ENCYCLOPÉDIE-RORET

AJUSTEUR-MÉCANICIEN

Apprenti, Ouvrier, Contremaître

Par PAUL BLANCARNOUX
Ingénieur des Arts et Métiers

TOME PREMIER

PARIS
ENCYCLOPÉDIE-RORET
L. MULO, LIBRAIRE-ÉDITEUR
12, RUE HAUTEFEUILLE, VI^e

ENCYCLOPÉDIE-RORET.

AJUSTEUR-MÉCANICIEN

Apprenti, Ouvrier, Contremaître

TOME PREMIER

FORMULES ÉLÉMENTAIRES

EN VENTE A LA MÊME LIBRAIRIE

Manuel d'Electricité, contenant théorie, pratique et applications diverses, par G. PETIT, ingénieur civil. 2 vol. ornés de 285 figures dans le texte. 8 fr.

— **Ferblantier-Lampiste**, ou Art de confectionner tous les Ustensiles en fer-blanc, de les souder, de les réparer, etc., suivi de la fabrication des Lampes et des Appareils d'éclairage, par LEBRUN, MALEPEYRE et A. ROMAIN. Nouvelle édition complètement refondue par G. PETIT, ingénieur civil. 1 vol. orné de 178 figures dans le texte. 4 fr.

— **Fondeur**, traitant de la Fonderie du fer, de l'acier, du cuivre, du bronze et du laiton, de la fonte des statues, des cloches, etc, par A. GILLOT et L. LOCKERT, ingénieurs. Nouvelle édition revue, corrigée et augmentée par N. CHRYSSOCHOÏDÈS, ingén des Arts et Manufactures 2 vol. ornés de 253 fig dans le texte. 8 fr.

— **Forges** (Maître de), ou Traité théorique et pratique de l'Art de travailler le fer, la fonte et l'acier. Nouv. édit. par N. CHRYSSOCHOÏDÈS, ing. des Arts et Manufactures. 2 vol. ornés de 312 fig. dans le texte 9 fr.

— **Pompes** (**Fabricant de**) de tous les systèmes, rectilignes, centrifuges, à diaphragme, à vapeur, à incendie, d'épuisement, de mines, de jardin, etc., traitant des principales Machines élévatoires autres que les Pompes, par JANVIER, BISTON et A. ROMAIN 1 vol. orné de figures et accompagné de planches 3 fr. 50

— **Serrurier**, ou Traité complet et simplifié de cet Art, traitant des Fers, des Combustibles, de l'Outillage, du Travail à l'atelier et sur place, de la Serrurerie du carrossage et des divers Travaux de Forge, par PAULIN-DÉSORMEAUX et H. LANDRIN Nouvelle édition entièrement refondue par N. CHRYSSOCHOÏDÈS, ingénieur des Arts et Manufactures 1 volume orné de 106 figures dans le texte et accompagné d'un Atlas de 16 pl. gravées sur acier. 5 fr.

— **Tourneur**, ou Traité théorique et pratique de l'art du Tour, contenant la description des appareils et des procédés les plus usités pour Tourner les Bois et les Métaux, les Pierres, l'Ivoire, la Corne, l'Ecaille, la Nacre, etc Ainsi que les notions de Forge, d'Ajustage et d'Ebénisterie indispensables au Tourneur, par E. DE VALICOURT. 1 vol. grand in 8 contenant 27 planches de figures, 4e édition revue et corrigée. 15 fr.

MANUELS-RORET

NOUVEAU MANUEL COMPLET

DE

L'AJUSTEUR-MÉCANICIEN

APPRENTI, OUVRIER, CONTREMAITRE

CONTENANT

Rudiments mathématiques. Notions de mécanique, Ajustage complet. Procédés et recettes d'ajustage. Organisation, hygiène et sécurité.

PAR

Paul BLANCARNOUX

Ingénieur des Arts et Métiers
Directeur de la Bibliothèque des Arts modernes

Ouvrage orné de 230 figures dans le texte

TOME PREMIER

FORMULES ÉLÉMENTAIRES

PARIS

ENCYCLOPÉDIE-RORET

L. MULO, LIBRAIRE-ÉDITEUR

12, RUE HAUTEFEUILLE, VI[e]

1918

AVIS

Le mérite des ouvrages de l'**Encyclopédie-Roret** leur a valu les honneurs de la traduction, de l'imitation et de la contrefaçon. Pour distinguer ce volume, il porte la sfgnature de l'Éditeur, qui se réserve le droit de le faire traduire dans toutes les langues, et de poursuivre, en vertu des lois, décrets et traités internationanx, toutes contrefaçons et toutes traductions faites au mépris de ses droits.

PRÉFACE

Peu de pages théoriques.
Beaucoup de faits pratiques.

Depuis l'origine du régime économique actuel jusqu'à ce jour, on a compilé un certain nombre d'aide-mémoire réservés aux ingénieurs et autres initiés des sciences appliquées. Or, pourquoi le travailleur manuel en général serait-il plus longtemps exclu de cette utile documentation clairement condensée, aujourd'hui que le bon ouvrier des industries mécaniques et dérivées n'est plus le rugueux compagnon à biceps tatoués, mais bien, la plupart du temps, un intelligent garçon qui a conscience de son état mental primaire et va demander aux cours d'adultes et surtout aux ouvrages spéciaux ce qu'il n'a pu apprendre sur les bancs de l'école élémentaire...

Au reste, ne voit-on pas de toutes parts que la prospérité d'une industrie est directement fonction de l'activité et de l'intelligence avisée, au total de la *capacité professionnelle* de chaque unité, depuis l'apprenti jusqu'au contremaître, en passant par le formidable corps ouvrier proprement dit. — On a souvent répété que celui-là ne connaît pas assez, s'il ne sait ce que ce qu'il enseigne; or, cette vérité est parfaitement applicable au savoir manuel, cette *intelligence des mains* qui ne sera jamais complète qu'éclairée par la pensée, c'est-à-dire par la lecture sérieuse des bons livres techniques permettant d'expliquer le « comment » et le « pourquoi » des objets manipulés, de leur gangue originelle jusqu'à leur fonctionnement, en passant par toutes leurs transformations d'usinage. Malheureusement, la plupart des « manuels » professionnels sont ou trop élémentaires ou trop volumineux, répondant ainsi très mal à leur définition d'être « maniables », constamment à portée de la main: d'où l'utilité de notre innovation réunissant sous un moyen format de prix proportionnellement réduit, toutes les choses essentielles qui se trouvent longuement diluées dans de gros ouvrages ordinairement consciencieux quoique moins clairs, et plus chers.

Mais qu'on veuille bien ne pas se méprendre sur notre intention rénovatrice : nous ne prétendons point à transformer les ouvriers français en autant de demi-ingénieurs (pas plus qu'un garde-malade ne pourrait se dire médecin, après avoir relu son *vade-mecum* pathologique). — Notre désir réel est d'offrir au corps ouvrier de notre pays un peu de ce qui lui manque pour devenir — comme ses redoutables rivaux d'Amérique et d'Allemagne — tout à fait à la hauteur de sa tâche de plus en plus difficile dans les détails sinon dans l'ensemble, d'améliorer encore (mais équitablement) son sort matériel, grâce à ses doubles capacités manuelles et mentales ; — en un mot lui permettre de se bonifier individuellement, tout en aidant de sa nouvelle puissance au succès compromis (mais non irrémédiablement perdu) de l'extension industrielle de notre France envahie par les produits étrangers!

NOUVEAU MANUEL COMPLET

DE

L'AJUSTEUR-MÉCANICIEN

TOME PREMIER

FORMULES ÉLÉMENTAIRES DE L'AJUSTEUR-MÉCANICIEN

PREMIÈRE PARTIE

RUDIMENTS MATHÉMATIQUES

CHAPITRE PREMIER

Arithmétique

SOMMAIRE. — I. Préliminaires. — II Opérations usuelles. — III. Fractions. — IV. Puissances et racines. — V. Système métrique. — VI. Rapports et proportions.

I. PRELIMINAIRES

Utilité de l'arithmétique. — On a l'habitude de considérer l'arithmétique comme une science très vulgaire et même négligeable, indigne d'occuper un esprit sérieux. C'est un tort ; car si les ordinaires « quatre opérations » n'ont rien de transcendantal, il n'en est point de même pour la démonstration des théorèmes et la résolution des problèmes théoriques dont s'illustrèrent des savants, parmi lesquels *Euler*, *Fermat*, *Lamé*, figurent au gradin d'honneur.

Même pour nous en tenir à notre milieu technique, qui oserait trouver trop simples et puériles des additions répétées sur des colonnes à reports, qui comptent des centaines, parfois des milliers de nombres superposés. Et les nombreuses opérations pratiques du commerce, du change, des banques, de l'industrie, des grandes affaires en général, ne sont-elles pas aussi épineuses que délicates ? Consacrons donc aux notions essentielles de l'arithmétique, au moins le minimum d'attention qui lui revient, même dans un modeste petit Manuel technologique.

Définitions. — Rappelons d'abord, pour simple mémoire, que l'arithmétique est la *science des nombres*, et qu'un nombre s'obtient par la mesure d'une grandeur. On a donné le nom de *grandeur* à tout ce qui peut être augmenté ou diminué, comme la longueur d'une échelle, la surface d'un établi, le nombre de travailleurs d'une usine, etc., etc.

Pour mesurer une grandeur, il faut la comparer à une autre de même nature, et connue sous le nom d'*unité*. Réciproquement, l'unité est donc une grandeur à laquelle on peut comparer toutes les autres grandeurs de même espèce.

Cette comparaison d'une grandeur à son unité peut donner lieu à trois espèces de nombres : 1° un *nombre entier*, si la grandeur considérée contient l'unité un nombre exact de fois ; 2° une *fraction*, quand la grandeur est inférieure à l'unité ; 3° un *nombre fractionnaire*, lorsque la grandeur renferme une ou plusieurs unités, plus une partie de cette unité choisie.

On dit qu'un nombre est *abstrait*, quand la nature de son unité n'est point mentionnée, comme dans vingt, cinquante, trois cents. Mais le nombre devient *concret* en cas de détermination de son unité : vingt francs, cent boulons, deux cents limes.

Remarquons enfin que « la suite des nombres est illimitée », car quel que soit le nombre entier ou fractionnaire considéré, on pourra toujours l'augmenter d'une ou de plusieurs unités, et cela indéfiniment.

Numération écrite. — La *numération écrite* a pour objet de représenter graphiquement les nombres, au moyen de caractères ou chiffres, qui sont au nombre de dix (et non pas neuf seulement, comme on l'écrit souvent par erreur) :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
zéro,	un,	deux,	trois,	quatre,	cinq,	six,	sept,	huit,	neuf.

Comme principe fondamental, on doit retenir que : « Tout chiffre placé à la droite d'un autre représente des unités dix fois plus petites que celles de cet autre ». En d'autres termes, si le dernier chiffre à droite représente des unités simples (toujours d'ailleurs), l'avant-dernier marquera des dizaines, le suivant à gauche des centaines, et ainsi de suite pour les mille, les dizaine de mille, etc. C'est-à-dire que dans 31.562, 2 représente les unités, 6 les dizaines, 5 les centaines, 1 les mille, et 3 les dizaines de mille. D'où :

Règle. — Pour représenter un nombre, on dispose à la suite les uns des autres, en allant de gauche à droite, les chiffres qui indiquent combien on a de centaines, de dizaines et d'unités de chaque classe, en remplaçant par des zéros les ordres qui pourraient manquer dans ce nombre.

Numération parlée. — Passons à l'art symétrique d'exprimer les nombres à l'aide de mots spécialement choisis et combinés.

On a commencé par donner des noms aux neuf premiers nombres significatifs, de *un* à *neuf*, le *zéro* n'ayant aucune valeur par lui-même, mais seulement une importance relative, en compagnie d'autres chiffres. Chacun des neuf premiers chiffres représente des unités simples ou de premier ordre.

Le nombre qui suit est appelé *dix*, et les dizaines ou collections de dix unités simples représentent les unités de deuxième ordre. On compte alors par dizaines, comme on l'a fait pour les unités du premier ordre, et l'on dit : une dizaine (ou dix), deux dizaines (ou vingt), trois dizaines (ou trente), etc.

Pour former les intermédiaires entre deux dizaines consécutives, on ajoute à la plus petite les noms de chacun des neuf premiers chiffres, en faisant exception de dix-un à dix-six, qu'on appelle *onze*, *douze*, *treize*, *quatorze*, *quinze*, *seize*.

Une collection de dix dizaines constitue une centaine ou *cent*, unité de troisième ordre. Et l'on compte par centaines, comme on vient de compter par dizaines et par unités, avec tous les intermédiaires voulus.

Puis viennent les *mille* (dix centaines) ou unités de deuxième classe, qui contiennent à leur tour des unités, des dizaines et des centaines (4^e, 5^e et 6^e ordres d'unités). Et l'on opère toujours de la même façon.

Les unités de troisième classe, ou *millions*, sont faites par dix centaines de mille, et elles renferment à leur tour des unités, des dizaines et des centaines (7^e, 8^e et 9^e ordres d'unités). Puis viennent les *billions* ou *milliards*, pour les unités de quatrième classe ; puis les *trillions*, etc., etc.

Règle. — Pour lire un nombre qui n'a pas plus de trois chiffres, on énonce successivement chaque chiffre significatif, en allant de gauche à droite, et en indiquant le nom des unités qu'il représente. — Si le nombre a plus de trois chiffres, on le partage mentalement ou à l'aide d'un petit intervalle de repère en tranches de trois chiffres, de droite à gauche, la dernière pouvant n'avoir qu'un ou deux chiffres ; puis on énonce chaque tranche de gauche à droite, en lui donnant le nom de la classe d'unités qu'elle représente.

C'est ainsi que le nombre 423 s'énoncera : quatre cent vingt-trois. — Et 18.243.525 : dix-huit millions, deux cent quarante-trois mille, cinq cent vingt-cinq.

Remarque. — D'après ce qui précède, pour rendre un nombre dix, cent, mille fois, etc., plus grand qu'un autre, il suffit d'ajouter à sa droite un, deux, trois zéros, etc., ou de reporter d'autant de rangs la virgule qu'il peut posséder. — L'inverse aurait lieu pour rendre un nombre dix, cent, mille fois plus petit.

II. OPERATIONS USUELLES

Les opérations arithmétiques ont pour objet de faire subir certaines modifications aux nombres. Elles sont au nombre de quatre : l'*addition*, la *soustraction*, la *multiplication*, la *division*. La première et la troisième *composent* les nombres, tandis que les deux autres les *décomposent*.

Une opération, quelle qu'elle soit, ne peut être considérée comme parfaitement exacte, même quand on l'a contrôlée par une *preuve* dont nous reparlerons, et qui ne saurait ajouter qu'une probabilité de plus.

Addition. — L'addition de plusieurs nombres représentant des *objets de même nature*, aboutit à un seul nombre conglomérant appelé *somme* ou *total*. Le signe de l'addition est +, et celui de l'égalité s'exprime par =.

Ainsi : $7 + 5 = 12$, se lit : *sept plus cinq égale douze.*

Règle. — Pour additionner des nombres quelconques, on les écrit les uns sous les autres, de telle manière que les unités de même ordre se correspondent sur une même verticale fictive ; on tire un trait un peu au-dessous du dernier nombre, et l'on effectue d'abord la somme des unités. Si ce premier total ne dépasse pas 9, on l'écrit tel quel au-dessous ; s'il est supérieur à 9 on n'inscrit que les unités, pour reporter les dizaines à la colonne suivante.

On additionne semblablement les dizaines, puis les centaines, etc. ; et l'on inscrit tel qu'il vient le total de la dernière colonne à gauche.

Ainsi l'addition des nombres 748, 685, 4921, donnera :

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 211} \\ 748 \\ 685 \\ \underline{4921} \\ 6354 \end{array}$$

Soit : 8 et 5 font 13 et 1, 14, je pose 4 et reporte 1 ; 1 et 4, 5 et 8, 13 et 2, 15, je pose 5 et reporte 1 ; 1 et 7, 8 et 6, 14, et 9, 23, je pose 3 et retiens 2. Enfin 2 et 4 font 6 : soit un total de 6354.

Preuve. — La preuve d'une addition peut se faire de plusieurs façons : 1° en recommençant l'opération inverse, de bas en haut ; 2° en scindant les nombres donnant plusieurs additions dont on réunit les divers totaux en somme finale. Ce dernier procédé est en quelque sorte indispensable lorsqu'on a une longue échelle de nombres. Il y a également grande utilité à inscrire les reports en petit chiffres, au lieu de ne se fier qu'à la mémoire pour les retenir ; on peut ainsi, en cas d'erreur, se dispenser de recommencer une ou plusieurs colonnes.

Soustraction. — Cette opération permet de retrancher un nombre d'un autre, pourvu qu'ils soient encore de même nature. Le résultat est appelé *reste, excès* ou *différence.* La soustraction est donc l'inverse de l'addition ; son signe est —.

Ainsi : 12 — 5 = 7, s'énonce : *douze moins cinq égale sept.*

Règle. — Pour retrancher deux nombres l'un de l'autre, on écrit le plus petit sous le plus grand, en faisant correspondre verticalement les unités de même ordre ; on souligne le dernier, puis on retranche chaque chiffre inférieur de son correspondant supérieur, et l'on écrit sous le trait chaque différence obtenue. Quand un chiffre inférieur est plus grand que son correspondant supérieur, on ajoute à ce dernier dix unités de l'ordre qu'il représente, quitte à augmenter le chiffre inférieur suivant d'une unité de son ordre. La dernière différence s'inscrit telle que, ou pas du tout si elle équivaut à zéro.

Soit à soustraire 3832 de 4526 :

$$\begin{array}{r} 4526 \\ 3832 \\ \hline 694 \end{array}$$

Nous dirons : 2 ôtés de 6 donnent 4 ; 3 ôtés de 12 donnent 9 et je retiens 1 pour la colonne suivante ; 8 et 1 font 9, ôtés de 15 donnent 6 ; et enfin 3 et 1, 4 à ôter de 4 ont 0 pour reste. La différence cherchée doit donc être : 694.

Preuve. — La preuve de la soustraction peut se faire : 1° en ajoutant le reste au plus petit nombre (ce qui doit donner le plus grand) ; 2° en retranchant ce même reste du plus grand nombre (ce qui doit donner le plus petit).

Multiplication. — Dans cette opération on répète un premier nombre appelé *multiplicande* autant de fois qu'il y a d'unités dans un autre nombre dit *multiplicateur*. Le résultat est appelé *produit* et il est donné par les deux *facteurs* sus-nommés.

Tandis que le multiplicande peut être concret, le multiplicateur est toujours abstrait. Le signe de la multiplication est un X à branches écartées : $\times$.

Le produit : $6 \times 7 = 42$, s'énonce : *six que multiplie sept égale quarante-deux*.

On peut remarquer que, somme toute, la multiplication n'est qu'une addition abrégée ; car dans l'exemple ci-dessus, comme dans tous les autres, on aurait pu obtenir moins vite le même résultat en additionnant sept chiffres 6 disposés les uns sous les autres. D'ailleurs, ces petites multiplications de deux nombres d'un seul chiffre sont très facilitées par la connaissance d'une table fameuse qui porte le nom d'un grand philosophe de l'antiquité : Pythagore.

Table de Pythagore. — Pour l'établir, on inscrit sur une ligne horizontale les neuf premiers nombres ; puis on ajoute chaque nombre à lui-même pour former la deuxième ligne ; la troisième est semblablement obtenue en ajoutant la première à la précédente ; et ainsi de suite jusqu'à la neuvième et dernière. D'après ce procédé, on voit que la deuxième ligne contient les produits des neuf premiers nombres par 2 ; la troisième ceux des neuf premiers nombres par 3, etc.

Pratiquement, pour trouver le produit de 7 par 6 par exemple, on n'a qu'à chercher l'intersection de la septième colonne verticale et de la sixième colonne horizontale ; ce qui donne 42. Et le même produit se retrouve à l'intersection de la sixième

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

colonne verticale et de la septième colonne horizontale. Ce qui confirme ce principe que : « le produit de deux facteurs ne change point quand on intervertit l'ordre de ces facteurs ».

Règle générale. — Pour multiplier deux nombres quelconques, on écrit le multiplicateur sous le multiplicande, les unités de même ordre se correspondant. On multiplie ensuite successivement, de droite à gauche, tous les chiffres du multiplicande par chaque chiffre du multiplicateur, en écrivant le premier chiffre de chaque produit partiel sous le chiffre multiplicateur qui vient de servir. La somme des divers produits partiels donne ensuite le produit total cherché.

Soit à multiplier 4236 par 158 :

4236	*Multiplicande*
158	*Multiplicateur*
33888	
21180	*Produits partiels*
4236	
669288	*Produit total*

Nous dirons : 8 fois 6 font 48, je pose 8 et je retiens 4 ; 8 fois 3, 24, et 4, 28, je pose 8 et je retiens 2 ; 8 fois 2, 16, et 2, 18, je pose 8 et je retiens 1 ; 8 fois 4, 32, et 1 de retenue 33. Et la multiplication de 4236 par 5 puis par 1 donnera deux autres produits partiels ; et ces trois produits (autant que de chiffres au multiplicateur) conduiront au produit total, qui doit être exactement : 669288.

Remarque. — D'après ce que nous avons remarqué au sujet de la numération, le produit d'un nombre quelconque par un ou plusieurs chiffres significatifs suivis de zéros s'obtiendrait en opérant de la même manière pour les chiffres réels, en ajoutant au produit autant de zéros, qu'on en aurait au multiplicande ou au multiplicateur.

L'opération serait évidemment toute différente s'il se trouvait un ou plusieurs zéros entre les autres chiffres de l'un des deux facteurs, surtout dans le multiplicateur. C'est ainsi que si nous avions 108 au lieu de 158, le deuxième produit partiel devrait contenir cinq zéros ; mais, dans la pratique, on ne les écrit pas, et l'on se borne à toujours faire correspondre le premier chiffre de chaque produit partiel exactement sous le chiffre multiplicateur qui a servi à le former.

Preuve. — La preuve de la multiplication s'obtient en intervertissant l'ordre des facteurs. Dans l'exemple qui précède, 158 serait multiplié 4236 fois

Il existe d'autres preuves de la multiplication, mais dont les principes sortiraient de notre cadre élémentaire et surtout pratique.

Division. — Dans cette opération, on se propose de trouver combien de fois un nombre appelé *dividende* contient un autre nombre appelé *diviseur*. Le résultat s'appelle *quotient*. Le signe de la division s'exprime par deux points ou un trait.

Ainsi $\frac{45}{9}$ ou $45 : 9 = 5$, se lit : *quarante-cinq divisé par neuf égale cinq.*

De même que la multiplication peut être regardée comme une suite d'additions, semblablement la division pourrait être obtenue par un certain nombre de soustractions. Mais nous aborderons directement le cas général qui seul nous intéresse pratiquement.

Règle générale. — Pour diviser entre eux deux nombres quelconques, on écrit le diviseur à la droite du dividende en les séparant par un trait vertical et en soulignant le nombre de droite par un trait horizontal. On prend ensuite mentalement sur la gauche du dividende un nombre qui contienne le diviseur au moins une fois et moins de dix fois ; on divise alors ce dividende partiel par le diviseur, ce qui donne le premier chiffre du quotient à essayer ; à cet effet on lui fait multiplier le diviseur et l'on retranche ce premier produit du dividende partiel; ce qui doit donner sous ce dernier une différence inférieure à lui-même (dans le cas contraire le quotient serait trop faible). A côté du reste trouvé et à droite, on écrit le chiffre suivant du dividende total, ce qui forme le deuxième dividende partiel, à diviser à son tour par le diviseur complet, pour obtenir le deuxième chiffre du quotient. On multiplie par ce nouveau chiffre le diviseur, et ce nouveau produit est retranché du deuxième dividende partiel obtenu. A la droite du nouveau reste on descend le chiffre suivant du dividende primitif. Et l'on continue ainsi jusqu'à ce qu'on ait épuisé tout le dividende pour obtenir le dernier reste avec le quotient complet.

A titre de réciprccité, supposons qu'il s'agisse de diviser 669288 par 4236 :

669288	4236
24568	158
33888	
0000	

Le reste est nul ici ; ce qui prouve que la multiplication de l'exemple précédent est très probablement exacte (preuve de la multiplication par la division que nous ne pouvions indiquer avant de connaître le paragraphe actuel).

Preuve. — La preuve de la division s'obtient semblablement par le produit du diviseur et du quotient, produit qui, augmenté du reste, doit donner exactement le dividende. On pourrait également intervertir le quotient et le diviseur ; ou encore retrancher d'abord le reste du dividende, pour obtenir le même quotient ; etc.

III. FRACTIONS

On a donné le nom de *fractions* aux parties de toute unité divisée en quantités égales. Si, par exemple, on divise par 6 égalités une unité quelconque et qu'on prenne 1, 2, 3 de ces parties, on obtient autant de fractions qu'on écrira respectivement : $\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}$, Le nombre supérieur s'appelant le *numérateur* et l'autre le *dénominateur*.

Toute fraction se lit en énonçant d'abord le numérateur tel que, puis le dénominateur, que l'on fait suivre de la terminaison *ième*. Soit : *un sixième, deux sixièmes*, etc. (sauf pour un demi, un tiers, un quart).

Quand le numérateur est plus petit que le dénominateur, on a une *fraction ordinaire* ; s'il est plus grand, on obtient une *expression* ou *nombre fractionnaire* ; enfin, l'égalité entre les deux termes indique l'*unité*, puisque le dénominateur montre en combien de parties égales l'unité se trouve divisée et le numérateur combien l'on prend de ces parties.

A titre d'exemple graphique, considérons (fig. 1) le carré A B C D que nous divisons en 16 parties égales, chaque petit carré unitaire équivalant à $\frac{1}{16}$. Une colonne entière contiendra donc $\frac{4}{16}$ ou le quart du total ; cinq petits carrés constitueront les $\frac{5}{16}$ etc.

Nous reviendrons sur les intéressantes opérations que l'on peut faire subir aux fractions et nombre fractionnaires.

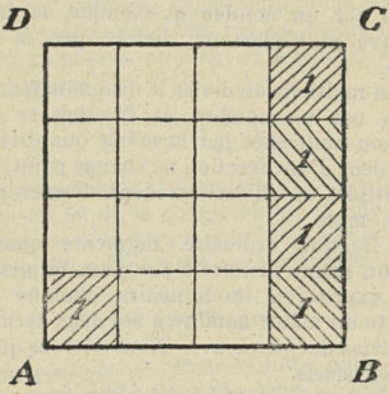

Fig. 1.

Fractions ordinaires. — Les fractions ordinaires possèdent un certain nombre de propriétés que nous nous contenterons d'énoncer, sans entrer dans de trop longs développements théoriques.

Principales propriétés des fractions. — Ces propriétés se démontrent par les théorèmes ci-après :

Toute fraction représente le quotient de son numérateur par son dénominateur.

Quand deux fractions ont le même dénominateur, la plus grande est celle qui a le plus grand numérateur.

Quand deux fractions ont le même numérateur, la plus grande est celle qui a le plus petit dénominateur.

Si l'on multiplie ou divise le numérateur d'une fraction par un nombre quelconque, la fraction se trouve multipliée ou divisée par ce même nombre.

Si l'on multiplie ou divise le dénominateur d'une fraction par un nombre, la fraction se trouve divisée ou multipliée par la même quantité.

La valeur d'une fraction ne change point, quand on multiplie ou divise ses deux termes par un même nombre.

Une fraction ordinaire augmente quand on ajoute un même nombre à ses deux termes.

Une expression fractionnaire diminue quand on ajoute un même nombre à ses deux termes.

Réduction des fractions. — Nous citerons quelques exemples usuels.

Réduire une fraction à sa plus simple expression. Cette opération est utile en ce sens qu'on se rend mieux compte de sa valeur propre.

Par exemple : $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$. Dans ces deux cas, le tiers et le quart sont plus nets ; et l'on ne fait que diviser les deux termes par un même nombre (application d'un des théorèmes ci-dessus énoncés).

Réduire deux fractions au même dénominateur (généralement, pour pouvoir mieux les comparer au seul aspect de leurs nouveaux numérateurs, ce dont nous avons également parlé).

Quelle est la plus grande des deux fractions $\frac{3}{5}$

et $\frac{7}{12}$? Le doute est possible. Tandis que si, par application permise, nous multiplions les deux termes des deux fractions par un même nombre, qui sera 12 pour la première et 5 pour la seconde, nous obtenons :

$$\frac{3}{5} = \frac{36}{60}, \text{ et } \frac{7}{12} = \frac{35}{60}.$$

Or, puisque dans la première on obtient 36 parties sur les 60 de la comparaison, et que dans la deuxième on n'en trouve que 35, le doute ne peut subsister. D'où l'inégalité avec son signe :

$$\frac{3}{5} > \frac{7}{12}, \text{ ou } \frac{7}{12} < \frac{3}{5}$$

Règle générale. — Pour réduire plus de deux fractions au même dénominateur, on doit multiplier les deux termes de chacune d'elles par le produit des dénominateurs de toutes les autres fractions.

Opérations sur les fractions. — D'après ce qui précède, il nous suffira d'énoncer les règles suivantes :

Pour additionner des fractions, on les réduit d'abord au même dénominateur si elles n'y sont déjà, puis on additionne les numérateurs dont la somme soulignée reçoit le dénominateur commun.

On opère semblablement pour la soustraction, en retranchant les numérateurs au lieu de les ajouter.

Pour multiplier deux fractions, on effectue le produit des numérateurs et celui des dénominateurs.

S'il s'agit de multiplier une fraction par un nombre entier, on multiplie le numérateur (ou mieux on divise, si possible, le dénominateur) par ce nombre.

Pour multiplier un nombre entier par une fraction, on multiplie le nombre entier par le numérateur, en donnant au produit le dénominateur de la fraction.

Pour diviser une fraction par une autre, on multiplie la fraction dividende par la fraction diviseur renversée.

Pour diviser une fraction par un nombre entier, il faut multiplier le dénominateur (ou mieux, si possible, diviser le numérateur) par ce nombre.

Enfin, pour diviser un nombre entier par une fraction, on n'a qu'à multiplier ce nombre par la fraction renversée.

Fractions décimales. — Dans les fractions dites décimales, l'unité se trouve divisée en 10, 100, 1000, etc., parties égales ; comme dans : $\frac{2}{10}$, $\frac{32}{100}$, $\frac{45}{1000}$, où les dénominateurs sont des *puissances* de 10 (voir ce mot plus loin).

Les nombres décimaux s'écrivent ainsi : on indique d'abord la partie entière (qui peut être 0) suivie d'une virgule, puis le numérateur de la partie décimale, en observant bien que le dernier chiffre occupe le rang indiqué par le nombre des zéros du dénominateur. C'est ainsi que les exemples ci-dessus se traduiraient : 0,2 ; 0,32 ; 0,045.

Pour la lecture d'un nombre décimal, on lit d'abord la partie entière, puis la partie décimale, en la faisant suivre du nom de l'unité décimale qu'exprime le dernier chiffre. Ainsi, 43,352 se lira : 43 unités 352 millièmes.

Opérations sur les nombres décimaux. — Pour l'addition ou la soustraction, on écrit les nombres les uns sous les autres, les unités de même ordre se correspondant (virgules sur une même verticale), puis on additionne ou soustrait comme pour des nombres entiers, en disposant la virgule à droite des unités.

Pour multiplier deux nombres décimaux, on effectue leur produit comme s'ils étaient entiers, puis on sépare par une virgule à la droite du résultat d'unités autant de chiffres décimaux qu'il s'en trouve dans les deux facteurs.

On opère semblablement, toutes considérations observées, dans la division de deux nombres décimaux, ou d'un nombre décimal par un nombre entier, etc.

Fractions périodiques. — On appelle ainsi des fractions décimales dans lesquelles les mêmes chiffres se reproduisent sans fin et dans un ordre invariable, la série des chiffres reproduits prenant le nom de *période*.

Une fraction périodique est dite *simple*, quand le chiffre des dixièmes commence la première période, comme dans 0,28 28 28... Elle est mixte, quand la période ne commence pas à la virgule, mais seulement après une partie non périodique dite *irrégulière* ; par exemple : 0,35 452 452 452...

Ces sortes de fractions ne donnant lieu qu'à des exercices généralement dépourvus d'intérêt pratique, nous passerons au sujet suivant.

IV. PUISSANCES ET RACINES

Carrés. — On appelle *carré* d'un nombre le produit de deux facteurs égaux à ce nombre : le nombre 25 est le carré de 5.

Théorèmes. — I. Le carré de la somme de deux nombres comprend : 1° le carré du premier, 2° le double produit du premier par le second, 3° le carré du second.

Cela nous permet d'écrire en toute sécurité que le carré de 5 + 3 sera 64 :

$$(5+3)^2 = (5+3)(5+3) = 5^2 + 2 \times 5 \times 3 + 3^2 = 64$$

Règle que l'on peut vérifier en prenant des nombres arbitraires.

II. La différence des carrés de deux nombres entiers consécutifs est égale à deux fois le plus petit nombre plus 1.

Ainsi :

$$(4+1)^2 - 4 = 2 \times 4 + 1 = 9.$$

Racines carrées. — La *racine carrée* d'un nombre est un autre nombre qui, élevé au carré, reproduit le premier. Pour extraire, à une unité près, la racine carrée d'un nombre entier, il faut chercher la racine du plus grand nombre entier carré parfait, égal ou inférieur à ce nombre. Pour procéder méthodiquement, nous distinguerons trois cas.

1er *cas. Le nombre est plus petit que* 100.— Soit à extraire la racine carrée de 67. Il faut d'abord retenir les carrés des dix premiers nombres :

Nombres....	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Carrés......	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Nous trouvons immédiatement comme carré parfait inférieur, 64, et la racine cherchée est 8, à une unité près.

2e *cas. Le nombre est compris entre* 100 *et* 10.000. — Soit 7452 ce nombre. Sa racine étant comprise entre 10 et 100, aura des dizaines et des unités. Or si nous représentons en abrégé par d les dizaines et par u les unités, le théorème I nous permet d'écrire que :

$$7452 = (d + u)^2 = d^2 + 2du + u^2,$$

plus un reste probable. Disposons donc notre opération ainsi :

$$\begin{array}{r|l}
7452 & 86 \\ \cline{2-2}
\underline{64} & 166 \ldots 2d + u \\
1052 & \quad 6 \ldots \qquad u \\ \cline{2-2}
\underline{996} & 996 = 2du + u^2 \\
56 &
\end{array}$$

Le carré d^2 des dizaines ne peut donner que des centaines qui seront contenues dans les 74 centaines du nombre ; nous trouvons tout de suite la racine 8 dont le carré 64 retranché de 74 donne le reste 1052 qui doit contenir à son tour le double produit des dizaines par les unités, soit $2\ d\ u + {}^2u$

ou $u\ (2d + u)$ [1], plus le reste probable. Dès lors, en divisant 1052 par $2\ d$ ou 16, on devra trouver le chiffre u des unités (ou un chiffre un peu trop fort, ce qu'on ne peut voir qu'en effectuant l'opération partielle). Mais le double produit des dizaines par les unités donne des dizaines, et en divisant les 105 dizaines du reste par 8×2 ou 16, on trouve le chiffre des unités qui est 6. Comme confirmation, 86 est bien la racine cherchée à une unité près par défaut, car 87 donnerait un nombre supérieur à 7452.

3e *cas. Le nombre est supérieur à* 10.000. — En considérant que le nombre 152.348, par exemple, est plus grand que 100, sa racine contiendra comme le précédent des dizaines et des unités. On retombe alors dans un cas analogue mais un peu plus long. Aussi donnerons-nous la règle générale :

Règle générale. — Pour extraire, à une unité près, la racine carrée d'un nombre entier, il faut :

1° Partager ce nombre en tranches de deux chiffres, de droite à gauche, la dernière tranche pouvant n'avoir qu'un seul chiffre ;

2° Inscrire à la racine le plus fort chiffre dont le carré puisse être contenu dans la première tranche de gauche ;

3° Descendre à la droite du reste, la tranche suivante dont on sépare alors un chiffre à droite ; diviser la partie de gauche par le double du nombre inscrit à la racine ;

---

[1] On met fréquemment ainsi un chiffre ou une lettre *u* en *facteur commun* devant multiplier tous les termes d'une parenthèse.

4° Essayer le deuxième chiffre de la racine en multipliant le nouveau nombre de cette dernière par ce même deuxième chiffre ; le produit doit pouvoir se retrancher du dividende partiel considéré;

5° Continuer de même jusqu'à ce qu'on ait à la racine tous les chiffres voulus ;

6° Contrôler le résultat par la preuve de la racine dont le carré doit pouvoir se retrancher du nombre considéré, alors que la racine plus forte d'une unité donnerait un carré surpassant le même nombre primitif.

Cubes. — On appelle *cube* d'un nombre le produit de trois facteurs égaux à ce nombre : le nombre 125 est le cube de 5.

Théorèmes. — I. Le cube de la somme de deux nombres comporte : 1° le cube du premier ; 2° trois fois le produit du carré du premier par le second ; 3° trois fois le produit du premier par le carré du second ; 4° le cube du second. Donc :

$$(3 + 5)^2 = 3^3 + 3 \times 3^2 \times 5 + 3 \times 3 \times 5^2 + 5^3$$

II. La différence des cubes de deux nombres entiers consécutifs égale trois fois le carré du plus petit nombre, plus trois fois ce nombre, plus 1. Ainsi :

$$(4 + 1)^3 - 4^3 = 3 \times 4^2 + 3 \times 4 + 1.$$

Racines cubiques. — La *racine cubique* d'un nombre est un autre nombre qui, élevé au cube, reproduit le premier.

Pour extraire la racine cubique, à une unité près, d'un nombre entier, on procéderait semblablement aux cas de la racine carrée, mais en faisant trois distinctions pour les nombres compris entre 1 et 1.000, entre 1.000 et 1.000.000, et au-dessus du million. De plus, on observerait que la formule générique des dizaines et des unités devient ici pour un nombre N :

$$N = d^3 + 3d^2u + 3du^2 + u^3$$

Nous nous bornerons donc à citer la règle suivante, que nos lecteurs pourront s'exercer à appliquer, s'ils en ont l'occasion :

Règle générale. — Pour extraire, à une unité près. la racine cubique d'un nombre entier, il faut :

1° Partager ce nombre en tranches de trois chiffres, de droite à gauche, la dernière tranche de gauche pouvant n'avoir qu'un ou deux chiffres ;

2° Inscrire à la racine le chiffre le plus fort dont le cube puisse être retranché de la tranche de gauche ;

3° Descendre, à la droite du reste, la tranche suivante où l'on sépare deux chiffres à droite, la partie de gauche formant alors un dividende dont le diviseur égale trois fois le carré du nombre inscrit à la racine ;

4° Essayer le chiffre du quotient, soit en formant le cube du nombre de la racine pour soustraire ce cube du nombre donné, soit en soustrayant du nombre formé par le dividende et les chiffres distincts, la somme des trois autres parties du cube total ;

5° Continuer de même, jusqu'à ce qu'on ait à la racine tous les chiffres cherchés ;

6° Faire la preuve finale.

V. SYSTÈME MÉTRIQUE

On a donné le nom de *système métrique* à l'ensemble des mesures dont la base est le *mètre*. Ce système est à la fois légal et décimal, parce que seul il a force de loi en France et dans beaucoup d'autres pays, et parce que les multiples et sous-multiples de ses diverses unités varient comme puissances de 10. Enfin on sait que l'Assemblée Constituante, en 1790, décida l'uniformité des poids et mesures dans tout le royaume de Louis XVI.

Afin d'obtenir une base invariable, on la prit dans les dimensions mêmes du globe terrestre. De nombreux savants, parmi lesquels Delambre et Méchain, mesurèrent le méridien de Dunkerque à Barcelone, et des calculs complémentaires permirent de trouver le quart de ce méridien, du pôle à l'équateur, soit 5.130.740 toises, que l'on divisa par 10.000.000 pour avoir le mètre classique dont l'étalon est déposé au Conservatoire des Arts et Métiers.

Les mesures usuelles se rapportant en général à six espèces de quantités, on adopta comme unités principales dudit système : 1° le *mètre* pour les *longueurs* ; 2° l'*are* pour les *surfaces* ; 3° le *stère* ou *mètre cube* pour les *volumes* ; 4° le *litre* pour les *capacités* ; 5° le *gramme* pour les *poids* ; 6° le *franc* pour les *monnaies*.

Longueurs et surfaces. — Dans la mesure des longueurs, on considère l'étendue sous une seule dimension.

Le mètre (*m.*) a des multiples et des sous-multiples qui sont :

Mu'tiples

Décamètre ou	10 mètres
Hectomètre ou	100 —
Kilomètre ou	1.000 —
Myriamètre ou.	10.000 —

Sous-Multiples

Décimètre	1/10^e de mètre
Centimètre.	1/100^e —
Millimètre	1/1.000^e —

Dans les surfaces, le mètre carré (*mq.*) mesure l'étendue sous deux dimensions, il a exactement un mètre de côté.

Les multiples et sous-multiples, au lieu d'aller de 10 en 10, vont ici de 100 en 100 :

Multiples

Décamètre carré ou . .	100 mètres carrés
Hectomètre carré ou. .	10.000 — —
Kilomètre carré ou . .	1.000.000 — —
Myriamètre carré. . ,	100.000.000 — —

Sous-Multiples

Décimètre carré	1/100^e de mètre
Centimètre carré	1/10.000^e —
Millimètre carré	1/1.000.000^e —

Nous avons dit que les multiples et les sous-multiples du mètre carré sont cent fois plus grands ou cent fois plus petits que les autres. On peut s'en rendre compte en considérant notre croquis (fig. 2), avec lequel nous allons démontrer qu'un décimètre carré, par exemple, vaut 100 centimètres carrés.

Soit donc un carré A B C D, dont nous divisons la base A B et la hauteur A D en dix parties égales. Si, par les points 1-1, 2-2, 3-3, etc., nous menons des droites dès lors parallèles à la base (voir ces mots dans la Géométrie), nous obtenons d'abord

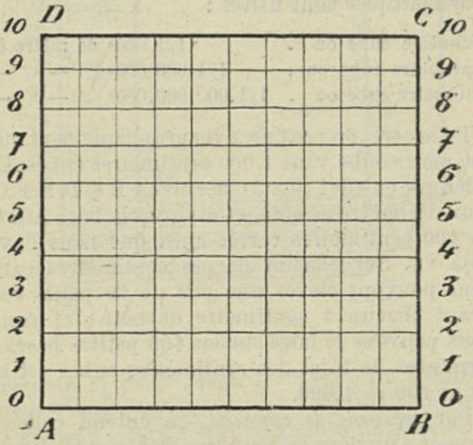

Fig. 2.

10 rectangles égaux entre eux et ayant tous 1 décimètre de longueur et 1 centimètre de hauteur. En menant pareillement 10 parallèles à A D, nous obtenons 10 autres rectangles de 1 décimètre de hauteur avec 1 centimètre de base. Et nous voyons alors que notre décimètre carré se trouve bien composé de $10 \times 10 = 100$ centimètres carrés (puisqu'ils ont tous 1 centimètre de côté). Donc...

Volumes et capacités. — Avec les *mesures de volumes*, on considère l'étendue sous trois dimensions.

Les multiples et les sous-multiples du mètre cube (*mc.*) unitaire vont de 1.000 en 1.000. Seuls les sous-multiples sont usités :

Décimètre cube ou .	1/1.000e	de mètre cube
Centimètre cube ou .	1/1.000.000e	— —
Millimètre cube ou .	1/1.000.000.000e	— —

Ici encore, on peut prouver graphiquement qu'un décimètre cube vaut 1.000 centimètres cubes. Considérons, en effet (fig. 3), le cube A B C D E F G H d'un décimètre de côté, et divisons la base A B C D en 100 centimètres carrés ainsi que nous l'avons déjà vu. Sur chacun de ces centimètres carrés, nous pouvons élever une pile de 10 petits cubes ayant chacun 1 centimètre de côté ; et comme nous pouvons le faire sur les 100 petites bases déterminées, le total des centimètres cubes est bien $10 \times 100 = 1.000$.

Par *mesures de capacité*, on entend celles qui servent à évaluer les matières sèches et les liquides Le litre contient un décimètre cube.

Multiples principaux

Décalitre ou	10 litres
Hectolitre ou.	100 —

Sous-Multiples

Décilitre.	1/10e de litres
Centilitre	1/100e —

Poids et monnaies. — Le gramme unitaire re-

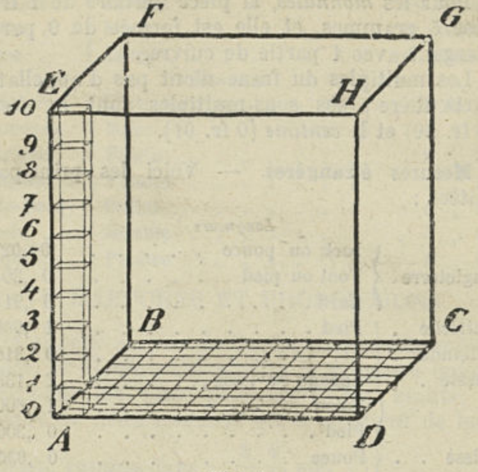

Fig. 3.

présente le poids, dans le vide, d'un centimètre cube d'eau distillée prise à une température de 4° environ, alors à son maximum de densité.

Multiples principaux

Hectogramme	100	grammes
Kilogramme ou	1 000	—
Quintal métrique ou	100	kilogrammes
Tonne ou	1:000	—

Sous-Multiples

Décigramme ou	1/10e	de gramme
Centigramme ou	1/000e	—
Milligramme ou	1/1.000e	—

2.

Pour les *monnaies*, la pièce unitaire de 1 franc pèse 5 grammes, et elle est formée de 9 parties d'argent avec 1 partie de cuivre.

Les multiples du franc n'ont pas d'appellation particulière ; ses sous-multiples sont le *décime* (0 fr. 10) et le *centime* (0 fr. 01).

Mesures étrangères. — Voici les principales usitées :

Longueurs

Angleterre.	Inch ou pouce	0m,02540
	Foot ou pied	0 ,30479
	Yard	0 ,91438
Autriche .	Pied	1 ,0000
Hollande. .	El.	0 ,3161
Russie . .	Sagène ou toise	2 ,13356
Suisse . .	Toise.	1 ,800
	Pied	0 ,300
	Pouce	0 ,030
	Ligne	0 ,003
	Trait.	0 ,0003
Turquie. .	Archinne	0 ,75774

Itinéraires

Angleterre.	Mille	1.609m,3149
Autriche .	Mille	7.586 ,000
Hollande .	Mijl.	1.000 ,000
Russie . .	Verst ou 500 sagènes . .	1.066 ,780
Suisse . .	Lieue ou 16000 pieds. . .	4.800 ,000

Poids

Allemagne.	Marc	0kg,233855
Angleterre.	Troy pound.	0 ,373242
Autriche .	Livre	0 ,560012
Espagne. .	Livre	0 ,460090

Hollande . .	Livre	1kg,000000
Russie . .	Livre	0 ,409512
Suisse . .	Livre	0 ,500000

Monnaies

Angleterre.	Livre sterling	25 fr. 20
Allemagne.	Marc	1 , 25
Autriche .	Florin.	2 , 55
Espagne. .	Piastre	5 , 43
Etats-Unis.	Dollar.	5 , 12
Russie . .	Rouble	4 , 00
Turquie. .	Piastre	2 , 00

VI. RAPPORTS ET PROPORTIONS

On appelle *rapport* de deux grandeurs de même espèce, le nombre qui mesure la première quand la seconde est prise pour unité. En réalité, le rapport de deux nombres est le quotient de leur division, comme dans : $\frac{5}{12}$, $\frac{4}{7}$, etc.

La *proportion* marque l'égalité de deux rapports: $\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$.

Théorème fondamental. — Dans toute proportion, le produit des extrêmes égale celui des moyens.

Ainsi : $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ réduits au même dénominateur donnent :

$$\frac{2 \times 9 = 18}{27} = \frac{3 \times 6 = 18}{27}$$

Où l'on voit que chaque terme $\frac{18}{27}$ est identique à l'autre, avec le même numérateur 18 sur le dénominateur commun 27.

D'après cela, il est très facile de trouver une quatrième proportionnelle, quand on connaît les trois autres.

Règles de trois. — La règle dite « de trois » est une opération qui permet de trouver le quatrième terme d'une proportion dont on connaît les trois autres. Prenons un exemple d'atelier :

Un ouvrier cisaillant 5 boulons en 2 heures, combien en cisaillera-t-il en une journée de 8 heures.

Les proportions nous donneraient rapidement, par l'algèbre :

$$\frac{5}{2} = \frac{x}{8} \;;\; x = \frac{5 \times 8}{2} = 20$$

Mais la méthode dite par réduction à l'unité fait mieux saisir le raisonnement, et nous la préférons quoique moins rapide. Donc :

Si l'ouvrier cisaille en 2 heures. . . .	5 boulons
En 1 heure il en fera deux fois mois . .	$\frac{5}{2}$ —
Et en 8 heures, huit fois plus	$\frac{5 \times 8}{2} = 20$

Voilà pour la *règle directe*. Mais on peut se trouver en présence d'une *règle inverse*. Par exemple :

Il faut 8 jours à 3 ajusteurs pour monter un grand palier complet ; combien faudra-t-il d'ajusteurs supposés de même valeur pour terminer le même palier en 5 jours ?

Nous dirons, en raisonnant logiquement :

Pour faire le palier en 8 jours, il faut . . . . 3 ajusteurs

Pour le faire en 1 jour, il en faudra huit fois plus. . . . . 3×8

Et pour le faire en 5 jours, cinq fois moins . . . . $\frac{3 \times 8}{5} = 4$ ajusteurs $\frac{4}{5}$,

soit 5 ouvriers.

Règles d'intérêt et d'escompte. — La règle d'intérêt permet de trouver le bénéfice que rapporte une somme placée pendant un certain temps à un taux fixe. Nous ne mentionnerons ici que l'intérêt simple.

Dans toute règle d'intérêt on doit considérer : 1° le capital ou somme placée ; 2° l'intérêt qui en résulte ; 3° le taux ou intérêt annuel par 100 francs de capital ; 4° le temps ou durée du placement.

Tous les problèmes d'intérêt pivotent autour de ce thème : étant données trois des valeurs ci-dessus, déterminer la quatrième. On peut donc se trouver en présence de quatre exercices différents ; mais tous se ramènent à une règle de trois composée. Un exemple suffira comme application :

Trouver l'intérêt produit par un capital de 15.000 francs placés à 4 0/0 pendant 5 ans ? — Nous dirons :

100 fr. en un an produisent un intérêt de . . . . 4 fr.

1 fr. en un an donnera 100 fois moins. . . . . $\frac{4}{100}$

15.000 fr. en un an produiront 15.000 fois plus . . . . . $\frac{4 \times 15.000}{100}$

15.000 fr. en cinq ans donneront cinq fois plus. . . . . . $\frac{4 \times 15.000 \times 5}{100} = 3.000$ fr.

Il va sans dire que l'on calculerait semblablement le capital, le taux et le temps, en résumé une quelconque des quatre valeurs fondamentales, connaissant les trois autres.

Ajoutons, d'autre part, qu'on appelle *escompte* une retenue effectuée sur une somme payée avant son échéance, c'est-à-dire avant l'époque où doit être fait le payement convenu.

Ces sortes d'opérations visant ordinairement les divers effets de commerce, qu'il nous suffise de les signaler à titre simplement documentaire.

Règles de mélange et d'alliage. — Les problèmes de mélange ont généralement pour but de déterminer : 1° le prix d'un mélange, quand on connaît les quantités et les prix des substances qui le composent ; 2° dans quelles proportions on doit mélanger des substances que l'on veut revendre à un prix moyen fixé d'avance.

Citons un exemple, avec la marche habituelle :

Un fraudeur a mélangé 70 litres de vin à 0 fr. 60 avec 80 litres à 0 fr. 40 et 50 litres d'eau. A combien lui reviendra le litre de ce mélange qu'il se propose de revendre à 0 fr. 75 ?

70 litres	à 0 fr. 60 valent.	0 fr. 60 × 70 =	42 fr.
80 —	à 0 fr. 40 valent.	0 fr. 40 × 80 =	32 fr.
50 —	à 0 fr. 00 valent.	0 fr. 00 + 50 =	0 fr.
Les 200 litres lui reviennent donc à	. . . . . .		74 fr.

Et le litre à : $\frac{74}{200} = 0$ fr. 37.

Le bénéfice de ce fabricant, 38 centimes par litre, serait considéré comme beaucoup trop modeste, à notre époque ! Nous n'avons fait qu'une simple supposition.

De son côté, la règle d'alliage n'est qu'une règle de mélange appliquée aux métaux. On appelle *titre* d'un alliage, le rapport du poids du métal le plus précieux (généralement or ou argent) au poids total. Exemple :

On a fondu ensemble deux lingots d'or ; le premier, au titre de 0,900 pèse 1.500 grammes, et le deuxième, dont le titre atteint 0,950, pèse 1.200 grammes. Quel est le titre de cet alliage ?

Le poids de l'or du 1er lingot
est . . . . $1500 \times 0{,}900 = 1350$ gr.
Le poids de l'or du 2e lingot
est . . . . $1200 \times 0{,}950 = 1140$ gr.
Le lingot final contient donc . . . . . 2490 gr. d'or

Et comme son poids total est devenu $1500 + 1200 = 2700$ grammes, son titre est donc :

$$\frac{2490}{2700} = 0{,}922.$$

Eables usuelles. — Nous terminerons ce premier précis par les tables toutes faites des 100 premiers nombres entiers avec leurs racines carrées et racines cubiques.

Nombres	Racines carrées	Racines cubiques	Nombres	Racines carrées	Racines cubiques
1	1,000	1,000	6	2,449	1,817
2	1,414	1,260	7	2,646	1,913
3	1,732	1,442	8	2,828	2,000
4	2,000	1,587	9	3,000	2,080
5	2,236	1,710	10	3,162	2,154

Nombres	Racines carrées	Racines cubiques	Nombres	Racines carrées	Racines cubiques
11	3,316	2,224	51	7,141	3,708
12	3,464	2,289	52	7,211	3,733
13	3,605	2,351	53	7,280	3,756
14	3,741	2,410	54	7,348	3,780
15	3,873	2,466	55	7,416	3,803
16	4,000	2,520	56	7,483	3,826
17	4,123	2,571	57	7,550	3,848
18	4,242	2,621	58	7,616	3,871
19	4,359	2,668	59	7,681	3,893
20	4,472	2,714	60	7,746	3,915
21	4,583	2,759	61	7,810	3,936
22	4,690	2,802	62	7,874	3,957
23	4,796	2,844	63	7,937	3,979
24	4,899	2,884	64	8,000	4,000
25	5,000	2,924	65	8,062	4,020
26	5,099	2,962	66	8,124	4,041
27	5,196	3,000	67	8,185	4,061
28	5,292	3,037	68	8,246	4,081
29	5,385	3,072	69	8,306	4,101
30	5,477	3,107	70	8,366	4,121
31	5,568	3,141	71	8,426	4,141
32	5,657	3,175	72	8,485	4,160
33	5,745	3,208	73	8,544	4,179
34	5,831	3,240	74	8,602	4,198
35	5,916	3,271	75	8,660	4,217
36	6,000	3,302	76	8,718	4,236
37	6,083	3,332	77	8,775	4,254
38	6,164	3,362	78	8,832	4,272
39	6,244	3,391	79	8,888	4,291
40	6,325	3,420	80	8,944	4,309
41	6,403	3,448	81	9,000	4,326
42	6,481	3,476	82	9,055	4,344
43	6,557	3,503	83	9,110	4,362
44	6,633	3,530	84	9,165	4,379
45	6,708	3,557	85	9,220	4,397
46	6,782	3,583	86	9,274	4,414
47	6,856	3,609	87	9,327	4,431
48	6,928	3,634	88	9,381	4,448
49	7,000	3,659	89	9,434	4,464
50	7,071	3,684	90	9,487	4,481

Nombres	Racines carrées	Racines cubiques	Nombres	Racines carrées	Racines cubiques
91	9,539	4,498	96	9,798	4,578
92	9,592	4,514	97	9,849	4,594
93	9,644	4,530	98	9,899	4,610
94	9,695	4,546	99	9,950	4,626
95	9,747	4,562	100	10,000	4,641

CHAPITRE II

Algèbre

SOMMAIRE. — I. Préliminaires. — II. Opérations. — III. Equations. — IV. Applications.

I. PRÉLIMINAIRES

Utilité de l'algèbre. — L'algèbre, véritable arithmétique abrégée, est la *science générique des nombres et surtout des lettres*. Quoique d'un usage commercial moins courant que la précédente, elle n'en offre pas moins de sérieux avantages dans la plupart des calculs rapides auxquels on a souvent recours dans les opérations techniques mettant à contribution la géométrie et plus encore la mécanique, ainsi qu'on pourra le constater par la suite.

Pour faciliter les recherches, on a l'habitude algébrique de désigner les quantités connues par les premières minuscules de l'alphabet, a, b, c, etc., et les quantités inconnues par les dernières, x, y, z, etc. Les chiffres arabes dont nous avons parlé en arithmétique, sont alors utilisés sous forme soit de *coefficients*, soit d'*exposants*.

Coefficients. — C'est ainsi que dans l'expression :

$$4a + 3b$$

4 est le coefficient de a et 3 le coefficient de b ; ce qui peut se décomposer en :

$$4a + 3b = a + a + a + a + b + b + b\,;$$

montrant ainsi que chaque lettre doit être *ajoutée* autant de fois à elle-même que son coefficient comporte d'unités.

Exposants. — Si nous avions, par ailleurs :

$$c^3 \text{ ou } c.c.c \text{ ou } ccc\,;$$

cela signifierait, avec l'exposant 3, que la lettre c ou son équivalent numérique, doit être élevée à la troisième puissance, c'est-à-dire *multipliée* trois fois par elle-même.

Nous profitons de ce passage pour prévenir dès à présent qu'en algèbre et sciences similaires on a l'habitude de simplifier les signes de la multiplication réduits soit à un simple point, soit plus souvent à rien du tout. Ainsi :

$$a^2 = a \times a = a.a = aa\,;$$
$$b \times h = bh\,;\text{ etc.}$$

Expressions algébriques. — On a donné le nom d'*expression algébrique* à toute réunion de chiffres, lettres et signes pouvant ou non donner lieu à un calcul d'application, comme dans :

$$\frac{a^3}{2} + 4bc - 5d \, ;$$

et l'on voit là trois *termes* dont les deux premiers précédés du signe + (sous-entendu devant $\frac{a^3}{2}$) sont dits positifs, et le dernier suivant le signe — négatif. La même expression est appelée *trinôme*.

Si elle n'avait que deux termes, elle serait *binôme*, comme dans :

$$4ac + 3b^2$$

Et *monôme* avec un seul terme :

$$3a^2b.$$

Enfin, le *polynôme* compte un nombre quelconque de termes au-dessus de trois (ou même à partir de trois, *poly* signifiant plusieurs) ; telle est l'expression :

$$\frac{a^3}{2} + 4bc - 5d + 4ac + 3b^2 + 3a^2b.$$

II. OPÉRATIONS

Les opérations algébriques correspondent aux quatre opérations arithmétiques.

Addition. — Comme en arithmétique on ne peut, en algèbre, additionner que des termes de même nature. C'est ainsi que deux chevaux, plus un cheval, plus un âne avec un autre âne, formeront un total de trois chevaux et deux ânes ; semblablement, deux boulons et dix autres boulons, plus un dôme de chaudière et douze écrous donneront (en abrégeant les boulons par b, le dôme par d et les écrous par e) :

$$2b + 10b + 1d + 12e = 12b + d + 12e.$$

Comme exemple plus général, proposons-nous d'additionner les polynômes :

$$12b^2 + d^3 + 12e \text{ et } 5b^2 + d^2 - 4e.$$

Nous disposerons en regard les termes de même nature, et nous obtiendrons :

$$\begin{array}{ll} & 12b^2 + d^3 + 12e \\ & 5b^2 + d^2 - 4e \\ \hline \text{Somme :} & 17b^2 + d^3 + d^2 + 8e. \end{array}$$

D'où la règle :

Pour additionner des polynômes, on les écrit comme pour une addition ordinaire en ayant bien soin de superposer les termes semblables, c'est-à-dire affectés d'un même exposant. Puis on collationne ces mêmes termes en effectuant chaque addition qui, parfois, peut être une véritable soustraction partielle, quand l'un de ces termes de même nature est précédé du signe —. On donne à chaque collation le signe du plus grand terme, et la réunion de tous ces petits résultats donne la somme cherchée.

Soustraction. — On ramène ce cas au précédent, après avoir changé tous les signes du polynôme à soustraire, qu'on additionne ensuite avec l'autre.

C'est ainsi que l'exemple ci-dessus donnerait en soustraction :

$$
\begin{array}{ll}
 & 12b^2 + d^3 + 12e \\
 & -5b^2 - d^2 + 4e \\
\hline
\text{Reste . .} & 7b^2 + d^3 - d^2 + 16e.
\end{array}
$$

Multiplication. — Cette opération est basée sur la règle des signes suivante :

+	multiplié par	+	produit	+
+	»	—	»	—
—	»	+	»	—
—	»	—	»	+

En d'autres termes, quand les deux facteurs sont de même signe, leur produit est positif, et celui-ci devient négatif quand les deux facteurs sont de signes contraires.

Comme exemple, rappelons la classique multiplication $(a + b)(a - b)$; et opérons :

$$
\begin{array}{l}
a + b \\
a - b \\
\hline
\left.\begin{array}{r} aa + ab = \quad a^2 + ab \\ -ab - bb = -ab - b^2 \end{array}\right\} + ab - ab = 0 \\
\text{Produit . . .} \quad a^2 - b^2
\end{array}
$$

Division. — Pour diviser deux monômes entre eux, on divise les coefficients l'un par l'autre, puis on retranche les exposants de mêmes lettres.

Ainsi :

$$12\,a^2b^3 : 4\,ab = 3\,ab^2$$

La division des polynômes est forcément plus longue, mais guère plus difficile. On doit suivre la règle suivante :

Ecrire les termes du dividende et ceux du diviseur de telle manière que les exposants des mêmes lettres aillent en décroissant de gauche à droite ;

Diviser le premier terme du dividende par le premier du diviseur ;

Multiplier tous les termes du diviseur par le quotient obtenu ;

Soustraire du dividende le produit de la multiplication du diviseur par ledit quotient ;

Diviser le premier terme du reste obtenu par le premier terme du diviseur ;

Multiplier tous les termes du diviseur par le quotient obtenu dans la précédente division partielle ;

Soustraire le dernier produit du reste de la dernière soustraction ;

Et cœtera, continuer semblablement jusqu'à l'extrême droite, à moins qu'on n'obtienne un reste dont le premier terme ne soit pas exactement divisible par le premier terme du diviseur.

C'est ainsi que pour diviser $15\,a^3b^2 + 4\,c - 6a^2b - 3\,bc$ par $3\,ac + 5\,a^2b$, nous écrirons:

$$15\,a^3b^2 - 6\,a^2b - 3\,bc + 4\,c \;\Big|\; \underline{5\,a^2b + 3\,ac}$$

Et nous laissons à nos lecteurs le soin d'appliquer la règle ci-dessus.

Ajoutons encore que les procédés relatifs aux fractions arithmétiques sont semblablement applicables aux fractions algébriques, dans lesquelles les chiffres se trouvent remplacés par des lettres.

III. ÉQUATIONS

Définitions. — On appelle *équation algébrique* toute égalité contenant, parmi les quantités connues, d'autres quantités inconnues à déterminer.

C'est ainsi que dans :

$$4x + 2y = ab + cd,$$

les inconnues à calculer seraient x et y, et nous aurions une équation du premier degré, l'exposant de x et de y étant 1. Si cet exposant était 2 pour x et 3 pour y, l'équation serait du deuxième degré pour x et du troisième pour y, etc.

Equations du premier degré à une inconnue. — Soit à déterminer x d'après :

$$5x + 4 = 3x + 8.$$

Nous obtiendrons successivement, en mettant dans un même membre, d'un côté, l'inconnue, de l'autre côté, les valeurs connues :

$$5x - 3x = 8 - 4\,;$$
$$2x = 4$$
$$x = \frac{4}{2} = 2.$$

Equations du premier degré à plusieurs inconnues. — Soit encore :

$$5x + 4y = 25$$
$$3x - 6y = 12$$

Dégageons d'abord une inconnue, x. D'une part :

$$5x = 25 - 4y$$
$$x = \frac{25 - 4y}{5}.$$

Et, d'autre part :

$$3x = 12 + 6y$$
$$x = \frac{12 + 6y}{3}$$

Puis, égalons ces deux valeurs de x :

$$\frac{25 - 4y}{5} = \frac{12 + 6y}{3}.$$

D'où, successivement :

$$3 \times 25 - 3 \times 4y = 5 \times 12 + 5 \times 6y$$
$$75 - 12y = 60 + 30y$$
$$75 - 60 \quad = 30y + 12y$$
$$42y = 15$$
$$y = \frac{15}{42} = \frac{5}{14}$$

Portant cette valeur dans une quelconque des deux égalités primitives :

$$5x + 4.\frac{5}{14} = 25$$

$$5x = 25 - 4.\frac{5}{14} = 25 - \frac{20}{14}$$

$$x = \frac{25 - \frac{20}{14}}{5} = \frac{350 - 20}{5 \times 14} = \frac{330}{70} = \frac{33}{7}$$

Et l'on peut vérifier que ces valeurs de x et de y reportées dans les équations du canevas donnent bien 25 et 12.

Equations du deuxième degré. — Ici, on rencontre l'inconnue avec l'exposant 2. Une équation de ce genre est incomplète ou complète suivant qu'elle contient l'inconnue seulement à la 2e puissance, ou à la fois à la 2e et à la 1re.

Considérons un exemple :

$$3x^2 + 12x = 180$$

Les trois termes étant divisibles par 3, nous pouvons simplifier ainsi :

$$x^2 + 4x = 60.$$

En cherchant une combinaison avantageuse nous remarquons qu'en ajoutant à chaque membre, le carré de 2, le premier membre devient le carré de $x + 2$, soit :

$$x^2 + 4x + 2^2 = 60 + 2^2;$$
$$(x + 2)^2 = 64$$
$$x + 2 = \sqrt{64} = \pm 8.$$

Nous savons que le double signe (plus ou moins) s'impose ici en vertu de la règle des signes, puisque $+ 64$ est obtenu aussi bien par $+ 8 \times + 8$, que par $- 8 \times - 8$.

L'inconnue x a donc deux valeurs $8 - 2 = 6$ et $- 8 - 2 = - 10$.

IV. APPLICATIONS

Utilité des généralisations. — Nous avons déjà dit que l'algèbre était une sorte d'arithmétique généralisée en même temps qu'abrégée. Elle présente le sérieux avantage de substituer aux chiffres et nombres particuliers des lettres générales aptes à se transformer en valeurs numériques.

Nous savons par exemple que le carré de la somme de deux nombres,

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

affectera toujours cette forme quels que soient les chiffres représentés par a et b.

Il en sera de même pour le cube :

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Mais où l'utilité de l'algèbre est encore plus appréciable, c'est surtout dans la résolution des problèmes arithmétiques, avec les formules simplifiées qui en résultent.

Simplification des problèmes. — A titre de comparaison, reprenons l'exemple de la page 33, relatif à la recherche de l'intérêt produit par un capital de 15.000 francs placé à 4 0/0 pendant cinq ans.

Notons d'abord qu'en représentant par i l'intérêt, par a le capital, par r le taux et par t le temps, les quatre formules fondamentales de l'intérêt simple sont :

$$i = \frac{art}{100} ;$$

$$a = \frac{100\,i}{rt} ;$$

$$r = \frac{100\,i}{at} ;$$

$$t = \frac{100\,i}{ar}.$$

D'après cela, nous obtiendrons directement pour le cas supposé :

$$i = \frac{art}{100} = \frac{15000 \times 4 \times 5}{100} = 3000 \text{ francs.}$$

Nous pensons que ces quelques pages suffiront pour montrer la simplicité et surtout l'utilité de la science algébrique, même très élémentaire.

CHAPITRE III

Géométrie et Trigonométrie

SOMMAIRE. — I. Lignes. — II. Aires. — III. Volumes. — IV. Trigonométrie.

I. LIGNES

Angles aigus, obtus, droits. — Rappelons d'abord que la géométrie est la *science de l'étendue* (de *geo*, terre, et *metrum*, mesure). Au point de vue technologique, son utilité nous semble plus évidente encore que pour l'arithmétique, qu'il s'agisse de tracés sur les pièces à usiner ou d'évaluations également pratiques et fréquentes : superficies de terrains, encombrement d'appareils, volumes de locaux, etc., etc.

On appelle *angle* toute figure formée par des lignes ou des surfaces qui partent d'un même point, qui est leur *sommet*, ou y aboutissent. Ainsi, l'angle A O B (de sommet O, toujours nommé entre les deux autres lettres) est un angle proprement dit, avec A O et B O pour *côtés* (fig. 7). La droite O F, qui partage A O B en deux angles égaux, est la *bissectrice*. On peut voir ensuite l'angle solide ou *polyèdre* S A B C (ou plus simplement S)

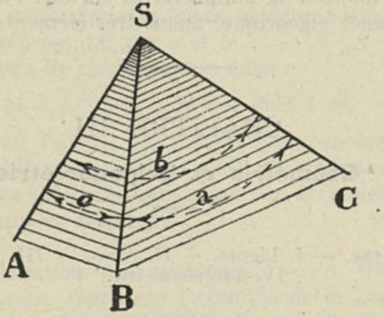

Fig. 4.

dont les *faces* A S B, B S C et A S C sont constituées par des angles plans (fig. 4). Les polyèdres étant plutôt du ressort du § III, nous ne citons cet exemple qu'à titre de comparaison documentaire.

Dans la pratique des ateliers, la *fausse équerre* pourra nous servir de terme de comparaison matérielle entre les trois sortes d'angles que nous devons considérer. Supposons que dans cet instrument (fig. 5) les branches A_1 B et B C forment par leur ouverture arbitraire un angle de 50° ; cet angle sera dit aigu, tant que la branche A B sera plus ou moins inclinée sur B C. Si nous faisons pivoter A_1 B autour de B comme centre jusque dans la position A_3 B, nous constatons que l'angle A B C accuse par exemple 120° ; la droite ou branche A_3 B étant inclinée plus ou moins, non plus sur B C, mais sur son prolongement inverse B C_1 l'angle A_3 B C est dit *obtus*. Mais la

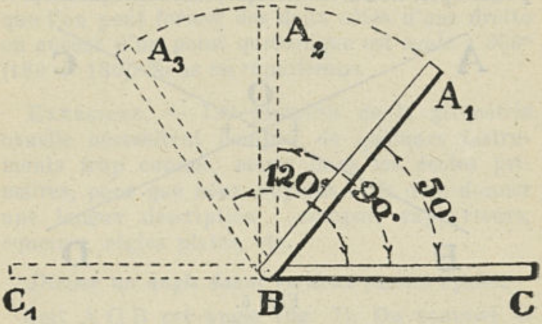

Fig. 5.

même droite A_3 n'a pu matériellement venir de A_1 B à A_3 B (de 50° à 120°) sans passer forcément par A_2 B, qui est parfaitement verticale sur le pivot B, sans pencher ni sur B C, ni sur B C_1 ; et c'est dans cette position particulière, unique de A_2 B que l'angle A_2 B C est dit droit : sa mesure est exactement de 90°, que l'on regarde soit du côté A_2 B C, soit du côté A_2 B C_1. Cette remarque nous permet de constater en passant que *tous les angles droits sont égaux entre eux*, puisque tous ont pour valeur 90 degrés (tels les différents *louis*, *napoléons*, *mariannes* et autres pièces d'or françaises cotées au prix invariable de 20 francs).

L'égalité des angles subsiste pour ceux qui sont opposés par le sommet. C'est ainsi que les angles A O B et C O D sont égaux (fig. 6).

Pour nous en convaincre, recourons à une petite opération arithmétique, en observant d'après

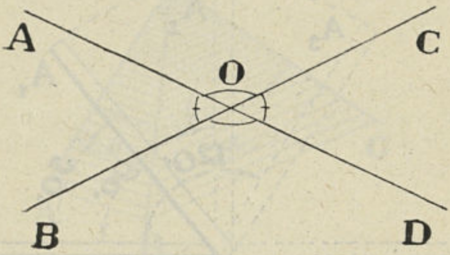

Fig. 6.

ce qui précède que les deux angles formés du même côté d'une droite équivalent à une somme de 180° (90 + 90 = 180) :

Angle AOB (sur BC) = 180° — AOC
Angle COD (sur AD) = 180° — AOC

Quelle que soit la valeur de A O C, cela ne changera rien à la comparaison. Supposons que A O C = 110°. Alors :

Angle AOB = 180 — 110 = 70°
Angle COD = 180 — 110 = 70°

Si donc les deux angles considérés ont tous deux une même valeur qui est ici de 70°, c'est qu'ils sont évidemment égaux.

Nous prouverions par un raisonnement analogue que A O C = B O D. Dans ce cas, l'égalité donnerait 180 — 70 = 110°. Ce qui confirmerait le résultat précédent.

Remarquons enfin que la somme des angles que l'on peut former des deux côtés d'une droite ou autour d'un point quelconque est égale à 360° (180 + 180). Nous en reparlerons.

EXERCICES. — Les exercices de la géométrie usuelle nécessitent l'emploi de quelques instruments trop connus, même dans les écoles primaires, pour que nous croyions utile d'en donner une longue description : compas, rapporteurs, équerres, règles plates, etc.

Diviser un angle donné en deux parties égales.

Soit A O B cet angle (fig. 7). Du sommet O comme centre et avec une ouverture de compas assez grande, décrivons un arc de cercle qui coupe les deux côtés en C et D ; du point C comme centre avec une ouverture aussi ample que possible, traçons le petit arc *c d* ; puis, avec la même ouverture et de l'autre point D, un autre petit arc *a b* qui coupe *c d* pour donner le point F. Ce dernier appartient à la bissectrice ; et comme deux points suffisent pour déterminer une droite, il suffira de tirer O F pour avoir résolu le problème.

On pourrait démontrer en joignant au besoin F à C et à D, ce qui donnerait deux triangles parfaitement superposables, c'est-à-dire les deux angles obtenus bien égaux : B O F = A O F.

Faire un angle égal à un angle donné.

On peut opérer de deux manières pratiques :

1° Se servir du rapporteur, mesurer l'angle

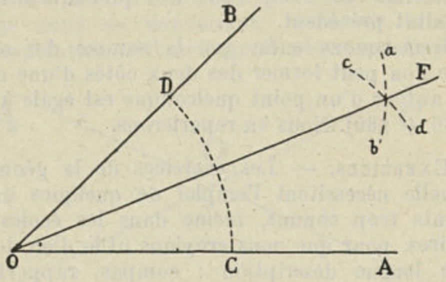

Fig. 7.

donné et tracer deux droites dont l'écartement ait le nombre de degrés voulu.

2° Soit Q O P, cet angle (fig. 8), que l'on veut répéter avec la droite A B et une autre droite passant par le point extérieur C. A cet effet, menons par ce point une parallèle à A B (voir plus loin ce genre d'opération) ; puis, avec une ouverture unique de compas aussi large que possible, traçons du point O l'arc *a b*, et du point C l'arc *d e*. Enfin, le même arc *a b* étant mesuré cette fois de *a* en *b*, reportons-le de *d* en *e*. Il ne restera plus alors qu'à joindre les points *e* et C pour obtenir la droite *e* C qui, prolongée, donnera l'angle C D B égal à *e* C *d*, donc égal à Q O P.

Cette égalité peut se contrôler soit avec le rapporteur, soit en répétant la précédente opération sur ce même angle C D B.

Perpendiculaires, obliques, parallèles. — On dit qu'une droite est *perpendiculaire* sur une autre lorsqu'elle fait avec celle-ci des angles adjacents égaux (de 90° chacun) : $m = n$ (fig. 9). Les mêmes

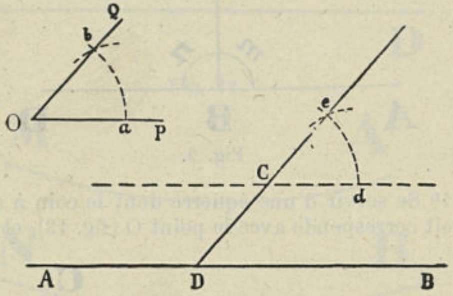

Fig. 8.

droites sont obliques lorsque leurs angles adjacents sont inégaux : $m' > n'$ (fig. 10).

Deux ou plusieurs lignes (droites ou courbes) sont dires *parallèles* lorsque leur distance demeure invariable, quelles que soient leurs longueurs. Tels sont les rails A B et C D (fig. 11), ou les portions M A, N B, P C (fig. 12) d'un disque qui, ayant même centre, sont alors dites *concentriques*.

Exercices. — *Par un point pris sur une droite, élever une perpendiculaire sur cette droite.*

Soit O le point pris sur la droite X Y. On peut opérer de deux manières pratiques :

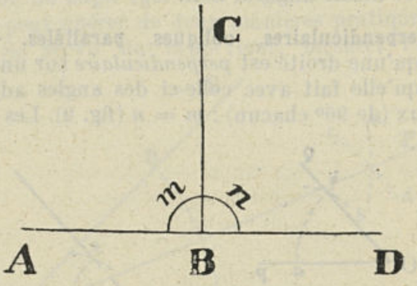

Fig. 9.

1° Se servir d'une équerre dont le coin à angle droit corresponde avec le point O (fig. 13), et tirer

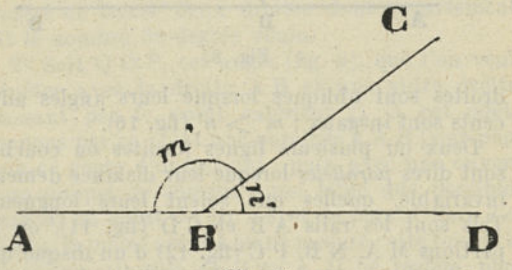

Fig. 10.

une droite O Z le long du côté vertical. Cette ligne ne sera bien perpendiculaire que si l'équerre, de

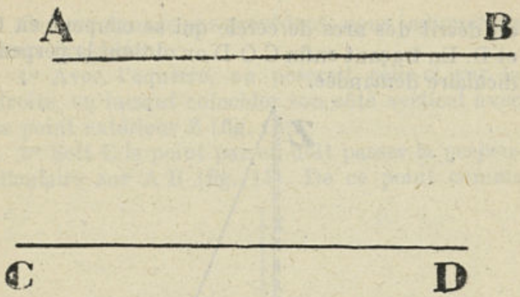

Fig. 11.

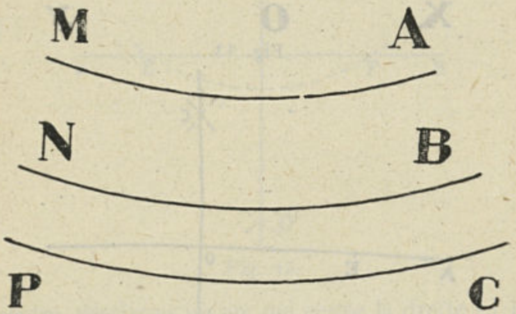

Fig. 12.

bonne fabrication, est très exactement posée sur la droite X Y.

2° Soit A B cette droite et O le point où l'on veut lui élever une perpendiculaire (fig. 14). On fixe d'abord deux points E et B également distants de O, puis de chacun de ces points comme centres on décrit des arcs de cercle qui se coupent en C et D. En traçant enfin C O D on obtient la perpendiculaire demandée.

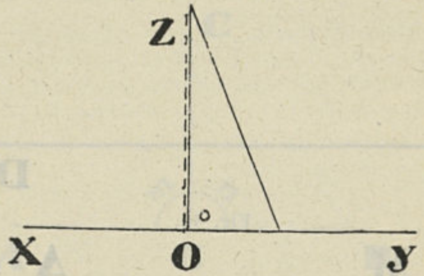

Fig. 13.

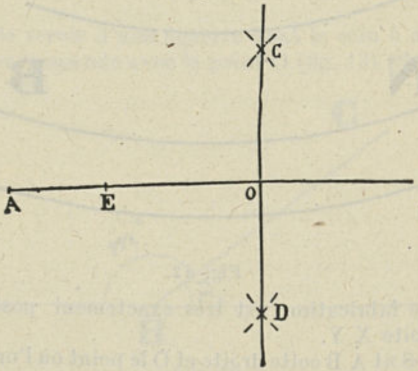

Fig. 14.

D'un point pris hors d'une droite, abaisser une perpendiculaire sur cette droite.

Comme dans le cas précédent, nous indiquerons deux procédés.

1° Avec l'équerre, on poserait celle-ci sur la droite, en faisant coïncider son côté vertical avec le point extérieur Z (fig. 13).

2° Soit C le point par où doit passer la perpendiculaire sur A B (fig. 15). De ce point comme

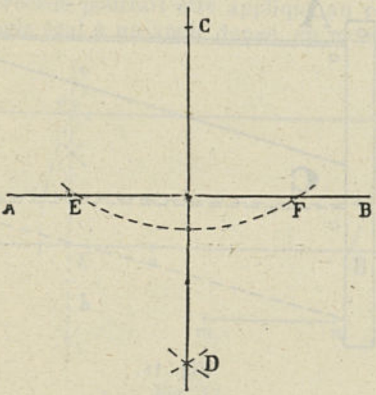

Fig. 15.

centre, décrivons un arc qui coupe la droite en E et F ; puis de ces derniers, devenus centres à leur tour, décrivons deux autres arcs qui se couperont en D. En joignant alors C et D, la droite menée sera la perpendiculaire demandée.

La construction serait analogue si le point était donné au-dessous de A B au lieu d'être au-dessus.

Mener une parallèle à une droite donnée, à une *distance donnée.* Nous pouvons encore procéder de deux façons :

1° Par l'équerre. Nous appliquerons l'une contre l'autre (fig. 16) une règle et une équerre, le grand côté de cette dernière coïncidant avec A B, puis nous la ferons glisser attentivement contre la

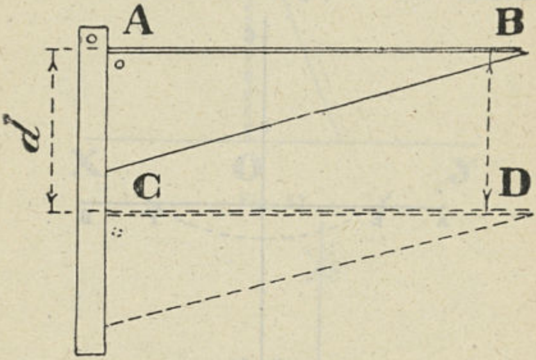

Fig. 16.

règle bien fixe, et, à une distance A C = *d*, nous tirerons la droite C D, qui sera la parallèle demandée.

2° Par le compas. Soit A B la droite à laquelle il faut mener une parallèle à une distance *m n* (fig. 17). Elevons d'abord une perpendiculaire sur la ligne A *a*, fraction arbitraire de A B (opération connue). Sur cette perpendiculaire obtenue *b c*, et du point E, portons une ouverture de compas égale à *m n*, ce qui nous donne le point O.

Le problème se trouve ainsi ramené à déterminer un deuxième point de la parallèle dont on connaît le premier O. A cet effet, nous décrirons d'un point arbitraire B l'arc passant par O, puis de ce dernier point l'arc B D qui devra être exactement égal au précédent. Il suffira alors de tirer O D, qui répondra à la question.

Ce procédé pourrait être appliqué au problème de l'angle égal à un angle donné, en menant, par

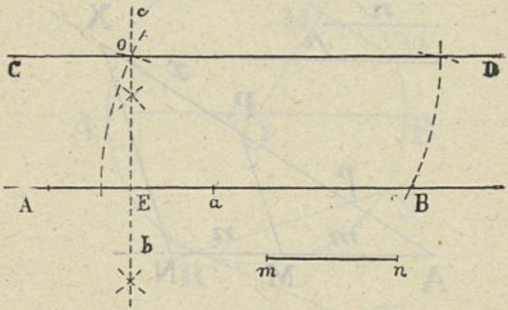

Fig. 17.

un point quelconque, deux droites respectivement parallèles aux côtés de l'angle à égaler. La méthode par l'équerre est visiblement la plus rapide dans les deux cas, mais non la plus irréprochable.

Trouver une quatrième proportionnelle à trois lignes données.

Voici enfin une application géométrique des problèmes d'arithmétique.

Soit m, n, p les trois droites dont on veut déterminer la quatrième proportionnelle que nous désignerons par x. Sur une droite quelconque A N (fig. 18), portons d'abord les longueurs $AM = m$ et $MN = n$, puis, sur une autre droite A X, faisant un angle arbitraire avec la première, portons $AP = p$. Joignons M P. Il ne nous restera plus

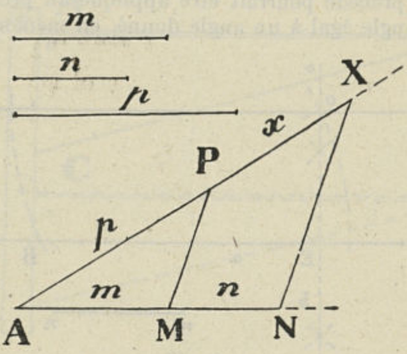

Fig. 18.

alors qu'à mener une parallèle N X à M P, pour obtenir $PX = x$, qui sera la quatrième proportionnelle demandée.

C'est sur ce genre de propriété qu'on a fondé la construction des échelles souvent usitées dans les bureaux de dessin.

Circonférences ; spirales ; développantes de cercles. — On donne le nom de *circonférence* à toute ligne courbe, plane et fermée, dont tous les points sont à invariable distance de leur *centre* commun. Dans la circonférence O (fig. 19) toute droite A B passant par le centre est un *diamètre*, et les droites qui vont du centre à la périphérie sont des *rayons* ; chacun d'eux égale la moitié du diamètre : tels sont les rayons O A, O N, etc.

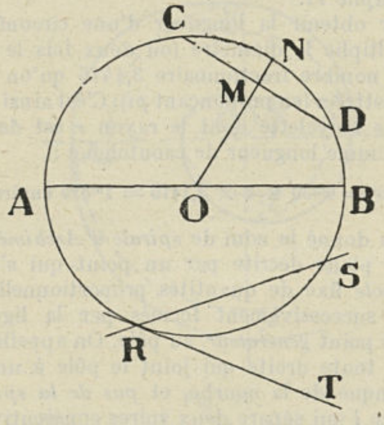

Fig. 19.

Un *arc* C N D ou portion de circonférence est sous-tendu par sa *corde* C D, dont la *flèche* est obtenue par la portion M N de perpendiculaire abaissée du centre sur la corde et prolongée de cette dernière à la circonférence ; O M s'appelle l'*apothème*.

La droite R S qui coupe la circonférence en deux points est une *sécante*. Si ces deux points viennent à se confondre en un seul, la droite R T devient une *tangente* au point R.

Règle générale, on a trop souvent tendance à confondre la circonférence qui n'est qu'une *ligne* avec le *cercle* qui est une *aire* ou superficie limitée par la circonférence. Nous en reparlerons au paragraphe II.

Pour obtenir la longueur d'une circonférence, on multiplie le diamètre (ou deux fois le rayon) par le nombre fractionnaire 3,1416 qu'on abrège par la lettre π (en prononçant *pi*). C'est ainsi qu'une roue de bicyclette dont le rayon r est de 0^m30, aura comme longueur de caoutchouc :

$$2\pi r = 0^m30 \times 2 \times 3{,}1416 = 1^m885 \text{ environ.}$$

On a donné le nom de *spirale d'Archimède* à la courbe plane décrite par un point qui s'éloigne d'un *pôle* fixe de quantités proportionnelles aux angles successivement formés par la ligne qui joint le point *générateur*, au pôle. On appelle *rayon vecteur* toute droite qui joint le pôle à un point quelconque de la courbe, et *pas de la spirale* la distance l qui sépare deux spires consécutives.

Pour construire cette spirale par points, quand on a un pas déterminé, on divise l'étendue plane autour du pôle O (fig. 20) en quatre parties égales par exemple ; du pôle comme centre, avec le quart du pas, on décrit un arc limité au second côté du premier angle ; puis, avec un rayon $\frac{2}{4}$ ou $\frac{1}{2}l$, un autre arc jusqu'au second côté du 2^e angle ; et ainsi de suite. Les points successivement déterminés appartiennent à la courbe demandée.

A l'atelier, sur un plateau de tour charictant en travers, l'outil décrit une spirale d'Archimède.

On appelle *développante de cercle* la courbe en-

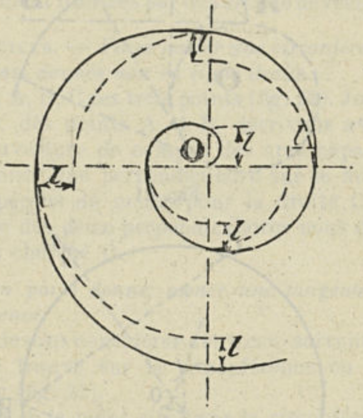

Fig. 20.

gendrée par un point A (fig. 21) qui demeure fixe sur une tangente A B dont le point de contact varie continuellement, de telle sorte que la distance du point fixe au point de contact soit toujours égale à l'espace parcouru par le point de contact sur la courbe. En termes plus génériques, la développante peut être considérée comme engendrée par l'extrémité d'un fil inextensible enroulé sur une circonférence, quand on développe ce fil en le maintenant toujours bien tendu.

Pour tracer cette courbe, on divise la circonférence en un certain nombre de parties égales ; aux points de division on mène des tangentes à la

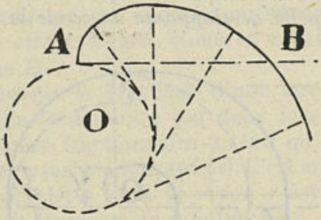

Fig. 21.

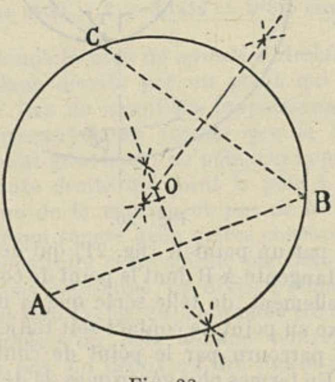

Fig. 22.

circonférence (voir aux exercices qui suivent) et, de chaque point de contact on porte sur chaque tangente une longueur égale à l'arc compris entre ce point de contact et l'origine A. On n'a plus ensuite qu'à joindre les points obtenus par une courbe élégante qui n'est autre que la développante demandée.

Notons enfin que les dents d'engrenages sont généralement limitées par des arcs de développante.

Exercices. — *Faire passer une circonférence par trois points donnés non en ligne droite.*

Soient A, B, C ces trois points (fig. 22). Joignons-les, puis, des points A et B, décrivons avec une même ouverture de compas des arcs capables de nous donner une perpendiculaire sur le milieu de A B ; opérons de même pour la droite C B. La rencontre des deux perpendiculaires nous donnera le centre cherché O.

Par un point donné, mener une tangente à une circonférence.

Nous devons considérer deux cas, suivant que le point se trouve sur la circonférence ou lui est extérieur (fig. 23).

1° Soit A le point situé sur la circonférence O. Joignons-le au centre, puis élevons sur A O la perpendiculaire A B qui donne la tangente demandée.

2° Le point étant en A', joignons-le encore au centre, puis décrivons une circonférence de centre O' sur le nouveau diamètre A' O. La rencontre des deux courbes en C et D donnera deux points de contact, et par conséquent deux tangentes en tirant A' C et A' D.

Mener une tangente commune à deux circonférences.

Soient O et O' ces deux courbes (fig. 24) que nous relions centre à centre. Portons ensuite le rayon O' B en A E et A F, et décrivons les circonfé-

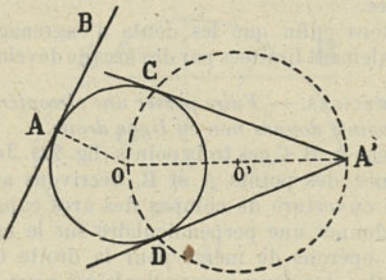

Fig. 23.

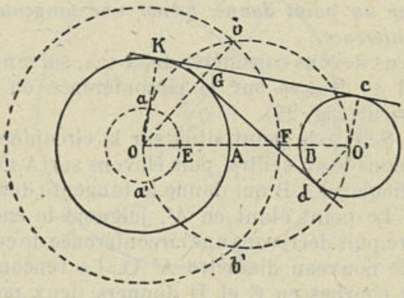

Fig. 24.

rences O E, O F ; puis, décrivons sur le diamètre O' une autre circonférence qui coupera ces deux dernières en *a* et *b*. En joignant O *b* et O *a* prolongée, nous obtiendrons les points K et G sur la circonférence O A. Par des parallèles à O K et O G du point O', nous aurons les autres points de contact *c* et *d*. Il nous suffira alors de tirer K *c* et G *d* qui seront les tangentes cherchées, l'une extérieure et l'autre intérieure.

Au total on peut mener jusqu'à quatre tangentes communes à deux circonférences ; les deux extérieures sont matérialisables avec la courroie directe qui court sur deux poulies, et les deux intérieures rappellent le cas d'une courroie croisée.

Ellipses ; hélices ; hyperboles ; paraboles. — Ellipse. — L'*ellipse* est une courbe plane, telle que chacun de ses points soit à la même somme de distances de deux points fixes ou *foyers* situés dans son plan. On peut voir là comme une circonférence déformée avec deux centres.

Pour tracer l'ellipse par points quand on connaît ses deux foyers F' et F (fig. 25) avec ses deux axes A A' et B B', la somme des *rayons vecteurs* M F + M F' étant égale à une quantité constante représentée par 2 a : on porte sur une droite quelquelconque O A = O A' = a ; puis, choisissant sur A A' et entre les foyers un point arbitraire P, on trace des arcs de cercle de P A et P A' comme rayons, avec pour centres successifs, les foyers F et F'. Le point M ainsi obtenu et tous les autres semblables appartiennent à l'ellipse. On n'a plus alors qu'à joindre tous ces points (engendrés par le déplacement de P entre F et F') par une courbe continue, qui est une ellipse répondant à la demande.

On peut également tracer l'ellipse d'un mouvement continu à l'aide d'un fil muni d'une pointe traçante, un crayon par exemple (fig. 26). A cet effet, on trace d'abord les deux axes A B, C D bien perpendiculaires en leur commun milieu O ; après

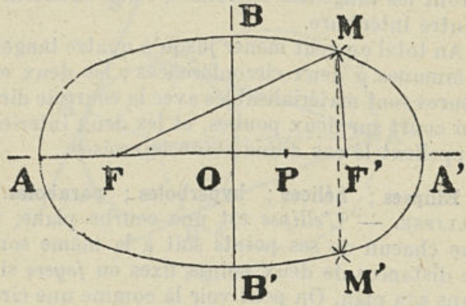

Fig. 25.

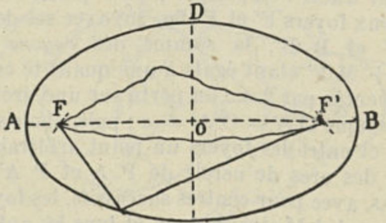

Fig. 26.

quoi l'on détermine les deux foyers. Pour cela, on place le compas sur l'extrémité du petit axe au point C ou D, et, avec une ouverture égale à O A, l'on trace un arc qui coupera A B en F et F' : ce sont les deux foyers cherchés.

Le traçage de l'ellipse se réduit alors à une simple opération manuelle, mais qu'il faut suivre attentivement. Pour ce faire, on fixe une pointe sur chaque foyer puis on choisit un fil inextensible dont la longueur invariablement nouée soit exactement égale à la somme A B + F F'. Il ne reste plus alors qu'à promener la pointe traçante en tendant constamment le fil qui, de son côté, doit toujours forcer sur les axes des foyers.

HÉLICE. — L'*hélice* est la courbe décrite sur un cylindre droit (voir ce mot aux paragraphes des aires et des volumes) par l'un des côtés d'un angle enroulé sur ce cylindre, tandis que l'autre côté s'applique sur la circonférence de base. On appelle *spire* la portion d'hélice qui correspond à un tour complet, et *pas* la distance constante qui ramène l'hélice sur la même *génératrice* ou verticale parallèle à l'axe du cylindre.

Au point de vue graphique, considérons (fig. 27) un cylindre de base A B développée en π A B ou O M = M T. Si nous enroulons l'angle R O T sur le cylindre à partir du point A, le point N viendra se projeter en P, et R en S. Comme Q R = Q T, il s'ensuit que P A = P S ; et cette distance constante représente le *pas* de l'hélice.

Les applications de l'hélice sont assez nombreuses dans les ateliers. Par exemple, on comprend que, si une pointe tournant autour d'un cylindre et s'avançant régulièrement dans le sens de l'axe de ce cylindre donne une spirale, un instrument triangulaire qui entaillerait ledit cylindre diviserait sa superficie et sa solidité en creux et en relief pour former une *vis*. On voit ainsi qu'une vis n'est autre chose qu'un cylindre sur l'extérieur duquel serait enroulé un filet en hélice. On obtiendrait un *écrou*, si l'on avait un creux cylindrique et que l'on enroulât le filet autour de son intérieur. De plus, on peut à volonté tourner le filet à gauche ou à droite,

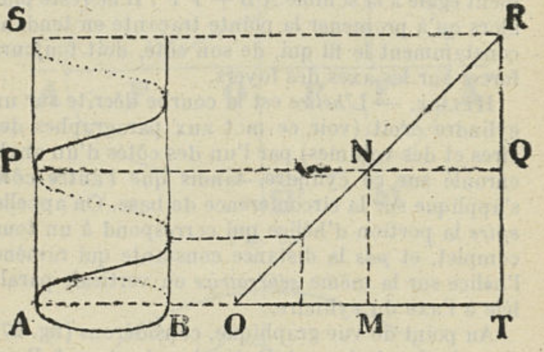

Fig. 27.

pour produire des vis ou des écrous dans l'un ou dans l'autre sens.

HYPERBOLE. — On a donné le nom d'*hyperbole* à une courbe plane, telle que la différence des distances (et non plus la somme comme dans l'ellipse) de chacun de ses points à deux foyers situés dans son plan, demeure constante.

Pour tracer l'hyperbole par points lorsqu'on connaît les foyers F F' et la différence constante A A' $= 2\ a$ (fig. 28), à partir du milieu O de la distance focale F F', on porte A O = O A' = *a*. Choisissant un point arbitraire P, pris sur A A' prolongée au delà des foyers, avec des rayons P A et P A' (dont la différence A A' = 2 *a*), on décrit des foyers deux arcs qui, se coupant symétriquement en M et M', N et N', donnent autant de points de la

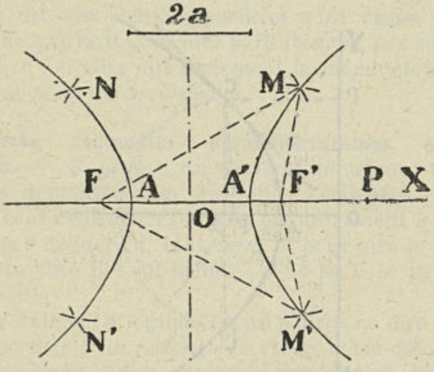

Fig. 28.

courbe. Cette dernière est suffisamment tracée quand on a fait occuper au point P un certain nombre de positions différentes sur F' X.

Parabole. — Enfin, la *parabole* est une courbe plane pour laquelle chaque point est également éloigné d'une droite ou *directrice* et d'un foyer situés dans son plan, la distance à la droite se mesurant par la perpendiculaire de chaque point considéré ; cette distance, quand elle est prise du foyer, prend le nom particulier de *paramètre*.

Pour tracer la parabole par points, quand on connaît sa directrice et son foyer, on abaisse d'abord le paramètre F O (fig. 29), et l'on en prend le milieu A ; puis on mène une parallèle arbitraire C C' à Y Y', et du foyer F comme centre avec un rayon égal à la distance C P de la directrice à la parallèle, on décrit un arc qui, coupant la

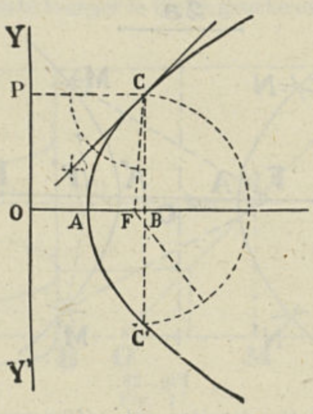

Fig. 29.

parallèle en C et C', donne deux points de la courbe cherchée. On n'a qu'à répéter un certain nombre de fois la même opération pour obtenir assez de points qui, joints sans discontinuité, donnent la parabole demandée.

Pour le traçage par mouvement continu de la parabole comme de l'hyperbole, on pourrait s'inspirer de ce que nous avons dit à ce sujet de l'ellipse.

II. AIRES

On appelle *aire* ou *superficie* le résultat de la mesure de l'étendue considérée sous deux dimensions, en prenant pour terme de comparaison la surface carrée d'un mètre de côté.

On dit que deux superficies sont *égales* lorsqu'elles peuvent coïncider parfaitement par superposition ; si elles ont seulement la même étendue, elles ne sont qu'*équivalentes*.

Carrés, rectangles, parallélogrammes, enveloppes. — A propos du système métrique, nous avons démontré (fig. 2) qu'un décimètre carré vaut cent centimètres carrés, ce qui revient à dire que, par déduction, tout *carré* a pour aire le produit du côté par lui-même, ou de sa base par sa hauteur.

Par extension logique, nous pourrions dire que la superficie d'un *rectangle* (sorte de carré déformé régulièrement, avec encore quatre angles droits) est de même égale au produit de sa base par sa hauteur. Mais nous pouvons le prouver graphiquement.

Soit donc (fig. 30) le rectangle de base A B = 5 mètres et de hauteur B C = 3 mètres. Je dis qu'il contient $5 \times 3 = 15$ mètres carrés. En effet, nous pouvons d'abord le décomposer en trois rectangles de 5 mètres de long et de 1 mètre de haut, et chacun de ces trois rectangles partiels peut contenir cinq petits carrés de 1 mètre de côté, ce qui donne 5 mètres carrés par bande. Et comme nous en avons trois identiques, cela nous donne bien un total de $5 + 5 + 5 = 5 \times 3 = 15$ mq.

La démonstration serait semblable avec des nombres fractionnaires.

Le *parallélogramme* n'est autre qu'un rectangle irrégulièrement déformé. Nous allons voir que sa

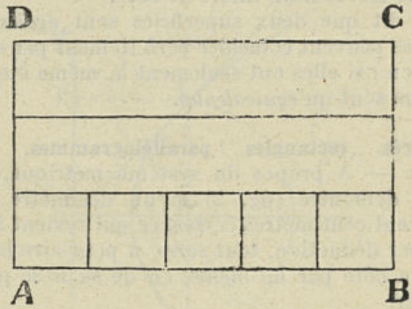

Fig. 30.

superficie provient encore du produit de la base par la hauteur.

Soit donc le parallélogramme A B E F (fig. 31). Des sommets A et B abaissons les perpendiculaires A D et B C sur E F ou sur son prolongement. Nous remarquons alors que nos deux figures, parallélogramme et rectangle, ont une partie commune A B C F, et ne diffèrent que par les triangles rectangles B C E et A D F que l'une a en plus et l'autre en moins ; or, ces deux triangles rectangles sont égaux, car on pourrait les superposer parfaitement, les côtés opposés des parallélogrammes comme ceux des rectangles étant égaux deux à deux ; de plus leurs angles sont aussi égaux comme ayant leurs côtés parallèles par construction. Donc les deux triangles sont interchangeables et la superficie du parallélogramme est bien équi-

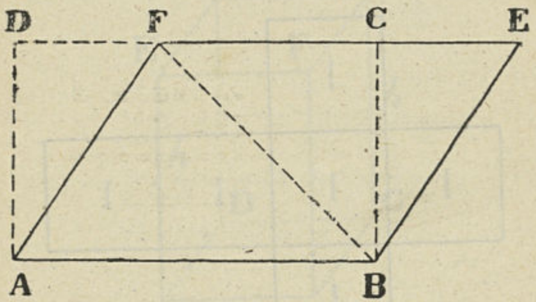

Fig. 31.

valente à celle d'un rectangle correspondant. Sa mesure s'exprime donc encore par :

$$S = AB \times BC \text{ (ou } FE \times AD).$$

Ajoutons que toute droite (comme F B) qui joint deux sommets opposés, est une *diagonale* (*dia*, à travers ; *gonia*, angle).

Nous pouvons maintenant aborder les superficies de quelques solides.

Dans le cube, si bien représenté par un paquet de tabac, l'aire de l'enveloppe totale équivaut à la somme de six carrés égaux. On peut s'en assurer fig. 32) en développant un paquet cubique, ou encore on peut compter que, même fermé, il possède six faces ou six carrés identiques.

D'une façon plus générale, un prisme quelconque (par exemple un mandrin à section rectangulaire) a pour aire latérale le produit du périmètre de la section droite par une arête latérale.

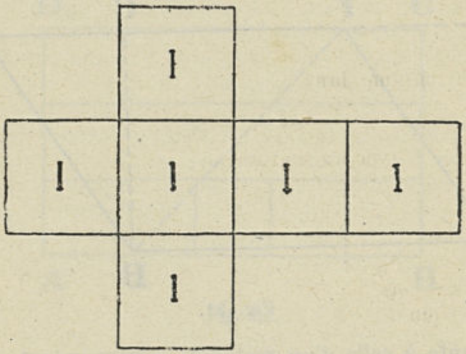

Fig. 32.

Ainsi, la figure 33 nous montre que le prisme croqué se compose latéralement de quatre faces ayant toutes des arêtes égales (la même hauteur que celle du prisme), et pour base les quatre côtés ou périmètre de la base du prisme. On peut donc, dans cette évaluation, prendre indifféremment une des quatre arêtes identiques h et la multiplier par le périmètre A B C D, produit qui donnera la superficie latérale.

On voit que, pour obtenir l'aire totale de cette enveloppe, il faudrait ajouter à la précédente la somme des deux bases cu parallélogrammes A B C D et E F G H.

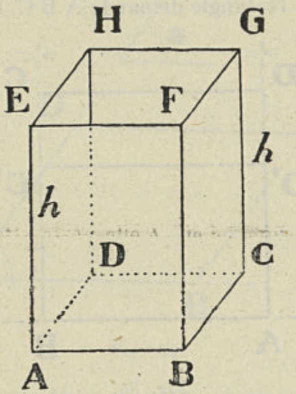

Fig. 33.

Exercices. — *Construire un carré sur une droite donnée.*

Soit A B cette droite (fig. 34). Aux points A et B nous élevons des perpendiculaires sur A B (avec le compas et non avec l'équerre). Sur chacune de ces perpendiculaires, nous portons des points A et B comme centres, la distance A B, ce qui nous donne les points C et D que nous n'avons plus qu'à joindre pour avoir le carré demandé A B C D.

Construire un rectangle dont on donne deux côtés non parallèles.

On procède d'abord comme pour le carré. Seulement, après avoir obtenu les perpendiculaires en A et B (fig. 34), on porte la deuxième valeur h en B C' et A D' Puis on joint D' et C', ce qui complète le rectangle demandé A B C' D'.

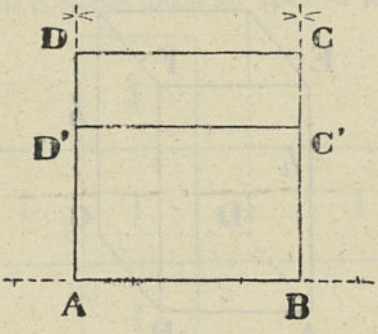

Fig. 34.

Construire un parallélogramme, dont on connaît deux côtés non parallèles avec l'angle qu'ils forment entre eux.

Soient L, l, a les deux côtés et l'angle donnés (fig. 35). Nous tracerons d'abord la base A B = L, puis au point A nous tirerons une droite qui fasse avec la première l'angle a (construction connue). Enfin, sur la nouvelle direction, nous porterons A D = l. Le quatrième sommet C se déterminera, soit en répétant en B la même construction qu'en A, soit en menant de D une parallèle à A B et de B une parallèle à A D.

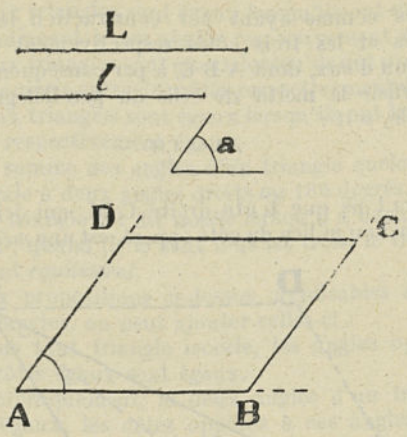

Fig. 35.

Triangles scalènes, isocèles, rectangles ; enveloppes. — Un triangle quelconque, *scalène* (c'est-à-dire d'apparence *boiteuse*) est une figure ayant trois angles et trois côtés respectivement inégaux.

Au point de vue surtout pratique qui nous intéresse ici, nous dirons d'abord que : *l'aire d'un triangle*, quel qu'il soit, *se mesure par le demi-produit de sa base par sa hauteur.*

Soit en effet (fig. 36), le triangle A B C. En menant par A et C des parallèles aux côtés B C et A B, la hauteur étant C H, nous obtenons le parallélogramme A B C D, dont la superficie nous est connue : S = A B × C H. Or, ce parallélogramme se compose de deux triangles superposables comme ayant par construction les trois angles et les trois côtés respectivement égaux. Chacun d'eux, dont A B C, a par conséquent pour superficie la moitié de celle du parallélogramme double, soit :

$$\frac{AB \times CH}{2}.$$

Ajoutons que toute droite C M, qui joint un sommet au milieu du côté opposé, est une *médiane* ;

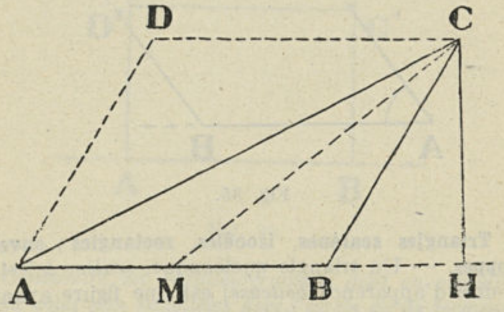

Fig. 36.

et que les trois médianes se coupent en un même point situé sur chacune d'elles au tiers de leur longueur à partir de chaque base.

Nous noterons encore, sans démonstration théorique, les théorèmes suivants sur les triangles en général :

Dans tout triangle, un côté quelconque est plus petit que la somme des deux autres et plus grand que leur différence.

Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à des angles respectivement égaux.

Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont un angle égal compris entre des côtés respectivement égaux.

Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont les trois côtés respectivement égaux.

La somme des angles d'un triangle quelconque est égale à deux angles droits ou 180 degrés.

Un triangle est dit *isocèle* lorsqu'il a deux côtés égaux ; quand ils le sont tous les trois, le triangle devient *équilatéral.*

Aux propositions ci-dessus, applicables à tous les triangles, on peut ajouter celles-ci :

Dans tout triangle isocèle, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux.

Réciproquement, si deux angles d'un triangle sont égaux, les côtés opposés à ces angles sont aussi égaux.

On appelle triangle *rectangle* tout triangle qui a un angle droit. C'est la moitié du rectangle correspondant.

Pour compléter les propositions précédentes, nous ajouterons ici :

Deux triangles rectangles sont égaux lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un angle aigu égal.

Deux triangles rectangles sont égaux lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un autre côté égal.

L'enveloppe triangulaire la plus typique est celle d'une *pyramide régulière.* Son *aire latérale* est *égale au produit du périmètre de la base par l'apothème de la pyramide.*

Soit S A B C la pyramide considérée (fig. 37). Sa superficie latérale se compose de trois triangles isocèles égaux, ayant pour hauteur commune l'apothème S H (ou distance du sommet au périmètre) et pour bases les divers côtés de la base de la pyramide, c'est-à-dire le périmètre. Donc...

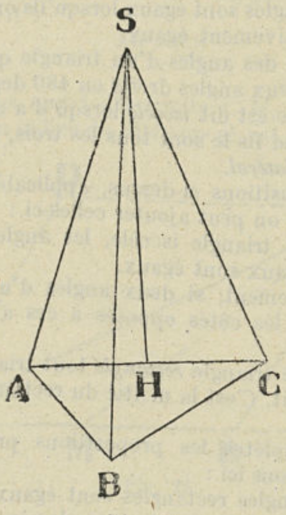

Fig. 37.

EXERCICES. — *Construire un triangle dont on connaît les trois côtés.*

Soient a, b, c les trois longueurs proposées (fig.38). Nous prendrons d'abord a sur une droite quelconque B C ; puis des points C et B comme centres avec des ouvertures de compas respectivement égales à b et c, nous décrirons des arcs qui, en se coupant au point A, nous donneront le triangle demandé A B C.

Remarquons que, dans ces genres de notation, il est plus clair de désigner par les mêmes lettres, majuscules et minuscules, les côtés opposés aux angles de même repère.

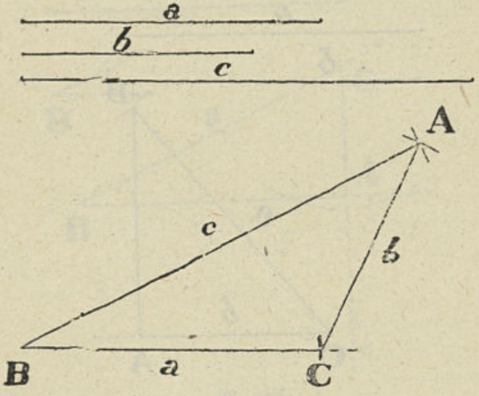

Fig. 38.

Construire un triangle rectangle dont on connaît l'hypoténuse et l'un des autres côtés.

Soient *a* et *b* l'hypoténuse et le côté donnés (fig. 39). Sur une droite C A nous porterons d'abord le petit côté *b* ; puis en A nous élèverons une perpendiculaire ; enfin du point C comme centre avec l'hypoténuse *a* pour rayon, nous couperons cette perpendiculaire en B. Et le triangle B A C répondra à la question.

Construire un triangle rectangle dont on connaît l'hypoténuse et un angle aigu.

Soient a et B les données (fig. 40). Sur un des côtés indéfinis d'un angle B, nous porterons d'abord l'hypoténuse a de B en C. Puis, du point C, nous abaisserons la perpendiculaire C A sur l'autre

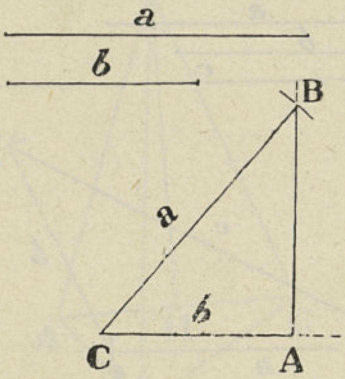

Fig. 39.

côté. Et nous aurons bien le triangle rectangle demandé B A C.

Trapèzes ; polygones ; secteurs ; enveloppes. — On a donné le nom de *trapèze* à un quadrilatère (quatre côtés) dont deux sont parallèles. C'est encore un parallélogramme dont deux côtés ne sont point parallèles.

L'aire d'un trapèze est égale au produit de la demi-somme des bases par la hauteur.

Considérons le trapèze A B C D (fig. 41). Prolongeons l'une des bases, A B par exemple, de la quantité B G = D C ; puis, joignons D G, coupant C B en F. Par construction et par parallélisme, les triangles D C F et B F G sont superposables, comme

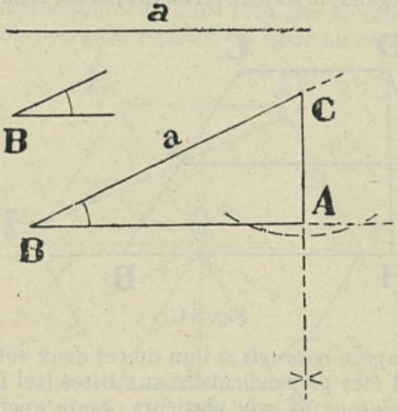

Fig. 40.

ayant un côté égal compris entre deux angles respectivement égaux (et même les troisièmes, opposés par le sommet). La superficie du trapèze peut donc être assimilée à celle du grand triangle équivalent A D G, soit $\frac{A G \times D H}{2}$; ou :

$$\frac{(AB + BG)\,DH}{2} = \frac{(AB + DC)\,DH}{2}.$$

Si, d'autre part, on considère que la *base moyenne*

E F menée par les milieux des côtés non parallèles est égale à la demi-somme des bases, on peut encore dire que l'aire d'un trapèze provient du produit de la base moyenne par la hauteur.

Ajoutons enfin que si les deux côtés A D et C B étaient égaux, le trapèze serait dit *isocèle*. Il devien-

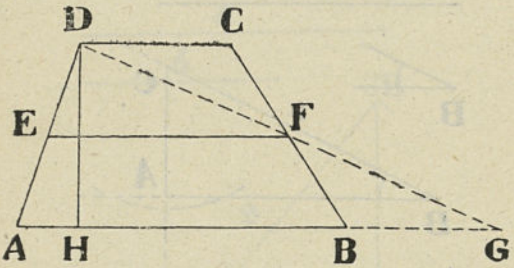

Fig. 41.

drait trapèze *rectangle* si l'un de ces deux côtés se trouvait être perpendiculaire aux bases (tel D H).

Un *polygone* (de *poly*, plusieurs ; *gonia*, angle) est une figure géométrique dont les côtés rectilignes sont en nombre quelconque. Si ces côtés sont tous égaux entre eux, le polygone est dit régulier.

L'aire d'un polygone quelconque est égale à la somme des triangles ou autres figures dont on peut le composer ou décomposer. La superficie d'un polygone régulier est égale à la moitié du produit du périmètre par l'apothème.

Pour vérifier cette dernière vérité, décomposons le polygone régulier AB C D E F (fig. 42) en autant de triangles égaux qu'il a de côtés, avec un sommet commun au centre O. L'aire de chacun de ces six triangles est donnée par le produit : $\frac{AB \times OH}{2}$; et comme pour les six triangles, nous aurions 6 fois le produit $\frac{OH}{2}$ par A B, B C, C D, etc., tous égaux par construction, il s'ensuit bien que la superficie totale du polygone régulier est égale au demi-pro-

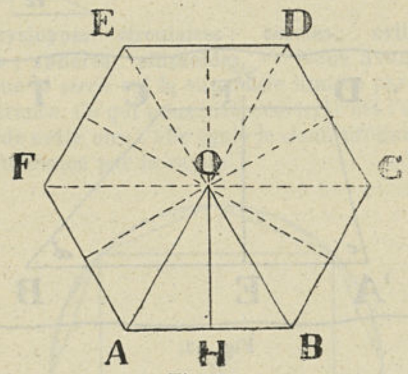

Fig. 42.

duit de l'apothème commune par le périmètre ou contour total.

On appelle *secteur* polygonal, toute portion triangulaire dans le genre de C O D (fig. 44) triangle ayant son sommet au centre et sa base comme côté de polygone. Son aire est donc égale à la moitié du produit de son apothème par la portion du diamètre qui lui appartient.

L'enveloppe correspondante aux figures précédentes se rencontre dans un certain nombre de solides ayant comme base un polygone et autant de faces que ce polygone a de côtés. Nous ne répé-

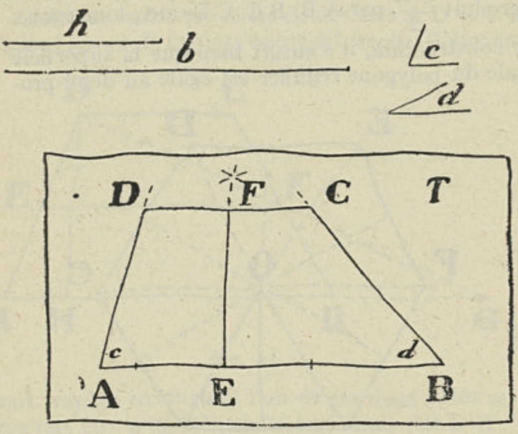

Fig. 43.

terons donc pas ici ce que nous avons dit des enveloppes triangulaires ou rectangulaires.

Exercices. — Les exercices sur les polygones et les trapèzes sont plutôt rares. Nous imaginons le suivant que nous croyons inédit autant que simple :

Dans une feuille de tôle, découper un trapèze dont on connaît la hauteur, la grande base et les deux angles de cette dernière.

Soient donc h, b, c et d les valeurs données (fig. 43). Vers le bas de la tôle T, nous tracerons A B = *b* ; puis en A et B, nous formerons les directions des angles *c* et *d*. En un point quelconque E de A B nous élèverons sur cette base une perpendiculaire limitée par E F = *h*. Enfin du point F nous mènerons la parallèle D C à A B. Il ne restera plus ensuite qu'à découper le trapèze demandé A B C D.

Enveloppes circulaires ; cercles ; cylindres ; cônes ; sphères : ellipsoïdes. — Nous avons déjà dit que le *cercle* est la superficie limitée par la circonférence. Ce qui nous intéresse ici, c'est l'évaluation de cette aire : elle égale le demi-produit de la circonférence par le rayon.

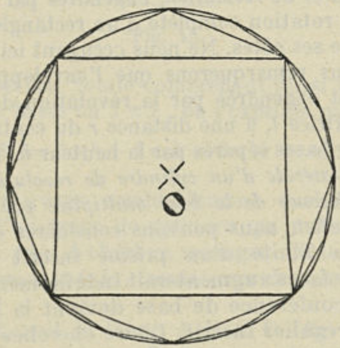

Fig. 44.

En effet, si nous inscrivons dans un cercle O (fig. 44) un carré dont nous pouvons doubler un certain nombre de fois les côtés réguliers, nous nous rendons très bien compte que lorsque le périmètre du dernier polygone se confondra avec la circonférence, le cercle lui-même absorbera la superficie de ce même polygone, qui se mesure toujours par le demi-produit de son périmètre (devenu la circonférence) par son apothème (devenu le rayon). Donc...

Dans la pratique, la longueur de la circonférence de rayon r étant $2 \pi r$, la surface du cercle s'exprime par :

$$\frac{2\pi r \times r}{2} = \pi r^2.$$

Les corps cylindriques connus sont généralement des *cylindres de révolution*, engendrés par la révolution ou rotation complète d'un rectangle autour de l'un de ses côtés. Ne nous occupant ici que des aires, nous remarquerons que l'enveloppe cylindrique est engendrée par la révolution de l'arête ou génératrice l, à une distance r du centre O des cercles de bases séparés par la hauteur h (fig. 45).

L'aire latérale d'un cylindre de révolution égale la circonférence de la base multipliée par la hauteur. En effet, nous pouvons considérer ce solide comme la limite d'un prisme inscrit dont le nombre de faces augmenterait indéfiniment, tandis que la circonférence de base devient la limite du polygone régulier inscrit. L'aire cherchée provient donc encore du produit du périmètre (circonférence $2 \pi r$) par l'arête (hauteur h), soit :

$$S_l = 2 \pi r h.$$

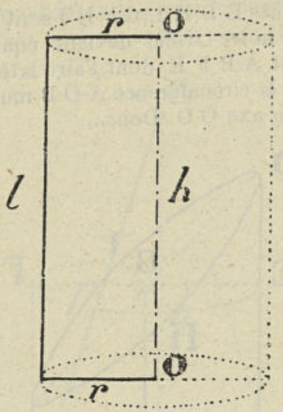

Fig. 45.

La superficie totale comprenant aussi les deux cercles de bases ou $2 \pi r$, on l'exprime par :

$$S_t = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi (r + h).$$

Nous pouvons semblablement évaluer l'aire latérale d'un tronc de cylindre qui ressemble de loin à un seau à charbon ménager. Cette aire est égale au *produit de la circonférence de base par l'axe du tronc.*

En effet, soit le tronc A B C D (fig. 46). Par l'extrémité supérieure G de son axe, menons le plan E F parallèle à la base A O B, et prolongeons la partie solide O B C jusqu'à sa rencontre avec le plan auxiliaire. Nous remarquerons alors que les deux fragments E D H I, C F H I sont égaux. Par conséquent, notre tronc devient équivalent au cylindre droit A B F E, dont l'aire latérale a bien pour mesure la circonférence A O B multipliée par la hauteur ou axe O G. Donc...

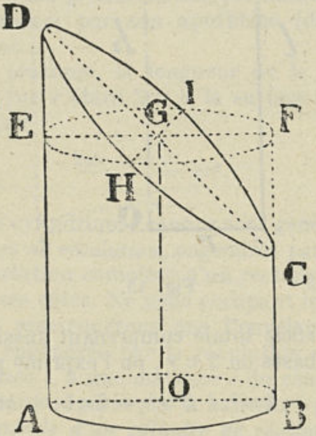

Fig. 46.

Le *cône de révolution* est le solide engendré par la rotation complète d'un triangle rectangle autour d'un des côtés de l'angle droit.

Comme précédemment, la figure 47 montre clairement cette construction, avec le centre O et le sommet S, le rayon de base r, l'axe cu hauteur h, et l'arête génératrice l.

L'aire latérale d'un cône de révolution égale la moitié du produit de la circonférence de base par la génératrice. Car ce solide peut être considéré

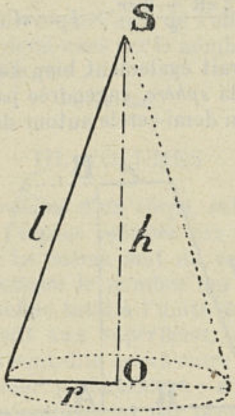

Fig. 47.

comme la limite de la pyramide inscrite que nous connaissons déjà. Donc :

$$S_l = \frac{2\pi rl}{2} = \pi rl.$$

Pour la superficie totale, nous aurions encore :

$$S_t = \pi r^2 + \pi rl = \pi r\,(r + l).$$

Nous démontrerions de même que l'aire latérale du tronc de cône A B (fig. 48), engendré par la rotation du trapèze figuré, a pour mesure la demi-somme des circonférences des bases, multipliée par la génératrice. Soit :

$$S_l = \frac{2\pi R + 2\pi r}{2} \times l = \pi l\,(R + r).$$

On trouverait également bien l'aire totale.

Passant à la *sphère*, engendrée par la révolution complète d'un demi-cercle autour de son diamètre,

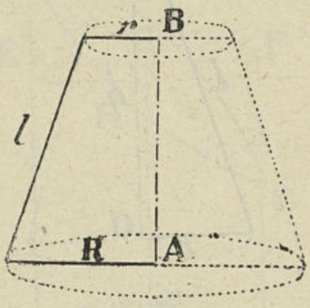

Fig. 48.

son aire provient donc de la demi-circonférence en rotation.

En désignant le diamètre par d ou $2\,r$, l'aire en question étant égale au produit de la circonférence par ce diamètre, nous pourrons écrire :

$$S = 2\pi r \times 2\,r = 4\,\pi r^2\,;$$

ce qui représente quatre fois la superficie d'un grand cercle passant par un diamètre, c'est-à-dire dont le centre coïncide avec celui de la sphère.

Dans le cas où l'on voudrait exprimer cette mesure en fonction de d, on aurait :

$$S = \pi d \times d = \pi a^2.$$

Ajoutons encore que l'aire de l'ellipse est égale au produit des demi-axes par le nombre constant π. Ce qui s'exprime par :

$$S = \pi ab.$$

III. VOLUMES

On appelle *volume* d'un corps, solide ou creux, la portion de l'espace occupée par ce corps, son *encombrement*. Le même mot de volume désigne plus souvent encore le nombre qui représente le rapport d'un solide total à l'unité du mètre cube.

Semblablement aux superficies, deux ou plusieurs volumes sont dits *égaux* entre eux lorsqu'ils peuvent coïncider parfaitement ; s'ils ont seulement même encombrement par rapport à l'unité, ils sont dits *équivalents*.

Polyèdres et cylindres. — Nous connaissons déjà ces solides pour en avoir calculé les enveloppes.

Nous allons maintenant montrer que le volume d'un parallélipipède rectangle égale le produit de ses trois dimensions ; nous l'avons déjà prouvé par le cube, à propos du système métrique. En considérant le parallélipipède rectangle A B C D E F G (fig. 49), nous supposerons, pour simplifier, que l'unité est contenue un nombre exact de fois dans chaque dimension : 5 pour la longueur, 3 pour la largeur, 2 pour la hauteur, le tout en mètres. Je dis que le nombre de mètres cubes contenus dans son solide est : $5 \times 3 \times 2 = 30$.

En effet, nous pouvons le décomposer d'abord en 2 parallélipipèdes de 5 mètres de long, 3 mètres de large et 1 mètre de haut ; chacun de ces deux solides peut être découpé en 3 autres ayant 5 mètres

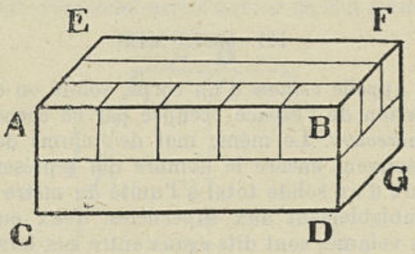

Fig. 49.

de long, 1 mètre de large et 1 mètre de haut. Enfin chacun de ces trois derniers peut contenir 5 cubes unitaires de 1 mètre de côté.

Nous avons ainsi successivement décomposé notre parallélipipède rectangle en 2 fois que multiplie 3 fois, que multiplie 5 fois 1 mètre cube ; soit bien au total $2 \times 3 \times 5 = 30$ mètres cubes.

Nous prouverions la même vérité s'il s'agissait, soit d'un parallélipipède rectangle à dimensions fractionnaires, soit d'un parallélipipède quelconque, non droit.

Dans tous ces solides, les faces sont parallèles ; il n'en est plus de même avec un *prisme*, qui est un polyèdre limité par deux polygones égaux et parallèles, avec des faces latérales figurant des parallélogrammes. Nous allons voir que, comme précédemment, le volume d'un prisme quelconque a toujours pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.

En effet, en partant d'abord du prisme triangulaire de bases A B C et D E F (fig. 50), si nous pro-

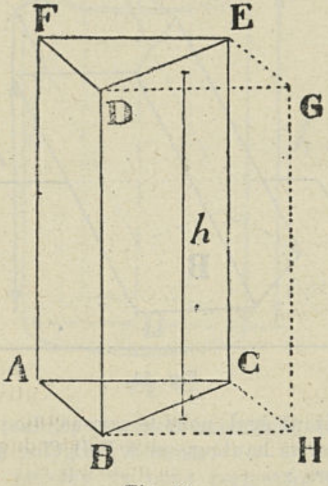

Fig. 50.

longeons les plans de ces bases et que nous menions par l'arête C E un plan parallèle à la face A B D F et par l'arête B D un plan parallèle à la face A C E F, nous formerons un parallélipipède A B C H G E F D ayant même hauteur h que notre prisme, mais une base A B C H double de A B C (la diagonale B C partageant ce parallélogramme en deux parties égales) ; le parallélipipède a donc un volume double du prisme, et réciproquement ce dernier équivaut à la moitié de son double ; or, le volume du parallé-

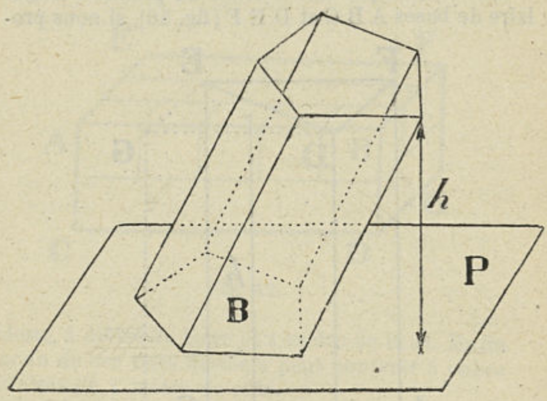

Fig. 51.

lipipède étant égal, nous le savons, au produit de sa base par sa hauteur, ou A B H C $\times$ h, celui du prisme sera :

$$\frac{\mathrm{ABHC}}{2} \times h = \mathrm{ABC} \times h.$$

C'est ce que nous voulions démontrer.

Avant de passer au sujet suivant, un raisonnement analogue à celui qui précède nous permettrait de constater que la même règle est applicable à un prisme de base quelconque, que cette base ait 3 ou 5 ou x côtés ; son volume sera toujours égal au produit de sa base B par la hauteur h (fig. 51) qui mesure la distance de sa base supérieure au plan P de sa base inférieure, cette hauteur, en cas d'obli-

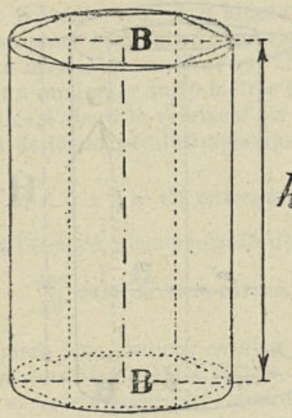

Fig. 52.

quité du solide, pouvart aussi bien tomber en dehors du polygone inférieur.

Ce qui précède va nous permettre de passer immédiatement au volume du cylindre. Ce dernier peut en effet être considéré comme la limite d'un parallélipipède rectangle dont les polygones réguliers de bases égales B et B et de hauteur h augmentent indéfiniment avec les faces correspondantes (fig. 52). Or, comme pour tous ces parallélipipèdes, le volume est constamment égal au produit B × *h*, il s'ensuit que cette loi est aussi applicable au cylindre, sorte de parallélipipède possédant un très grand nombre, ou un nombre

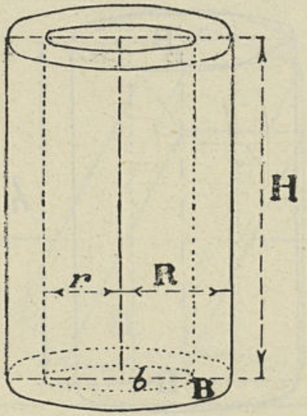

Fig. 53.

infini de faces régulières, toutes réduites à une simple génératrice. Donc...

Nous pouvons encore noter que le volume d'un cylindre creux est égal à la différence des volumes de deux cylindres, l'un supposé tout plein et l'autre vide.

Tel est le cas des cylindres (fig. 53) de bases B et *b*, ayant pour rayons R et *r*, avec H comme hauteur commune. Nous pouvons écrire :

$$\begin{array}{lll}
\text{Cylindre plein} \ldots & B = B \times H = & \pi R^2 H \\
\text{Cylindre vide.} \ldots & b = b \times H = & \underline{\pi r^2 H} \\
\text{Cylindre annulaire.} \ . & B - b = (B - b)H = & \pi H(R^2 - r^2).
\end{array}$$

Exercices. — 1° Etant donné un atelier de 25 mètres de long, 6 mètres de large et 3 mètres de haut, déterminer le nombre d'ouvriers qu'il peut recevoir au maximum, sachant que chaque ouvrier a droit à un minimum de 20 mètres cubes.

Cherchons d'abord le volume d'air contenu dans cet atelier de forme parallélipipédique. Nous obtenons :

$$25 \times 6 \times 3 = 450 \text{ mètres cubes.}$$

D'après l'énoncé, nous pourrons donc y mettre :

$$\frac{450}{20} = 22 \text{ ouvriers environ.}$$

Mais il sera plus prudent de n'en admettre que 20, si l'on considère que les établis, les étaux, les armoires et autres accessoires diminuent par leur encombrement le total du volume respirable.

2° Trouver le poids d'un manchon cylindrique en fonte, dont le diamètre intérieur mesure 0^m06, le diamètre extérieur 0^m16, et la longueur 0^m25, la densité de cette fonte étant égale à 7.

Cherchons d'abord le volume de ce cylindre creux, dont les rayons sont :

$$R = \frac{0,16}{2} = 0,08, \text{ et } r = \frac{0,06}{2} = 0,03.$$

Nous trouverons que ce volume.

$$\pi H (R^2 - r^2) = 3{,}14 \times 0{,}25 \times \left(\overline{0{,}08}^2 - \overline{0{,}03}^2\right)$$
$$= 0^{m3}0043175 = 4{,}3175 \text{ litres ou décimètres cubes.}$$

Or, si le décimètre cube ou litre de ce métal pèse 7 kilogrammes, le manchon pèsera :

$$4{,}3175 \times 7 = 30 \text{ kilogr. } 222, \text{ environ.}$$

Pyramides et cônes. — Avant d'aller plus loin, nous noterons ici qu'on démontre, en géométrie scientifique, qu'une pyramide triangulaire est le tiers d'un prisme qui aurait même base et même hauteur. En d'autres termes : *le volume d'une pyramide triangulaire est égal au tiers du produit de sa base par sa hauteur.*

Il en est de même pour une pyramide quelconque S à base polygonale A B C D E (fig. 54). Pour nous en convaincre, joignons un sommet quelconque du polygone de base à tous les autres sommets analogues ; nous aurons ainsi décomposé notre solide en un certain nombre de pyramides triangulaires que nous savons évaluer. Or, comme toutes ces pyramides ont même hauteur (celle du solide complet) et que leurs bases additionnées forment la base de la pyramide totale, il s'ensuit bien que le volume de celle-ci, comme celui d'une pyramide triangulaire, est toujours égal au tiers du produit de sa base B par sa hauteur h :

$$V = \frac{1}{3} Bh.$$

On démontre encore que le volume d'un tronc de pyramide à bases parallèles quelconques (fig. 55) est *égal au tiers du produit de la hauteur du tronc par la somme des bases et de leur moyenne géo-*

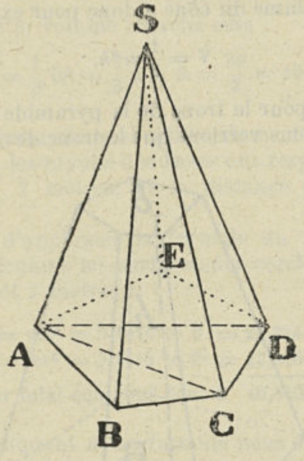

Fig. 54.

métrique. Ce qui s'exprime ainsi, en représentant la hauteur par h, et les deux bases par B et b :

$$V = 1/3\, h\, (B + b + \sqrt{B.b}).$$

Nous dirons maintenant que le *volume d'un cône quelconque est égal au tiers du produit de sa base par sa hauteur.* Car nous pouvons considérer le cône comme la limite d'une pyramide régulière inscrite dont le nombre de faces augmente indéfiniment comme le nombre des côtés ; or, à cette limite, le polygone de base se confond avec le cercle du cône de rayon r, dont la superficie est πr^2. Le volume du cône a donc pour expression :

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

Comme pour le tronc de la pyramide dont il est la limite, nous verrions que le tronc de cône a pour

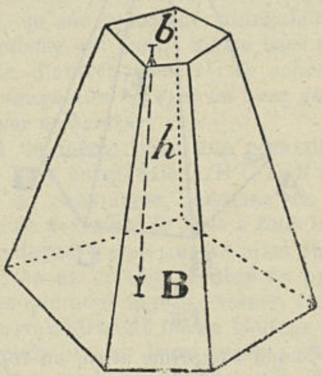

Fig. 55.

volume la même expression contenant la hauteur h et les deux bases B et b.

Exercices. — 1° Trouver le volume d'une pyramide rectangulaire dont la hauteur est de 5 mètres. les deux côtés non parallèles du rectangle de base ayant respectivement 2 et 3 mètres.

Cherchons d'abord l'aire de ce rectangle de base :

$$S = 2 \times 3 = 6 \text{ mètres carrés.}$$

Dès lors le volume cherché sera :

$$V = \frac{1}{3} Bh = \frac{1}{3} 6 \times 5 = \frac{30}{3} = 10 \text{ mc.}$$

2° On demande quel est le volume d'un tronc de cône dont les rayons des bases ont respectivement 3 mètres, 2 mètres, et la distance des centres 4 mètres.

Avant d'appliquer la formule du tronc pyramidal, calculons les surfaces des cercles de rayon 3 mètres et 2 mètres :

$$B = \pi R^2 = 3{,}1416 \times \overline{3}^2 = 28{,}2744 \text{ mq}$$
$$b = \pi r^2 = 3{,}1416 \times 2^2 = \underline{12{,}5664} \text{ —}$$

Leur total équivaut donc à 40,8408 mq

En appliquant notre formule nous obtiendrons :

$$V = \frac{1}{3} 4 \ (40{,}8408 \times \sqrt{28{,}27 \times 12{,}56})$$
$$= \frac{4}{3} \times 59{,}70 = 79^{m3}600 \text{ environ.}$$

Sphères. — D'après la règle générale des assimilations, nous pouvons considérer la sphère comme la limite d'un grand nombre de pyramides inscrites ayant leurs bases sur la surface intérieure et leur sommet commun au centre de cette sphère. Le volume de cette dernière peut donc être regardé comme égal à la somme des volumes de toutes les pyramides fragmentaires qui la composent ; mais, à la limite, la surface totale de ces petites pyramides couvre la surface de la sphère $4 \pi r^2$, et leur hauteur commune est devenue le rayon unique r.

Si donc nous appliquons la formule connue de la surface par le tiers de la hauteur, nous obtenons pour le volume d'une sphère de rayon r :

$$V = 4 \pi r^2 \times \frac{r}{3} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Exercices. — Trouver le poids d'une boule de régulateur dont le diamètre est de 0m20, et la densité du métal 7,5.

Le rayon de cette sphère est donc de 0m10 ; et son volume :

$$\frac{4}{3} \times 3{,}1416 \times \overline{0{,}1}^3 = 4{,}1888 \times 0{,}001 = 0 \text{ mc } 0041888$$
$$= 4^l\,18$$

Son poids sera donc de :

$$4{,}18 \times 7{,}5 = 31 \text{ kil. } 350 \text{ environ.}$$

Ellipsoïdes. — Si l'ellipse peut être considérée comme un cercle plus ou moins déformé, de son côté l'ellipsoïde ressemble à une sphère dont un diamètre serait allongé et l'autre perpendiculaire raccourci.

En vue du calcul de ce volume, remarquons qu'un tel solide est engendrable par une ellipse B C (fig. 56) qui se déplacerait tout en se déformant semblablement à elle-même sous l'enveloppe directrice A B A'C, tandis que son centre O se maintiendrait sur le diamètre A A'.

Le volume d'un ellipsoïde quelconque à trois axes inégaux l, d, e, s'exprime par :

$$V = \frac{1}{6} \pi l . d . e.$$

Si le même solide devenait de révolution, avec $d = e$, cette formule se simplifierait en :

$$V = \frac{1}{6} \pi l d^2.$$

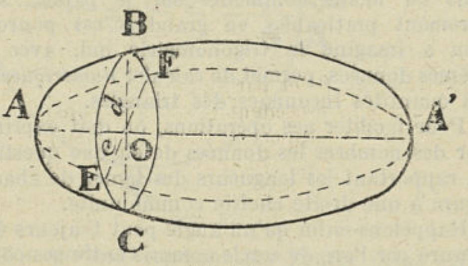

Fig. 56.

Et enfin on retrouverait le volume de la sphère avec

$$l = d \left(\text{soit} : \frac{1}{6} \pi d^3\right).$$

Exercice. — Trouver le poids d'une bielle en ellipsoïde de révolution de diamètres $l = 0^m500$, $d = 0,030$, la densité de son métal étant 7,5.

Cherchons d'abord le volume :

$$V = \frac{1}{6}\pi l d^2 = \frac{\pi}{6} \times 0,5 \times \overline{0,03}^2 = 0,24 \text{ déc. cubes environ}$$

dont le poids est par conséquent :

$$7,5 \times 0,24 = 1 \text{ kg. } 800.$$

IV. TRIGONOMÉTRIE

Préliminaires. — Nous avons vu qu'un triangle comporte invariablement six éléments (trois angles et trois côtés), et qu'on peut construire *graphiquement* ces sortes de figures dont on ne connaît que quelques parties ; mais ces genres de construction, plus ou moins commodes sur le papier, sont rarement praticables en grand. C'est pourquoi l'on a imaginé la trigonométrie qui, avec les mêmes données, permet de calculer *numériquement* les quantités inconnues des triangles.

Pour faciliter ces opérations, on doit exprimer par des nombres les données de chaque question, en rapportant les longueurs des lignes de chaque figure à une droite choisie comme unité.

Rappelons enfin qu'un angle peut toujours être mesuré par l'arc de cercle compris entre ses côtés, décrit de son sommet comme centre avec un rayon arbitraire, et que deux angles sont supplémentaires ou complémentaires l'un de l'autre lorsque leur somme égale soit 90°, soit 180°.

Lignes trigonométriques. — Les lignes trigonométriques ou *fonctions circulaires*, solidaires entre elles, sont encore au nombre de six : sinus, tangente, sécante ; cosinus, cotangente, cosécante (fig. 57).

Sinus. — Le sinus d'un arc A N ou a est la perpendiculaire N S = y, abaissée d'une extrémité de cet arc sur le rayon de l'autre extrémité.

Tangente. — C'est la ligne A T = t, menée de la deuxième extrémité jusqu'à la rencontre

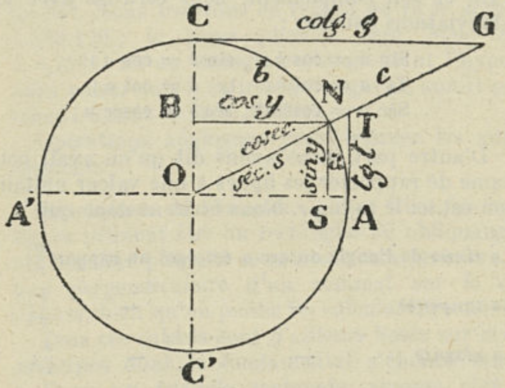

Fig. 57.

du rayon prolongé passant par l'autre point extrême.

Sécante. — Ligne O T = s allant du centre à l'extrémité de la tangente t.

Cosinus. — Le cosinus d'un arc équivaut au sinus de son complément : sur notre croquis, le complément de l'arc a est N C et le sinus de N C devient N B = x, qui est précisément le cosinus de notre arc primitif n (lire sur la figure *cos* x au lieu de *cos* y).

Cotangente. — La cotangente du même arc a est la tangente de son complément ; ici cette cotangente est donc $CG = g$.

Cosécante. — Enfin, c'est encore la sécante du complément de l'arc considéré ; soit $OG = c$.

Pour nous résumer, en représentant par a et b l'arc et son complément, nous écrirons avec les abréviations usuelles :

$$\text{Sin } a = \cos b\,; \quad \sin b = \cos a\,;$$
$$\text{Tg } a = \cot b\,; \quad \text{tg } b = \cot a\,;$$
$$\text{Séc } a = \text{coséc } b\,; \quad \text{séc } b = \text{coséc } a\,;$$

D'autre part, nous avons dit qu'on avait coutume de rapporter les lignes à une valeur unitaire qui est ici le rayon r. Nous écrirons donc que :

Le *sinus* de l'angle ou arc a est égal au rapport $\frac{y}{r}$;

La *tangente* — — $\frac{t}{r}$;

La *sécante* — — $\frac{s}{r}$;

Le *cosinus* — — $\frac{x}{r}$;

La *cotangente* — — $\frac{g}{r} = \frac{x}{y}$;

La *cosécante* — — $\frac{c}{r} = \frac{r}{y}$;

Pour faciliter les calculs, on a l'habitude de consulter la classique table donnant en barême les sinus et tangentes des angles rencontrés dans la pratique. Dans cette table (voir p. 112 et 113) le rayon a été pris égal à 10.000.000, afin de donner plus d'exactitude aux résultats. En réalité, puisqu'on part de $r = 1$, il va de soi qu'on devra diviser ces résultats par dix millions, en ne prenant donc que la dix-millionième partie de chaque nombre obtenu.

Soit à trouver par exemple le sinus d'un angle de 15°. Nous trouvons en regard de 15 le nombre 2.588.190 ; le sinus cherché sera donc égal à 0,2588. Et un triangle rectangle dont l'hypoténuse mesurerait 3 mètres de longueur, aurait pour sinus : $0{,}2588 \times 3 = 0^{m}7764$.

Opérations analogues pour trouver les autres éléments.

Résolutions de triangles. — Les triangles rectilignes peuvent être ou rectangles ou obliquangles, ces derniers pouvant se ramener aux premiers par une perpendiculaire d'un sommet sur le côté opposé, bien qu'on puisse les calculer directement.

Tous ces calculs sont d'ailleurs basés sur divers principes dont le fondamental s'énonce ainsi : « Dans un triangle rectangle, chaque côté de l'angle droit est égal à l'hypoténuse multipliée par le sinus de l'angle opposé, ou par le cosinus de l'angle adjacent ».

Considérons le triangle A B C (fig. 58). Du sommet B comme centre avec l'unité linéaire comme rayon, décrivons l'arc de cercle M N, et complétons par la perpendiculaire M D.

Nous obtenons ainsi deux triangles semblables B A C, B M D qui, d'après la géométrie scientifique, nous permettent d'écrire :

$$\frac{AC}{MD} = \frac{BA}{BM} \text{ ou } \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{1}$$

Degrés	Sinus	Tangentes	Degrés	Sinus	Tangentes
0	0	0	90	10 000 000	
1	174 524	174 551	89	9 998 471	572 899 620
2	348 995	349 208	88	9 993 908	286 362 530
3	523 360	524 078	87	9 986 294	190 811 370
4	697 565	699 268	86	9 975 640	143 006 660
5	871 557	874 887	85	9 961 947	114 300 520
6	1 045 285	1 051 042	84	9 945 218	95 143 645
7	1 218 693	1 227 846	83	9 925 462	81 443 464
8	1 391 731	1 405 408	82	9 902 680	71 153 697
9	1 564 345	1 583 844	81	9 876 883	63 137 515
10	1 736 482	1 763 270	80	9 848 077	56 712 818
11	1 908 090	1 943 803	79	9 816 271	51 445 540
12	2 079 117	2 125 565	78	9 781 476	47 046 301
13	2 249 511	2 308 682	77	9 743 701	43 314 759
14	2 419 219	2 493 280	76	9 702 957	40 107 809
15	2 588 190	2 679 492	75	9 659 258	37 320 508
16	2 756 374	2 867 454	74	9 612 617	34 874 144
17	2 923 717	3 057 307	73	9 563 048	32 708 526
18	3 090 170	3 249 197	72	9 510 565	30 776 835
19	3 255 682	3 443 276	71	9 455 185	29 042 109
20	3 420 202	3 639 702	70	9 396 926	27 474 774

21	3 583 679	3 838 640	69	9 335 804	26 050 891
22	3 746 066	4 040 262	68	9 271 839	24 750 869
23	3 907 311	4 244 749	67	9 205 049	23 558 524
24	4 067 366	4 452 287	66	9 135 454	22 460 368
25	4 226 183	4 663 077	65	9 063 078	21 445 069
26	4 383 712	4 877 326	64	8 987 940	20 503 538
27	4 539 905	5 095 254	63	8 910 065	19 626 105
28	4 694 716	5 317 094	62	8 829 476	18 807 265
29	4 848 096	5 543 090	61	8 746 197	18 040 478
30	5 000 000	5 773 503	60	8 660 254	17 320 508
31	5 150 381	6 008 606	59	8 571 673	16 642 795
32	5 299 193	6 248 694	58	8 480 481	16 003 345
33	5 446 390	6 494 076	57	8 386 706	15 398 650
34	5 591 929	6 745 085	56	8 290 376	14 825 610
35	5 735 764	7 002 075	55	8 191 521	14 281 480
36	5 877 853	7 265 426	54	8 090 170	13 763 819
37	6 018 150	7 535 540	53	7 986 355	13 270 448
38	6 156 615	7 812 856	52	7 880 107	12 799 416
39	6 293 204	8 097 840	51	7 771 460	12 348 972
40	6 427 878	8 390 996	50	7 660 444	11 917 536
41	6 560 590	8 692 868	49	7 547 096	11 503 684
42	6 691 306	9 004 041	48	7 431 448	11 106 125
43	6 819 984	9 325 151	47	7 313 537	10 723 687
44	6 946 584	9 656 888	46	7 193 398	10 355 303
45	7 071 068	10 000 000	45	7 071 068	10 000 000

D'où nous tirons :

$$b = c \sin B.$$

Exercice. — On donne dans le précédent triangle c et B ; calculer S.

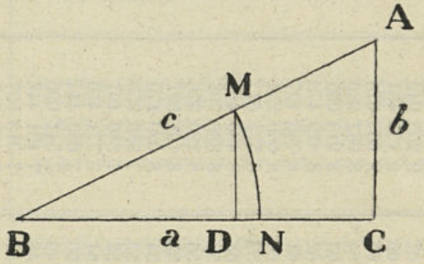

Fig. 58.

On sait que la surface S provient de la relation :

$$S = \frac{ab}{2}$$

En remplaçant a et b par leurs valeurs respectives :

$$S = \frac{1}{2} c \sin B \times c \cos B = \frac{1}{2} c^2 \sin B \cos B$$

Il serait facile de remplacer par des valeurs numériques correspondantes.

Applications. — Quoique les applications de la trigonométrie ne soient pas d'un usage courant pour les mécaniciens, il peut être bon néanmoins d'en connaître quelques spécimens susceptibles d'imitations plus ou moins approchées, comme par exemple les calculs d'un point connu à un autre inaccessible ; la distance de deux points inaccessibles ; la hauteur d'un édifice dont le pied est accessible, ou inaccessible.

1° *Déterminer la distance d'un point à un autre inaccessible.*

Soit A le point accessible dont on veut mesurer la distance au point inaccessible B (fig. 59).

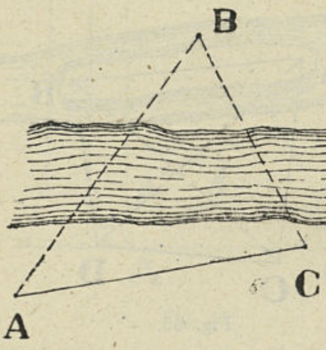

Fig. 59.

Nous mesurerons à la chaîne ou au mètre une base arbitraire A C, puis avec un instrument spécial (*graphomètre*), les angles A et C. Nous connaîtrons alors une arête et deux angles du triangle dont on veut avoir A B ou *c*. Ce dernier nous sera donné par la relation :

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}.$$

D'où :

$$c = \frac{b \sin C}{\sin B}.$$

2° *Déterminer la distance de deux points inaccessibles.*

Pour trouver la longueur inaccessible A B (fig. 60), nous mesurons encore une base C D, arbitraire, mais telle qu'on puisse voir A et B de

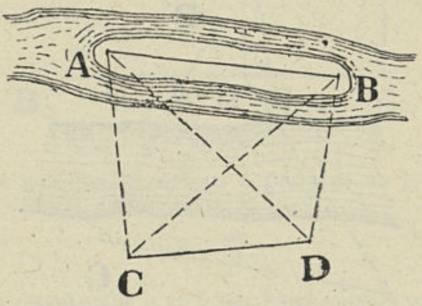

Fig. 60.

C et D. Puis nous noterons au graphomètre les angles A C B, B C D, A C D ; A D C, A D B, B D C. Ce qui, avec C D, nous permettra de déterminer A B, en nous aidant des éléments connus de triangle à triangle, par procédés successifs analogues à celui du premier problème.

3° *Trouver la hauteur d'une cheminée d'usine dont le pied est accessible.*

Soit A B cette hauteur (fig. 61). Disposons notre graphomètre pour avoir l'angle A' C' B. Nous con-

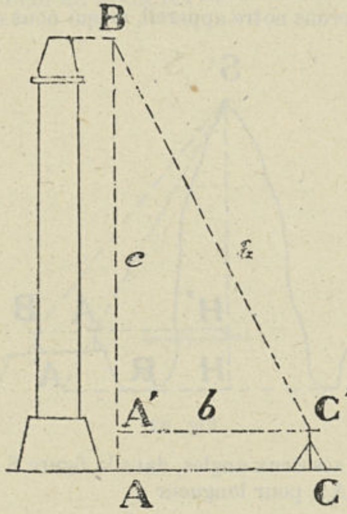

Fig. 61.

naîtrons alors les deux angles C' et A' (droit) et un côté C' A' = A C ou b.

Nous aurons ainsi :

$$c = b \operatorname{tg} C'.$$

La hauteur cherchée égale donc c plus celle du graphomètre.

4° *Mesurer une hauteur dont le pied est inaccessible.*

7.

Tel peut être le cas d'une tour isolée par un fossé, d'un pic de montagne, etc. Soit donc S ce sommet (fig. 62) visible de deux points A et B sur lesquels nous placerons notre appareil, ce qui nous donnera

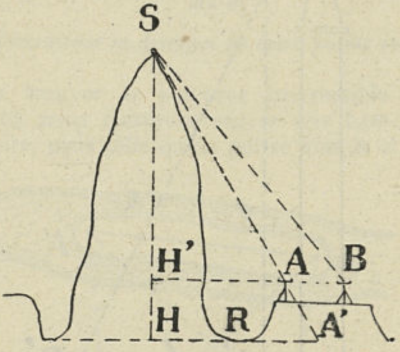

Fig. 62.

la base et ses deux angles, dans la figure S A B. Et le côté S A a pour longueur :

$$SA = \frac{a \sin B}{\sin (A + B)}$$

Nous pouvons de même lire l'angle S A H' = S A' H = A'. Et le triangle rectangle S H' A nous donne :

$$SH' = SA \sin A'.$$

En remplaçant S A par sa valeur ci-dessus :

$$SH' = \frac{a \sin B \sin A'}{\sin (A + B)}.$$

Pour la hauteur totale S H = S H' + H' H, on ajouterait la distance verticale du niveau de l'appareil au fond du ravin R.

DEUXIÈME PARTIE

NOTIONS DE MÉCANIQUE

CHAPITRE IV

Statique

SOMMAIRE. — I. Forces. — II. Centres de gravité. — III. Equilibre des corps. — IV. Equilibre du levier et de ses dérivés. — V. Equilibre du treuil et de ses dérivés. — VI. Equilibre du plan incliné et de ses dérivés.

Constatons d'abord que la *mécanique* commande aujourd'hui la presque totalité des industries modernes, sur terre, sous terre, dans les airs, sur et sous mer ; on rencontre des machines partout, depuis l'étroite boutique du coutelier jusqu'à la vaste usine du constructeur. Mais le but précis de cette science capitale va se concentrer ici dans la revue sommaire des principes qui conduisent aux matérialités, de la théorie simple à la pratique courante, en ne perdant pas de vue que nous nous adressons plus particulièrement à des travailleurs habitués à produire dans les ateliers d'ajustage, dans la « mécanique », comme on dit parfois pour distinguer ces locaux des autres, dans une même usine comportant généralement toutes les annexes de la construction du genre : ajustage, tournage, montage, chaudronnerie, fonderie, forge, et quelques autres encore...

I. FORCES

On a donné le nom de *forces* à toutes les causes qui tendent à produire ou à modifier les états de mouvement ; d'où la très grande variété des forces qui tombent sous nos sens ou non, depuis le vagissement de l'oiseau béchant sa coquille jusqu'au tourbillonnement des sphéroïdes célestes.

En mécanique, on distingue dans une force : 1° son *point d'application*, ou point précis où porte l'effort, comme le bout d'un manche de lime, la tête d'un burin, l'extrémité d'une barre d'étau, etc. ; 2° sa *direction*, ou ligne que tend à suivre le point d'application ; 3° son *intensité*, ou valeur soit en longueur, soit en poids, etc., de la même force.

Dans l'industrie, les forces s'évaluent à l'aide d'instruments spéciaux dont le plus connu est le *dynamomètre de Poncelet* (fig. 63) ; elles se représentent graphiquement par des constructions géométriques dont nous allons reparler.

Représentation graphique des forces. — On dessine les forces, généralement d'après une échelle correspondant à l'intensité, par exemple un millimètre par kilogramme.

A titre d'exemple, considérons une force dont le point d'application est en O (fig. 64), et qui est dirigée suivant O F avec une intensité de 40 kgr. Si nous nous reportons à l'étalon $i = 10$ kgr., nous devrons porter de O en F, $\frac{40}{10} = 4$ fois cet étalon, pour obtenir la représentation graphique demandée.

Principes fondamentaux. — Nous citerons successivement :

1° Deux forces égales et de sens contraire se font simultanément équilibre (en vertu de cette vérité qu'une quantité ne change point quand on

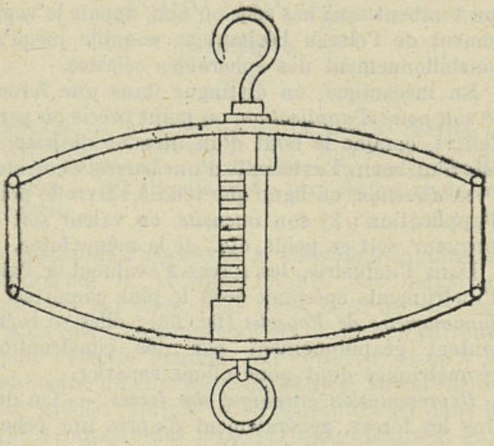

Fig. 63.

la multiplie et qu'on la divise au même instant par une même valeur) ;

2° Un corps bien équilibré est à ce moment comme au repos (car des forces égales et de sens contraires se neutralisent d'elles-mêmes) ;

3° Une force peut être appliquée indifféremment en un point quelconque de sa direction indissolublement relié à son point d'application (mais, alors, il faut tenir compte du poids, de la résistance propre du lien intermédiaire ; car on conçoit qu'un homme tirant à l'aise un chariot, ne pourrait même plus le bouger s'il lui fallait se servir d'un câble ayant une grande longueur et par suite un poids relativement considérable).

Composition des forces. — Lorsque plusieurs forces agissent sur un point, il est souvent préfé-

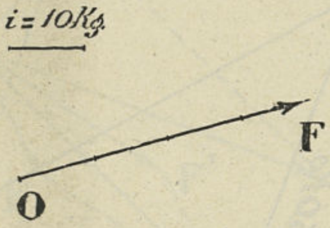

Fig. 64.

rable de les remplacer par une seule qui devient la *résultante* de ces *composantes*. Nous allons examiner les cas principaux qui peuvent se présenter.

1° *Forces concourantes.* — Leur résultante se représente en grandeur et en direction, par la diagonale du parallélogramme construit sur ces forces.

En effet, considérons d'abord les forces F = 40 kg. et F' = 50 kg., formant un angle quelconque en O (fig. 65). Il est naturel que la résultante R, qui se trouverait au milieu de l'angle (donc sur sa *bissectrice*) en cas d'égalité des composantes, se portera davantage du côté de l'effort supérieur. Pour nous fixer exactement, construisons le parallélogramme O F R F', en menant par F une paral-

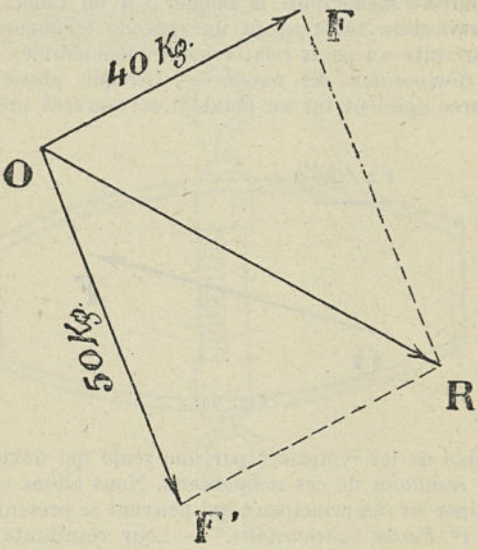

Fig. 65.

lèle à O F' et par F' une parallèle à O F : la diagonale O R nous donnera non seulement la direction, mais encore la valeur de l'effort résultant ; si donc O R = 60^{mm}, nous pouvons conclure, après contrôle rigoureux, que l'effort résultant est de 60 kg.

La construction serait analogue si, au lieu de deux, nous avions un plus grand nombre de forces. On composerait d'abord F et F' (fig. 66) pour avoir leur résultante R, puis R et F'', ce qui nous donnerait la résultante finale R'.

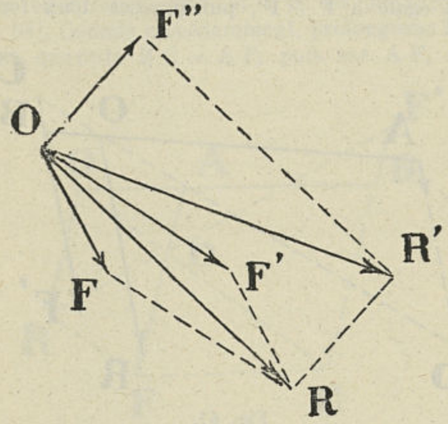

Fig. 66.

2° *Forces parallèles.* — Supposons d'abord que les forces F et F' soient de même sens (fig. 67). Il s'agit de trouver la direction et le point d'application. La direction est facile à prévoir, puisque les forces ne se rencontrent pas ; leur résultante en bissectrice leur est donc parallèle. Quant au point d'application, le simple raisonnement indique que le point O sera, comme pour le cas précédent, plus porté vers la plus grande force. Pour le trouver graphiquement, nous prolongerons les deux composantes F' d'abord d'une quantité B C = A F, et A F de F D = B F', puis en joignant D C, nous couperons A B en O, qui sera le point d'application cherché. Quant à la valeur de R, elle est évidemment égale à F + F', puisque ces deux forces

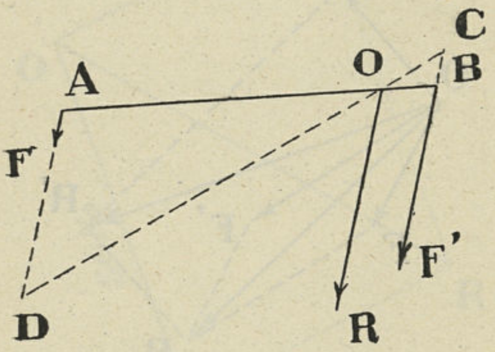

Fig. 67.

étant parallèles, leurs intensités ne se contrarient point.

En résumé, nous noterons que : deux forces parallèles et de même sens ont une résultante qui est égale à leur somme et agit parallèlement dans leur commune direction, en déterminant sur le lien des deux points d'application deux segments inversement proportionnels aux composantes.

Examinons maintenant le cas de deux forces parallèles et de sens contraires. Je dis que leur résultante, également parallèle, agit dans le sens de la plus grande avec une intensité égale à leur différence, et qu'elle détermine encore sur le lieu d'application deux segments inversement proportionnels aux composantes.

En effet, soient A F et B F' les deux forces (fig. 68). Comme précédemment, prolongeons B F' d'une quantité B C = A F, puis sur A F, déjà

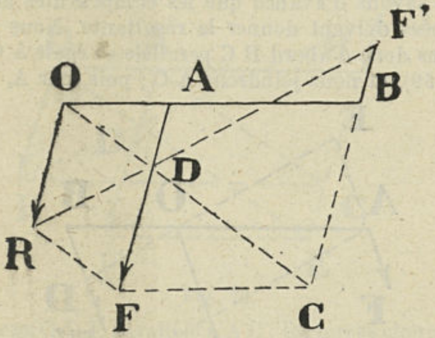

Fig. 68.

connue, portons A D = B F'. Joignons le point C au point D et, en prolongeant cette droite en même temps que B A, nous obtiendrons le point d'intersection et d'application O, par lequel il nous faudra mener une parallèle commune à F et à F'. La valeur O R de cette résultante cherchée s'obtiendra par équilibre, soit en menant F R parallèle à C O, soit en menant et prolongeant la droite F'D. Dans les deux cas, R = F — F'.

Décomposition des forces

Passant à un problème inverse, nous supposerons que l'on veut décomposer une force en deux autres parallèles, F et F'. Nous examinerons les deux cas qui peuvent se présenter.

1° *Le point d'application de la résultante est compris entre ceux des composantes éventuelles.*

En nous reportant à l'avant-dernier problème, nous savons d'avance que les composantes additionnées doivent donner la résultante. Nous mènerons donc d'abord B C parallèle et égale à O R (fig. 69), et nous joindrons A C ; puis, par A, une

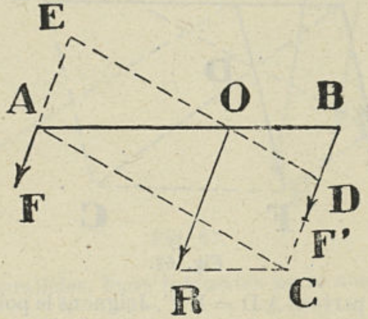

Fig. 69.

parallèle indéfinie à O R. Or, si nous menons D O E parallèle à C A, nous savons que le lien A O B se trouve divisé en segments inversement proportionnels aux forces à déterminer. Nous n'aurons donc plus qu'à porter B F' = A E ; puis, pour compléter, A F = O R — B F' = B C — B F' = F' C.

2° *Le point O n'est pas compris entre A et B* (fig. 70). D'après le cas des forces parallèles et de sens contraire, nous savons encore que la résultante donnée R est égale à la différence F — F'.

Par A et B, menons des parallèles indéterminées à O R ; puis portons, dans le même sens que la résultante, B C = O R. Joignons ensuite A C, et

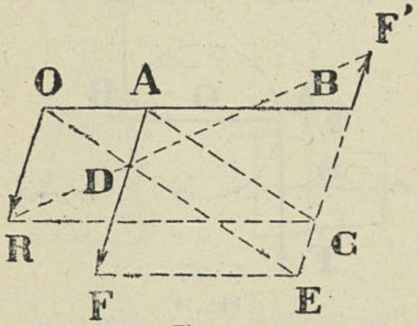

Fig. 70.

menons O D E parallèle à A C : les forces cherchées nous seront données par les longueurs B E et C E, dont la différence B C = O R.

Il ne nous restera plus alors qu'à porter, dans le sens de la résultante, la plus grande composante A F = B E, puis, dans l'autre sens, B F' = C E.

Couples de forces

On donne le nom de *couple* à tout dispositif où agissent deux forces égales, parallèles et de sens contraires, n'ayant alors aucune résultante commune.

Tel est le cas des deux forces F et F' (fig. 71) agissant sur un arbre O de diamètre A B et tendant à le faire tourner, à le tordre, phénomène dont nous reparlerons dans la résistance des matériaux, paragraphe de la *torsion.*

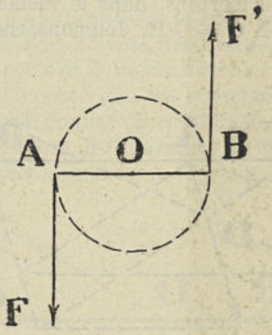

Fig. 71.

II. CENTRES DE GRAVITÉ

On a donné le nom de *gravité* d'un corps à l'intensité avec laquelle ce corps est attiré par le centre de la terre ; en termes courants, c'est le poids de ce corps au point où il se trouve de la surface terrestre. L'attraction agissant ainsi sur les diverses régions du corps, toutes ces poussées ont une résultante unique qui passe par un point spécial constituant le *centre de gravité* (en abrégé *c. d. g.*) de chaque corps. Nous allons constater que ce point d'application est très variable suivant les objets, bien qu'il ne change pas pour chacun d'eux considéré isolément.

Détermination expérimentale du c. d. g. d'un corps quelconque. — Soit une plaque métallique (fig. 72) que nous suspendrons d'abord par le crochet 1 à un fil dont le prolongement fictif librement dirigé vers le centre de la terre, passera par le c. d. g. cherché. En suspendant le même corps par un

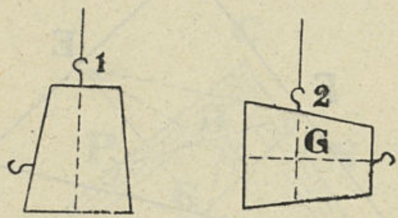

Fig. 72.

autre crochet quelconque 2, le fil prolongé passera semblablement par le même c. d. g. Ce dernier se trouvera donc à l'intersection des deux verticales libres, en G pour la plaque supposée.

C. d. g. du périmètre d'un triangle. — Soit un triangle métallique (scalène), dont les trois branches sont supposées parfaitement homogènes, A B, B C, C A (fig. 73). Comme pour une balançoire vide, le c. d. g. de chacune des trois lignes matérielles se trouve à chaque milieu, c'est-à-dire que nous obtenons le triangle D E F à l'intérieur duquel doit se trouver le c. d. g. cherché, puisque trois forces verticales (donc parallèles) passent par D, E et F, en tendant toutes à garder la suprématie. Mais les forces en D et en E influençant le point F ont pour résultante la bissectrice de l'angle F ; de même pour les autres forces comparées aux autres angles. Et comme les bissectrices de tout triangle

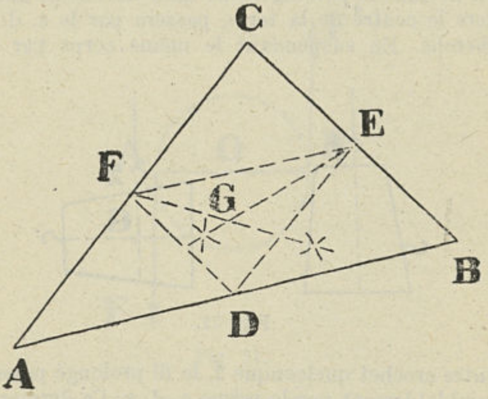

Fig. 73.

se coupent en un même point, il s'en suit que le c. d. g. cherché se trouvera juste à la rencontre des bissectrices du triangle interne D E F, dont les sommets sont respectivement aux milieux des côtés du triangle primitif A B C.

C. d. g. de la surface d'un triangle. — Soit le triangle entièrement métallique et homogène A B C (fig. 74) représenté par une tôle d'épaisseur régulière. Si nous supposons ce triangle comme formé par un grand nombre de bandes superposées parallèlement à A B, le c. d. g. de chacune de ces bandes se trouvera dans le milieu, c'est-à-dire qu'en joignant C au milieu M de A B, la médiane C M contiendra tous les c. d. g. des diverses lames constituant le triangle A B C, donc, forcément, le c. d. g. même cherché.

Un raisonnement analogue nous montrerait que ce c. d. g. doit se trouver également sur la mé-

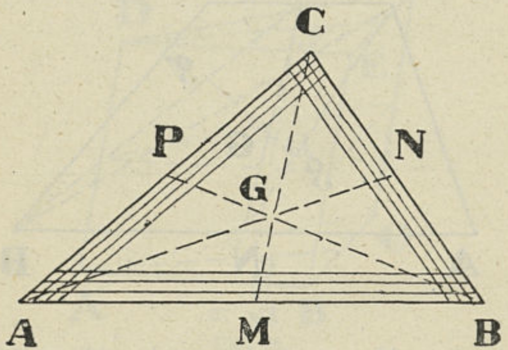

Fig. 74.

diane N A et sur la médiane B P. Il est donc forcément à leur intersection G.

Et nous savons, par la géométrie, que le point d'intersection des médianes d'un triangle se trouve au tiers de l'une d'elles, à partir d'une base quelconque.

C. d. g. de la surface d'un trapèze. — Par un raisonnement analogue à celui qui précède, et après avoir décomposé le trapèze A B C D (fig. 75) en deux triangles A B D, B C D, nous savons que le c. d. g. de ces deux triangles se trouve au tiers de la médiane N D pour l'un (en g), et au tiers de la médiane M B pour l'autre (en g'). Le c. d. g. du trapèze devra donc se trouver quelque part sur le lien $g\,g'$. Mais le trapèze lui-même considéré dans

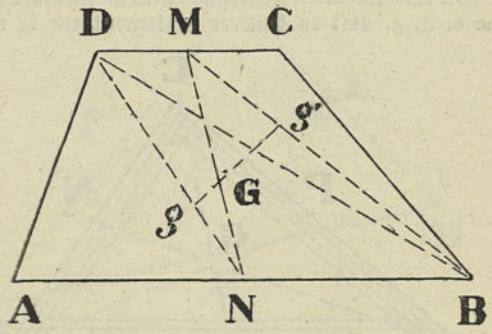

Fig. 75.

son ensemble a son c. d. g. sur la médiane M N, qui relie les milieux des deux bases (car le trapèze, comme le triangle, peut être regardé comme constitué d'un certain nombre de bandes unitaires parallèles aux deux bases, bandes linéaires dont le c. d. g. est au milieu de chacune d'elles). En d'autres termes, le c. d. g. cherché devant se trouver à la fois sur $g\,g'$ et sur M N, sera forcément à leur intersection G.

C. d. g. d'un prisme quelconque. — Considérons d'abord le prisme triangulaire A B C, D E F (fig. 76).

Nous connaissons déjà les c. d. g. des deux bases, en *g* et *g'*. Comme, d'autre part, notre prisme peut être considéré comme formé par un grand nombre de triangles minces égaux aux précédents et superposés, il s'en suit que la droite *g g'* contiendra le c. d. g. du solide. En quel point précis? Evi-

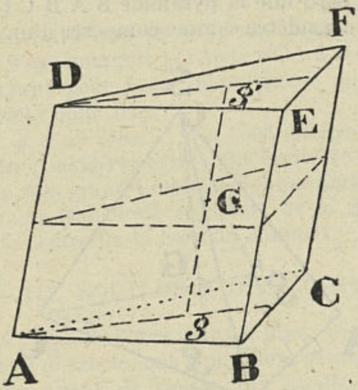

Fig. 76.

demment en son milieu G, puisque par construction ou dématérialisation, un plan qui serait mené par ce milieu parallèlement aux bases, laisserait dessus comme dessous, un même nombre de triangles matériels. Donc : le c. d. g. d'un prisme triangulaire — et par extension logique celui d'un prisme quelconque — se trouve au milieu de la droite qui joint les c. d. g. des deux bases.

C. d. g. d'un cylindre. — Par extension, puisqu'un cylindre peut être considéré comme la limite d'un parallélipipède rectangle et régulier dont les c. d. g. des bases seraient à leurs centres, il nous suffira de dire que le c. d. g. de tout cylindre droit est à la moitié de son axe, joignant les centres de ses bases.

C. d. g. d'une pyramide quelconque. — Remarquons d'abord que la pyramide S A B C (fig. 77) peut être considérée comme composée d'un certain

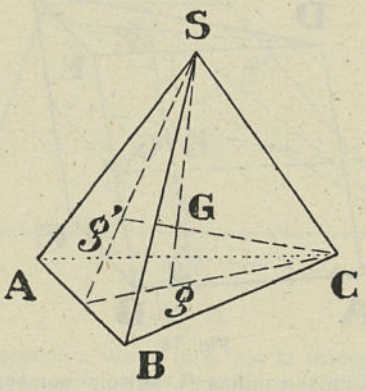

Fig. 77.

nombre de triangles matériels dont les surfaces semblables vont en diminuant parallèlement de la base au sommet. Si donc nous joignons ce dernier au c. d. g. de la base, la droite S g contiendra le c. d. g. de toute la pyramide. Un raisonnement analogue nous montrerait que la droite C g', joignant le c. d. g. de la base S A B au sommet C de la même pyramide regardée sous une autre face, contiendrait également le c. d. g. total. Ce dernier se trouvera donc forcément à la rencontre de ces deux droites en G ; et l'on prouve théoriquement que ce point est au quart de l'une quelconque des droites joignant le c. d. g. d'une base au sommet opposé.

Cette vérité trouvée pour une pyramide triangulaire s'appliquerait par extension à toute pyramide ayant pour base un polygome quelconque. Nous voilà donc fixés.

C. d. g. d'un cône. — Un cône quelconque pouvant être considéré comme une limite de pyramide avec un très grand nombre de faces unitaires, son c. d. g. se trouverait au quart de la droite joignant le centre de la base au sommet.

III. ÉQUILIBRE DES CORPS

Dans l'équilibre des corps solides, on distingue trois états distincts, que nous allons sommairement examiner avant de passer aux applications des machines simples, en remarquant qu'un corps est pratiquement maintenu soit par un point, soit par une ligne, soit par un plan fixes.

1° *Equilibre stable.* — On dit d'un corps qu'il est en équilibre *stable* lorsqu'il reprend de lui-même sa position d'équilibre normal quand on l'en a plus ou moins écarté : tel est le cas d'un fil à plomb qu'on a balancé quelques instants, ou celui d'une bouteille à large base qu'on a fait osciller, etc.

Dans ce premier cas de stabilité, on doit remarquer que le c. d. g. est situé *au-dessous* du point ou de l'axe fixes. Tel serait le cas d'un sac d'outil dont le c. d. g. se trouve au-dessous de son axe de suspension fixe.

2° *Equilibre instable.* — Quand le c. d. g. est au contraire *au-dessus* du point ou de l'axe fixes, on peut constater qu'un objet porté par ce point ou cet axe s'éloigne de plus en plus de sa position primitive, dès qu'on a commencé à l'en écarter. Tel serait le cas d'un cône dont le c. d. g. se trouverait au-dessus d'un axe passant vers son milieu : il ballotterait un instant autour de cet axe et ne pourrait se maintenir librement dans la position du sommet en bas. Pratiquement, ce sommet remonterait au-dessus de l'axe et, son c. d. g. revenant en bas, il reprendrait alors un équilibre stable qu'il conserverait de lui-même.

3° *Equilibre indifférent.* — L'indifférence est enfin visible dans l'équilibre de tous les corps dont le c. d. g. se confond avec le point de suspension, ou plus souvent se trouve sur l'axe de la pièce. Tel est le cas d'une sphère homogène qu'un axe traverse par son centre ; ou celui d'une poulie de transmission, d'une boule roulant sur une bande parfaitement horizontale, etc.

Equilibre d'un corps sur un plan. — Cette dernière supposition d'une boule sur un plan nous permet de passer sans transition à ce nouveau sujet, et de dire qu'un corps placé sur un plan horizontal est en équilibre, livré à lui-même, quand la verticale de son c. d. g. passe dans le polygone formé par les divers points d'appui, cette figure prenant alors le nom de *polygone de sustentation*, Comme pour le point et l'axe précédents, on distingue pour le plan trois genres d'équilibre : le stable, l'instable et l'indifférent.

Vu l'analogie, qu'il nous suffise de citer dans la stabilité : un cône posé par sa grande base, toutes les machines en général ; dans l'instabilité, un tronc de cône dont l'étroite base sert d'appui ; enfin dans l'indifférence : une boule, un cylindre sur génératrices, etc.

Moment des forces. — On appelle *moment* d'une force par rapport à un point, le produit de l'inten-

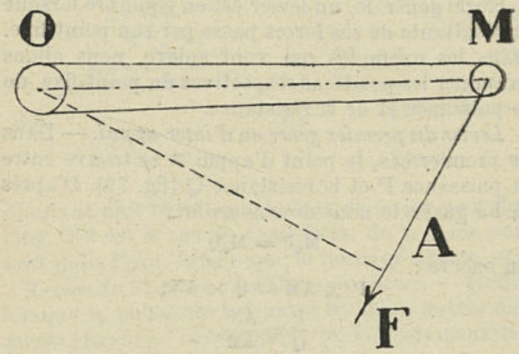

Fig. 78.

sité de cette force par son bras de levier, ce dernier se représentant par la perpendiculaire abaissée du point de rotation sur la direction de la force. C'est ainsi que le moment de la force F appliquée à la manivelle M et tournant autour de l'axe O (fig. 78), s'écrirait en abrégé :

$$M_0F = F \times OA.$$

Dans les calculs, la force s'exprime généralement en kilogrammes et le bras de levier en mètres ou fractions métriques.

IV. ÉQUILIBRE DU LEVIER ET DE SES DÉRIVÉS

On donne le nom de *levier* à toute barre rigide, droite, brisée ou courbe, portant sur un point ou sur un axe.

Règle générale, un levier est en équilibre lorsque la résultante de ses forces passe par son point fixe. Dans les exemples qui vont suivre, nous allons examiner les positions respectives du point fixe, de la puissance et de la résistance.

Levier du premier genre ou d'inter-appui. — Dans ce premier cas, le point d'appui A se trouve entre la puissance P et la résistance Q (fig. 79). D'après la loi générale nous devons avoir :

$$M_0P = M_0Q$$

ou encore :

$$P \times AM = Q \times AN;$$

$$\frac{P}{Q} = \frac{AN}{AM}.$$

Et l'on voit que la puissance et la résistance doivent être en raison inverse des bras du levier. Par conséquent, l'effort à faire, pour soulever un fardeau situé à une distance connue, sera d'autant moindre que la distance du point d'application au point fixe (ou plus exactement la longueur du bras de levier) sera plus considérable ; et *vice versa*. — Cas des balances, des cisailles, des tenailles, etc.,etc.

Levier du deuxième genre ou d'inter-résistance. — Ici, la résistance est située entre le point d'appui et la puissance.

D'après ce qui précède, l'équilibre aura lieu (fig. 80), avec :

$$\frac{P}{Q} = \frac{AB}{AD}.$$

C'est-à-dire que, comme précédemment, pour un fardeau de résistance connue, l'effort nécessaire sera

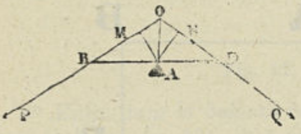

Fig. 79.

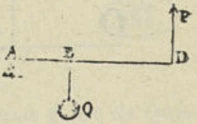

Fig. 80.

d'autant plus réduit que le bras de levier sera plus long. Tel est le cas du casse-noix, de la rame portant dans l'eau, tandis que le bordage résiste, etc.

Levier du 3[e] *genre ou d'inter-puissance.* — Enfin, lorsque la puissance est entre les deux autres éléments (fig. 81), l'invariable formule fondamentale :

$$P \times OA = R \times OB,$$

nous donne toujours :

$$\frac{P}{R} = \frac{OB}{OA}.$$

Et, ici encore, l'effort sera d'autant plus considérable que le bras de levier sera moins grand ; maximum près de O, il ira en diminuant vers B, Exemples : les leviers des soupapes de sûreté, les pelles des chauffeurs, etc.

Balance. — 1° Dans la *balance ordinaire*, le fléau est un levier d'inter-appui à bras égaux : on peut s'en assurer chez les boulangers, les épiciers, etc.

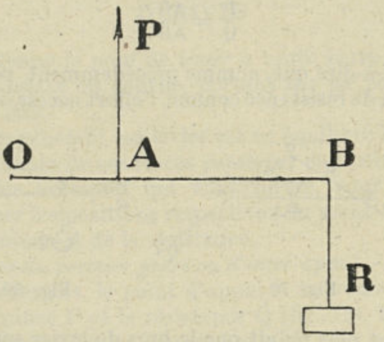

Fig. 81.

2° De son côté la *balance romaine*, encore d'inter-appui, a des bras inégaux.

Le levier est représenté par une barre graduée A B (fig. 82), avec point fixe de suspension en O, le fardeau à peser R étant suspendu en B, tandis que le poids estimatif se déplace entre les deux extrémités de la barre jusqu'à ce que celle-ci demeure en équilibre horizontal.

Cet équilibre est toujours donné par l'équation :

$$P \times OA = R \times OB;$$

d'où :

$$\frac{P}{R} = \frac{OB}{OA}.$$

Or, comme O B et P ont des valeurs invariables, on voit que seules R et O A sont fonctions l'une de l'autre ; donc, plus le fardeau sera lourd, plus le poids mesureur se trouvera éloigné du point d'appui.

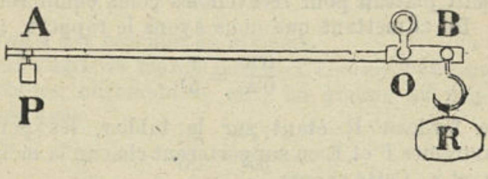

Fig. 82.

3° Enfin dans la *balance-bascule* genre de *Quintenz* (schéma fig. 83), on a comme précédemment

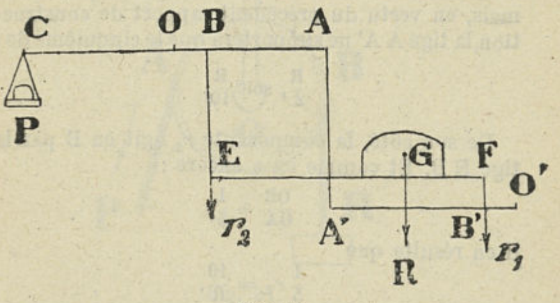

Fig. 83.

un levier d'inter-appui à bras inégaux A B O C pivotant autour du point O. En A est suspendu par la tige A A' un autre levier, mais inter-résistant A' B' O' tournant autour de O'. Enfin, un 3e levier inter-résistant F G E, relié à B par la tige B E, tout en supportant le tablier de la balance, tourne autour du point F qui est lui-même soutenu par la pièce F B'. En C pend un petit plateau pour recevoir les poids équilibreurs.

En admettant que nous ayons le rapport

$$\frac{O'B'}{O'A'} = \frac{1}{5},$$

le fardeau R étant sur le tablier, les points extrêmes F et E en supporteront chacun la moitié, r_1 et r_2. Cette charge,

$$r_1 = \frac{R}{2},$$

sera transmise en B' et par suite en A par A A', mais, en vertu du précédent rapport de construction,la tige A A' ne supportera que le cinquième de :

$$\frac{R}{2}, \text{ soit } \frac{R}{10}.$$

De son côté, la composante r_2 agit en B par la tige E B. Et comme on a encore :

$$\frac{OB}{OA} + \frac{1}{5},$$

il en résulte que

$$\frac{1}{5}\, r_2 = \frac{10}{R},$$

transmis en A exercera sur A C une force quintuple, soit

$$r_2 = \frac{R}{2}$$

En d'autres termes, l'appareil total fonctionne comme si le fardeau R agissait directement en B.

Dans les pesées commerciales, on fait généralement :

$$\frac{OB}{OC} = \frac{1}{10},$$

et l'on a des bascules au dixième.

S'il s'agit de lourds fardeaux comme bâtis de machines, automobiles, etc., on gradue au centième, avec

$$\frac{OB}{OC} = \frac{1}{100}.$$

Poulies. — Les poulies sont encore des dérivés

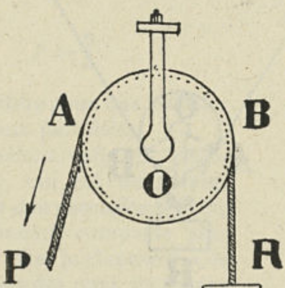

Fig. 84.

du levier. Nous examinerons les trois genres qui se présentent dans la pratique.

1° Dans la *poulie fixe* (fig. 84), la résistance R est vaincue par la puissance P, grâce à l'intermédiaire d'un câble passant dans une gorge dont le diamètre A B contient les deux bras de levier O A et O B séparés par l'axe du point d'appui O.

On a toujours :

$$P \times OA = R \times OB;$$
$$\frac{P}{R} = \frac{OB}{OA}.$$

Et puisque O B = O A comme rayons d'une même circonférence, il s'ensuit que l'effort doit être

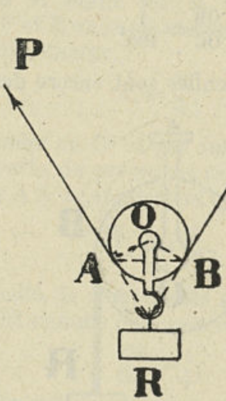

Fig. 85.

égal à la résistance pour maintenir le fardeau en équilibre. Dans le cas contraire, ce dernier montera ou descendra, suivant que l'on aura $P > R$ ou $R > P$.

2° La *poulie mobile* (fig. 85) est semblable à la fixe renversée, avec cette différence que le crochet de la poulie sert cette fois à élever le fardeau R ; tandis que les deux bouts du câble sont l'un fixé en C et l'autre actionné par la puissance P.

On démontre géométriquement que :

$$\frac{P}{R} = \frac{\text{rayon OA}}{\text{corde AB}}.$$

L'effort minimum ayant lieu lorsque la corde devient maximum ou $AB = 2$ rayons, il viendra :

$$\frac{P}{R} = \frac{1}{2};$$

ou :

$$P = \frac{R}{2}.$$

On notera alors que les deux brins sont parallèles.

3° Parlons enfin du *palan* (fig. 86), qui est un assemblage de deux *moufles* M et N, dont chacune comporte plusieurs poulies juxtaposées. Les deux moufles sont ici reliées par une corde qui descend de la chape de la moufle supérieure pour envelopper successivement les diverses poulies ; le cordon fixé à la chape ou *dormant* demeure invariable, tandis que le dernier cordon ou *garant*, tiré par les ouvriers, est variable comme le reste.

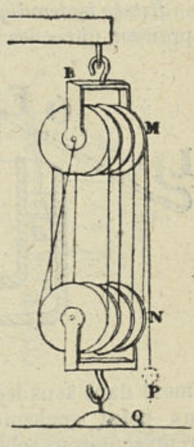

Fig. 86.

Si nous avons 8 cordons également tendus par l'effort P, nous pourrons écrire :

$$8P = Q$$

d'où :

$$P = \frac{Q}{8}.$$

C'est-à-dire que l'effort à faire est équivalent au quotient du poids du fardeau par le nombre des cordons ou des poulies en regard.

Presse hydraulique. — Inventée par Pascal pour prouver que « les liquides transmettent intégrale-

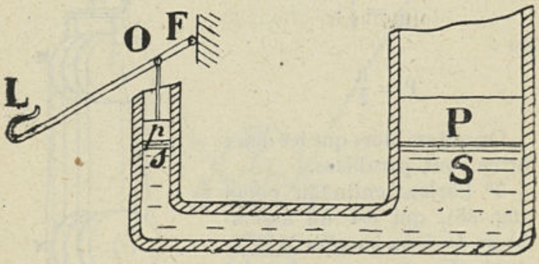

Fig. 87.

ment dans tous les sens toute pression exercée en un point quelconque de leur masse », nous la représenterons schématiquement (fig. 87) par deux corps de pompe inégaux *p*, P, dans lesquels coulissent des pistons dont le plus petit est actionné par le levier L articulé en O sur la tige de *p* et au point fixe F. Si nous désignons les aires des deux sections par *s* et S, nous pourrons écrire :

$$\frac{P}{p} = \frac{S}{s}.$$

Et c'est par là que le principe de Pascal est intéressant, matérialisé en des appareils qui rendent des services sérieux dans beaucoup d'usines et ateliers.

V. ÉQUILIBRE DU TREUIL ET DE SES DÉRIVÉS

On a donné le nom de *treuil* à une machine élémentaire composée d'un tambour T prolongé

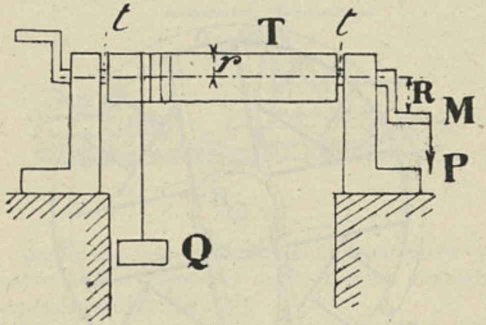

Fig. 88.

par deux tourillons *t*, qui reposent dans des appuis, l'un au moins de ces deux tourillons étant prolongé par une manivelle M sur laquelle s'exerce la puissance P, tandis que sur le tambour s'enroule une corde portant à son extrémité le fardeau à élever de résistance Q.

En désignant par R le rayon de la manivelle et par r celui du tambour, les conditions ordinaires de l'équilibre seront exprimées par :

$$P \times 2\pi R = Q \times 2\pi r\,;$$

d'où (en supprimant la quantité commune aux deux nombres, 2π) :

$$\frac{P}{Q} = \frac{r}{R}.$$

C'est-à-dire qu'ici les forces sont en raison inverse des rayons.

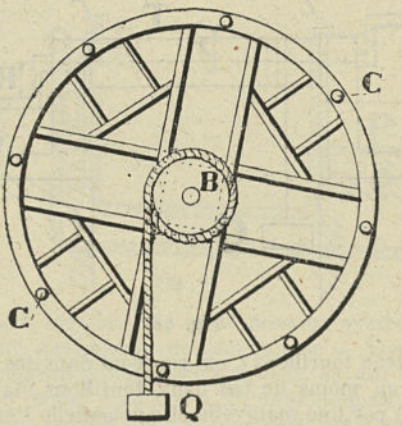

Fig. 89.

Treuil des carriers. — C'est une roue à chevilles C (fig. 89), très employée dans certaines carrières, composée d'un cylindre horizontal en bois B, de 0^m30 à 0^m40 de diamètre sur lequel passe la corde des fardeaux Q, et qui est solidaire d'une grande roue de 5 à 6 mètres de diamètre, armée de chevilles dans sa jante, et qui sont autant de prises pour les manœuvres chargés d'actionner cette encombrante machine.

Cabestan. — Surtout employé en navigation, le cabestan n'est autre qu'un treuil à axe vertical, où

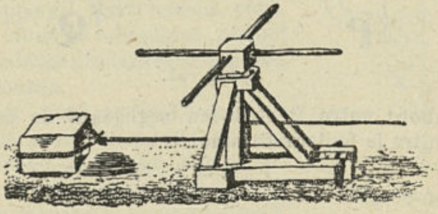

Fig. 90.

la manivelle est ordinairement remplacée par quatre barres disposées suivant deux diamètres perpendiculaires (fig. 90).

Treuil à engrenages. — Lorsqu'on veut élever de lourds fardeaux avec des forces restreintes, on utilise des mécanismes composés dont le treuil à engrenages est un des plus connus.

Dans l'exemple (fig. 91), la roue de rayon R et de puissance P est solidaire de r et celle-ci engrène R' montée sur r', portant la corde du fardeau Q.

L'équilibre nous est donné successivement,

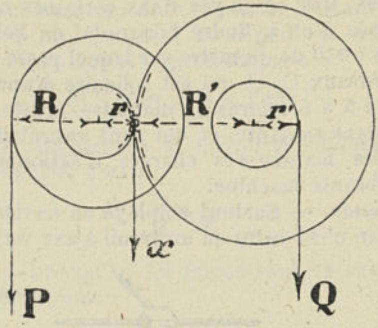

Fig. 91.

d'abord entre P et x (en négligeant de part et d'autre le facteur commun 2π) :

$$P . R = x . r,$$

d'où :

$$x = \frac{P . R}{r}.$$

Puis, entre x et Q :

$$x \times R' = Q \times r',$$

d'où :

$$x = \frac{Q . r'}{R'}.$$

Et, en égalant les deux valeurs de x :

$$\frac{P . R}{r} = \frac{Qr'}{R'}$$

d'où :

$$\frac{P}{Q} = \frac{rr'}{RR'}$$

Où l'on voit que la puissance et la résistance sont entre elles comme le produit des petits rayons aux grands rayons.

On obtiendrait évidemment le même résultat si on avait un plus grand nombre de rayons : r, r', r'', etc. ; R, R', R'', etc., avec des intermédiaires x, y, etc., à éliminer successivement pour obtenir les mêmes proportionnalités finales.

Cric. — On sait que le cric est un appareil relativement petit, mais dont la robustesse permet de soulever des fardeaux souvent très lourds.

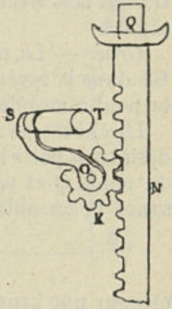

Fig. 92.

Pour nous en tenir au type simple, nous voyons (fig. 92) une manivelle S T sur l'arbre de laquelle est calé un pignon O K qui engrène avec la crémaillère N coiffée d'une fourche Q s'appuyant sur la résistance plus ou moins éloignée du sol.

Cette sommaire description sera suffisante pour nous permettre de considérer cet appareil comme une espèce de treuil dont le pignon serait le cylindre et la crémaillère la corde portant le fardeau. Dès lors, si R représente le rayon de la manivelle et r celui du pignon, le principe de l'équilibre nous donnera toujours :

$$P . R = Q . r$$

d'où :

$$P = Q . \frac{r}{R}$$

C'est-à-dire que l'effort à faire sera égal au produit de la résistance par le rapport du rayon du pignon à celui de la manivelle. Et l'on voit l'avantage d'avoir un grand bras de manivelle avec un tout petit pignon, bien que dans ce dernier cas, le travail soit évidemment plus lent qu'avec un fort pignon.

Grue. — La grue est une combinaison, très usitée dans la levée des gros fardeaux, du treuil et de la poulie mobile.

La chèvre en est l'expression la plus simple. En désignant par r le rayon du tambour d'enroulement du poids Q et par R celui de la manivelle de puissance P, on obtient :

$$P = \frac{Qr}{2R},$$

et pour une grue à rayons multiples :

$$P = \frac{Qrr'r''}{nRR'R''}.$$

VI. ÉQUILIBRE DU PLAN INCLINÉ ET DE SES DÉRIVÉS

Comme son nom l'indique, le *plan incliné* est une surface plane plus ou moins penchée sur le plan horizontal où elle appuie.

Schématiquement, nous voyons le plan incliné A B C (fig. 93) sur lequel est posé un corps dont le poids Q pend du c. d. g. G et appuie perpendiculairement sur la *base* B C du plan. Cette valeur de Q peut se décomposer en deux autres G P détruite par l'incompressibilité supposée du plan, et G F' parallèle à la *longueur* A B dudit plan avec tendance à faire glisser le corps suivant une ligne de plus grande pente.

Pour maintenir l'équilibre, nous devrons donc

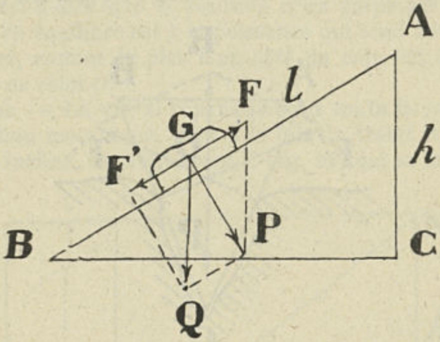

Fig. 93.

appliquer en G une autre force G F égale et directement opposée à G F'.

D'autre part, on démontre en géométrie scientifique la similitude des deux triangles rectangles A B C et G F' P, ce qui donne la relation :

$$\frac{GF'}{FP} = \frac{AC}{AB};$$

ou :

$$\frac{F}{R} = \frac{\text{hauteur du plan}}{\text{longueur du plan}} = \frac{h}{l}.$$

C'est-à-dire que l'effort nécessaire au maintien de l'équilibre est au poids du corps dans la même proportion que la hauteur à la longueur du plan.

Coin. — Cette pièce (fig. 94) est constituée par deux plans inclinés réunis par une base commune, tandis que les côtés sont généralement égaux, ce qui donne une section en triangle isocèle. Les côtés

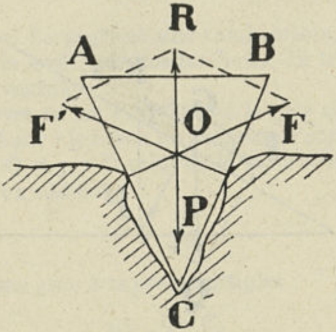

Fig. 94.

de cet objet métallique ou en bois dur appuient sur la pièce à fendre qui réagit à son tour normalement aux zones en contact.

En représentant par O F et O F' ces efforts, le parallélogramme des forces nous donnera la résultante O R égale et directement opposée à la puissance O P du coup qui tend à faire pénétrer l'un des deux corps dans l'autre.

Comme précédemment, nous constaterons la similitude des triangles A B C, O R F, qui nous permet d'écrire :

$$\frac{OF}{OR} = \frac{AC}{AB};$$

ou :

$$\frac{F}{P} = \frac{AC}{AB} = \frac{l}{b}.$$

C'est-à-dire que la réaction d'un corps sur un coin en équilibre est à la puissance qui tend à l'enfoncer, comme le plus long côté du coin est à la base de celui-ci.

Vis. — La vis, si répandue dans toute la construction mécanique, tient à la fois du treuil et du plan incliné, car tout corps C (fig. 95) qui se meut

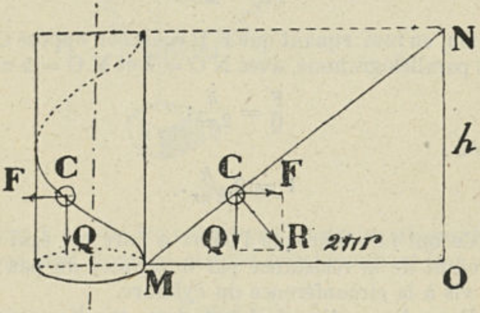

Fig. 95.

sur la vis est obligé de tourner autour d'un axe fixe (celui de la vis), tout en s'appuyant sur une surface inclinée.

En désignant par Q le poids du corps considéré soutenu par la vis, ce poids agissant sur chaque spire sera maintenu en équilibre sur le plan incliné M N par une certaine force horizontale F, dispositif qui nous présente un deuxième cas de plan incliné.

Quoi qu'il en soit, l'équilibre sera obtenu quand la résultante R de la force F et du poids Q deviendra perpendiculaire à la spire (donc à M N). Cette considération va nous permettre d'évaluer F, connaissant la longueur C Q et les directions C R, C F.

Donc, la similitude des triangles M N O, C F R nous permet d'écrire :

$$\frac{CF}{FR} = \frac{NO}{MO}.$$

Ou, en rem rquant que F R égale son opposé C Q de parallélogramme, avec $NO = h$ et $MO = 2\pi r$:

$$\frac{F}{Q} = \frac{h}{2\pi r};$$

d'où :

$$F = Q\frac{h}{2\pi r}.$$

Ce qui fait voir que l'effort à faire est égal au produit de la résistance par le rapport du pas de la vis à la circonférence du cylindre.

Dans la pratique, il est rare que l'on agisse directement sur la tangente. Presque toujours la tête de la vis est traversée par une barre de levier qui diminue d'autant plus l'effort que son bras est plus long, le rayon r se trouvant alors multiplié un certain nombre de fois.

Vis sans fin. — Cette petite machine se compose d'une vis M N tournant autour de son axe et dont le filet C C, de pas h, conduit les dents d'une roue O (fig. 96). La puissance P agit toujours sur le cylindre comme dans le treuil, tandis que la résistance Q porte sur un cylindre V assujetti sur l'axe de la roue engrenée.

En désignant par x l'effort exercé tangentielle-

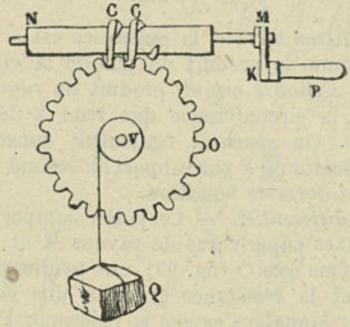

Fig. 96.

ment à la vis, les conditions générales d'équilibre nous sont données comme précédemment par :

$$P = x \frac{h}{2\pi R}.$$

Cette puissance x, d'autre part, peut être regardée comme agissant sur la roue à la façon de la manivelle d'un treuil de rayon R', pour vaincre la résistance Q de rayon r. Dans ce cas, nous pouvons écrire :

$$x = Q \frac{r}{R'}.$$

Et, en remplaçant dans l'équation précédente x par cette valeur, nous obtenons :

$$P = Q\,\frac{r}{R'} \times \frac{h}{2\pi R};$$

ou :

$$\frac{P}{Q} = \frac{rh}{2\pi RR'}.$$

En d'autres termes, la puissance est à la résistance comme le produit du pas de la vis par le rayon du cylindre est au produit du rayon de la roue par la circonférence que tend à décrire la puissance. On pourrait également conserver la dernière valeur de P par rapport au second membre de l'avant-dernière équation.

Palan différentiel. — Ce palan comporte deux poulies fixes supérieures de rayons R et r calées sur un même axe O (fig. 97), une poulie mobile E supportant la résistance Q, enfin une corde ou chaîne sur laquelle s'exerce la puissance P par les brins 1, 2, 3, 4.

D'après notre croquis, on voit que la charge est directement portée par 3 et 4, qui sont donc chacun tendus par $\frac{Q}{2}$, avec pour moment, par rapport à l'axe O, l'un $\frac{Q}{2}\,r$, et l'autre $\frac{Q}{2}\,R$.

D'autre part, le moment de la force P étant P. R, l'équilibre sera obtenu par l'égalité entre la somme des moments des couples tirant dans le même sens et la somme des moments des couples agissant en sens inverse, c'est-à-dire, en remarquant que les brins 2 et 4 montent pendant que 1 et 3 descendent :

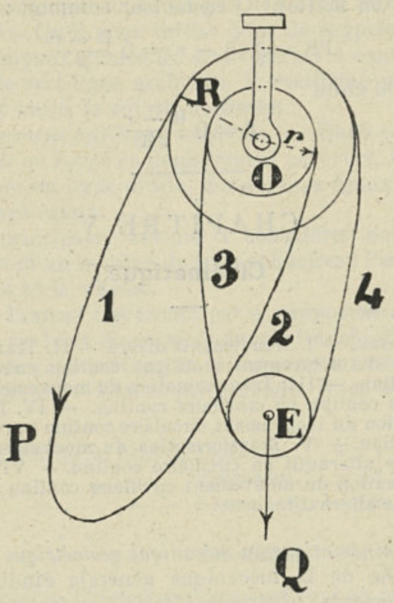

Fig. 97.

$$PR + \frac{Q}{2} r = 0 + \frac{Q}{2} R ;$$

(en remarquant que le brin 2 n'est soumis à aucun effort, se bornant à suivre en dégagement la course du n° 1). D'où :

$$PR = \frac{Q}{2} R - \frac{Q}{z} r.$$

Et, en mettant Q en facteur commun :

$$PR = \frac{Q}{2}(R - r) = Q\,\frac{R - r}{2}.$$

D'où enfin :

$$P = Q\,\frac{R - r}{2R}.$$

CHAPITRE V

Cinématique

SOMMAIRE. — I. Mouvements divers. — II. Transformation du mouvement rectiligne continu en rectiligne continu. — III. Transformation du mouvement circulaire continu en circulaire continu. — IV. Transformation du mouvement circulaire continu en rectiligne continu. — V. Transformation du mouvement rectiligne alternatif en circulaire continu. — VI. Transformation du mouvement circulaire continu en rectiligne alternatif.

La *cinématique* ou *mécanique géométrique* est une branche de la mécanique générale étudiant les mouvements, abstraction faite des forces qui les produisent. C'est à l'illustre physicien français Ampère que l'on doit, surtout, les importantes découvertes que nous allons mentionner.

I. MOUVEMENTS DIVERS

Un corps en mouvement est si facile à voir ou à imaginer occupant successivement différentes positions soit sur place, soit dans divers endroits de l'espace, que toute longue définition serait ici superflue. Qu'il nous suffise donc de rappeler que les principaux genres de mouvements à examiner sont : le rectiligne uniforme, le rectiligne uniformément varié, le rotatif uniforme.

Mouvement rectiligne uniforme. — Dans ce cas, le *mobile* ou corps en déplacement parcourt, sur sa *trajectoire* en ligne droite, des espaces égaux dans des temps égaux.

Les principales valeurs à considérer dans ce genre, sont au nombre de trois solidaires : l'espace, le temps et la vitesse.

Pour l'*espace* représenté par e, supposons que le mobile, au bout d'une seconde, ait franchi d'après sa vitesse (v) v mètres, et raisonnons sur ce point de départ de v mètres par seconde. Nous obtiendrons :

Espace e	franchi	au bout de	1 seconde...	$v \times 1$ mètre
—	—	—	2 secondes..	$v \times 2$ mètres
—	—	—	3 secondes..	$v \times 3$ —
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
—	—	—	t secondes..	$v \times t$ mètres

En résumé, l'espace parcouru est égal au produit de la vitesse par le temps :

$$e = vt.$$

Cette première égalité va nous donner immédiatement le *temps* t, car, en divisant les deux termes par v, il vient :

$$\frac{e}{v} = \frac{vt}{v} = t\,;$$

soit :

$$t = \frac{e}{v},$$

quotient de l'espace par la vitesse.

Semblablement enfin, la première égalité nous fournit la *vitesse* :

$$v = \frac{e}{t},$$

quotient de l'espace par le temps.

Nous pouvons maintenant représenter graphiquement ce même mouvement rectiligne uniforme. A cet effet, portons sur les côtés d'un angle droit O (fig. 98) d'une part (sur l'horizontale ou *abcisse*) les temps égaux 1, 2, 3,... t et d'autre part (sur la verticale ou *ordonnée*) les espaces correspondants a, b, c,... e. De ces divers points à intervalles égaux, menons des parallèles à chaque côté de l'angle ; ces nouvelles lignes se couperont en des points A, B, C.... qui donneront une droite représentative du mouvement uniforme.

Par réciprocité, connaissant la ligne O C, on peut trouver graphiquement soit l'espace parcouru au bout d'un temps quelconque, soit le temps nécessité par un espace déterminé.

Mouvement rectiligne uniformément varié. — Supposons à présent que la vitesse du mobile varie de quantités égales dans des temps égaux. La quantité dont change la vitesse pendant l'unité temporaire a reçu le nom d'*accélération.*

D'après ce qui précède, nous pouvons écrire, en représentant la vitesse initiale par v_0, l'accélération par a et le temps par t :

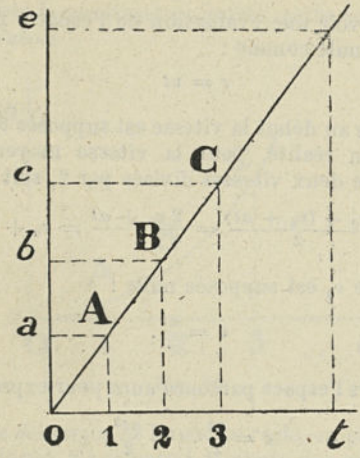

Fig. 98.

Vitesse v au bout de la 1re seconde . . . $v_0 + a$
— — — 2e — . . . $v_0 + a \times 2$
— — — 3e — . . . $r_0 + a \times 3$
. . . .
— — — te seconde . . . $v_0 + at.$

En résumé :

$$v = v_0 + at.$$

Dans le cas où la vitesse initiale est nulle (départ du repos), il reste :

$$v = at\,;$$

ce qui prouve que les vitesses sont proportionnelles aux temps.

Pour avoir une évaluation de l'espace, partons de la formule connue :

$$e = vt$$

Comme au début la vitesse est supposée v_0, nous aurons en réalité, pour la vitesse moyenne, la somme de deux vitesses divisée par 2, soit :

$$v = \frac{v_0 + (v_0 + at)}{2} = \frac{2\,v_0 + at}{2} = v_0 + \frac{at}{2};$$

et comme v_0 est supposée nulle :

$$v = \frac{at}{2}.$$

Dès lors l'espace parcouru aura pour expression :

$$e = \frac{at}{2} \cdot t = \frac{at^2}{2};$$

c'est-à-dire que les espaces parcourus sont proportionnels aux carrés des temps.

Pour représenter graphiquement les deux expressions de la vitesse et de l'espace, repartons de notre angle droit t O e (fig. 99). Portons d'abord les temps égaux 0, 1, 2, 3... sur O t ; puis élevons une perpendiculaire en chaque point, en portant sur chacune d'elles des longueurs proportionnelles aux produits de $\frac{a}{2}$ par les temps ou nombres 0, 1, 2, 3... ce qui nous donnera successivement : 0 ; 1 $\times$ 1 ; 2 $\times$ 2 ; 3 $\times$ 3... Enfin, en unissant les points O A B C. par une ligne continue, nous obtiendrons la courbe représentative des espaces cherchée.

D'après la construction suivie, cette courbe est une *parabole.*

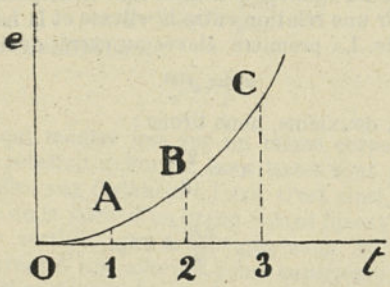

Fig. 99.

Chute des corps. — La même règle, ou plutôt une loi analogue, s'applique à la chute des corps dans l'air, celui-ci résistant au mouvement. Divers appareils, parmi lesquels le plus ancien est celui du général Morin, servent à établir la courbe prouvant que cette chute s'effectue d'un mouvement uniformément accéléré.

En représentant l'accélération due à la pesanteur par la lettre g (dont la valeur, variable avec le lieu, atteint à Paris 9,81), par h la hauteur de chute au bout de t secondes, les formules usuelles donnent :

$$v = gt\,;$$
$$h = \frac{gt^2}{2}.$$

Où l'on voit encore que les vitesses sont proportionnelles aux temps, et les hauteurs de chute proportionnelles aux carrés des temps.

Les deux égalités ci-dessus vont nous permettre d'établir une relation entre la vitesse et la hauteur de chute. La première, élevée au carré, devient :

$$v^2 = g^2t^2.$$

De la deuxième, nous tirons :

$$t^2 = \frac{2\,h}{g}.$$

Soit :

$$v^2 = g^2\,\frac{2\,h}{g} = 2\,hg.$$

Et :

$$v = \sqrt{2\,gh}.$$

Formule comme les précédentes assez fréquemment employée en mécanique.

Mouvement rotatif uniforme. — Ce mouvement est obtenu avec un mobile qui décrit sur une circonférence des arcs égaux dans des temps égaux.

Tel est le cas d'un point situé par exemple sur la jante d'une roue de rayon R. Si t représente le temps nécessaire à une rotation complète ou $2\,\pi$ R, l'espace parcouru pendant t d'une vitesse uniforme v, nous permettra d'écrire :

$$e = vt = 2\,\pi R.$$

Si, maintenant, nous considérons un autre point plus rapproché du centre, tournant au bout d'un rayon r, pendant le même temps, nous pourrons semblablement écrire :

$$e' = v't = 2\pi r.$$

Egalités qui nous conduisent aux proportions :

$$\frac{e}{e'} = \frac{vt}{v't} = \frac{2\pi B}{2\pi r}$$

Ou, en simplifiant :

$$\frac{v}{v'} = \frac{R}{r}.$$

Ce qui montre que sur un même corps animé d'une rotation uniforme, les vitesses sont proportionnelles aux distances à l'axe. C'est ainsi que les points de la jante d'un grand volant fusent en une course vertigineuse, tandis que ceux du moyeu demeurent à une allure à peine supérieure à celle de l'arbre de couche, de la machine proprement dite. Comparaison moins visible mais à données prodigieusement gigantesques, entre les régions équatoriales et les polaires du globe terrestre...

II. TRANSFORMATION DU MOUVEMENT RECTILIGNE CONTINU EN RECTILIGNE CONTINU

On se propose ici de modifier le sens et la vitesse d'un mouvement sans changer son état de continuité rectiligne. Tel est le cas des poulies ordinaires et de leurs dérivés, plans inclinés, etc.

Poulie fixe. — Nous connaissons déjà ce genre d'appareil ; qu'il nous suffise donc de rappeler que la chape étant immobile, la poulie oscille folle sur son axe, pour permettre au brin conduit R (fig. 84) de céder exactement toute quantité demandée par le brin conducteur P. Le mouvement rectiligne de R continue à demeurer rectiligne, mais de sens contraire dans P, et sa vitesse peut seule être modifiée suivant l'effort imprimé sur le conducteur.

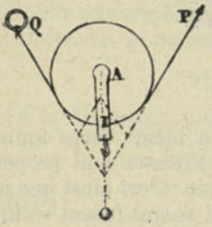

Fig. 100.

Poulie mobile. — Jeu analogue dans cette variante (fig. 100), mais la charge du crochet I ne monte que de la moitié de la longueur tirée en P, l'autre moitié se trouvant absorbée par le brin fixe Q.

Constatation semblable avec les *moufles.*

Plan incliné. — Enfin la même règle s'applique

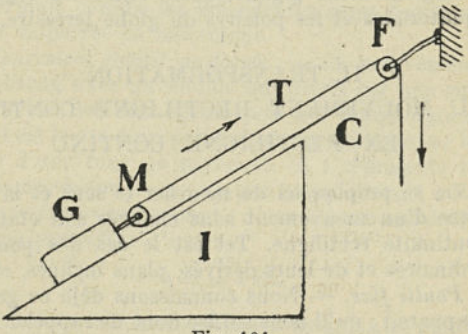

Fig. 101.

également au corps G (fig. 101) porté par le plan incliné I. Une poulie mobile M faisant en quelque sorte bloc avec G se trouve reliée à la poulie fixe F, et l'effort exercé sur le brin T tend à raccourcir le brin C. Nous avons constaté par ailleurs que le rapport des chemins parcourus par le mobile dans le sens de la base au chemin dans le sens de la longueur du plan égale le rapport de la base à la longueur du même plan.

III. TRANSFORMATION DU MOUVEMENT CIRCULAIRE CONTINU EN CIRCULAIRE CONTINU

Le genre du mouvement n'est pas changé, ici non plus, mais il se trouve transmis d'un axe à l'autre avec une vitesse presque toujours variable de la poulie ou roue conductrices à la poulie ou roue conduites.

Poulies à courroies sans fin. — Le cas des courroies sans fin se présente généralement sous la forme de deux poulies A et B (fig. 102), tournant dans le même sens, le brin conducteur T tiré vers A, entraînant le brin conduit C vers B.

On peut, d'autre part, se trouver en présence de deux poulies P et Q (fig. 103) devant tourner en sens contraires l'une de l'autre. Les deux brins T et C sont alors croisés comme deux tangentes intérieures (page 66), et le mouvement change de sens tout en demeurant circulaire continu.

Ajoutons que les mêmes règles sont applicables si, au lieu de courroies, on a des cordes en chanvre ou encore des câbles soit en cuir soit en métal, voire même des chaînes métalliques.

Engrenages. — Comme les organes précédents,

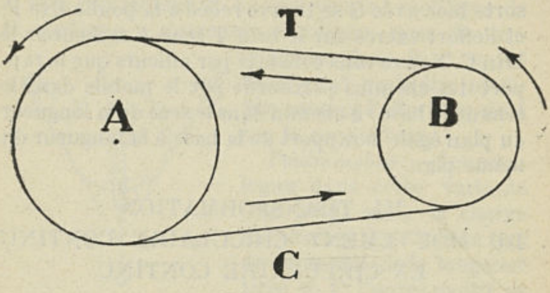

Fig. 102.

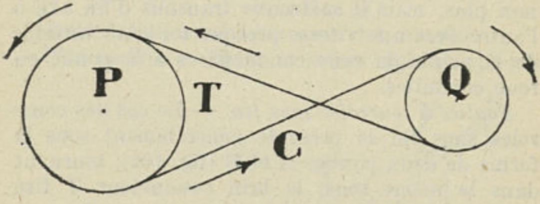

Fig. 103.

les engrenages servent à transmettre le mouvement d'un arbre à un autre ; mais, ici les distances axiales sont beaucoup plus rapprochées, puisque les roues se tangentent pour engrener, les courroies se trouvant réduites à zéro et remplacées par les dents de contact.

La grande majorité des engrenages d'ateliers sont cylindriques extérieurs ; et c'est donc de ces roues droites que nous allons parler succinctement ici. Rappelons surtout que, dans les tracés de ce genre, toutes les dents doivent avoir une forme et une adaptation convenables, pour pouvoir répondre aux conditions de la bonne marche.

Notons d'abord les définitions conventionnelles : les zones en contact sont appelées *surfaces primitives*, avec les *cercles primitifs* ou *tangents* corres--pondant en coupe axiale, le point de contact de ces derniers étant l'*origine du pas* ; le *pas* est égal à la

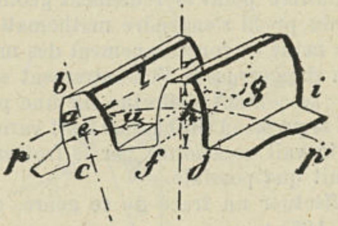

Fig. 104.

distance des axes de deux dents consécutives relevée sur le cercle primitif du genre *p p'* (fig. 104).

Toute circonférence primitive de rayon R doit contenir un nombre exact de fois le pas *p* ; par exemple :

$$2\pi R = np.$$

Le cercle primitif *p p'* partage chaque dent en deux parties : celle du dessus est la *tête a b*, et celle du dessous le *pied a c* ; la partie *b* couvrant la tête constitue le *sommet*, tandis que l'aire *f g i j* forme la *racine* ; la distance entre ces deux superficies mesurant la hauteur *h*. On voit de même la largeur *l*, l'épaisseur *e*, enfin le creux *u* que l'on fait généralement un peu supérieur à *e*, pour ménager un léger jeu facilitant l'engrènement.

Le profil le plus généralement adopté est celui à *développante* (page 63), car on lui reconnaît plus d'avantages qu'aux autres procédés : toutes les roues engrènent aisément quel que soit le nombre de leurs dents, pourvu qu'elles aient le même pas ; une faible variation dans la distance de leurs centres n'altère point le roulement géométrique ; la forme du profil s'engendre mathématiquement d'après le mode de fonctionnement des machines ; la section dangereuse à l'encastrement se trouve renforcée ; le contact s'effectue sur une plus large surface et la pression sur chaque dent varie moins ; enfin, le travail occasionné par le frottement est aussi réduit que possible.

Pour effectuer un tracé de ce genre, on opère ainsi (fig. 105) :

Par le point de tangence T des cercles primitifs on mène une droite M T M' inclinée sur la ligne des centres O O' d'un certain angle (ordinairement 75°) ; puis, des points centraux on abaisse les perpendiculaires O M, O' M' sur cette droite, et, des mêmes centres avec les mêmes perpendiculaires on décrit des circonférences concentriques aux cercles primitifs, circonférences intérieures ayant M M' comme tangente commune. Dès lors, si on enroule respectivement les fractions T M, T M', le point commun de contact T décrira deux développantes obligées de se toucher toujours en un point de la tangente M T M'.

En d'autres termes, le point de contact sera invariablement maintenu sur la même ligne normale, c'est-à-dire que l'effort exercé sur chaque dent attaquée demeurera constant du début à la fin de ce contact.

Dans l'exemple choisi de 75°, le cercle développé donnant naissance à la développante a son dia-

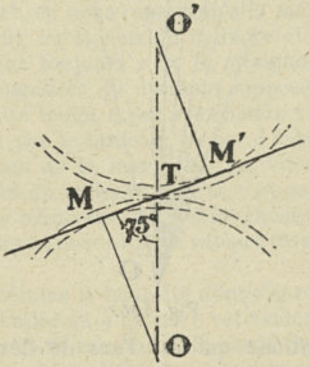

Fig. 105.

mètre égal à 0,966 du cercle primitif. D'après ces données, nous tracerons la denture ainsi (fig. 106) :

Nous décrirons d'abord la circonférence de rayon O K = 0,966 O T, et nous la diviserons en un certain nombre de parties égales. Par les points de division *a*, *b*, c..., nous mènerons les tangentes *a* 1, *b* 2, *c* 3..., en portant sur chacune d'elles et à partir du point de tangence une longueur égale à l'arc compris entre l'origine et ce point de tangence. On réunit alors les points successifs par une

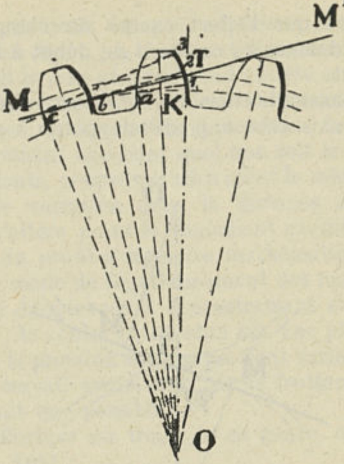

Fig. 106.

courbe continue qui est l'arc de développante cherché.

Il ne reste plus ensuite qu'à compléter chaque dent par une courbe symétrique, par le creux, l'épaisseur, etc., valeurs relevant de la résistance des matériaux.

IV. TRANSFORMATION DU MOUVEMENT CIRCULAIRE CONTINU EN RECTILIGNE CONTINU

Ici encore, on veut modifier à la fois le sens et la vitesse du mouvement : par exemple dans le treuil et ses dérivés.

Treuil. — Nous connaissons cet appareil pour nous en être occupés avec les autres dans le chapitre de la *Statique*, mais en tenant compte de la puissance et de la résistance. Nous allons voir que le même rapport existe également pour les chemins parcourus.

En effet, en nous reportant à la même figure 88 (page 149), les rayons du cylindre et de la manivelle étant toujours r et R, désignons par ω la vitesse angulaire du système supposée invariable pendant un temps t, par h le chemin verticalement parcouru par le fardeau, et par l celui décrit par le maneton de la manivelle. La vitesse à la circonférence du cylindre sera ωr, et celle à l'extrémité de la manivelle ω R ; et les chemins parcourus en un temps t auront pour valeurs respectives $\omega r t$ et $\omega \mathrm{R} t$.

Mais, comme la quantité dont s'enroule la corde sur le cylindre ou $h = \omega r t$, est évidemment égale à celle dont se raccourcit la corde du fardeau ou $l = \omega \mathrm{R} t$, nous obtiendrons le rapport :

$$\frac{h}{l} = \frac{\omega r t}{\omega \mathrm{R} t};$$

ou, en supprimant le produit commun ωt :

$$\frac{h}{l} = \frac{r}{\mathrm{R}},$$

conclusion déjà connue.

Crémaillère. — Le résultat est analogue avec une crémaillère qui, nous l'avons vu à propos du cric, peut être considérée comme une sorte de treuil ; la vitesse de la tige dentée serait alors égale à celle de la roue prise à sa circonférence primitive.

Pour faire le tracé correspondant, nous considérerions cette tige comme un fragment de roue dentée dont le rayon serait infini, puis on opérerait semblablement au cas des engrenages droits, en partant de l'inclinaison de la tangente à 75° (fig. 107).

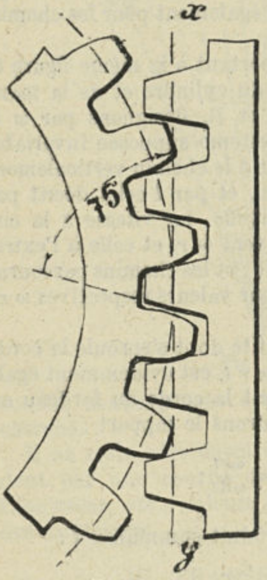

Fig. 107.

Le pignon étant supposé tracé, pour la tige il ne reste plus qu'à porter les creux et les épaisseurs des dents sur l'arête primitive $x\ y$, en menant par chacun de ces points une droite inclinée à 75°. Le reste se complète suivant les données de la construction.

Vis.—Voici un autre exemple de mouvement circulaire transformé en rectiligne, que l'écrou soit fixe ou mobile. Après avoir considéré cet organe en fonction des efforts, nous allons retrouver le même rapport pour les vitesses.

En désignant encore par h le pas et par r le rayon de la vis ou de sa barre d'action, nous savons que les vitesses v de la vis ou de l'écrou et V de la circonférence d'action seront respectivement égales à $2\,\omega\,r$ et h. D'où le rapport :

$$\frac{V}{v} = \frac{2\pi r}{h},$$

résultat annoncé.

V. TRANSFORMATION DU MOUVEMENT RECTILIGNE ALTERNATIF EN CIRCULAIRE CONTINU

L'exemple le plus répandu de cette transformation de mouvement est matérialisé dans les *moteurs mécaniques* à dispositif de *bielle et manivelle*.

Considérons donc la machine schématique (fig. 108) à cylindre C, piston P, dont la tige T

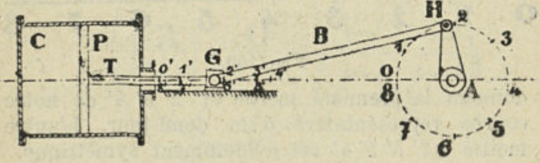

Fig. 108.

actionne, par l'intermédiaire de la bielle B, articulée en G et H, la manivelle commandant l'arbre A.

La seule inspection de notre croquis montre qu'un tour complet de manivelle correspond à un voyage aller et retour du piston.

Pour mieux voir le graphique d'un tel mouvement, divisons notre circonférence en un nombre pair de parties égales (car tout est symétrique ici), huit par exemple, et développons-la suivant A B (fig. 109). Dans la précédente figure complémentaire, décrivons de chaque point de division comme centres des arcs ayant G H pour rayon (d'axe en axe), lesquels couperont G T en des zones inégales 0'-1', 1'-2', 2'-3', 3'-4', que nous reporterons normalement sur A B, ce qui nous

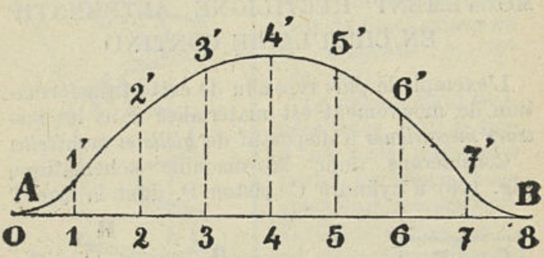

Fig. 109.

donnera la première moitié 01' 2' 3' 4' de notre courbe représentative d'un demi-tour. L'autre moitié 8 7' 6' 5' 4' est évidemment symétrique.

Comme observation pratique, nous devons enfin remarquer que, si le mouvement circulaire de l'arbre est régulièrement continu, celui du piston est au contraire alternativement irrégulier, d'abord accéléré de 0 à 4', ensuite symétriquement retardé de 4' à 8 ,variations sensiblement uniformes qui s'expliquent d'abord par le genre d'introduction de l'agent moteur, ensuite par la limite du cylindre au champ d'action forcément alterné.

Mais le cadre rudimentaire de ce chapitre nous oblige à ne pas le surcharger par d'autres détails qui seront mieux à leur place ailleurs.

VI. TRANSFORMATION DU MOUVEMENT CIRCULAIRE CONTINU EN RECTILIGNE ALTERNATIF

Cette modification du mouvement est très employée dans les machines sous forme d'*excentriques*, comme intermédiaires entre divers arbres secondaires et les tiroirs de distribution, les pompes, etc.

L'excentrique courant à collier se compose (fig. 110) d'un collier C, se déplaçant autour de

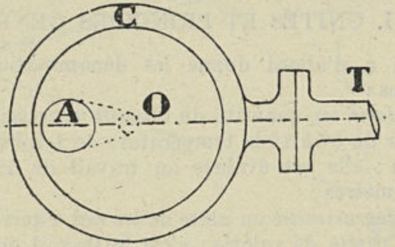

Fig. 110.

l'arbre A pour transmettre son mouvement circulaire continu et le transformer en rectiligne alternatif dans la tige T.

En réalité, on peut voir là comme une amplification de la manivelle de bras O A, dont on augmenterait le diamètre du bouton O jusqu'à ce qu'il dépasse pour l'englober l'arbre A. L'*excentricité* est alors représentée par la distance des centres O A.

CHAPITRE VI

Dynamique

SOMMAIRE. — I. Unités et principes généraux. — II. Travail des forces. — III. Travail de machines simples. — IV. Travail d'inertie. — V. Applications aux machines. — VI. Mesure du travail des machines.

Après la cinématique, et plus industriellement, la *dynamique* étudie les mouvements avec les forces qui les produisent.

I. UNITÉS ET PRINCIPES GÉNÉRAUX

On a d'abord donné les dénominations suivantes :

Calorie ou quantité de chaleur nécessaire pour élever de 0° à 1° la température de 1 kilogramme d'eau ; elle est évaluée au travail de 425 kilogrammètres ;

Kilogrammètre ou unité de travail, équivaut à la 425e partie de calorie ; c'est le travail qu'il faut fournir pour élever 1 kilogramme à 1 mètre de hauteur ;

Cheval-vapeur ou unité de mesure des machines, équivalant à 75 kilogrammètres (en abrégé 75 kgm.) par seconde ;

Poncelet ou cheval de 100 kgm., qui serait d'un usage beaucoup plus rationnel que le précédent.

Nous venons de dire que le kgm. représente l'unité de travail. D'une manière plus générique, on appelle *travail mécanique* le produit d'une force par le chemin qu'a parcouru son point d'application suivant la direction de cette même force.

Quand la force et le chemin n'ont pas la même direction, on multiplie l'intensité par la projection du chemin sur la direction de la force. C'est ainsi que $T = F \times AB'$ (fig. 111).

Enfin, quand la force est appliquée tangentiellement, par exemple sous forme de courroie sur

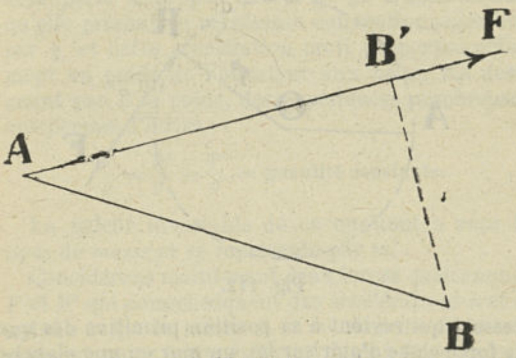

Fig. 111.

poulie, le travail est égal au produit de l'intensité de la force par le chemin qu'a parcouru son point d'application. Pour un angle $AOR = a$, nous aurons (fig. 112) :

$$T = F \times \text{arc } AR$$

Et, pour un tour complet :

$$T = F \times 2\pi r$$

Avant d'aller plus loin, nous devons mentionner les principes essentiels sur lesquels repose la dynamique :

1° *Un corps quelconque ne peut de lui-même modifier son état :* ni sortir de son repos, ni modifier son mouvement, s'il en a un ;

2° *L'action est toujours égale à la réaction*, cette dernière s'affirmant dans une foule de cas : un

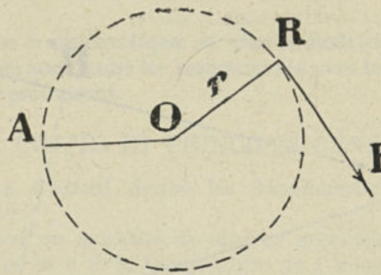

Fig. 112.

ressort qui revient à sa position primitive dès que la force cesse d'agir sur lui, un mur ou une planche qui résistent, etc. ;

3° *Les forces ont toutes des effets respectivement indépendants*, c'est-à-dire qu'une force quelconque agit sur un corps comme si elle était seule ; si le corps est en mouvement, elle l'actionne comme s'il se trouvait encore au repos.

II. TRAVAIL DES FORCES

Examinons les différents genres qui peuvent se présenter.

Forces constantes. — Toute force constante communique au mobile sur lequel elle agit, un mouvement uniformément accéléré.

Le type le plus répandu de force constante (pour un même lieu) est la *pesanteur*, dont nous avons déjà parlé à propos des c. d. g. L'accélération qu'elle produit se représente conventionnellement par g, et cette accélération croît proportionnellement au poids de l'équateur aux pôles. En désignant par P le poids, des expériences nombreuses ont permis d'écrire :

$$\frac{P}{g} = \frac{P'}{g'} = \frac{P''}{g''} = \text{quantité constante.}$$

La valeur invariable de ce quotient a reçu le nom de *masse* et se représente par m.

Considérons maintenant deux forces quelconques F et F' qui communiquent des accélérations a et a' à deux corps de masse m et m'. Comme ci-dessus, nous pourrons écrire (n'ayant plus à faire avec la pesanteur) :

$$\frac{F}{a} = m \; ; \; \frac{F'}{a'} = m'.$$

D'où :

$$F = ma \; ; \; F' = m'a'.$$

En divisant membre à membre :

$$\frac{F}{F'} = \frac{ma}{m'a'}.$$

Trois cas particuliers peuvent alors se présenter :

1° Les accélérations sont égales, $a = a'$. Soit :

$$\frac{F}{F'} = \frac{m}{m'};$$

et les masses sont proportionnelles aux forces.

2° Les masses sont égales, $m = m'$, alors :

$$\frac{F}{F'} = \frac{a}{a'};$$

et les accélérations deviennent proportionnelles aux forces.

3° Enfin, si ce sont les forces qui sont égales, le rapport initial prend la valeur de l'unité,

$$\frac{ma}{m'a'} = 1, \text{ ou } ma = m'a';$$

d'où :

$$\frac{m}{m'} = \frac{a'}{a};$$

et les accélérations sont en raison inverse des masses.

Forces centripète et centrifuge. — On a donné le nom de *centripète* à toute force qui tend à attirer un mobile vers le centre autour duquel il tourne. Tel est le cas d'une balle qu'on fait tourner en la maintenant par l'autre bout de la ficelle servant de lien, et ce dernier réagit par un certain effort qui mesure en kilogrammes la valeur exacte de cette force centripète. Si le fil vient à se rompre, le corps en rotation s'échappe par la tangente à la circonférence qu'il décrivait à ce moment.

D'autre part, la similaire et contraire *centrifuge* est la force qui tend à éloigner un corps en rotation du centre auquel il se trouve lié.

Ces deux forces ont d'ailleurs même expression :

$$F = \frac{mv^2}{r};$$

m représentant la masse, v la vitesse, r le rayon au bout duquel tourne l'objet.

On peut donc retenir que la force centrifuge (la plus industriellement connue) est proportionnelle à la masse et au carré de la vitesse, mais inversement proportionnelle au rayon de la circonférence décrite par le c. d. g. du corps.

Au point de vue technologique, il est bon d'observer que, dans tous les organes et pièces susceptibles de tourner, la matière doit être uniformément et symétriquement répartie autour de l'axe central : par exemple le nombre pair des bras de volants, de poulies, de régulateurs, etc.

III. TRAVAIL DE MACHINES SIMPLES

Examinons sommairement ce qui se passe dans les machines simples en travail.

Levier. — Nous connaissons déjà les conditions de l'équilibre statique (page 141). Si nous nous reportons à la figure et que nous imprimions un léger mouvement d'oscillation autour du point A, en désignant par p le chemin correspondant à A M (côté puissance) et r celui qui relève de A N (côté résistance), nous obtiendrons :

$$P \times p = Q \times r.$$

C'est-à-dire que le travail de la puissance égale celui de la résistance.

Démonstration analogue pour les dérivés du levier : balances, poulies, etc.

Treuil simple. — En nous reportant aux annotations de la figure 113, nous savons que l'équilibre

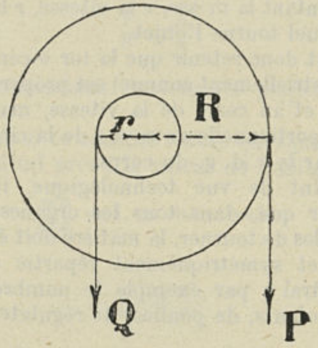

Fig. 113.

statique nous est donné par l'égalité des moments :

$$P \,.\, R = Qr.$$

Soit, en multipliant les deux membres par $2\,\pi$:

$$P \,.\, 2\pi R = Q \,.\, 2\pi r.$$

C'est-à-dire que les travaux sont égaux pour un tour de manivelle uniforme.

Palan différentiel. — Considérons que le palan différentiel (fig. 97) où les forces en jeu sont encore :

P agissant sur la poulie de rayon R, et Q la résistance supportée par la poulie inférieure mobile E, la deuxième poulie fixe ayant un rayon r.

La puissance P actionnant la poulie C fera parcourir au brin 1, pour un tour complet, le chemin $2\pi R$, tandis que le brin 2 se sera raccourci de $2\pi R$ également. Mais comme r tourne en même temps que R d'un tour complet, le brin 3 se trouvera lui aussi allongé de $2\pi r$.

En conséquence, puisque les brins 2 et 3 se sont d'une part raccourcis de $2\pi R$ et d'autre part rallongés de $2\pi r$, ils ont en définitive diminué de :

$$2\pi R - 2\pi r.$$

Mais la poulie mobile O étant montée de la moitié de cette différence, il en sera de même du poids Q, qui se sera donc élevé de :

$$\frac{2\pi R - 2\pi r}{2} = \pi R - \pi r.$$

Et comme finalement les travaux des forces en présence se trouvent équilibrés, nous devrons obtenir l'égalité classique :

$$P \times 2\pi R = Q\,(\pi R - \pi r)\,;$$

qui devient par transformations successives :

$$\frac{P}{Q} = \frac{\pi R - \pi r}{2\pi R} = \frac{R - r}{2R}.$$

Où l'on voit encore que la puissance est à la résistance comme la différence des rayons des deux poulies fixes est au diamètre de la plus grande.

Vis. — Imaginons une vis fixe N T de pas S coiffée d'un écrou M O à charge Q, le bras de levier actionnant la tête de la vis ayant une longueur l = A B où s'exerce la puissance P (fig. 114).

Pour un tour complet du levier, le point d'application de P aura parcouru $2\pi l$, tandis que l'écrou

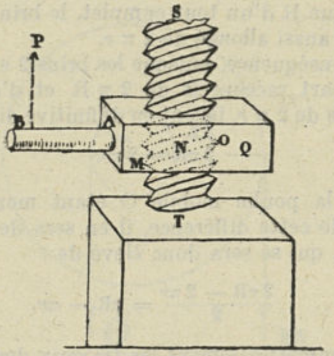

Fig. 114.

chargé de Q se sera déplacé du pas S. Les travaux produits étant équivalents, nous obtiendrons toujours :

$$P \times 2\pi l = Q \times S$$

d'où :

$$\frac{P}{Q} = \frac{S}{2\pi l}.$$

Ce qui montre encore que la puissance est à la résistance comme le pas de la vis est à la circonférence décrite par le bout du levier de manœuvre.

Nous pourrions d'ailleurs reproduire point par point en dynamique, les autres résultats obtenus par la méthode statique, les deux se confirmant en se complétant.

IV. TRAVAIL D'INERTIE

On sait que le principe de l'inertie, ou état des corps inertes par eux-mêmes, est un de ceux sur lesquels repose la mécanique.

Le travail d'inertie, qui va nous occuper dans ce paragraphe, peut être utile à calculer dans différentes circonstances, par exemple lorsqu'on ne connaît pas le chemin parcouru, mais bien la vitesse imprimée au mobile par une force elle-même mal définie. Il n'est alors besoin que de connaître, en plus de la vitesse, la masse du mobile.

Deux cas peuvent se présenter, suivant qu'il s'agit d'un mouvement soit de translation, soit de rotation.

I. *Mouvement de translation.* — Partons du cas général d'une force constante en intensité et en direction agissant sur un corps qui peut ou partir du repos (donc sans vitesse), ou posséder une vitesse initiale v_0.

1° Force constante sur un corps au repos. Si F est cette force imprimant au corps de poids P un mouvement uniformément accéléré pendant le temps t et avec une vitesse v, le travail produit sur un espace e sera :

$$T_i = F \cdot e.$$

Mais comme nous ne connaissons pas e, il va falloir aboutir par un autre chemin. A cet effet, représentons par a l'accélération correspondante au problème, g étant celle de la pesanteur. Nous savons déjà que les forces sont proportionnelles aux accélérations :

$$\frac{F}{P} = \frac{a}{g}.$$

Ou, en multipliant par un même nombre t, les deux termes du dernier membre :

$$\frac{F}{P} = \frac{at}{gt} = \frac{v}{gt};$$

car la vitesse, nous le savons également, égale le produit de l'accélération par le temps.

Nous tirons de là :

$$F = \frac{Pv}{gt}.$$

Multipliant chaque membre par e, il vient :

$$F \cdot e = \frac{Pv}{gt} \cdot e.$$

Nous voici donc en présence du travail d'inertie

$$T_i = F \cdot e.$$

D'autre part, la valeur e nous est connue comme pouvant se mettre sous la forme :

$$e = \frac{vt}{2}.$$

Donc, en remplaçant ci-dessus :

$$T_i = F \cdot e = \frac{Pv}{gt} \cdot \frac{vt}{2}.$$

Et, en simplifiant :

$$T_i = \frac{Pv^2}{2g} \times \frac{P}{g} \cdot \frac{v^2}{2}.$$

Enfin, comme $\frac{P}{g}$ = la masse m, il reste définitivement :

$$T_i = \frac{1}{2} mv^2.$$

C'est ce qu'on appelle la *force vive* ; et l'on voit que :

Le travail d'une force appliquée à un corps est égal au demi-produit de la masse par le carré de la vitesse, c'est-à-dire à la force vive imprimée audit mobile.

2° Force constante sur un corps en mouvement. Considérons maintenant notre mobile pendant un temps t, entre deux vitesses v_0 et v. L'accroissement de vitesse dû à F étant $v - v_0$, nous pourrons écrire comme suite du précédent cas :

$$F = \frac{P}{g} \cdot \left(\frac{v - v_0}{t}\right).$$

Et comme l'espace parcouru pendant le même temps t, a pour expression :

$$e = \left(\frac{v + v_0}{2}\right) \cdot t,$$

le travail sera, en effectuant successivement :

$$T_i = F \cdot e = \frac{P}{g}\left(\frac{v - v_0}{t}\right) \cdot \left(\frac{v + v_0}{2}\right) t = \frac{P}{g}\left(\frac{v^2 - v_0^2}{2}\right)$$
$$= \frac{P}{g} \cdot \frac{v^2}{2} - \frac{P}{g} \cdot \frac{v_0^2}{2} = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2.$$

Le travail d'inertie est donc égal à la différence des forces vives correspondant aux deux vitesses finale et initiale.

II. *Mouvement de rotation.* — Nous considérons encore les deux cas généraux qui peuvent se présenter.

1° Force constante sur un corps au repos. Nous avons déjà constaté que la vitesse varie dans les différentes régions d'un corps qui tourne autour d'un axe ; le précédent raisonnement ne peut donc se répéter ici. Pour vaincre la difficulté, décomposer la masse M du corps par ses masses élémentaires m, m', m''... de vitesses respectives v, v'. v''... Le principe général des forces vives prendra la forme :

$$T_i = \frac{1}{2} MV^2 = \frac{1}{2} (mv^2 + m'v'^2 + m''v''^2 ...).$$

Pour décomposer encore, désignons par ω l'invariable vitesse angulaire des masses m, m', m''... dont les distances à l'axe sont respectivement r, r' r''... Nous obtiendrons :

$$T_i = \frac{1}{2} (m\omega^2 r^2 + m'\omega^2 r'^2 + m''\omega^2 r''^2 + ...)$$
$$= \frac{\omega^2}{2} (mr^2 + m'r'^2 + ...).$$

La somme entre parenthèses, ou moment d'inertie de la masse, se totalise par la lettre I. Il ne reste plus alors que :

$$T_i = \frac{\omega^2 I}{2}.$$

D'où la règle :

Pour imprimer à un mobile partant du repos une vitesse déterminée, il faut le pousser avec une force qui produise un travail égal à la moitié du produit du carré de sa vitesse angulaire par son moment d'inertie.

2° Force constante sur un corps en mouvement. Par un raisonnement analogue au cas similaire de la translation, nous écrirons que le travail de la force vive sera, au début (vitesse angulaire initiale ω_0) :

$$T_0 = \frac{\omega_0^2 I}{2}.$$

Et, à la fin (pour ω) :

$$T = \frac{\omega^2 I}{2}$$

d'où :

$$T_i = T - T_0 = \frac{I}{2}(\omega^2 - \omega_0^2).$$

Dans ce cas, le travail d'inertie est égal à la moitié du produit du moment d'inertie par la différence des carrés des vitesses angulaires finale et initiale.

V. APPLICATIONS AUX MACHINES

Les machines industrielles sont bien faites pour servir d'exemples comme matérialisations des principes qui précèdent, car leurs organes en travail agissent les uns rectilignement et les autres rotativement. Nous allons donc passer en revue les trois périodes caractéristiques d'une machine en mouvement : mise en train, marche normale, arrêt complet.

Mais remarquons d'abord que nous aurons en présence antagoniste le travail moteur (ou T_m) développé par le fluide en action, et le travail résistant (ou T_r) naturellement opposé par les diverses résistances nées de l'inertie des pièces, du frottement, etc.

I. *Mise en train.* — Si nous désignons par $\Sigma \frac{1}{2} m v^2$ et $\Sigma \frac{1}{2} m v_0^2$ les sommes de toutes les forces vives finales et initiales, nous pourrons poser la formule générale du travail utile, obtenu après que la force motrice a vaincu toutes les résistances nuisibles :

$$T_u = T_m - T_r = \Sigma \frac{1}{2} mv^2 - \Sigma \frac{1}{2} mv_0^2.$$

Et comme pour ce cas de départ en repos la vitesse v_0 est nulle, tout le produit $\Sigma \frac{1}{2} m v_0^2$ équivaut à zéro ; et il reste :

$$T_m - T_r = \Sigma \frac{1}{2} mv^2.$$

Telle est l'expression du travail qu'il faut développer d'abord pour vaincre les forces d'inertie dans une machine ou sur tout autre corps au repos. Et c'est ce qui explique pourquoi l'on éprouve plus de difficulté pour faire partir un véhicule que pour le maintenir en mouvement ; d'où l'utilité de ne pas l'arrêter au début d'une montée, mais plutôt de le faire gravir sans arrêt en hélice, etc.

On peut encore remarquer que la dernière équation est transformable en :

$$T_m = \Sigma \frac{1}{2} mv^2 + Tr \, ;$$

ce qui montre que le travail moteur doit surmonter non seulement la somme des forces vives de toutes les pièces, mais aussi toutes leurs résistances.

II. *Marche normale.* — Une machine en route peut, suivant son travail (en rapport de l'industrie), avoir une vitesse soit uniforme, soit variable. Nous devons donc examiner ces deux alternatives possibles :

1° Vitesse uniforme. Dans ce cas, les vitesses finales étant toujours égales aux vitesses initiales, leur différence est nulle, et :

$$T_m - T_r = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = 0$$

d'où :

$$T_m = T_r.$$

Le travail moteur est donc exactement absorbé par le travail résistant.

2° Vitesse variable. C'est ce qui arrive dans certains ateliers à efforts variables, par exemple dans les lamineries, lorsque tous les laminoirs d'un même arbre de couche engrènent en même temps ou alternativement des pièces brutes ou peu dégrossies.

Si donc nous partons de v_0 pour obtenir ensuite v, notre inégalité dans le travail moteur et le travail résistant prendra la forme :

$$T_m \lesseqgtr T_r = \Sigma \frac{1}{2} mv^2 - \Sigma \frac{1}{2} mv_0^2.$$

La différence entre les deux travaux ennemis sera d'autant moindre que deviendra plus petit le second membre de l'égalité, c'est-à-dire plus réduit le résultat de la soustraction. Or, comme les masses sont invariables, c'est sur les vitesses qu'il faut agir : d'où la grande utilité et même la très réelle nécessité des forts volants ayant pour but de régulariser le mouvement de toute la machinerie, avec tendance à uniformiser sa marche normale, donnant de la vitesse quand l'arbre est ralenti par les embrayages des métaux travaillés, en absorbant au contraire dès que le piston menace de s'emballer faute de résistance, lorsque les mêmes pièces diminuent leurs efforts résistants.

III. *Arrêt.* — La machine se trouvant arrêtée, le travail moteur redevient nul. Et nous pouvons écrire :

$$0 - T_r = \Sigma \frac{1}{2} mv^2 - \Sigma \frac{1}{2} mv_0^2.$$

D'où, successivement :

$$0 = \Sigma \frac{1}{2} mv^2 - \Sigma \frac{1}{2} mv_0^2 + T_r ;$$

$$\Sigma \frac{1}{2} mv^2 = \Sigma \frac{1}{2} mv_0^2 - T_r.$$

Or, si nous comparons cette dernière équation à celle du cas de la mise en train, nous constatons qu'ici comme là, la même quantité $\Sigma \frac{1}{2} m v^2$ est équivalente au travail de mise en marche diminué du travail de résistance. Et ce chassé-croisé nous montre que le travail, d'abord absorbé par l'inertie dans la mise en train, se trouve finalement restitué à l'arrêt définitif.

En réalité, l'arrêt n'a pas lieu dès que le travail moteur est supprimé ; l'appareil continue à marcher grâce à l'inertie de ses pièces, véritables magasins de mouvement. Le zéro absolu ne sera atteint que lorsque T_r augmentant sans cesse deviendra exactement égal à $\Sigma \frac{1}{2} m v_0^2$. A cet instant précis :

$$\Sigma \frac{1}{2} mv^2 = 0;$$

et comme m ne varie point, c'est que forcément $v = 0$.

Il est nécessaire d'insister sur cette remarque importante, à savoir que l'arrêt d'une machine ne doit jamais s'effectuer soudainement, mais toujours progressivement, pour éviter les chocs brusques très nuisibles à la conservation des pièces, à leurs jeux respectifs, etc. Si l'on veut un exemple encore plus frappant, que l'on s'imagine un train marchant seulement à 40 kilomètres à l'heure, ce qui fait environ 11 mètres par seconde. Or, si les sabots arrêtaient ce train instantanément, l'effet produit sur les voyageurs projetés contre les banquettes (même rembourrées) serait exactement le même que s'ils tombaient d'un aéroplane volant à une hauteur :

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{11^2}{2 \times 9{,}8} = \frac{121}{19{,}6} = 6 \text{ mètres environ.}$$

Et nous avons supposé un train tombereau ! Donc...

VI. MESURE DU TRAVAIL DES MACHINES

Comme préliminaires, remarquons d'abord que l'équation générique :

$$T_m = T_u + T_r,$$

nous indique clairement qu'une machine, si perfectionnée soit-elle, ne reproduit jamais en travail utile qu'une partie du travail moteur, puisque de la dernière égalité nous tirons :

$$T_u = T_m - T_r ;$$

ce dernier travail résistant T_r n'étant jamais nul, ou alors on réaliserait le fameux *mouvement perpétuel* irréalisable dans les machines, sinon universellement, car les gigantesques phénomènes des attractions célestes, des marées, des vents périodiques, etc., sont réellement des manifestations de mouvements éternellement reproduisibles : il n'y a donc rien d'absolu dans l'immense nature, dans la physique universelle.

Rendement. — Pratiquement, le rendement des machines industrielles :

$$R = \frac{T_u}{T_m} < 1,$$

varie dans d'assez larges limites, de 0,50 et même 0,40, jusqu'à 0,80 et même 0,90 ; ce qui indique une moyenne acceptable de 0,60 à 0,70. Mais nous devons ajouter que les bons moteurs thermiques dépassent 0,75 et que certaines turbines hydrauliques atteignent de 0,90 à 0,95. Nous avons donc raison de signaler combien est variable ce rendement pratique.

Gain en force, perte en vitesse. — Remarquons ici que le travail utile est égal au produit de la résistance utile U par le chemin parcouru l ; soit :

$$T_u = Ul.$$

D'où :

$$U = \frac{T_u}{l}.$$

Equation qui nous montre que si l le chemin et par suite la vitesse augmentent, le quotient

$$\frac{T_u}{l}, \text{ ou } U,$$

la force correspondante diminue proportionnellement, et vice versa, le travail produit demeurant invariable.

Freins dynamométriques. — Le travail d'une machine, ordinairement reporté sur son arbre de couche, peut se mesurer à l'aide de puissants dynamomètres sous forme de freins dont le plus connu est celui de De Prony, basé sur le frottement.

Il se compose (fig. 115) d'une bande de fer méplat *a b c* munie de blocs de bois internes portant d'autre part sur une poulie P solidaire de l'arbre O dont on veut évaluer la puissance. Un levier L E appuie également sur la poulie, en dessous, par l'intermédiaire d'un autre bloc approprié, tandis que deux boulons B et R, dont ce dernier à oreilles,

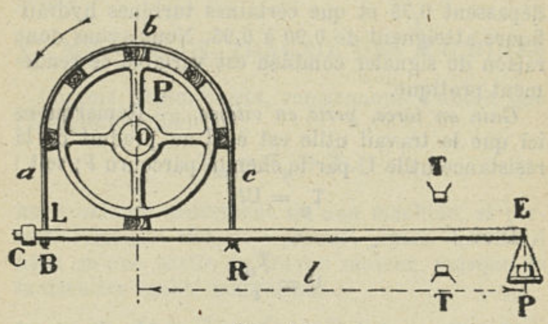

Fig. 115.

servent à serrer ensemble le levier et la bande. Enfin, des taquets T limitent la levée du levier. Ce levier est d'abord équilibré horizontalement à l'aide d'un contrepoids C, la machine étant au repos. Quand celle-ci se met en marche (dans un sens opposé au grand bras de levier), on charge progressivement le plateau de ce dernier, en maintenant toujours l'horizontalité de L E, tandis que la machine atteint sa vitesse normale ou plutôt le régime que l'on veut estimer.

Voyons ce qui se produit dynamiquement.

D'après les annotations de notre croquis, si n est le nombre de tours par minute de l'arbre et de la poulie, nous aurons d'abord comme moment du poids P par rapport à l'axe O :

$$M_0 = P \cdot l.$$

Pour un tour complet le travail sera, par l'effet de l'équilibre :

$$T = 2\pi P l;$$

soit, pour les n tours de la minute :

$$T_n = 2\pi P l n;$$

et, pour la seconde unitaire en kilogrammètres :

$$T_s = \frac{2\pi P \cdot l \cdot n}{60};$$

ou, en chevaux-vapeur :

$$T_s = \frac{2\pi P \cdot l \cdot n}{60 \times 75}.$$

Pratiquement, cet essai est loin d'être commode quoique assez exact. D'abord l'appareil de mesure prend de trop grandes proportions dès que la machine atteint quelque importance ; ensuite il nécessite une active surveillance à grand renfort d'eau savonneuse entre la poulie et les blocs de bois qui ont tendance à s'échauffer et même à brûler. On doit néanmoins reconnaître que ce frein, praticable dans les limites ci-dessus, n'en constitue pas moins une intéressante et simple invention, en même temps qu'une application tangible du frottement, phénomène dont nous allons reparler.

CHAPITRE VII

Résistance aux mouvements

SOMMAIRE. — I. Frottement de glissement. — II. Frottement de roulement. — III. Frottement de machines simples. — IV. Raideur des cordes. — V. Résistance des fluides. — VI. Utilité du graissage.

Les résistances aux mouvements dont nous allons parler sont de différentes sortes. Nous les énumérerons ainsi ; résistance au glissement ou frottement de glissement, lorsqu'un corps glisse sur un autre ; résistance au roulement, ou frottement de roulement, quand un corps cylindrique roule sur une surface plane ou courbe ; raideur des cordes qui n'ont pas toujours la flexibilité désirable ; résistance des fluides, air, eau, etc., dans lesquels se meuvent les pièces de machines.

I. FROTTEMENT DE GLISSEMENT

Le phénomène du frottement par glissement repose sur un certain nombre de lois que nous allons examiner successivement. Elles furent longuement étudiées par deux physiciens français, Coulomb au XVIII^e^ et Morin au XIX^e^ siècle.

1^re^ *loi*. — *L'intensité du frottement est proportionnelle à la pression normale.*

C'est ainsi qu'avec un poids P nous rencontrerons une résistance de frottement F ; avec un poids 2 P nous aurons 2 F ; avec 3 P, 3 F ; etc. Donc :

$$\frac{F}{P} = \frac{2F}{2P} = \frac{3F}{3P} = ... = \frac{nF}{nP}.$$

Le rapport constant F se représente ordinairement par la lettre f, qui devient le *coefficient de frottement.*

D'autre part, de :

$$\frac{F}{P} = f,$$

on tire :

$$F = Pf.$$

Ce qui montre que le frottement est égal au produit de la pression normale par le coefficient de frottement des matières étudiées.

2e *loi. — Le frottement est indépendant de l'étendue des surfaces en contact.*

Si, par exemple, nous avons un marbre épais de $10 \times 10 = 100$ centimètres carrés, pesant 15 kilogrammes, qui correspond à une pression de $15 : 100 = 0{,}150$ par centimètre carré sur l'établi, un autre marbre creux de $20 \times 20 = 400$ centimètres carrés pesant également 15 kilogrammes n'exercera jamais qu'une pression de $\frac{15}{400} = 0$ k.0375 par centimètre carré, tandis que la pression totale sur l'établi sera invariablement de 15 kilogrammes. Elle n'a donc point changé, malgré le rapport quadruple des surfaces de contact.

3e *loi. — Le frottement est plus considérable à la mise en route qu'en marche normale.*

Effectivement, la mise en train étant presque toujours progressivement modérée, c'est-à-dire plus ou moins lente, les corps pressés en contact ont le temps de se lier, de s'entre-pénétrer au cours de cette période en quelque sorte vagissante, beaucoup mieux qu'en pleine marche plus ou moins rapide.

4e *loi. — Une fois le mouvement établi, le frottement ne dépend plus de la vitesse.*

Ceci semble résulter directement de la précédente remarque, mais il y a lieu d'ajouter que l'exactitude de cette 4e loi n'a été vérifiée que pour des allures ne dépassant pas 4 ou 5 mètres à la seconde. A partir de 10 et surtout de 20 mètres, le frottement diminue de plus en plus, au lieu de conserver son coefficient invariable.

Remarque générale. — Il faut remarquer ici que les lois ci-dessus énoncées intéressent des surfaces *directement* appliquées les unes sur les autres. Dans l'industrie les choses se passent souvent de telle sorte qu'une substance intermédiaire, onctueuse, sert de tampon entre les corps en frottement ; ce dernier est alors *indirect*, et l'usure est moins rapide.

Nous reparlerons plus loin des *lubrifiants* ; et nous allons donner dès maintenant les lois relatives aux frottements indirects.

Règles de Hirn. — Nous les consignerons comme suit :

1° Pour obtenir un rendement régulier, tout lubrifiant doit être un certain temps trituré, échauffé entre les surfaces frottantes.

2° Le frottement varie en raison inverse de la température ; il sera d'autant plus réduit que la température sera plus élevée.

3° Le frottement varie proportionnellement à la

Surfaces frottantes	État des surfaces	Coefficients de frottement — Au départ	Coefficients de frottement — En marche normale
Corde sur chêne	Sèches.	»	0,52
Courroie sur chêne	Id.	0,61	0,30 à 0,35
Courroie sur fonte ou bronze	Id.	»	0,40 à 0,45
Courroie de transmission	Id.	»	0,30 à 0,40
Chêne, orme, poirier ; fonte, fer, acier, bronze, glissant l'une sur l'autre ou sur elles-mêmes	Légèrement onctueuses au toucher.	0,17	0,15
Les mêmes	Lubrifiées moyennement.	»	0,07 à 0,08
Les mêmes	Très bien lubrifiées.	»	0,03 à 0,05
Bois de chêne sur chêne, à fibres parallèles.	Sèches	0,62	0,48
Cordes courroies sur fonte, avec coincement de la corde	Id.	»	0,70
Câbles en fil de fer sur poulie de fonte à gorge	Id.	»	0,15
Les mêmes, sur poulie garnie de cuir ou de gutta-percha	Id.	»	0,70

racine carrée de la vitesse, quand la température demeure constante sous un lubrifiage abondant.

4° Enfin, ce même frottement indirect est approximativement proportionnel, d'une part, à la racine carrée des surfaces, d'autre part à la racine carrée des pressions.

Tableau des principaux coefficients. — Nous avons inséré, page précédente, un tableau classique établi par Morin.

II. FROTTEMENT DE ROULEMENT

On dit qu'un corps roule sur ou sous un autre lorsque le trajet d'un point de contact du premier est exactement égal à la trajectoire du même point sur le second corps. Si cette égalité n'existe pas, c'est qu'il y a eu roulement imparfait avec glissement plus ou moins accentué.

C'est ainsi que dans le premier cas nous devrons avoir (fig. 116) : arc C R = droite C C'.

Si cette égalité n'était pas exactement vérifiable, il y aurait eu glissement partiel. Et enfin, si les deux distances parallèles R R' et C C' ont même valeur, c'est qu'il y a eu glissement complet.

On conçoit que dans ce dernier cas, la dépense d'énergie doive être beaucoup plus onéreuse que dans le premier : tels un train qui patine, un tombereau à traîner avec ses roues calées, etc.

La loi générale du frottement de roulement, encore établie à la suite des travaux successifs de Coulomb et de Morin, s'énonce ainsi :

La résistance au frottement est proportionnelle à la *charge et inversement proportionnelle au rayon de la pièce roulante.*

C'est-à-dire qu'en désignant par R cette résistance, par f' le coefficient du frottement de roulement, par P la charge appliquée sur un rayon r, on aura :

$$R = f' \times \frac{P}{r}.$$

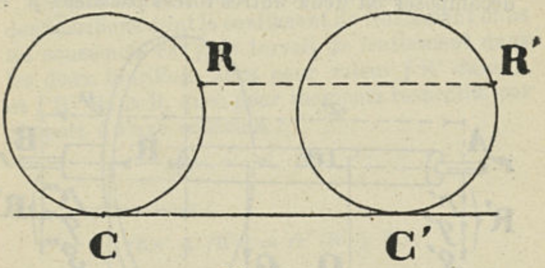

Fig. 116.

Le coefficient f' est évidemment inférieur au précédent f. Il peut varier de 0,0012 (fonte polie sur fer) à 0,0090 (fer poli sur route pavée) et même au delà, sur mauvaise route.

III. FROTTEMENT DE MACHINES SIMPLES

Repassons en revue les principales machines simples soumises aux effets du frottement.

Levier. — Cet appareil n'ayant qu'un mouvement de rotation très restreint, point n'est utile de le faire tourner autour d'un tourillon, ce qui augmenterait le frottement sans nécessité.

C'est pourquoi l'on a l'habitude de le poser sur un simple support triangulaire, sorte de couteau à arête très dure et suffisamment fine pour rendre pratiquement négligeable le travail de frottement.

Treuil. — Le treuil étant ici intéressant par le frottement de ses tourillons, c'est ce dernier que nous allons étudier (fig. 117).

Remarquons d'abord que la puissance P peut se décomposer en deux autres forces parallèles p' et

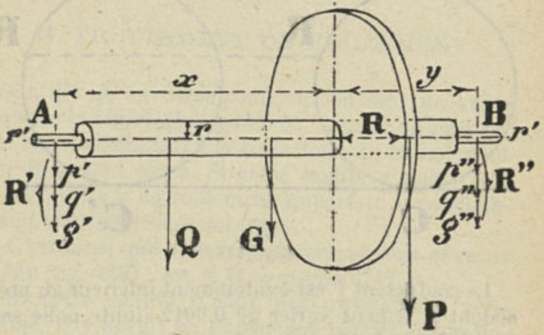

Fig. 117.

p'' appliquées en A et B. Les deux composantes nous seront données par la relation des moments :

$$p' \cdot x = p'' \cdot y\,;$$

sachant déjà que :

$$P = p' + p''.$$

Tout pareillement, la résistance Q peut se décomposer en q' et q''. De même que g' et g'' décomposent le poids G de l'appareil appliqué en son c. d. g.

Si donc nous additionnons les forces en A et celles en B, nous obtiendrons les totaux respectifs R' et R'', tels que :

$$R' = p' + q' + g' \quad ; \quad R'' = p'' + q'' + g''.$$

Si, maintenant, nous désignons par r' le rayon des tourillons dont le coefficient de frottement dans les coussinets est f, le travail de frottement dans les deux tourillons aura pour valeur f R' dans A et f R'' dans B, avec pour moments respectifs par rapport à l'axe commun :

$$fR' \,.\, r' \quad \text{et} \quad fR'' \,.\, r' ;$$

soit pour les deux :

$$fR'r' + fR''r' = fr'\,(R' + R'') ;$$

ou encore, en remplaçant R' et R'' par leurs valeurs ci-dessus :

$$fr'\,(p' + q' + g' + p'' + q'' + g'') = fr'\,(P + Q + G),$$

en remarquant que :

$$p' + p'' = P \quad ; \quad q' + q'' = Q \quad ; \quad g' + g'' = G.$$

Et c'est ce qu'on appelle le *moment du frottement des tourillons*.

Profitons de ce passage pour rechercher l'équation de l'*équilibre dynamique du treuil*, l'occasion nous paraissant favorable. En ajoutant aux lettres déjà connues le rayon r du cylindre de charge, nous aurons effectivement, eu égard aux conditions habituelles :

$$PR = Qr + fr' (P + Q + G).$$

Plan incliné. — Nous avons déjà vu que dans l'équilibre d'un corps sur un plan incliné, le poids Q du corps et la force F de maintien ont leur résultante R normale au plan (fig. 118). Mais, jusqu'ici,

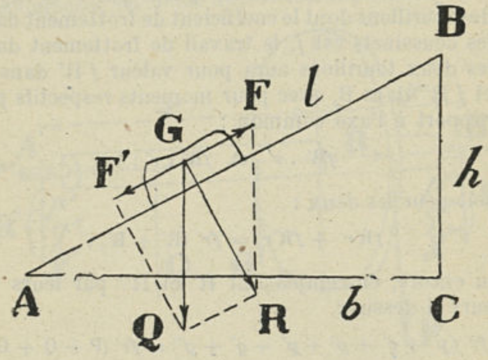

Fig. 118.

nous n'avons tenu aucun compte des frottements qui nous intéressent.

Nous savons d'abord que le frottement du corps sur le plan donne lieu à une certaine force égale au produit f R du coefficient f par la pression normale ; d'autre part, cette force est naturellement opposée au sens du mouvement qu'elle tend à ralentir. Or, si le frottement f R n'est pas d'une intensité supérieure à la composante F', le corps descendra vers la base. On devra donc avoir, pour l'équilibre dynamique :

$$F' = fR.$$

D'où :

$$f = \frac{F'}{R}.$$

Ou encore, en vertu de la similitude des triangles rectangles A B C et F' G Q :

$$f = \frac{h}{b}.$$

Et l'on voit que le rapport de la hauteur du plan à la base est égal au coefficient de frottement relevé sur les substances qui matérialisent les corps et le plan en contact. Ce qui permet de présenter cet autre énoncé :

Un corps quelconque se trouve maintenu en équilibre sur un plan incliné, tant que l'angle à la base est plus petit que l'angle de frottement mesuré par la tangente trigonométrique.

Cette comparaison nous oblige à une petite explication complémentaire. Pour mesurer l'intensité du frottement par l'angle dudit, considérons le corps C (fig. 119) placé sur un plan horizontal. S'il n'était soumis qu'à son propre poids Q, la réaction T de la table serait égale et directement opposée à Q. Mais en appliquant au même corps une puissance tractive P, celle-ci devra équilibrer la force de frottement F.

Nous avons donc trois forces en présence, supposées appliquées en un même point C par où passent à la fois la surface du plan et la verticale de c. d. g. du corps. Pour l'équilibre, il faut naturellement que la réaction R soit égale et directement opposée à la résultante R' de P et de Q.

Et c'est l'angle R C T = α que fait la résultante R

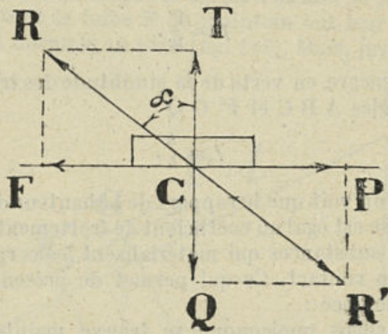

Fig. 119.

avec la normale C T qui constitue par sa tangente une relation avec le coefficient de frottement ; soit :

$$f = \operatorname{tg} \alpha$$

Cette relation nous a permis de donner l'énoncé consigné plus haut.

IV. RAIDEUR DES CORDES

De même qu'en cinématique on étudie le mouvement sans tenir aucun compte du principe moteur qui le produit, de même en dynamique on s'occupe du travail des forces généralement sans tenir compte du frottement, ni de la résistance occasionnée par certains intermédiaires tels que les cordes sur les poulies, etc. Il y a cependant lieu de se préoccuper de cet obstacle qui sera d'autant plus considérable que le diamètre du cercle d'enroulement sera plus réduit, et que les fils seront davantages tordus.

Considérons donc la corde A B C (fig. 120) portée

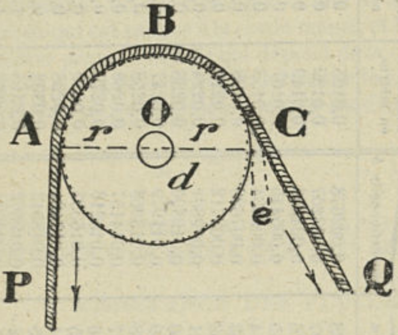

Fig. 120.

par la gorge de la poulie O, supportant la charge Q équilibrée par la puissance P.

S'il y avait flexibilité parfaite dans la corde avec garants bien verticaux aux extrémités du diamètre A C, les moments des deux forces en présence seraient égaux comme elles-mêmes avec :

$$P \cdot r = Q \cdot r.$$

Nombres de fils	CORDES BLANCHES			CORDES GOUDRONNÉES		
	Diamètres en mètres	Raideur		Diamètres en mètres	Raideur	
		naturelle a	proportionnelle b		naturelle a	proportionnelle b
1	0,0089	0,0106038	0,002678	0,0105	0,021201	0,002512992
9	0,0110	0,0225207	0,003267	0,0129	0,041143	0,003769488
12	0,0127	0,0388476	0,004356	0,0149	0,067314	0,005025984
15	0,0141	0,0595845	0,005445	0,0167	0,097712	0,006282480
18	0,0155	0,0847314	0,006534	0,0183	0,138339	0,007538976
21	0,0168	0,1142883	0,007623	0,0198	0,183193	0, 08795472
24	0,0179	0,1482552	0,008712	0,0211	0,234276	0,010051968
27	0,0190	0,1866321	0,009801	0,0224	0,291586	0,011308464
30	0,0200	0,2294190	0,010890	0,0236	0,355125	0,012564963
33	0,0210	0,2766159	0,011979	0,0247	0,424891	0,013821456
36	0,0220	0,3282288	0,013068	0,0258	0,500886	0,015077952
39	0,0228	0,3842397	0,014157	0,0268	0,534108	0,016334448
42	0,0237	0,4466666	0,015216	0,0279	0,671559	0,017590944
45	0,0246	0,5095035	0,016335	0,0289	0,766237	0,018847449
48	0,0254	0,5787504	0,017424	0,0298	0,867144	0,020103936
51	0,0261	0,6524075	0,018513	0,0308	0,974278	0,021360432
54	0,0268	0,7304742	0,019602	0,0316	1,078641	0,022616928
57	0,0276	0,8129511	0,020691	0,0326	1,207231	0,023873424
60	0,0283	0,8998380	0,021780	0,0334	1,333050	0,025120960

En réalité, le contact absolu n'ayant pas lieu, les distances au centre ne sont pas égales, et à r d'un côté correspond $r + e$ de l'autre côté. Les moments deviennent :

$$P \cdot r = Q (r + e).$$

D'autre part, il y a lieu de considérer (d'après Morin dont nous avons reproduit le tableau page précédente) que la raideur d'une corde se compose pratiquement de deux parties : l'une a, la *raideur naturelle* qui est propre à la corde même, et l'autre b, la *raideur proportionnelle* qui dépend de la charge Q. En sorte que la raideur R proportionnelle aux quantités ci-dessus, est en raison inverse du diamètre d ; soit :

$$R = \frac{a + bQ}{d}.$$

Les valeurs correspondantes de a ét b se trouvent consignées dans le tableau de la page précédente.

V. RÉSISTANCE DES FLUIDES

Tous les fluides opposent aux corps en mouvement dans leurs milieux une résistance d'autant plus grande qu'ils sont eux-mêmes plus compacts, moins fluants : c'est ainsi que, toutes proportions gardées, une locomotive rencontrera moins de résistance dans l'air qu'un navire dans l'eau, qu'un piston percé dans l'huile, etc. D'où la nécessité de construire certains organes et appareils de telle manière qu'ils rencontrent dans leurs mouvements le minimum de résistance nuisible.

La formule générale exprimant la résistance d'un fluide recevant un corps en mouvement est celle-ci :

$$R = kav^2 ;$$

le coefficient variable k étant multiplié par le produit de l'aire de la section immergée et du carré de la vitesse du corps.

Pour l'eau, on prend ordinairement $k = 3$. Quant à l'air, dans un milieu calme, $k = 0,06$; et le tableau suivant donne un barême de résultats proportionnés à la vitesse elle-même, en supposant une surface unitaire d'un mètre carré normalement opposée à la direction du vent :

Genres de vents		Vitesses par seconde	Pressions par mq
		mètres	kilogrammes
Vent à peine sensible		1	0,14
Petite brise		3	0,54
Bon frais	brise fraiche	4	2,17
	tend bien les voiles	6	4,87
	le meilleur pour les moulins	7	6,64
	forte brise	8	8,67
	bon pour les navires	9	10,97
Grand frais	très forte brise	10	13,54
	fait serrer les hautes voiles.	12	19,50
Vent très fort		15	30,47
Vent impétueux		20	54,16
Vent en tempête		25	78,00
Vent en tempête violente		30	122,28
Vent en ouragan		35	176,96
Vent en grand ouragan		45	277,87

VI. UTILITÉ DU GRAISSAGE

A propos du frottement général, nous avons vu combien il est utile, chaque fois qu'on le peut, de le rendre *indirect* par l'interposition d'un graissage approprié.

Cette appropriation des lubrifiants aux organes se fait généralement de la manière suivante : l'huile minérale pour les parties internes portées à de hautes températures (tiroirs, cylindres, etc.), l'huile ordinaire pour les pièces extérieures demeurant à un faible degré thermique (bielles, paliers, etc.).

Nous n'entrerons pas dans les détails chimiques de la fabrication des huiles minérales, qui sont assez compliqués pour notre cadre (1) ; mais nous pouvons donner quelques indications sur les lubrifiants des ateliers mécaniques et autres intéressant plus ou moins tous les ouvriers industriels.

Signalons encore à ce propos l'important ouvrage du genre, des techniciens anglais Archbutt et Deeley (traduit en français par G. Richard), dont nous traduirons à notre tour quelques lignes. Notons d'abord que par sa rotation un organe cylindrique (cas général) tend toujours à rejeter son huile vers les extrémités du palier ; or, il ne faut pas que cette huile soit trop claire ni trop noire, ce qui accuserait dans le premier cas un graissage exagéré, en majeure partie perdu, et dans le second un graissage insuffisant, voisin du grippage.

Par rapport aux pressions et aux vitesses des organes, nous mentionnerons :

---

(1) Voir à ce sujet le *Manuel des Huiles Minérales* faisant partie de l'Encyclopédie-Roret.

1° *Petites vitesses.* — Lorsque la pression par centimètre carré ne dépasse pas 15 kgr. environ, la formation des couches de graisse dans les portées des coussinets dépend presque exclusivement de la viscosité des huiles ; mais avec de plus fortes charges, les métaux venant en contact du côté de la sortie, on ne peut éviter le grippage qu'avec des huiles très grasses ; même remarque pour les surfaces planes, comme les glissières et autres.

2° *Vitesses moyennes.* — Ici, la viscosité est prépondérante jusqu'à la pression de 15 kgr. par centimètre carré ; pour de plus fortes charges, les huiles minérales sont mieux indiquées.

3° *Grandes vitesses.* — La question du graissage

Vitesses en mètres par seconde	Coefficients de frottement sous les pressions de :		
	3 kg. 500 par cmq	5 kg. 500 par cmq	10 kg. 500 par cmq
0,015	0,0007	0.0005	0,0145
0,020	0.0009	0,0007	0,0250
0,070	0,0012	0,0008	0,0051
0,100	0.0014	0,0009	0,0034
0,130	0,0017	0.0011	0,0027
0.150	0,0021	0,0013	0,0023
0,200	0,0026	0.0016	0,0019
0,250	0,0032	0,0018	0,0017
0.350	0,0042	0.0024	0,0017
0.450	0,0053	0,0030	0.0020
0,550	0,0064	0,0036	0,0024
0,650	0,0075	0.0042	0,0029
0.750	0,0086	0,0048	0,0035
0,850	0,0096	0,0054	0,0041
0,950	0.0106	0,0060	0,0047

est ici de toute première importance, car l'échauffement des organes en contact deviendrait rapidement destructif. Quand la vitesse dépasse 2 mètres à la seconde (dynamos, ventilateurs, etc.), on emploie pour les portées plus longues des huiles très fluides, notamment les minérales, ou encore un mélange d'huile minérale avec 10 0/0 d'huile grasse.

Le tableau inséré page précédente donne la variation du coefficient de frottement pour des pressions moyennes avec vitesses correspondantes.

CHAPITRE VIII

Résistance des matériaux

SOMMAIRE. — I. Préliminaires. — II. Traction. — III. Compression. — IV. Flexion. — V. Torsion. — VI. Cisaillement.

I. PRÉLIMINAIRES

Quelques définitions préliminaires nous semblent ici indispensables.

Forces en action. — L'étude de la résistance des matériaux est de capitale importance pour tous les techniciens, en ce sens qu'elle permet de déterminer avec précision les dimensions minima à donner aux pièces destinées à supporter différents efforts, soit séparés, soit combinés. Ces forces peuvent agir de cinq manières distinctes : 1° par *traction*, avec tendance à allonger un solide et le disloquer par deux directions opposées ; 2° par *compression* avec efforts contraires dirigés l'un vers l'autre ; 3° par *flexion*, lorsque le solide est encastré par ses deux extrémités ou une seule, ou par son milieu, tandis qu'une force tente d'amener un fléchissement en un point isolé ; 4° par *torsion*, le corps étant encastré, tandis qu'un ou plusieurs couples de forces peuvent le tordre en le faisant plus ou moins tourner autour de son axe géométrique ; enfin 5° par *cisaillement* sous un effort généralement transversal qui tend à provoquer un sectionnement normal à l'axe et tout près du point d'appui.

Les forces opposées par chaque corps lui-même à ces diverses attaques destructives portent respectivement les noms de forces de traction, de compression, de flexion, de torsion, de cisaillement.

Avant d'aborder avec quelques détails chacun de ces éléments de résistance, nous devons donner les définitions préliminaires indispensables à ce qui doit suivre.

Déformations élastiques. — On sait que les corps sont constitués par des myriades de molécules soudées les unes aux autres par une force naturelle cohésive, dont le champ d'action est extrêmement réduit. Or, l'*élasticité* n'est autre que la réaction opposée par les molécules à toute force qui tendrait à les disjoindre.

Dès lors, une déformation est dite élastique lorsque la force d'attaque est impuissante à faire sortir les molécules de leur zone défensive, et elles reprennent leur position initiale dès que l'effort extérieur a cessé d'agir ; il en est ainsi tant que la *limite d'élasticité* ne se trouve pas atteinte.

Par extension, on appelle *module d'élasticité*, dans la mesure de cette dernière, le nombre unitaire (variable avec chaque métal) qui exprime l'effort nécessaire, par unité de section, pour allonger un prisme d'une quantité égale à sa longueur primitive.

Déformations permanentes. — Quand, à la suite d'un plus grand effort, les molécules ne peuvent plus revenir automatiquement à leur position initiale, la limite d'élasticité étant franchie, la déformation demeure permanente, telle qu'elle était au moment où la force a cessé d'agir.

Plus gravement, si les molécules se trouvent complètement isolées les unes des autres, tranchées, il y a *rupture*. Tous les corps présentent naturellement un certain obstacle à cette attaque, et c'est ce qui constitue leur *résistance à la rupture*, avec un *coefficient de rupture* l'exprimant unitairement. On a de même donné le nom de *section dangereuse*, ou *plan de rupture*, à la zone où la charge produit son maximum d'effet.

Pratiquement, on n'expose jamais les pièces aux efforts maxima qu'elles sont susceptibles de supporter, c'est-à-dire qu'on prend le coefficient de rupture bien inférieur à sa valeur connue : ordinairement la moitié, ou même le quart seulement en guise de *coefficient de résistance* ; et alors l'inverse de la fraction choisie (2 pour la moitié, 4 pour le quart, etc.) constitue le rassurant *coefficient de sécurité*.

Fibres neutres. — Comme son nom l'indique, la *fibre neutre* est celle qui ne participe pas aux déformations voisines.

Pour plus de clarté, considérons le corps cylindrique encastré en A et B (fig. 121). Sous l'effort P, le solide va fléchir et peut-être se fendre par son milieu. Or, on peut constater que la partie inférieure s'est allongée en devant convexe, tandis que la ligne supérieure concave s'est proportionnellement raccourcie. Par contre, on remarque

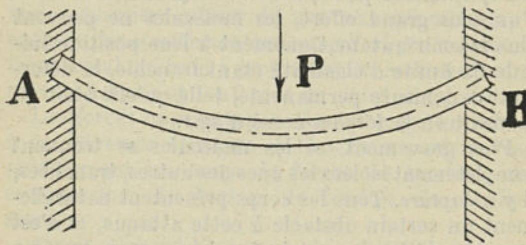

Fig. 121.

tionnellement raccourcie. Par contre, on remarque que la zone pointillée formant tampon entre les deux ne s'est ni allongée ni raccourcie, étant demeurée invariable ; aussi a-t-elle reçu le nom de *plan des fibres neutres.* — Nous reviendrons sur tout cela.

II. TRACTION

D'après les généralités suffisantes qui précèdent, nous pourrons écrire directement la formule de la traction :

$$P = S . K ;$$

Matériaux	Résistance en kilog. par cmq — Coefficient K	Résistance en kilog. par cmq — Module E
Fil d'acier	1.900	2.800.000
Acier à ressorts	1 500	2.200.000
Acier forgé ou laminé	1.000	2.000.000
Acier fondu	1.000	2 200 000
Fil de fer	1 000	2.000.000
Acier coulé ordinaire	900	1 500.000
Fer forgé de bonne qualité	700	2.000.000
Fil de cuivre	650	1.300.000
Bronze phosphoreux	600	600.000
Delta (cuivre, zinc, fer alliés)	600	800.000
Fer laminé	600	1.750.000
Fil de laiton	500	1.000 000
Cuivre rouge laminé	470	800.000
Bronze ordinaire	330	320 000
Laiton ordinaire	330	1 000.000
Laiton coulé	320	650.000
Cuivre coulé	300	1.000 000
Fonte de bonne qualité	250	1.000 000
Fonte ordinaire	100	1.000.000
Frêne	100	100.000
Hêtre	100	65.000
Corde en chanvre ou aloès	80	150 000
Sapin du Nord	70	150.000
Chêne	60	120.000
Courroie en cuir	30	2.000

dans laquelle la charge P se trouve équilibrée par le produit de la section S en centimètres carrés et du coefficient de résistance K pour la section unitaire de 1 centimètre carré.

En vue de faciliter les applications, le tableau de la page précédente nous donnera les valeurs pour les principaux matériaux de construction, du coefficient K, et aussi celles correspondantes du module d'élasticité conventionnellement représenté par E.

Cas particuliers. — I. Supposons d'abord que l'on doive tenir compte du poids propre du corps. Si nous désignons par L sa longueur et par d sa densité relative (ou son poids par centimètre cube), la section S étant connue, son poids propre sera exprimé par :

$$P' = dLS ;$$

et la formule générale deviendra :

$$P + P' = P + dLS = SK.$$

II. Si, par ailleurs, la charge P disparaît, il ne reste plus que le poids seul du corps, et la formule se simplifie en :

$$dLS = SK ;$$

ou :

$$K = dL ;$$

d'où encore :

$$L = \frac{K}{d} ;$$

toutes valeurs exprimant des relations pour un élément en fonction de deux autres supposés connus.

Résistance des enveloppes. — Les enveloppes d'appareils peuvent être soumises à des pressions soit modérées, soit très fortes, tandis que leurs sections affectent des formes généralement cylindriques ou plates.

I. *Faibles pressions sous enveloppes cylindriques.* — Nous devons considérer les deux cas génériques,

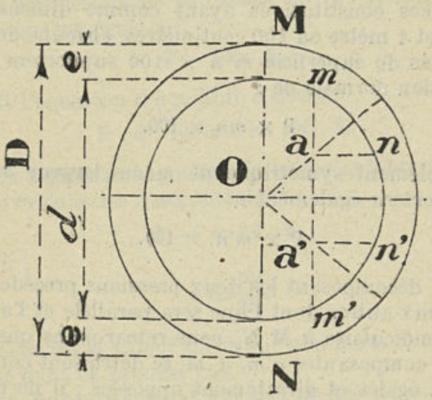

Fig. 122.

suivant que la pression intérieure tend à briser l'enveloppe, soit suivant un plan axial par deux génératrices diamétrales, soit suivant une section perpendiculaire au même axe.

1° Rupture suivant l'axe (fig. 122). — Soit M N le plan d'éclatement, passant par O. Désignons par D le diamètre extérieur, par d le diamètre intérieur, l'épaisseur étant e, par P la pression intérieure par centimètre carré, K étant le coefficient de sécurité du métal.

Remarquons d'abord que la pression totale peut se décomposer en un grand nombre de pressions unitaires toutes normales à l'aire intérieure de l'enveloppe, c'est-à-dire passant par l'axe du cylindre ; si donc nous considérons une de ces petites surfaces constitutives ayant comme dimensions $m\ n$ et 1 mètre ou 100 centimètres, chacune de ces bandes de superficie $m\ n \times 100$ supportera une pression normale de :

$$P \times mn \times 100.$$

L'élément symétrique de même largeur $m'\ n'$ supportera également :

$$P \times m'n' \times 100.$$

En décomposant les deux pressions précédentes en deux autres dont l'une sera parallèle et l'autre perpendiculaire à M N, nous remarquons que les deux composantes $a\ m$, $a'\ m'$ se détruisent comme étant égales et directement opposées ; il ne reste donc que les deux perpendiculaires à M N respectivement égales à :

$$P \times an \times 100 \quad \text{et} \quad P \times a'n' \times 100.$$

On aurait de même, pour tous les éléments analogues à $m\ n$ et $m'\ n'$, situés à droite du plan M N, comme somme des pressions sur la demi-enveloppe supérieure :

$$P\ (an + a'n' + a''n'' + \ldots)\ 100 = P\ .\ d\ .\ 100 :$$

puisque la somme entre parenthèses donne au total le diamètre intérieur d.

C'est donc cette pression intérieure totale que doit équilibrer la résistance du métal qui lui oppose la différence des diamètres :

$$D - d = 2e;$$

avec une résistance par mètre ou 100 centimètres de longueur égale à :

$$2e \,.\, 100 \,.\, K.$$

Et l'équation d'équilibre s'écrira :

$$P \,.\, d \,.\, 100 = 2e \,.\, 100 \,.\, K.$$

En simplifiant, puisque le même nombre 100 se trouve dans les deux membres :

$$P \,.\, d = 2e \,.\, K,$$

d'où :

$$e = \frac{Pd}{2K}.$$

Telle est la valeur théorique minimum de l'épaisseur dans ce premier cas.

2° Rupture suivant une section droite. — Considérons la section par S T perpendiculaire à l'axe O vu par bout (fig. 123). Pour faciliter nos calculs surtout démonstratifs, nous regarderons la section pleine cylindrique comme équivalente à un rectangle développé ayant pour base $\pi\, d$ et pour hauteur e.

D'après nos annotations, sa résistance par centimètre carré sera égale à :

$$\pi \,.\, d \,.\, e \,.\, K.$$

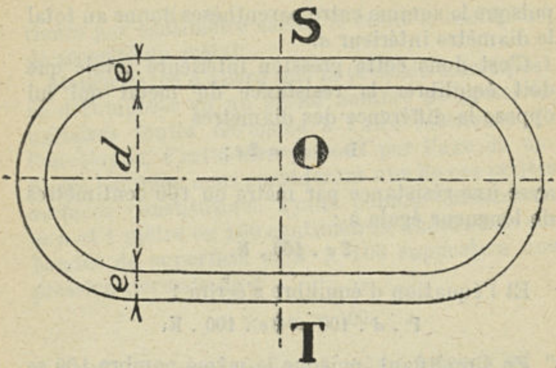

Fig. 123.

Mais, d'autre part, la pression totale intérieure atteint :

$$P \cdot \frac{\pi d^2}{4}.$$

D'où l'équation d'équilibre :

$$P \cdot \frac{\pi d^2}{4} = \pi \cdot d \cdot e \cdot K.$$

Ou, successivement :

$$\frac{Pd^2}{4} = d \cdot e \cdot K ;$$

$$\frac{Pd}{4} = eK ;$$

$$e = \frac{Pd}{4K}.$$

En comparant cette valeur de *e* à la précédente, on remarquera que la première est double de la seconde. C'est donc la plus forte épaisseur qu'il faudra choisir de préférence, pour plus de sécurité.

En cas de sphère géométriquement exacte, la deuxième formule pourrait suffire.

II. *Faibles pressions dans les fonds plats.* — Les formules des surfaces planes circulaires sont :

1° Sans encastrement (fig. 124) :

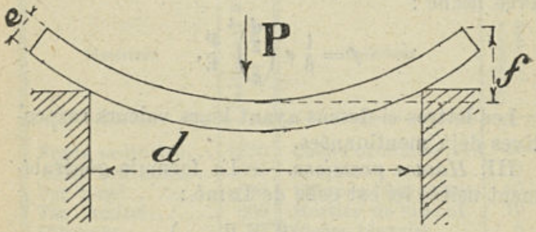

Fig. 124.

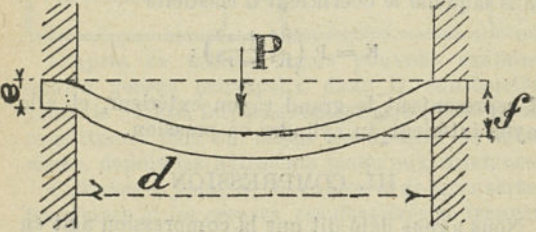

Fig. 125.

$$e = \frac{d}{2}\sqrt{\frac{P}{K}};$$

avec flèche :

$$f = \frac{5}{6}\,e\left(\frac{\frac{d}{2}}{e}\right)^4 \frac{P}{E}.$$

2° Avec encastrement (fig. 125) :

$$e = \frac{d}{2}\sqrt{\frac{P}{K}}\sqrt{\frac{2}{3}};$$

avec flèche :

$$f = \frac{1}{6}\,e\left(\frac{\frac{d}{2}}{e}\right)^4 \frac{P}{E}.$$

Les lettres ci-dessus ayant leurs valeurs respectives déjà mentionnées.

III. *Hautes pressions.* — La formule généralement usitée ici est celle de Lamé :

$$e = r\left(\sqrt{\frac{K+P}{K-P}} - 1\right),$$

dans laquelle le coefficient d'élasticité

$$K = P\left(\frac{R^2 + r^2}{R^2 - r^2}\right);$$

R représentant le grand rayon extérieur, et r le rayon intérieur du cylindre en pression.

III. COMPRESSION

Nous avons déjà dit que la compression agit en sens inverse de la traction, c'est-à-dire que la rupture tend à se produire par écrasement, la résistance correspondante du corps étant alors proportionnelle à la surface de la section attaquée. En d'autres termes, l'équation d'équilibre s'écrira ici :

$$P = K S;$$

qui est la même que celle de la traction, le coefficient K variant seul, suivant les matériaux, d'après le tableau suivant :

Matériaux	Coefficients K par cmq	Matériaux	Coefficients K par cmq
Fonte ordinaire...	1250	Chêne ordinaire....	40
Acier ordinaire...	800	Peuplier...........	30
Fer forgé.........	600	Briques bien cuites.	10
Fer laminé.......	600	Mortier de ciment..	10
Pitchpin..........	87	Pierre blanche.....	8
Hêtre.............	77	Briques mal cuites.	5
Chêne fort	70	Mortier de chaux ..	4
Pin résineux.... .	68		

D'après ce tableau, nous pouvons examiner quatre genres principaux dans la construction générale : fonte, fer, bois, maçonnerie, tous agents constituant plus ou moins les ateliers de mécanique, depuis les bâtiments jusqu'aux machines.

Colonnes en fonte. — On en trouve de deux sortes : les pleines et les creuses, ces dernières se trouvant de plus en plus employées, et même exclusivement dans les fortes dimensions, car à surface portante équivalente elles résistent mieux, ayant une plus large assise, ou bien, à égale résistance, elles nécessitent moins de matière, donc de toute façon reviennent à meilleur compte que les pleines.

La formule générale applicable ici est celle de Love, concernant le coefficient de résistance :

$$R = \frac{1250}{1{,}45 + 0{,}0033 \left(\frac{L}{D}\right)^2};$$

expression empirique où seul peut varier le rapport de la longueur au diamètre, généralement dans l'assez large proportion de 10 à 60.

Pratiquement, l'épaisseur des colonnes creuses en fonte ne saurait être inférieure à une limite minimum au-dessous de laquelle la coulée serait compromise, même avec une fusion très liquide ; car il pourrait se produire des accidents partiels tels que manques de métal, creux soufflés, etc., tous défauts à suites plus ou moins graves. D'où la nécessité de se conformer aux proportions suivantes :

Hauteurs des colonnes :	1 à 2^m	2 à 3^m	3 à 4^m	4 à 6^m	6 à 8^m	8 à 10^m
Epaisseurs minima :	10 m/m	12 m/m	15 m/m	20 m/m	25 m/m	30 m/m

Tiges en fer. — C'est sous forme de tiges cylindriques ou cylindroïdales (tiges de pistons, bielles, etc.) que s'emploie ordinairement le fer forgé pour la construction des machines.

La formule empirique de Love devient ici :

$$R = \frac{600}{1{,}55 + 0{,}0005\left(\frac{L}{D}\right)^2}\ ;$$

où seul est encore variable le rapport de la longueur au diamètre, les tiges se faisant pleines.

Supports en bois. — La résistance de ces sortes de matériaux fut longuement étudiée par le physicien Rondelet, qui nous a laissé un tableau assez compliqué, mais néanmoins exact et d'autant plus précieux à consulter dans les larges limites pratiques de $1 < \frac{L}{D} < 75$.

$\frac{L}{D}$	K, par cmq	$\frac{L}{D}$	K, par cmq	$\frac{L}{D}$	K, par cmq	$\frac{L}{D}$	K, par cmq
1	1 k	26	$\frac{17}{36}$ k	42	$\frac{1}{4}$ k	58	$\frac{7}{72}$ k
12	$\frac{5}{6}$ »	28	$\frac{4}{9}$ »	44	$\frac{2}{9}$ »	60	$\frac{1}{12}$ »
14	$\frac{7}{9}$ »	30	$\frac{5}{12}$ »	46	$\frac{7}{36}$ »	62	$\frac{11}{44}$ »
16	$\frac{13}{18}$ »	32	$\frac{7}{18}$ »	48	$\frac{1}{6}$ »	64	$\frac{5}{72}$ »
18	$\frac{2}{3}$ »	34	$\frac{13}{36}$ »	50	$\frac{11}{72}$ »	66	$\frac{1}{16}$ »
20	$\frac{11}{18}$ »	36	$\frac{1}{3}$ »	52	$\frac{5}{36}$ »	68	$\frac{1}{18}$ »
22	$\frac{5}{9}$ »	38	$\frac{11}{36}$ »	54	$\frac{1}{8}$ »	70	$\frac{7}{144}$ »
24	$\frac{1}{2}$ »	40	$\frac{5}{18}$ »	56	$\frac{1}{9}$ »	72	$\frac{1}{24}$ »

Fondations en maçonnerie. — Les supports des maçonneries industrielles affectent une forme ordinairement prismatique, avec les annotations suivantes : H hauteur, S section, *d* densité, R coefficient de résistance à la compression, P pression supposée.

Ainsi, le poids propre d'un tel pilier sera égal à son volume multiplié par sa densité, soit :

$$SHd.$$

et le poids total à supporter par la section dangereuse S R devient :

$$P + SHd.$$

D'où la relation d'équilibre à la base :

$$RS = P + SHd.$$

Et nous obtiendrons la valeur de la section S après transformations successives :

$$RS - SHd = P;$$
$$S(R - Hd) = P;$$
$$S = \frac{P}{R - Hd}.$$

IV. FLEXION

La flexion peut être regardée comme la résultante des efforts de traction et de compression, puisque nous avons vu que lorsqu'on exerce une pression perpendiculaire à l'axe d'un solide, le plan des fibres neutres de celui-ci demeure invariable, tandis que les fibres du dessous, s'allongent et que celles du dessus se raccourcissent.

Le *moment fléchissant*, ou moment de la force extérieure fléchissante, se trouve alors équilibré par le moment de la résistance qui provient des forces moléculaires par rapport à l'axe neutre. La *section dangereuse* de la pièce est celle qui est le plus exposée.

En désignant par R la charge pratique qu'il ne faut point dépasser, par Z le module de la section qui provient du quotient $\frac{I}{v}$ (I moment d'inertie de la section encastrée pris par rapport à l'axe mené par son c. d. g. perpendiculairement au plan de la flexion, v distance de la fibre la plus tendue ou la plus comprimée à la fibre neutre), le moment fléchissant M nous sera donné par la relation :

$$M = R \cdot Z.$$

Ajoutons que, dans la construction des pièces de machines dont nous reparlerons, la limite R ne doit jamais être atteinte. On prend généralement le sixième pour les métaux et le dixième pour les bois chargés en permanence, la moitié $\left(\frac{1}{12} \text{ et } \frac{1}{20}\right)$ quand ces matériaux ne doivent recevoir que des charges temporaires.

V. TORSION

Nous l'avons dit, la torsion est ce phénomène que tend à produire un couple dont une force agit dans un sens et l'autre force dans le sens opposé de la rotation, comme dans le cas d'un arbre de transmission, dans une meule en travail, etc.

On a donné le nom de *moment de torsion* T_0 d'une pièce au produit de l'intensité P de la force kilogrammétrique par la longueur R du bras de levier de son point d'application. Ainsi :

$$T_0 = P \cdot R.$$

Quand la force devient suffisante pour produire un véritable cisaillement, cette formule prend la forme :

$$T_0 = F \cdot Z_t ;$$

les principales valeurs de F étant données ci-après :

Effort maximum F :

Chêne.	40
Fonte ordinaire	190
Fer en barres.	550
Acier doux non trempé . . .	915
Acier fondu non trempé . . .	2800

Z_t dépend des sections, elles-mêmes très variables.

VI. CISAILLEMENT

Terminons enfin cette série par le cisaillement, qui est une sorte de glissement des molécules parallèlement à la section coupée.

En désignant par C_c le coefficient de ce phénomène dans la section S^{m/m^2}, l'effort nécessaire exigera une pression en kilogrammes :

$$P = SC_c.$$

Les coefficients de sécurité et de rupture sont représentés ci-après :

Matériaux	Résistance en kilog. par m/m 2	
	de sécurité	de rupture
Acier fondu, non trempé.....	25,00	65,00
Acier doux, non trempé.....	10,00	50,00
Fer en barres...............	5,50	35,00
Bronze phosphoreux.........	2,00	20,00
Cuivre écroui...............	5,20	»
Fil de laiton................	5,00	»
Fonte ordinaire..............	5.00	»
Laiton ordinaire.............	1,90	»
Bronze ordinaire............	1,70	»
Cuivre recuit................	1,60	»
Chêne.......................	0,07	0,80
Pin.........................	0,04	0,42

FIN DU TOME PREMIER

TABLE DES MATIÈRES

CONTENUES DANS LE TOME PREMIER

DEUXIÈME PARTIE

Notions de mécanique

FIN DE LA TABLE DU TOME PREMIER

IMPRIMERIE BUSSIÈRE. SAINT-AMAND (CHER)

Engrenage 174.

ENCYCLOPÉDIE-ROR

COLLECTION

DES

MANUELS-ROR

FORMANT UNE

ENCYCLOPÉDIE DES SCIENCES ET DES A

FORMAT IN-18

Par une réunion de Savants et d'Indust

Tous les Traités se vendent séparément.

La plupart des volumes, de 300 à 400 pages, r
ment des planches parfaitement dessinées et gr
et des vignettes intercalées dans le texte.

Les Manuels épuisés sont revus avec soin et n
niveau de la Science à chaque édition. Aucun M
n'est cliché, afin de permettre d'y introduire les
fications et les additions indispensables.

Cette mesure, qui met l'Editeur dans la nécess
renouveler à chaque édition les frais de compo
typographique, doit empêcher le Public de comp
prix des *Manuels-Roret* avec celui des autres ouv
tirés sur cliché à chaque édition, et ne bénéf
d'aucune amélioration.

Pour recevoir chaque volume franc de port, on
dra, à la lettre de demande, un mandat sur la
(de préférence aux timbres-poste) équivalant au
porté au Catalogue.

Cette franchise de port ne concerne que la
tion des Manuels-Roret et n'est appli
la France et à l'Algérie. Les volumes expédiés
ger seront grevés des frais de poste établis
conventions internationales.

Bar-sur-Seine. — Imp. Ve C. SAILLARD.