

APPLICATIONS
DE LA
MÉCANIQUE INDUSTRIELLE

PAR

PHILIPPE BANNEUX

Ingénieur Principal honoraire au Corps des Mines

1876-1917

MÉMOIRES

- I. Emploi de l'air comprimé comme force motrice. . . . 1876
 - II. Rupture du cuvelage en fonte du puits du Baneux à
Llége 1880
 - III. Défaut de sécurité des bourroires métalliques dans le
tirage à la poudre 1883
 - IV. Explosion d'une chaudière à vapeur. 1886
 - V. Résistance des enveloppes, cuvelages, serrements et
plates-cuves 1891
 - VI. Du solide de « plus grande action ». 1899
 - VII. Théorie du Pont de Wheatstone 1911
 - VIII. Théorie des courants polyphasés 1917
-

DE
L'EMPLOI DE L'AIR COMPRIMÉ

COMME FORCE MOTRICE

PAR

M. PHILIPPE BANNEUX

SOUS-INGÉNIEUR AU CORPS DES MINES

I. — EXPRESSION DU RENDEMENT
DANS LE CAS ORDINAIRE

Dans une note présentée en janvier 1873 à la Section de Liège de l'Association des ingénieurs sortis des écoles spéciales des arts et manufactures et des mines, M. Trasenster s'est proposé de rechercher le rendement théorique du travail de l'air comprimé servant à actionner les perforatrices établies dans le fond des travaux d'une mine, pour le cas où le gaz agit à pleine pression. Il a comparé pour cela le travail que nécessite le refoulement dans le réservoir d'un mètre cube d'air puisé dans l'atmosphère et le travail rendu par la même masse d'air poussant, à la tension qui existe dans le réservoir, le piston de la perforatrice. L'auteur, pour évaluer le travail dépensé et le travail rendu, fait usage de la loi de Mariotte. Or, cette dernière, dans les conditions de marche des compresseurs, n'est pas suffisamment rigoureuse, de sorte que les résultats auxquels M. Trasenster arrive sont inexacts, au moins

absolue, c'est-à-dire, à la température comptée à partir de ($- 273^{\circ}$) pris pour origine.

Ce qui revient à la relation :

$$p. v = Rt \text{ (1)}$$

p représente la pression, v le volume correspondant, t la température absolue; R est une constante qui dépend uniquement de la nature du fluide.

A ces deux lois, Clausius a ajouté une troisième, qui, comme les précédentes, est démontrée *à posteriori* ⁽¹⁾; les résultats qu'on en a déduits sont aussi concordants que possible avec ceux de l'expérience.

Cette loi est ainsi formulée :

3^o La quantité de chaleur, qu'on doit fournir à un gaz pour qu'il se dilate à température constante, est mesurée par le travail extérieur effectué pendant la dilatation. D'après cela, la chaleur libre d'une masse donnée de gaz est la même, quel que soit son volume, pourvu que sa température reste constante. En un mot, l'attraction des molécules que l'on doit vaincre pour dilater un corps est nulle dans les gaz.

Inversement, quand on comprime un gaz, le travail que l'on doit consommer se porte tout entier sur la température, le rapprochement des molécules s'effectuant sans effort ⁽²⁾.

Si on communique à un corps une quantité de chaleur infiniment petite dQ , et qu'il en résulte un accroissement de volume dv , une partie de cette chaleur aura

(1) La mémorable et célèbre expérience de Joule est, pour l'air, la démonstration directe de la loi de Clausius. — Cette expérience ainsi que les circonstances qui l'accompagnent sont très-bien exposées dans le nouvel ouvrage que vient de terminer il y a quelques semaines, M. Hirn. — Tome I, pages 147 et suivantes. — Juin 1876.

(2) Consulter la remarquable traduction des *Mémoires de Clausius* de M. F. Folie, administrateur-inspecteur de l'Université de Liège.

été employée pour vaincre la pression extérieure et produire le travail $(+ p dv)$ ^{kgm.}

Ce travail correspond à $(Ap dv)$ calories,

A étant l'équivalent calorifique de 1 kilogrammètre.

Quant au reste de la chaleur, il aura servi à augmenter la température et à écarter les molécules. Nous représentons par du cette partie, de sorte que d'une façon générale et pour tout corps auquel on a fourni une quantité de chaleur dQ , on a :

$$dQ = du + Ap dv \quad (*)$$

Pour les gaz, cette valeur u dépend évidemment des caractéristiques se rapportant à leur état final, l'état initial étant le même pour chaque cas ; on a donc

$$u = f(p, v, t)$$

En effet, dans les gaz, le travail nécessaire pour écarter les molécules est nul ; de plus, l'augmentation de température dt correspond à une augmentation de force vive des atomes, de sorte que le travail qu'on doit dépenser pour l'obtenir ou, ce qui revient au même, la chaleur, est indépendante de la façon dont on passe de t à $t + dt$ et ne dépend absolument que de l'augmentation de la force vive totale.

En remplaçant p par sa valeur tirée de l'équation (1)

$$u = \varphi(t, v)$$

de sorte que $du = \left(\frac{du}{dt}\right) dt + \left(\frac{du}{dv}\right) dv$

$$\text{donc,} \quad dQ = \left(\frac{du}{dt}\right) dt + \left(\frac{du}{dv}\right) dv + Ap dv$$

ou bien encore,

$$dQ = \left(\frac{du}{dt}\right) dt + \left\{ \left(\frac{du}{dv}\right) + Ap \right\} dv$$

Cette relation n'existe évidemment que pour les gaz et à lieu quel que soit le changement qui s'opère.

Si, par exemple, la température est constante, on aura :

$$dQ = dv \left\{ \left(\frac{du}{dv} \right) + Ap \right\}$$

Mais, d'après la loi de Clausius, la chaleur fournie dans ce cas se retrouve tout entière dans le travail extérieur, de sorte que $dQ = Ap dv$, ce que l'on peut déduire du reste, de la relation (2).

Par conséquent $\left(\frac{du}{dv} \right) = 0$

c'est-à-dire, que u est indépendant de v et aussi

$$\left(\frac{du}{dt} \right)$$

que nous représentons par c qui est, dès lors, le calorique spécifique du gaz sous volume constant.

D'après ce que l'on vient de voir, c ne peut être qu'une fonction de t . De plus, l'expérience montre que cette quantité est probablement une constante.

Admettant cela, nous aurons :

$$dQ = cdt + Ap dv$$

Si le changement s'opère à pression constante, on aura de l'équation (1),

$$pdv = Rdt$$

de sorte que $dQ = cdt + A Rdt = (c + A R) dt$

$c + A R$ est, par conséquent, le calorique spécifique c' du gaz sous pression constante.

$$c' = c + A R$$

c' aussi est donc invariable.

Si la masse gazeuse se trouve dans des conditions telles qu'elle ne reçoive ni n'émette de chaleur :

$$dQ = 0, \text{ c'est-à-dire, } cdt + Ap dv = 0$$

Mais de (1),

$$dt = \frac{1}{R} (pdv + vdp)$$

d'où
$$\frac{c}{R}(pdv + vdp) + Ap dv = 0$$

ou
$$pdv (c + AR) + cvdp = 0$$

$$\frac{dv}{v} c' + c \frac{dp}{p} = 0$$

$$\frac{c'}{c} lgv + lgp = \text{const.}$$

$$lg v^{\frac{c'}{c}} p = \text{const.}$$

ou enfin
$$pv^k = \text{const.} = C$$

$$k \text{ égalant } \frac{c'}{c}$$

c' et c sont des constantes que l'on a déterminées pour chaque gaz.

Ainsi, pour l'air, $c' = 0.2377 c = 0.1686$

et
$$k = 1.41$$

Telle est la loi de Poisson.

Déterminons, d'après cela, *le travail nécessaire pour comprimer jusqu'à P, 1^{m3} d'air pris à la pression atmosphérique p et à la température t, ainsi que la température finale T.*

\mathfrak{E} étant ce travail, on a, le volume diminuant quand la pression augmente :

$$\mathfrak{E} = - \int_v^v p dv = - C \int_v^v \frac{dv}{v^k} = - C \int_v^v dv v^{-k}$$

d'où
$$\mathfrak{E} = - C \left[\frac{v^{1-k}}{1-k} \right]_v^v = \frac{C}{K-1} \left\{ v^{1-k} - V^{1-k} \right\}$$

donc
$$\mathfrak{E} = \frac{1}{K-1} \left\{ C v^{1-k} - C V^{1-k} \right\}$$

$$\text{or, } \begin{array}{ll} P v^k = C & \text{d'où } P v = C v^{1-k} \\ p V^k = C & \text{d'où } p V = C V^{1-k} \end{array}$$

Par conséquent,

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{K-1} (P v - p V)$$

Cette expression peut se mettre sous d'autres formes.

Posons, par exemple, $P = np$,

$$\text{et par conséquent, } n v^k = V^k \quad \text{ou} \quad v = \frac{V}{n^{\frac{1}{k}}}$$

on aura :

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{K-1} (n p v - p V)$$

$$\text{ou} \quad \mathfrak{E} = \frac{p V}{K-1} \left(n^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right)$$

On a encore : $P v = RT$ et $p V = Rt$,
c'est-à-dire, $P v - p V = R(T - t)$.

$$\text{donc} \quad \mathfrak{E} = \frac{R}{K-1} (T - t).$$

Quant à la température finale T , on peut l'obtenir comme suit :

$$P v = RT \quad \text{ou} \quad np \cdot \frac{V}{n^{\frac{1}{k}}} = RT$$

$$\text{donc} \quad n^{\frac{k-1}{k}} \cdot Rt = RT,$$

$$\text{par suite} \quad T = t n^{\frac{k-1}{k}}.$$

Ainsi, connaissant l'état initial du gaz et le rapport

des pressions finale et initiale, on peut déterminer toutes les caractéristiques de l'état extrême, ainsi que le travail effectué.

Afin de juger du degré d'exactitude de ces formules, employons les pour résoudre le problème suivant :

Dans un cylindre de 1^m,20 de course, on comprime de l'air de 1 à 4 atmosphères; après quel parcours du piston cette pression sera-t-elle atteinte?

Le volume initial V est proportionnel à 1^m,20.

Le volume final v est proportionnel à (1^m,20 — x), x étant la quantité inconnue

$$\text{donc, } \frac{V}{v} = \frac{1,20}{(1,20 - x)} = n^{\frac{1}{k}} = 4^{\frac{1}{1.41}}$$

$$\text{ou } \frac{1,20}{(1,20 - x)} = 2,676$$

$$1,20 = 1,20 \times 2,676 - 2,676 x$$

$$1,20 = 3,2112 - 2,676 x$$

$$x = \frac{2,0112}{2,676} = 0,75$$

Ainsi, d'après les formules résultant de la loi de Poisson, la pression 4 atmosphères est atteinte après un parcours de 0^m,75.

L'expérience qu'on a faite à la houillère Marie, du charbonnage Cockerill, à Seraing, et que M. Trassenster rappelle dans sa note, indique 0,72.

D'après la loi de Mariotte, l'air aurait dû arriver à 4 atmosphères après un parcours de $1,20 \times \frac{3}{4} = 0,90$.

La loi de Poisson est donc bien plus près de la réalité que la loi de Mariotte.

Le tableau suivant indique le travail nécessité par la compression de 1 à n atmosphères de 1^m d'air à la

température de 20° (ou 293° de température absolue), en admettant d'abord la loi de Mariotte et ensuite celle de Poisson.

Dans le premier cas :

$$\zeta = 10,333 \lg n, \quad t = 20^\circ, \quad v = \frac{1}{n}.$$

Dans le second cas :

$$\zeta = \frac{10,333}{0,41} \left(n^{0,29} - 1 \right) = 25,202 \left(n^{0,29} - 1 \right)$$

$$T = 293 n^{0,29} \quad v = \frac{1}{n^{\frac{1}{k}}}$$

n.	D'APRÈS LA LOI DE MARIOTTE.			D'APRÈS LA LOI DE POISSON.			RAPPORT entre les travaux suivant les deux lois.
	Températ.	Volume.	Travail.	Températ.	Volume.	Travail.	
1	20°	1.000	0	20°	1.000	0	1 : 1
2	20	0.500	7,161	85	0.612	5,611	1 : 1,28
3	20	0.333	11,356	130	0.459	9,456	1 : 1,20
4	20	0.250	14,322	165	0.374	12,471	1 : 1,14
5	20	0.200	16,626	194	0.320	14,990	1 : 1,11
6	20	0.167	18,517	219	0.281	17,172	1 : 1,08
7	20	0.143	20,108	242	0.251	19,109	1 : 1,05
8	20	0.125	21,483	263	0.229	20,859	1 : 1,03
9	20	0.111	22,712	281	0.212	22,459	1 : 1,01
10	20	0.100	23,797	298	0.195	23,938	1.006 : 1

La différence, ou le rapport entre les travaux, diminue comme on voit, quand la pression finale augmente.

De plus, entre 9 et 10 atmosphères, les travaux sont égaux ; ce qui montre que les travaux, suivant la loi de Poisson, inférieurs d'abord à ceux que donne la loi de Mariotte, augmentent dans une plus forte proportion que ces derniers.

Evaluons actuellement le *travail nécessaire pour refouler dans le réservoir d'air comprimé à la pression P, 1^{m3} d'air pris dans l'atmosphère à la pression p.*

La compression du volume V d'air jusqu'à P exige le travail :

$$\frac{1}{K-1} (Pv' - pV)$$

v' est le volume final.

Ce travail, à pression variable, est immédiatement suivi d'un autre, à pleine pression P, nécessaire pour faire entrer le volume v' dans le réservoir :

Ce travail est Pv' .

Enfin, il s'opère, dans le second cylindre du compresseur, un travail à pleine pression p, pendant que le piston engendre le volume V, c'est donc pV .

Le travail total \mathfrak{E}_e effectué sera, d'après cela,

$$\mathfrak{E}_e = \frac{1}{K-1} (Pv' - pV) + Pv' - pV$$

$$\text{ou } \mathfrak{E}_e = (Pv' - pV) \left(\frac{1}{K-1} + 1 \right)$$

$$\mathfrak{E}_e = \frac{K}{K-1} (Pv' - pV)$$

$$\text{Or, } v' = \frac{V}{n^{\frac{1}{k}}}, \quad P = np,$$

donc :
$$\mathfrak{E}_e = \frac{Kp}{K-1} \left(n^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) \quad (1)$$

V égalant 1^{m3} .

Suivant la loi de Mariotte on aurait eu,

$$Pv + pv \lg n - pV,$$

or,

$$Pv = pV$$

de sorte que le travail effectué serait simplement

$$p \lg n.$$

Le tableau suivant indique les travaux effectués d'après chacune des deux lois de Mariotte et de Poisson. — La différence est d'autant plus forte ici que la pression finale augmente.

$$\frac{Kp}{K-1} = 35,535.$$

n.	SUIVANT LA LOI de MARIOTTE.	SUIVANT LA LOI de POISSON.	RAPPORTS des TRAV. PRÉCÉDENTS.
1	0	0	1 : 1
2	7,161	7,912	1 : 1.11
3	11,356	13,333	1 : 1.17
4	14,322	17,584	1 : 1.23
5	16,626	21,136	1 : 1.27
6	18,517	24,212	1 : 1.31
7	20,108	26,943	1 : 1.34
8	21,483	29,411	1 : 1.37
9	22,712	31,667	1 : 1.39
10	23,797	33,753	1 : 1.41

(1) Cette expression représente non-seulement le travail, pour une course effectuée dans deux compresseurs accouplés, mais encore celui que l'on obtient dans un même cylindre pour une oscillation complète du piston de ce cylindre.

M. Daxhelet, ingénieur, chef de service de la Société John Cockerill, à Seraing, a relevé, au moyen d'un diagramme pris sur le compresseur (1), le travail qui s'y effectuait pour un coup de piston à vapeur. L'air était porté à 5 atmosphères.

On trouva 3,809 kilogrammètres.

Appliquons à ce cas les formules que nous donnent les deux lois en question.

Le diamètre des compresseurs étant de 0^m,45, leur course de 1^m,20, le volume d'air correspondant à chaque coup de piston de l'appareil compresseur, était par conséquent,

$$1,20 \times 3,14 \times \frac{0,45^2}{4} = 0,^{m^3}191$$

Ainsi le travail cherché est celui qu'il faut produire pour introduire dans le réservoir 0^{m^3},191 d'air puisé dans l'atmosphère.

Pour 1^{m^3} il faut 16,626^{kgm} ou 21,136^{kgm} suivant l'hypothèse admise. Par suite, pour 0^{m^3},191 on aura :
 16,626 × 0,191 = 3,176^{kgm} pour la loi de Mariotte,
 21,136 × 0,191 = 4,037 " " Poisson.

Le dernier résultat ne diffère de celui de l'expérience que de 200^{kgm} environ, soit 1/2 calorie de perte seulement; car la différence qui existe provient certainement de ce que la température due au travail de compression ne se maintient pas intacte comme le suppose la loi. Du reste, en examinant de près le diagramme relevé par M. Daxhelet, on constate que la pression, aussitôt qu'elle a atteint 5 atmosphères, tombe et se relève vers la fin pour atteindre la valeur 4^e,8. Si donc, on admet, comme le diagramme paraît l'indiquer, que

(1) *Revue universelle des Mines.* — Année 1873. — Tome XXXIII.

la pleine pression s'est faite à 4^a, 8 au lieu de 5, on aura pour le travail concernant 1^{m3},

$$35,535 \left(4.8^{0,29} - 1 \right)$$

ou $35,535 \times 0,576 = 20,469$.

Et pour 191^{lit}, $20,469 \times 0,191 = 3,909^{\text{kgm}}$.

Cette concordance, qui existe entre les résultats de l'expérience et ceux que donne une formule de théorie pure, est certainement remarquable.

Déterminons le *travail rendu par 1^{m3} d'air employé dans la mine après avoir été comprimé*.

Ce volume, par suite de son séjour prolongé dans le réservoir, arrive dans le fond des travaux à la température de l'air ambiant, c'est-à-dire, à t .

Si donc v est le volume de ce mètre cube d'air sous la pression P du réservoir, on a :

$$Pv = pV.$$

Ici la loi de Mariotte est applicable. Le volume de gaz a eu le temps de se refroidir et de se retrouver, après la compression, à la même température qu'avant.

$$\text{De ce que } P = np, \text{ on a } v = \frac{V}{n} = \frac{1}{n}$$

L'air agissant à pleine pression, on a pour le travail restitué :

$$\mathfrak{C}_r = (P - p) v = p \left(n - 1 \right) \frac{1}{n} = p \left(1 - \frac{1}{n} \right)$$

$$\text{Ainsi } \mathfrak{C}_r = p \left(1 - \frac{1}{n} \right)$$

On voit que le travail rendu augmente avec la pression finale, c'est-à-dire, la pression du réservoir. Toutefois ce travail, comme le dit très-bien M. Trasenster,

qui, le premier, a établi cette formule, tend vers une limite supérieure qu'il ne peut dépasser et qui répond à $n = \infty$.

Alors le travail rendu est à son maximum, qui est de

$$p^{\text{kgm}} = 10,333^{\text{kgm}}.$$

Quelle que soit la pression de l'air, tant qu'on aura des machines à pleine pression, on ne retrouvera jamais dans la perforatrice $10,333^{\text{kgm}}$.

Pour une pression de 2 atmosphères dans le réservoir, on a déjà :

$$\mathfrak{G}_r = \frac{10,333}{2}^{\text{kgm}},$$

c'est-à-dire, la moitié de ce que rendrait une pression infinie.

On a donc tout intérêt, sous ce rapport, à ce que la pression dans le réservoir ne dépasse pas une certaine tension.

Nous avons actuellement les deux termes servant au calcul du rendement.

D'un côté, le travail rendu :

$$\mathfrak{G}_r = p \left(1 - \frac{1}{n} \right)$$

D'un autre, le travail effectué par les compresseurs,

$$\mathfrak{G}_e = \frac{Kp}{K-1} \left(n^{\frac{K-1}{K}} - 1 \right)$$

donnent pour le rendement,

$$E = \frac{\mathfrak{G}_r}{\mathfrak{G}_e} = \frac{1 - \frac{1}{n}}{n^{\frac{K-1}{K}} - 1} \cdot \frac{K-1}{K}$$

ou

$$E = 0,29 \frac{1 - \frac{1}{n}}{n^{0,29} - 1}$$

Le rendement ne dépend donc que du rapport des pressions P et p .

Cherchons le maximum de la valeur de E .

Egalons pour cela la dérivée du second membre à 0, il vient :

$$+\left(n^{0,29} - 1\right) \frac{1}{n^2} - \left(1 - \frac{1}{n}\right) 0,29 n^{-0,71} = 0 \quad (a),$$

d'où $1,29 n^{0,29} - 0,29 n^{1,29} - 1 = 0.$

Cette équation est satisfaite par $n = 1$.

La valeur de E est alors indéterminée; toutefois la véritable valeur du rendement dans ce cas est 1, attendu que les deux travaux que l'on compare sont égaux.

La preuve analytique résulte de ce qu'en prenant le rapport des dérivées du numérateur et du dénominateur, on fait disparaître l'indétermination et on a :

$$E = 0,29 \frac{\frac{1}{n^2}}{0,29 n^{-0,71}}$$

qui, pour $n = 1$, donne :

$$E = 0,29 \frac{1}{0,29} = 1.$$

Cette valeur de E est évidemment le maximum.

On satisfait également à l'équation (a) dont on a fait disparaître le terme

$$\left(\frac{1}{n^{0,29} - 1}\right)^2 \quad \text{en posant } n = \infty.$$

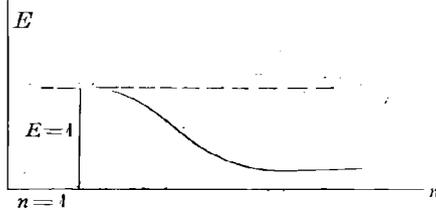
Il vient alors,

$$E = 0.$$

C'est le minimum.

On peut facilement représenter les valeurs de E par une courbe. Car on sait que l'axe des n est asymptote de la courbe des E ; de plus, le point $E = 1, n = 1$ est

celui dont l'ordonnée est maximum; enfin, en ce point, la tangente à la courbe est parallèle à l'axe des n puisque ses coordonnées annulent la valeur de la dérivée de E .



Nous donnons, dans le tableau suivant, les valeurs de E qui correspondent aux valeurs de n variant de 1 à 10. — Nous y joignons de plus les chiffres trouvés par M. Trasenster au moyen de la formule

$$E = \frac{1 - \frac{1}{n}}{\lg n}$$

basée sur la loi de Mariotte.

n .	D'APRÈS LA LOI de MARIOTTE.	D'APRÈS LA LOI de POISSON.	DIFFÉRENCE.
1	1.00	1.00	0 p. c.
2	0.72	0.65	7 —
3	0.61	0.52	9 —
4	0.54	0.44	10 —
5	0.50	0.39	11 —
6	0.47	0.36	11 —
7	0.44	0.33	11 —
8	0.42	0.31	11 —
9	0.40	0.29	11 —
10	0.39	0.27	12 —
∞	0.00	0.00	0

On peut aussi déterminer le rapport du travail rendu au fond de la mine et du travail dépensé au jour dans

le cylindre à vapeur, au moins pour le cas étudié par M. Daxhelet.

Le diagramme relevé sur le piston à vapeur a donné 4,534 kilogrammètres.

Le travail restitué dans la perforatrice

$$pV \left(1 - \frac{1}{n} \right) = 10,333 \times 0,191 \times \frac{4}{5}$$

c'est-à-dire, $1,579^{\text{kgm}}$.

Envisagé de la sorte, le rendement serait :

$$E' = \frac{1,579}{4,534} = 0,348.$$

Dans ce cas donc le travail rendu au fond est un peu plus grand que le $\frac{1}{3}$ de celui que la machine à vapeur effectue au jour.

Mais la pression dans les travaux est quelque peu supérieure à celle du réservoir ; elle est augmentée de tout le poids de la colonne gazeuse qui, d'une part, aboutit à l'outil et, d'autre part, au réservoir d'air comprimé.

Déterminons l'influence de la profondeur sur la pression dans la perforatrice. Nous supposons pour cela que les résistances au mouvement sont nulles. Du reste, le travail qui en provient se transforme en chaleur, une partie s'en perd par conductibilité et l'autre se reporte sur le gaz pour renforcer le travail emmagasiné. ⁽¹⁾

Considérons à une distance verticale z de l'orifice du réservoir, deux tranches infinitésimales d'épaisseur

(1) Tout ce qui concerne le mouvement des gaz dans les tuyaux de conduite a été supérieurement traité dans les mémoires de M. le Dr Grashof. — Ces mémoires ont été traduits par M. L. Pérard, professeur ordinaire à l'université de Liège et publiés dans le tome XXVII de la *Revue Universelle des Mines*.

dz . Il est évident que la pression de la tranche inférieure est égale à la pression de la tranche supérieure, que celle-ci transmet, augmentée du poids de cette dernière tranche rapportée à l'unité de surface. — Ainsi P' étant la pression spécifique de la tranche inférieure $P' - dP'$ sera celle de sa voisine et l'on a :

$$P' = P' - dP' + \frac{S dz \pi}{S}$$

S est la section du tuyau, $S dz$ le volume de la tranche supérieure, π le poids du mètre cube d'air dans les conditions de cette partie du conduit,

donc $dP' = \pi dz$,

Soit a le poids de 1^{m^3} d'air à la pression atmosphérique p ,

On a : $\frac{a}{\pi} = \frac{p}{P'}$ d'où $\pi = \frac{a}{p} P'$,

donc $dP' = \frac{a}{p} P' dz$,

ou bien $\frac{dP'}{P'} = \frac{a}{p} dz$, c'est-à-dire, $\lg P' = \frac{a}{p} z + c$.

Or, pour $z = 0$, $P' = P$, donc $c = \lg P$

et $\lg P' - \lg P = \frac{a}{p} z$,

$$\lg \frac{P'}{P} = \frac{a}{p} z$$

ou $P' = P e^{\frac{a}{p} z}$

Mais $a = 1^{\text{k}.3}$, et $p = 10,333$, par conséquent

$$\lg \frac{P'}{P} = \frac{1}{7,948} z$$

Dans le cas où $P = 4$ atmosphères, on a, au fond

de la mine, les valeurs P' ci-après, correspondant aux différentes profondeurs z :

z	P'	z	P'
100	4,048	600	4,32
200	4,100	700	4,36
300	4,160	800	4,44
400	4,200	900	4,48
500	4,260	1,000	4,54

On voit qu'il faut une profondeur de 1,000 mètres pour avoir en plus dans les travaux $\frac{1}{2}$ atmosphère.

Et pour $P = 4$, au lieu d'avoir un travail rendu

$$\mathfrak{E}_r = \frac{3}{4} \times 10,333 = 7,750,$$

on aura :

$$10,333 \times \left(1 - \frac{1}{4,2}\right) = 10,333 \times \frac{3,2}{4,2} = 7,862$$

pour 400 mètres de profondeur,

de sorte que $E = \frac{7,862}{17,595} = 0,45$ au lieu de 0,44

trouvé précédemment.

Dans l'exemple que nous venons de traiter numériquement, d'après les renseignements de M. Daxhelet, on aurait pour le travail rendu dans le cas d'une profondeur de 500 mètres :

$$10,333 \times \left(1 - \frac{1}{5,325}\right) = 10,333 \times \frac{4,325}{5,325} = 8,390^{\text{king.}}$$

pour 1^{m^3} , et pour $191^{\text{ht.}}$ $1,601^{\text{king.}}$

$$\text{soit donc } E = \frac{1,601}{4,534} = 0,353$$

Ainsi, du poids de la colonne de gaz, pour des profondeurs moyennes, il résulte une augmentation de

1 % environ dans les rendements calculés précédemment.

On vient de voir l'influence provenant de la variation de pression dans la conduite d'air ; mais la même cause, qui, pour l'air comprimé, est favorable au travail, altère la pression dans les boueux en creusement. Celle-ci y est évidemment augmentée de tout le poids de l'air compris entre le front d'attaque et le niveau de l'orifice du puits. La formule, trouvée ci-dessus, peut parfaitement du reste servir à la détermination de la pression dans la mine.

Si p est la pression atmosphérique au jour et p' " " " au fond, on a :

$$\lg. \frac{p'}{p} = \frac{1}{7,948} z. \quad (a)$$

z représentant la profondeur,

$$\text{Donc,} \quad \frac{p'}{p} = \frac{P'}{P} \quad (b)$$

On peut calculer p' soit par la relation (a) soit par la relation (b) où tout est connu.

Cela étant, voici ce que l'on obtient pour des profondeurs variant de 100 à 1,000 mètres.

Rappelons que l'on a en atmosphères :

$$p' = \frac{P'}{P}$$

z	p'	z	p'
100	1,012	600	1,080
200	1,025	700	1,090
300	1,040	800	1,110
400	1,050	900	1,120
500	1,065	1,000	1,135

De sorte qu'il faudrait une profondeur de 1,000 mè-

tres, pour obtenir une différence de pression atmosphérique égale à $0^{\text{at}}135$, soit $1^{\text{m}},40$ d'eau seulement.

Dans les cas ordinaires, on peut donc négliger, sans erreur sensible, l'influence de cette augmentation de pression résultant de la profondeur des travaux.

II. EXPRESSIONS DU RENDEMENT DANS LES AUTRES CAS.

On a pu juger par les quelques exemples résolus pratiquement et que nous avons traités par le calcul, avec quelle approximation la loi de Poisson pouvait être appliquée.

Désireux d'étendre ces vérifications, nous nous sommes renseigné auprès de M. Lambert, ingénieur principal des mines à Charleroi, sur ce qui avait été publié à ce sujet.

Il s'empressa de nous communiquer un travail tout récent de M. Cornet, ingénieur des charbonnages du Levant du Flénu et correspondant de l'Académie des sciences de Belgique. On y étudie les moyens d'annuler les effets de la température. Cet élément qu'a négligé M. Trasenster est considéré par l'auteur de ce nouveau travail, comme le plus important. Il recherche d'abord comment on pourrait combattre son influence dans le compresseur et émet l'idée d'absorber la chaleur provenant du travail de compression en projetant au milieu de la masse échauffée, de l'eau pulvérisée. On approcherait ainsi des conditions dans lesquelles l'appareil fonctionnerait si la température était constante. En jetant les yeux sur les tableaux précédents, qui donnent les quantités de travail à effectuer suivant que l'on entretient une même température ou qu'on la laisse s'élever, on verra tout ce que l'on peut gagner par ce procédé. C'est ainsi que pour une compression à 4 atmosphères, le premier travail est moins élevé que le

second de 25 p. % environ. L'injection d'eau proposée par M. Cornet permettrait de reprendre, sinon les 25 p. %, au moins une bonne partie du travail perdu.

Au même moment où l'auteur préconisait ainsi l'emploi de l'eau pulvérisée, on apprit que ce moyen venait d'être employé pour le creusement du tunnel Saint-Gothard où fonctionnent depuis peu les compresseurs Colladon qui réalisent la première idée de M. Cornet (1).

On y est parvenu à comprimer l'air sans piston hydraulique jusqu'à des tensions de 8 atmosphères ou plus et cela, sans que la température de l'air comprimé ait dépassé celle de l'air aspiré de plus de 15° centigrades (2).

Expression du rendement dans le 2° cas : Le problème, tel qu'il est posé au Saint-Gothard, s'écarte quelque peu, comme on voit, des conditions que nous avons admises. Ici le travail effectué ne dépasse guère celui que l'on obtient dans l'hypothèse d'une température constante. De sorte que dans ce cas, on aurait :

$$\mathfrak{E}_r = p \left(1 - \frac{1}{n} \right),$$

$$\mathfrak{E}_e = p \lg n,$$

Car le travail que fait la pression atmosphérique dans le second compresseur est égal à celui qu'on opère dans le premier, à pression constante.

Donc :

$$E = \frac{1 - \frac{1}{n}}{\lg n},$$

(1) Nous apprenons à l'instant qu'à Marihaye, près de Liège, on injecte de l'eau qui est expulsée par le piston et va se refroidir dans un appareil circulatoire, placé en-dessous du réservoir d'air et dans lequel se rend également l'eau entraînée par l'air comprimé.

(2) Voir le percement du tunnel Saint-Gothard par M. le professeur D. Colladon. — *Revue Universelle*. — Tome XXXIX.

Nous verrons plus loin les valeurs numériques de ce rendement.

La loi de Mariotte, à vrai dire, n'est pas rigoureusement observée, mais on en approche beaucoup comme on va le montrer :

La pression finale est P , le volume du mètre cube, v et la température $T = 273 + 36 = 309$ environ.

Dans l'atmosphère, on a :

$$p, V = 1^{\text{m}^3} \text{ et } t = 273 + 20 = 293$$

la température extérieure étant supposée de 20° , dès lors,

$$Pv = RT \text{ et } pV = Rt,$$

de sorte que,

$$\frac{Pv}{pV} = \frac{T}{t},$$

c'est-à-dire,

$$v = \frac{1}{n} \cdot \frac{T}{t}$$

Tel est le volume final quand la température absolue t de l'atmosphère devient T après la compression ; or, dans les conditions où l'on se trouve, on a :

$$n = 6, T = 309, \text{ et } t = 293,$$

donc,

$$v = \frac{1}{6} \frac{309}{293} = 0^{\text{m}^3}176.$$

La loi de Mariotte aurait donné :

$$v = \frac{1}{6} = 0^{\text{m}^3}167;$$

tandis que d'après la loi de Poisson, en supposant que la température ne soit pas tombée,

$$v = \frac{1}{n^{\frac{1}{\kappa}}} = \frac{1}{6^{\frac{1}{1.41}}} = 0,219$$

Le volume d'un mètre cube, dans le cas des appareils Colladon, après la compression, diffère de 43 litres de celui que donne la loi de Poisson, et de 10 litres seulement, de celui qui dérive de la loi de Mariotte. Cette dernière peut donc être employée comme approximation.

Des expériences complètes pourraient donner la loi véritable des variations de pression et de volume dont on pourrait faire usage avec la même concordance que celle de Poisson.

Pour en revenir au travail de M. Cornet, disons que son attention ne s'est pas seulement portée sur les compresseurs, mais qu'il a étudié également le moyen de permettre à l'air, agissant dans la perforatrice, de travailler à détente. Il propose pour obvier au refroidissement énorme de l'air qui se dilate, de le réchauffer par l'eau que l'on peut se procurer à l'intérieur des travaux. Il n'est pas probable que l'on puisse retrouver de la sorte tout le travail qui est emmagasiné dans l'air comprimé; mais ce serait beaucoup déjà si, pratiquement, au moyen d'eau pulvérisée, on pouvait faire rendre à l'air qui s'échappe une partie du travail qui est totalement perdu. Les chiffres suivants font ressortir l'importance des recherches à faire pour atteindre ce but :

Un mètre cube d'air comprimé à 4 atmosphères et travaillant dans la perforatrice à pleine pression suivie d'une détente jusque 1 atmosphère, à température constante, rend un travail de 14,322^{kgm}.

Ce mètre cube d'air, travaillant à pleine pression seulement, ne rend que 7,750^{kgm}.

S'il était donc possible d'entretenir la température de l'air constante, on obtiendrait, dans le cas que nous venons d'examiner, un travail double de celui que l'on réalise aujourd'hui.

C'est à M. Cornet que revient l'honneur d'avoir fait entrevoir la solution de cette question, plus importante au point de vue du travail employé que celle qu'ont résolue les compresseurs Colladon.

La nature même des recherches de M. Cornet ne lui permettait pas de recourir à la loi de Mariotte. Nous démontrerons d'abord que les deux relations, dont s'est servi l'auteur, ne sont autres que la loi des gaz parfaits et celle de Poisson.

Voici, en effet, ce qu'on lit à la 4^e page de la notice qui nous occupe :

« Les températures et les volumes ont été calculés
« au moyen des formules :

$$\frac{T}{t} = \left(\frac{P}{p}\right)^{\frac{29}{100}}, v = V \frac{pT}{Pt}$$

Nous n'avons fait que changer les notations de ces formules, pour employer celles dont nous avons précédemment fait usage.

Cela étant, multiplions ces deux relations membre à membre, nous aurons :

$$\frac{T}{t} v = V \left(\frac{P}{p}\right)^{0,29} \frac{p}{P} \cdot \frac{T}{t},$$

c'est-à-dire que

$$v = V \frac{p^{0,71}}{P^{0,71}}$$

$$\text{d'où} \quad \frac{p}{P} = \frac{v^{\frac{1}{0,71}}}{V^{\frac{1}{0,71}}} = \frac{v^{1,41}}{V^{1,41}} = \frac{v^k}{V^k},$$

ou

$$Pv^k = pV^k.$$

C'est la loi de Poisson.

De plus, la deuxième relation fournit directement :

$$\frac{Pv}{T} = \frac{pV}{t},$$

C'est la loi des gaz parfaits.

Ainsi M. Cornet n'a fait qu'appliquer les lois relatives aux gaz dans l'hypothèse de la loi de Poisson et qui sont celles qui nous ont servi. Les volumes et températures, qu'a déterminés l'auteur, sont identiques aux nôtres, malheureusement il n'en est pas de même de l'élément capital, c'est-à-dire, de l'évaluation du travail qui se produit dans les compresseurs et de celui qu'on obtient dans la perforatrice. On sait que ces quantités de travail sont, d'après les formules établies :

$$p \lg n,$$

si l'on admet la loi de Mariotte,

$$\text{et} \quad \frac{K}{K-1} (Pv - pV),$$

si l'on admet la loi de Poisson.

Voici ce que dit à ce sujet M. Cornet :

« Quant aux quantités de travail, elles ont été mesurées à l'aide du planimètre polaire sur les diagrammes qui sont joints à cette notice. »

Ainsi M. Cornet porte sur une même horizontale les valeurs des volumes et sur les ordonnées correspon-

dantes les valeurs des pressions *calculées* d'après les formules. Il joint ensuite ces différents points et il obtient la représentation graphique, nécessairement approchée, d'une loi que lui donne exactement une formule. Cette courbe peut servir non-seulement à déterminer les pressions et les volumes correspondants, mais encore l'aire de cette ligne entre deux ordonnées quelconques. Cette aire représente le travail de compression ou de détente, dans les mêmes conditions de température, nécessité par le passage d'un volume à l'autre, mesurés sur l'axe des abscisses.

C'est ainsi qu'opéra l'auteur du travail que nous examinons.

Ces surfaces furent déterminées au moyen du planimètre d'Amstler. Nous ne croyons pas qu'on doive suivre ce procédé.

Il n'est ni rigoureux ni pratique. Il n'est pas exact parce qu'il est impossible de construire la courbe avec précision ni d'en déterminer la surface autrement qu'avec une approximation *que l'on ne pourra apprécier*.

Il n'est pas pratique, parce que, indépendamment de la construction par points d'un diagramme, on doit se servir d'un appareil qui ne se trouve pas dans toutes les mains et qui bien souvent est d'un usage difficile. Cette façon de déterminer le travail représenté par l'aire d'une ligne fermée, ne convient que lorsque l'on a affaire à une courbe dont l'équation nous échappe ou dont l'évaluation de la surface ne peut se faire par intégration.

Que l'on s'en serve pour déterminer, par exemple, le travail d'un coup de piston à vapeur, relevé par un diagramme? Rien de mieux. C'est le seul procédé possible alors. Mais quand la courbe est connue par son équation, une simple quadrature donne plus rapidement et plus exactement le travail cherché. De plus, en dé-

terminant le travail par la méthode graphique, on ne saurait se rendre compte d'aucune relation reliant les différents éléments de la question ; on est obligé de ne faire que de l'arithmétique et on doit s'en tenir, par conséquent, aux quelques résultats numériques que fournissent autant de cas particuliers isolés.

Nous donnons dans le tableau suivant les évaluations de M. Cornet, en regard de celles que l'on obtient par les formules exposées ci-avant :

n	TRAVAUX OBTENUS SUIVANT LA LOI DE MARIOTTE		TRAVAUX OBTENUS SUIVANT LA LOI DE POISSON	
	d'après le procédé graphique.	d'après les formules.	d'après le procédé graphique.	d'après les formules.
1	0	0	0	0
2	7,130	7,161	7,932	7,912
3	11,356	11,356	13,360	13,333
4	14,260	14,322	17,737	17,584
5	16,580	16,626	21,209	21,136
6	18,475	18,517	24,310	24,212
7	20,038	20,108	27,048	26,943
8	21,422	21,483	29,518	29,411

Certes, les différences entre les déterminations de M. Cornet et celles des formules sont petites, mais ces faibles écarts qui témoignent des soins avec lesquels l'auteur a opéré, laissent intacts le manque de rigueur et la difficulté pratique de son procédé.

Expression du rendement dans le 3^e cas : Maintenant que nous avons déterminé le rendement théorique du travail de l'air comprimé dans le cas ordinaire et dans le cas des compresseurs Colladon, abordons la même question en supposant un travail à détente dans la perforatrice.

Résolvons d'abord cette question en admettant que l'air comprimé puisse se détendre jusqu'à 1 atmosphère avec refroidissement. Comme on le verra bientôt, ces conditions sont purement théoriques.

Nous avons dans la perforatrice le volume v' de 1 mètre cube d'air à la pression P et à la température t .

Dans l'atmosphère la pression est p et la température t ,

$$\text{on a :} \quad P = np \text{ et } v' = \frac{1}{n}$$

Quand l'air agit à pleine pression, il effectue un travail Pv'

$$\text{Quand il se détend jusqu'à } p, \quad \frac{1}{K-1} (Pv' - pV'),$$

V' étant le volume final.

La contrepression répond au travail : $-pV'$,
de sorte que le travail produit est :

$$\bar{\tau}_r = \frac{1}{K-1} (Pv' - pV') + Pv' - pV',$$

$$\text{ou} \quad \bar{\tau}_r = \frac{K}{K-1} (Pv' - pV').$$

Représentons par t la température finale ; nous pourrions poser :

$$Pv'^k = pV'^k$$

$$\text{ou} \quad np \cdot v'^k = pV'^k, \quad V' = v' n^{\frac{1}{k}}$$

$$\text{c'est-à-dire,} \quad n \frac{1}{n^k} = V'^k,$$

$$\text{donc} \quad V' = \frac{1}{n^{\frac{k-1}{k}}}$$

De plus, $pV' = Rt'$ } c'est-à-dire $\therefore \frac{V'}{V}$ ou $V' = \frac{t'}{t}$,
 $pV = Rt$ }

donc $t' = t \frac{1}{n^{\frac{k-1}{k}}}$

En substituant dans l'expression de \mathfrak{C}_r , on aura :

$$\mathfrak{C}_r = \frac{K}{K-1} \left(np \cdot \frac{1}{n} - p \cdot \frac{1}{n^{\frac{k-1}{k}}} \right),$$

$$\mathfrak{C}_r = \frac{Kp}{K-1} \left(1 - \frac{1}{n^{\frac{k-1}{k}}} \right).$$

Quant au travail effectué il est :

$$\mathfrak{C}_e = \frac{Kp}{K-1} \left(n^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right)$$

donc alors,

$$E = \frac{1 - \frac{1}{n^{\frac{k-1}{k}}}}{n^{\frac{k-1}{k}} - 1} = \frac{1}{n^{\frac{k-1}{k}}} = \frac{t'}{t} = V'.$$

Le rendement serait, par conséquent, égal au rapport des températures après et avant la détente dans la perforatrice — ou au volume après détente.

On peut, du reste, démontrer une autre relation non moins remarquable :

On a :

$$\begin{aligned} pV &= Rt, \\ Pv &= RT, \\ pV' &= Rt', \end{aligned}$$

t température de l'atmosphère,

t' température après la détente dans le fond,

T température après compression au jour.

Multiplications les deux dernières équations, membre à membre, il viendra :

$$P p v V = R^2 T t',$$

ou
$$n \cdot p^2 \cdot \frac{V}{n^{\frac{1}{k}}} \cdot \frac{V}{n^{\frac{k-1}{k}}} = R^2 T t.$$

ou

$$p^2 V^2 = R^2 T t,$$

c'est-à-dire, d'après la première relation,

$$R^2 t^2 = R^2 T t',$$

par suite,

$$t^2 = T \cdot t'.$$

Ainsi la température de l'atmosphère est moyenne proportionnelle entre les températures après compression au jour et après détente au fond des travaux.

On déduit de là encore :

$$\frac{t}{T} = \frac{t'}{t}$$

de sorte que

$$E = \frac{t}{T}$$

Partant, le rendement est égal au rapport des températures de l'atmosphère et du gaz après la compression suivant la loi de Poisson.

On a :
$$V' = \frac{V}{n^{\frac{k-1}{k}}}, v' = \frac{V}{n}, v = \frac{V}{n^{\frac{1}{k}}};$$

donc
$$\frac{v}{v'} = \frac{n}{n^{\frac{1}{k}}} = n^{\frac{k-1}{k}}.$$

Par conséquent,
$$V' = \frac{V}{v} = \frac{v' V}{v} \text{ ou } \frac{V}{V'} = \frac{v}{v'}.$$

Ainsi le rapport des volumes de l'air, avant et après son emploi, est égal à celui des volumes après compression et avant détente.

Déterminons les relations qui existent entre P, v, t et la pression P'' , le volume v'' et la température t'' d'un état intermédiaire entre les deux extrêmes :

$$\begin{aligned} \text{On a :} & \quad Pv'^k = P''v''^k \\ \text{soit} & \quad P = n' P'' \\ \text{on a :} & \quad n' v'^k = v''^k \\ \text{d'où} & \quad v'' = v' n'^{\frac{1}{k}} \end{aligned}$$

$$\text{De plus :} \quad \frac{Pv'}{P''v''} = \frac{Rt}{Rt''} \left\{ \frac{P}{P''} \frac{v'}{v''} = \frac{t}{t''} \right.$$

$$\text{ou} \quad n' \frac{v'}{v''} = \frac{t}{t''}, \quad t'' = t \cdot \frac{v' n'^{\frac{1}{k}}}{v' n'} = t \frac{1}{n'^{\frac{k-1}{k}}}$$

Ces formules ont servi à établir le tableau suivant. Si l'on construit la courbe des rendements :

$$E = \frac{1}{n^{\frac{k-1}{k}}},$$

On voit qu'elle est du genre hyperbolique

La plus grande valeur de E répond à $n = 1$ et alors

$$E = 1.$$

La plus petite valeur, correspond à $n = \infty$ auquel cas

$$E = 0,$$

c'est-à-dire que l'axe des n est asymptote.

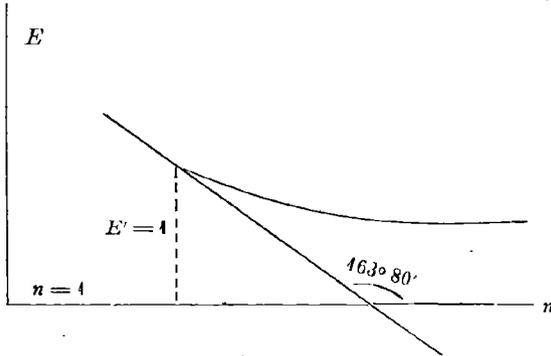
Déterminons la direction de la tangente au point $E = 1, n = 1$; on a pour cela,

$$\frac{dE}{dn} = - \frac{\frac{k-1}{k} n^{\frac{k-1}{k} - 1}}{n^2 \frac{k-1}{k}} = - \frac{k-1}{k} \cdot \frac{1}{n^{\frac{2k-1}{k}}}$$

et pour $n = 1$,

$$\frac{dE}{dn} = - \frac{k-1}{k} = - 0,29,$$

ce qui répond à une inclinaison sur l'axe des n de $163^{\circ}80'$. — Ceci achève de déterminer la courbe



On sait qu'un mètre cube d'air pris dans l'atmosphère à la pression p et à la température t , envoyé dans la perforatrice à la pression de 8 atmosphères, y occupe, à la température t , 125 litres.

Nous donnons dans le tableau suivant la température et le volume correspondant à chaque pression du gaz se détendant de 8 à 1 atmosphère. — Ensuite, pour la détente de 6 à 1 atmosphère, — de 4 à 1 atmosphère et enfin, de 2 à 1 atmosphère.

n	DÉTENTE DE 8 A 4 ATMOSPHÈRE.		DÉTENTE DE 6 A 4 ATMOSPHÈRE		DÉTENTE DE 4 A 4 ATMOSPHÈRE.		DÉTENTE DE 2 A 4 ATMOSPHÈRE.	
	Températures.	Volumes.	Températures.	Volumes.	Températures.	Volumes.	Températures.	Volumes.
8	+ 20"	0.125	"	"	"	"	"	"
7	+ 8".80	0.137	"	"	"	"	"	"
6	- 3".50	0.153	+ 20"	0.167	"	"	"	"
5	- 17".40	0.174	+ 6"	0.191	"	"	"	"
4	- 33".50	0.204	- 8"	0.221	20	0.250	"	"
3	- 52".70	0.251	- 33".50	0.274	- 2	0.309	"	"
2	- 77".20	0.334	- 61"	0.336	- 33".50	0.410	20	0.500
1	- 113".00	0.546	- 104"	0.593	- 73"	0.671	- 33".50	0.820
0.436	- 148".20	1.000	"	"	"	"	"	"
0.482	"	"	- 132"	1.000	"	"	"	"
0.567	"	"	"	"	- 107	1.000	"	"
0.753	"	"	"	"	"	"	- 52"	1.000

On voit que la chute de température est la même quand on passe de 8 à 4 atmosphères ou de 6 à 3, ou de 4 à 2, ou de 2 à 1.

Cela provient de ce que $\frac{8}{4} = \frac{6}{3} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1}$. Ce résultat était à prévoir d'après la formule,

$$t' = t \frac{1}{n^{\frac{k-1}{k}}}$$

qui indique que $t - t'$ ne dépend que de n . —

Le tableau précédent montre la raison pour laquelle, à aucune pression, le travail de détente n'est possible dans les conditions ordinaires, que nous avons supposées.

Expression du rendement dans le 4^e cas : Si, pour le cas que nous venons d'examiner, on suppose que l'on emploie au jour des compresseurs Colladon, on aura :

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_r &= \frac{Kp}{K-1} \left(1 - \frac{1}{n^{\frac{k-1}{k}}} \right), \\ \mathfrak{E}_e &= p \lg n. \end{aligned}$$

Et les rendements seront alors,

$$E = \frac{K}{K-1} - \frac{1 - \frac{1}{n^{\frac{k-1}{k}}}}{\lg n}$$

Expression du rendement dans le 5^e cas : On y suppose que la détente, dans la perforatrice, se fait à température constante.

Un mètre cube dans la perforatrice occupe le volume v' sous la pression P et à la température t .

A la fin de la course du piston, on a un volume V' sous la pression p et à la température invariable t .

Le travail de la pleine pression est : Pv' ,
 Id détente : $Pv' \lg n$,
 Id. contrepression : $- p V'$,

donc :

$$\mathfrak{E}_r = Pv' + Pv' \lg n - p V',$$

ou
$$\mathfrak{E}_r = Pv' \lg n = p \lg n.$$

On aura en conséquence,

$$E = \frac{K-1}{K} \frac{\lg n}{n^{\frac{1}{k}} - 1}$$

Expression du rendement dans le 6° cas : On a des compresseurs Colladon au jour et on suppose au fond la détente à température constante.

Il vient alors,

$$E = \frac{p \lg n}{p \lg n} = 1;$$

car ici,

$$\mathfrak{E}_r = p \lg n = \mathfrak{E}_e.$$

Un appareil parfait devrait donc comprendre, d'une part, la compression de M. Colladon, et d'autre part, la détente de M. Cornet.

Nous donnons dans le tableau suivant les différentes valeurs des rendements, n variant de 1 à 8 atmosphères.

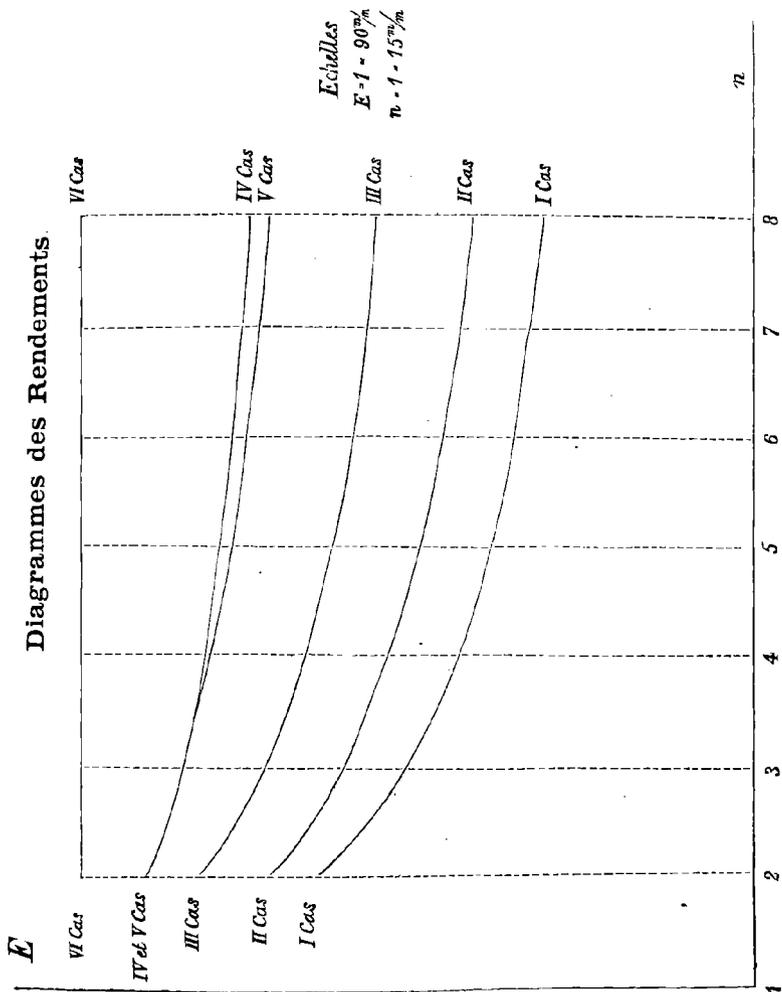
n	TRAVAUX RENDUS. \mathfrak{E}_r			TRAVAUX DÉPENSÉS \mathfrak{E}_e		RENDEMENTS.					
	A	B	C	D	F	I° cas.	II° cas.	III° cas.	IV° cas.	V° cas.	VI° cas.
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
2	5,167	6,478	7,161	7,912	7,161	0.65	0.72	0.82	0.90	0.90	1
3	6,889	9,690	11,356	13,333	11,356	0.52	0.61	0.73	0.85	0.85	1
4	7,750	11,762	14,322	17,584	14,322	0.44	0.54	0.67	0.82	0.81	1
5	8,266	13,255	16,626	21,136	16,626	0.39	0.50	0.63	0.80	0.78	1
6	8,511	14,392	18,517	24,212	18,517	0.36	0.47	0.60	0.78	0.76	1
7	8,857	15,316	20,108	26,943	20,108	0.33	0.44	0.57	0.76	0.74	1
8	9,041	16,097	21,483	29,411	21,483	0.31	0.42	0.55	0.75	0.73	1

- Nous représentons dans ce tableau par
- A, les travaux rendus à pleine pression.
 - B, id. id. à détente suivant la loi de Poisson.
 - C, les travaux rendus à détente suivant la loi de Mariotte.
 - D, les travaux dépensés pour la compression suivant la loi de Poisson.
 - E, les travaux dépensés pour la compression suivant la loi de Mariotte.

Les diagrammes de la planche ci-jointe, se rapportent aux rendements que nous avons examinés. Ils complètent le tableau précédent en ce sens, qu'ils permettent de trouver, à une échelle connue, le rendement dans tous les cas et dans toutes les conditions qui peuvent se présenter.

Comme nous l'avons déjà dit, les rendements sont plus forts dans le cas de la détente Cornet (*V*) que dans le système des compresseurs Colladon (*II*).

La question du rendement maximum des perforatrices n'est, par conséquent, résolue que pour la plus petite partie. — Il reste à réaliser pratiquement la détente à température constante.



Résumé des formules dans les différents cas.

	TRAVAIL DÉPENSÉ. \bar{C}_e	TRAVAIL RENDU. \bar{C}_r	RENDEMENT. \bar{E} .
I. — Cas ordinaire : Compression suivant la loi de Poisson. — Travail à pleine pression.	$\frac{Kp}{K-1} \left(\frac{\kappa-1}{n \kappa} - 1 \right)$	$p \left(1 - \frac{1}{n} \right)$	$\frac{K-1}{K} \frac{1 - \frac{1}{n}}{\frac{\kappa-1}{n \kappa} - 1}$
II. — Cas du Mont St-Gothard. — Compression Colladon. — Travail à pleine pression.	$p \lg n$	$p \left(1 - \frac{1}{n} \right)$	$\frac{1 - \frac{1}{n}}{\lg n}$
III. — Cas théorique : Compression suivant la loi de Poisson. — Travail à détente suivant la même loi.	$\frac{Kp}{K-1} \left(\frac{\kappa-1}{n \kappa} - 1 \right)$	$\frac{Kp}{K-1} \left(1 - \frac{1}{n \kappa} \right)$	$\frac{1 - \frac{1}{n \kappa}}{\frac{\kappa-1}{n \kappa}}$
IV. — Cas théorique : Compression Colladon. — Travail suivant la loi de Poisson.	$p \lg n$	$\frac{Kp}{K-1} \left(1 - \frac{1}{n \kappa} \right)$	$\frac{1 - \frac{1}{n \kappa}}{\frac{K-1}{K} \frac{\lg n}{n \kappa}}$
V. — Compression suivant la loi de Poisson. — Détente Cornet.	$\frac{Kp}{K-1} \left(\frac{\kappa-1}{n \kappa} - 1 \right)$	$p \lg n$	$\frac{K-1}{K} \frac{1 - \frac{1}{n \kappa}}{\frac{\kappa-1}{n \kappa} - 1}$
VI. — Compression Colladon. — Détente Cornet.	$p \lg n$	$p \lg n$	1

III. — DE LA QUANTITÉ D'EAU A EMPLOYER POUR MAINTENIR LA TEMPÉRATURE CONSTANTE. — DU MODE ET DU TRAVAIL D'INJECTION.

L'emploi de l'eau pour refroidir l'air que l'on comprime ou pour échauffer celui qui se détend, ayant déjà reçu, en partie, la sanction de l'expérience, il ne sera pas inutile de considérer le phénomène de plus près.

Le calorique absorbé, dans un temps donné, par un corps plongé au milieu d'une masse gazeuse de température plus élevée, dépend de la surface du corps et de sa conductibilité intérieure. Or, les liquides, à part le mercure, ont un pouvoir conducteur très-faible. L'échauffement de toute leur masse se produit par les mouvements des parties les plus chaudes. Ces déplacements ne s'effectueront pas si la partie supérieure du liquide est seule en contact avec la source calorifique; le manque de conductibilité empêchera l'élévation de la température des couches sous-jacentes. Aussi le matelas liquide employé dans les perforatrices de Scraing, ne protège-t-il que le piston de l'appareil compresseur; le refroidissement qu'il occasionne est insensible, mais il le serait d'autant moins pourtant que la section du compresseur serait plus grande.

On a donc tout intérêt à présenter l'eau dans le cylindre sous la plus grande surface possible. De là, à l'emploi de l'eau à l'état pulvérisé, il n'y a qu'un pas. Mais, quoi qu'on fasse, on ne parviendra pas à diviser la masse liquide autrement que par des moyens mécaniques; il faudra à chaque globule un certain temps pour refroidir la portion d'air qui lui revient. Si donc ce temps est limité, l'absorption pourra n'être que partielle et pour la rendre entière, il faudra employer

une quantité de liquide plus grande que celle que fournit la théorie qui ne tient aucun compte de la durée de l'action absorbante que, de plus, elle suppose complète.

A Marihaye, par exemple, 191 litres d'air à 1 atmosphère sont comprimés et envoyés dans le réservoir à la pression de 5 atmosphères en 2",5. Peut-on admettre qu'en moins de 3", l'eau injectée produise tout son effet?

Le calorique à reprendre variant à chaque instant, l'eau réfrigérante devra-t-elle être envoyée d'une façon régulière dans l'appareil? Pour obtenir une température uniforme, la venue de liquide ne doit-elle pas être déterminée et proportionnelle à tout moment à la chaleur dégagée?

Les variations de calorique émis par le travail de compression sont plus fortes que ce que l'on pourrait croire de prime abord. Nous montrerons tantôt que dans le cas d'une compression à 4 atmosphères, il se dégage à la fin de la compression 20 fois plus de chaleur, pour le même temps, qu'à l'origine de la course. Si le liquide arrive d'une manière constante, les premières parties s'échaufferont moins, les dernières plus; il pourra y avoir compensation dans la température moyenne, mais il y aura certainement une perte dans l'absorption, perte que l'on devra regagner en augmentant encore la quantité théorique d'eau refroidissante.

Pour fixer les idées, supposons que dans un appareil fonctionnant comme il vient d'être dit, le débit de l'eau soit le même à chaque instant et qu'à l'origine de la course, il s'ensuive un échauffement de 2° seulement pour le liquide introduit. A la fin de la compression une même quantité d'eau se trouvera en présence d'un accroissement de chaleur 20 fois plus considérable, et s'échauffera par conséquent 20 fois plus; encore faudrait-il supposer qu'une variation de température de 40° se produisit aussi rapidement et aussi facilement qu'une de 2°.

Nous croyons pouvoir conclure de ce qui précède : que la quantité d'eau déterminée par la théorie pour produire un effet donné, doit être projetée dans le cylindre suivant une certaine loi. Si l'on s'en écarte, il en résultera qu'une partie du calorique échappera à l'absorption.

La quantité d'eau déduite du calcul doit donc être considérée comme un minimum.

Toutefois, une circonstance est favorable à la dépense d'eau théorique, parce qu'elle diminue les deux causes de perte de chaleur dont il vient d'être parlé. C'est l'émission de calorique à l'extérieur dont on n'a pas tenu compte. Mais cette dernière est peu importante comme on l'a vu précédemment, et cela, parce que le temps réservé au rayonnement est très-petit. D'ailleurs pour une même quantité d'air à envoyer dans le réservoir, cette partie sera d'autant moins négligeable que les volumes des compresseurs seront plus grands, car alors les vitesses seront plus petites et le rayonnement et l'absorption se feront mieux. On conçoit parfaitement du reste que l'on puisse comprimer l'air de telle façon qu'à chaque instant, la chaleur rayonnée soit égale à la chaleur acquise. Il faudrait pour cela que la vitesse fût suffisamment petite. Envisagé sous ce point de vue, l'emploi de l'eau n'aurait d'autre but que l'obtention de grandes vitesses produites à température invariable.

1° Examinons, d'abord, la question pour ce qui concerne les compresseurs :

On prend dans l'atmosphère un mètre cube d'air à la température t . On le comprime jusqu'à la pression $P = np$, $p = 1$ atmosphère. De quelle quantité d'eau Z faut-il faire usage pour que la température ne s'accroisse que de α degrés ?

A un moment donné du phénomène on a :

La pression P et un volume v .

Le travail élémentaire est — Pdv .

La chaleur dégagée,.. ($- APdv$) calories.

La quantité d'eau à injecter pendant ce temps est dZ .

L'échauffement produit répond à (αdZ) calories, donc :

$$\alpha dZ = - APdv.$$

On a $P = np$ $v = \frac{1}{n}$ et $dv = - \frac{dn}{n^2}$,

la variation de température étant supposée assez petite pour admettre la loi de Mariotte, de sorte que

$$Pdv = - np \frac{dn}{n^2} = - p \frac{dn}{n}.$$

Partant $\alpha dZ = Ap \frac{dn}{n}$

ou $\alpha Z = Ap \lg n + C.$

Pour $n = 1$, $Z = 0$, donc $C = 0$, et enfin,

$$\alpha Z = Ap \lg n,$$

Ainsi le produit de la quantité d'eau à employer par la variation de température ne dépend que de n .

Il suffit donc, dans chaque cas, de rechercher la quantité d'eau correspondant à une variation de 1° à l'aide de la formule

$$Z = Ap \lg n.$$

Voyons maintenant comment l'eau employée doit être répartie.

Appelons x la fraction de la course du compresseur, parcourue à l'instant où l'on a atteint la pression quelconque $P = np$.

On a :

$$V = nv \text{ ou } L = n(L - x),$$

L est la course totale.

Par conséquent, $n = \frac{L}{L-x}$

et
$$Z = A \rho l g \frac{L}{L-x} \quad (A)$$

x varie depuis la valeur 0 jusqu'à celle qui correspond à la fin de la compression.

Cherchons à exprimer cette quantité x en fonction de l'angle de rotation ω de la manivelle, compté à partir du point mort.

x n'est autre chose que le déplacement linéaire de l'extrémité de la bielle qui attaque directement la tige unique des deux pistons à vapeur et du compresseur.

Le point mort est en C ; $oD = r =$ rayon de la manivelle, $CA = DB = l =$ longueur de la bielle.

β l'angle d'obliquité, correspondant à ω , pour lequel $x = AB$.

$$x = AB = Bo - Ao,$$

$$Bo = BE - oE = l \cos \beta - r \cos \omega,$$

$$Ao = l - r,$$

donc
$$x = l \cos \beta - r \cos \omega - (l - r).$$

On a encore :

$$l^2 \sin^2 \beta = r^2 \sin^2 \omega,$$

$$l^2 - l^2 \sin^2 \beta = l^2 - r^2 \sin^2 \omega,$$

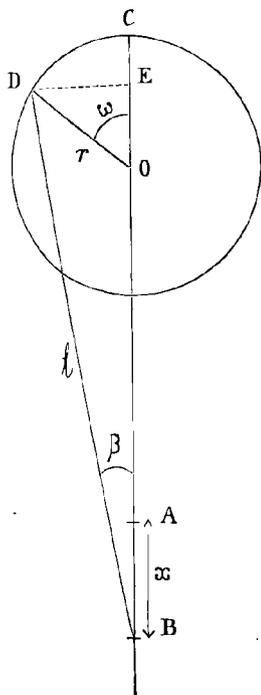
$$l^2 \cos^2 \beta = l^2 - r^2 \sin^2 \omega,$$

de sorte que

$$l \cos \beta = l \sqrt{1 - \left(\frac{r \sin \omega}{l}\right)^2}.$$

Développant le radical d'après la formule du binôme, on aura :

$$\sqrt{1 - \left(\frac{r \sin \omega}{l}\right)^2} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r \sin \omega}{l}\right)^2 -$$



$$\frac{1}{8} \left(\frac{r \sin \omega}{l} \right)^4 - \frac{1}{36} \left(\frac{r \sin \omega}{l} \right)^6 - \text{etc.}$$

Or $\frac{r}{l}$ est toujours < 1 , il en est de même de $\sin \omega$.

Donc à plus forte raison le produit $\frac{r \sin \omega}{l}$.

On peut par suite, sans erreur sensible, s'arrêter au second terme.

Par conséquent,

$$l \cos \beta = l \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{r^2 \sin^2 \omega}{l^2} \right\}. \quad (1)$$

D'après cela,

$$x = l - \frac{l}{2} \frac{r^2 \sin^2 \omega}{l^2} = r \cos \omega = l + r,$$

$$x = r \left\{ 1 - \cos \omega - \frac{1}{2} \frac{r \sin^2 \omega}{l} \right\},$$

$$x = r \left\{ 2 \sin^2 \frac{1}{2} \omega - 2r \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \omega \cos^2 \frac{1}{2} \omega}{l} \right\},$$

$$x = 2r \sin^2 \frac{1}{2} \omega \left[1 - \frac{r}{l} \cos^2 \frac{1}{2} \omega \right].$$

Mais $2r = L$, de sorte que

$$x = L \sin^2 \frac{1}{2} \omega \left[1 - \frac{r}{l} \cos^2 \frac{1}{2} \omega \right].$$

(1) Généralement dans les recherches de ce genre on néglige les termes de la série à partir de la seconde puissance de l'obliquité de la bielle. Nous avons tenu compte ici de $\left(\frac{r \sin \omega}{l} \right)^2$, pour plus d'exactitude et aussi parce que dans les machines qui nous occupent, l'obliquité est assez forte.

On aura donc, après substitution, dans l'équation (A).

$$Z = Ap \lg \frac{L}{L - L \sin^2 \frac{1}{2} \omega \left[1 - \frac{r}{l} \cos^2 \frac{1}{2} \omega \right]}$$

$$Z = Ap \lg \frac{1}{1 - \sin^2 \frac{1}{2} \omega + \frac{r}{4l} \sin^2 \omega}$$

$$Z = Ap \lg \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} \omega + \frac{r}{4l} \sin^2 \omega}$$

Cette formule permet de trouver les valeurs de Z pour chaque position de la manivelle.

Avant d'en déterminer les valeurs numériques recherchons, l'angle ω à partir duquel la compression cesse et qui donnera la valeur totale de Z pour un coup du piston compresseur.

Lorsque la tension dans l'appareil compresseur est égale à celle du réservoir, la valeur de

$$x = L - \frac{L}{n} = L \left(1 - \frac{1}{n} \right)$$

Donc :

$$L \left(1 - \frac{1}{n} \right) = L \sin^2 \frac{1}{2} \omega \left[1 - \frac{r}{l} \cos^2 \frac{1}{2} \omega \right],$$

$$1 - \frac{1}{n} = \sin^2 \frac{1}{2} \omega - \frac{r}{l} \cos^2 \frac{1}{2} \omega \sin^2 \frac{1}{2} \omega,$$

$$\cos^2 \frac{1}{2} \omega - \frac{1}{n} = - \frac{r}{l} \cos^2 \frac{1}{2} \omega \left(1 - \cos^2 \frac{1}{2} \omega \right)$$

$$\cos^4 \frac{1}{2} \omega \cdot \frac{r}{l} - \cos^2 \frac{1}{2} \omega \left(\frac{r}{l} + 1 \right) + \frac{1}{n} = 0,$$

$$\cos^2 \frac{1}{2} \omega = \frac{1 + \frac{r}{l} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{r}{l}\right)^2 - 4 \frac{r}{l} \frac{1}{n}}}{2 \frac{r}{l}}. \quad (a)$$

Cherchons le signe qui convient au radical; on doit avoir :

$$\cos^2 \frac{1}{2} \omega < 1; \quad \text{donc,}$$

$$1 + \frac{r}{l} \pm \left(\sqrt{\left(1 + \frac{r}{l}\right)^2 - 4 \frac{r}{l} \frac{1}{n}} \right) < 2 \frac{r}{l}$$

ou

$$\pm \sqrt{\left(1 + \frac{r}{l}\right)^2 - 4 \frac{r}{l} \frac{1}{n}} < \frac{r}{l} - 1.$$

Or $\frac{r}{l} - 1$ est négatif; donc le signe positif du radical doit être écarté. La condition analytique précédente sera alors toujours satisfaite; en effet, elle est :

$$-\sqrt{\left(1 + \frac{r}{l}\right)^2 - 4 \frac{r}{l} \frac{1}{n}} < \frac{r}{l} - 1,$$

ou

$$+\sqrt{\left(1 + \frac{r}{l}\right)^2 - 4 \frac{r}{l} \frac{1}{n}} > 1 - \frac{r}{l},$$

c'est-à-dire, $\left(1 + \frac{r}{l}\right)^2 - 4 \frac{r}{l} \frac{1}{n} > \left(1 - \frac{r}{l}\right)^2,$

$$2 \frac{r}{l} - 4 \frac{r}{l} \frac{1}{n} > -2 \frac{r}{l},$$

$$4 \frac{r}{l} - 4 \frac{r}{l} \frac{1}{n} > 0,$$

$$1 - \frac{1}{n} > 0,$$

ce qui est évident d'après la nature même de la question.

De plus, les valeurs de $\cos^2 \frac{1}{2} \alpha$ ne seront jamais imaginaires, car on aura toujours :

$$\left(1 + \frac{r}{l}\right)^2 > 4 \frac{r}{l} \frac{1}{n}.$$

Pour le prouver, posons $\frac{r}{l} = X$, nous disons que

$$\left(1 + X\right)^2 > 4 \frac{1}{n} X$$

ou
$$1 + X^2 + 2X > 4 \frac{1}{n} X,$$

c'est-à-dire,
$$X^2 + 2X \left(1 - \frac{2}{n}\right) + 1 > 0.$$

Le premier membre de cette inégalité est un trinôme du second degré pour lequel le caractère algébrique

$$b^2 - 4ac = 4 \left(1 - \frac{2}{n}\right)^2 - 4 = \frac{16}{n} \left(\frac{1}{n} - 1\right)$$

Expression qui sera toujours négative.

Les valeurs de la variable, qui annulent ce trinôme, seront donc imaginaires; par conséquent, en vertu des propriétés des trinômes du second degré, quelles que

soient les valeurs réelles de X , les signes des valeurs particulières correspondantes seront toujours les mêmes que celui du premier terme, c'est-à-dire, positifs.

Enfin, le simple examen de la formule (a) montre que $\cos^2 \frac{1}{2} \omega$ ne sera jamais négatif.

Ainsi l'équation précédente donnera pour $\cos \frac{1}{2} \omega$ une valeur réelle, positive, et une seule, qui satisfera à la question proposée.

Admettons, comme cela existe à Seraing, $\frac{r}{l} = \frac{1}{4}$;

Supposons aussi $n = 4$.

Nous aurons :

$$\cos^2 \frac{1}{2} \omega = \frac{1 + \frac{1}{4} - \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 - 4 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}}}{2 \frac{1}{4}} = \frac{5 - \sqrt{21}}{2},$$

$$\cos^2 \frac{1}{2} \omega = \frac{5 - 4,58}{2} = 0,21,$$

$$\cos \frac{1}{2} \omega = 0,458,$$

ou $\frac{1}{2} \omega = 62^\circ 45'$,

et $\omega = 125^\circ 30'$.

Donc la compression s'effectue pendant que la manivelle parcourt un angle $\omega = 125^\circ 30'$ à partir du point mort.

Si l'on admet 2",5 pour une course du piston, on aura :

$$2",5 \times \frac{125,5}{180} = 1",74,$$

pour la durée de la compression de 1 à 4 atmosphères, en admettant le mouvement de rotation de la manivelle uniforme.

Le calcul des valeurs numériques de

$$Z = Ap \lg \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} \omega + \frac{r}{4l} \sin^2 \omega}$$

est assez pénible. On peut en donner une autre expression un peu plus simple, suffisamment approchée pour la pratique et qui se déduit facilement de celle qui précède.

En effet,

$$\begin{aligned} \lg \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} \omega + \frac{r}{4l} \sin^2 \omega} &= - \lg \left(\cos^2 \frac{1}{2} \omega + \frac{r}{4l} \sin^2 \omega \right) = \\ &= - \lg \left[\cos^2 \frac{1}{2} \omega \left(1 + \frac{r}{l} \frac{4 \sin^2 \frac{1}{2} \omega \cos^2 \frac{1}{2} \omega}{4 \cos^2 \frac{1}{2} \omega} \right) \right] = \\ &= - \lg \cos^2 \frac{1}{2} \omega - \lg \left(1 + \frac{r}{l} \sin^2 \frac{1}{2} \omega \right) = \\ &= 2 \lg \frac{1}{\cos \frac{1}{2} \omega} - \lg \left(1 + \frac{r}{l} \sin^2 \frac{1}{2} \omega \right) \end{aligned}$$

Posons $X = \frac{r}{l} \sin^2 \frac{1}{2} \omega$

Comme X est < 1 on pourra écrire :

$$\lg \left(1 + X \right) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} - \frac{X^4}{4} + \text{etc.}$$

d'après la série de Mac-Laurin.

De sorte que le logarithme de l'expression primitive sera :

$$2 \lg \frac{1}{\cos \frac{1}{2}^{\omega}} = \frac{r}{l} \sin^2 \frac{1}{2}^{\omega} + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{l} \sin^2 \frac{1}{2}^{\omega} \right)^2 - \\ - \frac{1}{3} \left(\frac{r}{l} \sin^2 \frac{1}{2}^{\omega} \right)^3 + \text{etc.}$$

où l'on peut négliger les termes du développement à partir de la seconde puissance de X ; cela étant fait, on a :

$$Z = Ap \left\{ 2 \lg \frac{1}{\cos \frac{1}{2}^{\omega}} - \frac{r}{l} \sin^2 \frac{1}{2}^{\omega} \right\}$$

Expression dans laquelle il n'y a plus qu'un seul angle $\frac{1}{2}^{\omega}$.

Les valeurs de Z s'évaluent très-facilement si l'on dispose d'une table de logarithmes népériens, d'une table des carrés et d'une table des lignes trigonométriques naturelles.

Les calculs, au moyen de cette formule qui nous a servi à déterminer les éléments du tableau suivant, sont beaucoup plus expéditifs que ceux qu'exigent les mêmes déterminations par la première expression.

Si l'on veut juger de son degré d'approximation, il suffit de rechercher l'erreur maximum que l'on peut commettre, laquelle a lieu pour la plus grande valeur de $\omega = 125^{\circ} 30'$.

On a alors, d'après la relation approximative :

$$Z = 24,4 \{ 1.558 - 0.198 \} = 33^{\text{lit}}, 18$$

tandis que, si l'on tient compte du terme en X^2 de la série, il viendra :

$$Z = 24,4 \{ 1.558 - 0.198 + 0.019 \} = 33^{\text{lit}}, 64$$

Et l'on sait d'après la nature de la série que la valeur véritable est comprise entre ces deux quantités.

Pour $\omega = 90^\circ$, on a, dans le premier cas :

$$Z = 24,4 \{ 0.693 - 0.125 \} = 13^{\text{lit}}, 86$$

et dans le second cas :

$$Z = 24,4 \{ 0.693 - 0.125 + 0.008 \} = 14^{\text{lit}}, 05$$

tandis qu'en réalité,

$$13.86 < Z < 14.05$$

On peut donc parfaitement s'en tenir à la formule réduite.

De plus, pour les faibles valeurs de ω , on peut négliger le second terme de la parenthèse.

Voici, d'après cette formule, les différentes valeurs de Z correspondant à autant de valeurs particulières de ω , pour le cas $n = 4$.

ω	Z	MOYENNES PAR DEGRÉ.
0°	0	
5°	0.06	0 ^{lit} ,012 de 0 à 5°
10°	0.15	0 ^{lit} ,018 de 5 à 10°
20°	0.54	0 ^{lit} ,039 de 10° à 20°
30°	1.26	0 ^{lit} ,072 de 20° à 30°
40°	2.32	0 ^{lit} ,106 de 30° à 40°
50°	3.59	0 ^{lit} ,127 de 40° à 50°
60°	5.50	0 ^{lit} ,191 de 50° à 60°
70°	7.76	0 ^{lit} ,226 de 60° à 70°
80°	10.66	0 ^{lit} ,290 de 70° à 80°
90°	13.86	0 ^{lit} ,320 de 80° à 90°
100°	17.89	0 ^{lit} ,403 de 90° à 100°
110°	22.94	0 ^{lit} ,505 de 100° à 110°
120°	29.35	0 ^{lit} ,641 de 110° à 120°
125° .30	33.18	0 ^{lit} ,765 de 120° à 125° .30'

Il résulte de l'examen de ce tableau, qu'à l'origine de la course il faut en moyenne, pour les vingt premiers degrés par exemple,

$$\frac{0.54}{20} = 0^{\text{lit.}},027 \text{ par degré}$$

Tandis qu'à la fin de la compression il faut, pour les vingt-cinq derniers

$$\frac{33.18 - 17.89}{25.5} = 0^{\text{lit.}} 600$$

soit plus de vingt fois ce qui est exigé au commencement.

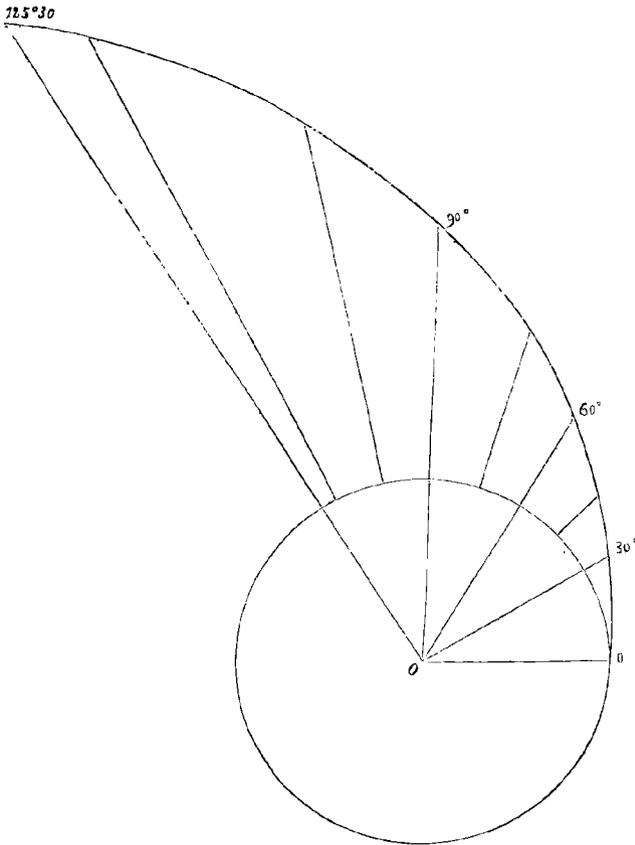
Si l'on prend les moyennes par degré pour chaque quart de la compression, on aura :

Pendant le 1 ^{er} quart		$\frac{1.26}{30}$	= 0 ^{lit.}} .042
Id. 2 ^e	id.	$\frac{5.50 - 1.26}{30}$	= 0 ^{lit.}} .108
Id. 3 ^e	id.	$\frac{13.86 - 5.50}{30}$	= 0 ^{lit.}} .279
Id. 4 ^e	id.	$\frac{33.18 - 13.86}{25.5}$	= 0 ^{lit.}} .758

Le diagramme suivant permet d'embrasser d'un coup d'œil la variation des quantités d'eau envoyées à chaque instant dans le compresseur.

Le cercle *o* est celui de la manivelle du piston à vapeur.

Les quantités de liquide injecté pour un angle *α* de rotation, sont représentées par les fractions des rayons vecteurs comprises entre la circonférence et le diagramme en question.



Si la venue des 33^{lit.}, 18 était uniforme, on aurait par degré :

$$\frac{33,18}{125,5} = 0^{\text{lit.}}, 27.$$

C'est-à-dire, plus de 2 fois moins que ce qu'il faut à la fin de la course, et 10 fois plus que ce qui est nécessaire à l'origine.

On doit en outre remarquer qu'il faut le plus d'eau alors que la pression est la plus grande, c'est-à-dire, au moment où son introduction est la plus difficile.

Enfin les deux équations

$$\begin{aligned} Z &= Ap. \lg n \\ P &= p. n \end{aligned}$$

montrent que P augmente proportionnellement à n tandis que Z , ne s'accroît que proportionnellement au logarithme du même nombre. Ainsi, par exemple, pour $n = 16$ il ne faut que 4 fois autant d'eau que pour $n = 2$.

En somme, s'il était possible d'injecter l'eau de façon à ce que la quantité qu'on projette dans la masse gazeuse fût à chaque instant proportionnelle au travail produit ou à la chaleur dégagée, il faudrait, par mètre cube d'air puisé dans l'atmosphère, 33^{lit}.18. Mais on ne saurait satisfaire entièrement aux conditions de cette injection théorique; on s'en écartera fatalement dans la pratique et on devra, pour produire le même refroidissement, faire usage d'un plus fort volume de liquide.

Pour montrer l'influence de la loi suivant laquelle se fait l'injection, étudions le cas extrême suivant :

On comprime un mètre cube d'air puisé dans l'atmosphère à la pression p et à la température t , de manière à ce que le volume final soit v et la pression P . L'injection se fait au moment où on a atteint le volume v . Quelle quantité d'eau faut-il employer pour que la température n'ait varié que d'un degré?

On a, à l'état initial :

$$p, \quad V = 1^{\text{m}^3} \text{ et } t.$$

A l'état final

$$P = np, v = \frac{1}{n} \text{ et } t + 1$$

Car la variation de température est assez petite pour justifier la relation :

$$Pv - pV = p.$$

La période de compression se fait avec réchauffement de l'air, d'après les conditions énoncées, depuis le volume V jusqu'au volume v ou ce qui revient au même, depuis la pression p jusqu'à la pression P' telle que,

$$P' v^K = pV^K = p$$

de sorte que

$$P' = \frac{1}{v^K} p = n^K \cdot p.$$

Si nous représentons n^K par N , nous aurons :

$$P' = N \cdot p.$$

Le travail de compression sera donc, d'après ce que nous avons établi dans la première partie de cette étude,

$$\bar{\tau} = \frac{pV}{K-1} \left[N^{\frac{K-1}{K}} - 1 \right]$$

ou

$$\bar{\tau} = \frac{p'}{K-1} \left[n^{K-1} - 1 \right]$$

et par conséquent, la chaleur à absorber,

$$\frac{Ap}{K-1} \left[n^{K-1} - 1 \right]$$

Ce calorique s'est porté tout entier sur la température du gaz qu'il s'agit de ramener à t .

La quantité d'eau réfrigérante sera donc en litres, puisque la capacité calorifique d'un kilogramme d'eau est l'unité,

$$\frac{Ap}{k-1} [n^{k-1} - 1]$$

Si $n = 4$, on a :

$$\frac{10333}{0.41 \times 424} \left\{ 4^{0.41} - 1 \right\} = 45^{\text{lit.}}, 47.$$

Soit 50 p. % environ de plus que précédemment. — On peut donc dire que la quantité d'eau nécessaire à chaque cas est comprise entre 33 et 45 litres par mètre cube d'air et cela pour un degré de variation de température. Si cette variation était de m° , les limites deviendraient :

$$\frac{33}{m} \text{ et } \frac{45}{m} \text{ litres.}$$

2° Voyons comment les choses se passent dans la perforatrice où la détente doit se faire à température constante.

On a un mètre cube d'air à la pression P et sous le volume correspondant v . La détente se fait jusqu'à p , pression atmosphérique, la température est invariable de sorte que le volume final est $V = 1$ mètre cube. Pour obtenir cela on a dû, supposons-nous, injecter Z litres d'eau pour lesquels il est résulté une variation de température α' .

Pendant que le volume se détend de dv' à la pression P' , il s'effectue un travail $P' dv'$, correspondant à une consommation de calorique, $AP' dv'$, cédé par l'eau. De sorte que

$$\alpha' dZ' = AP' dv',$$

soit $P' = n' p$ ou $v' = \frac{1}{n'}$ d'où $dv' = -\frac{dn'}{n'^2}$,

α' étant suffisamment petit ;

$$\alpha' dZ' = - A n' p \frac{dn'}{n'^2} = - Ap \frac{dn'}{n'}$$

$$\alpha' Z' = - Ap \lg n' + C.$$

Or pour $n' = n$ ou $P' = P, Z' = 0$
donc $C = Ap \lg n$

Partant,

$$\alpha' Z' = A p (\lg n - \lg n')$$

et $\alpha' Z' = A p \lg \frac{n}{n'}$.

La quantité totale de liquide employé sera obtenue si l'on fait $n' = 1$,

et alors

$$\alpha' Z' = Ap \lg n$$

$$Z' = \frac{Ap}{\alpha'} \lg n.$$

Si $\alpha' = \alpha$ on a :

$$Z' = \frac{Ap}{\alpha} \lg n = Z.$$

Ainsi, *pour une même variation de température, la quantité d'eau à employer dans le compresseur est la même que celle que l'on doit injecter dans la perforatrice.*

Si l'eau, sortant du compresseur, pouvait être utilisée convenablement telle qu'elle est, dans le cylindre du perforateur, elle sortirait de celui-ci dans les mêmes conditions qu'avant son entrée dans le compresseur. Elle céderait dans le cylindre de la perforatrice la chaleur qu'elle aurait absorbée dans le compresseur et il en résulterait de part et d'autre une température égale et constante.

Calculons, comme nous venons de le faire pour la

compression, la quantité d'eau que nécessite, à chaque instant, la détente à température constante.

Considérons à un moment donné la pression P' ; la chaleur émise par le travail élémentaire est

$$A P' dv',$$

et pendant l'unité de temps, si tout devenait régulier à partir de cet instant,

$$A P' \frac{dv'}{dt}$$

u étant la vitesse du piston en ce moment, s la section du cylindre,

$$dv' = su dt$$

$$us = \frac{dv'}{dt}.$$

La chaleur dégagée est donc

$$A P' us,$$

x représentant la partie de la course parcourue, on a :

$$P' s x = p V = p,$$

la température étant constante et V égalant 1^{m^3} ,

$$\text{donc} \quad P' s = \frac{p}{x}$$

et le calorique émis par unité de temps :

$$\dot{Y} = Au \frac{p}{x} = Ap \frac{u}{x}.$$

Calculons u en fonction de x .

Tout le travail effectué jusqu'à ce moment a été utilisé, d'une part, à vaincre le travail du frottement qu'éprouve dans le cylindre le piston foulé et celui de la contre-pression; d'autre part, à donner à l'outil la vitesse u .

f étant le coefficient de frottement du piston sur les parois du cylindre,

P la pression pleine à l'origine de la course,

l la partie de cette course occupée par le volume v' immédiatement avant que la détente commence,

a la largeur du piston,

La force de frottement pendant la pleine pression sera :

$$2 \pi r . a . P . f$$

$2r$ représentant le diamètre du cylindre et le travail :

$$2 \pi r a P f . l .$$

Quand la détente se produit, la force de frottement à un moment donné est :

$$2 \pi r a f P'$$

et son travail élémentaire

$$2 \pi r a f P' dx$$

donc le travail total du frottement jusqu'à la distance x est :

$$2 \pi r a f P l + 2 \pi r a f \int_l^x P' dx$$

ou
$$2 \pi r a f \left\{ P l + \int_l^x P' dx \right\}$$

Mais, $P' = \frac{p}{sx}$, donc cette expression devient :

$$\begin{aligned} & 2 \pi r a f \left\{ P l + \int_l^x \frac{p}{s} \cdot \frac{dx}{x} \right\} = \\ & = 2 \pi r a f \left\{ P l + \frac{p}{s} (\lg x - \lg l) \right\} \end{aligned}$$

$$= 2\pi r a f \left\{ P l' + \frac{p}{s} l g \frac{x}{l'} \right\}.$$

Or $P = n p, \quad l' = \frac{L'}{n},$

L' étant la course totale,
de sorte que le travail du frottement s'exprime par :

$$\begin{aligned} & 2\pi r a f p \left\{ L' + \frac{1}{s} l g \frac{x}{l'} \right\} = \\ & = \frac{2\pi r a}{s} f p \left\{ s L' + l g \frac{x}{l'} \right\}. \end{aligned}$$

Mais aussi $s L' = V = 1$ et $\frac{2\pi r}{s} = \frac{2\pi r}{\pi r^2} = \frac{2}{r}.$

Par suite ce travail peut s'écrire,

$$\frac{2 a p f}{r} \left\{ 1 + l g \frac{x}{l'} \right\}.$$

D'un autre côté, le travail total, fourni par l'air qui a agi à pleine pression d'abord et s'est ensuite détendu jusqu'à la distance x où le volume est v' , est représenté par :

$$Pv + Pv l g \frac{v'}{v} - pv'$$

ou $Pv \left[1 + l g \frac{x}{l'} \right] - pv' = p \left[1 + l g \frac{x}{l'} - v' \right]$

La fraction du travail total, qui a concouru à la production de la vitesse u , est donc :

$$p \left[1 + l g \frac{x}{l'} - v' \right] - \frac{2 a p f}{r} \left\{ 1 + l g \frac{x}{l'} \right\} =$$

$$= p \left[\left(1 + lg \frac{x}{l'} \right) \left(1 - \frac{2af}{r} \right) - v' \right]$$

Soit Q le poids de l'outil.

En vertu du principe des forces vives, on aura :

$$\frac{Q}{2g} u^2 = p \left[\left(1 + lg \frac{x}{l'} \right) \left(1 - \frac{2af}{r} \right) - v' \right]$$

d'où

$$u = \sqrt{\frac{2gp}{Q}} \cdot \sqrt{\left(1 + lg \frac{x}{l'} \right) \left(1 - \frac{2af}{r} \right) - v'}$$

De sorte que

$$Y = A p \sqrt{\frac{2gp}{Q}} \frac{\sqrt{\left(1 + lg \frac{x}{l'} \right) \left(1 - \frac{2af}{r} \right) - v'}}{x}$$

s étant la section du cylindre, $v' = sx$.

Posons

$$Ap \sqrt{\frac{2gp}{Q}} = B \text{ et } 1 - \frac{2af}{r} = C.$$

Nous aurons :

$$Y = B \frac{\sqrt{C \left(1 + lg \frac{x}{l'} \right) - sx}}{x}$$

A l'origine de la détente, $x = l'$ et

$$Y_1 = B \frac{\sqrt{C - sl'}}{l'}$$

Or $sl' = \frac{1}{n}$, donc

$$Y_1 = B \frac{\sqrt{nC - 1}}{l'}$$

A la fin de la course, $x = L' = n l$ et

$$Y_2 = B \frac{\sqrt{C(1 + lgn) - sL'}}{n l'}$$

ou puisque $sL' = 1$,

$$Y_2 = B \frac{\sqrt{C(1 + lgn) - 1}}{n l'}$$

De sorte que le rapport des calories à fournir au gaz pendant la première et la dernière seconde de la détente est :

$$\frac{Y_1}{Y_2} = \frac{n \sqrt{\frac{nC - 1}{n}}}{\sqrt{C(1 + lgn) - 1}}$$

ou

$$\frac{Y_1}{Y_2} = \sqrt{\frac{n(nC - 1)}{C(1 + lgn) - 1}}$$

C'est aussi le rapport des quantités d'eau à injecter par seconde au commencement et à la fin de la détente.

Prenons, pour appliquer cette formule :

$$a = 0.084, r = 0.060 \text{ et } f = 0.12$$

Ce dernier coefficient se rapporte au frottement produit par la garniture des pistons de certaines machines à vapeur.

Il viendra :

$$C = 1 - \frac{2 \times 0.084 \times 0.12}{0.060} = 0.664$$

Cela étant, si $n = 4$,

$$\frac{Y_1}{Y_2} = \sqrt{\frac{4 \times 1.656}{0,664 \times 2 \ 39 - 1}} = \sqrt{\frac{6.624}{0.5896}} = 3.37$$

Ainsi pendant la première seconde de la détente le volume d'eau nécessaire à la réfrigération est égal à plus de trois fois celui qui peut produire le même effet pendant la dernière seconde de l'expansion.

On remarquera que, dans la perforatrice, comme dans le compresseur, il faut le plus d'eau quand la pression dans l'appareil est la plus forte. — Cette circonstance est, dans les deux cas, comme on le conçoit facilement, défavorable à l'injection du liquide.

Travail d'injection :

Jusque maintenant nous n'avons envisagé l'emploi de l'eau que comme moyen de reprendre une partie du travail effectué pour comprimer et envoyer dans le réservoir, l'air à utiliser dans la perforatrice. Nous avons vu le travail qu'il était possible d'épargner ainsi, mais nous n'avons tenu aucun compte de celui que nécessite l'injection de l'eau, soit dans le compresseur, soit dans le perforateur. C'est la question que nous allons résoudre dans le cas particulier suivant :

On veut envoyer dans le compresseur Z litres d'eau pendant que l'on comprime l'air de p à P; cette injection doit se faire à vitesse constante μ . Quel est le travail nécessaire à cette injection ?

On connaît, pour chaque appareil, le temps que dure la compression; on peut donc évaluer la quantité Z litres d'eau employés par seconde.

s étant la section d'entrée du liquide, on a :

$$s \mu = \frac{Z_1}{1000}$$

Z₁ étant exprimé en litres,

s et μ en mètres.

De plus si l'on représente par h la hauteur génératrice à un moment donné, de cette vitesse μ , on aura :

$$\mu = \sqrt{2gh}$$

La venue étant supposée régulière et constante, il en résulte que h doit être invariable.

Soit p_1 l'excès de pression de l'eau à ce moment sur celle de l'air dans l'appareil, on aura :

$$p_1 = h \times 1^{m^2} \times 1000$$

h étant exprimé en mètres, p_1 en kilogrammes, donc $p_1 = 1000h$,
ou $p_1 = h$, h étant évalué en millimètres.

Cet excès de pression p_1 est donc une constante, ce qui, du reste, était aisé à prévoir.

En réalité, la pression du liquide à un moment donné est : $P + p_1$.

P étant celle du gaz à cet instant.

Cette pression p_1 est toujours négligeable vis-à-vis de P .

Ainsi pour $\mu = 2^m$, vitesse qu'on ne réalisera jamais,

on a seulement $h = \frac{\mu^2}{2g} = 0,20 = 200 \text{ m/m}$

de sorte que $p_1 = 200^k$.

Or la plus petite valeur de P est $p = 10,333^k$.

Quoiqu'il en soit, nous en tiendrons compte dans les déterminations suivantes pour faire ressortir mieux encore l'influence minimale que ce terme exerce sur le résultat.

Pendant le temps $d\theta$ le volume d'eau fourni au compresseur est :

$$\frac{Z_1}{1000} d\theta \text{ en mètres cubes.}$$

Le travail nécessaire :

$$(P + p_1) \frac{Z_1 d\theta}{1000} .$$

Si la compression se fait du temps θ_1 au temps θ_2 le travail total sera :

$$\bar{\tau} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{(P + p_1) Z_1 d\theta}{1000} = \frac{Z_1}{1000} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (P + p_1) d\theta .$$

Représentons par ε la vitesse constante de rotation de la manivelle de la machine à vapeur, on aura :

$$\omega = \varepsilon \theta$$

ou

$$d\omega = \varepsilon d\theta ,$$

partant :

$$\bar{\tau} = \frac{Z_1}{1000\varepsilon} \int_0^{\omega} (P + p_1) d\omega$$

0 et ω étant les limites de ω pour ce qui concerne la compression.

On peut décomposer le second membre et écrire

$$\bar{\tau} = \frac{Z_1}{1000\varepsilon} \int_0^{\omega} p_1 d\omega + \frac{Z_1}{1000\varepsilon} \int_0^{\omega} P d\omega$$

$$\text{ou } \bar{\tau} = \frac{Z_1}{1000\varepsilon} \cdot p_1 \omega + \frac{Z_1}{1000\varepsilon} \int_0^{\omega} P d\omega .$$

Il nous reste à rechercher la dernière intégrale.

Nous pouvons, d'après ce que nous avons établi précédemment, exprimer P en fonction de ω ; nous avons vu que

$$P = p \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} \omega + \frac{r}{4l} \sin^2 \omega} \quad (1)$$

Par conséquent,

$$\int_0^{\Omega} P d\omega = p \int_0^{\Omega} \frac{d\omega}{\cos^2 \frac{1}{2} \omega + \frac{r}{4l} \frac{\sin^2 \omega}{4}}$$

c'est-à-dire,

$$p \int_0^{\Omega} \frac{2 \frac{1}{2} d\omega}{\cos^2 \frac{1}{2} \omega} \frac{1}{1 + \frac{r}{4l} \sin^2 \frac{1}{2} \omega}$$

Mais $\frac{1}{2} \frac{d\omega}{\cos^2 \frac{1}{2} \omega} = d\left(\operatorname{tg} \frac{1}{2} \omega\right),$

Posons $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \omega = u$, il viendra:

$$d\left(\operatorname{tg} \frac{1}{2} \omega\right) = du$$

(1) En effet, nous savons que

$$P = n p$$

et

$$x = L \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} n &= \frac{L}{L-x} = \\ &= \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} \omega + \frac{r}{4l} \sin^2 \omega} \end{aligned}$$

$$\text{et} \quad \sin^2 \frac{1}{2} \omega = \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \omega}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \omega} = \frac{u^2}{1 + u^2},$$

L'intégrale précédente devient, en conséquence,

$$\begin{aligned} 2p \int_0^{\Omega} \frac{du}{1 + \frac{r}{l} \frac{u^2}{1 + u^2}} &= 2p \int_0^{\Omega} \frac{1 + u^2}{1 + \left(\frac{r}{l} + 1\right) u^2} du = \\ &= 2p \left[\int_0^{\Omega} \frac{du}{1 + \left(\frac{r}{l} + 1\right) u^2} + \int_0^{\Omega} \frac{u^2 du}{1 + \left(\frac{r}{l} + 1\right) u^2} \right] \end{aligned}$$

Posons pour un moment $\frac{r}{l} = a$

$$\begin{aligned} \int_0^{\Omega} \frac{du}{1 + \left(\frac{r}{l} + 1\right) u^2} &= \frac{1}{\sqrt{a+1}} \int_0^{\Omega} \frac{\sqrt{a+1} du}{1 + (a+1) u^2} \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{a+1}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} u \sqrt{a+1} \right]_0^{\Omega} \\ \int_0^{\Omega} \frac{u^2 du}{1 + \left(\frac{r}{l} + 1\right) u^2} &= \int_0^{\Omega} \frac{u^2 du}{1 + (a+1) u^2} \end{aligned}$$

Faisons :

$$(a+1) u^2 = t^2 \quad \text{ou} \quad u^2 = \frac{t^2}{a+1},$$

on aura :

$$u = \frac{t}{\sqrt{a+1}} \text{ et } du = \frac{dt}{\sqrt{a+1}}.$$

La substitution donnera :

$$\begin{aligned} \int_0^{\Omega} \frac{t^2}{a+1} \cdot \frac{dt}{\sqrt{a+1}} \frac{1}{1+t^2} &= \frac{1}{(a+1)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\Omega} \frac{t^2 dt}{1+t^2} = \\ &= \frac{1}{(1+a)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\Omega} dt - \frac{1}{(1+a)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\Omega} \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \frac{1}{(1+a)^{\frac{3}{2}}} \left[t - \text{arc } tg t \right]_0^{\Omega} \end{aligned}$$

on a donc :

$$\int_0^{\Omega} \frac{u^2 du}{1+(a+1)u^2} = \frac{1}{(1+a)^{\frac{3}{2}}} \left\{ u\sqrt{a+1} - \text{arc } tg u\sqrt{a+1} \right\}_0^{\Omega}$$

D'après cela,

$$\begin{aligned} \int_0^{\Omega} P d\omega &= 2p \left[\frac{1}{(1+a)^{\frac{1}{2}}} \text{arc } tg u\sqrt{a+1} + \frac{u}{a+1} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(1+a)^{\frac{3}{2}}} \text{arc } tg u\sqrt{a+1} \right]_0^{\Omega} = \\ &= 2p \left[\frac{1}{(1+a)^{\frac{1}{2}}} \text{arc } tg u\sqrt{a+1} \left(1 - \frac{1}{1+a} \right) \right]_0^{\Omega} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{u}{a+1} \Big]_0^{\Omega} = \\
= 2p & \left[\frac{a}{(1+a)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} u \sqrt{a+1} + \frac{u}{a+1} \right]_0^{\Omega} = \\
= \frac{2p}{1+a} & \left[\frac{a}{\sqrt{1+a}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} u \sqrt{a+1} + u \right]_0^{\Omega} = \\
= \frac{2p}{1+a} & \left[\frac{a}{\sqrt{1+a}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\operatorname{tg} \frac{1}{2} \omega \sqrt{a+1} \right) \right. \\
& \left. + \operatorname{tg} \frac{1}{2} \omega \right]_0^{\Omega} = \\
= \frac{2p}{1+a} & \left[\frac{a}{\sqrt{1+a}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\sqrt{1+a} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \omega \right) + \operatorname{tg} \frac{1}{2} \omega \right].
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\zeta = \frac{Z_1 p_1 \Omega}{1000 \varepsilon} + \frac{2 p Z_1}{1000 \varepsilon} \frac{1}{1+a}$$

$$\left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} \omega + \frac{a}{\sqrt{1+a}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\sqrt{1+a} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \omega \right) \right]$$

Si l'on remarque que

$$p_1 = 1000 h$$

on aura :

$$\zeta = \frac{Z_1 h \Omega}{\varepsilon} + \frac{2 p Z_1}{1000 \varepsilon} \frac{1}{1+a}$$

$$\left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} \omega + \frac{a}{\sqrt{1+a}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\sqrt{1+a} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \omega \right) \right].$$

Appliquons cette formule au cas que nous avons précédemment traité.

En 1",70 on déversait dans le compresseur 40 litres d'eau, soit donc $Z_1 = \frac{40}{1,7} = 23,5$ litres.

Nous avons vu que $\omega = 125^{\circ},30' \times \frac{3,14 \times 2}{360} = 2,2$

$$\epsilon = \frac{\omega}{\theta} = \frac{3,14}{2",5} = 1,256.$$

Supposons que la vitesse d'arrivée du liquide soit un mètre par seconde, on aura $s = \frac{0^{\text{m}^3},0235}{1^{\text{m}}} = 0^{\text{m}^2},0235$

et
$$h = \frac{1}{2g} = 0,05.$$

Le premier terme de ζ devient donc,

$$\frac{Z_1 h \omega}{\epsilon} = \frac{23,5 \times 0,05 \times 2,2}{1,256} = 2,06$$

Dans le second on a :

$$tg \frac{1}{2} \alpha = tg 62^{\circ} 45' = 0,515, p = 10333$$

$$a = \frac{r}{l} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{a}{\sqrt{1+a}} = \frac{0,25}{1,12} = 0,223$$

$$\text{arc tg} \left(\sqrt{1+a} \cdot tg \frac{1}{2} \alpha \right) = \text{arc tg} \left(1,12 \times 0,515 \right)$$

$$= \text{arc de } 30^{\circ} = \frac{3,14 \times 30 \times 2}{360} = 0,523.$$

Le deuxième terme de ζ est donc

$$\frac{10333 \times 23.5 \times 2 \times 4}{1000 \times 1,256 \times 5} \left[0,515 + 0,223 \times 0,523 \right] =$$

$$= 302,5 \times 0,632 = 191,18$$

ainsi $\zeta = 2,06 + 191,18.$

Comme nous le disions tantôt, la valeur du premier terme est parfaitement négligeable vis-à-vis de celle du second.

L'erreur que l'on commettra en le négligeant, sera d'autant plus petite, du reste, que μ sera petit. La valeur que nous avons supposée est déjà très-forte.

Ainsi $\zeta = 193$ kilogrammètres.

Dans les conditions que nous avons admises, il faut par mètre cube d'air, pris dans l'atmosphère, effectuer un travail de 193 kilogrammètres pour refroidir le gaz. Ce travail est fait en 1",70, de sorte que par seconde on aurait :

$$\frac{193}{1,70} = 113,5 \text{ kilogrammètres,}$$

c'est-à-dire, $\frac{113,5}{75} = 1 \text{ cheval } 50.$

Ce qui exigerait, en admettant un rendement de 50 p. % pour une machine qui ferait ce travail, 3^{ch}. Mais cette machine pourrait alimenter

$$\frac{1000}{191} = 5 \text{ compresseurs,}$$

attendu que chacun d'eux, du moins dans le cas de Marihaye, envoyait 191 litres d'air par coup de piston du compresseur.

En somme, le travail à effectuer pour l'injection du liquide qui absorbe la chaleur provenant de la compres-

sion de l'air, est trop petit pour influencer d'une manière sensible la quantité de travail que l'on peut récupérer en maintenant la température invariable.

La formule qui donne le travail d'injection montre qu'il est proportionnel à la quantité d'eau Z employée par seconde. Il en résulte que l'on peut dans les différents cas l'évaluer au moyen de la détermination qui précède.

Si l'on n'injecte que la quantité minimum d'eau, c'est-à-dire, 34 litres, on aura un travail de

$$\frac{113.5 \times 34}{40} = 96^{\text{kgm.}},5$$

Si l'on fait usage de 40 litres, nous aurons d'après ce qui précède $113^{\text{kgm.}},5$.

Enfin si l'on projette le volume maximum, 46 litres, on aura :

$$\frac{113.5 \times 46}{40} = 130^{\text{kgm.}},5,$$

en supposant toutefois que ces quantités d'eau soient injectées de la même manière. Ce n'est pas l'hypothèse qui nous a servi quand nous avons calculé le dernier volume. Nous avons admis alors que l'injection ne se faisait qu'après la compression complète. Or, il est évident que le travail exigé dans ces conditions, doit être supérieur, et de beaucoup, à celui que nous venons de calculer. L'eau, pour être introduite dans le compresseur, doit refouler à l'origine une pression très-forte, pression qui diminue jusqu'à celle qui correspond à la loi de Mariotte. Lorsque l'injection a lieu dès l'origine de la course du piston compresseur, le travail à effectuer au commencement de cette course est presque nul ; il n'est un peu considérable que lorsqu'on approche de la pression finale qui mesure l'effort maxi-

imum à vaincre pour introduire l'eau. Si l'on comprime avant d'injecter, ce maximum ne représentera que la plus petite des valeurs de la pression à refouler à à chaque instant. Il ne serait donc pas sans intérêt d'évaluer exactement le travail à dépenser pour injecter dans ces conditions nouvelles. La valeur que nous en trouverons fera ressortir du reste l'influence de la loi de l'injection sur le travail qu'elle nécessite.

Nous avons par conséquent à résoudre le problème suivant :

On comprime adiabatiquement un kilogramme d'air puisé dans l'atmosphère où la pression, le volume et la température sont p, V, t . Cette compression se fait jusqu'à ce que les caractéristiques soient : $P' v$ et T' . On sait que

$$v = \frac{V}{n}$$

Après la compression complète on injecte de l'eau pulvérisée, à la température t , dans la masse gazeuse dont le volume v est invariable. — A quel travail répond cette injection que l'on suppose uniforme, si la température finale du liquide ne dépasse celle de l'origine que d'un degré ?

Les premières parties du liquide refroidissant s'échaufferont plus fortement que les autres puisqu'elles seront déversées dans un milieu de température plus élevée. De sorte que les dernières parties refroidiront non-seulement la masse gazeuse, mais encore le liquide précédemment injecté. Or, d'après les conditions admises, le tout doit se trouver à la fin de l'opération à une même température, de sorte que l'on peut admettre que l'eau qui arrive à un instant donné dans le cylindre fait tomber la température de la même fraction en tous les points de son intérieur.

Cela étant, examinons le phénomène au moment θ qui

suit la compression complète. La pression, le volume et la température sont respectivement, P , v , T .

Z représentant en litres le débit constant par seconde de la source de froid, le volume de l'eau injectée jusqu'à cet instant sera $Z \theta$ et la quantité qui survient pendant le temps $d\theta$, $Z d\theta$.

Cette venue infiniment petite aura pour effet de faire tomber de dT la température dans le cylindre et de porter de t à T celle du liquide réfrigérant.

D'une part donc, le calorique cédé sera :

$$- c dT - Z \theta dT$$

D'autre part, la chaleur absorbée sera exprimée comme suit :

$$Z d\theta (T - t)$$

Par conséquent,

$$- dT (c + Z \theta) = Z d\theta (T - t)$$

d'où $(c + Z \theta) dT + Z d\theta (T - t) = 0$

c'est-à-dire, $d \{ (c + Z \theta) (T - t) \} = 0$

donc $(c + Z \theta) (T - t) = \text{const.}$

Ainsi, à chaque instant, le produit de l'excès de la température de l'intérieur du compresseur et de la quantité d'eau injectée augmentée du calorique spécifique sous volume constant, est invariable.

A l'origine de l'injection, ce produit est : $c (T' - t)$.

À la fin id. id. $c + Q$

Q représentant la quantité totale d'eau injectée pour un coup de piston dans l'appareil compresseur.

On a donc la double relation,

$$(T - t) (c + Z \theta) = c (T' - t) = Q + c$$

D'où l'on tire :

$$1^\circ \quad c + Q = c (T' - t)$$

$$\text{ou} \quad Q = c \{ T' - (t + 1) \}$$

égalité qu'on aurait pu écrire directement d'après les conditions du problème.

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}^o & (T - t) (c + \mathcal{Z}^o) = Q + c \\ \text{ou} & (c + \mathcal{Z}^o) dT + (T - t) \mathcal{Z} d^o = 0 \\ \text{d'où} & \end{aligned}$$

$$\mathcal{Z} d^o = - \frac{c + \mathcal{Z}^o}{T - t} dT = - (Q + c) \frac{dT}{(T - t)^2}$$

Connaissant le volume élémentaire d'injection, il est facile de trouver le travail qui y correspond.

Nous supposons comme ci-dessus que la vitesse μ du liquide répond à une pression constante p_1 . A l'instant considéré, la pression que l'on doit exercer sur le liquide pour l'introduire dans l'appareil sera donc :

$$P + 1000 \frac{\mu^2}{2g} = P + p_1$$

Le volume engendré par la surface du liquide en contact avec le piston moteur qui produit cette pression

$$\text{est} \quad \left(\frac{\mathcal{Z} d^o}{1000} \right) \text{ mètres}$$

Nous aurons donc pour le travail élémentaire :

$$d.\mathfrak{E} = (P + p_1) \frac{\mathcal{Z} d^o}{1000}$$

de sorte que

$$\mathfrak{E} = \int_{P^o}^P [P + p_1] \frac{\mathcal{Z} d^o}{1000}$$

$$\text{ou} \quad \mathfrak{E} = - \int_{P^o}^P [P + p_1] \cdot \frac{Q + c}{1000} \frac{dT}{(T - t)^2} =$$

$$= - \frac{Q + c}{1000} \int_{P^o}^P [P + p_1] \frac{dT}{(T - t)^2} =$$

$$= -\frac{Q+c}{1000} \left[p_1 \int_{P'}^P \frac{dT}{(T-t)^2} + \int_{P'}^P \frac{P dT}{(T-t)^2} \right]$$

Mais, $Pv = RT$, donc

$$\begin{aligned} \int_{P'}^P \frac{P dT}{(T-t)^2} &= \frac{R}{v} \int_{P'}^P \frac{T dT}{(T-t)^2} \\ &= \frac{R}{v} \int_T^T \frac{dT}{T-t} + \frac{Rt}{v} \int_T^T \frac{dT}{(T-t)^2} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\zeta = \frac{Q+c}{1000} \left[\left(p_1 + \frac{Rt}{v} \right) \int_T^T \frac{dT}{(T-t)^2} + \frac{R}{v} \int_T^T \frac{dT}{T-t} \right]$$

après substitution et changement des signes.

Intégrant on aura :

$$\zeta = \frac{Q+c}{1000} \left[-\left(p_1 + \frac{Rt}{v} \right) \left(\frac{1}{T-t} \right) + \frac{R}{v} \lg \left(\frac{T-t}{T} \right) \right]$$

Or, si T est la température finale, $T = t + 1$ ou $T - t = 1$, de sorte que

$$\zeta = \frac{Q+c}{1000} \left[\frac{R}{v} \lg (T-t) - \left(p_1 + \frac{Rt}{v} \right) \left\{ \frac{1}{T-t} - 1 \right\} \right]$$

Remarquons que l'on a aussi, P étant la pression extrême :

$$Pv = Rt \quad \text{ou} \quad P = \frac{Rt}{v}$$

Par suite

$$\varepsilon = \frac{Q + c}{1000} \left[\frac{R}{v} \lg (T - t) + (P + p_1) \frac{T - t - 1}{T' - t} \right]$$

On peut, sans commettre d'erreur sensible, négliger p_1 vis-à-vis de P et considérer

$$\frac{T' - t - 1}{T' - t}$$

comme étant l'unité.

Il viendra donc enfin

$$\varepsilon = \frac{Q + c}{1000} \left[\frac{R}{v} \lg (T' - t) + P \right]$$

Tel est le travail d'injection.

Appliquons la formule au cas, $n = 4$ ou $P = 4 \times 10333 = 41332^{\text{kgm.}}$

On a : $P' v^k = p V^k$

de sorte que

$$P' = \left(\frac{V}{v} \right)^k p = p \cdot n^k$$

De plus $P' v = R T'$ et $P v = R t$
donc

$$\frac{P'}{P} = \frac{T'}{t} \text{ ou } \frac{p \cdot n^k}{p \cdot n} = \frac{T'}{t}$$

c'est-à-dire,

$$T' = t n^{k-1}$$

Admettons que $t = 273^\circ + 20^\circ = 293^\circ$, on aura

$$T' = 293 \times 4^{0,41} = 517^\circ$$

et $T' - t = 224$ ou $\lg (T' - t) = 5.4$

$v = \frac{V}{4}$ et V est le volume de 1^{kg} d'air à 20° ,

c'est-à-dire, $\frac{1^{\text{m.}^3}}{1.20}$

puisque un mètre cube d'air à 20° pèse $1^{\text{k}}.20$

$$\text{Ainsi} \quad v = \frac{0.833}{4} = 0.208$$

$$R = 29,27 \text{ et } \frac{R}{v} = 140,72$$

Quant au volume d'eau injecté, on a :

$Q = c(T - t) = 0.1686 \times 224 = 37^{\text{lit.}} 77$ par kilogramme d'air, ce qui revient à $37.77 \times 1.2 = 45^{\text{lit.}} 33$ par mètre cube d'air à 20° .

C'est le même nombre que nous avons trouvé précédemment dans une autre question en partant du travail effectué.

Enfin donc,

$$\tau = 0,03795 [41332 + 759] = 1597^{\text{kgm.}} 35$$

Et, $1597.35 \times 1.2 = 1916^{\text{kgm.}} 82$ par mètre cube d'air à 20° .

Pour que ce travail fût fait en 2" par une machine à vapeur, cette dernière devrait être de

$$\frac{1916.82 \times 2}{2 \times 75} = 25^{\text{chev.}} 55.$$

Mais comme tantôt, elle pourrait alimenter cinq compresseurs.

Nous avons déterminé, dans deux cas particuliers, la quantité d'eau à injecter pour combattre le réchauffement de l'air ainsi que le travail à effectuer pour la projeter au milieu de la masse gazeuse. Mais pratiquement, les circonstances dans lesquelles se fera l'injection différeront des conditions que nous avons admises pour l'un et pour l'autre cas. Dans le premier nous avons supposé que l'eau utilisée à chaque instant était proportionnelle à la chaleur dégagée. Or, quoiqu'on fasse, on ne pourra satisfaire à cette hypothèse. Les variations du calorique à absorber sont trop complexes pour que l'on puisse régler la venue de liquide comme

l'exigerait cette théorie. On ne réalisera pas non plus les conditions du deuxième problème. On a, nous venons de le montrer, trop à perdre sur le travail de compression et sur celui d'injection. En un mot, les résultats auxquels nous sommes parvenus se rapportent à deux cas extrêmes dont on s'écartera plus ou moins dans l'application.

Aujourd'hui, en Belgique du moins, on emploie, pour refroidir l'air, le liquide qui séjourne dans le réservoir à air comprimé. A un moment donné la communication s'établit entre le cylindre du compresseur et le réservoir dont la pression force l'eau à se répandre dans l'espace où se produit la compression. Il nous reste donc, pour compléter cette étude, à rechercher la quantité d'eau qui résulte de ce mode d'injection et le travail que coûte cette dernière.

Nous avons par suite à résoudre le problème suivant :

A l'origine de la compression, l'eau qui se trouve dans le réservoir d'air comprimé est projetée dans l'appareil compresseur à la pression finale P. Quelle sera la quantité totale de liquide injecté pendant la compression ?

Au commencement de la compression le liquide est soumis à une charge

$$(P - p) \text{ kilog.}$$

p étant la pression atmosphérique.

De sorte que la hauteur génératrice de la vitesse d'injection à ce moment sera :

$$\left(\frac{P - p}{1000} \right) \text{ mètres.}$$

Cette hauteur diminue successivement jusque vers la fin de la course, c'est-à-dire, jusqu'à O ; car, après la

compression, les tensions dans le cylindre et dans le réservoir sont les mêmes.

Si donc P' est la pression du gaz à un moment donné de la compression, on aura pour hauteur du plan de charge à ce moment,

$$\left(\frac{P - P'}{1000}\right) \text{ mètres ;}$$

et pour vitesse de projection de l'eau,

$$\mu = \sqrt{2g \frac{P - P'}{1000}}$$

D'où il résulte que le volume élémentaire écoulé pendant le temps $d\theta$ sera :

$$dq = s \mu d\theta = s \sqrt{2g \frac{P - P'}{1000}} d\theta$$

s étant la section de la veine liquide à son entrée dans le cylindre.

Le volume total q se rapportant à une compression complète sera donc :

$$q = s \sqrt{\frac{2g}{1000}} \int_0^\theta \sqrt{P - P'} d\theta$$

ε représentant la vitesse constante de la manivelle de la machine et ω l'angle de rotation, on a :

$$\omega = \varepsilon \theta \text{ ou } d\theta = \frac{d\omega}{\varepsilon} \text{ donc}$$

$$q = \frac{s}{\varepsilon} \sqrt{\frac{2g}{1000}} \int_0^\omega \sqrt{P - P'} d\omega$$

P et P' étant indépendants de s et de ε on voit que le volume d'eau utilisé est proportionnel à la section s et en raison inverse de la vitesse ε de rotation.

La détermination de q se réduit, comme on voit, à l'intégrale :

$$\int_0^{\omega_1} \sqrt{P - P'} d\omega$$

On sait que $P = n p$. De plus P' correspondant à ω est donné par la relation :

$$P' = p \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} \omega + \frac{a}{4} \sin^2 \omega}$$

Donc,

$$q = \frac{s}{\varepsilon} \sqrt{\frac{2gp}{1000}} \int_0^{\omega_1} \sqrt{n - \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} \omega + \frac{a}{4} \sin^2 \omega}} d\omega \quad (1)$$

L'intégrale du second membre conduit à des calculs inabordables. Aussi la remplacerons-nous par une autre plus simple qui nous donnera pour q une valeur très-approchée.

Posons $u = \cos^2 \frac{1}{2} \omega + \frac{a}{4} \sin^2 \omega$, de façon que les limites de u sont :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_1 = \cos^2 \frac{1}{2} \omega_1 + \frac{a}{4} \sin^2 \omega_1 = \frac{1}{n}$$

Admettons que l'on puisse négliger l'obliquité a de la bielle, nous aurons :

$$u = \cos^2 \frac{1}{2} \omega.$$

L'erreur que l'on commettra sera la plus grande lorsque ω égalera $\frac{\pi}{2}$

Or, alors on aura pour $n = 4$ et $a = \frac{1}{4}$

Valeur exacte du radical :

$$\sqrt{4 - \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{16}}} = \sqrt{4 - 1.78} = 1.49$$

Valeur approximative du radical :

$$\sqrt{4 - \frac{1}{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2} = 1.41$$

Soit donc un écart *maximum* de 0,08, c'est-à-dire, 5 % de la valeur $\sqrt{P - P'}$

Mais l'erreur moyenne dans l'évaluation de q sera beaucoup plus faible, attendu que la formule approchée est rigoureuse pour les petites valeurs de ω , précisément alors que l'injection est la plus importante.

La valeur simplifiée de q ne pourra donc pas différer sensiblement de celle de l'expression (1).

Cela étant, nous avons

$$q = \frac{s}{c} \sqrt{\frac{2gp}{1000}} \cdot \int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{n - \frac{1}{u}} \cdot d\omega$$

$$\text{De } u = \cos^2 \frac{1}{2} \omega, \text{ on tire : } d\omega = - \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}}$$

Par suite

$$q = \frac{s}{\varepsilon} \sqrt{\frac{2gp}{1000}} \int_{\frac{1}{n}}^1 \sqrt{n - \frac{1}{u}} \cdot \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}}$$

$$\text{d'où } q = \frac{s}{\varepsilon} \sqrt{\frac{2gp}{1000}} \int_{\frac{1}{n}}^1 \sqrt{\frac{nu-1}{1-u}} \cdot \frac{du}{u}$$

On pourrait intégrer cette expression par le procédé ordinaire, c'est-à-dire, en rendant le numérateur rationnel, mais on arrive plus rapidement au résultat en posant directement :

$$\sqrt{\frac{nu-1}{1-u}} = z$$

$$\text{d'où } nu - 1 = z^2(1-u), \text{ c'est-à-dire, } u = \frac{1+z^2}{n+z^2}$$

$$\text{et } du = \frac{(n+z^2) - (1+z^2)}{(n+z^2)^2} 2z dz = \frac{2z dz}{(n+z)^2} \cdot (n-1)$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{n}}^1 \sqrt{\frac{nu-1}{1-u}} \frac{du}{u} &= \int_{z_1}^{z_0} \frac{2z dz (n-1)(n+z^2)}{(n+z^2)^2 (1+z^2)} = \\ &= 2(n-1) \int_{z_1}^{z_0} \frac{z^2}{(n+z^2)(1+z^2)} dz \end{aligned}$$

Déterminons deux paramètres A et B de façon à satisfaire à l'identité :

$$\frac{z^2}{(n+z^2)(1+z^2)} = \frac{A}{n+z^2} + \frac{B}{1+z^2}$$

Multiplions par $n+z^2$, nous obtiendrons :

$$\frac{z^2}{1+z^2} = A + \frac{B}{(1+z^2)}(n+z^2)$$

C'est-à-dire, pour $z^2 = -n$

$$\frac{-n}{1-n} = A$$

Si l'on fait disparaître $1+z^2$ des dénominateurs, on aura :

$$\frac{z}{n+z^2} = \frac{A}{n+z^2} \cdot (1+z^2) + B$$

Pour $z^2 = -1$ il vient :

$$B = \frac{-1}{n-1}$$

Ainsi

$$2(n-1) \int_{z_1}^{z_0} \frac{z^2}{(n+z^2)(1+z^2)} dz = 2(n-1)$$

$$\int_{z_1}^{z_0} \frac{n dz}{n+z^2} \cdot \frac{1}{n-1} = 2(n-1) \int_{z_1}^{z_0} \frac{dz}{1+z^2} \frac{1}{n-1}$$

Ce que l'on peut écrire :

$$2 \left[\sqrt{n} \cdot \int_{z_1}^{z_0} \frac{dz}{1 + \left(\frac{z}{\sqrt{n}}\right)^2} - \int_{z_1}^{z_0} \frac{dz}{1 + z^2} \right] =$$

$$= 2 \left[\sqrt{n} \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{z}{\sqrt{n}} \right) - \operatorname{arc} \operatorname{tg} z \right]_{z_1}^{z_0}$$

Les limites de z étant :

$$z_0 = \sqrt{\frac{n u_0 - 1}{1 - u_0}} = \infty$$

$$z_1 = \sqrt{\frac{n u_1 - 1}{1 - u_1}} = 0,$$

L'intégrale proposée devient :

$$2 \left[\sqrt{n} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right] = \pi \left[\sqrt{n} - 1 \right]$$

De sorte que

$$q = \frac{s\pi}{\varepsilon} \sqrt{\frac{2gp}{1000}} \cdot \left[\sqrt{n} - 1 \right]$$

Si nous admettons un orifice circulaire de $0^m,02$ de rayon, nous aurons $s = 3^{\text{e}2},14 = 0^{\text{m}2},000314$.

Soit $\varepsilon = 1,25$ comme précédemment ; supposons $n = 4$. Nous aurons :

$$q = \frac{0,000314 \times 3,14}{1,25} \times 14 \ 23 \left[2 - 1 \right] = 0^{\text{m}3},011$$

C'est-à-dire, 11^{lit} . par coup de piston —

Si le volume du compresseur est de 250^{lit} . on aura 44^{lit} . d'eau par mètre cube d'air.

Travail de l'injection: Si q représente en mètres cubes le volume de l'eau projetée dans le compresseur, on devra à chaque coup de piston refouler cette même quantité d'eau dans le réservoir d'air comprimé.

Ce qui exige le travail

$$\mathfrak{E} = q \cdot P = npq$$

$$\text{ou } \mathfrak{E} = \frac{\pi s}{\varepsilon} \cdot p \sqrt{\frac{2gp}{1000}} \cdot n \left[\sqrt{n} - 1 \right]$$

Ce travail augmente assez rapidement avec n . Ainsi pour $n = 2$ il est proportionnel à . . . 8

$n = 3$ id. . . 22

$n = 4$ id. . . 40

$n = 5$ id. . . 62

$n = 6$ id. . . 87

$n = 9$ id. . . 180

$n = 16$ id. . . 480

$n = 25$ id. . . 1000

Pour 1^{re}. seulement et pour $n = 4$ on a :

$$\mathfrak{E} = 0,001 \times 4 \times 10333 = 41^{\text{kgm}} \text{ 332}$$

C'est-à-dire, 1/2 cheval si ce travail est fait en 1", ce qui correspond à 1 cheval de la machine à vapeur.

Il résulte de là, qu'il est important de n'employer que la quantité d'eau strictement nécessaire. Cette quantité sera aussi grande et aussi petite qu'on le voudra, puisque l'on dispose de la section s . — D'après cela l'injection pendant l'aspiration serait nuisible, parce que l'eau projetée de la sorte n'agit sur la température de l'air que comme le piston hydraulique du cas ordinaire de compression et que cette eau nécessite un fort travail pour être refoulée dans le réservoir d'air comprimé. On pourra obtenir le même refroidissement en n'injectant pas pendant l'aspiration et en donnant une valeur un peu plus grande à la section de l'orifice.

On ne devra sacrifier en même temps pour l'injection qu'un travail beaucoup moindre, celui, qui correspond au refoulement dans le réservoir, de l'eau que l'on projette pendant la compression.

Il y a évidemment dans chaque cas une étude à faire des différents éléments de la question de façon à ne leur donner que les valeurs qui conviennent le mieux au travail de la machine.

Ajoutons que l'idée d'employer l'eau comme réfrigérant n'est pas aussi nouvelle qu'on le croit généralement (1). Il y a dix ans, M. Gallez, ingénieur-mécanicien de la Compagnie de charbonnages belges, l'a réalisée pour les compresseurs du puits n° 10 de Grisœuil à Pâturages. Les clapets des appareils qui étaient détruits en quelques jours en fonctionnant dans l'air échauffé, ont résisté pendant près de deux mois par l'injection d'eau froide.

Il y a plus. On y était parvenu à faire travailler l'air comprimé à détente dans une machine du fond. Cette dernière remontait les wagons de charbon sur un plan incliné de 355 mètres de longueur et d'une pente variant de 17 à 22°. L'air comprimé à 3 1/2 atmosphères était admis dans le cylindre moteur pendant les deux tiers de la course et se détendait pendant l'autre tiers. On a eu recours, pour empêcher le refroidissement, à un procédé aussi original qu'ingénieux. Le cylindre était entouré de chaux vive que l'on arrosait. La chaleur résultant de l'extinction était telle qu'on n'aurait pu impunément laisser la main au contact du cylindre découvert. On remplaçait cette chaux trois fois par

(1) Nous devons les renseignements qui suivent à l'obligeance de M. H. Harpignies, Directeur des Travaux du charbonnage du Trieu-Kaisin à Gilly et qui, il y a dix ans, était attaché, en qualité d'ingénieur, à la Direction des Travaux des charbonnages de l'Agrappe et Grisœuil

jour et, après son emploi, on la remontait à la surface où l'on en faisait du mortier. On était très-satisfait des résultats obtenus. M. Gallez cherchait également à cette époque le moyen d'appliquer l'air comprimé à la traction. Malheureusement, la mort surprit l'auteur de ces innovations au milieu de ses expériences.

Charleroi, 15 octobre 1875.

NOTE ADDITIONNELLE

SUR

L'EMPLOI DE L'AIR COMPRIMÉ

COMME FORCE MOTRICE

PAR

M. PHILIPPE BANNEUX

SOUS-INGÉNIEUR AU CORPS DES MINES (1).

Le travail précédent était remis à la Commission des Annales des Travaux Publics depuis plusieurs mois, lorsque M. Trasenster, membre de cette Commission, fit connaître, dans la séance du 5 mars 1876, de l'Association des Ingénieurs sortis de l'École de Liège, la formule du rendement dans le cas ordinaire de compression, formule que nous avons donnée l'année dernière, comme rectification de la note publiée en 1873, par l'honorable Président de l'Association. Nous avons appris depuis, que M. Trasenster connaissait cette formule avant l'impression du travail de M. Cornet, qui, le premier, a publié les éléments de la véritable solution de la question

Comme suite à cette communication, M. Trasenster

(1) Cette note, communiquée par l'auteur en juin dernier, avait été composée pour paraître en même temps que son *Mémoire sur l'emploi de l'air comprimé comme force motrice*, dans le 2^e cahier du t. xxxiv ; c'est par suite d'un oubli de l'imprimeur qu'elle n'a pas été tirée en même temps que ce travail.

(N. D. L. C.)

montra, à la réunion suivante, les diagrammes relevés sur les compresseurs à injection et sans injection de MM. Dubois et François. De l'examen de ces diagrammes, il résulte :

1° Que l'échauffement de l'air est nul dans les compresseurs à injection d'eau.

2° Que l'air s'échauffe à peu près comme l'indique le calcul dans les compresseurs où l'on n'emploie le liquide que pour protéger le piston de l'appareil.

En somme, la théorie que nous avons exposée est parfaitement d'accord avec les résultats de l'expérience. Nous avons, du reste, mis hors de doute cette concordance l'année dernière, en nous appuyant, pour cela, sur une expérience même de M. Trasenster et sur le diagramme, le seul que l'on eût publié, de M. Daxhelet.

Toutefois, au point de vue théorique, on ne peut dire que l'échauffement de l'air sera nul. Une masse d'eau, si grande qu'elle soit, employée comme réfrigérant, possédera nécessairement une température finale supérieure à celle de l'origine. Car on ne saurait faire intervenir la diminution de température qui se produit en vertu de la force vive de l'eau qui s'écoule, attendu que le mouvement du liquide ne persistant pas, on retrouve, dans l'amortissement de la vitesse, une variation de température égale et contraire.

Enfin dans la séance du 21 avril 1876, de la Société des Ingénieurs civils de Paris, M. Gautier fit une communication relative à la locomotive Mèkarski, destinée à la traction des tramways par l'air comprimé. Ici, aussi, on a fait usage de la loi qui nous a servi pour le calcul du travail de l'air comprimé.

On voit que de puis peu, la loi de Poisson est sortie du domaine de la théorie et qu'elle deviendra, pour ce qui concerne les moteurs à gaz, d'un emploi général. Cette loi n'apparaît, dans les auteurs qui se sont occupés des

propriétés des gaz, que comme une conséquence résultant de l'application de la théorie générale de la chaleur à un cas particulier. C'est ce mode de démonstration qui a été suivi dans la première partie de cette étude où l'on a introduit, dans une relation qui convient à tous les corps, la condition que celui que l'on avait en vue était un gaz parfait dont l'état se transformait adiabatiquement.

A l'époque où nous nous sommes occupés de cette partie de la question, on n'avait, rien publié, que nous sachions, sur l'application de la loi précédente. Depuis, les différents travaux qui ont paru, font clairement ressortir l'importance pratique de cette loi.

C'est ce qui nous a engagé à isoler de la théorie générale d'où on l'a déduite jusque maintenant et à en donner une démonstration directe basée uniquement sur quelques lois de la physique expérimentale.

On sait que les gaz permanents obéissent aux lois suivantes :

- 1° A la loi de Mariotte ;
 - 2° A la loi de Gay-Lussac.
- D'où résulte la relation,

$$pv = Rt \quad (1)$$

p , v , t sont les pression, volume et température absolue ; R est une constante pour chaque gaz.

- 3° A la loi de Regnault :

La chaleur spécifique, c , d'un gaz sous volume constant, est invariable.

- 4° A la loi fondamentale de la théorie mécanique de la chaleur :

Entre la quantité de chaleur consommée ou produite et le travail obtenu ou dépensé, il y un rapport constant A .

5°A la loi de Clausius, que Joule a démontrée expérimentalement.

Si un gaz se comprime ou se dilate à température constante, la chaleur qui est dégagée ou qui est absorbée, correspond au travail extérieur dépensé ou produit.

Cette loi a une conséquence qu'il importe de mettre en évidence.

Considérons un gaz dans l'état p, v, t .

Laissons-le se dilater à température constante jusqu'à ce que l'on ait p', v', t .

La chaleur communiquée pendant cette transformation est entièrement absorbée, d'après la loi de Clausius, par le travail extérieur produit.

La chaleur interne du gaz n'a pas varié.

Donc, un même poids de gaz, sous des volumes différents, a la même chaleur intérieure si la température est aussi la même.

Admettons maintenant que l'on communique à un gaz une certaine quantité de chaleur dont l'effet soit de changer les caractéristiques p, v, t en p', v' et t' , et recherchons la variation de la chaleur interne.

Si le gaz était porté, dans son état initial et sous volume constant, à la température t' , la quantité de chaleur dépensée se serait uniquement transformée en chaleur sensible et elle serait exprimée par :

$$c (t' - t)$$

de sorte que l'on aurait pour pression, volume et température :

$$p'', v, t'$$

Mais, d'après ce que l'on vient de dire, la chaleur interne de cet état intermédiaire ne diffère pas de la chaleur interne de l'état final dont la température est également t' .

Donc, *la variation de la chaleur interne d'un gaz qui passe d'un état à un autre, ne dépend que de la température finale et elle a pour mesure le produit de la chaleur spécifique sous volume constant et de la variation totale de la température.*

Cela étant, nous pouvons facilement calculer la chaleur spécifique c' d'un gaz sous pression constante p .

Supposons qu'on chauffe ce gaz. La variation de la température sera d'une manière générale, d'après la relation (1) :

$$dt = \frac{p}{R} dv + \frac{v}{R} dp$$

Si p est constant, l'augmentation de la température sera :

$$\frac{p}{R} dv$$

et la quantité de chaleur fournie :

$$c' \cdot \frac{p}{R} dv.$$

Cette chaleur produit :

1° Un travail extérieur $p dv$;

2° Une augmentation de chaleur interne $c \frac{p}{R} dv$.

Donc,

$$c' \frac{p}{R} dv = A p dv + c \frac{p}{R} dv$$

$$\text{ou} \quad c' = c + AR \quad (2).$$

c' aussi est donc une constante.

Ces préliminaires posés, nous pouvons chercher :

Suivant quelle loi se font les variations de pression et

de volume de l'unité de poids d'un gaz que l'on comprime ou qui se dilate de telle façon qu'il n'y ait ni absorption ni émission de chaleur ?

Supposons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse d'une compression.

Pour une variation infiniment petite des caractéristiques, on dépense un travail extérieur.

$$- p \, dv$$

c'est-à-dire, d'après les conditions de la transformation, que la chaleur interne augmente de

$$- A \, p \, dv$$

Mais, en somme, la température varie de dt , donc la chaleur sensible s'accroît de $c \, dt$.

Par conséquent,

$$c \, dt = - A \, p \, dv$$

Substituant à dt sa valeur en fonction de p et v on a :

$$\frac{c}{R} p \, dv + \frac{c}{R} v \, dp + A \, p \, dv = 0$$

$$\text{c'est-à-dire, } (c + A R) p \, dv + c v \, dp = 0$$

$$\text{ou } \frac{c'}{c} \frac{dv}{v} + \frac{dp}{p} = 0$$

d'après la relation (2).

$$\text{Donc } \frac{c'}{c} \lg v + \lg p = \text{Constante}$$

$$\text{ou } p v^{\frac{c'}{c}} = \text{Constante.}$$

C'est la loi de Poisson.

Quant au travail de compression qui produit la va-

riation de la chaleur interne, on peut y arriver d'une manière très-simple.

Cette variation d'après ce que l'on vient de voir, est :

$$c(T - t).$$

T et t étant les températures absolues des états final et initial, et le travail :

$$\bar{\epsilon} = \frac{c(T - t)}{A}$$

Mais $pV = Rt$ et $Pv = RT$

donc
$$\bar{\epsilon} = \frac{c}{AR} (Pv - pV)$$

Or $c' - c = AR$

ou
$$\frac{c'}{c} - 1 = \frac{AR}{c}.$$

Par conséquent $K - 1 = \frac{AR}{c}$

Par suite,
$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{K - 1} (Pv - pV).$$

C'est la formule exposée dans la première partie où on l'a obtenue en faisant explicitement usage de la relation $pv^k = \text{Constante}$.

P. B.

Juin, 1876.

SUR LA
RUPTURE DU CUVELAGE EN FONTE

DU

PUITS BANEUX

DES

CHARBONNAGES DE BONNEFIN, A LIÈGE

PAR

M. PH. BANNEUX

INGÉNIEUR AU CORPS DES MINES.



BRUXELLES
IMPRIMERIE FÉLIX CALLEWAERT PÈRE
RUE DE L'INDUSTRIE, 26

—
1881

SUR LA
RUPTURE DU CUVELAGE EN FONTE

DU

PUITS BANEUX

DES CHARBONNAGES DE BONNEFIN, A LIÈGE

PAR

M. PH. BANNEUX

INGÉNIEUR AU CORPS DES MINES.

Il est peu d'accidents de mines qui aient plus fortement frappé les ingénieurs que la rupture du cuvelage en fonte du charbonnage du Bâneux. Il en sera de même, sans aucun doute, du remède énergique auquel on a dû recourir pour rétablir, dans les conditions de stabilité qui conviennent à un travail de ce genre, le cuvellement métallique des puits de ce siège. — Je ne crois pas en effet qu'il existe de cuvelage plus formidable que celui que l'on monte actuellement et qui, il faut l'espérer, saura par sa rigidité, contenir les venues et résister efficacement à la charge de plus de 40 mètres qu'il est appelé à supporter.

C'est avec raison que la Direction du Bâneux cherche à éviter les graves mécomptes qu'a produits l'installation du premier revêtement en fonte. La malheureuse expérience qui vient d'éprouver si péniblement la Société de Bonnefin, ne doit pas être recommencée. Outre qu'elle aura retardé sensiblement le moment où les eaux seront détournées des exploitations, elle a eu pour conséquence inévitable de maintenir le prix de revient dans des régions que l'on voudrait voir inaccessibles. Les frais d'exhaure ont une influence telle sur les dépenses totales d'exploitation, que l'on peut avancer, sans craindre d'être contredit,

que le cuvelage du Bâneux recèle dans ses flancs ni plus ni moins que l'existence même de la mine. Cet état de choses, d'ailleurs, n'est pas absolument spécial au charbonnage dont je m'occupe ici. En maintes circonstances, l'étude du cuvelage des puits se place d'elle-même par son importance au premier rang de toutes celles que doit produire la science de l'ingénieur. Et cependant, il faut le reconnaître, ce problème capital n'a pas toujours été pratiquement traité avec tous les soins que comportait le but à atteindre. Bien que posée depuis le siècle dernier, la question des cuvelages en fonte n'est pas sortie de la phase expérimentale et, à l'heure qu'il est, on tâtonne encore et l'on risque pour ainsi dire sans défiance, de dangereuses innovations. Les conceptions vicieuses, semblables à celles du Bâneux, restent fréquentes. Comme elles sont, à mon sens, le produit d'une idée fautive qu'il importe de signaler et de combattre, je saisis cette occasion pour exposer, avec quelques développements, les résultats que l'expérience vient de hautement proclamer dans le cas présent. Ces résultats, il convient de le remarquer tout d'abord, doivent être analogues dans toutes les installations similaires; seulement les conséquences qui, au Bâneux, sont désastreuses, peuvent n'être pas visibles dans d'autres circonstances, soit par suite de la courbure ou des dimensions des panneaux de la cuve, soit enfin par suite de toute autre disposition particulière des segments empilés.

Il est de règle, dans l'art de construire, de n'employer la fonte que pour résister à des efforts de compression. Or, si l'on se fait une loi de s'écarter le moins possible de cette nécessité dans les constructions aériennes, c'est que l'on doit s'y soumettre impérieusement pour tout ce qui concerne les revêtements des puits de mines et, en général, pour toutes les installations du fond. L'accident survenu au cuvelage du Bâneux pourrait être donné comme une preuve irréfutable de la prudence de cette mesure, mais il est préférable, je pense, de la déduire, sans tarder, des expériences entreprises dans tous les pays sur la résistance de la fonte. Il est généralement reconnu et admis que l'on peut considérer la charge de rupture de la fonte à la compression comme variant de 50 à 80 kilogrammes par millimètre carré de section. Quant aux essais concernant la traction, ils ont conduit à des résultats tellement différents qu'on n'a guère pu en conclure la charge pratique qu'il conviendrait de désigner. Les ruptures à l'extension se sont faites sous des efforts variant de 5 à 20 kilogrammes par millimètre carré. Il

est même arrivé, et ces accidents n'ont pas peu contribué à consacrer la défiance des constructeurs, que des corps de pompe de presse hydraulique se sont rompus sous des charges inférieures à 1 1/2 kilogrammes seulement par millimètre carré de section.

Ces préliminaires posés, j'aborde le point spécial qui fait l'objet de ce rapport.

1^o *Conditions d'établissement du cuvelage du Bâneux.* — Il y a quelques années on avait à exhaurer au siège du Bâneux des venues quotidiennes s'élevant à un volume total de 2,800 mètres cubes, dont la moitié provenait des fuites d'un ancien cuvelage en bois.

D'autre part, une partie des bains était isolée de la fosse principale par l'antique plate-cuve du bure de la Vigne. La rupture de cette plate-cuve aurait placé les travaux dans une situation très critique. Dans le double but et d'endiguer les venues que laissait repasser le cuvelage en bois et de se mettre à l'abri d'une rupture éventuelle de cet ouvrage d'art, remontant à une époque reculée, on avait résolu depuis longtemps l'installation d'un cuvelage capable de contenir les eaux et de protéger d'une façon certaine les exploitations du fond contre toute chance d'accident.

Ce ne fut pourtant qu'en 1878 qu'on mit la main à l'œuvre, après qu'une commission d'ingénieurs, nommés pour l'étude de quelques questions concernant les charbonnages de Bonnefin, eût fait rapport sur ce qu'il conviendrait d'entreprendre et eût conseillé le cuvelage en fonte, que je vais très sommairement décrire. Le revêtement métallique fut monté dans le puits d'extraction et dans les deux compartiments adjacents d'un autre puits servant, l'un au retour de l'air, l'autre à l'épuisement.

a. Cuvelage de l'épuisement et de l'aérage.

Comme je viens de le dire, le cuvelage est le même dans les deux compartiments. Il se compose, à la base, d'une trousse en fonte de 0^m,60 de hauteur, assise sur le mur de la Grande Veine, à la profondeur de 60^m,55 et soutenant, sur 44 mètres de hauteur, une série de 72 panneaux de 0^m,60 également. La forme des segments des mêmes parois est invariable. Sous le rapport de l'épaisseur, on avait proposé 3 passes, comprenant chacune 24 tronçons superposés et mesurant à la base 34 millimètres, vers le milieu 26 millimètres, et au sommet 19 millimètres. Dans l'exécution, le constructeur força ces dimensions et on admit à la base 34, au milieu 30 et à la tête 26 millimètres. Il

en résulta dans le poids total du cuvelage, qui fut de 259,000 kilogrammes, une augmentation de 5,000 kilogrammes de fonte.

Les différents tronçons étaient d'une seule pièce, pour chaque paroi. Ceux de l'est et de l'ouest, arqués suivant une circonférence de 7^m,70 de diamètre, mesuraient une corde de 2^m,50 et une flèche de 0^m,22 seulement. Les autres panneaux s'élevant le long des parois du nord et du sud dans les deux bures, étaient courbés suivant un cercle de 7 mètres de diamètre, et présentaient pour une portée de 2^m,60, une flèche de 0^m,27. Ces dernières pièces qui s'arc-boutaient contre les partibures médianes, étaient reliées par collets et boulons aux segments du levant et du couchant. Chaque tronçon enfin était muni, supérieurement et inférieurement, de collets intérieurs venus de fonte de 85 millimètres et surmontés à l'arrière d'un talon de 5 millimètres réservé pour la confection du joint définitif. Au milieu des pièces, vers l'intérieur du puits toujours, une nervure horizontale de 85 millimètres également, s'étendait d'une extrémité à l'autre des tronçons. Ce revêtement métallique était établi contre la roche. On avait dû renoncer, vu le défaut de place, à l'établir à l'intérieur de l'ancien cuvelage en bois. Inutile de dire que, pendant la monte, on avait coulé entre les terrains et la paroi artificielle un béton hydraulique.

b. Cuvelage de l'extraction.

Ici, on n'avait pas dû subir cette dernière nécessité et il fut possible de construire le nouveau cuvelage à l'intérieur du primitif qui était en hêtre et dans un état de conservation beaucoup meilleur que celui des bures d'épuisement et d'aérage. Toutes les parois étaient courbées suivant une circonférence de 5 mètres de diamètre. La portée de chaque pièce était de 4^m,60 et la flèche par conséquent de 0^m,25 environ. On avait proposé d'affecter à cette partie du travail des épaisseurs de fonte variant de 25 millimètres à 17 millimètres de la base au sommet; dans l'exécution, la Direction fit porter ces épaisseurs respectives à 30 et à 20 millimètres. Il résulta de ce chef une augmentation de plus de 20,000 kilogrammes de fonte sur un total de 145,000 kilogrammes qui avait été projeté dès l'abord par la commission susdite. Ces tronçons mesuraient chacun 0^m,90 de hauteur. On fit usage de lamelles de plomb de 3 millimètres pour jointoyer le cuvelage qui, commencé en janvier 1878, fut terminé dans les premiers mois de l'année suivante.

Telles étaient les conditions générales dans lesquelles le revêtement

métallique du Bâneux devait supporter une charge de 42 mètres d'eau.

2^o *Premier accident. — Insuffisance des joints de plomb.* — Le cuvelage terminé, on laissa les bains se reconstituer insensiblement et la charge s'établir contre le revêtement. Or, lorsque les eaux se furent élevées de 40 à 42 mètres, plusieurs des joints plombés cédèrent et livrèrent passage au liquide. Les lamelles de plomb furent projetées au dehors des joints sous la pression de l'eau et le cuvellement se trouva impuissant à remplir son but. Cet accident, bien qu'il occasionnât une dépense nouvelle à laquelle on était loin de s'attendre, n'effraya pas outre mesure. Il n'était pas du reste de nature à altérer la confiance que l'on avait dans l'installation projetée. On admettait sans trop de difficulté que le dressage des joints très étendus du cuvelage du Bâneux pouvait bien n'être pas chose parfaite et qu'il avait partiellement compromis la réussite de l'installation. Et effectivement le succès qui a répondu au joint de plomb et même à celui de caoutchouc en de nombreuses circonstances, ne peut être espéré dans tous les cas; il sera d'autant plus difficile à obtenir, toutes choses égales, que les surfaces des joints à dresser seront plus développées. Il n'y avait donc pas de raisons majeures pour voir dans l'insuffisance du jointoyage, l'indice d'une situation plus grave que celle que peut produire un accident vulgaire. L'ingénieur du Bâneux proposa, pour remédier à ce fâcheux accident, de bourrer les vides réservés entre les collets de mastic de fer, c'est à dire de recourir à celui des matériaux de liaison qui convient le mieux aux assemblages métalliques permanents. On se disposa donc à exécuter près de 3 kilomètres de joints. Poussé activement et sans relâche, ce travail fut l'affaire de quelques mois.

3^o *Rupture du cuvelage.* — Cette réparation urgente effectuée, on rechargea de nouveau la paroi métallique. On laissa le plan de charge s'élever insensiblement.

Tout à coup, dans les premiers jours de juillet, et lorsque ce plan de charge eut atteint la hauteur de 35 mètres au dessus de la trousse, l'un des joints horizontaux inférieurs de la paroi de l'est de l'épuisement céda dans le coin sud sur une longueur de près de 0^m,30, et laissa comme ci-devant, les eaux envahir la fosse.

La visite minutieuse que cet accident provoqua permit de constater la triste réalité, c'est à dire la rupture de 34 segments successifs, superposés sur une hauteur de plus de 48 mètres, et cela sur les six faces des bures d'épuisement et d'aérage. Le cuvelage plus fort de l'extraction était resté intact.

J'ai dit en commençant que peu d'accidents avaient eu le don de surprendre et d'étonner autant que la rupture dont il s'agit. En effet, tout n'est-il pas extraordinaire dans ce travail du Bâneux? On installe de nos jours un cuvelage en fonte conçu, adopté et proposé par une commission d'ingénieurs dans le but de résister à une charge de 42 mètres d'eau et aussi afin de parer à la charge dynamique qui, éventuellement pouvait provenir de la rupture d'une ancienne plate-cuve. L'exploitant force même les épaisseurs projetées. Et ce cuvelage qui devait en quelque sorte, résister à l'épreuve de la bombe, se rompt sur une très grande hauteur, alors que la charge statique n'avait pas même atteint toute sa puissance.

4^o *De la prétendue influence du béton coulé derrière le cuvelage.* — Quelques ingénieurs ont cru pouvoir faire remonter jusqu'au béton la cause de l'accident en question. J'examinerai très succinctement, pour la réfuter cette opinion que je considère comme peu fondée. Les préjugés en matière de mines ne sont déjà que trop nombreux et il est impossible qu'on en laisse acclimater de nouveaux qui ne manqueraient pas d'offrir d'autant plus de danger qu'on paraît les déduire d'expériences connues de tous. Le béton, par son contact avec l'eau, aurait gonflé et produit, dit-on, les ruptures relevées au cuvelage du Bâneux. On ne manque pas d'ajouter, pour donner du poids à cette opinion, que pareilles conséquences se sont produites en différentes circonstances, et que l'on pourrait désigner tel mur de quai, telle écluse et une foule de travaux hydrauliques qui ont été compromis, après leur mise en œuvre, par suite d'un travail subséquent de la matière hydraulique employée, que l'on aurait grandement tort, par conséquent, de considérer comme inerte après son immersion et son durcissement.

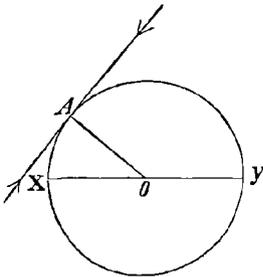
Certes, l'expérience a averti l'ingénieur d'être très prudent sur le choix, le dosage et la confection des mortiers, mais c'est donner à un phénomène spécial une bien grande extension que de prétendre que tous les bétons peuvent occasionner des catastrophes.

L'étude très complète que l'on a faite de ces cas particuliers que l'on peut invoquer, a démontré d'une manière certaine et incontestable qu'il est dangereux de faire usage de quelques chaux hydrauliques bien connues sous le nom de chaux limites, parce qu'elles fournissent un produit qui d'abord fait prise et qui ensuite se désagrège en ruinant parfois la construction où ces détestables matériaux sont engagés. Ces chaux limites contiennent 35 à 40 p. % de matières hydraulisantes. Toute la question se réduit donc à savoir si, au Bâneux, on a mis en œuvre un

béton semblable? Or, le béton que l'on a confectionné au charbonnage est un béton de ciment de Portland, qui s'écarte donc considérablement de celui que l'on doit éviter et lequel d'ailleurs occupe une place très restreinte dans l'échelle des matières hydrauliques. Il peut donc être très commode d'accuser le béton du Bâneux, mais il n'en reste pas moins difficile d'en expliquer l'action. Je ne dirai rien de ce que cette hypothèse a de subtil. Le béton en gonflant, doit aussi bien agir pour refouler l'eau que pour briser le cuvelage et il ne saurait transmettre à ce dernier une pression plus grande que la charge existante. Il est au surplus très heureux que l'opinion que je signale soit radicalement fautive. Si elle était la traduction de la vérité, on ne pourrait se demander, sans effroi, ce que seraient ou deviendraient nos grands travaux publics si l'on ne pouvait composer que des bétons de sécurité trompeuse. Ce qui restera étrange, c'est que cette opinion aura précisément jailli à l'époque où l'on se vante d'avoir trouvé le mortier résistant à l'action éminemment destructive des eaux de la mer!

Les partisans de la vertu chancelante du béton hydraulique en seront pour leurs frais d'imagination. La rupture du revêtement métallique du Bâneux git dans la conception même du cuvelage. C'est ce que je vais démontrer à l'instant.

5° *Effort auquel doit résister un cuvelage entièrement circulaire.* — Concevons une section droite dans un cuvelage circulaire complet pressé uniformément à l'extérieur par une charge d'eau de H mètres de hauteur. Tous les points du contour tels que A seront sollicités à se rapprocher du centre O , et il en résultera naturellement, dans la section A , deux pressions en sens contraires. La fonte sera donc soumise, en chacun de ses points, à des forces dont l'effet sera d'écraser la matière. C'est, dans l'hypothèse admise, le seul phénomène que produira la pression extérieure; la fonte se trouvera alors dans les meilleures conditions de résistance. Cela posé, si l'on coupe le cuvelage chargé par un plan méridien de trace XY , on démontre facilement que les sections en X et en Y ont à supporter une charge représentée en kilogrammes par $1000 H \times 2 R$, H étant la hauteur d'eau, R le rayon extérieur du cuvelage. Si donc e est l'épaisseur de la pièce et E la



résistance par mètre carré, on aura :

$$e = \frac{1000 HR}{E},$$

formule dont on se sert communément pour le calcul des pièces. En pratique on compte sur une charge de rupture à l'écrasement de 50,000,000 kilogrammes et sur une sécurité représentée par le coefficient 1/10. On prend donc $E = 5,000,000$. Par suite, en exprimant e en millimètres,

$$e = \frac{HD}{40}$$

D étant le diamètre du cuvelage.

Il importe de remarquer qu'on établit cette formule en admettant que la pression se fait sentir également sur tous les points d'une même section. Cette supposition n'est certainement qu'approximative, mais Lamé a donné des formules indépendantes de toute hypothèse autre que celle de l'homogénéité de la matière, et il est arrivé à cette conclusion que pour les parois minces, la formule précédente est parfaitement applicable. Or, c'est ce qui existe dans les revêtements en fonte.

Application au calcul des pièces du cuvelage du Bâneux supposé parfaitement circulaire.

1° On aurait pour le cuvelage de l'épuisement et de l'aéragé ;

a) Parois de l'est et de l'ouest :

$$e = \frac{42 \times 7.7}{10} = 32.34, \text{ soit } 33 \text{ millimètres.}$$

Et l'on a donné 34 millimètres.

b) Parois du sud et du nord.

$$e = \frac{42 \times 7}{10} = 29.4, \text{ soit } 30 \text{ millimètres.}$$

Et l'on a coulé la pièce sous 34 millimètres également.

2° Pour le revêtement de l'extraction on aurait :

$$e = \frac{42 \times 5}{10} = 21 \text{ millimètres.}$$

On avait proposé 25 millimètres et la Direction a fait exécuter les

panneaux sur 30 millimètres d'épaisseur. De ces déterminations on peut conclure :

1^o Que les tronçons du cuvelage du Bâneux ont été calculés comme si chacun d'eux appartenait à un revêtement circulaire complet.

2^o Que la Direction du charbonnage a fait augmenter de 50 % l'épaisseur des tronçons de l'extraction qui aurait suffi pour résister à la pression de l'eau, si les panneaux avaient constitué une cuve cylindrique parfaite, tandis que l'on n'a pour ainsi dire pas augmenté celle des segments de l'autre puits.

J'ajouterai que M. Chaudron, dans le calcul de ses cuvelages circulaires, admet comme en parfaite sécurité les résultats de la formule

$$e = \frac{HD}{10} + 20$$

On aurait eu d'après cela :

1^o à l'épuisement $e = 54$ millimètres.

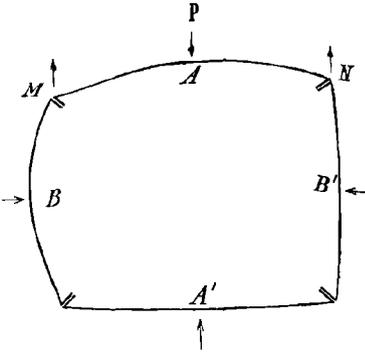
2^o à l'extraction $e = 43$ id.

Plusieurs ingénieurs trouvent que cette formule donne des dimensions exagérées ; mais, comme M. Chaudron, nous n'oserions conseiller de fortes réductions dans tous les cas, dans celui du Bâneux notamment.

6^o *Efforts auxquels doit résister un cuvelage arqué.* — Le plus généralement, un cuvelage arqué se compose, comme au Bâneux, de 4 arcs de cercle formant une figure symétrique. Dans ces conditions, la plupart des auteurs ont admis le principe suivant dont beaucoup d'ingénieurs font usage dans leurs projets. *Considérer chaque arc comme faisant partie d'un cylindre d'un rayon égal.*

C'est cette règle, je viens de le montrer, qui a été appliquée au Bâneux.

Sans conséquence funeste pour de fortes courbures et des charges d'eau peu importantes, l'application trop rigoureuse ou trop générale de ce principe est de nature à produire en certaines circonstances de graves accidents si l'on ne prend pas toutes les dispositions nécessaires pour prévenir la tendance à fléchir des pièces. Concevons, en effet, une section conduite normalement à l'axe d'un cuvelage arqué, composé de quatre tronçons d'une seule pièce A, A', B, B' pressés extérieurement d'une manière uniforme et réunis dans les angles par des collets boulonnés.



Un segment quelconque A subit, par son milieu, une charge P représentant la résultante des pressions qui s'exercent sur le périmètre extérieur. D'autre part, les panneaux B et B' , par la tendance qu'ils ont à se rapprocher du centre du puits sous l'action des pressions extérieures, auront pour effet d'écartier les extrémités N et

M du panneau A , dont le milieu peut être considéré comme immuablement fixe par suite de l'action prédominante de la charge P . En somme, un tronçon A est soumis à des efforts bien différents suivant qu'il est engagé dans un cuvelage arqué ou employé dans un revêtement complètement circulaire. Dans ce dernier cas la matière en l'un quelconque de ses points est soumise à l'action de deux forces qu'elle neutralise par la résistance à la compression, tandis que, dans celui là, un panneau A est sollicité par une force qui le presse en son milieu dans un sens, en même temps que d'autres forces le sollicitent en sens contraire par ses extrémités. Or, ce sont là les conditions qui réalisent le mieux les effets de la flexion. Pour résister à ces flexions ou pour les combattre dans la mesure du possible, il faut rendre les quatre angles de fixité invariable.

Je n'insisterai pas davantage sur ce point. Je considère comme établie, au moins théoriquement, la possibilité de la flexion des pièces dans un cuvelage arqué; ce phénomène dangereux, que l'on doit redouter, est d'autant plus à craindre que la courbure est faible, que la portée est forte et que la charge est considérable. Si, à cet égard, il pouvait exister le moindre doute, j'invoquerais les résultats de la théorie des déformations et de la résistance des arcs circulaires, sans l'exposer toutefois, puisqu'elle a été traitée d'une manière très détaillée surtout dans la résistance des matériaux de M. Bresse. Mais l'accident du Bancux ne me paraît non moins concluant que la théorie elle-même, et, dans tous les cas, il est bien fait pour convaincre l'esprit le plus prévenu ou le plus obstiné. Il suffira pour cela de rappeler ici les quelques faits suivants :

7° *Etat matériel des pièces du cuvelage du Bâneau après la rupture.*

— Comme je l'ai dit ci-avant, les pièces plus petites et plus résistantes du cuvelage du puits d'extraction où la courbure ne présente que 5 mètres de diamètre, où les épaisseurs du cuvelage ont été augmentées de 50 %, où l'ancien cuvelage en hêtre avait le mieux résisté et était conservé, ces pièces, ai-je dit, ont parfaitement supporté la charge de 35 mètres d'eau qui fut fatale aux segments des revêtements des puits d'épuisement et d'aérage.

Les dégradations relevées présentent les caractères généraux suivants :

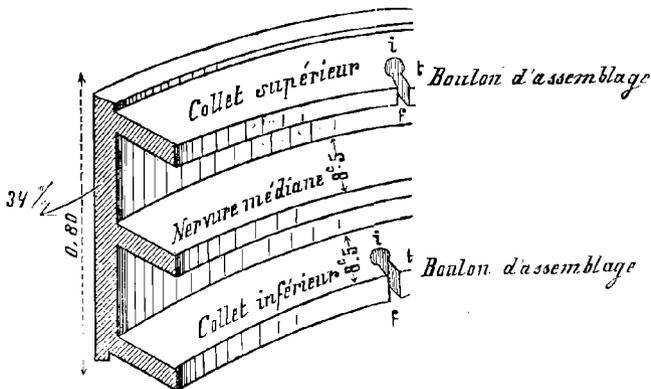
1° Les fissures se profilent verticalement dans le milieu des panneaux ; 2° elles vont en diminuant, au fur et à mesure que l'on s'élève ; 3° elles sont à peu de chose près, rigoureusement identiques sur les faces semblables ; 4° les parois de plus faible courbure de l'est et de l'ouest ont été les plus éprouvées.

Voici au surplus, les détails importants de cette rupture :

1° La trousse est intacte ; 2° il en est de même du premier tronçon, sauf cependant sur les parois du levant où une pièce est rompue ; 3° cinq tours complets sont fendus dans les collets, à la nervure et dans l'âme, sur les six parois. On trouve ensuite :

a.) Sur les parois de l'est et de l'ouest :

4° A partir du sixième tronçon, les fissures ne se voient plus qu'au milieu des collets et des nervures ; l'âme n'est plus atteinte. Cet état de choses se constate jusqu'au trente-et-unième tour, soit donc à la hauteur de 19 mètres au dessus de la trousse ; 5° dans les dix derniers tron-



çons supérieurs rompus, les collets seuls sont attaqués et sont fendus au boulon d'assemblage du milieu ; 6° enfin, dans les quelques panneaux fissurés qui terminent la partie endommagée, ces collets ne sont plus fendus sur toute leur largeur, ils ne le sont qu'en deçà du boulon, vers l'intérieur de la fosse; la fissure ne se propage pas entre ce boulon et l'âme de la pièce. Cette gradation dans les fissures de position invariable que l'on retrouve partout à l'endroit le plus menacé par la flexion, leur étendue relativement aux différentes parties constitutives des tronçons et surtout l'apparition tout à fait extérieure de fentes de 1 à 2 centimètres dans la largeur de collets de 8 1/2 centimètres, ne sont-ce pas autant d'indices indéniables, autant de témoignages irrécusables de la flexion évidente des pièces ?

A quel genre d'efforts peut donc avoir été soumis vers l'intérieur du puits, le premier centimètre par exemple du milieu des collets ?

Les angles des tronçons ont donc dû s'écarter en faisant fléchir la saillie des rebords et en produisant la rupture des tronçons en leurs milieux.

Le doute peut-il encore être permis ?

Ces conséquences qui certainement sont logiques, manquent-elles de lumière ?

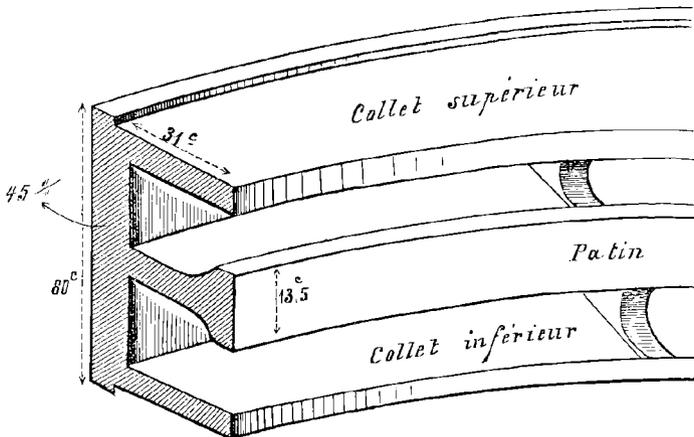
Si oui, les simples constatations suivantes feront sûrement éclater la vérité. On releva les dimensions des tronçons inférieurs les plus déformés et on trouva, dans leurs flèches, des réductions de 1 à 2 centimètres et dans leurs cordes, des allongements de 2 à 4 centimètres. Cela dit, je ne crois pas qu'il puisse y avoir deux opinions sur la cause de la rupture du cuvelage du Bancux, et si j'étais forcé d'en produire matériellement la preuve, il me suffirait de reconstruire, dans les mêmes conditions, le revêtement métallique qui vient de céder. Sa rupture serait chose infaillible.

b.) Les quatre parois du nord et du sud, dans les deux compartiments d'aérage et d'épuisement, sont dégradées sur douze tours successifs. Naturellement les fissures vont en s'aggravant avec la profondeur.

CONCLUSIONS. — De cet exposé, il résulte donc que, dans l'établissement des cuvelages arqués de grands diamètres, il convient de se défier du principe admis jusqu'aujourd'hui pour le calcul de l'épaisseur des pièces et en vertu duquel on les considère comme faisant partie d'un revêtement circulaire complet de même rayon. Il importe, au contraire, de forcer l'épaisseur et surtout de combattre la tendance que les

angles ont de s'écarter sous l'action des pressions extérieures. On fera chose utile en ne plaçant point au centre des pièces le boulon d'assemblage ; c'est là en effet que se trouve la section dangereuse à la flexion.

8° *Cuvelage nouveau du Bâneux.* — Par suite de circonstances particulières provenant de l'installation première et des dispositions spéciales de la matresse-tige et des pompes de l'appareil d'exhaure monté dans le puits, on n'aurait que très difficilement pu prendre les mesures propres à établir la fixité voulue des angles au moyen d'armatures *ad hoc*. Après de longues études très judicieusement conduites par l'Ingénieur du Bâneux, on s'est décidé à remplacer les pièces rompues par d'autres de dimensions plus fortes et à consolider les tronçons supérieurs non endommagés au moyen de cadres en fonte. Les tronçons nouveaux ont, sur les parois les plus exposées, 45 millimètres d'épaisseur, les collets et nervures consistent en segments circulaires complets de même épaisseur et réunissant les deux extrémités des pièces. Vers le milieu donc, leur largeur est de 31 centimètres. La nervure moyenne est munie d'un patin de 13 1/2 centimètres de hauteur. Enfin les parois du nord et du midi sont les mêmes, seulement ce dernier appendice n'existe pas et l'épaisseur y est réduite à 40 millimètres.



On se fera immédiatement une idée de la différence existant entre les deux revêtements en supputant la différence de poids entre deux tronçons inférieurs et correspondants de l'ancien et du nouveau cuvelage.

Les premiers segments qui pesaient 600 kilogs, ont été remplacés par d'autres qui en comptent 1,030 kilogs.

Je terminerai par deux considérations générales cet exposé déjà trop long.

9° *Réception des pièces de cuvelage.* — Au Bâneux on a reçu les pièces du cuvelage en vérifiant simplement les épaisseurs des tronçons et en s'assurant, par le choc d'un corps dur, des qualités de la fonte employée.

C'est de cette façon que l'on procède toujours pour des tronçons arqués. Ni en France ni en Angleterre, on ne soumet à une épreuve préalable des segments non circulaires. Je ne pense pas d'ailleurs qu'un essai, pour des tronçons arqués, serait de quelque utilité. En admettant en effet que l'on eût d'abord fait l'impossible pour inventer un appareil ou une disposition permettant d'effectuer cette opération, les résultats de l'expérience seraient encore très discutables, vu la différence qu'il y aurait dans la façon de résister des pièces à l'épreuve et dans la mine, dont on ne pourra jamais réaliser artificiellement les conditions de pression.

Prescrire, comme on l'a fait au Bâneux, un essai semblable qui ne se pratique nulle part, c'est écarter bon nombre de constructeurs qui jugent impossible de se soumettre à une opération semblable. Je me hâte d'ajouter que cet essai préalable, bien que stipulé d'abord, n'a pas été fait parce qu'il n'aurait pu l'être. J'ajouterai un détail omis jusque maintenant, à savoir que la fonte des tronçons rompus était d'un aspect parfait dans la cassure et qu'il ne peut y avoir de doute sur les qualités de la matière employée.

10° *De la position des nervures de consolidation.* — A mon avis il conviendrait pour donner plus de rigidité aux pièces de la cuve, à égalité de poids, de disposer des nervures à l'extérieur du cuvelage, contre le terrain. Cette disposition, sans avoir une importance outrée dans les cas ordinaires, pourrait être très utile en d'autres circonstances où l'on doit compter avec la charge d'eau et faire état de la faible courbure des pièces.

Dans le cas du Bâneux, par exemple, les collets et nervures ont eu à souffrir de l'extension et ont cédé. Or, en les plaçant d'une manière inverse, la grande résistance de la fonte à la compression aurait certainement donné aux tronçons une rigidité qui leur faisait défaut et elle n'aurait point permis des déformations aussi sensibles que celles

qui se sont produites. Je crois me rappeler que des expériences directes ont été entreprises dans cet ordre d'idées et qu'il en est résulté que, pour produire la rupture suivant que les nervures sont externes ou internes, les charges se sont trouvées être dans le rapport 4, 5 à 4. J'ajouterai, pour répondre à l'avance à l'objection stéréotypée : « Cela n'est pas pratique » que cette disposition des collets et des nervures extérieures a été appliquée et exécutée.

Liège, Décembre, 1880.

DU DÉFAUT DE SÉCURITÉ DES BOURROIRS MÉTALLIQUES DANS LE TIRAGE A LA POWDRE, PAR M. PHILIPPE BANNEUX, INGÉNIEUR AU CORPS DES MINES.

Parmi les dangers sans nombre qui à tout instant menacent l'existence de nos ouvriers mineurs, il en est un sur la cause duquel on n'a guère spéculé, bien cependant que les effets en soient partout et toujours invariablement désastreux.

Il s'agit ici de ces mines en préparation qui éclatent, on ne sait comment, et pour ainsi dire entre les mains des ouvriers occupés au chargement. Le plus souvent ces derniers paient de leur vie une imprudence qu'ils n'ont jamais soupçonnée. L'exploitation entière elle-même court le risque d'une inflammation ou d'une explosion de grisou qu'une détonation prématurée peut occasionner.

Deux accidents de ce genre, très rares heureusement, viennent de frapper, à quelques jours de distance, deux charbonnages du bassin de Liège. Le premier, qui survint dans une mine de Seraing, coûta la vie à un ouvrier et des blessures mortelles à un autre mineur. Le second, que nous avons eu plus spécialement à instruire, se produisit à Liège dans les travaux de la houillère de Gérard-Cloes; il eut pour conséquence de blesser moins grièvement trois ouvriers du poste de nuit.

En portant cet accident à la connaissance de l'Administration, la Direction de ce charbonnage en attribuait la cause à la mise à feu, pendant le bourrage, d'une mine en chargement. Nous étions, il faut l'avouer, peu disposé à admettre cette explication difficile et très enclin à y voir l'effet naturel de cette imprévoyance fatale qui pousse le plus grand nombre de nos ouvriers mineurs à retourner trop hâtivement sur un *raté* qu'ils ne savent se résoudre à condamner. L'enquête minutieuse, faite dans le but d'éclairer la cause réelle de l'accident, confirma en tout point l'opinion du Directeur du charbonnage. La mine dont il est question s'est non seulement déchargée pendant le bourrage, mais encore son inflammation a été provoquée par cette opération.

Nous avons recueilli, à cet égard, les déclarations les plus formelles qu'aucun fait révélé par l'enquête n'a pu amoindrir.

Dans la nuit du 1^{er} au 2 février dernier, vers minuit, les deux bosseurs de la voie de niveau de la couche n° 8 de l'étage de 207 mètres, au midi du puits, chargeaient un fourneau de mine à peu près vertical, profond de 0^m,85 et dans lequel ils venaient d'introduire deux cartouches de 0^m,25 environ et, au dessus, la première bourre d'argile.

Le terrain dans lequel se frayait la voie de roulage, bien que résistant, n'avait cependant que la consistance ordinaire d'un bon mur. « L'introduction de la première *crompire* (1), déclare le bourreur que nous avons interrogé à l'hôpital de Bavière, offrant beaucoup de difficultés, j'imprimai un violent choc à l'outil, pour en avoir raison, et instantanément la mine se déchargea ». Un remblayeur, qui au même moment descendait la taille pour se garer, a vu ce bosseur bourrant la mine à l'instant de l'explosion; il a même reçu, d'un éclat de pierre, une très légère blessure au pied droit, qui l'a tenu éloigné des travaux pendant quelques jours.

Inutile d'ajouter, les bosseurs étant en vie, que cet accident d'une mine qui éclate par le bourrage a toujours des suites plus regrettables que les conséquences du coup de mine de Gérard-Cloes. Il importe donc d'examiner de très près et de rechercher quelle peut-être la cause efficiente de ce phénomène redoutable qui n'a pas suffisamment fixé l'attention et que l'on s'est toujours borné à signaler trop superficiellement.

J'ai eu à constater de semblables coups de feu dans le Hainaut et, si mes souvenirs sont fidèles, il est arrivé dans une mine du Borinage que le bourreur fut tué par le bourroir même projeté du fourneau et dont l'extrémité lui enleva la partie supérieure du crâne.

L'accident en lui-même, quant à la façon de se produire, est donc hors de doute.

Cela établi, examinons quelle peut en être la cause déterminante.

Il n'est pas possible d'expliquer l'explosion de la mine dans les conditions de travail où s'opère le bourrage, autrement qu'en admettant :

1° Ou bien qu'une étincelle jaillit dans ce fourneau et communique le feu à la cartouche ;

2° Ou bien que la compression brusque de l'air, à un coup donné du bourroir, produit un échauffement suffisant pour enflammer la poudre.

(1) Expression par laquelle le mineur liégeois désigne les pelotes d'argile grasse dont il forme son bourrage.

PREMIÈRE HYPOTHÈSE.

L'étincelle, en admettant gratuitement qu'il puisse en éclater pendant le bourrage, peut communiquer le feu soit à la mèche détériorée, soit à des fragments de la poudre répandue sur les parois du fourneau, soit enfin au grisou qui s'épanche ou séjourne dans le trou de mine.

Si, pour justifier la possibilité de l'inflammation, l'intervention de la mèche est nécessaire, l'emploi de l'épinglette serait un préservatif très sûr contre toute chance d'accident de l'espèce. Or, les exemples du Hainaut, où ces explosions intempestives ne sont ni plus ni moins rares que dans les autres bassins, et cela en dépit de l'épinglette, enlèvent toute valeur à une supposition semblable. La mèche et l'épinglette paraissent donc être sans influence appréciable sur la cause de l'inflammation.

Si on devait attribuer la déflagration à la poudre tapissant les parois du trou, le phénomène se constaterait-il dans le cas où la cartouche est introduite avec sa gaine, comme cela se pratique à Gérard-Cloës? Que dire aussi du dernier accident de Seraing, où l'on faisait usage de poudre comprimée?

Quant à l'existence de grisou, si elle n'était problématique à Gérard-Cloës, il faudrait, au préalable, démontrer la possibilité d'allumer ce gaz par ignition. Tout porte à croire d'ailleurs que l'on a dû voir se produire de ces accidents dans des mines absolument exemptes d'émanations inflammables.

Quoi qu'il en soit de l'influence très discutable ou de la mèche, ou de l'épinglette, ou de la poudre égarée dans le fourneau, ou enfin de la composition éventuelle de l'atmosphère du trou de mine, elle reste subordonnée tout entière au dégagement de l'étincelle, phénomène plus difficile encore à s'expliquer que ceux qui en dérivent. Que l'on confie, en effet, le bourroir ordinaire au plus expert des ouvriers à pierre et qu'on l'invite à tirer, par le choc du bout de cuivre, une étincelle du grès le plus dur, voire même d'un fragment de silex, dans les meilleures conditions de frappe, et il est certain qu'il s'épuisera en vains efforts, sans approcher du but voulu.

Comment, dès lors, incriminer l'étincelle invisible qu'un bourroir à embout de cuivre est incapable de fournir dans les circonstances les plus favorables? Ajoutons enfin que d'aucuns assignent, comme origine

du mal, le calorique engendré par le frottement contre les parois du trou de mine des poussières dures entraînées par le bourroir. Ce motif, si parfois il est plausible, ne saurait être invoqué dans le plus grand nombre des cas et notamment pour ce qui regarde les creusements pratiqués dans le houiller. On n'ignore pas que les détonations inattendues dont nous nous occupons se manifestent dans les terrains de toute nature, dans les roches les plus tendres aussi bien que dans les stratifications les plus résistantes.

Il ne saurait donc se dégager de cette analyse sommaire une raison décisive ou ayant quelque valeur pour permettre de trancher la question. On est bien plutôt en droit de conclure que l'explication vraie du phénomène doit jaillir d'un autre ordre d'idées.

SECONDE HYPOTHESE.

Le bourroir peut-il, dans certaines conditions réalisables pendant le travail à la pierre, soumettre l'air confiné dans le trou de mine, en tout ou en partie, à un travail de compression capable d'enflammer la poudre?

Certes, cette question n'a rien d'insolite. On réalise tous les jours dans les cours de physique une expérience devenue classique, démontrant qu'il suffit d'un choc relativement faible, imprimé au piston du briquet pneumatique, pour allumer un morceau d'amadou dont la température d'inflammation est pourtant de 300 degrés. Lamé, qui s'est occupé de cette expérience, assure qu'il est nécessaire, pour amener la combustion de cet amadou, de réduire la masse d'air au cinquième de son volume (1). Et effectivement, le calcul montre que pour une réduction semblable du volume primitif, la température engendrée est de 298 degrés (2). Ne suffit-il pas d'ailleurs de comprimer brusquement un mélange d'oxygène et d'hydrogène pour le réduire en eau, comme si l'on avait recouru soit à l'inflammation directe, soit à l'électricité?

Dans le but d'apprécier l'influence de la percussion, représentons par p le poids de l'air sur lequel s'exerce la compression et par T le travail transformé en chaleur.

(1) Lamé. *Physique*, édition de 1836, page 274.

(2) Voir *Annales des Travaux publics, Emploi de l'air comprimé*, tome XXXIV, page 106.

$c = 0,1686$ étant le calorique spécifique de l'air sous volume constant.

$$E = \frac{1}{424}$$

étant l'équivalent calorifique du kilogrammètre, x l'échauffement de cette masse d'air, résultant de la compression, on aura l'équation :

$$p. c. x = E. T$$

Attendu que la variation de chaleur interne d'un gaz qui passe d'un état à un autre, ne dépend que de la température finale et qu'elle est mesurée par le produit de la chaleur spécifique sous volume constant, par la variation totale de la température (1).

Par conséquent,

$$x = \frac{E. T}{p. c}$$

Si v est le volume de l'air en question, exprimé en centimètres cubes, on aura, le poids du mètre cube d'air étant sous la pression et à la température ordinaires, $1^k,3$:

$$p = \frac{1,3 \times v}{1.000.000} = 0,0000013 v$$

Par suite,

$$x = \frac{1}{424 \times 0,0000013 \times 0,1686} \cdot \frac{T}{v}$$

C'est-à-dire, réduction faite,

$$x = 10,761 \frac{T}{v}$$

Toutes choses égales, l'échauffement occasionné est proportionnel au travail transformé en calorique et en raison inverse du volume subissant la compression.

Or, un bourroir ordinaire de $1^m,10$ de longueur sur $0^m,025$ de diamètre, pèse environ 4 kilogrammes. Tombant librement de $0^m,50$ de hauteur, il emmagasine une force vive exprimée, en kilogrammètres, par le produit :

$$P \times h = 4 \text{ kilog.} \times 0,50 = 2 \text{ kilog.}$$

Si la moitié seulement se convertit en chaleur sensible, on aura

(1) Voir *Annales des Travaux publics. Emploi de l'air comprimé*, tome XXXIV, page 335.

$T' = 4$ et, par suite, pour une masse d'air d'un volume $v = 20^{\text{e}3}$, qui nous paraît très forte, vu que l'effet du choc peut se porter en entier sur une fraction seulement de l'air du trou de mine, on aura un échauffement :

$$x = 10761 \times \frac{1}{20} = 538^{\circ}$$

Si le bourroir tombait seulement de $0^{\text{m}},25$ de hauteur, on aurait, les conditions de transmission de la compression brusque restant les mêmes :

$$T' = \frac{1}{2} \text{ et par suite } x = 269^{\circ}$$

Il est bien entendu qu'à ces températures on devra ajouter celle que l'air possédait dans son état initial.

Que l'on rapproche maintenant ces résultats de la température d'inflammation de la poudre de mine qui est en moyenne de 270 degrés!

Serait-il téméraire, d'après cela, de conclure que la compression provenant du battage énergique d'une mine peut avoir pour conséquence d'allumer la poudre? La cause de ces accidents, dont on déplore les suites de temps à autre, et qui surprennent les ouvriers lors de la confection du bourrage, ne peut-elle découler de l'échauffement de l'air sous-jacent résultant de la compression brusque? Le doute ne nous paraît guère possible.

S'il en est ainsi, le danger de l'inflammation proviendrait, d'une part, de l'impulsion que l'ouvrier communique au bourroir, et, d'autre part, de la masse même de cet outil. Mais, dans l'occurrence, c'est surtout par son poids, nous semble-t-il, que le bourroir doit agir, à moins, bien entendu, que l'ouvrier ne se serve d'un bélier quelconque pour en frapper l'extrémité. Cette manœuvre éminemment dangereuse n'est pas toujours dédaignée par tous les mineurs qui y voient un moyen commode et rapide de vaincre certains obstacles sans avoir conscience du danger qu'ils décuplent.

En dehors de cette insigne maladresse que l'on ne saurait assez proscrire, les accidents du genre de celui qui nous occupe doivent surtout se constater pour des trous de mine verticaux ou faiblement inclinés, car c'est alors que la puissance de l'outil est maxima. Et effectivement, à ma connaissance du moins, et si l'on écarte le cas relevé dernièrement à Seraing, ces déflagrations inopinées se remarquent-elles lorsque les fourneaux sont droits ou à peu près et battus de haut en bas. On

pourrait très aisément élucider ce point en groupant les souvenirs des Ingénieurs de l'Administration qui ont eu à instruire de semblables accidents. Il serait possible également de tenter des expériences directes dans le but de faire ressortir le danger de la compression instantanée et auquel il convient de soustraire, sans plus tarder, le personnel de nos houillères.

Quoi qu'il en soit, nous estimons que l'usage du bourroir lourd constitue une menace réelle et permanente que l'expérience n'a que trop mise en évidence. On éviterait assurément les accidents dont il s'agit en recourant au bourroir en bois plus léger qui, d'ailleurs, a été employé dans certains charbonnages à la suite de catastrophes que l'on ne voulait voir se renouveler à aucun prix. J'ajouterai, pour me borner à un seul exemple, que dans ce charbonnage des environs de Mons auquel nous avons fait allusion ci-dessus, l'accident du bourroir qui trancha l'existence de l'un des bosseyeurs fut la cause d'une terreur salutaire qui empoigna toute la population du fond. A partir de ce moment, les ouvriers se refusèrent énergiquement à employer le bourroir métallique auquel on dut substituer, de par le *Vox populi*, le bourroir en bois qui procure une sécurité plus franche. Car la puissance du bourroir devant être à peu de chose près proportionnelle à son poids, elle se trouvera de 7 à 8 fois moindre pour l'appareil en bois et il en sera de même, au moins, pour le travail transformé en calorique par le fait de la compression ainsi que pour l'échauffement possible de l'air. L'étincelle, elle-même, ce *Deus ex machina* de tant d'Ingénieurs, serait rendue impossible avec un outil de cette nature. Peut-être, lors du battage, les coups se succéderaient-ils plus rapidement, mais la température ne saurait atteindre cette limite critique que nous avons vu être franchie ci-avant.

Tout au moins, si la solution radicale que nous préconisons et pour laquelle nous formons tous nos vœux, devait effrayer, conviendrait-il de faire mettre à la disposition des bosseyeurs un bourroir en bois et de leur en recommander l'usage pour introduire la première bourre, la plus dangereuse à placer. Nous ne saurions croire qu'une semblable réforme des habitudes du houilleur, si utile et si anodine, se heurterait, dans la pratique, à une opposition bien vive. Dans l'état actuel des choses, on prend, pour éviter le danger pouvant résulter d'une étincelle énigmatique, toutes les précautions afin de purger, au préalable, des fragments de silex et de quartz qu'elle pourrait contenir, l'argile

servant comme bourrage et, en même temps, on remet aux bosseyeurs le bourroir métallique qui peut provoquer la mise à feu indépendamment de la bourre.

D'autre part, l'Administration des mines qui prescrit aux exploitants, par ses règlements, d'inspecter d'abord, avant le tirage à la poudre, l'atmosphère *ambiante*, et par ses circulaires *non* seulement les environs immédiats, mais encore les alentours du point où l'explosion doit se produire, ne saurait, à mon sens, tolérer le bourroir actuel qui peut amener cette explosion à un moment où l'on n'a pu se renseigner sur la pureté de l'air et alors que le personnel, non averti, est le plus exposé aux terribles effets de l'inflammation du grisou et de toutes ses conséquences.

Liège, mars 1883.

EXPLOSION D'UNE CHAUDIÈRE A VAPEUR, SURVENUE
LA NUIT DU 5 AU 6 MARS 1886, DANS L'ÉTABLIS-
SEMENT INDUSTRIEL DES FRÈRES O., A HERSTAL.
— RAPPORTS ET DOCUMENTS.

I. — Rapport de M. l'Ingénieur des Mines Banneux.

1. Etat des lieux et conditions de la chaudière avant l'explosion. — L'établissement se compose d'une maison d'habitation derrière laquelle s'étend, à front de la rue du Chou, un atelier mesurant près de 20 mètres de longueur, 7 mètres de largeur et 4 mètres de hauteur. Cet atelier, couvert en panons, est orienté, suivant sa plus grande dimension, du sud-est au nord-ouest (voir le plan de l'immeuble fig. 4, et le plan de la localité fig. 4 à la planche). Contre le pignon du nord-ouest se trouvait la machine à vapeur et, de l'autre côté, sous un appentis, la chaudière qui vient de sauter.

Dans l'atelier, parallèlement à la rue du Chou, le long de la façade donnant sur cette rue, était installé un banc à huit tours. A l'opposé se trouvaient la pompe à eau froide, deux tours, cinq étaux.

Vers le centre étaient montés quatre tours, une machine à forer et deux autres tours, dans un même alignement. Cinq tours adjacents et une machine à étirer vers le nord-ouest, enfin un tour isolé vers la porte d'entrée.

Entre l'atelier et la maison d'habitation il y avait encore un cabinet servant de bureau.

Près de la porte extrême, donnant accès au générateur, on avait disposé, contre la façade du nord-est, un réservoir à eau froide en tôle de fer. Dans ce réservoir la pompe du puits déversait l'eau d'alimentation.

Sur le massif de la chaudière était établie la bêche à eau chaude (serpentin), dans laquelle la pompe alimentaire, mue par la machine, foulait l'eau qui s'échauffait au contact de la décharge avant son introduction dans le générateur.

Au delà de l'appareil à vapeur, le jardin, dépendant de l'immeuble, se poursuit sur 30 mètres environ de longueur.

Toute cette propriété était séparée de celles des voisins et de la rue du Chou au moyen de haies vives.

Tel qu'il vient d'être décrit, cet atelier abritait de 25 à 30 ouvriers, y compris les propriétaires. D'ordinaire la journée commençait à 6 heures du matin et se terminait à 7 1/2 heures du soir, soit donc, abstraction faite des repos, douze heures de travail effectif.

Le combustible employé pour le chauffage provenait des couches Raignou et Maret, de Gérard Cloes. On faisait donc usage d'un très fort charbon. Au moment de la cessation du travail à l'atelier, on nettoyait le feu en le dépouillant de ce qui restait de combustible utilisable sur la grille et on chargeait cette dernière d'une couche de 10 centimètres de matières à peu près inertes, composées de cendres, pour les deux tiers, et, pour le restant, de schlamms, provenant des résidus de laverie de la Bonne-Espérance. Ces résidus se vendent à 1 franc la tonne et ne constituent pas une matière bien combustible. La base de la cheminée était d'abord fermée par une glissière horizontale que l'on manœuvrait sur la devanture du générateur par l'intermédiaire d'une tige fixée, pendant la nuit, au moyen d'un cadenas, afin de se mettre à l'abri de la malveillance. La suppression du tirage se faisait nécessairement avant le nettoyage de la grille et le chargement des cendres. Le plus souvent cette opération était effectuée par l'un des propriétaires ou le chef d'atelier, assisté de l'aide-chauffeur. Enfin on ne touchait pas aux soupapes, ou plutôt aux contrepoids, que l'on pourrait prudemment reculer vers le centre des leviers pour passer la nuit. Inutile d'ajouter qu'on alimentait en cet instant. Le niveau de l'eau était amené au milieu du tube indicateur et généralement, quand on quittait la chaudière, sur la soirée, la pression marquait 2 1/2 atmosphères.

En marche courante on avait 3 atmosphères, 3 1/4, plus rarement 3 1/2, parce que la chaudière avait beaucoup de mal à fournir une pression plus forte, bien qu'elle fût timbrée à 4 atmosphères. Lorsque l'on approchait de ce chiffre, les pertes par les soupapes, les joints, le sifflet, le tube et même par certaines rivures, au dire de l'un des pro-

priétaires, étaient tellement abondantes qu'il n'y avait pas moyen de les combattre et de les compenser par l'ardeur du feu. Il y a à cet égard un témoignage unanime de tous ceux qui ont eu à se servir à un titre quelconque de l'appareil en question. Il n'était pas rare, dans l'atelier, faute de fluide à pression suffisante, de voir suspendre le travail à vapeur. A la reprise du feu, à 6 heures du matin, on constatait dans le tube 0^m,01 d'eau au dessus de la bague inférieure de l'indicateur en verre, c'est-à-dire à 0^m,09 au dessus du centre et du ciel de l'unique carneau qui régnait dans le prolongement du foyer.

La chaudière, horizontale simple, à bouts légèrement bombés, comprenait trois viroles, composées chacune de deux tôles de 4^m,20 de largeur et de 4^m,50 de longueur, cintrées suivant leur plus grande dimension, de façon à constituer un corps cylindrique de 0^m,925 de diamètre intérieur.

Ces trois viroles étaient réunies par l'assemblage dit « télescopique », c'est-à-dire que la première emboîtait la moyenne et que celle-ci enveloppait le tour d'arrière. Les saillies des joints circulaires, comme il convient d'ailleurs, étaient donc opposées au foyer. Toutes les rivures étaient simples. Enfin, le dôme cylindrique, monté sur l'arrière, mesurait un diamètre de 0^m,35 et une hauteur de 0^m,43. Les épaisseurs des tôles variaient de 0^m,008 à 0^m,009. Par place, cette dimension descendait à 0^m,006, par suite de corrosions locales peu étendues du reste. Ce générateur mesurait donc une longueur de 3^m,60; son diamètre extérieur était de 0^m,94 et, par suite, son volume 2^m³,500, non compris le dôme, qui cubait 0^m³,043, soit un volume total de 2^m³,543.

La surface de chauffe, entièrement directe pour ainsi dire, était de 6 mètres carrés, en tenant compte de la moitié de la surface du fond terminal qui donnait dans la cheminée.

Le foyer mesurait 0^m,70 de largeur sur 0^m,80 de profondeur. La grille était à 0^m,50 du coup de feu.

Le réservoir à eau froide, qui était cylindrique, comprenait 2^m,60 de longueur et 0^m,60 de diamètre, soit un volume de 0^m³,735.

Quant à la machine, elle était verticale, à pleine pression, sans condensation; mesurant au piston 0^m,47 de diamètre pour une course de 0^m,44, elle donnait en marche normale 60 à 70 coups doubles par minute, ce qui répond à un travail nominal moyen de 6 à 7 chevaux-vapeur.

La dépense en charbon se chiffrait par 2,000 kilogrammes par

semaine, c'est-à-dire pour septante heures de travail, soit donc une consommation de 28 kilogrammes par heure, ou de 4 à 5 kilogrammes par cheval et par heure, ce qui n'a rien d'anormal pour des installations du genre de celle dont il s'agit.

Suivant les déclarations recueillies, on dépensait en eau de trois à quatre fois le réservoir, soit donc 2,600 kilogrammes environ, ou 217 kilogrammes par heure, ou encore, 33 kilogrammes par cheval et par heure.

Ces résultats, dans un appareil bien entretenu, bien conduit, bien installé, pourraient tomber de près de la moitié; leur exagération est en rapport avec les très nombreuses fuites de la chaudière et corrobore les dires de tous les ouvriers de la rue du Chou. Le fourneau, en effet, est dans de bonnes conditions. On produit en définitive 7 à 8 kilogrammes de vapeur par kilogramme de charbon et, malgré cela, on manque très souvent de vapeur au cylindre, bien que les chambres de vapeur et d'eau ne soient pas trop réduites, puisque, en allure normale, on compte 1,000 litres de vapeur et plus de 1,500 litres d'eau.

Cette chaudière était munie de tous les appareils de sûreté, c'est-à-dire d'un indicateur en verre, d'un flotteur ordinaire, d'un sifflet d'alarme et même d'un boulon fusible. Les soupapes de sûreté, au nombre de deux, mesuraient chacune 0^m,041 de diamètre et présentaient, par suite, une surface de 0^{m²},00132.

Ce diamètre est supérieur au minimum imposé par les règlements qui, dans l'espèce, serait de 0^m,030 seulement.

Sous l'empire du règlement du 28 mai 1884, en application des circulaires ministérielles les plus récentes, le générateur susdit aurait pu être autorisé à fonctionner à la pression maxima de 4 3/8 atmosphères. On aurait admis une résistance de 26 kilogrammes par millimètre carré, de sorte que l'on aurait eu, pour valeur de la pression maxima par millimètre carré :

$$p = \frac{8 \times 2.6}{462} = 0.045 \text{ ou } 4^{\text{k}},5 \text{ par centimètre carré.}$$

soit donc

$$\frac{4.5}{1.03} = 4^{\text{st}},37.$$

Cette chaudière doit être ancienne. Sous la date du 41 juillet 1874 la mise en usage en fut autorisée dans un atelier rue Bonne-Nouvelle, à Liège. Un essai à l'eau froide fut effectué le 20 avril de la même année.

A cette époque l'appareil avait déjà fonctionné. Il est probable même qu'à l'origine, il était muni d'un tube chauffeur, comme paraît l'indiquer un ancien orifice, aujourd'hui rebouché, directement dans l'aplomb du dôme et présentant les mêmes dimensions que la section de ce dernier. Les propriétaires ont acquis le générateur dans le courant de 1882. J'en ai fait l'essai hydraulique sur place à la pression de huit atmosphères, le 3 septembre de cette année.

Lors de ma visite annuelle en 1883, la chaudière était inactive. L'année suivante, le 29 décembre, j'ai trouvé les soupapes fortement surchargées. A cette occasion j'ai menacé le propriétaire d'un procès-verbal, et lorsque je le visitai à nouveau, le 2 décembre 1885, l'un des propriétaires me fit observer que sa chaudière ne pouvait tenir ses vapeurs. Les soupapes donnaient pour ainsi dire constamment à partir de 3 atmosphères ; il était très difficile d'assurer l'exécution d'un travail régulier un peu plus important qu'à l'ordinaire. Je rappelai au propriétaire ou que ses soupapes laissaient à désirer, ou que les contrepoids appliqués étaient trop faibles. Je l'engageai à faire ces vérifications après une mise hors feu et à me prévenir du résultat. Or, cette vérification vient de se faire à propos de l'explosion. Les contrepoids employés étaient conformes à ceux qui sont indiqués dans l'arrêté de mise en usage, c'est-à-dire à 8^k,644. Les soupapes, depuis longtemps abandonnées à elles-mêmes, étaient loin de produire une fermeture complète, c'était, d'ailleurs, au su de tous, l'un des points faibles de la chaudière. A en croire le propriétaire on devait remédier à la situation intolérable que créait ce défaut de fermeture qui n'était préjudiciable qu'à lui-même, au cours du chômage ordinaire du carnaval, quelques jours donc après le moment de l'accident.

Depuis mes observations de 1884, on n'avait plus surchargé les leviers des soupapes. Ces leviers étaient complètement libres, en ce sens qu'ils pouvaient se déplacer dans un plan vertical sans être gênés par l'obstacle ordinairement occasionné par les œilletons métalliques qui les entourent. Ces appendices n'existaient pas au générateur.

Le calage proprement dit des soupapes y était donc chose peu commune. On ne pouvait que les surcharger et, je le répète, suivant toutes les déclarations et malgré les pertes fréquentes et importantes du fluide moteur on ne recourait plus à cette dangereuse précaution.

Lors de ma visite du 2 décembre dernier, on n'avait pas encore appliqué le clapet de retenue prescrit par le nouveau règlement, ni

tracé l'index sur la devanture de la chaudière. L'un des propriétaires déclara qu'il attendait de ma part des instructions précises pour satisfaire à ces obligations. Je les lui donnai et, peu de jours après, l'appareil se trouvait en ordre.

Le 27 décembre, en exécution de l'art. 54 du règlement, un chaudronnier, ouvrier occupé et désigné par un constructeur de Herstal pour la visite réglementaire des chaudières, fit deux visites successives de l'intérieur de l'appareil et il en sonda toutes les parties au marteau. Il en fit rapport à son chef, qui, sous la date du 29 du même mois, délivra un certificat constatant qu'il avait été procédé à cette opération et que la chaudière paraissait en bon état. Le visiteur, que j'ai interrogé, n'a eu à relever qu'une légère fissure intérieure dans la pince de la tôle moyenne, vers le foyer, en regard d'un rivet. Cette fissure, à son avis, ne pouvait présenter de danger pour la sécurité.

Dans l'enquête que j'ai faite sur les lieux, j'ai interrogé tous les ouvriers des frères O., tous les voisins, en un mot toutes les personnes qui m'ont paru pouvoir éclairer la recherche de la cause de l'explosion.

II. *Explosion du générateur.* — Le vendredi 5 mars, le travail finissait à 7 1/2 heures. Comme d'habitude l'aide chauffeur et l'un des patrons chargèrent le feu, alimentèrent le générateur et fermèrent complètement la glissière réglant le tirage.

On cadenassa la tige au moyen de laquelle on manœuvre le registre alors que les derniers ouvriers se retiraient.

Le chef d'atelier, avant de prendre congé de son patron, lui demanda s'il était nécessaire d'aller inspecter le générateur. Sur la réponse négative qui lui fut faite, il se retira. Le patron lui déclara qu'il y avait veillé et que tout était en ordre. En ce moment donc, l'eau tenait son niveau au milieu du tube en verre et le manomètre marquait 2 1/2 atmosphères. Tous les témoins ont déclaré que ces précautions se prenaient chaque jour, mais, seuls, un ouvrier et l'un des propriétaires ont pu affirmer que le registre avait été fermé le 5 mars. Aucun ouvrier ne se rappelle avoir constaté la chose le jour de l'explosion.

Vers 10 1/2 heures, avant de se coucher, le patron fit sa dernière tournée dans l'atelier et à la chaudière. Il ne constata rien d'irrégulier. La pression marquait 4^{at}, 7; le niveau dans le tube était à 4 centimètres au dessus de la bague inférieure de la garniture de l'indicateur. Les vapeurs donnaient par les joints comme à l'ordinaire. Enfin il vérifia la fermeture du registre. Cette inspection terminée, il se coucha.

Vers 11 heures 45 minutes, à peine endormi, il fut réveillé par un bruit formidable dont il ne devina tout d'abord ni l'origine, ni la cause. Il sauta du lit néanmoins, passa un vêtement à la hâte et se précipita dans la rue du Tige, par la porte principale de l'habitation. L'un de ses voisins, S., effrayé aussi par la détonation qu'il soupçonnait être venue de l'atelier, ouvrait sa fenêtre. Il interpella O. en lui disant que ce bruit ne pouvait provenir que de son établissement. O. répondit qu'il sortait de son atelier et qu'il était complètement rassuré sur ce point. Mais le doute ne dura que quelques secondes. Descendu dans la rue, l'instituteur S. accompagné d'O., se disposait à examiner les environs. Ils constatèrent immédiatement l'explosion du générateur et l'écroulement de la partie extrême de l'atelier. Ce témoin S., le premier qui se soit rendu compte du désastre, m'a fait la déclaration suivante :

Rentré à 11 1/2 heures, il se rendit dans son jardin, qui s'étend rue du Chou, vis-à-vis de l'atelier O., à quelques mètres du générateur. Il y resta plusieurs minutes, le temps de satisfaire un besoin naturel. Il a affirmé n'avoir entendu ni bruit, ni fuite de vapeur, rien qui pût faire soupçonner même le voisinage d'une chaudière. Il rentra et se disposait à se mettre au lit lorsqu'il fut saisi par le bruit de la détonation qu'il lui sembla venir de l'atelier O.

III. *Etat des lieux et conditions de la chaudière après l'explosion.* — Grâce à la disposition des immeubles environnants, grâce aussi à l'heure à laquelle survint l'explosion, on n'a eu à déplorer que des dégâts matériels, tous à la charge des frères O., qui ne sont couverts par aucune société d'assurances et dont la ruine est à peu près complète.

Dans le plan fig. 2 j'ai reconstitué la chaudière au moyen de ses différentes parties séparées. J'y ai indiqué les déchirures en supposant rabattues, dans le plan horizontal de la génératrice supérieure xy , les parois du générateur supposé coupé suivant la génératrice inférieure AB .

Dans la fig. 3, je figure la virole du milieu telle que je l'ai trouvée sur place, ouverte d'abord suivant les déchirures aboutissant au trou d'homme et repliée latéralement.

Dans le plan fig. 4, j'ai représenté les environs de la propriété O., ainsi que les emplacements des fragments projetés de la chaudière, de la machine, de leurs accessoires, etc.

Des trois viroles composant le corps de la chaudière, l'une d'elles,

celle du milieu, s'est ouverte et étalée sur place. Elle comprend la tôle inférieure MN en entier, sauf la partie détachée suivant la rivure de droite, conservée sur la virole d'arrière. La tôle supérieure s'est déchirée en quatre parties : la fraction M' de gauche et celle N' de droite rivées l'une et l'autre à la tôle inférieure.

Dans cette tôle était découpé le trou d'homme T , à la circonférence duquel aboutissent les quatre déchirures. Un morceau R d'arrière est resté rivé à la troisième virole; enfin le fragment P s'est complètement détaché et a été projeté isolément dans les environs. Il en est de même du couvercle du trou d'homme que l'on a retrouvé encore muni des cavaliers qui le fixaient à la chaudière.

J'ajouterai dès maintenant que cette ouverture avait des dimensions exagérées; elle ne mesurait pas moins de 47 centimètres de longueur sur 37 de largeur. Elle constituait un point faible assez compromettant, d'autant plus que l'on avait omis d'en consolider le pourtour. On avait encore empiré la situation en disposant la grande dimension dans le sens longitudinal, qui avait à résister à la plus forte charge.

La virole d'avant est restée entière, le fond intact, à l'exception de la partie inférieure où la rupture s'est faite en pleine tôle. Un segment mn est resté attaché au tour du milieu.

La virole d'arrière aussi a été projetée intacte, pour ainsi dire, emportant le fragment R de la tôle moyenne.

Le tronçon du foyer a été retrouvé en F' à 81 mètres de l'emplacement du générateur. On peut parfaitement reconstituer la trajectoire décrite par ce fond de chaudière. Il a décapité un arbre en D , à 41 mètres, troué la haie qui se trouve à peu de distance et touché le sol en E qu'il a fortement déprimé, à 51 mètres. Là, le tronçon a rebondi et il est venu échouer en F , c'est-à-dire à 30 mètres du point E où se produisit le premier choc. La portée du premier jet du fond d'avant L , est donc de 51 mètres, ce qui donne une idée de l'inclinaison de l'axe de la chaudière lors de la séparation et de la projection des morceaux. Si le générateur était resté dans sa position primitivement horizontale, lors de l'explosion, ce fond L n'aurait touché que le sol du jardin B et sa force vive s'y serait amortie sur une beaucoup plus faible distance. Or, non seulement le sol, mais toutes les légères haies de clôture séparant les terrains voisins sont, pour ainsi dire, intactes, à l'exception de celle qui se trouve en D , à travers laquelle la virole antérieure s'est frayée un passage.

Comme celle d'avant, la virole d'arrière a été projetée. Dans son mouvement elle a heurté la cheminée, qu'elle a renversée de fond en comble, de sorte qu'elle échoua à peu de distance, en *H*, dans la rue du Chou.

Quant au couvercle du trou d'homme, que l'on a vainement cherché pendant plusieurs jours, il a été retrouvé en *I*, enfoui sur près d'un mètre dans le sol d'une prairie à 68 mètres de la chaudière. L'emplacement *I* du couvercle du trou d'homme, muni de ses cavaliers et pesant environ 50 kilogrammes, prouve encore l'inclinaison de l'axe du générateur à l'instant de l'explosion proprement dite.

Le fragment *P* de la virole moyenne n'a été retrouvé que plusieurs semaines après l'accident, à une distance de 70 mètres, vers le nord-ouest. Il a été soumis à la fois aux impulsions qui ont étalé la virole du milieu, détaché et projeté celle de l'avant.

La bêche à eau chaude a été retrouvée dans la même direction en *C*, à 28 mètres. L'indicateur de niveau s'est rompu. La première partie, comprenant la plaque d'attache et la garniture supérieure, était en *G*, à 106 mètres de distance. La garniture inférieure s'est trouvée arrêlée dans la haie *K*, dans l'alignement *AG*.

En *B* j'ai retrouvé un contrepoids, un morceau de levier, une soupape, des restes du flotteur; à peu de distance on découvrit un levier entier. Inutile d'ajouter que des fragments de tout genre, la plupart du temps informes ou méconnaissables gisaient dans tous les environs.

Le massif de maçonnerie, constituant le fourneau, a été complètement réduit et les briques partiellement lancées à toutes distances. Cette maçonnerie, par erreur, avait été reliée à celle du pignon, de sorte que, par l'explosion, les tôles en s'ouvrant ont refoulé ce mur vers l'atelier et en ont provoqué la chute. La toiture abandonnée à elle-même s'écroula et une partie fut lancée aux alentours. La première poutrelle en fer *I*, de 0^m,22 de hauteur, près de la chaudière, fut littéralement tordue. La machine à vapeur a été brisée par la chute du pignon probablement; la pompe à eau froide est détruite et avec elle quantité de machines-outils. La machine à étirer, qui pèse près de 2,000 kilogrammes, a été repoussée vers l'habitation sur près d'un mètre. Toutes les vitres de l'atelier ont volé en éclats, et les murs pour la plupart sont hors plomb.

Le sifflet n'a pas été retrouvé; il en est de même du boulon fusible dont la chaudière était munie sur la virole d'avant.

IV. *De la résistance des tôles du générateur.* — J'ai pu profiter des

installations du constructeur Levêque, de Herstal, pour essayer à la traction et au travail à froid quelques échantillons de fer découpés dans les tôles de la chaudière des frères O.

Je résume dans le tableau suivant les résultats obtenus.

Les échantillons, choisis dans chaque fragment, ont été doubles, découpés les uns suivant la longueur de la chaudière (contre le fil du fer), les autres dans le sens transversal (suivant le fil).

ÉCHANTILLONS.	SENS DE LA TRACTION.	DIMENSIONS DE LA SECTION.	CHARGES DE RUPTURE		ALLONGEMENTS proportionnels.	ANGLE DE RUPTURE à froid.
			TOTALE	par millimètre carré.		
I. Tôle du foyer. Coup de feu.	Longitudinal.	Millimèt. carrés. $35 \times 9,0 = 315$	Kil. 6390	Kil. 20,29	p. % 2.0	Degrés. 18 1/2
	Transversal.	$35 \times 9,0 = 315$	8290	26,32	4.5	23 1/2
II. Tôle du trou d'homme.	Longitudinal.	$35 \times 8,0 = 280$	6000	21,43	3.0	35 1/2
	Transversal.	$30 \times 7,9 = 237$	5200	21,94	1.0	31
III. Tôle du trou d'homme.	Longitudinal.	$35 \times 8,0 = 280$	6600	23,57	4.0	32
	Transversal.	$35 \times 8,2 = 287$	6400	22,30	2.0	19

Il résulte de ces expériences que les tôles, très probablement, ont été bien cintrées lors de leur mise en œuvre, c'est-à-dire qu'elles ont été courbées dans le sens du laminage, ce qui a peu d'importance pour la tôle du milieu, dont la résistance paraît uniforme dans tous les sens.

Dans chaque essai, la valeur de l'allongement proportionnel des échantillons d'un même fragment est en rapport avec l'angle de rupture au pliage à froid.

Un autre élément d'appréciation, et qui est très défavorable à la qualité des tôles, résulte de ce fait : les allongements étaient brusques ; ils se produisaient subitement, sans signe précurseur à l'instant de la rupture. Cette remarque s'applique surtout aux échantillons qui n'ont offert qu'un très faible allongement relatif.

Les tôles du générateur manquaient donc de résistance, mais surtout de ductilité. Ce n'est cependant pas le défaut de ténacité qui a déterminé l'explosion, car pour une moyenne de 22 kilogrammes par millimètre carré, la pression de rupture aurait dû dépasser 20 atmosphères.

En effet, la tôle moyenne supérieure, coupée suivant le grand axe du trou d'homme, c'est-à-dire suivant la section dangereuse, présentait une longueur de 1^m,272, dont 0^m,510 de vide et 0^m,762 de plein.

La pression, en atmosphères, capable de faire éclater la tôle suivant cette section serait, en conséquence,

$$p = \frac{8 \times 22}{460} \times \frac{762}{1272} \times \frac{100}{1.03} = 22^{\text{at.}}27.$$

Il aurait donc fallu atteindre, pour faire céder la chaudière dans les conditions de résistances prérappelées, une tension de plus de 23 atmosphères.

Quant à la résistance suivant la clouure, dans le sens transversal, c'est-à-dire suivant une section droite du corps cylindrique, nous pouvons l'évaluer comme suit :

On comptait, en moyenne, 20 rivets pour un développement de 0^m,96, soit donc une distance d'axe en axe d'un rivet au suivant, de 0^m,048.

Le diamètre du corps du rivet était de 0^m,021 ; celui du bourrelet de 0^m,032 et la pince de la tôle mesurait 0^m,036.

La section résistante, à la couture, était donc diminuée dans la proportion de 21 à 48, soit de 44 p. ‰.

La section résistante était par suite réduite aux 0.56 de la section droite pleine.

Si l'on admet aussi le chiffre de 22 kilogrammes de résistance spécifique, la pression en atmosphères, capable de déchirer la rivure, sera :

$$p' = 2 \frac{8 \times 22}{460} \times 0.56 \times \frac{100}{1.03} = 34^{\text{at.}}96.$$

soit une tension de 36 atmosphères.

Mais la résistance de 22 kilogrammes doit être exagérée dans l'espèce, attendu que la rivure s'est ressentie sensiblement du travail du rivetage. En admettant le coefficient 0.4 que nous employons d'ordinaire et que dans la réalité on devrait peut-être réduire encore, dans le cas présent, on aura

$$p' = 24^{\text{at}}-96.$$

Terminons en ajoutant que tous les rivets ont résisté au cisaillement. Les efforts que l'on a dû dépenser pour dériver les tôles après l'explosion, témoignent hautement de leur très forte résistance.

Signalons aussi, d'une manière générale, les éléments fournis par l'examen des cassures fraîches déterminés dans les éprouvettes soumises aux essais précédents.

La texture est assez uniforme, plutôt lamellaire, indice d'un fer de mauvaise qualité, sans offrir cependant l'apparence schisteuse particulière au fer brûlé. Le fer est sec; le nerf très court. L'éclat de la cassure est terne; sur le fond assez sombre de la section, on distingue très visiblement de légères bandes brillantes à texture finement grenue. En somme, aspect peu favorable.

Sur la fig. 3, j'ai représenté trois fissures, x , y , z , provoquées par la minime flexion de la tôle inférieure de la virole du milieu, à l'instant de l'explosion. Cette constatation, s'il en est besoin, confirme l'agreur du métal en toutes les parties du générateur.

V. *Cause de l'explosion.* — Si l'on écarte toutes les circonstances manifestement étrangères à la cause efficiente de l'explosion ou sans rapport très immédiat avec elle, on pourra définir comme suit les conditions dans lesquelles survint l'accident qui fait l'objet de ce rapport :

Les tôles du générateur O. étaient peu résistantes et sans ductilité. Leur force de cohésion pourtant, considérée d'une manière absolue, grâce au faible diamètre, aurait suffi pour contenir une pression d'une vingtaine d'atmosphères.

Abandonné à lui-même depuis plusieurs heures, après alimentation, au dessus d'un feu dormant, le tirage empêché, il éclata tout à coup au milieu de la nuit, sans que les fuites de vapeur eussent, au préalable, éveillé l'attention du voisinage, alors qu'une pression relativement faible de 3 à 4 atmosphères s'annonçait d'ordinaire et était entendue aux alentours. Aucun événement, les jours précédents, n'avait frappé ceux qui étaient chargés de la conduite de cet appareil. Il y avait à

peine deux mois que la visite intérieure par un chaudronnier, comme le prescrit le règlement, avait été faite ; elle ne révéla rien digne d'être signalé.

Des déchirures nombreuses se sont ouvertes sur un périmètre de 7 à 8 mètres et, de préférence, suivant des sections droites tant en pleine tôle que suivant les rivures.

Après leur séparation, les fragments ont été projetés dans toutes les directions.

Quelle que soit l'opinion que l'on puisse se faire sur la cause assez obscure de cet accident, il ne viendra à la pensée de personne de l'attribuer à un abaissement notable du niveau de l'eau, qui aurait permis aux tôles de rougir latéralement sous le ciel de la maçonnerie, ou à une alimentation intempestive. Non plus d'expliquer la cause initiale, par ce que l'on est convenu de désigner sous le nom « d'explosion foudroyante » qui serait due à la transformation brusque de l'énergie potentielle du mélange contenu dans la chaudière en force vive, par suite d'un changement subit dans les conditions calorifiques de la masse fluide en repos prolongé.

Ce phénomène qui se manifeste, mais comme conséquence seulement, dans toute explosion, n'a certainement pu déterminer l'origine de l'accident en question.

L'examen des tôles, quelques heures après l'explosion, n'a pas permis de mettre en évidence soit une altération profonde du métal capable d'en compromettre la qualité déjà médiocre en deçà des limites déterminées par les essais rappelés ci-avant, soit une réduction d'épaisseur suffisante pour produire le même effet.

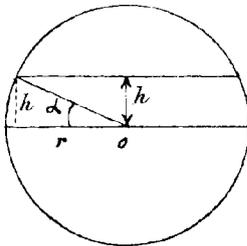
Dans ces conditions, l'hypothèse la plus simple, la première qui se présente à l'esprit, conduirait naturellement à supposer que le générateur a crevé sous l'action d'une forte pression interne. Le calage des soupapes, la reprise du tirage peut-être favorisé par la température exceptionnellement basse qui régnait dans la nuit du 5 au 6 mars, peut-être aussi par la fermeture imparfaite opérée par le registre, ou mieux encore par un oubli coupable des chauffeurs, oubli qu'ils ont tout intérêt à dissimuler au cours de l'enquête, grâce aussi au rallumage du feu imparfaitement couvert de matières inertes, etc., etc., toutes circonstances dont l'ensemble pourrait clairement et très simplement expliquer la catastrophe. Malheureusement, il s'agit moins de savoir ce qui peut amener un générateur à sauter sûrement que de faire cadrer

une hypothèse rationnelle avec les faits avérés, rapportés, relevés dans l'enquête ou que l'on peut raisonnablement en déduire. Il y a lieu certainement de n'accueillir qu'avec beaucoup de réserve certains témoignages intéressés qui peuvent être faux et dérouter nos conjectures, mais ce que l'on ne saurait écarter légèrement, c'est l'ensemble des conditions générales de marche du générateur et les conditions plus spéciales qui ont accompagné la rupture. Je l'ai dit, le générateur était incapable de conserver le fluide moteur. Tous les joints perdaient. La vapeur et le liquide suintaient dès que la pression atteignait un certain taux peu élevé. Les déclarations sont unanimes sur ce point. Il n'est pas, dans l'atelier, un ouvrier qui n'ait, de temps à autre, été frappé par le bruit occasionné par ses fuites.

Pour apprécier autant que possible l'importance de ces pertes, rappelons la déclaration ci-dessus mentionnée de plusieurs témoins : chaque jour, de 7 1/2 à 8 heures du soir, on quitte la chaudière après avoir fait monter le niveau de l'eau au milieu du tube et, le lendemain, quand on reprend le feu, ce niveau est à 0^m,04 au dessus de la bague inférieure de l'indicateur en verre. Or, la tubulure inférieure de l'indicateur se trouve adaptée au centre même du fond de la chaudière. La garniture inférieure comptait 0^m,08 et le tube 0^m,30.

Il s'ensuit que le soir, vers 8 heures, on avait dans le générateur, au dessus du centre, une couche d'eau de 0^m,23 à 2 1/2 atmosphères de pression. Le lendemain, à 6 heures du matin, soit 10 heures après, on n'en retrouvait qu'une couche de 0^m,09 à une pression de 1 1/2 atmosphère. C'était là une constatation quotidienne.

Si nous désignons par h la hauteur du niveau au dessus du centre o , nous aurons pour expression du volume de la chambre d'eau correspondante :



$$L \left[\frac{\pi r^2}{2} + 2 \left\{ h \frac{r \cos \alpha}{2} + \frac{r^2 \alpha}{2} \right\} \right] =$$

$$= L \left[\frac{\pi r^2}{2} + r \left\{ r \alpha + h \cos \alpha \right\} \right]$$

L est la longueur du générateur.

r le rayon intérieur.

α l'angle sous lequel on voit du centre, dans une section droite, l'épaisseur de la couche à la circonférence.

On aura donc aussi,

$$h = r \sin \alpha \quad \text{ou} \quad \alpha = \arcsin \frac{h}{r}$$

La chambre d'eau sera donc, pour chaque valeur de h ,

$$A_e = Lr^2 \left[\frac{\pi}{2} + \alpha + \frac{h}{r} \cos \alpha \right] = 0.756 \left(1.57 + \alpha + \frac{h}{r} \cos \alpha \right)$$

Et la chambre de vapeur,

$$A_v = 2m^3,543 - A_e$$

De la tension, on déduit la température et par suite le poids spécifique du liquide, celui de la vapeur saturée, et enfin le poids total du contenu de la chaudière.

Dans le but de tenir compte des variations du volume de l'eau avec la température, j'ai admis, ce qui est très approximatif, un coefficient de dilatation pour l'eau, égal à 0,00047 = K .

Le volume du kilogramme à t sera donc

$$1 + K(t - 4)$$

Et le poids spécifique

$$\frac{1}{1 + K(t - 4)} = 1 - K(t - 4) = 1,002 - Kt.$$

Le poids du mètre cube par conséquent

$$1002 - 0.47 t.$$

Appliquons ces formules aux trois cas particuliers suivants :

$$1^{\circ} \text{ A 8 heures du soir on a : } h = 23^{\text{c}}, \quad \alpha = \arcsin \frac{23}{46} = 0,52,$$

$$\cos \alpha = 0,86. \quad \text{La tension est de } 3^{\text{at}},5.$$

$$2^{\circ} \text{ A 10 1/2 heures du soir nous avons : } h = 12^{\text{c}}, \quad \alpha = \arcsin \frac{12}{46} = 0,26$$

$$\cos \alpha = 0,97. \quad \text{La tension est } 2^{\text{at}},7.$$

$$3^{\circ} \text{ A 6 heures du matin on retrouve : } h = 9^{\text{c}}, \quad \alpha = \arcsin \frac{9}{46} = 0,20$$

$$\cos \alpha = 0,98. \quad \text{La tension est } 2^{\text{at}},5.$$

Nous obtiendrons les résultats consignés dans le tableau suivant. Il s'ensuivrait que la perte en 10 heures de nuit serait ordinairement de

$$1787 - 1398 = 389 \text{ kilogrammes,}$$

soit plus de 21 p. $\%$ de l'eau abandonnée le soir.

HEURES.	TENSIONS.	TEMPÉRATURE.	VOLUMES DES CHAMBRES		POIDS DU METRE CUBE		POIDS DE		POIDS TOTAL.
			d'eau.	de vapeur.	d'eau.	de vapeur.	l'eau.	la vapeur.	
	Atm.		Litres.	Litres.	Kil.	Kil.	Kil.	Kil.	Kil.
8 h.s.	3.5	139	1905	638	937	3.77	1785	2.41	1787
10 1/2	2.7	130	1572	971	941	1.54	1479	1.50	1481
6 h.m.	2.5	128	1482	1061	942	1.43	1396	1.52	1398

Suivant l'un des frères O., il y aurait eu, à 10 1/2 heures du soir, une perte de 1787 — 1481 = 306 kilogrammes, soit les 8/10 de toutes les fuites nocturnes ; cette constatation me paraît impossible. Au moins était-elle anormale et, à ce titre, elle aurait certainement frappé l'attention de l'intéressé. Ou il y a erreur dans l'un des chiffres fournis par le propriétaire, ou il n'est pas allé, comme il le dit, inspecter sa chaudière, une heure avant l'explosion.

Le calage des soupapes aurait, d'ailleurs, été une opération difficile, d'après la disposition des leviers dégagés de toute entrave. On n'aurait pu que les surcharger. Or, pour atteindre aux soupapes une charge répondant à 20 atmosphères, à l'intérieur du générateur, l'effort exercé aurait dû être, à l'extrémité des leviers, de 80 à 100 kilogrammes ; beaucoup plus important encore s'il avait été appliqué vers le centre des leviers. Force est donc de considérer comme impossible la production d'une semblable pression ou même de la moitié dans les conditions exposées.

Cette surcharge n'était d'ailleurs pas dans les habitudes ; on n'aurait pu la produire durant chaque nuit sans éveiller l'attention de l'un des 30 ouvriers occupés journellement rue du Chou. Quel aurait pu être le but de cette dangereuse précaution ? Les voisins ne s'étaient jamais plaints de la chaudière.

Quant à l'économie très discutable à réaliser, en empêchant les pertes de vapeur pendant la nuit aux soupapes, elle devait être bien mince pour ne pas dire nulle, et je doute fort qu'elle ait jamais occupé l'attention des propriétaires.

Au surplus, l'aspect des soupapes, l'état des leviers des contrepois ne permettent pas non plus de confirmer cette hypothèse.

Les leviers étaient uniformément rouillés, sans présenter le moindre indice révélateur.

Les soupapes, ce n'est pas impossible, n'auraient-elles pu se caler naturellement ? Il est difficile de l'admettre. D'abord, on ne les a pas retrouvées sur la base en fonte constituant les orifices. D'autre part, dans le courant de la soirée du vendredi 5 mars, deux heures avant l'arrêt du travail, on ne pouvait maintenir la pression à $3 \frac{3}{4}$ atmosphères par suite surtout de l'écoulement considérable de la vapeur aux soupapes qui opéraient donc au delà des désirs de tous. L'un des ouvriers, qui avait à utiliser en cet instant un travail mécanique plus élevé, s'appliqua lui-même à chauffer pour atteindre le but et il ne se fit pas faute de réclamer contre ce défaut de fermeture.

Le manomètre, qui aurait dû marquer une pression exagérée, est resté intact quant au fonctionnement. Le cadran seul s'est brisé, mais le mécanisme intérieur n'est absolument pas altéré. Je l'ai vérifié au moyen d'un manomètre-étalon et ai reconstitué la graduation maintenant indiquée sur cet accessoire. A la pression de $6 \frac{1}{2}$ atmosphères, l'aiguille heurte l'enveloppe, de sorte que si la tension avait atteint un chiffre quelque peu élevé, la délicate aiguille, arrêtée par son extrémité supérieure, se serait probablement déformée d'une façon permanente ou même brisée.

Enfin, cette hypothèse d'une forte pression est contredite par le témoignage désintéressé, produit sur l'heure et que je considère comme sincère du témoin S... Peut-on admettre que ce dernier n'aurait pas été frappé par le bruit des fuites de vapeur formées à très forte tension ? En supposant même gratuitement le calage absolu des soupapes, on concèdera, je présume, que l'on n'a pas touché aux joints du trou d'homme, aux orifices provenant du sifflet, de la prise de vapeur, du tuyau d'alimentation, du tube indicateur, etc., et ces dégagements auraient suffi pour convaincre S... d'un état de choses anormal et donner l'alerte. Pendant un temps relativement long, ce témoin s'est trouvé seul à peu de distance du générateur, quelques minutes avant l'explosion, au milieu de la nuit, d'un calme profond et à l'abri de toute distraction.

Examinons la question sous une autre face. Nous sommes en présence d'un fourneau dont il est possible, au moins approximativement, d'apprécier la puissance et la consommation.

En marche normale il vaporise à l'heure 200 kilogr. d'eau à 25 degrés et à la tension de $4 \frac{1}{2}$ atmosphères, c'est-à-dire à la température de

148 degrés. Ce qui répond à un développement calorifique, par heure

$$200 [606.5 + 0.305t - 25] = 200 \times 626,64 = 125,328 \text{ calories.}$$

Et, par minute, de

$$\frac{125328_c}{60} = 2089 \text{ calories.}$$

Evidemment tout ce calorifique ne reste pas confiné dans la masse chauffée, les pertes très nombreuses du générateur en emportent une forte part. Pour fixer les idées, je supposerai de ce chef un déchet de 25 p. $\%$. La puissance utile du fourneau reviendrait donc à la vaporisation de 150 kilogr. d'eau à 25 degrés à la température de 200 degrés. Cette hypothèse est encore très favorable à l'action du fourneau qui développerait par minute 1,567 calories.

Si P est le poids de l'eau au moment de la reprise du feu ; t' sa température correspondant à la pression p' , c le calorifique spécifique, Q la quantité de chaleur fournie par minute, on aura après le temps θ minutes, une température t telle que

$$Q \theta = Pc (t - t').$$

Je n'ai pas tenu compte dans cette formule du poids de la vapeur contenue dans le générateur. Les chiffres déterminés ci-avant justifient cette approximation qui simplifie beaucoup le calcul. Au surplus, j'ai déterminé aussi tous les résultats qui vont suivre en en tenant compte, mais les différences qui en résultent sont infimes de sorte que je les néglige.

D'ailleurs, les expériences de Fairbairn, entreprises il y a quelque trente ans, dans le but de vérifier cette relation, ont complètement corroboré ses résultats. — On en déduit :

$$t = \frac{Q}{Pc} \theta + t'$$

Or, nous sommes en présence des données suivantes :

$$\text{I}^{\text{er}} \text{ cas } P = 1905 \text{ kil.}, \quad Q = 2089^c, \quad p' = 2 \text{ atm. } 1/2, \quad t' = 139^{\circ}.$$

$$\text{Donc } \frac{Q}{Pc} = 1.08, \quad c = 1.02, \quad t = t' + 1.08 \theta.$$

$$\text{II}^{\text{e}} \text{ cas } P = 1905 \text{ kil.}, \quad Q = 1567^c, \quad p' = 2 \text{ atm. } 1/2, \quad t' = 139^{\circ}.$$

$$\text{Donc } \frac{Q}{Pc} = 0.81, \quad c = 1.02, \quad t = t' + 0.81 \theta.$$

Ces formules ont donné les résultats ci-après. On admet que le feu ait repris à 10 heures du soir et qu'il se soit maintenu avec la même ardeur que pendant la journée.

1 ^{er} CAS. Q = 2089 c.		HEURES E T T E M P S.	2 ^e CAS. Q = 1567 c.	
Pressions.	Tempé- ratures.		Tempé- ratures.	Pressions.
Atmosphères.	Degrés.	heures.	Degrés.	Atmosphères.
2 1/2	139	10 00 — θ = 00	139	2 1/2
7.0	171	10 30' — θ = 30'	163	6.6
16.0	204	11 00 — θ = 60'	188	12.0
22.0	220	11 15' — θ = 75'	200	15.0
"	"	11 45' — θ = 105'	224	24.0

Ainsi, sous l'action d'un feu ardent, bien entretenu et conduit, le calage des soupapes étant opéré, le tirage étant complet, l'accumulation du pouvoir calorifique engendrant des pressions de 18 à 20 atmosphères à peine capables de faire éclater le générateur, exigerait une durée de 1 heure ou 1 1/2 heure.

Mais, en marche normale, on consomme 28 kilogrammes par heure ; on aurait donc dû dépenser d'une façon régulière, dans la nuit de l'explosion, de 30 à 40 kilogrammes de combustible au moins. Or, qu'y a-t-il sur la grille au terme de la journée ? Soixante décimètres cubes de cendres, y compris, pour 1/3, des résidus de laverie de Bonne-Espérance, c'est-à-dire moins de 20 kilogrammes certainement de très mauvais charbon (1 franc la tonne) disséminé dans toute une masse incombustible.

Si donc le tirage a pu reprendre et le feu s'activer, il ne saurait être douteux que ces circonstances n'ont pu avoir pour effet maximum que de forcer de quelques unités la pression ordinaire. Elle n'a pu dépasser ce que l'on appelle communément une haute pression qui n'aurait pu se développer ici qu'à la faveur du calage des soupapes, bien que, dans l'espèce, cette opération constituât une pure conception.

Que l'on admette ou conteste la rigueur de ces déductions, que l'on accueille ou repousse la sincérité des témoignages rapportés ci-avant, force nous est de reconnaître :

1^o Que le générateur *O*. ne pouvait se rompre que sous l'action d'une pression interne de 20 atmosphères, si l'on considère la pression comme seul moyen de faire crever ce récipient ;

2^o Que la pression n'a pu atteindre qu'un degré bien moins élevé, si elle a même franchi le taux du timbre dans la nuit du 5 au 6 mars.

Ramenée à ces termes, la question se simplifie. Du moment où la pression n'a pu être seule la cause primordiale de l'accident, il importe peu de savoir si elle a atteint la valeur de 3 à 4 atmosphères ou celle de 10 à 11 atmosphères à l'instant de l'explosion. Le problème à résoudre n'en reste pas moins entier, puisqu'il faudra quand même démêler la raison mystérieuse qui a morcelé la chaudière.

Et quelle serait la cause latente de ses multiples ruptures ?

A mon sens, il faudrait incriminer exclusivement la mauvaise qualité des tôles, non pas leur résistance à la traction, qui était encore relativement élevée, mais pour certaines d'entre elles, le manque presque absolu de ductilité. Le type le plus parfait du générateur à parois résistant à la traction, bien que dépourvues de ductilité, serait évidemment le générateur en verre. Or, c'est précisément comme le verre que se brisent les réservoirs qui en approchent par leur constitution intime, sans que la pression pour cela y joue nécessairement un rôle décisif ou bien important.

Ce rapprochement, on l'accordera sans difficulté pour le générateur *O*. Formé au moyen de six tôles, il réalise ce phénomène assurément singulier :

Qu'une seule d'entre elles n'a pas cédé dans l'une ou l'autre de ses parties. En effet, la tôle supérieure de la virole moyenne s'est séparée en quatre fragments, *R*, *M'*, *N'*, *P*, dont l'un, chose extraordinaire, a été lancé isolément dans une région où on le retrouva seul (*P*).

La tôle inférieure *MN* s'est rompue transversalement suivant la couture, de façon que son recouvrement est resté attaché à la tôle d'arrière sur une longueur de 14 à 15 rivets.

La tôle de dessous de la virole extrême s'est rompue de la même façon ; la pince de cette feuille a été retrouvée rivée à la tôle moyenne.

La tôle supérieure *Q* est mieux respectée, ce qui, sans doute, est dû à la rupture plus aisée du fragment *R*, dont elle ne s'est pas séparée.

A la virole d'avant, on constate inférieurement une rupture transversale, en pleine tôle, se raccordant à deux déchirures latérales qui se sont faites à travers la tôle supérieure.

Si l'on dérivait purement et simplement tous les tronçons rompus par l'explosion, les six feuilles primitives seraient remplacées par une vingtaine de fragments de toutes formes.

Que constate-t-on d'ailleurs à la tôle du foyer, dont la déchirure est topique? Deux résistances à la rupture par traction, 20 kilogrammes dans le sens longitudinal, contre le fil donc, 26 kilogrammes dans le sens transversal. Dans l'aplomb de cette déchirure, au coup de feu, la pression s'exerce bien régulièrement en pleine tôle et la séparation pourtant se produit sous l'action de la tension la plus faible. Mais aussi suivant la longueur, la caractéristique de la ductilité est de 2 p. % seulement, tandis que, dans l'autre sens, elle s'élève à 4.5 p. %, chiffre encore très faible pour des matériaux de chaudière.

Pour ce qui regarde la tôle supérieure de la virole moyenne, les résistances sont à peu près égales dans toutes les directions; du reste, la disposition des déchirures devait surtout y être déterminée par l'existence du vaste trou d'homme, mal orienté et dont le pourtour, par une négligence encore fréquente, n'était même pas consolidé. Mais, dans cette tôle, la plus maltraitée par l'accident, la ductilité descend à la valeur dérisoire de 1 p. %.

Ces observations particulières s'imposent avec plus de force encore dans l'examen de la chaudière entière. Les parois sont soumises en chacun de leurs points à une traction double, l'une longitudinale, l'autre transversale, et variant du simple au double, à section égale. En dépit de cette distribution, toutes les ruptures, sans en excepter une seule, se seraient produites par l'extension la moins à redouter. En présence de cet état de choses, l'esprit même le plus accessible aux hypothèses, serait impuissant, me semble-t-il, à concevoir ou à combiner les effets de l'action destructive si la pression statique y a dû occuper le premier rang.

Il se trouve dans ce générateur une section doublement dangereuse, elle s'étend le long de la génératrice conduite par le grand axe du trou d'homme. D'abord, l'effort agissant pour rompre la tôle en cette section est transversal, ensuite cette tôle n'est pleine que sur moins des 6/10 de sa longueur. Or, les ruptures se groupent grossièrement symétriques aux alentours de cette région sans l'entamer, ni plus ni moins que si le générateur avait été soumis à un seul genre d'efforts, celui de forces longitudinales ayant leurs points d'application sur les fonds opposés de la chaudière.

Les explosions, qu'il a été impossible d'attribuer à une autre cause qu'à l'absence de ductilité, sans être très fréquentes, sont loin cependant d'être exceptionnelles. C'est sous l'empire des préoccupations qu'elles ont fait naître que l'on a introduit dans les cahiers des charges des administrations publiques, des grandes compagnies de chemin de fer et même dans les règlements de police, cet élément d'appréciation, dont les constructeurs ne se sont pas toujours défiés.

La ductilité du métal des tôles mises en œuvre pour la fabrication des chaudières est regardée actuellement, et avec raison, comme assurant la sécurité au même degré, si pas plus, que leur résistance à la traction.

Il est d'autant plus dangereux de la considérer comme chose négligeable que l'essai hydraulique, pas plus que la visite intérieure la plus minutieuse, ne sont capables de nous renseigner toujours sur sa valeur. Je considère un générateur du genre de celui d'O., dont les tôles ont atteint la limite de l'aigreur, comme appelé à sauter à plus ou moins bref délai. Ce n'est qu'une question de temps, les conditions de résistance ne variant même pas d'une manière générale et la pression interne ne dépassant pas le chiffre du timbre.

Il est assez difficile de faire la preuve éclatante de cette influence dans l'explosion de la chaudière d'un industriel, tant peut se justifier la méfiance que l'on doit, en conscience, entretenir à l'égard de certains témoignages qui, la plupart du temps, émanent de gens intéressés. Mais il est des cas où le moindre doute ne peut planer sur les conditions de marche et d'entretien de générateurs à l'instant de leur explosion, lorsqu'il s'agit de locomotives, par exemple, sautant comme pour faire la conviction des incrédules. De ces appareils ont volé en éclats en parfait état d'entretien et alors que la pression et la quantité d'eau étaient absolument normales; alors aussi que les tôles offraient des résistances moyennes, très respectables, de 34 à 37 kilogrammes; seulement, dans ce cas, l'aigreur des tôles a toujours été trouvée très sensible: elle descendait parfois au chiffre considéré comme effrayant de 4.3 p. % et supérieure pourtant à la limite atteinte par les tôles de la chaudière O. Aussi de nos jours exige-t-on pour les tôles de certaines chaudières de locomotives timbrées à 9 atmosphères, 36 kilogrammes de résistance dans le sens du fil et un allongement de 15 p. %.

L'instruction ministérielle pour l'exécution du règlement de police du 28 mai 1884 semble avoir prévu très explicitement l'accident dont je m'occupe ici. On lit au chapitre IV, des matériaux, quatrième alinéa :

« Les tôles à mettre en œuvre doivent présenter à la fois une ténacité (résistance à la rupture) et une ductilité suffisantes; cette dernière qualité, tout aussi essentielle que la première, leur permettra de supporter, sans altération, les diverses opérations de la mise en œuvre : cintrage, emboutissage, perçage des trous, rivetage, mâtage des joints, etc. C'est grâce encore à leur ductilité que les tôles sont garanties contre les altérations et les détériorations résultant des dilata-tions et des contractions dues aux brusques alternatives de température. Les tôles placées au dessus des foyers, le plus exposées à ces alternatives, doivent donc posséder cette qualité à un haut degré. »

Que l'on rapproche de cette appréciation judicieuse, formulée à l'abri de toute influence ayant trait à un cas particulier quelconque, cette constatation de fait : que la tôle du coup de feu de la chaudière O. ne présentait qu'une résistance longitudinale de 20 kilogrammes et une ductilité, dans le même sens, de 2 p. % seulement.

Ce coup de feu a donc pu constituer une région affaiblie, très dange-reuse, et, effectivement, j'estime que la déchirure première vient de là.

Il suffit, pour se convaincre de ce point, de scruter les effets de l'ex-plosion, de les rattacher à la cause, ou tout au moins à sa manifestation initiale.

On constate tout d'abord :

1° Que les ruptures sont de trois espèces. Les premières ont atteint les rivures transversales, d'autres la pleine tôle au foyer, les dernières, la tôle, pleine aussi, au trou d'homme. Celles-ci s'expliquent d'elles-mêmes sans plus ample examen.

La cause, quelle qu'elle soit, qui a détaché le long de la couture les deux viroles postérieures, aurait dû produire le même effet sur les viroles antérieures, si, bien entendu, le coup de feu ne s'était déjà trouvé dans une situation spéciale. Cette action, dont le siège était à l'intérieur du corps cylindrique, a fait sentir son influence uniformément en tous les points du générateur à la fois, c'est-à-dire que deux parties identiques ont été nécessairement soumises à la même action destructive. L'aspect des cassures, les résultats des expériences sur la résistance, n'ont établi entre les unes et les autres que des différences insensibles.

Comment expliquer que, sous l'action d'une cause unique, les clouures cèdent d'un côté et la tôle pleine de l'autre à 0^m,20 ou 0^m,30 de la rivure adjacente et parallèlement à celle-ci, sur toute une demi-section droite, c'est-à-dire à 4^m,50 d'étendue ?

2^o Que le générateur, avant la séparation des trois tronçons principaux, a dû se soulever vers l'avant. Ce fait est avéré par les trajectoires décrites par la virole antérieure et le couvercle du trou d'homme, trajectoires qu'il est très facile de reconstituer sur le terrain. Sans ce soulèvement initial, ce tronçon antérieur aurait simplement ravagé le sol du jardin attenant à l'établissement O., sans franchir d'un seul jet l'énorme portée de 51 mètres et rebondir de là, après avoir profondément creusé le sol, sur une distance de 30 mètres.

Le couvercle du trou d'homme lui aussi aurait été projeté verticalement et serait retombé à proximité du générateur. On le retrouve enfoui sur près de 1 mètre dans le sol d'une prairie, à une distance de 70 mètres de la chaudière.

Or, ce soulèvement préalable du générateur ne s'est produit que si la première rupture s'est manifestée au coup de feu.

3^o Que, de l'examen attentif des déchirures de la première virole, il résulte que leur propagation a pu se faire symétriquement dans les deux sens à partir du coup de feu, vers la région supérieure, dans la tôle du dessus et le long de la cloture LP ou vers le trou d'homme. Il serait difficile de concevoir la rupture commençant à cette clouure ou au trou d'homme, pour franchir ensuite la tôle L de part et d'autre, atteindre la feuille inférieure et s'y étendre symétriquement dans le foyer.

D'un autre côté, à en juger par le chemin qu'il a décrit, le fragment P semble s'être ressenti de ses attaches avec les tôles supérieures des viroles moyenne et antérieure à l'instant de sa projection. De par la tôle N , il a dû être animé d'un mouvement dirigé perpendiculairement au pignon et sa liaison avec le tronçon d'avant a dû lui imprimer une vitesse dans le sens de la longueur du générateur. Les premières déchirures ne se seraient donc pas produites dans la région supérieure. A mon avis, la tôle inférieure du foyer a cédé d'abord suivant la section droite, ce qui a provoqué le mouvement de bascule du générateur autour d'un axe transversal et horizontal. L'écoulement de son contenu n'a pu se faire instantanément, de façon que l'énergie calorifique, en grande part du moins, s'est transformée intérieurement en force vive et a provoqué les séparations aux clouures et les déchirures au trou d'homme.

Il n'y a rien dans la puissance de ce phénomène subsidiaire qui doive surprendre, même pour un appareil de dimensions réduites. Elle est affirmée par les observations de Bunsen sur les éruptions geysériennes dues à une cause similaire.

Nous avons, à l'instant de l'explosion, 1,800 kilogrammes d'eau à la pression de 2 atmosphères. Tout à coup, pendant un temps très court, cette masse est ramenée à la pression ordinaire et, par suite, à la température de 100 degrés. Il en résulte bien une production de chaleur libre exprimée par la formule approchée :

$$1,800 (135 - 100) = 1,800 \times 35 = 63,000 \text{ cal.}$$

La majeure partie de ce calorique se transforme à l'intérieur même du générateur. Supposons cependant pour fixer les idées que, par suite de l'écoulement immédiat, il n'en reste que la moitié dans le générateur, nous aurons encore à consommer forcément plus de 30,000 cal.

Or, que dure l'explosion ? Un dixième de minute est énorme ; même dans cette hypothèse nous aurions par seconde :

$$\frac{30,000}{6} = 5,000 \text{ cal.}$$

Soit donc en chevaux-vapeur :

$$\frac{5,000 \times 424}{75} \text{ soit plus de 28,000 chevaux-vapeur.}$$

Ce qui donne une idée du travail inouï auquel, pendant six secondes, la chaudière aurait dû opposer sa résistance vive. Cette puissance formidable tombera d'elle-même, ou plutôt elle se manifestera extérieurement, si les déchirures primitives suffisent à dégager le liquide pressurément. Si, par exemple, le générateur O. s'était ouvert au même instant en toutes ses parties, nous n'aurions pas eu à constater les effets secondaires d'arrachement des tôles, l'écroulement des murs, les nombreuses projections des fragments séparés du générateur et de tout ce qui l'environnait. Abstraction faite des déchirures, tout se serait limité à une explosion d'eau. Elle n'apparaîtrait pas non plus, du moins avec ce caractère dangereux, si la déchirure première était insuffisante pour amener une chute très sensible et instantanée dans la pression interne. Tout se bornerait alors à des transformations partielles et successives du calorique sans graves conséquences.

Une déchirure très forte ou une autre très faible pourrait donc ne pas donner toujours lieu à des projections favorisées d'ailleurs ici par un défaut de résistance et de ductilité indéniable.

4° On constate, enfin, que les projections des fragments du générateur et de ses accessoires n'ont pu se produire sous le coup d'une impulsion unique.

On a relevé, en effet, à très grandes distances, le premier tronçon, la partie supérieure de l'indicateur, la tôle *P* et le couvercle du trou d'homme. Il en aurait été de même de la dernière virole si elle n'avait rencontré, dans son parcours, la cheminée et les obstacles voisins. A proximité de l'emplacement de la chaudière, à quelques mètres, on retrouve la bêche à eau chaude, la partie inférieure de l'indicateur retenue dans une haie, les deux contrepoids, les leviers, les deux soupapes, les morceaux de flotteur, en un mot tous les accessoires fixés sur la virole antérieure, tous au dessus de la tôle du coup de feu. Il est très probable qu'ils ont été projetés à l'instant de la première déchirure, avant l'arrachement des tôles suivant les coutures. On en conclut naturellement, que la même cause qui a provoqué ces projections et soulevé le générateur a frappé, au même instant aussi, le segment de tôle *P* plus exposé que les autres et qui a particulièrement souffert.

CONCLUSIONS.

L'examen des causes de l'explosion du générateur *O*. ne m'a pas permis de relever, à la charge des propriétaires ou du chauffeur, de contravention d'aucun genre.

Suivant moi, cet accident est dû à un état de choses dont on ne se méfie généralement pas et que les premiers intéressés soupçonnaient moins que personne.

Cette situation, au surplus, n'est pas exceptionnelle ; elle doit exister pour un nombre relativement grand des générateurs du pays. Aussi m'est-il impossible, même en présence d'un manque de soins bien démontré, de demander des poursuites que je ne pourrais complètement motiver.

Je le regrette profondément. L'autorité judiciaire ne devrait jamais rester étrangère à un accident de cette gravité, et cela, non seulement parce qu'il peut y avoir un coupable à punir, mais parce qu'il y aura toujours trop d'industriels peu scrupuleux, ignorant leur responsabilité et le danger d'une explosion.

C'est ainsi que la majorité des chauffeurs stoppent à la soirée en se contentant d'annuler le tirage et de couvrir le feu. Cette façon peut n'être pas sans inconvénient si l'on ne s'assure fréquemment du fonctionnement des soupapes et si l'on ne recule les contrepoids pour se mettre autant que possible à l'abri d'une augmentation insolite de

pression dans le courant de la nuit. La reprise nocturne du feu n'est pas chose extraordinaire; elle se produit plus souvent qu'on ne le pense.

Quant à la ductilité des tôles dont on s'assure seulement pour les générateurs construits sous l'empire du règlement nouveau, nous manquons absolument de renseignements pour ce qui regarde les chaudières établies. Sans exiger que l'on soumette à une revision les chaudières fonctionnant depuis nombre d'années, j'estime que l'on ferait preuve de prudence, lors d'une réparation quelque peu importante, de découper dans la région saine de chaque tête enlevée des éprouvettes que l'on soumettrait aux essais à la traction. On obtiendrait sur la résistance propre et sur la ductilité du métal des indices précieux.

Dans tous les cas, quelle que serait la résistance à l'extension, je n'hésiterais pas à condamner sans rémission toute chaudière dont les tôles manqueraient de ductilité; son explosion n'étant qu'une simple question d'échéance.

La résistance seule est un caractère trompeur. Il n'est pas de chaudronnier qui ne sache communiquer au plus mauvais fer, par le travail à froid, plus de densité, de dureté, de ténacité, d'élasticité, qualités qui ne s'accusent artificiellement qu'au détriment de la résistance vive.

Procès-verbaux des séances du Comité des accidents du 5^e arrondissement des mines. — Séance du 4 juin 1886.

Présents : MM. A. Firket, ingénieur en chef-directeur, président; F. Roberti-Lintermans, ingénieur principal, secrétaire; Hubert, Banneux, Halkin, Demaret et Jottrand.

M. FIRKET a été frappé de la position des quatre fractures diagonales qui se sont formées autour du trou d'homme. Leur origine correspond au point où les cavaliers agissaient et où il a pu se produire des fissures par suite d'un excès de serrage du couvercle ou peut-être même de la contraction des métaux lors du refroidissement de la chaudière. Il est, en effet, établi par l'enquête, qu'il existait des fuites de vapeur au joint du trou d'homme et que le jour même de l'accident un ouvrier s'est vu obligé de chauffer lui-même la chaudière pour obtenir la pression de

vapeur nécessaire. N'a-t-il pas pu, dans le même but, serrer à outrance le couvercle du trou d'homme ou ce serrage n'a-t-il pas été opéré maintes fois antérieurement? Pour M. Firket, il est probable qu'il en est ainsi. Tenant compte de la très faible ductilité de cette tôle, des grandes dimensions du trou d'homme, de la circonstance que le bord n'en était pas consolidé, M. le président admet l'existence, avant l'accident, de quatre petites fissures correspondant aux extrémités des deux cavaliers. Il a fallu ensuite, pour déterminer l'accident, un certain excès de pression bien inférieur, si l'on admet la préexistence de ces fissures, aux 22 atmosphères dont parle le rapport de M. Banneux. Cet excès de pression a dû, toutefois, se produire brusquement vu les pertes de vapeur de la chaudière en temps normal, et une simple reprise du feu pendant la nuit ne suffirait pas pour expliquer l'explosion. M. Firket pense qu'elle a été précédée d'un état de surchauffe de l'eau non aérée, autrement dit du phénomène de l'ébullition retardée, bien connu des physiciens, et provoquée ensuite par une vaporisation brusque déterminant subitement un notable excès de pression lorsque l'augmentation de température due à la reprise du feu a été suffisante. Cette hypothèse étant admise, on s'explique aisément que la chaudière se soit ouverte à la partie supérieure de la virole du milieu, laquelle s'est étalée sur place, et qu'ensuite les viroles d'avant et d'arrière aient été projetées dans les directions où on les a retrouvées. Le tronçon d'avant n'ayant touché le sol qu'à une assez longue distance, l'obliquité de la trajectoire est assez difficile à expliquer si l'on admet la manière de voir qui précède. La résistance de la maçonnerie du foyer, qui a été démolie, peut cependant être invoquée comme cause de relèvement de la partie antérieure du tronçon.

M. BANNEUX maintient son opinion que la première déchirure s'est produite à la tôle du foyer, accident qui a provoqué le soulèvement de la partie d'avant de la chaudière. On comprend ainsi que le couvercle du trou d'homme ait été projeté à l'arrière et qu'un morceau de tôle de la virole du milieu se soit détaché de la virole d'avant et ait été lancé diagonalement.

M. FIRKET dit que la position du couvercle à l'arrière peut s'expliquer aisément dans sa manière de voir, en admettant qu'il s'est dégagé d'abord de l'avant de l'orifice du trou d'homme. Quant au fragment de tôle *P*, compris entre deux fractures initiales et une fracture suivant une ligne de rivure et qui a été retrouvé à 70 mètres au nord-ouest du

générateur, le sens de sa projection permet de présumer que la troisième déchirure a suivi immédiatement les fractures partant du trou d'homme. En général, dit-il, dans les explosions de chaudières, même lorsque les premières cassures se reconnaissent assez facilement, il n'est guère possible de déterminer l'ordre de succession des autres.

Séance du 11 juin 1886.

Présents : Tous les officiers des mines du 5^e arrondissement

M. FIRKET rappelle, à propos de l'opinion qu'il a émise dans la dernière séance, les nombreuses expériences faites depuis longtemps par les physiiciens pour démontrer l'influence de l'absence ou de la pénurie de l'air ou d'un gaz quelconque en dissolution dans l'eau, sur le retard de l'ébullition de celle-ci. La première date de 1803 ; Deluc a réussi à porter à 140 degrés, sans ébullition, de l'eau privée d'air, renfermée dans un matras à long col. Donny, en 1846, est parvenu à élever, sans ébullition, à 130 degrés, la température de l'eau renfermée dans un tube en verre fermé à la lampe, et à produire une vaporisation brusque dès que la température eût atteint 138 degrés. Caly-Cazalat a chauffé dans un ballon de l'eau purgée d'air couverte d'une couche d'huile, sans ébullition, jusque 123 degrés. Au delà l'eau s'est transformée subitement en vapeur en produisant une véritable explosion. Dufour a agi autrement ; il a mis en suspension, dans un mélange d'huile de lin et d'essence de girofle, des globules d'eau ayant 0^m,001 à 0^m,003 de diamètre, qu'il a pu porter à la température de 175 et même de 178 degrés (8 à 9 atmosphères), sans que les globules d'eau se soient réduits en vapeur. S'il touchait alors un globule avec une baguette en métal, l'eau se vaporisait par suite de l'air qui se trouvait à la surface de la baguette. Celle-ci devenait inactive après quelques expériences, c'est-à-dire au moment où il n'y avait plus d'air à sa surface. Enfin, plus récemment, M. Gernez a complété la démonstration de la théorie de Deluc par une série d'expériences ingénieuses et directes qui montrent qu'une bulle de vapeur d'origine quelconque contient toujours un peu d'air, que les solides n'agissent sur l'eau surchauffée que par l'air adhérent et que, lorsque l'ébullition d'un liquide surchauffé est provoquée par le frotte-

ment d'un corps sur les parois mouillées par ce liquide, cela ne provient que de ce que le frottement agit en faisant sortir du liquide de petites bulles de gaz dissous.

Par suite, le phénomène de l'ébullition retardée ne serait pas dû à l'absence complète, mais à la très faible proportion d'air ou de gaz en dissolution.

M. HUBERT dit qu'il faut se mettre en garde contre la théorie dite des explosions foudroyantes qui est pour ainsi dire abandonnée aujourd'hui par les ingénieurs français, et qui ne peut être appliquée à la chaudière des sieurs O..., parce que ce générateur, ayant été alimenté vers 7 heures du soir, l'eau devait encore renfermer de l'air et n'a pu se surchauffer au point de se transformer subitement en vapeur. Il ne voit d'ailleurs aucune cause qui ait pu produire quelque mouvement dans la masse liquide.

M. FIRKET fait observer qu'il résulte des expériences de MM. Donny et Galy-Cazalat qu'une simple élévation de quelques degrés de la température de l'eau surchauffée suffit pour provoquer une vaporisation brusque, que les fuites de l'appareil autorisent à admettre le départ entre 7 heures du soir et minuit de la majeure partie de l'air dissous et qu'enfin il ne prétend nullement que toute l'eau contenue dans la chaudière soit passée instantanément à l'état de vapeur et que l'on doive qualifier d'explosion foudroyante l'accident qui nous occupe.

M. BANNEUX ajoute que l'on ne peut douter que certaines explosions soient dues à une autre cause qu'une simple surélévation de pression. L'explosion survenue en 1868 à Seraing, décrite dans les *Annales des Travaux publics*, par MM. L. Thonnard et Bougnet, est certes une explosion de ce genre. L'accident s'est produit lors de la remise en activité du moteur, alors qu'aucun excès de pression n'avait été constaté. La chaudière s'est brisée en une quantité de morceaux. Les cassures se sont produites dans tous les sens et non particulièrement suivant les lignes de moindre résistance.

Séance du 25 juin 1886.

Présents : Tous les officiers des mines du 5^e arrondissement, sauf M. Halkin, empêché par un deuil de famille.

M. HUBERT donne lecture de la note suivante qu'il a communiquée avant la réunion à M. Banneux.

« Dans la discussion qu'il a faite des causes de l'explosion, M. Banneux a été amené à rejeter toute surélévation de pression dans la chaudière. Quoiqu'il ne le dise pas d'une façon tout à fait expresse, c'est cependant la conclusion qui ressort de son travail. Ainsi, il repousse la surcharge des soupapes, invoque l'état du manomètre, fait état de la déposition négative du sieur S..., du peu de charbon resté sur la grille et constate que « toutes les ruptures sont transversales ce qui est contraire à la théorie de la pression ».

« Pour M. Banneux, la pression ne s'est donc pas élevée, au contraire, elle a dû plutôt descendre avec le refroidissement. Le manque de ductilité des tôles a tout fait. La tôle du foyer s'est brisée la première en plein fer et les déchirures ont été rejoindre le trou d'homme. De là soulèvement du fragment d'avant et sa projection suivant une trajectoire assez relevée. De là aussi la symétrie des déchirures autour du trou d'homme et la position du fragment R.

« Tout en rendant hommage à la logique du rapport et en reconnaissant qu'en se basant sur les faits *prouvés* il est difficile d'assigner la cause exacte et les circonstances de l'explosion, je désire soumettre à l'auteur du rapport quelques objections.

« 1° Si la déchirure a commencé par la tôle du foyer, tout l'arrière de la chaudière a dû subir un mouvement de recul et, à moins que la déchirure d'arrière ne se soit produite synchroniquement, on devrait retrouver l'anneau médian entraîné vers l'arrière. Si peu qu'ait duré l'action qui a séparé cet anneau de celui d'arrière, néanmoins ces deux fragments ont été attachés et ont dû participer au mouvement provenant de la réaction de l'eau. On ne le constate pas pour la virole du milieu.

« 2° Si la déchirure est due uniquement au manque de ductilité, on s'explique difficilement qu'elle ne se soit pas produite dans les moments où l'on a cherché à forcer la pression.

« 3° La position des accessoires qui se trouvaient sur la chaudière et qu'on retrouve vers l'avant n'est pas compatible avec le soulèvement de la partie antérieure qui aurait dû être la conséquence première et immédiate de la déchirure au foyer.

« 4° Si la déchirure a commencé par en bas, on s'explique mal qu'arrivant à la partie supérieure où elle suit une rivure, elle ait en même temps quitté cette rivure pour déterminer le fragment P. Pour que la position de ce fragment puisse être expliquée comme le fait

« M. Banneux, il faut qu'il ait d'abord cheminé avec l'avant, puis qu'il
 « ait été détaché et lancé par une force perpendiculaire à l'axe. Ces
 « faits se concilient mal avec une déchirure arrivant d'en bas. Si, au
 « contraire, les déchirures commencent au trou d'homme, le fragment *P*,
 « limité par ces déchirures, a pu être arraché suivant la rivure par la
 « vapeur sortant avec violence de l'ouverture qui s'est produite et par-
 « ticiper aux deux mouvements que signale M. Banneux.

« 5° Si la première déchirure du foyer doit être attribuée au
 « manque de ductilité, c'est à la pression résultant du dégagement
 « brusque de la vapeur que M. Banneux attribue les autres déchirures.
 « Dès lors on peut lui faire la même objection qu'il élève contre l'hypo-
 « thèse d'une rupture par tension, à savoir que la rupture aurait dû
 « avoir lieu suivant la génératrice la plus faible passant par l'axe du
 « trou d'homme.

« 6° Le calcul par lequel M. Banneux recherche le temps et la quan-
 « tité de charbon nécessaires pour obtenir une haute pression ne tient
 « pas compte des fuites qui ont dû, si la pression s'est élevée pendant
 « la nuit, diminuer la quantité d'eau et permettre ainsi à celle qui
 « restait dans la chaudière d'acquies rapidement une haute tempéra-
 « ture, sans avoir besoin d'une aussi grande quantité de chaleur.

« 7° La matière disposée suivant la génératrice qui passe par l'axe
 « du trou d'homme est, il est vrai, celle qui présente le moins de résis-
 « tance à l'action de la vapeur sur les anneaux, mais elle en présente
 « plus à la tension provenant des deux fonds que celle qui se trouve
 « dans une section circulaire traversant le trou d'homme.

« En combinant ces deux actions, ne serait-on pas tenté d'y trouver
 « l'explication des déchirures se produisant diagonalement et symétri-
 « quement autour de cette ouverture.

« En réunissant ces diverses considérations, ne pourrait-on pas
 « penser que l'hypothèse d'une rupture commençant au trou d'homme
 « par suite d'une surélévation de pression peut être admissible. »

M. BANNEUX présente ensuite les considérations suivantes :

« La recherche de la cause de toute explosion peut se faire par deux
 « voies. Ou l'on ne considère que l'aspect matériel des tôles rompues
 « en écartant toutes les autres circonstances, ou bien on n'admet que
 « les hypothèses que ne contredisent pas les témoignages désintéressés
 « recueillis au cours de l'enquête.

« Si l'on se place à ce second point de vue, il est difficile, écrit

« M. Hubert « d'assigner la cause exacte et les circonstances de l'explo-
« sion ».

« Les difficultés ne me paraissent pas moins grandes si l'on ne fait
« état que de déchirures attribuées à la pression interne.

« Suivant le grand axe du trou d'homme, c'est-à-dire la section la
« plus dangereuse du générateur entier, il faudrait une pression de
« plus de 22 atmosphères pour faire naître la rupture. Il en faudrait au
« moins le double pour amener des déchirures telles qu'elles existent
« au nombre de quatre dans la région du trou d'homme.

« Or, peut-on raisonnablement admettre :

« 1° Que la pression ait atteint le taux formidable de 22 atmosphères.

« 2° Qu'elle ait même dépassé cette puissance inconnue, et rompu
« la tôle médiane suivant deux sections différentes de celle qui était le
« plus menacée en laissant celle-ci intacte.

« Si désireux que je sois de voir la contradiction s'affirmer, je doute
« fort que l'on fasse une concession de cette importance à l'hypothèse
« de la pression. On ne peut caler les soupapes dans le cas du généra-
« teur O... et la surcharge dont il faudrait disposer pour atteindre
« ce but se chifferrait par une centaine de kilogrammes ou plus à appli-
« quer sur les leviers.

« De plus, il s'agirait en l'espèce d'une pression statique, il n'y aurait
« pas de force vive instantanée à amortir, la déchirure devrait être
« unique et elle est double à la tôle du trou d'homme. Pour ce qui me
« concerne, je ne saurais croire au développement d'une tension sem-
« blable, trop de circonstances s'y opposant. Quoi qu'il en soit, ceux qui
« l'admettent auront néanmoins à résoudre la question de savoir en
« quel point la chaudière a tout d'abord cédé. Car il importe de le
« remarquer, l'hypothèse que j'ai faite sur la rupture initiale au coup
« de feu n'est pas en contradiction avec cette surélévation de pression.
« Seulement on devrait admettre et cette surélévation et l'altération
« profonde de la tôle au coup de feu. Or, cette dernière hypothèse
« suffit.

« Si l'on repousse totalement ou partiellement l'idée d'une pression
« anormale, il faudra désigner ou adjoindre une autre cause pour
« expliquer l'explosion. Cette autre cause, je la trouve agissant et se
« manifestant à la tôle du coup de feu qui se déchire parce qu'elle
« manque de résistance relative, par suite de son peu de ductilité, du
« refroidissement et des contractions moléculaires qui sont très sen-

« sibles en cet endroit du générateur. C'est le point faible de toute chau-
« dière; celui sur lequel nous portons le plus spécialement notre atten-
« tion et qui fait l'objet des plus fréquentes réparations.

« Le défaut de soudage, le boursoufflement des mises constituant
« la tôle, les altérations de tout genre, les fuites, c'est plus particu-
« lièrement au coup de feu qu'on les constate.

« Mais on fera observer que ce rôle est trop commode, que ces
« circonstances ne suffisent pas pour incriminer la tôle du coup de feu
« et la charger de tout le mal.

« Effectivement je ne l'aurais pas fait et me serais abstenu d'indiquer
« une cause à défaut de motifs, si le soulèvement du générateur vers
« l'avant ne m'avait conduit à admettre ce défaut de résistance. Mais
« les partisans de la rupture au trou d'homme ne déclarent pas non
« plus cette résistance intacte. Les déchirures supérieures doivent
« s'étendre inférieurement, latéralement au lieu de se propager suivant
« la couture, de part et d'autre du générateur, elles envahissent la
« tôle du coup de feu en plein fer et s'y étendent symétriquement et
« parallèlement, à peu de chose près, à la rivure transversale. Or,
« suivant cette dernière, l'effort opposé à la rupture n'est que les 6/10
« de celui qui correspond à la tôle pleine.

« Si la tôle moyennue, sous l'action de la pression intérieure, s'est
« tout d'abord étalée sur place, les deux tronçons d'avant et d'arrière,
« qui ont dû s'opposer à la séparation, auraient cédé suivant les cou-
« tures. Et, dans ce cas encore, une partie seulement de la section
« droite aurait été entamée attendu que la virole qui s'est ouverte a
« conservé finalement une courbure qui aurait permis aux deux autres
« tronçons de rester attachés inférieurement sur une forte partie de la
« couture.

« Si réellement l'explosion a commencé ainsi, la chaudière s'est
« entièrement ouverte par le milieu en un clin d'œil. Je ne pense pas
« que, dans ces conditions, les conséquences eussent été aussi graves
« sous le rapport des projections. La virole antérieure, comme celle
« de l'arrière, n'aurait pas franchi les obstacles environnants qui se
« seraient opposés à sa course.

« La raison déterminante qui m'a forcé de traduire les faits obser-
« vés par une hypothèse spéciale, est le soulèvement du générateur
« qui, pour moi, est chose indéniable. Pour que la virole d'avant n'ait
« frappé le sol qu'à 50 mètres de sa position première, pour qu'elle

« ait franchi cet espace en respectant dans sa trajectoire les haies
« vives qui se succèdent dans les jardins environnants et qui ne con-
« stituaient pas pour elle des obstacles sérieux, pour qu'elle ait, à
« quelques mètres de sa chute, décapité un arbre de 4 à 5 mètres
« de hauteur, il a fallu nécessairement qu'à l'instant de la projection
« l'axe du générateur présentât une inclinaison sensible. La même
« conséquence découle de la position, à 70 mètres de la chaudière et
« de sa pénétration dans le sol, du couvercle du trou d'homme. On
« l'aurait indubitablement retrouvé à proximité du générateur si celui-ci
« avait conservé sa position primitivement horizontale.

« Cette constatation et la conclusion naturelle qu'on en déduit domi-
« nent toute l'étude de l'explosion. Elle en constitue le nœud et peut
« résumer toutes nos divergences. Si ce phénomène de déviation de
» l'axe du générateur est contestable, je me déclare impuissant à
« assigner à l'explosion une cause raisonnable, mais aussi, s'il est
« admis, force sera de reconnaître que le générateur a été soulevé
« avant d'exploser, c'est-à-dire, antérieurement à la naissance des
« déchirures au trou d'homme.

« Quelle peut être la cause de ce phénomène préluant à l'explo-
« sion? J'ai répondu. La rupture au coup de feu, rupture qui se pro-
« duit dans une région que l'on déclarera affaiblie en toute hypo-
« thèse.

« Cette première déchirure provoquera le soulèvement du généra-
« teur, l'écoulement du liquide, et par suite, des abaissements succes-
« sifs de pression pendant le court instant qui sépare cet accident préa-
« lable de celui de l'explosion proprement dite.

« La force vive consommée par l'arrachement des tôles, le renver-
« sement des murs, les projections de tout ce qui se trouvait au con-
« tact ou dans le voisinage du générateur ne sauraient être attribués à
« l'effet d'une pression quelque grande qu'on la suppose. L'agent
« destructeur n'est autre que la chaleur contenue dans la masse liquide
« à laquelle l'équilibre calorifique brusquement rompu, a rendu la
« liberté. J'ai fait allusion dans mon rapport à un phénomène naturel
« très connu et élucidé, celui des geysers, afin de rappeler qu'il suffit,
« dans cet ordre d'idées, d'une différence de quelques degrés de tem-
« pérature pour provoquer des effets dont l'imagination a peine à se
« représenter l'énergie et ensuite parce que cette théorie est sanction-
« née par des observations rigoureuses et des expériences de labora-

« toire. Il n'y a donc pas lieu de hasarder à ce propos, je pense, les
« objections que l'on a présentées relativement aux explosions dites
« foudroyantes.

« Mais poursuivons l'analyse de l'explosion. La déchirure au foyer
« produite, il en résulte, par suite de l'écoulement du liquide, une
« baisse instantanée dans la tension, laquelle peut être suivie d'une
« deuxième, d'une troisième, etc., tant que dure la fuite, c'est d'ail-
« leurs en général l'affaire de quelques secondes, dans les cas d'explo-
« sions. Successivement aussi, dans le générateur, le calorique éman-
« cipé se transforme en force vive, d'où des soulèvements répétés de
« la masse liquide dans la chambre de vapeur, soulèvements plus ou
« moins violents et eu rapport intime avec l'influence exercée par les
« fuites sur la pression. Cette force vive sensible développée peut être
« très réduite, sans action visible, mais elle peut aussi, suivant le cas,
« dégager une puissance irrésistible.

« Dans toutes les explosions dont les effets sont comparables à ceux
« que j'ai décrits pour le générateur O., cette transformation de calo-
« rique intervient ; son existence est d'ailleurs attestée par la gravité
« des conséquences mêmes de ces explosions.

« Cela posé, quel peut être le mode d'action de ce travail énorme
« rendu brusquement disponible et qui exige, par dessus tout, pour
« être amorti, outre la résistance des tôles, la ductilité du métal ?

« L'action se fera sentir en tous les points de la masse : la surchauffe
« existe partout ; l'eau tendra à jaillir dans tous les sens, notamment
« vers la chambre de vapeur où elle est en contact d'un fluide com-
« pressible. Mais, dans les premiers instants, elle agira surtout d'une
« façon dangereuse sur les deux fonds du générateur. Ces fonds auront,
« s'ils ne se rompent, à amortir des percussions successives de puis-
« sance très variable, mais aussi sans limite et qui pourront très aisé-
« ment mettre en pièce la chaudière à la manière de choes longitudi-
« naux formidables dont nous ne saurions peut-être reproduire autre-
« ment l'intensité.

« L'action de ces percussions extraordinaires dérouté les prévisions
« que l'on pourrait risquer sur la disposition et la nature des ruptures.
« On doit, en cas semblable, faire entrer en ligne de compte non un
« simple effort statique, mais, ce qui complique singulièrement le pro-
« blème, des actions dynamiques instantanées sur lesquelles l'expé-
« rience ne nous a pas encore renseignés.

« Au surplus, la difficulté de définir d'une façon précise la raison
« qui, notamment, a réduit notre générateur en trois fragments, c'est-
« à-dire produit des cassures, s'impose aussi pour la tôle médiane
« dans le cas où l'on supposerait la rupture première ouverte au trou
« d'homme sous le coup de la pression interne. J'ai montré au comité
« du cinquième arrondissement le plan de la chaudière qui, en 1868,
« fit explosion à la Société de Maribaye ; les tôles sont pour ainsi dire
« réduites en miettes bien que la pression statique n'ait joué aucun rôle
« dans cet événement.

« Ce n'est donc pas à ma façon d'expliquer l'explosion que cette
« objection fait le procès. C'est à la nature intime des tôles constituant
« la chaudière. Je considère mon hypothèse des actions dynamiques
« comme justifiant cette conséquence autant qu'il est possible, du
« moins dans l'état de nos connaissances. Je n'invoque que le jeu de
« forces indiscutables, sur les manifestations desquelles on ne peut
« entretenir, me semble-t-il, le moindre doute.

« Inutile d'ajouter que les déchirures dues à ces actions brusques
« qui saisissent la chaudière en tous ses points à la fois sont produites
« en même temps et que les projections des fragments séparés est l'acte
« terminal et le plus souvent inévitable dû à la mise en œuvre de la
« force vive emmagasinée dans le liquide du générateur. On ne peut
« concevoir, en effet, un tronçon, isolé d'abord, et se rompant ensuite
« sous l'action d'impulsions qui ne sauraient plus lui imprimer que de
« la force vive et le transporter comme un corps libre débarrassé de
« toute entrave.

« Ces considérations générales me permettront de répondre en quel-
« ques mots aux objections de M. Hubert.

« I. S'il n'y avait eu tout d'abord que deux fragments, la rupture
« subséquente de l'un d'eux serait incompréhensible. Après la première
« séparation, il n'y a plus d'effet possible que la projection des seg-
« ments détachés.

« II. La déchirure au foyer aurait pu se produire à l'instant où l'on
« cherchait à forcer la pression, sans y parvenir, peut-être aussi la
« veille du jour de l'explosion ou le lendemain, attendu que le cycle
« des mêmes phénomènes s'accomplit.

« Il est très difficile d'assigner le terme d'une action qui agit chaque
« jour pour déchirer la tôle et finit par avoir raison de sa résistance.

« Pliez brusquement et alternativement dans les deux sens un fil de

« fer de qualité très ductile, il se rompra sous un léger effort, après
« qu'il a résisté à un plus violent.

« D'autre part, je crois le refroidissement plus dangereux, et le tra-
« vail moléculaire qui en résulte plus à craindre qu'un accroissement
« de tension d'une demie ou d'une atmosphère.

« III. J'ai exprimé dans mon rapport l'avis que ces accessoires
« avaient été projetés en tout premier lieu, peut-être à l'instant et par
« le fait de la déchirure au coup de feu. Mon impression était qu'ils
« n'avaient pu participer au mouvement qui provoqua l'explosion pour
« plusieurs raisons :

« a) On les retrouva tous, leviers, contrepoids, soupapes, sifflet,
« flotteur, serpentín et bache à eau chaude, à 5 ou 6 mètres du tron-
« çon en place sur lequel ils étaient attachés.

« b) Tous avaient été projetés en dehors de l'axe du générateur,
« vers la même région.

« c) Enfin, et surtout parce que l'une de ces parties, la garniture
« inférieure du niveau d'eau, composée de la douille verticale, de son
« robinet et du conduit l'assujettissant au centre du fond antérieur, a
« manifestement été lancée horizontalement, à peu de chose près. Je l'ai
« retrouvée, en effet, dans la seconde haie, assez touffue, en K, à
« petite distance du sol, enfouie et restée dans les branchages qu'elle
« avait brisés et saccagés sur une trentaine de centimètres de profon-
« deur lors de sa pénétration. Impossible d'admettre que cet objet ait
« sauté à l'instant du déchirement général, alors que la chaudière était
« inclinée puisqu'il n'a pas pénétré dans la haie par le haut.

« Comme les accessoires, il avait dévié quelque peu vers le nord.
« Cette déviation, je la constate sans prétendre l'expliquer, surtout
« pour ce qui concerne le serpentín et la bache établis primitivement
« d'un côté du générateur et se retrouvant aujourd'hui de l'autre. Il y
« a, du reste, dans la cinématique de l'accident des constatations bien
« autrement bizarres, que j'ai cru inutile de consigner spécialement
« parce qu'elles m'ont paru sans rapport aucun avec la cause.

« IV. Dans mon opinion la rupture a commencé dans le foyer. Jus-
« qu'où s'est-elle étendue de prime abord? Je ne sais, mais, à mon
« sens, les autres déchirures doivent être attribuées aux chocs longi-
« tudinaux provenant de la rupture des conditions de l'équilibre calo-
« rifique de la masse liquide.

« En ce moment, la section dangereuse devait nécessairement abou-
« tir aux deux extrémités de la déchirure produite inférieurement.

« Quant au fragment *P* isolé, il aurait pu rester attaché ou à la tôle
« médiane, qui lui aurait imprimé un mouvement circulaire perpendi-
« culaire à l'axe, ou à la virole d'avant, qui l'aurait emporté suivant
« l'axe. Or, on le retrouve à une assez forte distance, dans une direc-
« tion comprise entre celles qu'il aurait dû suivre dans l'une ou l'autre
« de ces conditions. J'ai pensé qu'il s'était ressenti plus ou moins de
« ces deux influences. Le segment de la même tôle qui lui est opposé
« a cédé, lui, entièrement à l'entraînement de la virole postérieure.

« Je crois impossible, comme le voudrait M. Hubert, que le frag-
« ment *P* ait été projeté par le dégagement de la vapeur après la rup-
« ture du trou d'homme, car alors : a) le fragment *P* aurait été lancé
« suivant l'axe dans la direction du mouvement de la première virole ;
« b) cette action de la vapeur, qui aurait eu assez de puissance pour
« arracher le fragment en le repliant contre la rivure, n'aurait pas man-
« qué de faire chavirer, vers l'avant, le tronçon du foyer et de le cul-
« buter. Or, dans ce cas, il aurait été dirigé contre le sol, dans lequel
« il se serait implanté à côté du cendrier.

« Il y aurait peut-être lieu de se demander alors si la déchirure
« émanant du dessus aurait dû se propager sur toute la section trans-
« versale.

« Relativement à ces effets complexes d'arrachement par flexion, je
« dirai que l'on ne constate rien dans les lèvres des cassures qui per-
« mette de confirmer cette opinion. Toutes les déchirures sont droites,
« sans inflexion, à tel point qu'il suffirait, pour reconstituer le géné-
« rateur, la tôle moyenne étant cylindrée à nouveau, d'emboîter les
« cassures les unes dans les autres en déplaçant les fragments dans le
« sens longitudinal.

« D'ailleurs, dit M. Hubert, cette discussion est toute platonique. Il
« sait mieux que personne qu'il n'existe pas d'explosion, même celle
« qui se produirait sous nos yeux, ou que nous aurions provoquée,
« dont on puisse expliquer par le menu tous les effets. Il faudrait tout
« d'abord être renseigné sur la constitution intime du générateur en
« tous ses points.

« V. J'ai toujours attribué les déchirures, abstraction faite de celle
« du foyer, à une action longitudinale irrésistible.

« VI. Dans mon rapport, j'ai examiné le point de savoir s'il était
« possible, sous un feu ardent, tel qu'il existe en plein travail, d'amener
« la pression à un taux capable de faire éclater le générateur O...

« soit 20 à 22 atmosphères, par ses parties les plus dangereuses qui, « cependant n'ont pas cédé par l'explosion.

« J'ai admis pour cela que le liquide restait confiné dans le géné-
« rateur, que toute la chaleur produite était employée à forcer la pres-
« sion et que rien ne s'envolait extérieurement. J'ai conclu à la possi-
« bilité de voir engendrer, à la rigueur, une semblable pression,
« seulement cet état de choses aurait exigé au moins 30 à 40 kilo-
« grammes de charbon de qualité, alors que nous n'avions, sur la grille,
« qu'une vingtaine de kilogrammes d'une matière presque incom-
« bustible.

« En tenant compte des pertes, suivant M. Hubert, peut-être une quan-
« tité relativement petite de charbon suffirait-elle à la production des
« calories nécessaires. Je n'examinerai plus la question de la qualité du
« charbon, on peut évidemment ne pas accueillir la déposition du
« chauffeur.

« Pourtant, un point sur lequel l'accord se fera, c'est que la com-
« bustion serait restée indéfinie pendant plusieurs heures et ne se serait
« pas produite alors que le foyer était le plus chaud.

« Je suis donc parti, à 8 heures du soir, d'une quantité d'eau de
« 1,905 litres. Je l'ai supposée constante jusqu'à minuit, instant de
« l'explosion. Or, la chaudière, c'est une donnée de chaque jour, perd
« 38^{kg},9 par heure. La perte, à minuit, sera donc de 156 kilo-
« grammes. Ce qui correspond à un poids moyen d'eau chauffant dans
« le générateur de 1,827 kilogrammes, chiffre peu différent du précé-
« dent.

« Mais, la pression augmentant, il en est de même des pertes. Appré-
« cions cette influence nouvelle. A 8 heures, nous avons 2 atmosphères
« et à minuit, 20, soit une pression moyenne de 11 atmosphères. Or,
« les fuites sont proportionnelles aux racines carrées des pressions,
« donc, la perte moyenne sera, approximativement, dans le cas pré-
« sent, à minuit :

$$« 156 \times \sqrt{\frac{11}{2}} = 360 \text{ kilogrammes environ.}$$

« Ce qui répond à une masse d'eau de 8 à 12 heures de 1,785 kilo-
« grammes. Cette différence minime de 6 p. o/o sera-t-elle de nature à
« modifier la conclusion que j'ai déduite d'un calcul déjà approximatif?
« C'est ainsi, par exemple, que j'ai admis une consommation de 28 kilo-
« grammes par heure se rapportant en marche normale à 1,600 kilo-

« grammes d'eau pour l'appliquer aux 4,905 kilogrammes. Mais un élément, surtout contestable, parce qu'il est insaisissable, c'est le coefficient de 25 p. % que j'admets un peu gratuitement, je le crois exagéré, pour la quantité de chaleur dégagée qui se porte sur le même fluide.

« Dans tout ce calcul, je me suis mis dans les conditions les plus avantageuses à la théorie de la surélévation de pression.

« VII. La combinaison des deux actions ne peut empêcher la pression intérieure de produire une traction spécifique double dans le sens transversal de celle qui a lieu longitudinalement.

« Sans examiner autrement l'influence générale de la connexité de ces deux efforts sur un corps quelconque, je ne fais aucune difficulté pour avouer qu'elle me paraît insensible dans une matière comme le fer, que la section dangereuse est bien celle qui se développe suivant la génératrice et que la rupture, dans le cas de l'homogénéité parfaite, doit toujours apparaître suivant elle.

« Les constructeurs anglais n'ont-ils pas tout fait pour supprimer les coutures et les sections de moindre résistance longitudinales. L'un d'eux, Wright, est l'inventeur des rivures en hélice qui conduisent certainement à un minimum de réduction de la résistance, mais qui, malheureusement, doublent la main-d'œuvre.

« Dans l'action des percussions sur les fonds, les sections dangereuses, la rupture au foyer étant produite, doivent être, me semble-t-il, la couture d'arrière, les alentours du trou d'homme et la rivure d'avant en regard de cette même ouverture.

« Au surplus, les deux influences que voudrait combiner M. Hubert existent dans toutes les hypothèses, elles ne sont pas spéciales à l'en-semble des conditions qui, suivant moi, auraient amené la rupture au trou d'homme. »

M. FIRKET constate, à la suite de cette communication, que les divergences de vues qui existent entre lui et l'honorable préopinant ne sont pas aussi grandes que celui-ci semble le croire, quant à la tension sous laquelle l'explosion s'est produite. Elles concernent surtout les déchirures initiales et, sous ce rapport, les observations de M. Hubert tendent à appuyer dans une certaine mesure l'opinion émise par M. le Président.

Aucun des membres du comité ne demandant plus la parole, M. Firket prononce la clôture de la discussion.

**Observations de M. le Directeur divisionnaire
L. Timmerhans.**

Je ne partage pas toutes les idées émises par M. l'ingénieur Banneux ; il me paraît cependant avoir établi d'une manière pertinente deux points importants :

1° L'impossibilité que la quantité de matières imparfaitement combustibles laissées dans le foyer ait pu développer dans la chaudière la tension nécessaire (une vingtaine d'atmosphères) pour la déchirer, en lui attribuant, dans toutes ses parties, la résistance déduite des expériences auxquelles ont été soumis des fragments de ses tôles ;

2° La formation de la déchirure initiale dans la tôle du foyer.

Les effets de projection constatés me semblent ne pouvoir laisser de doute sur ce dernier point ; j'entreprendrai de démontrer que l'opinion de M. Banneux trouve une entière confirmation dans la manière dont les déchirures se sont produites.

Dans l'état de liaison de la virole médiane aux viroles des extrémités les lignes de moindre résistance de la tôle du trou d'homme se présentaient manifestement suivant ses diagonales. Or, l'une des déchirures de cette tôle s'est faite suivant une ligne correspondant sensiblement à sa génératrice médiane, qui n'a pu devenir la ligne de moindre résistance de sa partie antérieure qu'après la séparation de la virole d'avant.

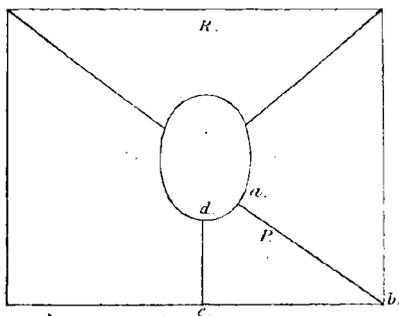
Si les déchirures étaient parties du trou d'homme, comme semble l'admettre M. Hubert, le fragment *P*, limité par les déchirures provocatrices de celles de la virole d'avant, eût dû, ou bien rester attaché à celle-ci, comme le fragment *R* est resté attaché à la virole d'arrière, ou bien si, sous l'action interne, il s'était déchiré en se pliant suivant la rivure avant que la séparation du tronçon du foyer fût complète, être projeté vers l'avant de la chaudière, tandis qu'il l'a été sur le côté.

Il est encore à remarquer que les déchirures des tôles d'avant et d'arrière se sont produites d'une manière parfaitement symétrique, ce qui explique que ces tronçons ont été projetés exactement dans la direction de l'axe de la chaudière. Ce parfait équilibre des actions de projection de chaque côté du plan vertical passant par cet axe ne se fut cependant pas produit pour la virole d'avant, si les déchirures, parties du trou d'homme, ne s'étaient pas elles-mêmes propagées tout à fait symétriquement par rapport à ce plan. Cette symétrie, qui fait défaut

dans l'hypothèse de M. Hubert, se montre, au contraire, complète dans la thèse soutenue par M. Banneux.

Pour moi, les choses ont dû se passer comme suit :

Une déchirure circulaire, partie du foyer, ayant détaché la virole d'avant, la projection de l'autre tronçon, retardée par les résistances plus grandes que le soulèvement de la chaudière avait créées à l'arrière, et qui étaient encore augmentées par la présence en ce point de la cheminée, ne s'est pas faite assez instantanément pour que l'action interne, développée par le calorique « émancipé », selon l'expression pittoresque de M. Banneux, n'ait pu continuer à exercer *sur place* ses effets destructifs. Par le départ de la virole d'avant, la ligne de moindre résistance de la partie antérieure de la virole du milieu s'étant transportée à la génératrice passant par l'axe du trou d'homme, une première déchirure s'est faite suivant cette ligne et s'est continuée, au delà du trou, suivant les diagonales de la tôle supérieure, lesquelles étaient restées, dans cette partie, les lignes de moindre résistance par suite de sa liaison avec la virole d'arrière. Simultanément, comme



effet plus ou moins accidentel, la partie triangulaire P se déchirait à la diagonale ab , et était projetée dans une direction peu différente de celle suivant laquelle la virole médiane s'est développée.

J'insiste sur le sens de la projection de ce fragment P , parce qu'il démontre clairement que la

déchirure ab s'est faite *postérieurement* à celles suivant bc et cd .

Mais M. Banneux a tort, selon moi, quand il considère l'explosion comme s'étant produite sans surélévation de la tension de la vapeur de la chaudière, bien qu'en se plaçant à un point de vue exclusivement théorique, il treste dans le vrai en soutenant que cette surélévation de la pression n'était pas nécessaire. Mais ici il faut quitter les régions théoriques pour s'en tenir aux faits, dégagés des erreurs dont ont pu les entacher des déclarations suspectes.

Il y a tout d'abord lieu de faire remarquer que, par cela même que

la déchirure initiale s'est faite à la tôle exposée au coup de feu, cette tôle ne devait plus présenter qu'une résistance réduite, excluant la nécessité, pour qu'on puisse reporter la cause de l'accident à une surélévation de la tension, de la forte pression calculée par M. Banneux.

Ce qui serait incontestablement surprenant, c'est que cette tôle se fût déchirée dans des conditions qui auraient diminué l'effort qu'elle supportait dans la marche normale de l'appareil, le feu étant dormant et la pression abaissée à 2 1/2 atmosphères, alors surtout *qu'aucun indice inquiétant ne s'était manifesté auparavant.*

Comme je l'écrivais dans le rapport que j'ai adressé au parquet en lui transmettant le procès-verbal de l'accident, « on est plus naturellement porté à croire qu'à la mauvaise qualité de la tôle a dû se joindre une autre cause pour déterminer l'explosion. Cette cause ne peut guère se trouver que dans une augmentation de la pression, et cette pression surélevée dans une chaudière, où, malgré toute l'activité du feu, on ne parvenait pas à porter la pression au delà de 3 1/2 atmosphères, ne peut elle-même s'expliquer que parce que l'on » avait empêché les fuites de vapeur en mettant les soupapes dans » l'impossibilité de fonctionner ».

La chaudière ne faisait entendre aucun bruit quelques instants avant l'explosion. Ce fait, attesté par un voisin et considéré par M. Banneux comme contredisant l'hypothèse d'une forte pression, me semble pouvoir être interprété tout différemment, car on nous représente en même temps la chaudière comme perdant l'eau par tous ses joints, même pendant la nuit, alors que la pression était affaiblie, et il devient difficile d'admettre que cette même chaudière ne donnât pas lieu, dans les mêmes conditions, à la moindre fuite de vapeur.

Mais la chaudière était-elle réellement en aussi mauvais état qu'on l'a dit à l'enquête? Le fait est infirmé par la déclaration délivrée par le chaudronnier qui l'a visitée en décembre dernier. Les fuites d'eau par les joints produisent d'ailleurs des corrosions extérieures des tôles dont on n'a constaté aucune trace dans le cas actuel. Et si la chaudière n'était pas le détestable appareil qu'on nous dépeint, l'impossibilité qu'on éprouvait d'y atteindre la pression du timbre, la quantité considérable d'eau qu'on y consommait, ne provenaient-elles pas des fuites de vapeur qui se faisaient par les soupapes en mauvais état? M. Banneux rappelle que, dans l'une de ses visites de l'atelier, il a constaté que les soupapes étaient surchargées; qu'à cette occasion il a menacé les

propriétaires d'un procès-verbal; que, dans sa dernière visite de décembre 1885, ceux-ci se sont plaints d'être empêchés par les fuites des soupapes d'obtenir la pression dont ils avaient besoin. Il est encore constaté au rapport que les réparations conseillées par M. Banneux pour remédier à ce défaut n'étaient pas faites lorsque l'accident est survenu, et qu'*au su de tous, l'état défectueux des soupapes était l'un des points faibles de la chaudière.*

Dans ces conditions, faudrait-il trop s'étonner que l'on prit la précaution, ou plutôt que l'on commit l'imprudence, de surcharger les soupapes pendant la nuit, précisément pour prévenir des fuites qui, par leur bruit, eussent incommodé les voisins?

J'ai la conviction intime qu'il en a été ainsi, et si les conséquences de cet accident ne s'étaient pas bornées à des dommages matériels, j'aurais cru de mon devoir de réclamer une instruction judiciaire.

Les explosions de chaudière ont donné naissance à toutes sortes de conceptions que je crois bien près d'avoir fait leur temps. M. Hubert a fait remarquer dans la discussion que la théorie des explosions foudroyantes était abandonnée par les ingénieurs français, et je doute que l'accident invoqué par M. Banneux (explosion d'une défourneuse à Marihaye en 1867) puisse lui prêter quelque vie. J'ai eu à m'occuper de cet accident, et ma conviction a été et est restée que la cause en a été simplement le développement d'une pression énorme dans la chaudière, qui était au repos depuis une heure lorsqu'il s'est produit, par suite du serrage des soupapes à ressort dont elle était munie; l'appareil avait été confié, le jour de l'accident, à un ouvrier inexpérimenté. Je sais que cette explosion a été l'objet, de la part de M. l'ingénieur Thonard, d'un travail, très savant peut-être, mais qui m'a paru, si je me souviens bien, avoir le tort de conduire à la conclusion qu'il faudrait s'étonner que toutes les chaudières n'éclatassent pas.

Note complémentaire de M. l'ingénieur Banneux.

Fréquemment, au cours de l'exposé et de la discussion des causes et circonstances de l'explosion, j'ai eu à invoquer la transformation instantanée d'un liquide saturé et lui ai attribué, sans détours, les ruptures sans nombre constatées au générateur.

Si je suis dans le vrai, il se produirait dans toute explosion, sur une

plus ou moins grande échelle, un phénomène de ce genre. Tantôt les conditions spéciales de l'accident lui permettraient de se déployer sans graves dégâts; dans certains cas, il serait la cause flagrante de conséquences souvent incalculables.

Peut-être l'esprit de l'ingénieur doit-il être rendu attentif sur ce point; c'est à ce titre qu'il me paraît intéressant de chercher à élucider la question par le calcul, qui aura en outre l'avantage de ne laisser planer aucun doute sur la manière dont j'entends la génération de ce que, ci-avant, j'ai appelé « l'explosion proprement dite » ou « actions dynamiques », ou encore « calorique émancipé », etc.

Si dans une chaudière, par une cause quelconque, on vient à faire tomber brusquement la pression dans la chambre de vapeur, il s'ensuit une production non moins brusque de vapeur qui, en force vive, peut atteindre une intensité à laquelle les parois d'un générateur, quel qu'il soit, seraient incapables de résister.

Si, par exemple, il se produit au foyer une déchirure qui provoque une baisse immédiate dans la tension interne, le générateur tout d'abord se soulèvera vers l'avant, le liquide passera à l'arrière de la chaudière et le développement brusque de vapeur qui en sera la conséquence soumettra directement le fond antérieur, et, par réaction, le fond postérieur, à l'action de chocs qui pourront vaincre la résistance du récipient et en projeter les parties séparées, si toutefois la première déchirure ne permet pas, par sa position et ses dimensions, à évacuer le liquide; dans le cas contraire, la transformation thermique et, par suite, l'explosion, seront en quelque sorte extérieures (1).

Dans mon opinion, le premier de ces phénomènes serait survenu dans le générateur de Herstal au mois de mars dernier et il ne me semble pas devoir être exceptionnel.

Je me proposerai, actuellement, d'établir son importance, de rechercher s'il ne constitue pas l'un de ces énoncés vagues dont on se contente depuis longtemps en matière d'explosion. Si les considérations qui vont suivre sont irréprochables, on devra nécessairement accorder quelque attention à cette manière de voir.

Considérons une masse fluide, mélange de liquide et de vapeur saturée à la pression p_1 et à la température correspondante τ_1 enfermée dans un vase parfaitement clos. On diminue tout à coup cette pres-

(1) Il peut se faire également que les déchirures produites suffisent à amortir toute la force vive rendue libre.

sion p_1 qui pèse sur le liquide et on la fait tomber à la valeur p_2 inférieure à p_1 . De nouvelle vapeur qui se forme est projetée dans le vide relatif créé. Il s'agit d'en évaluer la force vive.

I. — EQUATION GÉNÉRALE DE L'HYDRODYNAMIQUE.

Considérons une masse dm élémentaire du mélange, celle par exemple qui passe en un point donné de la chambre primitive de vapeur animée d'une vitesse V pendant le temps dt . Cette masse dm aura une longueur Vdt .

Si ω est sa section, ρ sa densité, on pourra écrire :

$$dm = \omega \rho V dt$$

Cette masse est soumise à deux forces ou deux pressions actives ; l'une, antérieure $p\omega$, l'autre, postérieure $(p + dp)\omega$, c'est-à-dire à une résultante

$$p\omega - (p + dp)\omega = -\omega dp.$$

En conséquence, l'accélération de cette masse étant $\frac{dV}{dt}$,

$$-\omega dp = dm \frac{dV}{dt} = \omega \rho \frac{V dV}{dt} dt.$$

Donc

$$V dV = - \frac{1}{\rho} dp.$$

Si v est le volume spécifique, celui de l'unité de poids du mélange tel qu'il existe au point considéré, on aura :

$$g\rho v = 1 \text{ ou } v = \frac{1}{\rho g}$$

Par suite

$$\frac{V dV}{g} = - v dp$$

ou

$$\frac{V^2}{2g} = - \int_{v_1}^{v_2} v dp \quad (1)$$

v_1 et v_2 étant les valeurs des volumes spécifiques du mélange aux deux états initial et final.

C'est l'équation générale de l'hydrodynamique établie directement pour le cas spécial qui nous occupe.

Mais

$$\int v dp = vp - \int p dv.$$

Donc

$$\frac{V^2}{2g} = p_1 v_1 - p_2 v_2 + \int_{v_2}^{v_1} p dv \quad (2)$$

II. — EXPRESSION DU TRAVAIL EXTERNE EFFECTUÉ.

Représentons par U_1 la chaleur totale spécifique du mélange, c'est-à-dire celle de la masse de 1 kilogramme, de ce mélange, à la température de τ_1 et sous la pression p_1 correspondante. U_2 représentera la chaleur totale spécifique du mélange à la température τ_2 et sous la pression p_2 , la force vive du mélange étant supposée amortie et toute la masse réduite au repos.

Il est bien évident, la transformation dont il s'agit s'effectuant adiabatiquement, sans qu'il soit fourni ni soustrait de chaleur, que le travail extérieur produit s'est effectué tout entier aux dépens de la chaleur interne. La différence existant entre les quantités U_1 et U_2 , a été tout entière transformée en travail.

A représentant l'équivalent calorifique de l'unité de travail, on aura :

$$U_1 - U_2 = A \int_{v_2}^{v_1} p dv.$$

L'équation (2) deviendra donc

$$A \frac{V^2}{2g} = A (p_1 v_1 - p_2 v_2) + U_1 - U_2. \quad (3)$$

III. — EXPRESSIONS DES QUANTITÉS DE CHALEUR U_1 et U_2 .

A l'état initial nous ne considérons que la chambre d'eau. Si donc on compte les quantités de chaleur à partir du zéro absolu, origine arbitraire d'ailleurs, nous aurons

$$U_1 = c \tau_1,$$

c représentant la chaleur spécifique de l'eau en poids.

A l'état final, spécifié ci-avant, la quantité de chaleur U_2 se rapporte à un mélange d'eau et de vapeur.

Si x_2 est le titre du mélange, c'est-à-dire le poids de la vapeur existante par kilogramme de mélange, on aura :

1° Un poids d'eau $(1 - x_2)$ représentant une quantité de chaleur

$$(1 - x_2) c \tau_2.$$

2° Un poids de vapeur x_2 représentant une quantité de chaleur

$$x_2 (c \tau_2 + \rho_2)$$

ρ_2 désignant la chaleur latente interne du kilogramme de vapeur.

Donc

$$U_2 = (1 - x_2) c \tau_2 + x_2 (c \tau_2 + \rho_2),$$

c'est-à-dire

$$U_2 = c \tau_2 + x_2 \rho_2,$$

et

$$U_1 - U_2 = c (\tau_1 - \tau_2) - x_2 \rho_2.$$

Désignons par σ le volume spécifique de l'eau, très approximativement constant et égal à $\frac{1}{1000}$.

Par u_2 celui de la vapeur saturée à la température τ_2 on aura pour l'état initial :

$$v_1 = \sigma,$$

et pour l'état final :

$$v_2 = (1 - x_2) \sigma + x_2 u_2 = \sigma + x_2 (u_2 - \sigma).$$

Négligeant σ vis-à-vis de u_2 on aura :

$$v_2 = \sigma + u_2 x_2.$$

D'autre part, la chaleur latente totale r_2 d'une vapeur est égale à la chaleur latente interne ρ_2 augmentée de la chaleur latente externe due au travail extérieur produit et qui a pour expression $A p_2 u_2$.

Donc

$$r_2 = \rho_2 + A p_2 u_2,$$

d'où

$$\rho_2 = r_2 - A p_2 u_2.$$

En conséquence,

$$A (p_1 v_1 - p_2 v_2) = A \sigma (p_1 - p_2) - A p_2 u_2 x_2$$

$$U_1 - U_2 = c (\tau_1 - \tau_2) - x_2 r_2 + A p_2 u_2 x_2.$$

Ajoutant membre à membre, il vient :

$$A \frac{V^2}{2g} = A \sigma (p_1 - p_2) + c (\tau_1 - \tau_2) - x_2 r_2. \quad (4)$$

IV. — *Equation générale des mélanges saturés se transformant adiabatiquement.*

Il serait difficile d'établir cette formule, due à M. Clausius, sans trop de préliminaires. Je me contenterai donc de l'invoquer (1). Quand un mélange saturé se modifie sans qu'on lui soustraie ou lui fournisse du calorique, il existe entre la température τ du mélange, la chaleur latente totale r , le titre x , la relation :

$$cl\tau + \frac{xr}{\tau} = \text{const.}$$

A l'état initial, pour le cas spécial qui nous occupe,

$$x = x_1, \quad \tau = \tau_1, \quad r = r_1,$$

A l'état final

$$x = x_2, \quad \tau = \tau_2, \quad r = r_2.$$

Par suite,

$$cl\tau_1 = cl\tau_2 + \frac{x_2 r_2}{\tau_2}$$

ou

$$x_2 r_2 = c\tau_2 l \frac{\tau_1}{\tau_2}.$$

Notre équation (4) se transformera donc en la suivante :

$$A \frac{V^2}{2g} = A \sigma (p_1 - p_2) + c \left[\tau_1 - \tau_2 - \tau_2 l \frac{\tau_1}{\tau_2} \right]$$

ou

$$\frac{V^2}{2g} = \sigma (p_1 - p_2) + \frac{c}{A} \left[\tau_1 - \tau_2 - \tau_2 l \frac{\tau_1}{\tau_2} \right] \quad (5)$$

La puissance vive spécifique (2) se compose donc de deux parties. La première est souvent négligeable; si on la supprime, on arrive à la formule approximative

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{c}{A} \left[\tau_1 - \tau_2 - \tau_2 l \frac{\tau_1}{\tau_2} \right]$$

que Rankine a fait connaître et qui, dans son esprit, représentait :

« Le travail qui devient libre quand 1 kilogramme d'eau qui se

(1) Hirn. *Théorie mécanique de la chaleur*, t. II, page 72. — Clausius. *Mémoire V* traduit par M. Folie, page 182.

(2) La puissance vive est égale à la moitié de la force vive.

« trouve sous la pression correspondant à la température τ_1 est sou-
« mis subitement à la pression moindre, qui est relative à la tempéra-
« ture τ_2 (1).

C'est donc bien le problème que nous nous proposons d'examiner.

Mais nous verrons ci-après que cette suppression du premier terme n'est pas toujours permise ; souvent négligeable il arrive dans certains cas que sa valeur prédomine dans l'expression de la force vive spécifique.

Si donc nous représentons par H la hauteur à laquelle s'élèverait dans le vide 1 kilogramme d'eau saturée sous l'impulsion de la force vive qui le saisit lorsque sa température tombe instantanément de τ_1 à τ_2 , on pourra écrire :

$$H = \sigma (p_1 - p_2) + \frac{c}{A} \tau_2 \left[\frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_2} - l \frac{\tau_1}{\tau_2} \right] \quad (7)$$

Cas particulier où la différence des températures $\tau_1 - \tau_2$ est faible vis-à-vis de la température finale τ_2 .

On peut écrire

$$l \frac{\tau_1}{\tau_2} = l \left(1 + \frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_2} \right) = \frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_2} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_2} \right)^3 - \dots$$

Donc

$$H = \sigma (p_1 - p_2) + \frac{c}{A} \tau_2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_2} \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_2} \right)^3 - \dots \right]$$

ou

$$H = \sigma (p_1 - p_2) + \frac{c}{A} \frac{(\tau_1 - \tau_2)^2}{\tau_2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_2} + \frac{1}{4} \left(\frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_2} \right)^2 - \dots \right]$$

Et, très approximativement,

$$H = \sigma (p_1 - p_2) + \frac{c}{2A} \frac{(\tau_1 - \tau_2)^2}{\tau_2} \quad (8)$$

Ce problème se rapproche beaucoup de celui que M. Bauschinger a le premier résolu pour les gaz parfaits et qu'il a sans doute étendu au cas des vapeurs saturées dans l'un de ses mémoires qui n'a pas été

(1) *Philosophical Transactions*, 1854. — *Philosophical Magazine*, 1863. — Zeuner, *Théorie mécanique de la chaleur*.

traduit (1). M. Zeuner avait employé ces mêmes formules dans l'une de ses études (2). C'est à lui, notamment, que l'on doit le terme de correction qu'avait négligé Rankine et dont l'importance, comme nous le verrons ci-après, n'est pas toujours négligeable.

Dans les applications nous aurons à considérer l'eau à des températures variant de 100 à 150 degrés. Nous prendrons donc pour valeur de σ celle qui correspond à la température moyenne de 125 degrés.

Si σ_0 est le volume spécifique à 4 degrés, on aura :

$$\sigma = \sigma_0 [1 + K (125 - 4)] = \sigma_0 \cdot 1,057.$$

Soit donc, à très peu de chose près,

$$\sigma = 0.0011$$

Si p_1 et p_2 sont exprimées en atmosphères N_1 et N_2 on aura pour terme de correction

$$\sigma (p_1 - p_2) = 10333 \times 0,0011 (N_1 - N_2) = 11,37 (N_1 - N_2)$$

D'autre part, l'expression de la chaleur spécifique de l'eau est :

$$c = 1 + 0,00004 t + 0,000.0009 t^2 \quad (\text{Regnault})$$

Donc à la température moyenne $t = 125$ degrés on aura :

$$c = 1,019.$$

Par suite

$$\frac{c}{A} = 1,019 \times 42f = 432.$$

Les formules (7) et (8) pourront donc s'écrire :

$$H = 432 \left[\tau_1 - \tau_2 - \tau_2 l \frac{\tau_1}{\tau_2} \right] + 11,37 (N_1 - N_2). \quad (9)$$

$$H = 216 \frac{(\tau_1 - \tau_2)^2}{\tau_2} + 11,37 (N_1 - N_2). \quad (10)$$

Appliquons ces formules aux différentes conditions où le phénomène de la transformation brusque de l'eau saturée en vapeur se manifeste.

I. — APPLICATION AUX ÉRUPTIONS GEYSÉRIENNES.

Un geyser est une source d'eau chaude intermittente jaillissant du fond d'un puits naturel plus ou moins profond en communication avec des vides intérieurs et dans lequel la température du liquide varie avec la profondeur. Bunsen a réussi à déterminer ces températures quelques

(1) *Journal de Mathématique et de Physique de Schloemilch*, t. VIII et VI.

(2) Zeuner, *Das Locomotivenblashor*.

minutes avant une grande explosion. En aucun point la température du liquide n'atteignait celle de l'ébullition correspondant à la pression, c'est-à-dire à la profondeur.

Par suite d'actions souterraines, la colonne est soulevée; pour certaines parties du liquide la pression tombe, de sorte que leur température ne tarde pas à dépasser celle qui est en rapport avec le point nouveau d'ébullition. De là, la projection initiée.

Admettons que l'on considère la masse de 4 kilogramme d'eau à la profondeur de 10 mètres et à la température de 120 degrés, inférieure de 1 degré au point d'ébullition correspondant à ce niveau où la pression est de 2 atmosphères. Lors du soulèvement, cette masse de liquide est portée à 8 mètres par exemple et conserve cette température de 120 degrés supérieure de 3 degrés à la température de production de vapeur à la pression de 1^{at},8. Naturellement ce kilogramme d'eau sera projeté extérieurement.

Quelle en sera la puissance vive?

Dans ce cas spécial, nous avons :

$$N_1 = 2, N_2 = 1,8, \tau_1 = 273 + 120 = 393, \tau_2 = 273 + 117 = 390.$$

Donc, d'après la formule (10),

$$H = 216 \frac{9}{390} + 11,37 \times 0,2 = 4,99 + 2,27 = 7^m,26.$$

La force vive spécifique développée suffit donc pour lancer, dans le vide, à 7 mètres de hauteur, la masse d'eau de 1 kilogramme. Remarquons que ce premier mouvement aura pour conséquence une diminution de la pression sur les parties sous-jacentes et que celles-ci, à leur tour, en se soulevant, concourront par leur force vive à la production du phénomène général.

Ce simple examen montre ce dont est capable la force vive dégagée par la chaleur d'une masse liquide dont l'équilibre thermique est brusquement rompu.

Quant aux conditions admises ci-dessus, elles ne sortent pas des hypothèses possibles et réalisées; il existe de ces volcans d'eau dits « furieux » qui projettent leur contenu à 50, 60 et même à plus de 400 mètres de hauteur, au dire de certains explorateurs, sous forme de colonne cylindrique de 3 mètres et plus de diamètre et que masquent partiellement des flots de vapeur sortant de la gerbe (1). Si le liquide, au lieu d'être contenu dans un tube naturel, l'était dans un générateur

(1) E. Reclus. *Nouvelle Géographie*, t. IV.

à paroi métallique fermé supérieurement au dessus d'une chambre gazeuse, sa projection ferait tout simplement éclater le récipient comme on le constate dans certaines explosions et sans qu'il soit possible de déterminer *a priori*, d'une façon indiscutable, la disposition et le nombre des lignes de rupture. La résistance des matériaux telle que nous la connaissons n'est établie, que pour des limites d'efforts excessivement restreintes; ses lois n'ont rien de commun avec les phénomènes du genre de ceux que nous examinons.

Ce que l'on sait de la formation et de l'existence de ces sources, confirme absolument la théorie. Ainsi le tube du geyser va sans cesse en augmentant par la partie supérieure, grâce aux dépôts continus de silice dont sont formés les parois et le tertre du puits. Le « grand geyser » la plus remarquable de ces sources jaillissantes, n'était, il y a quelques siècles, qu'une simple source thermale. Au milieu du dix-septième siècle il donnait régulièrement une fois par jour. Vers 1804, il atteignit son maximum d'activité, les éruptions se succédaient quatre fois par jour. Actuellement le phénomène s'est considérablement ralenti, une éruption ne se produit plus que par période de vingt-quatre à trente heures (1).

D'autres volcans d'eau, naguère très énergiques, sont aujourd'hui réduits au repos le plus absolu.

Suivant Forbes et Tyndall l'énergie éruptive est éteinte lorsque le tube a acquis une profondeur pour laquelle la température de la masse liquide ne peut plus, en aucun point, dépasser le degré de l'ébullition correspondant.

Toutes ces considérations et constatations s'accordent pleinement avec le calcul et la théorie exposés ci-avant et sans lesquels elles seraient inexplicables et resteraient mystérieuses.

II. — APPLICATION A LA VIDANGE D'UNE CHAUDIÈRE SOUS PRESSION.

La vidange d'une chaudière sous pression est un phénomène quotidien, volontaire, en quelque sorte domestique et du même genre, toute proportion gardée, que le précédent.

Nous verrons ci-après que l'influence qu'elle peut exercer sur la baisse de la tension interne du générateur est infime et, qu'en fait, elle ne saurait se traduire par une conséquence dangereuse ou même visible.

(1) Credner, *Géologie et Paléontologie* (1878). — J. Leclercq, *La terre de glace* (1883).

Cette question de la vidange a été complètement traitée par M. Zeuner; elle prouve l'évidence de la transformation brusque de l'eau saturée en vapeur; pour cette raison je rappellerai très succinctement les résultats auxquels est parvenu le célèbre professeur de Bonn.

1^o Lorsque l'on pratique un orifice d'écoulement dans la chambre d'eau d'une chaudière, le fluide qui s'écoule est toujours chargé de vapeur.

2^o Le poids de cette vapeur augmente avec la pression bien que le poids du fluide écoulé reste à peu près constant.

L'action d'une augmentation de pression semble donc se traduire par une transformation plus grande d'eau en vapeur.

J'ai rapporté les résultats qui suivent à un orifice de vidange de 0^m2,04 de section.

Sous une pression de 2 atmosphères, la proportion d'eau vaporisée est de 4 p. %, le poids total écoulé par seconde 1^k.093 et la vitesse 70 mètres.

Sous une pression de 14 atmosphères, la proportion de vapeur est de 16 p. %, le poids total du mélange écoulé par seconde 1^k.130 et la vitesse 304 mètres. Entre ces deux pressions, ces éléments varient à peu près régulièrement;

3^o De 4 à 12 atmosphères de tension la vitesse d'écoulement de l'eau saturée passe de 143 à 283 mètres et la quantité écoulée par seconde de 1^k.106 à 1^k.126.

Dans les mêmes conditions de pression, on aurait pour l'eau froide, une vitesse variant de 23 à 47 mètres et la quantité de liquide écoulé par seconde varierait de 25 à 47 kilogrammes.

Ces différences mettent hors de doute l'influence de la transformation de l'eau en vapeur par suite de la chute de pression.

De là résulte cette conséquence due à la presque invariabilité du poids du mélange saturé écoulé :

Dans la vidange d'une chaudière s'effectuant sous faible ou sous forte pression, la variation du niveau sera à peu près la même dans les deux cas ainsi que la durée de l'opération.

III. — APPLICATION AU GÉNÉRATEUR EN MARCHÉ.

Lorsqu'un générateur fournit d'une manière courante et régulière la vapeur nécessaire au fonctionnement des machines, il se produit dans

la chambre de vapeur et à chaque instant, des variations de pression en rapport avec l'importance de la prise de fluide moteur.

Comment chiffrer cette influence ?

Nous admettrons une chambre de vapeur de 1,500 litres. On enlève instantanément 20 litres de vapeur. La pression tombe d'une très légère fraction.

Nous pouvons supposer, dans les limites de ces variations, que la vapeur se comporte comme un gaz parfait dont la température serait invariable.

Le volume de la chambre de vapeur est C et la pression initiale est p ; on enlève une quantité de fluide exprimée par $\frac{C}{n}$; la pression finale est $p' < p$. On aura donc,

$$p' C = p \left(C - \frac{C}{n} \right)$$

d'où

$$p' = p \left(1 - \frac{1}{n} \right).$$

Nous avons supposé

$$\frac{C}{n} = 20 \text{ donc } n = \frac{C}{20} = 75$$

donc

$$p' = p \left(1 - \frac{1}{75} \right) = 0,987 p.$$

Pour une tension initiale

$$p = 4^{\text{atm}} \text{ et } \tau_1 = 273 + 144 = 417$$

on aura une tension finale

$$p' = 3^{\text{atm}},948 \text{ et } \tau_2 = 273 + 143,95 = 416,95$$

La correction de la valeur de H sera donc, (10),

$$11,37 (N - N') = 11,37 \left(\frac{N}{n} \right) - 11,37 \times \frac{4}{75} = 0,606$$

Le second terme,

$$216 \times \frac{0,05^2}{416,95} = 216 \frac{0,25}{41695} = 0,001$$

Par suite

$$H = 0,001 + 0,606 = 0,607$$

On voit que, dans ce cas, c'est le terme négligé par Rankine qui

prédomine à tel point que l'on pourrait s'en tenir à la formule très approchée :

$$H = 11,37 (N_1 - N_2) = 11,37 \frac{N_1}{n}$$

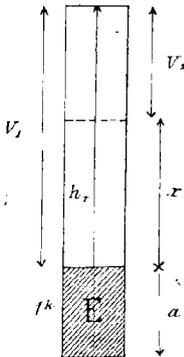
Dans le vide, la force vive spécifique suffirait pour élever à 0^m,61 de hauteur la masse de 1 kilogramme d'eau.

Dans la chaudière même on doit rester beaucoup en dessous de ce résultat. On a supposé, en effet, que la prise était absolument instantanée; que le soulèvement s'effectuait sans rencontrer de résistance alors qu'il aura à comprimer tout un matelas de vapeur. La formule ne pouvait d'ailleurs s'appliquer entièrement à ce cas particulier d'une chaudière, attendu qu'elle a été démontrée dans l'hypothèse d'une contre-pression constante p_2 . Ce qui reste vrai néanmoins, c'est l'expression de la puissance vive H , mais cet élément ne représentera plus ici la hauteur qui serait due à l'impulsion première, attendu que la chambre de vapeur se comprimera sous son action et opposera une résistance très sensible au mouvement du liquide.

Pour se rendre compte de cette résistance, considérons 1 kilogramme d'eau saturée en contact avec la fraction qui lui correspond, de la chambre de vapeur. — Si A_v et A_e représentent les capacités des deux chambres de vapeur et d'eau, chaque kilogramme d'eau aura à comprimer un volume V_1 initial de vapeur, exprimé en litres,

$$V_1 = \frac{A_v}{A_e} \text{ ou en mètres cubes } \frac{V_1}{1000} = \frac{1}{1000} \frac{A_v}{A_e}$$

variable donc d'une chaudière à l'autre.



A l'instant initial nous avons 1 kilogramme d'eau E en contact avec le volume V_1 de vapeur en litres. Par l'effet de la compression ce volume V_1 se réduira à V_2 . Or, le travail disponible est : H .

Ce travail est absorbé par le soulèvement de la masse E dont le niveau s'élève de x et par le travail de compression supporté par la vapeur.

Si a est la hauteur primitive de la masse E , celle de cette même masse après transformation et compression sera : $a + x$ ce qui correspond à un déplacement du centre de gravité

$$\frac{a + x}{2} - \frac{a}{2} = \frac{x}{2}$$

et à un travail de la pesanteur représenté aussi par $\frac{x}{2}$. Quant au travail de compression pour l'évaluer, nous distinguerons deux cas :

1^o La compression s'effectue suivant la loi de Mariotte. L'expression du travail sera :

$$T_c = - \int_{V_1}^{V_2} p dv = \frac{p_1 V_1}{1000} \int_{V_1}^{V_2} \frac{dv}{v} = \frac{p_1 V_1}{1000} l \frac{V_1}{V_2}$$

Si h_1 , est la hauteur initiale de la partie gazeuse, on aura :

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{h_1}{h_1 - x}$$

Donc

$$T_c = \frac{p_1 V_1}{1000} l \frac{h_1}{h_1 - x}$$

Par suite

$$H = \frac{x}{2} + \frac{p_1 V_1}{1000} l \frac{h_1}{h_1 - x}$$

Il reste à dégager x de cette équation transcendante.

Pour y arriver simplement écrivons :

$$l \frac{h_1}{h_1 - x} = \frac{1000 \left(H - \frac{x}{2} \right)}{p_1 V_1} = \alpha$$

ou

$$\frac{h_1}{h_1 - x} = e^\alpha$$

et

$$\frac{x}{h_1} = 1 - e^{-\alpha}$$

Mais p_1 , pratiquement, variera de 40.333 à cinq ou six fois cette valeur. Quant à V_1 il variera généralement de 1 à 1/2.

Or,

$$- \frac{1000 \left(\frac{x}{2} - H \right)}{p_1 V_1} = \alpha = - \frac{\frac{x}{2} - H}{10,333 V_1 N_1}$$

$\frac{x}{2}$ est $< H$ et nous avons vu ci-dessus que $H = 0.61$.

Cette fraction α est donc très petite. On peut écrire :

$$e^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{1} + \frac{\alpha^2}{1.2} - \frac{\alpha^3}{1.2.3} + \dots$$

Négligeant tout ce qui vient après la première puissance de α on aura :

$$1 - e^{-\alpha} = \alpha.$$

Conséquemment,

$$\frac{x}{h_1} = \frac{H - \frac{x}{2}}{10,333 V_1 N_1}$$

d'où

$$x = H \frac{h_1}{10,333 V_1 N_1 + \frac{h_1}{2}}$$

Prenons pour V_1 sa valeur moyenne $\frac{3}{4}$ et soit $h_1 = 0.50$ on obtiendra très approximativement :

$$x = \frac{H}{16 N_1} \text{ et pour } N_1 = 3, \quad x = \frac{0,61}{48} = 13 \text{ millimètres.}$$

2° La compression s'effectue suivant la loi de Rankine définie par la relation

$$pv^\gamma = C$$

Le travail de compression sera :

$$T_c = - \int_{V_1}^{V_2} p dV = C \int_{V_2}^{V_1} V^{-\gamma} dV = \frac{C}{1-\gamma} \left(V^{1-\gamma} \right)_{V_2}^{V_1}$$

donc,

$$T_c = \frac{C V_1^{1-\gamma}}{1-\gamma} \left[1 - \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{1-\gamma} \right]$$

Mais

$$p_1 V_1^\gamma = C \quad \text{ou} \quad p_1 V_1 = C V_1^{1-\gamma}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{h_1 - x}{h_1}$$

Par suite,

$$T_c = \frac{p_1 V_1}{1-\gamma} \left[1 - \left(\frac{h_1 - x}{h_1} \right)^{1-\gamma} \right]$$

V_1 devant être exprimé en mètres cubes, nous aurons, d'après la notation admise précédemment,

$$H = \frac{x}{2} + \frac{p_1 V_1}{1000 (1-\gamma)} \left[1 - \left(\frac{h_1 - x}{h_1} \right)^{1-\gamma} \right]$$

Mais

$$\left(\frac{h_1 - x}{h_1}\right)^{1-\gamma} = \left(1 - \frac{x}{h_1}\right)^{1-\gamma} = 1 - \frac{1-\gamma}{1} \frac{x}{h_1} - \frac{1-\gamma}{1} \frac{\gamma}{2} \left(\frac{x}{h_1}\right)^2 - \dots$$

x étant très petit par rapport à h_1 , on aura, au moins comme première approximation,

$$\left(\frac{h_1 - x}{h_1}\right)^{1-\gamma} = 1 - \frac{1-\gamma}{1} \frac{x}{h_1}$$

Et

$$1 - \left(\frac{h_1 - x}{h_1}\right)^{1-\gamma} = (1-\gamma) \frac{x}{h_1}$$

Par suite

$$H = \frac{x}{2} + \frac{p_1 V_1}{1000} \frac{x}{h_1}$$

donc

$$\frac{x}{h_1} = \frac{H - \frac{x}{2}}{10,333 \frac{p_1 V_1}{N_1}}$$

C'est précisément la formule obtenue dans le cas précédent. Cette relation approximative est indépendante de la valeur de l'exposant γ , qu'elle soit constante comme le veut Rankine ou variable comme l'a proposé M. Zeuner.

Ainsi la force vive disponible, dans les conditions admises ci-avant, suffirait pour soulever toute la masse de la chambre d'eau à 0^m,61 de hauteur, dans le vide, et à moins de 0^m,02 dans la réalité par suite de la résistance offerte par la chambre de vapeur. Il serait peut-être assez rare, dans la pratique, de voir se réaliser les conditions de l'un ou l'autre de ces cas limités. La pression, en effet, dans la chambre de vapeur, ne doit pas être la même partout. De plus, lors d'une prise de vapeur, la baisse de pression doit être d'abord locale et ne pas s'étendre instantanément en tous les points de la masse. Si l'on ouvre brusquement une soupape ou un robinet pour obtenir une mise en marche subite, à toute volée, il est à craindre que la chute de pression ne se fasse que dans la région directement en dessous de l'orifice. Une faible partie de la surface de l'eau sera soumise à la chute de pression et s'en ressentira; c'est dans cette région restreinte seulement que se produira le soulèvement du liquide qui pourra suivre la vapeur dans sa fuite sans avoir à effectuer un travail de compression, atteindre

l'orifice, passer à la conduite et même arriver au cylindre moteur par la voie réservée à la vapeur. C'est le phénomène connu sous le nom de « trompe d'eau » qui soumet les machines à des commotions violentes et auquel sont très sensibles certains appareils dont la chambre de vapeur est trop basse.

Les calculs précédents font ressortir la très faible influence dont la vidange est capable sur la baisse de tension interne au point de vue surtout de l'instantanéité. Par un orifice de 0^m2,01 de section utile il ne passerait que 20 litres d'eau en 19 secondes et cela sous une pression variant de 2 à 14 atmosphères.

IV. — CAS D'UNE EXPLOSION DE CHAUDIÈRE.

Des infiniment petits passons aux infiniment grands et appliquons la formule complète qui précède au cas d'une chaudière dans laquelle, par une cause quelconque, la pression aurait été ramenée à celle de l'atmosphère.

Pour nous rapprocher du cas spécial que nous avons eu à traiter, nous supposons d'abord que l'on ait :

$$p_1 = 3^{\text{atm.}}, \tau_1 = 134 + 273 = 407$$

$$p_2 = 1^{\text{atm.}}, \tau_2 = 100 + 273 = 373.$$

On aura :

$$H = 432 [34 - 373 (l 407 - l 373)] + 11,37 \times 2$$

ou

$$H = 432 \times 1,55 + 22,74 = 692,34.$$

Ainsi, dans le vide, la force vive rendue libre aurait pour effet de projeter à près de 700 mètres de hauteur toute la chambre d'eau.

J'ai calculé tous ces éléments pour différents cas. Je résume les résultats dans le tableau suivant. J'ai fait varier la pression initiale p_1 de 5 atmosphères à 1 1/2 et la contrepression de 1 à 4 atmosphères.

Pour se faire une idée de la signification de ces chiffres, poursuivons notre application. La chambre d'eau comprenait 1,500 kilogrammes d'eau ce qui porte à

$$1,500 \times 693 = 1,039,500 \text{ kilogrammètres.}$$

la puissance vive à amortir par le travail résistant des déchirures de la chaudière, de la maçonnerie, etc., s'il n'y avait pas eu de projection.

La plus grande part de la force vive libre a probablement dû être employée à l'arrachement du générateur de ses maçonneries, à la ruine du fourneau, à la chute des constructions adjacentes. Le reste a persisté comme impulsion vive et a occasionné les projections.

TENSION initiale N_1 .	TEMPÉRATURES		$\tau_1 - \tau_2$.	$l \frac{\tau_1}{\tau_2}$.	$\tau_2 l \frac{\tau_1}{\tau_2}$.	CONTRE- PRESSION N_2 .	H d'après Ran- kine.	CORRECTION de H .	VALEUR RÉELLE de H .
	initiale τ_1 .	finale τ_2 .							
5	425	373	52	0,130	48,49	1	1516	45	1561
4	417	373	44	0,111	41,40	1	1123	34	1157
3	407	373	34	0,087	32,45	1	670	23	693
2	394	373	21	0,054	20,14	1	341	11	382
1,5	385	373	12	0,031	11,56	1	190	6	196
5	425	394	31	0,076	29,94	2	458	34	492
4	417	394	23	0,057	22,46	2	233	23	256
3	407	394	13	0,032	12,61	2	168	11	179
2	394	394	0	0	0	2	0	0	0
5	425	407	18	0,043	17,50	3	216	23	239
4	417	407	10	0,024	9,77	3	99	11	110
5	425	417	8	0,019	7,92	4	35	11	46
4,75	423,3	417	6,3	0,015	6,26	4	17,28	8,5	25,78
4,50	421,3	417	4,3	Formule approchée.		4	9,58	5,7	15,28
4,25	419,18	417	2,18			4	2,50	2,84	5,34
4,125	418	417	1			4	0,52	1,42	1,94

EXPLOSION D'UNE CHAUDIÈRE A VAPEUR, A HERSSTAL.

Fig. 1. — Plan de l'établissement

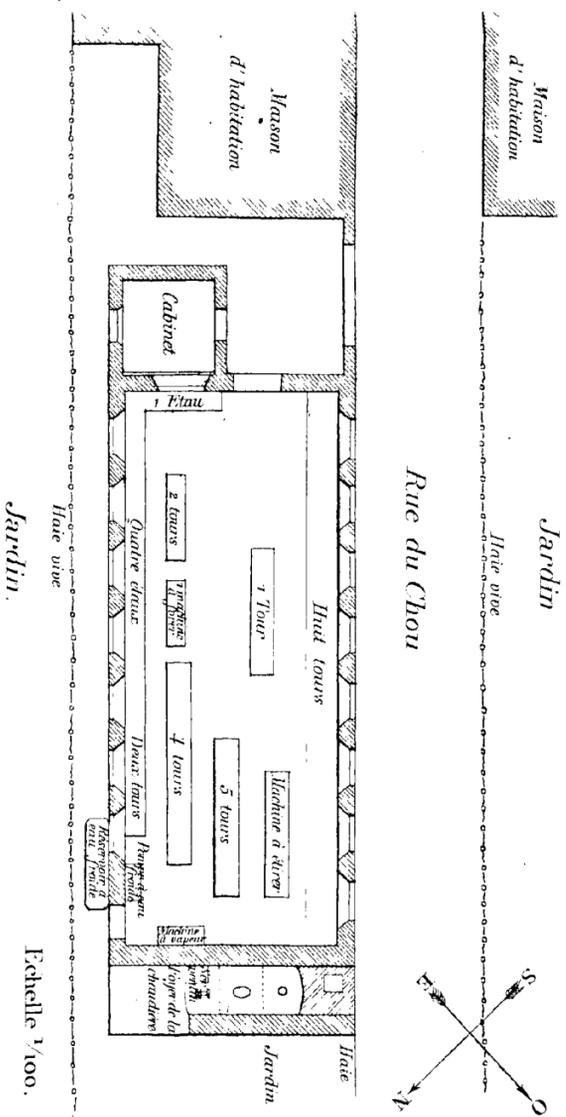


Fig. 4. Plan des environs de l'atelier.

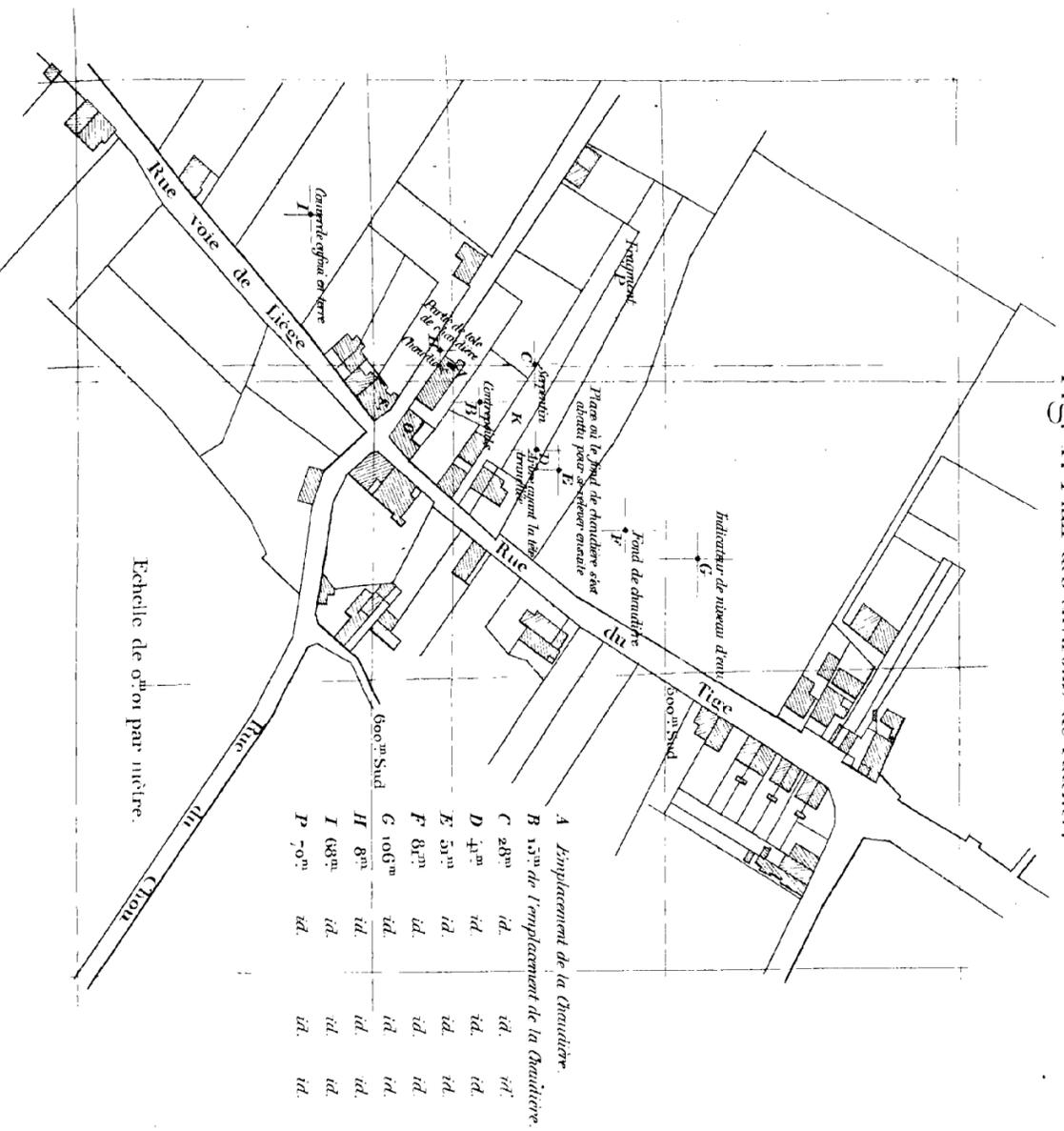


Fig. 2. Une extérieure des décumens de la chaudière, supposé coupé suivant la génératrice inférieure AB et rebâtie autour de la génératrice supérieure XX dans le plan horizontal de cette même génératrice.

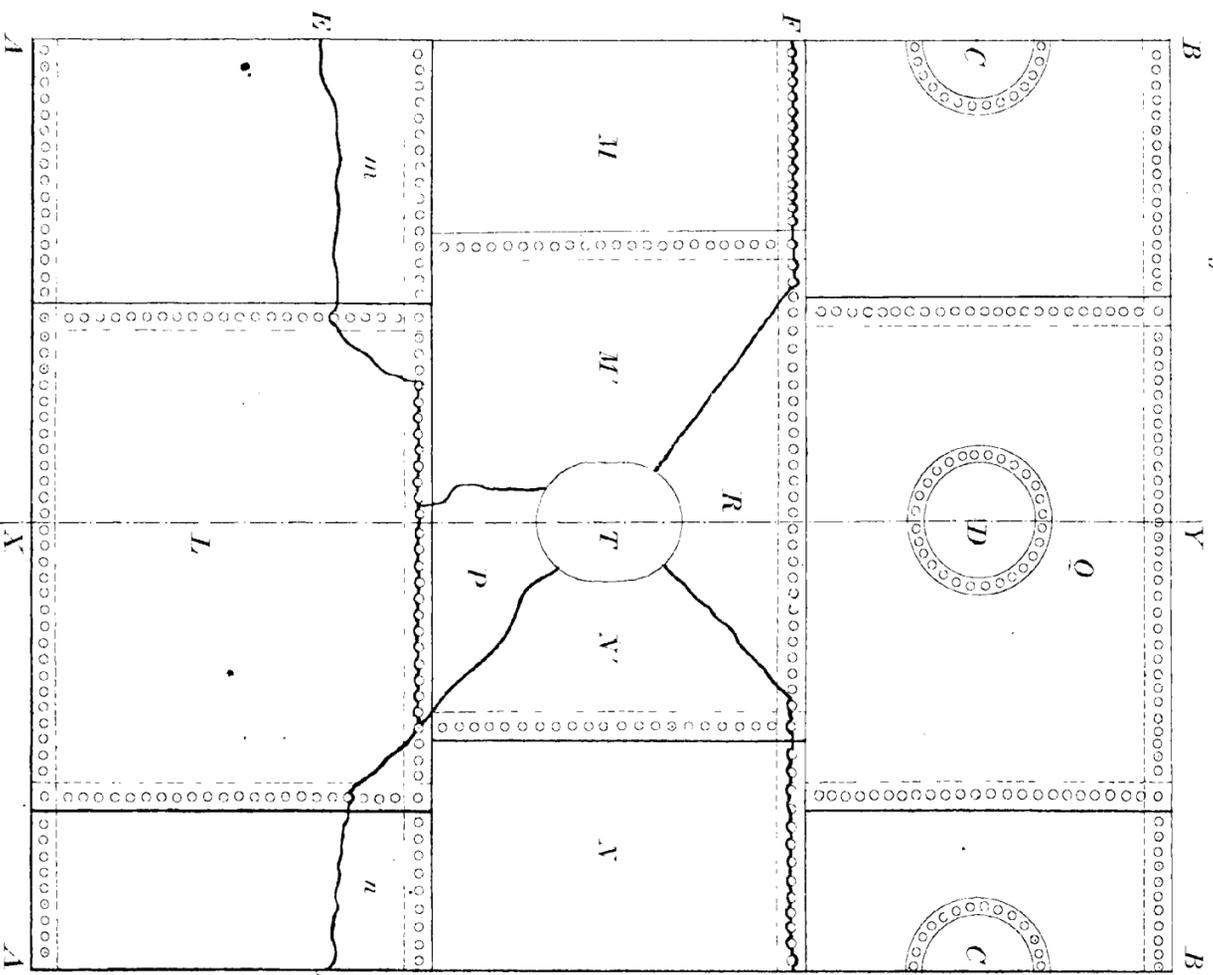
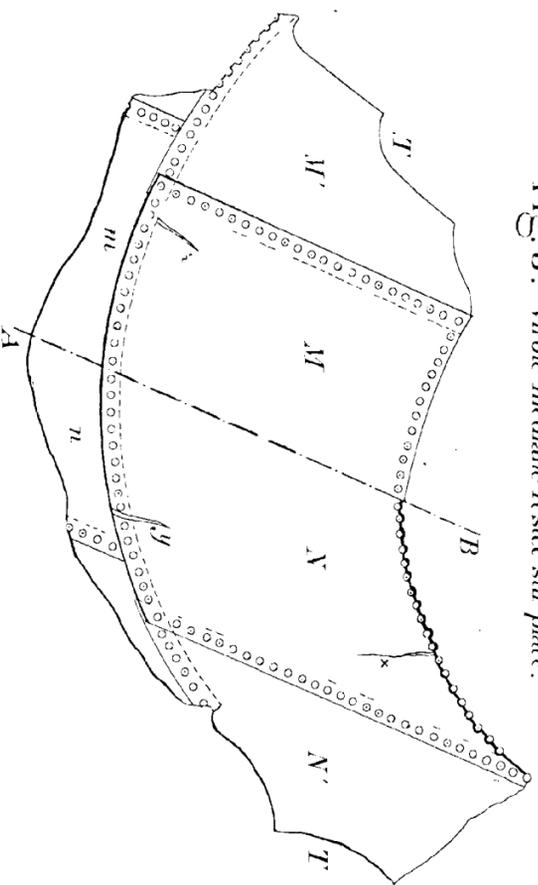


Fig. 3. Voile médiane restée sur place.



DE LA RÉSISTANCE
DES
ENVELOPPES, CUVELAGES,
SERREMENTS
ET
PLATES-CUVES

PAR
M. Philippe BANNEUX,
INGÉNIEUR PRINCIPAL AU CORPS DES MINES.

EXTRAIT DES ANNALES DES TRAVAUX PUBLICS DE BELGIQUE, TOME XLIX

BRUXELLES
IMPRIMERIE VEUVE MONNOM
RUE DE L'INDUSTRIE, 32
—
1892

DE LA RÉSISTANCE
DES
ENVELOPPES, CUVELAGES, SERREMENTS
ET
PLATES - CUVES

PAR
PHILIPPE BANNEUX,
INGÉNIEUR PRINCIPAL AU CORPS DES MINES.

I. — PRÉLIMINAIRES.

1. De tous les travaux d'art conçus et réalisés par les ingénieurs des mines, il n'en est pas qui aient autant fixé leur attention que la construction des cuvelages, serrements et plates-cuves.

Les revêtements métalliques surtout ont été l'objet d'études spéciales et de préférences qui menacent de se transformer en justes préventions.

L'insuccès de plusieurs installations de l'espèce soumises naturellement à des efforts surprenants et imprévus, a rendu très méfiant le monde technique. On ne se rend pas un compte bien exact de la cause de ce phénomène occulte qui dérouté toutes les prévisions. Nombre de cuvelages métalliques calculés suivant des règles établies, admises par les meilleurs auteurs, proposées par les ingénieurs les plus autorisés ont cédé sous des charges relativement faibles et mis à

l'abri de toute discussion l'existence d'efforts de flexion auxquels il est toujours dangereux de soumettre les pièces coulées, notamment la fonte de fer.

L'examen que nous avons fait de quelques-uns de ces cuvelages rompus nous a amené à rechercher le mode de sollicitation de ces pièces et à nous préoccuper surtout de l'importance du moment fléchissant qui a si aisément raison de la résistance de la fonte. Si l'on parvient à établir clairement la raison de la flexion des pièces, il sera très simple de l'éviter, du moins de la réduire et de la combattre efficacement en recourant à des consolidations rationnellement distribuées et capables d'empêcher ou d'écartier, dans une forte mesure, les effets nuisibles dont il vient d'être parlé.

De très bons esprits n'ont pas immédiatement admis la possibilité de la flexion des pièces d'un cuvelage. Une difficulté très délicate, bien faite pour déconcerter, s'y trouve engagée. Un segment circulaire complet, pressé uniformément, soit extérieurement, soit intérieurement, ne peut subir d'action de ce genre, s'il ne survient une déformation dans le profil du tronçon. Une section transversale quelconque ne peut, en effet, s'infléchir plutôt dans un sens que dans l'autre et cela à raison de la symétrie de l'ensemble, tant dans la forme de la pièce que dans la répartition des efforts sollicitants. Aussi l'analyse que nous ferons de toutes les actions qui interviennent dans l'occurrence, prouvera-t-elle qu'il en est ainsi et que la forme circulaire parfaite et complète jouit du privilège de voir se réduire toutes les forces composées sur une section en une résultante unique, normale et centrée, c'est-à-dire agissant au centre de gravité de cette section et pouvant se répartir en un système de forces parallèles proportionnelles aux aires d'action. Il en sera évidem-

ment de même pour un segment quelconque isolé, s'il est placé dans des conditions de liaisons latérales réalisant, sous le rapport des forces, l'effet de cette forme avantageuse de la résistance. Mais en dehors de cette restriction formelle, si étroite qu'elle n'a peut-être jamais été obtenue rigoureusement, le jeu naturel des forces agissantes engendrera des flexions inévitables. Il faut donc soigneusement se garder, en matière de cuvelage, de faire usage de cette règle gratuite et dangereuse, admettant :

« Que tout tronçon d'un cuvelage arqué doit être considéré comme faisant partie d'un cylindre complet d'un égal rayon (1). »

2. Quant aux formules proposées et dont aucune ne fait état de la flexion éventuelle des pièces, on les dégage de quatre hypothèses plus ou moins plausibles, savoir :

I. La formule de Barlow établie en supposant que sous les actions des pressions interne et externe, le massif cylindrique ou sphérique se déforme de telle façon que l'aire de la couronne annulaire de résistance reste constante.

II. La formule de Brix où l'on considère l'épaisseur du massif résistant comme invariable.

Ces deux formules ont surtout été suggérées par l'étude de la résistance des corps de pompe des presses hydrauliques.

III. Pendant longtemps on a fait usage de la formule indiquée par Louis Trasenster, le regretté professeur de l'École de Liège, en admettant que la tension normale en chaque point de la section résistante est constante et égale à la tension moyenne.

(1) Voir *Annales des travaux publics*, tome XXXIX. *Rupture du cuvelage du Bâneur.*

Cette relation très simple convient très bien dans le cas des faibles épaisseurs, abstraction faite bien entendu des efforts possibles de flexion (1).

Mariotte, dans son *Traité du mouvement des eaux*, avait fait usage de cette même hypothèse pour le calcul de l'épaisseur des tuyaux cylindriques et, plus tard, Navier, pour le calcul des réservoirs sphériques.

IV. Enfin, la formule que Lamé et Clapeyron, en 1828, ont déduite des équations générales de la théorie de l'élasticité en les appliquant à un système cylindrique et à un système sphérique.

Poisson, la même année, arrivait à des résultats analogues par une voie peu différente.

Cette théorie admet simplement que la matière appelée à résister est homogène (2).

Ces formules que Lamé n'a appliquées qu'au seul cas d'une pression s'exerçant à l'intérieur d'un cylindre complet ou d'une sphère entière, mais qu'il est facile d'étendre au cas où la forte pression agit à l'extérieur, approchent certainement la vérité de plus près. Peut-être pourrait-on les modifier légèrement en substituant au tout homogène, des couronnes cylindriques ou des couches sphériques, concentriques et homogènes, mais nous ne croyons pas qu'on puisse aller au delà. Ces formules se rapportent donc à des enveloppes complètes; la flexion ne peut intervenir.

M. Dwelshauvers-Dery (3), professeur à l'École de Liège, a donné, suivant la méthode exposée par le colonel De Vos (4), une démonstration directe et élé-

(1) *Revue universelle des mines*, tome I, 1857. TRASENSTER. *Cuvelages en pierre de taille*.

(2) LAMÉ. *Théorie mathématique de l'élasticité*. 1866, pages 190 et 202.

(3) DWELSHAUVERS-DERY. *Résistance des matériaux*.

(4) DE VOS. *Cours de construction*. — *Annuaire d'art, de sciences et de technologie militaires*, année 1873.

DE VOS. *Résistance des tubes*.

mentaire de ces formules. Le procédé de démonstration adopté, assez laborieux, ne nous paraît pas le plus rationnel. Il est possible d'arriver plus sûrement, avec plus de rigueur et plus simplement à des résultats plus généraux qui ont l'avantage de mettre en évidence la notion exacte de la pression dans les milieux.

Celui qui étudie une application de la mécanique, a un rôle unique : Concevoir les hypothèses les plus rationnelles sur le mode d'action des résistances moléculaires et les traduire analytiquement. Ce but atteint, il est toujours dangereux de se méfier des résultats brutaux et naturels du calcul ou d'en détourner le sens, même quand ils paraissent en désaccord avec l'expérience ou les apparences. Peut-être l'interprétation des résultats sera-t-elle difficile, mais s'il existe une discordance, elle ne peut provenir que des hypothèses fondamentales ou d'une erreur matérielle.

II. — PROBLÈME GÉNÉRAL DE LA RÉSISTANCE DES ENVELOPPES.

5. Nous nous proposons de résoudre le problème général posé dans les termes suivants :

« Une enveloppe creuse, complète ou incomplète, « cylindrique ou sphérique, de rayons R' , R est sou-
 « mise extérieurement et intérieurement à des pres-
 « sions spécifiques P' , P . On demande de trouver la
 « tension ou compression t et la pression p qui
 « s'exercent en un point quelconque de la masse résis-
 « tante, à une distance r de l'axe du cylindre ou du
 « centre de la sphère. »

La solution de ce problème se déduit d'un théorème très simple, sur lequel on n'a pas assez insisté, et dont nous donnerons une démonstration sommaire.

6. « Théorème. — Les pressions s'exerçant unifor-

« mément et normalement en tous les points d'une
 « surface fermée par un plan, se composent en une
 « résultante unique perpendiculaire à ce plan, propor-
 « tionnelle à la projection de la surface sur ce plan et
 « appliquée au centre de gravité de cette aire plane. »

Prenons pour axe des z une perpendiculaire au plan et pour axes des x et des y un système quelconque de droites normales de ce plan.

Considérons un cylindre élémentaire de section $d\omega$, parallèle à l'axe des x , détachant dans la surface un nombre nécessairement pair d'éléments superficiels $d\sigma$, $d\sigma'$, $d\sigma''$... La pression p sur chacune de ces intersections donnera lieu à des forces :

$$pd\sigma, \quad pd\sigma', \quad pd\sigma'', \dots$$

faisant avec l'axe des x des angles dont les cosinus, en valeurs absolues, seront :

$$\frac{d\omega}{d\sigma}, \quad \frac{d\omega}{d\sigma'}, \quad \frac{d\omega}{d\sigma''}, \dots$$

Or, les forces qui s'exercent sur deux éléments consécutifs quelconques donneront lieu, en projection, sur l'axe des x , à des actions égales et de sens contraires représentées par l'expression

$$pd\sigma \frac{d\omega}{d\sigma} = pd\omega$$

C'est-à-dire que les composantes dans le plan des xy , de toutes ces forces, se détruisent mutuellement, puisque l'axe des x est quelconque. La résultante se composera donc de toutes les forces élémentaires estimées suivant l'axe des z . — Représentons par dA l'aire de la section droite du cylindre élémentaire projetant, sur le plan de fermeture, un élément quelconque $d\sigma$ de la surface.

La composante de la force agissante, suivant l'axe des z , sera :

$$pd\sigma \frac{dA}{d\sigma} = p dA$$

dA est donc la projection sur le plan des xy de l'élément $d\sigma$ de la surface.

Si P est la résultante totale, α et β les coordonnées du point où elle coupe le plan qui ferme la surface, on aura :

$$\begin{aligned} P &= \int p dA = p \int dA = pA. \\ P\alpha &= \int p x dA = p \int x dA = p x_0 A = P x_0 \\ P\beta &= \int p y dA = p \int y dA = p y_0 A = P y_0 \end{aligned}$$

x_0, y_0 étant les coordonnées du centre de gravité de l'aire plane, projection de la surface.

Par suite

$$\alpha = x_0, \quad \beta = y_0 \quad \text{c. q. f. d.}$$

Les auteurs qui démontrent ce théorème ne se préoccupent pas du point d'application de la force résultante, bien que cet élément ait une importance capitale. Il n'est pas indifférent que cette résultante agisse en l'un ou l'autre point du plan de la section terminale, attendu que les effets qui doivent en résulter dans les réactions moléculaires sont entièrement distincts.

Nous rappellerons pour faire saisir l'importance de cette détermination, que la répartition des tensions sur les assises d'un solide prismatique, par exemple, soumis à des actions verticales, est obtenue grâce à une hypothèse spéciale qui conduit à des résultats assez concordants avec ceux de la pratique.

On admet, pour résoudre ce problème, indéterminé sans une hypothèse, que la tension en chaque point d'une section horizontale est une fonction linéaire, c'est-à-dire du premier ordre, des coordonnées du

point dans cette section. Cette loi conduit, comme on le sait, à plusieurs conséquences, savoir :

1° Si la résultante passe par le centre de gravité de la section considérée, les tensions spécifiques y sont identiques; toutes les résistances par unité de section sont égales et de même sens.

Cette conclusion étendue aux enveloppes complètes conduit à la formule de Trasenster.

2° Les tensions sont inégales si cette résultante ne passe pas par le centre de gravité de la section; mais, en ce centre, la tension est toujours égale à la moyenne.

3° Néanmoins toutes les parties de cette section sont soumises à des compressions si la résultante tombe à l'intérieur du noyau central ou sur le contour de ce noyau.

4° Enfin il y aura compression dans certaines parties et extension dans d'autres, si la résultante, au passage, tombe en dehors de la circonférence du noyau de la section.

Nous constaterons dans ce qui va suivre des résultats analogues, plus compliqués pourtant, attendu que la loi exprimant les variations de ces tensions est une fonction inverse du second ou du troisième ordre de la distance du point considéré au centre de l'enveloppe. Alors même que la résultante des forces extérieures serait appliquée au centre de gravité de la section de résistance, la répartition pourrait ne pas se faire également.

III. — HYPOTHÈSE DE LA TENSION CONSTANTE.

7. Cette hypothèse a conduit Trasenster à une formule très simple qui jouit encore d'une certaine vogue. Nous en soumettrons tous les résultats à l'analyse afin

de pouvoir l'apprécier dans toutes les conséquences qu'elle comporte.

A. — *Enveloppes cylindriques.*

8. Coupons le cylindre par un plan diamétral quelconque qui déterminera dans le solide une section :

$$2L (R' - R)$$

L étant la longueur du cylindre considéré.

Cette section sera soumise à une résistance spécifique t et à une résistance totale :

$$2L (R' - R, t)$$

qui devra faire équilibre aux forces agissantes, tant à l'intérieur qu'à l'extérieur du cylindre et dont la résultante (6) passant par le centre, aura pour expression :

$$2L (PR - P'R')$$

Donc

$$t (R' - R) = PR - P'R'$$

d'où,

$$t = \frac{PR - P'R'}{R' - R} \quad \text{et} \quad R' = R \frac{t + P}{t + P'}$$

e représentant l'épaisseur des parois du cylindre, on aura :

$$e = R \left[\frac{t + P}{t + P'} - 1 \right] = R \frac{P - P'}{t + P'}$$

On pourra écrire

$$\begin{array}{l} > \\ t = o \\ < \end{array} \quad \text{suivant que} \quad \begin{array}{l} > \\ PR = P'R' \\ < \end{array}$$

Les fibres résistantes seront donc soumises à une extension ou à une compression suivant que la résultante due aux pressions internes sera supérieure ou inférieure à la résultante des pressions externes.

9. Cas du cuvelage. — Dans le cas du cuvelage $P' > P$ de sorte que $t < 0$; il s'agit donc d'une compression.

En explicitant le signe de t on aura :

$$t = \frac{P'R' - PR}{R' - R}, \quad e = R \left[\frac{t - P}{t - P'} - 1 \right] = R \frac{P' - P}{t - P'}$$

Dans le cas particulier que nous examinons, P représente la pression atmosphérique, toujours négligeable vis-à-vis de la charge d'eau P' que l'on peut évaluer à 1.000 H , en représentant par H la hauteur de l'eau qui pèse extérieurement sur ce travail d'art.

On aura donc,

$$e = \frac{1000 HR}{t - 1000 H}, \quad t = 1000 H \left(1 + \frac{R}{e} \right)$$

10. Loi des pressions. — Quant à la loi des pressions, elle peut se dégager de l'équation générale :

$$t + \frac{d(pr)}{dr} = 0$$

que nous démontrerons ci-après et qui est complètement indépendante de la loi de variation des tensions. t étant une constante, on aura :

$$pr = C - tr$$

Et, aux limites :

$$PR = C - tR, \quad P'R' = C - tR'$$

d'où

$$t = \frac{PR - P'R'}{R' - R}, \quad C = R(P + t) = \frac{P - P'}{R' - R} RR'$$

donc

$$p = - \frac{PR - P'R'}{R' - R} + \frac{P - P'}{R' - R} \frac{RR'}{r}$$

11. La pression moyenne *simple* sera :

$$P_m = \frac{1}{R' - R} \int_R^{R'} p dr = -\frac{PR - P'R'}{R' - R} + \frac{P - P'}{(R' - R)^2} RR' \frac{R'}{R}$$

12. Discussion. — On peut s'aider pour cette discussion de diagrammes dont nous ne ferons usage que pour les formules de Lamé. Ils diffèrent peu d'ailleurs dans les deux cas pour ce qui regarde la pression.

a) La pression interne est supérieure à la pression externe, $P > P'$.

1° $PR > P'R'$; on aura $t > 0$; toutes les fibres sont tendues.

La pression p s'annule pour une valeur du rayon :

$$R_0 = \frac{(P - P') RR'}{PR - P'R'} > R$$

c'est-à-dire en dehors de la région réservée au massif résistant, au sein duquel la pression varie de P à P' suivant les ordonnées d'une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont l'axe des y et la parallèle $y = t$ à l'axe des x .

$$2° PR = P'R', \text{ on a } t = 0 \quad p = P \frac{R}{r}.$$

3° $PR < P'R'$, on a $t < 0$; toutes les fibres sont comprimées.

b) Les pressions externe et interne sont égales, $P = P'$.

On obtient :

$$t = -P < 0, \quad p = P = -t.$$

c) La pression interne est inférieure à la pression externe, $P < P'$. On a $t < 0$; toutes les fibres sont comprimées.

La pression s'annule pour une valeur du rayon

$$R_0 = \frac{(P' - P) RR'}{P'R' - PR} < R$$

valeur imaginaire pour la question qui nous concerne.

B. — Enveloppes sphériques.

13. La section diamétrale de résistance sera :

$$\pi (R^2 - R'^2)$$

La résistance totale qu'elle pourra opposer aux forces extérieures à l'enveloppe, c'est-à-dire agissant sur elles dans tous les sens, sera :

$$\pi (R^2 - R'^2) t$$

D'autre part la résultante des forces (6) dues aux pressions donne :

$$\pi (PR^2 - P'R'^2)$$

donc

$$t = \frac{PR^2 - P'R'^2}{R^2 - R'^2}$$

d'où

$$R^2 = R'^2 \frac{t + P}{t + P'} \quad \text{et} \quad e = R \left[\sqrt{\frac{t + P}{t + P'} - 1} \right]$$

14. Loi des pressions. — Nous démontrerons ci-après la formule générale, pour les enveloppes sphériques :

$$t + \frac{d(pr^2)}{d(r^2)} = 0$$

t étant constante, on en déduit :

$$pr^2 = C - t r^2$$

Passant aux limites, on aura :

$$PR^2 = C - tR^2, \quad P'R'^2 = C - tR'^2$$

d'où

$$t = \frac{PR^2 - P'R'^2}{R^2 - R'^2} \quad \text{et} \quad C = R^2 (P + t) = \frac{P - P'}{R^2 - R'^2} R^2 R'^2$$

Par suite,

$$p = - \frac{PR^2 - P'R^2}{R^2 - R'^2} + \frac{P - P'}{R^2 - R'^2} \frac{R^2 R'^2}{r^2}$$

15. Discussion. — Nous examinerons les différents cas qui peuvent se présenter.

a) $P > P' \quad 1^\circ PR > P'R', \quad t > 0$

La pression s'annule pour une valeur du rayon :

$$R_0 = R R' \sqrt{\frac{P - P'}{PR^2 - P'R^2}} = R' \sqrt{\frac{PR^2 - P'R^2}{PR^2 - P'R^2}} > R'$$

par conséquent en dehors du massif.

2° $PR^2 = P'R'^2, \quad t = 0, \quad p = P \frac{R^2}{r^2}$

3° $PR^2 < P'R'^2, \quad t < 0$

b) $P = P', \quad t = -P = -p$

c) $P < P', \quad t < 0$

La pression s'annule pour une valeur du rayon,

$$R_0 = R R' \sqrt{\frac{P' - P}{P'R'^2 - PR^2}} = R \sqrt{\frac{P'R'^2 - PR^2}{P'R'^2 - PR^2}} < R$$

ce qui était à prévoir.

16. Remarque. — S'il s'agit d'un serrement ou d'une plate-cuve sphérique, on peut avec Trasenster négliger P et poser $P' = 1,000 H$.

On aura, en explicitant le signe de t qui est négatif :

$$\frac{R^2}{t} = \frac{R^2}{t - P'} = \frac{R^2 - R^2}{P'}$$

donc

$$= \frac{P'R'^2}{R'^2 - R^2} = \frac{P'}{1 - \frac{R^2}{R'^2}} = \frac{1000 H}{1 - \frac{R^2}{R'^2}}$$

$$e = R \left(\sqrt{\frac{t}{t - 1000 H}} - 1 \right)$$

IV. — FORMULES DE LAMÉ.

17. Ces formules se déduisent de deux équations générales.

La première exprimant la condition d'équilibre des forces qui s'exercent en chaque point du solide résistant est rationnelle; elle existe pour toute hypothèse que l'on peut faire sur la loi des variations des pressions ou des tensions ou la façon de résister du massif qui les supporte.

La seconde est tirée de cette constatation expérimentale qui permet de calculer la force agissante en fonction de la déformation simple produite, quand on ne dépasse pas les limites de l'élasticité :

« L'allongement ou le raccourcissement produit par
« une force de traction ou de compression agissant
« sur une fibre homogène est proportionnel à cette
« force et à la longueur de la fibre ».

Dans ses leçons sur l'élasticité, Lamé doit recourir à une hypothèse de ce genre qu'il justifie d'ailleurs en la dégageant des entrailles mêmes du corps. Il la présente, tant est grande son importance, sous le nom de « principe de la théorie de l'élasticité » (1). Comme le dit le célèbre analyste, ce principe ne peut être appliqué que pour des déformations ne dépassant pas une certaine limite. Dans la pratique on ne peut franchir cette limite sans craindre une altération permanente qui peut devenir compromettante.

(1) LAMÉ. *Théorie mathématique de l'Elasticité*, page 6. — *Nous ne tiendrons donc pas compte tout d'abord, dans ce qui va suivre, de l'influence sur l'allongement ou le raccourcissement des fibres des efforts transversaux, nous réservant de revenir sur cet effet des actions latérales.

A. — Enveloppes cylindriques.

1. — Formules générales.

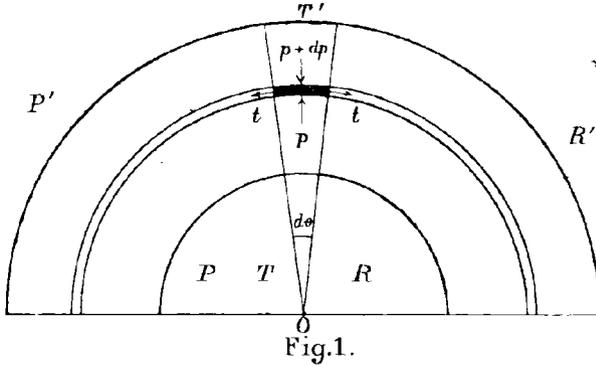
18. — Le massif résistant sépare deux milieux dont les pressions sont respectivement P et P' . En chaque point du massif, il existe deux pressions centrales égales et contraires. La quantité nécessairement positive qui en exprime la grandeur est la pression existant en ce point. Il n'y a donc pas plus lieu de faire intervenir, dans cette définition, le sens dans lequel la pression s'exerce au sein du massif que dans une masse liquide ou fluide où elle est égale dans tous les sens.

En d'autres termes, la pression ambiante dans un milieu n'a pas de sens déterminé, puisqu'elle s'exerce dans toutes les directions. Le signe n'apparaît que si l'on exprime la force due à cette pression sur un élément de surface d'orientation connue.

Cette force peut effectivement être ou une traction ou une compression dont les angles directifs sont ceux de la normale à l'élément considéré.

Première équation.

19. Détachons par la pensée, à une distance r du centre, un élément d'une couronne infiniment étroite, comprise entre les rayons r et $r + dr$ et vu du centre sous un angle $d\theta$. Les deux faces circulaires de cet élément isolé dont nous supposerons la longueur égale à l'unité, sont soumises à deux pressions spécifiques p et $p + dp$ provenant des actions des couches adjacentes. Latéralement deux tensions spécifiques normales t s'exerceront en plein massif (fig. 1).



Il est bien évident que ces pressions et tensions se trouveront combinées de la même manière sur tous les éléments composant la couronne complète.

La pression p se traduit en une force centrale externe qui a pour expression, c étant la corde sous-tendant l'arc,

$$pc = 2pr \sin \frac{d\theta}{2} = prd\theta$$

en faisant abstraction des infiniment petits du second ordre ; ceux-ci s'annuleraient d'eux-mêmes en passant à la limite dans tous les résultats définitifs que nous exprimerons sous forme finie.

La résultante des pressions analogues pour le rayon $r + dr$ sera :

$$[pr + d(pr)] d\theta$$

Quant aux tensions ou compressions latérales, elles se réduisent à deux forces $t dr$ symétriques par rapport aux précédentes.

Nous aurons par conséquent à traduire l'équilibre d'un système de trois forces concourantes tdr , tdr et

$$prd\theta - [pr + d(pr)] d\theta = -d(pr) d\theta$$

Par suite, en vertu du triangle des forces (fig. 2),

$$-\frac{d(pr) d\theta}{\sin d\theta} = \frac{tdr}{\cos \frac{d\theta}{2}}$$

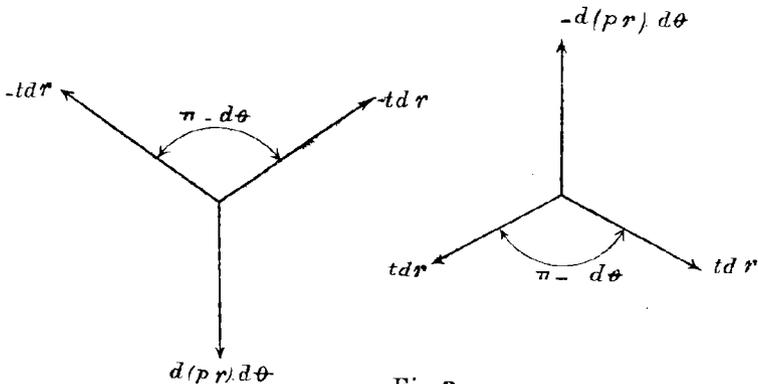


Fig. 2.

ou

$$t + \frac{d(pr)}{dr} = 0 \quad (I)$$

Seconde équation.

20. La fibre circulaire que nous avons en vue, en supportant de part et d'autre des pressions p et $p + dp$, se contractera de la quantité

$$\frac{pdr}{E}$$

E représentant le coefficient d'élasticité de la matière.

D'un autre côté, la fibre élémentaire est comprise entre les rayons

$$r \text{ et } r + dr$$

Sous l'action des tensions t , l'élément $rd\theta$ s'allongera et deviendra :

$$r d\theta \left(1 + \frac{t}{E}\right)$$

Ce qui répond à un rayon, après déformation,

$$r \left(1 + \frac{t}{E}\right)$$

Le rayon consécutif deviendra donc, après déformation,

$$r \left(1 + \frac{t}{E}\right) + d \left(r + \frac{rt}{E}\right)$$

L'épaisseur de la fibre sera par conséquent,

$$d \left(r + \frac{rt}{E}\right) = dr + \frac{d(rt)}{E}$$

et la réduction,

$$- \frac{d(rt)}{E}$$

En conséquence,

$$p dr = - d(rt)$$

ou

$$p + \frac{d(rt)}{dr} = 0 \quad (\text{II})$$

Tensions et pressions.

21. Ajoutant membre à membre les équations (I) et (II), on aura :

$$(t + p) + \frac{d.(p+t)r}{dr} = 0$$

ou

$$2(t + p) + r \frac{d(p+t)}{dr} = 0$$

c'est-à-dire

$$2 \frac{dr}{r} + \frac{d(p+t)}{p+t} = 0$$

ou

$$r^2 (p + t) = \text{Constante}$$

et, en passant aux limites,

$$r^2 (p + t) = R^2 (P + T) = R'^2 (P' + T') \quad (a)$$

22. Soustrayant membre à membre les équations de Lamé, il vient,

$$(t - p) + \frac{d(p - t)r}{dr} = 0$$

c'est-à-dire,

$$\frac{d(p - t)}{dr} = 0$$

ou

$$p - t = \text{constante.}$$

Aux limites,

$$p - t = P - T = P' - T' \quad (b)$$

23. Ces équations (a) et (b) donnent :

$$p = \frac{P'R^2 - PR^2}{R'^2 - R^2} + \frac{P - P'}{R'^2 - R^2} \frac{R^2 R'^2}{r^2} \quad (a)$$

$$t = - \frac{P'R^2 - PR^2}{R'^2 - R^2} + \frac{P - P'}{R'^2 - R^2} \frac{R^2 R'^2}{r^2} \quad (b)$$

24. Observation. — Les pressions se distribuent dans des enveloppes cylindriques, d'après les idées de Lamé, de la même manière que dans les enveloppes sphériques dans l'hypothèse de la tension uniforme (1).

(1) Nous avons réservé aux équations fondamentales (I) et (II) le nom de « Équations de Lamé » bien que l'éminent ingénieur ne les ait pas déduites sous cette forme de sa théorie, mais on peut si aisément les y retrouver que nous pensons qu'elles sont virtuellement de lui.

La première démonstration directe qui en ait été donnée est du colonel de Vos, qui en a fait application aux enveloppes cylindriques pressées intérieurement.

M. Dwelshauvers a étendu le procédé aux enveloppes cylindriques et sphériques, pressées soit intérieurement, soit extérieurement, mais en distinguant les deux cas dans la théorie.

Tensions extrêmes et tension moyenne.

25. Aux rayons limites on obtient les deux tensions extrêmes :

$$T = \frac{P(R'^2 + R^2) - 2P'R^2}{R'^2 - R^2}$$

$$T' = \frac{2PR^2 - P'(R'^2 + R^2)}{R'^2 - R^2}$$

26. La tension moyenne T_m se calcule en évaluant, dans une section méridienne normale au plan sécant, représenté dans la figure 1, et conduit suivant l'un des rayons délimitant le trapèze curviligne, sur une hauteur arbitraire, l'unité par exemple, la somme des forces de traction ou de compression dues aux tensions t . — On aura :

$$T_m (R' - R) = \int_R^{R'} t dr$$

donc

$$T_m = \frac{P'R^2 - PR^2}{R'^2 - R^2} + \frac{P - P'}{R'^2 - R^2} RR'$$

ou, réductions faites :

$$T_m = \frac{PR - P'R'}{R' - R}$$

27. Contraction du massif. — La contraction d'une fibre est :

$$p \frac{dr}{E}$$

La réduction de l'épaisseur totale sera donc

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \int p dr = \frac{e}{E} \frac{P'R' + PR}{R' + R}$$

2. — Discussion.

28. *a.* La plus forte pression s'exerce à l'intérieur du cylindre, $P > P'$.

$$1^{\circ} \quad P' R^2 > P R^2.$$

Posons

$$A = \frac{P' R^2 - P R^2}{R'^2 - R^2}, \quad B = \frac{P - P'}{R'^2 - R^2} R^2 R'^2$$

A et B sont donc deux paramètres positifs.

Nous aurons :

$$p = A + \frac{B}{r^2} \quad t = -A + \frac{B}{r^2}$$

Le diagramme des pressions sera une courbe hyperbolique pp , dont les asymptotes sont l'axe des y et la parallèle $y = A$ à l'axe des x (fig. 3).

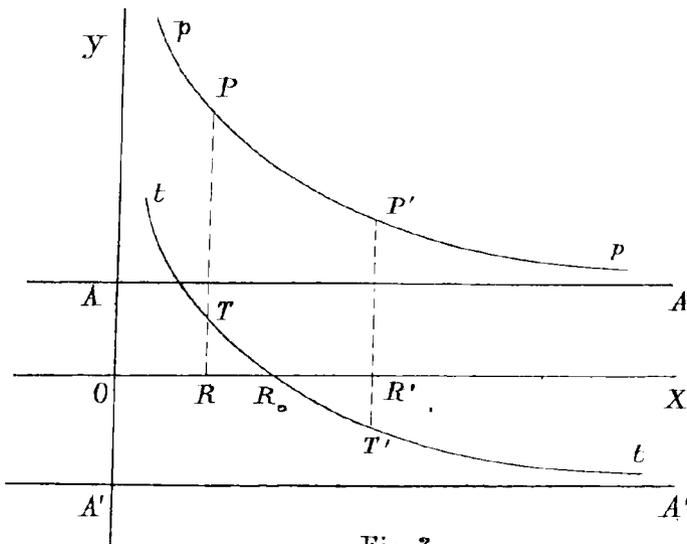


Fig. 3.

Il est bien entendu que, dans ce diagramme, nous ne devons considérer que l'arc de courbe compris entre les ordonnées $r = R$ et $r = R'$. Tous les éléments extérieurs sont imaginaires au point de vue de la question étudiée.

Le diagramme des tensions est une courbe semblable tt , dont tous les points sont descendus parallèlement à l'axe des y d'une quantité constante égale à

$$P - T = 2 \frac{P'R^2 - PR^2}{R'^2 - R^2}$$

La tension s'annule pour une valeur du rayon.

$$R_0 = \sqrt{\frac{B}{A}} = R' \sqrt{\frac{PR^2 - P'R'^2}{P'R'^2 - PR^2}} = R \sqrt{\frac{PR^2 - P'R'^2}{P'R^2 - PR^2}}$$

On aura :

$$R_0 \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} R \text{ suivant que } PR'^2 - P'R'^2 \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} P'R'^2 - PR^2$$

d'où

$$\frac{P}{P'} \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \frac{2R^2}{R^2 + R'^2} > 1$$

D'autre part,

$$R_0 \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} R' \text{ suivant que } PR^2 - P'R'^2 \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} P'R'^2 - PR^2$$

c'est-à-dire,

$$\frac{P}{P'} \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \frac{R^2 + R'^2}{2R^2} > \frac{2R'^2}{R'^2 + R^2} > 1$$

Il suit de là :

I. Si

$$\frac{P}{P'} < \frac{2R'^2}{R^2 + R'^2}, \text{ on aura } R_0 \leq R$$

La tension ne s'annule en aucun point de la section résistante. Les tensions restent négatives en tous ces points ; on a donc un effort de compression partout.

II. Si

$$\frac{2R^2}{R^2 + R'^2} < \frac{P}{P'} < \frac{R^2 + R'^2}{2R^2}$$

les éléments du problème seront tels que l'on aura :

$$R < R_0 < R'$$

C'est le cas particulier du diagramme de la fig. 3.

L'extension se produira depuis $r = R'$ jusque $r = R_0$.

La compression s'exercera de $r = R_0$ à $r = R$.

III. Enfin, si l'on vérifie l'inégalité

$$\frac{P}{P'} > \frac{R^2 + R'^2}{2R^2}$$

on aura $R_0 = \overline{R'}$. L'extension se produira en tous les points de la section résistante.

$$2^\circ \quad P'R^2 = PR^2 \quad \text{ou} \quad \frac{P}{R^2} = \frac{P'}{R^2} - \frac{P - P'}{R^2 - R'^2}$$

On aura :

$$p = t = P \frac{R^2}{r^2}$$

Il suffit, dans le diagramme précédent, de faire $A = 0$.

L'extension existe en tous les points. Elle varie comme la pression en raison inverse du carré de la distance au centre.

3° $P'R^2 < PR^2$, cas des bouches à feu pendant la période de tir.

En explicitant les signes des paramètres A et B on aura :

$$p = -A + \frac{B}{r^2}, \quad t = A + \frac{B}{r^2}$$

L'extension domine sans partage (fig. 4).

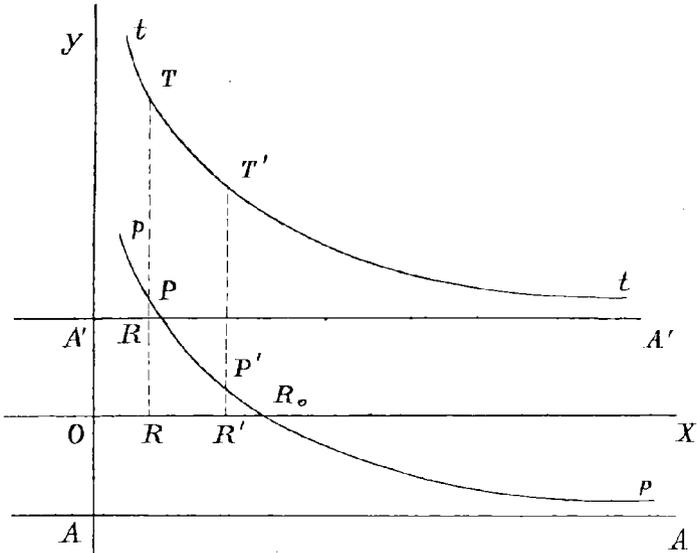


Fig. 4.

La pression s'annulerait pour une valeur du rayon :

$$R_0 = \sqrt{\frac{B}{A}} = R \sqrt{\frac{PR^2 - P'R'^2}{PR^2 - P'R'^2}} > R$$

Comme on devait s'y attendre, la pression ne s'annule que pour une valeur imaginaire du rayon, c'est-à-dire en dehors du massif dont nous étudions les conditions de résistance.

29. Remarque. — Cette hypothèse $P > P'$ en même temps que $PR^2 > P'R'^2$ se rapporte aussi aux presses hydrauliques où la pression interne P surpasse de beaucoup la pression externe P' et alors qu'il existe entre les rayons R et R' une faible différence.

b. $P = P'$.

C'est le cas d'un cuvelage cylindrique noyé et par conséquent également chargé sur les deux faces.

On obtient : $p = P = -t$.

c. $P < P'$ et par suite $PR^2 < P' R'^2$.

C'est le cas d'un cuvelage cylindrique ou d'un canon cerclé.

Les formules générales deviennent :

$$p = A - \frac{B}{r^2}, \quad t = -A - \frac{B}{r^2}$$

C'est par compression que le massif est appelé à résister en tous ses points.

La pression s'annulerait, si la chose était possible, pour une valeur du rayon

$$R_0 = \sqrt{\frac{B}{A}} = R \sqrt{\frac{P'R'^2 - PR^2}{R'^2 - R^2}} < R$$

c'est-à-dire en dehors du massif.

La fig. 5 donne la courbe des pressions et la courbe des tensions.

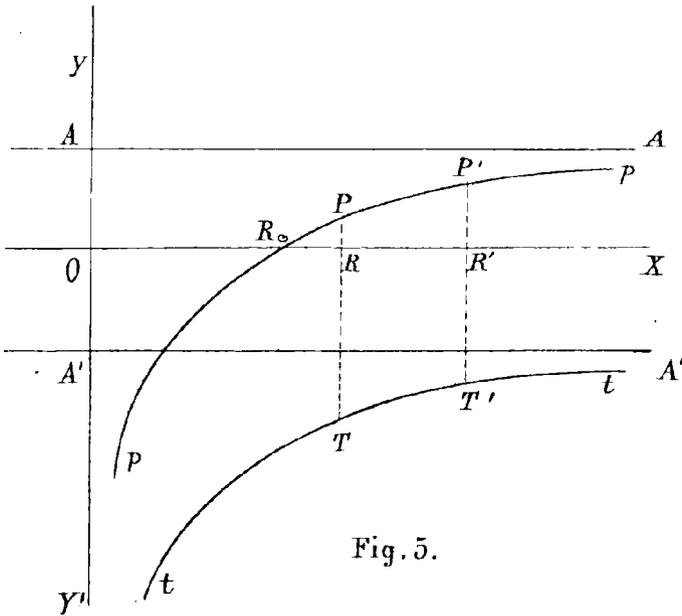


Fig. 5.

30. Cas spéciaux remarquables.

A. Examinons ce que deviennent ces résultats dans l'hypothèse : $P' = 0$.

Nous aurons :

$$p = \frac{PR^2}{R^2 - R'^2} \left(\frac{R'^2}{r^2} - 1 \right) \quad t = \frac{PR^2}{R'^2 - R^2} \left(\frac{R^2}{r^2} + 1 \right)$$

Ces formules plus simples se rapporteraient aux presses hydrauliques et aux canons.

B. Si, comme dans un cuvelage, on peut écrire approximativement $P = 0$, on aura :

$$p = \frac{P'R^2}{R^2 - R'^2} \left(1 - \frac{R'^2}{r^2} \right), \quad t = - \frac{P'R^2}{R'^2 - R^2} \left(1 + \frac{R'^2}{r^2} \right)$$

C. Un autre cas remarquable conduit à poser $PR = P'R'$ c'est-à-dire

$$\frac{P}{R'} = \frac{P'}{R} = \frac{P - P'}{R' - R}$$

donc

$$p = \frac{PR}{R + R'} \left(1 + \frac{RR'}{r^2} \right) \quad t = - \frac{PR}{R + R'} \left(1 - \frac{RR'}{r^2} \right)$$

La tension s'annule pour une valeur du rayon

$$R_0 = \sqrt{RR'}$$

La tension moyenne est nulle dans ce cas.

D. Pour un cylindre plein, pressé extérieurement, on aura : $R = 0$ et $p = P' = -t$.

E. Pour un fourneau foré dans un massif indéfini et pressé intérieurement, on posera $R' = \infty$, donc

$$p = P' - (P' - P) \frac{R^2}{r^2}, \quad t = -P' - (P' - P) \frac{R^2}{r^2}$$

Si $r = R$, on aura $T = P - 2P'$.

CALCUL DES ENVELOPPES CYLINDRIQUES.

31. Les enveloppes qu'il y a lieu de considérer sont

les corps de pompe des presses hydrauliques, leurs plongeurs pleins ou creux, les cuvelages, les serremments et les chaudières ou tout récipient cylindrique de faible épaisseur pressé soit intérieurement, soit extérieurement.

32. I. Corps de pompe des presses hydrauliques. — Ce vase est cylindrique ; il subit intérieurement une pression n , c'est-à-dire, en atmosphères, une tension $n + 1 = P$.

Extérieurement la tension du milieu est égale à $P' = 1$.

Nous aurons donc,

$$p = 1 + n \frac{R^2}{R'^2 - R^2} \left(\frac{R'^2}{r^2} - 1 \right)$$

$$t = -1 + n \frac{R^2}{R'^2 - R^2} \left(\frac{R'^2}{r^2} + 1 \right)$$

Les pressions p , n et la tension t sont donc exprimées en atmosphères. Toutes les fibres sont tendues. La plus fatiguée correspond à $r = R$. Si T est la tension maxima qu'il convient de ne pas dépasser, on aura pour calculer la pression n limite :

$$T + 1 = n \frac{R'^2 + R^2}{R'^2 - R^2}$$

ou

$$\frac{T + 1}{R'^2 + R^2} = \frac{n}{R'^2 - R^2} = \frac{T + 1 - n}{2R^2} = \frac{T + 1 + n}{2R'^2}$$

donc

$$R' = R \sqrt{\frac{T + 1 + n}{T + 1 - n}}$$

Si e est l'épaisseur répondant à cette charge T ,

$$e = R \left[\sqrt{\frac{T + 1 + n}{T + 1 - n}} - 1 \right] \quad (1)$$

En tout cas, il faudra que l'on vérifie $n < T + 1$.

La tension T qui correspond à une épaisseur e sera :

$$T = n \frac{R^2 + (R + e)^2}{e(2R + e)} - 1 = n \left[1 + \frac{2R^2}{e(2R + e)} \right] - 1 \quad (2)$$

La tension moyenne sera :

$$T_m = \frac{PR - P'R'}{R' - R} = \frac{nR}{e} - 1$$

33. II. Plongeur des presses.

A. Plongeur creux.

Un plongeur semblable est pressé extérieurement de telle façon que $P' = n + 1$, $P = 1$, donc

$$p = 1 + n \frac{R'^2}{R'^2 - R^2} \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right)$$

$$t = -1 - n \frac{R'^2}{R'^2 - R^2} \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right)$$

La compression est donc générale. Elle est maxima pour $r = R$.

Si la compression limite est $-T$, on aura :

$$T = 1 + 2n \frac{R^2}{R'^2 - R^2}$$

et

$$R' = R \sqrt{\frac{T - 1}{T - 1 - 2n}}$$

ou

$$e = R \left[\sqrt{\frac{T - 1}{T - 1 - 2n}} - 1 \right]$$

La tension qui correspond à une épaisseur e sera :

$$T = 1 + 2n \frac{(R + e)^2}{e(2R + e)} - 1 + \frac{2n}{e} \frac{R^2}{R + R'}$$

B. Plongeur plein.

Il suffit dans les formules du plongeur creux de faire $R = 0$. On aura donc,

$$p = -t = 1 + n.$$

Applications.

34. Les expériences de Hodgkinson sur la résistance de la fonte ont montré que les charges de rupture de plusieurs échantillons, sous des efforts de traction, ont varié de $8^k,92$ à $18^k,11$ par millimètre carré de section. La moyenne fut de $11^k,4$ (1).

On admet ordinairement :

Effort de traction : $2^k,5$, ce qui nous paraît élevé.

Limite d'élasticité : $7^k,5$.

Charge de rupture : $12^k,5$.

A l'écrasement les charges ont varié de $39^k,56$ à $111^k,20$.

La moyenne a été de $64^k,10$. On admet dans les applications :

Charge portante : 6 kilogs.

Limite d'élasticité : 15 kilogs.

Charge de rupture : 75 kilogs.

I. — *Presse à fourrage d'Algérie, construite à Liverpool.*

Un cylindre de cette presse s'est rompu brusquement de haut en bas, sous une tension moyenne de 11 kilogs par millimètre carré.

Diamètre intérieur du corps de pompe :	$0^m,3090$,	$R = 0^m1545$
Diamètre extérieur	id. $0^m,6120$,	$R' = 0^m3060$
Épaisseur	id. $0^m,1515$	
Diamètre du plongeur plein	$0^m,2792$	$S = 611^{e2}98$
Poids à soulever	660.140^k	

Pression n par centimètre carré. $1078^k,70$

Tension ($n + 1$) intérieure $1079,73$.

Extension moyenne par mill. carré. $10,99$.

(1) *Annales des Mines*, t. XX, année 1851, Couche : Résistance de la fonte.

La tension de la fibre la plus fatiguée était donc, en kilogs, par centimètre carré :

$$T = 1078,70 \left[1 + \frac{4.774.050}{6.976.575} \right] - 1 = 1817 - 1 = 1816^k.$$

soit, par millimètre carré : 18^k,16.

II. — Presse de Britannia, construite à Liverpool.

Cette presse, qui servait à élever un tronçon de 137 mètres de longueur du pont de Britannia exécuté par Clarke et R. Stephenson, se rompit à la base et faillit produire un désastre irréparable.

Diamètre intér. du corps de pompe.	0 ^m ,559,	R = 0,2795
Diamètre extér.	id. 1,067	R' = 0,5335
Epaisseur	id. 0,254	
Diamètre du plongeur plein.	0,508	S = 2026 ^{ce} ,44
Poids soulevé.		1,164 ^k ,000
Pression n par cent. carré		574
Tension intérieure		575,03
Effort moyen d'extension par mill. carré.		6,32

La tension maxima fut donc, en kilogs, par centimètre carré :

$$T = 574 \left[1 + \frac{2 \times 2795^2}{2540 \times 8130} \right] - 1 = 1008 - 1 = 1007 \text{ kil.}$$

soit donc par millimètre carré : 10^k,07.

III. — Presse de l'État Belge.

L'État Belge met en usage une presse hydraulique à plongeur creux dont les dimensions et conditions de fonctionnement suivent :

Corps de pompe.	{	Diamètre intérieur .	0 ^m ,386	R = 0 ^m ,1930
		Id. extérieur.	0,750	R' = 0,375
		Epaisseur	0,182	
Plongeur creux.	{	Diamètre intérieur .	0,145	R = 0,0725
		Id. extérieur.	0,365	R' = 0,1825
		Epaisseur	0,110	

Charge totale sur le plongeur . . . 500^k,000 $S = 1046^{\text{m}^2}$,35
 Pression par cent. carré, en kilogs . . . 477,8516
 Tension moyenne au corps de pompe. . . 5,07 par mill. carré.
 Compression moyenne au plongeur . . . 3,15 id.

La tension maxima à laquelle est soumise la fibre interne du corps de pompe est :

$$T = 477,8516 \left[1 + \frac{2 \times \sqrt{193^2}}{182 \times \sqrt{568}} \right] - 1 = 822,2 - 1 = 821,2$$

C'est-à-dire 8^k,21 par millimètre carré. — C'est beaucoup.

La compression de la fibre interne du plongeur sera :

$$T = 1 + \frac{2 \times 477,8516 \frac{182,5^2}{255}}{110} = 1 + 1135 = 1136^{\text{k}^{\text{c}^{\text{c}}}} \text{ ou } 11^{\text{k}^{\text{m}^{\text{m}}}},36.$$

Cette valeur aussi dépasse la charge limite de sécurité, sans atteindre le niveau de la force portante de rupture.

IV. — EXPÉRIENCES DE JARDINE D'EDINBURGH (1).

Ces expériences ont porté sur des tuyaux en plomb de faibles diamètres. La charge de rupture du plomb, à la traction, est de 1^k,3 par millimètre carré. La charge qui limite l'élasticité est de 1 kilo. On conseille dans la pratique de ne pas dépasser 0^k,8 à 0^k,9.

a) Un tuyau en plomb sous les dimensions :

Diamètre intérieur	0 ^m ,038	$R = 0,019$
Diamètre extérieur	0,048	$R' = 0,024$
Epaisseur	0,005	

a résisté, sans déformation apparente, sous une charge de 305 mètres d'eau, soit 30^k,5 par centimètre carré ; il s'est rompu sous une charge de 366 mètres d'eau ou 36^k,6 par centimètre carré.

(1) *Annales de Chimie et de Physique*. — Mars 1826.

I^{er} CAS :

$$\text{La tension moyenne. . . } T_m = \frac{nR}{e} - 1$$

$$\text{c'est-à-dire } 30,5 \frac{19}{5} - 1 = 114,9 \text{ ou } 1^{\text{k.mm.}}, 15$$

$$\begin{aligned} \text{Tension maxima . . . } & 30,5 \left(1 + \frac{2 \times 19^2}{5 \times 43} \right) - 1 = \\ & = 131^{\text{k.c.}}, 9 \text{ ou } 1^{\text{k.mm.}}, 32 \end{aligned}$$

II^e CAS :

$$\text{Tension moyenne. . . } 36,6 \frac{19}{5} - 1 = 138^{\text{k.c.}} \text{ ou } 1^{\text{k.mm.}}, 38$$

$$\begin{aligned} \text{Tension maxima . . . } & 36,6 \left(1 + \frac{2 \times 19^2}{5 \times 43} \right) - 1 = \\ & = 158^{\text{k.c.}}, 5 \text{ ou } 1^{\text{k.mm.}}, 59 \end{aligned}$$

b) Un autre tuyau, de même matière, sous les dimensions :

$$\text{Diamètre intérieur . . . } 0,0508 \quad R = 0,0254$$

$$\text{Diamètre extérieur . . . } 0,0608 \quad R' = 0,0304$$

$$\text{Épaisseur } 0,005$$

a bien résisté à l'action d'une charge interne de 243^m,84 d'eau ou 24^k,38 par centimètre carré et a cédé sous une plus forte pression de 305 mètres d'eau ou 30^k,5.

I^{er} CAS :

$$\text{Tension moyenne : } 24,38 \frac{25,4}{5} - 1 = 123^{\text{k.c.}} \text{ ou } 1^{\text{k.mm.}}, 23$$

$$\begin{aligned} \text{Tension maxima} & = 24,38 \left(1 + \frac{2 \times 25,4^2}{5 \times 55,8} \right) - 1 = \\ & = 136^{\text{k.c.}} \text{ ou } 1^{\text{k.mm.}}, 36 \end{aligned}$$

II^e CAS :

$$\text{Tension moyenne} = 30,5 \frac{25,4}{5} - 1 = 154 \text{ ou } 1^{\text{k.mm.}}, 54$$

$$\begin{aligned} \text{Tension maxima} & = 30,5 \left(1 + \frac{2 \times 25,4^2}{5 \times 55,8} \right) - 1 = \\ & = 170^{\text{k.c.}}, 6 \text{ ou } 1^{\text{k.mm.}}, 71. \end{aligned}$$

Les résultats de toutes ces expériences confirment les prévisions de la théorie.

III. — *Cuvclages et serremments cylindriques.*

35. La plus forte des pressions s'exerce à l'extérieur du massif résistant. On aura donc $P' = n + 1$, $P = 1$.

Par suite

$$p = 1 + n \frac{R^2}{R'^2 - R^2} \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right)$$

$$t = -1 - n \frac{R^2}{R'^2 - R^2} \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right)$$

La compression maxima — T sera donc,

$$T = 1 + 2n \frac{R^2}{R'^2 - R^2}$$

ou

$$\frac{R^2}{T-1} = \frac{R'^2 - R^2}{2n} = \frac{R^2}{T-1-2n}$$

donc

$$R' = R \sqrt{\frac{T-1}{T-1-2n}}$$

et

$$e = R \left[\sqrt{\frac{T-1}{T-1-2n}} - 1 \right]$$

La tension limite T qui répond à une épaisseur e sera :

$$T = 1 + \frac{2n}{e} \frac{R^2}{R + R'}$$

La compression minima sera :

$$1 + n \frac{R'^2 + R^2}{R'^2 - R^2} = 1 + 2n \frac{R^2}{R'^2 - R^2} - n = T - n$$

On conclut de là, que l'on doit avoir

$$n < \frac{T-1}{2}$$

36. Suivant les meilleurs auteurs, pour des travaux d'art de l'espèce qui doivent acquérir la dureté et la résistance de la roche elle-même, on ne doit soumettre les matériaux qu'à la dixième partie de la charge capable d'amener la rupture. On ne devrait donc pas dépasser, par centimètre carré, les résistances signalées dans le tableau suivant :

MATÉRIAUX	Charges admissibles par cent. car.	MATÉRIAUX	Charges admissibles par cent. car.
	kil.		kil.
Briques mal cuites	2,7	Béton de ciment des forts de la Meuse	33
Briques tendres, rouges pâles	4,0	Chêne	45
Briques rouges	6,0	Petit-granit	50
Briques dures	7,8	Calcaire très dur	80
Briques vitrifiées	10,8	Pierres volcaniques (1)	100
Briques réfractaires	12,0	Porphyre très dur	210
Briques dures et fort cuites	15,0	Fonte	400
Briques hollandaises	24,0		

(1) Andernach.

On fixe à 12 kilogs le chiffre de résistance permanente de la brique.

D'après cela, les cuvelages en briques ne seraient réservés que pour des hauteurs d'eau inférieures à 55 mètres.

Mais si la brique est choisie avec discernement, si le mortier surtout est bien composé et la confection du massif exécutée soigneusement, on peut porter à 24 kilogs cette capacité de résistance de la brique, en présence surtout de la latitude que permet le coefficient de sécurité admis et de l'absence certaine des chocs dans la façon d'agir du bain sur la maçonnerie.

Louis Trasenster rapporte, dans la note rappelée ci-avant, qu'il a eu l'occasion d'observer des cuvelages

où la maçonnerie supportait jusqu'à 60 et 70 kilogs par centimètre carré.

Ce taux de la résistance, 24 kilogs, permettrait de faire usage de la brique pour contenir des charges d'eau approchant de 115 mètres.

Les expériences de la « Station Royale pour l'essai des matériaux à bâtir à Berlin » fixent à 20 kilogs la résistance des briques ordinaires et à 26 kilogs celle des meilleures briques. En maçonnerie de liaison ces chiffres sont réduits à 13 et 16 kilogs.

Le coefficient de sécurité admis est égal à 0,1.

Les briques hollandaises dites « chantignolles » pourraient atteindre 38 kilogs et en massif 24 kilogs.

L'usage du béton de ciment commence à être apprécié.

Les maçonneries monolithiques qu'on peut en faire se créeront sans aucun doute une large place dans les travaux d'art du fond.

A la mine de la « Bonne Espérance », à Herstal, on se propose de remplacer un ancien cuvelage en bois par une maçonnerie en béton confectionné à pied d'œuvre, monté et pilonné sur place. Les expériences à l'écrasement ont donné pour le béton des forts de la Meuse 330 kilogs par centimètre carré. On peut donc admettre une résistance de 50 kilogs par centimètre en toute sécurité. A côté de cette forte résistance, il faut signaler l'imperméabilité du massif, l'absence de joints et l'adhérence énergique aux parois naturelles entre lesquelles est engagée cette maçonnerie de blocage.

Dans ces conditions on pourrait contenir des charges d'eau supérieures à 200 mètres sans sortir des conditions ordinaires de l'emploi de la brique.

Citons dans les applications réalisées les deux exemples suivants que nous avons pu étudier de près. Ces deux serremments datent de ces dernières années.

I. — *Serrement de la mine de Gérard Cloes, à Liège.*

A la profondeur de 140 mètres, on résolut de contenir une légère venue par un serrement cylindrique en maçonnerie de briques de 1 mètre seulement d'épaisseur, compris entre des rayons de 2 et 3 mètres. La charge éventuelle pouvait atteindre le chiffre de 8 atmosphères.

La tension maxima pouvait donc s'élever, en atmosphères, à

$$T = 1 + \frac{2 \times 8}{1} \times \frac{9}{3} = 29^{\text{a}},8 \text{ ou } 30^{\text{k}},78 \text{ par } e^2.$$

La tension minima aurait pu être $T' = T - n$, soit : $21^{\text{atm}},8$ ou $22^{\text{k}},45$ par centimètre carré.

Pendant la mise en charge, la maçonnerie laissa repasser la venue. On déchargea le massif et on le compléta par l'adjonction d'un rouleau nouveau de 0^m30.

Les deux tensions maxima et minima auraient donc pu devenir, $27^{\text{atm}},80$ ou $28^{\text{k}},63$ par mètre carré et $19^{\text{atm}},80$ ou $20^{\text{k}},39$ par centimètre carré.

La charge réelle, heureusement, n'atteignit que $54^{\text{m}},13$ d'eau ou $5^{\text{atm}},25$, ce qui répond à une tension $17^{\text{k}},61$ par centimètre carré.

II. — *Serrement de la mine d'Abhoos, à Herstal.*

A l'étage de 210 mètres du puits de la « Basse-Campagne » de cette mine, on a construit un serrement cylindrique pour refouler des eaux naturelles pouvant acquérir une charge de 210 mètres de hauteur, peut-être plus.

On adopta les rayons $R' = 5^{\text{m}},50$, $R = 2$ mètres, soit donc $e = 3^{\text{m}},50$.

Les tensions maxima et minima seront fournies par les formules :

$$T_2 = 1 + 2,3n \qquad T_3 = 1 + 1,3n$$

On aura donc, pour différentes hauteurs de charge, les résultats ci-après :

HAUTEURS de CHARGE EN EAU	30 ^m	60 ^m	90 ^m	120 ^m	150 ^m	180 ^m	200 ^m
Pression n par c ² . . .	3,0	6,0	9,0	12,0	15,0	18,0	20,0
Tension maxima T_2 . . .	7,9	14,8	21,7	28,6	35,5	42,4	47,0
Tension minima T_3 . . .	4,9	8,8	12,7	16,6	20,5	24,4	27,0

Quand on laissa la pression s'établir, les eaux repassèrent entre la maçonnerie et le terrain dès que le bain se fut élevé à 62 mètres environ. Il ne cessa de hausser et atteignit même la pression de près de 15 atmosphères. On déchargea partiellement, jusqu'à la pression de 13 atmosphères, que l'on maintint en laissant écouler la venue alimentaire. On construisit un massif de maçonnerie sur 2^m,50 d'épaisseur contre le serrement qui laissa encore repasser 70 mètres cubes. A 6 atmosphères, les pertes étaient de 45 mètres cubes. Toutes choses égales, à 12 atmosphères, on aurait dû avoir

$$45 \cdot \sqrt{\frac{12}{6}} = 45 \cdot \sqrt{2} = 63 \text{ mètres cubes.}$$

Il semble donc que les accroissements de pression aient pour effet d'élargir ou de multiplier les orifices d'évacuation.

IV. — *Cuvelages et serrements mixtes.*

37. Dans l'hypothèse de la tension uniforme, on condamnait l'usage de la brique pour une tension

déterminée, 12 kilogs par centimètre carré. Or, tous ces ouvrages, calculés par l'ancienne formule, ont eu à supporter, dans certaines de leurs parties, des charges dépassant cette limite.

En effet, les deux théories donnent pour expressions des tensions répondant à une épaisseur e , à des rayons R' , R et des pressions $P' = n + 1$, $P = 1$.

La première, une tension uniforme :

$$T_1 = \frac{P'R' - PR}{R' - R} = 1 + \frac{R'}{e} n$$

La seconde, une tension maxima :

$$T_2 = 1 + n \frac{2R'^2}{e(R + R')}$$

Et une tension minima :

$$T_3 = T_2 - n$$

Si nous admettons qu'un serrement soit défini par les données :

$$R' = 7^m, \quad R = 3^m, \quad e = 4^m$$

Nous obtiendrons pour ces diverses charges n les expressions ci-après :

$$T_1 = 1 + 1,75n, \quad T_2 = 1 + 2,45n, \quad T_3 = 1 + 1,45n$$

HAUTEUR D'EAU	20 ^m	40 ^m	44 ^m ,9	50 ^m	60 ^m	63 ^m	80 ^m	100 ^m	120 ^m	140 ^m	160 ^m
Charge par cent. c.	2,0	4,0	4,49	5,00	6,0	6,3	8,0	10,0	12,0	14,0	16,0
Tension moyenne .	4,5	8,0	8,86	9,75	11,5	12,0	15,0	18,5	22,0	25,5	29,0
Tension maxima .	5,9	10,8	12,00	13,25	15,7	16,4	20,6	25,5	30,4	35,3	40,2
Tension minima .	3,9	6,8	7,51	8,25	9,7	9,1	12,6	15,5	18,4	21,3	24,2

Ce n'est donc pas sous une hauteur d'eau de 63 mètres que l'on atteint 12 kilogs par centimètre carré mais à 45 mètres déjà. Sous cette première

charge, la brique résiste à plus de 15 kilogs par centimètre carré.

Adopter, comme nous l'avons fait, une résistance possible de 24 kilogs pour la brique, revient donc à admettre dans l'ancienne théorie que le serrement décrit ci-avant est capable de résister à une charge de 90 mètres d'eau environ. Or, il en est de ces travaux qui sont peu différents, plutôt moins bien constitués, qui résistent parfaitement à semblable pression.

38. La théorie de Lamé a éclairé la question de la résistance des enveloppes et indiqué le mode de répartition des tensions et pressions dont la décroissance est manifeste du centre vers la périphérie extrême.

On peut par conséquent, avec la même sécurité que par le passé, faire usage de la brique pour des charges supérieures à celles que l'on croyait dangereuses, à la condition de ne mettre en œuvre ces matériaux que dans la région où les tensions sont inférieures à la limite admise.

De là, ce que nous appelons les cuvelages et serrements mixtes, formés de deux ou de plusieurs maçonneries de natures différentes, disposées conformément à la résistance spéciale des matériaux qui composent chacune d'elles.

Cette conséquence découle de ce fait frappant de l'analyse, à savoir que les relations fondamentales démontrées ci-avant ne portent aucune trace de la nature de la matière employée. Une fibre quelconque, en plein massif, travaille, reçoit les pressions des fibres adjacentes et les transmet d'une façon en quelque sorte géométrique, indépendante de sa constitution intime, pourvu qu'elle résiste bien entendu.

Pour consolider un ouvrage semblable, ce serait une erreur de recourir à des renforts isolés annulaires internes, faits de matériaux plus forts. Il faut unique-

ment faire usage de matériaux plus résistants vers la paroi réduite où s'exercent les fortes tensions.

Si τ représente la charge limite convenue, on pourra employer exclusivement la brique si l'on a :

$$\tau > T = 1 + \frac{2n}{e} \frac{R'^2}{R + R'}$$

Il faudra donc assigner à n une limite supérieure :

$$n_1 = \frac{\tau - 1}{2} \frac{R'^2 - R^2}{R^2}$$

On devra écarter complètement la brique dans le cas où

$$\tau < T' = 1 + n \frac{R'^2 + R^2}{R'^2 - R^2}$$

ce qui assigne à n une autre limite inférieure :

$$n_2 = (\tau - 1) \frac{R'^2 - R^2}{R'^2 + R^2}$$

Enfin on pourra l'admettre partiellement si

$$T' < \tau < T \quad \text{ou} \quad n_1 < n < n_2$$

et cela depuis le rayon R' jusqu'au rayon ρ satisfaisant à l'équation :

$$\tau = 1 + n \frac{R'^2}{R'^2 - R^2} \left(1 + \frac{R^2}{\rho^2} \right)$$

d'où

$$\rho = RR' \sqrt{\frac{n}{(\tau - 1) (R + R') e - nR'^2}}$$

L'épaisseur du massif en briques sera $R' - \rho$; le reste, en matériaux plus résistants, aura une largeur $\rho - R$.

Appliquons ces résultats au serrement défini par les éléments :

$$R' = 7, \quad R = 3, \quad e = 4, \quad \tau = 24$$

Les charges limites seront, pour l'usage de la brique

$$n_1 = \frac{23}{2} \times \frac{40}{49} = 9^k,39, \quad n_2 = 23 \times \frac{40}{58} = 15^k,86$$

soit donc 94 et 159 mètres d'eau, à peu de chose près.

Entre ces limites on pourra composer un massif mixte.

En-dessous de la charge de 94 mètres, tout le massif pourra être construit en briques ; au-dessus de 159 mètres, des matériaux plus résistants devront être mis en œuvre.

Les formules précédentes conduisent aux résultats ci-après.

CHARGES en hauteur d'eau	PRESSION K par centim. carré n	RAYON LIMITE pour la brique. ρ	Épaisseur du	
			Massif en briques $R' - \rho$	Massif terminal $\rho - R$
mètres. 158,60	kilogs. 15,86	mètres. 7,000	mètres. 0,000	mètres. 4,000
155,00	15,50	6,542	0,458	3,542
150,00	15,00	5,982	1,018	2,982
140,00	14,00	5,134	1,866	2,134
130,00	13,00	4,496	2,504	1,496
120,00	12,00	3,970	3,030	0,970
110,00	11,00	3,434	3,566	0,434
100,00	10,00	3,203	3,797	0,203
95,00	9,50	3,118	3,882	0,118
93,90	9,39	3,000	4,000	0,000

V. — *Enveloppes cylindriques résistantes,
sous de faibles épaisseurs.*

39. Formules générales. — Nous admettrons que l'on peut négliger les puissances du rapport de l'épaisseur au rayon interne à partir de la deuxième, vis-

à-vis de la première puissance et des quantités finies ordinaires.

Nous aurons :

$$\frac{P'R'^2 - PR^2}{R'^2 - R^2} = P' + (P' - P) \frac{R}{2e}$$

$$\frac{P' - P}{R'^2 - R^2} R'^2 R^2 = (P' - P) R^2 \left(1 + \frac{R}{2e}\right)$$

En désignant par ε la fraction de l'épaisseur qui correspond au rayon r , on aura :

$$r = R + \varepsilon, \quad r^2 = R^2 \left(1 + \frac{2\varepsilon}{R}\right)$$

donc

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{R^2 \left(1 + \frac{2\varepsilon}{R}\right)} = \frac{1}{R^2} \left(1 - \frac{2\varepsilon}{R}\right) = \frac{R - 2\varepsilon}{R^3}$$

En conséquence,

$$p = P + \frac{P' - P}{e} \varepsilon$$

$$t = P - 2P' - \frac{P' - P}{e} R + \frac{P' - P}{e} \varepsilon$$

La tension moyenne et les tensions extrêmes seront :

$$T_m = \frac{PR - P'R'}{R' - R} = -P' - (P' - P) \frac{R}{e}$$

$$T = P - 2P' - \left(\frac{P' - P}{e}\right) R = P - P' + T_m$$

$$T' = -P' - \left(\frac{P' - P}{e}\right) R = T_m$$

Dans tous ces cas :

1° La tension ou compression de la fibre externe est égale à la tension ou compression moyenne.

2° L'excès des efforts auxquels sont soumises les fibres extrêmes, est égal à la différence des pressions.

40. a) Application aux chaudières.

On écrira

$$P' = 1, \quad P = n + 1.$$

Donc

$$p = n + 1 - \frac{n}{e} \varepsilon, \quad t = n \left(1 + \frac{R}{e} \right) - 1 - \frac{n}{e} \varepsilon$$

$$T_m = \frac{nR}{e} - 1 = T', \quad T = \frac{nR'}{e} - 1 = \frac{nR}{e} + n - 1$$

En l'espèce T_m , les tensions T , T' , et par suite t varient de 500 à 700 kilogs par centimètre carré ; quant à la valeur de n , pression dans la chaudière par centimètre carré, elle est représentée par quelques unités. On peut donc négliger certains termes et écrire :

$$t = \frac{nR}{e} - \frac{n}{e} \varepsilon \text{ ou très approximativement : } t = \frac{nR}{e}$$

Conséquemment

$$t = T = T' = T_m = \frac{nR}{e}$$

C'est la formule admise pour le calcul des épaisseurs des générateurs.

41. b) Application aux cuvelages et tubes pressés extérieurement.

Nous aurons :

$$P = 1 \quad P' = n + 1.$$

Donc

$$p = 1 + \frac{n}{e} \varepsilon, \quad t = - \left(2n + 1 + n \frac{R}{e} \right) + \frac{n}{e} \varepsilon$$

et, en explicitant les signes des compressions :

$$T = 1 + 2n + \frac{n}{e} R, \quad T' = 1 + \frac{n}{e} R$$

Les compressions éventuelles et le rapport $\frac{R}{e}$ étant

considérables relativement à la valeur de n , on peut écrire :

$$t = n \frac{R - \varepsilon}{e} \text{ ou à peu près } t = \frac{nR}{e} = T = T'$$

42. Remarque. — Si la matière employée était le plomb, pour laquelle la résistance ne dépasse guère 100 kilogs par centimètre carré à l'extension, ou la fonte soumise à l'extension parce qu'alors il convient de ne pas dépasser 100 à 200 kilogs, il faudrait faire usage des formules complètes.

B. — Enveloppes sphériques

1. — Formules générales.

Première équation.

43. Concevons un cône d'ouverture élémentaire $d\theta$, dont le sommet est au centre et détachant dans la sphère de rayon égal à l'unité une calotte sphérique ab de surface $d\omega$. (Fig. 6.) La hauteur de cette calotte sera :

$$1 - \cos \frac{d\theta}{2} = 2 \sin^2 \frac{d\theta}{4}$$

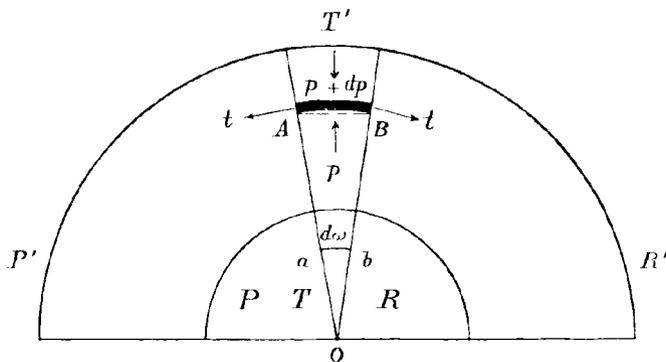


Fig. 6.

Et la surface,

$$d\omega = 4\pi \sin^2 \frac{d\theta}{4} = \frac{\pi}{4} d\theta^2.$$

Considérons aussi l'élément sphérique AB compris dans le cône et délimité aux rayons r et $r + dr$. L'aire de chacune des faces sera : $r^2 d\omega$.

La pression interne donnera donc naissance à une force $pr^2 d\omega$.

La pression externe fournira une autre force centrale de sens contraire et égale à

$$[pr^2 + d(pr^2)] d\omega$$

La résultante de ces deux forces, estimées dans le sens extérieur sera :

$$- d(pr^2) d\omega$$

La tension spécifique t agissant sur une aire latérale circulaire de longueur

$$2\pi r \sin \frac{d\theta}{2} = \pi r d\theta$$

et d'épaisseur dr donnera lieu à une force résultante projetée sur l'axe de l'élément AB , dont l'expression sera :

$$t \cdot \pi r d\theta \cdot dr \sin \frac{d\theta}{2} = 2tr dr \cdot \frac{\pi d\theta^2}{4} = 2tr dr d\omega$$

En conséquence,

$$2tr dr d\omega = - d(pr^2) d\omega$$

ou

$$t + \frac{d(pr^2)}{d(r^2)} = 0 \quad (I)$$

Seconde équation.

44. La réduction de l'élément, suivant l'épaisseur, sera :

$$p \frac{dr}{E}$$

Avant la déformation, les rayons extrêmes de cet élément et l'épaisseur seront :

$$r, \quad r + dr, \quad dr.$$

Après déformation, les rayons deviendront ainsi que l'épaisseur,

$$r + \frac{tr}{E}, \quad r + \frac{tr}{E} + dr + \frac{d(tr)}{E}, \quad dr + \frac{d(tr)}{E}$$

La réduction sera donc

$$- \frac{d(tr)}{E}$$

Par conséquent,

$$p - \frac{d(tr)}{dr} = 0 \quad (II)$$

Ces deux équations peuvent s'écrire comme suit :

$$2(p + t) + r \frac{dp}{dr} = 0 \quad p + t + r \frac{dt}{dr} = 0$$

Pression et tension.

45. Ajoutant membre à membre les équations, on aura :

$$3(p + t) + r \frac{d(p + t)}{dr} = 0$$

c'est-à-dire

$$3 \frac{dr}{r} + \frac{d(p + t)}{p + t} = 0$$

ou

$$r^3(p + t) = R^3(P + T) = R'^3(P' + T') \quad (a)$$

Multipliant la seconde par 2 et soustrayant membre à membre on obtient :

$$r \frac{d(2t-p)}{dr} = 0$$

donc

$$2t - p = 2T' - P = 2T'' - P' \quad (b)$$

Par suite, en combinant les relations (a) et (b) (1)

$$p = \frac{P'R^3 - PR^3}{R'^3 - R^3} - \frac{P' - P}{R'^3 - R^3} \frac{R^3 R^3}{r^3} \quad (\alpha)$$

$$t = -\frac{P'R^3 - PR^3}{R'^3 - R^3} - \frac{1}{2} \frac{P' - P}{R'^3 - R^3} \frac{R^3 R^3}{r^3} \quad (\beta)$$

Tensions extrêmes et tension moyenne.

46. Les tensions extrêmes seront :

$$T = \frac{P}{2} - \frac{3}{2} \frac{P'R^3 - PR^3}{R'^3 - R^3}$$

$$T' = \frac{P'}{2} - \frac{3}{2} \frac{P'R^3 - PR^3}{R'^3 - R^3}$$

Pour exprimer la tension moyenne T_m , considérons, dans un plan perpendiculaire à celui de la section de la figure 6, un trapèze curviligne d'ouverture $d\theta$ et dont les éléments successifs $rdrd\theta$ sont soumis normalement à des efforts de traction ou de compression spécifique t . On aura donc,

$$T_m \int_{R'}^R r dr d\theta = \int_{R'}^R tr dr d\theta$$

ou, $d\theta$ étant une constante,

$$T_m \frac{(R'^2 - R^2)}{2} = - \left[\frac{P'R^3 - PR^3}{R'^3 - R^3} \frac{R'^2 - R^2}{2} + \frac{P' - P}{R'^3 - R^3} \frac{R' - R}{2} R^2 R^2 \right]$$

ou, réductions faites :

(1) LAMÉ, *Théorie de l'Elasticité*, p. 242.

$$T_m = \frac{P' R^2 - P R^2}{R'^2 - R^2}.$$

Contraction du massif.

47. Cette contraction sera :

$$e = \int_R^{R'} \frac{p dr}{E} = \frac{e}{E} \frac{P' R^3 - P R^3 + (P' - P) R R' \frac{R + R'}{2}}{R'^3 - R^3}$$

2. — Discussion.

48. a) La plus forte pression s'exerce à l'intérieur de la sphère $P > P'$.

$$1^\circ \quad P' R'^3 > P R^3$$

Nous poserons :

$$A = \frac{P' R'^3 - P R^3}{R'^3 - R^3}, \quad B = (P - P') \frac{R^3 R'^3}{R'^3 - R^3}$$

de sorte que

$$p = A + \frac{B}{r^3} \quad t = -A + \frac{1}{2} \frac{B}{r^3}$$

La pression varie de l'infini à la limite A quand r croît de zéro à l'infini. La tension, entre les mêmes états de grandeur, passe de l'infini à $-A$ (fig. 3). Cette tension s'annule donc pour une valeur du rayon :

$$R_0 = R R' \sqrt[3]{\frac{P - P'}{2 (P' R'^3 - P R^3)}}$$

On aura :

$$R_0 \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} R$$

suivant que

$$P R^3 - P' R'^3 \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} 2 P' R^3 - 2 P R^3$$

ou

$$\frac{P}{P'} \begin{matrix} > \\ \equiv \\ < \end{matrix} \frac{3R^3}{R^3 + 2R^3} > 1$$

Et,

$$R_0 \begin{matrix} < \\ \equiv \\ > \end{matrix} R'$$

suivant que

$$PR^3 - P'R^3 \begin{matrix} < \\ \equiv \\ > \end{matrix} 2P'R^3 - 2PR^3$$

ou

$$\frac{P}{P'} \begin{matrix} < \\ \equiv \\ > \end{matrix} \frac{2R^3 + R^3}{3R^3} > 1$$

Comme il est facile de s'assurer que

$$\frac{3R^3}{R^3 + 2R^3} < \frac{2R^3 + R^3}{3R^3}$$

on conclut de cette analyse :

$$\text{I) Si } \frac{P}{P'} < \frac{3R^3}{R^3 + 2R^3}, \text{ on aura } R_0 \leq R.$$

II. Si

$$\frac{3R^3}{R^3 + 2R^3} < \frac{P}{P'} < \frac{2R^3 + R^3}{3R^3}$$

on aura

$$R < R_0 < R'$$

Une partie de la section sphérique sera soumise à la compression, une autre à l'extension et elles seront séparées par une section à tension nulle.

III. Si

$$\frac{P}{P'} > \frac{2R^3 + R^3}{3R^3}$$

il y aura traction en tous les points du milieu résistant.

$$2^{\circ} \quad P'R^3 = PR^3 \text{ ou } \frac{P}{R^3} = \frac{P'}{R^3} = \frac{P - P'}{R^3 - R^3}$$

Il vient :

$$p = 2t = P \frac{R^3}{r^3}$$

3° $P'R^3 < PR^3$. Il y a extension en tous les points du massif.

La pression s'annulera pour une valeur du rayon

$$R_0 = RR' \sqrt[3]{\frac{P - P'}{PR^3 - P'R^3}} = R' \sqrt[3]{\frac{PR^3 - P'R^3}{PR^3 - P'R^3}} > R'$$

C'est-à-dire en dehors du massif. Il n'y a donc pas lieu de tenir compte de ce résultat, puisque, dans l'espace, les pressions ne se distribuent pas suivant la même loi que dans le massif. (Fig. 4.)

b) $P = P'$. Ce serait le cas d'une plate-cuve noyée.

On aura :

$$p = -t = P.$$

c) $P < P'$ et par suite $PR^3 < P'R^3$.

Il y aura compression partout. (Fig. 5).

La pression s'annulerait pour une valeur du rayon

$$R_0 = RR' \sqrt[3]{\frac{P' - P}{P'R^3 - PR^3}} = R \sqrt[3]{\frac{P'R^3 - PR^3}{P'R^3 - PR^3}} < R.$$

Ce qui était à prévoir.

49. Cas spéciaux remarquables.

A. Cas particulier $P' = 0$.

$$p = \frac{PR^3}{R^3 - R^3} \left(\frac{R^3}{r^3} - 1 \right) \quad t = \frac{PR^3}{R^3 - R^3} \left(\frac{1}{2} \frac{R^3}{r^3} + 1 \right)$$

B. $P = 0$, cas des hémisphères de Magdebourg.

$$p = \frac{P'R^3}{R^3 - R'^3} \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right) \quad t = -\frac{P'R^3}{R^3 - R'^3} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^3}\right)$$

$$C. \quad PR^2 = P'R'^2 \text{ ou } \frac{P}{R'} = \frac{P'}{R^2} = \frac{P - P'}{R^2 - R'^2}$$

On aura :

$$p = P \frac{R^2 (R' - R)}{R^3 - R'^3} \left[1 + \frac{RR' (R + R')}{r^3}\right]$$

$$t = -P \frac{R^2 (R' - R)}{R^3 - R'^3} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{RR' (R + R')}{r^3}\right]$$

La tension s'annule au rayon :

$$R' > R_0 = \sqrt[3]{\frac{RR' (R + R')}{2}} > R$$

$$D. \quad PR = P'R' \text{ ou } \frac{P}{R'} = \frac{P'}{R} = \frac{P - P'}{R' - R}$$

On a :

$$p = P \frac{R R'^2 - R^2}{R'^3 - R^3} \left[1 + \frac{R^2 R'^2}{R + R'} \frac{1}{r^3}\right]$$

$$t = -P \frac{R (R'^2 - R^2)}{R'^3 - R^3} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{R^2 R'^2}{R + R'} \frac{1}{r^3}\right]$$

La tension s'annule au rayon

$$R_0 = \sqrt[3]{\frac{R^2 R'^2}{2(R + R')}}$$

Or, R_0 est toujours inférieur à R' .

D'autre part, on aura :

$$R_0 \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} R \text{ suivant que } R' \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} R(\sqrt{3} + 1) = 2,73 R$$

ou

$$P \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} P'(\sqrt{3} + 1) = 2,73 P'$$

E. Cas de la sphère pleine, $R = 0$.

$$p = -t = P'$$

F. Cas d'un massif indéfini, $R' = \infty$:

$$p = P' - (P' - P) \frac{R^3}{r^3} \quad t = -P' - \frac{P' - P}{2} \frac{R^3}{r^3}$$

$$T = -\frac{3P' - P}{2}$$

CALCUL DES ENVELOPPES SPHÉRIQUES.

I. — Récipients à pression interne.

50. Nous aurons

$$P' = 1, \quad P = n + 1$$

Donc

$$P = 1 - n \frac{R^3}{R'^3 - R^3} \left(1 - \frac{R'^3}{r^3} \right)$$

$$t = -1 + n \frac{R^3}{R'^3 - R^3} \left(1 + \frac{R'^3}{2r^3} \right)$$

Les tensions extrêmes seront :

$$T = \frac{n}{2} \frac{2R^3 + R'^3}{R'^3 - R^3} - 1$$

$$T' = \frac{3}{2} \frac{nR^3}{R'^3 - R^3} - 1 = T - \frac{n}{2}$$

On déduit de la première de ces équations :

$$\frac{T + 1}{2R^3 + R'^3} = \frac{\frac{n}{2}}{R'^3 - R^3} = \frac{T + 1 - \frac{n}{2}}{3R^3} = \frac{T + 1 + n}{3R'^3}$$

donc

$$R' = R \sqrt[3]{\frac{T + 1 + n}{T + 1 - \frac{n}{2}}}$$

et

$$e = R \left[\sqrt[3]{\frac{T+1+n}{T+1-\frac{n}{2}}} - 1 \right]$$

II. — *Plate-cuve et serrement sphériques.*

51. La forte pression est externe. On posera donc

$$P' = n + 1, \quad P = 1$$

par suite

$$P = 1 + n \frac{R^3}{R^3 - R'^3} \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right)$$

$$t = -1 - n \frac{R^3}{R^3 - R^3} \left(1 + \frac{R^3}{2r^3} \right)$$

Les compressions extrêmes seront :

$$T = 1 + 3 \frac{n}{2} \frac{R^3}{R^3 - R^3} \quad T' = 1 + \frac{n}{2} \frac{2R^3 + R^3}{R^3 - R^3}$$

La première de ces équations permet d'écrire

$$\frac{T-1}{R^3} = \frac{\frac{3}{2}n}{R^3 - R^3} = \frac{T-1 - \frac{3}{2}n}{R^3}$$

donc

$$R' = R \sqrt[3]{\frac{T-1}{T-1 - \frac{3}{2}n}}$$

et

$$e = R \left[\sqrt[3]{\frac{T-1}{T-1 - \frac{3}{2}n}} - 1 \right]$$

Dans l'un et l'autre de ces cas on devra avoir :
Pour le premier :

$$n < 2(T+1)$$

Pour le second :

$$n < \frac{2}{3}(T - 1)$$

III. — *Massifs sphériques mixtes.*

52. La brique pourra être employée exclusivement si la tension maxima τ correspond à l'expression de la plus forte tension que le massif doit supporter ; on aura donc

$$\tau = T = 1 + \frac{3}{2} n_1 \frac{R'^3}{R'^3 - R^3}$$

d'où une première limite de la charge,

$$n_1 = \frac{2}{3} (\tau - 1) \frac{R'^3 - R^3}{R'^3}$$

La brique devra être exclue totalement si

$$\tau = T = 1 + \frac{n_2}{2} \frac{2R'^3 + R^3}{R'^3 - R^3}$$

d'où une seconde limite de la charge,

$$n_2 = 2 (\tau - 1) \frac{R'^3 - R^3}{2R'^3 + R^3}$$

On pourra donc recourir à un massif mixte si la double inégalité

$$n_2 > n > n_1$$

se vérifie.

Le rayon extrême ρ de la couche sphérique en briques sera fourni par l'équation :

$$(\tau - 1) (R'^3 - R^3) - nR'^3 = \frac{nR^3 R'^3}{2\rho^3}$$

d'où

$$\rho = RR' \sqrt[3]{\frac{\frac{n}{2}}{(\tau - 1)(R'^3 - R^3) - nR'^3}}$$

53. Appliquons ces formules à un serrement ou à une plate-cuve correspondant aux éléments

$$R' = 7, \quad R = 3, \quad e = 4, \quad \tau = 24$$

Nous aurons d'abord

$$n_1 = \frac{2}{3} \times 23 \times \frac{316}{343} = 14^k,12 \text{ ou } 141 \text{ mètres de charge d'eau.}$$

$$n_2 = 2 \times 23 \times \frac{316}{713} = 20^k,39 \text{ ou } 204 \text{ mètres de charge d'eau.}$$

Pour des charges intermédiaires, nous aurons un massif en briques et un autre en matériaux plus résistants distribués comme l'indique le tableau suivant.

CHARGES en hauteur d'eau.	PRESSION kilog. par cent. car. <i>n</i>	RAYON LIMITE pour la brique <i>p</i>	Épaisseur du	
			MASSIF en briques. <i>R' - p</i>	MASSIF terminal <i>p - R</i>
mètres.	kilogs.	mètres.	mètres.	mètres.
204	20,4	7,00	0,00	4,00
202	20,2	6,49	0,51	3,49
200	20,0	6,11	0,89	3,11
199	19,9	5,92	1,08	2,92
198	19,8	5,77	1,23	2,77
195	19,5	5,38	1,62	2,38
190	19,0	4,89	2,11	1,89
180	18,0	4,24	2,76	1,24
170	17,0	3,80	3,20	0,80
160	16,0	3,47	3,53	0,47
150	15,0	3,19	3,81	0,19
141	14,1	3,00	4,00	0,00

54. Remarque. — Faisons observer en passant l'influence de la forme sur la résistance d'un massif sphérique ou cylindrique de mêmes dimensions.

Dans le premier, la brique ne devrait être écartée qu'à partir de la charge de 204 mètres; dans le second, cette éventualité se produit à 159 mètres.

La brique peut être employée exclusivement dans le massif sphérique spécifié ci-avant jusque 141 mètres de charge. Dans un massif cylindrique on doit descendre à 94 mètres.

IV. — *Enveloppes sphériques résistant sous de faibles épaisseurs.*

55. Formules générales. — Négligeant les puissances du rapport de l'épaisseur au rayon interne supérieures à la première, on aura :

$$R' = R + e, \quad R'^3 = R^2(R + 3e)$$

et

$$\frac{P'R^3 - PR^3}{R'^3 - R^3} = P' - \frac{P - P'}{3} \frac{R}{e}$$

$$\frac{P - P'}{R'^3 - R^3} R^3 R'^3 = \frac{P - P'}{3} \frac{R}{e} R^2 (R + 3e)$$

donc

$$p = P' - \frac{P - P'}{3} \frac{R}{e} \left[1 - \frac{R^2(R + 3e)}{r^3} \right]$$

$$t = -P' + \frac{P - P'}{3} \frac{R}{e} \left[1 + \frac{R^2(R + 3e)}{2r^3} \right]$$

et

$$T = \frac{P - 3P'}{2} + \frac{P - P'}{2} \frac{R}{e}$$

$$T' = -P' + \frac{P - P'}{2} \frac{R}{e}$$

On vérifie ainsi,

$$2T - P = 2T' - P'.$$

Quant à la tension moyenne, elle sera :

$$T_m = \frac{PR^2 - P'R'^2}{R^2 - R'^2} = -P' + \frac{P - P'}{2} \frac{R}{e} = T'$$

Elle est donc égale à la tension externe.

APPLICATIONS AUX RÉSERVOIRS SPHÉRIQUES.

a. *Pression interne.*

56. On posera donc

$$P' = 1, \quad P = n + 1$$

donc

$$\begin{aligned}
 p &= 1 - \frac{n}{3} \frac{R}{e} \left[1 - \frac{R^2 (R + 3e)}{r^3} \right] \\
 t &= -1 + \frac{n}{3} \frac{R}{e} \left[1 + \frac{R^2 (R + 3e)}{2 r^3} \right] \\
 T &= \frac{n-2}{2} + \frac{n}{2} \frac{R}{e} \quad T' = -1 + \frac{n}{2} \frac{R}{e}
 \end{aligned}$$

ou très approximativement :

$$T = T' = t = \frac{n}{2} \frac{R}{e}.$$

57. Expériences de Navier. — Navier a pressé, jusque la rupture, deux vases sphériques en tôle fermés par soudure.

I. Les dimensions du premier récipient étaient :

$$R' = 0,1685, \quad R = 0,1659, \quad e = 0,0026.$$

Charge de rupture : $n = 144$ kilogs par centimètre carré.

Les tensions extrêmes furent donc :

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{142}{2} + \frac{144}{2} \frac{1659}{26} = 71 + 4594 = 4665 \text{ kilogs} \\
 &\text{ou } 47 \text{ kilogs par millimètre carré.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T' &= -1 + \frac{144}{2} \frac{1659}{26} = -1 + 4594 = 4593 \text{ kilogs} \\
 &\text{ou } 46 \text{ kilogs par millimètre carré.}
 \end{aligned}$$

II. Dans la seconde expérience on avait :

$$R' = 0,1425, \quad R = 0,1401, \quad e = 0,0024.$$

La charge de rupture fut $n = 163$ kilogs par centimètre carré.

En conséquence,

$$T = \frac{161}{2} + \frac{163}{2} \frac{1401}{24} = 4838 \text{ kil. soit } 48 \text{ kil. par millim. carr.}$$

$$T^r = -1 + \frac{163}{2} \frac{1401}{24} = 4756^k,5 \text{ soit } 48 \text{ kil. par millim. carr.}$$

Or, les charges de rupture, à l'extension, de ces tôles fines étaient, pour la première, $43^k,3$; pour la seconde, $45^k,4$.

b. — Pression externe.

On posera $P' = n + 1$, $P = 1$

$$p = n + 1 + \frac{n}{3} \frac{R}{e} \left[1 - \frac{R^2 (R + 3e)}{r^3} \right]$$

$$t = - (n + 1) - \frac{n}{3} \frac{R}{e} \left[1 + \frac{R^2 (R + 3e)}{2r^3} \right]$$

Donc

$$T = \frac{3n + 2}{3} + n \frac{R}{2e} \quad T^r = n + 1 + n \frac{R}{2e}$$

ou très approximativement

$$t = T = T^r = n \frac{R}{2e}.$$

V. — DU CENTRE DE PRESSION DANS LES MASSIFS
CYLINDRIQUES ET SPHÉRIQUES.

58. La répartition des tensions ou compressions au sein d'un massif résistant permet de trouver, pour chaque section, le point d'application de la résultante des réactions moléculaires qui font équilibre à l'ensemble des forces sollicitantes.

Dans l'hypothèse d'une enveloppe qui a un centre de figure, les forces appliquées, si elles sont distribuées régulièrement, se résument en une force centrale unique.

Or, il y a une infinité de systèmes de forces internes capables d'équilibrer cette action totale. Il s'en suit que le problème pris dans toute sa généralité est

indéterminé. Les efforts intérieurs résultent en effet de la dépendance mutuelle des pressions.

Entre tous les systèmes capables d'atteindre ce but, il en est un très simple adopté naguère et qui consiste :

1° A équilibrer la résultante totale unique par des composantes parallèles égales appliquées au centre de gravité de la section ou aux centres de gravité de certaines parties de cette section.

2° A équilibrer chacune de ces composantes par un système d'actions élémentaires parallèles, s'exerçant en chaque point de la section proportionnellement aux aires des éléments considérés.

C'est l'hypothèse de la tension spécifique constante.

Or, la théorie plus rigoureuse de Lamé conduit à des résultats totalement différents. Les divers points de la section ne sont pas également chargés. Il peut même se faire qu'ils le soient en sens contraires; qu'il y ait compression dans une région, extension dans une autre et que la tension moyenne par conséquent soit nulle.

Si, de la seule connaissance d'un système de forces, on ne peut déduire l'ensemble des réactions moléculaires qu'il développe dans un massif, on peut remonter de ces dernières au système résultant appliqué par la composition des actions élémentaires dont on connaît la loi de distribution.

Proposons-nous de résoudre ce problème pour les deux genres d'enveloppes cylindriques et sphériques pressées uniformément sur les deux faces.

a. — Enveloppes cylindriques.

59. Dans toute section diamétrale, la loi des tensions est :

$$t = A + \frac{B}{r^2}$$

ou

$$A = \frac{PR^2 - P'R'^2}{R^2 - R'^2}, \quad B = \frac{P - P'}{R^2 - R'^2} R^2 R'^2$$

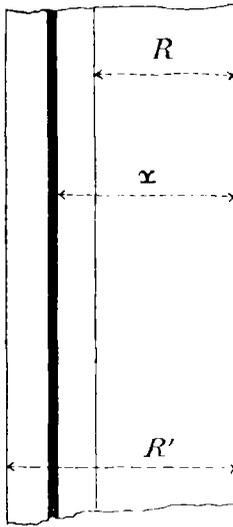


Fig. 7.

À une distance r du centre (fig. 7), la fibre d'épaisseur dr considérée sur une longueur égale à l'unité, résiste avec une intensité $t dr$. Si nous composons toutes les forces qui agissent sur une demi-section, au centre, nous aurons une force Q et un couple L tels que

$$Q = \int_R^{R'} t dr = A (R' - R) + B \frac{R' - R}{RR'}$$

$$L = \int_R^{R'} t r dr = A \frac{R^2 - R'^2}{2} + \frac{B}{2} \frac{R^2}{R'^2}$$

ou, toutes réductions faites :

$$Q = PR - P'R'$$

$$L = \frac{PR^2 - P'R'^2}{2} + \frac{P - P'}{2} \frac{R^2 R'^2}{R^2 - R'^2} \mathcal{L} \frac{R'^2}{R^2}$$

Ce couple et cette force, qui sont dans un même plan, peuvent se composer en une résultante unique égale à Q dont le passage se fera à une distance du centre :

$$\delta = \frac{L}{Q} = \frac{(PR^2 - P'R'^2)(R^2 - R'^2) + (P - P') R^2 R'^2 \mathcal{L} \frac{R'^2}{R^2}}{2(PR - P'R')(R^2 - R'^2)}$$

Or, le centre de gravité de cette demi-section est à une distance de l'axe du cylindre égale à

$$\frac{R + R'}{2}$$

Si donc Δ est la distance au centre de gravité du point d'application de la résultante unique des actions moléculaires, c'est-à-dire de la résultante des forces extérieures sur cette section, on aura, après quelques réductions :

$$\Delta = \frac{(P - P') RR'}{2(PR - P'R')(R^2 - R'^2)} \left(R^2 - R'^2 - RR' \mathcal{L} \frac{R'^2}{R^2} \right)$$

Si elles sont composées au centre de gravité de cette section, on aura une force Q et un couple $Q\Delta$.

Or, la fonction

$$R^2 - R'^2 - RR' \mathcal{L} \frac{R'^2}{R^2}$$

est toujours positive, quelles que soient les valeurs de R et de R' .

En effet, posons $\frac{R'}{R} = x$; cette fonction sera :

$$y = R^2 (x^2 - 2x \ln x - 1)$$

qui, pour $x = 1$, donne $y_1 = 0$.

D'un autre côté

$$y' = 2R^2(x - 1 - lx), \text{ donc } y'_1 = 0 \text{ pour } x = 1$$

$$y'' = 2R^2 \left(1 - \frac{1}{x} \right), \text{ par suite } y''_1 = 0 \text{ pour } x = 1$$

$$y''' = \frac{2R^2}{x^2} > 0$$

La fonction y'' qui s'annule pour $x = 1$ est croissante, et par suite positive. Il en est de même de la fonction y' et par conséquent de y .

Le signe de Δ provient donc uniquement du rapport

$$\frac{P - P'}{PR - P'R'}$$

En définitive, dans le cas d'une enveloppe cylindrique, les forces extérieures se réduisent en deux séries de forces parallèles égales à Q par unité de longueur et appliquées en tous les points de deux droites parallèles situées à une distance Δ des lignes médianes des sections rectangulaires déterminées par un plan diamétral quelconque dans la paroi du cylindre.

b. Enveloppes sphériques.

60. Considérons dans une section diamétrale, le trapèze curviligne détaché par deux rayons voisins faisant entre eux un angle $d\theta$, dans la couronne circulaire qui représente la section du massif. (Fig. 6.)

Au rayon r correspond une fibre de surface

$$rd\theta dr$$

et une tension

$$t = A + \frac{B}{r^3}$$

ou

$$A = \frac{PR^3 - P'R'^3}{R^3 - R'^3}, \quad B = \frac{P - P'}{2} \frac{R^3 R'^3}{R^3 - R'^3}$$

La force élémentaire développée sera :

$$\left(A + \frac{B}{r^3}\right) r dr d\theta$$

Si on compose toutes ces actions au centre de la sphère, on aura une force :

$$Q = d\theta \int_R^{R'} \left(A + \frac{B}{r^3}\right) r dr = d\theta \left[A \frac{R'^2 - R^2}{2} + B \frac{R' - R}{RR'} \right]$$

ou

$$Q = \frac{d\theta}{2(R'^3 - R^3)} \left[(PR^3 - P'R'^3) (R'^2 - R^2) + (P - P') R^2 R'^2 (R' - R) \right]$$

Réductions faites,

$$Q = \frac{PR^2 - P'R'^2}{2} d\theta$$

Et un couple

$$L = d\theta \int_R^{R'} tr^2 dr = d\theta \left[A \frac{R'^3 - R^3}{3} + \frac{B}{3} \mathfrak{L} \frac{R^3}{R^3} \right]$$

c'est-à-dire

$$L = \frac{d\theta}{6(R'^3 - R^3)} \left[2(PR^3 - P'R'^3) (R'^3 - R^3) + (P - P') R^3 R'^3 \mathfrak{L} \frac{R^3}{R^3} \right]$$

système qui se réduit à une résultante unique Q appliquée à une distance du centre,

$$s = \frac{L}{Q} = \frac{2(PR^3 - P'R'^3) (R'^3 - R^3) + (P - P') R^3 R'^3 \mathfrak{L} \frac{R^3}{R^3}}{3(R'^3 - R^3) (PR^2 - P'R'^2)}$$

Mais le centre de gravité du trapèze élémentaire est à une distance du centre de la sphère :

$$\delta_o = \frac{\int_R^{R'} r^2 dr}{\int_R^{R'} r dr} = \frac{2}{3} \frac{R'^3 - R^3}{R'^2 - R^2}$$

En conséquence, la distance Δ du passage de la résultante unique à ce centre de gravité sera, après simplifications :

$$\Delta = \frac{2 (P - P') R^2 R'^2 \left[R'^3 - R^3 - \frac{R + R'}{2} R R' \frac{R'^3}{R^3} \right]}{3 (R + R') (R'^3 - R^3) (P R'^2 - P' R^2)}$$

Or, le dernier facteur est toujours positif.

En effet, posons $x = \frac{R'}{R}$, nous aurons pour expression y de ce facteur :

$$y = R^3 \left[x^3 - 1 - \frac{3}{2} (1 + x) x l x \right]$$

qui s'annule pour $x = 1$.

On en tire successivement

$$y' = \frac{3}{2} R^3 \left[2x^2 - 1 - x - (1 + 2x) l x \right]$$

$$y'' = \frac{3}{2} R^3 \left[4x - 3 - 2l x - \frac{1}{x} \right]$$

$$y''' = \frac{3}{2} R^3 \left[3 + \left(1 - \frac{1}{x} \right)^2 \right] > 0$$

Les fonctions y , y' , y'' s'annulent pour $x = 1$.

La fonction y''' est toujours positive. Donc y'' est une fonction croissante et, par suite, toujours positive. Il en est ainsi de y' et, par suite, de y .

Le signe de l'abscisse Δ ne dépend donc que de celui du rapport :

$$\frac{P - P'}{P R'^2 - P' R^2}$$

La résultante des forces extérieures dans toute section annulaire diamétrale peut donc être remplacée par une série de forces parallèles uniformément réparties le long d'une circonférence concentrique à celle des centres de gravité des trapèzes circulaires composant la couronne et séparée de celle-ci d'une longueur Δ .

c. — Discussion des résultats qui précèdent.

61. La discussion de ces résultats peut se faire pour les deux genres d'enveloppes.

I. $P > P'$

Si

$$PR \gtrless P'R' \text{ pour le cylindre}$$

$$PR^2 \gtrless P'R'^2 \text{ pour la sphère}$$

On aura :

$$\Delta \gtrless 0 \text{ et } Q \gtrless 0$$

La résultante est une tension ou une compression suivant que la force totale interne est supérieure ou inférieure à la force unique externe. — Le point de passage est toujours vers la plus grande de ces forces.

Si

$$PR = P'R' \text{ pour le cylindre}$$

$$PR^2 = P'R'^2 \text{ pour la sphère}$$

on aura :

$$\Delta = \infty, \quad Q = 0$$

Toutes les forces se réduisent à un couple unique :

$$\frac{PR}{2(R+R')} \left(R^2 - R'^2 + RR' \mathcal{L} \frac{R'^2}{R^2} \right)$$

ou

$$\frac{1}{3} \frac{PR^2 d\theta}{R^2 + RR' + R'^2} \left(R^3 - R'^3 + \frac{R+R'}{2} RR' \mathcal{L} \frac{R'^3}{R^3} \right)$$

II. $P = P'$

On obtient : $\Delta = 0$

$$Q = -P(R' - R) \quad \text{ou} \quad Q = -\frac{P}{2}(R'^2 - R^2)$$

Les forces se réduisent à une résultante unique appliquée au centre de gravité de la section. Dans ce cas on a :

$$T' = t = -P.$$

III. $P < P'$ et, par suite, $PR < P'R'$, $PR^2 < P'R'^2$

Donc $\Delta > 0$, $Q < 0$.

Il y a compression. Le point d'application de la résultante est à l'intérieur par rapport au centre de gravité de la section diamétrale.

62. Cas remarquables.

a) $P' = 0$

Pour le cylindre : $Q = PR$,

$$\Delta = \frac{R'}{2(R'^2 - R^2)} \left(R'^2 - R^2 - RR' \mathcal{L} \frac{R'^2}{R^2} \right) > 0$$

Pour la sphère : $Q = \frac{PR^2}{2} d\theta$,

$$\Delta = \frac{2R^2 \left(R'^3 - R^3 - \frac{R + R'}{2} RR' \mathcal{L} \frac{R'^3}{R^3} \right)}{3(R + R')(R'^3 - R^3)} > 0$$

b) $P = 0$

Pour le cylindre : $Q = -P'R'$,

$$\Delta = -\frac{R \left(R'^2 - R^2 - RR' \mathcal{L} \frac{R'^2}{R^2} \right)}{2(R'^2 - R^2)} < 0$$

Pour la sphère : $Q = -\frac{P'R'^2}{2} d\theta$,

$$\Delta = -\frac{2R^2 \left(R'^3 - R^3 - \frac{R + R'}{2} RR' \mathcal{L} \frac{R'^3}{R^3} \right)}{3(R + R')(R'^3 - R^3)} < 0$$

c) $R = 0$

Pour le cylindre : $Q = -P'R'$,

$$\Delta = \frac{(P - P')}{2P'R'} \left[R^3 \Omega \frac{R^2}{R^2} \right]_0 = 0$$

Pour la sphère : $Q = -\frac{P'R^2}{2} d\theta$,

$$\Delta = \frac{2(P - P')}{3P'R^3} \left(\frac{R + R'}{2} \right)_0 \left(R^3 \Omega \frac{R^3}{R^3} \right)_0 = 0$$

On a, dans ce cas, $t = T = -P'$.

d) $R' = \infty$

Pour le cylindre :

$$Q = -\infty, \quad \Delta = -\frac{P - P'}{P'} \frac{R}{2}$$

Pour la sphère :

$$Q = -\infty, \quad \Delta = 0$$

Remarquons que les forces moléculaires développées ne se composent en une résultante appliquée au centre de gravité de la section que dans les cas $P = P'$ ou $R = 0$.

La tension dans chacun de ces cas est constante en tous les points de la section.

VI. — SERREMENTS ET PLATES-CUVES NOYÉS OU A DOUBLE PRESSION.

63. Les formules précédentes établissent que dans un massif cylindrique ou sphérique les pressions et les tensions correspondantes décroissent assez rapidement d'une face à l'autre, ce qui fait que la fibre le plus fortement chargée atteint sa limite d'élasticité alors que la fibre extrême, ou celles qui sont simplement éloignées du centre, travaillent dans des conditions très différentes de la résistance qu'il est dangereux d'atteindre. Au point de vue de la réaction totale

que la matière doit opposer à l'action des forces extérieures, certaines régions sont donc sacrifiées en quelque sorte à d'autres où la résistance développée est très réduite.

La seconde des équations générales (22), pour les enveloppes cylindriques,

$$p - t = P - T = P' - T'$$

rend parfaitement compte du défaut de distribution de ces réactions moléculaires. On aura, en effet,

$$T - T' = P - P'$$

Si, comme dans les serrements, on pose $P = 1$, $P' = n + 1$, les efforts T et T' seront négatifs, de sorte que

$$T - T' = -n$$

ou, en explicitant les signes des compressions,

$$T - T' = n.$$

Dans le cas des bouches à feu, $P = n + 1$, $P' = 1$. Toutes les fibres sont tendues, on a donc aussi,

$$T - T' = n$$

Dans ces deux hypothèses la différence des tensions extrêmes est égale à l'excès des pressions agissantes.

On arrive pour les massifs sphériques à une conclusion analogue. On obtient, en effet (45),

$$T - T' = \frac{n}{2}$$

L'augmentation de l'épaisseur d'un massif résistant est donc insuffisante pour en assurer la consolidation au delà d'une certaine limite. Pour renforcer un serrement, par exemple, pour permettre l'emploi de la brique dans la région interne, alors que les compressions opposées aux charges dépassent ce que l'on est

convenu d'admettre comme sécurité absolue, il n'y a d'autre moyen que d'exercer sur la face fortement comprimée une pression artificielle dans le but d'équilibrer partiellement la pression du bain à contenir. De là, ce que nous désignons sous le nom de *serrement noyé*, pressé sur les deux faces et possible dans des cas particuliers.

64. Admettons qu'on soumette cette paroi libre à l'action d'une pression m ou une charge absolue $(m + 1)$.

On aura $P' = n + 1$, $P = m + 1$ et, en mettant en évidence le signe de la tension t , d'après la relation (23, β)

$$t = 1 + \frac{1}{R'^2 - R^2} \left[nR'^2 - mR^2 + (n - m) \frac{R^2 R'^2}{r^2} \right]$$

Les tensions limites seront, pour $r = R$ et $r = R'$

$$T_1 = 1 + \frac{2n R'^2 - m (R'^2 + R^2)}{R'^2 - R^2}$$

$$T'_1 = 1 + \frac{n (R'^2 + R^2) - 2m R^2}{R'^2 - R^2}$$

Pour $m = 0$, ces tensions deviennent celles qui se rapportent au serrement découvert, donc

$$T = 1 + \frac{2n R'^2}{R'^2 - R^2}, \quad T' = 1 + n \frac{R'^2 + R^2}{R'^2 - R^2}$$

Par suite,

$$T_1 = T - m \frac{R'^2 + R^2}{R'^2 - R^2}$$

$$T'_1 = T' - 2m \frac{R^2}{R'^2 - R^2}$$

Les diminutions des compressions extrêmes seront donc,

$$\varepsilon_1 = m \frac{R'^2 + R^2}{R'^2 - R^2} \quad \varepsilon'_1 = 2m \frac{R^2}{R'^2 - R^2}$$

Quant à l'excès de la compression interne sur celle

de la fibre externe qui était n , il sera réduit à $n - m$.

65. Cette question du serrement noyé s'est posée à peu près dans les termes suivants :

« Dans une mine, à la profondeur de 300 mètres, « se trouve établi un serrement cylindrique en briques :

$$R' = 7, R = 3, e = 4 \text{ mètres}$$

« refoulant les eaux jusqu'au niveau de l'étage de « 200 mètres où elles s'épanchent librement. Afin de « s'affranchir de la saignée d'exhauser la venue au « niveau de cet étage, on propose de la refouler par « un nouveau serrement à 200 mètres et on demande « quelles seront les conséquences de la hausse du bain « pour le travail d'art à 300 mètres sur lequel on » pourra dorénavant laisser peser, sur 90 mètres, « les eaux accumulées dans le puits, entre les profon- « deurs de 210 et 300 mètres ? »

Pour une charge n on aura, le serrement étant à simple pression :

$$T = 1 + 2,45n \quad T' = 1 + 1,45n.$$

Dans le serrement à double pression n et m , on aura :

$$T_1 = T - 1,45m \quad T'_1 = T' - 0,45m.$$

Ces deux formules conduisent aux résultats ci-après :

CHARGE interne $m = \frac{h}{10}$	$n = 10$		$n = 15$		$n = 20$		Observations.
	T_1	T_1'	T_1	T_1'	T_1	T_1'	
0	25,50	15,50	37,75	22,75	50,00	30,00	$n = 10$ $T = 25^k,50$
1	24,05	15,05	36,30	22,30	48,55	29,55	$T' = 15^k,50$
2	22,60	14,60	34,85	21,85	47,10	29,10	$n = 15$
3	21,15	14,15	33,40	21,40	45,65	28,65	$T = 37^k,75$
4	19,70	13,70	31,95	20,95	44,20	28,20	$T' = 22^k,75$
5	18,25	13,25	30,50	20,50	42,75	27,75	$n = 20$
6	16,80	12,80	29,05	20,05	41,30	27,30	$T = 50^k,00$
7	15,35	12,35	27,60	19,60	39,85	26,85	$T' = 30^k,00$
8	13,90	11,90	26,15	19,15	38,40	26,40	—
9	12,45	11,45	24,70	18,70	36,95	25,95	$m = \frac{h}{10}, n = \frac{H}{10}$
10	11,00	11,00	23,25	18,25	35,50	25,50	h : hauteur d'eau interne. H : hauteur d'eau externe.

Il serait possible, par conséquent, de maintenir le bain sur une hauteur de 150 mètres en chargeant le serrement du fond sur 90 à 100 mètres et cela sans atteindre la compression de 24 kilogs pour la fibre la plus fatiguée que l'on dépasse déjà pour une charge de 100 mètres lorsque le serrement est à simple pression.

Si, pour une cause quelconque, on devait enlever les eaux tenues en réserve dans le puits, il faudrait, bien entendu, débarrasser le serrement de l'étage de 200 mètres d'une partie de la charge qu'il supporte.

De l'expression de la compression maxima T_1 , on déduit :

$$R' = R \sqrt{\frac{T_1 - 1 - m}{T_1 - 1 - 2n + m}}$$

et

$$e = R \left[\sqrt{\frac{T_1 - 1 - m}{T_1 - 1 - 2n + m}} - 1 \right]$$

PLATES-CUVES NOYÉES.

66. Dans le cas d'une plate-cuve noyée supportant des pressions n et m , on aurait (45,β),

$$P = m + 1, \quad P' = n + 1$$

le signe de la compression étant mis en évidence,

$$t = 1 + \frac{nR'^3 - mR^3}{R'^3 - R^3} + \frac{1}{2} \frac{n - m}{R'^3 - R^3} \frac{R^3 R'^3}{r^3}$$

Les compressions maxima et minima seront :

$$T_1 = 1 + \frac{3nR'^3 - m(2R^3 + R'^3)}{2(R'^3 - R^3)} = T - \frac{m}{2} \frac{2R^3 + R'^3}{R'^3 - R^3}$$

et

$$T'_1 = 1 + \frac{n(2R'^3 + R^3) - 3mR^3}{2(R'^3 - R^3)} = T - \frac{3}{2} m \frac{R^3}{R'^3 - R^3}$$

L'épaisseur répondant à une tension T_1 , sera :

$$e = R \left[\sqrt[3]{\frac{T_1 - 1 - m}{T_1 - 1 - \frac{3}{2}n + \frac{m}{2}}} - 1 \right]$$

On aura :

$$T - T' = \frac{n}{2}, \quad T_1 - T'_1 = T - T' - \frac{m}{2} = \frac{n - m}{2}$$

Pour le cas particulier examiné ci avant,

$$R' = 7, \quad R = 3, \quad e = 4$$

on aura :

$$\begin{aligned} T &= 1 + 1,63n & T_1 &= 1 + 1,63n - 1,13m \\ T' &= 1 + 1,13n & T'_1 &= 1 + 1,13n - 0,63m \end{aligned}$$

d'où le tableau suivant :

CHARGE interne $m = \frac{h}{10}$	$n = 10$		$n = 15$		$n = 20$		Observations.
	T_1	T_1'	T_1	T_1'	T_1	T_1'	
	kilogs.	kilogs.	kilogs.	kilogs.	kilogs.	kilogs.	$n = 10$
0	17,30	12,30	24,45	17,95	33,60	33,60	$T' = 17^k,30$
1	16,17	11,67	23,32	17,32	32,47	22,97	$T' = 12^k,30$
2	15,04	11,04	22,19	16,69	31,34	22,34	$n = 15$
3	13,91	10,41	21,06	16,06	30,21	21,71	$T = 24^k,25$
4	12,78	9,78	19,93	15,43	29,08	21,08	$T' = 17^k,95$
5	11,65	9,15	18,80	14,80	27,95	20,45	$n = 20$
6	10,52	8,52	17,67	14,17	26,82	19,82	$T = 33^k,60$
7	9,39	7,89	16,54	13,54	25,69	19,19	$T' = 23^k,60$
8	8,26	7,26	15,41	12,91	24,56	18,56	$m = \frac{h}{10}, n = \frac{H}{10}$
9	7,13	6,63	14,28	12,28	23,43	17,93	h : hauteur d'eau interne.
10	6,00	6,00	13,15	11,65	22,30	17,30	H : hauteur d'eau externe.

VII. — CERCLAGE DES BOUCHES A FEU.

67. Les mêmes considérations ont conduit à la théorie du cerclage des bouches à feu.

La pression interne étant considérable en l'espèce, toutes les fibres sont soumises à l'extension.

On a encore $T - T' = n$.

Ce qui revient à dire qu'il y a entre les tensions des fibres extrêmes une différence énorme qu'il importe de faire disparaître si l'on veut profiter de toute la résistance absolue dont sont capables les parois du canon.

Dans ce but, on frette la pièce ; c'est-à-dire que l'on exerce extérieurement une pression radiale qui soumet toutes les fibres à une compression constante répartie comme l'indique la formule (28,c) et dont profite la résistance de la paroi lors de la déflagration de la poudre, son effet étant de faire naître une extension générale distribuée suivant la loi traduite par la relation (28,a,3°).

Si la tension des gaz est $P = n + 1$ et la pression due au frettage $P' = m + 1$, on aura une tension τ en une fibre quelconque répondant au rayon r , (23,β),

$$\tau = \frac{nR^2}{R'^2 - R^2} \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) - 1 - m \frac{R'^2}{R'^2 - R^2}$$

Or, pour $m = 0$

$$\tau = t = \frac{nR^2}{R'^2 - R^2} \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) - 1$$

donc

$$\tau = t - m \frac{R'^2}{R'^2 - R^2}$$

En chaque point les tensions sont diminuées de la constante

$$m \frac{R'^2}{R'^2 - R^2}$$

Quant à la différence des tensions extrêmes qui était n , sans cerclage, elle sera, grâce au frettage : $n - m$. Il est bien entendu qu'au repos les cylindres frettés supporteront, en chaque point, une compression qu'il est facile d'évaluer d'après la relation (23, ξ).

C'est donc surtout aux métaux qui résistent particulièrement bien à la compression qu'il convient d'appliquer le cerclage, c'est-à-dire aux canons en fonte ou en acier.

VIII. — RÉCAPITULATION DES FORMULES DE RÉSISTANCE.

68. Nous désignons par T la tension ou compression limite, celle qu'il convient de ne pas dépasser pratiquement ou, enfin, la tension ou compression correspondant à une épaisseur e , ou à des rayons extrêmes R et R' .

La pression n est exprimée soit en atmosphères ou en kilogrammes par centimètre carré ou par millimètre carré. La tension T sera exprimée par la même unité.

I. — Presses hydrauliques.

$$e = R \left(\sqrt{\frac{T+1+n}{T+1-n}} - 1 \right)$$

$$T = 1 + \frac{n}{e} \frac{R'^2 + R^2}{R' + R}$$

II. — Plongeurs.

a) Creux.

$$e = R \left(\sqrt{\frac{T-1}{T-1-2n}} - 1 \right)$$

$$T = 1 + \frac{2n}{e} \frac{R'^2}{R' + R}$$

b) Pleins.

$$p = t = 1 + n$$

III. — Cuvclages et serremments cylindriques.

a) Simples.

$$e = R \left(\sqrt{\frac{T-1}{T-1-2n}} - 1 \right)$$

$$T = 1 + \frac{2n}{e} \frac{R'^2}{R + R'}$$

b) Mixtes. — On pourra employer des matériaux de résistance τ depuis le rayon R' jusqu'au rayon

$$\rho = RR' \sqrt{\frac{n}{(\tau - 1)(R + R')e - nR'^2}}$$

et des matériaux plus résistants de ρ à R .

 c) Serrement à double pression n et m .

$$T_1 = 1 + \frac{2nR'^2 - m(R'^2 + R^2)}{R'^2 - R^2}$$

$$e = R \left[\sqrt{\frac{T_1 - 1 - m}{T_1 - 1 - 2n + m}} - 1 \right]$$

IV. — *Enveloppes cylindriques de faibles épaisseurs.*

a) Chaudières.

$$e = R \frac{n}{t} \quad t = n \frac{R}{e}$$

b) Cuvelages métalliques, tubes pressés extérieurement.

$$e = R \frac{n}{t} \quad t = n \frac{R}{e}$$

V. — *Récipients sphériques à pression interne.*

$$e = R \left(\sqrt[3]{\frac{T+1+n}{T+1-\frac{n}{2}} - 1} \right) \\ T = \frac{n}{2} \frac{2R^3 + R'^3}{R^3 - R'^3} - 1$$

VI. — *Plates-cuves et serrements sphériques.*

a) Simples.

$$e = R \left(\sqrt[3]{\frac{T-1}{T-1-\frac{3}{2}n} - 1} \right) \\ T = 1 + 3 \frac{n}{2} \frac{R'^3}{R^3 - R'^3}$$

b) Mixtes. On pourra employer des matériaux de résistance τ de R' à

$$\rho = RR' \sqrt[3]{\frac{\frac{n}{2}}{(\tau - 1)(R'^3 - R^3) - nR'^3}}$$

et des matériaux plus résistants de ρ à R .

c) Plate-cuve noyée.

$$T_1 = 1 + \frac{3n R^3 - m (2R^3 + R'^3)}{2 (R'^3 - R^3)}$$

$$e = R \left[\sqrt[3]{\frac{T_1 - 1 - m}{T_1 - 1 - \frac{3}{2}n + \frac{m}{2}}} - 1 \right]$$

 VII. — *Enveloppes sphériques de faibles épaisseurs.*

a) Chaudières

$$e = \frac{n}{t} \frac{R}{2} \quad t = n \frac{R}{2e}$$

b) Cas de la pression externe

$$e = \frac{n}{t} \frac{R}{2} \quad t = n \frac{R}{2e}$$

IX. — DE L'INFLUENCE DES RÉACTIONS LATÉRALES.

69. Dans la façon de résister des corps solides, il se manifeste un phénomène très simple dont on n'a pas toujours tenu suffisamment compte dans l'exposé de certaines théories physiques touchant à la résistance des matériaux.

Connu et signalé depuis longtemps, ce phénomène ne semble pas avoir beaucoup préoccupé le praticien. Nous croyons utile de le mettre ici en lumière et de l'apprécier dans toutes les conséquences qu'il serait peut-être rationnel de lui attribuer dans la façon de se comporter des enveloppes. En fait, on peut l'exprimer comme suit :

« Lorsque l'on produit sur un prisme une dilatation
 « ou une compression longitudinale, il en résulte une
 « contraction ou une dilatation transversale, subsi-
 « diaire, dans toutes les directions perpendiculaires à
 « la déformation principale. »

Ces effets transversaux, dit Navier (1), résultent nécessairement du jeu des actions moléculaires répulsives et attractives, fonctions des distances. Tout rapprochement ou écartement de deux molécules m, m provoque l'écartement ou le rapprochement de deux molécules quelconques n, n , situées dans une direction perpendiculaire à celle qui est déterminée par les deux premiers points matériels. Les fig. 8 et 9 rendent compte de cet état de choses.

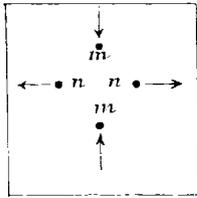


Fig. 8.

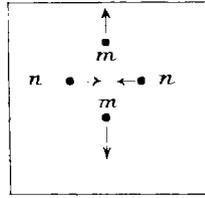


Fig. 9.

L'expérience renseigne que l'effort spécifique agissant, extension ou compression, dans les limites de sécurité, est proportionnel à l'allongement ou à la contraction unitaire et qu'il en est de même des effets développés transversalement.

Si donc la charge P agit sur l'aire ω , on aura, i étant l'allongement ou le raccourcissement proportionnel :

$$P = E\omega i \text{ ou } \frac{P}{\omega} = Ei$$

Les efforts latéraux, mesurés suivant deux axes rectangulaires quelconques, seront, m et n étant deux constantes :

$$mi = \frac{m}{E} \frac{P}{\omega} \text{ et } ni = \frac{n}{E} \frac{P}{\omega}$$

(1) NAVIER. *Leçons sur l'Application de la Mécanique*, p. 9.

Si la contexture de la matière est la même dans tous les sens, ces deux constantes m et n seront égales.

Les expériences de Wertheim ont donné :

$$m = n = \frac{1}{3}$$

Navier fait remarquer que les coefficients ne sauraient en aucun cas atteindre la valeur $1/2$.

En effet, si nous considérons un cube dont le côté soit égal à l'unité de longueur et soumis à un allongement proportionnel i , son volume augmentera après déformation de la quantité :

$$(1 + i) (1 - mi) (1 - ni) - 1$$

c'est-à-dire,

$$i [1 - (m + n) (1 + i) + mni (1 + i)]$$

Or, il n'est pas supposable qu'une traction longitudinale ait pour effet de diminuer le volume. On doit donc avoir :

$$1 - (m + n) (1 + i) + mni (1 + i) > 0$$

i pouvant être aussi petit qu'on le voudra, cette inéquation implique

$$1 > m + n$$

Si donc m et n diffèrent peu ou sont égaux, on aura :

$$m = n < \frac{1}{2}$$

D'autres considérations théoriques ont porté Navier à admettre (1)

$$m = n = \frac{1}{4}$$

(1) *Leçons sur l'application de la mécanique*, nos 152-153.

F. Redtenbacher (1), dans son *Formulaire*, admet

$$\frac{1}{4} < m < \frac{1}{3}$$

Philippe Huguenin (2), dans son *Aide-mémoire*, fait le même choix quand il s'agit de corps isotropes. Pour les métaux il conseille $m = 1/4$.

70. Il résulte de cet exposé que l'allongement produit par une force sollicitant une fibre dans la direction de cette force, ne dépend pas uniquement de l'intensité de cette dernière, mais encore de l'importance des actions normales à la direction de cette force.

Conséquemment, si en un point d'un massif les composantes spécifiques de la force agissante sont X, Y, Z , les allongements proportionnels suivant les trois axes seront, non pas

$$\xi = \frac{X}{E}, \quad \eta = \frac{Y}{E}, \quad \zeta = \frac{Z}{E}$$

mais bien,

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{X - mY - mZ}{E} \\ \eta &= \frac{Y - mZ - mX}{E} \\ \zeta &= \frac{Z - mX - mY}{E} \end{aligned}$$

Il importe donc de rechercher quelle est l'influence de ces actions transversales sur la résistance des enveloppes cylindriques et sphériques dont la théorie présente a été établie sans faire état de cette intervention des forces latérales.

Or, il arrive précisément que leur effet total est nul et que le reproche que l'on pourrait faire aux résultats

(1) *Résultats de Redtenbacher*, 1874, p. 25.

(2) *Aide-mémoire de l'ingénieur*, 1887, p. 246.

établis ci-avant de l'avoir été, abstraction faite de cette cause visible de déformation, ne serait nullement fondé. Nous devons donc la démonstration du théorème suivant :

« Dans toute enveloppe cylindrique ou sphérique
 « pressée uniformément sur les deux faces, les inten-
 « sités des réactions transversales se distribuent de
 « telle façon qu'elles sont sans influence sur les deux
 « équations fondamentales de cette théorie. »

A. — *Enveloppes cylindriques.*

71. Considérons comme ci-dessus un élément $rd\theta$ d'une fibre d'épaisseur dr .

La première équation qui est rationnelle subsiste et l'on a :

$$t + \frac{d(pr)}{dr} = 0 \quad (1)$$

Les trois composantes qui agissent sur cet élément sont, par unité de surface,

La composante radiale, compressive, p .

La composante tangentielle t , positive ou négative.

La composante longitudinale t_1 , positive ou négative.

Le cylindre est supposé fermé aux deux bouts par deux fonds complets supposés ajustés de façon à ce que l'enveloppe supporte une traction longitudinale parallèle à l'axe et de même intensité dans toute l'étendue d'une section et du cylindre.

On aura donc,

$$\pi t_1 (R'^2 - R^2) = \pi (PR^2 - P'R'^2)$$

d'où

$$t_1 = \frac{PR^2 - P'R'^2}{R'^2 - R^2}$$

La contraction de la fibre dans le sens radial sera :

$$\frac{dr}{E} (p + mt + mt_1)$$

D'autre part, cet élément de longueur $rd\theta$ devient, après l'action des pressions t , p , t_1 ,

$$rd\theta + \frac{rd\theta}{E} (t + mp - mt_1)$$

ce qui assigne au nouveau rayon interne de la fibre une valeur :

$$r + \frac{r}{E} (t + mp - mt_1)$$

et au rayon externe :

$$r + \frac{r}{E} (t + mp - mt_1) + dr + \frac{d[r(t + mp - mt_1)]}{E}$$

Après déformation, l'épaisseur est donc

$$dr + \frac{d[r(t + mp - mt_1)]}{E}$$

Egalant la réduction qui en résulte à la contraction déterminée ci-avant, on aura :

$$-\frac{d[r(t + mp - mt_1)]}{E} = \frac{dr}{E} (p + mt + mt_1)$$

d'où

$$p + \frac{d(rt)}{dr} + m \left(t + \frac{d(pr)}{dr} \right) = 0$$

Et, en vertu de l'équation première,

$$p + \frac{d(rt)}{dr} = 0 \quad (II)$$

c'est-à-dire l'équation (2) établie dans l'hypothèse où m serait nul.

En somme, les deux équations fondamentales sont indépendantes de la valeur de la constante m .

B. — *Enveloppes sphériques.*

72. Notre première équation subsiste

$$t + \frac{d(pr^2)}{d(r^2)} = 0 \quad (\text{I})$$

La portion infiniment petite d'une couche élémentaire est soumise à l'action de trois pressions spécifiques :

Une compression radiale p ;

Une tension ou compression en longitude t ;

Une tension ou compression en latitude t .

La réduction dans l'épaisseur due à ces forces sera :

$$\frac{dr}{E} (p + 2mt)$$

D'autre part, la longueur de l'élément, suivant une section méridienne, est $rd\theta$; après déformation elle deviendra :

$$rd\theta + \frac{rd\theta}{E} (t - mt + mp)$$

Le rayon interne de la couche sera donc, sous l'action des forces :

$$r + \frac{r}{E} (t - mt + mp)$$

Et le rayon externe,

$$r + \frac{r}{E} (t - mt + mp) + dr + \frac{d[r(t - mt + mp)]}{E}$$

L'épaisseur de la couche élémentaire sera donc :

$$dr + \frac{d[r(t - mt + mp)]}{E}$$

et sa réduction, qui est la même que la contraction déterminée ici-avant,

$$- \frac{d[r(t - mt + mp)]}{E} = \frac{dr}{E} (p + 2mt)$$

Par suite,

$$(1 - m) \left[p + \frac{d(rt)}{dr} \right] + m \left[2(p + t) + r \frac{dp}{dr} \right] = 0$$

Mais de l'équation première on déduit :

$$2(p + t) + r \frac{dp}{dr} = 0$$

Partant,

$$p + \frac{d(rt)}{dr} = 0 \quad (\text{II})$$

C'est la seconde des équations générales.

X. — DE LA RÉSISTANCE D'UN SEGMENT DE CUVELAGE MÉTALLIQUE.

73. Considérons, dans un cuvelage métallique polygonal, un segment AB de forme circulaire, de rayon R et d'ouverture θ . Les forces agissantes se composeront de la résultante totale P des pressions externes et des réactions symétriques N indéterminées opposées aux deux extrémités du tronçon. (Fig. 10.)

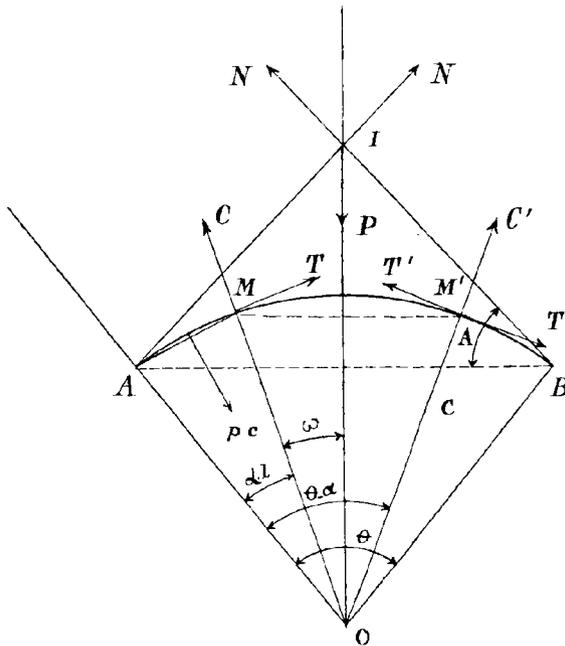


Fig. 10.

Ces forces qui se font équilibre, se couperont nécessairement en un point I et seront dans un même plan.

I. — *Calcul des réactions.*

74. Désignons par A l'inclinaison de ces réactions sur la corde AB . Le triangle des forces nous donnera :

$$\frac{N}{\sin(\widehat{NP})} = \frac{P}{\sin(\widehat{NN})}$$

ou

$$\frac{N}{\cos A} = \frac{P}{\sin 2A}$$

donc

$$N = \frac{P}{2 \sin A}$$

Considérons le tronçon sur 1 millimètre de hauteur, cet élément est d'ailleurs indifférent, il disparaîtrait de lui-même dans le calcul des réactions spécifiques. Posons $AB = L$ et représentons par p la charge spécifique agissant à l'extérieur du cuvelage.

On aura : $P = pL$

donc

$$N = \frac{pL}{2 \sin A} = p R \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin A}. \quad (a)$$

II. — *Des forces agissant sur une section droite quelconque du tronçon.*

75. Pour obtenir les forces qui tendent à déformer la pièce en une section droite M , de l'arc MB , il suffit de composer au centre de gravité de cette section, toutes les forces qui sollicitent le fragment AM , c'est-à-dire, c étant la corde de l'arc AM , α l'angle au centre O se rapportant à cette section M ,

- 1° La réaction N agissant en A ;
 2° La pression résultante agissant au milieu de l'arc AM , égale à

$$pc = 2pR \sin \frac{\alpha}{2}$$

En transportant chacune d'elles au centre de gravité de la section M , on obtiendra une force résultante et un couple.

La force se décomposera en un effort de tension ou de compression T , tangentiellement à l'arc résistant au point M et en un effort de cisaillement C , normalement à l'arc, au même point. La force T sera considérée comme positive ou comme négative suivant qu'elle agira sur le fragment MB comme une compression ou comme une traction.

Le cisaillement C sera positif ou négatif suivant qu'il sera dirigé extérieurement ou intérieurement au cuvelage.

Quant au moment fléchissant M , il sera positif ou négatif selon qu'il tendra à comprimer ou à dilater la fibre extérieure, suivant la convention admise généralement pour le sens des couples.

77. Il est possible d'établir *a priori* une dépendance nécessaire et importante existant entre ces forces composées sur deux sections symétriques quelconques M et M' du tronçon. Cette relation étroite nous sera très utile pour transformer les expressions auxquelles nous serons conduit.

Soient T , C , M les forces tangentielle, normale et le couple que l'on obtient en la section M du segment MB . En la section M' du segment $M'A$, on aura évidemment, par raison de symétrie, les forces $T' = T$, $C' = C$ et le couple $-M$. (Fig. 10.)

Il en résulte que le système des forces agissant sur AM se composera sur la section M' , de l'arc MB , en

une force tangentielle égale à T et dirigée vers B , en une force normale C dirigée vers le centre et en un couple M égal à celui qui agit en M sur la partie MB et de même sens. Si donc pour une section correspondant à l'angle α on a deux forces T, C et le couple M , dans la section symétrique, $\theta - \alpha$, on aura deux forces $T, -C$ et le couple M .

Ces relations devront naturellement se vérifier par notre analyse.

III. — Calcul de la composante tangentielle T .

78. On aura, en projetant les forces N et pc sur la tangente MT ,

$$T = pc \sin \frac{\alpha}{2} + N \cos (\widehat{TN})$$

Mais

$$(\widehat{TN}) = A + \alpha - \frac{\theta}{2}$$

donc

$$T = pR \left[1 - \frac{\cos \alpha \sin A - \sin \frac{\theta}{2} \cos \left(A + \alpha - \frac{\theta}{2} \right)}{\sin A} \right]$$

Cette valeur de T ne doit pas changer quand on remplace α par $R - \alpha$, elle est donc susceptible de transformation.

En effet on a :

$$\sin \frac{\theta}{2} \cos \left(A + \alpha - \frac{\theta}{2} \right) = \frac{\sin (A + \alpha) - \sin (A + \alpha - \theta)}{2}$$

Le numérateur du dernier terme de l'expression T pourra donc s'écrire,

$$\frac{\cos \alpha \sin A - \sin \alpha \cos A + \sin (A + \alpha - \theta)}{2}$$

ou

$$\frac{\sin (A - \alpha) + \sin (A + \alpha - \theta)}{2}$$

ce qui revient à

$$\sin \left(A - \frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta}{2} - \alpha \right)$$

Par suite,

$$T = pR \left[1 - \frac{\sin \left(A - \frac{\theta}{2} \right)}{\sin A} \cos \left(\frac{\theta}{2} - \alpha \right) \right]$$

ou, en posant

$$\omega = \frac{\theta}{2} - \alpha, \quad \lambda = \frac{\sin \left(A - \frac{\theta}{2} \right)}{\sin A}$$

$$T = pR (1 - \lambda \cos \omega) \quad (b)$$

expression qui conserve la même valeur quand on change le signe de ω .

IV. — Calcul du cisaillement C .

79. On aura, en opérant comme il vient d'être dit :

$$C = -pc \cos \frac{\alpha}{2} + N \sin \left(A + \alpha - \frac{\theta}{2} \right)$$

donc

$$C = -pR \left[\sin \alpha - \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin A} \sin \left(A + \alpha - \frac{\theta}{2} \right) \right]$$

Mais

$$\sin \frac{\theta}{2} \sin \left(A + \alpha - \frac{\theta}{2} \right) = \frac{\cos (A + \alpha - \theta) - \cos (A + \alpha)}{2}$$

L'expression entre les crochets deviendra,

$$\frac{\sin A \sin \alpha + \cos A \cos \alpha - \cos (A + \alpha - \theta)}{2 \sin A}$$

ou

$$\frac{\cos (A - \alpha) - \cos (A + \alpha - \theta)}{2 \sin A}$$

c'est-à-dire

$$= \frac{\sin \left(A - \frac{\theta}{2} \right) \sin \left(\frac{\theta}{2} - \alpha \right)}{\sin A}$$

En conséquence,

$$C = pR \frac{\sin \left(A - \frac{\theta}{2} \right)}{\sin A} \sin \left(\frac{\theta}{2} - \alpha \right)$$

ou, suivant la convention faite,

$$C = pR\lambda \sin \omega \quad (c)$$

Le cisaillement change de signe quand on substitue à ω l'angle $-\omega$.

V. — *Calcul du moment fléchissant.*

80. Ce moment M sera exprimé comme suit :

$$M = -p \frac{c^2}{2} + Nc \sin \left(A - \frac{\theta - \alpha}{2} \right)$$

ou

$$M = 2pR^2 \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin A} \left[\sin \frac{\theta}{2} \sin \left(A - \frac{\theta - \alpha}{2} \right) - \sin A \sin \frac{\alpha}{2} \right]$$

Mais

$$\sin \frac{\theta}{2} \sin \left(A + \frac{\alpha}{2} - \frac{\theta}{2} \right) = \frac{\cos \left(A - \theta + \frac{\alpha}{2} \right) - \cos \left(A + \frac{\alpha}{2} \right)}{2}$$

Le dernier facteur deviendra donc,

$$= \frac{\cos \left(A - \frac{\alpha}{2} \right) - \cos \left(A - \theta + \frac{\alpha}{2} \right)}{2}$$

c'est-à-dire

$$= \sin \left(A - \frac{\theta}{2} \right) \sin \frac{\alpha - \theta}{2}$$

Conséquemment

$$M = 2pR^2 \frac{\sin\left(A - \frac{\theta}{2}\right)}{\sin A} \sin \frac{\alpha}{2} \sin\left(\frac{\theta - \alpha}{2}\right)$$

ou

$$M = 2pR^2 \lambda \sin \frac{\frac{\theta}{2} + \omega}{2} \sin \frac{\frac{\theta}{2} - \omega}{2} \quad (d)$$

VI. — *Moment maximum.*

81. La somme des angles

$$\frac{\theta}{2} + \omega, \quad \frac{\theta}{2} - \omega$$

étant constante, le produit de leurs sinus sera maximum quand ces angles seront égaux. Ce qui conduit à $\omega = 0$.

Le moment fléchissant est donc maximum au centre du tronçon et il a pour valeur :

$$M_m = 2pR^2 \lambda \sin^2 \frac{\theta}{4} = \frac{1}{2} p l^2 \lambda$$

en représentant par l la longueur de la corde d'un demi-tronçon.

Toutes choses égales, le moment maximum est proportionnel au carré de la portée d'un demi-tronçon.

VII. — *Cas remarquable de la flexion nulle.*

82. Si les liaisons latérales du tronçon réalisent les conditions qui existeraient dans l'hypothèse d'une enveloppe circulaire complète, les réactions N s'exerceront tangentiellement à l'arc AB . On aura donc, dans ce cas particulier :

$$A = \frac{\theta}{2}, \quad \lambda = 0, \quad N = pR$$

et

$$T = pR = N, \quad C = 0, \quad M = 0$$

La flexion disparaît. La compression prend la valeur relative aux enveloppes entières. On se retrouve donc dans la même situation que si le cuvelage était circulaire, pour une certaine disposition des appuis, celle pour laquelle les réactions latérales se font sentir tangentielllement au tronçon.

VIII. — Discussion et diagrammes des efforts.

83. Nous avons trouvé :

$$T = pR (1 - \lambda \cos \omega) \quad C = pR \lambda \sin \omega$$

$$M = 2pR^2 \lambda \sin \frac{\theta}{2} + \omega \sin \frac{\theta}{2} - \omega$$

$$\lambda = \frac{\sin \left(A - \frac{\theta}{2} \right)}{\sin A}$$

84. I. Cas des réactions N externes. On a :

$$A > \frac{\theta}{2}, \quad 0 < \lambda < 1$$

La tension T varie du minimum $pR (1 - \lambda)$ au centre, au maximum

$$pR \left(1 - \lambda \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

aux extrémités.

Le cisaillement qui s'annule au milieu de la pièce, augmente vers les extrémités où il atteint son maximum

$$pR \lambda \sin \frac{\theta}{2}$$

Le moment fléchissant est positif. Il a pour effet de comprimer la fibre externe et de dilater la fibre interne du cuvelage.

85. II. Les réactions sont internes. On a :

$$A < \frac{\theta}{2}, \quad \lambda < 0$$

En explicitant le signe de λ , on aura :

$$T = pR (1 + \lambda \cos \omega) \quad C = -pR \lambda \sin \omega$$

$$M = -2pR^2 \lambda \sin \frac{\frac{\theta}{2} + \omega}{2} \sin \frac{\frac{\theta}{2} - \omega}{2}$$

La tension T est maxima au centre et égale à

$$pR (1 + \lambda);$$

minima aux extrémités où elle prend la valeur

$$pR \left(1 + \lambda \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

Le moment fléchissant est négatif; il comprime la fibre interne et distend la fibre externe.

86. III. Les réactions sont tangentielles. On a :

$$A = \frac{\theta}{2}$$

Nous savons que

$$T = pR = N, \quad C = 0, \quad M = 0$$

Remarquons qu'il est impossible que A soit nul, attendu qu'on ne peut équilibrer une force P par deux autres N , égales et contraires d'ailleurs et qui lui sont normales.

Toutefois, cet angle peut être droit, voire même obtus.

La représentation graphique de ces différents efforts est très simple et rend parfaitement compte de tous leurs états de variation.

87. I. Diagrammes de la tension.

a) Supposons

$$A > \frac{\theta}{2} \text{ ou } 1 > \lambda > 0$$

On aura :

$$T = p\lambda \left(\frac{R}{\lambda} - R \cos \omega \right)$$

Conduisons à une distance $\frac{R}{\lambda} > R$ du centre une parallèle XX à la corde AB du segment. (Fig. 11.) Pour un angle ω quelconque nous aurons :

$$T = p\lambda (OT - Om) = p\lambda. Tm = p\lambda. MQ$$

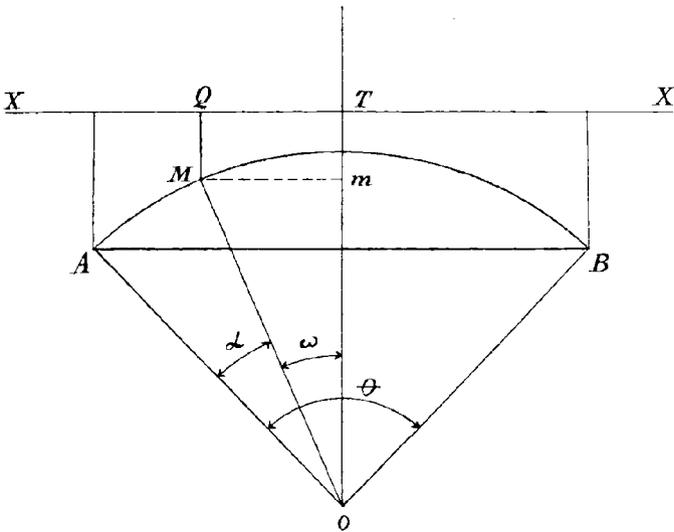


Fig.11.

Les ordonnées MQ de l'arc de tronçon, par rapport à la droite XX , représentent donc les efforts de compression.

Il peut se faire, à la rigueur, que l'on ait

$$\lambda \geq 1 \text{ et par suite } \frac{R}{\lambda} \leq R$$

Il suffirait pour cela (fig. 10) que l'on eût :

$$A \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{4}$$

En effet, posons :

$$A = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{4} + \gamma,$$

On aura :

$$\lambda = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \gamma - \frac{\theta}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \gamma + \frac{\theta}{4}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\theta}{4} - \gamma\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{4} + \gamma\right)} \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} 1$$

Suivant que

$$\gamma \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} 0$$

L'axe de comparaison XX pourra donc être tangent au sommet du tronçon, le couper ou même lui être inférieur.

Ainsi l'axe XX coïncidera avec la corde AB lorsque l'on vérifiera la relation :

$$\frac{R}{\lambda} = R \cos \frac{\theta}{2} \text{ ou } \lambda = \sec \frac{\theta}{2}$$

L'effort tangentiel peut donc développer ou une compression, ou une extension ou l'un et l'autre effet suivant que

$$\lambda \begin{matrix} < \\ > \\ = \end{matrix} 1$$

L'inclinaison A doit nécessairement être inférieure à 180 degrés.

Nous verrons ci-après que cette inéquation

$$\lambda \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} 1$$

est simplement spéculative.

b) Soit

$$A < \frac{\theta}{2} \quad \lambda < 0$$

Mettant en évidence le signe de λ , on aura :

$$T = p\lambda \left(\frac{R}{\lambda} + R \cos \omega \right) \text{ où } \lambda = \frac{\sin \left(\frac{\theta}{2} - A \right)}{\sin A} > 0$$

Conduisons une parallèle XX à la corde AB à une distance du centre égale à $OT = \frac{R}{\lambda}$. Nous aurons au point M , correspondant à l'angle ω (fig. 12),

$$T = p\lambda (OT + Om) = p\lambda \cdot MQ.$$

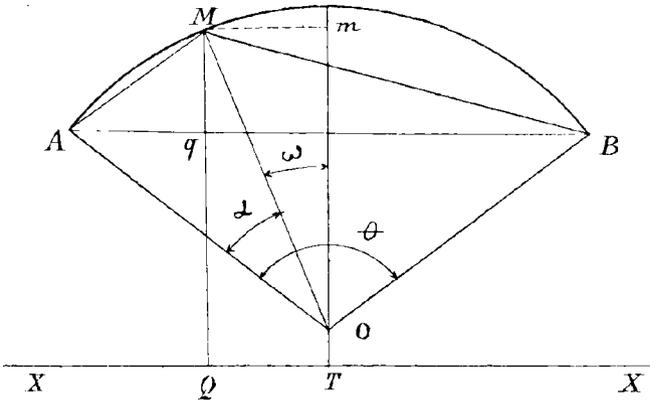


Fig.12.

De là le diagramme de la fig. 12. Il y a compression sans partage.

88. II. Diagramme du cisaillement. (Fig. 11.)

On a :

$$C = p\lambda \cdot R \sin \omega = p\lambda \cdot Mm$$

89. III. Diagramme du moment fléchissant.

Dans le triangle AMB (fig. 12), on a :

$$AM = 2R \sin \frac{\frac{\theta}{2} - \omega}{2} \quad BM = 2R \sin \frac{\frac{\theta}{2} + \omega}{2}$$

donc

$$AM \cdot BM = 4R^2 \sin \frac{\frac{\theta}{2} - \omega}{2} \sin \frac{\frac{\theta}{2} + \omega}{2}$$

Par suite,

$$M = \frac{1}{2} p\lambda AM \cdot BM$$

Mais,

$$\text{Triangle } AMB = \frac{1}{2} AB \cdot Mq = \frac{1}{2} L \cdot Mq = \frac{1}{2} AM \cdot BM \cdot \sin \frac{\theta}{2}$$

De sorte que

$$M = \frac{1}{2} p\lambda L \frac{Mq}{\sin \frac{\theta}{2}} = pR\lambda \cdot Mq$$

Les ordonnées Mq de l'arc du tronçon par rapport à sa corde représentent les moments fléchissants aux sommets correspondants de ces ordonnées. (Fig. 12.)

L'extension sera interne, nulle ou externe suivant que

$$\lambda \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} 0$$

IX. — Applications.

90. En la section médiane d'un tronçon de 1 millimètre de hauteur et d'une épaisseur e , soit une section e millimètres carrés, nous aurons une compression unitaire, quel que soit le signe de λ ,

$$t_1 = \frac{T}{e} = \frac{pR(1-\lambda)}{e}$$

Si H est la hauteur, en mètres, du plan d'eau pesant sur le cuvelage, on aura, par millimètre carré, une charge en kilogs, $\frac{H}{10^3}$

Par suite,

$$p = \frac{H}{10^3}, \quad t_1 = \frac{H(1-\lambda)}{10^3} \frac{R}{e}$$

R et e étant exprimés en millimètres ou plus généralement au moyen d'une unité commune, puisqu'il s'agit ici d'un rapport. D'un autre côté, si la section du tronçon est rectangulaire, nous aurons pour effort d'extension et de compression t_2 , résultant de la flexion, à la fibre la plus fatiguée à une distance u de l'axe neutre,

$$\frac{M}{I} = \frac{t_2}{u} \quad \text{ou} \quad t_2 = M \frac{u}{I}$$

Mais

$$u = \frac{e}{2}, \quad M = \frac{1}{2} p l^2 \lambda = \frac{H}{2 \cdot 10^3} l^2 \lambda, \quad I = \frac{e^3}{12}$$

donc

$$t_2 = 0,003 H \lambda \left(\frac{l}{e} \right)^2$$

L'extension ou la compression totale de la fibre la plus fatiguée sera donc, en vertu de la combinaison de tous ces efforts :

$$\tau = t_2 \mp t_1$$

91. On peut d'ailleurs écrire, d'une manière générale :

$$t_1 = \frac{T}{e} = pR \frac{1 - \lambda \cos \omega}{e}$$

et

$$t_2 = \frac{Mu}{I} = 12 \frac{pR^2 \lambda}{e^2} \sin \frac{\frac{\theta}{2} + \omega}{2} \sin \frac{\frac{\theta}{2} - \omega}{2}$$

ou

$$t_2 = 6p \lambda \left(\frac{R}{e} \right)^2 \left[\cos \omega - \cos \frac{\theta}{2} \right]$$

donc suivant que l'on considère l'une ou l'autre face,

$$\tau = \frac{p \lambda (6R \mp e)}{e^2} \left[R \cos \omega \pm \frac{R}{\lambda} \frac{e \mp 6R \lambda \cos \frac{\theta}{2}}{6R \mp e} \right]$$

Il est donc possible de représenter graphiquement les compressions et les extensions maxima en chaque section.

I. Diagramme des compressions maxima sur une face.

On portera, comme il est renseigné sur la fig. 12, une longueur

$$OT = \frac{R}{\lambda} \frac{e - 6R \lambda \cos \frac{\theta}{2}}{6R - e}$$

En une section M la compression de la fibre la plus écrasée sera :

$$\tau_c = \frac{p \lambda (6R - e)}{e^2} (Om + OT) = \frac{p \lambda (6R - e)}{e^2} \cdot MQ$$

Le maximum de l'écrasement existera donc dans la section centrale pour $\omega = 0$ et on aura :

$$\tau_{cm} = \frac{pR}{e^2} \left[6R \lambda \left(1 - \cos \frac{\theta}{2} \right) + e (1 - \lambda) \right]$$

II. Diagramme des extensions maxima sur l'autre face.

Dans ce cas, la distance

$$OT = \frac{R}{\lambda} \frac{e + 6R \lambda \cos \frac{\theta}{2}}{6R + e}$$

sera portée du centre vers le tronçon. Il n'y aura donc extension en certains points du panneau que si cette longueur OT est $< R$, alors l'extension, maxima pour $\omega = 0$, sera :

$$\tau_e = \frac{p \lambda}{e^2} (6R + e) (OP - OT) = \frac{p \lambda}{e^2} (6R + e) PT$$

et

$$\tau_{\text{cm}} = \frac{pR}{e^2} \left[6R\lambda \left(1 - \cos \frac{\theta}{2} \right) - e(1 - \lambda) \right]$$

Il pourra se faire que l'extension soit nulle en deux sections H, H (fig. 13) du tronçon, si

$$\sqrt{R^2 - \frac{L^2}{4}} < OT < R$$

et dans ce cas il y aura compression inégale en tous les points des sections de A à H et de B à H .

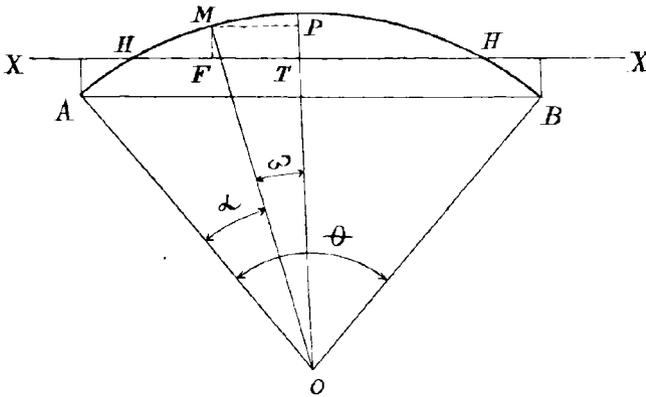


Fig.13.

Enfin, si OT est $\overline{>} R$, la compression variable s'exercera en tous les points des sections du tronçon. Cette compression sera minima au centre et maxima aux extrémités sur l'une des faces du cuvelage bien entendu.

Ces hypothèses reviennent à

$$\lambda \begin{cases} < \\ > \end{cases} \frac{e}{e + 6R \left(1 - \cos \frac{\theta}{2} \right)}$$

X. — *Cuvelage du Bâneux.*

92. On avait dans le cuvelage du Bâneux :

$$L = 2500 \text{ millimètres, } l = 1262 \text{ millimètres,} \\ e = 34 \text{ millimètres, } H = 35 \text{ mètres, } R = 3850 \text{ millimètres}$$

C'est sous cette charge relativement faible que s'est opérée la rupture de trente et un segments superposés sur plus de 18 mètres et cela sur les six faces des deux bures contigus, d'épuisement et d'aérage. Les tensions τ que nous allons déterminer pour une hauteur d'eau de 35 mètres, sont d'ailleurs proportionnelles à H ; il sera donc facile de déduire, des résultats qui vont suivre, ceux qui seraient relatifs à une hauteur moindre ou à une autre plus forte.

Nous aurons donc,

$$\frac{pR}{e} = \frac{HR}{1000e} = \frac{35 \times 3850}{34000} = 3,963, \quad t_1 = 3,963 (1 - \lambda)$$

$$\theta = 2 \text{ arc sin } \frac{L}{2R} = 2 \text{ arc sin } \frac{2500}{7700} = \\ = 2 \text{ arc sin } 0,324675 = 2 \times 18^\circ 56' 44''$$

$$\lambda = \frac{\sin \left(A - \frac{\theta}{2} \right)}{\sin A} = \cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \cot A = \\ = 0,945827 - 0,324675 \cot A \quad (1)$$

$$\frac{e}{e + 6R \left(1 - \cos \frac{\theta}{2} \right)} = \frac{34}{34 + 1251,40} = 0,02645$$

$$t_2 = 0,003H \frac{l^2}{e^2} \cdot \lambda = 144,66 \lambda$$

(1) Sous cette forme λ peut être calculé rapidement en faisant usage d'une table de lignes trigonométriques.

La compression maxima, sur l'une des faces sera :

$$\tau_1 = t_2 + t_1 = 3,963 + 140,697 \lambda.$$

L'extension maxima sur l'autre,

$$\tau_2 = t_2 - t_1 = 148,623 \lambda - 3,963$$

quant à la réaction unitaire, aux appuis, elle sera :

$$\frac{N}{e} = \frac{pR}{e} \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin A} = \frac{1,28669}{\sin A}$$

93. Dans l'hypothèse d'un cuvellement complet ou dans le cas équivalent $A = \frac{\theta}{2}$, on aurait : $\lambda = 0$. En tous les points d'une section quelconque, en pleine fonte comme aux appuis, la compression s'exerce également et atteint la valeur de 3^k,963 par millimètre carré de section, soit donc 4 kilogs environ.

Mais l'influence des réactions déviatrices complique singulièrement ce résultat favorable. Le tableau suivant a été dressé en faisant varier l'angle directif A des réactions latérales de 15 à 24 degrés comprenant la direction normale de 18° 56' 44", pour laquelle la flexion est nulle, et dont on ne doit pas s'écarter.

Quelques minutes d'écart sur la tangente aux appuis sont capables d'accuser un effort relativement considérable. Il suffit en effet de moins de 30 minutes de déviation externe ou interne pour annuler la compression que les fibres les plus éprouvées subissent du chef de l'écrasement du tronçon, dû aux forces agissantes et pour doubler presque l'action portante qui se chiffre par plus de 7 kilogs par millimètre carré.

ANGLES DIRECTIFS A DES RÉACTIONS N	DÉVIATIONS $A - \frac{\theta}{2}$	λ	$1 - \lambda$	t_1	t_2	τ_4 Compres- sion externe.	τ_2 Traction interne.	Réactions spécifiques $\frac{N}{e}$	Observations.	
		$A > \frac{\theta}{2}, \quad 0 < \lambda < 1,$ Extension interne.								
				Kilogs.	Kilogs.	Kilogs.	Kilogs.	Kilogs.		
24° 00	5° 03' 16"	0,21660	0,78340	3,10	31,33	34,43	28,23	3,16	La fibre interne est dilatée.	
23° 00	4° 03' 16"	0,18094	0,81906	3,25	26,17	29,42	22,92	3,29	Id.	
22° 00	3° 03' 16"	0,14223	0,85777	3,40	20,57	23,97	17,17	3,43	Id.	
21° 00	2° 03' 16"	0,10002	0,89998	3,57	14,47	18,04	10,90	3,60	Id.	
20° 00	1° 03' 16"	0,05379	0,94621	3,75	7,78	11,53	4,03	3,76	Id.	
19° 50'	0° 53' 16"	0,04558	0,95442	3,78	6,65	10,43	2,87	3,80	Id.	
19° 40'	0° 43' 16"	0,03738	0,96262	3,81	5,41	9,22	1,60	3,82	Id.	
19° 30'	0° 33' 16"	0,02896	0,97104	3,85	4,19	8,04	0,34	3,86	Id.	
19° 20'	0° 23' 16"	0,02043	0,97957	3,88	2,96	6,84	-0,92	3,89	La fibre interne est comprimée.	
19° 10'	0° 13' 16"	0,01174	0,98826	3,92	1,70	5,62	-2,22	3,92	Id.	
19° 05'	0° 08' 16"	0,00734	0,99266	3,93	1,06	4,99	-2,87	3,93	Id.	
19° 00'	0° 03' 16"	0,00290	0,99710	3,95	0,42	4,37	-3,53	3,95	Id.	

ANGLES DIRECTIFS A DES RÉACTIONS N	DÉVIATIONS $A - \frac{\theta}{2}$	λ	$1 - \lambda$	t_1	t_2	τ_1 Compres- sion externe.	τ_2 Traction interne.	Réactions spécifiques $\frac{N}{e}$	Observations.
		$A = \frac{\theta}{2}$, $\lambda = 0$, Extension nulle.							
18° 56' 44"	0	0	1	Kilogs. 3,96	Kilogs. 0	Kilogs. 3,96	Kilogs. 3,96	3,96	Compression générale.
		$A < \frac{\theta}{2}$, $\lambda < 0$, Extension interne.							
18° 50'	0° 06' 44"	-0,00608	1,00608	3,99	-0,88	3,11	-4,87	3,98	La fibre externe est comprimée.
18° 40'	0° 16' 44"	-0,01522	1,01522	4,02	-2,20	1,82	-6,22	4,02	Id.
18° 30'	0° 26' 44"	-0,02453	1,02453	4,06	-3,55	0,51	-7,61	4,06	Id.
18° 20'	0° 36' 44"	-0,03399	1,03399	4,10	-4,92	-0,82	-9,02	4,08	La fibre externe est dilatée.
18° 10'	0° 46' 44"	-0,04362	1,04362	4,14	-6,31	-2,17	-10,45	4,12	Id.
18° 00	0° 56' 44"	-0,05342	1,05342	4,17	-7,73	-3,56	-11,90	4,17	Id.
17° 30'	1° 06' 44"	-0,06391	1,06391	4,30	-12,14	-7,84	-16,44	4,27	Id.
17° 00	1° 16' 44"	-0,11614	1,11614	4,42	-16,80	-12,38	-21,22	4,39	Id.
16° 00	2° 06' 44"	-0,18645	1,18645	4,70	-26,97	-22,27	-31,67	4,66	Id.
15° 00	3° 06' 44"	-0,27597	1,27597	5,06	-39,92	-34,86	-44,98	4,97	Id.

Au delà de cette valeur, l'écart angulaire ne tarde pas à prendre une influence désastreuse. Une déviation externe de 2 degrés soumet la fibre interne à une extension de plus de 10 kilogs et la fibre opposée à une compression supérieure à 18 kilogs. Pour 3 degrés, on atteint la charge de rupture à l'extension, 17 kilogs, l'une des plus larges que l'on puisse admettre et dont aucun ingénieur ne voudrait répondre. A 4 degrés, la fonte est soumise, sur une face, à une extension de près de 23 kilogs et sur l'autre à une compression de plus de 29 kilogs. Pour 5 degrés, on obtient 28 kilogs dans un sens et plus de 34 kilogs dans l'autre.

Un écart interne de 2 degrés provoque une extension de la fibre externe de plus de 12 kilogs et une compression de la fibre interne de plus de 21 kilogs.

A 3 degrés de déviation interne, on atteint 22 kilogs à la traction et 31 à la compression.

Enfin à 4 degrés, on constate une extension de 35 kilogs et une compression de 45 kilogs.

94. La formule donnant l'extension spécifique due au couple de flexion :

$$t_2 = 144,66 \lambda$$

montre que si le travail d'art résiste, λ doit être une quantité très petite, très différente de l'unité notamment.

Il faudra, en effet, que l'on ait :

$$t_2 = 144,66 \lambda < 10 \text{ kilogs ou } \lambda < 0,07$$

Il n'y a donc pas lieu, au point de vue pratique, de s'arrêter à l'hypothèse $\lambda \stackrel{=}{>} 1$.

Pour le cuvelage du « Bâneux », on pourra écrire :

$$\lambda = 0,945827 - 0,324675 \cot A < 0,07$$

donc

$$\cot A > \frac{0,875827}{0,324675} = 2,69755$$

soit

$$A < 20^{\circ} 19' 36''$$

ce qui répond à une déviation maxima :

$$A - \frac{\theta}{2} < 1^{\circ} 22' 52''$$

abstraction faite de la force portante. Cette dernière s'écartant peu de 3^k,96, il faudrait poser, pour en tenir compte,

$$\tau_2 = 144,66 \lambda - 3,96 < 10$$

ou

$$\lambda < \frac{13,96}{144,66} = 0,096$$

donc

$$\text{Cot } A > \frac{0,849827}{0,324675} = 2,6175$$

soit

$$A < 20^{\circ} 54' 33''$$

et

$$A - \frac{\theta}{2} < 1^{\circ} 57' 49''$$

Une déviation de moins de 2 degrés des réactions latérales suffisait donc pour mettre à mal le cuvelage du « Bâneux ».

95. D'ailleurs, la tension maxima résultant de la flexion est proportionnelle au carré du rapport de la portée du demi-tronçon à l'épaisseur ($\alpha,79$). Toutes choses égales, dans le cas du « Bâneux », pour des demi-tronçons de 631 ou de 315 millimètres de portée au lieu de 1262 millimètres, on aurait eu des tensions 4 ou 16 fois plus réduites. La déviation des réactions aurait pu dépasser plusieurs degrés sans que les efforts d'extensions dépassassent 2 kilogs par millimètre carré.

Il importe donc, dans la réalisation d'un cuvelage

polygonal en fonte, d'éviter les tronçons trop grands et de les disposer de façon à assurer des réactions tangentielles, d'empêcher dans tous les cas une déviation trop sensible des effets de liaisons.

La flexion pourtant ne pourra être totalement écartée; pour la combattre, il faut donner au segment une grande rigidité. On a recours d'ordinaire à des nervures ou collets de consolidation. Généralement on les ménage à l'intérieur, où la fonte ne peut opposer que sa force de résistance à l'extension, quand les réactions latérales se font sentir extérieurement au tronçon. Ces collets intérieurs ne se justifieraient que dans le cas où l'on aurait à craindre l'influence de liaisons s'exerçant à l'intérieur de la cuve. Abstraction faite de cette hypothèse, les nervures doivent être extérieures, afin que la fonte résiste aux forces sollicitantes en leur opposant sa résistance à la compression.

L'expérience a établi que les cuvelages métalliques se rompent dans le vide du puits, par flexion interne, et non contre les terrains. Les réactions dont il s'agit, se font donc sentir exclusivement vers l'extérieur de la paroi métallique. Il en a été ainsi notamment pour les cuvelages en fonte du « Bâneux », à Liège, du « Grand-Bac », à Sclessin, « d'Abhoos », à Herstal, etc. Nous ne connaissons pas de rupture produite autrement dans des installations de l'espèce.

La résistance à la traction de la fonte, très variable et peu sûre, ne dépasse pas toujours 10 kilogs; elle est quelquefois moindre.

La résistance à la compression, parfaitement assurée, va jusque 75 kilogs. Il s'ensuit que les consolidations internes devraient comprendre 7 ou 8 fois plus de matière que les externes et cela pour donner une sécurité plutôt moindre. C'est ce que l'on a parfaitement compris au « Bâneux » où l'on a mis en œuvre des

segments de 0^m,85 de hauteur, 0^m,045 d'épaisseur munis de trois nervures internes, les autres étant difficiles à admettre dans ce travail de réfection, comprenant :

Deux collets en forme de segments circulaires épousant la forme de l'arc, ayant 45 millimètres d'épaisseur également et 310 millimètres de tablette au milieu, suivant la flèche du tronçon.

Au milieu de la hauteur, un collet semblable terminé par un patin de 135 millimètres d'élévation.

Remarquons que cette forme des collets, segments circulaires à une base, répond au diagramme de la tension de la fibre la plus fatiguée par la flexion.

On a, en effet (fig. 12),

$$t_2 = \frac{Mu}{I} = 6pR\lambda \frac{Mg}{e^2} = 0,006 \frac{HR}{e} \lambda \cdot Mg$$

96. Dans le but de réduire, dans la mesure du possible, la déviation éventuelle des réactions terminales dégagées des liaisons, on pourrait conseiller d'en établir d'autres, artificielles, à l'intérieur du cuvelage, en réunissant, par exemple, les angles par des tirants en fer, capables de résister énergiquement à l'extension.

Admettons, dans le cas calculé ci-avant, que l'on ait des réactions à $24^\circ = A$ sur la corde, ce qui revient à admettre un écart angulaire $A - \frac{\theta}{2} = 5^\circ 3'$ sur la tangente. La fonte sera soumise à une traction qui atteindra, pour la fibre la plus fatiguée, près de 28 kilogs.

Recherchons quelle force X il faudrait appliquer suivant le tirant établi le long de la corde du segment pour amener cette réaction à s'exercer tangentiellement et à annuler cette extension.

Les forces N et X devront se composer en une

résultante inclinée sur la seconde de ces composantes d'un angle $\frac{\theta}{2}$.

Par suite,

$$\frac{N}{\sin \frac{\theta}{2}} = \frac{X}{\sin \left(A - \frac{\theta}{2} \right)}$$

donc,

$$X = N \frac{\sin \left(A - \frac{\theta}{2} \right)}{\sin \frac{\theta}{2}} \text{ et } N = p R \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin A}$$

En conséquence,

$$X = pR \frac{\sin \left(A - \frac{\theta}{2} \right)}{\sin A} = pR\lambda.$$

Pour

$$H = 35 \text{ mètres, } p = 0,035, \quad R = 3850, \quad \lambda = 0,21660$$

La force X par unité de section, le millimètre carré, sera donc

$$X = 0,035 \times 3850 \times 0,21660 = 29^k,19$$

Si l'on dispose un tirant pour une hauteur de 200 millimètres de tronçon à 34 millimètres d'épaisseur, l'effort total sera :

$$29,19 \times 34 \times 200 = 198492 \text{ kilogs.}$$

Si l'on compte sur une résistance du fer ou de l'acier employé de 10 kilogs, la section du tirant sera : 19849 millimètres carrés, soit un tirant rond de plus de 15 centimètres de diamètre.

Il sera donc pratiquement irréalisable de redresser en quelque sorte les conditions de résistance d'un cuvelage dont les réactions latérales présenteraient un écart de 5 degrés.

Si cette déviation ne devait être que de 2 degrés on aurait $\lambda = 0,1$ à très peu de chose près et $X = 13^k,48$.

L'effort total deviendrait, pour 200 millimètres de tronçon : 91664 kilogs, soit une section résistante de 9166 millimètres carrés, ce qui exigerait un tirant circulaire de 108 millimètres. Ce qui prouve que l'on ne peut guère espérer corriger rigoureusement un défaut de direction sensible. Mais le but est bien plutôt d'empêcher la rupture du cuvelage et il suffit, pour cela, de réduire l'action pernicieuse des forces perturbatrices en réduisant l'écart angulaire qu'il serait difficile d'empêcher complètement.

Ajoutons que, suivant le cours des idées reçues en matière de cuvelage, le praticien se dissimule non seulement les effets de flexion, mais encore l'élévation, dans certains cas, des forces portantes qui résultent des réactions latérales et dont il ne se fait pas une idée exacte.

Liège, 22 mai 1891.

TABLE DES MATIÈRES

	PAGES.
I. — Préliminaires	1
II. — Problème général de la résistance des enveloppes . . .	5
III — Hypothèse de la tension constante.	
A) Enveloppes cylindriques. — B) Enveloppes sphériques.	8
IV — Formules de Lamé.	
A) Enveloppes cylindriques : 1. Formules générales. —	
2. Discussion. — 3. Calcul des enveloppes cylindriques :	
1) Corps de pompes des presses hydrauliques. 2) Plon-	
geurs des presses. Applications. 3) Cuvelages et serre-	
ments cylindriques, 4) Cuvelages et serremments mixtes.	
v) Enveloppes cylindriques de faibles épaisseurs . . .	15
B) Enveloppes sphériques : 1. Formules générales. —	
2. Discussion. — 3. Calcul des enveloppes sphériques :	
1) Récipients à pression interne. 2) Plate-cuve et serre-	
ment sphériques. 3) Massifs sphériques mixtes. 4) En-	
veloppes sphériques de faibles épaisseurs	44
V. — Du centre de pression dans les massifs cylindriques et	
sphériques.	
A) Enveloppes cylindriques. — B) Enveloppes sphéri-	
ques. — C) Discussion des résultats qui précèdent .	58
VI. — Serrements et plates-cuves noyées ou à double pression .	67
VII. — Cerclage des bouches à feu	73
VIII — Récapitulation des formules de résistance	74
IX. — Influence des réactions latérales.	77
X. — Résistance d'un segment de cuvelage métallique. — 1) Cal-	
cul des réactions. 2) Des forces composées en une sec-	
tion droite. 3) Expression de la composante tangen-	
tielle. 4) Valeur du cisaillement. 5) Calcul du moment	
fléchissant. 6) Moment maximum. 7) Cas remar-	
quable de la flexion nulle 8) Discussion et diagramme	
des efforts. 9) Applications. 10) Cuvelage du « Bâneux ». .	84

Du solide
de “ plus grande action „

Par Philippe BANNEUX

Ingénieur principal honoraire des Mines

L I É G E

Imprimerie-Lithographie G. FAUST-TRUYEN, rue Sœurs-de-Hasque, 7

—
1899

Du solide de " plus grande action ,,

I. BUT DE CETTE ÉTUDE.

1. Cette recherche tire son origine du problème suivant :
" Déterminer la forme et la position d'un solide homogène de
" massé connue pour que son action sur un point donné soit
" maxima. On admet que les actions élémentaires, attractives
" ou répulsives, s'exercent conformément à la loi de Newton. "

La solution de cette question ne nous paraît pas avoir été
établie en toute rigueur, bien cependant qu'on puisse le faire
d'une façon très élémentaire (*). Elle nous a conduit à d'autres
problèmes du même genre que l'on peut énoncer comme suit :
" Déterminer les dimensions d'un solide homogène de masse
" connue et de forme donnée pour que son action sur un point
" de sa surface soit maximâ ».

(*) Consulter à ce propos : *Traité de mécanique*, de Ed. Collignon ;
Tome V, page 135. Edition 1886.

La solution est relativement aisée pour certains volumes de révolution : la droite et le plan indéfini, le segment sphérique, la sphère, l'hémisphère, le cône, le cylindre, les segments paraboliques autour de l'axe de la courbe génératrice ou de la tangente au sommet, etc., etc.

Dans tous ces cas, il est possible d'exprimer la force exercée par le corps sur le point au moyen de deux paramètres fixant les dimensions du corps. La condition du volume ou de la masse donnée fournit une relation entre ces deux paramètres. Il s'en suit que la force se déterminera en fonction d'une seule de ces dimensions. Pour obtenir le maximum de la force, on calculera celle des valeurs de cet élément qui annulera la dérivée de cette fonction. La difficulté d'aboutir tiendra à l'analyse proprement dite ; elle proviendra moins de la difficulté de résoudre une équation d'un degré supérieur ou même transcendante que de la nécessité de démontrer qu'il existe un maximum et un seul. Ce dernier point est souvent omis dans nombre de questions où cédant trop au sentiment, on néglige une démonstration qui s'impose.

II. DÉTERMINATION DU SOLIDE DE « PLUS GRANDE ACTION ».

A) *Sa position.*

2. Le point qui subit l'action doit se trouver à la surface du corps actif.

Admettons que le point se trouve à l'intérieur du solide. L'action résultante sera représentée par une force R passant par le point μ . Conduisons par ce point un plan P normal à la force R (fig. 1).

Tous les éléments m situés à droite du plan P exerceront sur le point de masse μ , une action dont la composante suivant R sera :

$$\frac{m \mu}{r^2} \cos \theta$$

m étant la masse de l'élément ; r et θ les coordonnées polaires de m par rapport au pôle μ et à l'axe polaire μR . — Tous les éléments distribués vers la gauche du plan P fourniront des composantes suivant μR qui agiront en sens inverse des précédentes et tendront à diminuer l'action résultante.

Considérons un élément quelconque vers la gauche du plan P . Si m' est sa masse, r' et θ' ses coordonnées, θ' étant mesuré par rapport à la direction $\mu R'$, on aura :

$$R = \mu \left[\Sigma \frac{m \cos \theta}{r^2} - \frac{m' \cos \theta'}{r'^2} \right]$$

le signe sommatoire s'étendant à tous les points du solide, hormis l'élément m' .

Cela étant, déplaçons cet élément m' et amenons-le dans la région de droite, en un point quelconque de la surface où les coordonnées seront r'' et θ'' .

Par suite de cette modification, nous aurons une résultante nouvelle R' dont la projection sur μR sera égale à la somme des projections de toutes ses composantes, de sorte que

$$R' \cos (R', R) = \mu \left[\Sigma \frac{m \cos \theta}{r^2} + \frac{m' \cos \theta''}{r''^2} \right] > R$$

et, à fortiori, $R' > R$.

On pourra donc faire passer tous les éléments constituant le corps à la gauche du plan P dans la région de droite en augmentant pour chacun d'eux la force résultante. Le point μ ne peut donc se trouver à l'intérieur du solide agissant.

Supposons que le point soit à l'extérieur du corps (fig. 2). Soit la résultante μR ; soit aussi une droite quelconque μx rencontrant le solide en deux points ou en un nombre pair de points. Détachons, par la pensée, le point d'arrière m' (r' , θ). Nous aurons pour expression de la force résultante :

$$R = \mu \left[\Sigma \frac{m \cos \theta}{r^2} + \frac{m' \cos \theta}{r'^2} \right]$$

le signe sommatoire s'étendant à tout le corps, le point m' excepté. Amenons m' et m , correspondant du premier point. La nouvelle résultante R' sera telle que

$$R' \cos (R', R) = \mu \left[\Sigma \frac{m \cos \theta}{r^2} + \frac{m' \cos \theta}{r'^2} \right] > R$$

En conséquence $R' > R$

On peut donc faire passer successivement tous les éléments de la face d'arrière à la face d'avant en augmentant, pour chaque modification, la valeur de la résultante. Cette opération répétée amènera la surface du solide de « plus grande action » à passer par le point μ .

B) *Sa forme.*

3. La surface du corps de « plus grande action » doit être telle que pour chaque élément actif de cette surface, la composante

suivant la résultante soit constante. Si μR est la résultante des actions dues aux éléments constitutifs du corps sur le point μ situé à sa surface, on aura :

$$R = \mu \left[\Sigma \frac{m \cos \theta}{r^2} + \frac{m_1 \cos \theta_1}{r_1^2} + \frac{m_2 \cos \theta_2}{r_2^2} \right]$$

m_1 et m_2 étant deux éléments quelconques de la surface et correspondant aux coordonnées $(r_1, \theta_1), (r_2, \theta_2)$ (fig. 3). Le signe sommatoire s'étend à tous les éléments, non compris m_1 et m_2 . —

Admettons que l'on ait :

$$\frac{\cos \theta_1}{r_1^2} > \frac{\cos \theta_2}{r_2^2}$$

Faisons glisser m_2 sur la surface du solide de façon à réaliser l'égalité entre ces deux expressions. Nous obtiendrons une nouvelle résultante R' telle que

$$R' \cos(R', R) = \mu \left[\Sigma \frac{m \cos \theta}{r^2} + (m_1 + m_2) \frac{\cos \theta_1}{r_1^2} \right] > R$$

donc $R' > R$

4. Conclusion : La surface du solide de plus grande action est donc définie par la relation

$$\frac{\cos \theta}{r^2} = \frac{1}{K^2}$$

K^2 étant une constante dépendant du volume donné du solide. La forme du solide est donc une surface de révolution dont toute section méridienne a pour équation polaire :

$$r^2 = K^2 \cos \theta \quad (1)$$

5. Calcul de la constante.

Admettons que le volume du corps soit $\frac{4}{3} \pi a^3$.

L'équation de condition sera :

$$\frac{4}{3} \pi a^3 = \pi \int_0^h y^2 dx$$

h étant la limite extrême de x .

$$\text{Mais, } y^2 = r^2 \sin^2 \theta = r^2 (1 - \cos^2 \theta) = \frac{r^2 (K^4 - r^4)}{K^4}$$

$$x = r \cos \theta = \frac{r^3}{K^2} \text{ donc } dx = 3 \frac{r^2}{K^2} dr$$

En conséquence, par substitution :

$$a^3 = \frac{9}{4 K^6} \int_0^K r^4 (K^4 - r^4) dr = \frac{K^3}{5}$$

K étant effectivement la limite supérieure de y. On en déduit :

$$K = a \sqrt[3]{5} = 1,71 a \quad (2)$$

Cette relation achève de déterminer la forme du corps.

6. Construction de la section principale.

Nous avons donc à construire la courbe :

$$r^2 = K^2 \cos \theta$$

On en tire :

$$r' = -\frac{K^2 \sin \theta}{2r}, \quad tgi = \frac{r'}{r} = -\frac{2r^2}{K^2 \sin \theta} = -2 \cot \theta$$

i étant l'angle directif de la tangente par rapport au rayon polaire.

$$\text{Pour } \theta = 0, \quad r = K, \quad r' = 0, \quad tgi = \infty, \quad i = \frac{\pi}{2}$$

L'axe μR est donc normal à la section principale en μ .

$$\text{Pour } \theta = \frac{\pi}{2}, \quad r = 0, \quad r' = -\infty, \quad tgi = 0, \quad i = 0$$

ce qui signifie que la tangente au pôle μ est normale à l'axe de la courbe.

Les points maxima ou minima correspondent à la relation :

$$\theta + i = \pi \text{ ou } tgi = -tg\theta = -2 \cot \theta$$

Par suite

$$tg\theta = \sqrt{2}, \quad \theta = 54^\circ 43' 45'', \quad r^2 = \frac{K^2}{\sqrt{3}} \text{ ou } 0,76 K = r$$

7. La courbe méridienne ne présente pas d'inflexion.

L'expression générale du rayon de courbure est, en coordonnées polaires :

$$\rho = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - rr''}$$

$$\text{Mais } r' = -\frac{K^2 \sin \theta}{2r}, \quad r'^2 = \frac{K^4 - r^4}{4r^2}, \quad r'' = -\frac{K^4 + r^4}{4r^3}$$

Donc,

$$\rho = \frac{1}{6} \frac{(3r^4 + K^4)^{\frac{3}{2}}}{r(K^4 + r^4)}$$

Il ne peut donc y avoir inflexion qu'à l'origine μ , parce que en ce point, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $r = 0$, $\rho = \infty$

Mais nous savons qu'au pôle, la tangente est normale à l'axe μR ; il existe donc, en ce point, un contact d'ordre supérieur mais sans inflexion. La courbe est d'ailleurs symétrique par rapport à l'axe polaire.

Les rayons de courbure principaux sont ceux des sommets μ μ' et des points maxima. Ils ont pour valeurs :

$$\infty, \frac{2}{3} K, \frac{K}{2} \sqrt{\frac{3}{4}} = 0,465 K.$$

C) Ses propriétés.

8. L'aire de la section méridienne est égale à la constante K^2 . En effet, si A est l'aire totale, on aura :

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\theta = K^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = K^2 (\sin \theta)_0^{\frac{\pi}{2}} = K^2.$$

9. La surface du solide de « plus grande action » est quarrable.

On aura en effet,

$$S = 2 \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} y ds = 2 \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \sin \theta ds$$

$$\text{Or, } ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2} = \frac{K^2 d\theta}{2r} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}$$

Donc

$$S = \pi K^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta} \cdot \sin \theta d\theta$$

Posons $\sqrt{3} \cos \theta = u$ ou $du = -\sqrt{3} \sin \theta d\theta$.

On aura, les limites de u étant $\sqrt{3}$ et 0.

$$\begin{aligned} \text{d'où} \quad S &= \frac{\pi K^2}{\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{3}} du \sqrt{1 + u^2} \\ S &= \frac{\pi K^2}{2\sqrt{3}} \left[u \sqrt{1 + u^2} + L(u + \sqrt{1 + u^2}) \right]_0^{\sqrt{3}} \\ S &= \frac{\pi a^2}{2\sqrt{3}} \sqrt{25} \left[2\sqrt{3} + L(2 + \sqrt{3}) \right] = 12,64 a^2 \end{aligned}$$

10. Le centre de gravité du solide se trouve dans la première moitié de l'axe.

Si x_1 est l'abscisse du centre de gravité, on aura :

$$V x_1 = \pi \int y^2 x dx = \frac{4}{15} \pi K^3 x_1$$

Donc
$$x_1 = \frac{15}{4 K^3} \int y^2 x dx$$

c'est-à-dire que

$$x_1 = \frac{45}{4 K^{11}} \int r^7 (K^4 - r^4) dr$$

donc

$$x_1 = \frac{15}{32} K.$$

Il résulte de ce qui précède, de cette dernière valeur notamment, que la plus forte masse du solide de « plus grande action » est accumulée vers le point μ . Celui-ci est donc au gros bout du volume et non vers la pointe comme on a eu le tort de le représenter (*).

La figure (4) donne une idée de la forme de la section méridienne du solide cherché.

III. DES SOLIDES DE « PLUS GRANDE ACTION » DE FORMES DONNÉES

A. Formules générales.

11. Expression de l'action d'un solide de révolution sur l'extrémité de son axe.

Conduisons, par cette extrémité considérée, un plan principal. Rapportons la section à deux axes rectangulaires passant par le point et dont l'un coïncide avec l'axe de la rotation (fig. 5).

L'aire élémentaire $dx dy$ dont les coordonnées polaires sont r et θ en tournant autour de l'axe Ox engendrera un volume dont la masse sera :

$$2 \pi \delta y dx dy$$

δ étant la densité constante du corps.

L'action qu'il exercera sur le point μ sera

$$2 \pi \mu \delta y dx dy \frac{\cos \theta}{r^2} = 2 \pi \mu \delta \frac{x y dx dy}{r^3}$$

L'action résultante aura donc pour expression :

$$F = 2 \pi \delta \mu \int_0^x x dx \int_x^{\cos \theta} \frac{y dy}{r^3}$$

(*) *Traité de mécanique*, E. Collignon, tome V, page 136.

Les limites de la seconde intégrale sont celles du rayon r .
On a d'ailleurs

$$x^2 + y^2 = r^2 \text{ et } y \, dy = r \, dr$$

quand x reste constant.

$$F = 2 \pi \delta \mu \int_0^x x \, dx \int_x^{\frac{x}{\cos \theta}} \frac{dr}{r^2} = 2 \pi \delta \mu \int_0^x (1 - \cos \theta) \, dx \quad (3).$$

θ représente ici l'angle directif du rayon polaire r du contour de la section méridienne.

12. Quant à la condition du volume, on aura :

$$\pi \int_0^h y^2 \, dx = \frac{4}{3} \pi a^3 \text{ ou } \frac{4}{3} a^3 = \int_0^h y^2 \, dx \quad (4)$$

h est la valeur extrême de x .

Les équations (3) et (4) résolvent la question d'une manière générale.

B) *Application à quelques solides remarquables.*

a) DU SOLIDE DE " PLUS GRANDE ACTION "

13. On a dans ce cas,

$$r^2 = K^2 \cos \theta$$

et pour limite extrême de l'abscisse

$$x = K = h = a \sqrt[3]{5}$$

Ce calcul a été fait ci-avant.

Expression de la force.

Nous avons :

$$r^2 = \frac{x^2}{\cos^2 \theta} = h^2 \cos \theta, \text{ donc } \cos \theta = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{h^{\frac{2}{3}}}$$

En substituant dans la formule (3) il viendra :

$$F = 2 \pi \mu \delta \left(h - \frac{1}{h^{\frac{2}{3}}} \int_0^h x^{\frac{2}{3}} \, dx \right) = 2 \pi \mu \delta \left(h - \frac{3}{5} h \right) =$$

$$\frac{4}{5} \pi \mu a \delta \sqrt[3]{5}$$

Par suite, $F = 4,2977 \mu a \delta \quad (a)$

b) DES SOLIDES SPHÉRIQUES DE " PLUS GRANDE ACTION "

1°) De la sphère creuse pour un point de sa surface.

14. Si R et r sont les rayons des surfaces externe et interne, (fig. 6) l'action cherchée sera :

$$F = \frac{4}{3} \pi \mu \delta \left(R - \frac{r^3}{R^2} \right) = \frac{4}{3} \pi \mu \delta \frac{R^3 - r^3}{R^2}$$

La condition du volume donne :

$$a^3 = R^3 - r^3 \quad \text{ou} \quad R^3 = a^3 + r^3$$

Par suite,

$$F = \frac{4}{3} \pi \mu \delta \frac{a^3}{R^2}$$

La plus grande valeur de F répond à la plus petite de R c'est-à-dire à la plus petite de r qui est zéro.

La sphère creuse est donc toujours de moindre action que la sphère pleine de même masse.

Cette action maxima de la sphère pleine sera :

$$F = \frac{4}{3} \pi \mu a \delta = 4,1888 \mu a \delta \quad (b)$$

2°) De l'hémisphère sur le centre de sa base.

15. On déduit immédiatement de la fig. 7,

$$\cos \theta = \frac{x}{r}$$

Donc

$$F = 2 \pi \mu \delta \left(r - \frac{r}{2} \right) = \pi \mu \delta r.$$

La condition du volume donne : $r = a \sqrt[3]{2}$

Par suite

$$F = \pi \sqrt[3]{2} \mu a \delta = 3,9581 \mu a \delta \quad (c)$$

3°) De l'hémisphère sur son sommet.

16. — La fig. 8 permet d'écrire,

$$\cos \theta = \frac{x}{\mu M} = \frac{x}{\sqrt{2} r x} \sqrt{\frac{x}{2r}}$$

Donc $F = 2\pi \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \mu \delta r$ et $r = a \sqrt[3]{2}$

Par suite,

$$F = 2\pi \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \sqrt[3]{2} \mu a \delta$$

ou

$$F = 4,1845 \mu a \delta \quad (d)$$

17. — Remarque. L'action de l'hémisphère sur son sommet ou le centre de sa base est la même quelles que soient les dimensions du solide pourvu que la densité varie en raison inverse du rayon.

4°) Du segment sphérique sur son sommet.

18. — Soit α le rayon de la sphère à laquelle le segment appartient (fig. 9). — Nous en déduisons comme ci-dessus :

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{x}{2\alpha}}$$

Donc

$$F = 2\pi \mu \delta h \left[1 - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{h}{2\alpha}} \right]$$

La condition du volume donne :

$$\frac{4}{3} \pi a^3 = \frac{1}{6} \pi h^3 + \frac{1}{2} \pi h^2 (2\alpha - h)$$

d'où

$$\alpha = \frac{4a^3 + h^3}{3h^2}$$

Mais

$$h < 2\alpha = \frac{2}{3} \left(h + \frac{4a^3}{h^2} \right)$$

donc

$$h < 2\alpha$$

En conséquence,

$$F = 2\pi \mu \delta h \left[1 - \sqrt{\frac{2}{3} \frac{h^3}{4a^3 + h^3}} \right]$$

Posons

$$h^3 = a^3 z$$

et concluons sans tarder que l'on doit avoir :

$$h^3 = a^3 z < 8a^3 \quad \text{ou} \quad z < 8$$

et

$$\alpha = \frac{h}{3} \frac{4+z}{z}$$

Nous aurons :

$$F = 2\pi \mu \delta a \sqrt[3]{z} \left[1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{z}{4+z}} \right]$$

Annulant la dérivée de cette fonction de z , il viendra

$$z^3 - 4z^2 - 56z + 19z = 0$$

ou

$$(z - 8)(z^2 + 4z - 24) = 0$$

Il y a donc trois racines, savoir :

$$z_1 = 8, \quad z_2 = 2(\sqrt{7} - 1) = 3,291502,$$

$$z_3 = -2(\sqrt{7} + 1) = -7,291502$$

Cette dernière doit être écartée.

La première correspond à la sphère. En effet, pour $z_1 = 8$ il vient :

$$h = 2a, \quad \alpha = \frac{h}{2}$$

La force a pour valeur

$$F = \frac{4}{3} \pi \mu a \delta = 4,1888 \mu a \delta \quad (b)$$

résultat connu.

Enfin la racine $z_2 = 3,291502$ donne :

$$h = 1,4875 a, \quad z = 1,0984 a$$

et
$$F = 4,2199 \mu a \delta \quad (c)$$

Pour vérifier qu'il s'agit bien d'un maximum, nous écrivons :

$$F' = \frac{2}{3} \pi \mu a \delta \frac{(4+z)^{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{2z}{3}} (z+10)}{z^{\frac{3}{2}} (4+z)^{\frac{3}{2}}}$$

F' change de signe avec le numérateur de la fraction qui l'exprime.

Or, pour $z = 0$, $F = 0$ et $F' > 0$

La face F croît donc avec z à partir de zéro. Elle passe par conséquent par un maximum pour $z = z_2$.

Cette valeur est la seule valeur limite de F puisque F' ne s'annule que pour $z = z_2$ et pour la valeur particulière $z = 8$.

Il y a donc un maximum et un seul. La force maxima qui répond au segment diffère peu de la force qui résulte de l'hémisphère et de la sphère de même masse.

c) DU CÔNE DE « PLUS GRANDE ACTION » SUR SON SOMMET.

19. Dans le cas spécial du cône de révolution, on a :

$$\theta = \text{constante.} \quad (\text{fig. 10}).$$

Cet angle constant représente la demi ouverture du cône. On en déduit :

$$F = 2 \pi \mu \delta (1 - \cos \theta) h$$

h étant la hauteur du cône.

La condition du volume sera :

$$\frac{4}{3} \pi a^3 = \pi \int_0^h y^2 dx = \pi \operatorname{tg}^2 \theta \int_0^h x^2 dx = \frac{\pi}{3} h^3 \operatorname{tg}^2 \theta$$

ou
$$h^3 \operatorname{tg}^2 \theta = 4 a^3$$

Le maximum de F répondra à la relation :

$$1 - \cos \theta + h \sin \theta. \theta' = 0$$

qui, en général, fournira toutes les valeurs limites de F.

De l'équation de condition, on déduit :

$$h \theta' = -3 a \sqrt{a} h^{-\frac{3}{2}} \cos^2 \theta = -\frac{3}{2} \operatorname{tg} \theta$$

donc, en substituant,

$$2 \cos \theta (1 - \cos \theta) - 3 \sin^2 \theta \cos^2 \theta = 0$$

De là, trois solutions :

$$1^{\circ}) \quad \cos \theta = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad h = 0, \quad F = 0, \quad (f)$$

Le cône se réduit à un plan indéfini. En conséquence, l'action d'un plan indéfini, de masse finie, sur l'un de ses points est nulle.

2°) L'équation simplifiée devient :

$$2(1 - \cos \theta) - 3 \sin^2 \theta \cos \theta = 0$$

ou
$$\sin^2 \frac{\theta}{2} \left(1 - 3 \cos^2 \frac{\theta}{2} \cos \theta \right) = 0$$

La deuxième solution est donc

$$\theta = 0 \quad \text{et} \quad h = \infty$$

Quant à l'expression de F qui devient indéterminée, nous pourrions écrire :

$$F = 2 \pi \mu \delta \left(\frac{1 - \cos \theta}{\frac{1}{h}} \right)_0 = 3 \pi \mu \delta a \sqrt[3]{4} (\sin \theta \operatorname{tg} \theta)_0 = 0$$

C'est la droite indéfinie ; le cône se réduit à son axe.

L'action d'une droite indéfinie, de masse finie, sur son extrémité est donc nulle.

3°) La troisième solution est fournie par l'équation :

$$1 - 3 \cos^2 \frac{\theta}{2} \cos \theta = 0$$

qui donne :

$$6 \cos^4 \frac{\theta}{2} - 3 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 = 0$$

et

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{3 + \sqrt{33}}{12} = 0,7267$$

$$\text{ou} \quad \cos \frac{\theta}{2} = 0,8524 = \cos 31^{\circ} 31' \quad \text{et} \quad \theta = 63^{\circ} 2'$$

La valeur de h qui y correspond est :

$$h = a \sqrt[3]{4 \cos^2 \theta} = a \sqrt[3]{4,036} = 1,012 a$$

Et enfin

$$F = 3,4750 \mu a \delta \quad (h)$$

Il s'agit bien d'un maximum puisque, pour les valeurs limites $\theta = 0, \theta = \frac{\pi}{2}$, on a $F = 0$ et que F est essentiellement positif.

d) Du cylindre de « plus grande action » sur le centre de sa base.

20. — Désignons par α le rayon de base du cylindre et par h la hauteur variable (fig. 11).

Nous aurons :

$$F = 2 \pi \mu \delta \int_0^h (1 - \cos \theta) dx$$

$$x = \alpha \cot \theta, \quad dx = -\alpha \frac{d\theta}{\sin^2 \theta}$$

Donc

$$F = 2 \pi \mu \delta \alpha \int_h^0 \frac{1 - \cos \theta}{\sin^2 \theta} d\theta = 2 \pi \mu \delta \alpha \int_h^0 \frac{d\theta}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}$$

Par suite,

$$F = 2 \pi \mu \delta \alpha \left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right)_h^0 = 2 \pi \mu \delta \alpha \left(1 - \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right)$$

La condition du volume sera :

$$\frac{4}{3} \pi \alpha^3 = \pi \beta^3 = \pi \alpha^2 h \text{ et } \alpha = h \operatorname{tg} \theta$$

On en déduit,
$$\alpha = \beta \sqrt[3]{\operatorname{tg} \theta}$$

Par suite,

$$F = 2 \pi \mu \delta \beta \sqrt[3]{\operatorname{tg} \theta \left(1 - \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right)^3}$$

ou, en posant

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = u$$

$$F = 2 \pi \mu \delta \beta \sqrt[3]{2} \sqrt[3]{\frac{u(1-u)^2}{1+u}}$$

Nous avons donc à trouver les valeurs limites de l'expression :

$$z = \frac{u(1-u)^2}{1+u}$$

On en conclut :

$$Lz = Lu + 2L(1-u) - L(1+u)$$

et

$$\frac{z'}{z} = \frac{1 - 2u^2 - 3u}{u(1 - u^2)}$$

ou

$$z' = \frac{(1 - 2u^2 - 3u)(1 - u)}{(1 + u)^2}$$

La force F s'annule pour $u = 0$ et $u = 1$, c'est-à-dire pour $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$, cas particuliers qui répondent au plan et à la droite indéfinies.

Cette force passe donc par un maximum pour la valeur de u qui satisfait à la relation :

$$2u^2 + 3u - 1 = 0$$

c'est-à-dire,

$$u = \frac{\sqrt{17} - 3}{4} = 0,2804$$

la racine négative étant écartée comme impossible.

Donc

$$tg \frac{\theta}{2} = 0,2804 = tg 15^{\circ} 40', \quad \theta = 31^{\circ} 20',$$

$$tg \theta = 0,60881, \quad \sqrt[3]{tg \theta} = 0,8476$$

En conséquence,

$$L = 0,8476 \beta = 0,9324 a$$

$$h = 1,5315 a$$

et

$$F = 4,2180 \mu a \delta \quad (i)$$

On peut remarquer que pour $u = 0$ on a $z' = 1 > 0$.

z croît donc avec u , de $u = 0$ à $u = 0,2804$.

Pour cette dernière valeur, z presse par son maximum ainsi que F.

Au delà, pour $u > 0,2804$, le trinôme

$$1 - 2u^2 - 3u < 0$$

et aussi z' ; z décroît donc de $u = 0,2804$ à $u = 1$.

e) DES SEGMENTS PARABOLIQUES DE " PLUS GRANDE ACTION " SUR LE SÔMMET.

1°) Segment de révolution autour de l'axe.

21. — L'équation de la courbe génératrice sera :

$$y^2 = 2px$$

Si h est la hauteur du segment, H le rayon de la base, on aura :

$$H^2 = 2ph \text{ et nous poserons : } H = n h \text{ (fig. 12)}$$

donc

$$2p = n^2 h$$

La condition du volume sera :

$$\frac{4}{3} a^3 = \beta^3 = \int_0^h y^2 dx = \frac{n^2 h^2}{2}$$

donc

$$h = \beta \sqrt[3]{\frac{2}{n^2}}, \quad H = \beta \sqrt[3]{2n}$$

D'autre part,

$$\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2px}}$$

donc

$$F = 2\pi \mu \delta \left[h - \int_0^h \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 2px}} \right]$$

d'où

$$F = 2\pi \mu \delta n h \left[n l \frac{\sqrt{1+n^2} + 1}{n} - \frac{\sqrt{1+n^2} - 1}{n} \right]$$

Posons : $\frac{\sqrt{1+n^2} + 1}{n} = u$ ou $n = \frac{2u}{u^2 - 1}$

On en déduit : $\frac{\sqrt{1+n^2} - 1}{n} = \frac{1}{u}$

et

$$F = 2\pi \mu \delta \beta \sqrt[3]{\frac{4u}{u^2 - 1}} \left[\frac{u^2 lu^2 - u^2 + 1}{u(u^2 - 1)} \right]$$

ou en représentant u^2 par z ,

$$F = 4\pi \mu \delta \alpha \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \frac{z lz - z + 1}{\sqrt[3]{z(z-1)^4}}$$

La force ne dépend que de la variable z . Pour en apprécier les limites de variation, annulons la dérivée prise par rapport à cette variable. Il viendra :

$$F' = 4 \pi \mu \delta \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{(z-1)(5z-1) - 2z(z+1)lz}{z(z-1)^2 \sqrt{z(z-1)}} = 0$$

Nous écrivons :

$$y = 5z^2 - 6z + 1 - 2z(z+1)lz = 0$$

et nous déduisons :

$$y' = 2 \left[4(z-1) - (2z+1)lz \right]$$

$$y'' = \frac{2}{z} \left[2z - 1 - 2z lz \right]$$

$$y''' = \frac{2}{z^2} (1 - 2z) < 0 \text{ puisque } z > 1.$$

On a pour $z = 1, y_1 = 0, y_1' = 0, y_1'' = 2, y_1''' = -2$
 y'' est donc une fonction décroissante qui varie de 2 à $-\infty$
 quand z passe de 1 à $+\infty$; la dérivée seconde passe donc une
 fois, et une seule fois, par zéro. Il s'ensuit que la courbe (y) pré-
 sente une seule inflexion qui sera déterminée par la résolution
 de l'équation

$$\frac{1}{z} \left[2z(1-lz) - 1 \right] = 0$$

On obtient successivement :

Pour $z = 1$	$y'' = + 2,00000$
$z = 2$	$y'' = + 0,22740$
$z = 2,1$	$y'' = + 0,07990$
$z = 2,15$	$y'' = + 0,00710$
$z = 2,155$	$y'' = + 0,00076$
$z = 2,160$	$y'' = - 0,00637$

On peut donc admettre, très approximativement, pour
 l'inflexion :

$$z = 2,155$$

La valeur correspondante de l'ordonnée de la courbe sera
 donc

$$y = 0,8297.$$

La courbe (y) part donc de l'axe des z , à l'origine tangen-
 tiellement à cet axe, en tournant sa convexité vers le bas.
 Elle s'infléchit pour $z = 2,155$ et $y = 0,8297$ (fig. 14).

Au-delà de ce point, la convexité est tournée vers le haut et
 le sens de cette courbure ne change plus.

Or, pour de grandes valeurs, y devient négative puisque

$$y = z^2 \left[5 - \frac{6}{z} + \frac{1}{z^2} - \left(1 + \frac{1}{2} \right) lz \right]$$

ce qui conduit à

$$\lim y = \lim z^2 [5 - lz] = - \infty$$

La courbe s'étend donc indéfiniment dans le quatrième angle des axes ; elle coupe par conséquent l'axe des z en un point et en un seul R dont l'abscisse OR répond au maximum de F. Le point maximum de la courbe (y) sera donné par l'équation

$$y = 4(z - 1) - (2z + 1) lz = 0$$

On a :

Pour $z = 3,0$	$y = + 0,3098$
$z = 3,4$	$y = + 0,0544$
$z = 3,47$	$y = + 0,0015$
$z = 3,48$	$y = - 0,0064$
$z = 3,50$	$y = - 0,2160$

On peut donc considérer comme racine $z = 3,47$.

La valeur de l'ordonnée maxima sera : $y = 1,7884$.

Enfin, nous aurons à déterminer la racine de l'équation :

$$y = (5z - 1)(z - 1) - 2z(z + 1) lz = 0$$

racine dont la valeur OR est évidemment supérieure à 3,47.

Nous aurons successivement :

Pour $z = 4$	$y_4 = + 1,5483$
$z = 5$	$y_5 = - 0,6137$

La valeur cherchée est donc comprise entre 4 et 5 et est plus rapprochée de cette dernière valeur.

Or, pour $z = 3,7$ on a : $y_{4,7} = + 0,34174$

$z = 4,8$ donne : $y_{4,8} = + 0,05924$

$z = 4,82$ fournit : $y_{4,82} = - 0,00205$

On peut donc considérer cette dernière valeur comme répondant à la question.

Par substitution, on aura :

$$\frac{z lz - z + 1}{(z - 1) \sqrt[3]{z(z - 1)}} = \frac{376,07514}{1008,7100}$$

Donc :

$$F = \frac{4 \times 3,1416 \times 2,6207}{3} \times \frac{376,07514}{1008,7100} \mu a \delta$$

ou

$$F = 4,0956 \mu a \delta \quad (j)$$

$$n = 1,14945, h = 1,2637 a, H = 1,45256 a$$

22 Remarque. — L'expression de la force F s'annule pour $z = 1$ et $z = \infty$, c'est-à-dire pour $u = 1$ et $u = \infty$ ou encore $n = \infty$ et $n = 0$, ce qui correspond à $h = 0$, $H = \infty$ et $h = \infty$ et $H = 0$.

Le premier cas est celui du plan indéfini et le second celui de la droite matérielle.

La fraction variable de l'expression de F est :

$$\frac{z lz - z + 1}{(z - 1) \sqrt[3]{z(z - 1)}}$$

pour $z = 1$ et $z = \infty$, cette fraction se présente sous les formes indéterminées $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$

En effet, pour $z = \infty$ on a :

$$z lz - z + 1 = z^2 \left(\frac{lz}{z} - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \right) = (z^2) \left(\frac{lz}{z} \right) = (z) = \infty$$

La véritable valeur de la fraction sera dans les deux cas,

$$3 \frac{z \frac{2}{3} lz}{(5z - 1) \sqrt[3]{2 - 1}}$$

L'indétermination persistant on aura, en dérivant à nouveau :

$$\frac{3}{4} \frac{2 lz + 3}{5z - 4} \sqrt[3]{\frac{(z - 1)^2}{z}}$$

Pour $z = 1$ on obtient $F = 0$.

Pour $z = \infty$ nous écrirons :

$$\frac{3}{4} \frac{(2 lz + 3) \sqrt[3]{z - 1}}{5z - 4} \sqrt[3]{\frac{z - 1}{z}} = \frac{3}{4} \frac{2 \frac{lz}{z} + \frac{3}{z}}{5 - \frac{4}{z}} \sqrt[3]{z - 1}$$

c'est-à-dire,

$$\frac{3}{4} \frac{2}{5} \frac{\sqrt[3]{z - 1}}{z} = \frac{3}{10} \frac{1}{z^{\frac{2}{3}}} \sqrt[3]{z - 1} = \frac{3}{10 \sqrt[3]{z^2}} = 0$$

Donc

$$F_{\infty} = 0.$$

b) SEGMENTS DE RÉVOLUTION AUTOUR DE LA TANGENTE.

23. — L'équation de la courbe génératrice sera (fig. 13) :

$$x^2 = 2py$$

On aura :

$$\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{2p}{\sqrt{x^2 + 4p^2}}$$

Par suite,

$$F = 2\pi \mu \delta \left[h - 2p \int_0^h \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4p^2}} \right],$$

ou

$$F = 2\pi \mu \delta \left[h - 2p l \frac{h + \sqrt{h^2 + 4p^2}}{2p} \right]$$

Nous poserons : $2p = hn$ ou $x^2 = hny$.

Il viendra :

$$F = 2\pi \mu \delta h \left[1 - n l \frac{\sqrt{1+n^2} + n}{n} \right]$$

La condition du volume fournit :

$$\frac{4}{3} a^3 = \int_0^h y^2 dx = \frac{h^3}{5n^2}$$

donc

$$h = \sqrt[3]{\frac{20}{3}} n^{\frac{2}{3}} a.$$

$$\text{Et } F = 2\pi \sqrt{\frac{20}{3}} \mu a \delta n^{\frac{2}{3}} \left[1 - n l \frac{\sqrt{1+n^2} + 1}{n} \right]$$

En annulant la dérivée de F, on trouve :

$$y = 2 - 5nl \frac{\sqrt{1+n^2} + 1}{n} + \frac{3n}{\sqrt{1+n^2}} = 0$$

ou en posant :

$$\frac{\sqrt{1+n^2} + 1}{n} = u \text{ et } n = \frac{2u}{u^2 - 1}$$

$$y = (u^2 - 1)(u^2 + 3u + 1) - 5u(u^2 + 1)lu, \quad y' = \frac{u^4 - 1}{2} y$$

$$y' = 4(u^3 + u^2 - 2) - 5(3u^2 + 1)lu$$

$$y'' = \frac{12u^3 - 7u^2 - 5}{u} - 30ulu$$

$$y''' = \frac{24u^3 - 7u^2 + 5}{u^2} - 30(1 + lu)$$

Pour $u = 1$ on a :

$$y_1 = 0, \quad y_1' = 0, \quad y_1'' = 0, \quad y_1''' = -8$$

La fonction y'' décroît donc tout d'abord à partir de $u = 1$. La courbe (y) est donc tangente au point de l'axe des u pour lequel $u = 1$ et, en ce point, elle tourne sa convexité vers le haut (fig. 15).

Pour des valeurs de u suffisamment grandes, la dérivée y'' devient positive, car

$$y'' = u^2 \left[12 - \frac{7}{u} - \frac{5}{u^2} - 30 \frac{lu}{u} \right]$$

Si u tend vers l'infini, $\lim \frac{lu}{u} = \lim \frac{1}{u} = 0$

et $\lim y'' = \infty$

y'' passant du négatif au positif doit nécessairement s'annuler. Or, cette circonstance ne se présente qu'une fois. Pour le démontrer, étudions d'abord le mode de variation de la dérivée quatrième,

$$y^{iv} = \frac{2}{u^3} [12 u^3 - 15 u^2 - 5] = \frac{2}{u^3} z$$

où l'on pose :

$$\begin{array}{ll} z = 12 u^3 - 15 u^2 - 5 & \text{donc } z_0 = -5 \\ \text{On en tire, } z' = 6u(6u - 5) & z'_0 = 0 \\ z'' = 6(12u - 5) & z''_0 = -30 \end{array}$$

D'un autre côté, il est facile de s'assurer que l'équation $z = 0$ a une racine comprise entre 1,44 et 1,45 car

$$z_{1,44} = -0,2720, \quad z_{1,45} = +0,0337$$

$u = 1,45$ peut donc être considérée comme racine de l'équation susdite.

Il s'ensuit que la courbe z coupe normalement l'axe des y au point $z = -5$ et qu'elle tourne, en ce point, sa convexité vers le dessus ; qu'elle s'infléchit pour $u = \frac{5}{12}$ et $z_1 = -6,7362$; qu'elle présente un minimum pour $u = \frac{5}{6}$ et que ce minimum a pour valeur $z_{min} = -8,4722$.

A partir de l'inflexion z'' ne changeant plus de signe, la courbe z tourne sa convexité vers le bas. Or elle croît à partir du minimum et comme elle peut croître au-delà de toute limite, il s'ensuit qu'elle coupe l'axe des x en un point, et en un seul, correspondant à $u = 1,45$.

On a effectivement, si u tend vers $+\infty$ $z = +\infty$.

Cela établi, étudions la façon de varier de la fonction y''' , pour laquelle $y''' = -8$, quand u varie de 1 à $+\infty$. Quand u varie de $u = 1$ à $u = 1,45$, y''' décroît de -8 à un minimum. Au-delà y''' croît sans cesse. Donc la courbe (y''') coupe l'axe des x en un seul point, car, quand u tend vers l'infini, il en est de même de y''' . En effet,

$$y''' = u \left\{ 24 - \frac{7}{u} + \frac{5}{u^2} - 30 \left(\frac{1}{u} + \frac{lu}{u} \right) \right\}$$

Et, pour $u = \infty$,

$$\lim y''' = \lim u \cdot \left(24 - \frac{30}{u} \right) = 24 \lim u = \infty.$$

Cette analyse permet de se représenter très exactement la loi de variation de la dérivée y'' . Elle décroît tout d'abord à partir de l'origine (fig. 15), jusqu'au minimum négatif qui correspond à l'unique racine $y'' = 0$. Elle décroît à partir de cette valeur et coupe nécessairement l'axe des x en un seul point puisque

$$y'' = u^2 \left[12 - \frac{7}{u} - \frac{5}{u^2} - 30 \frac{Lu}{u} \right]$$

donne, pour $u = \infty$

$$\lim y'' = \lim u^2 \left(12 - \frac{30}{u} \right) = 12 \lim n^2 = + \infty$$

En conséquence la courbe (y') est absolument du même genre (fig. 15) et aussi la courbe (y).

Pour la première on a :

$$y' = u^3 \left[4 + \frac{4}{u} - \frac{2}{u^3} - 5 \left(3 + \frac{1}{u^2} \right) \frac{Lu}{u} \right]$$

$$\lim y' = \lim u^3 \left[4 - \frac{15}{u} \right] = 4 \lim u^3 = \infty$$

Pour la seconde, il vient :

$$y = u^4 \left[\left(1 - \frac{1}{u^2} \right) \left(1 + \frac{3}{u} + \frac{1}{u^2} \right) - 5 \left(1 + \frac{1}{u^2} \right) \frac{Lu}{u} \right]$$

donc

$$\lim y = \lim u^4 \left[1 - \frac{5}{u} \right] = \lim u^4 = + \infty$$

Nous trouverons donc la valeur maxima de la force F en recherchant l'unique racine de l'équation :

$$y = (u^2 - 1)(u^2 + 3u + 1) - 5u(u^2 + 1)Lu$$

On trouve :

$$y_6 = -81,816$$

$$y_7 = +2,675$$

$$y_{6,9} = -8,6733$$

$$y_{6,98} = +0,347$$

Et,

$$y'_{6,979} = -0,8476$$

On en déduit très approximativement pour la racine cherchée :

$$u = 6,9798$$

On en déduit, tout calcul fait :

$$F = 2,2659 \mu a \delta \quad (\text{K})$$

$$h = 0,8959 a, \quad n = 0,2924, \quad 2p = 0,2620 a. \quad H = 3,42 h.$$

24. — Remarque. — L'expression F s'annule pour $n = 0$ et

$n = \infty$, c'est-à-dire pour le cas de la droite matérielle et celui du plan matériel indéfini.

Nous avons :

$$F = 2\pi \sqrt[3]{\frac{20}{3}} \mu a \varepsilon n^{\frac{2}{3}} \left[1 - n l \frac{\sqrt{1+n^2+1}}{n} \right]$$

1°) Pour $n = 0$ on a :

$$\begin{aligned} n l \frac{\sqrt{1+n^2+1}}{n} &= n l (\sqrt{1+n^2+1}) - n ln = \\ &= n l 2 - \frac{ln}{1} = n l 2 + n = n (l 2 + 1) = 0 \end{aligned}$$

donc $F = 0$.

2°) Pour $n = \infty$ il vient :

$$F = 2\pi \sqrt[3]{\frac{20}{3}} \mu a \delta (2u)^{\frac{2}{3}} \left[\frac{u^2 - 1 - 2u Lu}{(u^2 - 1)^{\frac{5}{2}}} \right]$$

en posant $\frac{\sqrt{1+n^2+1}}{n} = u$ ou $n = \frac{2u}{u^2 - 1}$

Pour $n = \infty$ on prendra $u = 1$.

La fraction entre crochets donnera pour cette valeur :

$$\frac{3}{5} \frac{u - 1 - lu}{(u^2 - 1)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{5} \frac{(u - 1)(u^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{u}$$

c'est-à-dire zéro.

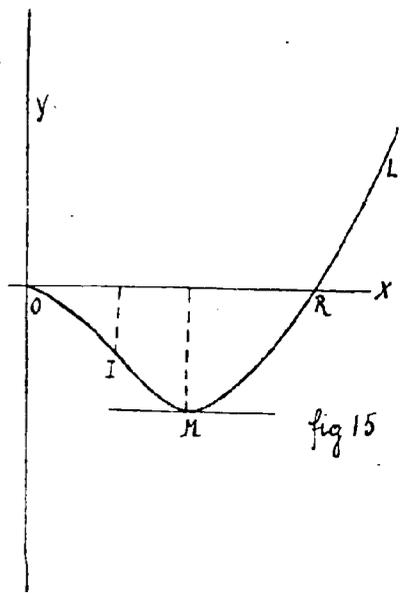
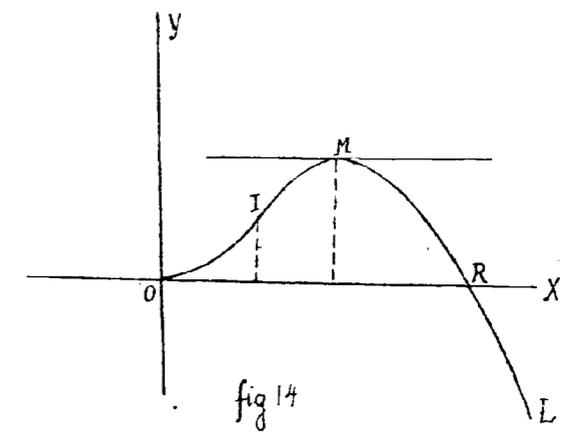
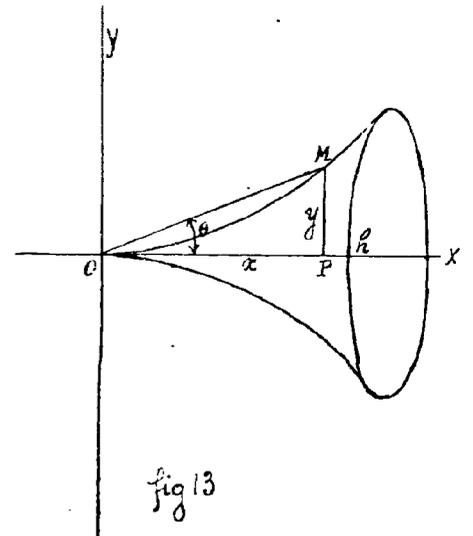
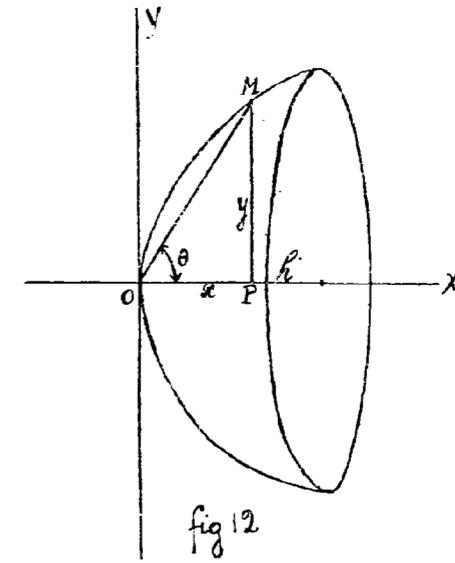
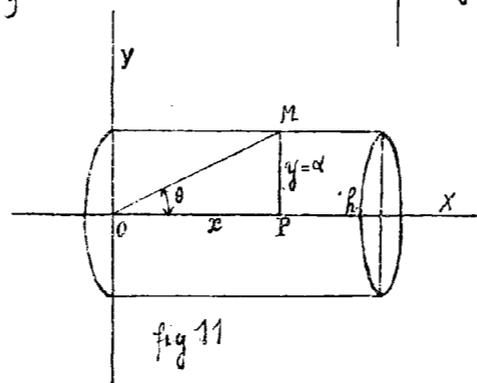
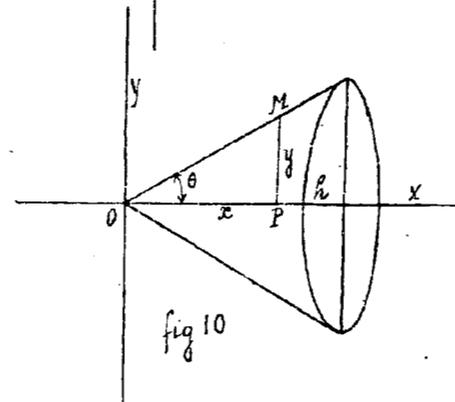
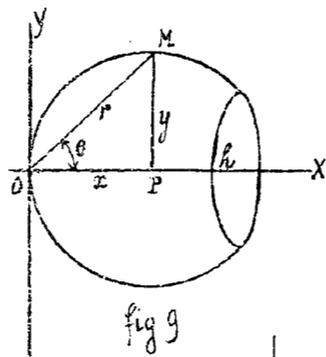
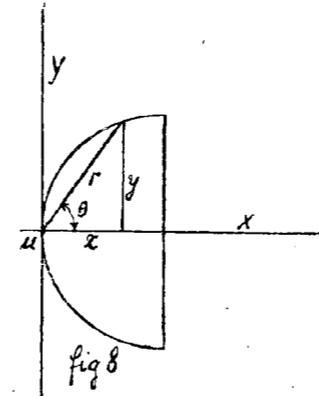
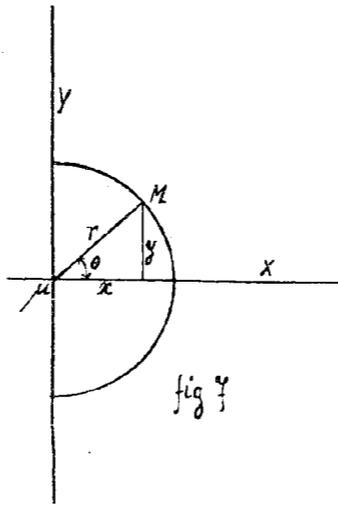
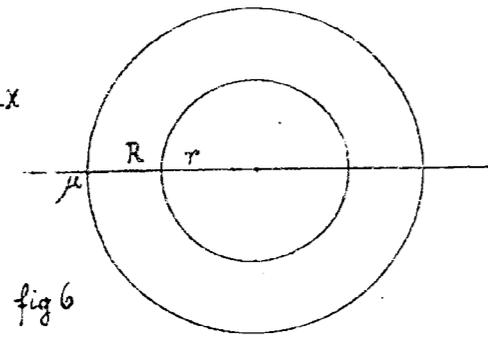
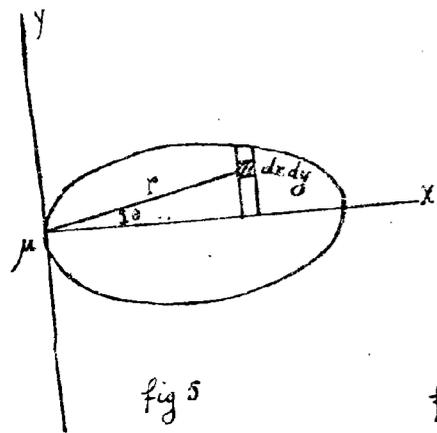
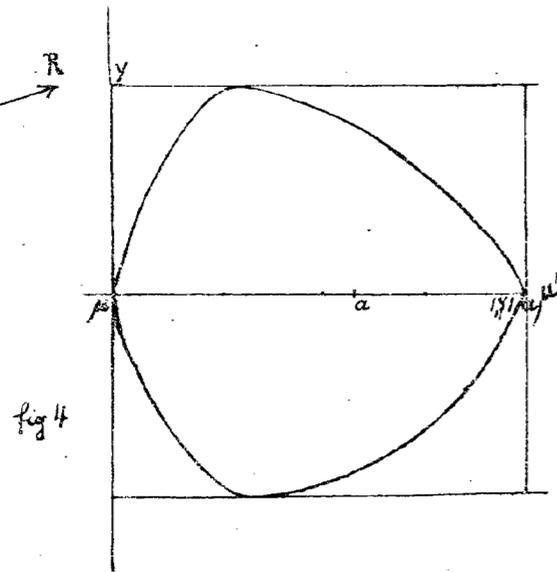
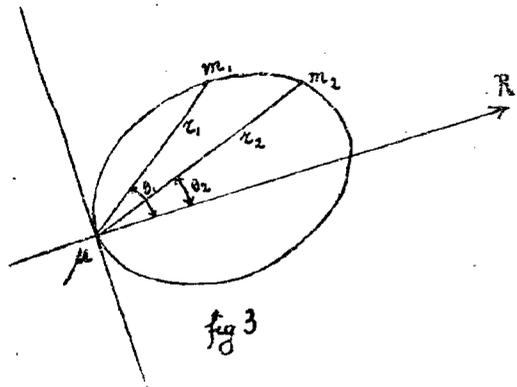
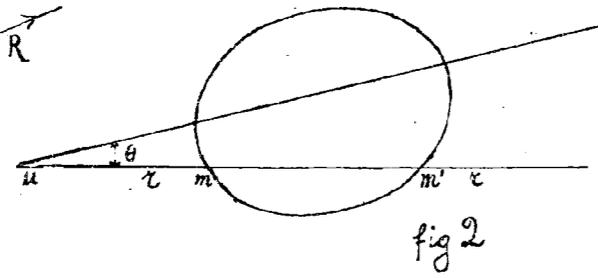
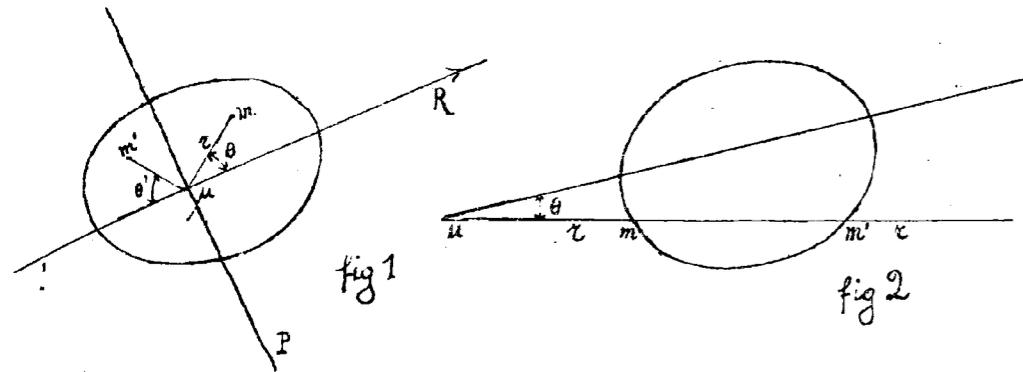
IV. - Récapitulation.

- 25. - Actions maxima comparées de différents corps de même masse.

- | | |
|---|-----------------------|
| 1. Droite matérielle indéfinie, sur son extrémité | 0,0000 |
| 2. Plan matériel indéfini, sur l'un de ses points | 0,0000 |
| 3. Segment parabolique, autour de la tangente | 2,2659 $\mu a \delta$ |
| 4. Cône sur son sommet | 3,4750 $\mu a \delta$ |
| 5. Hémisphère sur le centre de sa base | 3,9581 $\mu a \delta$ |
| 6. Segment parabolique autour de son axe | 4,0956 $\mu a \delta$ |
| 7. Hémisphère sur son sommet | 4,1845 $\mu a \delta$ |
| 8. Sphère sur l'un de ses points superficiels | 4,1888 $\mu a \delta$ |
| 9. Cylindre sur le centre de sa base | 4,2180 $\mu a \delta$ |
| 10. Segment sphérique sur son sommet | 4,2199 $\mu a \delta$ |
| 11. Solide de " plus grande action " | 4,2977 $\mu a \delta$ |

PHILIPPE BANNEUX,

Ingénieur Principal Honoraire des Mines.



THÉORIE DU PONT DE WHEATSTONE

PAR

Philippe BANNEUX,

Ingénieur principal honoraire au Corps des Mines.

Extrait de la *REVUE UNIVERSELLE DES MINES*,
tome XXXV, 1^{re} série, page 117, 55^e année, 1911.

Le pont de Wheatstone consiste en un quadrilatère formé de quatre conducteurs. Le courant extérieur d'alimentation amené en un sommet A est évacué par l'opposé B. On dit que le « Pont », ou « balance », est réglé quand les deux sommets intermédiaires C et D sont au même potentiel, de façon que si on les réunit électriquement, il ne se produira de courant ni dans un sens ni dans l'autre : une lampe insérée dans ce circuit en diagonale restera obscure ; une sonnerie, silencieuse ; un électrodynamomètre, au zéro.

I. — Balance de Wheatstone pour courant continu.

1. Soit i le courant principal constant se dérivant dans le quadrilatère en deux courants composants i_1 et i_2 tels que

$$i = i_1 + i_2$$

Les résistances des secteurs adjacents d'aménée du courant seront R_1 et R_2 ; les résistances des secteurs adjacents d'évacuation du courant seront R_3 et R_4 .

L'égalité des potentiels en C et D conduira aux deux relations :

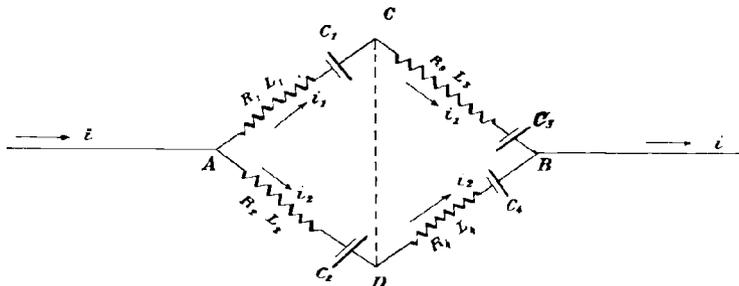
$$R_1 i_1 = R_2 i_2 \quad R_3 i_1 = R_4 i_2$$

d'où

$$\frac{i_1}{R_2} = \frac{i_2}{R_1} = \frac{i}{R_1 + R_2}, \quad \frac{i_1}{R_4} = \frac{i_2}{R_3} = \frac{i}{R_3 + R_4}$$

et la condition du réglage du pont :

$$R_1 R_4 = R_2 R_3$$



Dans le pont de Wheatstone, réglé pour courant continu, les produits des résistances des secteurs opposés sont égaux.

Dans le pont réglé, si les résistances de deux circuits adjacents sont égales, il en est de même des résistances des deux autres.

II. — Balance de Wheatstone pour courant alternatif.

2. Nous supposons les secteurs doués des résistances :

$$R_1, R_2, R_3, R_4;$$

des inductances :

$$L_1\omega, L_2\omega, L_3\omega, L_4\omega;$$

des capacitances :

$$\frac{1}{C_1\omega}, \frac{1}{C_2\omega}, \frac{1}{C_3\omega}, \frac{1}{C_4\omega}$$

et par conséquent des réactances :

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= L_1\omega - \frac{1}{C_1\omega} & \sigma_2 &= L_2\omega - \frac{1}{C_2\omega} \\ \sigma_3 &= L_3\omega - \frac{1}{C_3\omega} & \sigma_4 &= L_4\omega - \frac{1}{C_4\omega}\end{aligned}$$

Les impédances des quatre circuits seront donc :

$$\begin{aligned}s_1 &= \sqrt{R_1^2 + \left(L_1\omega - \frac{1}{C_1\omega}\right)^2} & s_2 &= \sqrt{R_2^2 + \left(L_2\omega - \frac{1}{C_2\omega}\right)^2} \\ s_3 &= \sqrt{R_3^2 + \left(L_3\omega - \frac{1}{C_3\omega}\right)^2} & s_4 &= \sqrt{R_4^2 + \left(L_4\omega - \frac{1}{C_4\omega}\right)^2}\end{aligned}$$

Les angles d'impédance ou décalages correspondants :

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \text{arc tg} \frac{L_1\omega - \frac{1}{C_1\omega}}{R_1} = \text{arc tg} \frac{\sigma_1}{R_1} \\ \varphi_2 &= \text{arc tg} \frac{L_2\omega - \frac{1}{C_2\omega}}{R_2} = \text{arc tg} \frac{\sigma_2}{R_2} \\ \varphi_3 &= \text{arc tg} \frac{L_3\omega - \frac{1}{C_3\omega}}{R_3} = \text{arc tg} \frac{\sigma_3}{R_3} \\ \varphi_4 &= \text{arc tg} \frac{L_4\omega - \frac{1}{C_4\omega}}{R_4} = \text{arc tg} \frac{\sigma_4}{R_4}\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\sin \varphi_1 &= \frac{\sigma_1}{s_1}, \quad \cos \varphi_1 = \frac{R_1}{s_1}; & \sin \varphi_2 &= \frac{\sigma_2}{s_2}, \quad \cos \varphi_2 = \frac{R_2}{s_2} \\ \sin \varphi_3 &= \frac{\sigma_3}{s_3}, \quad \cos \varphi_3 = \frac{R_3}{s_3}; & \sin \varphi_4 &= \frac{\sigma_4}{s_4}, \quad \cos \varphi_4 = \frac{R_4}{s_4}\end{aligned}$$

a) *Méthode de Steinmetz : Procédé des imaginaires.*

3. Les résistances imaginaires des quatre circuits du pont seront :

$$\begin{aligned} [R_1] &= R_1 + j \sigma_1, & [R_2] &= R_2 + j \sigma_2 \\ [R_3] &= R_3 + j \sigma_3, & [R_4] &= R_4 + j \sigma_4 \end{aligned}$$

En appliquant à ces résistances la loi démontrée pour le réglage en courant continu, on obtiendra :

$$[R_1] [R_4] = [R_2] [R_3]$$

c'est-à-dire

$$(R_1 + j \sigma_1) (R_4 + j \sigma_4) = (R_2 + j \sigma_2) (R_3 + j \sigma_3)$$

équation qui se dédouble en deux conditions :

$$\begin{aligned} R_1 R_4 - \sigma_1 \sigma_4 &= R_2 R_3 - \sigma_2 \sigma_3 \\ R_1 \sigma_4 + R_4 \sigma_1 &= R_2 \sigma_3 + R_3 \sigma_2 \end{aligned}$$

Ces deux conditions analytiques ne représentent rien à l'esprit qui soit facilement exprimable. Il est cependant possible de les traduire en relations tangibles.

1° Première condition du réglage :

En élevant les équations précédentes au carré et en les ajoutant membre à membre, il viendra :

$$R_1^2 (R_4^2 + \sigma_4^2) + \sigma_1^2 (R_4^2 + \sigma_4^2) = R_2^2 (R_3^2 + \sigma_3^2) + \sigma_2^2 (R_3^2 + \sigma_3^2)$$

c'est-à-dire

$$(R_1^2 + \sigma_1^2) (R_4^2 + \sigma_4^2) = (R_2^2 + \sigma_2^2) (R_3^2 + \sigma_3^2)$$

ou

$$s_1 s_4 = s_2 s_3$$

Dans le pont de Wheatstone réglé pour courant alternatif, les produits des impédances des circuits opposés sont égaux.

Si les impédances des deux circuits adjacents sont égales, il en est de même des impédances des deux autres.

Cette relation générale peut s'établir avec la même simplicité que l'équation correspondante dans le cas du courant continu.

Dans chaque section du pont, en effet, la tension est mesurée par l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés sont la chute ohmique (RI) et la tension de réactance (σI). Cette tension dans le premier segment aura pour valeur :

$$I_1 \sqrt{R_1^2 + \sigma_1^2} = s_1 I_1$$

et dans les autres :

$$s_2 I_2, \quad s_3 I_1, \quad s_4 I_2.$$

En vertu de l'égalité des différences de potentiel entre les extrémités des côtés adjacents qui amènent ou évacuent les courants, il viendra :

$$s_1 I_1 = s_2 I_2, \quad s_3 I_1 = s_4 I_2$$

d'où la relation conditionnelle :

$$s_1 s_4 = s_2 s_3$$

2^o Seconde condition du réglage :

En éliminant les impédances des deux relations fondamentales, il viendra :

$$\begin{aligned} R_1 R_4 (1 - \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_4) &= R_2 R_3 (1 - \operatorname{tg} \varphi_2 \operatorname{tg} \varphi_3) \\ R_1 R_4 (\operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{tg} \varphi_4) &= R_2 R_3 (\operatorname{tg} \varphi_2 + \operatorname{tg} \varphi_3) \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{tg} \varphi_4}{1 - \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_4} = \frac{\operatorname{tg} \varphi_2 + \operatorname{tg} \varphi_3}{1 - \operatorname{tg} \varphi_2 \operatorname{tg} \varphi_3}$$

ce qui revient à

$$\varphi_1 + \varphi_4 = \varphi_2 + \varphi_3.$$

Dans le pont de Wheatstone, réglé pour courant alternatif les sommes des angles d'impédance des circuits opposés sont égales.

On en déduit les conséquences suivantes :

1° Si les angles d'impédance de deux conducteurs adjacents sont égaux, il en sera de même pour les deux autres.

2° Si les angles d'impédance de deux conducteurs opposés sont égaux et de signes contraires, il en sera de même des deux autres.

3° Si trois des conducteurs sont dépourvus de réactance, il en sera de même du quatrième.

4° Dans le cas spécial où les circuits se réduiraient à de simples capacités, on aurait :

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 0, \quad L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = 0$$

$$\sigma_1 = -\frac{1}{C_1\omega}, \quad \sigma_2 = -\frac{1}{C_2\omega}, \quad \sigma_3 = -\frac{1}{C_3\omega}, \quad \sigma_4 = -\frac{1}{C_4\omega}.$$

Donc
$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = -\frac{\pi}{2}$$

On vérifie l'égalité :

$$\varphi_1 + \varphi_4 = \varphi_2 + \varphi_3 = -\pi.$$

Quant à la première condition, elle se réduit à

$$\sigma_1\sigma_4 = \sigma_2\sigma_3, \quad \text{d'où} \quad C_1C_4 = C_2C_3.$$

Les produits des capacités des circuits opposés sont égaux.

Si les capacités de deux segments adjacents sont égales, il en sera de même des deux autres.

b) Méthode analytique.

4. Si l'on veut traiter la question à fond et en dégager toutes les inconnues, on ne saurait se dispenser de recourir à l'analyse. La solution à laquelle on est conduit n'est pas si « difficile » qu'on l'a prétendu et elle est bien supérieure à la précédente.

Nous représenterons le courant d'alimentation et les deux courants dérivés dans le pont par les expressions :

$$i = I \sin \omega t, \quad i_1 = I_1 \sin (\omega t + \alpha_1), \quad i_2 = I_2 \sin (\omega t + \alpha_2).$$

Calculons d'après les conditions qui s'imposent I_1 , I_2 , α_1 , α_2 .

Nous aurons tout d'abord l'équation :

$$i = I \sin \omega t - \sin \omega t [I_1 \cos \alpha_1 + I_2 \cos \alpha_2] + \\ + \cos \omega t [I_1 \sin \alpha_1 + I_2 \sin \alpha_2]$$

de sorte que

$$I_1 \cos \alpha_1 + I_2 \cos \alpha_2 = I, \quad I_1 \sin \alpha_1 + I_2 \sin \alpha_2 = 0.$$

L'égalité des tensions dans les deux premières branches du pont donne :

$$e_1 = e_2 = R_1 i_1 + \frac{\sigma_1}{\omega} \frac{di_1}{dt} = R_2 i_2 + \frac{\sigma_2}{\omega} \frac{di_2}{dt}$$

Mais

$$R_1 i_1 + \frac{\sigma_1}{\omega} \frac{di_1}{dt} = R_1 I_1 [\sin(\omega t + \alpha_1) + \frac{\sigma_1}{R_1} \cos(\omega t + \alpha_1)] = \\ \frac{R_1 I_1}{\cos \varphi_1} \sin(\omega t + \alpha_1 + \varphi_1)$$

donc
$$e_1 = s_1 I_1 \sin(\omega t + \alpha_1 + \varphi_1)$$

On aurait de même

$$e_2 = s_2 I_2 \sin(\omega t + \alpha_2 + \varphi_2)$$

En conséquence

$$E_1 = s_1 I_1 = s_2 I_2, \quad \alpha_1 + \varphi_1 = \alpha_2 + \varphi_2.$$

Les équations des intensités donneront :

$$s_2 \cos \alpha_1 + s_1 \cos \alpha_2 = \frac{I}{I_1} s_2, \quad s_2 \sin \alpha_1 + s_1 \sin \alpha_2 = 0.$$

Elevant au carré et ajoutant membre à membre, il viendra :

$$s_1^2 + s_2^2 + 2 s_1 s_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{I^2}{I_1^2} s_2^2$$

Mais

$$\cos(\alpha_1 - \alpha_2) = \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{R_1 R_2 + \sigma_1 \sigma_2}{s_1 s_2}$$

Par suite

$$\frac{I^2}{I_1^2} s_2^2 = s_1^2 + s_2^2 + 2R_1 R_2 + 2\sigma_1 \sigma_2 = (R_1 + R_2)^2 + (\sigma_1 + \sigma_2)^2 = S_1^2,$$

S_1 étant l'impédance totale de l'ensemble des deux premières sections du quadrilatère de Wheatstone.

On en déduit :

$$I_1 = \frac{s_2}{S_1} I, \quad I_2 = \frac{s_1}{S_1} I$$

et
$$E_1 = I_1 s_1 = I_2 s_2 = \frac{s_1 s_2}{S_1} I.$$

Les intensités des courants dérivés sont en raison inverse des impédances des deux premiers secteurs.

Nous calculerons comme suit les décalages de ces courants dérivés.

Nous savons que

$$s_2 \cos \alpha_1 + s_1 \cos \alpha_2 = S_1, \quad s_2 \sin \alpha_1 + s_1 \sin \alpha_2 = 0.$$

Mais,

$$\sin \alpha_2 = \sin(\alpha_1 + \varphi_1 - \varphi_2) = \sin \alpha_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos \alpha_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2),$$

donc

$$\sin \alpha_1 (s_2 + s_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)) + s_1 \cos \alpha_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$$

d'où

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{s_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{s_2 + s_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

On aurait de même :

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{s_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{s_1 + s_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

Or,

$$\sin(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{R_1 \sigma_2 - R_2 \sigma_1}{s_1 s_2}, \quad \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{R_1 R_2 - \sigma_1 \sigma_2}{s_1 s_2}$$

En conséquence :

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{R_1 \sigma_2 - R_2 \sigma_1}{s^2_2 + R_1 R_2 + \sigma_1 \sigma_2} = \frac{R_1 \sigma_2 - R_2 \sigma_1}{R_2 (R_1 + R_2) + \sigma_2 (\sigma_1 + \sigma_2)}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{R_2 \sigma_1 - R_1 \sigma_2}{s^2_1 + R_1 R_2 + \sigma_1 \sigma_2} = \frac{R_2 \sigma_1 - R_1 \sigma_2}{R_1 (R_1 + R_2) + \sigma_1 (\sigma_1 + \sigma_2)}$$

On connaît donc d'une façon complète les courants dérivés dans le pont i_1 et i_2 . Les conditions du réglage du pont se dégageront du fait que ces courants i_1 et i_2 circulent dans les segments extrêmes.

Les tensions dans les deux derniers secteurs du pont étant égales à chaque instant, on aura :

$$e_3 = R_3 i_1 + \frac{\sigma_3}{\omega} \frac{di_1}{dt} = R_4 i_2 + \frac{\sigma_4}{\omega} \frac{di_2}{dt}$$

de sorte que :

$$e_3 = s_3 I_1 \sin(\omega t + \alpha_1 + \varphi_3) = s_4 I_2 \sin(\omega t + \alpha_2 + \varphi_4)$$

$$\text{Donc} \quad I_1 s_3 = I_2 s_4, \quad \alpha_1 + \varphi_3 = \alpha_2 + \varphi_4$$

D'ailleurs, on établirait comme ci-devant :

$$I_1 = \frac{s_4}{S_2} I, \quad I_2 = \frac{s_3}{S_2} I,$$

$$\text{où} \quad S_2 = \sqrt{(R_2 + R_1)^2 + (\sigma_2 + \sigma_4)^2}$$

impédance de l'ensemble des deux derniers secteurs du pont.

Comparons les relations obtenues :

$$\begin{aligned} I_1 s_1 &= I_2 s_2 & I_1 s_3 &= I_2 s_4 \\ \alpha_1 + \varphi_1 &= \alpha_2 + \varphi_2 & \alpha_1 + \varphi_3 &= \alpha_2 + \varphi_4 \end{aligned}$$

On en déduit les conditions :

$$s_1 s_4 = s_2 s_3 \quad \varphi_1 + \varphi_4 = \varphi_2 + \varphi_3$$

qui peuvent reproduire les premières, car

$$\sin(\varphi_1 + \varphi_4) = \sin(\varphi_2 + \varphi_3), \quad \cos(\varphi_1 + \varphi_4) = \cos(\varphi_2 + \varphi_3)$$

d'où

$$\begin{aligned} R_1 \sigma_1 + R_1 \sigma_4 &= R_2 \sigma_3 + R_3 \sigma_2 \\ R_1 R_1 - \sigma_1 \sigma_4 &= R_2 R_3 - \sigma_2 \sigma_3 \end{aligned}$$

5. *Expressions des tensions.* — Nous aurons à distinguer trois tensions : la tension e_1 , qui s'exerce entre les sommets A et C ou A et D ; la tension e_3 qui existe entre les sommets C et B ou D et B ; la tension $e = e_1 + e_3$ que l'on constate entre les sommets A et B.

Nous avons trouvé :

$$\begin{aligned} e_1 &= s_1 I_1 \sin(\omega t + \alpha_1 + \varphi_1), \quad e_3 = s_3 I_1 \sin(\omega t + \alpha_1 + \varphi_3) \\ e &= e_1 + e_3 = \sin(\omega t + \alpha_1) [s_1 I_1 \cos \varphi_1 + s_3 I_1 \cos \varphi_3] + \\ &\quad + \cos(\omega t + \alpha_1) [s_1 I_1 \sin \varphi_1 + s_3 I_1 \sin \varphi_3], \end{aligned}$$

d'où
$$e = E \sin(\omega t + \alpha_1 + \theta_1)$$

sachant que :

$$E = I_1 \sqrt{s_1^2 + s_3^2 + 2s_1 s_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_3)} = I_1 \sqrt{(R_1 + R_3)^2 + (\sigma_1 + \sigma_3)^2}$$

ou
$$E = s_2 I_2 \sqrt{\frac{(R_1 + R_3)^2 + (\sigma_1 + \sigma_3)^2}{(R_1 + R_2)^2 + (\sigma_1 + \sigma_2)^2}}$$

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{s_1 \sin \varphi_1 + s_3 \sin \varphi_3}{s_1 \cos \varphi_1 + s_3 \cos \varphi_3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{R_1 + R_3}$$

On arriverait à cette même valeur de la tension e en ajoutant les tensions qui s'exercent suivant les côtés (2) et (4). On obtiendrait une même amplitude :

$$E = I_2 \sqrt{s_2^2 + s_4^2 + 2s_2 s_4 \cos(\varphi_2 - \varphi_4)}$$

de sorte que l'on écrira :

$$e = E \sin(\omega t + \alpha_2 + \theta_2)$$

où
$$\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{s_2 \sin \varphi_2 + s_4 \sin \varphi_4}{s_2 \cos \varphi_2 + s_4 \cos \varphi_4} = \frac{\sigma_2 + \sigma_4}{R_2 + R_4}$$

On peut établir directement ces résultats en écrivant pour les deux couples de circuits successifs :

$$e = (R_1 + R_3) i_1 + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{\omega} \frac{di_1}{dt} = (R_2 + R_4) i_2 + \frac{\sigma_2 + \sigma_4}{\omega} \frac{di_2}{dt}$$

de sorte que :

$$e = E_1 \sin(\omega t + \alpha_1 + \theta_1) = E_2 \sin(\omega t + \alpha_2 + \theta_2)$$

où

$$E_1 = E_2 = I_1 \sqrt{(R_1 + R_3)^2 + (\sigma_1 + \sigma_3)^2} = I_2 \sqrt{(R_2 + R_4)^2 + (\sigma_2 + \sigma_4)^2}$$

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{R_1 + R_3}, \quad \operatorname{tg} \theta_2 = \frac{\sigma_2 + \sigma_4}{R_2 + R_4}$$

Donc $\alpha_1 + \theta_1 = \alpha_2 + \theta_2$ ou $\theta_1 - \theta_2 = \alpha_2 - \alpha_1$

$$\text{Or,} \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \alpha_2 - \alpha_1 = \varphi_3 - \varphi_4$$

En conséquence :

$$\theta_1 - \theta_2 = \varphi_1 - \varphi_2 - \alpha_2 - \alpha_1 = \varphi_3 - \varphi_4$$

Ces conditions, bien entendu, sont comprises dans les précédentes. En effet, on aura :

$$\operatorname{tg}(\theta_1 + \varphi_2) = \frac{\sigma_1 R_2 + \sigma_2 R_1 + R_2 \sigma_3 + R_3 \sigma_2}{R_1(R_1 + R_3) - \sigma_2(\sigma_1 + \sigma_3)} = \frac{\sigma_1 R_2 + \sigma_2 R_1 + R_1 \sigma_4 + R_4 \sigma_1}{R_1 R_2 + R_1 R_4 - \sigma_1 \sigma_4 - \sigma_2 \sigma_3}$$

en vertu des deux conditions connues. De sorte que

$$\operatorname{tg}(\theta_1 + \varphi_2) = \frac{\sigma_1(R_2 + R_1) + R_1(\sigma_2 + \sigma_1)}{R_1(R_1 + R_3) - \sigma_2(\sigma_1 + \sigma_3)} = \frac{\frac{\sigma_1}{R_1} + \frac{\sigma_2 + \sigma_1}{R_2 + R_1}}{1 - \frac{\sigma_1}{R_1} \cdot \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{R_1 + R_3}} = \frac{\operatorname{tg} \theta_2 + \operatorname{tg} \varphi_1}{1 - \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \theta_2}$$

d'où

$$\operatorname{tg}(\theta_1 + \varphi_2) = \operatorname{tg}(\theta_2 + \varphi_1)$$

et

$$\theta_1 + \varphi_2 = \theta_2 + \varphi_1$$

6. *Application.* — Nous supposons :

$$R_1 = 4^{\circ}, \quad R_2 = 3^{\circ}, \quad R_3 = 2^{\circ}, \quad R_4 = 1^{\circ}$$

Les équations de condition du réglage du pont :

$$\begin{aligned}\sigma_1 \sigma_4 - \sigma_2 \sigma_3 &= -2 \\ 4 \sigma_4 + \sigma_1 &= 3\sigma_3 + 2\sigma_2\end{aligned}$$

donneront pour $\sigma_1 = 3''$, $\sigma_3 = 1''$:

$$\sigma_4 = -2'', \quad \sigma_2 = -4''$$

Par suite :

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \varphi_1 &= \frac{\sigma_1}{R_1} = \frac{3}{4}, & \varphi_1 &= 36^\circ 52' \\ \operatorname{tg} \varphi_2 &= \frac{\sigma_2}{R_2} = -\frac{4}{3}, & \varphi_2 &= -\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right) = -53^\circ 8' \\ \operatorname{tg} \varphi_3 &= \frac{\sigma_3}{R_3} = \frac{1}{2}, & \varphi_3 &= 26^\circ 34' \\ \operatorname{tg} \varphi_4 &= \frac{\sigma_4}{R_4} = -2, & \varphi_4 &= -\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_3\right) = -63^\circ 26' \\ \operatorname{tg} \theta_1 &= \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{R_1 + R_3} = \frac{2}{3}, & \theta_1 &= 33^\circ 41' \\ \operatorname{tg} \theta_2 &= \frac{\sigma_2 + \sigma_4}{R_2 + R_4} = -\frac{3}{2}, & \theta_2 &= -\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right) = -56^\circ 19' \\ \operatorname{tg} \alpha_1 &= -\frac{16+9}{21+4} = -1, & \alpha_1 &= -\frac{\pi}{4} \\ \operatorname{tg} \alpha_2 &= \frac{16+9}{28-3} = 1, & \alpha_2 &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

On vérifie :

$$\theta_1 - \theta_2 = \varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_3 - \varphi_4 = \alpha_2 - \alpha_1 = \frac{\pi}{2}.$$

On obtiendra encore :

$$\begin{aligned}s_1 &= \sqrt{R_1^2 + \sigma_1^2} = \sqrt{16+9} = 5'' \\ s_2 &= \sqrt{R_2^2 + \sigma_2^2} = \sqrt{9+16} = 5 \\ s_3 &= \sqrt{R_3^2 + \sigma_3^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \\ s_4 &= \sqrt{R_4^2 + \sigma_4^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \\ S_1 &= \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (\sigma_1 + \sigma_2)^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \\ S_2 &= \sqrt{(R_3 + R_4)^2 + (\sigma_3 + \sigma_4)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}\end{aligned}$$

Si le courant d'alimentation est

$$i = 6 \sin \omega t,$$

on aura : $I = 6^a$

et

$$I_1 = \frac{s_2}{S_1} I = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}, \quad I_2 = \frac{s_1}{S_1} I = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}.$$

Donc

$$i_1 = 3\sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right), \quad i_2 = 3\sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

On vérifie :

$$i_1 + i_2 = 3\sqrt{2} \cdot 2 \sin \omega t \cos \frac{\pi}{4} = 6 \sin \omega t = i.$$

L'amplitude de tension entre les deux bornes du pont sera :

$$E = I_1 \sqrt{(R_1 + R_3)^2 + (\sigma_1 + \sigma_3)^2} = 3\sqrt{2} \times \sqrt{36 + 16} = 6\sqrt{26} = 30^a 59$$

done

$$e = E \sin(\omega t + \alpha_1 + \theta_1) = 6\sqrt{26} \sin(\omega t - 11^\circ 19').$$

Les amplitudes des tensions partielles seront :

$$E_1 = E_2 = s_1 I_1 = 5 \times 3\sqrt{2} = 15\sqrt{2}$$

$$E_3 = E_4 = s_3 I_3 = \sqrt{5} \times 3\sqrt{2} = 3\sqrt{10}$$

En conséquence :

$$e_1 = E_1 \sin(\omega t + \alpha_1 + \varphi_1) = 15\sqrt{2} \sin(\omega t - 8^\circ 8')$$

$$e_3 = E_3 \sin(\omega t + \alpha_1 + \varphi_3) = 3\sqrt{10} \sin(\omega t - 18^\circ 26')$$

Si l'on ajoute membre à membre, il viendra :

$$e_1 + e_3 = 3\sqrt{2} \left\{ \begin{array}{l} \sin \omega t (5 \cos 8^\circ 8' + \sqrt{5} \cos 18^\circ 26') - \\ - \cos \omega t (5 \sin 8^\circ 8' + \sqrt{5} \sin 18^\circ 26') \end{array} \right\}$$

et

$$e_1 + e_3 = 3\sqrt{2} \sqrt{52} \sin(\omega t - 11^\circ 19') = 6\sqrt{26} \sin(\omega t - 11^\circ 19') = e,$$

comme on devait s'y attendre.

**Hypothèse d'un réglage du pont pour courant continu
et courant alternatif.**

8. Des trois conditions entre les éléments du pont :

$$\begin{aligned} R_1 R_4 &= R_2 R_3 \\ R_1 \sigma_4 + R_4 \sigma_1 &= R_2 \sigma_3 + R_3 \sigma_2 \\ R_1 R_4 - R_2 R_3 - \sigma_1 \sigma_4 - \sigma_2 \sigma_3 & \end{aligned}$$

on déduit : $\sigma_1 \sigma_4 - \sigma_2 \sigma_3$

et, par conséquent,

$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4}, \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{\sigma_2}{\sigma_4}$$

On en conclut :

$$\frac{\sigma_1 R_4}{\sigma_3 R_2} = \frac{\sigma_2 R_3}{\sigma_4 R_1} = \frac{\sigma_1 R_4 - \sigma_2 R_3}{\sigma_3 R_2 - \sigma_4 R_1} = 1.$$

Les conditions premières se simplifient et apparaissent sous la forme :

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{R_2}{R_4} = \frac{\sigma_2}{\sigma_4} = \frac{R_1}{R_3}.$$

Ces relations conduisent aux suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_1}{R_1} = \frac{\sigma_3}{R_3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{R_1 + R_3} \quad \text{ou} \quad \varphi_1 = \varphi_3 = \theta_1 \\ \frac{\sigma_2}{R_2} = \frac{\sigma_4}{R_4} = \frac{\sigma_2 + \sigma_4}{R_2 + R_4} \quad \text{ou} \quad \varphi_2 = \varphi_4 = \theta_2 \end{aligned}$$

Quand le pont est réglé pour courant continu et courant alternatif, il y a égalité :

1° Entre les quatre rapports des résistances et des réactances opposées ;

2° Entre les angles d'impédance des deux couples de circuits conjugués ou successifs, ainsi que de leur ensemble.

9. En général, les conditions de réglage correspondant à une pulsation ω déterminée, ne conviendront pas à toutes les fréquences.

Pour qu'il en soit ainsi, il faudra que les rapports des réactances :

$$\frac{L_1 \omega - \frac{1}{C_1 \omega}}{L_3 \omega - \frac{1}{C_3 \omega}} \quad \text{et} \quad \frac{L_2 \omega - \frac{1}{C_2 \omega}}{L_4 \omega - \frac{1}{C_4 \omega}}$$

soient indépendants de la pulsation. Ce qui exige que

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{L_1}{L_3} = \frac{C_3}{C_1}, \quad \frac{\sigma_2}{\sigma_4} = \frac{L_2}{L_4} = \frac{C_4}{C_2}$$

et, par conséquent, que l'on ait :

$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4} = \frac{L_1}{L_3} = \frac{L_2}{L_4} = \frac{C_3}{C_1} = \frac{C_4}{C_2}.$$

Il en est ainsi, en particulier, quand les secteurs du pont sont doués de simple résistance, ou de résistance et de capacitance, ou de résistance et d'inductance, ou enfin quand il y a résonance dans les quatre secteurs.

10. *Application.* — Nous admettrons :

$$R_1 = 1, \quad R_2 = 3, \quad R_3 = 2, \quad R_4 = 6$$

de sorte que

$$R_1 R_4 = R_2 R_3 = 6.$$

Nous aurons :

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\sigma_1}{R_1} = \frac{\sigma_3}{R_3} = \sigma_1 = \frac{\sigma_3}{2}, \quad \text{d'où} \quad \sigma_3 = 2 \sigma_1$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\sigma_2}{R_2} = \frac{\sigma_4}{R_4} = \frac{\sigma_2}{3} = \frac{\sigma_4}{6}, \quad \text{d'où} \quad \sigma_4 = 2 \sigma_2$$

Si donc $\sigma_1 = 3, \quad \sigma_2 = 2$
 on aura $\sigma_3 = 6, \quad \sigma_4 = 4$
 et $\operatorname{tg} \varphi_1 = 3, \quad \varphi_1 = \varphi_3 = \theta_1 = 71^\circ 33'$
 $\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{2}{3}, \quad \varphi_2 = \varphi_4 = \theta_2 = 33^\circ 41'$
 $\operatorname{tg} \alpha_1 = -\frac{7}{22} = -0,3182, \quad \alpha_1 = -17^\circ 39'$
 $\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{7}{19} = 0,3684, \quad \alpha_2 = 20^\circ 13'$

On vérifie :

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \theta_1 - \theta_2 = 37^\circ 52'$$

$$s_1 = \sqrt{R_1^2 + \sigma_1^2} = \sqrt{10} = 3,1623$$

$$s_2 = \sqrt{R_2^2 + \sigma_2^2} = \sqrt{13} = 3,6056$$

$$s_3 = \sqrt{R_3^2 + \sigma_3^2} = 2\sqrt{10} = 2s_1$$

$$s_4 = \sqrt{R_4^2 + \sigma_4^2} = 2\sqrt{13} = 2s_2$$

$$S = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (\sigma_1 + \sigma_2)^2} = \sqrt{41} = 6,4031$$

et pour $i = 6 \sin \omega t$

$$I_1 = \frac{s_2}{s_1} I = 3,3755, \quad I_2 = \frac{s_1}{s_2} I = 2,9583$$

$$i_1 = 3,3755 \sin(\omega t - 17^\circ 39')$$

$$i_2 = 2,9583 \sin(\omega t + 20^\circ 13')$$

On vérifie :

$$i_1 + i_2 = \sin \omega t (3,3755 \cos 17^\circ 39' + 2,9583 \cos 20^\circ 13') +$$

$$+ \cos \omega t (3,3755 \sin 17^\circ 39' - 2,9583 \sin 20^\circ 13'),$$

c'est-à-dire que

$$i_1 + i_2 = 6 \sin \omega t = i.$$

11. *Des tensions.* — On obtient :

$$e_1 = e_2 = s_1 I_1 \sin(\omega t + \alpha_1 + \varphi_1) = 10,67 \sin(\omega t + 53^\circ 54')$$

$$e_3 = e_4 = s_3 I_1 \sin(\omega t + \alpha_2 + \varphi_2) = 21,35 \sin(\omega t + 53^\circ 54')$$

Donc

$$e = e_1 + e_3 = 32,02 \sin(\omega t + 53^\circ 54').$$

Et, en effet,

$$E = I_1 \sqrt{(R_1 + R_3)^2 + (\sigma_1 + \sigma_3)^2} = 10,1265 \times 3,1623 = 32,02.$$

**Cas des résistances ohmiques négligeables
dans les quatre secteurs du pont.**

12. En valeur absolue, les angles d'impédance seront égaux à $\frac{\pi}{2}$. Chaque angle aura le signe de la réactance qui lui correspond. En l'absence de capacitance dans un circuit, cet angle sera positif. En l'absence d'inductance, il sera négatif. En général, il sera positif ou négatif suivant que l'inductance sera supérieure ou inférieure à la capacitance.

Les conditions du réglage seront :

$$\varphi_1 + \varphi_4 = \varphi_2 + \varphi_3, \quad \sigma_1 \sigma_4 = \sigma_2 \sigma_3$$

Admettons qu'il soit inséré dans les secteurs (1) et (2) des bobines de réactions (L_1) et (L_2) et dans les deux autres des condensateurs (C_3) et (C_4).

Nous obtiendrons :

$$\begin{aligned} \varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_3 = \varphi_4 = -\frac{\pi}{2} \\ \sigma_1 = L_1 \omega, \quad \sigma_2 = L_2 \omega, \quad \sigma_3 = \frac{1}{C_3 \omega}, \quad \sigma_4 = \frac{1}{C_4 \omega} \end{aligned}$$

De sorte que :

$$L_1 C_3 = L_2 C_4$$

Pour des résistances ohmiques égales à R dans les quatre côtés du pont, on aurait :

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_1 &= -\omega R \frac{L_1 - L_2}{2R^2 + L_1(L_1 + L_2)\omega^2} \\ \operatorname{tg} \alpha_2 &= \omega R \frac{L_1 - L_2}{2R^2 + L_1(L_1 + L_2)\omega^2} \end{aligned}$$

L'un des angles est négatif, l'autre positif. Quand R tend vers zéro, l'un et l'autre tendent vers zéro également, de sorte que :

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

$$\text{et} \quad i_1 = I_1 \sin \omega t, \quad i_2 = I_2 \sin \omega t$$

$$I_1 = \frac{S_2}{S_1} I = \frac{L_2}{L_1 + L_2} I, \quad I_2 = \frac{S_1}{S_1} I = \frac{L_1}{L_1 + L_2} I$$

$$\text{Donc} \quad I = I_1 + I_2, \quad i = i_1 + i_2$$

$$i_1 = \frac{L_2}{L_1 + L_2} I \sin \omega t, \quad i_2 = \frac{L_1}{L_1 + L_2} I \sin \omega t$$

Quant aux tensions, elles s'exprimeront comme suit :

$$e_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} = \frac{L_1 L_2 \omega}{L_1 + L_2} I \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$e_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} = \frac{L_1 L_2 \omega}{L_1 + L_2} I \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$e_3 = -\frac{1}{C_3 \omega^2} \frac{di_1}{dt} = -\frac{I}{C_3 \omega} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{L_2}{L_1 + L_2} \frac{I}{C_3 \omega} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$e_4 = -\frac{1}{C_4 \omega^2} \frac{di_2}{dt} = -\frac{I}{C_4 \omega} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{L_1 + L_2}{L_1} \frac{I}{C_4 \omega} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$e = e_1 + e_3 = \frac{L_2}{L_1 + L_2} I \left(L_1 \omega - \frac{1}{C_3 \omega} \right) \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

13. *Application.* — Nous supposons :

$$L_1 = 0 \text{ h. } 01, \quad L_2 = 0 \text{ h. } 002, \quad C_3 = 20 \text{ m. f.} = 20 \times 10^9 f$$

de sorte que

$$C_4 = \frac{L_1}{L_2} C_3 = 20 \times \frac{10}{2} = 100 \text{ m. f.}$$

Pour $i = 6 \sin \omega t$ où $I = 6$, on aura :

$$I_1 = \frac{2}{12} I = 1^a, \quad I_2 = \frac{10}{12} \times 6 = 5^a$$

$$i_1 = \sin \omega t, \quad i_2 = 5 \sin \omega t$$

$$E_1 = \frac{1 \times 0,002}{1,2} \times 314 \times 6 = 3^v 14$$

$$E_3 = \frac{10^b}{20 \times 314} = 159^v 23$$

$$e_1 = 3^v 14 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right), \quad e_3 = 159^v 23 \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$e = -156,09 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = 156^v 09 \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

Tilleur, 21 janvier 1911.

THÉORIE
DES
Courants Polyphasés

PAR

PHILIPPE BANNEUX

Ingénieur principal honoraire au corps des Mines.

Extrait du *Bulletin mensuel de la Société Belge d'Électriciens*

BRUXELLES
ÉTABLISSEMENTS ÉMILE BRUYLANT

Société anonyme d'éditions juridiques et scientifiques

67, RUE DE LA RÉGENCE, 67

—
1917

Théorie des Courants polyphasés

PAR

PHILIPPE BANNEUX

Ingenieur principal honoraire au corps des Mines.

PRÉFACE

Au nombre des problèmes à résoudre dans l'utilisation des courants polyphasés, se classe en première ligne celui du transport de l'énergie. On le résout pour le courant continu, pour le courant biphasé et pour le système triphasé souvent en négligeant l'inductance du réseau et en admettant généralement l'égalité des charges des sections réceptrices.

M. Rodet, dans son étude complémentaire des courants polyphasés, l'a traité dans le cas spécial du système triphasé alimentant un réseau d'éclairage, sans inductance par conséquent, mais à récepteurs inégalement chargés.

Analytiquement, on se heurte à des difficultés très grandes, d'éliminations qui, dans cette hypothèse particulière, se réduisent beaucoup.

Il est possible de traiter le problème dans toute la généralité du système n — phasé et par l'analyse et par la méthode graphique qui n'apparaît nulle part avec plus d'avantages.

Nous nous en tiendrons, ici, au procédé analytique pour l'égalité répartition des charges réceptrices et l'absence d'inductance du réseau et de la ligne.

SOMMAIRE

La théorie des courants polyphasés que publie le *Bulletin de la Société belge des Electriciens*, est la généralisation des études bien connues relatives aux courants biphasé et triphasé.

Elle résulte de l'application d'une série trigonométrique qui permet de sommer les sinus d'arcs en progression arithmétique entre deux limites « quelconques ».

Elle conduit à l'expression d'un grand nombre de séries dont quelques-unes ont déjà été utilisées.

Au point de vue électrique signalons :

1° La possibilité de déterminer rigoureusement la tension d'une bobine d'ouverture angulaire donnée ou de trouver la différence des potentiels existant entre deux points fixés arbitrairement sur l'anneau-Gramme et qui comme cas particulier reproduit nécessairement la formule ordinaire qui correspond à une bobine ou enroulement d'une demi-circonférence;

2° L'établissement de tous les éléments sinusoïdaux engagés dans un ensemble de bobines génératrices ou réceptrices, associées soit en polygone soit en étoile;

3° Le calcul de toutes les variables que comporte un transport de force dans toute sa généralité;

4° Le poids de cuivre notamment qui se trouve être, pour chaque système, proportionnel au carré du sinus de la demi-variation de phase;

5° Le rendement de toute transmission qui s'exprime comme dans le cas du courant continu, par le rapport des tensions réceptrices et génératrices que l'on considère les tensions simples ou les tensions composées.

INTRODUCTION

Une série utile.

1. On connaît les relations définies par ce théorème :

« La somme des sinus ou des cosinus de N arcs en progression arithmétique dont la raison est une fraction $2\pi/N$ de la circonférence entière est nulle ».

Ce qui signifie que

$$\sum_0^{N-1} \sin (x+n \beta)=0 \quad \sum_0^{N-1} \cos (x+n \beta)=0$$

quand $\beta = \frac{2\pi}{N}$. Le facteur n varie de zéro à $N-1$.

2. Ces formules sont des cas particuliers d'autres séries où n varie encore de 0 à $N-1$ mais pour des valeurs quelconques de β , toujours constantes d'ailleurs :

$$\sum_0^{N-1} \sin (x+n \beta)=\frac{\sin \left(x+N-1 \frac{\beta}{2}\right)}{\sin \frac{\beta}{2}} \sin \frac{N \beta}{2}$$
$$\sum_0^{N-1} \cos (x+n \beta)=\frac{\sin \left(x+N-1 \frac{\beta}{2}\right)}{\sin \frac{\beta}{2}} \cos \frac{N \beta}{2}.$$

On en déduit :

$$\frac{\sum_0^{N-1} \sin (x+n \beta)}{\sum_0^{N-1} \cos (x+n \beta)} = \operatorname{tg} \frac{N \beta}{2}.$$

3. Ces dernières, à leur tour, sont les cas particuliers de séries plus générales, plus simples et plus utiles dans les appli-

cations où la raison β non seulement est constante, mais où les limites de la sommation sont arbitraires :

$$X = \sum_a^b \sin(\alpha + n\beta) = \frac{\sin b - \overline{a + 1} \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \sin\left(\alpha + \overline{a + b} \frac{\beta}{2}\right)$$

$$Y = \sum_a^b \cos(\alpha + n\beta) = \frac{\sin b - \overline{a + 1} \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \cos\left(\alpha + \overline{a + b} \frac{\beta}{2}\right)$$

$$\frac{\sum_a^b \sin(\alpha + n\beta)}{\sum_a^b \cos(\alpha + n\beta)} = \operatorname{tg}\left(\alpha + \overline{a + b} \frac{\beta}{2}\right).$$

Avant de les appliquer nous les démontrerons analytiquement et graphiquement.

a. Démonstration analytique.

1. Nous écrivons :

$$2 \sin \frac{\beta}{2} X = \sum_a^b 2 \sin \frac{\beta}{2} \sin(\alpha + n\beta) = \sum_a^b \cos\left(\alpha + 2\overline{n - 1} \frac{\beta}{2}\right) - \sum_a^b \cos\left(\alpha + 2\overline{n + 1} \frac{\beta}{2}\right).$$

Mais

$$\begin{aligned} \sum_a^b \cos\left(\alpha + 2\overline{n - 1} \frac{\beta}{2}\right) &= \sum_a^b \cos\left(\alpha + 2\overline{n + 1} \frac{\beta}{2}\right) + \\ &+ \cos\left(\alpha + 2\overline{a - 1} \frac{\beta}{2}\right) - \cos\left(\alpha + 2\overline{b + 1} \frac{\beta}{2}\right). \end{aligned}$$

Par suite

$$2 \sin \frac{\beta}{2} X = \cos\left(\alpha + 2\overline{a - 1} \frac{\beta}{2}\right) - \cos\left(\alpha + 2\overline{b + 1} \frac{\beta}{2}\right)$$

d'où

$$X = \sum_a^b \sin(\alpha + n\beta) = \frac{\sin \overline{b-a+1} \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \sin \left(\alpha + \overline{a+b} \frac{\beta}{2} \right).$$

Si on remplace α par $\frac{\pi}{2} + \alpha$ il viendra

$$Y = \sum_a^b \cos(\alpha + n\beta) = \frac{\sin \overline{b-a+1} \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \cos \left(\alpha + \overline{a+b} \frac{\beta}{2} \right).$$

Si N est le nombre des termes de la série on aura :

$$N = b - a + 1.$$

Ainsi,
$$X = \frac{\sin \frac{N\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \sin \left(\alpha + \overline{a+b} \frac{\beta}{2} \right)$$

$$Y = \frac{\sin \frac{N\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \cos \left(\alpha + \overline{a+b} \frac{\beta}{2} \right).$$

5. Si $\alpha = 0$ et par suite $b = N - 1$, on retrouve les séries précédentes.

En général, lorsque $\frac{N\beta}{2} = K\pi$, K étant entier, et $\beta = K \frac{2\pi}{N}$ on aura : $X = Y = 0$.

C'est ce qui existe, en particulier par $K = 1$ quand $\alpha = 0$ car alors $\beta = \frac{2\pi}{N}$.

Ce sont les premières équations.

6. *Démonstration graphique.* — Considérons une circonférence de centre O (fig. 1) et de rayon OA égal à l'unité et un diamètre suivant AO incliné sur OX d'un angle $AOX = \frac{\beta}{2}$.

A partir de A mesurons sur cette circonférence un arc $\alpha = AB$, un arc $\overline{a-1}\beta = BC$, et successivement des arcs $\beta = CD = DE = EF = \dots = LM$ en nombre $N = b - a + 1$ de façon que arc $CM = N \cdot \beta$. Les cordes c des premiers arcs et C du dernier s'exprimeront comme suit :

$$c = 2 \sin \frac{\beta}{2}, \quad C = 2 \sin \frac{N \cdot \beta}{2} = 2 \sin \overline{b-a+1} \frac{\beta}{2}.$$

Par l'origine O, conduisons un axe OY perpendiculaire à la direction OX inclinée d'un angle $\frac{\beta}{2}$ sur le rayon OA. Les sous-tendantes des arcs β feront avec l'axe YO des angles crois-

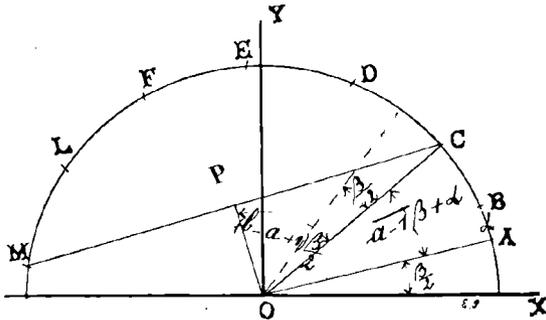


FIG. 1.

sants, respectivement égaux aux angles que leurs médianes feront avec l'axe OX. Ces angles seront par conséquent :

$$\alpha + a \frac{\beta}{2}, \quad \alpha + \overline{a-1} \frac{\beta}{2}, \quad \alpha + \overline{a-2} \frac{\beta}{2}, \quad \dots, \\ \alpha + \overline{a+N-1} \frac{\beta}{2} = \alpha + b \frac{\beta}{2},$$

c'est-à-dire, en général, $\alpha + n \frac{\beta}{2}$, n variant de a à b .

La corde résultante C incline sur le même axe YO d'un angle $\text{POX} = \frac{\beta}{2} + \alpha + \overline{a-1} \frac{\beta}{2} + \overline{b-a+1} \frac{\beta}{2}$ c'est-à-dire $\alpha + \overline{a+b} \frac{\beta}{2}$.

Cela établi, il suffira d'écrire que les sommes des projections des cordes c sur les axes des x et des y sont égales aux projections sur les mêmes axes, de la corde $CM = C$ de sorte que

$$C \cos\left(\alpha + \overline{a + b} \frac{\beta}{2}\right) = c \sum_a^b \cos(\alpha + n\beta)$$

$$C \sin\left(\alpha + \overline{a + b} \frac{\beta}{2}\right) = c \sum_a^b \sin(\alpha + n\beta)$$

d'où

$$X = \sum_a^b \sin(\alpha + n\beta) = \frac{\sin \overline{b - a + 1} \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \sin\left(\alpha + \overline{a + b} \frac{\beta}{2}\right)$$

$$Y = \sum_a^b \cos(\alpha + n\beta) = \frac{\sin \overline{b - a + 1} \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \cos\left(\alpha + \overline{a + b} \frac{\beta}{2}\right).$$

DES SÉRIES CARRÉES.

7. On appelle séries carrées la somme des carrés des sinus et des cosinus d'arcs en progression arithmétique. Ces séries sont :

$$X_2 = \sum_a^b \sin^2(\alpha + n\beta) = \frac{1}{2} \sum_a^b (1 - \cos \overline{2\alpha + n \cdot 2\beta})$$

$$Y_2 = \sum_a^b \cos^2(\alpha + n\beta) = \frac{1}{2} \sum_a^b (1 + \cos \overline{2\alpha + n \cdot 2\beta}).$$

Donc

$$X_2 = \frac{b - a + 1}{2} - \frac{\sin(b - a + 1)\beta}{2 \sin \beta} \cos(2\alpha + \overline{a + b}\beta).$$

$$Y_2 = \frac{b - a + 1}{2} + \frac{\sin(b - a + 1)\beta}{2 \sin \beta} \cos(2\alpha + \overline{a + b}\beta).$$

On vérifie la relation évidente :

$$X_2 + Y_2 = b - a + 1.$$

Applications.

I. — DE LA MOYENNE DES SINUS D'ARCS EN PROGRESSION ARITHMÉTIQUE.

8. Considérons un arc A mesuré sur le cercle trigonométrique à partir d'une origine quelconque placée à une distance angulaire α de l'axe des x . Divisons cet arc A en N parties égales β de sorte que $A = N\beta$.

Nous aurons les arcs successifs, de même origine sur l'axe OX :

$$\alpha, \quad \alpha + \beta, \quad \alpha + 2\beta, \quad \dots, \quad \alpha + N\beta = \alpha + A.$$

La moyenne S_m des $N + 1$ sinus de ces arcs sera :

$$S_m = \frac{1}{N+1} \sum_0^N \sin(\alpha + n\beta) = \frac{1}{N+1} \frac{\sin \frac{N+1}{N} \frac{A}{2}}{\sin \frac{A}{2N}} \sin\left(\alpha + \frac{A}{2}\right).$$

9. Cette moyenne est maxima quand $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}$ pour un arc extrême $A + \alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}$.

L'axe des y divise alors l'arc A en deux parties égales.

Dans tous les cas,

$$S_m = S_{m.max.} \sin\left(\alpha + \frac{A}{2}\right).$$

10. Cette relation est absolument générale ; elle existe pour toutes les valeurs de N et aussi lorsque $N \sim \infty$ et $\beta \sim 0$.

Dans ce cas limite, on a :

$$S_m = 2 \left(\frac{N}{N+1} \right)_{\infty} \frac{\sin \frac{A}{2}}{A} \sin\left(\alpha + \frac{A}{2}\right)$$

ou

$$S_m = \frac{2}{A} \sin \frac{A}{2} \sin\left(\alpha + \frac{A}{2}\right) = \frac{1}{A} (\cos \alpha - \cos(\alpha + A)).$$

On peut établir cette formule spéciale par intégration
On aura :

$$S_m = \frac{1}{A} \int_x^{x+A} \sin x \, dx = \frac{1}{A} (\cos x - \cos \overline{x+A}).$$

On en déduit le relevé ci-après des valeurs de S_m pour
diverses valeurs de α et de A .

α	$A \rightarrow$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
\downarrow					
0	$\frac{2}{\pi}(2-\sqrt{2})=0,5858 \cdot \frac{2}{\pi}$	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{3}(2+\sqrt{2})=1,1381 \cdot \frac{2}{\pi}$	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{2}{\pi}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{2}{\pi}\sqrt{2}=1,4142 \cdot \frac{2}{\pi}$	$\frac{2}{\pi}\sqrt{2}=1,4142 \cdot \frac{2}{\pi}$	$\frac{2}{\pi} \cdot \frac{2+\sqrt{2}}{3}=1,1381 \cdot \frac{2}{\pi}$	$\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{\pi}=0,7071$	
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{\pi}\sqrt{2}=1,4142 \cdot \frac{2}{\pi}$	$+\frac{2}{\pi}$	$\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{2}{3}=0,4742 \cdot \frac{2}{\pi}$		0
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2}{\pi}(2-\sqrt{2})=0,5858 \cdot \frac{2}{\pi}$	$\frac{2}{\pi}\sqrt{2}=1,4142 \cdot \frac{2}{\pi}$	$-\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{2}{3}=-0,4742 \cdot \frac{2}{\pi}$	$-\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{2}{2}=-0,7071$	
π	$-\frac{2}{\pi}(2-\sqrt{2})=-0,5858 \cdot \frac{2}{\pi}$	$\frac{2}{\pi}$	$-\frac{2}{\pi} \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{3}=-0,1953 \cdot \frac{2}{\pi}$	$-\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\pi}=-0,5000$	

II. — DU SINUS MOYEN S_m D'ARCS EN PROGRESSION ARITHMÉTIQUE.

11. Le « sinus moyen » est égal à la racine carrée de la
moyenne des carrés des sinus. On aura donc

$$S_m^2 = \frac{1}{N+1} \sum_0^N \sin^2(x+n\beta) = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{N+1} \frac{\sin \frac{N+1}{N} A}{\sin \frac{A}{N}} \cos(2\alpha + A) \right].$$

Le sinus moyen variable avec α est maximum quand

$$2\alpha = \pi - A \text{ ou } \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \text{ et } A + \alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}.$$

La position de l'arc A qui réalise le sinus moyen le plus grand donne aussi naissance à la moyenne des sinus la plus forte.

12. Si $N \sim \infty$ ou $\beta \sim 0$ on aura :

$$S_m^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{N}{N+1} \right) \frac{\sin A}{A} \cos(2\alpha + A) \right]$$

ou
$$S_m^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\sin A \cos(2\alpha + A)}{A} \right].$$

L'intégration applicable seulement à cet état de choses limite, donnerait :

$$S_m^2 = \frac{1}{A} \int_a^{a+A} \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2A} \left[A - \int_a^{a+A} \cos 2x \, dx \right] = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{A} \left(\sin 2x \right)_a^{a+A} \right]$$

d'où
$$S_m^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{2A} \{ \sin(2\alpha + 2A) - \sin 2\alpha \} \right]$$

et
$$S_m^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{A} \sin A \cos(2\alpha + A) \right].$$

Cette relation conduit au relevé ci-après des valeurs de S_m^2 .

$\alpha \ A \ \longrightarrow$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π
\downarrow				
0	$\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{3\pi}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{3\pi}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{3\pi}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{3\pi}$	$\frac{1}{2}$
π	$\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{3\pi}$	$\frac{1}{2}$

III. — SOMMES DE PRODUITS TRIGONOMÉTRIQUES.

13. Quelques suites dont les sommations, dans certains cas particuliers, sont utilisées dans la science électrique se déduisent de la série fondamentale.

Leur prototype est :

$$Z_1 = \sum_1^N \sin (a + n \beta) \sin (a + b + n \beta).$$

Ce produit peut s'écrire :

$$\frac{1}{2} [\cos b - \cos (2a + b + n \cdot 2 \beta)]$$

de sorte que

$$Z_1 = \frac{1}{2} \left[N \cos b - \sum_1^N \cos (2a + b + n \cdot 2 \beta) \right]$$

donc

$$Z_1 = \frac{1}{2} \left[N \cos b - \frac{\sin N \beta}{\sin \beta} \cos (2a + b + \overline{N + 1} \beta) \right].$$

Si on augmente b de $\frac{\pi}{2}$ il viendra :

$$Z_2 = \sum_1^N \sin (a + n \beta) \cos (a + b + n \beta).$$

Par suite

$$Z_2 = \frac{1}{2} \left[-N \sin b + \frac{\sin N \beta}{\sin \beta} \sin (2a + b + \overline{N + 1} \beta) \right].$$

Si l'on augmente a de $\frac{\pi}{2}$ ces valeurs deviennent :

$$Z_3 = \sum_1^N \cos (a + n \beta) \cos (a + b + n \beta)$$

$$Z_4 = - \sum_1^N \cos (a + n \beta) \sin (a + b + n \beta).$$

En conséquence :

$$Z_3 = \frac{1}{2} \left[N \cos b + \frac{\sin N \beta}{\sin \beta} \cos (2a + b + \overline{N+1} \beta) \right]$$

$$Z_4 = -\frac{1}{2} \left[N \sin b + \frac{\sin N \beta}{\sin \beta} \sin (2a + b + \overline{N+1} \beta) \right].$$

On déduit :

$$Z_1 + Z_3 = N \cos b, \quad Z_2 + Z_4 = -N \sin b$$

$$(Z_1 + Z_3)^2 + (Z_2 + Z_4)^2 = N^2.$$

14. Ces formules sont démontrées et appliquées pour le cas spécial

$$N \beta = 2 \pi$$

et alors, généralement, le second terme s'annule avec

$$\sin N \beta = \sin 2 \pi = 0$$

pourvu que $\sin \beta = \sin 2\pi/N$ diffère de zéro ce qui arrive quand N n'est pas égal à 1 ou à 2.

En dehors de ces deux cas, on a donc toujours :

$$Z_1 = \sum_1^N \sin \left(a + n \frac{2\pi}{N} \right) \sin \left(a + b + n \frac{2\pi}{N} \right) = \frac{1}{2} N \cos b$$

$$Z_2 = \sum_1^N \sin \left(a + n \frac{2\pi}{N} \right) \cos \left(a + b + n \frac{2\pi}{N} \right) = -\frac{1}{2} N \sin b$$

$$Z_3 = \sum_1^N \cos \left(a + n \frac{2\pi}{N} \right) \cos \left(a + b + n \frac{2\pi}{N} \right) = \frac{1}{2} N \cos b$$

$$Z_4 = -\sum_1^N \cos \left(a + n \frac{2\pi}{N} \right) \sin \left(a + b + n \frac{2\pi}{N} \right) = -\frac{1}{2} N \sin b$$

$$Z_1 = Z_3, \quad Z_2 = Z_4.$$

15. Si $N = 1$ il viendrait :

$$\frac{\sin N \beta}{\sin \beta} = 1$$

de sorte que

$$Z_1 = \frac{1}{2} [\cos b - \cos (2a + b)] = \sin a \sin (a + b)$$

$$Z_2 = \frac{1}{2} [-\sin b + \sin (2a + b)] = \sin a \cos (a + b)$$

$$Z_3 = \frac{1}{2} [\cos b + \cos (2a + b)] = \cos a \cos (a + b)$$

$$Z_4 = -\frac{1}{2} [\sin b + \sin (2a + b)] = -\cos a \sin (a + b).$$

Et, en effet, les quatre valeurs de Z se réduisent en un seul terme du développement, le premier.

16. Si $N = 2$, on aura

$$\frac{\sin N \beta}{\sin \beta} = \frac{2 \sin \beta \cos \beta}{\sin \beta} = 2 \cos \beta = -2$$

puisque $\beta = 2\pi/N = \pi$.

Conséquemment,

$$Z_1 = \cos b + \cos (2a + b + \pi) = \cos b - \cos (2a + b) = 2 \sin a \sin (a + b)$$

$$Z_2 = -[\sin b + \sin (2a + b + \pi)] = \sin (2a + b) - \sin b = 2 \sin a \cos (a + b)$$

$$Z_3 = \cos b - \cos (2a + b + \pi) = \cos b + \cos (2a + b) = 2 \cos a \cos (a + b)$$

$$Z_4 = -[\sin b - \sin (2a + b + \pi)] = -[\sin (2a + b) + \sin b] = -2 \cos a \sin (a + b).$$

Les développements des quatre valeurs de Z se réduisent à leurs deux premiers termes.

17. Moyenne des produits trigonométriques.

Nous poserons : $N \beta = A$ et écrirons :

$$P_1 = \sum_1^N \sin \left(a + n \frac{A}{N} \right) \sin \left(a + b + n \frac{A}{N} \right)$$

$$\text{ou } P_1 = \frac{N}{2} \cos b - \frac{\sin A}{2 \sin \frac{A}{N}} \cos \left(2a + b + A + \frac{A}{N} \right)$$

$$P_{1,m} = \frac{1}{2} \cos b - \frac{\sin A}{2 N \sin \frac{A}{N}} \cos \left(2a + b + A + \frac{A}{N} \right).$$

En augmentant a de $\frac{\pi}{2}$ on obtient :

$$P_2 = \sum_1^n \cos \left(a + n \frac{A}{N} \right) \cos \left(a + b + n \frac{A}{N} \right)$$

$$P_2 = \frac{N}{2} \cos b + \frac{\sin A}{2 \sin \frac{A}{N}} \cos \left(2a + b + A + \frac{A}{N} \right)$$

$$P_{2,m} = \frac{1}{2} \cos b + \frac{\sin A}{2 N \sin \frac{A}{N}} \cos \left(2a + b + A + \frac{A}{N} \right).$$

En donnant à b un accroissement $\frac{\pi}{2}$ les valeurs de P_1 et P_2 deviennent :

$$P_3 = \sum_1^n \sin \left(a + n \frac{A}{N} \right) \cos \left(a + b + n \frac{A}{N} \right)$$

$$P_3 = -\frac{N}{2} \sin b + \frac{\sin A}{2 \sin \frac{A}{N}} \sin \left(2a + b + A + \frac{A}{N} \right)$$

$$P_{3,m} = -\frac{1}{2} \sin b + \frac{\sin A}{2 N \sin \frac{A}{N}} \sin \left(2a + b + A + \frac{A}{N} \right)$$

$$P_4 = \sum_1^n \cos \left(a + n \frac{A}{N} \right) \sin \left(a + b + n \frac{A}{N} \right)$$

$$P_4 = -\frac{N}{2} \sin b - \frac{\sin A}{2 \sin \frac{A}{N}} \sin \left(2a + b + A + \frac{A}{N} \right)$$

$$P_{4,m} = -\frac{1}{2} \sin b - \frac{\sin A}{2 N \sin \frac{A}{N}} \sin \left(2a + b + A + \frac{A}{N} \right).$$

18. Si dans ces relations on fait $a = 0$; si l'on remplace $\frac{A}{N}$ par a et si l'on suppose que $b = \frac{A}{N} = a$, nous aurons :

$$P_1 = \sum_1^N \sin na \cdot \sin \overline{n+1}a = \sin a \cdot \sin 2a + \sin 2a \cdot \sin 3a + \\ + \dots + \sin Na \cdot \sin \overline{N+1}a.$$

$$P_1 = \frac{1}{2} N \cos a - \frac{1}{2} \frac{\sin Na}{\sin a} \cos \overline{N+2}a.$$

$$P_2 = \sum_1^N \cos na \cdot \cos \overline{n+1}a = \cos a \cos 2a + \cos 2a \cos 3a + \\ + \dots + \cos Na \cdot \cos \overline{N+1}a.$$

$$P_2 = \frac{1}{2} N \cos a + \frac{1}{2} \frac{\sin Na}{\sin a} \cos \overline{N+2}a.$$

$$P_3 = \sum_1^N \sin na \cdot \cos \overline{n+1}a = \sin a \cos 2a + \sin 2a \cos 3a + \\ + \dots + \sin Na \cdot \cos \overline{N+1}a$$

$$P_3 = -\frac{1}{2} N \sin a + \frac{\sin Na}{2 \sin a} \sin \overline{N+2}a$$

$$P_4 = \sum_1^N \cos na \cdot \sin \overline{n+1}a = \cos a \cos 2a + \cos 2a \cdot \cos 3a + \\ + \dots + \cos Na \cdot \cos \overline{N+1}a$$

$$P_4 = -\frac{1}{2} N \sin a - \frac{\sin Na}{2 \sin a} \sin \overline{N+2}a.$$

Dans les hypothèses : $Na = K\pi$, K étant un nombre entier :

$$P_1 = \frac{1}{2} N \cos a \qquad P_{1m} = \frac{1}{2} \cos a$$

$$P_2 = \frac{1}{2} N \cos a \qquad P_{2m} = \frac{1}{2} \cos a$$

$$P_3 = -\frac{1}{2} N \sin a \qquad P_{3m} = -\frac{1}{2} \sin a$$

$$P_4 = -\frac{1}{2} N \sin a \qquad P_{4m} = -\frac{1}{2} \sin a.$$

19. Quand $N \approx \infty$, avec la condition $N\alpha = A$, arc constant et fini on aura :

$$\cos a = \cos \left(\frac{A}{N} \right)_{\infty} = 1$$

$$\left(\frac{\sin N\alpha}{N \sin \alpha} \right)_{\infty} = \left(\frac{\sin A}{N \sin \frac{A}{N}} \right)_{\infty} = \frac{\sin A}{A}.$$

Par suite :

$$P_{1m} = \frac{1}{2} - \frac{1 \sin A \cdot \cos A}{2 A}$$

$$P_{2m} = \frac{1}{2} + \frac{1 \sin A \cos A}{2 A}$$

$$P_{3m} = \frac{1 \sin^2 A}{2 A}$$

$$P_{4m} = - \frac{1 \sin^2 A}{2 A}.$$

$$\text{Pour } A = \frac{\pi}{2}$$

$$P_{1m} = P_{2m} = \frac{1}{2}$$

$$P_{3m} = -P_{4m} = \frac{1}{\pi}$$

$$\text{Pour } A = \pi$$

$$P_{1m} = P_{2m} = \frac{1}{2}$$

$$P_{3m} = P_{4m} = 0.$$

IV. — DE LA TENSION INSTANTANÉE ENGENDRÉE DANS UNE BOBINE.

20. L'application la plus naturelle de ces sommations, celle qui apparaît d'elle-même à l'esprit, se présente à propos de la détermination de la force électromotrice instantanée développée dans une bobine circulaire constituée de spires raccordées en série, en rotation dans un champ magnétique uniforme, l'enroulement étant fait en anneau ou en tambour.

En représentant par E_0 l'amplitude de la force électromotrice produite dans chaque spire dont le plan de la première est à une distance angulaire α du plan neutre, les spires successives, capables de la même tension maxima, se trouveront à des distances angulaires respectives : $\alpha + \beta$, $\alpha + 2\beta$, ... $\alpha + n - 1\beta$ du même plan neutre initial, β étant l'angle formé par les plans médians de deux spires voisines quelconques.

22. Si les bobines sont jointives, β est l'angle sous lequel le diamètre du fil conducteur constituant les spires est vu du centre et $n\beta = A$ le même élément pour la bobine entière. En représentant par c et C les cordes sous-tendantes des arcs β et $n\beta = A$, ouverture de la bobine, par a le rayon interne de la bobine, on aura :

$$c = 2a \sin \frac{\beta}{2} \qquad C = 2a \sin \frac{A}{2}$$

de sorte que

$$E = \frac{\sin \frac{A}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} E_o = \frac{C}{c} E_o.$$

Si donc on compare des bobines d'envergures différentes on aura :

$$\frac{E_o}{c} = \frac{E}{C} = \frac{E'}{C'} = \frac{E''}{C''} = \dots$$

ou

$$\frac{E_o}{\sin \frac{\beta}{2}} = \frac{E}{\sin \frac{A}{2}} = \frac{E'}{\sin \frac{A'}{2}} = \frac{E''}{\sin \frac{A''}{2}} = \dots$$

Sont constants les rapports des tensions maxima des bobines aux cordes sous-tendantes ou aux sinus de leurs demi-ouvertures.

23. Si l'ouverture d'une bobine varie, l'amplitude de la tension engendrée croît depuis zéro, pour $C = 0$, $A = 0$,

$$\text{à } \frac{2a}{c} E_o \text{ ou } \frac{1}{\sin \frac{\beta}{2}} E_o, \text{ pour } C = 2a \text{ ou } A = \pi;$$

elle diminue ensuite de cette valeur maxima à zéro pour $C = 0$ et $A = 2\pi$.

24. *Deux bobines qui ont les mêmes extrémités ont les mêmes tensions.* En effet, si l'ouverture de l'une est A , celle de l'autre sera $2\pi - A$. Dans les deux cas on aura :

$$E_A = \frac{E_o}{\sin \frac{\beta}{2}} \cdot \sin \frac{A}{2}, \quad E_{2\pi - A} = \frac{E_o}{\sin \frac{\beta}{2}} \sin \left(\pi - \frac{A}{2} \right) = \frac{E_o}{\sin \frac{\beta}{2}} \sin \frac{A}{2} = E_A.$$

25. Les tensions de deux bobines d'ouvertures supplémentaires sont complémentaires.

Nous aurons

$$E_A = \frac{E_o}{\sin \frac{\beta}{2}} \sin \frac{A}{2}, \quad E_{\pi-A} = \frac{E_o}{\sin \frac{\beta}{2}} \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \right) = \frac{E_o}{\sin \frac{\beta}{2}} \cos \frac{A}{2}.$$

On en déduit la relation

$$E_A = E_{\pi-A} \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2}.$$

Si par exemple on veut que $E_A = 2 E_{\pi-A}$ on écrira : $\operatorname{tg} \frac{A}{2} = 2$ ou $A = 63^\circ 26'$ et $\pi - A = 116^\circ 34'$.

26. Quel est le développement X d'une bobine capable d'une tension égale à K fois celle d'une bobine d'ouverture A ?

Nous aurons entre les nombres de spires n et x :

$$\frac{n}{A} = \frac{x}{X} \quad \text{ou} \quad \frac{x}{n} = \frac{X}{A}.$$

D'autre part :

$$E = \frac{E_o}{\sin \frac{\beta}{2}} \sin \frac{A}{2}, \quad KE = \frac{E_o}{\sin \frac{\beta}{2}} \sin \frac{X}{2}$$

donc

$$K \sin \frac{A}{2} = \sin \frac{X}{2} \quad \text{ou} \quad X = 2 \operatorname{arc} \sin K \sin \frac{A}{2}.$$

On en conclut que

$$K < \frac{1}{\sin \frac{A}{2}}$$

soit par exemple

$$A = \frac{\pi}{3}, \quad \sin \frac{A}{2} = \frac{1}{2}, \quad K < 2.$$

Il viendra :

$$X = 2 \operatorname{arc} \sin \frac{K}{2}, \quad \frac{x}{n} = \frac{2}{A} \operatorname{arc} \sin \frac{K}{2}.$$

Pour K =	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$	2
X =	$0,1609\pi$	$0,2426\pi$	$\frac{\pi}{3}$	$0,3333\pi$	$0,4298\pi$	$0,5398\pi$	$0,6783\pi$
$\frac{x}{n}$ =	0,4827	0,7278	1,0000	1,2894	1,6194	2,0349	3

Généralement, la solution ne sera qu'approximative puisque le rapport x/n doit être nécessairement entier.

27. De la spire équivalente à une bobine.

Il existe entre les deux extrémités de la bobine une tension instantanée :

$$e = E_0 \frac{\sin \frac{n}{2} \beta}{\sin \frac{\beta}{2}} \sin \left(\omega t + x + \frac{n-1}{2} \beta \right)$$

ou, en représentant par θ l'angle que fait le plan axial de la bobine avec le plan neutre :

$$e = E_0 \frac{\sin \frac{n}{2} \beta}{\sin \frac{\beta}{2}} \sin (\omega t + \theta).$$

Or, cette tension est celle qui se développerait dans une spire médiane idéale qui serait soumise à une force électromotrice sinusoïdale d'amplitude :

$$E = E_0 \frac{\sin \frac{n}{2} \beta}{\sin \frac{\beta}{2}}.$$

Le courant produit dans la bobine aura une intensité

$$i = \frac{e}{nr_0}.$$

r_0 étant la résistance d'une spire.

Si R était la résistance de la spire idéale, l'intensité i du courant résultant aurait pour valeur :

$$i = \frac{e}{R}.$$

Les courants seraient identiques si $R = nr_0$.

De là, ce théorème : *Le courant produit dans une bobine de n spires soumises chacune à une tension sinusoïdale d'amplitude E_0 est le même que celui qui s'engendrerait dans une spire médiane de même résistance, si elle était soumise à l'action d'une tension sinusoïdale dont l'amplitude serait :*

$$E = E_0 \frac{\sin \frac{n}{2} \beta}{\sin \frac{\beta}{2}}.$$

28. Remarquons que l'angle β est toujours très petit, si les spires sont jointives.

D'autre part, quand un arc est inférieur à 15° on peut le confondre avec son sinus ou sa tangente. De sorte qu'en dessous de cette limite on aura :

$$\sin \frac{n\beta}{2} = \frac{n\beta}{2}, \quad \sin \frac{\beta}{2} = \frac{\beta}{2}, \quad \frac{\sin \frac{n\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} = n$$

et alors

$$E = n E_0.$$

La tension maxima d'une bobine de n spires, de faible développement, est égale à n fois la tension maxima d'une spire.

29. Calcul de l'amplitude E_0 dans une spire.

Φ étant le flux traversant la spire unique à son passage dans le plan neutre normal à la direction du champ uniforme, pour une rotation $\theta = \omega t$ de la spire, $\omega = 2\pi N$ étant la vitesse de rotation pour N tours par seconde, le flux instantané utile sera :

$$\Phi \cos \theta$$

et la force électromotrice engendrée

$$e = \Phi \sin \theta \frac{d\theta}{dt} = \omega \Phi \sin \omega t.$$

Par suite $E_0 = \omega \Phi = 2\pi N \Phi.$

30. Expression de l'amplitude E de la bobine si elle est constituée de μ spires jointives On aura :

$$E = 2\pi N \Phi \frac{\sin \frac{\mu\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}}.$$

Représentons par n le nombre de spires enroulées sur une circonférence entière. On pourra poser :

$$2\pi = n\beta \quad \text{ou} \quad \frac{2\pi}{\beta} = n.$$

D'autre part $\frac{\beta}{2}$ étant très petit peut être confondu avec son sinus, de sorte que

$$E = \frac{4\pi}{\beta} N \Phi \sin \frac{\mu\beta}{2} = 2 \Phi N n \sin \frac{A}{2}$$

A représentant l'ouverture angulaire de la bobine.

Pour comparer cette relation avec la formule ordinaire établie pour $A = \pi$, c'est-à-dire pour la détermination de la tension existant entre deux balais diamétralement opposés, nous remplacerons le flux utile total Φ par sa moitié, de façon que nous aurons :

$$E = \Phi N n \sin \frac{A}{2} = E_1 \sin \frac{A}{2}$$

E_1 est la tension produite entre les extrémités d'une bobine d'ouverture $A = \pi$.

La tension engendrée dans une bobine quelconque est proportionnelle au sinus de la moitié de son ouverture.

De là les résultats ci-après :

A	$\frac{E}{E_1}$	A	$\frac{E}{E_1}$
0	0,00	π	1,00
$\frac{\pi}{3}$	0,50	$\frac{4}{3}\pi$	0,87
$\frac{\pi}{2}$	0,71	$\frac{3}{2}\pi$	0,71
$\frac{2}{3}\pi$	0,87	$\frac{5}{3}\pi$	0,50
π	1,00	2π	0,00

31. Méthode directe. — On s'est toujours borné à calculer la tension d'une bobine d'ouverture angulaire égale à π bien qu'il soit possible de l'exprimer directement en en généralisant la valeur. C'est le but du problème suivant :

Un enroulement Gramme, sur une circonférence entière, comportant n spires tourne à raison de N tours par seconde dans un champ polaire de flux Φ se divisant en deux parts égales $\Phi/2$ au plan neutre. On demande de trouver la tension existant entre deux points de cet enroulement défini par leurs abscisses θ et θ_0 .

Pour une spire, le flux utile transversal, à une distance θ du plan neutre est égal à $\frac{\Phi}{2} \cos \theta$ correspondant à une force électromotrice :

$$e = -\frac{\Phi}{2} \frac{d(\cos \theta)}{dt}.$$

Or, la vitesse de rotation

$$\omega = 2\pi N = \frac{d\theta}{dt} \quad \text{donc} \quad dt = \frac{d\theta}{\omega}$$

et

$$e = -\frac{\omega\Phi}{2} \frac{d(\cos \theta)}{d\theta}.$$

Le nombre des spires par radian est : $\frac{n}{2\pi}$

et pour une ouverture $d\theta$: $\frac{n}{2\pi} d\theta$.

La tension de ces spires jointives s'ajoutent dans cet espace infinitésimal, de sorte que la tension de leur ensemble sera :

$$e = -\frac{\omega \Phi d(\cos \theta) n d\theta}{2 \cdot d\theta \cdot 2\pi} = -\frac{\Phi}{2} N n d(\cos \theta).$$

Enfin entre les abscisses θ_0 et θ on aura :

$$e = -\frac{\Phi}{2} N n (\cos \theta - \cos \theta_0) = \Phi N n \sin \frac{\theta - \theta_0}{2} \sin \frac{\theta + \theta_0}{2}.$$

Si A est l'ouverture angulaire, $\theta - \theta_0$, il viendra :

$$e = \Phi N n \sin \frac{A}{2} \sin \left(\theta - \frac{A}{2} \right)$$

ou puisque θ varie proportionnellement au temps si la série des spires considérées se déplace :

$$e = \Phi N n \sin \frac{A}{2} \sin \left(\omega t - \frac{A}{2} \right).$$

L'amplitude cherchée a par conséquent pour valeur :

$$E = \Phi N n \sin \frac{A}{2}$$

comme précédemment.

DES COURANTS POLYPHASÉS.

CHAPITRE I.

RÉALISATION ET PROPRIÉTÉS DES COURANTS POLYPHASÉS.

1. *Définitions.* — On appelle « système de courants polyphasés » un ensemble de courants alternatifs lancés dans des fils conducteurs par des tensions alternatives de même période, de même amplitude et dont les phases varient de l'une à l'autre d'une même fraction de période. On admet implicitement que les circuits conducteurs ont même impédance et même constante de temps ce qui revient à dire que dans chacun la résistance et l'inductance sont identiques. Si cette hypothèse n'existait, les différences de phase des courants se modifieraient de l'un à l'autre.

Les tensions peuvent n'être pas sinusoidales rigoureusement. Il suffit qu'elles soient de même genre, variables suivant le même mode, se distinguant chacune par un même retard ou une même avance de phase par rapport à celle qui précède ou à celle qui suit.

Ces tensions passent par zéro et par leurs valeurs limites en des instants différant entre eux de mêmes durées.

2. Un courant n — phasé exigera en général n courants composants et par suite n fils d'aller et n fils de retour. Soit en tout $2n$ fils. Tous ces courants sont distincts, tant dans la façon d'être produits que dans la manière d'être captés. Seuls leurs effets se combinent.

Si les retours de tous les courants s'effectuent par un fil unique, le nombre des conducteurs de ligne sera $n + 1$.

Dans le cas spécial où, à chaque instant, la somme des intensités des courants élémentaires serait nulle, la suppression du fil de retour s'imposerait naturellement et, alors, n fils suffiront pour transmettre et utiliser les n courants du système n — phasé.

TENSIONS ET INTENSITÉS DES COURANTS.

3. Considérons n courants sinusoïdaux régulièrement déphasés d'un angle $2\pi/N$. Chaque bobine génératrice produira une tension alternative e . Dans chaque circuit prendra naissance un courant d'intensité i qui, généralement, présentera un retard φ sur la tension. De sorte que l'on aura pour une bobine quelconque de rang k :

$$e_k = E \sin\left(\omega t + \overline{k-1} \frac{2\pi}{N}\right), \quad i_k = I \sin\left(\omega t - \varphi + \overline{k-1} \frac{2\pi}{N}\right)$$

MOYENNES DES TENSIONS ET DES INTENSITÉS INSTANTANÉES.

4. A chaque instant t ces moyennes seront :

$$e_m = \frac{1}{n} \sum_1^n e_k = \frac{E}{n} \sum_1^n \sin\left(\omega t + \overline{k-1} \frac{2\pi}{N}\right) = \frac{E}{n} \frac{\sin n \frac{\pi}{N}}{\sin \frac{\pi}{N}} \sin\left(\omega t + \overline{n-1} \frac{\pi}{N}\right)$$

$$i_m = \frac{1}{n} \sum_1^n i_k = \frac{I}{n} \sum_1^n \sin\left(\omega t - \varphi + \overline{k-1} \frac{2\pi}{N}\right) = \frac{I}{n} \frac{\sin n \frac{\pi}{N}}{\sin \frac{\pi}{N}} \sin\left(\omega t - \varphi + \overline{n-1} \frac{\pi}{N}\right)$$

Remarquons que pour écrire ces expressions il faut mettre l'arc primaire sous la forme :

$$\omega t - \frac{2\pi}{N} + k \cdot \frac{2\pi}{N}$$

et faire varier k de 1 à n . L'autre s'écrira :

$$\omega t - \varphi - \frac{2\pi}{N} + k \frac{2\pi}{N}$$

5. Le déphasage de la moyenne des tensions et le déphasage de la moyenne des intensités sont égaux aux moyennes des déphasages et des tensions et des intensités.

La somme des déphasages des tensions est :

$$\sum_1^n (k - 1) \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{N} \cdot n(n - 1).$$

Celle des déphasages des intensités :

$$\sum_1^n \left[\varphi - k - 1 \frac{2\pi}{N} \right] = n \left[\varphi - \frac{\pi}{N} (n - 1) \right].$$

Et les moyennes :

$$\frac{\pi}{N} (n - 1) \quad \text{et} \quad \varphi - \frac{\pi}{N} (n - 1).$$

c. q. f. d.

TENSION ET INTENSITÉ MOYENNES INSTANTANÉES.

6. Nous aurons pour les déterminer :

$$n e_m^2 = E^2 \sum_1^n \sin^2 \left(\omega t + k - 1 \frac{2\pi}{N} \right) = \frac{n E^2}{2} \left[1 - \frac{\sin n \frac{2\pi}{N}}{n \sin \frac{2\pi}{N}} \cos \left(2\omega t + n - 1 \frac{2\pi}{N} \right) \right]$$

d'où

$$e_m = \frac{E}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{\sin n \frac{2\pi}{N}}{n \sin \frac{2\pi}{N}} \cos \left(2\omega t + n - 1 \frac{2\pi}{N} \right)}.$$

On aurait de même

$$i_m = \frac{I}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{\sin n \frac{2\pi}{N}}{n \sin \frac{2\pi}{N}} \cos \left(2\omega t - 2\varphi + n - 1 \frac{2\pi}{N} \right)}.$$

Au cours d'une période ces moyennes instantanées varient entre les limites :

$$\frac{E}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{\sin n \frac{2\pi}{N}}{n \sin \frac{2\pi}{N}}} \quad \text{et} \quad \frac{E}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{\sin n \frac{2\pi}{N}}{n \sin \frac{2\pi}{N}}}$$

$$\frac{I}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{\sin n \frac{2\pi}{N}}{n \sin \frac{2\pi}{N}}} \quad \text{et} \quad \frac{I}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{\sin n \frac{2\pi}{N}}{n \sin \frac{2\pi}{N}}}$$

7. Dans le cas spécial où $n = N$ on aura :

$$e_m = 0 \quad i_m = 0 \quad e_m = \frac{F}{\sqrt{2}} \quad i_m = \frac{I}{\sqrt{2}}$$

a. Les forces électromotrices instantanées engendrées dans les bobines ou sections génératrices régulièrement distribuées sur une circonférence ou autour d'un centre s'équilibrent exactement.

b. La quantité d'électricité traversant une surface quelconque sectionnant les fils de transport du système n — phasé est à chaque instant nulle.

DES TENSIONS "SIMPLES" ET DES TENSIONS "COMPOSÉES".

8. Considérons les n bornes A, B, C, L, M, N, d'un générateur ou les n bornes A', B', C', L', M', N', d'un récepteur.

Ces appareils sont plongés dans un milieu au potentiel V_0 , celui de la terre. Quand on les active, chaque borne est portée à un potentiel instantané dont le niveau $V - V_0$, pris par rapport au potentiel du milieu, varie suivant une loi sinusoidale. De l'une à l'autre borne, la phase varie de $2\pi/n$ de sorte que l'on

simples constituent un système n — phasé de même variation de phase : $2\pi/n$.

2° Que l'amplitude des tensions composées est égale à $2 \sin \pi/n$ fois l'amplitude des tensions simples.

On aura : $E \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} \mathcal{E}$ suivant que $\sin \frac{\pi}{n} \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$ ou $n \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} 6$.

3° La tension composée d'ordre quelconque est en retard (1) d'un angle $\pi/2 - \pi/n$ sur la première des tensions simples qui la composent et d'un angle $\pi/2 + \pi/n$ sur la seconde.

4° La moyenne des potentiels aux bornes est égale au potentiel du milieu ambiant.

On a en effet

$$V_k = \varepsilon_k + V_o$$

et

$$\sum_1^n V_k = \sum_1^n \varepsilon_k + n V_o = n V_o \text{ ou } V_o = \frac{1}{n} \sum_1^n V_k.$$

10. Réciproquement, à tout système de tensions composées, n —phasé, correspond un système de tensions simples, n — phasé, avancées de $\pi/2 - \pi/n$ pour la première et de $\pi/2 + \pi/n$ pour la seconde et dont l'amplitude est égale à celle des tensions entre-phases divisée par $2 \sin \pi/n$.

Nous avons par hypothèse

$$e_k = E \sin \left(\omega t + \bar{k} - 1 \frac{2\pi}{n} \right), \quad n V_o = \sum_1^n V_k$$

or,

$$\varepsilon_k = V_k - V_o, \text{ donc } \sum \varepsilon_k = \sum V_k - n V_o = 0.$$

(1) M. Philippe Banneux ayant choisi comme courants polyphasés des courants en *avance de phase*, formule générale $e = E_m \sin (\omega t + p 2 \pi/n)$ il y a lieu de remarquer que les retards de ces courants deviendront des avances et vice-versa si, comme le font souvent les praticiens, on considère des courants polyphasés en *retard de phase*, formule générale $e = E_m (\omega t - p 2 \pi/n)$.

Mais

$$e_k = V_k - V_{k+1} = \varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}.$$

Donc

$$\sum_1^{k-1} e_k = \sum_1^{k-1} \varepsilon_k - \sum_1^{k-1} \varepsilon_{k+1} = \varepsilon_1 - \varepsilon_k$$

et

$$\sum_2^n \sum_1^{k-1} e_k = (n-1) \varepsilon_1 - \sum_2^n \varepsilon_k = (n-1) \varepsilon_1 - \sum_1^n \varepsilon_k + \varepsilon_1 = n \varepsilon_1.$$

Par suite

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{n} \sum_2^n \sum_1^{k-1} e_k.$$

D'autre part,

$$\varepsilon_k = \varepsilon_1 - \sum_1^{k-1} e_k = \frac{1}{n} \sum_2^n \sum_1^{k-1} e_k - \sum_1^{k-1} e_k.$$

On sait que

$$\sum_1^{k-1} e_k = E \sum_1^{k-1} \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{n} + k \frac{2\pi}{n} \right) = E \frac{\sin \overline{k-1} \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{n}} \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{n} + k \frac{\pi}{n} \right)$$

c'est-à-dire

$$\sum_1^{k-1} e_k = \frac{E}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \left[\cos \left(\omega t - \frac{\pi}{n} \right) - \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{n} + \overline{k-1} \frac{2\pi}{n} \right) \right]$$

d'où

$$\sum_2^n \sum_1^{k-1} e_k = \frac{E}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \left[\overline{n-1} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{n} \right) + \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{n} \right) \right] - \frac{nE}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{n} \right).$$

Ainsi,

$$\varepsilon_k = \frac{E}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \left[\cos \left(\omega t - \frac{\pi}{n} \right) - \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{n} \right) + \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{n} + \overbrace{k-1}^{\frac{2\pi}{n}} \right) \right]$$

$$\varepsilon_k = \mathcal{E} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} + \overbrace{k-1}^{\frac{2\pi}{n}} \right) \quad \text{où} \quad \mathcal{E} = \frac{E}{2 \sin \frac{\pi}{n}}.$$

La tension simple ε_k est en avance de $\pi/2 - \pi/n$ sur la tension composée e_k et par conséquent en avance de $\pi/2 + \pi/n$ sur la tension composée e_{k-1} .

DES POINTS NEUTRES D'UN CHAMP.

11. Si l'on réunit les bornes d'un générateur ou d'un récepteur en un point quelconque O par n conducteurs de même inductance et plus généralement de même réactance et contenant des forces électromotrices e'_1, e'_2, \dots, e'_n , $n -$ phasées, le potentiel de ce point de concours des fils sera égal au potentiel du milieu et par conséquent constant.

Nous admettrons que la résistance R de ces fils est assez grande pour que le régime des courants n'en soit pas troublé. A l'instant t nous aurons les équations :

$$V_1 - V_o + e'_1 = Ri_1 + L \frac{di_1}{dt}.$$

$$V_2 - V_o + e'_2 = Ri_2 + L \frac{di_2}{dt}.$$

.....

$$V_n - V_o + e'_n = Ri_n + L \frac{di_n}{dt}.$$

En ajoutant membre à membre, il viendra :

$$\sum_1^n V_k - n_c V_o + \sum_1^n e'_k = R \sum_1^n i_k + L \frac{d}{dt} \sum_1^n i_k.$$

Par hypothèse, $\sum_1^n e'_k = 0$. De plus $\sum_1^n i_k = 0$ et aussi la dérivée de cette expression. Cette relation se réduit donc à la condition très simple.

$$V_o = \frac{1}{n} \sum_1^n V_k.$$

On dit parfois qu'un point du champ au potentiel V_o est « neutre ». Un point peut donc être neutre naturellement ou artificiellement. Pour réaliser un point neutre artificiel il suffit d'y réunir métalliquement toutes les bornes actives comme il vient d'être dit.

En particulier, le centre de l'étoile dans le groupement bien connu de ce nom est « neutre », et par conséquent, au même niveau électrique que la terre, si on le raccorde à celle-ci.

CHAPITRE II.

MODES DE MONTAGE DES GÉNÉRATEURS ET DES RÉCEPTEURS.

1. Le transport de l'énergie électrique par courants polyphasés repose sur le principe de la réversibilité des dynamos : alternateurs et moteurs qui, indistinctement, peuvent fonctionner comme producteur d'énergie électrique en consommant de l'énergie mécanique et comme consommateur d'énergie électrique rendue sous forme d'énergie mécanique.

En induisant dans n bobines dites « génératrices » n courants sinusoïdaux ou périodiques régulièrement déphasés, c'est-à-dire en engendrant un système de courants polyphasés par une dépense de travail mécanique, on réalise le générateur à courants polyphasés.

Si dans chacune de ces bobines on lance n courants périodiques uniformément déphasés, le moteur supportant ces bobines se mettra à tourner en sens inverse du générateur précédent en transformant l'énergie électrique dépensée pour l'actionner en énergie mécanique.

Tel sera le récepteur à courants polyphasés.

2. La production et l'utilisation de ces courants diffèrent par le mode de groupement admis pour composer le générateur ou constituer le récepteur.

Les bobines ou « génératrices » ou « réceptrices » pourront être associées :

1° Dans un montage « fermé », « polygonal » ou « en polygone » ;

2° Dans un montage « ouvert » « étoilé » ou en étoile ».

L'association du générateur et du récepteur pourra donc s'opérer de quatre manières différentes en combinant deux à deux les dispositifs définis.

3. Nous nous proposons d'examiner l'effet des genres de montages sur le fonctionnement et de la génératrice et de la réceptrice. Nous les relierons ensuite par les fils de ligne et établirons les rapports nécessaires qui doivent exister entre l'un et l'autre.

DES EFFETS DU GENRE DE MONTAGE.

A. — *Sur le générateur.*

a. *Montage du générateur en « polygone » ou « fermé »* (fig. 2).

4. Les bobines génératrices AB, BC, ... MN, NA sont réunies en série. Les n fils de transport émanent des n « sommets » ou « bornes génératrices » A, B, ..., M, N pour aboutir aux n pôles correspondants du récepteur. Les courants générateurs partiels auront les intensités

$$j_1, j_2, \dots, j_n.$$

Ils remonteront la série des potentiels en se dirigeant des plus bas vers les plus hauts en vertu de l'énergie créatrice.

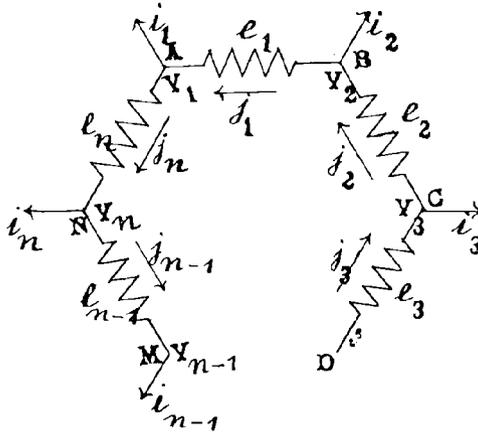


FIG. 2.

5. Les courants extérieurs seront

$$i_1, i_2, \dots, i_n$$

positif ou négatif suivant qu'ils fuiront le générateur ou viendront s'y absorber.

Les potentiels aux bornes auront pour valeurs

$$V_1, V_2, \dots, V_n.$$

6. Les tensions entre-phases seront

$$e_1, e_2, \dots, e_n$$

et les tensions simples

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n.$$

Pour une résistance Υ_p des bobines, les tensions composées seront :

$$e_1 = \Upsilon_p j_1 = V_1 - V_2 = E \sin \omega t$$

$$e_2 = \Upsilon_p j_2 = V_2 - V_3 = E \sin \left(\omega t + \frac{2\pi}{n} \right)$$

$$e_k = \Upsilon_p j_k = V_k - V_{k+1} = E \sin \left(\omega t + \overline{k-1} \frac{2\pi}{n} \right)$$

$$e_n = \Upsilon_p j_n = V_n - V_1 = E \sin \left(\omega t + \overline{n-1} \frac{2\pi}{n} \right).$$

On en déduit

$$\sum_1^n e_k = 0.$$

A chaque instant, les forces électromotrices engendrées dans les n sections génératrices s'équilibrent exactement.

7. On calculera comme suit les courants internes.

En général :

$$j_k = \frac{V_k - V_{k+1}}{\Upsilon_p} = \frac{E}{\Upsilon_p} \sin \left(\omega t + \overline{k-1} \frac{2\pi}{n} \right)$$

c'est-à-dire, en posant

$$J = \frac{E}{\Upsilon_p},$$

$$j_k = J \sin \left(\omega t + \overline{k-1} \frac{2\pi}{n} \right)$$

donc

$$\sum_1^n j_k = 0.$$

Les courants internes, système n - phasé, sont en concordance de phase avec les tensions sectionnaires en l'absence bien entendu de self. Leur amplitude est égale au rapport de la tension maxima E à la résistance Υ_p d'une section.

A chaque instant, dans le générateur, le courant circulaire produit est nul. L'effet de ces courants internes est d'ajouter les tensions entre-phases et de réagir sur le champ.

8. Nous exprimerons les tensions simples en rappelant qu'elles sont en avance de $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n}$ sur la tension composée d'aval et de $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$ sur la tension composée d'amont et que leur amplitude est :

$$\mathcal{E} = \frac{E}{2 \sin \frac{\pi}{n}}$$

En conséquence

$$\varepsilon_k = \mathcal{E} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} + \overline{k-1} \frac{2\pi}{n} \right).$$

9. L'application de la première loi de Kirchhoff en chaque sommet conduit à l'équation générale :

$$i_k = j_k - j_{k-1}$$

d'où

$$i_k = 2J \sin \frac{\pi}{n} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} + \overline{k-1} \frac{2\pi}{n} \right).$$

L'amplitude des courants externes est donc

$$I = 2J \sin \frac{\pi}{n} = 2 \frac{E}{\Upsilon_p} \sin \frac{\pi}{n}.$$

De plus

$$\sum_1^n i_k = 0.$$

Les courants externes, système n - phasé, sont en concordance de phase avec les tensions simples et en avance par conséquent de $\frac{\pi}{2} \mp \frac{\pi}{n}$ sur les deux tensions composées qui leur correspondent.

b. Montage du générateur en étoile.

10. Les n bobines du générateur émanent d'un centre O (fig. 3).

L'extrémité de chacune d'elles aboutit à l'un des fils de ligne par l'intermédiaire d'une borne dont le potentiel variable, en général, est V_k .

Le système des tensions simples étant n — phasé, le centre O de l'étoile sera un point neutre qui se maintiendra au même niveau potentiel V_o .

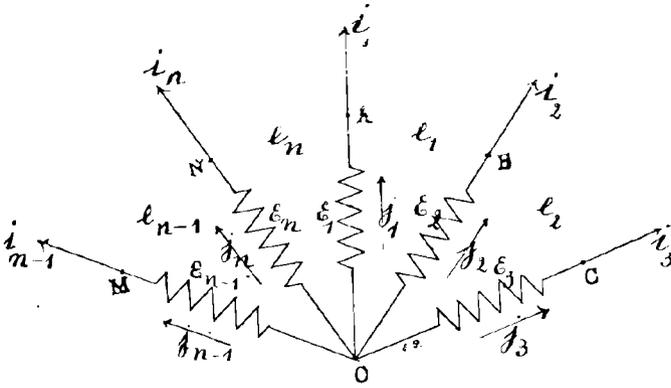


FIG. 3.

11. Pour des tensions entre-phases

$$e_k = E \sin\left(\omega t + \overline{k-1} \frac{2\pi}{n}\right)$$

on aura les tensions simples

$$\epsilon_k = \mathcal{E} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} + \overline{k-1} \frac{2\pi}{n}\right)$$

où

$$\mathcal{E} = \frac{E}{2 \sin \frac{\pi}{n}}$$

12. Les courants internes égaux alors aux courants externes seront :

$$i_k = j_k = \frac{\varepsilon_k}{\Upsilon_e} = I \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} + k - 1 \frac{2\pi}{n}\right)$$

sachant que

$$I = J = \frac{1}{\Upsilon_e} \frac{E}{2 \sin \frac{\pi}{n}}.$$

13. Dans le montage en étoile, comme dans le montage en polygone, les tensions simples et les courants externes sont en concordance de phase et en avance de $\pi/2 \mp \pi/n$ sur les tensions composées.

Il y a égalité entre les courants externes et internes. Mais dans le montage en polygone il y a concordance de phase entre les courants internes et les tensions composées.

14. *Des puissances absorbées.* — Pour une résistance Υ_p des bobines, dans le montage en polygone la puissance absorbée est :

$$P_p = n \Upsilon_p J_{eff}^2 = \frac{n E^2}{2 \Upsilon_p}.$$

Pour une résistance Υ_e dans le mode en étoile la puissance absorbée a pour expression :

$$P_e = n \Upsilon_e J_{eff}^2 = \frac{n}{2} \frac{E^2}{4 \sin^2 \frac{\pi}{n} \cdot \Upsilon_e}.$$

Par suite

$$P_p \Upsilon_p = 4 \sin^2 \frac{\pi}{n} P_e \Upsilon_e.$$

Les puissances absorbées dans les deux modes ne seront égales que si

$$\Upsilon_p = 4 \Upsilon_e \sin^2 \frac{\pi}{n}.$$

Conséquemment, suivant que $2 \sin \frac{\pi}{n} > 1$ ou $n \leq 6$

on devra avoir $\Upsilon_p \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} \Upsilon_e.$

14. Dans les systèmes : biphasé, triphasé, tétraphasé, hexaphasé, on devra avoir :

$$\frac{Y_p}{Y_e} = \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1$$

Pour le décaphasé ce rapport est

$$4 \sin^2 18^\circ = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 0,382.$$

Pour des bobines de même résistance les puissances, dans les deux genres de montage, seront

$$P_p = 4 P_e \sin^2 \frac{\pi}{n}$$

d'où $P_p \begin{matrix} > \\ \cong \\ < \end{matrix} P_e$ suivant que $n \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} 6$.

Dans les cinq cas spéciaux visés ci-dessus il viendra :

$$\frac{P_p}{P_e} = \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 0,382.$$

15. Dans les deux modes de montage on aura pour exprimer soit les intensités extérieures, soit les tensions entre-phases, les relations :

$$I_p = 2 \frac{E_p}{Y_p} \sin \frac{\pi}{n} \qquad I_e = \frac{E_e}{Y_e} \cdot \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{n}}$$

De sorte que pour toutes les valeurs de n ,

$$Y_e Y_p I_e I_p = E_e E_p.$$

A tensions égales : $I_p = 4 \frac{Y_e}{Y_p} \cdot \sin^2 \frac{\pi}{n} I_e$.

A résistances égales : $I_p = 4 \frac{E_p}{E_e} \sin^2 \frac{\pi}{n} I_e$.

Si les tensions entre-phases sont proportionnelles aux résistances

$$\frac{E_p}{Y_p} = \frac{E_e}{Y_e}$$

on aura

$$I_p = 4 \sin^2 \frac{\pi}{n} I_e,$$

de sorte que

$$I_p \begin{matrix} > \\ \cong \\ < \end{matrix} I_e \text{ suivant que } n \begin{matrix} \leq \\ \cong \\ > \end{matrix} 6.$$

Si les intensités sont égales il viendra

$$E_s = 4 \frac{\Upsilon_e}{\Upsilon_p} \sin^2 \frac{\pi}{n} E_p$$

et pour les mêmes résistances

$$E_e = 4 \sin^2 \frac{\pi}{n} E_p,$$

donc

$$E_e \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} E_p \text{ suivant que } n \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 6.$$

16. Dans la pratique, le montage en étoile conduit souvent à un enroulement plus simple que le montage en polygone, surtout pour les machines à haute tension. Il ne faut pas perdre de vue que les forces électromotrices instantanées agissant dans les sections sériées ne s'équilibrent pas toujours très exactement. Il se produit alors dans le cas du montage fermé, un courant circulaire effectif dans l'enroulement induit dont l'effet est d'échauffer les fils et par suite de réduire la puissance transportée et le rendement de la transmission. Dans les machines bien établies, le courant périphérique ne joue qu'un rôle peu important, mais il donne néanmoins lieu à des pertes de puissance qui lui font préférer le montage en étoile.

B. — Sur le récepteur.

a. Montage fermé ou en polygone du récepteur.

17. Les n secteurs du récepteur sont groupés en série. Les n courants du système polyphasé d'alimentation pénètrent dans le récepteur par ses n sommets : $a, b, \dots m, n$. Les courants internes coulent des hauts potentiels vers les bas niveaux électriques (fig. 4).

Les tensions entre-phases au générateur et les intensités des courants en cours de ligne sont :

$$e_k = E \sin \left(\omega t + \overline{k-1} \frac{2\pi}{n} \right)$$

$$i_k = I \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} + \overline{k-1} \frac{2\pi}{n} \right).$$

Nous représenterons les potentiels aux bornes du récepteur, les tensions composées, les tensions simples et les courants internes par V'_1, V'_2, \dots, V'_n ; e'_1, e'_2, \dots, e'_n ; $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_n$; i'_1, i'_2, \dots, i'_n .

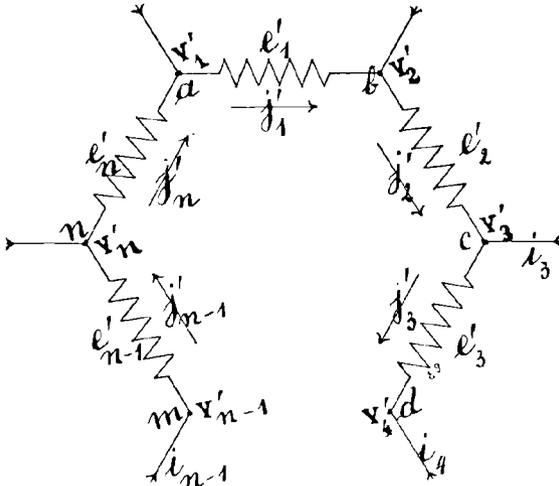


FIG. 4.

Nous aurons

$$e'_k = V'_k - V'_{k+1} = \Upsilon' j'_k$$

de sorte que

$$\sum_1^n e'_k = 0 \qquad \sum_1^n j'_k = 0.$$

A chaque instant dans le récepteur alimenté par un système de courants n — phasés, la tension et le courant circulaires sont nuls.

18. *Tensions composées et courants au récepteur.* — La première loi de Kirchhoff donne :

$$i_k = j'_k - j'_{k-1} \text{ et } \sum_2^k i_k = j'_k - j'_1.$$

Par suite

$$j'_1 = j'_k - \sum_2^k i_k \text{ et } \sum_1^n j'_1 = \sum_1^n j'_k - \sum_1^n \sum_2^k i_k$$

c'est-à-dire

$$n j'_1 = - \sum_1^n \sum_2^k i_k.$$

Or,

$$\sum_2^k i_k = I \sum_2^k \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} - 3 \frac{\pi}{n} + k \frac{2\pi}{n} \right)$$

ou

$$\sum_2^k i_k = \frac{I}{\sin \frac{\pi}{n}} \sin \overline{k-1} \frac{\pi}{n} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} + \overline{k-1} \frac{\pi}{n} \right)$$

et

$$\sum_2^n i_k = \frac{I}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \left[\cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) - \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} + \overline{k-1} \frac{2\pi}{n} \right) \right]$$

ou, encore,

$$\sum_2^n i_k = \frac{I}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \left[\sin \left(\omega t + \overline{k-1} \frac{2\pi}{n} \right) - \sin \omega t \right].$$

En conséquence,

$$\sum_1^n \sum_2^k i_k = - \frac{n I}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \sin \omega t$$

d'où

$$j'_1 = \frac{I}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \sin \omega t.$$

En général,

$$j'_k = j'_1 + \sum_1^k i_k = \frac{I}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \sin \left(\omega t + \overline{k-1} \frac{2\pi}{n} \right) = \frac{I}{2 E \sin \frac{\pi}{n}} e$$

donc

$$e'_k = \frac{Y' I}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \sin \left(\omega t + \overline{k-1} \frac{2\pi}{n} \right) = \frac{Y' I}{2 E \sin \frac{\pi}{n}} e_k.$$

Il s'ensuit que

$$J' = \frac{I}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \text{ ou } I = 2 J' \sin \frac{\pi}{n} \text{ et } E' = Y' J' = \frac{Y' I}{2 \sin \frac{\pi}{n}}.$$

19. *Tensions simples réceptrices* — Le calcul se conduirait de la même manière mais préalablement il faudrait prouver que $\sum_1^n \varepsilon'_k = 0$.

Pour établir ces tensions simples, désignons par R la résistance des fils de ligne de façon que

$$V_k = V'_k + R i_k, \quad \sum_1^n V_k = \sum_1^n V'_k \quad V_o = V'_o$$

or,

$$\varepsilon'_k = V'_k - V'_o \quad \text{où} \quad V'_o = \frac{\sum_1^n V'_k}{n} = V_o$$

Donc

$$\sum_1^n \varepsilon'_k = \sum_1^n V'_k - n V_o.$$

D'autre part,

$$e'_k = (V'_k - V_o) - (V'_{k+1} - V_o) = V'_k - V'_{k+1} = \varepsilon'_k - \varepsilon'_{k+1}$$

d'où,

$$\sum_1^{k-1} e'_k = \varepsilon'_1 - \varepsilon'_k \text{ et } \sum_1^n \sum_1^{k-1} e'_k = n \varepsilon'_1 - \sum_1^n \varepsilon'_k.$$

donc

$$n \varepsilon'_1 = \sum_1^n \sum_1^{k-1} e'_k.$$

Mais

$$\sum_1^{k-1} e'_k = E' \sum_1^{k-1} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{n} + k \frac{2\pi}{n}\right) = \frac{E'}{\sin \frac{\pi}{n}} \sin \overline{k-1} \frac{\pi}{n} \sin\left(\omega t + \overline{k-2} \frac{2\pi}{n}\right)$$

d'où

$$\sum_1^{k-1} e'_k = \frac{E'}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \left[\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{n}\right) - \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{n} + \overline{k-1} \frac{2\pi}{n}\right) \right]$$

donc
$$\sum_1^n \sum_1^{k-1} e'_k = \frac{n E'}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{n}\right)$$

de sorte que

$$e'_1 = \frac{E'}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{n}\right)$$

En conséquence,

$$e'_k = e'_1 - \sum_1^{k-1} e'_k = \frac{E'}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{n} + \overline{k-1} \frac{2\pi}{n}\right)$$

ou

$$e'_k = \mathcal{G}' \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} + \overline{k-1} \frac{2\pi}{n}\right)$$

avec la condition

$$\mathcal{G}' = \frac{E'}{2 \sin \frac{\pi}{n}}$$

20. Les tensions simples et les tensions composées au récepteur sont des systèmes n — phasés de même variation de phase.

Les tensions simples sont en concordance de phase avec les courants alimentaires et par conséquent avec les tensions simples génératrices.

Les tensions composées au récepteur sont en concordance de phase avec les tensions composées génératrices; par suite, elles sont décalées en arrière des tensions simples correspondantes d'angles $\pi/2 \pm \pi/n$ suivant que l'on considère l'une ou l'autre tensions composées adjacente à la tension simple.

b. *Montage ouvert ou en étoile du récepteur.*

21. Les courants alimentaires pénètrent dans les bobines centrales autour du centre O commun (fig. 5). En général :

$$j'_k = i_k = I \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} + \overline{k-1} \frac{2\pi}{n}\right).$$

Ainsi

$$J' = I \text{ et } \varepsilon'_k = \gamma' i_k \text{ ou } \mathcal{E}' = \gamma' J' = \gamma' I.$$

Les tensions entre-phases seront :

$$e'_k = V'_k - V'_{k+1} = (V'_k - V'_o) - (V'_{k+1} - V'_o) = \varepsilon'_k - \varepsilon'_{k+1} = \gamma' (i'_k - i'_{k+1})$$

donc

$$e'_k = \gamma' I \left[\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} + \overline{k-1} \frac{2\pi}{n}\right) - \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} + \overline{k} \frac{2\pi}{n}\right) \right]$$

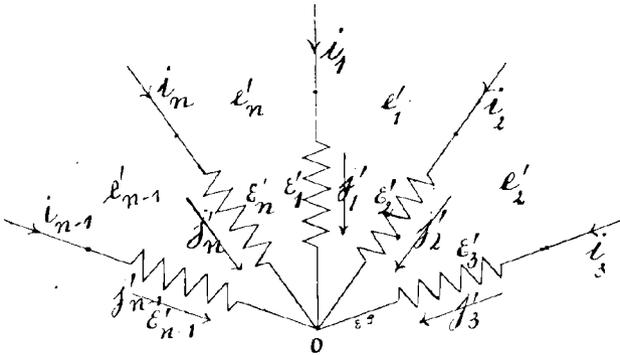


FIG. 5.

c'est-à-dire

$$e'_k = -2 \gamma' I \sin \frac{\pi}{n} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} + 2 \overline{k-1} \frac{\pi}{n}\right)$$

ou

$$e'_k = E' \sin\left(\omega t + \overline{k-1} \frac{2\pi}{n}\right) \text{ où } E' = 2 \gamma' I \sin \frac{\pi}{n} = 2 \mathcal{E}' \sin \frac{\pi}{n}.$$

22. Les tensions simples réceptrices sont en concordance de phase avec les courants alimentaires et les tensions simples génératrices.

Les tensions composées réceptrices sont en concordance de

phase avec les tensions composées génératrices et en retard sur les tensions simples de $\pi/2 \pm \pi/n$.

L'amplitude des tensions composées au récepteur est égale à $2 \sin \pi/n$ fois l'amplitude des tensions simples réceptrices.

23. *Des puissances captées.* — Au récepteur monté en polygone, pour une résistance Υ'_p des bobines, on aura une puissance récupérée :

$$P'_p = n \Upsilon'_p J_{eff}^2 = \frac{n}{2} \Upsilon'_p J^2 = \frac{n}{8 \sin^2 \frac{\pi}{n}} \Upsilon'_p I^2.$$

Au récepteur monté en étoile, pour une résistance Υ'_e ,

$$P'_e = n \Upsilon'_e I_{eff}^2 = \frac{n}{2} \Upsilon'_e I^2$$

de sorte que

$$P'_e = 4 \sin^2 \frac{\pi}{n} \cdot \frac{\Upsilon'_e}{\Upsilon'_p} P'_p.$$

Au générateur nous avons :

$$P_p = 4 \sin^2 \frac{\pi}{n} \cdot \frac{\Upsilon_e}{\Upsilon_p} P_e.$$

On en déduit pour toutes les valeurs de n ,

$$\frac{\Upsilon_e}{\Upsilon_p} P_e P'_e = \frac{\Upsilon'_e}{\Upsilon'_p} P_p P'_p.$$

Si les puissances captées sont égales dans les deux modes on devra avoir :

$$\Upsilon'_p = 4 \sin^2 \frac{\pi}{n} \cdot \Upsilon'_e, \text{ donc } \Upsilon'_p \gtrless \Upsilon'_e \text{ suivant que } n \lesseqgtr 6.$$

Pour une même résistance des bobines réceptrices :

$$P'_e = 4 \sin^2 \frac{\pi}{n} \cdot P'_p, \text{ donc } P'_e \gtrless P'_p \text{ suivant que } n \lesseqgtr 6.$$

Récapitulation des Résultats précédents.

ÉLÉMENTS	GÉNÉRATEURS MONTÉS EN		RÉCEPTEURS MONTÉS EN	
	POLYGONE	ÉTOILE	POLYGONE	ÉTOILE
I				
Tensions entre-phases	$e_k = E \sin \left(\omega t + k-1 \frac{2\pi}{n} \right)$		$e'_k = E' \sin \left(\omega t + k-1 \frac{2\pi}{n} \right)$	
Amplitudes	E		$E' = \frac{Y I}{2 \sin \frac{\pi}{n}}$	$E' = 2Y I \sin \frac{\pi}{n}$
Déphasages	$k-1 \frac{2\pi}{n}$		$k-1 \frac{2\pi}{n}$	
II				
Tensions en phases	$e_k = \mathcal{E} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} + k-1 \frac{2\pi}{n} \right)$		$e'_k = \mathcal{E}' \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} + k-1 \frac{2\pi}{n} \right)$	
Amplitudes	$\mathcal{E} = \frac{E}{2 \sin \frac{\pi}{n}}$		$\mathcal{E}' = \frac{E'}{2 \sin \frac{\pi}{n}}$	
Déphasages	$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} + k-1 \frac{2\pi}{n}$		$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} + k-1 \frac{2\pi}{n}$	

III

Courants extérieurs

Amplitudes

$$I = 2 \frac{E}{V_p} \sin \frac{\pi}{n}$$

$$I = \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \frac{E}{V_e}$$

$$i_k = I \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} + \overline{k-1} \frac{2\pi}{n} \right)$$

I

Déphasages

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} + \overline{k-1} \frac{2\pi}{n}$$

IV

Courants intérieurs

Amplitudes

$$J = \frac{E}{V_p}$$

$$J = I = \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \frac{E}{V_e}$$

$$J = \frac{I}{2 \sin \frac{\pi}{n}}$$

J = I

Déphasages

$$\overline{k-1} \frac{2\pi}{n}$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} + \overline{k-1} \frac{2\pi}{n}$$

$$\overline{k-1} \frac{2\pi}{n}$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} + \overline{k-1} \frac{2\pi}{n}$$

V

Puissances absorbées et captées

$$\frac{n E^2}{2 V_p} = \frac{n V_p I^2}{8 \sin^2 \frac{\pi}{n}}$$

$$\frac{n V_e I^2}{2} = \frac{n E^2}{8 \sin^2 \frac{\pi}{n}} \frac{V_e}{V_e}$$

$$\frac{n V_p I^2}{2} = \frac{n E^2}{8 \sin^2 \frac{\pi}{n}} \frac{V_e}{V_e}$$

$$\frac{n V_e I^2}{2} = \frac{n E^2}{8 \sin^2 \frac{\pi}{n}} \frac{V_e}{V_e}$$

1. — Les tensions entre-phasés au générateur et au récepteur sont en concordance de phase.

2. — Les tensions simples au générateur et au récepteur sont en concordance de phase avec les courants externes en avance de $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$ sur les tensions composées de même rang.

3. — Les courants intérieurs sont en concordance de phases avec les tensions composées génératrices ou réceptrices pour le montage en polygone et en avance de $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$ pour le montage en étoile.

CAS SPÉCIAL DU SYSTÈME BIPHASÉ.

24. Dans ce cas : $n = 2$. Les deux bobines génératrices et les deux bobines réceptrices émettent et absorbent des courants décalés de $2\pi/2 = \pi$ ou d'un demi tour.

Au générateur, on aura :

$$e_1 = E \sin \omega t \quad e_2 = E \sin (\omega t + \pi) = - E \sin \omega t.$$

Le décalage des tensions simples et des courants de ligne sera :

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} = 0.$$

De sorte que

$$\varepsilon_1 = \mathcal{E} \sin \omega t \quad \varepsilon_2 = \mathcal{E} \sin (\omega t + \pi) = - \mathcal{E} \sin \omega t.$$

où

$$\mathcal{E} = \frac{E}{2 \sin \frac{\pi}{2}} = \frac{E}{2}$$

et, suivant le mode de montage,

$$J = \frac{E}{\Upsilon_o} \quad J = \frac{1}{2} \frac{E}{\Upsilon_o}.$$

Enfin, au générateur toujours, et en cours de ligne,

$$i_1 = I \sin \omega t \quad i_2 = I \sin (\omega t + \pi) = - I \sin \omega t = - i_1,$$

où, suivant le mode de groupement des deux bobines,

$$I = 2 J \sin \frac{\pi}{n} = 2 J = 2 \frac{E}{\Upsilon_o} \quad I = J = \frac{1}{2} \frac{E}{\Upsilon_o}.$$

Au récepteur, il viendra

$$e'_1 = E' \sin \omega t, \quad e'_2 = E' \sin (\omega t + \pi) = - E' \sin \omega t$$

avec la condition, suivant le groupement des bobines,

$$E' = \frac{1}{2} \Upsilon' I \quad E' = 2 \Upsilon' I.$$

D'autre part,

$$j'_1 = J' \sin \omega t, \quad j'_2 = J' \sin (\omega t + \pi) = - J' \sin \omega t$$

sachant que $J' = \frac{1}{2} I$ ou $J' = I$.

Enfin,

$$\varepsilon'_1 = \mathcal{E}' \sin \omega t, \quad \varepsilon'_2 = \mathcal{E}' \sin (\omega t + \pi) = - \mathcal{E}' \sin \omega t$$

où

$$\mathcal{E}' = \frac{E'}{2} = \frac{\gamma' I}{4}, \quad \mathcal{E}' = \frac{E'}{2} = \gamma' I.$$

Un même courant sinusoïdal, dégagé par le générateur, traverse le récepteur et rentre à son origine par le second fil de ligne. C'est purement et simplement le système " monophasé ".

Les puissances absorbées et captées seront :

$$P_p = 2 \gamma_p J_{eff}^2 = \frac{E^2}{\gamma_p} \quad P'_p = 2 \gamma'_p J'^2_{eff} = \gamma'_p J'^2 = \frac{1}{4} \gamma'_p I^2$$

$$P_e = 2 \gamma_e J^2_{eff} = \frac{1}{4} \frac{E^2}{\gamma_e} \quad P'_e = 2 \gamma'_e I^2_{eff} = \gamma'_e I^2$$

$$P_p = 4 \frac{\gamma_e}{\gamma_p} P_e \quad P'_e = 4 \frac{\gamma_e}{\gamma'_p} P'_p.$$

Si les puissances sont égales dans les deux groupements on devra avoir :

$$\gamma_p = 4 \gamma_e \quad \gamma'_p = 4 \gamma'_e.$$

Si les résistances sont les mêmes :

$$P_p = 4 P_e \quad P'_e = 4 P'_p.$$

CHAPITRE III.

DU TRANSPORT DE L'ÉNERGIE ÉLECTRIQUE.

A. — *Courant continu et courant monophasé.*

1. Sous la tension E on lance dans le fil d'aller de résistance R un courant d'intensité I qui alimente le récepteur de résistance Y' . Ce courant est ramené au générateur par le fil de retour de résistance R' . Si le courant est monophasé, la tension E est la force électromotrice efficace. Si le courant est continu, E est la tension constante telle qu'elle est produite. Ces tensions engendrent un courant d'intensité invariable I ou un courant oscillatoire d'intensité efficace I .

Dans les deux cas la puissance dépensée sera :

$$P = E I \text{ watts} = (R + R' + Y') I^2.$$

La puissance captée :

$$P_u = P\rho = Y' I^2 \text{ watts}$$

ρ étant le rendement de la transmission.

La puissance perdue a pour valeur

$$P(1 - \rho) = (R + R') I^2 \text{ watts.}$$

De sorte que

$$\rho = \frac{P_u}{P} = \frac{Y'}{R + R' + Y'} \quad \text{d'où} \quad Y' = \frac{\rho}{1 - \rho} (R + R').$$

Les tensions génératrice et réceptrice seront

$$E = (R + R' + Y') I, \quad E' = Y' I.$$

Conséquemment,

$$\rho = \frac{E'}{E} \quad \text{et} \quad 1 - \rho = \frac{E - E'}{E}.$$

Le rendement de la transmission est représenté par le rapport des tensions réceptrice et génératrice.

La perte relative de tension sur la ligne est égale au complément à l'unité du rendement de la transmission.

2. Quant au poids des câbles, il sera :

$$\pi = K l^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right)$$

l est la portée du transport ; K une constante dépendant de la nature du conducteur.

On déduit de ces formules, en posant $R = \alpha R'$

$$R + R' = \frac{P}{I^2} (1 - \rho) = \frac{E^2}{P} (1 - \rho)$$

et

$$R' = \frac{E^2 (1 - \rho)}{P (1 + \alpha)}, \quad R = \frac{E^2 (1 - \rho)}{P} \frac{\alpha}{1 + \alpha}$$

En conséquence,

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{P}{E^2 (1 - \rho)} \frac{(1 + \alpha)^2}{\alpha}$$

et

$$\pi = K \frac{P l^2}{E^2 (1 - \rho)} \frac{(1 + \alpha)^2}{\alpha}$$

Si les conducteurs sont identiques, $R = R'$ et $\alpha = 1$.

Donc

$$\pi_0 = \frac{4 K P l^2}{E^2 (1 - \rho)}$$

et, en général,

$$\pi = \frac{\pi_0}{4} \left(\frac{1}{\alpha} + \sqrt{\alpha} \right)^2$$

Ce poids π des câbles varie avec le rapport α . Il est visible-ment minimum pour $\alpha = 1$ et sa valeur π_0 correspond au cas de deux câbles identiques.

3. *De la tension possible.* — Nous avons admis que la tension efficace en monophasé était égale à la tension en continu. Si l'on assigne la valeur de celle-ci comme limite à ne pas dépasser, il faudra en courant oscillatoire substituer, dans

les formules précédentes, à la tension E , la valeur réduite $\frac{E}{\sqrt{2}}$ ce qui fera s'élever l'intensité nouvelle à $\frac{P}{E} \sqrt{2} = I \sqrt{2}$. Pour une même résistance R de ligne la perte d'énergie sera double puisqu'elle est proportionnelle à $(I \sqrt{2})^2 = 2 I^2$ ce qui conduira à doubler la section des conducteurs et par conséquent leur poids.

Ce poids aura pour valeur

$$\pi_1 = \frac{4 K P l^2}{E^2 (1 - \rho)} = 2 \frac{4 K P l^2}{E^2 (1 - \rho)} = 2 \pi_0.$$

4. *Conclusions.* — Pour transmettre une même puissance, à une même distance avec un même rendement en courant continu et en courant monophasé :

1° Il faut le même poids de métal de ligne si les tensions efficaces sont égales dans les deux cas ;

2° Il faut, en alternatif, un poids de métal double si on assigne à la tension limite du courant variable la valeur de la tension continue dans l'autre hypothèse.

B. — *Solution générale du problème de la transmission de l'énergie électrique par courants n — phasés dans un réseau dénué d'inductance.*

5. On donne les n bornes A, B, C, ... N du générateur.

Un fil conducteur qui aboutit à chacune d'elles conduit le courant à la borne correspondante du récepteur en traversant une résistance de ligne R .

On donne la puissance P watts à transmettre ; l'amplitude E efficace des tensions entre-phases au générateur monté soit en polygone soit en étoile ainsi que le rendement ρ de la transmission.

On se propose de calculer tous les éléments de transport d'énergie et notamment le poids de cuivre des n câbles de ligne.

6. Les tensions génératrices, en valeurs efficaces, seront :

$$e_k = E \sin \left(\omega t + \overline{k-1} \frac{2\pi}{n} \right).$$

Il devra naturellement exister entre cette amplitude efficace E , la puissance P à transmettre, la résistance R à vaincre sur chaque conducteur et Υ dans chaque secteur du récepteur, l'amplitude I des courants externes, le rendement ρ de la transmission et le nombre n des phases, des relations nécessaires.

Dans tous les cas, les courants externes seront :

$$i_k = I \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} + \overline{k-1} \frac{2\pi}{n} \right).$$

Au récepteur, nous aurons à distinguer le montage en polygone du montage en étoile.

a. *Le récepteur est monté en polygone.*

7. Les courants récepteurs auront pour valeurs :

$$i'_k = J' \sin \left(\omega t + \overline{k-1} \frac{2\pi}{n} \right) = \frac{J'}{E} e_k, \quad J' = \frac{I}{2 \sin \frac{\pi}{n}}$$

et les tensions entre-phases :

$$e'_k = \Upsilon j'_k = E' \sin \left(\omega t + \overline{k-1} \frac{2\pi}{n} \right), \quad E' = \Upsilon J' = \frac{\Upsilon I}{2 \sin \frac{\pi}{n}}.$$

Quant aux tensions simples, nous obtiendrons :

$$e'_k = \mathcal{G}' \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} + \overline{k-1} \frac{2\pi}{n} \right)$$

$$\mathcal{G}' = \frac{E'}{2 \sin \frac{\pi}{n}} = \frac{\Upsilon I}{4 \sin^2 \frac{\pi}{n}}.$$

8. Dans le réseau partiel formé par les bornes K , L du générateur et k , l du récepteur (fig. 6) nous pourrons écrire :

$$e_k = R(i_k - i_{k-1}) + \Upsilon j'_k \text{ d'où } e_k \left(1 - \frac{\Upsilon I}{2 E \sin \frac{\pi}{n}} \right) = R(i_k - i_{k+1})$$

or,

$$i_k - i_{k+1} = I \left[\sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} + k - 1 \frac{2\pi}{n} \right) - \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} + k \frac{2\pi}{n} \right) \right]$$

d'où

$$R (i_k - i_{k+1}) = 2 R I \sin \frac{\pi}{n} \sin \left(\omega t + k - 1 \frac{2\pi}{n} \right) = \frac{2 R I}{E} \sin \frac{\pi}{n} e_k.$$

On en déduit :

$$2 E \sin \frac{\pi}{n} = I \left(\Upsilon + 4 R \sin^2 \frac{\pi}{n} \right) \quad \text{et} \quad I = \frac{2 E \sin \frac{\pi}{n}}{\Upsilon + 4 R \sin^2 \frac{\pi}{n}}.$$

9. La puissance totale aux bornes du générateur est :

$$P = n \left(R I^2 + \Upsilon J^2 \right) = n J^2 \left(\Upsilon + 4 R \sin^2 \frac{\pi}{n} \right) = n E J' = \frac{n E I}{2 \sin \frac{\pi}{n}}.$$

La puissance utile récupérée :

$$P_u = n \Upsilon J^2.$$

10. Le rendement de la transmission :

$$\rho = \frac{P_u}{P} = \frac{\Upsilon}{\Upsilon + 4 R \sin^2 \frac{\pi}{n}}$$

d'où, pour un rendement donné,

$$\Upsilon = \frac{\rho}{1 - \rho} 4 R \sin^2 \frac{\pi}{n}.$$

Mais

$$E' = \Upsilon J' = \frac{\Upsilon}{\Upsilon + 4 R \sin^2 \frac{\pi}{n}} E = \rho E$$

de sorte que

$$\rho = \frac{E'}{E} = \frac{\mathcal{E}'}{\mathcal{E}} \quad \text{et} \quad 1 - \rho = \frac{E - E'}{E} = \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}'}{\mathcal{E}}.$$

Le rendement de la transmission est égal au rapport des tensions réceptrice et génératrice, simples ou composées.

Le rendement de la ligne, $1 - \rho$, exprime la perte relative des tensions simples ou composées en cours de ligne.

11. L'expression de la puissance perdue

$$P (1 - \rho) = n R I^2 \quad \text{conduit à} \quad R = \frac{P (1 - \rho)}{n I^2}.$$

Mais,

$$I = \frac{2 P \sin \frac{\pi}{n}}{n E} \quad \text{de sorte que} \quad R = \frac{n (1 - \rho) E^2}{4 P \sin^2 \frac{\pi}{n}}.$$

12. Le poids des conducteurs sera :

$$\pi_n = n K \frac{l^2}{R} = \frac{4 K P l^2}{(1 - \rho) E^2} \sin^2 \frac{\pi}{n} = \pi_o \sin^2 \frac{\pi}{n}$$

π_o représentant le poids de cuivre dans le système biphasé ou monophasé de même tension efficace E ou en courant continu de tension constante E .

13. Le poids de cuivre de ligne nécessaire pour transporter une même puissance, à la même distance, avec le même rendement est égal à $\sin^2 \frac{\pi}{n}$ fois le poids de cuivre relatif au courant continu dont la tension constante aurait la valeur de la force électromotrice efficace du système ou du courant monophasé de même tension.

Si, en polyphasé, la tension ne peut, en aucun instant, dépasser la tension constante du courant continu, le poids de cuivre dans le système polyphasé doublera.

En effet la tension efficace qui intervient alors est $E/\sqrt{2}$ et le poids des câbles :

$$\pi_n = 2 \frac{4 K P l^2}{E^2 (1 - \rho)} \sin^2 \frac{\pi}{n} = 2 \pi_o \sin^2 \frac{\pi}{n}.$$

14. Dans tous les systèmes n -phasés, le rapport du poids de cuivre au carré du sinus de la demi-variation de phase est constant et égal au poids simple ou au poids double du cuivre

en courant continu suivant que la transmission pourra ou ne pourra pas supporter la haute tension. On aura effectivement :

$$\frac{\pi_{n'}}{\sin^2 \frac{\pi}{n'}} = \frac{\pi_n}{\sin^2 \frac{\pi}{n}} = \pi_0 \quad \text{ou} \quad 2\pi_0.$$

Ainsi

$$4\pi_6 = 2\pi_4 = \frac{4}{3}\pi_3 = \pi_0 \quad \text{ou} \quad 2\pi_0.$$

ou

$$\pi_3 = \frac{3}{4}\pi_0 \quad \text{ou} \quad \frac{3}{2}\pi_0$$

$$\pi_4 = \frac{\pi_0}{2} \quad \text{ou} \quad \pi_0$$

$$\pi_6 = \frac{\pi_0}{4} \quad \text{ou} \quad \frac{\pi_0}{2}.$$

b. *Le récepteur est monté en étoile.*

15. Nous savons que :

$$i_k = j'_k = I \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} + \overline{k-1} \frac{2\pi}{n} \right), \quad I = J'$$

$$e'_k = Y i_k = \mathcal{E}' \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} + \overline{k-1} \frac{2\pi}{n} \right), \quad \mathcal{E}' = Y L = Y J'.$$

Dans le réseau partiel K L k l (fig. 7) on trouve :

$$e_k = (R + Y) (i_k - i_{k+1})$$

or,

$$i_k - i_{k+1} = I \left[\sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} + \overline{k-1} \frac{2\pi}{n} \right) - \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} + k \frac{2\pi}{n} \right) \right]$$

c'est-à-dire

$$2I \sin \frac{\pi}{n} \sin \left(\omega t + \overline{k-1} \frac{2\pi}{n} \right).$$

Donc

$$e'_k = \Upsilon(i_k - i_{k+1}) = E' \sin\left(\omega t + \overline{k-1} \frac{2\pi}{n}\right), \quad E' = 2 I \Upsilon \sin \frac{\pi}{n}$$

et

$$e_k = E \sin\left(\omega t + \overline{k-1} \frac{2\pi}{n}\right) = 2I(R + \Upsilon) \sin \frac{\pi}{n} \sin\left(\omega t + \overline{k-1} \frac{2\pi}{n}\right).$$

Ce qui conduit à

$$E = 2(R + \Upsilon) I \sin \frac{\pi}{n} \quad \text{et} \quad I = J' = \frac{E}{2(R + \Upsilon) \sin \frac{\pi}{n}}.$$

16. La puissance totale produite aux bornes du générateur

$$\text{est :} \quad P = n(R I^2 + \Upsilon J'^2) = n(R + \Upsilon) I^2 = \frac{n E I}{2 \sin \frac{\pi}{n}}.$$

Conséquemment

$$I = \frac{2 P \sin \frac{\pi}{n}}{n E}.$$

comme dans le cas de montage en polygone.

17. La puissance utile :

$$P_u = n \Upsilon J'^2 = n \Upsilon I^2.$$

18. Et le rendement :

$$\rho = \frac{P_u}{P} = \frac{\Upsilon}{R + \Upsilon} \quad \text{d'où} \quad \Upsilon = \frac{\rho}{1 - \rho} R.$$

19. Des relations :

$$E' = 2 I \Upsilon \sin \frac{\pi}{n}, \quad E = 2(R + \Upsilon) I \sin \frac{\pi}{n}$$

on déduit :

$$\rho = \frac{E'}{E} = \frac{\mathcal{E}'}{\mathcal{E}} = \frac{Y}{R + Y}$$

$$1 - \rho = \frac{E - E'}{E} = \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}'}{\mathcal{E}} = \frac{R}{R + Y}$$

20. Comme dans le premier mode de montage :

1° Le rendement de la transmission est égal au rapport des tensions composées ou simples au récepteur et au générateur ;

2° Le rendement de la ligne est égal aux pertes relatives des tensions simples ou des tensions composées aux deux extrémités de la ligne.

21. L'expression de la puissance perdue conduit au poids des câbles.

On aura :

$$P(1 - \rho) = n R I^2 = \frac{4 P^2 \sin^2 \frac{\pi}{n}}{n E^2} R$$

donc

$$R = \frac{n E^2 (1 - \rho)}{4 P \sin^2 \frac{\pi}{n}}$$

Par suite

$$\pi_n = \frac{4 K P l^2}{E^2 (1 - \rho)} \sin^2 \frac{\pi}{n} = \pi_0 \sin^2 \frac{\pi}{n}$$

Quel que soit le mode de montage du générateur et du récepteur le poids de cuivre est le même pour une puissance à transmettre assignée, une distance à franchir, un rendement fixé et une tension donnée entre-phases.

SOLUTION ÉLÉMENTAIRE DU PROBLÈME DU TRANSPORT DE L'ÉNERGIE ÉLECTRIQUE.

22. On peut très rapidement établir les formules qui précèdent en recourant à une forme de démonstration commode et aisée mais qui n'est pas de tout repos bien que très en vogue

dans le monde des Electriciens. Il faut d'abord plaider en faveur de la méthode et pour cela on peut déclarer :

1° Que tous les éléments variables engagés dans la question du transport de l'énergie pour courants n -phasés sont soumis à une même loi ;

2° Qu'à chaque instant on peut augmenter ou diminuer la phase de chaque élément de k fois $2\pi/n$ sans apporter à l'ensemble d'autre changement que celui de voir remplacer chaque section par la $k^{\text{ième}}$ qui suit. Ce qui revient à modifier l'origine du temps.

3° Que les courants i_k et j'_k sont donc des fonctions de même période que les tensions e_k comportant des variations de phases identiques.

Tout cela paraît incontestable. Et on ajoute : Que la loi des variations des courants engendrés est la même que celle des tensions génératrices. En particulier, si cette loi est sinusoïdale, il en sera de même de celle des intensités des courants.

24. Nous pourrons donc écrire suivant ces prémisses :

$$e_k = E \sin \left(\omega t + \frac{k-1}{n} 2\pi \right) = E \sin x$$

en posant, pour un instant,

$$x = \omega t + \frac{k-1}{n} 2\pi$$

$$i_k = I \sin (x + a)$$

$$j'_k = J' \sin (x + b).$$

Il faudra déterminer I , J' , a et b , en fonction de E , R , Υ , n .

On y arrive aisément au moyen des équations des réseaux partiels.

a. — Récepteur monté en polygone. — L'épure (fig. 6) nous permettra d'écrire :

$$e_k = R (i_k - i_{k+1}) - \Upsilon j'_k$$

$$i_k = j'_{k-1} - j'_k.$$

Mais :

$$i_k - i_{k+1} = 2 I \sin \frac{\pi}{n} \sin \left(\omega t + a - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n} \right)$$

$$j'_{k-1} - j'_k = 2 J' \sin \frac{\pi}{n} \sin \left(\omega t + b + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} \right).$$

On en conclut :

$$I \sin (x + a) = 2 J' \sin \frac{\pi}{n} \sin \left(\omega t + b + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} \right).$$

Ce qui prouve que :

$$I = 2 J' \sin \frac{\pi}{n}, \quad a = b + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}.$$

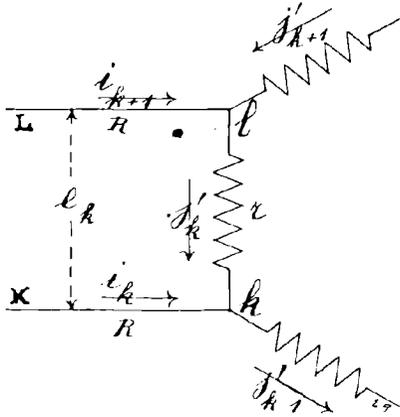


FIG. 6.

D'autre part,

$$e_k = E \sin x = \left(2 R I \sin \frac{\pi}{n} + Y J' \right) \sin (x + b).$$

En conséquence,

$$b = 0.$$

$$E = 2 R I \sin \frac{\pi}{n} + Y J' = \frac{Y + 4 R \sin^2 \frac{\pi}{n}}{2 \sin \frac{\pi}{n}} I$$

et

$$a = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}.$$

$$I = \frac{2 E \sin \frac{\pi}{n}}{\Upsilon + 4 R \sin^2 \frac{\pi}{n}}, \quad J' = \frac{E}{\Upsilon + 4 R \sin^2 \frac{\pi}{n}}.$$

Enfin :

$$i_k = I \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} + k - 1 \frac{2\pi}{n} \right)$$

$$j'_k = J' \sin \left(\omega t + k - 1 \frac{2\pi}{n} \right)$$

résultats connus.

b. — Récepteur monté en étoile. — 25. Les équations du réseau partiel seront (fig. 7) :

$e_k = (R + \Upsilon) (i_k - i_{k+1})$, $i_k = j'_k$, de sorte que $I = J'$ et $a = b$;

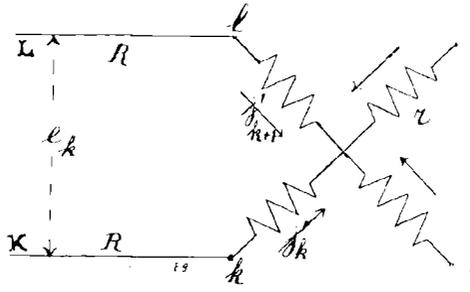


FIG. 7.

donc

$$e_k = E \sin x = 2(R + \Upsilon) I \sin \frac{\pi}{n} \sin \left(\omega t + a - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n} + k - 1 \frac{2\pi}{n} \right)$$

Conséquemment :

$$a = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}, \quad E = 2(R + \Upsilon) I \sin \frac{\pi}{n}$$

$$J' = I = \frac{E}{2(R + \Upsilon) \sin \frac{\pi}{n}}$$

et

$$i_k = j_k = I \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} + \overline{k-1} \frac{2\pi}{n} \right)$$

comme il fallait s'y attendre.

26. *Étude des rendements.* — Comparons les deux rendements :

$$\rho_p = \frac{\Upsilon}{\Upsilon + 4 R \sin^2 \frac{\pi}{n}}, \quad \rho_e = \frac{\Upsilon}{\Upsilon + R}$$

pour les deux modes de montage au récepteur.

Nous aurons :

$$\rho_p \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \rho_e \quad \text{suivant que} \quad 2 \sin \frac{\pi}{n} \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} 1 \text{ ou } n \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 6.$$

Le rendement ρ_e est le même pour toutes les valeurs de n .

Le rendement ρ_p varie avec n de telle façon que si $n = 1$, $\rho_{p1} = 1$ et si $n \rightarrow \infty$, $\rho_{px} \rightarrow$ l'unité.

$$\rho_p \text{ est minimum pour } n = 2 \text{ et alors } \rho_{p,\text{min.}} = \frac{\Upsilon}{\Upsilon + 4 R}.$$

27. *Courbes des rendements variables ou non avec n .*

Si λ est la longueur représentant l'unité de rendement on aura :

$$\rho_e = \frac{\lambda}{1 + \mu} \quad \text{et} \quad R = \mu \Upsilon$$

$$\rho_p = \frac{\lambda}{1 + 4 \mu \sin^2 \frac{\pi}{n}} = \frac{\lambda}{1 + 2 \mu - 2 \mu \cos \frac{2\pi}{n}}$$

ou, en posant

$$p = \frac{\lambda}{1 + 2 \mu}, \quad e = \frac{2 \mu}{2 \mu + 1}, \quad \theta = \frac{2\pi}{n}$$

$$\rho_p = \frac{p}{1 - e \cos \theta}.$$

Quand n varie de 1 à ∞ , l'angle θ varie de 2π à zéro.

Admettons, pour fixer les idées, que $\mu = \frac{1}{5}$. Il viendra :

$$a = \frac{14}{18} \lambda = 0,7778 \lambda = OA = OA'$$

$$b = \frac{\lambda}{\sqrt{1,8}} = 0,7463 \lambda = OB = OB'$$

$$e = \frac{2}{7} = 0,2856$$

$$c = \frac{2}{9} \lambda = 0,2222 \lambda = OF = OF'$$

$$p = \frac{5}{7} \lambda = 0,7143 \lambda = FE = FE'$$

$$\rho_e = \frac{\lambda}{1,2} = 0,8333 \lambda.$$

Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{3}$ c'est-à-dire $n = 4$ ou 6 on obtient :

$$\rho_{p.4} = p = \frac{\lambda}{1 + 2\mu} = FE' = FE = 0,7143 \cdot \lambda$$

$$\rho_{p.6} = \frac{0,7143 \lambda}{1 - 0,1428} = 0,8333 \lambda = OI = OI'.$$

C'est le rendement constant du montage en étoile comme le montre la figure 8.

28. *Moyenne des rendements.* -- Cette moyenne sera :

$$\rho_{p.m} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \rho_p d\theta = \frac{p}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1 - e \cos \theta}.$$

Posons $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = z$, $\theta = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} z$, $d\theta = 2 \frac{dz}{1 + z^2}$

$$\cos \theta = \cos^2 \frac{1}{2} \theta - \sin^2 \frac{1}{2} \theta = \cos^2 \frac{1}{2} \theta \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \theta \right) = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}$$

donc

$$\rho_{p.m} = \frac{2p}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dz}{1 - e + (1+e)z^2} = \frac{2p}{\pi} \left(\operatorname{arctg} z \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \right)_0^{\infty}$$

c'est-à-dire que

$$\rho_{p.m} = \frac{2p}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\pi}{2} = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{b^2}{\sqrt{a^2-c^2}} = b = 0,7463\lambda.$$

La moyenne des rendements est égale à la moitié du petit axe de l'ellipse.

29. *Du rendement moyen.* — On le déduit de l'équation :

$$\rho_{p.m}^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \rho_p^2 d\theta.$$

L'intégrale représente l'aire de l'ellipse, de sorte que

$$\rho_{p.m}^2 = ab = \frac{1 + 2\mu}{(1 + 4\mu)^{5/2}} \lambda^2 - a \rho_{p.m}.$$

Le rendement moyen est la moyenne proportionnelle des demi-axes de l'ellipse.

Pour $\mu = \frac{1}{5}$ il vient :

$$\rho_{p.m}^2 = \frac{1,4}{(1,8)^{5/2}} \lambda^2 = 0,5797 \lambda^2, \quad \rho_{p.m} = 0,7614 \lambda.$$

30. *Rendements égaux.* — Les valeurs de ρ_p sont égales pour deux valeurs n_1 et n_2 de n telles que

$$\frac{2\pi}{n_1} = 2\pi - \frac{2\pi}{n_2} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{n_1} = 1 - \frac{1}{n_2}$$

$$n_1 n_2 = n_1 + n_2 \quad \text{et} \quad n_2 = \frac{n_1}{n_1 - 1}.$$

a. Les valeurs de n répondant à ρ_p seront données par l'équation :

$$\frac{\lambda}{\rho_p} = 1 + 2\mu - 2\mu \cos \frac{2\pi}{n}$$

d'où
$$\cos \frac{2\pi}{n} = \frac{1}{2\mu} + 1 - \frac{\lambda}{2\mu \rho_p}$$

et, pour $\mu = \frac{1}{5}$

$$\cos \frac{2\pi}{n} = 3,5 - 2,5 \frac{\lambda}{\rho_p}.$$

b. Si $\rho_p = \rho_{p.m} = 0,7614 \lambda$, il viendra :

$$\cos \frac{2\pi}{n} = 3,5 - \frac{2,5}{0,7614} = 0,2166 = \cos 0,4304 \pi$$

d'où
$$\frac{2\pi}{n} = 77^\circ 28' 19''$$

donc
$$\frac{2}{n_1} = 0,4304 \quad \text{et} \quad n_1 = 4,6468.$$

Par suite
$$\frac{1}{n_2} = 1 - 0,2152 = 0,7848, \quad n_2 = 1,2752.$$

c. Si $\rho_p = \rho_{p.m} = 0,7463 \lambda$ on aura :

$$\cos \frac{2\pi}{n} = 3,5 - \frac{2,5}{0,7463} = 0,15014 = \cos \frac{81,37}{180} \pi = \cos 0,4521 \pi.$$

d'où
$$\frac{2\pi}{n} = 81^\circ 10' 41''.$$

Conséquemment,

$$n_1 = 4,4228, \quad n_2 = 1,2922.$$

Ces résultats sont résumés dans le relevé suivant :

n	θ	ρ
$1 = 1,0000$	2π	$1,0000 \lambda = \rho_{p. max.}$
$\frac{6}{5} = 1,2000$	$1,6667 \pi$	$\frac{\lambda}{1 + \mu} = 0,8333 \lambda = \rho_e$
$1,2752$	$1,5686 \pi$	$\rho_p = 0,7614 \lambda = \rho_{p. x.}$
$1,2922$	$1,5479 \pi$	$\rho_p = 0,7463 \lambda = \rho_{p. m.}$
$\frac{4}{3} = 1,3333$	$1,5000 \pi$	$\frac{\lambda}{1 + 2 \mu} = 0,7143 \lambda$
$\frac{3}{2} = 1,5000$	$1,3333 \pi$	$\frac{\lambda}{1 + 3 \mu} = 0,6250 \lambda$
$2 = 2,0000$	$1,0000 \pi$	$\frac{\lambda}{1 + 4 \mu} = 0,5556 \lambda = \rho_{p. min.}$
$3 = 3,0000$	$0,6667 \pi$	$\frac{\lambda}{1 + 3 \mu} = 0,6250 \lambda$
$4 = 4,0000$	$0,5000 \pi$	$\frac{\lambda}{1 + 9 \mu} = 0,7143 \lambda$
$4,4228$	$0,4521 \pi$	$\rho_p = 0,7463 \lambda$
$4,6468$	$0,4304 \pi$	$\rho_p = 0,7614 \lambda$
$6 = 6,0000$	$0,3333 \pi$	$\frac{\lambda}{1 + \mu} = 0,8333 = \rho_e$
$\infty = \lambda \infty$	$0,0000 \pi$	$\lambda = 1,0000 \lambda = \rho_{p. max.}$

31. *De la chute de tension sur la ligne.* — A chaque instant sur l'un des fils conducteurs quelconques, il se produit une perte de tension en général représentée par la relation

$$\partial_x = Ri_k = \Delta \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} + k - 1 \frac{2\pi}{n} \right)$$

où la valeur efficace de cette chute est :

$$\Delta = RI.$$

CHAPITRE IV.

DES APPLICATIONS.

Données usuelles d'un transport d'énergie.

1. Le plus souvent, dans l'étude d'un transport d'énergie, on connaît soit la puissance totale P à transmettre, soit la puissance P_u à recevoir ainsi que le rendement ρ de la transmission. Il existe entre ces trois éléments une relation de proportionnalité très simple qui permet de calculer l'une d'entre elles en fonction des deux autres :

$$P_u = P \rho.$$

En lieu et place du rendement ρ on peut donner la puissance perdue absolue P' ou relative $\frac{P'}{P}$.

On calculera ρ par les équations :

$$P' = P - P_u = P(1 - \rho), \text{ d'où } \rho = \frac{P - P'}{P} = 1 - \frac{P'}{P}$$

ou encore

$$\rho = \frac{P_u}{P' + P_u} = \frac{1}{1 + \frac{P'}{P_u}}$$

En posant $\frac{P'}{P} = m$ on aura :

$$P = P' + P_u = P(m + \rho), \text{ donc } \rho = 1 - m$$

$$P = \frac{P_u}{1 - m} \text{ ou } P_u = (1 - m)P.$$

Si m est connu on exprimera P_u en fonction de P ou inversement.

2. Si l'on donne l'une des tensions au générateur ou au récepteur, on calculera l'autre par les équations :

$$E = 2 \mathcal{E} \sin \frac{\pi}{n}, \quad E' = 2 \mathcal{E}' \sin \frac{\pi}{n}$$

d'où
$$\frac{E}{\mathcal{E}} - \frac{E'}{\mathcal{E}'} = 2 \sin \frac{\pi}{n} = \frac{E - E'}{\mathcal{E} - \mathcal{E}'}$$

et
$$\frac{E - E'}{E} = \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}'}{\mathcal{E}} = q.$$

Les pertes relatives des tensions du générateur au récepteur sont les mêmes qu'il s'agisse des tensions « entre-phases » ou des tensions « en phases ».

Si la chute q est imposée on aura :

$$E' = E (1 - q), \quad \mathcal{E}' = \mathcal{E} (1 - q).$$

Si par exemple on donne E' , il viendra :

$$E = \frac{E'}{1 - q}, \quad \mathcal{E}' = \frac{E'}{2 \sin \frac{\pi}{n}}, \quad \mathcal{E} = \frac{1}{1 - q} \frac{E'}{2 \sin \frac{\pi}{n}}.$$

3. D'autre part,

$$P_u = P_\rho = n \mathcal{E}' I = \frac{n}{2 \sin \frac{\pi}{n}} E' I$$

$$I = \frac{2 P_u}{n E'} \sin \frac{\pi}{n}, \quad P (1 - \rho) = n R I^2$$

donc
$$R = \frac{n}{4 \sin^2 \frac{\pi}{n}} \frac{1 - \rho E'^2}{\rho^2 P}.$$

4. On peut également faire état de la chute de tension sur la ligne :

$$\Delta = R I.$$

En combinant cette relation avec l'expression de l'énergie perdue on obtient :

$$I = \frac{P (1 - \rho)}{n \Delta} = \frac{1 - \rho}{\rho} \frac{P_u}{n \Delta}.$$

$$R = \frac{\Delta}{I} = \frac{n}{1 - \rho} \frac{\Delta^2}{P} = \frac{n \rho}{1 - \rho} \frac{\Delta^2}{P_u}.$$

Transport à établir.

5. On demande à recevoir à 100 kilomètres de la source de puissance, avec un rendement de transmission $\rho = 0,7$, une puissance utile $P_u = 10^6$ watts sous une tension efficace entre phases au récepteur $E' = 10^4$ volts.

On en déduit :

$$m = 1 - \rho = 0,3, \quad P = \frac{P_u}{\rho} = \frac{10^7}{7} \text{ watts} = 1\,428\,571 \text{ watts.}$$

$$P - P_u = 0,3 \times \frac{10^7}{7} = \frac{3\,000\,000}{7} = 428\,571 \text{ watts.}$$

Nous examinerons trois cas particuliers relatifs au transport, sans inductance, en courant monophasé, système triphasé et du genre pentaphasé.

a. *Système monophasé* : $n = 2$.

$$6. \quad \mathcal{E}' - \frac{K'}{2 \sin \frac{\pi}{n}} = \frac{E'}{2} = 5000 \text{ v}$$

$$P_u = n \mathcal{E}' I, \quad \text{d'où} \quad I = \frac{P_u}{n \mathcal{E}'} = \frac{10^6}{2 \times 5000} = 100 \text{ ampères}$$

$$R = \frac{n(1-\rho)E'^2}{4\rho \sin^2 \frac{\pi}{n} P_u} = \frac{2 \times 3 \times 10^8}{4 \times 7 \times 10^8} = \frac{300}{14} = 21^{\text{m}},43$$

$$\Delta = RI = 21,43 \times 100 = 2143 \text{ v.}$$

$$s = 20 \times \frac{l}{R} = \frac{20 \times 100 \times 14}{300} = \frac{280}{3} = 93^{\text{mm}},33.$$

Le rayon du conducteur sera : $r_c = 5^{\text{mm}},45$.

Le poids de cuivre :

$$\pi_2 = n K \frac{l^2}{R} = \frac{2 \times 0,176 \times 10^4 \times 14}{300} = 164^{\text{t}},3$$

soit 821^{gr},5 par mètre de fil.

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}' + RI = 5000 + 2143 = 7143 \text{ v.}$$

$$E = 2 \mathcal{E} = 2 \times 7143 = 14\,286 \text{ v.}$$

7. Suivant le mode de montage on aura :

$$Z_p = \frac{Y_p}{Y_p + 4R}, \quad \text{d'où} \quad \frac{Y_p}{R} = 4 \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{4 \times 0,7}{0,3} = 9,33,$$

$$\rho_e = \frac{Y_e}{Y_e + R}, \quad \text{d'où} \quad \frac{Y_e}{R} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{7}{3} = 2,33.$$

8. *Des éléments variables.* — Dans ce cas spécial on a :

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} = 0$$

Par suite en notation efficace :

$$e_1 = E \sin \omega t = 14286 \sin \omega t.$$

$$e_2 = E \sin(\omega t + \pi) = -14286 \sin \omega t$$

$$\mathcal{E}_1 = \frac{E}{2} \sin \omega t = 7143 \sin \omega t.$$

$$\mathcal{E}_2 = \frac{E}{2} \sin(\omega t + \pi) = -\frac{E}{2} \sin \omega t = -7143 \sin \omega t.$$

$$i_1 = I \sin \omega t = 100 \sin \omega t, \quad i_2 = I \sin(\omega t + \pi) = -100 \sin \omega t$$

$$\delta_1 = \Delta \sin \omega t = 2143 \sin \omega t, \quad \delta_2 = \Delta \sin(\omega t + \pi) = -2143 \sin \omega t$$

$$\varepsilon'_1 = \mathcal{E}' \sin \omega t = 5000 \sin \omega t, \quad \varepsilon'_2 = \mathcal{E}' \sin(\omega t + \pi) = -5000 \sin \omega t$$

$$e'_1 = E' \sin \omega t = 10000 \sin \omega t, \quad e'_2 = E' \sin(\omega t + \pi) = -10000 \sin \omega t.$$

9. Si le récepteur est étoilé, on aura pour les courants intérieurs :

$$j'_1 = J' \sin \omega t = I \sin \omega t = 100 \sin \omega t = i_1$$

$$j'_2 = J' \sin(\omega t + \pi) = -I \sin \omega t = -100 \sin \omega t = i_2.$$

10. Si le récepteur est polygonal on aura :

$$J' = \frac{I}{2 \sin \frac{\pi}{n}} = \frac{I}{2}$$

de sorte que

$$j'_1 = \frac{I}{2} \sin \omega t = 50 \sin \omega t = \frac{i_1}{2}$$

$$j'_2 = \frac{I}{2} \sin(\omega t + \pi) = -50 \sin \omega t = -\frac{i_2}{2}.$$

b. *Système triphasé* : $n = 3$.

11. On trouve : $\frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$ ou 30°

$$\mathcal{E}' = \frac{E'}{2 \sin \frac{\pi}{3}} = \frac{10^4}{\sqrt{3}} = \frac{10^4 \times 1,73205}{3} = 5774 \text{ v}$$

$$I = \frac{P_u}{n \mathcal{E}'} = \frac{10^6 \sqrt{3}}{3 \times 10^4} = \frac{172,205}{3} = 57^{\text{a}},74$$

$$R = \frac{n(1-\rho)E'^2}{4 \rho \sin^2 \frac{\pi}{3} P_u} = \frac{3 \times 0,3 \times 10^8}{4 \times 0,7 \times \frac{3}{4} \times 10^6} = \frac{300}{7} = 42^{\text{a}},86$$

$$\Delta = RI = \frac{17320,5}{7} = 2474 \text{ v}$$

$$s = 20 \frac{l}{R} = \frac{20 \times 100 \times 7}{300} = \frac{140}{3} = 46^{\text{mm}2},67$$

$$\gamma_e = 3^{\text{mm}},85$$

$$\tau_3 = n K \frac{l^2}{R} = \frac{3 \times 0,176 \times 10^4 \times 7}{3 \times 10^2} = 17,6 \times 7 = 123^{\text{t}},2$$

soit 411 gr par mètre de fil.

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}' + RI = 5774 + 2474 = 8248 \text{ v}$$

$$E = \mathcal{E} \sqrt{3} = 8248 \times 1,732 = 14286 \text{ v.}$$

12. Suivant le mode de montage on aura :

$$\rho_p = \frac{\gamma_p}{\gamma_p + 3R}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\gamma_p}{R} = 3 \frac{\rho}{1-\rho} = 3 \times \frac{7}{3} = 7$$

$$\rho_e = \frac{\gamma_e}{\gamma_e + R}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\gamma_e}{R} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{7}{3} = 2,333.$$

13. Des éléments variables.

$$e_1 = E \sin \omega t = 14\,286 \sin \omega t$$

$$e_2 = E \sin \left(\omega t + \frac{2\pi}{3} \right) = 14\,286 \sin \left(\omega t + \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$e_3 = E \sin \left(\omega t + 2 \frac{2\pi}{3} \right) = 14\,286 \sin \left(\omega t + 2 \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$i_1 = \mathcal{C} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{6} \right) = 8\,248 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{6} \right)$$

$$i_2 = \mathcal{C} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \right) = 8\,248 \sin \left(\omega t + 5 \frac{\pi}{6} \right)$$

$$i_3 = \mathcal{C} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} \right) = 8\,248 \sin \left(\omega t + 9 \frac{\pi}{6} \right)$$

$$i_4 = I \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{6} \right) = 57^{\text{a}},74 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{6} \right)$$

$$i_5 = I \sin \left(\omega t + 5 \frac{\pi}{6} \right) = 57,74 \sin \left(\omega t + 5 \frac{\pi}{6} \right)$$

$$i_6 = I \sin \left(\omega t + 9 \frac{\pi}{6} \right) = 57,74 \sin \left(\omega t + 9 \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\partial_1 = R i_1 = 2474,74 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\partial_2 = R i_2 = 2474,74 \sin \left(\omega t + 5 \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\partial_3 = R i_3 = 2474,74 \sin \left(\omega t + 9 \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\Delta = 2474^{\text{v}},74.$$

$$e'_1 = \mathcal{C}' \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{6} \right) = 5\,774^{\text{v}} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{6} \right)$$

$$e'_2 = \mathcal{C}' \sin \left(\omega t + 5 \frac{\pi}{6} \right) = 5\,774 \sin \left(\omega t + 5 \frac{\pi}{6} \right)$$

$$e'_3 = \mathcal{C}' \sin \left(\omega t + 9 \frac{\pi}{6} \right) = 5\,774 \sin \left(\omega t + 9 \frac{\pi}{6} \right)$$

$$e'_4 = E' \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{6} \right) = 10\,000^{\text{v}} \sin \omega t$$

$$e'_5 = E' \sin \left(\omega t + 5 \frac{\pi}{6} \right) = 10\,000 \sin \left(\omega t + \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$e'_6 = E' \sin \left(\omega t + 9 \frac{\pi}{6} \right) = 10\,000 \sin \left(\omega t + 2 \frac{2\pi}{3} \right).$$

14. Si le récepteur est monté en étoile, on aura :

$$J' = I = 57^{\text{a}},74$$

et

$$j'_1 = 57^{\text{a}},74 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$j'_2 = 57^{\text{a}},74 \sin\left(\omega t + 5\frac{\pi}{6}\right)$$

$$j'_3 = 57^{\text{a}},74 \sin\left(\omega t + 9\frac{\pi}{6}\right).$$

15. Si le montage du récepteur est fermé :

$$J' = \frac{I}{2 \sin \frac{\pi}{n}} = \frac{P_u}{2n \mathcal{E}' \sin \frac{\pi}{n}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{P_u}{E'} = \frac{1}{3} \times \frac{10^6}{10^4} = 33^{\text{a}},33$$

de sorte que

$$j'_1 = 33^{\text{a}},33 \sin \omega t$$

$$j'_2 = 33^{\text{a}},33 \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$j'_3 = 33^{\text{a}},33 \sin\left(\omega t + 2\frac{2\pi}{3}\right).$$

c. *Système pentaphasé* : $n = 5$.

16. On obtient :

$$\frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{5} = 36^{\circ}, \quad \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{3}{10}\pi = 54^{\circ}$$

$$\mathcal{E}' = \frac{E'}{2 \sin \frac{\pi}{5}} = \frac{10^4}{1,47558} = 8506 \text{ v}$$

$$I = \frac{P_u}{n \mathcal{E}'} = \frac{10^6 \times 1,47558}{5 \times 10^4} = 20 \times 1,47558 = 23^{\text{a}},5116$$

$$R = \frac{n(1-\rho)E'^2}{4\rho \sin^2 \frac{\pi}{n} P_u} = \frac{5 \times 0,3 \times 10^8}{4 \times 0,7 \times 0,5878^2 \times 10^6} = 155^{\circ}$$

$$\Delta = RI = \frac{1-\rho}{\rho} \frac{E'^2}{4 \mathcal{E}' \sin^2 \frac{\pi}{n}} = \frac{1-\rho}{\rho} \mathcal{E}' = \frac{3}{7} \times 8506 = 3660 \text{ v}$$

$$s = 20 \times \frac{l}{n} = \frac{20 \times 100}{155} = 12^{\text{mm}},90$$

$$Y_e = 2^{\text{mm}},03$$

$$\pi_s = n K \frac{l^2}{n} = \frac{5 \times 0,176 \times 10^4}{155} = \frac{8800}{155} = 56^{\text{t}},77$$

soit 113^{gr},54 par mètre de fil.

Comme vérification par les trois valeurs de n : 2, 3, 5 on devra réaliser les deux conditions :

$$\frac{56,77}{\sin^2 \frac{\pi}{5}} = \frac{123,2}{\sin^2 \frac{\pi}{3}} = 164,3$$

ou
$$\frac{56,77 \times 8 \times (5 + \sqrt{5})}{20} = \frac{123,2 \times 4}{3} = 164,3.$$

Elles se vérifient.

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}' + RI = 5774 + 3660 = 9434 \text{ v}$$

$$E = 2 \mathcal{E} \sin \frac{\pi}{5} = 2 \times 9434 \times 0,58779 = 11090 \text{ v.}$$

17. Selon le mode de montage :

$$\frac{Y_p}{R} = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \frac{\rho}{1 - \rho} = 1,3820 \times \frac{7}{3} = 3,225$$

$$\frac{Y_e}{R} = 2,3333.$$

18. *Des éléments variables.*

Ils seront :

$$e_1 = E \sin \omega t = 11090 \sin \omega t$$

$$e_2 = E \sin \left(\omega t + \frac{2\pi}{5} \right) = 11090 \sin \left(\omega t + \frac{2\pi}{5} \right)$$

$$e_3 = E \sin \left(\omega t + 2 \frac{2\pi}{5} \right) = 11090 \sin \left(\omega t + 2 \frac{2\pi}{5} \right)$$

$$e_4 = E \sin \left(\omega t + 3 \frac{2\pi}{5} \right) = 11090 \sin \left(\omega t + 3 \frac{2\pi}{5} \right)$$

$$e_5 = E \sin \left(\omega t + 4 \frac{2\pi}{5} \right) = 11090 \sin \left(\omega t + 4 \frac{2\pi}{5} \right)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \mathcal{E} \sin \left(\omega t + \frac{3\pi}{10} \right) = 9434 \sin \left(\omega t + \frac{3\pi}{10} \right) \\ \varepsilon_2 &= \mathcal{E} \sin \left(\omega t + \frac{7\pi}{10} \right) = 9434 \sin \left(\omega t + \frac{7\pi}{10} \right) \\ \varepsilon_3 &= \mathcal{E} \sin \left(\omega t + \frac{11\pi}{10} \right) = 9434 \sin \left(\omega t + \frac{11\pi}{10} \right) \\ \varepsilon_4 &= \mathcal{E} \sin \left(\omega t + \frac{15\pi}{10} \right) = 9434 \sin \left(\omega t + \frac{15\pi}{10} \right) \\ \varepsilon_5 &= \mathcal{E} \sin \left(\omega t + \frac{19\pi}{10} \right) = 9434 \sin \left(\omega t + \frac{19\pi}{10} \right) \\ i_1 &= I \sin \left(\omega t + \frac{3\pi}{10} \right) = 23,51 \sin \left(\omega t + \frac{3\pi}{10} \right) = \frac{\partial_1}{R} = \frac{\varepsilon_1'}{\mathcal{E} - \Delta} \\ i_2 &= I \sin \left(\omega t + \frac{7\pi}{10} \right) = 23,51 \sin \left(\omega t + \frac{7\pi}{10} \right) = \frac{\partial_2}{R} = \frac{\varepsilon_2'}{\mathcal{E} - \Delta} \\ i_3 &= I \sin \left(\omega t + \frac{11\pi}{10} \right) = 23,51 \sin \left(\omega t + \frac{11\pi}{10} \right) = \frac{\partial_3}{R} = \frac{\varepsilon_3'}{\mathcal{E} - \Delta} \\ i_4 &= I \sin \left(\omega t + \frac{15\pi}{10} \right) = 23,51 \sin \left(\omega t + \frac{15\pi}{10} \right) = \frac{\partial_4}{R} = \frac{\varepsilon_4'}{\mathcal{E} - \Delta} \\ i_5 &= I \sin \left(\omega t + \frac{19\pi}{10} \right) = 23,51 \sin \left(\omega t + \frac{19\pi}{10} \right) = \frac{\partial_5}{R} = \frac{\varepsilon_5'}{\mathcal{E} - \Delta} \\ e'_1 &= E' \sin \left(\omega t + \frac{3\pi}{10} \right) = 10\,000 \sin \omega t \\ e'_2 &= E' \sin \left(\omega t + \frac{7\pi}{10} \right) = 10\,000 \sin \left(\omega t + \frac{2\pi}{5} \right) \\ e'_3 &= E' \sin \left(\omega t + \frac{11\pi}{10} \right) = 10\,000 \sin \left(\omega t + 2\frac{2\pi}{5} \right) \\ e'_4 &= E' \sin \left(\omega t + \frac{15\pi}{10} \right) = 10\,000 \sin \left(\omega t + 3\frac{2\pi}{5} \right) \\ e'_5 &= E' \sin \left(\omega t + \frac{19\pi}{10} \right) = 10\,000 \sin \left(\omega t + 4\frac{2\pi}{5} \right). \end{aligned}$$

Les tensions réceptrices en phases auront une même amplitude

$$\mathcal{E}' = \frac{E'}{2 \sin \frac{\pi}{5}} = \frac{10000^v}{2 \sin 36^\circ} = 8507^v.$$

En conséquence :

$$\varepsilon'_1 = 8507 \sin \left(\omega t + \frac{3\pi}{10} \right)$$

$$\varepsilon'_2 = 8507 \sin \left(\omega t + \frac{7\pi}{10} \right)$$

$$\varepsilon'_3 = 8507 \sin \left(\omega t + \frac{11\pi}{10} \right)$$

$$\varepsilon'_4 = 8507 \sin \left(\omega t + \frac{15\pi}{10} \right)$$

$$\varepsilon'_5 = 8507 \sin \left(\omega t + \frac{19\pi}{10} \right)$$

19. Si le récepteur est monté en étoile on aura :

$$J' = I = 23^{\text{a}},51$$

et

$$j'_1 = 23,51 \sin \left(\omega t + \frac{3\pi}{10} \right)$$

$$j'_2 = 23,51 \sin \left(\omega t + \frac{7\pi}{10} \right)$$

$$j'_3 = 23,51 \sin \left(\omega t + \frac{11\pi}{10} \right)$$

$$j'_4 = 23,51 \sin \left(\omega t + \frac{15\pi}{10} \right)$$

$$j'_5 = 23,51 \sin \left(\omega t + \frac{19\pi}{10} \right).$$

20. Si le récepteur est monté en polygone :

$$J' = \frac{I}{2 \sin \frac{\pi}{n}} = \frac{1}{n} \frac{P_n}{E'} = \frac{1}{5} \times \frac{10^5}{10^3} = 20^{\text{a}}$$

de façon que

$$j'_1 = 20 \sin \omega t$$

$$j'_2 = 20 \sin \left(\omega t + \frac{2\pi}{5} \right)$$

$$j'_3 = 20 \sin \left(\omega t + 2 \frac{2\pi}{5} \right)$$

$$j'_4 = 20 \sin \left(\omega t + 3 \frac{2\pi}{5} \right)$$

$$j'_5 = 20 \sin \left(\omega t + 4 \frac{2\pi}{5} \right).$$

Récapitulation des éléments du transport de l'énergie pour les données : $P_u = 10^6$ watts, $F = 10000$ v, $\rho = 0,70$, $l = 100$ kg
 Par suite $P = 1428571$ watts.

ÉLÉMENTS	SYSTÈME MONOPHASÉ $n = 2$	SYSTÈME TRIPHASÉ $n = 3$	SYSTÈME PENTAPHASÉ $n = 5$
$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$	0	$\frac{\pi}{6} = 30^\circ$	$\frac{3\pi}{10} = 54^\circ$
R	21 ω ,43	42 ω ,86	155 ω
S	93mm ² ,33	46mm ² ,67	12mm ² ,90
Y_e	5mm,45	3mm,85	2mm,03
πn	164 π ,30	123 π ,20	56 π ,77
$\frac{\pi n}{1000n l}$	821gr,50	411gr	113gr,54
$\frac{Y_p}{R}$	9,333	7	3,225
$\frac{Y_e}{R}$	2,333	2,333	2,333
<i>Tensions génératrices :</i>			
A. Entre-phases E	14286 v	14286 v	11090 v
Déphasages	0 — π	0 — $\frac{2\pi}{3} - 2\frac{2\pi}{3}$	0 — $\frac{2\pi}{5} - 2\frac{2\pi}{5} - 3\frac{2\pi}{5} - 4\frac{2\pi}{5}$

b. En phases \mathcal{E}	7143 v	8248 v	9431 v
Déphasages	$0 - \pi$	$\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} - \frac{9\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{10} - \frac{7\pi}{10} - \frac{11\pi}{10} - \frac{15\pi}{10} - \frac{19\pi}{10}$
<i>Tensions réceptrices :</i>			
a. Entre-phases E'	10000 v	10000 v	10000 v
Déphasages	$0 - \pi$	$0 - \frac{2\pi}{3} - 2\frac{2\pi}{3}$	$0 - \frac{2\pi}{5} - 2\frac{2\pi}{5} - 3\frac{2\pi}{5} - 4\frac{2\pi}{5}$
b. En phases \mathcal{E}	5000 v	5774 v	8507 v
Déphasages	$0 - \pi$	$\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} - \frac{9\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{10} - \frac{7\pi}{10} - \frac{11\pi}{10} - \frac{15\pi}{10} - \frac{19\pi}{10}$
Courants externes : I	100 ^a	57 ^a ,74	23 ^a ,51
Déphasages	$0 - \pi$	$\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} - \frac{9\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{10} - \frac{7\pi}{10} - \frac{11\pi}{10} - \frac{15\pi}{10} - \frac{19\pi}{10}$
<i>Courants récepteurs :</i>			
a. Montage étoilé : J = I	100 ^a	57 ^a ,74	23 ^a ,51
Déphasages	$0 - \pi$	$\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} - \frac{9\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{10} - \frac{7\pi}{10} - \frac{11\pi}{10} - \frac{15\pi}{10} - \frac{19\pi}{10}$
b. Montage fermé J	50 ^a	33 ^a ,33	20 ^a
Déphasages	$0 - \pi$	$0 - \frac{2\pi}{3} - 2\frac{2\pi}{3}$	$0 - \frac{2\pi}{5} - 2\frac{2\pi}{5} - 3\frac{2\pi}{5} - 4\frac{2\pi}{5}$
Chute de tension : Δ	2143 v	2474 ^a ,74	3660 v
Déphasages	$0 - \pi$	$\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} - \frac{9\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{10} - \frac{7\pi}{10} - \frac{11\pi}{10} - \frac{15\pi}{10} - \frac{19\pi}{10}$

TABLE DES MATIÈRES

THÉORIE DES COURANTS POLYPHASÉS.

Préface. — Sommaire.	3
------------------------------	---

INTRODUCTION.

Une série utile. — Sommes des sinus et des cosinus d'arcs en progression arithmétique. — Séries carrées. — Applications : moyenne de sinus et sinus moyens de ces arcs. — Sommes de produits trigonométriques. — Moyenne de ces produits. — Produit moyen. — Tension instantanée engendrée par une bobine active quelconque. — Méthode du calcul direct.	5
--	---

CHAPITRE I. — RÉALISATION ET PROPRIÉTÉS DES COURANTS POLYPHASÉS.

Définitions. — Nombre de fils conducteurs d'un système n -phasé. — Tensions et intensités des courants. — Moyennes des tensions et des intensités. — Leurs déphasages. — Tensions et intensités moyennes. — Tensions simples. — Tensions composées. — Dualité existant entre les deux genres de tensions. — Points neutres d'un clamp : naturels, artificiels	27
---	----

CHAPITRE II. — GÉNÉRATEUR ET RÉCEPTEUR D'ÉNERGIE.

Genres de montages : fermé, étoilé	36
A. Des effets du genre de montage sur le générateur	37
<i>a.</i> Montage en polygone. — Courants internes, externes. — Potentiels externes. — Tensions composées ou entre-phases. Tensions simples ou en phases	37
<i>b.</i> Montage en étoile. — Courants internes, externes. — Tensions simples. — Tensions composées	40
Puissances absorbées. — Relations diverses	41
B. Des effets du genre de montage sur le récepteur	43
<i>a.</i> Montage en polygone. — Potentiels aux bornes réceptrices. — Tensions simples. — Tensions composées. — Courants internes	43
<i>b.</i> Montage en étoile. — Tensions simples. — Tensions composées. — Puissances captées. — Relations diverses. Récapitulation des résultats précédents	48
Cas spécial du courant biphasé	52

CHAPITRE III. — TRANSPORT DE L'ÉNERGIE ÉLECTRIQUE.

A. Courant continu. — Courant monophasé	54
B. Solution générale pour courants n — phasés	56
<i>a.</i> Montage du récepteur en polygone. — Tensions génératrices. — Courants externes. — Courants internes. — Tensions composées. — Tensions simples. — Puissance utile. — Rendement de la transmission. — Poids de cuivre de la ligne	57
<i>b.</i> Montage du récepteur en étoile. — Courants internes. — Tensions simples. — Tensions composées. — Puissance utile. — Rendement de la transmission. — Poids de cuivre de la ligne. — Relevé général	60
Solution élémentaire du problème du transport de l'énergie électrique	62
<i>a.</i> Récepteur monté en polygone	63
<i>b.</i> Récepteur monté en étoile	65
Étude des rendements. — Leur moyenne. — Rendement moyen. — Chute instantanée de tension sur la ligne.	66

CHAPITRE IV. — DES APPLICATIONS.

Données usuelles d'un transport d'énergie	72
Transport à établir : Éléments généraux.	74
<i>a.</i> Système monophasé	74
<i>b.</i> Système triphasé	76
<i>c.</i> Système pentaphasé	78
Récapitulation des éléments du transport dans les trois cas	82

