quindi descrivere un circolo c che incontra ortogonalmente S, $\overline{S}$ in M, $\overline{M}$ rispettivamente e poichè sopra S, $\overline{S}$ si corrispondono le linee di curvatura, il sistema ∞^2 di circoli c è un sistema ciclico. Applicando le formole generali relative a questi sistemi (*Lezioni*, Cap. XIII) si arriva precisamente alla trasformazione di formole data nel testo.

ed avremo per le funzioni incognite Φ, W il sistema *lineare ed omogeneo*:

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} &= \coth\theta\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\Phi}{\partial u} - \operatorname{tgh}\theta\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial\Phi}{\partial v} + \\
&\quad + c\,\operatorname{senh}^2\theta\,\Phi + (c+1)\operatorname{senh}\theta\cosh\theta\,W, \\
\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial v} &= \coth\theta\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial\Phi}{\partial u} + \operatorname{tgh}\theta\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\Phi}{\partial v}, \\
\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2} &= -\coth\theta\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\Phi}{\partial u} + \operatorname{tgh}\theta\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial\Phi}{\partial v} + \\
&\quad + c\cosh^2\theta\,\Phi + (c+1)\operatorname{senh}\theta\cosh\theta\,W.
\end{aligned}\right\} \qquad (A)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial u} &= -\coth\theta\frac{\partial\Phi}{\partial u}, \\
\frac{\partial W}{\partial v} &= -\operatorname{tgh}\theta\frac{\partial\Phi}{\partial v}.
\end{aligned}\right\} \qquad (B)
$$

È ben facile vedere che il sistema (A), (B), in forza dell'equazione:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + \operatorname{senh}\theta\cosh\theta = 0,$$

cui soddisfa θ, è *illimitatamente integrabile*. Per determinare, nel modo più generale, una coppia di soluzioni (Φ, W) si possono assegnare ad arbitrio, per un sistema iniziale di valori $u_0\,v_0$ delle variabili u, v, i valori di:

$$W,\ \Phi,\ \frac{\partial\Phi}{\partial u},\ \frac{\partial\Phi}{\partial v}.$$

Come dalle (III) o (III*) § 13 abbiamo dedotto le attuali (A), (B), così inversamente, se Φ, W soddisfano le (A), (B), la funzione:

$$T = \frac{\Phi}{W},$$

soddisferà le indicate equazioni di trasformazione (III). Ma ricordiamo che T deve inoltre soddisfare l'equazione del 1.° ordine (I) § 12; questa, sostituendo a T il quoziente $\frac{\Phi}{W}$, diventa:

$$\frac{1}{\operatorname{senh}^2\theta}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{\cosh^2\theta}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)^2 - c\,\Phi^2 + (c+1)\,W^2 = 0. \qquad (C)$$

Ora se, per una coppia qualsiasi Φ, W di soluzioni del sistema (A), (B), indichiamo per un momento con Δ il primo membro della (C), troviamo subito che, in forza delle (A), (B) stesse, si ha:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial v} = 0,$$

cioè $\Delta = \text{cost}$. Basta dunque scegliere i valori iniziali di:

$$W, \ \Phi, \ \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \ \frac{\partial \Phi}{\partial v},$$

in guisa da soddisfare *inizialmente* la (C) e questa sarà verificata per tutti i valori di u, v. È chiaro poi che le tre costanti arbitrarie (oltre c) che restano nel sistema integrale si riducono pel quoziente $T = \frac{\Phi}{W}$, a causa della omogeneità del sistema (A), (B), (C), a due soltanto. Così troviamo nuovamente tutti i risultati già stabiliti al § 13.

Scritte le equazioni di trasformazione sotto la forma (A), (B), (C), facilmente possiamo generalizzarle a coordinate curvilinee qualunque u, v, a cui la superficie S di curvatura $K = +1$ si supponga riferita. Se, adoperando le consuete notazioni, indichiamo con:

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$
$$D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2,$$

le due forme quadratiche fondamentali che definiscono S, le accennate equazioni generali si scrivono:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} &= \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial v} + c\,E\,\Phi - (c+1)\,D\,W \\
\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u\,\partial v} &= \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial v} + c\,F\,\Phi - (c+1)\,D'\,W \\
\frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} &= \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial v} + c\,G\,\Phi - (c+1)\,D''\,W.
\end{aligned}\right\} \quad (A^*)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial u} &= \frac{GD - FD'}{EG - F^2}\frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{ED' - FD}{EG - F^2}\frac{\partial \Phi}{\partial v} \\
\frac{\partial W}{\partial v} &= \frac{GD' - FD''}{EG - F^2}\frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{ED'' - FD'}{EG - F^2}\frac{\partial \Phi}{\partial v}.
\end{aligned}\right\} \quad (B^*)$$

$$\Delta_1 \Phi = c\,\Phi^2 - (c+1)\,W^2, \qquad (C^*)$$

i simboli di Christoffel $\begin{Bmatrix} i\,k \\ r \end{Bmatrix}$ ed il parametro differenziale primo $\Delta_1 \Phi$ essendo calcolati rispetto alla prima forma quadratica fondamentale.

Si verifica agevolmente l'asserita proprietà osservando che le equazioni scritte (A*), (B*), (C*) hanno *carattere invariantivo* e d' altronde nel caso particolare in cui le u, v siano le linee di curvatura si riducono appunto alle (A), (B), (C). Non lasceremo di osservare che ove si facesse la costante $c = -1$ (valore che nelle nostre attuali ricerche è per altro escluso) il sistema (A*) verrebbe appunto a coincidere con quello che si presenta nella teoria dei sistemi di Weingarten (*) e si integra completamente appena si conoscono sopra S le linee geodetiche.

§ 21.

Formole per le superficie $\overline{S}$ trasformate e relative verifiche.

Se facciamo uso delle nuove notazioni e trasformiamo le (10) § 15, che definiscono le superficie $\overline{S}$ trasformate, troviamo:

$$\overline{x} = x + \frac{2\Phi}{c(\Phi^2 - W^2)}\left\{ W X_3 - \frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial u} X_1 - \frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial v} X_2 \right\}, \tag{1}$$

colle formole analoghe per $\overline{y}$, $\overline{z}$. Similmente le (11) § 15 ci dànno pei coseni di direzione $\overline{X}_3$, $\overline{Y}_3$, $\overline{Z}_3$ della normale alla $\overline{S}$ la formola:

$$\left.\begin{aligned} \overline{X}_3 = \frac{2W}{c(\Phi^2 - W^2)} \cdot \frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial u} X_1 + \\ + \frac{2W}{c(\Phi^2 - W^2)} \cdot \frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial v} X_2 + \frac{c\Phi^2 - (c+2)W^2}{c(\Phi^2 - W^2)} X_3, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

e le analoghe. Se deriviamo le (1), (2), ponendo mente alle (A), (B), nonchè alle formole fondamentali (4) § 12, ne deduciamo:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\overline{x}}{\partial u} &= \frac{(\Phi^2 + W^2)\operatorname{senh}\theta + 2\Phi W\cosh\theta}{\Phi^2 - W^2}\left\{\left[\frac{2}{c(\Phi^2 - W^2)}\frac{1}{\operatorname{senh}^2\theta}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)^2 - 1\right] X_1 + \right. \\ &\left. + \frac{2}{c(\Phi^2 - W^2)} \cdot \frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial u} \cdot \frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial v} X_2 - \frac{2W}{c(\Phi^2 - W^2)}\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial u} X_3 \right\} \\ \frac{\partial\overline{x}}{\partial v} &= \frac{(\Phi^2 + W^2)\cosh\theta + 2\Phi W\operatorname{senh}\theta}{\Phi^2 - W^2}\left\{\frac{2}{c(\Phi^2 - W^2)} \cdot \frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial u} \cdot \frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial v} X_1 + \right. \\ &\left. + \left[\frac{2}{c(\Phi^2 - W^2)}\frac{1}{\cosh^2\theta}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)^2 - 1\right] X_2 - \frac{2W}{c(\Phi^2 - W^2)}\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial v} X_3 \right\}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

(*) Vedi *Lezioni*, pag. 525, formole (D).

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{X}_3}{\partial u} &= -\frac{(\Phi^2+W^2)\cosh\theta + 2\,\Phi\, W \operatorname{senh}\theta}{(\Phi^2+W^2)\operatorname{senh}\theta + 2\,\Phi\, W\cosh\theta}\,\frac{\partial \overline{x}}{\partial u}\\
\frac{\partial \overline{X}_3}{\partial v} &= -\frac{(\Phi^2+W^2)\operatorname{senh}\theta + 2\,\Phi\, W \cosh\theta}{(\Phi^2+W^2)\cosh\theta + 2\,\Phi\, W\operatorname{senh}\theta}\,\frac{\partial \overline{x}}{\partial v}\,.
\end{aligned}
\right\} \tag{4}
$$

Ora se poniamo:

$$
\left.
\begin{aligned}
\cosh\overline{\theta} &= \pm\,\frac{(\Phi^2+W^2)\cosh\theta + 2\,\Phi\, W\operatorname{senh}\theta}{\Phi^2+W^2}\\
\operatorname{senh}\overline{\theta} &= \pm\,\frac{(\Phi^2+W^2)\operatorname{senh}\theta + 2\,\Phi\, W\cosh\theta}{\Phi^2+W^2}\,,
\end{aligned}
\right\} \tag{5}
$$

adottando la determinazione superiore od inferiore di segno secondochè $\Phi^2 > W^2$ ovvero $\Phi^2 < W^2$ ne risulterà determinata $\overline{\theta}$, la differenza dei quadrati dei secondi membri nella (5) essendo l'unità e il secondo membro della prima risultando inoltre positivo. Dopo di ciò, dalle (3) deduciamo per l'elemento lineare della $\overline{S}$:

$$d\overline{s}^2 = d\overline{x}^2 + d\overline{y}^2 + d\overline{z}^2 = \operatorname{senh}^2\overline{\theta}\, d u^2 + \cosh^2\overline{\theta}\, d v^2,$$

mentre dalle (4) abbiamo:

$$\frac{\partial \overline{X}_3}{\partial u} = -\coth\overline{\theta}\,\frac{\partial \overline{x}}{\partial u}, \quad \frac{\partial \overline{X}_3}{\partial v} = -\operatorname{tgh}\overline{\theta}\,\frac{\partial \overline{x}}{\partial v}\,.$$

Queste formole ci dimostrano che sulle $\overline{S}$ le linee u, v sono quelle di curvatura e poichè per i suoi raggi principali di curvatura $\overline{r}_1$, $\overline{r}_2$ abbiamo:

$$\overline{r}_1 = -\coth\overline{\theta}, \quad \overline{r}_2 = -\operatorname{tgh}\overline{\theta},$$

troviamo confermato che la $\overline{S}$ è a curvatura $K = +1$.

Osserviamo poi che dalle (5) segue:

$$\cosh(\overline{\theta} - \theta) = \pm\,\frac{\Phi^2+W^2}{\Phi^2-W^2},$$

e però, se valgono i segni superiori, vale a dire, se $\Phi^2 > W^2$, avremo:

$$\cosh(\overline{\theta}-\theta) + 1 = \frac{2\,\Phi^2}{\Phi^2 - W^2}$$

$$\cosh(\overline{\theta}-\theta) - 1 = \frac{2\,W^2}{\Phi^2 - W^2}\,,$$

indi dividendo:

$$T^2 = \frac{\Phi^2}{W^2} = \coth^2\left(\frac{\overline{\theta} - \theta}{2}\right),$$

cioè:

$$T = \pm \frac{\coth(\overline{\theta} - \theta)}{2}. \tag{6}$$

Che se invece valgono i segni inferiori sarà:

$$T = \pm \operatorname{tgh}\left(\frac{\overline{\theta} - \theta}{2}\right). \tag{7}$$

§ 22.

Permutabilità delle nuove trasformazioni colla trasformazione di Hazzidakis.

Ad una medesima soluzione θ della equazione fondamentale:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} + \operatorname{senh}\theta \cosh\theta = 0,$$

corrispondono propriamente, com'è noto, due diverse superficie S, S' applicabili sulla sfera, l'una S di elemento lineare (riferito alle linee di curvatura):

$$d s^2 = \operatorname{senh}^2 \theta \, d u^2 + \cosh^2 \theta \, d v^2,$$

l'altra S' d'elemento lineare:

$$d s'^2 = \cosh^2 \theta \, d u^2 + \operatorname{senh}^2 \theta \, d v^2.$$

Le due superficie S, S' sono trasformate l'una dell'altra secondo la trasformazione *involutoria* di Hazzidakis (*); le diciamo superficie *coniugate.* Esse si corrispondono per linee di curvatura e sistemi coniugati e alle geodetiche dell'una corrispondono sopra l'altra le linee d'ombra.

Ora sembra notevole che, integrato per una di esse, p. e. per la S, il sistema di equazioni simultanee che definisce le nuove trasformazioni, il sistema analogo per la coniugata S' risulta senz'altro integrato anch'esso. Sus-

(*) *Lezioni,* pag. 446.

siste infatti il seguente teorema: *Se dalla superficie S si ottiene, secondo la nostra costruzione, una superficie S_0 applicabile sull'ellissoide od iperboloide di rotazione, come luogo degli estremi dei segmenti $= T$ riportati sulle normali di S, basterà sulle corrispondenti normali della coniugata S riportare un segmento di lunghezza inversa $= \frac{1}{T}$ e nel luogo S'_0 degli estremi dei nuovi segmenti si avrà una superficie applicabile rispettivamente sull'iperboloide o sull'ellissoide di rotazione.*

Per dimostrarlo, osserviamo che dalle (A) § 20 seguono le equazioni seguenti:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 W}{\partial u^2} &= \operatorname{tgh}\theta \frac{\partial \theta}{\partial u}\frac{\partial W}{\partial u} - \coth\theta \frac{\partial \theta}{\partial v}\frac{\partial W}{\partial v} - \\
&\qquad - (c+1)\cosh^2\theta W - c \operatorname{senh}\theta\cosh\theta\,\Phi, \\
\frac{\partial^2 W}{\partial u \partial v} &= \operatorname{tgh}\theta \frac{\partial \theta}{\partial v}\frac{\partial W}{\partial u} + \coth\theta \frac{\partial \theta}{\partial u}\frac{\partial W}{\partial v}, \\
\frac{\partial^2 W}{\partial v^2} &= -\operatorname{tgh}\theta \frac{\partial \theta}{\partial u}\frac{\partial W}{\partial u} + \coth\theta \frac{\partial \theta}{\partial v}\frac{\partial W}{\partial v} - \\
&\qquad - (c+1)\operatorname{senh}^2\theta W - c \operatorname{senh}\theta\cosh\theta\,\Phi,
\end{aligned}\right\} \tag{A'}$$

e le (B), (C) possono scriversi:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial u} &= -\operatorname{tgh}\theta \frac{\partial W}{\partial u}, \\
\frac{\partial \Phi}{\partial v} &= -\coth\theta \frac{\partial W}{\partial v}.
\end{aligned}\right\} \tag{B'}$$

$$\frac{1}{\cosh^2\theta}\left(\frac{\partial W}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{\operatorname{senh}^2\theta}\left(\frac{\partial W}{\partial v}\right)^2 - c\,\Phi^2 + (c+1)W^2 = 0. \tag{C'}$$

Ora questo sistema (A'), (B'), (C') si deduce dal sistema (A), (B), (C) § 20 permutando u con v, Φ con W e cangiando c in $-(c+1)$ (indi $c+1$ in $-c$), onde si vede che il sistema (A'), (B'), (C') definisce le nuove trasformazioni per la superficie coniugata S'. D'altronde lo scambio di Φ con W muta T in $\frac{1}{T}$, ciò che dimostra il teorema. Si osservi poi che delle due superficie S_0, S'_0 l'una è applicabile sull'ellissoide allungato di rotazione, l'altra sull'iperboloide a due falde e se indichiamo con a il semiasse minore dell'ellissoide, con b quello immaginario dell'iperboloide si ha:

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1.$$

Proseguendo la nostra ricerca, consideriamo ora le due superficie $\overline{S}$, $\overline{S}'$ applicabili sulla sfera e simmetriche rispettivamente di S, S' rispetto alle due superficie riflettenti S_0, S'_0 e dimostriamo il teorema: *La coppia* $(\overline{S}, \overline{S}')$ *è ancora costituita da due superficie coniugate di* HAZZIDAKIS.

E invero il calcolo fatto al paragrafo precedente ci ha dato per l'elemento lineare di $\overline{S}$:

$$\overline{ds}^2 = \operatorname{senh}^2 \overline{\theta}\, d u^2 + \cosh^2 \overline{\theta}\, d v^2,$$

avendo $\cosh \overline{\theta}$, $\operatorname{senh} \overline{\theta}$ i valori (5). Le osservazioni fatte sopra dimostrano che il medesimo calcolo, permutato u con v, e Φ con W, vale ancora per l'elemento lineare $\overline{ds}'$ di $\overline{S}'$ e, siccome lo scambio di Φ con W non muta i secondi membri delle (5), abbiamo:

$$\overline{ds}'^2 = \cosh^2 \overline{\theta}\, d u^2 + \operatorname{senh}^2 \overline{\theta}\, d v^2,$$

ciò che dimostra il teorema.

Osserviamo ora che dalla S si può passare alla $\overline{S}'$ sia eseguendo prima la trasformazione che cangia S in $\overline{S}$, poi quella di HAZZIDAKIS che porta $\overline{S}$ in $\overline{S}'$; ovvero possiamo eseguire prima la trasformazione di HAZZIDAKIS sulla S e cangiarla in S' poi su S' la nostra trasformazione, che la porta ancora in $\overline{S}'$. Possiamo quindi enunciare brevemente il risultato conseguito così: *Le nuove trasformazioni delle superficie a curvatura costante positiva sono permutabili colla trasformazione involutoria di* HAZZIDAKIS.

Un'ultima conseguenza delle proprietà stabilite nel presente paragrafo merita di essere notata. Se partiamo da una coppia iniziale nota (S, S') di superficie coniugate applicabili sulla sfera, trasformandole colle nostre trasformazioni otteniamo le nuove superficie a curvatura costante sempre a coppie $(\overline{S}, \overline{S}')$ di superficie coniugate. E poichè le geodetiche dell'una corrispondono alle linee d'ombra dell'altra e queste, come corrispondenti ai circoli massimi della sfera rappresentativa, si hanno sempre in termini finiti, ne deduciamo:

Sulle superficie a curvatura costante positiva trasformate della iniziale si conosceranno, senza alcun calcolo di integrazione, le linee geodetiche.

§ 23.

Ricerche analoghe per le superficie pseudosferiche.

Supponiamo ora che la superficie S sia pseudosferica (di raggio $=1$) e cerchiamo di cangiare alla loro volta le formole di trasformazione del § 17 in un sistema lineare ed omogeneo. Procedendo per ciò affatto analogamente come al § 20, osserviamo che per le (22) § 17 si ha:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\cos\theta}{\cos\theta+T\operatorname{sen}\theta}\,\frac{1}{T}\,\frac{\partial T}{\partial u}\right]-\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta-T\cos\theta}\,\frac{1}{T}\,\frac{\partial T}{\partial v}\right]=0,$$

onde potremo determinare una conveniente funzione Φ di u, v dalle equazioni:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u}=\frac{\cos\theta}{\cos\theta+T\operatorname{sen}\theta}\,\frac{\Phi}{T}\,\frac{\partial T}{\partial u},$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial v}=\frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta-T\cos\theta}\,\frac{\Phi}{T}\,\frac{\partial T}{\partial v}.$$

Ponendo inoltre:

$$\frac{\Phi}{T}=W,$$

dalle (22) § 17 avremo le formole:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}&=-\operatorname{tg}\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial u}\,\frac{\partial\Phi}{\partial u}+\cot\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial v}\,\frac{\partial\Phi}{\partial v}+\\
&\qquad+\frac{\cos^2\theta}{a^2}\,\Phi-\left(\frac{1}{a^2}-1\right)\operatorname{sen}\theta\cos\theta\, W,\\
\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial v}&=-\operatorname{tg}\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial v}\,\frac{\partial\Phi}{\partial u}+\cot\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial u}\,\frac{\partial\Phi}{\partial v},\\
\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}&=-\operatorname{tg}\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial u}\,\frac{\partial\Phi}{\partial u}+\cot\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial v}\,\frac{\partial\Phi}{\partial v}+\\
&\qquad+\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{a^2}\,\Phi^2+\left(\frac{1}{a^2}-1\right)\operatorname{sen}\theta\cos\theta\, W.
\end{aligned}\right\}\quad(a)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial u}&=-\operatorname{tg}\theta\,\frac{\partial\Phi}{\partial u},\\
\frac{\partial W}{\partial v}&=\cot\theta\,\frac{\partial\Phi}{\partial v}.
\end{aligned}\right\}\quad(b)$$

A causa della equazione:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = \operatorname{sen} \theta \cos \theta ,$$

cui soddisfa θ, si vede che il sistema (a) (b) è illimitatamente integrabile, sicchè possiamo assumere ad arbitrio i valori iniziali di:

$$W, \ \Phi, \ \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \ \frac{\partial \Phi}{\partial v} .$$

Secondo la (20) § 17, occorre inoltre che sia soddisfatta l'equazione del 1.° ordine:

$$\frac{1}{\cos^2 \theta}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial v}\right)^2 + W^2 = \frac{1}{a^2}(\Phi^2 + W^2). \qquad (c)$$

Considerazioni analoghe a quelle del § 20 dimostrano che basterà soddisfare alla (c) coi valori iniziali perchè risulti sempre soddisfatta.

Ed ora dalle (24) § 18, per definire la superficie pseudosferica $\overline{S}$ trasformata, avremo la formola:

$$\bar{x} = x + \frac{2 a^2 \Phi}{\Phi^2 + W^2} \left\{ W X_3 - \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial u} X_1 - \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial v} X_2 \right\}, \qquad (8)$$

colle analoghe per $\bar{y}$, $\bar{z}$ e i coseni di direzione $\overline{X}_3$, $\overline{Y}_3$, $\overline{Z}_3$ della normale alla $\overline{S}$ saranno dati dalla formola:

$$\overline{X}_3 = \frac{2 a^2 W}{\Phi^2 + W^2} \left\{ \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial u} X_1 + \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial v} X_2 \right\} + \frac{\Phi^2 + (1 - 2 a^2) W^2}{\Phi^2 + W^2} X_3, \qquad (9)$$

e dalle analoghe.

Derivando rispetto ad u, v, coll'aver riguardo alle formole precedenti, troviamo:

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = \frac{(W^2 - \Phi^2) \cos \theta + 2 \Phi W \operatorname{sen} \theta}{\Phi^2 + W^2} \cdot \left\{ \left[1 - \frac{2 a^2}{\Phi^2 + W^2} \frac{1}{\cos^2 \theta} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right)^2 \right] X_1 - \right.$$
$$\left. - \frac{2 a^2}{\Phi^2 + W^2} \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial u} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial v} X_2 + \frac{2 a^2 W}{\Phi^2 + W^2} \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial u} X_3 \right\},$$

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = \frac{(W^2 - \Phi^2) \operatorname{sen} \theta - 2 \Phi W \cos \theta}{\Phi^2 + W^2} \cdot \left\{ - \frac{2 a^2}{\Phi^2 + W^2} \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial v} X_1 + \right.$$
$$\left. + \left[1 - \frac{2 a^2}{\Phi^2 + W^2} \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v}\right)^2 \right] X_2 + \frac{2 a^2 W}{\Phi^2 + W^2} \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial v} X_3 \right\},$$

$$\frac{\partial \overline{X}_3}{\partial u} = - \frac{(W^2 - \Phi^2) \operatorname{sen} \theta - 2 \Phi W \cos \theta}{(W^2 - \Phi^2) \cos \theta + 2 \Phi W \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u}, \quad \frac{\partial \overline{X}_3}{\partial v} = \frac{(W^2 - \Phi^2) \cos \theta + 2 \Phi W \operatorname{sen} \theta}{(W^2 - \Phi^2) \operatorname{sen} \theta - 2 \Phi W \cos \theta} \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} .$$

Se poniamo, indicando con $\bar{\theta}$ un angolo conveniente:

$$\left.\begin{aligned}\cos\bar{\theta} &= \frac{(W^2 - \Phi^2)\cos\theta + 2\,\Phi\,W\,\mathrm{sen}\,\theta}{\Phi^2 + W^2},\\ \mathrm{sen}\,\bar{\theta} &= \frac{(W^2 - \Phi^2)\,\mathrm{sen}\,\theta - 2\,\Phi\,W\cos\theta}{\Phi^2 + W^2},\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

come è lecito per essere la somma dei quadrati dei secondi membri $= 1$, ne deduciamo per l'elemento lineare di $\bar{S}$:

$$\overline{d\,s}^2 = \cos^2\bar{\theta}\,d\,u^2 + \mathrm{sen}^2\,\bar{\theta}\,d\,v^2,$$

e inoltre:

$$\frac{\partial \bar{X}_3}{\partial u} = -\,\mathrm{tg}\,\bar{\theta}\,\frac{\partial \bar{x}}{\partial u}, \quad \frac{\partial \bar{X}_3}{\partial v} = \cot\bar{\theta}\,\frac{\partial \bar{x}}{\partial v}.$$

Queste formole confermano che la $\bar{S}$ ha la curvatura $K = -1$ e le linee u, v sono le sue linee di curvatura.

Dalle (10) deduciamo inoltre:

$$\cos(\bar{\theta} - \theta) = \frac{W^2 - \Phi^2}{\Phi^2 + W^2},$$

indi:

$$\frac{\Phi^2}{W^2} = \mathrm{tg}^2\left(\frac{\bar{\theta} - \theta}{2}\right),$$

cioè:

$$T = \pm\,\mathrm{tg}\left(\frac{\bar{\theta} - \theta}{2}\right). \tag{11}$$

§ 24.

Le superficie integrali della equazione d'Ampère: $k\,r_1\,r_2 - p\,(r_1 + r_2) + 2\,q = 0.$

Alla forma lineare data alle equazioni di trasformazione per le superficie a curvatura costante si collega una classe di superficie che hanno con queste a comune l'immagine sferica delle linee di curvatura e soddisfano ad un'equazione d'Ampère della forma considerata da Weingarten nelle ultime sue ricerche nell'applicabilità (*).

Consideriamo dapprima il caso di una superficie S a curvatura costante positiva e riprendiamo le equazioni (A'), (B'), (C') § 22. Il sistema (A') può scriversi più brevemente così:

$$\left.\begin{aligned} W_{11} &= -(c+1)\cosh^2\theta\, W - c \operatorname{senh}\theta \cosh\theta\, \Phi \\ W_{12} &= 0 \\ W_{22} &= -(c+1)\operatorname{senh}^2\theta\, W - c\operatorname{senh}\theta\cosh\theta\,\Phi, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

le derivate seconde covarianti $W_{r,s}$ della W essendo calcolate rispetto alla forma quadratica:

$$d s'^2 = \cosh^2\theta\, d u^2 + \operatorname{senh}^2\theta\, d v^2,$$

che dà il quadrato dell'elemento lineare sferico rappresentativo della S. Si consideri ora la superficie Σ inviluppo del piano:

$$\xi X_3 + \eta Y_3 + \zeta Z_3 = W,$$

(indicando ξ, η, ζ le coordinate correnti di punto) condotto parallelamente al piano tangente di S alla distanza W dall'origine. A causa della intermedia delle (12) la Σ avrà a comune colla S l'immagine sferica delle linee di curvatura; le coordinate ξ, η, ζ del punto di contatto del suo piano tangente saranno date secondo le note formole di Weingarten (**) da:

$$\xi = W X_3 + \frac{1}{\cosh^2\theta}\frac{\partial W}{\partial u}\frac{\partial X_3}{\partial u} + \frac{1}{\operatorname{senh}^2\theta}\frac{\partial W}{\partial v}\frac{\partial X_3}{\partial v},$$

ovvero da:

$$\xi = W X_3 + \frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial W}{\partial u} X_1 + \frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial W}{\partial v} X_2, \tag{13}$$

colle analoghe per η, ζ.

Derivando le (13), si trova:

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} = -c(W\cosh\theta + \Phi\operatorname{senh}\theta) X_1$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial v} = -c(W\operatorname{senh}\theta + \Phi\cosh\theta) X_2,$$

(*) *Sur la déformation des surfaces* (Mémoire couronné par l'Académie de Paris). — *Acta Mathem.*, tom. 20. Vedi anche Darboux, *Leçons IV*, pag. 308 e segg.

(**) *Lezioni*, pag. 137, formule (34).

le quali per l'elemento lineare $d\sigma$ della Σ ci dànno:

$$d\sigma^2 = c^2 \left\{ (W \cosh\theta + \Phi \operatorname{senh}\theta)^2 du^2 + (W \operatorname{senh}\theta + \Phi \cosh\theta)^2 dv^2 \right\}, \quad (13^*)$$

e paragonate colle altre:

$$\frac{\partial X_3}{\partial u} = \cosh\theta\, X_1, \quad \frac{\partial X_3}{\partial v} = \operatorname{senh}\theta\, X_2,$$

confermano che le u, v sono sulla Σ le linee di curvatura e di più i suoi raggi principali di curvatura ρ_1, ρ_2 sono dati dalle formole:

$$\rho_1 = -c(W + \Phi \coth\theta),$$
$$\rho_2 = -c(W + \Phi \operatorname{tgh}\theta).$$

Se ne trae (*):

$$\rho_1 + \rho_2 = -2cW - c(\operatorname{tgh}\theta + \coth\theta)\Phi,$$
$$\rho_1\rho_2 = c^2 \left\{ W^2 + (\operatorname{tgh}\theta + \coth\theta)\Phi W + \Phi^2 \right\}.$$

e però:

$$\rho_1\rho_2 + cW(\rho_1 + \rho_2) = c^2(\Phi^2 - W^2). \quad (14)$$

Ora introduciamo le notazioni di Weingarten e indichiamo con $p = W$ la distanza dell'origine del piano tangente di Σ e con:

$$2q = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2,$$

il quadrato della distanza dell'origine stessa dal punto di contatto. Dalle (13) abbiamo:

$$2q = c(\Phi^2 - W^2), \quad (15)$$

e la (14) diventa per ciò:

$$\rho_1\rho_2 + cp(\rho_1 + \rho_2) - 2cq = 0. \quad (16)$$

Siccome dalla (15) abbiamo:

$$\Phi = \sqrt{\frac{2q}{c} + p^2}, \quad (17)$$

(*) Queste medesime formole si possono stabilire direttamente dalle (12) facendo uso delle formole in coordinate tangenziali:

$$\rho_1 + \rho_2 = \Delta_2 W + 2W$$
$$\rho_1\rho_2 = \Delta_{22} W + W\Delta_2 W + W^2,$$

date a pag. 137-138 dalle *Lezioni*.

potremo scrivere la (16) sotto la forma:

$$\rho_1 \rho_2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q^2} + (\rho_1 + \rho_2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p \, \partial q} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p^2} = 0, \tag{16*}$$

che è appunto la forma delle equazioni d'AMPÈRE che si presentano nelle accennate ricerche di WEINGARTEN. Così adunque le superficie Σ, definite dalle formole (13) hanno a comune colle superficie S applicabili sulla sfera l'immagine sferica delle linee di curvatura e soddisfano l'equazione (16) o (16*) di WEINGARTEN. Non lascieremo di osservare che le formule (1) per le superficie $\overline{S}$ trasformate si possono scrivere:

$$\overline{x} = x + \frac{2\Phi}{c(\Phi^2 - W^2)}\xi, \quad \overline{y} = y + \frac{2\Phi}{c(\Phi^2 - W^2)}\eta, \quad \overline{z} = z + \frac{2\Phi}{c(\Phi^2 - W^2)}\zeta.$$

Per le osservazioni fatte al § 22, ove si voglia considerare in luogo della superficie S primitiva la sua coniugata di HAZZIDAKIS S', basterà scambiare u con v e Φ con W. La superficie Σ' dedotta da S' come Σ da S, soddisferà ad un'equazione della forma (16) ove però c sia cangiata in $-(c+1)$. D'altronde il suo elemento lineare dedotto dalla (13*) col detto scambio coincide con quello stesso della Σ; dunque:

Le due superficie Σ, Σ' sono applicabili l'una sull'altra con corrispondenza delle linee di curvatura.

È noto che le superficie aventi a comune con quelle applicabili sulla sfera l'immagine sferica delle linee di curvatura e *queste soltanto* (astrazione fatta dalle superficie modanate a sviluppabile direttrice cilindrica) ammettono una flessione che conserva le linee di curvatura. Questo viene confermato nel caso attuale delle superficie Σ integrali della (16); ma ciò che vi si aggiunge di notevole è questo che anche dopo la flessione la superficie appartiene alla medesima classe (16) cangiatovi però c in $-(c+1)$. In fine osserviamo che due punti corrispondenti delle due superficie coniugate Σ, Σ' hanno costante ed $= \sqrt{\frac{c+1}{c}}$ il rapporto delle loro distanze dall'origine.

§ 25.

Caso delle superficie pseudosferiche.

Sia ora S una superficie pseudosferica di raggio $=1$. Dalle formole del § 23 deduciamo che W soddisfa alle equazioni seguenti:

$$
\begin{aligned}
W_{11} &= \left(\frac{1}{a^2} - 1\right)\operatorname{sen}^2\theta\, W - \frac{1}{a^2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\Phi, \\
W_{12} &= 0, \\
W_{22} &= \left(\frac{1}{a^2} - 1\right)\cos^2\theta\, W + \frac{1}{a^2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\Phi,
\end{aligned}
$$

le derivate seconde covarianti di W essendo calcolate rispetto all'elemento lineare sferico rappresentativo:

$$d s_1^2 = \operatorname{sen}^2\theta\, d u^2 + \cos^2\theta\, d v^2,$$

della nostra superficie S. Ne segue che la superficie Σ inviluppo del piano:

$$\xi X_3 + \eta Y_3 + \zeta Z_3 = W,$$

avrà le stesse immagini delle linee di curvatura della pseudosferica S. Per le coordinate ξ, η, ζ del punto di contatto del detto piano con Σ troviamo:

$$\xi = W X_3 + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial W}{\partial u} X_1 - \frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial W}{\partial v} X_2, \tag{18}$$

e analogamente per η, ζ. Derivando rapporto ad u, v ne deduciamo:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\xi}{\partial u} &= \frac{W\operatorname{sen}\theta - \Phi\cos\theta}{a^2} X_1, \\
\frac{\partial\xi}{\partial v} &= -\frac{W\cos\theta + \Phi\operatorname{sen}\theta}{a^2} X_2.
\end{aligned}
$$

Ne risulta confermato che le linee u, v sono sulla Σ linee di curvatura. Di più, indicando con ρ_1, ρ_2 i raggi principali di curvatura di Σ, dal confronto delle precedenti colle altre:

$$\frac{\partial X_3}{\partial u} = \operatorname{sen}\theta\, X_1, \quad \frac{\partial X_3}{\partial v} = -\cos\theta\, X_2,$$

si trae:

$$\rho_1 = \frac{1}{a^2}(W + \Phi \operatorname{tg} \theta)$$

$$\rho_2 = \frac{1}{a^2}(W - \Phi \cot \theta),$$

e quindi:

$$\rho_1 + \rho_2 = \frac{1}{a^2}\left\{ 2W + \Phi(\operatorname{tg}\theta - \cot\theta) \right\}$$

$$\rho_1 \rho_2 = \frac{1}{a^4}\left\{ W^2 + \Phi W(\operatorname{tg}\theta - \cot\theta) - \Phi^2 \right\}.$$

Ne deduciamo:

$$\rho_1 \rho_2 - \frac{1}{a^2} W(\rho_1 + \rho_2) = -\frac{1}{a^4}(W^2 + \Phi^2),$$

e se poniamo, come al § 24:

$$p = W, \quad 2q = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{1}{a^2}(W^2 + \Phi^2),$$

vediamo che le attuali superficie Σ soddisfano l'equazione d'Ampère:

$$a^2 \rho_1 \rho_2 - p(\rho_1 + \rho_2) + 2q = 0, \tag{19}$$

che è evidentemente la (16) stessa posto $c = -\frac{1}{a^2}$ colla differenza però che qui $\frac{2q}{c} + p^2$ è negativo. Ponendo:

$$\Phi = \sqrt{a^2 . 2q - p^2},$$

la (19) si scriverà nuovamente sotto la forma di Weingarten:

$$\rho_1 \rho_2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q^2} + (\rho_1 + \rho_2)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial p \, \partial q} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p^2} = 0. \tag{19*}$$

Nel caso $a = 1$ la (19) esprime che per le corrispondenti superficie Σ il segmento di ogni normale compreso fra i centri principali di curvatura è visto dall'origine sotto angolo retto. Sono queste le superficie considerate incidentalmente da Darboux nel Vol. IV delle *Leçons* (pag. 321) e da me più particolarmente studiate nel Vol. 24, Serie 2.ª di questi *Annali* (1896) sotto il nome di superficie Σ *paraboliche*.

Molte questioni rimarrebbero da trattare in generale per le superficie Σ integrali dell'equazione d'Ampère:

$$k r_1 r_2 - p(r_1 + r_2) + 2q = 0,$$

che abbiamo così visto collegarsi alla teoria delle trasformazioni delle superficie a curvatura costante; ma riserbandone l'esame più accurato ad altra occasione per non deviare troppo dal soggetto principale contentiamoci qui di indicare le principali:

1.ª Le congruenze delle normali a queste superficie Σ sono cicliche e nelle superficie normali ai circoli abbiamo superficie della classe medesima.

2.ª L'inversione per raggi vettori reciproci rispetto all'origine cangia ogni superficie Σ della nostra classe in un' altra della medesima classe. La superficie Σ trasformata ha la medesima immagine delle linee di curvatura della superficie $\overline{S}$ a curvatura costante trasformata della primitiva S.

3.ª Dalle superficie Σ si ottengono, secondo il metodo di Weingarten, con quadrature classi di superficie applicabili sopra una medesima superficie di rotazione. Le relazioni fra queste e le superficie fondamentali (ellissoide, iperboloide, ecc.) sono da studiarsi.

CAPITOLO V.

Composizione delle nuove trasformazioni mediante due successive trasformazioni complementari o di Bäcklund (reali od immaginarie).

§ 26.

La trasformazione bicomplementare.

Come abbiamo avvertito nella prefazione, le trasformazioni delle superficie a curvatura costante, cui siamo stati condotti dai teoremi di Guichard, solo in parte possono dirsi *nuove.* Dimostreremo invero che nel caso delle superficie pseudosferiche, se la costante indicata con a al § 17 ha il valore 1, la trasformazione per passare dalla S alla $\overline{S}$ si compone di due successive trasformazioni complementari (*) e quando $a < 1$ risulta dal comporre due successive trasformazioni (reali) di Bäcklund. Quando invece siamo nel caso delle trasformazioni delle superficie pseudosferiche con $a > 1$, ovvero quando

(*) Questa proprietà fu già avvertita da me nella mia prima Nota (*Rendiconti Lincei*) del 19 febbraio, le seguenti nella Nota del 23 aprile.

si tratti di superficie a curvatura costante *positiva* possiamo bensì scindere ancora la trasformazione in due elementari di Bäcklund, ma queste componenti sono sempre *necessariamente* immaginarie. Anche in questo caso ove, dal punto di vista reale, abbiamo da fare con trasformazioni nuove, l'esame delle effettive formole di composizione è sommamente interessante specialmente perchè ci dimostra come alle nuove trasformazioni siano applicabili le considerazioni stesse e tutte le conseguenze che ho dedotto dal *teorema di permutabilità* per la teoria delle trasformazioni reali di Bäcklund (*).

Volendo procedere alle attuali ricerche, potremmo cominciare dallo stabilire che, prese due superficie S, $\overline{S}$ colla medesima curvatura costante e trasformate l'una dell'altra secondo una trasformazione del Cap. III, esistono sempre ∞^1 superficie Σ ciascuna delle quali tanto con S quanto con $\overline{S}$ forma le due falde focali di una congruenza W (corrispondendosi cioè sulle due falde focali le assintotiche) e che fra queste ∞^1 superficie Σ ve ne sono sempre due reali od immaginarie, e coincidenti nel solo caso delle superficie pseudosferiche quando sia $a = 1$, le quali hanno la medesima curvatura costante di S, $\overline{S}$, sicchè le corrispondenti congruenze W sono pseudosferiche. Preferiamo un'altra via, meno completa ma più rapida, che ci conduce alla verifica delle proprietà essenziali da stabilirsi utilizzando il teorema di permutabilità.

Cominciamo nel presente paragrafo dallo stabilire che se si applica ad una superficie pseudosferica S una prima trasformazione complementare, indi alla nuova superficie pseudosferica ottenuta S' una nuova trasformazione complementare, che la cangi nella $\overline{S}$, questa superficie pseudosferica finale $\overline{S}$ deriverà dalla iniziale S precisamente con una trasformazione del § 18 quando si supponga $a = 1$. Per questa ragione la trasformazione che porta da S ad $\overline{S}$ si potrà dire *bicomplementare.*

Siano dunque S, $\overline{S}$ complementari di una medesima superficie pseudosferica S' e siano M, $\overline{M}$, M' tre loro punti corrispondenti. I raggi delle congruenze pseudosferiche $M'M$, $M'\overline{M}$ sono rispettivamente tangenti a due sistemi di geodetiche parallele sopra S'. Ora consideriamo sopra S' quella geodetica g, perfettamente individuata, che è parallela in un senso alle geo-

(*) Il teorema in questione fu da me trovato nel 1892 (*Rendiconti dei Lincei*, Serie 5.ª, Vol. I, 2.° sem.) e trovasi ampiamente discusso nei §§ 257-260 delle *Lezioni.*

detiche del primo sistema, nell'altro senso a quelle del secondo. Se con u indichiamo la distanza geodetica sopra S' del punto variabile M' dalla detta geodetica, potremo dare all'elemento lineare di S' la nota forma iperbolica:

$$d s'^2 = d u^2 + \cosh^2 u \, d v^2, \tag{1}$$

e per l'angolo α di parallelismo, relativo al punto M' ed alla geodetica g, avremo (*):

$$\cos \alpha = \operatorname{tgh} u.$$

Se nel piano $M M' \overline{M}$ tiriamo in M, $\overline{M}$ le normali ai raggi $M' M$, $M' \overline{M}$, queste saranno le normali rispettivamente di S, $\overline{S}$ e si incontreranno in un punto M_0 tale che sarà:

$$M' M_0 = \frac{1}{\cos \alpha} = \coth u.$$

D'altra parte, se per la forma (1) dell'elemento lineare calcoliamo la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho_u}$ dei circoli (a centro ideale) $u = \text{cost.}$, troviamo:

$$\frac{1}{\rho_u} = - \coth u,$$

onde risulta che M_0 è il centro di curvatura geodetica in M' della linea $u = \text{cost.}$ che vi passa e per ciò: *Il luogo del punto M_0 è la superficie S_0 complementare della S' rispetto alle geodetiche normali alla g.* Questa superficie S_0 è applicabile sulla logaritmica di rotazione (**) e poichè la sua normale in M_0 è la perpendicolare a $M' M_0$ nel piano $M M' \overline{M}$ vediamo che M, $\overline{M}$ giacciono simmetricamente rispetto al piano tangente in M_0 alla S_0. Di più il raggio r del parallelo della superficie logaritmica essendo dato (vedi Nota precedente) da:

$$r = \frac{1}{\operatorname{senh} u} = \operatorname{tg} \alpha,$$

(*) *Lezioni*, pag. 406.

(**) Il suo elemento lineare è infatti (*Lezioni*, pag. 243):

$$d s_0^2 = \coth^4 u \, d u^2 + \frac{d v^2}{\operatorname{senh}^2 u},$$

che, posto $r = \frac{1}{\operatorname{senh} u}$, può scriversi:

$$d s_0^2 = \left(1 + \frac{1}{r^2}\right) d r^2 + r^2 d v^2.$$

se confrontiamo le attuali formole con quelle del § 7 vediamo che le due superficie pseudosferiche S, $\overline{S}$ derivano appunto, nel modo ivi assegnato, dalla S_0, l'angolo σ avendo qui evidentemente il valore complementare ad α.

Così abbiamo propriamente dimostrato che due successive trasformazioni complementari si compongono in una trasformazione del § 18 con $a = 1$. Che inversamente *ogni* tale trasformazione si componga di due successive complementari si vede subito, sia invertendo le considerazioni geometriche superiori, sia ricordando (§ 15) che la superficie $\overline{S}$ trasformata della S è pienamente determinata quando di un dato punto M di S si conosca il corrispondente $\overline{M}$ sopra $\overline{S}$ ed in $\overline{M}$ il piano tangente della trasformata.

§ 27.

Composizione di due trasformazioni reali opposte di Bäcklund.

Per procedere all'esame dei casi ulteriori conviene che ricordiamo brevemente le formole date dal teorema di permutabilità.

Sia S una superficie pseudosferica di elemento lineare (riferito alle linee di curvatura):

$$d s^2 = \cos^2 \theta \, d u^2 + \operatorname{sen}^2 \theta \, d v^2,$$

ove θ è una soluzione dell'equazione:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = \operatorname{sen} \theta \cos \theta, \tag{α}$$

e siano S_1, S_2 due trasformate pseudosferiche di S dedotte da questa mediante due trasformazioni di Bäcklund B_{σ_1}, B_{σ_2} a costanti σ_1, σ_2 diverse e coi rispettivi elementi lineari:

$$d s_1^2 = \cos^2 \theta_1 \, d u^2 + \operatorname{sen}^2 \theta_1 \, d v^2$$
$$d s_2^2 = \cos^2 \theta_2 \, d u^2 + \operatorname{sen}^2 \theta_2 \, d v^2.$$

Le funzioni θ_1, θ_2, soluzioni della (α), sono legate alla primitiva θ dalle formole:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \theta_1}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial v} &= \frac{\operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta + \operatorname{sen} \sigma_1 \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta}{\cos \sigma_1} \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u} &= - \frac{\cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} \sigma_1 \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta}{\cos \sigma_1} . \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \theta_2}{\partial u}+\frac{\partial \theta}{\partial v}&=\frac{\operatorname{sen}\theta_2\cos\theta+\operatorname{sen}\sigma_2\cos\theta_2\operatorname{sen}\theta}{\cos\sigma_2}\\ \frac{\partial \theta_2}{\partial v}+\frac{\partial \theta}{\partial u}&=-\frac{\cos\theta_2\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}\sigma_2\operatorname{sen}\theta_2\cos\theta}{\cos\sigma_2}.\end{aligned}\right\} \tag{2*}$$

Il teorema di permutabilità stabilisce che esiste una quarta superficie pseudosferica S_3, d'elemento lineare:

$$d s_3^2 = \cos^2\theta_3\, d u^2 + \operatorname{sen}^2\theta_3\, d v^2,$$

determinabile in termini finiti dalla formola:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\theta_3-\theta}{2}\right)=\frac{\cos\left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)}\operatorname{tg}\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right), \tag{3}$$

che è legata alla S_1 da una trasformazione B'_{σ_2} di Bäcklund a costante σ_2 e alla S_2 da una trasformazione di Bäcklund B'_{σ_1} a costante σ_1. Quattro punti corrispondenti qualsiasi M, M_1, M_2, M_3 delle quattro superficie pseudosferiche S, S_1, S_2, S_3 segnano i vertici di un quadrilatero sghembo di cui due lati opposti $M M_1$, $M_2 M_3$ serbano la lunghezza costante $=\cos\sigma_1$ e gli altri due la lunghezza $\cos\sigma_2$; i due lati concorrenti in ogni vertice giacciono nel piano tangente della corrispondente superficie pseudosferica.

Supponiamo ora in particolare che si abbia $\sigma_2=-\sigma_1$, cioè che le due trasformazioni di Bäcklund siano opposte. Il quadrilatero sghembo $M M_1 M_2 M_3$ diventa allora una losanga e, a causa della sua simmetria, le normali in due vertici opposti, per es., M, M_3 alle superficie S, S_3 si incontrano in un punto M_0, equidistante da M, M_3. Ponendo:

$$M M_0 = M_3 M_0 = T,$$

dalle formole effettive che dànno le coordinate dei vertici (*Lezioni*, l. c.) si trova facilmente:

$$T=\cot\left(\frac{\theta_3-\theta}{2}\right) (*) = \operatorname{sen}\sigma_1\cot\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right). \tag{4}$$

Del resto questa formola, prescindendo dalla precisa determinazione dei segni, si può stabilire anche con considerazioni elementari trigonometriche,

(*) Per far coincidere questa formola colla (11) § 23 basta cangiare θ_3 in $\overline{\theta}+\pi$.

osservando che i quattro lati della losanga sono di lunghezza $= \cos\sigma_1$ e l'angolo in M_0 o M_3 è dato da $\theta_3 - \theta$, quello in M_1 o M_2 da $\theta_1 - \theta_2$.

Dimostreremo che la S_3 si deduce da S precisamente colla trasformazione del § 18, ove si dia alla costante a il valore $a = \cos\sigma$, provando che la funzione T data dalla (4) soddisfa le equazioni fondamentali (20) (21) § 17. E infatti dalla (4) derivando ed osservando le (2), (2*), deduciamo:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\cos\theta + T\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial T}{\partial u} &= \frac{-\operatorname{tg}\sigma\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)} \\ \frac{1}{\operatorname{sen}\theta - T\cos\theta}\frac{\partial T}{\partial v} &= \frac{\operatorname{tg}\sigma\operatorname{sen}\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)}, \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

da cui quadrando e sommando:

$$\frac{1}{(\cos\theta + T\operatorname{sen}\theta)^2}\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{(\operatorname{sen}\theta - T\cos\theta)^2}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\sigma}(T^2+1),$$

che è precisamente la (20) § 17 fattovi $a = \cos\sigma$. Per verificare similmente la (21) del detto paragrafo, conviene scriverla per es. sotto la forma della seconda delle (22) (ibid.) ed osservare che essa coincide con quella ottenuta derivando la prima delle (5) rapporto a v. Ne concludiamo quindi: *La superficie pseudosferica S_3, che si ottiene da S con due trasformazioni di* Bäcklund *successive ed opposte B_σ, $B_{-\sigma}$, deriva direttamente da S applicando una trasformazione del § 18 con $a = \cos\sigma$.*

Viceversa si vede subito che *tutte* le trasformazioni del § 18 con $a < 1$ si ottengono componendo due trasformazioni opposte di Bäcklund.

Segue che la superficie S_0 descritta dal punto M_0 d'incontro di due normali corrispondenti a S, S_3 è applicabile sul catenoide accorciato, avente la curva meridiana:

$$r = \operatorname{sen}\sigma_1 \cosh z;$$

di più il piano tangente in M_0 alla S_0 è il piano di simmetria $M_1 M_0 M_2$ della losanga. Per la medesima ragione, anche le normali in M_1, M_2 alle due superficie pseudosferiche S_1, S_2 si incontrano in un punto M'_0, che descrive una seconda superficie S'_0 applicabile sul medesimo catenoide accorciato. D'altronde il piano tangente in M'_0 alla S'_0 è l'altro piano di simmetria $M M'_0 M_3$ della losanga; dunque la retta $M_0 M'_0$ che segna la perpendicolare comune alle due diagonali della losanga descrive una congruenza W normale (i due piani focali essendo ortogonali) colle superficie focali S_0, S'_0. Arriviamo evidentemente al teorema: *Una superficie S_0 applicabile sul catenoide accorciato ha per complementare S' (rispetto alle geodetiche deformate dei meridiani) una superficie applicabile sul medesimo catenoide.*

È facile del resto dare di questo teorema una dimostrazione diretta, ciò che conduce per altra via ai risultati ora stabiliti.

§ 28.

Composizione di due trasformazioni puramente immaginarie opposte di Bäcklund.

I risultati analitici, concernenti le soluzioni dell'equazione (α):

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = \operatorname{sen} \theta \cos \theta, \tag{α}$$

forniti dal teorema di permutabilità, sono naturalmente indipendenti dall'essere queste soluzioni e le costanti σ_1, σ_2 reali o complesse.

Suppongasi ora che, essendo sempre la θ una soluzione *reale* della (α), si dia a σ_1 un valore complesso qualsiasi; la funzione θ_1 integrale del sistema (2) sarà naturalmente complessa. Se indichiamo con $\bar{\sigma}_1$, $\bar{\theta}_1$ le quantità coniugate di σ_1, θ_1, vediamo subito che le (2*) saranno soddisfatte ponendo:

$$\sigma_2 = \bar{\sigma}_1, \quad \theta_2 = \bar{\theta}_1,$$

mentre la formula (3), che diventa:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\theta_3 - \theta}{2}\right) = \frac{\cos \frac{1}{2}(\sigma_1 + \bar{\sigma}_1)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(\sigma_1 - \bar{\sigma}_1)} \operatorname{tg}\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right), \tag{6}$$

essendo evidentemente reale il secondo membro, ci dimostra che *la quarta soluzione θ_3 risulta nuovamente reale* e reale sarà quindi pure la superficie pseudosferica S_3 corrispondente.

Ora dimostreremo che ove si prenda σ_1 puramente immaginario, diciamo:

$$\sigma_1 = i\sigma \quad (\sigma \text{ reale}),$$

la S_3 si dedurrà dalla S precisamente con una delle nuove trasformazioni § 18 ove si faccia $a = \cosh\sigma$ $(a > 1)$; verremo così a stabilire il teorema:

Le nuove trasformazioni delle superficie pseudosferiche del § 18, corrispondenti ad un valore > 1 della costante a, si compongono di due successive trasformazioni di Bäcklund *puramente immaginarie e coniugate $B_{i\sigma}$, $B_{-i\sigma}$.*

Scindendo in θ_1 il reale dell'immaginario, poniamo:

$$\theta_1 = \omega + i\,\varphi,$$

indi $\theta_2 = \omega + i\,\varphi$ e la (6) si scriverà, sotto forma reale:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\theta_3 - \theta}{2}\right) = \frac{\operatorname{tgh}\varphi}{\operatorname{senh}\sigma}. \tag{6*}$$

D'altronde, separando nelle (2) il reale dall'immaginario, presenteremo queste formole sotto l'aspetto seguente reale:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\omega}{\partial u} + \frac{\partial\theta}{\partial v} &= \frac{\cos\theta\cosh\varphi + \operatorname{senh}\sigma\operatorname{sen}\theta\operatorname{senh}\varphi}{\cosh\sigma}\operatorname{sen}\omega\\
\frac{\partial\omega}{\partial v} + \frac{\partial\theta}{\partial u} &= \frac{-\operatorname{sen}\theta\cosh\varphi + \operatorname{senh}\sigma\cos\theta\operatorname{senh}\varphi}{\cosh\sigma}\cos\omega.
\end{aligned}\right\} \tag{I}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial u} &= \frac{\cos\theta\cosh\varphi + \operatorname{senh}\sigma\operatorname{sen}\theta\operatorname{senh}\varphi}{\cosh\sigma}\cos\omega\\
\frac{\partial\varphi}{\partial v} &= \frac{\operatorname{sen}\theta\operatorname{senh}\varphi - \operatorname{senh}\sigma\cos\theta\cosh\varphi}{\cosh\sigma}\operatorname{sen}\omega.
\end{aligned}\right\} \tag{II}$$

Questo è un sistema di equazioni ai differenziali totali per le due funzioni reali ω, φ di u, v; esso è illimitatamente integrabile come è chiaro a priori, pel modo con cui fu dedotto dal sistema (2) e come si verifica del resto direttamente, osservando la (α).

Sarà dimostrato il nostro teorema quando si provi che assumendo:

$$T = \cot\left(\frac{\theta_3 - \theta}{2}\right) = \operatorname{senh}\sigma\coth\varphi,$$

saranno soddisfatte le (20) (21) § 17 ove si faccia $a = \cosh\sigma$; e infatti gli sviluppi del § 23 provano allora che la superficie pseudosferica trasformata ha precisamente l'elemento lineare:

$$\overline{d s}^2 = \cos^2\theta_3\, d u^2 + \operatorname{sen}^2\theta_3\, d v^2,$$

e coincide quindi con S_3.

Ora dalla precedente, derivando, si trova per le (II):

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\cos\theta+T\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial T}{\partial u}&=-\frac{\operatorname{tgh}\sigma\cos\omega}{\operatorname{senh}\varphi}\\ \frac{1}{\operatorname{sen}\theta-T\cos\theta}\frac{\partial T}{\partial v}&=-\frac{\operatorname{tgh}\sigma\operatorname{sen}\omega}{\operatorname{senh}\varphi},\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

onde:

$$\frac{1}{(\cos\theta+T\operatorname{sen}\theta)^2}\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2+\frac{1}{(\operatorname{sen}\theta-T\cos\theta)^2}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2+1=\frac{1}{\cosh^2\sigma}(T^2+1);$$

così la (20) § 17 è verificata. Similmente, derivando la 1.ª delle (7) rapporto a v coll'osservare le (I), (II), si verificherà la 2.ª delle (22) § 17, ossia la (21).

Per arrivare alle trasformazioni del § 18 con $a > 1$ abbiamo composto due trasformazioni di Bäcklund $B_{i\sigma}$, $B_{i-\sigma}$ *puramente* immaginarie coniugate. Ma, come abbiamo avvertito al principio del paragrafo, otteniamo egualmente trasformazioni *reali* componendo più in generale due trasformazioni di Bäcklund complesse coniugate. In quale relazione stanno queste più generali trasformazioni colle speciali da noi studiate? Se ponendo $\sigma_1=\sigma+i\sigma'$, $\theta_1=\omega+i\varphi$, si separa nuovamente nelle (2) il reale dall'immaginario, si trova per le ω, φ un sistema di equazioni più generali delle (I), (II), ma che a queste si riducono con un mutamento lineare delle variabili u, v. Adoperando l'identico processo che al § 256 delle *Lezioni* ci ha servito per dimostrare come una trasformazione di Bäcklund si compone di una complementare e di due trasformazioni di Lie, si arriva ad un risultato perfettamente analogo e cioè al teorema:

Le trasformazioni più generali di cui si tratta si compongono di una nostra particolare preceduta e seguita da due trasformazioni di Lie *inverse l'una dell'altra.*

Se analiticamente le trasformazioni più generali si riducono così alle particolari e a trasformazioni di Lie, non se ne deduca che l'esame diretto della loro natura geometrica debba essere considerato come superfluo; anzi è facile prevedere che condurrà a risultati interessanti, occupando le dette trasformazioni, di fronte alle particolari di cui qui ci occupiamo, il medesimo posto come la trasformazione di Bäcklund di fronte alla trasformazione complementare.

§ 29.

Il teorema di permutabilità per l'equazione: $\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} + \text{senh}\, \theta \cosh \theta = 0.$

I risultati conseguiti nei paragrafi precedenti per la composizione delle nuove trasformazioni delle superficie pseudosferiche mediante trasformazioni di Bäcklund sussistono ancora, come ci proponiamo di dimostrare, per le superficie a curvatura costante positiva; soltanto qui le trasformazioni elementari componenti sono sempre necessariamente immaginarie.

L'equazione fondamentale:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} + \text{senh}\, \theta \cosh \theta = 0, \tag{β}$$

da cui dipende la ricerca delle superficie a curvatura costante $K = +1$, si riduce subito, introducendo gli immaginarii, alla forma:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial \beta^2} = \text{sen}\, \omega \cos \omega,$$

e dal punto di vista analitico valgono quindi ancora tutti gli sviluppi relativi al teorema di permutabilità. Presentiamo qui le formole sotto la forma che meglio si presta ai confronti colle nostre precedenti.

Sia θ una soluzione qualsiasi (reale o complessa) della (β) e indichi σ_1 una costante pure qualsiasi (reale o complessa). Denotando con θ_1 una conveniente funzione di u, v, si consideri il seguente sistema di equazioni simultanee:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \theta_1}{\partial u} + i \frac{\partial \theta}{\partial v} &= \text{senh}\, \sigma_1 \cosh \theta\, \text{senh}\, \theta_1 + \cosh \sigma_1\, \text{senh}\, \theta \cosh \theta_1 \\ i \frac{\partial \theta_1}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u} &= -\, \text{senh}\, \sigma_1\, \text{senh}\, \theta \cosh \theta_1 - \cosh \sigma_1 \cosh \theta\, \text{senh}\, \theta_1 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$(i = \sqrt{-1});$$

queste costituiscono, a causa della (β) cui soddisfa θ, un sistema illimitatamente integrabile di equazioni ai differenziali totali per la funzione incognita θ_1. Di più, eliminando per derivazione θ dai primi membri delle (8), si vede che ogni soluzione θ_1 delle (8) è una nuova soluzione della (β): diremo che la soluzione θ_1 è ottenuta dalla θ mediante la trasformazione B_{σ_1}.

Prendasi ora per la costante un altro valore σ_2 e si determini similmente una terza soluzione θ_2 della (β) dalle equazioni simultanee:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \theta_2}{\partial u}+i\frac{\partial \theta}{\partial v} &= \operatorname{senh}\sigma_2 \cosh\theta \operatorname{senh}\theta_2+\cosh\sigma_2 \operatorname{senh}\theta \cosh\theta_2 \\ i\frac{\partial \theta_2}{\partial v}+\frac{\partial \theta}{\partial u} &= -\operatorname{senh}\sigma_2 \operatorname{senh}\theta \cosh\theta_2-\cosh\sigma_2 \cosh\theta \operatorname{senh}\theta_2 . \end{aligned}\right\} \quad (8^*)$$

Note che siano θ_1, θ_2, dimostriamo che si può dedurre, in termini finiti, una quarta soluzione θ_3 della (β) che sia legata a θ_1, θ_2 rispettivamente dalle trasformazioni B_{σ_2}, B_{σ_1} colle costanti σ invertite. Dovranno dunque sussistere insieme le equazioni:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \theta_1}{\partial u}+i\frac{\partial \theta_3}{\partial v} &= \operatorname{senh}\sigma_2 \cosh\theta_3 \operatorname{senh}\theta_1+\cosh\sigma_2 \operatorname{senh}\theta_3 \cosh\theta_1 \\ i\frac{\partial \theta_1}{\partial v}+\frac{\partial \theta_3}{\partial u} &= -\operatorname{senh}\sigma_2 \operatorname{senh}\theta_3 \cosh\theta_1-\cosh\sigma_2 \cosh\theta_3 \operatorname{senh}\theta_1 . \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \theta_2}{\partial u}+i\frac{\partial \theta_3}{\partial v} &= \operatorname{senh}\sigma_1 \cosh\theta_3 \operatorname{senh}\theta_2+\cosh\sigma_1 \operatorname{senh}\theta_3 \cosh\theta_2 \\ i\frac{\partial \theta_2}{\partial v}+\frac{\partial \theta_3}{\partial u} &= -\operatorname{senh}\sigma_1 \operatorname{senh}\theta_3 \cosh\theta_2-\cosh\sigma_1 \cosh\theta_3 \operatorname{senh}\theta_2 . \end{aligned}\right\} \quad (9^*)$$

Sottraendo le (9), (9*) corrispondenti e confrontando coi risultati ottenuti similmente dalle (8), (8*), facilmente si traggono le due equazioni:

$$\cosh(\theta_3-\theta)=\frac{\cosh(\sigma_1-\sigma_2)\cosh(\theta_1-\theta_2)-1}{\cosh(\theta_1-\theta_2)-\cosh(\sigma_1-\sigma_2)}$$

$$\operatorname{senh}(\theta_3-\theta)=\frac{\operatorname{senh}(\sigma_1-\sigma_2)\operatorname{senh}(\theta_1-\theta_2)}{\cosh(\theta_1-\theta_2)-\cosh(\sigma_1-\sigma_2)},$$

le quali sono concordanti, essendo $=1$ la differenza dei quadrati dei secondi membri. Esse possono sostituirsi coll'unica formola ben semplice:

$$\operatorname{tgh}\left(\frac{\theta_3-\theta}{2}\right)=\operatorname{tgh}\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)\coth\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right), \tag{10}$$

e su questa facilmente si verifica che la funzione θ_3, così definita, soddisfa effettivamente le (9), (9*).

Il risultato così conseguito per le soluzioni della equazione (β) indicheremo nuovamente col nome di *teorema di permutabilità*.

§ 30.

Composizione delle nuove trasformazioni per le superficie a curvatura costante positiva.

Suppongasi ora che la soluzione iniziale θ sia *reale* e la costante σ_1 sia complessa qualunque. Indicando, come al § 28 con $\bar{\sigma}_1$, $\bar{\theta}_1$ le quantità coniugate di σ_1, θ_1 si vedrà subito che le (8*) risultano soddisfatte se si pone:

$$\sigma_2 = -\bar{\sigma}_1, \quad \theta_2 = \pi i - \bar{\theta}_1;$$

allora la formola (10) diventa:

$$\operatorname{tgh}\left(\frac{\theta_3 - \theta}{2}\right) = \operatorname{tgh}\left(\frac{\sigma_1 + \bar{\sigma}_1}{2}\right) \operatorname{tgh}\left(\frac{\theta_1 + \bar{\theta}_1}{2}\right). \tag{11}$$

Essendo il secondo membro reale e minore, in valore assoluto, dell'unità vediamo che *la quarta soluzione* θ_3 *risulta nuovamente reale.* Vi corrisponde quindi una superficie reale S_3 di curvatura $K = +1$ e d'elemento lineare:

$$d s_3^2 = \operatorname{senh}^2 \theta_3 \, d u^2 + \cosh^2 \theta_3 \, d v^2;$$

essa dipenderà da quattro costanti arbitrarie due rappresentate dalla parte reale e dal coefficiente dell'immaginario in σ_1 le altre due provenienti dai valori iniziali della parte reale e della complessa in θ_1.

Allo scopo però di arrivare alle trasformazioni delle superficie a curvatura costante positiva studiate al Cap. III, conviene particolarizzare il valore della costante σ_1 supponendola senz'altro reale $= \sigma$ (*). Scindendo nuovamente θ_1 nella sua parte e complessa col porre:

$$\theta_1 = \omega + i \varphi,$$

le (9) ci dànno per le funzioni incognite reali ω, φ il sistema simultaneo illimitatamente integrabile:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial u} &= (\operatorname{senh} \sigma \cosh \theta \operatorname{senh} \omega + \cosh \sigma \operatorname{senh} \theta \cosh \omega) \cos \varphi \\ \frac{\partial \omega}{\partial v} &= -(\operatorname{senh} \sigma \operatorname{senh} \theta \operatorname{senh} \omega + \cosh \sigma \cosh \theta \cosh \omega) \operatorname{sen} \varphi. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

(*) Anche qui, come nel caso delle superficie pseudosferiche, è da osservarsi che la più generale trasformazione ottenuta col supporre σ_1 complessa qualunque si compone di una nostra particolare preceduta e seguita da due trasformazioni di Lie-Bonnet inversa l'una dell'altra. (Cf. le osservazioni in fondo al § 28.)

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\theta}{\partial v}&=(\operatorname{senh}\sigma\cosh\theta\cosh\omega+\cosh\sigma\operatorname{senh}\theta\operatorname{senh}\omega)\operatorname{sen}\varphi\\ \frac{\partial\varphi}{\partial v}-\frac{\partial\theta}{\partial u}&=(\operatorname{senh}\sigma\operatorname{senh}\theta\cosh\omega+\cosh\sigma\cosh\theta\operatorname{senh}\omega)\cos\varphi,\end{aligned}\right\}\quad(12^*)$$

e la (11) diventa:

$$\operatorname{tgh}\left(\frac{\theta_3-\theta}{2}\right)=\operatorname{tgh}\sigma\operatorname{tgh}\omega. \tag{13}$$

Andiamo a verificare che la superficie S_3, applicabile sulla sfera, corrispondente alla soluzione θ_3 dell'equazione fondamentale (β) definita dalla (13), si deduce dalla S appunto colla costruzione del § 15, ove si riporti sopra ogni normale di S il segmento:

$$T=\operatorname{tgh}\left(\frac{\theta_3-\theta}{2}\right)=\operatorname{tgh}\sigma\operatorname{tgh}\omega. \tag{14}$$

Derivando ed osservando le (12), troviamo infatti:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u}&=\frac{\operatorname{senh}\sigma\cos\varphi}{\cosh\omega}\\ \frac{1}{\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v}&=-\frac{\operatorname{senh}\sigma\operatorname{sen}\varphi}{\cosh\omega},\end{aligned}\right\}\quad(15)$$

da cui quadrando e sommando abbiamo:

$$\frac{1}{(\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta)^2}\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2+\frac{1}{(\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta)^2}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2+1=\frac{\operatorname{senh}^2\sigma}{\cosh^2\omega}+1=$$
$$=-\cosh^2\sigma\,(T^2-1).$$

Dunque T soddisfa all'equazione fondamentale (I) § 12, ove alla costante c si dia il valore negativo:

$$c=-\cosh^2\sigma.$$

Resta solo a dimostrarsi che T soddisfa anche l'altra equazione (II) § 12 o, ciò che è lo stesso, la seconda delle (III*):

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u}\right)=$$
$$=\operatorname{senh}\theta\,\frac{1}{\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u}\cdot\frac{1}{\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v}+$$
$$+\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{1}{\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v}.$$

La verifica è immediata, ove si derivi rispetto a v la prima delle (15) e si abbia riguardo alle (12), (12*) ed alle (15) stesse.

Da quanto abbiamo dimostrato risulta che il luogo S_0 degli estremi dei segmenti T staccati sulle normali di S, è applicabile sull'ellissoide allungato di rotazione di semi-asse maggiore $=1$, di semi-asse minore $=\frac{1}{\cosh\sigma}$ e, confrontando le formole attuali con quelle del § 21, chiaramente vediamo che la superficie $\overline{S}$ simmetrica di S rispetto a S_0 ha precisamente l'elemento lineare:

$$\overline{ds^2} = \operatorname{senh}^2\theta_3\, d\,u^2 + \cosh^2\theta_3\, d\,v^2,$$

e coincide quindi colla nostra S_3.

Così mediante due successive trasformazioni immaginarie di Bäcklund abbiamo composto la trasformazione reale delle superficie a curvatura costante positiva del Cap. III, corrispondente ad un valore *negativo* della costante c. Per considerare anche il caso della c positiva basta (come risulta anche a priori dalle osservazioni del § 22) scambiare in tutte le nostre formole precedenti, in particolare nelle (12), (12*), u con v. Assumendo allora:

$$T = \coth\sigma \coth\omega,$$

si vedrà subito che ne risultano soddisfatte le equazioni di trasformazione (I), (II) § 12 ove si ponga:

$$c = \operatorname{senh}^2\sigma.$$

In tal caso riportando sulle normali alla superficie iniziale S segmenti $=T$, il luogo S_0 degli estremi sarà applicabile sull'iperboloide di rotazione a due falde colle lunghezze:

$$a = 1, \quad b = \frac{1}{\operatorname{senh}\sigma},$$

dei semi-assi trasverso e coniugato.

§ 31.

Le conseguenze del teorema di permutabilità.

Gli sviluppi analitici dei paragrafi precedenti relativi alle nuove trasformazioni delle superficie a curvatura costante non hanno soltanto il vantaggio di risolverle in trasformazioni più semplici (immaginarie): essi conducono, come ora si vedrà, a dimostrare l'importante teorema:

Se per una superficie a curvatura costante si sanno completamente integrare le equazioni di trasformazione per tutti i valori della costante che vi figura (*), *l'applicazione successiva ed illimitata delle nostre trasformazioni alle nuove superficie a curvatura costante via via ottenute richiederà soltanto calcoli algebrici e di derivazione.*

Procediamo infatti come al § 259 delle *Lezioni*, utilizzando il teorema di permutabilità. Poniamo per es. che la superficie iniziale S sia a curvatura costante positiva $K = +1$ e corrisponda alla soluzione θ della (β). Per la nostra ipotesi, sapremo integrare completamente, per ogni valore della costante reale σ (incluso $\sigma = 0$), il sistema:

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial u} + i \frac{\partial \theta}{\partial v} = \operatorname{senh} \sigma \cosh \theta \operatorname{senh} \theta_1 + \cosh \sigma \operatorname{senh} \theta \cosh \theta_1$$

$$i \frac{\partial \theta_1}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u} = - \operatorname{senh} \sigma \operatorname{senh} \theta \cosh \theta_1 - \cosh \sigma \cosh \theta \operatorname{senh} \theta_1,$$

e la soluzione più generale θ_1 conterrà, oltre σ, una costante arbitraria complessa C, sicchè potremo scrivere:

$$\theta_1 = \theta_1 (u, v, \sigma, C).$$

Si consideri ora una soluzione speciale θ'_1 del sistema corrispondente al valore σ' di σ ed al valore C_1 di C, sia dunque:

$$\theta'_1 = \theta_1 (u, v, \sigma_1, C_1).$$

Basterà dimostrare che della θ'_1 possiamo determinare, senza calcoli di integrazione, tutte le soluzioni trasformate mediante una qualunque B_σ. In-

(*) Intendiamo che non siano nemmeno esclusi i valori $c = -1$, $a = 1$ delle costanti che figurano nelle equazioni di trasformazione (I), (III) § 12 e (20), (22) § 17, ciò che significa (Cf. § 20 in fondo) che della superficie iniziale S si suppongono note le linee geodetiche.

tanto se $\sigma \neq \sigma'$, la formola del teorema di permutabilità:

$$\operatorname{tgh}\left(\frac{\Theta - \theta}{2}\right) = \operatorname{tgh}\left(\frac{\sigma - \sigma'}{2}\right) \coth\left(\frac{\theta_1 - \theta'_1}{2}\right),$$

ci farà conoscere in termini finiti la trasformata Θ di θ mediante la B_s. Se poi $\sigma = \sigma'$ basterà, come al § 259 delle *Lezioni*, dedurre dalla precedente con passaggio al limite la formola:

$$\coth\left(\frac{\Theta_1 - \theta}{2}\right) = \left[\frac{\partial \theta_1}{\partial \sigma} + \frac{\partial \theta_1}{\partial C} C'\right]_{s=\sigma'},$$

dove dopo la derivazione si farà $\sigma = \sigma'$, $C = C_1$ e con C' è indicata una nuova costante arbitraria; questa ci definisce la trasformata della θ'_1 mediante la $B_{\sigma'}$.

Come immediata conseguenza del teorema, noteremo ancora che: *Sulle successive superficie a curvatura costante trasformate si otterrà in termini finiti l'equazione delle linee geodetiche.* Ciò risulta subito dall'osservazione in nota al teorema. Direttamente lo dimostriamo osservando che per ciascuna delle trasformate, che torneremo a indicare con S, sapremo integrare completamente il sistema (12), (12*) anche per $\sigma = 0$ vale a dare il sistema:

$$\frac{\partial \omega}{\partial u} = \cosh \omega \operatorname{senh} \theta \cos \varphi, \qquad \frac{\partial \omega}{\partial v} = -\cosh \omega \cosh \theta \operatorname{sen} \varphi,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial v} = \operatorname{senh} \omega \operatorname{senh} \theta \operatorname{sen} \varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial \theta}{\partial u} = \operatorname{senh} \omega \cosh \theta \cos \varphi.$$

Le prime due ci dimostrano che l'espressione:

$$\operatorname{senh} \theta \cos \varphi \, d u - \cosh \theta \operatorname{sen} \varphi \, d v = \frac{d \omega}{\cosh \omega} \text{ (*)},$$

(*) Si osservi che anche l'espressione:

$$\cosh \omega (\operatorname{senh} \theta \operatorname{sen} \varphi \, d u + \cosh \theta \cos \varphi \, d v),$$

è il differenziale esatto di una funzione τ; dalle due formole:

$$\operatorname{senh} \theta \cos \varphi \, d u - \cosh \theta \operatorname{sen} \varphi \, d v = \frac{d \omega}{\cosh \omega},$$

$$\operatorname{senh} \theta \operatorname{sen} \varphi \, d u + \cosh \theta \cos \varphi \, d v = \frac{d \tau}{\cosh \omega},$$

quadrando e sommando si ha:

$$\operatorname{senh}^2 \theta \, d u^2 + \cosh^2 \theta \, d v^2 = \frac{d \omega^2 + d \tau^2}{\cosh^2 \omega},$$

e l'elemento lineare di S è così ridotto a forma geodetica isoterma.

è il differenziale esatto della funzione:

$$\psi = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} (e^{\omega}),$$

e poichè:

$$\Delta_1 \psi = \frac{1}{\operatorname{senh}^2 \theta}\left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{\cosh^2 \theta}\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2 = 1,$$

si ha una soluzione ψ dell'equazione $\Delta_1 \psi = 1$ con due costanti arbitrarie, ciò che dà elementi sovrabbondanti per la determinazione in termini finiti delle linee geodetiche (*).

Con queste ultime ricerche abbiamo evidentemente portato la teoria delle nuove trasformazioni per le superficie a curvatura costante positiva al punto medesimo di sviluppo che la teoria delle trasformazioni di Bäcklund per le superficie pseudosferiche nuove, col teorema di permutabilità, ha da tempo raggiunto. Così, se ritorniamo ai risultati conseguiti al § 16 e 19 partendo dalla soluzione $\theta = 0$, vediamo che alla superficie d'Enneper trovate e alle loro successive trasformate sapremo illimitatamente applicare le nostre trasformazioni, con soli calcoli algebrici e di derivazione.

CAPITOLO VI.

Le nuove trasformazioni applicate ai sistemi tripli ortogonali contenenti una serie di superficie a curvatura costante.

§ 32.

Richiamo delle formole relative ai sistemi di Weingarten a curvatura positiva.

Ci volgiamo ora alle ultime ricerche della presente Memoria, considerando non più superficie a curvatura costante isolate, ma serie ∞^1 di tali superficie, appartenenti ad un sistema triplo ortogonale. La curvatura delle superficie della detta serie può avere il medesimo valore costante per tutte, ovvero essere più in generale variabile dall'una all'altra. Limitandoci a dare nei due ultimi paragrafi le formole relative al caso generale, restringeremo,

(*) *Lezioni*, pag. 165.

per ragioni di brevità, la trattazione dettagliata, al caso cioè di quei sistemi tripli ortogonali che ho chiamato *sistemi di* WEINGARTEN (*).

È noto come pei sistemi tripli ortogonali pseudosferici (contenenti cioè una serie di superficie pseudosferiche) possedevamo, nella trasformazione di BÄCKLUND, un mezzo per dedurre da un sistema noto infiniti nuovi sistemi della medesima specie. Ci proponiamo di far vedere come le nuove trasformazioni permettono di raggiungere il medesimo scopo per tutti i sistemi tripli ortogonali con una serie di superficie a curvatura costante positiva o negativa. Ciò è facile a prevedersi analiticamente, dopo i risultati conseguiti al Cap. V; ma la conferma diretta mediante formole definitive, libere affatto da immaginarii, presenta un effettivo interesse, specialmente nel caso che le superficie di una serie siano a curvatura costante *positiva*, poichè le nostre cognizioni su questi sistemi si limitavano fin qui ai teoremi d'esistenza, come seguono dalla teoria generale delle equazioni a derivate parziali.

Cominciamo dal riprendere le formole fondamentali relative ai sistemi di WEINGARTEN di curvatura positiva $K = +1$. Al quadrato dell'elemento lineare dello spazio riferito ad un tale sistema triplo ortogonale (u, v, w), le $w =$ cost. essendo le superficie di curvatura $K = +1$, possiamo dare la forma (**):

$$d s^2 = \operatorname{senh}^2 \theta \, d u^2 + \cosh^2 \theta \, d v^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial w}\right)^2 d w^2, \tag{1}$$

dove θ è una funzione delle tre variabili u, v, w, che soddisfa le equazioni caratteristiche:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} + \operatorname{senh} \theta \cosh \theta = 0, \\ &\frac{1}{\operatorname{senh}^2 \theta}\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial w}\right)^2 + \frac{1}{\cosh^2 \theta}\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial v \, \partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial w}\right)^2 = 1 ; \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

viceversa ogni soluzione θ del sistema (2) definisce un corrispondente sistema di WEINGARTEN. Oltre a queste equazioni di 2.° ordine, cui soddisfa θ, conviene tener conto pei calcoli seguenti anche delle equazioni del 3.° or-

(*) Vedi la mia Memoria nel Tom. XIII, serie 2.ª di questi *Annali*, ovvero *Lezioni*, Cap. XX.

(**) *Lezioni*, pag. 530.

dine che ne seguono:

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right)=-\operatorname{senh}\theta\frac{\partial\theta}{\partial w}-\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\frac{\partial\theta}{\partial v}\\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right)=\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\frac{\partial\theta}{\partial u}\\
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right)=\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\frac{\partial\theta}{\partial v}\\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right)=-\cosh\theta\frac{\partial\theta}{\partial w}-\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\frac{\partial\theta}{\partial u}.
\end{aligned}\right\}\tag{3}
$$

Indichiamo poi con x, y, z le coordinate di un punto mobile dello spazio espresse pei parametri u, v, w del sistema triplo ortogonale e con:

$$
\begin{gathered}
(X_1,\ Y_1,\ Z_1)\\
(X_2,\ Y_2,\ Z_2)\\
(X_3,\ Y_3,\ Z_3),
\end{gathered}
$$

i rispettivi coseni di direzione delle tangenti alle linee coordinate (u), (v), (w); avremo le formole:

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial u}=\operatorname{senh}\theta\,X_1,\quad \frac{\partial x}{\partial v}=\cosh\theta\,X_2,\quad \frac{\partial x}{\partial w}=\frac{\partial\theta}{\partial w}X_3,\\
&\frac{\partial X_1}{\partial u}=-\frac{\partial\theta}{\partial v}X_2-\cosh\theta\,X_3,\quad \frac{\partial X_1}{\partial v}=\frac{\partial\theta}{\partial u}X_2,\quad \frac{\partial X_1}{\partial w}=\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}X_3,\\
&\frac{\partial X_2}{\partial u}=\frac{\partial\theta}{\partial v}X_1,\quad \frac{\partial X_2}{\partial v}=-\frac{\partial\theta}{\partial u}X_1-\operatorname{senh}\theta\,X_3,\quad \frac{\partial X_2}{\partial w}=\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}X_3,\\
&\frac{\partial X_3}{\partial u}=\cosh\theta\,X_1,\quad \frac{\partial X_3}{\partial v}=\operatorname{senh}\theta\,X_2,\quad \frac{\partial X_3}{\partial w}=-\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}X_1-\\
&\qquad\qquad-\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}X_2.
\end{aligned}\right\}\tag{4}
$$

e le analoghe per y, z; Y_i, Z_i $(i=1,\ 2,\ 3)$.

§ 33.

Le trasformazioni dei sistemi di Weingarten a curvatura positiva.

Richiamate le formole fondamentali che servono al nostro scopo, andiamo ora a trattare il problema della trasformazione. Di ciascuna superficie S a curvatura costante $K = +1$ del sistema w prendiamo *una* trasformata $\overline{S}$ secondo la trasformazione del § 15 definita dalle formole (10) ibid.:

$$\left.\begin{aligned}\overline{x} = x + \frac{2T}{c(T^2-1)}\Big\{ X_3 - \frac{1}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u}X_1 - \\ - \frac{1}{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v}X_2\Big\},\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

dove c indica una costante assoluta e T sarà attualmente funzione di u, v e di w, la quale dovrà intanto soddisfare le equazioni fondamentali (I) (II) § 12:

$$\frac{1}{(\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta)^2}\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{(\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta)^2}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2 + 1 = c(T^2-1). \tag{α}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u}\right) = \\ &= \operatorname{senh}\theta\frac{1}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u}\cdot\frac{1}{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v} + \\ &+ \frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{1}{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v}.\end{aligned}\right\} \tag{β}$$

Ora noi vogliamo esaminare se è possibile determinare ulteriormente T in guisa che le ∞^1 superficie $\overline{S}$, a curvatura $K = +1$, facciano parte esse stesse di un nuovo sistema di Weingarten. Siccome sulle superficie $\overline{S}$ le linee di curvatura u, v si corrispondono, il teorema di Darboux-Dupin dimostra che ciò avrà luogo se nel sistema $(u.\ v,\ w)$ definito dalle (5) le linee coordinate (w) saranno ortogonali alle superficie $\overline{S}$, ciò che richiede la proporzionalità delle derivate:

$$\frac{\partial\overline{x}}{\partial w},\quad \frac{\partial\overline{y}}{\partial w},\quad \frac{\partial\overline{z}}{\partial w},$$

ai coseni di direzione:

$$\overline{X}_3,\ \overline{Y}_3,\ \overline{Z}_3,$$

della normale alla $\overline{S}$. Ora per le (11) § 5 abbiamo:

$$\overline{X}_3 = \frac{2}{c(T^2-1)}\left\{\frac{1}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u}X_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v}X_2 + \frac{cT^2-(c+2)}{2}X_3\right\},$$

e d'altronde, derivando le (5) rapporto a w, otteniamo:

$$\frac{\partial \overline{x}}{\partial w} = A\,X_1 + B\,X_2 + C\,X_3,$$

ove si ponga per brevità:

$$A = -\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{2T}{c(T^2-1)}\frac{1}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u}\right) - \frac{2T}{c(T^2-1)}\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}$$

$$B = -\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{2T}{c(T^2-1)}\frac{1}{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v}\right) - \frac{2T}{c(T^2-1)}\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}$$

$$C = \frac{\partial\theta}{\partial w} + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{2T}{c(T^2-1)}\right) - \frac{2T}{c(T^2-1)}\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\frac{1}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u} -$$

$$- \frac{2T}{c(T^2-1)}\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\frac{1}{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v}.$$

Per esprimere le dette condizioni avremo dunque le proporzioni:

$$\frac{A}{\dfrac{1}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}\dfrac{\partial T}{\partial u}} = \frac{B}{\dfrac{1}{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta}\dfrac{\partial T}{\partial v}} = \frac{C}{\dfrac{cT^2-(c+2)}{2}}, \tag{6}$$

L'eguaglianza dei due primi termini porge l'equazione:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v}\cdot\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u}\right) - \\ &- \frac{1}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u}\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v}\right) = \\ &= \frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\frac{1}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u} - \\ &- \frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\frac{1}{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v}, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

e se a questa associamo la seguente che risulta dal derivare la (α) rapporto a w:

$$\frac{1}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u}\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u}\right) +$$

$$+\frac{1}{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v}\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v}\right) = c\,T\frac{\partial T}{\partial w},$$

possiamo risolvere queste due rapporto alle due derivate:

$$\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u}\right),\quad \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v}\right),$$

e introducendo questi valori nella rimanente equazione (6), troviamo l'ulteriore equazione del 1.° ordine per T:

$$\left.\begin{aligned}(c+1)\left(\frac{\partial T}{\partial w}+\frac{\partial \theta}{\partial w}\right) = c\,T^2\frac{\partial\theta}{\partial w} - \frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\frac{T}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u} - \\ - \frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\frac{T}{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v}.\end{aligned}\right\}\quad(\gamma)$$

D'altronde dalla (γ) derivando segue la (7) che possiamo dunque trascurare; resta solo da determinare T in guisa da soddisfare le equazioni simultanee (α), (β), (γ). Se prendiamo:

$$T,\quad \frac{\partial T}{\partial u},\quad \frac{\partial T}{\partial v},$$

come funzioni incognite, le quali però debbono essere legate fra loro dalla equazione (α) in termini finiti, facilmente vediamo che dalle (α), (β), (γ) derivando si ottengono le tre derivate rapporto ad u, v, w di ciascuna di queste tre funzioni, espresse per le funzioni medesime; abbiamo cioè per le nostre tre funzioni un sistema di equazioni ai differenziali totali. Si può verificare che questo sistema, in forza delle (2) (3) cui soddisfa θ, è illimitatamente integrabile. Differiamo la verifica ai paragrafi seguenti dove si potrà fare in modo molto più semplice. Ne segue che non soltanto possiamo soddisfare al sistema (α), (β), (γ), ma di più sono in nostro arbitrio i valori iniziali di T e di una delle due derivate $\frac{\partial T}{\partial u}$, $\frac{\partial T}{\partial v}$ per un sistema iniziale $u_0\,v_0\,w_0$ di valori delle variabili. Geometricamente ciò equivale al teorema:

Ogni sistema di Weingarten *a curvatura positiva ammette* ∞^3 *sistemi della stessa specie trasformati secondo le nuove trasformazioni; per individuare il sistema trasformato basta fissare (ad arbitrio) di una delle superficie a curvatura costante del sistema primitivo la superficie trasformata.*

§ 34.

Il teorema di permutabilità pel sistema (2).

Vediamo ora come anche le nostre trasformazioni *reali* dei sistemi di Weingarten a curvatura positiva si compongano con due trasformazioni immaginarie successive di Bäcklund, nella qual cosa procederemo, come già al § 29 per le superficie isolate, per via puramente analitica.

Sia θ una soluzione qualsiasi, reale o complessa, del sistema (2) e indicando con σ_1 una costante arbitraria (reale o complessa) si consideri il seguente sistema di equazioni simultanee alle derivate parziali di 1.° ordine per una funzione incognita θ_1 di u, v, w:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \theta_1}{\partial u}+i\frac{\partial \theta}{\partial v}=\operatorname{senh}\sigma_1\cosh\theta\operatorname{senh}\theta_1+\cosh\sigma_1\operatorname{senh}\theta\cosh\theta_1\\
&i\frac{\partial \theta_1}{\partial v}+\frac{\partial \theta}{\partial u}=-\operatorname{senh}\sigma_1\operatorname{senh}\theta\cosh\theta_1-\cosh\sigma_1\cosh\theta\operatorname{senh}\theta_1\\
&\operatorname{senh}\sigma_1\frac{\partial \theta_1}{\partial w}=\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\operatorname{senh}\theta_1+\\
&\qquad\qquad+\frac{i}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\cosh\theta_1-\cosh\sigma_1\frac{\partial\theta}{\partial w},
\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

delle quali le prime due sono le equazioni stesse già considerate al § 29. Si verifica subito che, in forza delle equazioni (2), (3) cui soddisfa θ, il sistema (8) è illimitatamente integrabile, sicchè possiamo assegnare ad arbitrio per una terna iniziale $(u_0\, v_0\, w_0)$ di valori delle variabili il valore di θ_1. Inoltre la θ_1 soddisferà essa stessa al sistema (2), cioè si avrà:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\theta_1}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\theta_1}{\partial v^2}+\operatorname{senh}\theta_1\cosh\theta_1=0\\
&\frac{1}{\operatorname{senh}^2\theta_1}\left(\frac{\partial^2\theta_1}{\partial u\,\partial w}\right)^2+\frac{1}{\cosh^2\theta_1}\left(\frac{\partial^2\theta_1}{\partial v\,\partial w}\right)^2+\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial w}\right)^2=1.
\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

Quanto alla prima abbiamo già fatto la verifica al § 29 eliminando per derivazione θ dalle due prime (8). Per verificare anche la seconda delle (9) traggansi dalle (8) derivando le due formole:

$$\frac{1}{\operatorname{senh}\theta_1}\frac{\partial^2\theta_1}{\partial u\,\partial w}=\cosh\sigma_1\operatorname{senh}\theta\frac{\partial\theta_1}{\partial w}+\operatorname{senh}\sigma_1\operatorname{senh}\theta\frac{\partial\theta}{\partial w}+$$

$$+\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\cosh\theta\cosh\theta_1+\frac{i}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\cosh\theta\operatorname{senh}\theta_1$$

$$\frac{1}{\cosh\theta_1}\frac{\partial^2\theta_1}{\partial u\,\partial w}=i\cosh\sigma_1\cosh\theta\frac{\partial\theta_1}{\partial w}+i\operatorname{senh}\sigma_1\cosh\theta\frac{\partial\theta}{\partial w}+$$

$$+\frac{i}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\operatorname{senh}\theta\cosh\theta_1-\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\operatorname{senh}\theta\operatorname{senh}\theta_1,$$

le quali quadrate e sommate, con riguardo alla terza delle (8), dànno appunto la seconda delle (9).

Diamo ora alla costante σ_1 un altro valore σ_2 e come la θ_1 dal sistema (8) così determinisi ora una terza soluzione θ_2 del sistema (2) dalle equazioni analoghe:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\theta_2}{\partial u}+i\frac{\partial\theta}{\partial v}=\operatorname{senh}\sigma_2\cosh\theta\operatorname{senh}\theta_2+\cosh\sigma_2\operatorname{senh}\theta\cosh\theta_2\\
&i\frac{\partial\theta_2}{\partial v}+\frac{\partial\theta}{\partial u}=-\operatorname{senh}\sigma_2\operatorname{senh}\theta\cosh\theta_2-\cosh\sigma_2\cosh\theta\operatorname{senh}\theta_2\\
&\operatorname{senh}\sigma_2\frac{\partial\theta_2}{\partial w}=\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\operatorname{senh}\theta_2+\\
&\qquad\qquad+\frac{i}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\cosh\theta_2-\cosh\sigma_2\frac{\partial\theta}{\partial w},
\end{aligned}\right\}\quad(8^*)$$

Sussiste ancora qui il teorema di permutabilità, cioè esiste una quarta soluzione θ_3 del sistema (2) deducibile in termini finiti dall'equazione solita:

$$\operatorname{tgh}\left(\frac{\theta_3-\theta}{2}\right)=\operatorname{tgh}\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)\coth\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right);\qquad(9)$$

la θ_3 è legata a θ_1 dalle equazioni stesse (8), ove per θ si ponga θ_3 e per σ_1 si ponga σ_2 e similmente a θ_2 dalle (8*) cangiato θ in θ_3 e σ_2 in σ_1. L'agevole verifica lasciamo al lettore.

§ 35.

Le formole di composizione nel caso $c < 0$.

Si supponga ora che la primitiva soluzione del sistema (2) sia reale. Essendo σ_1 complessa o reale, sarà naturalmente θ_1 complessa; allora osserviamo come al § 30 che si soddisfano le (8*) assumendo:

$$\sigma_2 = -\bar{\sigma}_1, \quad \theta_2 = \pi i - \bar{\theta}_1,$$

indicando come al solito $\bar{\sigma}_1$, $\bar{\theta}_1$ le coniugate di σ_1, θ_1. La soluzione θ_3 del sistema (2) definita dalla (9) che diventa:

$$\operatorname{tgh}\left(\frac{\theta_3 - \theta}{2}\right) = \operatorname{tgh}\left(\frac{\sigma_1 + \bar{\sigma}_1}{2}\right) \operatorname{tgh}\left(\frac{\theta_1 + \bar{\theta}_1}{2}\right). \tag{9*}$$

è evidentemente reale. Vi corrisponderà quindi un nuovo sistema triplo ortogonale di Weingarten, a curvatura positiva, che darà all'elemento lineare dello spazio la forma:

$$d s_3^2 = \operatorname{senh}^2 \theta_3 \, d u^2 + \cosh^2 \theta_3 \, d v^2 + \left(\frac{\partial \theta_3}{\partial w}\right)^2 d w^2. \tag{10}$$

Particolarizziamo ancora supponendo di assumere σ_1 reale $= \sigma$ e dimostriamo che allora il sistema di Weingarten corrispondente alla (13) non è altro che il trasformato del primitivo secondo una delle trasformazioni del § 33. Così dimostreremo come le trasformazioni reali ivi studiate si compongano di due successive immaginarie coniugate di Bäcklund. Scindendo, come al § 30, in θ_1 il reale dall'immaginario ponendo:

$$\theta_1 = \omega + i \varphi,$$

e separando nelle (8) il reale dall'immaginario otterremo le formole:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \omega}{\partial u} = (\operatorname{senh} \sigma \cosh \theta \operatorname{senh} \omega + \cosh \sigma \operatorname{senh} \theta \cosh \omega) \cos \varphi \\
&\frac{\partial \omega}{\partial v} = -(\operatorname{senh} \sigma \operatorname{senh} \theta \operatorname{senh} \omega + \cosh \sigma \cosh \theta \cosh \omega) \operatorname{sen} \varphi \\
&\operatorname{senh} \sigma \frac{\partial \omega}{\partial w} = \frac{1}{\operatorname{senh} \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w} \operatorname{senh} \omega \cos \varphi - \\
&\qquad - \frac{1}{\cosh \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w} \operatorname{senh} \omega \operatorname{sen} \varphi - \cosh \sigma \frac{\partial \theta}{\partial w}.
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial v} = (\operatorname{senh}\sigma \cosh\theta \cosh\omega + \cosh\sigma \operatorname{senh}\theta \operatorname{senh}\omega) \operatorname{sen}\varphi \\
&\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial \theta}{\partial u} = (\operatorname{senh}\sigma \operatorname{senh}\theta \cosh\omega + \cosh\sigma \cosh\theta \operatorname{senh}\omega) \cos\varphi \\
&\operatorname{senh}\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial w} = \frac{1}{\operatorname{senh}\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w} \cosh\omega \operatorname{sen}\varphi + \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{\cosh\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w} \cosh\omega \cos\varphi .
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Questo sistema di equazioni simultanee per le due funzioni reali incognite ω, φ è illimitatamente integrabile e possono assumersi ad arbitrio i valori iniziali di ω, φ. Pongasi ora:

$$T = \operatorname{tgh}\left(\frac{\theta_3 - \theta}{2}\right) = \operatorname{tgh}\sigma \operatorname{tgh}\omega, \tag{13}$$

e facilmente si verificherà che con questo valore di T, ove si ponga:

$$c = -\cosh^2\sigma,$$

si soddisferanno le equazioni di trasformazione (α), (β), (γ) § 33. Per le prime due equazioni (α) (β) abbiamo già fatta la verifica al § 30. Per verificare anche la (γ) che qui si scrive:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{senh}^2\sigma \left(\frac{\partial T}{\partial w} + \frac{\partial \theta}{\partial w}\right) - \cosh^2\sigma\, T^2 \frac{\partial \theta}{\partial w} - \\
&- \frac{1}{\operatorname{senh}\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w} \cdot \frac{T}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta} \frac{\partial T}{\partial u} - \\
&- \frac{1}{\cosh\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w} \frac{T}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta} \frac{\partial T}{\partial v} = 0 ,
\end{aligned}$$

basta osservare le formole (§ 30):

$$T = \operatorname{tgh}\sigma \operatorname{tgh}\omega, \quad \frac{1}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta} \frac{\partial T}{\partial u} = \frac{\operatorname{senh}\sigma \cos\varphi}{\cosh\omega}$$

$$\frac{1}{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta} \frac{\partial T}{\partial v} = - \frac{\operatorname{senh}\sigma \operatorname{sen}\varphi}{\cosh\omega},$$

e la precedente si muterà nella terza delle (11), che è soddisfatta.

Il sistema triplo di Weingarten che si deduce secondo le formole (5) § 33 dal primitivo assumendo:

$$T = \operatorname{tgh}\sigma \operatorname{tgh}\omega,$$

corrisponderà dunque appunto alla forma (10) dell'elemento lineare dello spazio.

§ 36.

LE FORMOLE DI COMPOSIZIONE PEL CASO $c > 0$.

Ci resta da vedere come anche nel caso $c > 0$ la trasformazione del § 33 dei sistemi tripli di WEINGARTEN a curvatura positiva si componga con due immaginarie successive di BÄCKLUND. A tale scopo, in luogo del sistema (8) del § 34, considereremo il seguente:

$$\left.\begin{aligned}
&i\frac{\partial \theta_1}{\partial u}+\frac{\partial \theta}{\partial v}=-\operatorname{senh}\sigma_1\operatorname{senh}\theta\cosh\theta_1-\cosh\sigma_1\cosh\theta\operatorname{senh}\theta_1\\
&\frac{\partial \theta_1}{\partial v}+i\frac{\partial \theta}{\partial u}=\operatorname{senh}\sigma_1\cosh\theta\operatorname{senh}\theta_1+\cosh\sigma_1\operatorname{senh}\theta\cosh\theta_1\\
&\cosh\sigma_1\frac{\partial \theta_1}{\partial w}=-\frac{i}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\operatorname{senh}\theta_1-\\
&\qquad\qquad-\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\cosh\theta_1-\operatorname{senh}\sigma_1\frac{\partial\theta}{\partial w},
\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

ove σ_1 indica una costante arbitraria e θ_1 una funzione incognita di u, v, w. Il sistema (14), a causa delle (2) (3), è illimitatamente integrabile ed un suo integrale θ_1 è una nuova soluzione del sistema (2). Cangiando σ_1 in σ_2 e θ_1 in θ_2 varrà ancora il teorema di permutabilità e avremo in termini finiti dalla solita formola (9) una quarta soluzione θ_3 del sistema (2). Facciamo nuovamente l'ipotesi del paragrafo precedente supponendo σ_1 reale $=\sigma$ ed assumendo:

$$\theta_1=\omega+i\varphi,\quad \theta_2=\pi i-\overline{\theta}_1,$$

con che θ_2 viene a soddisfare alle equazioni analoghe alle (14). Separando nelle (14) il reale dall'immaginario, troviamo per ω, φ il seguente sistema (illimitatamente integrabile):

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\omega}{\partial u}=-(\operatorname{senh}\sigma\operatorname{senh}\theta\operatorname{senh}\omega+\cosh\sigma\cosh\theta\cosh\omega)\operatorname{sen}\varphi\\
&\frac{\partial\omega}{\partial v}=(\operatorname{senh}\sigma\cosh\theta\operatorname{senh}\omega+\cosh\sigma\operatorname{senh}\theta\cosh\omega)\cos\varphi\\
&\cosh\sigma\frac{\partial\omega}{\partial w}=\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\cosh\omega\operatorname{sen}\varphi-\\
&\qquad\qquad-\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\cosh\omega\cos\varphi-\operatorname{senh}\sigma\frac{\partial\theta}{\partial w}\cdot
\end{aligned}\right\}\quad(15)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \varphi}{\partial u}-\frac{\partial \theta}{\partial v}=(\operatorname{senh}\sigma \operatorname{senh}\theta \cosh\omega+\cosh\sigma\cosh\theta\operatorname{senh}\omega)\cos\varphi\\
&\frac{\partial \varphi}{\partial v}+\frac{\partial \theta}{\partial u}=(\operatorname{senh}\sigma \cosh\theta \cosh\omega+\cosh\sigma\operatorname{senh}\theta\operatorname{senh}\omega)\operatorname{sen}\varphi\\
&\cosh\sigma\frac{\partial \varphi}{\partial v}=-\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\operatorname{senh}\omega\cos\varphi-\\
&\qquad\qquad-\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\operatorname{senh}\omega\operatorname{sen}\varphi.
\end{aligned}\right\}\quad(16)$$

La formola:

$$\operatorname{tgh}\left(\frac{\theta_3-\theta}{2}\right)=\operatorname{tgh}\sigma\operatorname{tgh}\omega,$$

ci definirà ancora un nuovo sistema reale di WEINGARTEN, a curvatura positiva, corrispondente all'elemento lineare dello spazio:

$$d s_3^2=\operatorname{senh}^2\theta_3\, d u^2+\cosh^2\theta_3\, d v^2+\left(\frac{\partial \theta_3}{\partial w}\right)^2 d w^2.$$

Verificheremo che esso deriva dal primitivo colla trasformazione del § 33 ove si assuma per T il valore:

$$T=\coth\sigma\coth\omega,$$

e per la costante:

$$c=\operatorname{senh}^2\sigma.$$

Qui si ha:

$$\frac{1}{\operatorname{senh}\theta+T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u}=\frac{\cosh\sigma\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{senh}\omega}$$

$$\frac{1}{\cosh\theta+T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v}=-\frac{\cosh\sigma\cos\varphi}{\operatorname{senh}\omega},$$

e con questi valori, tenendo conto delle formole precedenti, facilmente si verifica che le equazioni di trasformazione (α), (β), (γ) § 33 sono identicamente soddisfatte.

§ 37.

LE TRASFORMAZIONI NEL CASO GENERALE DELLA CURVATURA POSITIVA VARIABILE CON w.

Occupiamoci da ultimo dei sistemi tripli ortogonali (u, v, w) più generali, contenenti una serie di superficie $w=\text{cost.}$ a curvatura costante, ma variabile però dall'una all'altra superficie nella serie, e dimostriamo anche qui come possano applicarsi le nostre trasformazioni. Ci limiteremo per altro a dare le formole analitiche per le trasformazioni, le verifiche per la effettiva costruzione essendo del tutto analoghe a quelle che superiormente abbiamo sviluppato pel caso particolare dei sistemi di WEINGARTEN.

Nel sistema triplo ortogonale (u, v, w) abbiano dapprima le superficie $w =$ cost. la curvatura K positiva $= \frac{1}{R^2}$, dove attualmente R, anzichè una costante, sarà una funzione di w. L'elemento lineare dello spazio, riferito ad un tale sistema, prenderà la forma caratteristica:

$$d s^2 = \operatorname{senh}^2 \theta \, d u^2 + \cosh^2 \theta \, d v^2 + R^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial w}\right)^2 d w^2, \tag{17}$$

dove la funzione $\theta(u, v, w)$ sarà legata alla $R(w)$ dalle equazioni fondamentali (equazioni di LAMÉ):

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} + \frac{\operatorname{senh}\theta \cosh\theta}{R^2} = 0. \tag{18}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\operatorname{senh}\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w}\right) = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\cosh\theta}{R}\right) - \frac{1}{\cosh\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w} \frac{\partial \theta}{\partial v}\\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\operatorname{senh}\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w}\right) = \frac{1}{\cosh\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w} \frac{\partial \theta}{\partial u}\\
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\cosh\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w}\right) = \frac{1}{\operatorname{senh}\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w} \frac{\partial \theta}{\partial v}\\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\cosh\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w}\right) = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\operatorname{senh}\theta}{R}\right) - \frac{1}{\operatorname{senh}\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w} \frac{\partial \theta}{\partial u}.
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Indicando con k_1 una costante arbitraria, si determini la funzione σ_1 di w dall'equazione:

$$\cosh \sigma_1 = k_1 R,$$

e si consideri per una funzione incognita θ_1 di u, v, w il seguente sistema di equazioni simultanee (generalizzato dalle (8) § 34):

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \theta_1}{\partial u} + i \frac{\partial \theta}{\partial v} = \frac{\operatorname{senh}\sigma_1 \cosh\theta \operatorname{senh}\theta_1 + \cosh\sigma_1 \operatorname{senh}\theta \cosh\theta_1}{R}\\
&i \frac{\partial \theta_1}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u} = -\frac{\operatorname{senh}\sigma_1 \operatorname{senh}\theta \cosh\theta_1 + \cosh\sigma_1 \cosh\theta \operatorname{senh}\theta_1}{R}\\
&\operatorname{senh}\sigma_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial w} = \frac{R}{\operatorname{senh}\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w} \operatorname{senh}\theta_1 +\\
&\qquad + \frac{i R}{\cosh\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w} \cosh\theta_1 - \cosh\sigma_1 \frac{\partial \theta}{\partial w}.
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Questo sistema, a causa delle (18), (19), è illimitatamente integrabile, ed ogni sua soluzione θ_1 soddisfa alle equazioni stesse (18), (19). Diremo che θ_1 è derivata da θ mediante la trasformazione B_{σ_1}. Si cangi ora k_1 in k_2 e prendasi σ_2 in guisa che sia $\cosh \sigma_2 = k_2 R$, indi si trasformi la medesima θ nell'altra soluzione θ_2, mediante la B_{σ_2}. Sussisterà sempre allora il teorema di permutabilità e la soluzione θ_3, che deriva da θ_1 mediante una B_{σ_2}, da θ_2 mediante una B_{σ_1}, si calcolerà sempre dalla formola:

$$\operatorname{tgh}\left(\frac{\theta_3 - \theta}{2}\right) = \operatorname{tgh}\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right) \coth\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right).$$

Suppongasi ora di partire da una soluzione θ reale del sistema (18), (19) e si assuma k_1 reale $= k$, in guisa che risulti pure reale la funzione σ di w, calcolata da:

$$\cosh \sigma = k R,$$

e si faccia:

$$\sigma_1 = \sigma, \quad \sigma_2 = -\sigma.$$

Essendo $\theta_1 = \omega + i \varphi$ una soluzione delle (20), sarà;

$$\theta_2 = \pi i - \overline{\theta}_1,$$

soluzione delle equazioni ottenute dalle (20) col cangiarvi θ_1 in θ_2 e σ_1 in $-\sigma$; la formola:

$$\operatorname{tgh}\left(\frac{\theta_3 - \theta}{2}\right) = \operatorname{tgh} \sigma \operatorname{tgh} \omega,$$

darà quindi una nuova soluzione *reale* θ_3 delle equazioni (18), (19), alla quale corrisponderà un nuovo sistema triplo ortogonale della medesima specie, che darà all'elemento lineare dello spazio la forma:

$$d s_3^2 = \operatorname{senh}^2 \theta_3 \, d u^2 + \cosh^2 \theta_3 \, d v^2 + R^2 \left(\frac{\partial \theta_3}{\partial w}\right) d w^2.$$

Con verifiche analoghe come al § 35, si proverà che ciascuna superficie a curvatura costante del sistema trasformato deriva dalla corrispondente del primitivo con una delle nostre trasformazioni § 15, dando al segmento T da riportarsi sulla normale il valore:

$$T = R \operatorname{tgh} \sigma \operatorname{tgh} \omega.$$

In fine notiamo che, separando nelle (20) il reale dall'immaginario, potremo porre ancora le equazioni di trasformazioni sotto forma reale. Queste formole si otterranno dalle (11), (12) § 35 modificando in ciascuno dei due gruppi i secondi membri delle due prime formole dividendoli per R e la terza di ciascun gruppo moltiplicandone per R i due primi termini.

§ 38.

Trasformazioni dei sistemi tripli ortogonali pseudosferici.

Veniamo infine a trattare delle nuove trasformazioni di quei sistemi tripli ortogonali che contengono una serie di superficie pseudosferiche di raggio variabile o costante. Tralasciando di occuparci del caso in cui la trasformazione si risolve in due trasformazioni *reali* di Bäcklund, considereremo unicamente il caso veramente nuovo in cui la nostra trasformazione reale si decompone soltanto in due trasformazioni di Bäcklund (puramente) immaginarie coniugate.

Assumendo un sistema triplo ortogonale pseudosferico (u, v, w) a sistema coordinato, l'elemento lineare dello spazio prende la forma caratteristica:

$$d s^2 = \cos^2 \theta \, d u^2 + \operatorname{sen}^2 \theta \, d v^2 + R^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial w}\right)^2 d w^2, \tag{21}$$

dove R, che è funzione della sola w, indica il raggio variabile della superficie pseudosferica $w = \text{cost.}$ La funzione θ di u, v, w è legata alla $R(w)$ dalle equazioni fondamentali (*):

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = \frac{\operatorname{sen} \theta \cos \theta}{R^2}. \tag{22}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w}\right) = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\operatorname{sen} \theta}{R}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w} \frac{\partial \theta}{\partial v} \\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w}\right) = \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w} \frac{\partial \theta}{\partial u} \\
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w}\right) = -\frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w} \frac{\partial \theta}{\partial v} \\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w}\right) = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\cos \theta}{R}\right) - \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w} \frac{\partial \theta}{\partial u}.
\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

(*) *Lezioni,* pag. 500.

Viceversa ogni qualvolta θ soddisfa le (22), (23) esiste un sistema triplo ortogonale pseudosferico corrispondente alla forma (21) dell'elemento lineare dello spazio.

Essendo ora k_1 una costante, determinisi l'angolo σ_1 (reale o complesso) in guisa che sia:

$$\cos\sigma_1 = \frac{k_1}{R},$$

e si consideri per una funzione incognita θ_1 di u, v, w il seguente sistema di equazioni simultanee alle derivate parziali del 1.° ordine:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\theta_1}{\partial u}+\frac{\partial\theta}{\partial v}=\frac{\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta+\operatorname{sen}\sigma_1\cos\theta_1\operatorname{sen}\theta}{k_1}\\
&\frac{\partial\theta_1}{\partial v}+\frac{\partial\theta}{\partial u}=-\frac{\cos\theta_1\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}\sigma_1\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta}{k_1}\\
&\operatorname{sen}\sigma_1\frac{\partial\theta_1}{\partial w}=-\frac{k_1}{\cos\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\cos\theta_1-\frac{k_1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\operatorname{sen}\theta_1-\frac{\partial\theta}{\partial w}.
\end{aligned}\right\}\quad(24)$$

Questo sistema, a causa delle (22), (23) cui soddisfa θ, è illimitatamente integrabile ed ogni sua soluzione θ_1 soddisfa essa stessa alle (22), (23) (*). Vale ancor qui il teorema di permutabilità e se procediamo quindi come al § 28 per le superficie pseudosferiche isolate, troviamo i risultati seguenti. Prendasi σ_1 puramente immaginario sia $\sigma_1 = i\sigma$, in guisa naturalmente che sia $R\cosh\sigma = k$ (k costante) e pongasi:

$$\theta_1 = \omega + i\varphi:$$

la formola (6*) § 28:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\theta_3-\theta}{2}\right)=\frac{\operatorname{tgh}\varphi}{\operatorname{senh}\sigma},$$

ci definirà una nuova soluzione reale delle equazioni (22), (23) e quindi un nuovo sistema triplo ortogonale pseudosferico (21). Separando nelle (24) il reale dall'immaginario, troviamo per le funzioni reali ω, φ di u, v, w il seguente sistema di equazioni di trasformazione:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\omega}{\partial u}+\frac{\partial\theta}{\partial v}=\frac{1}{k}(\cosh\varphi\cos\theta+\operatorname{senh}\sigma\operatorname{senh}\varphi\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\omega\\
&\frac{\partial\omega}{\partial v}+\frac{\partial\theta}{\partial u}=\frac{1}{k}(-\cosh\varphi\operatorname{sen}\theta+\operatorname{senh}\sigma\operatorname{senh}\varphi\cos\theta)\cos\omega\\
&\operatorname{senh}\sigma\frac{\partial\omega}{\partial w}=\frac{k}{\cos\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\operatorname{senh}\varphi\operatorname{sen}\omega-\frac{k}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\operatorname{senh}\varphi\cos\omega.
\end{aligned}\right\}\quad(25)$$

(*) Cf. *Lezioni*, pag. 504 s. s.

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial u} &= \frac{1}{k}(\operatorname{senh}\varphi \cos\theta + \operatorname{senh}\sigma \cosh\varphi \operatorname{sen}\theta)\cos\omega \\
\frac{\partial \varphi}{\partial v} &= \frac{1}{k}(\operatorname{senh}\varphi \operatorname{sen}\theta - \operatorname{senh}\sigma \cosh\varphi \cos\theta)\operatorname{sen}\omega \\
\operatorname{senh}\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial w} &= \frac{k}{\cos\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\cosh\varphi\cos\omega + \frac{k}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\cosh\varphi\operatorname{sen}\omega + \frac{\partial\theta}{\partial w}.
\end{aligned}\right\} \quad (26)$$

Se ci fermiamo a considerare il caso in cui R è costante e facciamo $R = 1$, il nostro sistema diventerà un sistema pseudosferico di WEINGARTEN ed alle equazioni del 3.° ordine (23) potremo sostituire l'unica di 2.° ordine:

$$\frac{1}{\cos^2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right)^2 + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right)^2 - \left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2 = h.$$

essendo h una costante (*). Si vede allora che le soluzioni trasformate θ_1, θ_2, θ_3 soddisfano a questa medesima equazione rimanendo h la stessa. Valgono quindi le considerazioni stesse svolte a pag. 516 s. s. delle *Lezioni*, in particolare si vedrà che:

Le nostre trasformazioni cangiano i sistemi di WEINGARTEN *a flessione costante in sistemi della medesima specie.*

Similmente si dimostrerà che: *I sistemi ciclici si trasformano in sistemi ciclici.*

Terminiamo con un'osservazione generale, che vale per le considerate trasformazioni di tutti i sistemi tripli ortogonali con una serie di superficie a curvatura costante e cioè notiamo che le conseguenze dedotte al § 31 dal teorema di permutabilità per le superficie isolate sussistono qui inalterate e per conseguenza: *Se per uno dei nostri sistemi tripli ortogonali si sanno completamente integrare le equazioni di trasformazione, l'applicazione successiva ed illimitata delle trasformazioni ai nuovi sistemi tripli ottenuti richiederà soltanto calcoli algebrici e di derivazione.*

Cascio, Luglio 1899.

(*) *Lezioni*, pag. 510.

INDICE

Sull'operazione funzionale rappresentata da un integrale definito, riguardata come elemento d'un calcolo.

(Di Adolfo Viterbi, *a Mantova.)*

III (*).

Nel presente lavoro, col quale si chiude la Memoria dedicata allo studio del calcolo, in cui sia elemento l'operazione funzionale rappresentata da un integrale definito, mi propongo di studiare anzitutto le equazioni fra operazioni I. A quest'argomento è dedicata la prima parte del lavoro. Sul principio vengono esposte alcune generalità sulle equazioni fra operazione I; indi si dà un concetto analogo a quello d'equazione algebrica. Si studiano poi le equazioni aventi forma d'equazioni differenziali lineari. Quando in questa teoria si considerino solo funzioni d'un'operazione I variabile, le quali siano rappresentate da una serie di potenze a coefficienti costanti di quest'operazione, si possono, nel calcolo qui studiato, svolgere passo passo teorie analoghe a quelle che si hanno per le equazioni differenziali lineari studiate nel calcolo ordinario, perchè per le operazioni rappresentate da tali serie di potenze vale la legge distributiva. Così si dimostra il teorema dell'esistenza delle soluzioni d'una data equazione, avente forma d'un'equazione differenziale lineare, rispetto a una funzione d'un'operazione I variabile, per una funzione-oggetto assegnata, a cui si applichi l'operazione rappresentata dal primo membro dell'equazione stessa. Indi vengono svolte per le equazioni della forma accennata la teoria della scomposizione, in fattori differenziali del primo ordine, per il suo primo membro, e quella del moltiplicatore e dell'equa-

(*) Le prime due parti della presente Memoria furono pubblicate nel tomo 26.° (2.ª serie) di questi *Annali*. In questo lavoro mi valgo di tutte le notazioni e convenzioni introdotte nei due precedenti.

zione aggiunta, seguendo in ciò passo passo lo SCHLESINGER (*). Nell'esposizione di queste teorie m'arrestai alle relazioni che stabiliscono la reciprocità fra gli integrali d'un'equazione differenziale lineare data d'ordine qualunque (finito) e quelli dell'equazione aggiunta, perchè tali relazioni erano necessarie per l'estensione che feci al calcolo qui studiato del metodo d'integrazione d'una equazione differenziale lineare non omogenea, mediante serie procedenti secondo le derivate successive della funzione costituente il secondo membro dell'equazione stessa, dato dal prof. PINCHERLE. Qui appunto estesi detto metodo alle equazioni tra funzioni d'un'operazione I variabile aventi la forma d'equazioni differenziali lineari non omogenee.

Non mi fu possibile estendere le mie ricerche alle equazioni tra funzioni d'operazioni I analoghe alle equazioni a derivate parziali, non potendosi estendere a tali equazioni le teorie che si hanno nel calcolo ordinario chè le operazioni I distinte non sono permutabili. Riguardo ai concetti di questo capitolo va premesso che quando si dice che una data funzione che può essere anche il risultato d'un'operazione I applicata ad una funzione sodisfi a certe condizioni di limitazione, consistenti nel mantenersi inferiore, in modulo a un certo limite, deve intendersi che esiste almeno una porzione finita che è quella che si considererà, compresa nella regione in cui è definita la funzione in discorso, nella quale sia sodisfatta la limitazione indicata. Non deve cioè intendersi che questa condizione sia sodisfatta, in tutta la regione in cui è definita la funzione, il che urterebbe contro un teorema fondamentale della teoria delle funzioni. Nella seconda parte del presente lavoro diedi una applicazione del calcolo qui studiato. L'applicazione consiste in questo: avendo il prof. LEVI-CIVITA definiti e studiati gruppi d'operazioni I caratterizzati dal fatto che le operazioni onde sono costituiti lasciano invariate certe forme differenziali lineari, mi basai su questo per stabilire una corrispondenza fra una forma differenziale lineare e le operazioni I che la lasciano inalterata, e, fondandomi poi sui concetti intorno alle funzioni d'operazioni I precedentemente svolti, stabilii le formole indicanti il passaggio dagli integrali ai coefficienti e reciprocamente dai coefficienti agli integrali d'un'equazione differenziale lineare non omogenea, valendomi anche qui di risultati ottenuti dal prof. PINCHERLE (**).

(*) SCHLESINGER, *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen.* Vol. I, Lipsia 1895.

(**) PINCHERLE, *Sulle serie procedenti secondo le derivate successive d'una funzione,* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Tom. XI, fasc. 4.° e 5.°

1.°

1. *Prime generalità sulle equazioni fra operazioni I.* Si consideri l'equazione $Xf(y_1) = \varphi(y_2)$ ove pertanto siano $f(y_1)$, $\varphi(y_2)$ funzioni assegnate e sia X un'operazione I incognita da determinarsi in modo che sia sodisfatta l'equazione proposta. Si dia intanto alla linea d'integrazione di X una determinazione speciale a nostro arbitrio che però sottostia alla solita condizione rispetto a $f(y_1)$ (I^o *e*). Indi si determini la funzione caratteristica di X in modo da sodisfare la relazione. Ci si varrà in ciò del metodo dei coefficienti indeterminati. Dicasi ora l la linea d'integrazione attribuita a X e $x(y_1, y_2)$ la funzione caratteristica da determinarsi. Si ponga:

$$x(y_1, y_2) = \sum_{\nu_1=0,\nu_2=0}^{\nu_1=\infty,\nu_2=\infty} k_{\nu_1\nu_2} y_1^{\nu_1} y_2^{\nu_2}, \quad \varphi(y_2) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} h_\nu y_2^\nu; \tag{1}$$

allora per i coefficienti $k_{\nu_1\nu_2}$ si hanno le relazioni:

$$\sum_{\nu_1=0}^{\nu_1=\infty} k_{\nu_1}\int_l y_1^{\nu_1} f(y_1)\,dy_1 = h_0, \quad \sum_{\nu_1=0}^{\nu_1=\infty} k_{\nu_1}\int_l y_1^{\nu_1} f(y_1)\,dy_1 = h_1, \ldots,$$

$$\sum_{\nu_1=0}^{\nu_1=\infty} k_{\nu_1 m}\int_l y_1^{\nu_1} f(y_1)\,dy_1 = h_m, \ldots$$

Così per l'equazione: $Xf(y_1) = \varphi(y_2)$ che si dirà « Equazione algebrica lineare del 1.° ordine nell'operazione X rispetto alla funzione $f(y_1)$ » si ha per ogni determinazione che si dia alla linea d'integrazione di X una semplice infinità di determinazioni per la funzione caratteristica.

Abbiasi ora l'equazione: (2) $X^m f(y_1) = \varphi(y_{m+1})$ essendo ancora $f(y_1)$, $\varphi(y_2)$ funzioni assegnate. Per ogni determinazione l assegnata alla linea d'integrazione di X, si avrà, usando ancora i simboli precedenti, per la funzione caratteristica di X, il seguente sistema di relazioni:

$$\sum_{\nu_1=0}^{\nu_1=\infty} k_{\nu_1 0}\int_{lmvk}\left[\cdots\left\{\int_l y_m^{\nu_1} \sum_{\nu_1=0,\nu_2=0}^{\nu_1=\infty,\nu_2=\infty} k_{\nu_1\nu_2} y_{m-1}^{\nu_1} y_m^{\nu_2}\,dy_m\right\}\cdots\right] f(y_1)\,dy_1 = h_0, \ldots,$$

$$\sum_{\nu_1=0}^{\nu_1=\infty} k_{\nu_1 m}\int_{lmvk}\left[\cdots\left\{\int_l y_m^{\nu_1} \sum_{\nu_1=0,\nu_2=\infty}^{\nu_1=0,\nu_2=\infty} k_{\nu_1\nu_2} y_{m-1}^{\nu_1} y_m^{\nu_2}\,dy_m\right\}\cdots\right] f(y_1)\,dy_1 = h_m, \ldots,$$

Avvertenza. — Colle citazioni (I°) o (II°) intendo riferirmi rispettivamente alla prima o alla seconda parte della presente Memoria.

dal quale si ricava per i coefficienti $k_{\nu_1 \nu_2}$ un'infinità d'ordine m di soluzioni.

E più in generale abbiasi l'equazione:

$$X^m f(y_1) + c_1 X^{m-1} f(y_1) + c_2 X^{m-2} f(y_1) \dots + c_{m-1} X f(y_2) + c_m f(y_{m+1}) = 0, \quad (3)$$

ove $c_1 \dots c_m$ siano coefficienti costanti: (il primo d'essi può sempre supporsi $=$ all'unità). La (3) si dirà: « Equazione algebrica lineare dell'ordine m nell'operazione X rispetto alla funzione $f(y_1)$ ». Ripetendo le considerazioni fatte per la (2) si vede che per ogni speciale determinazione data alla linea d'integrazione di X per la funzione caratteristica si ha un'infinità d'ordine m di soluzioni, sicchè per le equazioni fra operazioni I vale la proposizione seguente:

« Un'equazione algebrica lineare dell'ordine m in un'operazione I ammette, per ogni determinazione data alla linea d'integrazione dell'operazione che figura come incognita, un sistema d'infinite soluzioni per la funzione caratteristica il cui ordine è m. »

Si possono considerare anche equazioni algebriche fra operazioni I in numero maggiore d'uno: ad es. si può prendere in esame l'equazione:

$$X^m Y^n f(y_1) + c_1 X^{m-1} Y^n f(y_1) \dots + c_{m+n-1} X f(y_1) + c_{m+n} f(y_{m+n+1}) = 0,$$

la quale si dirà « Equazione lineare algebrica d'ordine m in X, d'ordine n in Y rispetto alla funzione $f(y_1)$ ». Per ogni determinazione speciale data ad es. a Y quest'equazione si riduce ad un'equazione d'ordine m in X ecc. Un'equazione algebrica in X rispetto a una data funzione $f(y_1)$ che contenesse termini della forma $(X^\nu f(y_1))^q$, si direbbe « Equazione algebrica d'ordine m (se m è il suo ordine in base alla precedente definizione) e di grado p $\{$se p è l'indice della potenza più alta a cui compare in essa un'espressione della forma $X^\nu f(y_1)$ $(\nu = 0, 1 \dots m)\}$ in X rispetto alla data funzione oggetto $f(y_1)$ ».

2. *Serie geometrica d'un'operazione I.* Per procedere nelle presenti ricerche è mestieri che consideriamo certe funzioni che diremo: serie geometriche d'un'operazione I. Consideriamo pertanto un'espressione rappresentata dal risultato che s'ottiene applicando a una data funzione-oggetto un'operazione consistente in una serie di potenze d'un'operazione I avente la forma stessa d'una serie geometrica.

Quest'operazione è precisamente quella che si dirà « Serie geometrica dell'operazione I in discorso ».

La funzione in esame avrà dunque la forma:

$(1+X+X^2\ldots+X^\mu+\ldots)f(y_1)$ che scriveremo brevemente $F(X)f(y_1)$. (4)

Stabiliamo di considerare soltanto le determinazioni di X comprese nel campo di convergenza assoluta della serie $F(X)$ relativamente (I^o) alla funzione $f(y_1)$. Si dovranno pertanto prendere in esame soltanto quelle determinazioni di X tali che sia per ogni valore dell'indice ν:

$$\left|\frac{X^{\nu+1}f(y_1)}{X^\nu f(y_1)}\right|<1.$$

Detta quindi S_q la somma dei primi q (q numero finito) termini della nostra serie e posto: $S_{q+1}=XS_q$, è chiaro che sarà:

$$S_{q+1}-S_q=(X-1)\,S_q=X^{q+1}f(y_1)-I(y_{q+2}).$$

Da ciò risulta che $S_q=$ al quoziente simbolico:

$$\frac{X^{q+1}f(y_1)-f(y_{q+2})}{X-1}.$$

Ora per ipotesi al tendere di q all'infinito $X^{q+1}f(y_1)$ tende a 0, talchè la somma della serie in discorso è precisamente il risultato (sempre a prescindere da operazioni 1) dell'inversa dell'operazione $1-X$ applicata alla funzione $f(y_1)$ (ben inteso ciò vale solo per le determinazioni di X comprese nel campo di convergenza assoluta di $F(X)$ relativamente a $f(y_1)$). Ossia, in altri termini:

« La serie $1+X+\cdots+X^\mu+\cdots$ è relativamente ad una qualsiasi funzione oggetto equivalente all'inversa dell'operazione $1-X$ sotto la condizione di convergenza assoluta relativamente alla funzione-oggetto assunta in ogni singolo caso. »

Applicando poi la regola di derivazione per le funzioni d'operazioni I (I^o) si ha, per una determinazione generica di X sodisfacente all'accennata condizione:

$$\frac{d\,F(X)\,f(y_1)}{d\,X}=\frac{d\,(1-X)^{-1}f(y_1)}{d\,X}=-(X-1)^{-2}f(y_1),\ \text{ecc., ecc.}$$

Così, se in luogo della serie geometrica di X, nella (4) figurasse la serie geometrica di $X-1_k$ essendo k un fattore costante, la somma della serie in discorso si trova essere, applicando le considerazioni precedenti, il risultato dell'operazione inversa a $X-1_k-1$ applicato a $f(y_1)$ operazione rappresentata dalla funzione simbolica:

$$-\frac{1}{X - \mathbf{I}_k - 1}, \text{ equivalente all'altra: } \frac{(\mathbf{I}_k - X)^{-1}}{1 - \dfrac{1}{\mathbf{I}_k - X}},$$

sempre a prescindere da operazioni $\mathbf{I}$.

3. *Estensione del concetto di funzione algebrica al calcolo qui studiato.* Sia l'equazione:

$$\left.\begin{aligned} &F^m(X)\,\psi_0(X)\,f(y_1) + F^{m-1}(X)\,\psi_1(X)\,f(y_1) + \\ &+ \cdots F(X)\,\psi_{m-1}(X)\,f(y_1) + \psi_m(X)\,f(y_1) = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

ove sia $f(y_1)$ sempre una funzione-oggetto nota e $\psi_0(X)$, $\psi_1(X) \ldots \psi_m(X)$ siano funzioni note dell'operazione variabile X, aventi forma di polinomi razionali interi. Si tratta di determinare la funzione $F(X)$, in modo da soddisfare l'equazione proposta. Si applichi pertanto il metodo dei coefficienti indeterminati (I^o), considerando cioè uno sviluppo di $F(X)$ in serie di potenze di X a coefficienti costanti indeterminati:

$$\sum_{\nu=\infty}^{\nu=0} k_\nu X^\nu. \quad \text{Sia:} \quad \psi_i = \sum_{\nu=\mu_i}^{\nu=0} h_\nu^{(i)} X^\nu \; (i = 0,\ 1, \ldots, m),$$

essendo ν_i un numero intero finito. Ciò posto si sostituisca lo sviluppo $\sum_{\nu=\infty}^{\nu=0} k_\nu X^\nu$ nella (4) a $F(X)$: detto sviluppo renderà sodisfatta quell'equazione, a patto che sussistano le relazioni:

$$k_0^m h_0^{0)} + k_0^{m\ 1} h_0^{(1)} \cdots + h_0 h_0^{(m-1)} + h_0^{(m)} = 0,$$

$$k_0^m h_1^{(0)} + m\, k_1 k_0^{m-1} h_0^{0)} + k_0^{m-1} h_1^{(1)} + (m-1)\, k_0^{m-2} k_1 h_0^{(1)} \cdots + h_1^{(m)} = 0, \ldots,$$

$$k_1^m h_0^{(0)} + m\, k_1^{m-1} k_1 h_0^{(0)}, \ldots, + h_m^{(m)} = 0, \ldots$$

Cioè i coefficienti dello sviluppo di $F(X)$ sono dati da sistemi d'equazioni algebriche di grado m. Perciò la (5) sarà sodisfatta da m sviluppi, in generale distinti, di $F(X)$. L'equazione in parola si dirà: « Equazione algebrica di grado m nella funzione $F(X)$ dell'operazione variabile X relativamente alla funzione-oggetto $f(y_1)$ »: le m determinazioni di $F(X)$ che sodisfano la (5) si diranno « Le radici dell'equazione stessa »: ed il loro insieme si dirà che costituisce « La funzione algebrica dell'operazione X definita dall'equazione in parola relativamente alla funzione-oggetto $f(y_1)$.

4. *Equazioni differenziali lineari omogenee per una funzione d'un'operazione I:*

a) Esistenza delle soluzioni. Sia l'equazione:

$$\left. \begin{array}{l} F^{(n)}(X) f(y_1) - \{ F^{(n-1}(X) \psi_1(X) f(y_1) \cdots + F'(X) \psi_{n-1}(X) f(y_1) + \\ \qquad + F(X) \psi_n(X) f(y_1) \} = 0, \end{array} \right\} \quad (6)$$

ove $f(y_1)$ abbia il solito significato, e $\psi_1(X) \ldots \psi_n(X)$ siano funzioni di X rappresentate da serie di potenze intere e positive. Si può sempre supporre che nel primo termine manchi il coefficiente cognito, perchè se così non fosse, se cioè ad es. il primo termine anzichè aver la forma $F^{(n)}(X) f(y_1)$ avesse la forma $F^{(n)}(X) \Psi_0(X) f(y_1)$, ove sia $\Psi_0(X)$ una funzione dell'operazione X della stessa natura di $\Psi_1(X) \ldots \Psi_n(X)$, l'equazione non subirebbe alcuna alterazione sostanziale quando a $\Psi_0(X)$ si sostituisse l'operazione identica a $\Psi_1(X)$ l'operazione rappresentata da $\{\Psi_0(X)\}^{-1} \Psi_1(X) \ldots$ a l $\Psi_n(X)$ si sostituisse $\{\Psi_0(X)\}^{-1} \Psi_n(X)$, perchè si tratterebbe d'eseguire la divisione (simbolica) dei singoli elementi di cui si compone il primo membro della (6) per uno stesso fattore. Ciò premesso, si tratta nella (5), di determinare la funzione incognita $F(X)$ in modo da rendere sodisfatta l'accennata equazione. Detta equazione si dirà poi:

« Equazione differenziale lineare omogenea d'ordine n, nella funzione $F(X)$ dell'operazione X relativamente alla funzione-oggetto $f(y_1)$ ». Una determinazione di $F(X)$ che sodisfi la (6) se ne dirà « Un integrale ». A questo proposito sussiste anche qui il seguente teorema fondamentale analogo a quello che sussiste nel calcolo ordinario:

« Ogni equazione differenziale lineare omogenea nella funzione $F(X)$ dell'operazione X, nella quale il coefficiente della derivata d'indice più alto abbia un valore costante ammette sempre e soltanto un integrale che per una determinazione costante dell'operazione variabile X, nel cui contorno (*I° e II°*) i coefficienti ψ_i $(i = 1 \ldots n)$ siano sviluppabili in serie di potenze convergenti assolutamente rispetto a $f(y_1)$ abbia insieme colle sue prime $n - 1$ derivate determinazioni assegnate. Di più la serie di potenze che rappresenta quest'integrale ha rispetto alla funzione $f(y_1)$ un campo di convergenza (*I°*) esteso almeno quanto quello tale che, detta X la determinazione di X corrispondente ai punti della superficie della sfera di convergenza assoluta (*II°*) degli sviluppi delle $\Psi_i(X)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, ogni determinazione $\overline{X}$ di X compresa in esso sodisfi la disuguaglianza:

$$\left| \frac{X^{\mu+1} f(y_1)}{X^{\mu} f(y_1)} \right| < \eta \left| \frac{\mathrm{X}^{\mu+1} f(y_1)}{\mathrm{X}^{\mu} f(y_1)} \right|,$$

da un certo valore finito dell'indice μ in poi (η sia un numero positivo < 1). »

Sia, detta $\Phi(X)$ una funzione qualunque dell'operazione variabile X, sviluppabile in serie di potenze, M una quantità in valore assoluto non minore del massimo della funzione $\frac{\Phi(X) f(y_1)}{1 f(y_1)}$ entro il campo delle determinazioni di X, nel quale è convergente assolutamente lo sviluppo di $\Phi(X)$ in serie di potenze di $X - \mathrm{I}_k$ (k essendo al solito un fattore costante). Allora dalla formola di Mac Laurin generalizzata (I^o):

$$\Phi(X) f(y_1) = \Phi(\mathrm{I}_k) f(y_1) + (X - \mathrm{I}_k) \Phi'(\mathrm{I}_k) f(y_1) \ldots +$$

$$+ \frac{(X - \mathrm{I}_k)}{\underline{|\nu}} \Phi^{(\nu)}(\mathrm{I}_k) f(y_1) + \ldots$$

risulta evidentemente:

$$\left| \frac{\Phi^{(\nu)}(\mathrm{I}_k) f(y_1)}{1 f(y_1)} \right| < \nu! \frac{M}{\mathrm{X} - \mathrm{I}_k},$$

ove designi X la determinazione di X corrispondente al limite di convergenza di $\Phi(X)$ relativamente a $f(y_1)$ (I^o). Così (v. 3) sarà, posto:

$$\Phi_1(X) f(y_1) = \frac{M}{1 - \dfrac{X - \mathrm{I}_k}{\mathrm{X} - \mathrm{I}_k}} f(y_1),$$

$\Phi(X)$ convergente relativamente a $f(y_1)$ per tutte le determinazioni di X, appartenenti al campo di convergenza di $\Phi_1(X)$ (sviluppata in serie di potenze di $X - \mathrm{I}_k$) sempre rispetto a $f(y_1)$. Detto ora in generale M_i ($i = 1 \ldots n$) il numero che rispetto a $\Psi_i(X)$ ha lo stesso significato che fu testè attribuito a M rispetto a $\Phi(X)$ (sempre riferendosi alla funzione-oggetto $f(y_1)$) e posto:

$$\Psi'_i(X) f(y_1) = \frac{M_i}{1 - \dfrac{X - \mathrm{I}_k}{\mathrm{X} - \mathrm{I}_k}} f(y_1),$$

lo sviluppo in serie di potenze di $X - \mathrm{I}_k$ di $\Psi_i(X)$ rispetto a $f(y_1)$ sarà convergente per tutte le determinazioni di X comprese nel campo di convergenza dello sviluppo analogo di $\overline{\Psi}_i(X)$. Ora tentisi di determinare una funzione $F(X - \mathrm{I}_k) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} h_\nu (X - \mathrm{I}_k)^\nu$ tale da sodisfare la formola (6). Allora per i coefficienti h_ν si ha applicando ancora il metodo dei coefficienti indeterminati la formola seguente:

$$h_n = \frac{1}{\lfloor n} F^{(\nu)}(\mathrm{I}_k)\,(*) = \frac{1}{\lfloor \nu} \sum_{i=1}^{n} F^{(n-i)}(\mathrm{I}_k)\,\Psi_i(\mathrm{I}_k),$$

$$h_{n+1} = \frac{1}{\lfloor n} \sum_{i=1}^{i=n} F^{(n-i)}(\mathrm{I}_k)\,\Psi_i^1(\mathrm{I}_k) + \frac{1}{\lfloor n+1} \sum_{i=1}^{i=n} F^{(n-i-1)}(\mathrm{I}_k)\,\Psi_i(\mathrm{I}_k),$$

$$h_{n+\nu} = \frac{1}{\lfloor n} \sum_{i=1}^{n} F^{(n-i)}(\mathrm{I}_k)\,\frac{\Psi_i^{(\nu)}}{\lfloor \nu}(\mathrm{I}_k) + \cdots \frac{1}{\lfloor n+\nu} \sum_{i=1}^{n} F^{(n-i+\nu)}(\mathrm{I}_k)\,\Psi_i(\mathrm{I}_k), \ldots,$$

cioè nell'espressione di ciascuno di questi coefficienti h, figurano somme di prodotti delle determinazioni di $F(X)$ per $X = \mathrm{I}_k$ e di prodotti delle sue successive derivate per le determinazioni dei coefficienti $\Psi_1 \ldots \Psi_n$ delle loro derivate successive pure per $X = \mathrm{I}_h$. Ora veniamo a considerare l'equazione differenziale lineare della forma della (6) e che differisca da questa solo perchè ai coefficienti Ψ si sostituiscano rispettivamente le funzioni di X, $\overline{\Psi}_i(X)$. Si tenti di sodisfarla mediante lo sviluppo in serie $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} h'_\nu (X - \mathrm{I}_k)^\nu$: i coefficienti h'_ν di questo sviluppo saranno costruiti mediante determinazioni dello svlluppo stesso e delle sue successive derivate corrispondenti alla determinazione I_k di X e mediante le determinazioni delle $\overline{\Psi}_i$ e delle loro successive derivate corrispondenti alla determinazione I_k di X nello stesso modo con cui i coefficienti h_ν sono costruiti rispettivamente mediante le $F(\mathrm{I}_k) \ldots F^{(\nu)}(\mathrm{I}_k) \ldots$ e le $\Psi_i(\mathrm{I}_k) \ldots \Psi_i^{(\nu)}(\mathrm{I}_k) \ldots$ Ora s'è visto che le $\Psi_i(X)$ sviluppate in serie di potenze di $X - \mathrm{I}_k$ avevano i singoli coefficienti in modulo inferiori ai coefficienti omologhi dell'analogo sviluppo delle $\overline{\Psi}_i(X)$: ciò avviene anche delle singole derivate rispettivamente degli sviluppi di queste funzioni: perciò i coefficienti di $\mathsf{F}(\mathrm{I}_k) \ldots \mathsf{F}(\mathrm{I}_k) \ldots$ ove si ponga brevemente $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} h'_\nu (X - \mathrm{I}_k) = \mathsf{F}(\mathrm{I}_k)$ non saranno mai negativi. Se non che

(*) Scrivendo ad es. $h_n = \frac{1}{\lfloor n} F^{(\nu)}(\mathrm{I}_k)$ s'intende che h_n è = (nel senso ordinario) al fattore per cui a prescindere da operazioni I, $\frac{1}{\lfloor n} F^{(\nu)}(\mathrm{I}_k)$ moltiplica una data funzione-oggetto, fattore che evidentemente è il medesimo qualunque sia questa funzione-oggetto. E quest'osservazione varrà ogniqualvolta nel seguito si trovino uguaglianze di questa natura.

nelle formole che servono alla determinazione rispettivamente delle h_ν, h'_ν rimangono arbitrarii gli n primi coefficienti di ciascuno sviluppo: così prenderemo ad arbitrio $h'_0 \ldots h'_{n-1}$ e sceglieremo poi $h_0 \ldots h_{n-1}$ in modo che sia: $h_i < | h'_i |$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$. Ora, dalle precedenti relazioni segue altresì: $h_i < | h'_i |$ $(i = n, n+1, \ldots)$, perciò la serie $\mathrm{F}(X - \mathrm{I}_k)$ ha i singoli coefficienti maggiori dei coefficienti omologhi di $F(X - \mathrm{I}_k)$, e perciò quest'ultima serie relativamente alla funzione considerata convergerà sempre ogni qualvolta sia convergente relativamente alla stessa funzione $\mathrm{F}(X - \mathrm{I}_k)$. Se non che posto brevemente $1 - \frac{X - \mathrm{I}_k}{\mathrm{X}} = Y$, $h'_\nu = h_\nu \mathrm{X}^\nu$, l'equazione differenziale lineare della forma (6), a cui sodisfa la funzione $\mathrm{F}(X - \mathrm{I}_k)$, diverrà, a meno d'operazioni I:

$$\mathrm{F}^{(n)}(Y)(1 - Y) f(y_1) = M_1 \mathrm{X}\, \mathrm{F}^{(n-1)}(Y) f(y_1) + \cdots M_n \mathrm{X}^n \mathrm{F}(Y) f(y_1).$$

Da questa si hanno, per la determinazione dei coefficienti h'_ν le seguenti relazioni ricorrenti, le quali naturalmente equivalgono alle formole prima trovate per gli stessi coefficienti:

$$\left.\begin{aligned} &(n+\nu)!\, h'_{n+\nu} - \nu(n+\nu-1)!\, h'_{n+\nu-1} = \\ &= \sum_{i=1}^{i=n} M_i \mathrm{X}^i (n+\nu-i)!\, h'_{n+\nu-i} \quad (\nu = 0, 1, \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Per il modo con cui scelsero $h_0, h_1, \ldots, h_{n-1}$, si ha:

$$h'_{n+\nu} = \frac{\nu + \mathrm{k} M_1}{n + \nu} h'_{n+\nu-1} + p,$$

ove designi p un numero positivo. Ora, prendendo M_1 abbastanza grande affinchè sia:

$$M_1 \mathrm{k} > n,$$

(ciò è sempre possibile essendo M_1 soggetto, sinora, all'unica limitazione d'essere maggiore del massimo valore assoluto di $\frac{\Psi_1(X) f(y_1)}{\mathrm{I} f(y_1)}$ sviluppato in serie di potenze di $X - \mathrm{I}_k$, ogniqualvolta:

$$\left| \frac{(X - \mathrm{I}_k)^\nu f(y_1)}{(X - \mathrm{I}_k)^{\nu-1} f(y_1)} \right| < \mathrm{I}_k f(y_1)),$$

si ha:

$$h'_{n+\nu} > h'_{n+\nu-1}, \quad \text{ossia} \quad \frac{h'_{n+\nu-1}}{h'_{n+\nu}} < 1.$$

Posta la (7) sotto la forma:

$$\frac{h'_{n+\nu}}{h'_{n+\nu-1}} = \frac{\nu + \mathrm{k} M_1}{n+\nu} + \sum_{i=2}^{i=n} \frac{\mathrm{k}^i M_i (n+\nu-i)!}{(n+\nu)!} \frac{h'_{n+\nu-i}}{h'_{n+\nu-1}},$$

risulta:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{h'_{n+\nu}}{h'_{n+\nu-1}} = 1.$$

Conseguenza di ciò è che la serie che rappresenta $\mathsf{F}(Y)$ è convergente relativamente a una qualsiasi funzione-oggetto $\varphi(y_1)$ per tutte le determinazioni di Y, che sodisfano alla condizione:

$$\left| \frac{Y^{\mu} \varphi(y_1)}{Y^{\mu-1} \varphi(y_1)} \right| < 1,$$

da un certo valore finito dell'indice μ in poi.

Ne viene che, per la funzione-oggetto da noi considerata il campo di convergenza è dato da tutte quelle determinazioni di X tali che:

$$\left| \frac{(X - \mathrm{I}_k)^{\mu} f(y_1)}{(X - \mathrm{I}_k)^{\mu-1} f(y_1)} \right| < \mathrm{I}_{\mathrm{k}} f(y_1),$$

da un certo valore finito dell'indice μ in poi, ossia per tutte le determinazioni di X appartenenti, come si è visto al campo di convergenza dei coefficienti della (6) relativamente a $f(y_1)$. Di più per le relazioni stabilite fra le funzioni $F(X)$, $\mathsf{F}(X)$ risulta che nell'accennato campo sarà a più forte ragione convergente relativamente a $f(y_1)$ lo sviluppo di $F(X)$ in serie di potenze di $X - \mathrm{I}_k$, sviluppo che rappresenta un integrale della (6). Detto integrale ha poi anche la proprietà che quando X assume la determinazione I_k, esso assume, in un colle sue prime $n-1$ derivate a X le determinazioni fisse, a meno d'operazioni I:

$$F(\mathrm{I}_k) = h_0 \ldots F^{(n-1)}(\mathrm{I}_k) = \frac{h_{n-1}}{(n-1)!}.$$

Così il teorema enunciato risulta completamente dimostrato.

b) Estensione del concetto di « conservazione delle proprietà analitiche ». Per procedere oltre nelle ricerche sulle equazioni differenziali lineari tra funzioni d'un'operazione I è necessario dare l'estensione al calcolo, in cui è elemento l'operazione I del principio importantissimo della conservazione delle proprietà analitiche che si ha per le funzioni analitiche studiate nell'analisi ordinaria. L'accennato principio è riassunto nel seguente:

Teorema. Se un elemento d'una funzione analitica d'un'operazione I variabile gode d'una certa proprietà (relativa a una data funzione-oggetto) tutti gli elementi dedotti da quello mediante la continuazione analitica (II^o) godono della stessa proprietà.

Abbiasi pertanto un'equazione della forma:

$$F \{ \mathfrak{P}_1(X - \mathrm{I}_k),\ \mathfrak{P}_2(X - \mathrm{I}_k), \ldots,\ \mathfrak{P}_n(X - \mathrm{I}_k) \} f(y_1) = 0, \tag{8}$$

ove le $\mathfrak{P}_1(X - \mathrm{I}_{k_1}) \ldots \mathfrak{P}_n(X - \mathrm{I}_{k_n})$ convergono in una sfera comune il cui centro corrisponda a una certa determinazione costante I_k di X (II^o). $F(p_1 \ldots p_n)$ sia simbolo di funzione avente rispetto alle funzioni di X: $p_1 \ldots p_n$ forma di funzione razionale intera o di serie di potenze di tali operazioni variabili convergente entro un certo campo di determinazioni del loro insieme relativamente a $f(y_1)$. Ogni termine del primo membro della (8) avrà la forma:

$$h_\nu [\mathfrak{P}_1(X - \mathrm{I}_k),\ \mathfrak{P}_2(X - \mathrm{I}_k),\ \ldots,\ \mathfrak{P}_n(X - \mathrm{I}_k)] f(y_1),$$

(h_ν è un coefficiente costante, l'operazione applicata a $f(y_1)$ è un prodotto simbolico).

Ora, per avere le $\mathfrak{P}_i(X - \mathrm{I}_k)$ ($i = 1 \ldots n$) una sfera comune di convergenza assoluta relativamente a $f(y_1)$ ciascuno di quei termini si potrà sviluppare mediante un'unica serie di potenze di $X - \mathrm{I}_k$ convergente nella sfera comune di convergenza delle $\mathfrak{P}_i(X - \mathrm{I}_k)$. Ora nell' ipotesi più generale $F(p_1 \ldots p_n)$ è una serie di potenze di queste n operazioni aventi un certo campo di convergenza relativamente a $f(y_1)$: di più per tutte le determinazioni di X corrispondenti a punti (II^o) compresi in una sfera di raggio, sia pure di quanto poco si vuole, inferiore a quello della sfera di convergenza delle $\mathfrak{P}_i(X - \mathrm{I}_k)$ e concentrica a questa, sarà convergente in ugual grado relativamente a $f(y_1)$. Potendosene quindi ordinare i termini come si vuole, senza che venga meno la sua convergenza, potrà essere trasformata in un'unica serie di potenze:

$$\mathfrak{P}(X - \mathrm{I}_k),$$

convergente per i punti interni all'accennata sfera relativamente a $f(y_1)$. Preso ora un punto interno a questa sfera a cui corrisponda una determinazione costante di X: I_{k_1}, si esaminino le serie dedotte (II^o) dalle $\mathfrak{P}_i(X - \mathrm{I}_k)$ rispetto a I_{k_1}. Esse avranno una sfera di convergenza che potrà anche uscire dalla sfera di convergenza degli sviluppi loro in serie di potenze di $X - I_k$. Il primo membro della (8) diverrà:

$$F \{ \mathfrak{P}_i (X, I_k, I_{k_1} \dots \mathfrak{P}_n (X, I_k, I_{k_1}) \} f(y_1). \qquad (8')$$

Ora l'espressione (8') come si vede ripetendo le considerazioni precedenti si può trasformare in un'unica serie di potenze di $X - I_{k_1}$: $\mathfrak{P}_1 (X - I_{k_1})$ convergente relativamente a $f(y_\nu)$ nella sfera comune di convergenza degli elementi dedotti dalle $\mathfrak{P}_1 (X - I_k)$ rispetto a I_{k_1}. Ma per le determinazioni di X corrispondenti a punti interni ad entrambe le sfere considerate, di centri corrispondenti a I_k, I_{k_1}, il primo membro della (8) e l'espressione (8') coincidono, perciò le due espressioni $\mathfrak{P} (X - I_k) f(y_1)$, $\mathfrak{P}_1 (X - I_{k_1}) f(y_1)$ saranno per le determinazioni di X corrispondenti agli accennati punti, identiche. Dovranno dunque essere identicamente nulle ambedue le serie relativamente a $f(y_1)$, e ciascuna d'esse sarà nulla per le determinazioni di X corrispondenti a punti compresi nella propria sfera di convergenza. Con ciò il teorema è dimostrato, essendo provato che se la (8) è soddisfatta dagli elementi $\mathfrak{P}_i (X - I_k)$ essa sarà soddisfatta anche dagli elementi dedotti immediatamente da questi colla continuazione analitica. Così deducendo successivamente nello stesso modo dagli sviluppi: $\mathfrak{P}_i (X, I_k, I_{k_1})$ $(i = 1 \dots n)$, altri elementi delle stesse funzioni analitiche, si scorge che questi pure rendono soddisfatta la (8). Naturalmente la deduzione dei nuovi elementi deve ogni volta essere fatto rispetto a una stessa determinazione di X, per ciascuna delle n funzioni. « Il caso considerato racchiude poi in sè stesso tutti gli altri casi che si possono presentare nello studio qui fatto nelle funzioni d'operazioni I: infatti esso, oltre a comprendere il caso delle equazioni algebriche studiate nel n.° 3, comprende anche quello delle equazioni differenziali lineari, potendo benissimo essere alcune delle $\mathfrak{P}_i (X - I_k)$ $(i = 1 \dots n)$ derivate di una o più delle altre di esse. »

c) Estensione dei concetti d'equazione riducibile e irriducibile e riduzione d'un'equazione riducibile quando se ne conoscono alcuni integrali particolari. Scomposizione d'un'espressione differenziale d'ordine $n > 1$ in espressioni differenziali del primo ordine. Si consideri l'equazione differenziale lineare:

$$F^{(n)} (X) f(y_1) + \cdots F(X) \Psi_{n-1} (X) f(y_1) = 0, \qquad (6')$$

analoga alla (6) salvo il mutamento di segno che si ha per maggiore comodità. Con un'ovvia estensione dei concetti del calcolo ordinario, una soluzione dell'equazione (6'), la quale dopo aver fissate (il che abbiamo visto (a) essere in nostro arbitrio) le determinazioni sue e delle sue prime $n - 1$ derivate per una certa determinazione costante I_k dell'operazione X che figura nell'equazione in parola, compresa nel campo di convergenza dei coefficienti relativamente alla funzione-oggetto considerata, si ottenga mediante sviluppo in serie di potenze di $X-\mathrm{I}_k$, se ne dirà « un integrale particolare ». Che poi lo sviluppo così ottenuto sodisfi l'equazione studiata risulta dal teorema testè dimostrato (b). Per contro, detti $F_1(X) \ldots F_n(X)$, n integrali particolari della (6), linearmente indipendenti (v. Nota), la funzione di X:

$$F(X) = \nu_1 F_1(X) + \ldots \nu_n F_n(X),$$

(dove $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ sono altrettante costanti arbitrarie), che quando facciamo assumere a ciascuna delle $\nu_1 \ldots \nu_n$ altrettanti valori assegnati è suscettibile di rappresentare qualunque integrale particolare della (6) si dirà « L'integrale generale dell'equazione in parola ».

Quando si abbiano n integrali dell'equazione (6) linearmente indipendenti, detti questi $F_1(X) \ldots F_n(X)$ è chiaro che al primo membro dell'equazione in parola si potrà dar la forma:

$$\begin{vmatrix} F_i(X) & F'_i(X) \ldots F_i^{(n)}(X) \\ F_1(X) & F'_1(X) \ldots F_1^{(n)}(X) \\ \ldots & \ldots \\ F_n(X) & \ldots \ldots F_n^{(n)}(X) \end{vmatrix} f(y_1) \quad (i = 1 \ldots n). \tag{9}$$

Infatti quest'espressione è evidententemente nulla quando $F_i(X)$, $F'_i(X), \ldots$, $F_i^{(n)}(X)$ assumano rispettivamente le determinazioni $F_1(X) \ldots F_1^{(n)}(X)$, $F_2(X) \ldots F_2^{(n)}(X), \ldots$ Di più, detto brevemente $D\{F_1(X) \ldots F_n(X)\}$ il determinante simbolico:

$$\begin{vmatrix} F_1(X) \ldots F_1^{(n-1)}(X) \\ \ldots \ldots \\ F_n(X) \ldots F_n^{(n-1)}(X) \end{vmatrix},$$

e $D_i\{F_1(X) \ldots F_n(X)\}$ ciò che esso diviene, quando ai singoli termini della sua i^{esima} colonna si sostituisca rispettivamente $F_1^{(n)}(X) \ldots F_n^{(n)}(X)$, mediante lo sviluppo dell'espressione (9) la (6) assumerà la forma (intendendo di designare con $F_i(X)$ uno degli integrali $F_i(X) \ldots F_n(X)$):

$$F_i^{(n)}(X) f(y_1) - F_i^{(n-1)}(X) [D_n\{F_1(X) \ldots F_n(X)\}]^{-1} D_n\{F_1(X) \ldots F_n(X)\} f(y_1) \ldots + \\ + (-1)^n F_i(X) [D\{F_1(X) \ldots F_n(X)\}]^{-1} D_1\{F_1(X) \ldots\} f(y_1) = 0.$$

Cioè il coefficiente $\Psi_i(X)$ $(i = 1 \dots n)$ della (6) sarà dato dal quoziente (simbolico):

$$\frac{(-1)^i D_i \{ F_1(X) \dots F_n(X) \}}{D \{ F_1(X)_1 \dots F_n(X) \}},$$

Così $t\,(t < n)$ integrali linearmente indipendenti della (6′) sodisferanno un'equazione differenziale lineare della stessa forma d'ordine t. Detti cioè: $\mathsf{F}_1(X) \dots \mathsf{F}_t(X)$ questi integrali, essi saranno altresì integrali d'un'equazione differenziale lineare d'ordine t, nella quale la funzione-oggetto è ancora la stessa $f(y_1)$ ed in cui il coefficiente del termine d'ordine $i+1$ (incominciando a contare da quello contenente la derivata d'ordine t $(i = 1 \dots t)$) coefficiente che designeremo con $\chi_i(X)$ avrà la forma:

$$\chi_i(X) = \frac{(-1)^i D_i \{ \mathsf{F}_1(X) \dots \mathsf{F}_t(X) \}}{D \{ \mathsf{F}_1(X) \dots \mathsf{F}_t(X) \}},$$

ove le espressioni che figurano in questo quoziente simbolico hanno forma analoga a quella che fu attribuita dianzi ai simboli $D_i \{ F_1(X) \dots F_n(X) \}$, ecc., colla sola differenza che in luogo dell'indice n qui si ha l'indice inferiore t. Ora, detti brevemente $P \{ F(X), f(y_1) \}$ il primo membro della (6′), e $P_t \{ F(X), f(y_1) \}$ il primo membro dell'equazione a cui sodisfano, $\mathsf{F}_1(X) \dots \mathsf{F}_t(X)$ si avrà ponendo per $F(X)$ uno qualunque degli integrali comuni alle due equazioni:

$$\left.\begin{array}{l} P \{ F(X), f(y_1) \} = R\, P_t \{ F(X), f(y_1) \} = \\ = R \begin{vmatrix} \mathsf{F}_i(X) \dots \mathsf{F}_i^{(t)}(X) \\ \mathsf{F}_1(X) \dots \mathsf{F}_1^{(t)}(X) \\ \dots\dots\dots\dots \\ \mathsf{F}_t(X) \dots \mathsf{F}_t^{(t)}(X) \end{vmatrix} \quad f(y_1) = 0 \quad (i = 1 \dots t), \end{array}\right\} \tag{10}$$

ove evidentemente, in causa della forma stessa di $P \{ F(X), f(y_1) \}$, R sarà un'espressione differenziale lineare simbolica (cioè un'espressione differenziale lineare in una funzione dell'operazione variabile X) d'ordine $n - t$. Quando la (6′) ammetta una scomposizione in fattori come quella rappresentata dalla (10) essa si dirà « un' equazione riducibile ». Per le equazioni della forma (6′) riducibili si può dare un metodo d'effettiva scomposizione dell'espressione differenziale (lineare) simbolica che figura nel loro primo membro in espressioni differenziali lineari del primo ordine perfettamente analoga a quella che si ha per le equazioni differenziali lineari studiate nel calcolo ordinario. Anche qui però per effettuare la scomposizione si richiede la conoscenza d'alcuni integrali particolari dell'equazione in discorso. Sia pertanto $\overline{\overline{F}}_1(X)$ un integrale particolare qualunque (soggetto all'unica limitazione di non essere nullo in via assoluta) dell'equazione (6′) e, detto $F(X)$ l'integrale generale della (6′) si ponga, valendosi della rappresentazione geometrica delle operazioni I già introdotta e delle considerazioni che ne derivarono (II^o):

$$F(X) = \left(\int \Phi_1(X)\, d X\right) \overline{\overline{F}}_1(X),$$

e si sostituisca quest'espressione nella (6′), la quale così assumerà la forma:

$$\left.\begin{aligned}&\Phi^{(n-1)}(X) f(y_1) + \Phi^{(n-2)}(X)\,[\{\overline{\overline{F}}_1(X)\}^{-1}\{\Psi_1(X) + \\ &+ n\overline{\overline{F}}'_1(X)\}]\, f(y_1) + \Phi^{(n-3)}(X)\,[\{\overline{\overline{F}}_1(X)\}^{-1}\{\Psi_2(X) + \\ &+ (n-1)\overline{\overline{F}}'_1(X)\,\Psi_1(X) + \binom{n}{2}\overline{\overline{F}}''_1(X)\}]\, f(y_1) + \cdots = 0.\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

La (6′) si trasforma dunque in un'equazione d'ordine $n-1$ in $\Phi\,(X)$, in cui il coefficiente dell' $i+1^{\text{esimo}}$ $(i = 1 \ldots n-1)$ termine ha la forma:

$$\left.\begin{aligned}&\{\overline{\overline{F}}_1(X)\}^{-1}\Big\{\Psi_{i-1}(X) + (n-i+1)\,\overline{\overline{F}}'_1(X)\,\Psi_{i-2}(X) + \\ &+ \binom{n-i}{2}\overline{\overline{F}}''_1(X)\,\Psi_{i-3}(X) + \cdots \binom{n}{i-1}\overline{\overline{F}}_1^{(i-1)}(X)\Big\}.\end{aligned}\right\} \quad (11')$$

Detto ora $\overline{\overline{F}}_2(X)$ un integrale particolare della (11) non però nullo in via assoluta, e posto:

$$\Phi_1(X) = \left(\int \Phi_2(X)\, d X\right) \overline{\overline{F}}_2(X),$$

e sostituendo quest'espressione di $\Phi_1(X)$ nella (11) questa si riduce ad un'equazione differenziale lineare omogenea d'ordine $n-2$ in $\Phi_2(X)$, i cui coefficienti sono costruiti mediante le $\overline{\overline{F}}_2(X) \ldots \overline{\overline{F}}_2^{(n-2)}(X)$ e i coefficienti della (11) secondo la stessa legge, colla quale i coefficienti della (11) sono costruiti mediante $\overline{\overline{F}}_1(X) \ldots \overline{\overline{F}}_1^{(n-1)}(X)$ e i coefficienti della (6′). Così procedendo si trova che detto $\overline{\overline{F}}_3(X)$ un integrale particolare qualunque, non nullo in via assoluta dell'equazione così ottenuta e posto: $\Phi_2(X) = \left(\int \Phi_3(X)\, d X\right) \overline{\overline{F}}_3(X)$, ripetendo le considerazioni precedenti si trova che $\Phi_3(X)$ è integrale d'un'equazione differenziale lineare d'ordine $n-3$ i cui coefficienti si determinano secondo il metodo stabilito dianzi. Procedendo in questo modo si giunge ad avere rappresentato mediante il prodotto simbolico:

$$\left(\int \overline{\overline{F}}_{n-1}(X)\, d\, X\right)\left(\int \overline{\overline{F}}_{n-2}(X)\, d\, X\right)\ldots\left(\int \overline{\overline{F}}_{2}(X)\, d\, X\right)\overline{F}_{1}(X),$$

(dove $\Phi_{n-1}(X)$, per il modo stesso con cui fu determinato, è integrale d'un'equazione differenziale lineare del primo ordine), un integrale particolare della (6'), come sono integrali particolari della (6'):

$$\left(\int \overline{\overline{F}}_{2}(X)\, d\, X\right)\overline{F}_{1}(X), \quad \left(\int \overline{\overline{F}}_{3}(X)\, d\, X\right)\overline{F}_{2}(X)\ldots$$

Tenendo per gli n integrali particolari della (6') che così s'ottengono la notazione $\mathsf{F}_1(X)\ldots \mathsf{F}_n(X)$, si ha per essi la seguente:

Proposizione. Gli n integrali in parola non possono sodisfare ad un'equazione lineare a coefficienti costanti sussistente in via assoluta (cioè indipendentemente dalla particolare funzione-oggetto a cui possa essere applicata l'operazione rappresentata dal suo primo membro).

Se infatti si avesse una relazione della forma:

$$c_1\, \mathsf{F}_1(X) + c_2\, \mathsf{F}_2(X)\ldots + c_n\, \mathsf{F}_n(X) = 0, \tag{12}$$

da questa mediante divisione per $\overline{F}_1(X)$ e derivazione, poi mediante divisione per $\overline{\overline{F}}_2(X)$ e derivazione, ecc., ecc., si giungerebbe alla relazione:

$$c_n\, \overline{\overline{F}}_n(X) = 0\,,$$

la quale, per non essere $\overline{\overline{F}}_n(X)$ nulla in via assoluta porterebbe con sè che fosse $c_n = 0$: se non che l'equazione precedente alla (n^{esima}) ottenuta col procedimento indicato è:

$$c_{n-1} + c_n \int \Phi_{n-1}(X)\, d\, X = 0,$$

dalla quale risulta, se $c_n = 0$ che anche $c_{n-1} = 0$. Ripetendo sempre questo ragionamento si giungerà facilmente alla conclusione che la (12) può sussistere solo a patto che siano nulli tutti i coefficienti c_i $(c = 1\ldots n)$.

Ciò equivale a dire che:

« Le funzioni: $\mathsf{F}_1(X)\ldots \mathsf{F}_n(X)$ costituiscono un sistema fondamentale d'integrali dell'equazione (6') ».

Nello stesso modo si vede che le funzioni:

$$\left.\begin{aligned} &\overline{F}_{t+1}(X),\quad \left(\int \overline{\overline{F}}_{t+2}(X)\,d\,X\right)\overline{F}_{t+1}(X),\ldots, \\ &\left(\int \overline{F}_n(X)\,d\,X\right)\left(\int \overline{F}_{n-1}(X)\,d\,X\right)\ldots\left(\int \overline{\overline{F}}_{t+2}(X)\,d\,X\right)\overline{F}_{t+1}(X), \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

costituiscono un sistema fondamentale dell'equazione d'ordine $n-t(t=1,2,\ldots)$ alla quale soddisfa: $\overline{\overline{F}}_{t+1}(X)$ e, mediante considerazioni di per sè stesse evidente si rappresenta nella forma (13) qualunque sistema fondamentale, scegliendo opportunamente l'elemento di questo sistema che si designa con $\overline{F}_{t+1}(X)$, assumendo per $\overline{F}_{t+\lambda}(X)$ in modo opportuno un integrale dell'equazione d'ordine $n-\lambda-t+1$ a cui sodisfa $\Phi_{t+\lambda-2}$ e scegliendo opportunamente le costanti (rispetto ad X) d'integrazione che man mano si vengono a presentare. Così si può riguardare $\mathsf{F}_1(X)\ldots\mathsf{F}_n(X)$ come un sistema fondamentale arbitrario della (6').

Ora daremo alcune relazioni notevoli che esistono fra i determinanti simbolici dei sistemi fondamentali d'integrali delle equazioni della forma (11) che si vengono successivamente a ottenere. Detto D_t il determinante del sistema fondamentale d'integrali (13) d'una di queste equazioni che è quella d'ordine $n-t$ e detto $\overline{\Psi}_t(X)$ il coefficiente della derivata d'ordine $n-t-1$ in quest'equazione (quello della derivata $n-t^{esima}$ si suppone = all'unità), è evidentemente: $D_t = C_t\, e^{-\int \Psi(X)dX}$ ove sia C_t un fattore costante rispetto a X.

Detto quindi $\overline{\Psi}_{t+1}(X)$ il coefficiente della derivata d'ordine $n-t-2$ nell'equazione a cui sodisfa $\Phi_{-t+1}(X)$ sarà come risulta dalla (9'):

$$\overline{\Psi}_{t+1}(X) = \overline{\Psi}_t(X) + (n-t)\,\frac{d\log \mathsf{F}_{t+1}(X)}{d\,X},$$

da cui:

$$D_{t+1} = \frac{C_{t+1}}{C_t}\,\mathsf{F}_{t+1}^{-n+1}(X)\,D_t$$

(ove D_{t+1} abbia per l'equazione a cui sodisfa $\Phi_{n-t}(X)$ lo stesso significato che ha D_t per quella a cui sodisfa $\Phi_{n-t+1}(X)$), e:

$$D_t = \frac{C_t}{C_{t+1}}\,\mathsf{F}_{t+1}(X)\,D_{t+1}. \tag{14}$$

Costruendo le formole analoghe alla (14) per i casi di:

$$t=\lambda,\ \lambda+1\ldots n-1\ (\lambda=0,\ 1\ldots n-1),$$

e osservando che dai calcoli fatti risulta $\overline{\overline{F}}_n(X) = e^{-\int \Psi_n(X)dX}$ ove $\overline{\Psi}_n(X)$ sia il coefficiente della derivata prima nell'equazione a cui sodisfa $\overline{\overline{F}}_n(X)$ si giunge al risultato:

$$D_\lambda = c_\lambda \, \mathsf{F}_{\lambda+1}^{n-\lambda}(X) \dots \mathsf{F}_n(X),$$

e in particolare:

$$D_0 = D(\mathsf{F}_1(X) \dots \mathsf{F}_n(X)) = C\,\overline{\overline{F}}_1^{\,n}(X)\,\overline{\overline{F}}_2^{\,n-1}(X) \dots \overline{F}_n(X),$$

designando C un fattore costante rispetto a X. Di più:

$$D(\mathsf{F}_1(X) \dots \mathsf{F}_\mu(X)) = \begin{vmatrix} \mathsf{F}_1(X) \dots \mathsf{F}_1^{(\mu-1)}(X) \\ \dots\dots\dots\dots \\ \mathsf{F}_\mu(X) \dots \mathsf{F}_\mu^{(\mu-1)}(X) \end{vmatrix} =$$

$$= C'\,\overline{\overline{F}}_1^{\,\mu}(X)\,\overline{F}_2^{\,\mu-1}(X) \dots \overline{\overline{F}}_\mu(X), \quad (\mu < n),$$

ove sia anche C' una costante. Segue da queste ultime relazioni che, posto brevemente:

$$H_i(X) = \overline{\overline{F}}_1(X) \dots \overline{F}_i(X), \quad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{15}$$

e scelti opportunamente i fattori costanti C, C' si ha l'uguaglianza simbolica:

$$H_\mu(X) = \frac{D(\mathsf{F}_1(X), \mathsf{F}_2(X), \dots, \mathsf{F}_\mu(X))}{D(\mathsf{F}_1(X), \mathsf{F}_2(X), \dots, \mathsf{F}_{\mu-1}(X))}.$$

Chiaramente ciascuna delle funzioni $H_\mu(X)$ sodisfa l'equazione differenziale lineare (simbolica) del primo ordine:

$$H_\mu(X)\frac{d}{dX}\frac{F(X)}{H_\mu(X)} f(y_1) = \left\{ F'(X) - \frac{H'_1(X)}{H_1(X)} F(X) \right\} f(y_1) = 0,$$

(quest'ultima trasformazione è lecita, trattandosi di serie di potenze di X a coefficienti costanti e l'equazione sussiste per una qualunque funzione-oggetto). Solo $H_1(X)$ poi sodisfa la (6'), il cui primo membro, designata $F'(X) - \dfrac{H'_1(X)}{H_1(X)} F(X)$ brevemente con $Q_1(F(X))$ assumerà la forma:

$$\{R_1(F(X))\}\,\{Q_1(F(X))\},$$

ove $R_1(F(X))$ è un'espressione differenziale d'ordine $n-1$ nella funzione $F(X)$ di X. Se non che $Q_1(F(X))f(y_1)$ si annulla solo quando alla funzione incognita che in esso figura si dia la determinazione $H_1(X)$ e perciò deve essere:

$$R_1 \{Q_1 (H_i (X))\} f(y_1) = 0, \quad (i = 2,\ 3 \ldots n).$$

Possiamo perciò affermare che l'equazione: $R_1 (F(X)) f(y_1) = 0$ ammette gli integrali $H_2 (X) \ldots H_n (X)$, ossia:

$$H_2 (X), \quad H_2 (X) \int \frac{H_3 (X)}{H_2 (X)} d\,X, \ldots,$$

$$H_2 (X) \left(\int \frac{H_3 (X)}{H_2 (X)} d\,X\right) \int \ldots \left(\int \frac{H_n (X)}{H_{n-1} (X)} d\,X\right).$$

Così si vede che $R_1 \{F(X)\}$ si può rappresentare mediante un'espressione della forma: $R_2 \{Q_2 (F(X))\} f(y_1)$ ove designi $Q_2 (F(X))$ un'espressione differenziale del primo ordine e $R_2 (F(X))$ un'espressione differenziale d'ordine $n - 2$ tale che l'equazione:

$$R_2 (F(X)) f(y_1) = 0,$$

abbia per integrali:

$$H_3 (X), \quad H_3 (X) \int \frac{H_4(X)}{H_3(X)} d\,X, \ldots,$$

$$H_3 (X) \left(\int \frac{H_4(X)}{H_3(X)} d\,X\right) \left(\int \ldots\right) \left(\int \frac{H_n (X)}{H_{n-1} (X)} d\,X\right).$$

Così proseguendo, si vede che il primo membro della (6') si può rappresentare mediante il prodotto simbolico di n fattori differenziali del primo ordine e può così assumere la forma:

$$P_\mu (F(X)) - H_n (X) \left(\frac{d}{d\,X} \frac{H_{n-1} (X)}{H_n (X)}\right), \ldots \left(\frac{d}{d\,X} \frac{H_1 (X)}{H_2 (X)}\right) \left(\frac{d}{d\,X} \frac{F(X)}{H_1 (X)}\right).$$

Così l'equazione:

$$H_\mu (X) \ldots \left(\frac{d}{d\,X} \frac{F(X)}{H_1 (X)}\right) = 0,$$

ha le soluzioni $\mathsf{F}_1 (X) \ldots \mathsf{F}_\mu (X)$ e l'equazione:

$$R_\mu (X) = H_n (X) \ldots \left(\frac{d}{d\,X} \frac{\Phi (X)}{H_{\mu+1} (X)}\right) = 0,$$

ha le soluzioni:

$$P_\mu (\mathsf{F}_{\mu+1} (X)), \quad P_\mu (\mathsf{F}_{\mu+2} (X)) \ldots P_\mu (\mathsf{F}_n (X)).$$

Così, partendo dai μ integrali particolari $\mathsf{F}_i (X) (i = 1,\ 2 \ldots \mu)$ della (6') che supporremo dati, pel primo membro della (6') si ha una scomposizione della forma: $R_\mu(F(X))\, P_\mu(F(X))$ e la conoscenza d'un sistema fondamentale di integrali dell'equazione: $R_\mu(F(X))\, f(y_i) = 0$, oltre quella degli accennati integrali particolari della (5') permette di determinare, mediante semplici integrazioni, gli altri $n - \mu$ integrali della stessa (6'), i quali, insieme con $\mathsf{F}_1(X) \dots \mathsf{F}_\mu(X)$, costituiscono un sistema fondamentale.

c) Moltiplicatori. Equazione aggiunta. Applicando una formola già stabilita (quella per l'integrazione per parti (I^o)), dette $F(X)$, $\Phi(X)$ due funzioni di X, si ha, come si verifica agevolmente con un calcolo materiale:

$$\sum_{h=0}^{h=\mu-1} (-1)^h \int \Phi^{(h)}(X)\, F^{(\mu-h)}(X)\, dX = \sum_{h=0}^{\mu-1} (-1)^h\, \Phi^{(h)}(X)\, F^{(\mu-h-1)}(X) + $$
$$+ \sum_{h=0}^{h=\mu-1} \Phi^{(h+1)}(X)\, F^{(\mu-h-1)}(X)\, dX,$$

dalla quale si ricava la relazione equivalente:

$$\int \Phi(X)\, F^{(\mu)}(X)\, dX =$$
$$= \sum_{h=0}^{h=\mu-1} (-1)^h\, \Phi^{(h)}(X)\, F^{(\mu-h-1)}(X) + (-1)^\mu \int \Phi^{(\mu)}(X)\, F(X)\, dX.$$

Ponendo ora per $F(X)$, l'operazione rappresentata dal primo membro della (6') che si designerà brevemente con $P\{F(X)\}$ si avrà:

$$\left.\begin{aligned} &\int \Phi(X)\, P\{F(X)\}\, dX = \\ &= \sum_{\mu=0}^{\mu=n} \sum_{h=0}^{h=\mu-1} (-1)^h\, F^{(\mu-h-1)}(X) \frac{d^h\, \Psi_{n-h}(X)\, F(X)}{dX^h} + \\ &\quad + \int F(X)\, P'\{\Phi(X)\}\, dX. \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Ora $P'\{\Phi(X)\}$ evidentemente:

$$= \sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h \frac{d^h\{\Psi_{n-h}(X)\, \Phi(X)\}}{dX^h}.$$

Proponiamoci ora la questione seguente:

« Sotto quale condizione il primo membro della (16) è un'espressione differenziale lineare dell'ordine $n - 1$ in $F(X)$? »

Anzitutto il primo termine del secondo membro della (16) è appunto un'espressione di tal natura, il secondo termine si riduce esso pure ad una espressione di tal fatta, solo a patto che sia $F(X)\, P'\{\Phi(X)\}$ la derivata d'un'espressione dell'accennata forma. Ciò per altro non è, in generale, possibile, talchè questo termine deve annullarsi affinchè il primo membro della (16) assuma la forma da noi indicata. Ora in generale, non essendo $F(X)$ identicamente nulla in via assoluta, $F(X)\,P'\,\{\Phi(X)\}$ s'annulla in via assoluta solo se è:

$$P'\,\{\Phi(X)\} = 0,$$

per qualunque funzione-oggetto a cui sia applicata l'operazione che esso rappresenta. Possiamo quindi affermare che:

« Il primo membro della (16) si riduce ad un' espressione differenziale lineare d'ordine $n-1$ quando per $\Phi(X)$ si ponga un integrale dell'equazione:

$$P'\,\{\Phi(X)\}\,\varphi(y_1) = 0, \tag{17}$$

designando $\varphi(y_1)$ una funzione-oggetto qualunque. »

Una tale funzione che abbia la proprietà, sostituita a $\Phi(X)$, di far assumere a $\int \Phi(X)\,P\,\{F(X)\}\,dX$ la forma in discorso si dirà, con un'estensione d' un concetto del calcolo ordinario: « Moltiplicatore simbolico dell' equazione (6') ». E l'equazione (17) che definisce tali funzioni si dirà, adottando la definizione data dal Fuchs per le equazioni differenziali del calcolo ordinario: « Equazione aggiunta dell'equazione (6'). » L'operazione rappresentata dal primo membro della (17) si dirà: « Equazione differenziale aggiunta dell'espressione $P\,\{F(X)\}$. »

Derivando la (14) rispetto a X membro a membro si ha:

$$\Phi(X)\,P(F(X)) - F(X)\,P'(\Phi(X)) = \frac{d\,Q(F(X)\,\Phi(X))}{d\,X}, \tag{18}$$

ove sia:

$$Q\,(F(X)\,.\,\Phi(X)) = \sum_{h=0}^{h=n} \sum_{k=0}^{k=n-1} (-1)^k\,F^{(h-k-1)}(X)\,\frac{d^k}{d\,X^k}\,\{\Psi_{n-h}(X)\,\Phi(X)\}.$$

Proseguendo ad estendere le denominazioni che si hanno nel calcolo ordinario, in base a queste $Q\,(F(X)\,\{\Phi(X))\}$, si dirà: « Espressione differenziale bilineare (simbolica) nelle funzioni $F(X)$, $\Phi(X)$ dell'operazione I variabile X, d' ordine $n-1$ in entrambe. » Siamo quindi giunti al risultato espresso dalla seguente:

Proposizione « Sia $P'\,\{\Phi(X)\}$ l'espressione differenziale aggiunta dell' espressione differenziale $P\,\{F(X)\}$ ove siano $F(X)$, $\Phi(X)$ funzioni arbitrarie dell'operazione I variabile X:

$$\Phi(X)\,P(\Phi(X)) - F(X)\,\frac{d}{dX}\,P(\Phi(X)),$$

la derivata rispetto alla stessa operazione X d'un'espressione differenziale bilineare (simbolica) nelle funzioni $F(X)$, $\Phi(X)\,dX$ d'ordine $n-1$ in entrambe. »

Quando poi per $\Phi(X)$ si ponga un moltiplicatore della (6′), risulta dalle considerazioni precedenti che detto $M(X)$ questo moltiplicatore:

$$M(X)\,P\{F(X)\},$$

è la derivata rispetto a X d'un'espressione differenziale bilineare di $F(X)$, $M(X)$ d'ordine $n-1$ in entrambe.

Così si vede che la teoria del moltiplicatore delle equazioni differenziali lineari s'estende completamente alle equazioni differenziali lineari in funzioni d'un'operazione I variabile, i cui coefficienti siano serie di potenze di quest'operazione a coefficienti costanti.

d) Relazione che v'è fra un'espressione differenziale lineare in una funzione d'un'operazione I variabile e la sua aggiunta. Ponendo le uguaglianze simboliche:

$$\left.\begin{array}{c}
\Xi_n(X) = \dfrac{1}{H_n(X)} \cdots \Xi_\mu(X) = \\
= \dfrac{1}{H_n(X)}\left(\displaystyle\int \frac{H_n(X)}{H_{n-1}(X)}\,dX\right)\left(\displaystyle\int \cdots \frac{H_{\lambda+2}(X)}{H_{\lambda+1}(X)}\,dX\right)\left(\displaystyle\int \frac{H_{\lambda+1}(X)}{H_\lambda(X)}\,dX\right) \\
(\lambda = 2,\ 3, \ldots,\ n-1) \\
\Xi_1(X) = \dfrac{1}{H_n(X)}\left(\displaystyle\int \frac{H_n(X)}{H_{n-1}(X)}\,dX\right)\left(\displaystyle\int \cdots\right)\left(\displaystyle\int \frac{H_2(X)}{H_1(X)}\,dX\right)\cdot
\end{array}\right\} \tag{19}$$

Dalla (14) si ricava, posto brevemente:

$$P_\mu\{F(X)\} = H_{n-\mu}(X)\left(\frac{d}{dX}\,\frac{H_{n-\mu-1}(X)}{H_{n-\mu}(X)}\right)\cdots\frac{H_1(X)}{H_2(X)}\left(\frac{d}{dX}\,\frac{F(X)}{H_2(X)}\right)$$

$$(\mu = 1,\ 2, \ldots,\ n-\lambda+1)$$

$$\Xi_{\lambda\mu}(X) = \frac{1}{H_{n-\mu}(X)}\left(\int \frac{H_{n-\mu}(X)}{H_{n-\mu-1}(X)}\,dX\right)\cdots\left(\int \frac{H_{\lambda+1}(X)}{H_\lambda(X)}\,dX\right)$$

$$(\mu = 0,\ 2, \ldots,\ n-\lambda,\ \Xi_{\lambda_0}(X)$$

è equivalente a $\Xi_\lambda(X)$), il seguente sistema di relazioni:

$$\Xi_{\lambda,n-\lambda-1}(X)\,P_{n-\mu-1}\{F(X)\} =$$
$$= \frac{d}{dX}\left(\Xi_{\lambda,n-\mu-\lambda}(X)\,P_{n-\mu}\{F(X)\}\right) - \Xi_{\lambda,n-\mu}(X)\,P_{n-\mu}\{F(X)\},$$

(intendendosi che $P_0\{F(X)\}$ sia lo stesso $P\{F(X)\}$, $\mu = n-1\ldots\lambda$). L'ultima di queste relazioni è:

$$M_{\lambda,n-\lambda}(X)\,P_{n-\lambda}\{F(X)\} = \frac{d}{dX}\left(\Xi_{\lambda,n-\lambda}(X)\,P_{n-\lambda+1}(X)\right),$$

e addizionando queste equazioni membro a membro si ha:

$$M_\lambda(X)\,P\{F(X)\} = \frac{d}{dX}\sum_{\mu=0}^{n-\lambda} M_{\lambda,\mu}(X)\,P_{\mu+1}\{F(X)\} \quad (\lambda = 1\ldots n). \tag{20}$$

Ora dall'essere il secondo membro della (20) la derivata rispetto all'operazione X d'un'espressione differenziale lineare d'ordine $n-1$ nella funzione $F(X)$ dell'operazione X, segue che $\Xi_1(X)\ldots\Xi_n(X)$ sono da riguardarsi come moltiplicatori della (6'). Di più dall'essere:

$$M_{\lambda\mu}(X) = \frac{1}{H_{n-\mu+1}(X)}\left(\frac{d}{dX}\frac{H_{n-\mu+1}(X)}{H_{n-\mu+2}(X)}\right)\left(\frac{d}{dX}\frac{H_{n-\mu+2}(X)}{H_{n-\mu+3}(X)}\right)\cdots$$
$$\cdots\left(\frac{d}{dX}\frac{H_{n-1}(X)}{H_n(X)}\right)\left(\frac{d\,H_n(X)}{dX}\right)M_\lambda(X),$$

si hanno i coefficienti di quest'espressione differenziale in una funzione d'una operazione I variabile rappresentati come espressioni differenziali lineari del moltiplicatore.

Ora per i moltiplicatori si diedero le espressioni rappresentate dalle (20): confrontando queste colle altre espressioni:

$$F_{n-\lambda}(X) = H_1(X)\left(\int\frac{H_2(X)}{H_1(X)}\,dX\right)\left(\int\ldots\right)\left(\int\frac{H_{n-\lambda}(X)}{H_{n-\lambda-1}(X)}\,dX\right),$$

si trae la seguente conclusione:

« I moltiplicatori $\Xi_1(X)\ldots\Xi_n(X)$ della (6') si traggono da $F_1(X)\ldots F_n(X)$, sostituendo rispettivamente $H_1(X)\ldots H_n(X)$ mediante:

$$H'_1(X) = \frac{1}{H_n(X)}\cdots H'_n(X) = \frac{1}{H_1(X)},$$

e detti moltiplicatori $\Xi_i(X)$ costituiscono un sistema fondamentale d'integrali dell'equazione differenziale lineare omogenea (in una funzione dell'operazione I variabile X):

$$\left.\begin{aligned}(-1)^n H'_n(X)\left(\frac{d}{dX}\frac{H'_{n-1}(X)}{H'_n(X)}\right)\left(\frac{d}{dX}\frac{H'_{n-2}(X)}{H'_{n-1}(X)}\right)\cdots\\ \cdots\left(\frac{d}{dX}\frac{H'_1(X)}{H'_2(X)}\right)\left(\frac{d}{dX}\frac{\Phi(X)}{H'_1(X)}\right)\varphi(y_1)=0,\end{aligned}\right\}\qquad(21)$$

nello stesso modo con cui le $\mathsf{F}_i(X)$ $(i=1\ldots n)$ hanno l'analoga proprietà rispetto all'equazione:

$$H_n(X)\left(\frac{d}{dX}\frac{H_{n-1}(X)}{H_n(X)}\right)\cdots\left(\frac{d}{dX}\frac{H_1(X)}{H_2(X)}\right)\left(\frac{d}{dX}\frac{F(X)}{H_1(X)}\right)\varphi(y_1)=0,$$

($\varphi(y_1)$, funzione-oggetto qualunque). »

Inoltre poichè l'equazione (16) ha fra i suoi integrali qualunque moltiplicatore della (6′) e quindi le $\Xi_i(X)$, dovrà il primo membro della (16) essere identico col primo membro della (20) in via assoluta. Dovrà perciò sussistere l'uguaglianza simbolica (posto per le $H'_i(X)$ le loro espressioni equivalenti):

$$\left.\begin{aligned}P'\{\Phi(X)\}=(-1)^n\frac{1}{H_1(X)}\left(\frac{d}{dX}\frac{H_1(X)}{H_2(X)}\right)\cdots\\ \cdots\left(\frac{d}{dX}\frac{H_{n-1}(X)}{H_n(X)}\right)\left(\frac{d\{H_n(X)\Phi(X)\}}{dX}\right)=0,\end{aligned}\right\}\qquad(22)$$

la quale ci esprime che:

« L'espressione differenziale aggiunta a $P\{F(X)\}$ s'ottiene sostituendo alle funzioni $H_1(X)\ldots H_n(X)$ dell'operazione I variabile X, le quali servono alla scomposizione di $P\{F(X)\}$, le funzioni inverse a questa, prese con ordine di successione inverso, e moltiplicando il risultato per $(-1)^n$. »

Evidentemente l'espressione differenziale aggiunta all'espressione differenziale di primo ordine:

$$A_\lambda(X)=H_\lambda(X)\frac{d}{dX}\left(\frac{F(X)}{H_\lambda(X)}\right),$$

è:

$$A'_\lambda(X)=-\frac{1}{H_\lambda(X)}\frac{d}{dX}\{H_\mu(X)\Phi(X)\}.$$

Abbiamo quindi la proposizione seguente:

« L'espressione differenziale aggiunta dell'espressione differenziale lineare d'ordine n: $P\{F(X)\}$ si può rappresentare mediante il prodotto (simbolico) delle espressioni differenziali aggiunte delle espressioni differenziali di primo ordine che servono alla rappresentazione dell'espressione $P\{F(X)\}$ mediante il loro prodotto (v. formola 14) prese con ordine inverso. »

Di questa proposizione si ha il seguente:

« *Corollario.* L'espressione differenziale aggiunta d'un'espressione differenziale lineare (in una funzione d'un'operazione I variabile), la quale sia rappresentata mediante il prodotto simbolico di più espressioni differenziali lineari, è data dal prodotto simbolico delle espressioni aggiunte di queste espressioni-fattori prese con ordine inverso. »

Ciò si dimostra, scomponendo ognuna di queste espressioni differenziali che sono i fattori dell'espressione data in fattori del primo ordine sì da ottenere l'espressione data rappresentata mediante un prodotto simbolico di fattori differenziali del primo ordine e, applicando poi la proposizione testè enunciata. Poichè le $\Xi_i(X)$ $(i = 1 \ldots n)$ costituiscono un sistema fondamentale d'integrali della (22), sarà integrale di quest'equazione anche ogni loro combinazione lineare a coefficienti costanti. Così dalla reciprocità che sussiste fra equazioni differenziali aggiunte e dal modo stesso con cui fu definito il moltiplicatore d'un'equazione differenziale lineare è lecito trarre la conclusione seguente:

« I moltiplicatori dell'equazione differenziale (6′) sono dati dalle soluzioni dell'equazione differenziale aggiunta alla stessa (6′) e reciprocamente i moltiplicatori di quest'equazione aggiunta (22) sono dati dagli integrali della (6′). »

Poniamo ora le uguaglianze simboliche:

$$\Phi_\alpha(X) = (-1)^{n+\alpha} \frac{D(\mathsf{F}_1(X) \ldots \mathsf{F}_{\alpha-1}(X),\ \mathsf{F}_{\alpha+1}(X) \ldots \mathsf{F}_n(X))}{D(\mathsf{F}_1(X) \ldots \mathsf{F}_n(X))} \quad (\alpha = 1, 2, .., n), \tag{23}$$

ove al solito $\mathsf{F}_1(X) \ldots \mathsf{F}_n(X)$ abbiano il significato d'un sistema fondamentale d'integrale della (6′). Ora si sa essere:

$$P(F(X)) = (-1)^n \frac{D(F(X),\ F_1(X) \ldots F_n(X))}{D(F_1(X) \ldots F_n(X))}, \tag{24}$$

di più evidentemente:

$$\frac{d}{dX}\frac{\mathsf{F}_2(X)}{\mathsf{F}_1(X)} = \frac{D(\mathsf{F}_1(X),\ \mathsf{F}_2(X))}{\mathsf{F}_1^2(X)} \ldots \frac{d}{dX}\frac{\mathsf{F}_n(X)}{\mathsf{F}_1(X)} = \frac{D(\mathsf{F}_1(X),\ \mathsf{F}_n(X))}{\mathsf{F}_1^2(X)}.$$

Pertanto, posto per brevità:

$$D(\mathsf{F}_1(X),\ \mathsf{F}_\mu(X)) = \Omega_\mu(X) \quad (\mu = 1, 2, \ldots, n),$$

si avrà:

$$D(\mathsf{F}_1(X)\dots\mathsf{F}_n(X)) = \frac{D(\Omega_1(X)\dots\Omega_n(X))}{\mathsf{F}_1^2(X)},$$

da cui:

$$D(\mathsf{F}_1(X),\ \mathsf{F}_2(X),\ \mathsf{F}_\nu(X)) = \frac{D(\Omega_2(X)\dots\Omega_\nu(X))}{\mathsf{F}_1(X)} \quad (\nu = 3,\ 4,\dots,\ n),$$

e anche:

$$D(\Omega_1(X)\dots\Omega_n(X)) = \frac{D\{D(\Omega_2(X),\ \Omega_3(X))\dots D(\Omega_2(X),\ \Omega_n(X))\}}{\mathsf{F}_2^{n-3}(X)},$$

quindi:

$$D(\mathsf{F}_2(X)\dots\mathsf{F}_n(X)) = \frac{D(T_1(X)\dots T_{n-2}(X))}{D(\mathsf{F}_1(X),\ \mathsf{F}_2(X))^{n-3}},$$

ove si ponga:

$$T_i(X) = D(\mathsf{F}_1(X),\ \mathsf{F}_2(X),\ \mathsf{F}_{i+2}(X)).$$

Abbiansi ora: $\rho + \sigma$ funzioni di X:

$$N_1(X)\dots N_\rho(X),\ P_1(X)\dots P_\sigma(X):$$

si verifica facilmente essere:

$$D(N_1(X)\dots N_\rho(X),\ T_1(X)\dots T_\sigma(X)) = \frac{D(U_1(X)\dots U_\sigma(X))}{D(N_1(X)\dots N_\rho(X))^{\sigma-1}}, \quad (25)$$

ove si sia posto:

$$D(N_1(X)\dots N_\rho(X),\ P_\tau(X)) = U_\tau(X) \quad (\tau = 1,\ 2,\dots,\ \sigma),$$

(ρ e σ siano due numeri qualunque). Se pertanto a ρ s'attribuisce il valore $\mu - 1$, a σ il valore z e se si sostituiscono alle funzioni $N(X)$ rispettivamente le funzioni: $\mathsf{F}_1(X)\dots\mathsf{F}_{\lambda-1}(X)$, $\mathsf{F}_{\lambda+1}(X)\dots\mathsf{F}_\mu(X)$ e alle $P(X)$ rispettivamente le funzioni: $\mathsf{F}_\lambda(X)$, $\mathsf{F}_{\mu+1}(X)$, la (24) assume la forma:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{D(\mathsf{F}_1(X)\dots\mathsf{F}_{\lambda-1}(X),\ \mathsf{F}_{\lambda+1}(X)\dots\mathsf{F}_\mu(X))\,D(\mathsf{F}_1(X)\dots\mathsf{F}_{\mu+1}(X))}{D(\mathsf{F}_1(X)\dots\mathsf{F}_\mu(X))^2} = \\ &= \frac{d}{dX}\,\frac{D(\mathsf{F}_1(X)\dots\mathsf{F}_{\lambda-1}(X),\ \mathsf{F}_{\lambda+1}(X)\dots\mathsf{F}_{\mu+1}(X))}{D(\mathsf{F}_1(X)\dots\mathsf{F}_\mu(X))}. \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

Ciò premesso, se nella (26) si fa $\lambda = \alpha$, $\mu = n$ e si pone $\mathsf{F}_{\mu+1}(X) = F(X)$ essa in virtù delle (23) e (24) si trasforma nella relazione seguente:

$$\Phi_\alpha(X)\,P(F(X)) = \frac{d}{dX}P(F(X),\ \Phi_\alpha(X)), \quad (27)$$

ove si ponga:

$$P(F(X),\ \Phi_\alpha(X)) = (-1)^{\alpha-1}\frac{D(F_1(X)\dots F_{\alpha-1}(X),\ F_{\alpha+1}(X)\dots F_n(X))}{D(F_1(X),\ F_2(X)\dots F_n(X))}.$$

Colla (27) è espressa la proprietà delle $\Phi_\alpha(X)$ $(\alpha = 1\dots n)$ d'essere moltiplicatori dell'equazione differenziale (6'). Ora sviluppiamo il determinante:

$$\begin{vmatrix} F_1(X)\dots F_1^{(n-2)}(X), & F_1^{(\alpha)}(X) \\ F_2(X)\dots F_2^{(n-2)}(X), & F_2^{(\alpha)}(X) \\ \dots\dots\dots\dots & \dots \\ F_n(X)\dots F_n^{(n-2)}(X), & F_n^{(\alpha)}(X) \end{vmatrix} \quad (\alpha = 0,\ 1,\dots,\ n-2),$$

si avrà per la (23), facendo lo sviluppo per la colonna d'ordine α:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} F_\alpha^{(\lambda)}(X)\,\Phi_\alpha(X) = 0 \text{ in via assoluta} \\ &\qquad\qquad\qquad (\lambda = 0,\ 1,\dots,\ n-2) \\ &\sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} F_\alpha^{(n-1)}(X)\,\Phi_\alpha(\alpha) = \text{all'operazione identica.} \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Posto brevemente: $\sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} F_\alpha^{(\mu)}(X)\,\Phi_\alpha^{(\lambda)}(X) = S_{\mu,\lambda}(X)$, per $\lambda = 0$ le $S_{\mu,\lambda}(X)$ sono tutte uguali a 0 in via assoluta all'infuori che per $\mu = n-1$, nel qual caso si ha per $S_{\mu,\lambda}(X)$ l'operazione identica. Si hanno poi le relazioni:

$$\frac{d\,S_{\mu-1,0}}{d\,X} = S_{\mu,0} + S_{\mu-1},\quad \frac{d^2\,S_{\mu-2,0}}{d\,X^2} = S_{\mu,0} + 2\,S_{\mu-1,1} +$$

$$+\ S_{\mu-2,2}\dots \frac{d^\mu\,S_{0,0}}{d\,X^\mu} = S_{\mu,0} + \mu\,S_{\mu-1,1} + \cdots S_{0,\mu}.$$

Ora per $\mu < n-1$: $S_{\mu,\lambda}(X) = 0$ quando $\mu + \lambda < n-1$, mentre per $n = \mu - 1$, si ricava dalle formole precedenti:

$$S_{n-1,0}(X) = 1,\ S_{n-2,1}(X) = 1\dots,\ \text{ecc.},$$

con legge alternata e altrettanto si ha per $\mu = n$. Quindi:

$$S_{\mu,\lambda}(X) = \begin{cases} 0 \text{ per } \lambda + \mu < n-1 \\ (-1)^{n-1} \text{ per } \lambda + \mu < n-1, \end{cases}$$

ossia nel caso particolare di $\mu = 0$:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \Phi_\alpha^{(\lambda)}(X)\, \mathsf{F}_\alpha(X) = 0 \\ &\qquad\qquad\qquad (\lambda = 0,\ 1, \ldots,\ n-1) \\ &\sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \Phi_\alpha^{(n-1)}(X)\, \mathsf{F}_\alpha(X) = (-1)^{n-1}, \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

formola questa che in un colla (28) indica sotto una nuova forma la reciprocità esistente fra le $\Phi_\alpha(X)$, $F_\alpha(X)$.

5. *Equazioni differenziali lineari non omogenee in funzioni d'un'operazione I variabile.*

a) Serie procedenti secondo le derivate successive d'una data funzione d'un'operazione I variabile. Si consideri ora la serie:

$$\Sigma \frac{P_n(X)}{\underline{|n}} \frac{d^n F(X)}{d X^n} f(y_1), \tag{30}$$

ove $F(X)$ sia una funzione data di X, analitica (II^o) entro un certo campo di determinazioni di detta operazione X rispetto a $f(y_1)$, la quale sia una funzione-oggetto qualunque. Le $P_n(X)$ alla lor volta ($n - 0,\ 1,\ 2 \ldots$) siano funzioni della stessa X rappresentate da serie di potenze a coefficienti costanti di quest'operazione I variabile sodisfacenti alla condizione:

$$\left| \frac{P_n(X)\, \underline{|n-1}}{P_{n-1}(X)\, \underline{|n}} \frac{F^{(n)}(X) f(y_1)}{F^{(n-1)}(X) f(y_1)} \right| < \frac{\mathsf{R}^n(X)}{\mathsf{R}^{n-1}(X)} \frac{F^{(n}(X) f(y_1)}{F^{(n-1)}(X) f(y_1)},$$

per tutti i valori dell'indice n, e per tutte le determinazioni di X comprese in un certo campo T, ove sia $R(X)$ una funzione data di X, analitica entro T rispetto a $F(X) f(y_1)$ e che di più sia tale che le:

$$\mathsf{R}^n(X)\, F^{(n)}(X) f(y_1) \quad (n = 0,\ 1 \ldots),$$

siano per tutte le determinazioni di X comprese in T, reali e positive per un certo insieme E di valori della variabile da cui dipende la funzione da esse rappresentata. Suppongasi inoltre che $F(X)$ sia funzione analitica di X rispetto a $f(y_1)$ per tutte le determinazioni di X appartenenti a un insieme T_1 compreso per intero in T. Ora si dimostrerà come si possa determinare una porzione di T_1, tale che per le determinazioni di X comprese in questa la serie (30) sia convergente assolutamente e in ugual grado.

Converremo pertanto di designare, dopo avere introdotta la rappresentazione delle operazioni I mediante punti dello spazio (II^o), con $\frac{D(X)f(y_1)}{\mathbf{I}f(y_1)}$ il limite inferiore della differenza, rispetto a $f(y_1)$, fra una data determinazione di X corrispondente ad un punto interno alla regione costituita dai punti che corrispondono alle determinazioni di X appartenenti a T_1 e le determinazioni di X che corrispondono ai punti situati sul contorno della regione stessa. Questo limite inferiore: $\frac{D(X)f(y_1)}{\mathbf{I}f(y_1)}$ sarà una funzione che varierà da uno all' altro punto dell' accennata regione, che diremo R: di più sarà nulla per i punti del contorno di R, mentre sarà reale, positiva e continua per punti interni al contorno stesso (cioè $D(X)$) sarà per punti, ecc. ecc. continua rispetto a $f(y_1)$. Fissiamo ora un punto P interno a R, a cui corrisponda una determinazione costante I_h di X: dimostreremo questa proposizione:

« Esista un punto di R, tale che, detta X la determinazione di X che gli corrisponde sia:

$$\frac{\mathrm{R}^n(\mathsf{X})\,F^n\,(X)f(y_1)}{\mathrm{R}^{n-1}\,(X)\,F^{n-1)}(X)f(y_1)} < \frac{D^n(\mathsf{X})f(y_1)}{D^{n-1}(\mathsf{X})f(y^1)}, \tag{31}$$

per ogni valore dell'indice n da 1 in poi. In questo caso, per la continuità di D, esisterà un' intera regione interna a R (II^o), tale che per le determinazioni di X corrispondenti ai singoli punti interni a questa regione, che designeremo brevemente con R_1, sia sodisfatta la (31). Allora per i punti interni a R_1, la serie (30) è convergente assolutamente ed in ugual grado sotto la condizione però che entro R_1 esista un punto tale che ad esso corrisponda una determinazione costante I_h di X. »

Infatti, per essere $F(X)$ funzione analitica di X entro T rispetto a $f(y_1)$, essa sarà sviluppabile in serie di potenze di $X - \mathbf{I}_h$ convergente nella sfera il cui centro sia il punto corrispondente a $\mathbf{I}_h$, e sulla cui superficie si trovino i punti corrispondenti a $\mathrm{I}_h + \mathbf{I}_\alpha$, posto brevemente $\alpha = \frac{D(\mathbf{I}_h)f(y_1)}{\mathbf{I}f(y_1)}$.

Se ora indichiamo con t_1, t_2, t_3 tre numeri positivi (i quali per le ipotesi poste si potranno sempre assegnare) tali che:

$$\frac{\mathrm{R}(\mathrm{I}_h)f(y_1)}{\mathbf{I}f(y_1)} < t_1 < t_2 < t_3 < \frac{D(\mathrm{I}_h)f(y_1)}{\mathbf{I}f(y_1)} \tag{32}$$

(si noti che:

$$\frac{\mathrm{R}\,(\mathrm{I}_h)\,f(y_1)}{\mathrm{I}\,f(y_1)} \quad \text{e} \quad \frac{D\,(\mathrm{I}_h)\,f(y_1)}{\mathrm{I}\,f(y_1)},$$

sono fattori costanti, qualunque sia la funzione $f(y_1)$) si potrà sviluppare la funzione $F(X+\mathrm{I}_{t_2})\,f(y_1)$ mediante la formola del Taylor generalizzata, per le determinazioni di X sodisfacenti alla condizione seguente (per ogni valore dell'indice n):

$$\frac{\{\,|\,(X-\mathrm{I}_h)\,f(y_1)+\mathrm{I}_{t_3}f(y_1)\,\}^n}{\{\,|\,(X-\mathrm{I}_h)\,f(y_1)+\mathrm{I}_{t_3}f(y_1)\,|\,\}^{n-1}} < \frac{D\,(\mathrm{I}_h)\,f(y_1)}{\mathrm{I}\,f(y_1)};$$

si avrà cioè per queste determinazioni:

$$F(X+\mathrm{I}_{t_2})\,f(y_1)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{I}_{t_2}}{\underline{|n}}\right)^n F^{(n)}(X)\,f(y_1) \tag{33}$$

(al solito con $F^{(0)}(X)$ s'intende di rappresentare la stessa $F(X)$), mentre d'altra parte per la continuità di $\mathrm{R}(X)$ relativamente a $f(y_1)$ vi sarà un'intera porzione della regione R comprendente il punto corrispondente a I^h, tale che per le determinazioni di X corrispondenti a' suoi singoli punti, $\mathrm{R}(X)$ continui a sodisfare la disuguaglianza (32). D'altra parte lo sviluppo (33) sarà valido certo per le determinazioni di X tali che sia sodisfatta la disuguaglianza:

$$\left|\frac{X^n f(y_1)}{X^{n-1} f(y_1)}\right| < t_3 - t_2 - h,$$

per tutti i valori dell'indice n e per tutti i valori della variabile da cui dipende $X^n f(y_1)$ compresi in E: e per le determinazioni di X comprese in questo campo, $\dfrac{F(X)\,f(y_1)}{\mathrm{I}\,f(y_1)}$ ammetterà quindi un massimo (per tutti i valori della variabile da cui dipende la funzione in discorso compresi in E). Diciamo m questo massimo, sarà:

$$\frac{1}{\underline{|n}}\left|\frac{F^{n)}(X)\,f(y_1)}{\mathrm{I}\,f(y_1)}\right| < \frac{m}{t^2{}_n}.$$

Ritornando ora alla serie (29) è chiaro che per tutte le determinazioni di X appartenenti al campo in cui sia:

$$\left|\frac{X^n f(y_1)}{X^{n-1} f(y_1)}\right| < t_3 - t_2 - h,$$

e sia contemporaneamente continua $D(X)$ relativamente a $f(y_1)$, cioè per tutte le determinazioni di X costituenti la porzione comune di questi due campi, si avrà:

$$\left| \frac{P_n(X)}{\underline{|n}} F^{(n)}(X) f(y_1) \right| < F_1^n (X) F^{(n)}(X) f(y_1) <$$
$$< t_1^n F^{(n)}(X) f(y_1) < t_2^n F^{(n)}(X) f(y_1).$$

Ne consegue che la serie (31) è convergente assolutamente ed in ugual grado per tutte le determinazioni di X compreso nel campo in cui è convergente la (33) c. d. d.

L'insieme delle funzioni di X tali che messe nella (31) al posto di $F(X)$, rendano convergente questa serie si dirà, estendendo una definizione data dal prof. Pincherle « campo funzionale di convergenza di questa funzione dell'operazione I variabile in discorso ».

b) Integrazione d'equazioni differenziali lineari non omogenee in funzioni d'un'operazione I variabile. Abbiasi ora l'equazione:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^m \Phi(X)}{d X^m} f(y_1) + \frac{d^{m-1} \Phi(X)}{d X^{m-1}} \Psi_1(X) f(y_1) + \cdots \\ &\ldots \Phi(X) \Psi_m(X) f(y_1) = F(X) f(y_1), \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

ove i coefficienti $\Psi_i(X)$ e $F(X)$ siano funzioni cognite di X, rappresentate da serie di potenze di quest'operazione I variabile, a coefficienti costanti e $f(y_1)$ sia al solito una funzione-oggetto assegnata. Si tratta di determinare la funzione incognita $\Phi(X)$ in guisa da rendere sodisfatta la (34). Un'equazione siffatta si dirà: « Equazione differenziale lineare non omogenea in una funzione dell'operazione I variabile X, rispetto alla funzione-oggetto $f(y_1)$. » Formalmente la (34) sussiste indipendentemente da qualunque funzione particolare $f(y_1)$, ma è necessario prendere in considerazione la forma speciale che in ogni singolo caso può presentarsi onde determinare il campo di convergenza della funzione $\Phi(X)$ dell'operazione X che sodisfa la (34) (integrale di quest'equazione). Ora:

« L'equazione (34) è sodisfatta da una funzione della forma (31), da una serie cioè procedente secondo le derivate successive rispetto all'operazione X della funzione $F(X) f(y_1)$ che figura nel secondo membro dell'equazione stessa. »

Infatti riguardiamo il primo membro della (34) come un risultato d'un'operazione che designeremo con $\Delta \{ \Phi(X) f(y_1) \}$ applicata a $\Phi(X) f(y_1)$; allora si potrà indicare $\Phi(X) f(y_1)$ col simbolo $\Delta^{-1} \{ F(X) f(y_1) \}$, intendendo di rappresentare con Δ^{-1} l'inversa dell'operazione Δ, poichè:

$$F(X) f(y_1) = \Delta \{ \Phi(X) f(y_1) \}.$$

Proponiamoci quindi di determinare la funzione $\Delta^{-1} \{ F(X) f(y_1) \}$, rappresentandola mediante una serie della forma (31) in guisa da rendere sodisfatta la (34). Ora trattandosi di serie di potenze a coefficienti costanti di X, per le quali quando si faccia il prodotto simbolico d'una per l'altra, vale la legge distributiva e poichè (I^o) per la derivazione rispetto ad un'operazione I variabile valgono le stesse leggi fondamentali che valgono per la derivazione studiata nel calcolo ordinario, per la determinazione formale dell' integrale della (34) si può applicare il medesimo metodo col quale il prof. Pincherle (*) determinò formalmente l' integrale delle equazioni differenziali lineari non omogenee che si presentano nel calcolo ordinario. Seguendo questa via si trova che la (34) è sodisfatta da una serie della forma:

$$\Delta^{-1} \{ F(X) f(y_1) \} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{i=m} (-1)^n \mathrm{P}_i(X) D^{-(n+1)} [M_i(X)] \frac{d^n F(X)}{d X^n} f(y_1), \quad (35)$$

ove le funzioni $\mathrm{P}_i(X)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ siano un sistema fondamentale d'integrali dell'equazione $\Delta \{ \Phi(X) f(y_1) \} = 0$ e le funzioni $M_i(X)$ siano il sistema corrispondente di moltiplicatori (v. 4) dell'equazione stessa mentre con $D^{-n} \{ M_i(X) \}$ s'intenda di rappresentare l'espressione:

$$\int_{l_h}^{X} \int_{l_h}^{X} \ldots \int_{l_h}^{X} M_i(X) \, d X^n,$$

(per la formazione di quest'integrale v. (II^o)). Di più sia l_h una determinazione costante di X tale che in tutto un campo che la comprende le $M_i(X)$ siano funzioni analitiche finite di X relativamente alle funzioni:

$$\frac{d^n F(X)}{d X^n} f(y_1) \quad (n = 0, 1 \ldots).$$

Sappiamo poi (4) che fra le $M_i(X)$, $\mathrm{P}_i(X)$ sussiste una relazione della forma (30) che è appunto una delle relazioni fondamentali nella determinazione formale della serie (34) (v. Pincherle, loc. cit.).

(*) Loc. cit.

Ciò premesso passiamo a stabilire se si possa determinare un campo di convergenza per la serie:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{i=m} \mathrm{P}_i(X)\, D^{-(n+1)}[M_i(X)] \frac{d^n F(X)}{d X^n}, \tag{36}$$

relativamente a $f(y_1)$. Anzitutto si sa (4) che nel campo di determinazione di X, in cui le funzioni $\Psi_i (i = 1 \ldots n)$ relativamente a $f(y_1)$ sono funzioni analitiche regolari di X, anche le serie che rappresentano le funzioni: $\mathrm{P}_i(X)$, $M_i(X)$ sono convergenti relativamente alla stessa $f(y_1)$. (Che questo sia anche delle $M_i(X)$ si desume dal fatto che per il modo stesso con cui si costruisce l'equazione aggiunta d'un'equazione differenziale lineare data in una funzione d'un'operazione I variabile, integrali e coefficienti dell'una sono convergenti relativamente a una data funzione-oggetto nel campo di convergenza che spetta a integrali e coefficienti dell'altra. Prendasi la determinazione costante I_h nel campo di convergenza delle funzioni $\mathrm{R}_i(X)$, $M_i(X)$ e si consideri un campo comprendente I_h tale che le determinazioni di esso differiscano da I_h relativamente a $f(y_1)$, di non più della funzione $D(\mathrm{I}_h)$ avente rispetto a I_h e al campo di convergenza delle $\mathrm{R}_i(X)$, $M_i(X)$ la proprietà che le si attribuì in a). Detto T_1 il campo così determinato, entro T_1 la funzione $\frac{\mathrm{R}_i(X) f(y_1)}{\mathrm{I} f(y_1)}$ avrà per un certo insieme E di valori della variabile da cui dipende un massimo valore assoluto che diremo ρ_i. Posto quindi:

$$M_i(X) = \alpha_{i,0} + \alpha_{i,1}(X - \mathrm{I}_h) + \alpha_{i,2}(X - \mathrm{I}_h)^2 \ldots \quad (i = 1 \ldots m),$$

la funzione $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_{i,n})(X - \mathrm{I}_h)^n f(y_1)}{\mathrm{I} f(y_1)}$, avrà pure entro T_1 un massimo valore assoluto che diremo γ_i. In virtù delle posizioni:

$$D^{-(n+1)} M_i(X) = \int_{\mathrm{I}_h}^{X} D^{-n} M_i(X)\, d X, \quad D^{-1} M_i(X) = \int_{\mathrm{I}_h}^{X} M_i(X)\, d X,$$

sarà certo per tutte le determinazioni di X comprese in T_1:

$$\left| \frac{D^{-(n+1)} M_i(X) f(y_1)}{\mathrm{I} f(y_1)} \right| < \frac{\dfrac{\gamma_i \,|(X - \mathrm{I}_h)|^{n+1}}{\underline{|n+1}}}{\mathrm{I} f(y_1)} f(y_1).$$

Pertanto, valendo nella moltiplicazione delle funzioni dell'operazione X qui considerate la legge distributiva sarà nella (36) il termine:

$$\frac{d^n F(X)}{d X^n} f(y_1) < \text{in modulo di } \frac{1}{\underline{|n}} \frac{\varepsilon (X - \mathrm{I}_h)^{n+1}}{n+1} \text{ posto } \sum_{i=1}^{i=m} \gamma_i \rho_i = \varepsilon.$$

Senonchè $X - I_n$ è relativamente a $f(y_1) < D(I_h)$ onde la condizione (33) essendo sodisfatta così per tutte le determinazioni di X comprese in T_1, la serie (36) rappresenta l'integrale della (34), convergente rispetto alla funzione-oggetto $f(y_1)$. Essa rappresenta cioè *effettivamente* (rispetto a $f(y_1)$) l'espressione $\Delta^{-1}\{F(X)\}$, posta l'uguaglianza simbolica:

$$F(X) = \Delta\{\Phi(X)\} = \frac{d^m \Phi(X)}{d X^m} + \ldots \Phi(X)\Psi_m(X).$$

II.

1. *Operazioni I che lasciano invariata una forma differenziale lineare data. Relazione fra una forma differenziale lineare e le operazioni I che la lasciano inalterata.* Sia la forma differenziale lineare d'ordine n:

$$\Delta u(y_1) = P_0 \frac{d^n u}{d y_1^n} + P_1 \frac{d^{n-1} u}{d y_1^{n-1}} + \cdots + P_{n-1} \frac{d u}{d y_1} + P_n u, \tag{1}$$

ove i coefficienti P_0, $P_1 \ldots P_n$ siano funzioni analitiche della variabile y_1, uniformi e regolari in un certo campo E_{y_1} di valori di y_1. Il prof. Levi-Civita (*) determinò le operazioni I che lasciano inalterata una forma differenziale della natura della (1). Un'operazione I che lasci inalterata la (1) soddisferà pertanto alle seguenti condizioni:

a) La linea d'integrazione sia tale che in corrispondenza a tutti i valori della variabile situati su essa, la funzione caratteristica sia regolare almeno per qualche punto (e quindi area) compresa nel campo di valori E_{y_h} della variabile d'integrazione y_{h+1} (h indice variabile a norma delle convenzioni poste (I^o)).

b) La linea stessa sia tutta interna alla regione E_{y_h} designandosi con y_h, in generale, la variabile d'integrazione.

c) Questa linea sia chiusa o tale che ne' suoi estremi si annullino la funzione caratteristica e le sue prime $n-1$ derivate.

d) La funzione caratteristica di detta operazione, che designeremo con $x(y_h, y_{h+1})$ (nel caso qui esaminato sarà $h = 1$) dovrà sodisfare l'equa-

(*) Levi-Civita, *I Gruppi di operazioni funzionali e l'inversione degli integrali definiti.* Rend. del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, 1895.

zione a derivate parziali:

$$\sum_0^n {}_r \left\{ P_r(y_{h+1}) \frac{d^{n-r} x(y_h, y_{h+1})}{d y_{h+1}^{n-r}} - (-1)^{n+r} \frac{d}{d y_h^{n-r}} [x(y_h, y_{h+1}) P_r(y_h)] \right\} = 0. \quad (2)$$

L'integrale generale della (2) contiene n funzioni arbitrarie: esso ha la forma (v. Levi-Civita, loc. cit.):

$$\int_{l_1} X_t^{(1)} Y_t^{(1)} \Psi_1(t)\, dt + \int_{l_2} X_t^{(2)} Y_t^{(2)} \Psi_2(t)\, dt + \cdots \int_{l_n} X_t^{(n)} Y_t^{(n)} \Psi_n(t)\, dt,$$

ove I°: Detto t un parametro $X_t^{(1)} \ldots X_t^{(n)}$ sia un sistema fondamentale di integrali dell'equazione:

$$(\Delta + t)\, u(y_{h+1}) = \sum_0^n {}_r\, P_r(y_{h+1}) \frac{d^{n-r} u(y_{h+1})}{d y_{h+1}^{n-r}} + t u(y_{h+1}) = 0, \quad (3)$$

e $Y_t^{(1)} \ldots Y_t^{(n)}$ sia un sistema fondamentale di integrali dell'equazione:

$$(\Delta' + t)\, \nu(y_h) = \sum_0^n {}_r (-1)^{n-2} \frac{d^{n-2} [P_r(y_h)\, \nu(y_h)]}{d y_h^{n-r}} + t \nu(y_h) = 0. \quad (3')$$

(La (3') è, a prescindere dai simboli, l'equazione aggiunta della prima e viceversa.)

II°: $\Psi_1(t) \ldots \Psi_n(t)$ siano n funzioni arbitrarie della variabile in generale complessa t e $l_1, l_2, \ldots, l_n$ siano n linee, pure arbitrarie del piano complesso t. È chiaro che $C X_t^{(i)} Y_t^{(j)}$ $(i, j = 1 \ldots n)$ è un integrale particolare della (2) e che facendo variare comunque t la funzione $C X_t^{(i)} Y_t^{(j)}$ si trasforma (v. Levi-Civita, ibid.) in tanti integrali particolari della (2) stessa.

Le operazioni I che lasciano invariata la (1) costituiscono gruppo: perciò se è A un'operazione I che lascia invariata la (2), altrettanto avverrà delle potenze di A, delle serie di potenze a coefficienti costanti della stessa A e delle operazioni X che si ottengono calcolando le derivate o gli integrali indefiniti di $F(X)$ ove $F(X)$ sia una serie di potenze dell'accennata natura, per $X = A$. Di più (v. Levi-Civita, ibid.) i soli gruppi d'operazioni I sono quelli definiti dalla proprietà che le operazioni I onde sono costituiti lasciano invariata una forma differenziale lineare. Così se X è un'operazione I variabile, e consideriamo un insieme di determinazioni di questa, ciascuna delle quali lascia invariata una certa forma differenziale lineare d'ordine n, potremo considerare ognuna di queste forme differenziali lineari in quanto essa dipende dalla determinazione di X che la lascia invariata. Così se designiamo con Δ una forma differenziale lineare d'ordine n, variabile nella natura dei suoi coefficienti, sarà Δ una funzione di X nell'insieme considerato di determinazioni di quest'operazione. Infatti in base al carattere d'una forma differenziale lineare, di rimanere invariata per una certa operazione I si può stabilire una corrispondenza reciprocamente univoca fra le determinazioni di X comprese nell'insieme in parola e altrettante determinazioni che è suscettibile d'assumere Δ. Il gruppo d'operazioni I che lascia invariata una certa forma differenziale lineare si dirà: « Il gruppo d'operazioni I relativo ad essa. »

2. *Formole fondamentali per il passaggio dagli integrali ai coefficienti e reciprocamente dai coefficienti agli integrali d'un'equazione differenziale lineare non omogenea.* Sia l'equazione differenziale lineare non omogenea, d'ordine n:

$$\Delta u = \frac{d u^{(n)}(y_1)}{d y_1^n} + P_1(y_1) \frac{d u^{n-1}(y_1)}{d y_1^{n-1}} + \cdots P_n(y_1)\, u(y_1) = \Psi(y_1) \tag{4}$$

(supporremo per semplicità il coefficiente del I^o termine $=$ all'unità), ove i coefficienti $P_1(y_1) \ldots P_n(y_1)$ e $\Psi(y_1)$ siano funzioni analitiche regolari di y_1 in un certo campo T_i. Sia X un'operazione I variabile che qui supporremo soggetta ad assumere soltanto le determinazioni appartenenti al gruppo d'operazioni I relativo alla forma Δu, suscettibile però d'assumerle tutte. Sia A una qualunque di queste: già sappiamo (v. 1) a quali condizioni dovrà sodisfare. Dato al solito all'indice h il significato, d'indice variabile a norma delle condizioni poste (I^o) si considerino oltre Δu, le forme:

$$A \Delta u,\ A \Delta^2 u \ldots A \Delta^{n-1} u;$$

avremo così il sistema d'equazioni:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta u &= \frac{d^n u(y_h)}{d y_h^n} + P_1(y_h) \frac{d^{n-1} u(y_h)}{d y_h^{n-1}} + \cdots \\
&\qquad \ldots P_n(y_h)\, u(y_h) = \Psi(y_h) \\
A \Delta u &= \frac{d^n A u(y_{h-1})}{d y_h^n} + P_1(y_h) \frac{d^{n-1} A u(y_{h-1})}{d y_h^{n-1}} + \cdots \\
&\qquad \ldots P_n(y_h)\, A u(y_{h-1}) = A \Psi(y_{h-1}) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A^{n-1} \Delta u &= \frac{d A^{n-1} u(y_{h-n+1})}{d y_h^n} + P_1(y_h) \frac{d^{n-1} A^{n-1} u(y_{h-n+1})}{d y_h^{n-1}} + \cdots \\
&\qquad \ldots P_n(y_h)\, A^{n-1} u(y_{h-n+1}) = A^{n-1} \Psi(y_{h-n+1}).
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Sia $u(y_h)$ un integrale conosciuto dell'equazione (4): potremo allora, purchè le funzioni $u(y_h) \ldots A^{n-1} u(y_{n-h+1})$ siano indipendenti, riguardando nel sistema (5) i coefficienti $P_1(y_1) \ldots P_n(y_h)$ come incognite, risolverlo rispetto ad esso. Si otterrà allora evidentemente:

$$P_1(y_h) = \frac{\begin{vmatrix} \Psi(y_h) - \frac{d^n u(y_h)}{d y_h^n}, & \frac{d^{n-2} u(y_h)}{d y_h^{n-2}} \cdots \frac{d u(y_h)}{d y_h}, & u(y_h) \\ A\Psi(y_h) - \frac{d^n A u(y_h)}{d y_h^n}, & \frac{d^{n-2} A u(y_h)}{d y_h^{n-2}} \cdots \frac{d A u(y_h)}{d y_h}, & A u(y_h) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A^{n-1}\Psi(y_h) - \frac{d^n A^{n-1} u(y_h)}{d y_h^n}, & \frac{d^{n-2} A^{n-1} u(y_h)}{d y_h^{n-2}} \cdots \frac{d A^{n-1} u(y_h)}{d y_h}, & A u(y_1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{d^{n-1} u(y_h)}{d y_h^{n-1}}, & \frac{d^{n-2} u(y_h)}{d y_h^{n-2}} \cdots \frac{d u(y_h)}{d y_h}, & u \\ \frac{d^{n-1} A u(y_h)}{d y_h^{n-1}}, & \frac{d^{n-2} A u(y_h^{n-1})}{d y_h^{n-2}} \cdots \frac{d A u(y_h)}{d y_h}, & A u \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d^{n-1} A^{n-1} u(y_h)}{d y_h^{n-1}}, & \frac{d^{n-2} A^{n-1} u(y_h)}{d y_h^{n-2}} \cdots \frac{d A^{n-1} u(y_h)}{d y_h}, & A^{n-1} u \end{vmatrix}}$$

e in generale:

$$P_i(y_h) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{d^{n-1} u(y_h)}{d y_h^{n-1}}, & \frac{d^{n-2}(u y_h)}{d y_h^{n-2}} \cdots \frac{d^{i+1} u(y_h)}{d y_h^{i+1}}, & \Psi(y_h) - \frac{d^n u(y_h)}{d y_h^n}, & \frac{d^{i-1} u(y_h)}{d y_h^{i-1}} \cdots u(y_h) \\ \frac{d^{n-1} A u(y_h)}{d y_h^{n-1}}, & \frac{d^{n-2} A u(y_h)}{d y_h^{n-2}} \cdots \frac{d^{i+1} A u(y_h)}{d y_h^{i+1}}, & A\Psi(y_h) - \frac{d^n A u(y_h)}{d y_h^n}, & \frac{d^{i-1} A u(y_h)}{d y_h^{i-1}} \cdots A u(y_h) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d^{n-1} A^{n-1} u(y_h)}{d y_h^{n-1}}, & \frac{d^{n-2} A^{n-1} u(y_h)}{d y_h^{n-2}} \cdots \frac{d^{i+1} A^{n-1} u(y_h)}{d y_h^{i+1}}, & A^{n-1}\Psi(y_h) - \frac{d^n A^{n-1} u(y_h)}{d y_h^n} & \cdots A^{n-1} u. \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{d^{n-1} u(y_h)}{d y_h^{n-1}} & \cdots\cdots\cdots & u \\ \frac{d^{n-1} A u(y_h)}{d y_h^{n-1}} & \cdots\cdots\cdots & A u \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d^{n-1} A^{n-1} u(y_h)}{d y_h^{n-1}} & \cdots\cdots\cdots & A^{n-1} u \end{vmatrix}}$$

$(i=2,\ 3\ldots n)$. Così si designi brevemente con $D(u,\ A\,u\ldots A^{n-1}u)$ il determinante funzionale di $u,\ A\,u\ldots A^{n-1}u$ che è il denominatore comune in queste frazioni, si designi con $D_i\,(u,\ A\,u\ldots A^{n-1}u)$ ciò che esso diviene quando ai termini della sua n — i^{esima} colonna $(i=1\ldots n)$ si sostituisca rispettivamente:

$$\Psi\,(y_h)-\frac{d^n u}{d\,y_h^{\,n}},\ A\,\Psi(y_h)-\frac{d^n u}{d\,y_h^{\,n-1}}\cdots A^{n-1}\,\Psi-\frac{d^n A^{n-1}u}{d\,y_h^{\,n}},$$

con $D_{i,l}\,(u\ldots A^{n-1}u)$ il coefficiente (a prescindere dal segno) dell' l^{esima} $(l=1\ldots n)$ termine della i^{esima} colonna nello sviluppo di $D_i(u,\ A\,u\ldots A^{n-1}u)$. Si avrà così, sviluppando ciascuno dei determinanti $D_i\,(u,\ A\,u\ldots A^{n-1}u)$ rispetto ai termini dell' i^{esima} colonna:

$$\left.\begin{aligned}P_i&=\frac{(-1)^{l-1}D_{i,1}(u\ldots A^{n-1}u)\left\{\Psi-\dfrac{d^n u}{dy_h^{\,n}}\right\}+\cdots(-1)^{i-n}D_{i,n}(u,Au\ldots A^{n-1}u)\left\{A^{n-1}\Psi-\dfrac{d^nA^{n-1}u}{dy_h^{\,n}}\right\}}{D\,(u,\ A\,u\ldots A^{n-1}\,u)}=\\&=\chi_{i,1}\,A^{n-1}\,\Psi+\chi_{i,2}\,A^{n-2}\,\Psi+\cdots\chi_{i,n}\,\Psi+\chi_{i,n+1},\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

ove si ponga:

$$\chi_{i,1}=\frac{(-1)^{i-n}\,D_{i,n}\,(u\ldots A^{n-1}\,u)}{D\,(u\ldots A^{n-1}\,u)}\cdots\chi_{i,n}=(-1)^{i-1}\,\frac{D_{i,1}(u\ldots A^{n-1}\,u)}{D\,(u\ldots A^{n-1}\,u)},$$

$$\chi_{i,n+1}=\frac{(-1)^i\,\mathsf{D}\,(u\ldots A^{n-1}\,u)}{D\,(u\ldots A^{n-1}\,u)};$$

designando con $\mathsf{D}(u\ldots A^{n-1}u)$ il determinante:

$$\begin{vmatrix}\dfrac{d^n\,u}{d\,y_h^{\,n}},\ \dfrac{d^{n-1}\,u}{d\,y_h^{\,n-1}}\cdots u\\[2ex]\dfrac{d^n\,A\,u}{d\,y_h^{\,n}},\ \dfrac{d^{n-1}\,A\,u}{d\,y_h^{\,n-1}}\cdots A\,u\\[2ex]\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\[2ex]\dfrac{d^n\,A^{n-1}\,u}{d\,y_h^{\,n-1}},\ \dfrac{d^{n-1}\,A^{n-1}\,u}{d\,y_h^{\,n-1}}\cdots A^{n-1}\,u\end{vmatrix}$$

Presa ora in esame, in particolare ad es., l'equazione:

$$P_1=\chi_{i,1}\,A^{n-1}\,\Psi+\chi_{i,2}\,A^{n-2}\,\Psi\ldots+\chi_{i,n}\,\Psi+\chi_{i,n+1},\qquad(6')$$

vediamo come da questa si possa ricavare Ψ espresso mediante una funzione dell'operazione X, calcolata per $X=A$, applicata a P_1. Ci varremo in ciò del metodo dei coefficienti indeterminati (I^o). Riguardando cioè il secondo membro della (6') come il risultato d'un'operazione funzionale applicata a Ψ, operazione che designeremo brevemente con $F(A)$ (onde porre in evidenza che si tratta d'una funzione dell'operazione I variabile X calcolata per $X = A$), ci proponiamo di determinare l'operazione inversa a $F(A)$, che designeremo con $\{F(A)\}^{-1}$. Quest'operazione $\{F(A)\}$ si rappresenterà con una serie di potenze di A: si ponga cioè:

$$\Psi = \{F(A)\}^{-1} P_1 = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A^\nu z_{\nu_1} P_1, \tag{7}$$

ove siano $z_{0,1}$, $z_{1,1}$,... altrettante funzioni d'una variabile da designarsi con un simbolo che si stabilirà in base alle convenzioni poste (I^o), le quali si dovranno determinare in modo che si abbia:

$$P_1 = F(A) \left\{ \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A^\nu z_{\nu_1} P_1 \right\}.$$

Sostituendo pertanto nella (6') a Ψ l'ultimo membro della (7), avremo il seguente sistema di relazioni:

$$\left.\begin{array}{c}
\chi_{i,n} z_{0,1} P_1 + \chi_{i,n+1} = P_1, \\
\chi_{i,n-1} A z_{0,1} P_1 + \chi_{i,n} A z_{1,1} P_1 = 0, \quad \chi_{i,n-2} A^2 z_{0,1} P_1 + \chi_{i,n-1} A^2 z_{1,1} P_1 = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\chi_{i,1} A^{n-1} z_{0,1} P_1 + \chi_{i,2} A^{n-1} z_{1,1} P_1 \ldots + \chi_{i,n} A^{n-1} z_{n-1,1} P_1 = 0, \\
\chi_{i,n} A^\mu z_{\mu-n+1,1} P_1 + \chi_{i,n-1} A^\mu z_{n-\mu,1} P_1 + \ldots \chi_{i,n} A^\mu z_{\mu,1} P_1 = 0, \\
(\mu = 1, 2, \ldots, \infty).
\end{array}\right\} \tag{8}$$

Con ciò, dopo avere determinato $z_{0,1}$ mediante la prima delle (8), la determinazione successiva di ciascuna delle altre funzioni $z_{1,1}$, $z_{2,1}$, $z_{3,1}$,.... è ricondotta all'inversione d'un integrale definito, trattandosi ogni volta di determinare la funzione $z_{\nu_1} = P_1 z_{\nu_1}$ ($\nu = 1, 2, \ldots$), tale che:

$$A^\nu z_{\nu_1} = \varphi_\nu,$$

φ_ν essendo una funzione cognita, perchè quando si giunge alla ricerca di z_{ν_1}, sono già note le precedenti funzioni z sino a $z_{\nu-1,1}$. Così, purchè si presentino casi in cui l'inversione di integrali definiti (I^o) sia possibile, giungeremo alla seguente relazione:

$$\Psi = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A^\nu z_{\nu_1} P_1, \tag{9}$$

ove le z_{ν_1} sono funzioni cognite. Ripetendo questo procedimento per ciascuno degli altri coefficienti P_i ($i = 1 \ldots n$), perverremo ad altrettante relazioni della forma:

$$\Psi = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A^\nu z_{\nu_i} P_i \,, \qquad (9')$$

ove con z_{ν_2} si designino le funzioni che hanno nell'espressione di Ψ mediante P_2 lo stesso ufficio che hanno le z_{ν_1} nell'espressione di Ψ mediante P_1, ecc., ecc.

Ora il prof. Pincherle (loc. cit.) (v. introduzione) diede il modo di rappresentare la soluzione della (4) mediante una serie procedente secondo le derivate successive di Ψ, serie della quale dimostrò potersi determinare un campo di convergenza. Poniamo brevemente $u = D(\Psi)$, intendendo di rappresentare col secondo membro di quest'uguaglianza l'accennata serie procedente secondo le derivate successive di Ψ. Avremo allora, in virtù della (9'):

$$u = D \left\{ \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A^\nu z_{\nu_i} P_i \right\} \qquad (10)$$

$(i = 1, 2 \ldots n)$, cioè u espresso in funzione di ciascuna delle P_i.

Così la formola (6) e la (10) possono riguardarsi come formole inverse nel senso che:

« La (6) dà il passaggio dalla soluzione della (4) ai coefficienti della soluzione stessa: la (10) dà il passaggio inverso dai coefficienti della (4) alla sua soluzione ».

Quanto alla validità dell'espressione data per Ψ dalla (9') e quindi per u dalla (10) è chiaro che il campo di convergenza di queste serie sarà dato dal campo, in cui la serie di potenze di y_h che rappresenta lo sviluppo di Ψ è convergente assolutamente ed in ugual grado.

Un'altra osservazione da farsi è questa. L'espressione di u data dalla (10) fu determinata, fissando una determinazione speciale di X; ora, pongasi la convenzione di poter far assumere a X tutte e sole le determinazioni appartenenti al gruppo d'operazioni I relativo a Δu, e si designino con $\mathfrak{z}_{\nu_i}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, i = 1, 2 \ldots n)$, anzichè le funzioni determinate dalle (8) in base a un'operazione I assegnata, i simboli di funzioni variabili che si determinano mediante le equazioni analoghe alle (8) relative alle varie determinazioni che può assumere X. Si potrà scrivere:

$$u = D \left\{ \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} X^\nu \mathfrak{z}_{\nu_i} P_i \right\}.$$

S'è detto che se A appartiene al gruppo d'operazioni I relativo a Δu, altrettanto sarebbe di $F(A)$ ove $F(A)$ designasse una serie di potenze a coefficienti costanti di A, e apparterrebbero pure al gruppo in parola le derivate successive e gli integrali indefiniti di $F(X)$ calcolati per $X = A$. Pertanto consideriamo le relazioni:

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta u = \frac{d^n u}{d y_h^n} + P'_1 \frac{d^{n-1} u}{d y_h^{n-1}} + \cdots + P_n u = \Psi \\
&F(A)\Delta u = \frac{d^n F(A) u}{d y_h^n} + P_1 \frac{d^{n-1} F(A) u}{d y_h^{n-1}} + \cdots \\
&\qquad \cdots + P_n F(A) u = F(A)\Psi \\
&F'(A)\Delta u = \frac{d^n F'(A) u}{d y_h^n} + P_1 \frac{d^{n-1} F'(A) u}{d y_h^{n-1}} + \cdots \\
&\qquad \cdots + P_n F'(A) u = F'(A)\Psi \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&F^{(n-1)}(A)\Delta u = \frac{d^n F^{n-1}(A) u}{d y_h^n} + P_1 \frac{d^{n-1} F^{(n-1)}(A) u}{d y_h^{n-1}} + \cdots \\
&\qquad \cdots + P_n F^{(n-1)}(A) u = F^{(n-1)}(A)\Psi.
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Da queste si ricava:

$$P_i = \xi_{i,1} F^{(n-1)}(A)\Psi + \xi_{i,2} F^{(n-2)}(A)\Psi + \cdots \xi_{i,n}\Psi + \xi_{i,n+1}, \tag{11'}$$

ove sia $\xi_{i,h}(-1)^{i+1}$ $(h = 1 \ldots n)$ il quoziente di due determinanti costruiti con u, $F(A)u \ldots F^{(n-1)}(A)u$ le loro successive derivate, rispettivamente nello stesso modo con cui sono costruiti:

$$D_{i,h}(u,\ A u \ldots A^{n-1} u), \quad \text{e} \quad D(u \ldots A^{n-1} u),$$

con $u \ldots A^{n-1} u$, le loro successive derivate, mentre sia $\xi_{i,n+1}(-1)^i$ il quoziente del determinante costruito con $u, \ldots F^{(n-i)}(A) u$ come $D(u \ldots A^{n-1} u)$ con $u \ldots A^{n-1} u$ per lo stesso determinante che figura al denominatore delle $\xi_{i,h}$.

La (11′) è così un'equazione lineare alle derivate di $F(X)$ rispetto a X, calcolate per $X = A$, i cui coefficienti sono funzioni nel senso ordinario. Questa relazione si può invertire come si fece colla (6′); valendosi cioè anche qui del metodo dei coefficienti indeterminati si ponno dare per Ψ espressioni della forma:

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} F^{(\nu)}(A)\,\eta_{\nu_i} P_i + \vartheta P_i. \tag{12}$$

Si avrà infatti per la determinazione delle funzioni η_{ν_i}, e per ogni valore di i compreso nella successione $1, 2 \ldots n$ il seguente sistema di relazioni (ove sostituita a P_i nella (11) l'espressione (12) si uguagliano i termini contenenti derivate d'ugual indice di $F(X)$ per $X = A$):

$$\xi_{i,n}\,\vartheta\,P_i + \xi_{i,n+1} = P_i,$$
$$\xi_{i,n-1}\,F(A)\,\vartheta\,P_i + \xi_{i,n}\,F(A)\,\eta_{0,i}\,P_i = 0,$$
$$\xi_{i,n-2}\,F''(A)\,\vartheta\,P_i + \xi_{i,n-1}\,F'(A)\,\eta_{1,i}\,P_i = 0.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Per ciascuna di queste equazioni, dopo risoluta la prima, la risoluzione è ricondotta all'inversione d'un integrale definito (*). Così, dette $\bar{\eta}_{\nu,i}$ le funzioni aventi rispetto alle $\eta_{\nu,i}$ significato analogo a quello che hanno le $z_{\nu,i}$ rispetto alle $z_{i,i}$, si avranno le n equazioni (1 per ciascun valore di i):

$$u = D\left\{\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} F^{(\nu)}(X)\,\bar{\eta}_{\nu,i}\,P_i\right\} + D\,\vartheta\,P_i. \tag{13}$$

Ora, considerando le equazioni analoghe alle (11) che si ottengono quando a $F(X)$ si sostituisca $F'(X)$, e dette $\bar{\eta}^{(1)}_{\nu,i}$, $(i = 0\ldots n,\ \nu = 1,\ 2\ldots)$ le funzioni (di y_h) che hanno rispetto a $F'(X)$ significato analogo a quello che hanno rispettivamente le $\bar{\eta}_{\nu,i}$, $\eta_{0,i}$ per $F(X)$, si potrà porre u sotto l'altra forma:

$$D\left\{\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{d\,F^{(\nu)}(X)}{d\,X}\,\bar{\eta}^{(1)}_{\nu,i}\,P_i\right\} + D\,\vartheta\,P_i. \tag{12'}$$

Così, confrontando le due forme (13), (12') sotto le quali si è posto u (ossia Ψ) si avrà, per ciascun valore dell'indice i, l'equazione seguente:

$$\left.\begin{aligned} \eta_{0,i}\,P_i + \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} F^{(\nu)}(X)\,\bar{\eta}_{\nu,i}\,P_i = \vartheta\,P_i + \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\frac{d\,F^{(\nu)}(X)}{d\,X}\,\eta_{\nu,i}\,P_i = \\ = \frac{d\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} F^{(\nu)}(X)\,\bar{\eta}^{(1)}_{\nu,i}\,P_i}{d\,X} + \vartheta\,P_i, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

che è un'equazione funzionale nella funzione $F(X)$ dell'operazione I variabile X, i cui coefficienti sono funzioni (variabili nella loro forma da una all'altra determinazione di X). In ultima analisi la (14) si potrebbe riguardare anche come un'equazione differenziale di grado infinito (trascendente) in X.

Le considerazioni fatte per $F(X)$, si possono ripetere per le derivate di qualunque ordine di questa funzione, e pure per i suoi integrali indefiniti ri-

(*) Come si vede dunque la ϑ si determina da una semplice equazione lineare ed è soltanto per determinare le $\eta_{0,i}$ $\eta_{1,i}$ $\eta_{2,i}$ ecc. che si richiedono inversioni di integrali definiti.

spetto a X; e si ottengono così fra due espressioni di Ψ ricavate sostituendo a $F(X)$ una delle sue derivate o de' suoi integrali, relazioni della forma (14) che permettono di passare direttamente dall'una all'altra.

Nota. Siano n funzioni, $F_1(X) \ldots F_n(X)$ dell'operazione I variabile X; diremo che: « per una determinazione generica di questa che diremo ancora X, queste n funzioni sono linearmente indipendenti, quando non sia mai possibile trovare n fattori $h_1, h_2, \ldots, h_n$ tali che sussista identicamente e in via assoluta una relazione della forma:

$$h_1 F_1(X) + h_2 F_2(X) + \cdots + h_n F_n(X) = 0. \text{»} \qquad (\alpha)$$

Una tale relazione equivale, sostituendo a ciascuna delle $F_i(X)$ $(i = 1, 2 \ldots n)$ il suo sviluppo in serie di potenze di X, ad altrettante relazioni della forma:

$$h_1 c_h^{(1)} + h_2 c_h^{(2)} + \cdots + h_n c_h^{(n)} = 0 \quad (h = 0, 1 \ldots \infty), \qquad (\alpha')$$

fra i coefficienti d'una stessa potenza di X. (Ciò in base alla teoria dei coefficienti indeterminati, v. I^o.) Ora, se può sussistere fra $F_1(X) \ldots F_n(X)$ una relazione della forma (α) si avrà anche:

$$h_1 F_1^{(k)}(X) + h_2 F_2^{(k)}(X) + \cdots + h_n F_n^{(k)}(X) = 0 \quad (k = 1, 2 \ldots n-1). \quad (\beta)$$

Le (β) si scindono esse pure in relazioni della forma (α'). Se dalle (α) e (β) ricaviamo n equazioni, potranno sussistere le equazioni così ottenute in cui si riguardino le h_i come incognite $(i = 1 \ldots n)$ solo a patto che sia nullo il determinante dei coefficienti in parola, e viceversa, come si sa dall'algebra l'annullarsi di detto determinante è condizione sufficiente, a che sussistano tali equazioni. Così pure potendosi raggruppare a n, a n le equazioni della forma (α') che s'ottengono dalle (α), (β), la possibilità che sussistesse la α porterebbe con sè la possibilità che sussistessero fra i coefficienti degli sviluppi delle $F_1(X) \ldots F_n(X)$ altri sistemi della forma (β'), e che quindi quelli costituiti d'equazioni distinte avessero il determinante dei coefficienti nullo.

Ora, converremo di designare col nome di « determinante di n^2 funzioni: $F_{1,1}(X) \ldots F_{1,n}(X)$, $F_{2,1}(X) \ldots F_{n,n}(X)$ dell'equazione X e di designare col simbolo:

$$\begin{vmatrix} F_{1,1}(X) \ldots F_{1,n}(X) \\ F_{2,1}(X) \ldots F_{2,n}(X) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_{n,1}(X) \ldots F_{n,n}(X) \end{vmatrix},$$

la funzione della stessa operazione X che s'ottiene combinando, mediante moltiplicazioni e addizioni simboliche queste n^2 funzioni, nello stesso modo con cui si combinano con moltiplicazioni e addizioni n^2 quantità allorchè si voglia lo sviluppo del loro determinante ».

Inoltre diremo determinante funzionale delle n funzioni di X:

$$F_1(X)\dots F_n(X),$$

il determinante simbolico:

$$\begin{vmatrix} F_1(X, & F_2(X) & \dots F_n(X) \\ F'_1(X), & F'_2(X) & \dots F'_n(X) \\ \dots & \dots & \dots \\ F_1^{(n-1)}(X), & F_2^{(n-1)}(X) & \dots F_n^{(n-1)}(X) \end{vmatrix} \qquad (\gamma)$$

Ora considerando lo sviluppo di questo determinante, il quale risulta una serie di potenze di X, i cui coefficienti sono determinanti, ottenuti combinando in modi diversi i coefficienti che figurano negli sviluppi di $F_1(X)\dots F_n(X)$ e delle loro derivate di primo $\dots n - 1^{\text{esimo}}$ ordine, è chiaro, in base a precedenti considerazioni, che il determinante simbolico (γ) sarà nullo identicamente, in via assoluta, sempre e soltanto quando siano soddisfatte le condizioni onde sussistano i suaccennati sistemi d'equazioni della forma (α'), vale a dire quando fra $F_1(X)\dots F_n(X)$ passi una relazione della forma (α). Segue da ciò la proposizione seguente analoga a quella che si ha per le funzioni studiate nel calcolo ordinario:

« Condizione necessaria e sufficiente affinchè fra n funzioni:

$$F_1(X)\dots F_n(X),$$

dell'operazione I variabile X non sussista una relazione lineare sodisfatta identicamente e in via assoluta è che il loro determinante funzionale (nel senso, in cui fu testè definito) non sia nullo identicamente e in via assoluta. »

Così si dirà che n integrali d'un'equazione differenziale lineare d'ordine n in una funzione d'un'operazióne I variabile costituiscono un sistema fondamentale di quest'equazione quando essi siano linearmente indipendenti, vale a dire quando sia diverso da 0 il loro determinante funzionale (simbolico).

FINE DEL TOMO III (SERIE III).