Zeitschrift

für

Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.

XXXV. Jahrgang.

Mit in den Text gedruckten Figuren und vier lithographirten Tafeln.

Leipzig,
Verlag von B. G. Teubner.
1890.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Inhalt.

Arithmetik und Analysis.

Synthetische und analytische Geometrie.

I.

Ueber die Bewegung eines starren ebenen Systems in seiner Ebene.

Von

Dr. R. Mehmke,

Professor an der techn. Hochschule zu Darmstadt.

Trotzdem so zahlreiche Arbeiten über die Kinematik des starren ebenen Systems vorliegen, so scheint doch bis jetzt nur der „allgemeine", d. h. der gewöhnlichste Fall, in welchem die Polbahn und Polcurve sich im Endlichen in gewöhnlichen Punkten berühren und die Berührungsordnung nicht von Eins verschieden ist, untersucht worden zu sein. Soviel ich weiss, hat erst Herr Schönflies* auf einen besonderen Fall hingedeutet, nämlich den, in welchem jene Curven sich von innen berühren und gleiche Krümmung besitzen. Hierdurch angeregt, habe ich im Sommer 1886 versucht, mir über alle Fälle, die bei der Momentanbewegung eines starren ebenen Systems in seiner Ebene auftreten können, genaue Rechenschaft zu geben und diese Fälle zweckmässig einzutheilen. Die Ergebnisse meiner damaligen Untersuchungen sind in der folgenden Abhandlung niedergelegt. Ich habe mich vorläufig auf die Betrachtung der von den Systempunkten beschriebenen Bahnen beschränkt, glaube jedoch, diesen Gegenstand zu einem gewissen Abschlusse gebracht und zugleich mit den allgemeinen Formeln des ersten Abschnittes (§§ 4 – 6) eine sichere Grundlage für weitere Untersuchungen gegeben zu haben.

Auf eine wichtige Thatsache will ich schon jetzt hinweisen: Die erwähnten allgemeinen Formeln für die Geschwindigkeiten beliebiger Ordnung der Systempunkte, für die Wechselgeschwindigkeiten des Poles, für den Zusammenhang zwischen ursprünglicher und umgekehrter Bewegung u. s. w. bleiben, was die äussere Gestalt betrifft, bestehen, wenn man zu affinveränderlichen und collinear-veränderlichen Systemen, sei es in der Ebene oder im Raume, übergeht. Nur ändert sich zum Theil die Bedeutung der

---

* Arthur Schönflies, Geometrie der Bewegung in synthetischer Darstellung, Leipzig 1886, S. 45 u. 46.

darin auftretenden Grössen. Die complexen Zahlen W z. B. (s. § 4) verwandeln sich in Grassmann'sche Quotienten mit mehreren Zählern und Nennern (Symbole für lineare Verwandtschaften), die Determinante in Gleichung 14) wird eine symbolische u. s. w. Genaueres hierüber werde ich später mittheilen.

---

§ 1. Vorbemerkungen.

Es schien mir für diese Untersuchungen die gebräuchliche geometrische Darstellung der complexen Zahlen das geeignetste Werkzeug abzugeben.

Als geometrisches Bild der complexen Zahl $x = \xi + i\xi'$ dient bekanntlich entweder derjenige Punkt x, welcher in Bezug auf das zu Grunde gelegte Axensystem die Coordinaten ξ, ξ' hat, oder aber diejenige nach Länge und Richtung aufgefasste Strecke, deren Projectionen auf die Axen ξ und ξ' sind. Es wird, je nach Bedürfniss, von der einen oder der andern Auffassung Gebrauch gemacht werden.

Man erinnere sich der folgenden bekannten Sätze:

1. Bezeichnen a und b die als Punkte aufgefassten Bilder zweier beliebigen complexen Zahlen a und b, so ist das Bild von $(a-b)$, als Strecke aufgefasst, an Länge und Richtung der Strecke $\overline{ba}$ gleich.

2. Die Multiplication einer als Strecke aufgefassten complexen Zahl mit $e^{i\varphi}$ bedeutet eine Drehung jener Strecke um den Winkel φ. Insbesondere zeigt der Factor i die Drehung um einen rechten Winkel an.

3. Sind abc und $a_1 b_1 c_1$ zwei gleichstimmig ähnliche Dreiecke, so besteht zwischen den complexen Zahlen, die zu den Ecken jener Dreiecke gehören, die Beziehung:

$$\frac{a-b}{b-c} = \frac{a_1-b_1}{b_1-c_1}.$$

Die Bahn eines sich beliebig bewegenden Punktes x kann immer durch eine Gleichung der Form $x = f(t)$ dargestellt werden, wobei t eine reelle Veränderliche bezeichnet. Ihrer Bedeutung nach ist $f(t)$ eine eindeutige stetige Function; sie möge zugleich als differentiirbar vorausgesetzt werden. Sieht man t als die Zeit an, die von einem beliebigen anfänglichen bis zum betrachteten Augenblicke verflossen ist, so giebt die als Strecke aufgefasste complexe Grösse $x' = \frac{dx}{dt}$ Länge und Richtung der Geschwindigkeit an, welche der Punkt x gerade besitzt. Ebenso bezeichnet $x'' = \frac{d^2x}{dt^2}$ die als Strecke aufgefasste Beschleunigung oder Geschwindigkeit zweiter Ordnung, allgemein $x^{(n)} = \frac{d^nx}{dt^n}$ die Geschwindigkeit n^{ter} Ordnung von x.

§ 2. Die verschiedenen Arten von Curvenstellen.*

Es werde die Gestalt der Curve $x = f(t)$ in der Nähe des zu $t = 0$ gehörigen Punktes, der zum Anfangspunkt des Coordinatensystems genommen werden soll, untersucht.

Die Entwickelung von $f(t)$ nach steigenden Potenzen von t heisse

$$x = at^{\alpha} + a_1 t^{\alpha_1} + \cdots + a_\nu t^{\alpha_\nu} + bt^{\beta} + b_1 t^{\beta_1} + \cdots,$$
$$\alpha < \alpha_1 < \cdots < \alpha_\nu < \beta < \beta_1 < \cdots$$

Hier soll b den ersten von den auf a folgenden Coefficienten bedeuten, welcher, geometrisch gesprochen, nicht zu a parallel ist; d. h. es soll jeder der Quotienten $a_1 : a$, $a_2 : a$, ..., $a_\nu : a$ reell sein, $b : a$ dagegen nicht.

Schreibt man daher

$$x = at^{\alpha}\left(1 + \frac{a_1}{a} t^{\alpha_1 - \alpha} + \cdots\right) + bt^{\beta} + \cdots,$$

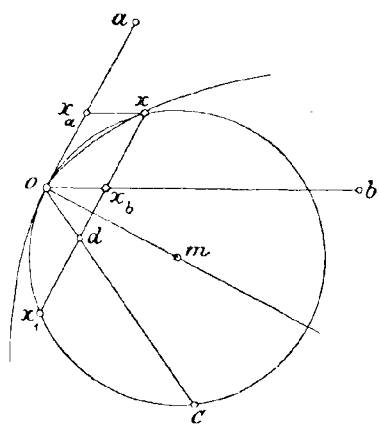
so hat die Klammergrösse immer einen reellen Werth, dessen Unterschied von Eins beliebig klein gemacht werden kann, indem man t hinreichend klein wählt. D. h., für genügend kleine Werthe von t hat man

1) $$x = at^{\alpha} + bt^{\beta} + \cdots,$$

wo natürlich

2) $$a = \frac{x^{(\alpha)}}{\alpha!}, \quad b = \frac{x^{(\beta)}}{\beta!}$$

ist. Das Zahlenpaar (α, β) soll das **Zeichen** der untersuchten Curvenstelle genannt werden.** Hier bedeuten also α und β die Exponenten der beiden niedrigsten nicht verschwindenden Ableitungen von x nach t, deren als Strecken aufgefasste geometrische Bilder nicht parallel sind.



Man projicire x auf jede der Geraden oa und ob parallel zur jedesmaligen andern. Die Projectionen x_a und x_b sind offenbar die geometrischen Bilder der complexen Grössen

3) $x_a = at^{\alpha}$, $x_b = bt^{\beta}$.

Da bei unbegrenzter Abnahme von t $\overline{ox_b}$ schneller abnimmt, als $\overline{ox_a}$, so ist oa Tangente der Curve in o. Wegen 2) ist oa zu dem als Strecke aufgefassten Bilde von $x^{(\alpha)}$ parallel. Letzteres giebt demnach die Tangentenrichtung der Curve im fraglichen Punkte an. Ferner ist klar, dass x_a und daher

* Vergl. hierzu Möbius, Barycentrischer Calcul, Leipzig 1827 (Gesammelte Werke Bd. 1), Cap. 6.

** Die Bezeichnung „Charakteristik" ist schon dermassen verbraucht, dass es geboten schien, von ihr Abstand zu nehmen.

auch x mit a auf derselben Seite von ob liegt oder nicht, je nachdem t^{α} positiv oder negativ ist, und Aehnliches gilt für die Lage von x_b bez. x und b in Bezug auf oa. Wenn daher das für kleine positive bez. negative Werthe von t sich ergebende Curvenstück positiv bez. negativ genannt wird, so leuchtet ein, dass, je nachdem α bez. β gerade oder ungerade ist, das positive und negative Curvenstück auf derselben Seite von ob bez. oa liegen oder nicht, während die Lage des positiven Stückes den Geraden oa und ob gegenüber in allen Fällen die gleiche ist. Bezeichnet man also „gerade" durch $+$ und „ungerade" durch $-$, so entspricht das Zeichen $(-,-)$ einem Wendepunkte, $(+,-)$ einer Spitze (einem Rückkehrpunkt erster Art), $(+,+)$ einem Schnabel (Rückkehrpunkt zweiter Art). Es wäre erwünscht, für den Fall $(-,+)$, zu welchem der gewöhnliche Curvenpunkt gehört, einen passenden Namen zu besitzen. In Ermangelung einer bessern möge im Folgenden in ganz vorläufiger Weise die Bezeichnung „Einseitpunkt" dafür benützt werden.

§ 3. Ordnung der Berührung. Krümmung.

Die Eintheilung der verschiedenen Arten von Curvenstellen in Einseitstellen, Wendestellen, Spitzen und Schnäbel reicht für praktische Zwecke nicht aus. Zur feineren Unterscheidung dient bekanntlich die Ordnung der Berührung, welche ein Maass für die Innigkeit des Anschmiegens der Curve an ihre Tangente im betrachteten Punkte ist. Mit Möbius* werde diese Zahl — sie heisse ω — als die um Eins verminderte Ordnung der unendlich kleinen Strecke $x_a x$ definirt unter der Voraussetzung, dass ox_a unendlich klein erster Ordnung gesetzt wird. Mit den obigen Bezeichnungen ist dann

$$\omega = \frac{\beta}{\alpha} - 1.^{**} \tag{4}$$

Beim gewöhnlichen Curvenpunkt, dessen Zeichen $(1, 2)$ ist, hat ω den Werth 1. Dieser Werth kann nur vorhanden sein, wenn $\beta = 2\alpha$, also gerade ist, d. h. bei den Einseitpunkten und Schnäbeln. Bei einem Wendepunkte oder einer Spitze dagegen ist ω immer von 1 verschieden. Unterscheidet man die Fälle

$$\omega = 1, \quad \omega > 1, \quad \omega < 1,$$

so ergeben sich im Ganzen zehn verschiedene Arten von Curvenstellen, nämlich je drei Arten von Einseitstellen und Schnäbeln, je zwei Arten von Wendestellen und Spitzen. Zu derselben Eintheilung gelangt man auch durch die Betrachtung der Krümmung. Um für letztere einen Ausdruck zu gewinnen, sehe man den Krümmungskreis als Grenzlage eines die Curve in O berührenden und durch den unendlich benachbarten Punkt x gehenden Kreises an. Sei (s. Figur) xx_1 zur Tangente oa parallel und oc diejenige

* Möbius, a. a. O. § 75.
** Möbius, a. a. O. § 81.

Sehne des Krümmungskreises, welche zu ob in Bezug auf die Curvennormale om symmetrisch liegt. Die Punkte x_a und x_b mögen dieselbe Bedeutung haben, wie früher; d sei der Schnittpunkt von oc mit xx_1.

Da die Dreiecke ox_bx_1 und x_1dc gleichstimmig ähnlich sind, so hat man vermöge des in § 1 angeführten dritten Hilfssatzes

$$\frac{x_b - o}{x_b - x_1} = \frac{d - x_1}{d - c} = -\frac{d - x_1}{c - d}.$$

Nun ist aber die Strecke dx_b verschwindend klein gegen die einander gleichen Strecken x_1d und ox_a und ebenso od verschwindend klein gegen oc, so dass bei der Vornahme des Grenzüberganges $(x_a - o)$ an Stelle von $(x_b - x_1)$ und $(d - x_1)$, und ferner $(c - o)$ an Stelle von $(c - d)$ gesetzt werden kann. Lässt man noch überall die Null weg, so kommt

$$5)\qquad c = -\lim \frac{x_a{}^2}{x_b}.$$

Bezeichnet man den absoluten Werth der Krümmung in o mit k und den (stets von O verschiedenen) Winkel zwischen oa und ob mit φ, so ist

$$k = \frac{2 \sin \varphi}{\overline{oc}},$$

also wegen 3)

$$6)\qquad k = 2 \sin \varphi \left| \frac{b}{a^2} \right| \cdot \lim t^{\beta - 2\alpha} \Big|_{t=0}.$$

Bemerkung. Nimmt man statt des Punktes x_b seine Projection auf die Curvennormale om, so fällt oc in die Richtung om, oder es wird $m - o = \frac{1}{2}(c - o)$. Wird daher die Projection der Geschwindigkeit $x^{(\beta)}$ auf die Curvennormale mit $\overline{x}^{\beta}$ bezeichnet, so erhält man im Falle $\beta = 2\alpha$ aus 5) und 2) zur Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes m:

$$7)\qquad m - o = -\binom{2\alpha}{\alpha} \frac{(x^{(\alpha)})^2}{2\overline{x}^{2\alpha}}.$$

Die Gleichung 6) zeigt, dass die Krümmung endlich und nicht Null, oder Null, oder unendlich wird, je nachdem $2\alpha = \beta$, oder $2\alpha < \beta$, oder $2\alpha > \beta$ ist. Der Fall $2\alpha = \beta$ verlangt ein gerades β, d. h. nur in Einseitsstellen und Schnäbeln kann eine endliche, von Null verschiedene Krümmung vorhanden sein: in Wendepunkten und Spitzen ist die Krümmung entweder Null oder unendlich gross. Man gelangt folglich auf diesem Wege ebenfalls zur Eintheilung der Curvenstellen in zehn Arten, und zwar stimmt diese Eintheilung mit der oben angegebenen, welche auf die verschiedenen möglichen Werthe der Ordnung der Berührung gegründet war, überein. In der That, weil $\omega = \beta : \alpha - 1$, so hat man $\omega \lesseqgtr 1$, je nachdem $2\alpha \lesseqgtr \beta$, oder je nachdem die Krümmung Null, oder endlich und nicht Null, oder unendlich ist.

I. Allgemeine Formeln für die Bewegung eines starren ebenen Systems in seiner Ebene und deren Umkehrung.

§ 4. Ausdrücke für die Geschwindigkeiten verschiedener Ordnung der Systempunkte.

Die Lage, welche das bewegte starre ebene System Σ im Augenblicke $t=0$ inne hat, werde $\underset{\cdot}{\Sigma}$ genannt. Ferner bezeichne $\underset{\cdot}{x}(t)$ denjenigen Punkt von $\underset{\cdot}{\Sigma}$, welcher im Augenblicke t mit dem Punkte $x(t)$ des ruhenden Systems zusammenfällt. Wenn $\underset{\cdot}{x}(t)$ seine Lage nicht ändert, so fällt $x(t)$ immer mit demselben Punkte des bewegten Systems zusammen, d. h. $x(t)$ beschreibt die Bahn jenes Punktes im ruhenden System. Ist jedoch $x(t)$ ein fester Punkt des ruhenden Systems, so durchläuft $\underset{\cdot}{x}(t)$ in $\underset{\cdot}{\Sigma}$ den Ort derjenigen Punkte, welche im Verlauf der Bewegung auf $x(t)$ fallen. Jener Ort ist daher die Curve, die ein in $x(t)$ befestigter Stift dem bewegten System aufschreiben würde. Diese Curve ist zugleich die Bahn, welche $x(t)$ bei der Umkehrung der ursprünglichen Bewegung durchschreitet. Es können $x(t)$ und $\underset{\cdot}{x}(t)$ auch gleichzeitig ihre Lage ändern; denn wenn z. B. $x(t)$ sich in ganz beliebiger Weise im ruhenden System bewegt, so wird dieser Punkt im Allgemeinen in jedem Augenblicke wieder mit einem andern Punkte von $\underset{\cdot}{\Sigma}$ zusammentreffen. In diesem Falle sollen die Geschwindigkeiten aller Ordnungen von $x(t)$ und $\underset{\cdot}{x}(t)$ eingeklammert werden. Ferner sollen bei allen von t abhängenden Grössen die auf $t=0$ bezüglichen Werthe durch Weglassen des Argumentes t, alle Ableitungen nach t durch Striche bezeichnet werden.

Seit dem Augenblicke $t=0$ habe sich das bewegte System um den Winkel $w(t)$ gedreht. Sind $\underset{\cdot}{a}(t)$ und $\underset{\cdot}{x}(t)$ zwei beliebige Punkte von $\underset{\cdot}{\Sigma}$, $a(t)$ und $x(t)$ ihre Lagen im ruhenden System zur Zeit t, so geht also die Strecke $\overline{ax}$ aus $\overline{\underset{\cdot}{a}\underset{\cdot}{x}}$ — abgesehen von einer Parallelverschiebung — durch Drehung um den Winkel $w(t)$ hervor, d. h. man hat:

$$8)\qquad x(t)-a(t)=e^{iw(t)}\left(\underset{\cdot}{x}(t)-\underset{\cdot}{a}(t)\right)$$

oder

$$8')\qquad \underset{\cdot}{x}(t)-\underset{\cdot}{a}(t)=e^{-iw(t)}\left(x(t)-a(t)\right).$$

Es werde zuerst angenommen, dass $a(t)$ und $x(t)$ sich als Systempunkte bewegen, d. h. $\underset{\cdot}{a}(t)=\underset{\cdot}{a}=a$ und $\underset{\cdot}{x}(t)=\underset{\cdot}{x}=x$ feste Punkte von $\underset{\cdot}{\Sigma}$ sind. Leitet man unter dieser Voraussetzung Gleichung 8) n-mal nach t ab und setzt man zugleich

$$9)\qquad \frac{d^n e^{iw(t)}}{dt^n}=e^{iw(t)}W_n(t),$$

so ergiebt sich:

$$10)\qquad x^{(n)}(t)-a^{(n)}(t)=e^{iw(t)}W_n(t)\left(\underset{\cdot}{x}(t)-\underset{\cdot}{a}(t)\right),$$

und insbesondere für $t=0$:

$$11)\qquad x^{(n)}-a^{(n)}=W_n(x-a).$$

Für die umgekehrte Bewegung, bei welcher $a(t) = a$ und $x(t) = x$ feste Punkte sind, erhält man aus 8′) mit der Bezeichnung

9′)
$$\frac{d^n e^{-iw(t)}}{dt^n} = e^{-iw(t)} \underset{\cdot}{W}_n(t)$$

die Gleichung

10′)
$$\underset{\cdot}{x}^{(n)}(t) - \underset{\cdot}{a}^{(n)}(t) = e^{-iw(t)} \underset{\cdot}{W}_n (x(t) - a(t)),$$

und für $t = 0$

11′)
$$\underset{\cdot}{x}^{(n)} - \underset{\cdot}{a}^{(n)} = \underset{\cdot}{W}_n (x - a).$$

Es müssen jetzt die Ausdrücke W und $\underset{\cdot}{W}$ berechnet werden. Leitet man Gleichung 9) einmal nach t ab, so kommt, wenn der Einfachheit wegen das Argument t überall weggelassen wird:

$$(e^{iw})^{(n+1)} = e^{iw} W'_n + e^{iw} iw' W_n.$$

Andererseits ist nach Gleichung 9) selbst

$$(e^{iw})^{(n+1)} = e^{iw} W_{n+1}.$$

Folglich hat man

12)
$$W_{n+1} = W'_n + iw' W_n.$$

Die n-malige Ableitung der Gleichung

$$(e^{iw})' = iw' e^{iw}$$

ergiebt

$$(e^{iw})^{(n+1)} = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} iw^{(l+1)} (e^{iw})^{(n-l)}$$
$$= ie^{iw} \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} w^{(l+1)} W_{n-l}.$$

Daher ist

13)
$$W_{n+1} = i \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} w^{(l+1)} W_{n-l} \qquad (W_0 = 1).$$

Die Formeln 12) und 13) dienen zur schrittweisen Berechnung der Grössen W.

Denkt man sich die Gleichung 13) für die Werthe $n = 1, 2, \ldots, n$ hingeschrieben, so liefert die Elimination von $W_1, W_2, \ldots, W_n$ unmittelbar

14)
$$W_{n+1} = i^{n+1} \cdot \begin{vmatrix} w' & \binom{n}{1} w'' & \binom{n}{2} w''' & \cdots & \binom{n}{1} w^{(n)} & w^{(n+1)} \\ i & w' & \binom{n-1}{1} w'' & \cdots & \binom{n-1}{1} w^{(n-1)} & w^{(n)} \\ 0 & i & w' & \cdots & \binom{n-2}{1} w^{(n-2)} & w^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & i & w' \end{vmatrix}.$$

Man hat z. B.

$$W_1 = iw', \quad W_2 = iw'' - w'^2, \quad W_3 = i(w''' - w'^3) - 3w'w'' \text{ u. s. w.}$$

Die Vergleichung von 9) und 9′) zeigt, dass $\underset{\cdot}{W}_l$ die zu W_l conjugirte complexe Grösse ist.

Anmerkung. Es bedarf nur einer geringfügigen Aenderung an den Formeln dieses und der beiden folgenden Paragraphen, damit dieselben auch für ähnlich-veränderliche Systeme Geltung erlangen. Man vergleiche meine Abhandlung über ähnlich-veränderliche Systeme, Civilingenieur Bd. 29, 1883, wo in der Anmerkung zu § 5 die Gleichung 12) entsprechende Recursionsformel bereits angegeben ist.

§ 5. Fortsetzung.

Man nehme jetzt an, dass $x(t)$ und $\underset{\cdot}{x}(t)$ beide sich bewegen, während $\underset{\cdot}{a}(t)$ in $\underset{\cdot}{\Sigma}$ ruht. Dies berücksichtigend, leite man die Gleichung 8) n-mal nach t ab und setze nachher $t = 0$. Es kommt

$$(x^{(n)}) - a^{(n)} = \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n}{l} W_l (\underset{\cdot}{x}^{(n-l)}) + W_n (\underset{\cdot}{x} - \underset{\cdot}{a})$$

und nach Subtraction von Gleichung 11), da $x = \underset{\cdot}{x}$, $a = \underset{\cdot}{a}$ ist:

$$(x^{(n)}) - x^{(n)} = \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n}{l} W_l (\underset{\cdot}{x}^{(n-l)}) \qquad (W_0 = 1). \tag{15}$$

Es ist z. B.:

$$(x') - x' = (\underset{\cdot}{x}'),$$
$$(x'') - x'' = (\underset{\cdot}{x}'') + 2 W_1 (\underset{\cdot}{x}'),^*$$
$$(x''') - x''' = (\underset{\cdot}{x}''') + 3 W_1 (\underset{\cdot}{x}'') + 3 W_2 (\underset{\cdot}{x}') \text{ u. s. w.}$$

Auf ähnliche Weise findet man:

$$(\underset{\cdot}{x}^{(n)}) - \underset{\cdot}{x}^{(n)} = \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n}{l} \underset{\cdot}{W}_l (x^{(n-l)}). \tag{15'}$$

Z. B.

$$(\underset{\cdot}{x}') - \underset{\cdot}{x}' = (x'),$$
$$(\underset{\cdot}{x}'') - \underset{\cdot}{x}'' = (x'') + 2 \underset{\cdot}{W}_1 (x'),$$
$$(\underset{\cdot}{x}''') - \underset{\cdot}{x}''' = (x''') + 3 \underset{\cdot}{W}_1 (x'') + 3 \underset{\cdot}{W}_2 (x') \text{ u. s. w.}$$

Wird nachträglich wieder angenommen, dass x ruht, so verschwinden die Ableitungen (x'), (x''), ... und die Ableitungen von $\underset{\cdot}{x}$ müssen ohne Klammer geschrieben werden. Dann liefert die Gleichung 15):

$$-x^{(n)} = \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n}{l} W_l \underset{\cdot}{x}^{(n-l)}. \tag{16}$$

Z. B.

$$-x' = \underset{\cdot}{x}',$$
$$-x'' = \underset{\cdot}{x}'' + 2 W_1 \underset{\cdot}{x}',$$
$$-x''' = \underset{\cdot}{x}''' + 3 W_1 \underset{\cdot}{x}'' + 3 W_2 \underset{\cdot}{x}' \text{ u. s. w.}$$

---

* Diese Gleichung drückt den Satz von Coriolis aus (vergl. Burmester, Lehrbuch der Kinematik, Bd. 1 S. 779). Gleichung 15) ist daher als Verallgemeinerung des Satzes von Coriolis zu betrachten.

Auf ähnliche Weise findet man aus 15'):

16') $$-\underset{\cdot}{x}^{(n)} = \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n}{l} \underset{\cdot}{W}_l\, x^{(n-l)}.$$

Z. B.

$$-\underset{\cdot}{x}' = x',$$
$$-\underset{\cdot}{x}'' = x'' + 2\,\underset{\cdot}{W}_1 x',$$
$$-\underset{\cdot}{x}''' = x''' + 3\,\underset{\cdot}{W}_1 x'' + 3\,\underset{\cdot}{W}_2 x' \quad \text{u. s. w.}$$

Diese Gleichungen stellen Beziehungen zwischen den Geschwindigkeiten verschiedener Ordnung dar, welche ein und derselbe Punkt bei der ursprünglichen und bei der umgekehrten Bewegung besitzt.

§ 6. Geschwindigkeiten des Poles erster Ordnung.

Sei $\underset{\cdot}{p}(t)$ die anfängliche Lage desjenigen Systempunktes, welcher zur Zeit t die Geschwindigkeit (erster Ordnung) Null hat, also zum Pole (erster Ordnung) wird, und $p(t)$ die Lage dieses Punktes im ruhenden System. Dann besteht für alle Werthe von t die Gleichung

$$p'(t) = 0.$$

Wenn daher in Gleichung 10) $x = p$ und $n = 1$ gesetzt wird, so kommt

$$-a'(t) = e^{iw(t)}\, W_1(t)\,(\underset{\cdot}{p}(t) - \underset{\cdot}{a}(t)).$$

Man leite diese Gleichung n-mal nach t ab, indem man $\underset{\cdot}{a}(t)$ als ruhend betrachtet, bringe auf der rechten Seite das letzte Glied allein und setze $t = 0$:

$$-a^{(n+1)} = \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n}{l} W_{l+1}(\underset{\cdot}{p}^{(n-l)}) + W_{n+1}(\underset{\cdot}{p} - \underset{\cdot}{a}).$$

Zieht man hiervon Gleichung 11) ab, nachdem man darin x durch p und n durch $(n+1)$ ersetzt hat, so findet man

17) $$-p^{(n+1)} = \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n}{l} W_{l+1}(\underset{\cdot}{p}^{(n-l)}).$$

Z. B.

$$-p'' = W_1(\underset{\cdot}{p}'),$$
$$-p''' = W_1(\underset{\cdot}{p}'') + 2W_2(\underset{\cdot}{p}') \quad \text{u. s. w.}$$

Für die umgekehrte Bewegung ergiebt sich auf ähnliche Weise

17') $$-\underset{\cdot}{p}^{(n+1)} = \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n}{l} \underset{\cdot}{W}_{l+1}(p^{(n-l)}).$$

Z. B.

$$-\underset{\cdot}{p}'' = \underset{\cdot}{W}_1(p'),$$
$$-\underset{\cdot}{p}''' = \underset{\cdot}{W}_1(p'') + 2\,\underset{\cdot}{W}_2(p') \quad \text{u. s. w.}$$

Hier erscheinen die Geschwindigkeiten höherer Ordnung, welche der gerade im Pol befindliche Systempunkt bei der ursprünglichen und bei der umgekehrten Bewegung hat, durch die sogenannten „Wechselgeschwindigkeiten" $(p^{(l)})$ und $(\underset{\cdot}{p}^{(l)})$ des Poles ausgedrückt. Durch Auflösung der Gleichungen

17) und 17') können umgekehrt die Wechselgeschwindigkeiten des Poles in Gestalt linearer Functionen der $p^{(l)}$ bez. $\underset{\cdot}{p}^{(l)}$ dargestellt werden.

Man leite die Gleichung 8) bei constantem $\underset{\cdot}{a}(t)$ einmal nach t ab, nachdem man zuvor x durch p ersetzt hat. Es kommt

$$(p'(t)) - a'(t) = e^{iw(t)}\, W_1\, (\underset{\cdot}{p}(t) - \underset{\cdot}{a}(t)) + e^{iw(t)}\, (\underset{\cdot}{p}'(t)).$$

Durch Subtraction der für $x = p$ und $n = 1$ geschriebenen Gleichung 10) folgt

$$18)\qquad (p'(t)) = e^{iw(t)}\, (\underset{\cdot}{p}'(t)).^*$$

Leitet man diese Gleichung $(n-1)$-mal nach t ab und setzt hierauf $t = 0$, so ergiebt sich

$$19)\qquad (p^{(n)}) = \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} W_l\, (\underset{\cdot}{p}^{(n-l)}).$$

Es ist z. B.

$$\begin{aligned} (p') &= (\underset{\cdot}{p}'), \\ (p'') &= (\underset{\cdot}{p}'') + W_1 (\underset{\cdot}{p}'), \\ (p''') &= (\underset{\cdot}{p}''') + 2 W_1 (\underset{\cdot}{p}'') + W_2 (\underset{\cdot}{p}') \quad \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

Wäre man von der Gleichung

$$(\underset{\cdot}{p}'(t)) = e^{-iw}\, (p'(t))$$

ausgegangen, so hätte man erhalten

$$19')\qquad (\underset{\cdot}{p}^{(n)}) = \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} \underset{\cdot}{W}_l\, (p^{(n-l)}).$$

Z. B.

$$\begin{aligned} (\underset{\cdot}{p}') &= (p'), \\ (\underset{\cdot}{p}'') &= (p'') + \underset{\cdot}{W}_1 (p'), \\ (\underset{\cdot}{p}''') &= (p''') + 2 \underset{\cdot}{W} (p'') + \underset{\cdot}{W}_2 (p') \quad \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

II. Arten der (unendlich kleinen) Bewegung eines starren ebenen Systems.

§ 7. Allgemeine Bemerkungen.

Es kann jetzt dazu übergegangen werden, die verschiedenen Fälle aufzuzählen und eingehend zu beschreiben, welche sich bei der Bewegung eines starren ebenen Systems in seiner Ebene unterscheiden lassen, sofern jene Bewegung blos während einer unendlich kleinen Zeitdauer, etwa im Augenblicke $t = 0$, beobachtet wird.

Sei $w^{(\varkappa)}$ die niedrigste der nicht verschwindenden Ableitungen von w, also

$$w' = 0, \quad w'' = 0, \quad \ldots, \quad w^{(\varkappa-1)} = 0,$$

dagegen

$$w^{(\varkappa)} \gtrless 0.$$

---

* Diese Gleichung drückt aus, dass die Polbahn und Polcurve, die Orte von p im ruhenden und im bewegten Systeme, aufeinander rollen.

Dann folgt aus 13):

$$
20)\quad \left\{\begin{aligned}
&W_1 = 0, \quad W_2 = 0, \quad \ldots, \quad W_{\varkappa-1} = 0;\\
&W_\varkappa = i w^{(\varkappa)}, \quad W_{\varkappa+1} = i w^{(\varkappa+1)}, \quad \ldots, \quad W_{2\varkappa-1} = i w^{(2\varkappa-1)};\\
&W_{2\varkappa} = i w^{(2\varkappa)} - \binom{2\varkappa-1}{\varkappa}(w^{(\varkappa)})^2.
\end{aligned}\right.
$$

Man beachte, dass $W_\varkappa$ die erste nicht verschwindende der Grössen W ist, sowie dass der reelle Theil von $W_{2\varkappa}$ nie verschwindet, sondern immer einen negativen Werth hat. Die complexen Grössen $\underset{\cdot}{W}$ sind, wie bereits bekannt, zu den W conjugirt.

Bezeichnet $x^{(\nu)}$ die Geschwindigkeit niedrigster Ordnung eines beliebigen Systempunktes x, welche nicht verschwindet, so hat man vermöge 16) und 20):

$$
21)\quad \left\{\begin{aligned}
&\underset{\cdot}{x}^{(\nu)} = -x^{(\nu)}, \quad \underset{\cdot}{x}^{(\nu+1)} = -x^{(\nu+1)}, \quad \ldots, \quad \underset{\cdot}{x}^{(\nu+\varkappa-1)} = -x^{(\nu+\varkappa-1)};\\
&\underset{\cdot}{x}^{(\nu+\varkappa)} = -x^{(\nu+\varkappa)} + \binom{\nu+\varkappa}{\varkappa} i w^{(\varkappa)} x^{(\nu)}.
\end{aligned}\right.
$$

Aus dem Vorhergehenden folgt, dass, wenn eine der Strecken $x^{(\nu+\varkappa)}$ und $\underset{\cdot}{x}^{(\nu+\varkappa)}$ entweder verschwindet, oder zu $x^{(\nu)}$ (also auch $\underset{\cdot}{x}^{(\nu)}$) parallel ist, bei der andern weder das Eine, noch das Andere stattfinden kann, während andererseits für $\varrho = 0, 1, \ldots, (\varkappa-1)$ die Strecken $x^{(\nu+\varrho)}$ und $\underset{\cdot}{x}^{(\nu+\varrho)}$ gleichzeitig verschwinden oder zu $x^{(\nu)}$ parallel werden. Man erinnert sich nun aus § 2, dass die Exponenten der beiden ersten unter den Strecken $x^{(n)}$ bezw. $\underset{\cdot}{x}^{(n)}$, welche nicht verschwinden und auch nicht parallel zueinander sind, das Zeichen der Bahnstelle zusammensetzen, welche im Augenblicke $t = 0$ bei der ursprünglichen bezw. umgekehrten Bewegung von dem Systempunkte x beschrieben wird. Sind also $(\nu, \nu+\sigma)$ und $(\nu, \nu+\underset{\cdot}{\sigma})$ die Zeichen jener Curvenstellen, so erkennt man Folgendes:

Ist eine der Zahlen σ und $\underset{\cdot}{\sigma}$ grösser als $\varkappa$, so hat die andere den Werth $\varkappa$. Ist eine von ihnen gleich $\varkappa$, so ist die andere entweder gleich oder grösser als $\varkappa$. Liegt eine jener Zahlen unter $\varkappa$, so sind beide einander gleich.

Weil die fraglichen Curvenstellen die erste Zahl in ihren bezüglichen Zeichen gemeinschaftlich haben, so können dieselben nur entweder beide zu den Einseit- und Wendestellen, oder beide zu den Spitzen und Schnäbeln gehören.

Ganz unmöglich ist es, dass ein Systempunkt bei der ursprünglichen Bewegung etwa eine gewöhnliche Curvenstelle, also eine Einseitstelle, bei der umgekehrten Bewegung dagegen eine Spitze oder einen Schnabel beschreibt.

Es wird jetzt nöthig, eine Trennung in verschiedene Fälle eintreten zu lassen. Zunächst muss man unterscheiden, ob der Pol im Endlichen oder unendlich fern liegt.

A. Der Pol liegt im Endlichen.

§ 8. Die Berührungsstellen der Polcurven.

Sei $p^{(\lambda)}$ die erste unter den Grössen (p'), (p''), ..., welche nicht verschwindet, also

$$(p') = 0, \quad (p'') = 0, \quad \ldots, \quad (p^{(\lambda-1)}) = 0,$$

dagegen

$$(p^{(\lambda)}) \gtrless 0.$$

Bei Benützung von 20) ergeben dann die Gleichungen 19) oder 19'):

$$22) \quad \left\{ \begin{array}{c} (\underset{\cdot}{p}') = 0, \quad (\underset{\cdot}{p}'') = 0, \quad \ldots, \quad (\underset{\cdot}{p}^{(\lambda-1)}) = 0; \\ (\underset{\cdot}{p}^{(\lambda)}) = (p^{(\lambda)}), \quad (\underset{\cdot}{p}^{(\lambda+1)}) = (p^{(\lambda+1)}), \quad \ldots, \quad (\underset{\cdot}{p}^{(\lambda+\varkappa-1)}) = (p^{(\lambda+\varkappa-1)}); \\ (\underset{\cdot}{p}^{(\lambda+\varkappa)}) = (p^{(\lambda+\varkappa)}) - \binom{\lambda+\varkappa-1}{\varkappa} i w^{(\varkappa)}(p^{(\lambda)}). \end{array} \right.$$

Es giebt $(p^{(\lambda)}) = (\underset{\cdot}{p}^{(\lambda)})$, als Strecke aufgefasst, offenbar die Richtung der gemeinschaftlichen Tangente an, welche die Polbahn und Polcurve im Augenblicke $t = 0$ besitzen. Aus der letzten der eben geschriebenen Gleichungen geht hervor, dass, wenn eine der Strecken $(p^{(\lambda+\varkappa)})$ und $(\underset{\cdot}{p}^{(\lambda+\varkappa)})$ Null oder zu $(p^{(\lambda)})$ parallel ist, bei der andern keiner dieser beiden Fälle eintreten kann. Hält man dieses mit dem Umstande zusammen, dass für $\varrho < \varkappa$ immer $(\underset{\cdot}{p}^{(\lambda+\varrho)}) = (p^{(\lambda+\varrho)})$ ist, so kommt man zu folgendem Ergebnisse:

Wenn die zu $t = 0$ gehörigen Berührungsstellen der Polbahn und Polcurve die Zeichen $(\lambda, \lambda+\mu)$ und $(\lambda, \lambda+\underset{\cdot}{\mu})$ haben, so können die Zahlen μ und $\underset{\cdot}{\mu}$ nicht beide grösser als $\varkappa$ sein. Ist eine von ihnen kleiner als $\varkappa$, so sind beide einander gleich. Hat eine derselben den Werth $\varkappa$, so ist die andere entweder gleich oder grösser als $\varkappa$. Sobald μ und $\underset{\cdot}{\mu}$ ungleich sind, ist immer die kleinere dieser Zahlen gleich $\varkappa$.

§ 9. Der Pol als Systempunkt.

Wendet man die Gleichungen 20) nnd 22) auf 17) und 17') an, so kommt:

$$23) \quad \left\{ \begin{array}{c} p' = 0, \quad p'' = 0, \quad p''' = 0, \quad \ldots, \quad p^{(\varkappa+\lambda-1)} = 0; \\ \underset{\cdot}{p}' = 0, \quad \underset{\cdot}{p}'' = 0, \quad \underset{\cdot}{p}''' = 0, \quad \ldots, \quad \underset{\cdot}{p}^{(\varkappa+\lambda-1)} = 0; \\ \underset{\cdot}{p}^{(\varkappa+\lambda)} = -p^{(\varkappa+\lambda)} = \binom{\varkappa+\lambda-1}{\varkappa} i w^{(\varkappa)}(p^{(\lambda)}). \end{array} \right.$$

Man sieht, dass $p^{(\varkappa+\lambda)}$ und $\underset{\cdot}{p}^{(\varkappa+\lambda)}$ die ersten nicht verschwindenden unter den Strecken p', p'', ... bezw. $\underset{\cdot}{p}'$, $\underset{\cdot}{p}''$, ... sind und beide auf $(p^{(\lambda)})$ senkrecht stehen. Also:

Der augenblicklich mit dem Pole zusammenfallende Systempunkt beschreibt — sowohl bei der ursprünglichen, als der umgekehrten Bewegung — eine Curvenstelle, deren Tan-

gente auf der gemeinsamen Tangente der Polcurven senkrecht steht und deren Zeichen die Form $(\varkappa+\lambda, \varkappa+\lambda+\cdots)$ hat.

Im Uebrigen gelten die in § 7 unter 21) gemachten Bemerkungen. Aus denselben folgt u. A., dass von den beiden zur ursprünglichen und zur umgekehrten Bewegung gehörigen Curvenstellen, welche der Pol als Systempunkt in irgend einem Augenblicke erzeugt, immer wenigstens die eine unendlich grosse Krümmung hat.

§ 10. Vom Pol verschiedene Systempunkte.

Ersetzt man in den Gleichungen 11) und 11') a durch p und berücksichtigt 20) und 23), so ergiebt sich:

24) $$\left\{\begin{array}{c} x'=0, \quad x''=0, \quad \ldots, \quad x^{(\varkappa-1)}=0; \\ \underset{\cdot}{x}'=0, \quad \underset{\cdot}{x}''=0, \quad \ldots, \quad \underset{\cdot}{x}^{(\varkappa-1)}=0; \\ x^{(\varkappa)}=-\underset{\cdot}{x}^{(\varkappa)}=iw^{(\varkappa)}(x-p). \end{array}\right.$$

Hieraus folgt:

Jeder nicht mit dem Pole zusammenfallende Systempunkt beschreibt — sowohl bei der ursprünglichen, als der umgekehrten Bewegung — eine Curvenstelle, deren Tangente auf der Verbindungslinie des Punktes mit dem Pole senkrecht steht (oder deren Normale durch den Pol hindurchgeht) und deren Zeichen die Gestalt $(\varkappa, \varkappa+\cdots)$ hat.

Auch hier muss an die zu 21) gemachten Bemerkungen erinnert werden. Dieselben führen u. A. zu dem Ergebniss, dass von den beiden Curvenstellen, welche ein und derselbe nicht mit dem Pole zusammenfallende Systempunkt bei der ursprünglichen und der umgekehrten Bewegung beschreibt, höchstens eine die Krümmung Null haben kann.

§ 11. Die verallgemeinerten De La Hire'schen Kreise.

Man zerlege die complexen Grössen W in ihre reellen und rein imaginären Bestandtheile, schreibe also etwa:

25) $$W_n = U_n + iV_n.$$

Dann wird mit der Bezeichnung

26) $$q_n = p - \frac{p^{(n)}}{U_n}:$$

27) $$x^{(n)} = U_n(x-q_n) + iV_n(x-p).$$

[Zufolge 11) ist nämlich für $a=p$:

$$x^{(n)} = W_n(x-p) + p^{(n)}.]$$

In dieser Gleichung erscheint die Geschwindigkeit n^{ter} Ordnung $x^{(n)}$ in zwei Componenten zerlegt, von welchen die eine parallel zur Verbindungslinie von x mit dem Punkte q_n ist, die andere senkrecht auf der Verbindungslinie von x mit dem augenblicklichen Pole steht.*

Daher ist $x^{(n)}$ dann und blos dann parallel zu $x^{(\varkappa)}$, d. h. normal zu $\overline{xp}$, wenn x auf dem Kreise liegt, der die Strecke pq_n zum Durchmesser hat.

Dieser Kreis werde mit K_n bezeichnet. Für die Umkehrung der ursprünglichen Bewegung giebt es Kreise von ähnlicher Bedeutung. Weil nämlich

25′) $$\underset{\cdot}{W} = U_n - i V_n$$

ist, so hat man

27′) $$\underset{\cdot}{x}^{(n)} = U_n (x - \underset{\cdot}{q}_n) - i V_n (x - p),$$

wenn

26) $$\underset{\cdot}{q}_n = p - \frac{\underset{\cdot}{p}^{(n)}}{U_n}$$

gesetzt wird. Aus 27′) folgt, dass der über $p\underset{\cdot}{q}_n$ als Durchmesser beschriebene Kreis $\underset{\cdot}{K}_n$ der Ort derjenigen Systempunkte ist, für welche bei der umgekehrten Bewegung die n^{te} Geschwindigkeit zur $\varkappa^{\text{ten}}$ parallel wird. Im Falle $\varkappa = 1$, $n = 2$, in welchem q_2 als „Wendepol" oder „Mittelpunkt der Winkelbeschleunigungen" (Schell) bezeichnet wird, sind diese Kreise bekanntlich schon von De La Hire (1706) bemerkt worden. (S. Burmester, Lehrbuch der Kinematik, Bd. 1 S. 121.)

§ 12. Ausartungen der Kreise K_n und $\underset{\cdot}{K}_n$.

Es müssen noch drei besondere Fälle erörtert werden.

1. Wenn U_n verschwindet [was z B. für die Werthe $n = \varkappa + 1$, $\varkappa + 2$, ..., $2\varkappa - 1$ zufolge 20) immer der Fall ist], $p^{(n)}$ aber nicht, so hat man

$$x^{(n)} = i V_n (x - p) + p^{(n)}, \quad \underset{\cdot}{x}^{(n)} = - i V_n (x - p) + \underset{\cdot}{p}^{(n)},$$

also wird jetzt $x^{(n)}$ (bezw. $\underset{\cdot}{x}^{(n)}$) dann und blos dann parallel zu $x^{(\varkappa)}$ oder $\underset{\cdot}{x}^{(\varkappa)}$ (normal zu $\overline{xp}$), wenn $\overline{xp}$ auf $p^{(n)}$ bezw. $\underset{\cdot}{p}^{(n)}$ senkrecht steht. Mit anderen Worten:

Ist $U_n = 0$, $p^{(n)}$ aber nicht, so artet der Kreis K_n (bezw. $\underset{\cdot}{K}_n$) in eine Gerade aus, welche den Pol enthält und senkrecht auf $p^{(n)}$ (bezw. $\underset{\cdot}{p}^{(n)}$) steht.

Es hätte dies auch aus Gleichung 26) [bezw. 26′)] geschlossen werden können, welche zeigt, dass q_n (bezw. $\underset{\cdot}{q}_n$) sich in der Richtung $p^{(n)}$ (bezw. $\underset{\cdot}{p}^{(n)}$) ins Unendliche entfernt, wenn U_n unbegrenzt abnimmt.

Dieser Fall kann für $n = 2\varkappa$ nicht eintreten, da $U_{2\varkappa}$ immer von Null verschieden ist. [S. Gleichung 20)].

---

* Allgemeinere Zerlegungen dieser Art, auch bei ähnlich-veränderlichen Systemen, sind in meiner Abhandlung „Ueber die Geschwindigkeiten beliebiger Ordnung eines in seiner Ebene bewegten ähnlich-veränderlichen ebenen Systems", Civilingenieur Bd. 29, 1883, angegeben.

2. Verschwindet $p^{(n)}$ (bezw. $\underset{\cdot}{p}^{(n)}$), aber nicht U_n, so fällt q_n (bezw. $\underset{\cdot}{q}_n$) auf p, also schrumpft der Kreis K_n (bezw. $\underset{\cdot}{K}_n$) zu einem Punkte, nämlich p, zusammen.

Dieser Fall ist für $n = \varkappa + \lambda$ unmöglich, da $p^{(\varkappa+\lambda)}$ und $\underset{\cdot}{p}^{(\varkappa+\lambda)}$ stets von Null verschieden sind. [S. Gleichung 23).]

3. Ist U_n sowohl als $p^{(n)}$ Null, so wird

$$x^{(n)} = i V_n (x - p), \quad \underset{\cdot}{x}^{(n)} = - i V_n (x - p),$$

d. h. es sind bei allen Systempunkten die Geschwindigkeiten n^{ter} und $\varkappa^{\text{ter}}$ Ordnung parallel, sowohl bei der ursprünglichen, als der umgekehrten Bewegung. Es wird in diesem Falle q_n bezw. $\underset{\cdot}{q}_n$ durch die Gleichungen 26) bezw. 26′) nicht bestimmt.

Dieser Fall kann weder für $n = 2\varkappa$, noch für $n = \varkappa + \lambda$ eintreten.

§ 13. Beziehungen zwischen den Kreisen K_n und $\underset{\cdot}{K}_n$.

Nach Gleichung 23) ist für jeden unter $(2\varkappa + \lambda)$ liegenden Werth von n

$$\underset{\cdot}{p}^{(n)} = - p^{(n)},$$

und folglich wegen 26) und 26′)

$$\underset{\cdot}{q}_n - p = p - q_n,$$

während dagegen [ebenfalls nach 23)] $\underset{\cdot}{p}^{(2\varkappa+\lambda)}$ nie gleich $p^{(2\varkappa+\lambda)}$ oder $(\underset{\cdot}{q}_{2\varkappa+\lambda} - p)$ gleich $(p - q_{2\varkappa+\lambda})$ werden kann.

D. h.: Ist $n < 2\varkappa + \lambda$, so liegen die Punkte q_n und $\underset{\cdot}{q}_n$ symmetrisch zu p. Folglich haben in diesem Falle die Kreise K_n und $\underset{\cdot}{K}_n$ gleiche Grösse und sie berühren sich (von aussen) im Pole. Artet (ebenfalls bei $n < 2k + \lambda$) einer von ihnen in eine Gerade aus, so geht der andere in dieselbe Gerade über. Die Punkte $q_{2\varkappa+\lambda}$ und $\underset{\cdot}{q}_{2\varkappa+}$ können nie symmetrisch zu p liegen, also auch die Kreise $K_{2\varkappa+\lambda}$ und $\underset{\cdot}{K}_{2\varkappa+\lambda}$ nie in der eben geschilderten Beziehung stehen.

Bemerkung. Die Vergleichung von 27) und 27′) führt zu einem merkwürdigen Satze, der nicht mit Stillschweigen übergangen werden soll. Durch Addition jener Gleichungen erhält man

$$x^{(n)} + \underset{\cdot}{x}^{(n)} = 2\, U_n \left(x - \frac{q_n + \underset{\cdot}{q}_n}{2} \right).$$

Da nun U_n reell ist und $(q_n + \underset{\cdot}{q}_n) : 2$ den Mittelpunkt der Strecke $\overline{q_n \underset{\cdot}{q}_n}$ vorstellt, so heisst dies:

Die Resultante der Geschwindigkeiten n^{ter} Ordnung, die ein und derselbe beliebige Systempunkt bei der ursprünglichen und bei der umgekehrten Bewegung hat, geht immer durch einen festen Punkt, welcher in der Mitte zwischen q_n und $\underset{\cdot}{q}_n$ liegt, also mit dem Pol zusammenfällt, sobald $n < 2\varkappa + \lambda$ ist.

Hierbei ist jedoch $U_n \gtrless 0$ vorausgesetzt. Wenn U_n verschwindet, so hat man

$$x^{(n)} + \underset{\cdot}{x}^{(n)} = p^{(n)} + \underset{\cdot}{p}^{(n)}.$$

Die fragliche Resultante ist also in diesem Falle einer festen Richtung parallel und von constanter Grösse, oder aber Null; Letzteres, wenn $(p^{(n)} + \underset{\cdot}{p}^{(n)})$ verschwindet.

§ 14. Zeichen der von den gewöhnlichen Systempunkten beschriebenen Bahnstellen.

Da für $n < 2\varkappa$, aber nicht für $n = 2\varkappa$, U_n verschwindet und weil ferner für $n < \varkappa + \lambda$, aber nicht für $n = 2\varkappa + \lambda$, $p^{(n)} = 0$ und $\underset{\cdot}{p}^{(n)} = 0$ ist, so sind für alle Werthe von n, welche unter der kleineren der beiden Zahlen $2\varkappa$ und $(\varkappa + \lambda)$ liegen, die Strecken $x^{(n)}$ bezw. $\underset{\cdot}{x}^{(n)}$ und $x^{(\varkappa)}$ oder $\underset{\cdot}{x}^{(\varkappa)}$ parallel, während für $n = 2\varkappa$ und $n = \varkappa + \lambda$ nur die auf der Linie K_n bezw. $\underset{\cdot}{K}_n$ befindlichen Systempunkte jene Eigenschaft besitzen. (S. § 11.) Daraus folgt:

S o w o h l b e i d e r u r s p r ü n g l i c h e n B e w e g u n g, a l s d e r e n U m k e h r u n g b e s c h r e i b e n, f a l l s $\varkappa \leqq \lambda$ i s t, a l l e S y s t e m p u n k t e — m i t A u s n a h m e g e w i s s e r, d i e e i n e L i n i e e r f ü l l e n — B a h n s t e l l e n m i t d e m Z e i c h e n $(\varkappa, 2\varkappa)$, a l s o m i t e n d l i c h e r u n d v o n N u l l v e r s c h i e d e n e r K r ü m m u n g; d a g e g e n s o l c h e m i t d e m Z e i c h e n $(\varkappa, \varkappa + \lambda)$, a l s o m i t u n e n d l i c h g r o s s e r K r ü m m u n g, w e n n $\varkappa > \lambda$ i s t.

Bahnstellen mit der Krümmung Null, z. B. gewöhnliche Wendepunkte, können also, bei endlichem Pol, nur von den Punkten einer gewissen Ausnahmelinie erzeugt werden. Ueber die äussere Gestalt der Bahnstellen, welche von den gewöhnlichen Systempunkten beschrieben werden, ist zu bemerken, dass nur, wenn $\varkappa > \lambda$ ist, alle vier Hauptarten von Curvenstellen auftreten können, während im Falle $\varkappa \leqq \lambda$ nur Einseitstellen und Schnäbel, nicht aber Wendestellen und Spitzen möglich sind.

Was nun jene Ausnahmelinie betrifft, so besteht dieselbe für $\varkappa = \lambda$ in dem nie ausartenden Kreise $K_{2\varkappa}$ bez. $\underset{\cdot}{K}_{2\varkappa}$. Diese beiden Kreise haben nach § 13 gleiche Grösse und berühren einander, wie auch die Polbahn und Polcurve, im Pole. Letzteres folgt daraus, dass nach den Gleichungen 23), 26), 26′) im Falle $\varkappa = \lambda$ die Punkte $q_{2\varkappa}$ und $\underset{\cdot}{q}_{2k}$ auf der gemeinschaftlichen Normalen jener Curven liegen.

Ist $\varkappa > \lambda$, so fällt die Ausnahmelinie — sowohl bei der ursprünglichen Bewegung, als ihrer Umkehrung — mit der gemeinsamen Tangente der Polbahn und Polcurve zusammen. Denn nach § 12 ist dieselbe, da jetzt $\varkappa + \lambda < 2\varkappa$, eine Gerade durch den Pol, die auf der Strecke $p^{(\varkappa+\lambda)} = -\underset{\cdot}{p}^{(\varkappa+\lambda)}$ senkrecht steht, welch' letztere ihrerseits nach § 9 zur gemeinschaftlichen Tangente gedachter Curven normal ist.

Wenn endlich $\varkappa < \lambda$ ist, so zieht die Ausnahmelinie nach § 13 sich auf einen Punkt, den Pol, zusammen.

§ 15. Zeichen der von den Ausnahmepunkten beschriebenen Bahnstellen.

Die schon in §§ 9 und 10 gefundenen Thatsachen lassen sich vervollständigen, wenn man die Zeichen der augenblicklichen Berührungsstellen der Polbahn und Polcurve kennt. Nach § 8 haben dieselben die Form $(\lambda, \lambda+\mu)$ und $(\lambda, \lambda+\underset{\cdot}{\mu})$, wobei die Zahlen μ und $\underset{\cdot}{\mu}$ gewissen in demselben Paragraphen angegebenen Beschränkungen unterliegen.

Es genügt die Untersuchung der ursprünglichen Bewegung, denn eine blosse Vertauschung der Zahlen μ und $\underset{\cdot}{\mu}$ in den für jene aufgestellten Regeln muss diejenigen für die umgekehrte Bewegung ergeben.

Aus Gleichung 17) folgt bei Berücksichtigung von 20) und 22):

$$-p^{(\varkappa+\lambda+\varrho)}=\binom{\varkappa+\lambda+\varrho-1}{\varkappa-1} W_\varkappa (\underset{\cdot}{p}^{(\lambda+\varrho)})+\cdots+\binom{\varkappa+\lambda+\varrho-1}{\varkappa+\varrho-1} W_{\varkappa+\varrho}(\underset{\cdot}{p}^{(\lambda)}).$$

Nun zeigt Gleichung 20): So lange ϱ unter $\varkappa$ liegt, sind die Coefficienten $W_\varkappa$, $W_{\varkappa+1}$, ..., $W_{\varkappa+\varrho}$ alle rein imaginär, bewirken also eine Drehung der mit ihnen multiplicirten Strecken um einen und denselben Winkel, nämlich einen rechten. Für $\varrho > \varkappa$ ist $W_{\varkappa+\varrho}$ im Allgemeinen nicht rein imaginär, sondern damit dies der Fall sei, müssen die Winkelgeschwindigkeiten $w^{(\varkappa)}$, $w^{(\varkappa+1)}$, ..., $w^{(\varkappa+\varrho)}$ einer Bedingungsgleichung genügen. $W_{2\varkappa}$ ist nie rein imaginär. Aus der Bedeutung der Zahl $\underset{\cdot}{\mu}$ geht hervor, dass die Strecken $(\underset{\cdot}{p}^{(\lambda+1)})$, $(\underset{\cdot}{p}^{(\lambda+2)})$, ..., $(\underset{\cdot}{p}^{(\lambda+\underset{\cdot}{\mu}-1)})$ alle zu $(\underset{\cdot}{p}^{(\lambda)})$ parallel sind, wenn sie nicht verschwinden, während $(\underset{\cdot}{p}^{(\lambda+\underset{\cdot}{\mu})})$ weder verschwinden, noch zu $(\underset{\cdot}{p}^{(\lambda)})$ parallel sein kann. Beachtet man überdies noch, dass $W_\varkappa$ ebenso wie $(\underset{\cdot}{p}^{(\lambda)})$ nie verschwindet, so lassen sich aus der obigen Gleichung die nachstehenden Folgerungen ziehen:

1. Ist $\underset{\cdot}{\mu} < \varkappa$, so wird für $\varrho = 1, 2, \ldots, (\underset{\cdot}{\mu}-1)$ die Strecke $p^{(\varkappa+\lambda+\varrho)}$ zu $p^{(\varkappa+\lambda)}$ parallel, falls sie nicht verschwindet. Dagegen kann die Strecke $p^{(\varkappa+\lambda+\underset{\cdot}{\mu})}$ nicht verschwinden und auch nicht parallel zu $p^{(\varkappa+\lambda)}$ werden.

2. Wenn $\underset{\cdot}{\mu} = \varkappa$ ist, so wird für $\varrho < \varkappa$ die Strecke $p^{(\varkappa+\lambda+\varrho)}$ auf alle Fälle parallel zu $p^{(\varkappa+\lambda)}$, oder Null; für $\varrho \geqq \varkappa$ ist dies im Allgemeinen nicht der Fall, sondern nur, wenn eine bestimmte Bedingungsgleichung zwischen den Grössen $W_{2\varkappa}$, $W_{2\varkappa+1}$, ..., $W_{\varkappa+\varrho}$ und $(\underset{\cdot}{p}^{(\lambda+\underset{\cdot}{\mu})})$, $(\underset{\cdot}{p}^{(\lambda+\underset{\cdot}{\mu}+1)})$, ..., $(\underset{\cdot}{p}^{(\lambda+\underset{\cdot}{\mu}+\varrho)})$ erfüllt wird.

3. Hat man $\underset{\cdot}{\mu} > \varkappa$, so ist $p^{(2\varkappa+\lambda)}$ sicher nicht zu $p^{(\varkappa+\lambda)}$ parallel und auch nicht Null, während alle vorhergehenden Geschwindigkeiten des Poles, also die Strecken $p^{(\varkappa+\lambda+1)}$, $p^{(\varkappa+\lambda+2)}$, ..., $p^{(2\varkappa+\lambda-1)}$ parallel sind oder verschwinden.

Wendet man diese Ergebnisse auf den in allen Fällen zu den Ausnahmepunkten gehörigen Pol an, so erhält man die folgenden Sätze:

Wenn $\underset{\cdot}{\mu} < \varkappa$ ist, so beschreibt der gerade mit dem Pole zusammenfallende Systempunkt eine Curvenstelle mit dem

Zeichen $(\varkappa+\lambda,\ \varkappa+\lambda+\mu)$. Ihre Krümmung ist unendlich gross, weil stets $2(\varkappa+\lambda) > \varkappa+\lambda+\mu$.

Ist $\mu=\varkappa$, so ist das Zeichen der fraglichen Curvenstelle im Allgemeinen $(\varkappa+\lambda,\ 2\varkappa+\lambda)$, also die Krümmung unendlich gross, weil $2(\varkappa+\lambda) > 2\varkappa+\lambda$. Es kann jenes Zeichen auch $(\varkappa+\lambda,\ 2\varkappa+\lambda+\nu)$ sein, wo $\nu \gtreqless 1$; hierzu ist jedoch erforderlich, dass ν bestimmte Bedingungsgleichungen zwischen den Winkelgeschwindigkeiten des Systems und den Wechselgeschwindigkeiten des Poles erfüllt werden. Die Krümmung der betreffenden Curvenstelle ist dann unendlich, oder endlich und von Null verschieden, oder aber Null, je nachdem λ grösser als, gleich oder kleiner als ν ist; denn unter dieser Bedingung wird $2(\varkappa+\lambda) \gtreqless 2\varkappa+\lambda+\nu$.

Ist endlich $\mu > \varkappa$, so beschreibt der augenblicklich im Pole befindliche Systempunkt eine Curvenstelle mit dem Zeichen $(\varkappa+\lambda,\ 2\varkappa+\lambda)$, deren Krümmung unendlich ist.

§ 16. Fortsetzung: Vom Pole verschiedene Ausnahmepunkte.

Gehen wir nun zur Betrachtung der vom Pole verschiedenen Ausnahmepunkte über. Im Falle $\varkappa<\lambda$ giebt es keine solchen, weshalb derselbe durch die Ergebnisse des vorhergehenden Paragraphen bereits erledigt ist. Hat man dagegen $\varkappa=\lambda$, so erfüllen die Ausnahmepunkte, wie aus § 14 bekannt ist, den nie ausartenden Kreis $K_{2\varkappa}$, bezw. bei der umgekehrten Bewegung den Kreis $\underline{K}_{2\varkappa}$, welche Kreise bekanntlich von gleicher Grösse sind und einander, sowie die Polbahn und Polcurve im Pole berühren. Es genügt wieder die Untersuchung der ursprünglichen Bewegung, also des Kreises $K_{2\varkappa}$.

Aus Gleichung 26) geht hervor, dass, welches auch der Werth von n sein mag, der Durchmesser pq_n des Kreises K_n der n^{ten} Geschwindigkeit des Poles, d. h. der Strecke $p^{(n)}$, parallel ist. Wenn also z. B. $p^{(m)}$ und $p^{(n)}$ parallel sind, so berühren sich die Kreise K_m und K_n im Pole. Sie fallen sogar zusammen, wenn noch die Bedingung

$$\frac{p^{(m)}}{U_m}=\frac{p^{(n)}}{U_n}$$

erfüllt ist, also ihre Durchmesser einander gleich werden. Daher ergeben die über jene Strecken in § 15 unter 1, 2, 3 gemachten Aussagen Folgendes:

Hat man $\mu<\varkappa$, so berühren die Kreise $K_{2\varkappa+1}, K_{2\varkappa+2}, \ldots, K_{2\varkappa+\mu-1}$ den Kreis $K_{2\varkappa}$ im Pole. Der Kreis $K_{2\varkappa+\mu}$ kann nicht zu einem Punkte zusammenschrumpfen und auch nicht den Kreis $K_{2\varkappa}$ berühren, muss also letzteren ausser in p noch in einem davon verschiedenen Punkte schneiden. Es ist auch möglich, dass die Kreise $K_{2\varkappa+1}, K_{2\varkappa+2}, \ldots, K_{2\varkappa+\varrho}$ $(\varrho<\mu)$ mit $K_{2\varkappa}$ zusammenfallen, was dann und blos dann geschieht, wenn

$$\frac{p^{(2\varkappa)}}{U_{2\varkappa}}=\frac{p^{(2\varkappa+1)}}{U_{2\varkappa+1}}=\cdots=\frac{p^{(2\varkappa+\varrho)}}{U_{2\varkappa+\varrho}}.$$

Ist $\mu = \varkappa$, so wird der Kreis $K_{2\varkappa}$ von den Kreisen $K_{2\varkappa+1}$, $K_{2\varkappa+2}$, ..., $K_{3\varkappa-1}$ im Pole berührt, dagegen von $K_{3\varkappa}$ im Allgemeinen nicht. Damit auch noch die Kreise $K_{3\varkappa}$, $K_{3\varkappa+1}$, ..., $K_{3\varkappa+\nu-1}$ den Kreis $K_{2\varkappa}$ berühren, müssen ν Bedingungsgleichungen zwischen den Winkelgeschwindigkeiten des Systems und den Wechselgeschwindigkeiten des Poles erfüllt werden. Es sind ϱ weitere Gleichungen zu erfüllen, wo ϱ auch gleich oder grösser als $\varkappa$ sein kann, wenn die Kreise $K_{2\varkappa+1}$, $K_{2\varkappa+2}$, ..., $K_{2\varkappa+\varrho}$ mit $K_{2\varkappa}$ gleiche Grösse haben, also ganz mit ihm zusammenfallen sollen.

Ist endlich $\mu > \varkappa$, so schneidet der Kreis $K_{3\varkappa}$ sicher den Kreis $K_{2\varkappa}$ ausser im Pole noch in einem davon getrennten Punkte, während $K_{2\varkappa}$ von den Kreisen $K_{2\varkappa+1}$, $K_{2\varkappa+2}$, ..., $K_{3\varkappa-1}$ im Pole berührt wird. Es können auch ϱ der letzteren Kreise, $(\varrho < \varkappa)$, mit $K_{2\varkappa}$ ganz zusammenfallen, wozu die Erfüllung von ϱ Bedingungsgleichungen erforderlich ist.

Es ist leicht einzusehen, dass die Bedingungsgleichungen, von welchen im Vorhergehenden die Rede gewesen ist, miteinander verträglich sind.

Nun bildet K_n den Ort derjenigen Punkte, deren n^{te} Geschwindigkeit zur $\varkappa^{\text{ten}}$ parallel ist. Es führen deshalb die vorhergehenden Ergebnisse zu den folgenden Sätzen:

Wenn $\varkappa = \lambda$ ist, so beschreiben, abgesehen vom Pole, die Punkte des nie ausartenden Kreises $K_{2\varkappa}$ im Allgemeinen Curvenstellen mit dem Zeichen $(\varkappa, 2\varkappa+1)$, deren Krümmung Null ist. Werden die Gleichungen

$$\frac{p^{(2\varkappa)}}{U_{2\varkappa}} = \frac{p^{(2\varkappa+1)}}{U_{2\varkappa+1}} = \cdots = \frac{p^{(2\varkappa+\varrho)}}{U_{2\varkappa+\varrho}}$$

befriedigt, so ist das fragliche Zeichen $(\varkappa, 2\varkappa+1+\varrho)$. Es ist jedoch hinzuzufügen:

a) Wenn $\mu < \varkappa$ ist, so muss ϱ stets kleiner als μ sein. Ist $\varrho = \mu - 1$, so giebt es auf dem Kreise $K_{2\varkappa}$ einen nicht mit dem Pole zusammenfallenden Ausnahmepunkt, es ist der zweite Schnittpunkt von $K_{2\varkappa}$ mit $K_{2\varkappa+\mu}$, der im Allgemeinen eine Curvenstelle mit dem Zeichen $(\varkappa, 2\varkappa+1+\mu)$ beschreibt, während für die übrigen Punkte jenes Kreises das betreffende Zeichen ja $(\varkappa, 2\varkappa+\mu)$ ist. Wenn durch den fraglichen Ausnahmepunkt noch σ der auf $K_{2\varkappa+\mu}$ folgenden Kreise $K_{2\varkappa+\mu+1}$, $K_{2\varkappa+\mu+2}$, ..., $K_{2\varkappa+\mu+\sigma}$ hindurchgehen, wozu die Erfüllung von σ weiteren Bedingungsgleichungen erforderlich ist, so beschreibt derselbe eine Curvenstelle mit dem Zeichen $(\varkappa, 2\varkappa+1+\mu+\sigma)$.

b) Falls $\mu = \varkappa$ ist, so beschreibt für $\varrho = \varkappa - 1$ der vom Pole verschiedene Schnittpunkt der Kreise $K_{2\varkappa}$ und $K_{3\varkappa}$ eine Bahnstelle mit dem Zeichen $(\varkappa, 3\varkappa+1)$ oder aber eine solche mit dem Zeichen $(\varkappa, 3\varkappa+1+\sigma)$, wenn noch σ besondere Bedingungen erfüllt werden, welche ausdrücken, dass die Kreise

$K_{3\varkappa+1}$, $K_{3\varkappa+2}$, ..., $K_{3\varkappa+\sigma}$ ebenfalls durch jenen Punkt hindurchgehen. Es kann auch $\varrho \gtreqless \varkappa$ sein, nur sind dann $\nu = \varrho + 1 - \varkappa$ Bedingungen zu erfüllen, und ferner giebt es dann einen besonderen, nicht mit dem Pole zusammenfallenden Ausnahmepunkt; er ist der zweite Schnittpunkt der Kreise $K_{2\varkappa}$ und $K_{3\varkappa+\nu}$, welcher im Allgemeinen eine Bahnstelle mit dem Zeichen $(\varkappa, 3\varkappa+1+\nu)$ erzeugt. Es kann jedoch das fragliche Zeichen auch $(\varkappa, 3\varkappa+1+\nu+\sigma)$ sein. Dieser Fall tritt ein, wenn die Kreise $K_{3\varkappa+\nu+1}$, $K_{3\varkappa+\nu+2}$, . ., $K_{3\varkappa+\nu+\sigma}$ durch die Schnittpunkte von $K_{2\varkappa}$ mit $K_{3\varkappa+\nu}$ hindurchgehen, was die Erfüllung von σ besonderen Bedingungsgleichungen erfordert.

c) Ist $\mu > \varkappa$, so muss ϱ kleiner als $\varkappa$ sein. Im Falle $\varrho = \varkappa - 1$ ist ein besonderer, vom Pole verschiedener Ausnahmepunkt vorhanden, der Schnittpunkt der Kreise $K_{2\varkappa}$ und $K_{3\varkappa}$, von welchem im Allgemeinen eine Bahnstelle mit dem Zeichen $(\varkappa, 3\varkappa+1)$ beschrieben wird. Werden noch σ besondere Bedingungsgleichungen erfüllt, so gehen die Kreise $K_{3\varkappa+1}$, $K_{3\varkappa+2}$, ..., $K_{3\varkappa+\sigma}$ durch die Schnittpunkte der Kreise $K_{2\varkappa}$ und $K_{3\varkappa}$, und das Zeichen der fraglichen Bahnstelle wird alsdann $(\varkappa, 3\varkappa+1+\sigma)$.

Wenden wir uns nun der Betrachtung des Falles $\varkappa > \lambda$ zu. Man erinnert sich, dass in demselben nach § 14 die Ausnahmelinie in der gemeinschaftlichen Tangente $K_{\varkappa+\lambda}$ der Polbahn und Polcurve besteht. Es ist ferner aus § 12 bekannt, dass jetzt für jeden der Werthe $n = \varkappa+\lambda+1$, $\varkappa+\lambda+2$, ..., $2\varkappa-1$ die Linie K_n eine Gerade ist, welche den Pol enthält und auf $p^{(n)}$ senkrecht steht, während $K_{2\varkappa}$ niemals eine Gerade sein kann. Wenn allerdings $p^{(n)}$ verschwindet, so wird K_n unbestimmt, weil dann bei allen Systempunkten die n^{te} Geschwindigkeit zur $\varkappa^{\text{ten}}$ parallel ist (s. § 12). Auf die folgenden Untersuchungen hat jedoch das Eintreten dieses Falles keinen Einfluss.

Man benütze wieder die in § 15 unter 1, 2, 3 bezüglich der Polgeschwindigkeiten festgestellten Thatsachen.

Sei zuerst $\mu < \varkappa$. Dann müssen drei Fälle unterschieden werden:

a) $\varkappa < \lambda + \mu$. Es zeigt sich, dass jetzt die Geraden $K_{\varkappa+\lambda+1}$, $K_{\varkappa+\lambda+2}$, ..., $K_{2\varkappa-1}$ mit der gemeinschaftlichen Tangente $K_{\varkappa+\lambda}$ der Polcurven zusammenfallen, der Kreis $K_{2\varkappa}$ dagegen $K_{\varkappa+\lambda}$ im Pole berührt.

b) $\varkappa = \lambda + \mu$. Auch jetzt fallen die Geraden $K_{\varkappa+\lambda+1}$, $K_{\varkappa+\lambda+2}$, ..., $K_{2\varkappa-1}$ mit der gemeinsamen Tangente der Polcurven zusammen, aber letztere wird vom Kreise $K_{2\varkappa}$ ausser im Pole noch in einem davon getrennten Punkte geschnitten.

c) $\varkappa > \lambda + \mu$. Die Geraden $K_{\varkappa+\lambda+1}$, $K_{\varkappa+\lambda+2}$, ..., $K_{2\varkappa-1}$ fallen mit $K_{\varkappa+\lambda}$ zusammen, die nie unbestimmte Gerade $K_{\varkappa+\lambda+\mu}$ dagegen nicht.

Sei zweitens $\mu = \varkappa$. Da $2\varkappa \leqq 2\varkappa + \lambda - 1$, so wird in diesem Falle

$K_{\varkappa+\lambda}$, mit welcher die Geraden $K_{\varkappa+\lambda+1}, K_{\varkappa+\lambda+2}, \ldots, K_{2\varkappa-1}$ zusammenfallen, vom Kreise $K_{2\varkappa}$ im Pole berührt.

Dasselbe findet statt, wenn $\mu > \varkappa$ ist. Für die von den Punkten der Geraden $K_{\varkappa+\lambda}$ beschriebenen Bahnstellen folgt hieraus der nachstehende Satz:

Ist $\varkappa > \lambda$, so beschreiben alle Punkte der gemeinschaftlichen Tangente der Polcurven Bahnstellen mit dem Zeichen $(\varkappa, 2\varkappa)$, also endlicher und von Null verschiedener Krümmung, ausgenommen in dem Falle $\varkappa > \lambda + \mu$, in welchem das fragliche Zeichen $(\varkappa, \varkappa + \lambda + \mu)$, also die Krümmung unendlich gross wird. Wenn $\varkappa = \lambda + \mu$ ist, so giebt es einen besonderen, nie mit dem Pole zusammenfallenden Ausnahmepunkt — er ist der zweite Schnittpunkt des Kreises $K_{2\varkappa}$ mit der gemeinsamen Tangente der Polcurven —, dessen Bahnstelle im Allgemeinen das Zeichen $(\varkappa, 2\varkappa + 1)$, also die Krümmung Null hat. Nur wenn noch σ besondere Bedingungen erfüllt werden, welche ausdrücken, dass die Kreise $K_{2\varkappa+1}, K_{2\varkappa+2}, \ldots, K_{2\varkappa+\sigma}$ durch die Schnittpunkte von $K_{2\varkappa}$ mit $K_{\varkappa+\lambda}$ hindurchgehen, gehört zu jenem Ausnahmepunkte das Zeichen $(\varkappa, 2\varkappa + 1 + \sigma)$.

B. Der Pol liegt unendlich fern.

§ 17. Die Geschwindigkeitspole verschiedener Ordnung und die Geraden G_n und $\dot{G}_n$.

Bekanntlich wird Geschwindigkeitspol n^{ter} Ordnung derjenige Punkt p_n genannt, dessen Geschwindigkeit n^{ter} Ordnung Null ist. Man findet denselben, wenn man in der für zwei beliebige Systempunkte x und a giltigen Gleichung 11) p_n an Stelle von x setzt. Es ergiebt sich:

$$-a^{(n)} = W_n (p_n - a)$$

oder

28) $$p_n = a - \frac{a^{(n)}}{W_n}.$$

Man sieht aus dieser Gleichung, dass p_n ins Unendliche fällt, wenn W_n, aber nicht $a^{(n)}$ verschwindet. Wenn $a^{(n)}$ und W_n beide Null sind, so giebt es keinen eigentlichen Pol n^{ter} Ordnung, weil dann, wie aus 11) unmittelbar hervorgeht, die Geschwindigkeit n^{ter} Ordnung bei allen Systempunkten verschwindet. Da nun unter den wirklich vorhandenen Geschwindigkeitspolen derjenige niedrigster Ordnung schlechtweg Pol genannt wird, und W_n für jeden unter $\varkappa$ liegenden Werth von n verschwindet, so hat man den Satz:

Ist $a^{(\iota)}$ die Geschwindigkeit niedrigster Ordnung irgend eines Punktes a, welche nicht verschwindet, und die Zahl ι kleiner als $\varkappa$, so liegt der Pol unendlich fern, und umgekehrt, damit der Pol ins Unendliche fällt, muss es einen Systempunkt geben, der eine von Null verschiedene Geschwindigkeit von niedrigerer als der $\varkappa^{\text{ten}}$ Ordnung besitzt.

Für die Werthe $n=\iota,\ \iota+1,\ \ldots,\ \varkappa-1$, für welche nach 20) W_n verschwindet, liefert Gleichung 11):

$$x^{(n)}=a^{(\iota)}.$$

D. h.: Von der Ordnung ι bis zur Ordnung $(\varkappa-1)$ einschliesslich sind die Geschwindigkeiten jeder Ordnung für alle Systempunkte nach Grösse und Richtung einander gleich.

Da die Geschwindigkeit niedrigster Ordnung eines Punktes durch ihre Richtung die Tangentenrichtung der von dem Punkte beschriebenen Bahn angiebt, so hat man den Satz:

Die Tangenten der von den Systempunkten augenblicklich beschriebenen Bahnstellen sind alle zueinander parallel, nämlich parallel zur Strecke $a^{(\iota)}$.

Sei jetzt $n \gtreqless \varkappa$. Dann ist ein Pol n^{ter} Ordnung p_n vorhanden, und wenn man in 11) p_n an Stelle von a setzt, so kommt

29) $$x^{(n)}=W_n\,(x-p_n).$$

Es bildet diese Gleichung den analytischen Ausdruck für den bekannten Satz, dass die Geschwindigkeit n^{ter} Ordnung eines jeden Systempunktes x mit der Strecke xp_n einen constanten Winkel einschliesst und zu derselben in constantem Verhältnisse steht. Jener constante Winkel ist gleich dem „Winkel" oder der Amplitude der complexen Zahl W_n. Hieraus folgt:

Der Ort aller Systempunkte, deren Geschwindigkeiten n^{ter} Ordnung zur Geschwindigkeit ι^{ter} Ordnung parallel ist, besteht in einer durch den Geschwindigkeitspol n^{ter} Ordnung p_n gehenden Geraden G_n, welche mit der Richtung von $a^{(\iota)}$ einen Winkel gleich der Amplitude der complexen Zahl W_n einschliesst.

Da für $n=\varkappa,\ \varkappa+1,\ \ldots,\ 2\varkappa-1$ nach Gleichung 20) die Zahlen W_n rein imaginär sind, also ihr Winkel einen rechten beträgt, während der Winkel von $W_{2\varkappa}$ nie ein rechter sein kann, so hat man ferner den Satz:

Die Geraden $G_\varkappa,\ G_{\varkappa+1},\ \ldots,\ G_{2\varkappa-1}$ stehen alle auf $a^{(\iota)}$ senkrecht, während dies bei $G_{2\varkappa}$ nie der Fall sein kann.

Was die möglichen Ausartungen der Geraden G betrifft, so ist Folgendes zu bemerken: Ist $W_n=0$, also $x^{(n)}=a^{(n)}$, so ist entweder bei keinem einzigen, oder bei allen Systempunkten die Geschwindigkeit n^{ter} Ordnung zu derjenigen von der Ordnung ι parallel, je nachdem $a^{(n)}$ und $a^{(\iota)}$ nicht parallel, oder aber parallel sind. Im ersten Falle kann man G_n als unendlich fern, im andern als unbestimmt betrachten. Für $n=\varkappa$ und $n=2\varkappa$ sind diese Ausnahmefälle unmöglich.

Fassen wir jetzt auch die Umkehrung der gegebenen Bewegung ins Auge. Gleichung 21) liefert für $\nu=\iota$:

$$\underset{\cdot}{x}^{(\iota)}=-x^{(\iota)},\quad \underset{\cdot}{x}^{(\iota+1)}=-x^{(\iota+1)},\quad \ldots,\quad \underset{\cdot}{x}^{(\iota+\varkappa+1)}=-x^{(\iota+\varkappa+1)},$$
$$\underset{\cdot}{x}^{(\iota+\varkappa)}=-x^{(\iota+\varkappa)}+\binom{\iota+\varkappa}{\varkappa}i\,w^{(\varkappa)}x^{(\iota)}.$$

Also: Von der Ordnung ι bis zur Ordnung $(\iota+\varkappa-1)$ einschliesslich ist für jeden Systempunkt die Geschwindigkeit irgend einer Ordnung bei der umgekehrten Bewegung derjenigen bei der ursprünglichen Bewegung entgegengesetzt. Letzteres kann nie der Fall sein, wenn die Ordnung $(\iota+\varkappa)$ beträgt. Es folgt hieraus, dass auch bei der umgekehrten Bewegung der Pol ins Unendliche fällt; dass der Ort der Systempunkte, bei welchen die Geschwindigkeiten von den Ordnungen n und ι parallel sind, durch eine den Pol $\underset{.}{p}_n$ enthaltende Gerade $\underset{.}{G}_n$ gebildet wird, sowie namentlich, dass

$$\begin{array}{lllll} & \underset{.}{p}_\varkappa = p_\varkappa, & \underset{.}{p}_{\varkappa+1} = p_{\varkappa+1}, & \ldots, & \underset{.}{p}_{\varkappa+\iota-1} = p_{\varkappa+\iota-1}, \\ 30) & \underset{.}{G}_\varkappa = G_\varkappa, & \underset{.}{G}_{\varkappa+1} = G_{\varkappa+1}, & \ldots, & \underset{.}{G}_{\varkappa+\iota-1} = G_{\varkappa+\iota-1} \end{array}$$

ist, während $p_{\varkappa+\iota}$ nie mit $\underset{.}{p}_{\varkappa+\iota}$ und $\underset{.}{G}_{\varkappa+\iota}$ nie mit $G_{\varkappa+\iota}$ zusammenfallen kann.

Zur Bestimmung von $\underset{.}{p}_n$ und $\underset{.}{x}^{(n)}$ hat man übrigens:

$$28') \qquad \underset{.}{p}_n = a - \frac{\underset{.}{a}^{(n)}}{\underset{.}{W}_n},$$

$$29') \qquad \underset{.}{x}^{(n)} = \underset{.}{W}_n (x - \underset{.}{p}_n).$$

§ 18. Zeichen der von den Systempunkten beschriebenen Bahnstellen.

Wenn irgend ein Systempunkt a eine Curvenstelle mit dem Zeichen (ι, ϱ) beschreibt und die Zahl ϱ kleiner als $\varkappa$ ist, so erzeugen alle Systempunkte Stellen mit demselben Zeichen. Denn bei jenem Punkte, und folglich nach § 17 — da die betreffenden Ordnungszahlen unter $\varkappa$ liegen — auch bei allen Systempunkten, ist unter den Geschwindigkeiten, welche nicht verschwinden und auch nicht zu $a^{(\iota)}$ parallel sind, die niedrigste von der Ordnung ϱ. Beschreibt ein Punkt eine Stelle $(\iota, \varkappa)$, so sind für diesen und folglich für alle Systempunkte die Geschwindigkeiten der Ordnungen $(\iota+1)$ bis $(\varkappa-1)$ einschliesslich entweder Null oder zu $a^{(\iota)}$ parallel. Für die Geschwindigkeit $\varkappa^{\text{ter}}$ Ordnung trifft dies nur bei den Punkten der Geraden $G_\varkappa$ zu. Also:

Beschreibt ein Systempunkt eine Curvenstelle mit dem Zeichen $(\iota, \varkappa)$, so thun es, mit Ausnahme der auf der Geraden $G_\varkappa$ befindlichen, alle Systempunkte.

Die Punkte von $G_\varkappa$ werden im Allgemeinen Bahnstellen mit dem Zeichen $(\iota, \varkappa+1)$ beschreiben. Es können jedoch die Geraden $G_{\varkappa+1}, G_{\varkappa+2}, \ldots, G_{\varkappa+\varrho}$, wenn $\varrho < \varkappa$ ist, mit $G_\varkappa$ zusammenfallen, wodurch das fragliche Zeichen in $(\iota, \varkappa+1+\varrho)$ geändert wird. Damit dies geschehe, sind ϱ Bedingungen zu erfüllen. Bei $G_{2\varkappa}$ ist solches unmöglich, weil diese Gerade mit $G_\varkappa$ nie den Winkel Null bilden kann. Wenn deshalb $\varrho = \varkappa - 1$ ist, so spielt der Schnittpunkt von $G_\varkappa$ mit $G_{2\varkappa}$ eine besondere Rolle. Es sind bei ihm die Geschwindigkeiten bis zur Ordnung $2\varkappa$ einschliesslich Null oder zu $a^{(\iota)}$, d. h. zur Geschwindigkeit niedrigster Ordnung, parallel, weshalb das Zeichen der von ihm beschriebenen Bahnstelle im Allgemeinen $(\iota, 2\varkappa+1)$ sein wird. Nur wenn die Geraden $G_{2\varkappa+1}, G_{2\varkappa+2}, \ldots, G_{2\varkappa+\sigma}$ durch den Schnittpunkt von $G_\varkappa$ mit $G_{2\varkappa}$ hindurchgehen, $G_{2\varkappa+\sigma+1}$ aber nicht mehr, wozu die Befriedigung von σ Bedingungsgleichungen erforderlich ist, so wird jenes Zeichen $(\iota, 2\varkappa+1+\sigma)$.

Hiermit sind alle Fälle erschöpft; denn wenn ein willkürlich herausgegriffener Systempunkt eine Curvenstelle mit dem Zeichen $(\iota, \varkappa+\cdots)$ beschreibt, so gehört er sicher zu den Ausnahmepunkten, weil nicht bei allen Systempunkten die Geschwindigkeit $\varkappa^{\text{ter}}$ Ordnung verschwinden oder zu derjenigen von der Ordnung ι parallel sein kann. Es ist hier nur die ursprüngliche Bewegung betrachtet worden. Will man die gefundenen Ergebnisse auf die umgekehrte Bewegung übertragen, so hat man die Sätze des vorhergehenden Paragraphen zu berücksichtigen.

(Schluss folgt.)

II.

Ueber die Realität der Doppeltangenten rationaler Plancurven vierter Ordnung vom Geschlechte Null.

Von

Prof. W. BINDER

in Wiener-Neustadt.

Hierzu Taf. I.

I.

1. Das Vorkommen von Doppeltangenten in allgemeinen Plancurven vierter Ordnung ist seit Steiner hauptsächlich von Salmon untersucht worden. Die Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten in Bezug auf ihre Doppeltangenten hat insbesondere Durège* einer eingehenden Erörterung unterzogen. Seither ist der letztere Fall vielfach, namentlich von E. Weyr, Ameseder, Bobek u. A. behandelt worden.

Ueber das Vorkommen von Doppeltangenten an einer Plancurve vierter Ordnung mit einem Berührungsknoten ist die Literatur bisher eine beschränkte, kaum umfassende zu nennen.

2. Es ist bekannt, dass eine rationale ebene Curve C_6^4 vier Doppeltangenten besitzt, welche entweder ganz oder theilweise reell und imaginär auftreten können, je nachdem ihre drei Doppelpunkte eigentliche, isolirte oder Rückkehrpunkte sind etc.

Wenn aber die Curve C_6^4 nur zwei Doppelpunkte enthält, von denen einer einen Berührungsknoten bildet, so dass zwei Curvenäste in Contact treten, dann besitzt die Plancurve höchstenfalls zwei Doppeltangenten, weil das andere Paar mit der Knotentangente eine Coincidenz eingeht.

3. Die Frage: „Können die vier Doppeltangenten einer C_6^4 sämmtlich eigentliche Tangenten sein?“ wird in der geistvollen und interessanten Abhandlung** des Herrn A. Ameseder (auf S. 848) dahin beantwortet:

* „Ueber die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten“, Sitzungsber. d. kais. Akad. d. Wiss., LXXII. Bd. 1875, S. 495.

** „Ueber die eine rationale Plancurve vierter Ordnung vierfach berührenden Kegelschnitte etc.“, Sitzungsber. d. kais. Akad. d. Wiss., LXXXIII. Bd. 4. Heft, 1881.

„Sind die vier Doppeltangenten einer rationalen Plancurve vierter Ordnung reell, so ist eine immer ideell."

Die nachstehenden synthetischen Untersuchungen sollen zeigen, dass der vorstehende Satz einen Irrthum ausspricht, weil die Prämisse, auf welche sich derselbe bezieht, nicht zutrifft; denn in einem Kegelschnittnetze mit drei Grundpunkten kommen eventuell immerhin vier Kegelschnitte vor, welche einen andern fixen Kegelschnitt doppelt mit eigentlichen Berührungssehnen tangiren; das Gegentheil dessen haben wir nirgends nachgewiesen gefunden. Es muss also vielmehr berichtigend und erweiternd der Satz so ausgesprochen werden:

„Die vier Doppeltangenten einer ebenen Curve vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten oder die zwei Doppeltangenten einer ebenen Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten, deren einer ein Berührungsknoten ist, können reell und gleichzeitig Tangenten mit eigentlichen Berührpunkten sein."

4. Um die Richtigkeit des vorstehenden Satzes nachzuweisen, werden wir die stattfindenden Beziehungen durch Abbildung der Plancurve auf einem beliebigen Kegelschnitt zu untersuchen haben. Wir wollen uns nachstehend zu diesem Zwecke einer Steiner'schen (quadratischen) Transformation bedienen, welche uns gleichzeitig eine sehr einfache Construction der betreffenden Plancurve C_6^4 gestattet.

Seit Jacob Steiner (in seiner berühmten Meisterschrift: „Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten voneinander") die Gesetze der quadratischen Verwandtschaft zweier Systeme aufgestellt, haben spätere Mathematiker Specialisirungen betrachtet, welche die synthetischen Beziehungen zwischen Gebilden vom n^{ten} und $2n^{ten}$ Grade in einer constructiven Vereinfachung weit mehr veranschaulichen, als dieses sonst der Fall ist.

5. Hirst* hat gezeigt, wenn sich zwei ebene Systeme $\Sigma\overline{\Sigma}$ in quadratischer Beziehung derart befinden, dass sie die unendlich fernen Geraden ihrer Trägerebenen perspectivisch gemeinsam haben, also die unendlich fernen imaginären Kreispunkte als Doppelpunkte der Verwandtschaft dieser Systeme gelten: dass dann in jedem der beiden Systeme $\Sigma\overline{\Sigma}$ der unendlich fernen gemeinsamen Geraden ein Kreis entspricht, welcher dem betreffenden Hauptdreiecke umschrieben ist und der Hauptkreis dieses Systems heisst.

6. Die denkbar grösste Einfachheit für die constructiven Beziehungen erreichen wir auf folgendem Wege. Nach der Hirst'schen Annahme werden die beiden Systeme $\Sigma\overline{\Sigma}$ sich deckend in einer gemeinsamen Trägerebene

* „Proceedings of the Royal Society" 1865. Vergl. weiter: „Sull'Inversione quadrica delle Curve piane", übersetzt von Cremona in Bd. 7 der „Annali di Matematica", oder in Battaglini's Giornale, Bd. 4 S. 278.

gedacht. Jedes System enthält ein Hauptdreieck $O_1 O_2 O_3$, $\overline{O_1 O_2 O_3}$ mit seinem Hauptkreise $\varkappa \overline{\varkappa}$. Vermöge der perspectivischen Coincidenz der unendlich fernen Kreispunkte in (5) müssen die beiden Hauptdreiecke ähnliche Figuren sein, und wenn wir dieselben congruent annehmen, so sind es auch ihre Hauptkreise. Denkt man sich nun (nach unserer Annahme) die Hauptkreise $\varkappa \overline{\varkappa}$ in Deckung gebracht, so wird dieses ebenso mit den Hauptdreiecken $O_1 O_2 O_3$, $\overline{O_1 O_2 O_3}$ möglich sein. Dabei muss aber der Fall ausgeschlossen bleiben, dass eine Identität eintritt. Man kann demnach die besagten Dreiecke etwa in die Lage bringen, dass die Coincidenzpunkte $O_1 \overline{O}_2 \equiv O_1$ und $O_2 \overline{O}_1 \equiv O_2$ entstehen, während die Punkte $O_3 \overline{O}_3$ getrennt bleiben. Es ist klar, dass auf diese Weise die Verbindungslinien $| O_3 \overline{O}_3 |$, $| O_1 O_2 |$ gleichlaufen und das Quadrupel $O_1 O_2 O_3 \overline{O}_3$, als Hauptpunkte der Verwandtschaft, auf dem gemeinsamen Hauptkreise $\varkappa$ liegen müssen.

Die Elemente in den Paaren $O_1 O_2$, $O_3 \overline{O}_3$ sind homologe Hauptpunkte, wobei nicht ausser Acht zu lassen ist, dass die Beziehung in dem ersteren Paare $O_1 O_2$ involutorisch ist, d. h. dass jeder Hauptpunkt sowohl dem einen wie dem andern der beiden Systeme $\Sigma \overline{\Sigma}$ als solcher zugezählt werden kann.

7. Jedem Punkte und folglich auch der Richtung einer Seite eines Hauptdreiecks entspricht bildlich (im quadratischen Verwandtschaftssinne) der homologe des dieser Seite gegenüberliegenden Hauptpunktes. Wenn man also aus dem Punkte O_3 einen nach dem unendlich fernen Punkte der Hauptlinie $| O_1 O_2 | \equiv o_3$ zielenden Strahl zieht, so schneidet dieser auf dem Hauptkreise $\varkappa$ einen Punkt S aus, der offenbar wegen der Beziehung in (5) das Centrum der Perspectivität im System Σ vorstellt. Dieser Punkt S fällt aber, wie leicht eingesehen wird, mit dem Hauptpunkte $\overline{O}_3$ zusammen. Aus analogen Gründen ist gleichzeitig der Hauptpunkt O_3 das Perspectivitätscentrum für das System $\overline{\Sigma}$.

8. Einem beliebigen Strahle (x) eines Hauptpunktes des einen Systems entspricht ein solcher $(\overline{x})$ im homologen Hauptpunkte des andern Systems. Solche Strahlen heissen homologe Hauptstrahlen.

Construction: „Man ziehe durch das Perspectivitätscentrum (O_3) eine zu dem Strahle (x) gleichgerichtete Gerade und verbinde deren Schnitt am Hauptkreise mit dem homologen Hauptpunkte."

9. Einem beliebigen Punkte (X) des einen Systems entspricht ein solcher $(\overline{X})$ des andern Systems als Bildpunkt.

Construction: „Man fessle den gegebenen Punkt durch ein Paar der drei nach ihm ziehenden Hauptstrahlen seines Systems, suche zu diesen die homologen Elemente, so treffen sich diese gemeinsam in dem fraglichen Bilde."

10. Von den Lagen der beiden Hauptdreiecke $O_1 O_2 O_3$, $\overline{O_1 O_2 O_3}$ auf dem Coincidenzhauptkreise $\varkappa$ sind ausser der im Vorstehenden bezeichneten und auch jetzt vorausgesetzten noch drei Fälle bemerkenswerth:

a) Die Verbindungslinie $|O_3 \overline{O}_3|$ ist Tangente an den Hauptkreis und berührt denselben in dem dritten Coincidenzhauptpunkte $O_3 \overline{O}_3 \equiv O_3$. Auf diese Weise decken sich die beiden Hauptdreiecke als ein Paar congruente gleichschenklige Dreiecksfiguren vollständig so, dass ihre Seiten $|O_1 O_2|$, $|\overline{O_1 O_2}|$ verkehrt aufeinander fallen.

b) Die Annahme *a)* beibehaltend, wird die Verbindungslinie $|O_1 O_2| \equiv o_3$ Kreistangente; ihr Berührpunkt O_{12} bildet einen zweifachen Hauptpunkt und die Gerade $|O_{12} O_3| \equiv o_{12}$ eine zweifache Hauptlinie im System Σ, indem sie gleichzeitig ein Kreisdurchmesser ist.

c) Die Verbindungslinien $|O_1 O_2|$, $|O_3 \overline{O}_3|$ fallen zusammen, so dass im System Σ die Coincidenz der Hauptpunkte $O_1 O_3 \equiv O_{13}$ und der Hauptlinien $o_1 o_3 \equiv o_{23}$ eintritt. In diesem Falle wird die Hauptlinie $|O_1 O_3| \equiv o_2$ in O_{13} zur Kreistangente des Systems Σ, während die Gerade $|\overline{O_1 O_3}| \equiv |\overline{O_2 O_3}| \equiv \bar{o}_2$ Tangente des Hauptcoincidenzkreises für das System $\overline{\Sigma}$ ist. Die Hauptlinie o_{13} ist eine beliebige Kreissehne.

II. Die Plancurve C_6^4 mit drei Doppelpunkten.

11. Die Etablirung einer Steiner'schen Verwandtschaft möge nach den Gesichtspunkten, wie sie in (6) entwickelt wurden, geschehen. Man weiss, dass nach den Gesetzen der quadratischen Transformation einem beliebigen Kegelschnitte eine Curve C_6^4 bildlich entspricht. Dieser Kegelschnitt k heisse der Grundkegelschnitt.

Sind (Fig. 1) die drei Doppelpunkte O_1, O_2, $\overline{O}_3$ der Plancurve C_6^4 angegeben, so braucht man bekanntlich nur noch fünf Punktelemente dieser Curve zu kennen, womit dieselbe als ausreichend bestimmt erscheint. Denn jeder Doppelpunkt repräsentirt nach Salmon* drei Bedingungen, was mit den weiter gegebenen fünf Punkten zusammen 14 Elemente ausmacht, also der Formel: $\frac{4(4+3)}{2} = 14$ (ebenda S. 18) entspricht.

Werden die fünf gegebenen Punkte nach dem Constructionsgesetz in (9) aus dem Curvensystem $\overline{\Sigma}$ in das System Σ abgebildet, so sind damit fünf den Grundkegelschnitt vollkommen bestimmende Elemente vorhanden.

12. Die gesammten Geraden des Systems $\overline{\Sigma}$ transformiren sich für das System Σ als ein Netz von Kegelschnitten, dessen Grundpunkte die Ecken des Hauptdreiecks $O_1 O_2 O_3$ des letzten Systems sind. Von den Individuen dieses Kegelschnittnetzes ist insbesondere der Hauptkreis $\varkappa$ die Transformirte der unendlich fernen Geraden, wie schon oben (5) gesagt wurde.

Jeder Secante der Plancurve C_6^4 entspricht in dem bezeichneten Kegelschnittsnetze ein Individuum, das den Grundkegelschnitt in einem Punktenquadrupel schneidet, dessen Bild auf C_6^4 die vier (reellen oder imaginären) Schnittpunkte der Secante angiebt.

* Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie d. höheren ebenen Curven, S. 32.

13. Enthält die Plancurve Asymptotenpunkte (unendlich ferne Elemente), so sind deren Bildpunkte nothwendig jene Elemente, welche der Grundkegelschnitt mit dem Hauptkreise gemeinschaftlich hat. Da zwei Kegelschnitte höchstens vier Schnittpunkte enthalten, so bestätigt sich damit der bekannte Satz, dass eine ebene Curve vierter Ordnung nicht mehr als vier Asymptotenelemente (reell, imaginär) besitzen kann.

14. Den Curventangenten entsprechen bildlich jene Individuen des Kegelschnittsnetzes aus den Grundpunkten O_1, O_2, O_3, welche den Grundkegelschnitt berühren. Diese Berührung ist für einfache Curventangenten eine einfache, für die vier Doppeltangenten eine doppelte, für die sechs Inflexionstangenten eine Osculation. Die diesbezüglichen Linearconstructionen, resp. mit Hilfe von Directionscurven, wie wir in unserer Abhandlung* (A) gezeigt haben, sind als bekannt vorauszusetzen. Nur den Fall der Construction der Berührungssehnen p der vier doppelt berührenden Kegelschnitte wollen wir hier nach E. Weyr** wegen der späteren Bezugnahme wiederholen, wobei der Hauptsache nach wesentlich zwei Lagenverhältnisse des Grundkegelschnittes k zu unterscheiden kommen.

15. *a)* Die Polaren der Hauptpunkte O_1, O_2, O_3 in Bezug auf den Grundkegelschnitt treffen diesen in reellen Verzweigungselementen paarweise:***

$$V_1 V'_1, \quad V_2 V'_2, \quad V_3 V'_3.$$

Diese sechs Punktenelemente combiniren sich in viererlei Projectivitäten und jeder Projectivität entspricht einer der vier doppelt berührenden Kegelschnitte mit einer Berührungssehne p am Grundkegelschnitte im Netze $O_1 O_2 O_3$. Die Verbindungslinien entsprechender Elemente in jeder Projectivität schneiden sich jedesmal in einem Punkte ζ der Seiten des Hauptdreiecks $O_1 O_2 O_3$, so dass jede dieser Seiten zwei Punkte ζ, ζ' enthält, welche zu einander conjugirte Pole in Bezug auf den Grundkegelschnitt sind. Die Construction zeigt nachstehendes Schema:

$$\begin{array}{ll}
(|V_1 V_2|,\ |V'_1 V'_2|) \equiv \zeta_3; & (|V_1 V'_2|,\ |V'_1 V_2|) \equiv \zeta'_3; \\
(|V_1 V_3|,\ |V'_1 V'_3|) \equiv \zeta_2; & (|V_1 V'_3|,\ |V'_1 V_3|) \equiv \zeta'_2; \\
(|V_2 V_3|,\ |V'_2 V'_3|) \equiv \zeta_1; & (|V_2 V'_3|,\ |V'_2 V_3|) \equiv \zeta'_1.
\end{array}$$

Die Punkte ζ, ζ' bilden die sechs Ecken eines vollständigen Vierecks, dessen vier Verbindungslinien p die ζ-Punkte tripelweise enthalten:

$$|\zeta_3 \zeta_1 \zeta'_2| \equiv p_1, \quad |\zeta_3 \zeta_2 \zeta'_1| \equiv p_2, \quad |\zeta_2 \zeta_1 \zeta'_3| \equiv p_3, \quad |\zeta'_2 \zeta'_3 \zeta'_1| \equiv p_4.$$

Fasst man die vier p-Sehnen des Grundkegelschnitts als vollständiges Vierseit auf, so ist dessen Diagonaldreiseit das Hauptdreieck $O_1 O_2 O_3$. Jede p-Sehne schneidet also (reell, imaginär) auf dem Grundkegelschnitte die Bilder B der Berührungspunkte einer (eigentlichen, ideellen oder imaginären) Doppeltangente der Plancurve C_6^4 aus.

---

* Schlömilch, Zeitschr. f. Math. u. Phys., Jahrg. 1889 XXXIV, Heft 5 S. 272.

** E. Weyr, „Projectivische Geometrie", 2. Heft S. 122, für den reciproken Fall.

*** Der geehrte Leser wolle sich die betreffende Figur selbst darstellen.

16. *b)* Wenn die Verzweigungselemente V, V' imaginär sind, dann geschieht die Construction der conjugirten Pole ζ, ξ' auf den Seiten des Hauptdreiecks (Fig. 1) bekanntlich folgendermassen:

Auf jeder Seite des Hauptdreiecks $O_1 O_2 O_3$ kann man die in ihr liegenden Ecken desselben als Doppelelemente einer hyperbolischen Punkteninvolution ansehen. Ebenso sind dann die jedenfalls entstehenden Schnittpunkte A, A', welche der Grundkegelschnitt auf jener Dreiecksseite hervorbringt, Doppelelemente einer zweiten mit der ersteren coaxialen Involution von Punkten, die nothwendig ebenfalls hyperbolisch ist. Sind nun diese beiden coaxialen Involutionsgebilde derart situirt, dass sich die Doppelelementenpaare umfassen oder ganz von einander getrennt erscheinen, so enthalten sie bekanntlich reelle gemeinschaftliche Doppelelemente ζ, ζ'; im andern Falle, wo die besagten Doppelelementenpaare durch einander getrennt werden, so dass ein jedes Element zwischen die beiden conjugirten des andern Paares zu liegen kommt, sind die gemeinschaftlichen (harmonischen) Doppelelemente imaginär.*

Die Construction der reellen Polpaare ζ, ζ' geschieht folgendermassen. Schneidet etwa die Dreiecksseite $|O_2 O_3| \equiv o_1$ den Grundkegelschnitt in dem Paare $A_1 A'_1$ (d. s. die Bilder der unendlich nahen Nachbarpunkte des Doppelpunktes $O_2 \equiv \overline{O_1}$ der Plancurve), so nehme man am einfachsten den Punkt O_1 als Mittelpunkt einer concentrischen Strahleninvolution an, welche den Schein der beiden auf der Hauptlinie o_1 coaxialen Involutionen bildet, und projicire die Punkte A_1, A'_1 auf den Hauptkreis (als Constructionskreis) nach $A_\mathrm{I} A'_\mathrm{I}$. Nunmehr suche man die Schnitte:

$$(|O_2 A_\mathrm{I}|,\ |O_3 A'_\mathrm{I}|) \equiv U; \quad (|O_2 A'_\mathrm{I}|,\ |O_3 A_\mathrm{I}|) \equiv V.$$

Die Verbindungslinie $|U\,V|$ schneidet den Hauptkreis in zwei Punkten, welche, aus O_1 in die Gerade o_1 projicirt, das gesuchte Punktenpaar $\zeta_1 \zeta'_1$ geben.

Oder wir suchen direct den Schnitt:

$$(|A_\mathrm{I} A'_\mathrm{I}|,\ |O_2 O_3|) \equiv W,$$

ziehen aus W an den Hauptkreis das Tangentenpaar, so erhält man, wenn man die Berührungspunkte des letzteren aus O_1 projicirt, auf o_1, wie vorhin, das gesuchte Punktenpaar.**

17. Dass die vier p-Sehnen als eigentliche Secanten den Grundkegelschnitt insgesammt in Punktepaaren $B B'$ zu treffen im Stande sind, zeigt unsere Figur. Dass demnach auch die Plancurve C_6^4 vier eigentliche Doppeltangenten besitzt, folgt unmittelbar und ist ebenfalls aus der Figur einzusehen. Damit ist aber die Richtigkeit unseres Satzes in (3) nachgewiesen.

* Schröter, Theorie der Kegelschnitte, S. 57.

** Die beiden zuletzt angegebenen Constructionen denke man sich in der Figur ergänzt.

Man kann noch Folgendes bemerken. Die Realität der Doppeltangenten einer ebenen Curve vierter Ordnung mit durchwegs reellen Berührpunkten $\overline{B}$, $\overline{B'}$ bedingt unzweifelhaft das Vorhandensein der drei Doppelpunkte O_1, O_2, $\overline{O_3}$ als eigentliche Elemente dieser Art. Bei isolirten Doppelpunkten kommen zwar ebenfalls vier reelle Doppeltangenten vor, von denen jedoch immer wenigstens eine ideell ist. Eine dreispitzige Plancurve C_3^4 enthält bekanntlich nur eine einzige und zwar isolirte Doppeltangente.

18. Wenn man die in (15) bezeichneten $\xi\xi'$-Punktepaare jeweilig mit den gegenüberliegenden Hauptpunkten O_1, O_2, O_3 durch Strahlen verbindet, so treffen sich diese tripelweise in vier Punkten Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, welche die Ecken eines vollständigen Vierecks bilden, in dem das Hauptdreieck $O_1 O_2 O_2$ das Diagonaldreieck ist. Transformiren wir dieses Viereck nach dem Constructionsgesetze (9) in das System $\overline{\Sigma}$ der Plancurve C_6^4, so erhalten wir dort ein Viereck mit den Ecken $\overline{Z_1}$, $\overline{Z_2}$, $\overline{Z_3}$, $\overline{Z_4}$, für welches das Hauptdreieck $O_1 O_2 \overline{O_3}$ das Diagonaldreieck ist.

C. Bobek* zeigt, dass man bei Angabe einer Doppeltangente mit Hilfe des Punktquadrupels $\overline{Z_1 Z_2 Z_3 Z_4}$ die anderen drei construiren kann. Es treffen nämlich die Seiten des vollständigen Vierecks $\overline{Z}$ die Seiten desjenigen Vierseits, das aus den Doppeltangenten entsteht, in Punkten so, dass je zwei der letzteren, mit einem Doppelpunkte der Plancurve verbunden, ein Paar conjugirter Strahlen je einer Harmonität bilden, deren anderes Paar die durch diesen Doppelpunkt ziehenden Seiten des Doppelpunktsdreiecks $O_1 O_2 \overline{O_3}$ sind.

19. Wenn eine eigentliche Doppeltangente einer Plancurve C_6^4 ihre Berührpunkte $\overline{B}$, $\overline{B'}$ auf einem und demselben Curvenzweige enthält, so ist sie stets von einem Paare reeller Inflexionselemente begleitet."

Die Richtigkeit des vorstehenden Satzes für Curven mit drei isolirten Doppelpunkten ist evident und entspricht auch der Anzahl der nach der bekannten Plücker'schen Formel sich ergebenden sechs Inflexionen.

Besitzt aber die Curve nur eigentliche Doppelpunkte, so ist es höchstens einmal möglich, dass eine der Doppeltangenten ihre Berührpunkte auf einem und demselben Curvenast situirt; bei jeder andern werden diese Punkte durch je einen Doppelpunkt voneinander getrennt, wie sich aus der Lage der p-Sehnen auf dem Grundkegelschnitte leicht ersehen lässt. Sobald jedoch die beiden Berührpunkte einer Doppeltangente auf einem und demselben Curvenzweige liegen, müssen sie nothwendig von einem Inflexionspunktenpaare begleitet sein, welche Eigenschaft aus der Natur des Verlaufs der Curve von selbst resultirt. Demnach kann man jetzt den Satz aussprechen:

* „Ueber ebene rationale Curven vierter Ordnung", Sitzungsber. d. kaiserl. Akad. d. Wiss. in Wien 1879, Octoberheft, S. 368.

„Eine Plancurve vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten und vier eigentlichen Doppeltangenten besitzt nicht mehr und nicht weniger als zwei reelle Inflexionen."

III. Die Plancurve C_6^4 mit einem Berührknoten.

20. Wenn in einer Steiner'schen Verwandtschaft ein Zusammenfall von zwei Hauptpunkten vorkommt, so bedeutet dieser für die Plancurve C_6^4 einen Doppelknoten, in welchem sich zwei Curvenzweige gegenseitig berühren.* In (10) wurde auf die vorliegende Singularität in *b*) und *c*) hingewiesen. Insbesondere ist die Annahme *c*) von Interesse, weil sie sich im Vergleich zu jener in *b*) allgemeiner gestaltet. Denn wir brauchen nur auf einem beliebigen Kreise irgend eine Sehne und in einem ihrer Endpunkte die betreffende Kreistangente anzunehmen, so ist damit schon die ganze Verwandtschaftsbeziehung fixirt.

Ist darnach (Fig. 2) auf dem Hauptkreise $\varkappa$ eine Sehne o_{13} willkürlich angenommen, so bildet sie mit der in dem einen ihrer Endpunkte O_{13} gehenden Tangente o_2 die Seiten des nun degenerirten Hauptdreiecks, dessen Ecken, die beiden Endpunkte O_{13}, O_2 dieser Sehne, die Hauptpunkte des Systems Σ vorstellen. Im quadratisch verwandten System $\overline{\Sigma}$ sind die homologen Hauptpunkte O_2, O_{13}, während die Hauptlinien einerseits identisch durch die Sehne o_{13}, andererseits durch die in O_{13} ziehende Kreistangente $\bar{o}_2$ vertreten sind.

21. Bei diesen Annahmen ist nun leicht zu merken, dass nach (7) der Hauptpunkt O_{13} das Perspectivitätscentrum des Systems $\overline{\Sigma}$, der Hauptpunkt O_2 aber jenes des Systems Σ repräsentiren. Hat man somit zu einem gegebenen Punkte X den entsprechenden Punkt $\overline{X}$ zu suchen, so gilt folgendes Constructionsschema: „Die Verbindungslinie $|O_{13}X|$ trifft den Hauptkreis $\varkappa$ in einem Punkte, der mit O_2 verbunden, einen Hauptstrahl liefert, welcher sich mit dem durch O_{13} gezogenen, zu der Geraden $|O_2X|$ gleichgerichteten Hauptstrahle in dem gesuchten Punkte $\overline{X}$ schneidet." Die Richtigkeit dieser Construction erhellt durch die Modificirung der allgemeinen Construction, die in (9) festgesetzt worden ist.

22. Einem beliebigen Kegelschnitte k im System Σ entspricht bildlich im quadratisch verwandten System $\overline{\Sigma}$ eine Plancurve C_6^4, welche die Hauptpunkte O_{13}, O_2 als Doppelpunkte hat. Von diesen ist insbesondere der Punkt O_2 ein solcher, in welchem sich zwei Curvenäste berühren. Jeder Strahl durch ihn trifft die Curve noch in einem Punktenpaare, weshalb er für jene nur als ein zweifacher Punkt wie der Doppelpunkt O_{13} aufzufassen ist und aus diesem Grunde die Ordnungszahl $= 4$ der Curve nicht alterirt. Er bildet jedoch für die Rechnung, vermöge seiner Eigenschaft der Coincidenz von zwei Doppelpunkten als Berührknoten, eine

* Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie der höher. eb. Curven, S. 262.

höhere Singularität, die berücksichtigt werden muss, so dass nach der Steiner'schen Formel:

$$4(4-1)-2.3=6$$

die Classenzahl der Plancurve erhalten bleibt.

23. Jede Gerade des $\bar{\Sigma}$-Systems transformirt sich für das System Σ als Kegelschnitt, der die Hauptpunkte O_{13}, O_2 enthält und überdies in O_{13} die Hauptlinie o_2, also auch den Hauptkreis $\varkappa$ einfach berührt. Die Gesammtheit dieser Kegelschnitte bildet somit ein Netz von der besonderen Eigenschaft, dass dessen Individuen sich in O_{13} einfach berühren und ausserdem den Punkt O_2 zum gemeinschaftlichen Grundpunkt besitzen. Der Hauptkreis $\varkappa$ ist in diesem Netze ein Individuum, welches bildlich der perspectivisch gemeinsamen unendlich fernen Geraden beider Systeme entspricht. (5.)

24. In diesem Netze kommen zwei Kegelschnitte vor, die den Grundkegelschnitt (welcher das Bild der Plancurve ist) doppelt berühren. Diesen entsprechen die zwei Doppeltangenten der Curve. Die beiden übrigen Doppeltangenten vereinigen sich mit der Knotentangente $\bar{o}_2$, so dass diese vier Elemente ausdrückt.

Um die vorstehende Behauptung zu beweisen, braucht man nur die diesbezügliche Modification, welche die Construction in (15) resp. (16) erfährt, zu verfolgen. Darnach hat man die beiden Fälle zu unterscheiden, je nachdem die bezugs der Hauptpunkte O_{13}, O_2 und des gegebenen Grundkegelschnitts k stattfindenden Verzweigungselemente V reell oder imaginär vorkommen.

25. Im ersten Falle, wo also die Hauptpunkte ausserhalb des Grundkegelschnitts liegen,* erhält man aus den von O_{13} an diesen Kegelschnitt zu ziehenden Tangenten die Berührungspunkte V_{13}, V'_{13} und bezüglich des Hauptpunktes O_2 die Punkte V_2, V'_2 als Verzweigungselemente. Die nun vorkommenden Projectivitäten drückt das nachstehende Constructionsschema aus:

$$(|V_{13}V_2|,\ |V'_{13}V'_2|)\equiv\zeta_{13},\quad (|V_{13}V'_2|,\ |V'_{13}V_2|)\equiv\zeta'_{13},$$
$$(|V_{13}V'_{13}|,\ |V_2V'_2|)\equiv\zeta'_2,$$

woraus die Verbindungslinien folgen:

$$|\zeta'_{13}\zeta'_2|\equiv p_4,\quad |\zeta_{13}\zeta'_2|\equiv p_2.$$

Es ist nämlich ohne Schwierigkeit einzusehen, dass der Punkt ζ_2 mit dem Hauptpunkte O_{13} in Coincidenz tritt, und weil die Punkte ζ_{13}, ζ'_{13} ebenfalls Coincidenzen in der Hauptlinie o_{13} bilden, so müssen die beiden Sehnen p_1, p_3 sich mit der letzteren Geraden identificiren. Dass übrigens das Paar $\zeta_{13}\zeta'_{13}$ auf der Hauptlinie o_{13} und der Punkt ζ'_2 auf der Hauptlinie o_2 liegen müssen, ist nach 15) selbstverständlich.

26. Im zweiten Falle giebt es keine reellen Verzweigungselemente V und die Hauptlinien o_{13}, o_2 werden (Fig. 2) von dem Grundkegelschnitte k

* Man ergänze sich die Figur.

in reellen Punktenpaaren $A_{13}A'_{13}$, $A_2A'_2$ getroffen, welche die Bilder der unendlich nahen Nachbarpunkte der beiden Doppelpunkte der Plancurve sind.

Die gemeinschaftlichen Doppelelemente $\zeta_{13}\zeta'_{13}$ jener beiden Involutionen, welche nach (16) auf der Hauptlinie o_{13} coaxial sind, erhalten wir, wie dort angegeben wurde. Dagegen modificirt sich der Fall auf der Hauptlinie o_2 dahin, dass, weil in O_{13} eine Coincidenz der Doppelelemente der einen auf ihr befindlichen Involution stattfindet, also auch der eine ζ_2-Punkt mit O_{13} zusammenfällt, offenbar der andere Punkt ζ'_2 der harmonisch von jenem durch das Punktenpaar $A_2A'_2$ getrennte Punkt sein muss, indem die Relation stattfindet:

$$(A_2A'_2,\ O_{13}\zeta'_2) = -1.$$

Sind auf diese Weise die Elemente des Punktentripels $\zeta_{13}\zeta'_{13}\zeta'_2$ ermittelt worden, so geben wieder die Verbindungslinien:

$$|\zeta_{13}\zeta'_2| \equiv p_2, \quad |\zeta'_{13}\zeta'_2| \equiv p_4$$

die für die vorliegende Aufgabe einzig möglichen Berührungssehnen jener beiden den Grundkegelschnitt doppelt berührenden Kegelschnitte im Netze (24), welche die Bilder der zwei einzigen eigentlichen Doppeltangenten der Plancurve sind.

Die Schnittpunktenpaare $B_2B'_2$, $B_4B'_4$ des Sehnenpaares p_2p_4 am Grundkegelschnitte nach dem Constructionsgesetze in (21) projicirt, geben auf der Plancurve die Berührpunktenpaare $\overline{B_2B'_2}$, $\overline{B_4B'_4}$ der beiden Doppeltangenten.

27. Von den beiden gefundenen Doppeltangenten berührt die eine einen und denselben Zweig der Plancurve, weshalb sie auch wieder wie die Curve in (19), von einem Paare Inflexionen begleitet sein muss, aus Gründen, die dort ihre Erklärung gefunden haben. Hieraus folgt der Satz: „Eine Plancurve C_6^4 mit einem Berührknoten und zwei eigentlichen Doppeltangenten besitzt nicht mehr und nicht weniger als zwei reelle Inflexionen."

28. Zum Schlusse des vorliegenden Aufsatzes sei noch auf einige bemerkenswerthe Beziehungen, welche bei der Construction einer Plancurve C_6^4 zu beachten sind, hingewiesen, obgleich dieselben zwar im Allgemeinen als bekannt vorausgesetzt werden müssen und hier nur deshalb Erwähnung finden sollen, soweit die Methode unserer Construction sich durch dieselben in ihrer Vereinfachung prägnant ausdrückt. Dabei übergehen wir die leicht ersichtlichen Constructionen der Schnittpunkte einer Geraden, der einfachen Tangenten etc., und wollen nur noch von den Doppelpunktstangenten sprechen.

29. Wie gestaltet sich die Construction einer Doppelpunktstangente für eine Plancurve mit drei Doppelpunkten? Sehr einfach und unmittelbar (Fig. 1). Ist z. B. eine solche Tangente in O_1 zu bestimmen, so suche man nach (8) zu den Strahlen $|O_2A_2|$, $|O_2A'_2|$ die homologen Hauptstrahlen.

Beide sind die Doppelpunktstangenten des Punktes O_1. Analog ist die Construction für den Punkt O_2. Im Doppelpunkte $\overline{O_3}$ gelangt man sofort zu dem ihm angehörigen Tangentenpaare, wenn man ihn mit den Schnitten, welche die Strahlen $|O_3 A_3|$, $|O_3 A'_3|$ auf dem Hauptkreise $\varkappa$ hervorbringen, verbindet.

30. Ist (Fig. 2) eine Plancurve C_6^4 mit Berührknoten vorliegend, so wissen wir (24), dass nur im Punkte O_{13} ein Paar Tangenten (reell, imaginär) vorkommen, weil der Berührungsknoten O_2 die Hauptkreistangente $\bar{o}_2$ als Knotentangente *a priori* besitzt. „Die Doppelpunktstangenten von O_{13} sind gleichlaufend den Hauptstrahlen $|O_2 A_2|$, $|O_2 A'_2|$."

31. Wie sich in den beiden letzten Aufgaben der Tangentialpunkt einer Doppelpunktstangente ermitteln lässt, ist mit Hilfe der bekannten Beziehung und mittelst der Construction in (9) als erledigt anzusehen.

III.

Der Feuerbach'sche Satz vom ebenen Dreieck.

Von

Dr. R. Slawyk,

Oberlehrer zu Strassburg (Elsass).

Der von K. W. Feuerbach gefundene, im Jahre 1822 bekannt gegebene Satz, wonach der die Mitten der Seiten eines ebenen Dreiecks enthaltende Kreis die vier, dem Dreieck eingeschriebenen Kreise berührt, hat zwar schon eine Reihe von Beweisen gefunden. Wenn ich doch noch einmal auf diesen Satz zurückkomme, so geschieht es, weil ich eine Eigenschaft der vier gemeinschaftlichen Tangenten hervorheben und zum Kern des Beweises machen will, wonach dieselben conjugirte Gerade zu gewissen, leicht erkennbaren Linien des Dreiecks sind. Vergl. Nr. 4. Zur Herleitung und Ausnutzung dieser Eigenschaft muss ich die eingeschriebenen Kreise des Dreiecks mit dem von M. Nagel* zuerst gefundenen Dreieckspunkte in Beziehung bringen, so dass dem eigentlichen Beweise eine kurze Betrachtung über diesen Nagel'schen Punkt vorausgeschickt ist.

Um die Allgemeinheit und Uebersichtlichkeit zu bewahren, habe ich mich der Hilfsmittel der synthetischen Geometrie bedient und statt der unendlich entfernten Geraden eine beliebige im Endlichen gelegene benützt.

---

1. Es sei ein ebenes Dreieck $\mathfrak{ABC}$ mit den Seiten

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{BC}, \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{AC}, \quad \mathfrak{c} = \mathfrak{AB}$$

und in der Ebene desselben die Gerade l gegeben, welche die Seiten des Dreiecks $\mathfrak{ABC}$ in den Punkten

$$S_1 = (l, \mathfrak{a}), \quad S_2 = (l, \mathfrak{b}), \quad S_3 = (l, \mathfrak{c})$$

schneidet. Auf dieser Geraden l befinde sich eine Involution zweiten Grades, von welcher

$$S_1 \text{ und } S_{11}, \; S_2 \text{ und } S_{22}, \; S_3 \text{ und } S_{33}$$

conjugirte Punkte sein sollen.

Wir wollen nun diejenigen vier Kegelschnitte construiren, welche die drei Linien $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ berühren und denen das auf der Geraden l gegebene

* M. Nagel, Théorèmes sur les cercles qui touchent les cotés d'un triangle. Nouvelles annales par Terquem et Gerono. t. XIX p. 354.

Punktsystem zugehört. Zu diesem Zwecke bestimmen wir auf l drei Paar conjugirte Punkte T, welche den Bedingungen genügen:

$$(S_1 S_2 T_3 T_{33}) = -1, \quad (S_1 S_3 T_2 T_{22}) = -1, \quad (S_2 S_3 T_1 T_{11}) = -1.$$

Hierauf zeichnen wir die Schnittpunkte

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= (\mathfrak{A} T_1, \ \mathfrak{B} T_2, \ \mathfrak{C} T_3), \\ \mathfrak{M}_1 &= (\mathfrak{A} T_1, \ \mathfrak{B} T_{22}, \ \mathfrak{C} T_{33}), \\ \mathfrak{M}_2 &= (\mathfrak{A} T_{11}, \ \mathfrak{B} T_2, \ \mathfrak{C} T_{33}), \\ \mathfrak{M}_3 &= (\mathfrak{A} T_{11}, \ \mathfrak{B} T_{22}, \ \mathfrak{C} T_3). \end{aligned}$$

Diese so erhaltenen vier Punkte $\mathfrak{M}$ sind die Pole der Geraden l in Bezug auf die vier gewünschten Kegelschnitte;* die Kegelschnitte selbst wollen wir mit

$$\mathfrak{M}^2, \ \mathfrak{M}_1^2, \ \mathfrak{M}_2^2, \ \mathfrak{M}_3^2$$

bezeichnen. Von denselben ist entweder keiner oder alle vier reell; wir nehmen den letzteren Fall an.

Wir construiren weiter ein Dreiseit aus den Geraden $\mathfrak{A} S_1$, $\mathfrak{B} S_2$, $\mathfrak{C} S_3$ und bezeichnen:

$$A = (\mathfrak{B} S_2, \ \mathfrak{C} S_3), \quad B = (\mathfrak{A} S_1, \ \mathfrak{C} S_3), \quad C = (\mathfrak{A} S_1, \ \mathfrak{B} S_2);$$
$$a = BC, \quad b = AC, \quad c = AB.$$

Die homologen Seiten der beiden Dreiecke $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ und ABC schneiden sich auf der Geraden l, folglich treffen sich die Verbindungslinien homologer Ecken in demselben Punkte S:

$$S = (A\mathfrak{A}, \ B\mathfrak{B}, \ C\mathfrak{C}).$$

Aus den harmonischen Eigenschaften des Vierecks $ABCS$ ergeben sich die Beziehungen:

$$(AB\mathfrak{C}S_3) = -1, \quad (AC\mathfrak{B}S_2) = -1, \quad (BC\mathfrak{A}S_1) = -1.$$

Endlich zeichnen wir noch das Dreiseit $A'B'C'$ aus den Geraden AS_1, BS_2, CS_3 und construiren die Kegelschnitte M^2, M_1^2, M_2^2, M_3^2 für das Dreieck ABC und O^2, O_1^2, O_2^2, O_3^2 für das Dreieck $A'B'C'$, welche den vier Kegelschnitten $\mathfrak{M}$ für das Dreieck $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ entsprechen.

Wir betrachten die beiden Dreiecke $A'AT_1$ und $B'BT_2$. Es war

$$S_3 = (A'B', \ AB, \ T_1 T_2).$$

Folglich liegen die Schnittpunkte entsprechender Seiten auf einer Geraden. Diese Schnittpunkte sind S, O und M.

Ebenso liegen die beiden Dreiecke $A'\mathfrak{A}T_1$ und $B'\mathfrak{B}T_2$ perspectivisch, weshalb auch S, M und $\mathfrak{M}$ in gerader Linie liegen. Es liegen also je in einer Geraden die vier Punkte

$$SOM\mathfrak{M}, \quad SO_1M_1\mathfrak{M}_1, \quad SO_2M_2\mathfrak{M}_2, \quad SO_3M_3\mathfrak{M}_3.$$

Ferner sind folgende harmonische Büschel projectivisch:

$$M(AB\mathfrak{C}S_3) \barwedge O(A'B'CS_3).$$

---

* Schröter, Erweiterung einiger bekannten Eigenschaften des ebenen Dreiecks. Borchardt's Journal Bd. 68 S. 221.

Unter diesen Strahlen schneiden sich drei Paare auf l, folglich auch das vierte. Also gehen $M\mathfrak{C}$, OC und l durch denselben Punkt.

Ist weiter R der Berührungspunkt der Geraden AB mit Kegelschnitt M^2, und verbinden wir den Schnittpunkt (MR, l) mit $\mathfrak{M}$, so lässt sich ebenso leicht zeigen, dass diese Verbindungslinie die Gerade OR in einem Punkte $\mathfrak{R}_0$ trifft, welcher auf Kegelschnitt $\mathfrak{M}^2$ gelegen ist und dessen Tangente in $\mathfrak{R}_0$ durch S_3 geht. Uebertragen wir dies auf den Kreis M^2, so sehen wir, dass die zweite Tangente, die man (ausser c) aus S_3 noch an M^2 legen kann, M^2 in einem Punkte R_0 berührt, welcher auf der Geraden CO gelegen ist. Es liegen aber R_0RM auf einer Geraden, der Polaren von S_3 für M^2, und es ist auch

$$(R_0RMS_{33}) = -1.$$

Nennen wir noch den Schnittpunkt

$$(CR_0O,\ AB) = R_3$$

und ziehen aus dem Punkte

$$(l,\ CO,\ \mathfrak{C}M)$$

nach den obigen harmonischen Punkten vier Strahlen, so findet sich, dass

$$(RR_3\mathfrak{C}S_3) = -1$$

ist.

Es berührt Kegelschnitt M^2 das Diagonaldreiseit ABC des vollständigen Vierseits $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, l in den Punkten P, Q und R. Es kann daher M^2 als Polarkegelschnitt eines gewissen Punktes in Bezug auf eine Kegelschnittschaar mit den gemeinsamen Tangenten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, l aufgefasst werden. Dieser Punkt ist wegen der zuletzt gefundenen Relation nur der Punkt O, so dass wir das später zu verwerthende Resultat haben:

Kegelschnitt M^2 ist der Polarkegelschnitt des Punktes O in Bezug auf eine Kegelschnittschaar mit den gemeinsamen Tangenten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, l.

2. Indem wir nun zur Herleitung des Feuerbach'schen Satzes übergehen, construiren wir den Polarkegelschnitt S^2 von S für eine Kegelschnittschaar mit den gemeinsamen Tangenten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, l. Derselbe berührt die Diagonalen a, b, c dieses vollständigen Vierseits. Von dem Pole $\mathfrak{A}$ der Geraden $S\mathfrak{A}$ in Bezug auf den in das Punktepaar $\mathfrak{A}$ und S_1 zerfallenden Kegelschnitt der Schaar müssen an S^2 zwei Tangenten gehen, nämlich erstens die Gerade, welche zu $S\mathfrak{A}$ conjugirt ist in Bezug auf die Schaar, und zweitens die Polare von S in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathfrak{A}S_1$. Da beide Geraden mit $\mathfrak{A}S_1$ zusammenfallen, so berührt Kegelschnitt S^2 die Gerade $\mathfrak{A}S_1$ im Punkte $\mathfrak{A}$. Kegelschnitt S^2 berührt also die Seiten des Dreiecks ABC in den Punkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$.

Das Dreieck $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ ist das Diagonaldreieck des Vierecks $\mathfrak{M}\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3$, und es lässt sich somit S^2 als Polarkegelschnitt einer Geraden λ in Bezug auf ein Kegelschnittbüschel mit den Grundpunkten $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$ auffassen. Die Lage der Geraden λ ergiebt sich einfach folgendermassen. Es mag λ die Gerade $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ im Punkte Σ_1 schneiden,

$$\Sigma_1 = (\lambda, \mathfrak{a}).$$

Die Polare des Punktes Σ_1 in Bezug auf den in die Geraden $\mathfrak{A}T_1$ und $\mathfrak{A}T_{11}$ zerfallenden Kegelschnitt des Büschels muss Kegelschnitt S^2 in zwei Punkten treffen, nämlich erstens im Pol von λ für diesen zerfallenden Kegelschnitt, und zweitens in dem zu Σ_1 conjugirten Punkte in Bezug auf das Kegelschnittbüschel. Da beide Punkte in $\mathfrak{A}$ zusammenfallen, so muss die Tangente $\mathfrak{A}S_1$ von S^2 die besagte Polare des Punktes Σ_1 sein, und wir haben die Gleichheit

$$\mathfrak{A}(T_1 T_{11} S_1 \Sigma_1) = -1.$$

Wenn wir nun ebenso die Schnittpunkte

$$(\lambda, \mathfrak{b}) = \Sigma_2, \quad (\lambda, \mathfrak{c}) = \Sigma_3$$

nennen, so ist auch

$$\mathfrak{B}(T_2 T_{22} S_2 \Sigma_2) = -1, \quad \mathfrak{C}(T_3 T_{33} S_3 \Sigma_3) = -1$$

und

$$\lambda = \Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_3.$$

Da S^2 der Polarkegelschnitt von λ für das Büschel $\mathfrak{M}\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3$ ist, so schneidet S^2 auf λ das Punktsystem aus, welches durch die Schnittpunktenpaare der Kegelschnitte des Büschels erzeugt wird (Schröter, Steiner's Vorlesungen II, S. 301). Setzen wir also

$$(\lambda, \mathfrak{A}T_1) = \mathsf{T}_1, \quad (\lambda, \mathfrak{A}T_{11}) = \mathsf{T}_{11};$$
$$(\lambda, \mathfrak{B}T_2) = \mathsf{T}_2, \quad (\lambda, \mathfrak{B}T_{22}) = \mathsf{T}_{22};$$
$$(\lambda, \mathfrak{C}T_3) = \mathsf{T}_3, \quad (\lambda, \mathfrak{C}T_{33}) = \mathsf{T}_{33},$$

so schneidet Kegelschnitt S^2 auf λ dieses Punktsystem

$$\mathsf{T}_1\mathsf{T}_{11}, \quad \mathsf{T}_2\mathsf{T}_{22}, \quad \mathsf{T}_3\mathsf{T}_{33}$$

aus. Wir haben dann die Relationen

$$\mathfrak{C}(\Sigma_1\Sigma_2\mathsf{T}_3\mathsf{T}_{33}) = -1, \quad \mathfrak{B}(\Sigma_1\Sigma_3\mathsf{T}_2\mathsf{T}_{22}) = -1, \quad \mathfrak{A}(\Sigma_2\Sigma_3\mathsf{T}_1\mathsf{T}_{11}) = -1.$$

Nennen wir noch

$$(\mathfrak{A}\Sigma_1, \mathfrak{B}\Sigma_2) = \Gamma, \quad (\mathfrak{A}\Sigma_1, \mathfrak{C}\Sigma_3) = \mathsf{B}, \quad (\mathfrak{B}\Sigma_2, \mathfrak{C}\Sigma_3) = \mathsf{A};$$
$$\mathfrak{A}\Sigma_1 = \mathsf{B}\Gamma = \alpha, \quad \mathfrak{B}\Sigma_2 = \mathsf{A}\Gamma = \beta, \quad \mathfrak{C}\Sigma_3 = \mathsf{B}\Gamma = \gamma,$$

so schneiden sich die Geraden $\mathfrak{A}\mathsf{A}$, $\mathfrak{B}\mathsf{B}$ und $\mathfrak{C}\Gamma$ in demselben Punkte Σ; denn die Dreiecke $\mathsf{AB}\Gamma$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ liegen ja perspectivisch, weil die entsprechenden Seitenpaare sich auf der Geraden λ schneiden.

Wir hatten vorhin die Gleichheit

$$\mathfrak{A}_1(T_1 T_{11} S_1 \Sigma_1) = -1.$$

Nehmen wir von diesen vier Strahlen

$$\mathfrak{A}T_1, \quad \mathfrak{A}T_{11}, \quad \mathfrak{A}S_1, \quad \mathfrak{A}\Sigma_1$$

je den vierten harmonischen in Bezug auf dieselben Strahlen $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ als erstes Strahlenpaar, so bilden diese vierten Strahlen zusammen wieder ein harmonisches Büschel.

Nun ist
$$\mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C}T_1T_{11}) = -1 \text{ nach } (1)$$
und
$$\mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C}S_1A) = -1, \quad \mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C}\Sigma_1\mathsf{A}) = -1,$$
daher erhalten wir
$$\mathfrak{A}(T_1T_{11}A\mathsf{A}) = -1$$
oder besser
$$\mathfrak{A}(T_1T_{11}S\Sigma) = -1,$$
ebenso
$$\mathfrak{B}(T_2T_{22}S\Sigma) = -1, \quad \mathfrak{C}(T_3T_{33}S\Sigma) = -1,$$
d. h. S und Σ sind conjugirte Punkte in Bezug auf das Büschel $\mathfrak{M}\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3$.

Aus der Gleichung
$$\mathfrak{A}(T_1T_{11}S_1\Sigma_1) = -1$$
oder passender
$$\mathfrak{A}(T_1T_{11}C\Gamma) = -1 \text{ und } \mathfrak{B}(T_2T_{22}C\Gamma) = -1$$
folgt ebenso, dass C und Γ, B und B, A und A ebenfalls conjugirte Punkte in Bezug auf dasselbe Büschel $\mathfrak{M}\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3$ sind.

Die Formeln
$$\mathfrak{A}(T_1T_{11}\mathfrak{A}\mathsf{A}) = -1, \quad \mathfrak{B}(T_2T_{22}B\mathsf{B}) = -1, \quad \mathfrak{C}(T_3T_{33}C\Gamma) = -1$$
in Verbindung mit dem Umstande, dass je in einer geraden Linie liegen
$$\mathfrak{A}T_1\mathsf{T}_1, \quad \mathfrak{A}T_{11}\mathsf{T}_{11},$$
$$\mathfrak{B}T_2\mathsf{T}_2, \quad \mathfrak{B}T_{22}\mathsf{T}_{22},$$
$$\mathfrak{C}T_3\mathsf{T}_3, \quad \mathfrak{C}T_{33}\mathsf{T}_{33},$$
und dass die Punkte T auf l, die Punkte T sich auf λ befinden, lehren uns, dass wir die Linien l aus λ auf dieselbe Art ableiten können, wie wir thatsächlich λ aus l hergeleitet haben. Es wird somit ein S^2 analoger Kegelschnitt Σ^2 existiren, welcher die Seiten des Dreiecks $\mathsf{AB}\Gamma$ in den Punkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ berührt und auf λ das Punktsystem $\mathsf{T}_i\mathsf{T}_{ii}$ ausschneidet. Es ist dann Σ^2 der Polarkegelschnitt von Σ für eine Kegelschnittschaar mit den gemeinsamen Tangenten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, λ und von l für das Kegelschnittbüschel mit den Grundpunkten $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$. Wie ferner S der Pol von l für Kegelschnitt S^2 ist, wird auch Σ der Pol von λ für Kegelschnitt Σ^2 sein.

Wir fassen die bisherigen Betrachtungen kurz zusammen.

Durch die Ecken des Dreiecks $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ legen wir je einen Strahl, wodurch die Gegenseiten des Dreiecks
$$\mathfrak{a} \text{ in } \Sigma_1, \quad \mathfrak{b} \text{ in } \Sigma_2, \quad \mathfrak{c} \text{ in } \Sigma_3$$
derart geschnitten werden, dass
$$\mathfrak{A}(T_1T_{11}S_1\Sigma_1) = -1, \quad \mathfrak{B}(T_2T_{22}S_2\Sigma_2) = -1, \quad \mathfrak{C}(T_3T_{33}S_3\Sigma_3) = -1$$
wird. Während die Punkte S_1, S_2 und S_3 auf der Geraden l liegen, befinden sich Σ_1, Σ_2 und Σ_2 auf einer Geraden λ
$$l = S_1S_2S_3, \quad \lambda = \Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3.$$
Wir erhalten dadurch zwei Dreiseite mit den Seiten

$$
\begin{array}{lccc}
 & a = \mathfrak{A} S_1 & & \alpha = \mathfrak{A}\Sigma_1, \\
 & b = \mathfrak{A} S_2 & \text{und} & \beta = \mathfrak{A}\Sigma_2, \\
 & c = \mathfrak{A} S_3 & & \gamma = \mathfrak{A}\Sigma_3 \\
\text{mit den Ecken} & A = (b, c) & & \mathsf{A} = (\beta, \gamma), \\
 & B = (a, c) & \text{und} & \mathsf{B} = (\alpha, \gamma), \\
 & C = (a, b) & & \Gamma = (\alpha, \beta).
\end{array}
$$

Die Dreiecke ABC und $\mathsf{AB}\Gamma$ liegen mit $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ perspectivisch, es ist

$$S = (A\mathfrak{A}, B\mathfrak{B}, C\mathfrak{C}), \quad \Sigma = (\mathsf{A}\mathfrak{A}, \mathsf{B}\mathfrak{B}, \Gamma\mathfrak{C}).$$

Der Polarkegelschnitt S^2 von S für eine Kegelschnittschaar mit den gemeinsamen Tangenten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, l ist zugleich der Polarkegelschnitt der Geraden λ für ein Kegelschnittbüschel mit den Grundpunkten $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$.

Der Polarkegelschnitt Σ^2 von Σ für eine Kegelschnittschaar mit den gemeinsamen Tangenten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, λ ist zugleich der Polarkegelschnitt der Geraden l für dasselbe Kegelschnittbüschel $\mathfrak{M}\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3$.

S^2 berührt die Seiten a, b, c in den Punkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$. Σ^2 berührt die Seiten α, β, γ in denselben Punkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$.

Auf den Geraden l und λ befindet sich je ein Punktsystem mit den Punktepaaren

$$T_1 T_{11}, \ T_2 T_{22}, \ T_3 T_{33} \quad \text{und} \quad \mathsf{T}_1 \mathsf{T}_{11}, \ \mathsf{T}_2 \mathsf{T}_{22}, \ \mathsf{T}_3 \mathsf{T}_{33}$$

und es liegen in gerader Linie

$$
\begin{array}{ll}
\mathfrak{A} T_1 \mathsf{T}_1, & \mathfrak{A} T_{11} \mathsf{T}_{11}, \\
\mathfrak{B} T_2 \mathsf{T}_2, & \mathfrak{B} T_{22} \mathsf{T}_{22}, \\
\mathfrak{C} T_3 \mathsf{T}_3, & \mathfrak{C} T_{33} \mathsf{T}_{33}.
\end{array}
$$

Das erste Punktsystem auf l gehört S^2, das zweite auf λ gehört Σ^2 zu.

Jede der sechs Seiten des vollständigen Vierecks $\mathfrak{M}\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3$ wird von S^2, beziehungsweise Σ^2 zum zweiten Male in dem Punkte geschnitten, welcher zu ihrem Schnittpunkte mit λ bez. l conjugirt und zu den auf ihr gelegenen Grundpunkten harmonisch gelegen ist.

Der Pol von l für S^2 ist S, derjenige von λ für Σ^2 ist Σ. S und Σ, A und A, B und B, C und Γ sind conjugirte Punkte in Bezug auf das Büschel $\mathfrak{M}\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3$.

Die Kegelschnitte S^2 und Σ^2 haben die Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ gemeinsam. Die Ecken des gemeinschaftlichen Poldreiecks $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$ müssen daher auf den Seiten des Dreiecks $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ gelegen sein, und zwar liege

$$\mathfrak{X} \text{ auf } \mathfrak{B}\mathfrak{C}, \quad \mathfrak{Y} \text{ auf } \mathfrak{A}\mathfrak{C}, \quad \mathfrak{Z} \text{ auf } \mathfrak{A}\mathfrak{B}.$$

Auf der Geraden $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ müssen dann auch die Pole C und Γ von $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ in Bezug auf die Kegelschnitte S^2 und Σ^2 gelegen sein, oder

$$\begin{array}{lllll}\mathfrak{X}\mathfrak{Y} & \text{fällt} & \text{zusammen} & \text{mit} & C\Gamma, \\ \mathfrak{X}\mathfrak{Z} & " & " & " & B\mathrm{B}, \\ \mathfrak{Y}\mathfrak{Z} & " & " & " & A\mathrm{A},\end{array}$$

d. h. $\mathfrak{X}$ ist der Schnittpunkt von $B\mathrm{B}$, $C\Gamma$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, in Zeichen:

$$\mathfrak{X} = (B\mathrm{B},\, C\Gamma,\, \mathfrak{B}\mathfrak{C}), \quad \mathfrak{Y} = (A\mathrm{A},\, C\Gamma,\, \mathfrak{A}\mathfrak{C}), \quad \mathfrak{Z} = (A\mathrm{A},\, B\mathrm{B},\, \mathfrak{A}\mathfrak{B}).$$

Der vierte gemeinsame Punkt $\mathfrak{G}$ der Kegelschnitte S^2 und Σ^2 ist dann

$$\mathfrak{G} = (\mathfrak{A}\mathfrak{X},\, \mathfrak{B}\mathfrak{Y},\, \mathfrak{C}\mathfrak{Z}).$$

Er ist der conjugirte Punkt zum Schnittpunkte (l, λ) in Bezug auf das Büschel $\mathfrak{M}\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3$.

Die Kegelschnitte S^2 und Σ^2 haben ausser den Punkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ noch einen gemeinsamen Schnittpunkt $\mathfrak{G}$, der zu dem Schnittpunkte (l, λ) in Bezug auf das Büschel $\mathfrak{M}\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3$ conjugirt ist. Das gemeinsame Poldreieck $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$ der beiden Kegelschnitte hat zu Seiten

$$\begin{array}{lllll}\text{Linie} & \mathfrak{X}\mathfrak{Y} & \text{zusammenfallend} & \text{mit} & C\Gamma, \\ " & \mathfrak{X}\mathfrak{Z} & " & " & B\mathrm{B}, \\ " & \mathfrak{Y}\mathfrak{Z} & " & " & A\mathrm{A},\end{array}$$

und zwar liegt

$$\mathfrak{X} \text{ auf } \mathfrak{B}\mathfrak{C}, \quad \mathfrak{Y} \text{ auf } \mathfrak{A}\mathfrak{C}, \quad \mathfrak{Z} \text{ auf } \mathfrak{A}\mathfrak{B}.$$

Demnach ist

$$\mathfrak{G} = (\mathfrak{A}\mathfrak{X},\, \mathfrak{B}\mathfrak{Y},\, \mathfrak{C}\mathfrak{Z}).$$

3. Die Kegelschnitte S^2 und Σ^2 haben auch vier gemeinsame Tangenten t, t_1, t_2, t_3. Das Diagonaldreieck des Vierseits t, t_1, t_2, t_3 ist dann wieder $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$ und zwar sei

$$\mathfrak{X}\mathfrak{Y} = (\mathrm{t}\mathrm{t}_3,\, \mathrm{t}_1\mathrm{t}_2), \quad \mathfrak{X}\mathfrak{Z} = (\mathrm{t}\mathrm{t}_2,\, \mathrm{t}_1\mathrm{t}_3), \quad \mathfrak{Y}\mathfrak{Z} = (\mathrm{t}\mathrm{t}_1,\, \mathrm{t}_2\mathrm{t}_3).$$

Da die Tangenten, von einem Punkte an die Kegelschnitte einer Schaar gezogen, eine Strahleninvolution bilden, so müssen die Tangenten $\mathfrak{A}BC$ und $\mathfrak{A}\mathrm{B}\Gamma$, in $\mathfrak{A}$ an S^2 und Σ^2 gelegt, harmonisch gelegen sein zu den Strahlenpaaren $\mathfrak{A}(\mathrm{t}\mathrm{t}_1)$ und $\mathfrak{A}(\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3)$. Daher haben wir als Schnittpunkte dieser vier harmonischen Strahlen je zwei Paar harmonische Punkte:

$$\begin{array}{llllll} A, \mathrm{A} & \text{und} & (\mathrm{t}\mathrm{t}_1), & (\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3) & \text{auf} & \mathfrak{Y}\mathfrak{Z}, \\ B, \mathrm{B} & " & (\mathrm{t}\mathrm{t}_2), & (\mathrm{t}_1\mathrm{t}_3) & " & \mathfrak{X}\mathfrak{Z}, \\ C, \Gamma & " & (\mathrm{t}\mathrm{t}_3), & (\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2) & " & \mathfrak{X}\mathfrak{Y}. \end{array}$$

Aus den harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierseits $\mathrm{t}\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3$ folgt aber, dass auch $(\mathrm{t}\mathrm{t}_1)$ und $(\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3)$ zu $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$ harmonisch gelegen sind; folglich sind die Schnittpunkte $(\mathrm{t}\mathrm{t}_1)$ und $(\mathrm{t}_2\mathrm{t}_3)$ die Doppelpunkte einer Involution, von welcher $\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$ und $A\mathrm{A}$ je ein Paar conjugirter Punkte vorstellen. Wir wissen aber, dass

$$\mathfrak{A}(S_3 S_2 T_1 T_{11}) = -1 \text{ und } \mathfrak{A}(S\Sigma T_1 T_{11}) = -1,$$

d. h. dass $\mathfrak{A}T_1$ und $\mathfrak{A}T_{11}$ die Doppelstrahlen einer Involution sind, von welcher

$$\begin{array}{l} \mathfrak{A}S_3\mathfrak{B}\mathfrak{Z} \text{ und } \mathfrak{A}S_2\mathfrak{C}\mathfrak{Y} \text{ ein Paar,} \\ \mathfrak{A}SA \text{ und } \mathfrak{A}\Sigma\mathrm{A} \text{ ein zweites Paar} \end{array}$$

conjugirter Strahlen sind. Folglich fallen die Strahlen $\mathfrak{A}T_1$ und $\mathfrak{A}T_{11}$ mit den Strahlen $\mathfrak{A}(\mathfrak{t}\mathfrak{t}_1)$ und $\mathfrak{A}(\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_3)$ zusammen. Wir richten die Indices der Tangenten $\mathfrak{t}$ so ein, dass

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{A}T_1 & \text{identisch mit} & \mathfrak{A}(\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_3), \\ \mathfrak{A}T_{11} & \text{,,} \quad \text{,,} & \mathfrak{A}(\mathfrak{t}\mathfrak{t}_3) \end{array}$$

wird, und erkennen somit, dass die Punkte

$$\mathfrak{A}\mathfrak{M}\mathfrak{M}_1(\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_3), \quad \mathfrak{A}\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3(\mathfrak{t}\mathfrak{t}_1), \quad \mathfrak{B}\mathfrak{M}\mathfrak{M}_2(\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_3)$$

u. s. w. zu je vieren in einer geraden Linie liegen.

Die Kegelschnitte S^2 und Σ^2 haben vier gemeinsame Tangenten $\mathfrak{t}, \mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2, \mathfrak{t}_3$. Dieselben bilden ein vollständiges Vierseit, dessen Diagonaldreieck $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$ ist, so dass die Punkte

$$\begin{array}{lllll} (\mathfrak{t}\mathfrak{t}_1) & \text{und} & (\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_3) & \text{auf} & \mathfrak{Y}\mathfrak{Z}, \\ (\mathfrak{t}\mathfrak{t}_2) & \text{,,} & (\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_3) & \text{,,} & \mathfrak{X}\mathfrak{Z}, \\ (\mathfrak{t}\mathfrak{t}_3) & \text{,,} & (\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2) & \text{,,} & \mathfrak{X}\mathfrak{Y} \end{array}$$

gelegen sind. Alsdann befinden sich die Punkte

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{A}\mathfrak{M}\mathfrak{M}_1(\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_3), & \mathfrak{A}\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3(\mathfrak{t}\mathfrak{t}_1), \\ \mathfrak{B}\mathfrak{M}\mathfrak{M}_2(\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_3), & \mathfrak{B}\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_3(\mathfrak{t}\mathfrak{t}_2), \\ \mathfrak{C}\mathfrak{M}\mathfrak{M}_3(\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2), & \mathfrak{C}\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2(\mathfrak{t}\mathfrak{t}_3) \end{array}$$

zu je vieren in gerader Linie.

4. Der Kegelschnitt S^2 ist (2) der Polarkegelschnitt von S für die Kegelschnittschaar $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}l$, ebenso Σ^2 derjenige von Σ für die Schaar $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\lambda$. Da $\mathfrak{t}$ diese beiden Kegelschnitte berührt, so werden die beiden Geraden, welche zu $\mathfrak{t}$ in beiden Schaaren conjugirt sind, die Punkte S, beziehungsweise Σ enthalten müssen. Der Schnittpunkt beider Geraden wird dann der Pol von $\mathfrak{t}$ für denjenigen Kegelschnitt $\mathfrak{K}^2$ sein müssen, welcher beiden Schaaren gemeinschaftlich ist. Dieser Kegelschnitt $\mathfrak{K}^2$ berührt also zunächst die Geraden $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und l, folglich ist ABC für ihn ein Poldreieck. Ebenso ist $\mathsf{AB\Gamma}$ für ihn ein zweites Poldreieck, weil er auch die Geraden $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und λ berührt. Der Pol der Geraden $\Delta\mathsf{A}$ ist für ihn also der Schnittpunkt von BC und $\mathsf{B\Gamma}$, d. h. $\mathfrak{A}$. Da $\mathfrak{K}^2$ die Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ berührt, und $\Delta\mathsf{A}$ dieselben in $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{Y}$ schneidet, so berührt $\mathfrak{K}^2$ die Seiten von $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ in den Punkten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$.

Für $\mathfrak{K}^2$ geht daher die Polare von $(\mathfrak{t}\mathfrak{t}_1)$ zunächst durch $\mathfrak{A}$, weil $(\mathfrak{t}\mathfrak{t}_1)$ auf $\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$ liegt, und auch durch $(\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_3)$, weil dieser Punkt zu $(\mathfrak{t}\mathfrak{t}_1)$ harmonisch in Bezug auf $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$ gelegen ist. Daher ist für $\mathfrak{K}^2$

$$\begin{array}{lllll} \text{die Polare von} & (\mathfrak{t}\mathfrak{t}_1) & \text{die Gerade} & \mathfrak{A}(\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_3)\mathfrak{M}\mathfrak{M}_1, \\ \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} & (\mathfrak{t}\mathfrak{t}_2) & \text{,,} \quad \text{,,} & \mathfrak{B}(\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_3)\mathfrak{M}\mathfrak{M}_2, \\ \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} & (\mathfrak{t}\mathfrak{t}_3) & \text{,,} \quad \text{,,} & \mathfrak{C}(\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2)\mathfrak{M}\mathfrak{M}_3. \end{array}$$

Da diese drei Geraden sich in $\mathfrak{M}$ schneiden, so ist für $\mathfrak{K}^2$

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{M} & \text{der Pol von} & \mathfrak{t}, \\ \mathfrak{M}_1 & \text{,, ,, ,,} & \mathfrak{t}_1, \\ \mathfrak{M}_2 & \text{,, ,, ,,} & \mathfrak{t}_2, \\ \mathfrak{M}_3 & \text{,, ,, ,,} & \mathfrak{t}_3. \end{array}$$

Somit sind conjugirt:

$$\mathfrak{t} \text{ und } S\mathfrak{M} \text{ für die Schaar } \mathfrak{abc}l,$$
$$\mathfrak{t} \text{ ,, } \Sigma\mathfrak{M} \text{ ,, ,, ,, } \mathfrak{abc}\lambda.$$

Der Kegelschnitt $\mathfrak{K}^2$, welcher die fünf Geraden $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, l und λ berührt, geht durch die Punkte $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$. Für ihn sind

$$\mathfrak{M} \text{ und } \mathfrak{t}, \quad \mathfrak{M}_1 \text{ und } \mathfrak{t}_1, \quad \mathfrak{M}_2 \text{ und } \mathfrak{t}_2, \quad \mathfrak{M}_3 \text{ und } \mathfrak{t}_3$$

Pol und Polare.

Von den vier gemeinsamen Tangenten $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{t}_3$ der beiden Kegelschnitte S^2 und Σ^2 sind für die Kegelschnittschaar $\mathfrak{abc}l$ conjugirt:

$$\mathfrak{t} \text{ und } S\mathfrak{M}, \quad \mathfrak{t}_1 \text{ und } S\mathfrak{M}_1, \quad \mathfrak{t}_2 \text{ und } S\mathfrak{M}_2, \quad \mathfrak{t}_3 \text{ und } S\mathfrak{M}_3;$$

ebenso sind für die Schaar $\mathfrak{abc}\lambda$ conjugirt:

$$\mathfrak{t} \text{ und } \Sigma\mathfrak{M}, \quad \mathfrak{t}_1 \text{ und } \Sigma\mathfrak{M}_1, \quad \mathfrak{t}_2 \text{ und } \Sigma\mathfrak{M}_2, \quad \mathfrak{t}_3 \text{ und } \Sigma\mathfrak{M}_3.$$

Da die Gerade SM auch durch den Punkt O geht (1), und da der Kegelschnitt M^2 der Polarkegelschnitt von O für die Schaar $\mathfrak{abc}l$ ist (1), so muss die Gerade $\mathfrak{t}$ auch eine Tangente von M^2 sein.

Von den vier gemeinsamen Tangenten $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$ und $\mathfrak{t}_3$ der Kegelschnitte S^2 und Σ^2 berührt

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{t} & \text{auch den Kegelschnitt} & M^2, \\ \mathfrak{t}_1 & \text{,, ,, ,,} & M_1^2, \\ \mathfrak{t}_2 & \text{,, ,, ,,} & M_2^2, \\ \mathfrak{t}_3 & \text{,, ,, ,,} & M_3^2. \end{array}$$

5. Die Berührungspunkte des Kegelschnittes S^2 mit den Tangenten $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{t}_3$ seien bez. N, N_1, N_2, N_3, diejenigen von Σ^2 ebenso N, N_1, N_2, N_3. Der Kegelschnitt Σ^2 ist dem vollständigen Vierseit $\mathfrak{t}\alpha\beta\gamma$ einbeschrieben. Er berührt diese vier Seiten der Reihe nach in den Punkten N, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$. Das Diagonaldreieck dieses Vierseits heisse $\xi\eta\zeta$. Nennen wir noch

$$\varkappa_1 = (\mathfrak{t}, \mathsf{B\Gamma}), \quad \varkappa_2 = (\mathfrak{t}, \mathsf{A\Gamma}), \quad \varkappa_3 = (\mathfrak{t}, \mathsf{AB}),$$

so sei

$$\xi = (\mathsf{B}\varkappa_2, \Gamma\varkappa_3), \quad \eta = (\mathsf{A}\varkappa_1, \Gamma\varkappa_3), \quad \zeta = (\mathsf{A}\varkappa_1, \mathsf{B}\varkappa_2).$$

Es bestehen dann die Relationen

$$(\xi\eta\Gamma\varkappa_3) = -1, \quad (\xi\zeta\mathsf{B}\varkappa_2) = -1, \quad (\eta\zeta\mathsf{A}\varkappa_1) = -1.$$

Die Polaren der sechs Punkte A, B, Γ, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ für Σ^2 sind der Reihe nach $\mathfrak{BC}\xi$, $\mathfrak{AC}\eta$, $\mathfrak{AB}\zeta$, $\mathsf{N}\mathfrak{A}\xi$, $\mathsf{N}\mathfrak{B}\eta$, $\mathsf{N}\mathfrak{C}\zeta$. Es ist ξ der Schnittpunkt von $\mathfrak{BC}$, $\mathsf{B}\varkappa_2$ und $\Gamma\varkappa_3$, in Zeichen

$$\xi = (\mathfrak{BC}, \mathsf{B}\varkappa_2, \Gamma\varkappa_3), \quad \eta = (\mathfrak{AC}, \mathsf{A}\varkappa_1, \Gamma\varkappa_3), \quad \zeta = (\mathfrak{AB}, \mathsf{A}\varkappa_1, \mathsf{B}\varkappa_2),$$

und es liegen in gerader Linie

$$\mathsf{N}\mathfrak{A}\xi, \quad \mathsf{N}\mathfrak{B}\eta, \quad \mathsf{N}\mathfrak{C}\zeta.$$

Dasselbe lässt sich für Kegelschnitt S^2 feststellen. Er berührt die vier Geraden $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ der Reihe nach in den vier Punkten N, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$. Das Diagonaldreieck des vollständigen Vierseits sei xyz. Wir nennen

$$k_1 = (\mathfrak{t}, BC), \quad k_2 = (\mathfrak{t}, AC), \quad k_3 = (\mathfrak{t}, AB).$$

Dann erhalten wir

$$x = (\mathfrak{B}\mathfrak{C}, Bk_2, Ck_3), \quad y = (\mathfrak{A}\mathfrak{C}, Ak_1, Ck_3), \quad z = (\mathfrak{A}\mathfrak{B}, Ak_1, Bk_2).$$

Ferner

$$(xyCk_3) = -1, \quad (xzBk_2) = -1, \quad (yzAk_1) = -1$$

und es liegen in gerader Linie

$$N\mathfrak{A}x, \quad N\mathfrak{B}y, \quad N\mathfrak{C}z.$$

Nach diesen einleitenden Bemerkungen betrachten wir wieder die Kegelschnittschaar $\mathfrak{abcl}$. Wir sahen in (4), dass $\mathfrak{t}$ und die Gerade $S\mathfrak{M}$ in Bezug auf dieselbe ein Paar conjugirter Strahlen sind. S^2 ist bekanntlich (2) der Polarkegelschnitt von S für dieselbe Schaar. Da nun $\mathfrak{t}$ eine Tangente von S^2 ist, so wird es einen Kegelschnitt E^2 der Schaar $\mathfrak{abcl}$ geben, für den S und $\mathfrak{t}$ Pol und Polare sind. Es wird ja S^2 von den Polaren des Punktes S in Bezug auf sämmtliche Kegelschnitte der Schaar $\mathfrak{abcl}$ eingehüllt.

Für E^2 ist nun ABC ein Poldreieck, weil E^2 der Schaar $\mathfrak{abcl}$ angehört und weil ABC das Diagonaldreieck des vollständigen Vierseits $\mathfrak{abcl}$ ist. Es ergiebt sich somit, dass für E^2

k_3 der Pol von $CS\mathfrak{C}$,
k_2 „ „ „ $BS\mathfrak{B}$,
k_1 „ „ „ $AS\mathfrak{A}$

ist. Daher ist endlich

$\mathfrak{C}$ der Pol von $k_3C = xy$,
$\mathfrak{B}$ „ „ „ $k_2B = xz$,
$\mathfrak{A}$ „ „ „ $k_1A = yz$

und es berührt somit Kegelschnitt E^2 die Seiten von $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ in den Punkten x, y und z.

Hieraus ergeben sich eine Reihe schöner Folgerungen. Zunächst sind für E^2

Punkt $(xy, \mathfrak{A}\mathfrak{B})$ und Gerade $\mathfrak{C}z$ Pol und Polare,
„ $(xz, \mathfrak{A}\mathfrak{C})$ „ „ $\mathfrak{B}y$ „ „ „ ,
„ $(yz, \mathfrak{B}\mathfrak{C})$ „ „ $\mathfrak{A}x$ „ „ „ .

Daher liegen die drei Punkte links auf einer Geraden, nämlich der Polaren von

$$N = (\mathfrak{A}x, \mathfrak{B}y, \mathfrak{C}z)$$

in Bezug auf E^2. Diese Polare muss aber $S\mathfrak{M}$ sein. Denn da $\mathfrak{t}$ und $S\mathfrak{M}$ für die Schaar $\mathfrak{abcl}$ conjugirt sind, S und $\mathfrak{t}$ aber für E^2 Pol und Polare sind, so kann nur der Berührungspunkt N von $\mathfrak{t}$ mit demjenigen Kegelschnitte S^2 der Pol von $S\mathfrak{M}$ für E^2 sein, welcher Polarkegelschnitt von S für die Schaar $\mathfrak{abcl}$ ist.

Daher enthält die Gerade $S\mathfrak{M}$ die Punkte $(xy, \mathfrak{A}\mathfrak{B})$, $(xz, \mathfrak{A}\mathfrak{C})$ und $(yz, \mathfrak{B}\mathfrak{C})$.

Der Pol von $S\mathfrak{M}_1$ für den vorhin definirten Kegelschnitt E^2 muss auf $\mathfrak{t}_1$ gelegen sein, weil (4) $\mathfrak{t}_1$ und die Gerade $S\mathfrak{M}_1$ für die Schaar $\mathfrak{abc}l$, zu welcher ja auch E^2 gehört, conjugirt sind. Derselbe Pol von $S\mathfrak{M}_1$ für Kegelschnitt E^2 muss aber auch auf $\mathfrak{t}$ gelegen sein, weil ja S und $\mathfrak{t}$ für E^2 Pol und Polare sind. Es ist also $(\mathfrak{t}\mathfrak{t}_1)$ der Pol von $S\mathfrak{M}_1$ für E^2. Da nun aber Linie $\mathfrak{A}\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3$ den Punkt $(\mathfrak{t}\mathfrak{t}_1)$ enthält (3), so liegt der Pol von $\mathfrak{A}\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3$ erstens auf $S\mathfrak{M}_1$ und zweitens auf $\mathfrak{A}\mathfrak{M}\mathfrak{M}_1$, denn es sind $\mathfrak{A}\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{M}\mathfrak{M}_1$ in Bezug auf die Schaar $\mathfrak{abc}l$ conjugirt. Besagter Pol ist also $\mathfrak{M}_1$. $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3$ ist also ein Poldreieck für den Kegelschnitt E^2. Weil nun $\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3$ durch $\mathfrak{A}$ geht, so liegt $\mathfrak{M}_1$ auf der Polaren yz von $\mathfrak{A}$ für Kegelschnitt E^2, d. h. es liegen in einer Geraden

$$\mathfrak{M}_1 yz,\quad \mathfrak{M}_2 xz,\quad \mathfrak{M}_3 xy.^*$$

Ueberhaupt liegen also je in einer Geraden die 5 Punkte

$$xy\mathfrak{M}_3 Ck_3,\quad xz\mathfrak{M}_2 Bk_2,\quad yz\mathfrak{M}_1 Ak_1.$$

Wären wir von einem Kegelschnitte E^2 der Schaar $\mathfrak{abc}\lambda$ ausgegangen, für den Σ und $\mathfrak{t}$ Pol und Polare sind, so hätten wir ähnliche Resultate gefunden, wie die nachfolgende Zusammenfassung es zeigt.

Wir führen die Bezeichnungen ein:

$$\begin{array}{lcl}
\varkappa_1 = (\mathfrak{t}, \mathsf{B\Gamma}) & \text{und} & k_1 = (\mathfrak{t}, BC),\\
\varkappa_2 = (\mathfrak{t}, \mathsf{A\Gamma}) & „ & k_2 = (\mathfrak{t}, AC),\\
\varkappa_3 = (\mathfrak{t}, \mathsf{AB}) & „ & k_3 = (\mathfrak{t}, AB),\\
\xi = (\mathsf{B}\varkappa_2, \mathsf{\Gamma}\varkappa_3) & „ & x = (Bk_2, Ck_3),\\
\eta = (\mathsf{A}\varkappa_1, \mathsf{\Gamma}\varkappa_3) & „ & y = (Ak_1, Ck_3),\\
\zeta = (\mathsf{A}\varkappa_1, \mathsf{B}\varkappa_2) & „ & z = (Ak_1, Bk_2).
\end{array}$$

Die Schnittpunkte

$(xy, \mathfrak{A}\mathfrak{B})$, $(xz, \mathfrak{A}\mathfrak{C})$, $(yz, \mathfrak{B}\mathfrak{C})$ liegen auf der Geraden $S\mathfrak{M}$;
$(\xi\eta, \mathfrak{A}\mathfrak{B})$, $(\xi\zeta, \mathfrak{A}\mathfrak{C})$, $(\eta\zeta, \mathfrak{B}\mathfrak{C})$ „ „ „ „ $\Sigma\mathfrak{M}$.

Es liegen ferner je in einer Geraden

$$\begin{array}{lcl}
xy\mathfrak{M}_3 Ck_3 & \text{und} & \xi\eta\mathfrak{M}_3\mathsf{\Gamma}\varkappa_3,\\
xz\mathfrak{M}_2 Bk_2 & „ & \xi\zeta\mathfrak{M}_2\mathsf{B}\varkappa_2,\\
yz\mathfrak{M}_1 Ak_1 & „ & \eta\zeta\mathfrak{M}_1\mathsf{A}\varkappa_1.
\end{array}$$

Die Punkte x, y, z sind der Reihe nach auf den Seiten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ des Dreiecks $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ gelegen, ebenso ξ, η, ζ bez. auf denselben Seiten.

Es liegen endlich je in einer Geraden

$$\begin{array}{lcl}
N\mathfrak{A}x & \text{und} & \mathsf{N}\mathfrak{A}\xi,\\
N\mathfrak{B}y & „ & \mathsf{N}\mathfrak{B}\eta,\\
N\mathfrak{C}z & „ & \mathsf{N}\mathfrak{C}\zeta,
\end{array}$$

wobei N und N die Berührungspunkte von $\mathfrak{t}$ mit den Kegelschnitten S^2 und Σ^2 bedeuten.

---

* Schröter, Borchardt's Journal Bd. 68 S. 234.

Für diejenigen beiden Kegelschnitte E^2 und E^2 der Schaaren $\mathfrak{abc}l$ bez. $\mathfrak{abc}\lambda$, für welche $\mathfrak{t}$ und S bez. Σ Polare und Pol sind, ist $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3$ ein gemeinsames Poldreieck. Es enthält E^2 die Punkte x, y, z, E^2 die Punkte ξ, η, ζ. Der Pol von $S\mathfrak{M}$ für E^2 ist N, derjenige von $\Sigma\mathfrak{M}$ für E^2 ist N.

6. Kegelschnitt Σ^2 ist (10) auch der Polarkegelschnitt der Geraden l in Bezug auf das Kegelschnittbüschel mit den Grundpunkten $\mathfrak{M}\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3$. Deshalb muss es auch einen Kegelschnitt $\mathfrak{E}^2$ dieses Büschels geben, für welchen l und der Berührungspunkt N von Σ^2 mit $\mathfrak{t}$ Polare und Pol sind.

Für $\mathfrak{E}^2$ ist $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ ein Poldreieck, daher sind

$$S_3 \text{ und } \mathfrak{C}\mathsf{N}\zeta,\quad S_2 \text{ und } \mathfrak{B}\mathsf{N}\eta,\quad S_1 \text{ und } \mathfrak{A}\mathsf{N}\xi$$

Pol und Polare.

Es ist also

$$\begin{array}{llll} \zeta & \text{Pol} & \text{von} & S_3\mathfrak{C} = AB, \\ \eta & \text{,,} & \text{,,} & S_2\mathfrak{B} = AC, \\ \xi & \text{,,} & \text{,,} & S_1\mathfrak{A} = BC, \\ A & \text{,,} & \text{,,} & \zeta\eta. \end{array}$$

Nach den in (5) bewiesenen Eigenschaften können wir jetzt sagen, dass für $\mathfrak{E}^2$

$$\begin{array}{llll} A & \text{Pol} & \text{von} & \zeta\eta\mathsf{A}\mathfrak{M}_1, \\ B & \text{,,} & \text{,,} & \xi\zeta\mathsf{B}\mathfrak{M}_2, \\ C & \text{,,} & \text{,,} & \eta\zeta\mathsf{A}\mathfrak{M}_1 \end{array}$$

ist. Hieraus folgt, dass $\mathfrak{M}_1$ der Pol von $A\mathfrak{M}_1$ ist, weil $\mathfrak{E}^2$ ja durch $\mathfrak{M}_1$ geht. Ausführlicher dürfen wir sogar sagen: Für Kegelschnitt $\mathfrak{E}^2$ ist

$$\begin{array}{lllll} \mathfrak{M}_1 & \text{der} & \text{Pol} & \text{von} & A\mathfrak{M}_1 y z k_1, \\ \mathfrak{M}_2 & \text{,,} & \text{,,} & \text{,,} & B\mathfrak{M}_2 x z k_2, \\ \mathfrak{M}_3 & \text{,,} & \text{,,} & \text{,,} & C\mathfrak{M}_3 x y k_3 \end{array}$$

und deshalb

$$\begin{array}{lllll} z & \text{der} & \text{Pol} & \text{von} & \mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2, \\ y & \text{,,} & \text{,,} & \text{,,} & \mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_3, \\ x & \text{,,} & \text{,,} & \text{,,} & \mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3. \end{array}$$

Folglich sind auch $\mathfrak{M}$ und Gerade $S\mathfrak{M}$ Pol und Polare. Endlich lässt sich sehr leicht zeigen, dass

$$\begin{array}{rlll} T_{11} = (l, \mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3) & \text{Pol} & \text{von} & x\mathsf{N}, \\ T_{22} & \text{,,} & \text{,,} & y\mathsf{N}, \\ T_{33} & \text{,,} & \text{,,} & z\mathsf{N} \end{array}$$

ist.

Die Punkte x, y, z treten noch in einer andern, für uns wichtigen Bedeutung auf. Der Kegelschnitt M^2, welcher die Seiten von ABC in P, Q und R berührt (1) und auf der Geraden l das Punktsystem

$$T_1T_{11},\quad T_2T_{22},\quad T_3T_{33}$$

ausschneidet, hat nämlich (4) die Geraden $\mathfrak{t}$ auch zur Tangente und folglich das Diagonaldreieck xyz des vollständigen Vierseits $\mathfrak{abct}$ zum Poldreieck.

Weil nun C auf xy gelegen ist, führt die Polare von C für M^2, d. i. die Gerade PQT_{33}, durch z d. h. z ist der Schnittpunkt von $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und PQT_{33}.

Der Kegelschnitt M^2, welcher die Seiten a, b und c des Dreiecks ABC der Reihe nach in P, Q und R berührt, hat xyz zum Poldreieck und es ist

$$x = (\mathfrak{B}\mathfrak{C},\ QRT_{11}),\quad y = (\mathfrak{A}\mathfrak{C},\ PRT_{22}),\quad z = (\mathfrak{A}\mathfrak{B},\ PQT_{33}).$$

Zugleich ergiebt sich, dass A und B harmonisch liegen zu R und (AB, PQ).

Kehren wir nun zu unserem Kegelschnitte $\mathfrak{S}^2$ zurück. Derselbe geht durch $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$. Seine Tangenten in diesen Punkten schneiden sich in z. Die Polare $z\mathsf{N}$ des Punktes T_{33} von $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2$ muss daher so gelegen sein, dass

$$z(\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2 T_{33}\mathsf{N}) = -1$$

ist. Projiciren wir diese vier Strahlen auf AB, so giebt es zunächst die drei Punkte

$$A = (AB,\ z\mathfrak{M}_1),\quad B = (AB,\ z\mathfrak{M}_2),\quad (AB,\ PQ) = (AB,\ zT_{33}).$$

Daher ist $(AB, z\mathsf{N}) = R$, denn er muss der vierte harmonische Punkt zu den drei ersteren sein.

Ist N der Berührungspunkt des Kegelschnittes Σ^2 mit der Geraden $\mathfrak{t}$, so liegen je in einer Geraden

$$z\mathsf{N}R,\quad y\mathsf{N}Q,\quad x\mathsf{N}P.$$

Da nun Kegelschnitt M^2 die Geraden a, b, c, $\mathfrak{t}$ berührt und xyz zum Poldreieck hat, so trifft die Polare von $k_3 = (\mathfrak{t}, AB)$ für M^2, d. i. die Gerade xP, die Tangente $\mathfrak{t}$ in ihrem Berührungspunkte mit $\mathfrak{t}$, und dieser Punkt ist eben N. Kegelschnitt Σ^2 und M^2 haben also auf der gemeinschaftlichen Tangente $\mathfrak{t}$ auch den gemeinschaftlichen Berührungspunkt N. Aehnliches gilt für die Kegelschnitte $M_1{}^2$, $M_2{}^2$ und $M_3{}^2$. Daher das Resultat:

Der Kegelschnitt Σ^2 berührt die vier Kegelschnitte M^2, $M_1{}^2$, $M_2{}^2$ und $M_3{}^2$ der Reihe nach in den Punkten N, N_1, N_2 und N_3. Die gemeinschaftlichen Tangenten in diesen Punkten sind die Geraden $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$ und $\mathfrak{t}_3$.

Bemerkung. Nehmen wir als Gerade l die unendlich entfernte Gerade l_∞ und specialisiren das nach (1) auf ihr angenommene Punktsystem S_1S_{11}, S_2S_{22}, S_3S_{33} derart, dass ein Paar conjugirter Punkte auf l_∞ von je zwei zueinander rechtwinkligen Richtungen ausgeschnitten werden, so werden die Kegelschnitte $\mathfrak{M}^2$, $\mathfrak{M}_1{}^2$, $\mathfrak{M}_2{}^2$, $\mathfrak{M}_3{}^2$ die vier dem Dreiecke $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ einbeschriebenen Kreise, ebenso M^2, $M_1{}^2$, $M_2{}^2$, $M_3{}^2$ die vier dem Dreieck ABC einbeschriebenen Kreise; $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ ist das Mittendreieck und Σ^2 der diesem Mittendreieck umschriebene oder Feuerbach'sche Kreis von ABC. Der Kegelschnitt S^2 aber wird die Ellipse, welche die Seiten von ABC in ihren Mitten berührt. Diese Mittenellipse hat also mit dem Feuerbach-schen Kreise die vier Tangenten $\mathfrak{t}$ gemeinsam, von denen jede noch einen der eingeschriebenen Kreise M berührt.

7. Wir hatten (5) bewiesen, dass die Punkte

$$N\mathfrak{A}x, \quad N\mathfrak{B}y, \quad N\mathfrak{C}z$$

zu dreien in einer Geraden liegen. Die Pole dieser drei Geraden für den in (6) vielbesprochenen Kegelschnitt $\mathfrak{E}^2$ sind beziehungsweise $(\mathfrak{B}\mathfrak{C}, \mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3)$, $(\mathfrak{A}\mathfrak{C}, \mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_3)$, $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}, \mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2)$. Diese drei Punkte liegen also in einer Geraden n, der Polaren von N für $\mathfrak{E}^2$. Da N auf $\mathfrak{t}$ gelegen ist und der Pol von $\mathfrak{t}$ für $\mathfrak{E}^2$ der Punkt

$$(\mathfrak{M}_1\xi, \mathfrak{M}_2\eta, \mathfrak{M}_3\zeta)$$

ist, so enthält n diesen letzteren Punkt. Uebrigens liegt derselbe auf l. da l die Polare von N für Kegelschnitt $\mathfrak{E}^2$ ist, und N sich auf $\mathfrak{t}$ befindet, Also schneiden sich die Geraden n und l in dem Pole von $\mathfrak{t}$ für $\mathfrak{E}^2$.

In Bezug auf denjenigen Kegelschnitt $\mathfrak{E}^2$ des Kegelschnittbüschels mit den Grundpunkten $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$, für welchen die Gerade l und der Berührungspunkt N des Kegelschnittes Σ^2 mit der Geraden $\mathfrak{t}$ Polare und Pol sind, sind

$$\begin{array}{llll} z & \text{Pol und} & \mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2 & \text{Polare,} \\ y & ,, \quad ,, & \mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_3 & ,, \\ x & ,, \quad ,, & \mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3 & ,, \\ \mathfrak{M} & ,, \quad ,, & S\mathfrak{M} & ,, \end{array}$$

Die Punkte $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}, \mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2)$, $(\mathfrak{A}\mathfrak{C}, \mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_3)$ und $(\mathfrak{B}\mathfrak{C}, \mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3)$ liegen in einer Geraden n. Dieselbe ist die Polare von N (d. h. des Berührungspunktes von $\mathfrak{t}$ mit Kegelschnitt S^2) in Bezug auf $\mathfrak{E}^2$, Punkt (l, n) also der Pol von $\mathfrak{t}$ für denselben Kegelschnitt $\mathfrak{E}^2$.

Es zeigt sich nun, dass N und (l, n) conjugirte Punkte für das Büschel $\mathfrak{M}\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3$ sind; denn der Pol von l für $\mathfrak{E}^2$ ist N. Die Polare von (l, n) für $\mathfrak{E}^2$ muss Σ^2 (d. i. den Polarkegelschnitt von l für das Büschel $\mathfrak{M}\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3$) erstens in diesem Pol N treffen und zweitens in dem zu (l, n) conjugirten Punkte in Bezug auf das Büschel $\mathfrak{M}\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3$. Diese Polare ist aber $N\mathsf{N}$ und berührt Σ^2 in N. Daher ist N in der That der conjugirte Punkt von (l, n) für das Büschel $\mathfrak{M}\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3$.

Nennen wir die Geraden

$$\begin{aligned} (\mathfrak{A}\mathfrak{B}, \mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2)(\mathfrak{A}\mathfrak{C}, \mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_3)(\mathfrak{B}\mathfrak{C}, \mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3) &= n, \\ (\mathfrak{A}\mathfrak{B}, \mathfrak{M}\mathfrak{M}_3)\ (\mathfrak{A}\mathfrak{C}, \mathfrak{M}\mathfrak{M}_2)\ (\mathfrak{B}\mathfrak{C}, \mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3) &= n_1, \\ (\mathfrak{A}\mathfrak{B}, \mathfrak{M}\mathfrak{M}_3)\ (\mathfrak{A}\mathfrak{C}, \mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_3)(\mathfrak{B}\mathfrak{C}, \mathfrak{M}\mathfrak{M}_1) &= n_2, \\ (\mathfrak{A}\mathfrak{B}, \mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2)\ (\mathfrak{A}\mathfrak{C}, \mathfrak{M}\mathfrak{M}_2)\ (\mathfrak{B}\mathfrak{C}, \mathfrak{M}\mathfrak{M}_1) &= n_3, \end{aligned}$$

so sind die Berührungspunkte vom Kegelschnitt Σ^2 mit den Geraden $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{t}_3$, nämlich

$$\begin{array}{llll} \mathsf{N} & \text{conjugirt} & \text{zu} & (l, n), \\ \mathsf{N}_1 & ,, & ,, & (l, n_1), \\ \mathsf{N}_2 & ,, & ,, & (l, n_2), \\ \mathsf{N}_3 & ,, & ,, & (l, n_3), \end{array}$$

in Bezug auf das Kegelschnittbüschel mit den Grundpunkten $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$.

Ebenso sind von den Berührungspunkten des Kegelschnittes S^2 mit derselben Geraden

$$\begin{array}{llll} N & \text{conjugirt} & \text{zu} & (\lambda, n), \\ N_1 & ,, & ,, & (\lambda, n_1), \\ N_2 & ,, & ,, & (\lambda, n_2), \\ N_3 & ,, & ,, & (\lambda, n_3) \end{array}$$

in Bezug auf dasselbe Kegelschnittbüschel.

8. Aus den vorhergehenden Sätzen ergeben sich viele Constructionen sowohl der Berührungspunkte N und N, als auch der gemeinsamen Tangenten $\mathfrak{t}$ der Kegelschnitte S^2 und Σ^2, von denen wir mit Umgehung der bekannten nur einige hervorheben wollen.

Erste Construction. Nach den Angaben von (1) construire man die Punkte S und M. Die Schnittpunkte der Linie SM mit den Seiten des Dreiecks ABC seien

$$(a, SM) = i_1, \quad (b, SM) = i_2, \quad (c, SM) = i_3.$$

Darauf construire man die Punkte k nach den Bedingungen

$$(S_3 \mathfrak{C} i_3 k_3) = -1, \quad (S_2 \mathfrak{B} i_2 k_2) = -1, \quad (S_1 \mathfrak{A} i_1 k_1) = -1.$$

Die drei Punkte k_1, k_2, k_3 liegen in einer Geraden $\mathfrak{t}$, welche die Kegelschnitte Σ^2 und M^2 berührt (4).

Besonders einfach wird diese Construction in dem Falle, welcher in der Bemerkung (6) besprochen ist. Denn es wird alsdann

$$i_1 \mathfrak{A} = \mathfrak{A} k_1, \quad i_2 \mathfrak{B} = \mathfrak{B} k_2, \quad i_3 \mathfrak{C} = \mathfrak{C} k_3.$$

Zweite Construction. Nach den Angaben von (1) construire man die Punkte S und $\mathfrak{M}$. Linie $S\mathfrak{M}$ schneidet die Seiten von $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ in den Punkten

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}, S\mathfrak{M}) = z, \quad (\mathfrak{A}\mathfrak{C}, S\mathfrak{M}) = y, \quad (\mathfrak{B}\mathfrak{C}, S\mathfrak{M}) = x.$$

Wir erhalten dann die Schnittpunkte

$$k_3 = (xy, AB), \quad k_2 = (xz, AC), \quad k_1 = (yz, BC)$$

und daraus

$$\mathfrak{t} = k_1 k_2 k_3.$$

Es ergiebt sich dies aus (5).

Dritte Construction. Man construire die Berührungspunkte P, Q und R des Kegelschnittes M^2 mit den Seiten des Dreiecks ABC und entweder wie vorhin, oder nach den Bedingungen

$$x = (\mathfrak{B}\mathfrak{C}, QR), \quad y = (\mathfrak{A}\mathfrak{C}, PR), \quad z = (\mathfrak{A}\mathfrak{B}, PQ)$$

die Punkte x, y und z. Alsdann ergiebt sich N als Schnittpunkt der Linien Px, Qy und Rz, ferner N als Schnittpunkt von $\mathfrak{A}x$, $\mathfrak{B}y$ und $\mathfrak{C}z$. Daraus folgt

$$N\mathsf{N} = \mathfrak{t}.$$

Vierte Construction. Nach den Angaben in (1) construire man die Punkte $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$, $\mathfrak{M}$ und die Linie

$$n = (\mathfrak{A}\mathfrak{B},\ \mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2)(\mathfrak{A}\mathfrak{C},\ \mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_3)(\mathfrak{B}\mathfrak{C},\ \mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3).$$

Hierauf verbinde man den Schnittpunkt (l, n) mit den Punkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ und construire zu diesen Verbindungslinien den vierten harmonischen Strahl in Bezug auf das jedesmalige Seitenpaar des vollständigen Vierecks $\mathfrak{M}\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3$. Diese drei vierten harmonischen Strahlen schneiden sich in N, dem Berührungspunkte von Σ^2 und M^2.

Diese aus (7) sich ergebende Construction von N wird sehr einfach, wenn wir die Specialisirungen der Bemerkung in (6) eintreten lassen. Dann werden die Strahlen aus $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ nach (l, n) zu n parallel. Es wird ferner z. B. $\mathfrak{A}\mathfrak{M}\mathfrak{M}_1$ auf $\mathfrak{A}\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3$ senkrecht stehen und deshalb der von den Schenkeln $\mathfrak{A}\mathsf{N}$ und $\mathfrak{A}(l, n)$ gebildete Winkel von einer der obigen, aufeinander senkrechten Linien halbirt.

Kleinere Mittheilungen.

I. Ueber eine Invariante der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung.

§ 1.

Transformirt man die lineare Differentialgleichung

$$1) \qquad P\frac{d^2y}{dx^2}+Q\frac{dy}{dx}+Ry=0$$

durch die Substitution:

$$y=z.\varphi(x),$$

$$2) \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}\varphi(x)+z\varphi'(x), \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\varphi(x)\frac{d^2z}{dx^2}+2\frac{dz}{dx}\varphi'(x)+z\varphi''(x),$$

so erhält man:

$$3) \quad P.\varphi(x)\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{dz}{dx}[2P.\varphi'(x)+Q.\varphi(x)]+z[P.\varphi''(x)+Q.\varphi'(x)+R.\varphi(x)]=0$$

oder abgekürzt geschrieben:

$$4) \qquad P_1\frac{d^2z}{dx^2}+Q_1\frac{dz}{dx}+R_1z=0.$$

Bildet man nun den Ausdruck

$$5) \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{Q_1}{P_1}\right)+\tfrac{1}{2}\left(\frac{Q_1}{P_1}\right)^2-2\frac{R_1}{P_1},$$

so ist derselbe identisch gleich

$$\frac{d}{dx}\left(2\frac{\varphi'}{\varphi}+\frac{Q}{P}\right)+\tfrac{1}{2}\left(2\frac{\varphi'}{\varphi}+\frac{Q}{P}\right)^2-2\left(\frac{\varphi''}{\varphi}+\frac{Q}{P}\cdot\frac{\varphi'}{\varphi}+\frac{R}{P}\right),$$

d. i.:

$$2\frac{\varphi''}{\varphi}-2\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2+\frac{d}{dx}\left(\frac{Q}{P}\right)+2\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2+2\frac{\varphi'}{\varphi}\cdot\frac{Q}{P}+\tfrac{1}{2}\left(\frac{Q}{P}\right)^2-2\frac{\varphi''}{\varphi}-2\frac{Q}{P}\frac{\varphi'}{\varphi}-\frac{2R}{P},$$

d. i.:

$$6) \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{Q}{P}\right)+2\left(\frac{Q}{P}\right)^2-2\frac{R}{P}.$$

Durch Vergleichung von 5) und 6) ersieht man, dass der Ausdruck 6) eine Invariante der Gleichung 1) mit Bezug auf alle Transformationen von der Form 2) ist.

§ 2.

Alle Transformirten, welche mit Hilfe einer Substitution von der Form 2) aus der Gleichung 1) abgeleitet werden können, haben dieselbe Invariante J, wie die Rechnung 5) bis 6) zeigt.

Hat man umgekehrt eine zweite Gleichung

$$7)\qquad p\cdot\frac{d^2 z}{dx^2}+q\cdot\frac{dz}{dx}+r.z=0,$$

deren Invariante J gleich der Invariante von Gleichung 1) ist, d. h.: Besteht die Beziehung

$$8)\qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{q}{p}\right)+\tfrac{1}{2}\left(\frac{q}{p}\right)^2-2\frac{r}{p}=\frac{d}{dx}\left(\frac{Q}{P}\right)+\tfrac{1}{2}\left(\frac{Q}{P}\right)^2-2\frac{R}{P},$$

so lässt sich die Gleichung 7) mit Hilfe einer Substitution von der Form 2) und zwar durch die Substitution

$$9)\qquad y=z\,e^{\frac{1}{2}\int\left(\frac{q}{p}-\frac{Q}{P}\right)dx},$$

$$\left\{\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=e^{\frac{1}{2}\int\left(\frac{q}{p}-\frac{Q}{P}\right)dx}\left[\frac{dz}{dx}+\frac{z}{2}\left(\frac{q}{p}-\frac{Q}{P}\right)\right],\\ \frac{d^2y}{dx^2}&=e^{\frac{1}{2}\int\left(\frac{q}{p}-\frac{Q}{P}\right)dx}\left[\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{dz}{dx}\left(\frac{q}{p}-\frac{Q}{P}\right)+\frac{z}{4}\left(\frac{q}{p}-\frac{Q}{P}\right)^2+\frac{z}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{q}{p}-\frac{Q}{P}\right)\right]\end{aligned}\right.$$

aus der Gleichung 1) ableiten. Setzt man nämlich diese letzteren Ausdrücke in Gleichung 1) ein und lässt den allen Gliedern gemeinsamen Factor $e^{\frac{1}{2}\int\left(\frac{q}{p}-\frac{Q}{P}\right)dx}$ fort, so erhält man:

$$10)\qquad \begin{aligned}&P\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{dz}{dx}\left[P\left(\frac{q}{p}-\frac{Q}{P}\right)+Q\right]\\&+z\left[\frac{P}{4}\left(\frac{q}{p}-\frac{Q}{P}\right)^2+\frac{P}{2}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{q}{p}-\frac{Q}{P}\right)+\frac{Q}{2}\left(\frac{q}{p}-\frac{Q}{P}\right)+R\right]=0.\end{aligned}$$

Multiplicirt man die ganze Gleichung mit p/P, so hat man:

$$11)\quad p\frac{d^2z}{dx^2}+q\frac{dz}{dx}+z\left[\tfrac{1}{4}\left(\frac{q}{p}\right)^2-\tfrac{1}{4}\left(\frac{Q}{P}\right)^2+\tfrac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{q}{p}\right)-\tfrac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{Q}{P}\right)+\frac{R}{p}\right]p=0.$$

Mit Rücksicht auf 8) ist der Factor von z gleich r, und die Gleichung 11) lautet:

$$7)\qquad p\frac{d^2z}{dx^2}+q\frac{dz}{dx}+r.z=0.$$

Durch die Substitution 9) ist daher die Gleichung 7) aus der Gleichung 1) abgeleitet worden.

§ 3.

So haben z. B. die beiden Differentialgleichungen

$$12)\qquad \begin{array}{ll}\text{a)} & \left\{\begin{aligned}&x\frac{d^2y}{dx^2}+(1-a+x)\frac{dy}{dx}=0\quad\text{und}\\&x\frac{d^2z}{dx^2}+(a+1+x)\frac{dz}{dx}+az=0\end{aligned}\right.\\ \text{b)} & \end{array}$$

dieselbe Invariante

$$13)\qquad J=\frac{\frac{1}{2}x^2+(1-a)x+\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}}{x^2}.$$

Nach § 2 Gleichung 9) kann daher die Gleichung 12b) aus 12a) durch die Substitution

$$14)\qquad y = z e^{\frac{1}{2}\int\left(\frac{a+1+x}{x^2} - \frac{1-a+x}{x^2}\right)dx}, \quad \text{d. i. } y = z \,.\, x^a$$

abgeleitet werden. Setzt man diesen Werth für y in 12a) ein, so erhält man thatsächlich die Gleichung 12b).

Die Gesammtheit aller Differentialgleichungen, welche ein und dieselbe Invariante J haben, könnte man eine Gruppe nennen. Die Gleichungen einer Gruppe können dann nach § 2 durch eine Substitution von der Form 9) auseinander abgeleitet werden. Kennt man daher das Integral einer solchen Gleichung, so ist damit auch das Integral einer jeden Gleichung, welche zu derselben Gruppe gehört, mit bekannt.

So gehören z. B. die beiden Gleichungen 12a) und 12b) derselben Gruppe an, weil beide die Invariante 13) besitzen. Das Integral von 12a) ist nun bekannt:

$$15)\qquad y = C_1 \int x^{a-1} e^{-x}\, dx + C_2 .$$

Da nun 12b) durch die Substitution 14) aus 12a) abgeleitet werden kann, so ist das Integral von 12b)

$$16)\qquad z = x^{-a}\left[C_1 \int x^{a-1} e^{-x} . \, dx + C_2\right].$$

Die Invariante der Gleichung $d^2y/dx^2 = 0$ ist gleich Null. Alle Differentialgleichungen, deren Invariante gleich Null ist, sind daher integrabel, denn nach § 2 lassen sich alle diese Gleichungen aus der Gleichung $d^2y/dx^2 = 0$ ableiten.

Es dürfte sich somit empfehlen, die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung nach ihren Invarianten zu gruppiren und eine Invariantentafel für alle Gleichungen aufzustellen, deren Integration bekannt ist. Hat man dann eine gegebene Gleichung zu untersuchen, so bildet man nur ihre Invariante. Aus der Invariantentafel ersieht man dann, ob und wie die betreffende Gleichung integrirt werden kann.

§ 4.

Obige Theorie ist insofern von einer gewissen Bedeutung, als durch die Integration einer Gleichung gleichzeitig die Integration einer ganzen Gruppe von Gleichungen mit bekannt wird.

Durch eine Substitution $x = f(\xi)$ wird die Invariante J der Gleichung 1) geändert. Durch eine solche Substitution können daher aus Gleichung 1) neue Gleichungen abgeleitet werden, welche verschiedenen Gruppen angehören. Die Integration aller dieser Gruppen ist bekannt, wenn man die ursprüngliche Gleichung integriren kann. —

Die Gleichung

$$17)\qquad P\frac{d^2y}{dx^2}+Q\frac{dy}{dx}=0$$

ist nun für alle möglichen P und Q integrabel. Ihre Invariante ist:

$$18)\qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{Q}{P}\right)+\tfrac{1}{2}\left(\frac{Q}{P}\right)^2.$$

Sei nun die Invariante einer zu untersuchenden Gleichung G gleich $F(x)$, so könnte man sich die Aufgabe stellen, Q und P so zu bestimmen, dass die Gleichung 17) dieselbe Invariante hat, wie die Gleichung G, dass also:

$$19)\qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{Q}{P}\right)+\tfrac{1}{2}\left(\frac{Q}{P}\right)^2=F(x).$$

Durch Lösung letzteren Problems ist dann die Integration von G auf die Integration der integrabeln Gleichung 17) zurückgeführt.

Aehnliche Betrachtungen lassen sich an jede integrable Gleichung anknüpfen.

Auch Transformationsprobleme lassen sich mit Hilfe obiger Grundgedanken leicht lösen.

Stellen wir uns z. B. die Aufgabe, eine Substitution $y=z.f(x)$ zu suchen, durch welche die Gleichung

$$20)\qquad x\frac{d^2y}{dx^2}+(a+b+x)\frac{dy}{dx}+ay=0$$

in die ähnliche Gleichung

$$21)\qquad x\frac{d^2z}{dx^2}+(A+B+x)\frac{dz}{dx}+Az=0$$

übergeführt wird.

Die Invariante der Gleichung 20) ist:

$$22)\qquad J_1=\frac{\frac{1}{2}x^2+x(b-a)+\frac{1}{2}(b+a)^2-b-a}{x^2}.$$

Die Invariante von 21) dagegen:

$$23)\qquad J_2=\frac{\frac{1}{2}x^2+x(B-A)+\frac{1}{2}(B+A)^2-B-A}{x^2}.$$

Da Gleichung 21) durch eine Substitution $y=z.f(x)$ aus 20) abgeleitet werden soll, so müssen die Invarianten J_1 und J_2 einander gleich sein. Es muss also sein:

$$B-A=b-a,\quad \tfrac{1}{2}(B+A)^2-B-A=\tfrac{1}{2}(b+a)^2-b-a,$$

also:

$$24)\qquad A=1-b,\quad B=1-a.$$

Die Gleichung

$$25)\qquad x\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{dz}{dx}((1-a)+(1-b)+x)+(1-b)z=0$$

hat daher dieselbe Invariante wie Gleichung 20) und kann nach § 2 Gl. 9) durch die Substitution

$$26)\qquad y = z\,.\,e^{\frac{1}{2}\int\left(\frac{1-a+1-b+x}{x}-\frac{a+b+x}{dn}\right)dx},\ \text{d. i. } y = z\,.\,x^{1-a-b}$$

aus der Gleichung 20) abgeleitet werden. — Die von uns gesuchte Substitution ist also: $y = z\,.\,x^{1-a-b}$.

Obige Invarianteneigenschaft gestattet daher eine ganze Reihe von Nutzanwendungen.

Adomlauken. DIETRICHKEIT,
Cand. d. höh. Schulamts.

II. Ueber einige Verallgemeinerungen der Leibniz'schen Differentiationsformel und des polynomischen Lehrsatzes.

In einer kurzen Mittheilung, welche im I. Bande von Crelle's Journal abgedruckt ist,* hat Abel eine Verallgemeinerung des binomischen Lehrsatzes gegeben, die sich mit etwas abgeänderter Bezeichnung durch die folgende Formel darstellen lässt:

$$1)\qquad (a_1 + a_2 + na)^n = a_2 \sum \frac{n!}{r!\,s!}(a_1 + ra)^r (a_2 + sa)^{s-1}.$$

Hier bedeuten a, a_1, a_2 beliebige Grössen, n eine positive ganze Zahl und die Summation erstreckt sich auf alle Paare nicht negativer ganzer Zahlen r, s, welche der Bedingung $r + s = n$ genügen. Setzt man in dieser Formel $a = 0$, so geht dieselbe in die binomische Formel über.

Die Abel'sche Identität 1) ist nun ein specieller Fall einer allgemeineren Formel, welche ich in den folgenden Zeilen in Verbindung mit einigen anderen Relationen entwickeln will. Um den Gedankengang, welchen ich hierbei befolge, deutlich hervortreten zu lassen, gebe ich zunächst einen Beweis der bekannten Leibniz'schen Differentiationsformel.

Es seien $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_k(x)$ differentiirbare, übrigens beliebige Functionen von x; ferner bezeichne $f(x)$ das Product dieser k Functionen. Entwickelt man dann die beiden Seiten der Identität

$$f(x+t) = f_1(x+t)\,.\,f_2(x+t)\ldots f_k(x+t)$$

nach Potenzen von t, so kommt:

$$\sum_0^\infty {}^n \frac{t^n}{n!}\frac{d^n f}{dx^n} = \prod_1^k {}^i \sum_0^\infty {}^n \frac{t^n}{n!}\frac{d^n f_i}{dx^n}.$$

Durch Vergleich der Coefficienten von t^n auf der linken und rechten Seite ergiebt sich nun

$$2)\qquad \frac{d^n(f_1\cdot f_2\ldots f_k)}{dx^n} = \sum \frac{n!}{r_1!\,r_2!\ldots r_k!}\frac{d^{r_1}f_1}{dx^{r_1}}\cdot\frac{d^{r_2}f_2}{dx^{r_2}}\cdots\frac{d^{r_k}f_k}{dx^{r_k}},$$

wobei sich die Summation auf alle Systeme nicht negativer ganzer Zahlen r_1, r_2, ..., r_k erstreckt, welche der Bedingung $r_1 + r_2 + \cdots + r_k = n$ genügen.

---

* Siehe auch Abel, Oeuvres complètes, nouvelle édition, Bd. I S. 102.

Dieser Beweis der Leibniz'schen Differentiationsformel 2) setzt offenbar die Convergenz der benutzten unendlichen Reihen voraus. Indessen kann man, ohne den Beweis wesentlich zu modificiren, die endliche Taylor'sche Reihe (mit Restglied) an Stelle der unendlichen setzen. Man sieht also, dass die Formel 2) unabhängig von der Convergenz jener Reihen gilt.

Eine entsprechende Bemerkung ist im Folgenden überall da zu ergänzen, wo bei den Beweisen unendliche Reihen als Hilfsmittel benutzt werden.

Ich wiederhole nun die zum Beweise der Formel 2) angestellte Betrachtung, nur dass ich dabei an Stelle der Taylor'schen die Lagrange-sche Reihe setze. Bedeuten F und φ Functionen einer Veränderlichen, so gilt die Entwickelung:

$$F(z)=\sum_0^\infty {}^n \frac{t^n}{n!}\frac{d^{n-1}[F'(x)(\varphi(x))^n]}{dx^{n-1}} \tag{3}$$

unter der Voraussetzung, dass z als Function von t und x durch die Gleichung

$$z=x+t\,\varphi(z) \tag{4}$$

erklärt ist. Hierbei ist zu bemerken, dass das Zeichen $\frac{d^{n-1}[F'(x)(\varphi(x))^n]}{dx^{n-1}}$ für den Fall $n=0$ die Bedeutung $F(x)$, für den Fall $n=1$ die Bedeutung $F'(x)\,\varphi(x)$ besitzt.

Neben der eigentlichen Lagrange'schen Reihe 3) verwende ich noch die folgenden Entwickelungen, welche sich leicht mit Hilfe von 3) ergeben:

$$\frac{F(z)}{1-t\,\varphi'(z)}=\sum_0^\infty {}^n \frac{t^n}{n!}\frac{d^n[F(x)(\varphi(x))^n]}{dx^n}, \tag{5}$$

$$\frac{F(z)}{[1-t\,\varphi'(z)]^\lambda}=\sum_0^\infty {}^n \frac{t^n}{n!}\sum\frac{n!}{r!\,s!}\frac{(r+\lambda-2)!}{(\lambda-2)!}\frac{d^s[F(x)(\varphi'(x))^r(\varphi(x))^s]}{dx^s}. \tag{6}$$

Hier bedeutet in der letzten Gleichung λ eine positive ganze Zahl, welche grösser als 1 ist, und die innere Summation auf der rechten Seite erstreckt sich auf alle Paare nicht negativer ganzer Zahlen r, s, welche der Bedingung $r+s=n$ genügen.

Wir betrachten nun k beliebige Functionen $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$ und bezeichnen das Product derselben mit $f(x)$. Ersetzen wir dann in der Identität

$$\frac{f(z)}{[1-t\,\varphi'(z)]^i}=\frac{f_1(z)}{1-t\,\varphi'(z)}\cdot\frac{f_2(z)}{1-t\,\varphi'(z)}\cdots\frac{f_i(z)}{1-t\,\varphi'(z)}\cdot f_{i+1}(z)\ldots f_k(z)$$

jedes einzelne Glied durch die bezügliche Reihenentwickelung 3), 5), 6) und vergleichen in der so entstehenden Gleichung die beiderseits auftretenden Coefficienten von t^n, so erhalten wir unmittelbar den folgenden Satz, in welchem wir nur die Fälle $i=0$, $i=1$ und $i=k$ besonders hervorheben:

„Bedeuten $f_1, f_2, \ldots, f_k, \varphi$ irgend $k+1$ differentiirbare Functionen einer Veränderlichen x und bezeichnet man zur Abkürzung das Product $f_1 f_2 \ldots f_k$ mit f, so gelten die Formeln:

$$\text{I)}\ \frac{d^{n-1}[f'\varphi^n]}{dx^{n-1}} = \sum \frac{n!}{r_1!\,r_2!\dots r_k!}\,\frac{d^{r_1-1}[f'_1\varphi^{r_1}]}{dx^{r_1-1}}\,\frac{d^{r_2-1}[f'_2\varphi^{r_2}]}{dx^{r_2-1}}\cdots\frac{d^{r_k-1}[f'_k\varphi^{r_k}]}{dx^{r_k-1}},$$

$$\text{II)}\ \frac{d^{n}[f\varphi^n]}{dx^{n}} = \sum \frac{n!}{r_1!\,r_2!\dots r_k!}\,\frac{d^{r_1}[f_1\varphi^{r_1}]}{dx^{r_1}}\,\frac{d^{r_2-1}[f'_2\varphi^{r_2}]}{dx^{r_2-1}}\cdots\frac{d^{r_k-1}[f'_k\varphi^{r_k}]}{dx^{r_k-1}},$$

$$\text{III)}\quad \sum \frac{n!}{r!\,s!}\,\frac{(r+k-2)!}{(k-2)!}\,\frac{d^s[f\varphi'^r\varphi^s]}{dx^s}$$
$$= \sum \frac{n!}{r_1!\,r_2!\dots r_k!}\,\frac{d^{r_1}[f_1\varphi^{r_1}]}{dx^{r_1}}\,\frac{d^{r_2}[f_2\varphi^{r_2}]}{dx^{r_2}}\cdots\frac{d^{r_k}[f_k\varphi^{r_k}]}{dx^{r_k}}.$$

Dabei erstrecken sich die Summen rechter Hand auf alle Systeme nicht negativer ganzer Zahlen $r_1, r_2, \dots, r_k$, welche der Bedingung $r_1+r_2+\dots+r_k=n$ genügen. Die Summe auf der linken Seite der Formel III) erstreckt sich auf alle Paare nicht negativer ganzer Zahlen r, s, welche der Bedingung $r+s=n$ genügen.

Die Formeln I), II), III) reduciren sich für $\varphi=1$ sämmtlich auf die Leibniz'sche Formel 2).

Setzen wir in unseren Formeln

$$f_1(x)=e^{a_1x},\quad f_2(x)=e^{a_2x},\quad \dots,\quad f_k(x)=e^{a_kx},\quad \varphi(x)=e^{ax},$$

wo $a, a_1, a_2, \dots, a_k$ beliebige Grössen bedeuten, so gelangen wir sofort zu folgendem Satze:

Bezeichnen $a, a_1, a_2, \dots, a_k$ irgend $k+1$ Grössen, so gelten die nachstehenden Formeln:

$$\text{I')}\quad (a_1+a_2+\dots+a_k)(a_1+a_2+\dots+a_k+na)^{n-1}$$
$$= a_1a_2\dots a_k\sum\frac{n!}{r_1!\,r_2!\dots r_k!}(a_1+r_1a)^{r_1-1}(a_2+r_2a)^{r_2-1}\dots(a_k+r_ka)^{r_k-1},$$

$$\text{II')}\quad (a_1+a_2+\dots+a_k+na)^{n}$$
$$= a_2\dots a_k\sum\frac{n!}{r_1!\,r_2!\dots r_k!}(a_1+r_1a)^{r_1}(a_2+r_2a)^{r_2-1}\dots(a_k+r_ka)^{r_k-1},$$

$$\text{III')}\quad \sum\frac{n!}{r!\,s!}\,\frac{(r+k-2)!}{(k-2)!}\,a^r(a_1+a_2+\dots+a_k+na)^s$$
$$= \sum\frac{n!}{r_1!\,r_2!\dots r_k!}(a_1+r_1a)^{r_1}(a_2+r_2a)^{r_2}\dots(a_k+r_ka)^{r_k}.$$

Die Summationsbuchstaben $r_1, r_2, \dots, r_k, r, s$ durchlaufen hier dieselben Werthsysteme, wie in den Formeln des vorhergehenden Satzes.

Die Formeln I'), II'), III') reduciren sich für $a=0$ sämmtlich auf die Polynomialformel. Die Formel II') geht im Falle $k=2$ in die eingangserwähnte Abel'sche Formel über.

Königsberg i. Pr., den 25. October 1889. A. Hurwitz.

III. Eine Construction für das Chasles'sche Problem der Projectivität.

Das alte Problem von Chasles:

„Es sind in der Ebene fünf Punkte

$$\mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{d},\ \mathfrak{e}$$

(von denen keine drei auf einer Geraden liegen) und ausserdem fünf Punkte einer Geraden l

$$l\,(\mathfrak{a}',\ \mathfrak{b}',\ \mathfrak{c}',\ \mathfrak{d}',\ \mathfrak{e}')$$

gegeben; man soll denjenigen Punkt $\mathfrak{D}$ in der Ebene construiren, für welchen die Projectivität

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{e}) \barwedge l(\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'\mathfrak{e}')$$

des Strahlbüschels mit der gegebenen Punktreihe erfüllt wird",

hat bisher nur eine Lösung erfahren (Chasles, Comptes rendus, 30. Mai 1853; Cremona, Curve piane, art. 62), die zwar leicht in Worten auszusprechen ist, deren wirkliche Ausführung aber sehr weitläufig wird. Es wird nämlich durch $\mathfrak{a}$ der Strahl $|\mathfrak{a}\mathfrak{t}|$ construirt, für welchen

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{t}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{e}) \barwedge l(\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\mathfrak{d}')$$

ist, und ein Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ bestimmt, welcher durch $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ geht und in $\mathfrak{a}$ die Tangente $|\mathfrak{a}\mathfrak{t}|$ hat; sodann wird durch $\mathfrak{a}$ ein Strahl $|\mathfrak{a}\mathfrak{t}_1|$ construirt, für welchen

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{t}_1\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{e}) \barwedge l(\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\mathfrak{e}')$$

ist, und ein Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ bestimmt, welcher durch $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{e}$ geht und in $\mathfrak{a}$ die Tangente $|\mathfrak{a}\mathfrak{t}_1|$ hat; die beiden Kegelschnitte $\mathfrak{K}^{(2)}$ und $\mathfrak{K}_1^{(2)}$, welche die drei gemeinschaftlichen Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ haben, besitzen noch einen vierten gemeinschaftlichen Punkt, welcher der gesuchte Punkt $\mathfrak{D}$ ist.

Will man nun alle einzelnen vorgeschriebenen Constructionen wirklich ausführen, so bedarf es dazu vieler Hilfslinien, welche die Ausführung schwerfällig und weitläufig machen. Ich möchte daher in den folgenden Zeilen eine fertige Construction geben, die natürlich auf demselben Princip beruht, aber die Ausführung der zu leistenden Hilfsconstructionen selbst enthält.

Man bestimme die Schnittpunkte

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{b}\mathfrak{b}',\ \mathfrak{c}\mathfrak{c}') &= \mathfrak{a}'', & (\mathfrak{c}\mathfrak{c}',\ \mathfrak{a}\mathfrak{a}') &= \mathfrak{b}'', & (\mathfrak{a}\mathfrak{a}',\ \mathfrak{b}\mathfrak{b}') &= \mathfrak{c}'';\\
(\mathfrak{a}''\mathfrak{a}',\ \mathfrak{b}\mathfrak{c}) &= \mathfrak{a}_1, & (\mathfrak{b}''\mathfrak{b}',\ \mathfrak{c}\mathfrak{a}) &= \mathfrak{b}_2, & (\mathfrak{c}''\mathfrak{c}',\ \mathfrak{a}\mathfrak{b}) &= \mathfrak{c}_3;\\
(\mathfrak{a}''\mathfrak{d}',\ \mathfrak{b}\mathfrak{c}) &= \mathfrak{d}_1, & (\mathfrak{b}''\mathfrak{d}',\ \mathfrak{c}\mathfrak{a}) &= \mathfrak{d}_2, & (\mathfrak{c}''\mathfrak{d}',\ \mathfrak{a}\mathfrak{b}) &= \mathfrak{d}_3;\\
(\mathfrak{a}''\mathfrak{e}',\ \mathfrak{b}\mathfrak{c}) &= \mathfrak{e}_1, & (\mathfrak{b}''\mathfrak{e}',\ \mathfrak{c}\mathfrak{a}) &= \mathfrak{e}_2, & (\mathfrak{c}''\mathfrak{e}',\ \mathfrak{a}\mathfrak{b}) &= \mathfrak{e}_3.
\end{aligned}$$

Dann hat man offenbar auf den Trägern

$$|\mathfrak{b}\mathfrak{c}|,\quad |\mathfrak{c}\mathfrak{a}|,\quad |\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$$

drei Punktreihen, nämlich

$$|\mathfrak{b}\mathfrak{c}|(\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}_1\mathfrak{e}_1),\quad |\mathfrak{c}\mathfrak{a}|(\mathfrak{a}\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}\mathfrak{d}_2\mathfrak{e}_2),\quad |\mathfrak{a}\mathfrak{b}|(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}_3\mathfrak{d}_3\mathfrak{e}_3),$$

die mit der gegebenen Punktreihe

$$l(\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'\mathfrak{e}')$$

projectiv sind, weil sie mit ihr perspectiv liegen rücksichtlich der Projectionscentra $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{c}''$. Bestimmt man nun die Schnittpunkte

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1, \mathfrak{d}\mathfrak{d}_1) = \mathfrak{A}, \quad (\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1, \mathfrak{e}\mathfrak{e}_1) = \mathfrak{A}_1,$$
$$(\mathfrak{b}\mathfrak{b}_2, \mathfrak{d}\mathfrak{d}_2) = \mathfrak{B}, \quad (\mathfrak{b}\mathfrak{b}_2, \mathfrak{e}\mathfrak{e}_2) = \mathfrak{B}_1,$$
$$(\mathfrak{c}\mathfrak{c}_3, \mathfrak{d}\mathfrak{d}_3) = \mathfrak{C}, \quad (\mathfrak{c}\mathfrak{c}_3, \mathfrak{e}\mathfrak{e}_3) = \mathfrak{C}_1,$$

so werden die drei Strahlbüschel

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}), \quad \mathfrak{B}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}), \quad \mathfrak{C}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d})$$

mit der Punktreihe $l(\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\mathfrak{d}')$ projectiv sein, weil sie mit den Punktreihen auf $|\mathfrak{b}\mathfrak{c}|$, $|\mathfrak{c}\mathfrak{a}|$, $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ perspectiv liegen, also sind sie auch unter sich projectiv und erzeugen einen Kegelschnitt

$$\mathfrak{K}^{(2)} = [\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}],$$

von dem wir also sieben Punkte erhalten. Andererseits werden auch die drei Strahlbüschel

$$\mathfrak{A}_1(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{e}), \quad \mathfrak{B}_1(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{e}), \quad \mathfrak{C}_1(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{e})$$

mit der Punktreihe $l(\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\mathfrak{e}')$ projectiv sein, weil sie mit den Punktreihen auf $|\mathfrak{b}\mathfrak{c}|$, $|\mathfrak{c}\mathfrak{a}|$, $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ perspectiv liegen, also sind sie auch unter sich projectiv und erzeugen einen Kegelschnitt

$$\mathfrak{K}_1^{(2)} = [\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{e}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1],$$

von dem wir sieben Punkte kennen.

Die beiden Kegelschnitte $\mathfrak{K}^{(2)}$ und $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ haben drei gemeinschaftliche Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$; der vierte gemeinschaftliche Punkt derselben besitzt offenbar die von dem gesuchten Punkte $\mathfrak{D}$ verlangte Eigenschaft.

Nun liegen aber auf einer Geraden je drei Punkte

$$|\mathfrak{a}\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1| = a, \quad |\mathfrak{b}\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1| = b, \quad |\mathfrak{c}\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1| = c,$$

wie unsere Construction zeigt.

Betrachten wir nun die drei Kegelschnitte

$$\mathfrak{K}^{(2)}, \quad \mathfrak{K}_1^{(2)} \text{ und } [ab],$$

von denen der letztere ein Linienpaar ist, so haben dieselben eine gemeinschaftliche Secante $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$, folglich je zwei derselben noch eine gemeinschaftliche Secante, und diese drei übrigen gemeinschaftlichen Secanten schneiden sich nach einem bekannten Satze der Kegelschnittstheorie in einem Punkte; von diesen sind zwei, $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ und $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1|$, zwei Secanten; die dritte, welche durch $\mathfrak{c}$ und den vierten gemeinschaftlichen Punkt der Kegelschnitte $\mathfrak{K}^{(2)}$ und $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ hindurchgeht, muss sich also mit den beiden vorigen in einem und demselben Punkte schneiden; d. h.: Bestimmen wir die Schnittpunkte

$$(\mathfrak{B}\mathfrak{C}, \mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1) = \mathfrak{A}_2, \quad (\mathfrak{C}\mathfrak{A}, \mathfrak{C}_1\mathfrak{A}_1) = \mathfrak{B}_2, \quad (\mathfrak{A}\mathfrak{B}, \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1) = \mathfrak{C}_2,$$

so schneiden sich die drei Verbindungslinien

$$|\mathfrak{a}\mathfrak{A}_2|, \quad |\mathfrak{b}\mathfrak{B}_2|, \quad |\mathfrak{c}\mathfrak{C}_2|$$

in dem gesuchten Punkte $\mathfrak{D}$, wodurch dieser schon mehr als bestimmt ist.

Hierdurch ergiebt sich also nicht allein die fertige Construction des gesuchten Punktes $\mathfrak{D}$, sondern zugleich eine Controle für die Ermittelung desselben, da wir drei gerade Linien erhalten, die durch ihn gehen müssen, oder auch ein geometrischer Satz, auf den wir hier nicht weiter eingehen wollen.

Die Construction ist also folgende:

Gegeben

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{e}, \quad l(\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'\mathfrak{e}');$$
$$(\mathfrak{b}\mathfrak{b}', \mathfrak{c}\mathfrak{c}') = \mathfrak{a}'', \quad (\mathfrak{c}\mathfrak{c}', \mathfrak{a}\mathfrak{a}') = \mathfrak{b}'', \quad (\mathfrak{a}\mathfrak{a}', \mathfrak{b}\mathfrak{b}') = \mathfrak{c}'';$$
$$(\mathfrak{a}''\mathfrak{a}', \mathfrak{b}\mathfrak{c}) = \mathfrak{a}_1, \quad (\mathfrak{b}''\mathfrak{b}', \mathfrak{c}\mathfrak{a}) = \mathfrak{b}_2, \quad (\mathfrak{c}''\mathfrak{c}', \mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \mathfrak{c}_3,$$
$$(\mathfrak{a}''\mathfrak{d}', \mathfrak{b}\mathfrak{c}) = \mathfrak{d}_1, \quad (\mathfrak{b}''\mathfrak{d}', \mathfrak{c}\mathfrak{a}) = \mathfrak{d}_2, \quad (\mathfrak{c}''\mathfrak{d}', \mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \mathfrak{d}_3,$$
$$(\mathfrak{a}''\mathfrak{e}', \mathfrak{b}\mathfrak{c}) = \mathfrak{e}_1, \quad (\mathfrak{b}''\mathfrak{e}', \mathfrak{c}\mathfrak{a}) = \mathfrak{e}_2, \quad (\mathfrak{c}''\mathfrak{e}', \mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \mathfrak{e}_3;$$
$$(\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1, \mathfrak{d}\mathfrak{d}_1) = \mathfrak{A}, \quad (\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1, \mathfrak{e}\mathfrak{e}_1) = \mathfrak{A}_1,$$
$$(\mathfrak{b}\mathfrak{b}_2, \mathfrak{d}\mathfrak{d}_2) = \mathfrak{B}, \quad (\mathfrak{b}\mathfrak{b}_2, \mathfrak{e}\mathfrak{e}_2) = \mathfrak{B}_1,$$
$$(\mathfrak{c}\mathfrak{c}_3, \mathfrak{d}\mathfrak{d}_3) = \mathfrak{C}, \quad (\mathfrak{c}\mathfrak{c}_3, \mathfrak{e}\mathfrak{e}_3) = \mathfrak{C}_1;$$
$$(\mathfrak{B}\mathfrak{C}, \mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1) = \mathfrak{A}_2,$$
$$(\mathfrak{C}\mathfrak{A}, \mathfrak{C}_1\mathfrak{A}_1) = \mathfrak{B}_2,$$
$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}, \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1) = \mathfrak{C}_2;$$
$$(|\mathfrak{a}\mathfrak{A}_2|\,|\mathfrak{b}\mathfrak{B}_2|\,|\mathfrak{c}\mathfrak{C}_2|) = \mathfrak{D}.$$

Breslau, den 25. October 1889. H. SCHROETER.

IV. Ueber die Configuration, welche durch die Aehnlichkeitspunkte und Aehnlichkeitsgeraden von n Kreisen der Ebene gebildet wird.

1. Bezeichnet man durch ik den äusseren, durch (ik) den inneren Aehnlichkeitspunkt der Kreise i, k; durch ikl die Axe, welche die Punkte ik, il, kl, durch $ik(l)$ die Axe, welche die Punkte ik, (il), (kl) trägt, so erhält man für n Kreise, deren Mittelpunkte $1, 2, 3, \ldots, n$ genannt werden, $\binom{n}{2}$ Punkte ik, $\binom{n}{2}$ Punkte (ik), $\binom{n}{3}$ Gerade ikl und $3\binom{n}{3}$ Gerade $ik(l)$, welche die Elemente einer Configuration

$$\sigma_n \equiv \left(2\binom{n}{2}_{2(n-2)}, \; 4\binom{n}{3}_3\right)$$

sind.*

2. Diese Configuration kann unabhängig von jenen Kreisen construirt werden. Tragen $n-1$ durch den Punkt 1 laufende Gerade bez. die Punktepaare $1i$, $(1i)$, wo $i=2$ bis n, und bestimmt man für jedes vollständige Viereck $1i$, $(1i)$, $1k$, $(1k)$ die beiden fehlenden Nebenecken

$$ik \equiv (\overline{1i, 1k}; \overline{(1i), (1k)}) \quad \text{und} \quad (ik) \equiv (\overline{1i, (1k)}; \overline{(1i), 1k}),$$

so liegen diese $2\binom{n-1}{2}$ neuen Punkte zu dreien auf $4\binom{n-1}{3}$ neuen Geraden, welche die Perspectivitätsaxen der $4\binom{n-1}{3}$ in Bezug auf das

* Ueber den Zusammenhang der σ_n mit den Bandmechanismen vergl. Dr. L. Burmester's Kinematik, Bd. I S. 552.

Centrum 1 perspectivisch belegenen Dreieckspaare sind. Jene neuen Punkte und Geraden bilden eine Configuration σ_{n-1}, welche die Punkte $1i$, $(1i)$ und deren Verbindungslinien zu einer σ_n ergänzt.

Diese σ_n hat nicht nur dieselbe Bezeichnung wie die Configuration der Aehnlichkeitselemente, sondern, wie diese, ausser 1 noch $n-1$ weitere $(n-1)$-fache Diagonalschnittpunkte. Die Diagonale $\overline{1i, (1i)}$ wird durch die Diagonale $\overline{ik, (ik)}$ geschnitten in einem Punkte i, der von 1 harmonisch getrennt ist durch die Punkte $1i$ und $(1i)$; durch jenen Punkt i gehen daher sämmtliche Diagonalen $\overline{ik, (ik)}$.

Die genannte Configuration kann aber auch stets als Configuration von Aehnlichkeitselementen betrachtet werden; die Punkte 1, 2 bis n sind dann die Centra von n Kreisen, für deren Radien die Gleichung $r_1 : r_i = \overline{1, 1i} : \overline{i, 1i}$ gilt.

3. Die Configuration σ_4 ist identisch mit der $(12_4, 16_3)A$, welche ich Acta Mathematica 12 einer eingehenden Betrachtung unterzogen habe; dort habe ich gezeigt, dass diese Configuration zwölf dreifache Diagonalschnitte besitzt, welche einer zweiten σ_4 angehören. Für jede der $\binom{n}{4}$ in σ_n enthaltenen σ_4 liegen vier Diagonalschnitte in $(n-1)$-fachen Diagonalschnitten der σ_n; ausser diesen besitzt σ_n demnach noch $8\binom{n}{4}$ dreifache Diagonalschnitte.

4. Wie ich in der citirten Arbeit bewiesen, sind die zwölf Punkte einer σ_4 stets mit einer zweitheiligen Curve 3^{ter} Ordnung incident. Die $2\binom{n}{2}$ Punkte der σ_n bilden demnach mit $\binom{n}{4}$ cubischen Curven eine Configuration $\left(2\binom{n}{2}_{\binom{n-2}{2}}, \binom{n}{4}_{12}\right)$.

5. Aus der obigen Construction des σ_n ergiebt sich für ihre Constantenzahl $3n-1$; für gerade n ist diese Anzahl ungerade und die Configuration kann unzweideutig bestimmt werden durch $\frac{1}{2}(3n-2)$ beliebige Punkte und einen Punkt, der mit zweien dieser Punkte allineirt ist; für ungerade n ergiebt sich eine eindeutige Construction aus $\frac{1}{2}(3n-1)$ unabhängigen Punkten. In Uebereinstimmung mit Herrn Burmester bezeichne ich solche Gruppen, welche die kleinste Anzahl von Punkten enthalten, aus denen die Configuration sich darstellen lässt, als eine Constellation. (Vgl. Dr. L. Burmester, „Ueber die momentane Bewegung ebener kinematischer Ketten", Civilingenieur XXVI, 1880.)

Die Configuration σ_4 besitzt z. B. die sechspunktige Constellation:

$$12,\ 13,\ 23,\ (13),\ 14,\ (14);$$

denn die Geraden $\overline{13, (13)}$ und $\overline{14, (14)}$ bestimmen den Punkt 1, und die Gerade $\overline{(13), 23}$ schneidet aus der Geraden $\overline{1, 12}$ den sechsten mit 1 verbundenen Punkt (12) heraus.

Für σ_5 ergiebt sich die aus sieben unabhängigen Punkten bestehende Constellatation:

$$12,\ (12),\ 13,\ (13),\ 14,\ (15),\ 45.$$

Durch Fortsetzung dieser Betrachtung ergiebt sich:

Die Configuration σ_{2p} ist eindeutig bestimmt durch die Constellation

12	(13)	15	17	...	$1.2i-1$	...	$1.2p-1$
23	14	(16)	(18)	...	$(1.2i)$	...	$(1.2p)$
13	(14)	56	78	...	$2i-1.2i$	...	$2p-1.2p.$

Die Configuration σ_{2p+1} besitzt die Constellation

12	14	16	18	...	$1.2i$	...	$1.2p$
(12)	(15)	(17)	(19)	...	$(1.2i+1)$	...	$(1.2p+1)$
13	45	67	89)	...	$2i.2i+1$	...	$2p.2p+1$
(13)							

6. Die Configuration σ_n enthält $(2n-5)\binom{n}{3}$ vollständige Vierseite, nämlich $\binom{n}{3}$ Configurationen σ_3 und $8\binom{n}{4}$ durch je vier Zahlen bezeichnete, einer σ_4 angehörige Vierseite.

7. Jede in σ_n befindliche σ_{n-2} kann betrachtet werden als die gemeinschaftliche Restfigur der beiden Punkte, welche durch die beiden nicht in jener σ_{n-2} vorkommenden Zahlen dargestellt werden.

8. Die Punkte ik und die Geraden ikl bilden innerhalb der σ_n eine Configuration π_n. (Vergl. meine Arbeit „Ueber polyedrale Configurationen", Math. Annalen XXXIV.) Ausserdem enthält σ_n noch alle π_n, deren Bezeichnung aus der Bezeichnung jener π_n hervorgeht, falls eine oder mehrere der Geraden $12i$ durch eine bez. mehrere Gerade $12(i)$ ersetzt werden, wobei natürlich auch die Zeichen der übrigen Elemente wo nöthig in Uebereinstimmung mit der für σ_n angenommenen Bezeichnung abgeändert werden müssen. Es zeigt sich nun, dass σ_n im Ganzen 2^{n-1} Configurationen π_n, allgemein $\binom{n}{p}.2^{p-1}$ Configurationen π_p enthält.

Aus einer π_n lässt sich mit Hilfe von zwei willkürlichen, mit einem Punkte jener Configuration allineirten Punkten eine σ_n herstellen.

9. Entfernt man aus σ_{2p} die Punkte

$$12,\quad 34,\quad 56,\ \ldots,\ 2i-1.2i,\ \ldots,\ 2p-1.2p,$$
$$(12),\ (34),\ (56),\ \ldots,\ (2i-1.2i),\ \ldots,\ (2p-1.2p)$$

nebst den nach ihnen zielenden Configurationsgeraden, so erübrigt eine Configuration

$$\left(8\binom{p}{2}_{4(p-2)},\ 32\binom{p}{3}_3\right).$$

10. Werden aus einer σ_{np} die p „zahlenfremden" σ_n fortgelassen, so entsteht eine Configuration

$$\left(2n^2\binom{p}{2}_{2n(p-2)},\ 4n^3\binom{p}{3}_3\right).$$

11. Es bedeute (1234) die mit Hilfe dieser vier Zahlen dargestellte σ_4. Wenn nun $n \equiv 1$ oder 4 (mod 12), so lassen sich die Zahlen von 1 bis n in Quadrupel anordnen von denen keine zwei mehr als eine Zahl gemein haben, wonach die durch jene Quadrupel bezeichneten σ_4 vollständig getrennt liegen. (Ein Verfahren zur Herstellung solcher Tabellen findet man Math. Ann. l. c. S. 240). Hieraus schliesst man:

12. Durch Entfernung sämmtlicher Geraden einer Gruppe von $\frac{1}{12} n(n-1)$ gegenseitig getrennten σ_4 erhält man aus σ_n, wo $n \equiv 1$ oder 4 (*mod* 12) sein muss, eine Configuration

$$\left(2\binom{n}{2}_{2(n-4)},\ \tfrac{4}{3}\binom{n}{2}(n-4)_3\right).$$

13. Lässt man aus jeder dieser σ_4 nur ein Hauptvierseit (vier getrennte Gerade) fort, so ergiebt sich eine Configuration:

$$\left(2\binom{n}{2}_{2n-5},\ \tfrac{2}{3}\binom{n}{2}(2n-5)_3\right).$$

14. Werden von der obenerwähnten, aus cubischen Curven zusammengesetzten Configuration die um jene $\frac{1}{12} n(n-1)$ getrennte σ_4 beschriebene zweitheilige, C_3 ausgeschieden, so entsteht eine cubische Configuration

$$\left(2\binom{n}{2}_{\frac{1}{2}(n-1)(n-4)},\ \tfrac{1}{12}(n-1)(n-4)\binom{n}{2}_{12}\right).$$

Allgemein gilt der Satz:

15. Wenn $n-1$ ein Vielfaches von $p-1$ und zugleich $n(n-1)$ durch $p(p-1)$ theilbar ist, gestattet σ_n die Aufstellung von „Haupt-σ_p-Gruppen", d. h. Gruppen gegenseitig getrennter Configurationen σ_p, welche zusammen sämmtliche Punkte der σ_n enthalten. Durch Entfernung der Configurationsgeraden aus allen σ_p einer solchen Gruppe erhält man eine Configuration

$$\left(2\binom{n}{2}_{2(n-p)},\ \tfrac{4}{3}(n-p)\binom{n}{2}_3\right).$$

16. In (1234) bilden die Geraden

12(3)	12(4)
14(2)	14(3)
13(4)	13(2)

die Restfigur der 234. Betrachtet man sie als Seiten des Sechsecks 12, (24), (12), 13, (34), (13), so erhellt, dass die Hauptdiagonalen $\overline{12,\,13}$, $\overline{(24)(34)}$, $\overline{(12)(13)}$ nach 23 zielen. D. h.: jene sechs Geraden umhüllen einen Kegelschnitt C^2; die 16 Geraden der σ_4 bilden demnach mit 16 C^2 eine Configuration 16_6. Die reciproke Figur σ^4 der Configuration σ_4 liefert daher eine aus 16 Punkten und 16 C_2 zusammengesetzte Configuration 16_6. Für die reciproke Figur der σ_n ergiebt sich somit:

17. Die $4\binom{n}{3}$ Punkte der Configuration $\sigma^n \equiv \left(4\binom{n}{3}_3,\ 2\binom{n}{2}_{2(n-2)}\right)$ bilden mit $16\binom{n}{4}$ Kegelschnitten eine Configuration $\left(4\binom{n}{3}_{6(n-3)},\ 16\binom{n}{4}_6\right)$.

Kampen, 8. October 1889. Jan de Vries.

IV.

Ueber die Bewegung eines starren ebenen Systems in seiner Ebene.

Von

Dr. R. Mehmke,

Professor an der techn. Hochschule zu Darmstadt.

(Schluss.)

---

§ 19. Zusammenstellung.

Bedeutung der Zahl $\varkappa$: Ordnung der Winkelgeschwindigkeit niedrigster Ordnung des Systems, welche nicht verschwindet.

A. Pol im Endlichen.

Zeichen der augenblicklichen Berührungsstellen der Polcurven:

$$(\lambda,\ \lambda+\mu) \text{ und } (\lambda,\ \lambda+\underset{\cdot}{\mu}).$$

Bedingung: Sind μ und $\underset{\cdot}{\mu}$ ungleich, so ist $\varkappa$ gleich der kleineren dieser Zahlen; wenn $\mu=\underset{\cdot}{\mu}$, so ist $\varkappa \geqq \mu$.

1. Die gewöhnlichen Systempunkte beschreiben Curvenstellen
mit dem Zeichen $(\varkappa,\ 2\varkappa)$ (Krümmung endlich, nicht Null), wenn $\varkappa \leqq \lambda$;
„ „ „ $(\varkappa,\ \varkappa+\lambda)$ (Krümmung unendlich), wenn $\varkappa > \lambda$.

2. Der gerade im Pol befindliche Systempunkt beschreibt eine Curvenstelle
mit dem Zeichen $(\varkappa+\lambda,\ \varkappa+\lambda+\underset{\cdot}{\mu})$, wenn $\underset{\cdot}{\mu} < \varkappa$;
„ „ „ $(\varkappa+\lambda,\ 2\varkappa+\lambda+\nu)$, „ $\underset{\cdot}{\mu} = \varkappa$ (ν Bedingungen, $\nu \geqq 0$);
„ „ „ $(\varkappa+\lambda,\ 2\varkappa+\lambda)$, „ $\underset{\cdot}{\mu} > \varkappa$.

Die Krümmung ist im ersten und dritten Falle unendlich, im zweiten Falle $\left\{\begin{array}{l}\text{unendlich,}\\ \text{endlich, nicht Null,}\\ \text{Null,}\end{array}\right\}$ je nachdem $\lambda \gtreqless \nu$.

3. Die von sämmtlichen Ausnahmepunkten erfüllte Ausnahmelinie
zieht sich auf den Pol zusammen, wenn $\varkappa < \lambda$;
besteht in dem Kreise $K_{2\varkappa}$, „ $\varkappa = \lambda$;
„ in der gemeinsamen Tangente der Polcurven, „ $\varkappa > \lambda$.

4. Die vom Pole verschiedenen Ausnahmepunkte beschreiben (in gewissen Fällen mit Ausnahme eines einzigen, S. 5):

a) falls $\varkappa = \lambda$,

Curvenstellen mit dem Zeichen $(\varkappa, 2\varkappa + 1 + \varrho)$;
Krümmung Null, ϱ Bedingungen $(\varrho \geqq 0)$;

[es muss sein $\varrho < \underset{\cdot}{\mu}$, wenn $\underset{\cdot}{\mu} < \varkappa$;
" " " $\varrho < \varkappa$, " $\underset{\cdot}{\mu} > \varkappa$;
es ist ϱ beliebig, " $\underset{\cdot}{\mu} = \varkappa$,
im letzten Falle $(\varrho + 1 - \varkappa)$ besondere Bedingungen, wenn $\varrho \geqq \varkappa$];

b) falls $\varkappa > \lambda$,

Curvenstellen mit dem Zeichen $(\varkappa, 2\varkappa)$ (Krümmung endlich, nicht Null), wenn $\varkappa \leqq \lambda + \underset{\cdot}{\mu}$;
" " " " $(\varkappa, \varkappa + \lambda + \underset{\cdot}{\mu})$ (Krümmung unendlich), wenn $\varkappa > \lambda + \underset{\cdot}{\mu}$.

5. Ein besonderer Ausnahmepunkt ist vorhanden:

a) wenn $\varkappa = \lambda$,

für $\underset{\cdot}{\mu} < \varkappa$, $\varrho = \underset{\cdot}{\mu} - 1$; Zeichen: $(\varkappa, 2\varkappa + 1 + \underset{\cdot}{\mu} + \sigma)$,
" $\underset{\cdot}{\mu} \geqq \varkappa$, $\varrho = \dot{\varkappa} - 1$; " $(\varkappa, 3\varkappa + 1 + \sigma)$,
" $\underset{\cdot}{\mu} = \varkappa$, $\varrho \geqq \varkappa$; " $(\varkappa, 2\varkappa + 2 + \varrho + \sigma)$,
Krümmung Null; ausser den ϱ früheren noch σ besondere Bedingungen; $\sigma \geqq 0$;

[im letzten Falle $(\varrho + 1 - \varkappa)$ besondere Bedingungen];

b) wenn $\varkappa > \lambda$, für

$\varkappa = \lambda + \underset{\cdot}{\mu}$; Zeichen: $(\varkappa, 2\varkappa + 1 + \sigma)$, Krümmung Null, σ Bedingungen, $\sigma \geqq 0$.

Obiges bezieht sich auf die ursprüngliche Bewegung. Will man zur umgekehrten übergehen, so ist μ durch $\underset{\cdot}{\mu}$ zu ersetzen.

B. Pol unendlich fern.

Bedeutung der Zahl ι: Ordnung der Geschwindigkeit niedrigster Ordnung irgend eines Systempunktes, welche nicht verschwindet. $\iota < \varkappa$.

1. Fall. Alle Systempunkte beschreiben Curvenstellen mit dem Zeichen (ι, ϱ), mit $\varrho < \varkappa$. Die Krümmung kann jeden Werth haben.

2. Fall. Alle Systempunkte, mit Ausnahme der auf der Geraden $G_\varkappa$ befindlichen, beschreiben Curvenstellen mit dem Zeichen $(\iota, \varkappa)$. Die Krümmung kann jeden Werth annehmen. Die Ausnahmepunkte beschreiben (in einem gewissen Falle mit Ausnahme eines einzigen) Curvenstellen mit dem Zeichen $(\iota, \varkappa + 1 + \varrho)$. ϱ Bedingungen, $0 \leqq \varrho < \varkappa$. Die Krümmung ist in ihrem Werthe nicht beschränkt. Ein besonderer Ausnahmepunkt vorhanden, wenn $\varrho = \varkappa - 1$. Zeichen der von ihm beschriebenen Curvenstelle: $(\iota, 2\varkappa + 1 + \sigma)$; σ besondere Bedingungen, $\sigma \geqq 0$; Krümmung Null.

§ 20. Bestimmung der Zahl $\varkappa$.

Die Zahl $\varkappa$ hängt auf's Engste mit der Ordnung der Berührung, sie heisse ω, zusammen, welche die Polcurven in ihrem augenblicklichen, d. h.

zu $t=0$ gehörigen Berührungspunkte darbieten. Nach Möbius* kann für zwei sich in a berührende Curven die Ordnung der Berührung auf folgende Weise bestimmt werden. Man nimmt auf den Curven zwei beliebige Punkte b und c in unendlicher Nähe des Berührungspunktes an. Ihre Verbindungslinie schneide die gemeinsame Tangente beider Curven in d. Wird ad unendlich klein erster Ordnung gesetzt, so ist die um 1 verminderte Ordnung der unendlich kleinen Strecke bc gleich der gesuchten Ordnung der Berührung. In unserem Falle ist $a = p = \underset{\cdot}{p}$. Man wähle auf den Polcurven die zu demselben unendlich kleinen t gehörigen Punkte $b = p(t)$ und $c = \underset{\cdot}{p}(t)$. Nun ist

$$p(t) - p = \frac{t^\lambda}{\lambda!}(p^{(\lambda)}) + \frac{t^{\lambda+1}}{(\lambda+1)!}(p^{(\lambda+1)}) + \cdots + \frac{t^{\lambda+\varkappa}}{(\lambda+\varkappa)!}(p^{(\varkappa+\lambda)}) + \cdots$$

und wegen 22):

$$\underset{\cdot}{p}(t) - p = \frac{t^\lambda}{\lambda!}(p^{(\lambda)}) + \frac{t^{\lambda+1}}{(\lambda+1)!}(p^{(\lambda+1)}) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{t^{\varkappa+\lambda}}{(\varkappa+\lambda)!}\left\{p^{(\varkappa+\lambda)} - \binom{\lambda+\varkappa-1}{\varkappa} i w^{(\varkappa)}(p^{(\lambda)})\right\} + \cdots$$

Daher wird:

$$p(t) - \underset{\cdot}{p}(t) = \frac{t^{\varkappa+\lambda}}{(\lambda+\varkappa)!}\binom{\lambda+\varkappa-1}{\varkappa} i w^{(\varkappa)}(p^{(\lambda)}) + \cdots$$

Demnach ist die Strecke bc von derselben Ordnung unendlich klein, wie $t^{\varkappa+\lambda}$. Die Strecke ad, d. h. die schiefe Projection der Strecke ab oder ac auf die Tangente parallel zu bc ist offenbar von derselben Ordnung unendlich klein, wie t^λ. Setzt man also letztere Grösse unendlich klein erster Ordnung, so wird bc unendlich klein von der Ordnung $(\lambda+\varkappa):\lambda$. Folglich ist $\varkappa:\lambda$ die gesuchte Berührungsordnung der Polcurven. Also:

Ist ω die zur augenblicklichen Berührungsstelle der Polcurven gehörige Ordnung der Berührung, so hat man

31) $$\varkappa = \lambda . \omega.$$

Anmerkung. Auf ähnliche Weise, wie aus 22) der vorhergehende, kann aus 21) der folgende Satz abgeleitet werden:

Von den beiden Curvenstellen, die ein beliebiger Systempunkt bei der ursprünglichen und bei der umgekehrten Bewegung in demselben Augenblicke beschreibt, verwandle man die eine in die zu ihr bezüglich jenes Punktes centralsymmetrische Curvenstelle. Wenn letztere mit der unverändert gebliebenen Curvenstelle eine Berührung von der Ordnung $\bar{\omega}$ darbietet, so ist

$$\bar{\omega} = \frac{\varkappa}{\nu},$$

wo ν die Ordnung der niedrigsten von Null verschiedenen Geschwindigkeit des betrachteten Systempunktes bezeichnet.

* Möbius, a. a. O. § 75.

Bei endlichem Pole hat die Zahl ν für den mit dem Pole zusammenfallenden Systempunkt bekanntlich den Werth $(\varkappa+\lambda)$, für alle übrigen Systempunkte den Werth $\varkappa$. Liegt aber der Pol unendlich fern, so ist für alle Systempunkte $\nu=\iota$, also kleiner als $\varkappa$. Man hat somit folgenden merkwürdigen Satz: Die (oben näher bezeichnete) Berührungsordnung $\bar{\omega}$ besitzt bei endlichem Pole für alle Systempunkte den Werth Eins, nur für den Pol selbst ist sie kleiner als Eins. Liegt der Pol unendlich fern, so ist $\bar{\omega}$ bei allen Systempunkten grösser als Eins. Es offenbart sich hier ein bemerkenswerther Unterschied zwischen diesen beiden Fällen der Bewegung eines starren ebenen Systems, dem, wo der Pol im Endlichen, und dem, wo er unendlich fern liegt.

§ 21. Krümmungseigenschaften.

Wenn ein beliebiger Systempunkt x eine Curvenstelle mit dem Zeichen $(n, 2n)$, also endlicher und von Null verschiedener Krümmung beschreibt, so hat man zufolge 7), § 3, für den Krümmungsmittelpunkt m_x jener Curvenstelle die Gleichung

$$m_x - x = -\binom{2n}{n}\frac{(x^{(n)})^2}{2\,\overline{x}^{(2n)}},$$

wo $\overline{x}^{(2n)}$ die Projection der Geschwindigkeit $2n^{\text{ter}}$ Ordnung $x^{(2n)}$ jenes Punktes auf die Normale seiner Bahn bezeichnet.

Es möge jetzt in den verschiedenen Fällen, die man nothwendig unterscheiden muss, der Werth des obigen Ausdrucks bestimmt werden.

A. Der Pol liegt im Endlichen.

1. Der Systempunkt x fällt nicht mit dem Pole zusammen.

Dann ist $n=\varkappa$ und man hat

$$x^{(\varkappa)} = i\,w^{(\varkappa)}(x-p) \quad [\text{vergl. } 24)],$$

$$x^{(2\varkappa)} = i\,w^{(2\varkappa)}(x-p) - \binom{2\varkappa-1}{\varkappa}(w^{(\varkappa)})^2(x-q_{2\varkappa}) \quad [\text{vergl. } 27) \text{ u. } 20)].$$

Die Curvennormale fällt in die Gerade xp. Die Strecke $x^{(2\varkappa)}$ erscheint hier in zwei Componenten zerlegt, von welchen die erste auf xp senkrecht steht, also keinen Beitrag zur Projection $\overline{x}^{(2\varkappa)}$ liefert. Die Projection des Punktes $q_{2\varkappa}$ auf die Linie xp werde mit y bezeichnet. Offenbar liegt dieser Punkt auf dem Kreise $K_{2\varkappa}$, welcher ja $pq_{2\varkappa}$ zum Durchmesser hat. Die Projection der Strecke $xq_{2\varkappa}$ auf xp ist die Strecke yx, also hat man:

$$\overline{x}^{(2\varkappa)} = -\binom{2\varkappa-1}{\varkappa}(w^{(\varkappa)})^2(x-y).$$

Daher wird:

$$m_x - x = -\binom{2\varkappa}{\varkappa}\frac{-(w^{(\varkappa)})^2(x-p)^2}{-2\binom{2\varkappa-1}{\varkappa}(w^{(\varkappa)})^2(x-y)}$$

oder

32) $$m_x - x = \frac{(p-x)^2}{y-x}.$$

Dies ist eine für $\varkappa = 1$ wohlbekannte Beziehung, aus welcher sich die zwischen den Systempunkten x und den zugehörigen Krümmungsmittelpunkten m_x bestehende quadratische Verwandtschaft, die gewöhnlich nach Savary benannte Euler'sche Formel u. s. w. ableiten lassen. Man sieht, dass alle diese, bisher nur für $\varkappa = 1$ bewiesenen Beziehungen allgemein giltig sind, z. B. auch in den Fällen $\varkappa = 2, 4, 6, \ldots$, wo die Systempunkte nicht gewöhnliche Curvenstellen, sondern Schnäbel mit endlicher, von Null verschiedener Krümmung beschreiben. Wie aus der Zusammenstellung in § 19 ersichtlich ist, können (abgesehen vom Pole) die Ausnahmepunkte nur im Falle $\varkappa > \lambda$, in welchem die Ausnahmelinie in der gemeinschaftlichen Tangente der Polcurven besteht, Curvenstellen mit endlicher, nicht verschwindender Krümmung erzeugen. Die gewöhnlichen Systempunkte liefern dann Curvenstellen mit unendlich grosser Krümmung.

2. Der Systempunkt x fällt in den Pol.

Nach § 15 beschreibt der Pol als Systempunkt dann und blos dann eine Curvenstelle mit endlicher, von Null verschiedener Krümmung, wenn $\mu = \varkappa$ ist und λ bestimmte Bedingungsgleichungen erfüllt werden. Man hat für diesen Fall $n = \varkappa + \lambda$ und die Bahnnormale fällt in die gemeinsame Tangente der Polcurven (s. § 9). Gleichung 27) liefert für $x = p$:

$$p^{(n)} = U_n(p - q_n), \quad p^{(2n)} = U_{2n}(p - q_{2n}).$$

Die Projection des Punktes q_{2n} auf die Polcurventangente heisse $\bar{q}$. Dann wird, da U_{2n} reell ist,

$$\bar{p}^{(2n)} = U_{2n}(p - \bar{q}),$$

also erhält man:

$$m_p - p = -\binom{2n}{n} \frac{U_n^2}{U_{2n}} \cdot \frac{(p - q_n)^2}{p - \bar{q}}. \tag{33}$$

Bemerkung. Man scheint bisher allgemein angenommen zu haben, die für beliebige Systempunkte giltigen, auf die Bahnkrümmung bezüglichen Sätze dürften auch auf den Pol angewendet werden. Wenn dies statthaft wäre, dann würde allerdings aus 32) oder aus der Euler'schen Formel folgen, dass der Pol als Systempunkt stets eine Curvenstelle mit dem Krümmungshalbmesser Null erzeugte, wie in allen Lehrbüchern der Kinematik angegeben wird. Da dem aber nicht so ist, so zeigt sich eben, dass die Euler'sche und jede entsprechende Formel in einem Punkte der Ebene, nämlich dem Pole, ihre Giltigkeit verliert.

B. Der Pol liegt unendlich fern.

Man hat jetzt $n = \iota$ und

$$x^{(n)} = a^{(\iota)} = const. \quad \text{(s. §§ 17, 18).}$$

Da $\iota < \varkappa$, so ist $2n < 2\varkappa$, also

$$W_{2n} = iw^{(2\iota)} \quad \text{[Gl. 20)]}$$

und folglich

$$x^{(2n)} = iw^{(2\iota)}(x - p_{2\iota}) \quad \text{[Gl. 29)].}$$

Sei y die Projection des Systempunktes x auf die Gerade $G_{2\iota}$, welche nach § 17 den Punkt $p_{2\iota}$ enthält und auf $a^{(\iota)}$ senkrecht steht. Dann ist xy Tangente der Bahn von x, und weil der obigen Gleichung zufolge $x^{(2n)}$ zur Strecke $\overline{p_{2\iota}x}$ senkrecht ist, so erhält man für die Projection von $x^{(2n)}$ auf die Bahnnormale

$$\overline{x}^{(2n)} = w^{(2\iota)}(x-y).$$

Also wird:

34) $$m_x - x = -\binom{2\iota}{\iota}\frac{(a^{(\iota)})^2}{2\,w^{(2\iota)}}\cdot\frac{1}{x-y}.$$

Es folgt hieraus u. A.: Die Krümmung der von irgend einem Systempunkt beschriebenen Bahnstelle ist dem Abstande des Punktes von der Geraden $G_{2\iota}$ proportional. Systempunkte auf einer und derselben Parallelen zu $G_{2\iota}$ beschreiben also Bahnstellen mit derselben Krümmung. Wenn übrigens die Gerade $G_{2\iota}$ im Unendlichen liegt, was für $2\iota < \varkappa$ immer der Fall ist, so wird auch $x^{(2n)}$ constant und es beschreiben dann alle Systempunkte Curvenstellen mit derselben Krümmung.

III. Beispiele.

§ 22. „Gewöhnlicher" Fall.

Der Fall $\varkappa = \lambda = \mu = \dot{\mu} = 1$, in welchem die Winkelgeschwindigkeit (erster Ordnung) des Systemes nicht Null ist und die Polcurven sich in gewöhnlichen Punkten und zwar in erster Ordnung berühren, darf wohl als der gewöhnliche bezeichnet werden. Schon dieser kann jedoch Besonderheiten zeigen, welche bisher nicht bemerkt worden zu sein scheinen. Die Anwendung der in § 19 zusammengestellten Regeln auf den vorliegenden Fall ergiebt: Die gewöhnlichen Systempunkte beschreiben gewöhnliche Curvenstellen (1, 2). Der Pol als Systempunkt erzeugt im Allgemeinen eine gewöhnliche Spitze (2, 3), dagegen eine Stelle $(2, 3+\nu)$, wenn ν bestimmte Bedingungen erfüllt werden. Die Ausnahmepunkte liegen auf dem Kreise K_2, welcher bekanntlich Wendekreis genannt wird. Abgesehen von den Schnittpunkten mit dem Kreise K_3, durchlaufen die Punkte des Wendekreises für gewöhnlich Wendepunkte (1, 3). Werden aber jene ν Bedingungen und ausserdem noch ϱ gewisse weitere (wo ϱ höchstens gleich ν sein kann) erfüllt, so erhält man Stellen mit dem Zeichen $(1, 3+\varrho)$, also Einseitpunkte oder Wendepunkte, je nachdem ϱ ungerade oder gerade ist. Die Kreise K_2 und K_3 schneiden sich im Pol und in einem davon verschiedenen Punkte. Der letztere beschreibt, wie bekanntlich Ball zuerst bemerkt hat,* gewöhnlich einen sogenannten Flachpunkt oder Undulationspunkt (1, 4). Wenn ausser den schon genannten ν und ϱ Bedingungen (wo jetzt $\varrho = \nu$ sein muss) σ gewisse neue erfüllt werden, wo σ unbeschränkt ist und ν und ϱ auch Null sein können, so liefert jener Ausnahmepunkt eine Stelle

* Vergl. Schönflies, Geometrie der Bewegung, Anm. 7), S. 193.

$(1, 4+\varrho+\sigma)$. Ist z. B. $\nu = 1$, so wird vom Pole eine Stelle $(2, 4)$, also ein Schnabel mit endlicher, nicht verschwindender Krümmung beschrieben. Hat man $\nu = \varrho = 0$, $\sigma = 1$, so beschreibt auch der Ball'sche Punkt, wie (mit Ausnahme des Poles) alle übrigen Punkte des Wendekreises, einen Wendepunkt, aber mit dem Zeichen $(1, 5)$. Ist $\nu = \varrho = 1$, $\sigma = 0$, so durchlaufen die gewöhnlichen Punkte des „Wendekreises" Flachpunkte $(1, 4)$; nur der Ball'sche Punkt, als einziger des ganzen Systems, erzeugt einen Wendepunkt, und zwar mit dem Zeichen $(1, 5)$. Ist $\nu = \varrho = \sigma = 1$, so führt der Wendekreis seinen Namen vollends mit Unrecht; denn abgesehen vom Pole, der einen Schnabel durchläuft, ergeben alle Punkte desselben jetzt Undulationspunkte, so dass überhaupt von keinem einzigen Systempunkte ein Wendepunkt beschrieben wird. Dasselbe ist der Fall, wenn $\nu = 2$, $\varrho = 1$ ist, weil dann K_2 von K_4 berührt wird, also ein Ball'scher Punkt überhaupt nicht besteht.

Der Pol kann Rückkehrpunkte jeglicher Art liefern, mit Ausnahme von Schnäbeln mit unendlicher Krümmung. Ausser den schon erwähnten Fällen $(2, 3)$ und $(2, 4)$ haben wir z. B. für $\nu = 2, 4, 6, \ldots$ Spitzen mit der Krümmung Null, für $\nu = 3, 5, 7, \ldots$ Schnäbel mit der Krümmung Null.

§ 23. Gewöhnlicher Fall (Fortsetzung).

Das vorliegende Beispiel verdient wohl eine genauere Ausführung. Es wird der Allgemeinheit der folgenden Untersuchung keinen Abbruch thun, wenn man annimmt, die Bewegung gehe in der Weise vor sich, dass in gleichen Zeiten gleiche Bögen der Polcurven aufeinander abrollen. Es wird dem in einfachster Weise entsprochen, wenn man t geradezu der Länge des Bogens gleichsetzt, welchen der Pol vom Beginne der Zeitrechnung an bis zum Augenblicke t (sowohl im beweglichen, als im ruhenden Systeme) durchläuft. Bei dieser Annahme werden $(p'(t))$ und $(\underset{\cdot}{p}'(t))$ Strecken von der Länge Eins, so dass man setzen kann

35) $$(p'(t)) = e^{iu(t)}, \quad (\underset{\cdot}{p}'(t)) = e^{i\underset{\cdot}{u}(t)}.$$

Hieraus folgt

$$(p'(t)) = e^{i(u(t)-\underset{\cdot}{u}(t))}(\underset{\cdot}{p}'(t)).$$

Die Vergleichung mit 18) ergiebt

36) $$w(t) = u(t) - \underset{\cdot}{u}(t),$$

woraus durch n-maliges Ableiten nach t und nachheriges Nullsetzen von t erhalten wird

37) $$w^{(n)} = u^{(n)} - \underset{\cdot}{u}^{(n)}.$$

Lässt man die reelle Zahlenaxe, deren positive Richtung beim Messen der Winkel als Anfangsrichtung dient, mit der gemeinschaftlichen Tangente der Polcurven in ihrem zu $t = 0$ gehörigen Berührungspunkte zusammenfallen, so wird $u(0) = 0$, $\underset{\cdot}{u}(0) = 0$ und folglich

$$(p') = 1, \quad (\underset{\cdot}{p}') = 1; \quad (p'') = iu', \quad (\underset{\cdot}{p}'') = i\underset{\cdot}{u}'.$$

Man bezeichne nun mit k die Krümmung der ruhenden, mit $\underset{\cdot}{k}$ die Krümmung der beweglichen Polcurve in ihrem augenblicklichen Berührungspunkte. Dann ergiebt sich aus den vorhergehenden Gleichungen mit Leichtigkeit [etwa mit Hilfe von 7)]

$$38)\qquad k = u', \quad \underset{\cdot}{k} = \underset{\cdot}{u}',$$

und hieraus durch Ableitung nach t und Benützung von 37):

$$39)\qquad u^{(n)} = k^{(n-1)}, \quad \underset{\cdot}{u}^{(n)} = \underset{\cdot}{k}^{(n-1)}, \quad w^{(n)} = k^{(n-1)} - \underset{\cdot}{k}^{(n-1)}.$$

Hier sind also k', k'', ... und $\underset{\cdot}{k}'$, $\underset{\cdot}{k}''$, ... die Ableitungen der Krümmungen k und $\underset{\cdot}{k}$ nach der Bogenlänge. Man hat auf das Vorzeichen von k und $\underset{\cdot}{k}$ zu achten. Diese Grössen sind positiv, wenn die Krümmungsmittelpunkte auf dem positiven Theile der imaginären Axe liegen, also die Richtung vom Pole nach den Krümmungsmittelpunkten aus der Anfangsrichtung (der positiven Richtung der reellen Zahlenaxe) durch Drehung um einen rechten Winkel in positivem Sinne hervorgeht.

Man ist jetzt im Stande, die Fundamentalgrössen W_1, W_2, ...; (p'), (p''), ...; $(\underset{\cdot}{p}')$, $(\underset{\cdot}{p}'')$, ...; p'', p''', ... sämmtlich durch die Grössen k, k', k'', ... und $\underset{\cdot}{k}$, $\underset{\cdot}{k}'$, $\underset{\cdot}{k}''$, ... auszudrücken.

Was die Grössen W_1, W_2, ... betrifft, so kann man dieselben entweder durch Einsetzen der Werthe von w', w'', ... aus 39) in 14) erhalten, oder man kann sich bei ihrer Berechnung der aus 12) und 39) abgeleiteten Recursionsformel bedienen:

$$40)\qquad W_{n+1} = W'_n + i(k - \underset{\cdot}{k})\, W_n.$$

Es ist z. B.

$$41)\quad \left\{\begin{aligned}
W_1 &= i(k-\underset{\cdot}{k}),\\
W_2 &= -(k-\underset{\cdot}{k})^2 + i(k'-\underset{\cdot}{k}'),\\
W_3 &= -3(k-\underset{\cdot}{k})(k'-\underset{\cdot}{k}') + i\{(k''-\underset{\cdot}{k}'') - (k-\underset{\cdot}{k})^3\};\\
W_4 &= -4(k-\underset{\cdot}{k})(k''-\underset{\cdot}{k}'') - 3(k'-\underset{\cdot}{k}')^2 + (k-\underset{\cdot}{k})^4\\
&\quad + i\{(k'''-\underset{\cdot}{k}''') - 6(k-\underset{\cdot}{k})^2(k'-\underset{\cdot}{k}')\},\\
W_5 &= -5(k-\underset{\cdot}{k})(k'''-\underset{\cdot}{k}''') - 10(k'-\underset{\cdot}{k}')(k''-\underset{\cdot}{k}'') + 10(k-\underset{\cdot}{k})^3(k'-\underset{\cdot}{k}')\\
&\quad + i\{(k''''-\underset{\cdot}{k}'''') - 10(k-\underset{\cdot}{k})^2(k''-\underset{\cdot}{k}'') - 15(k-\underset{\cdot}{k})(k'-\underset{\cdot}{k}')^2 + (k-\underset{\cdot}{k})^5\}
\end{aligned}\right.$$

u. s. w.

Durch ein Verfahren ähnlich demjenigen, mittels dessen Gleichung 14) aus 8) abgeleitet worden ist, erhält man aus 35) bei Benützung von 39)

$$42)\quad (p^{(n+2)}) = i^{n+1} \begin{vmatrix}
k & \binom{n}{1}k' & \binom{n}{2}k'' & \dots & \binom{n}{1}k^{(n-1)} & k^{(n)}\\
i & k & \binom{n-1}{1}k' & \dots & \binom{n-1}{1}k^{(n-2)} & k^{(n-1)}\\
0 & i & k & \dots & \binom{n-2}{1}k^{(n-3)} & k^{(n-2)}\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
0 & 0 & 0 & \dots & i & k
\end{vmatrix}.$$

Z. B.:

$$
\begin{aligned}
(p'') &= ik,\\
(p''') &= -k^2 + ik',\\
(p'''') &= -3kk' + i(k'' - k^3),\\
(p^{\mathrm{V}}) &= -4kk'' - 3k'k' + k^4 + i(k''' - 6k^2k'),\\
(p^{\mathrm{VI}}) &= -5kk''' - 10k'k'' + 10k^3k' + i(k'''' - 10k^2k'' - 15kk'k'' + k^5)
\end{aligned}
$$

u. s. w.

Den entsprechenden Ausdruck für $(\underset{\cdot}{p}^{(n+2)})$ erhält man natürlich, wenn man in 42) die Grössen k, k', k'', ... durch $\underset{\cdot}{k}$, $\underset{\cdot}{k}'$, $\underset{\cdot}{k}''$, ... ersetzt. Es besteht auch eine 12) oder 40) analoge Recursionsformel, die sehr leicht aus 35) und 38) abgeleitet werden kann, nämlich

43) $$(p^{(n+1)}) = (\underset{\cdot}{p}^{(n)})' + ik(p^{(n)}).$$

Man hat nun die Geschwindigkeiten höherer Ordnung des im Pol befindlichen Systempunktes zu berechnen, zu welchem Zwecke man für die W_n und $(\underset{\cdot}{p}^{(n)})$ die gefundenen Werthe in 17) einsetzen könnte. Es ist jedoch bequemer, eine Recursionsformel zu benützen, welche jetzt entwickelt werden soll. Durch Ableitung nach t erhält man aus 17) unter Berücksichtigung von 40) und 43):

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} p^{(n+1)} &= -\sum_{l=0}^{n-1} \binom{n}{l} W'_{l+1} (\underset{\cdot}{p}^{(n-l)})\\
&\quad -\sum_{l=0}^{n-1} \binom{n}{l} W_{l+1} (\underset{\cdot}{p}^{(n-l)})'\\
&= -\sum_{l=0}^{n-1} \binom{n}{l} \left(W_{l+2} - i(k - \underset{\cdot}{k})\, W_{l+1}\right) (\underset{\cdot}{p}^{(n-l)})\\
&\quad -\sum_{l=0}^{n-1} \binom{n}{l} W_{l+1} \left((\underset{\cdot}{p}^{(n-l+1)}) - i\underset{\cdot}{k} (\underset{\cdot}{p}^{(n-l)})\right)\\
&= -ik \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n}{l} W_{l+1} (\underset{\cdot}{p}^{(n-l)}) - W_1 (\underset{\cdot}{p}^{(n+1)})\\
&\quad -\sum_{l=1}^{n-1} \left(\binom{n}{l-1} + \binom{n}{l}\right) W_{l+1} (\underset{\cdot}{p}^{(n+1-l)})\\
&= -ik\, p^{(n+1)} - \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n+1}{l} W_{l+1} (\underset{\cdot}{p}^{(n+1-l)})\\
&= -ik\, p^{(n+1)} + p^{(n+2)} + W_{n+1} (\underset{\cdot}{p}').
\end{aligned}
$$

Ersetzt man hierin $(n+1)$ durch n, so ergiebt sich, da $(\underset{\cdot}{p}') = 1$,

44) $$p^{(n+1)} = \frac{d}{dt} \cdot p^{(n)} + ik\, p^{(n)} - W_n.$$

Mittels dieser Formel erhält man z. B.:

$$
45)\quad \left\{\begin{aligned}
-p'' &= i(k-\underset{\cdot}{k}),\\
-p''' &= -(k-\underset{\cdot}{k})(2k-\underset{\cdot}{k})+2i(k'-\underset{\cdot}{k}'),\\
-p'''' &= -3(2k-\underset{\cdot}{k})(k'-\underset{\cdot}{k}')-(k-\underset{\cdot}{k})(3k'-2\underset{\cdot}{k}')\\
&\qquad +i\{3(k''-\underset{\cdot}{k})-k(k-\underset{\cdot}{k})(2k-\underset{\cdot}{k}'')-(k-\underset{\cdot}{k})^2\},\\
-p^{\mathrm{V}} &= (2k-\underset{\cdot}{k})\{(k-\underset{\cdot}{k})(k^2+(k-\underset{\cdot}{k})^2)-6(k''-\underset{\cdot}{k}'')\}\\
&\qquad -4(k'-\underset{\cdot}{k}')(3k'-2\underset{\cdot}{k})-(k-\underset{\cdot}{k})(4k''-3\underset{\cdot}{k}'')\\
&\qquad +i\{4(k'''-\underset{\cdot}{k}''')-4k(2k-\underset{\cdot}{k})(k'-\underset{\cdot}{k}')-9(k-\underset{\cdot}{k})^2(k'-\underset{\cdot}{k}')\\
&\qquad\qquad -(k-\underset{\cdot}{k})(2k-\underset{\cdot}{k})k'-k(k-\underset{\cdot}{k})(5k'-3\underset{\cdot}{k}')\}
\end{aligned}\right.
$$

u. s. w.

Anmerkung. Für die Grössen $p^{(n)}$ giebt es noch eine andere Darstellung. Man differentiire die Gleichung $x' = iw'(x-p)$ n-mal nach t, wobei zu beachten ist, dass die Ableitungen von p die Wechselgeschwindigkeiten des Poles vorstellen, also eingeklammert werden müssen, und setze dann $x = p$. Man erhält

$$p^{(n+1)} = i\sum_{l=0}^{n-1}\binom{n}{l}w^{(l+1)}\left(p^{(n-l)}-(p^{(n-l)})\right).$$

Denkt man sich die entsprechenden Gleichungen für $p^{(n)}, p^{(n-1)}, \ldots, p''$ hingeschrieben und eliminirt man aus denselben die Differenzen $p^{(n)}-(p^{(n)})$, $p^{(n-1)}-(p^{(n-1)})$, ..., $p''-(p'')$, so erhält man, da $(p')=1$,

$$
46)\qquad -p^{(n+1)} = i^n\begin{vmatrix}
w' & \binom{n}{1}w'' & \binom{n}{2}w''' & \ldots & \binom{n}{2}w^{(n-1)} & \binom{n}{1}w^{(n)}\\
i & w' & \binom{n-1}{1}w'' & \ldots & \binom{n-1}{2}w^{(n-2)} & \binom{n-1}{1}w^{(n-1)}-i(p)^{(n-1)}\\
0 & i & w' & \ldots & \binom{n-2}{2}w^{(n-3)} & \binom{n-2}{1}w^{(n-2)}-i(p)^{(n-2)}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \ldots & i & w'-i(p')
\end{vmatrix}.
$$

Für die $w', w'', \ldots$ können ihre Werthe aus 39) eingesetzt werden.

Es erübrigt schliesslich noch, auch die $q_2, q_3, \ldots$ durch $k, k', k'', \ldots$ und $\underset{\cdot}{k}, \underset{\cdot}{k}', \underset{\cdot}{k}'', \ldots$ auszudrücken.

Weil der Pol zum Nullpunkt genommen worden, also $p = 0$ ist, so folgt aus 26)

$$q_n = -\frac{p^{(n)}}{U_n},$$

wo U_n den reellen Theil von W_n bedeutet. Die Werthe für $p^{(n)}$ und U_n sind den Gleichungen 41) und 45) zu entnehmen. Man hat z. B.

$$
47)\quad \left\{\begin{aligned}
q_2 &= -\frac{i}{k-\underset{\cdot}{k}},\quad q_3 = \frac{-(k-\underset{\cdot}{k})(2k-\underset{\cdot}{k})+2i(k'-\underset{\cdot}{k}')}{-3(k-\underset{\cdot}{k})(k'-\underset{\cdot}{k}')},\\
q_4 &= \frac{-3(2k-\underset{\cdot}{k})(k'-\underset{\cdot}{k}')-(k-\underset{\cdot}{k})(3k'-2\underset{\cdot}{k}')}{-4(k-\underset{\cdot}{k})(k''-\underset{\cdot}{k}'')-3(k'-\underset{\cdot}{k}')^2+(k-\underset{\cdot}{k})^4}\\
&\quad + i\,\frac{3(k''-\underset{\cdot}{k}'')-k(k-\underset{\cdot}{k})(2k-\underset{\cdot}{k})-(k-\underset{\cdot}{k})^3}{-4(k-\underset{\cdot}{k})(k''-\underset{\cdot}{k}'')-3(k'-\underset{\cdot}{k}')^2+(k-\underset{\cdot}{k})^4}
\end{aligned}\right.
$$

u. s. w.

§ 24. Gewöhnlicher Fall (Schluss).

Mittels der im vorhergehenden Paragraphen entwickelten Formeln sollen nun die Bedingungen aufgestellt werden, die erfüllt sein müssen, damit die in § 22 angegebenen Besonderheiten sich zeigen. Fragen wir zuerst, wann der Ball'sche Punkt einen Wendepunkt (1, 5) statt eines Flachpunktes (1, 4) beschreibt. Dazu ist nöthig, dass die Kreise K_2, K_3, K_4 sich ausser in p in einem einzigen Punkte schneiden, oder die Punkte q_2, q_3, q_4, die Endpunkte der von p ausgehenden Durchmesser dieser Kreise, in einer Geraden liegen. Schreibt man unter Benützung von 47) die aus der analytischen Geometrie bekannte Bedingung hierfür an, indem man die reelle und imaginäre Zahlenaxe zu Axen eines gewöhnlichen Coordinatensystems nimmt, so ergiebt sich

$$
48)\quad k(k-\underset{\cdot}{k})(2k-\underset{\cdot}{k})^2-(k'-\underset{\cdot}{k}')(3k'-2\underset{\cdot}{k}')+(2k-\underset{\cdot}{k})(k''-\underset{\cdot}{k}'')=0.
$$

Wann berühren die Kreise K_3, K_4, K_5, ... den Wendekreis K_2? Hierzu ist erforderlich, dass die Strecken p''', p'''', p^{V}, ... zu p'' parallel sind oder, da p'' rein imaginär ist, dass die reellen Theile der jene Strecken darstellenden complexen Zahlen verschwinden. Die Gleichungen 45) zeigen, dass dies geschieht, wenn

$$
49)\qquad 2k-\underset{\cdot}{k}=0,\quad 3k'-2\underset{\cdot}{k}'=0,\quad 4k''-3\underset{\cdot}{k}''=0,\quad \ldots^{*}
$$

Werden ν aufeinander folgende dieser Gleichungen erfüllt, so beschreibt der im Pol befindliche Systempunkt eine Stelle $(2, 3+\nu)$. Man hat weiter zu fragen, wann die Kreise K_3, K_4, ..., $K_{2+\varrho}$ ganz mit dem Wendekreise zusammenfallen. Dann und nur dann, wenn die Punkte q_3, q_4, ... mit q_2 zusammenfallen. Werden bereits die ν ersten der Bedingungen 49) befriedigt, wo $\nu \overline{\overline{>}} \varrho$, so vereinfachen sich die Ausdrücke für die q_n zu den folgenden:

$$
\begin{aligned}
q_2 &= \frac{i}{k},\quad q_3 = \frac{2i}{3k}\,\frac{k'-\underset{\cdot}{k}'}{k'-\underset{\cdot}{k}'},\\
q_4 &= i\,\frac{3(k''-\underset{\cdot}{k}'')+k^3}{4k(k''-\underset{\cdot}{k}'')-3(k'-\underset{\cdot}{k}')^2+k^4},\\
q_2 &= i\,\frac{4(k'''-\underset{\cdot}{k}''')-9k^2(k'-\underset{\cdot}{k}')+k^2(2k'-\underset{\cdot}{k}')}{5k(k'''-\underset{\cdot}{k}''')-10(k'-\underset{\cdot}{k}')(k''-\underset{\cdot}{k}'')-10k^3(k'-\underset{\cdot}{k}')}
\end{aligned}
$$

u. s. w.

---

* Für das in diesen Gleichungen sich unzweideutig offenbarende Gesetz habe ich noch keinen directen Beweis gefunden.

Indem man q_2 der Reihe nach q_3, q_4, q_5, ... gleich setzt, erhält man die Bedingungen

50) $$k' - \underset{\cdot}{k}' = 0, \quad k'' - \underset{\cdot}{k}'' = 0, \quad k''' - \underset{\cdot}{k}''' = 0, \quad \ldots$$

Bei der Aufstellung dieser Gleichungen ist übrigens schon berücksichtigt, dass das gleichzeitige Bestehen der zweiten Bedingung 49) und der ersten Bedingung 50) $k' = 0$, $\underset{\cdot}{k}' = 0$ erfordert u. s. w. In der That können die Systeme 49) und 50) durch ein neues ersetzt werden, was der folgende Satz zum Ausdruck bringt:

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die Kreise K_3, K_4, ..., $K_{2+\varrho}$ mit dem Wendekreise zusammenfallen, also die Punkte des Wendekreises (mit Ausnahme seiner Schnittpunkte mit $K_{2+\varrho+1}$) Stellen mit dem Zeichen $(1, 3+\varrho)$ beschreiben, sind

51) $$\begin{gathered} 2k - \underset{\cdot}{k} = 0; \\ k' = 0, \quad \underset{\cdot}{k}' = 0, \quad k'' = 0, \quad \underset{\cdot}{k}'' = 0, \quad \ldots, \quad k^{(\varrho-1)} = 0, \quad \underset{\cdot}{k}^{(\varrho-1)} = 0; \\ k^{(\varrho)} - \underset{\cdot}{k}^{(\varrho)} = 0. \end{gathered}$$

Man findet leicht, dass unter der Bedingung $2k - \underset{\cdot}{k} = 0$ der Wendekreis mit dem Krümmungskreise der beweglichen Polcurve zusammenfällt. Denn wenn $\underset{\cdot}{\varrho}$ den Krümmungshalbmesser der letzteren bezeichnet, so erhält man für den Durchmesser des Wendekreises

$$|q_2 - p| = \frac{1}{k} = 2\underset{\cdot}{\varrho}.$$

Wenn $2k - \underset{\cdot}{k} = 0$, $k' - \underset{\cdot}{k}' = 0$, also die Kreise K_2 und K_3 ganz zusammenfallen, so findet man als Bedingung dafür, dass K_5 durch die Schnittpunkte von K_2 und K_4 geht:

52) $$2k^2 k' \underset{\cdot}{k}' + (k'' - \underset{\cdot}{k}'')(4k'' - 3\underset{\cdot}{k}'') - k'(k''' - \underset{\cdot}{k}''') = 0.$$

Es mögen zum Schlusse die einfachsten, auf $\nu = 1$, $\varrho = 1$ bezüglichen Ergebnisse noch einmal zusammengestellt werden.

Wenn eine Curve innerhalb einer zweiten rollt und in dem augenblicklichen Berührungspunkte p der Krümmungskreis der rollenden Curve halb so gross als derjenige der festen ist, so fällt der Wendekreis des bewegten Systems mit dem Krümmungskreise der rollenden Curve zusammen. Falls nicht $3k' = 2\underset{\cdot}{k}'$ ist, wo k und $\underset{\cdot}{k}$ die Krümmungen der festen und der bewegten Curve im Berührungspunkte, k' und $\underset{\cdot}{k}'$ deren Ableitungen nach der Bogenlänge bedeuten, so beschreibt p einen Schnabel mit der endlichen, nicht verschwindenden Krümmung $(3k' - 2\underset{\cdot}{k}') : 6k$. [Letzteren Werth findet man leicht aus 7) und 45)]. Ist noch $k' = \underset{\cdot}{k}'$, so durchlaufen alle Punkte des Wendekreises, mit Ausnahme des Poles und eines gewissen andern, welcher „Ball'scher Punkt" genannt werden möge, in ihren Bahnen nicht Wendepunkte, sondern Undulationspunkte. Der Ball-sche Punkt ist der einzige im ganzen Systeme, der einen Wendepunkt beschreibt. Ist aber noch die Bedingung

$$2k^2 k' \underset{\cdot}{k}' + (k'' - \underset{\cdot}{k}')(4k'' - 3\underset{\cdot}{k}'') - k'(k''' - \underset{\cdot}{k}''') = 0$$

erfüllt, so durchläuft auch der Ball'sche Punkt einen Undulationspunkt auf seiner Bahn, so dass kein einziger Systempunkt einen Wendepunkt erzeugt. Ist p für beide gegebene Curven ein Scheitel, also $k' = 0$, $\underset{\cdot}{k}' = 0$, so beschreibt p eine Spitze mit der Krümmung Null, vorausgesetzt, dass $(4k - 3\underset{\cdot}{k}')$ nicht verschwindet, und ein Ball'scher Punkt ist nicht vorhanden.

Anmerkung. Dass alle Punkte eines Kreises, der innerhalb eines doppelt so grossen rollt, gerade Linien beschreiben müssen, ergiebt sich aus unserer allgemeinen Theorie folgendermassen: Da die Polcurven in diesem Falle constante Krümmung haben, also die sämmtlichen Ableitungen von k und $\underset{\cdot}{k}$ verschwinden, so sind die Bedingungen 49) und 51) für beliebig hohes ν und ϱ erfüllt und es beschreibt folglich der Pol gewissermassen eine Stelle $(2, \infty)$, jeder andere Punkt des Wendekreises, der ja mit dem rollenden einerlei ist, eine Stelle $(1, \infty)$, welche Stellen man leicht als Geraden deutet.

§ 25. Beispiel 2. $\varkappa > \lambda + \underset{\cdot}{\mu}$.

Der in der Ueberschrift genannte Fall ist ein sehr eigenartiger; zudem begreift er zahllose Einzelfälle in sich. Aus der obigen Bedingung geht hervor, dass $\varkappa > \lambda$, $\underset{\cdot}{\mu} < \varkappa$ und daher $\mu = \underset{\cdot}{\mu}$ ist. Zufolge § 19 hat man demnach:

Die Ausnahmepunkte liegen auf der gemeinsamen Tangente der Polcurven. Die gewöhnlichen Systempunkte beschreiben Stellen $(\varkappa, \varkappa + \lambda)$, die Ausnahmepunkte solche mit dem Zeichen $(\varkappa, \varkappa + \lambda + \mu)$, mit Ausnahme des Poles, von welchem eine Stelle $(\varkappa + \lambda, \varkappa + \lambda + \mu)$ beschrieben wird. Einen Sonderausnahmepunkt giebt es nicht. Jeder Systempunkt ohne Ausnahme durchläuft eine Stelle seiner Bahn mit unendlicher Krümmung. Alles dies gilt auch für die umgekehrte Bewegung. Besonders bemerkenswerth ist der Fall, in welchem $\varkappa$, λ und μ alle drei ungerade sind und demzufolge alle Systempunkte Wendepunkte ihrer Bahnen durchlaufen, sowie der Fall, wo jene drei Zahlen gerade sind, also von sämmtlichen Systempunkten Schnäbel beschrieben werden. Es gehört hierher auch der Fall, dass die Polcurven sich in gewöhnlichen Punkten, aber in höherer als der zweiten Ordnung berühren. Wenn z. B. eine Curve einen Scheitel besitzt, der ein gewöhnlicher Punkt ist, und man den Krümmungskreis in jenem Scheitel auf der Curve rollen lässt, so hat man für die Anfangslage $\lambda = \mu = \underset{\cdot}{\mu} = 1$, $\varkappa = 3$. Also beschreiben die gewöhnlichen Systempunkte Einseitstellen $(3, 4)$, der Pol eine Spitze $(4, 5)$, die übrigen Ausnahmepunkte Wendepunkte $(3, 5)$.

§ 26. Beispiel 3. $\varkappa = \lambda + \dot{\mu}$.

Dieser Fall ist kaum weniger merkwürdig, als der vorhergehende. Auch für ihn hat man $\varkappa > \lambda$, $\dot{\mu} < \varkappa$ und folglich $\dot{\mu} = \mu$. Die gewöhnlichen Systempunkte beschreiben wieder Stellen $(\varkappa, \varkappa + \dot{\lambda})$, der Pol eine Stelle $(\varkappa + \lambda, \varkappa + \lambda + \mu)$, welche alle die Krümmung unendlich haben. Die vom Pole verschiedenen Punkte der gemeinsamen Polcurventangente, bis auf einen, erzeugen aber jetzt Stellen $(\varkappa, 2\varkappa)$, also mit endlicher, von Null verschiedener Krümmung. Der besondere Ausnahmepunkt liefert eine Stelle mit dem Zeichen $(\varkappa, 2\varkappa + 1 + \sigma)$, also der Krümmung Null. Wenn man z. B. einen Krümmungskreis einer Curve, der jedoch zu keinem Scheitel der Curve gehört, auf dieser rollen lässt, so ist für die Anfangslage: $\varkappa = 2$, $\lambda = \mu = \dot{\mu} = 1$. Also beschreiben die gewöhnlichen Systempunkte Spitzen $(2, 3)$, die gewöhnlichen Ausnahmepunkte Schnäbel $(2, 4)$ mit endlicher, nicht verschwindender Krümmung, der Pol einen Einseitpunkt $(3, 4)$ und der Sonderausnahmepunkt einen Rückkehrpunkt $(2, 5 + \sigma)$, der eine Spitze oder ein Schnabel ist, je nachdem σ ungerade oder gerade.

§ 27. Beispiel 4. Eine Gerade rollt auf einer beliebigen Curve.

In diesem Falle muss μ als unendlich gross angesehen werden. Also ist $\mu > \varkappa$ und $\varkappa = \dot{\mu}$. Die Zahlen λ und μ ergeben sich aus dem Zeichen $(\lambda, \dot{\lambda} + \mu)$ der von der bewegten Geraden augenblicklich berührten Stelle der festen Curve. Die allgemeinen Regeln in § 19 führen mit Leichtigkeit zu folgendem Satze: Die Punkte der rollenden Geraden beschreiben stets Curvenstellen mit dem Zeichen $(\varkappa, 2\varkappa)$, also mit endlicher, von Null verschiedener Krümmung — Einseitstellen oder Schnäbel, je nachdem $\varkappa$ ungerade oder gerade ist — mit Ausnahme des augenblicklichen Berührungspunktes p der Geraden mit der festen Curve, von welchem immer eine Stelle $(\varkappa + \lambda, 2\varkappa + \lambda)$, also mit unendlich grosser Krümmung beschrieben wird. Rollt die Gerade über

{ einen Einseitpunkt,
einen Wendepunkt,
eine Spitze,
einen Schnabel, }

so beschreibt p

{ eine Spitze.
einen Wendepunkt.
einen Einseitpunkt.
einen Schnabel. }

Der erste Theil des Satzes bedarf für $\varkappa > \lambda$ vielleicht einer Erklärung. Es ist in diesem Falle die Ausnahmelinie des bewegten Systems mit der rollenden Geraden identisch; die Ausnahmepunkte beschreiben also nach § 19, da sicher $\varkappa < \lambda + \dot{\mu}$ ist, Stellen $(\varkappa, 2\varkappa)$. Ein besonderer Ausnahmepunkt ist nicht vorhanden, d. h. die Gerade wird vom Kreise $K_{2\varkappa}$ in p berührt. Daher fällt in Gleichung 32) y mit p zusammen, weshalb $m_x = p$

wird. Mit anderen Worten, die Krümmungsmittelpunkte aller von den Punkten der Geraden beschriebenen Curvenstellen fallen in p hinein. Dieses für den gewöhnlichen Fall wohlbekannte Resultat gilt also allgemein.

§ 28. Beispiel 5. Alle Systempunkte beschreiben, bei endlichem Pol, gewöhnliche Curvenstellen.

Wenn $\varkappa = 1$, $\lambda = 2$, $\mu = \underset{\cdot}{\mu} = \varkappa$ ist, so durchlaufen nach § 19 die gewöhnlichen Systempunkte gewöhnliche Curvenstellen $(1, 2)$, während von dem gerade im Pol befindlichen Systempunkte, auf welchen der Wendekreis in diesem Falle sich reducirt, eine Stelle $(3, 4+\nu)$ beschrieben wird. Ist also $\nu = 2$, so erhält die vom Pole beschriebene Stelle das Zeichen $(3, 6)$. Eine derartige Stelle unterscheidet sich äusserlich nicht von einer gewöhnlichen — da sie eine Einseitstelle mit endlicher, nicht verschwindender Krümmung ist —, ohne jedoch im Allgemeinen wirklich eine solche zu sein. Es ist deshalb wohl die Frage berechtigt, ob der Fall denkbar ist, dass der Pol als Systempunkt thatsächlich einen gewöhnlichen Punkt seiner Bahn durchschreitet, um so mehr, als ja nach der bisherigen Auffassung, d. h. wenn die Euler'sche (Savary'sche) Formel auf den Pol angewendet werden dürfte, dieser immer eine Stelle mit unendlich grosser Krümmung liefern müsste. Es ist nicht allein diese Frage zu bejahen, man kann sogar unendlich viele Bewegungen angeben, bei welchen derjenige Systempunkt, der im Augenblicke $t = 0$ zum Pole wird, eine beliebig gegebene Curve zur Bahn hat. Der Beweis ist leicht zu führen. Es bezeichne a den in Rede stehenden Systempunkt, der also für $t = 0$ mit p zusammenfällt. Die Curve, welche die Bahn jenes Punktes sein soll, sei zunächst mit Hilfe eines Parameters τ durch die Gleichungen

$$\xi = f(\tau), \quad \eta = g(\tau)$$

dargestellt, wo ξ und η die Coordinaten von a in Bezug auf das durch die reelle und imaginäre Zahlenaxe gebildete Coordinatensystem bedeuten. Dann ist

$$a = \xi + i\eta = f(\tau) + ig(\tau),$$

und wenn man τ gleich irgend einer Function von t setzt, so wird a als Function von t erhalten. Es handelt sich jetzt darum, auch p und $\underset{\cdot}{p}$ als Functionen von t darzustellen, d. h. die Gleichungen der Polcurven zu ermitteln. Man setze zu diesem Zwecke in Gleichung 10) $n = 1$ und p an Stelle von x und bedenke, dass a als Systempunkt sich bewegt, sowie dass der Nullpunkt der Zahlenebene in den Punkt p gelegt worden, also $\underset{\cdot}{a}(t) = const. = \underset{\cdot}{a} = p = 0$ ist. Dann ergiebt sich:

$$-a'(t) = e^{iw(t)}\, iw'(t)\, \underset{\cdot}{p}(t).$$

Daher ist:

$$\underset{\cdot}{p}(t) = \frac{i}{w'(t)} e^{-iw(t)} a'(t). \tag{53}$$

Nach 18) hat man folglich

$$(p'(t)) = e^{i w(t)} (\underset{\cdot}{p}'(t)) = a'(t) + \frac{i}{w'(t)} a''(t),$$

woraus durch Integration zwischen den Grenzen 0 und t erhalten wird:

54) $$p(t) = a(t) + i \int_0^t \frac{a''(t)\, dt}{w'(t)}.$$

Durch die Gleichungen 53) und 54) ist die Aufgabe vollständig gelöst. Man sieht, dass unendlich viele Lösungen vorhanden sind. Denn erstens kann die Function $w'(t)$ beliebig angenommen werden, mit der Beschränkung $w'(0) \gtrless 0$, und ferner ist die Function $a(t)$ keine ganz bestimmte; sie wird es erst, wenn für jeden Augenblick die Geschwindigkeit festgesetzt ist, mit welcher a seine Bahn durchlaufen soll. Eine stets leicht zu erfüllende Bedingung ist noch vorhanden: es muss $a'(0) = p' = 0$ sein. Zur Erläuterung des Vorhergehenden mögen die folgenden Beispiele dienen.

Werde zuerst verlangt, dass a die Parabel

$$\xi = \tau, \quad \eta = \tau^2$$

beschreibt. Man kann τ gleich einer Potenz von t setzen. Der Exponent derselben muss jedoch grösser als Eins sein, damit $a'(0) = 0$ wird, und auch ungerade, weil andernfalls nur die eine Hälfte der Parabel und diese zweimal durchlaufen würde. Die einfachste Annahme ist also $\tau = t^3$. Ueberdies werde der Einfachheit wegen angenommen, die Bewegung erfolge mit einer constanten Winkelgeschwindigkeit gleich Eins. Dann erhält man

$$\begin{aligned} a(t) &= t^3 + i t^6, \\ \underset{\cdot}{p}(t) &= e^{-it}(3it^2 - 6t^5) \\ &= 3t^2 \sin t - 6t^5 \cos t + i(3t^2 \cos t + 6t^5 \sin t), \\ p(t) &= t^3 - 6t^5 + i(3t^2 + t^6). \end{aligned}$$

Also: Wenn die transcendente Curve

$$\xi = 3t^2 \sin t - 6t^5 \cos t, \quad \eta = 3t^2 \cos t + 6t^5 \sin t$$

auf der rationalen Curve sechster Ordnung

$$\xi = t^3 - 6t^5, \quad \eta = 3t^2 + t^6$$

rollt, so durchläuft derjenige Systempunkt, der im Augenblicke $t = 0$ der Pol ist, nämlich die Spitze der rollenden Curve, die Parabel $\eta = \xi^2$.

Soll a eine gerade Linie, etwa die reelle Zahlenaxe, aber vom Nullpunkt aus nach beiden Seiten beschreiben, so kann gesetzt werden:

$$a(t) = t^3, \quad w' = const. = 1, \quad w(t) = t.$$

Dann ergiebt sich:

$$p(t) = 3it^2 e^{-it} = 3t^2 \sin t + 3it^2 \cos t,$$

$$\dot{p}(t) = t^3 + 3it^2.$$

Also: Beim Rollen der Curve

$$\xi = 3t^2 \sin t, \quad \eta = 3t^2 \cos t$$

auf der Curve

$$\xi = t^3, \quad \eta = 3t^2$$

beschreibt die Spitze der ersteren, welche im Augenblicke $t = 0$ zum Pole wird, eine gerade Linie, nämlich die ξ-Axe.

Um die allgemeinste Bewegung zu erhalten, bei der von a eine gerade Linie durchlaufen wird, braucht man nur in den Gleichungen 53) und 54) $a(t)$ gleich einer beliebigen **reellen** Function von t zu setzen, welche der Bedingung $a'(0) = 0$ genügt.

Darmstadt, Anfang April 1889.

Berichtigung. Um hinsichtlich der Bezeichnungen zwischen dem vorliegenden Schlusse und dem in Heft 1 erschienenen Anfange dieser Abhandlung Uebereinstimmung herbeizuführen, ist, wenn man sich den von Burmester wieder aufgenommenen Aronhold'schen Bezeichnungen anschliesst, statt „feste Polcurve" zu setzen „Polbahn", statt „Polcurven" bez. „bewegte und feste Polcurve" aber „Polcurve und Polbahn".

V.

Ueber gewisse homogene quadratische Relationen unter den Integralen einer linearen homogenen Differentialgleichung sechster Ordnung.

Von

Dr. Max Rosenkranz

in Berlin.

In der Theorie der linearen homogenen Differentialgleichungen wird gezeigt, dass die Producte aus den Elementen der Fundamentalsysteme solcher Gleichungen mit eindeutigen Coefficienten ebenfalls einer linearen homogenen Differentialgleichung mit eindeutigen Coefficienten genügen und ein Fundamentalsystem derselben bilden. Es ist einleuchtend, dass unter den Elementen dieses Fundamentalsystems eine bestimmte Anzahl von einander unabhängiger homogener quadratischer Gleichungen bestehen muss von den Formen:

$$u_\varkappa u_\lambda - u_\mu u_\nu = 0,$$
$$u_\lambda^2 - u_\mu u_\nu = 0.$$

Es entsteht daher die Frage, ob man allein aus der Existenz dieser Relationen folgern kann, dass der betrachteten homogenen linearen Differentialgleichung die Producte von Integralen ebensolcher Gleichungen genügen, ob mithin das Bestehen jener homogenen quadratischen Relationen unter den Integralen auch die hinreichende Bedingung für diese Eigenschaft der Differentialgleichung bildet.

Für die Gleichungen dritter Ordnung hat Herr Fuchs[1]) in seinen Untersuchungen über lineare homogene Differentialgleichungen, zwischen deren Integralen homogene Relationen höheren als ersten Grades bestehen, beiläufig gezeigt, dass, wenn eine homogene Gleichung zweiten Grades zwischen ihren Integralen stattfindet, den Differentialgleichungen die Quadrate der Integrale einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügen.

Ferner fand Herr Goursat[2]) bei der Betrachtung homogener quadratischer Beziehungen zwischen den Integralen einer linearen homogenen Differentialgleichung vierter Ordnung zwei Fälle, in denen diese übereinstimmend ist mit derjenigen, welcher die Cuben der Integrale einer solchen zweiter Ordnung, beziehungsweise mit derjenigen, welcher die Producte der Integrale zweier Gleichungen zweiter Ordnung genügen.

Der einzig mögliche Fall bei den Gleichungen fünfter Ordnung findet im Folgenden seine Erledigung. (Vergl. I, Anm. 3.)

---

1) Acta mathematica, Bd. I.

2) Bulletin de la société mathématique de France, t. XI.

Die Untersuchung über die bei den Gleichungen sechster Ordnung sich ergebenden Möglichkeiten wird in der vorliegenden Arbeit vollständig durchgeführt.

Es können derselben genügen:

I. die fünften Potenzen der Integrale einer Gleichung zweiter Ordnung,

II. die Quadrate der Integrale einer Gleichung dritter Ordnung,

III. die Producte der Integrale einer Gleichung zweiter Ordnung und einer solchen dritter Ordnung. Diese kann übereinstimmen mit derjenigen, welche die Quadrate der Integrale einer Gleichung zweiter Ordnung befriedigen. (Vergl. III, Anm. 1.)

Der Zweck der vorliegenden Abhandlung ist, zu zeigen, dass die in jedem einzelnen Falle aufzustellenden homogenen quadratischen Relationen die nothwendige und hinreichende Bedingung für die verlangte Eigenschaft der linearen homogenen Differentialgleichung sechster Ordnung mit eindeutigen Coefficienten sind. Die Coefficienten der zugehörigen Differentialgleichungen zweiter und dritter Ordnung sind ebenfalls stets eindeutige Functionen der unabhängigen Variablen. [Vergl. III, 21) — 23).]

Am Schlusse des ersten Abschnitts findet sich im Anschluss an den zuerst genannten Fall die Betrachtung der homogenen quadratischen Relationen unter den Integralen einer linearen homogenen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung, der die $(n-1)^{\text{ten}}$ Potenzen der Integrale einer solchen zweiter Ordnung genügen.

Die in den Abschnitten II und III benutzte Methode [vergl. II, 9) und 12); III, 11) und 14), 16)] ist allgemein anwendbar bei der Betrachtung von linearen homogenen Differentialgleichungen mit eindeutigen Coefficienten, denen Producte von Potenzen der Integrale einer beliebigen Anzahl von Differentialgleichungen genügen. Allerdings wird, wenn unter den Differentialgleichungen, deren Integrale in gleich hohen Potenzen mit einander combinirt werden, p verschiedene Gleichungen ebenderselben Ordnung sind (welche Möglichkeit bei den zu betrachtenden Gleichungen sechster Ordnung ausgeschlossen ist), die Eindeutigkeit der Coefficienten in den zu erschliessenden Differentialgleichungen im Allgemeinen nicht erhalten bleiben. (Vergl. den zweiten der obenerwähnten Sätze des Herrn Goursat.) Es werden alsdann für die zu den sich ergebenden p Differentialgleichungen gehörigen Gruppen von Quotienten der Integrale des betrachteten Fundamentalsystems verschiedene Arten von Umläufen existiren, welche die für jene p Gruppen typischen Substitutionen unter einander vertauschen.[1]) Die weitere Betrachtung dieses Falles, in welchem die ent-

1) Vergl. Ludwig Schlesinger, Inauguraldissertation Berlin 1887, S. 26. S. auch I, Anm. 4 der vorliegenden Abhandlung.

sprechenden Coefficienten der p Differentialgleichungen Wurzeln algebraischer Gleichungen p^{ten} Grades mit eindeutigen Coefficienten sind, möge einer späteren Gelegenheit vorbehalten bleiben. —

Es sei

$$\text{a)} \qquad \frac{d^6u}{dx^6}+f_1\frac{d^5u}{dx^5}+f_2\frac{d^4u}{dx^4}+\cdots+f_5\frac{du}{dx}+f_6u=0$$

eine irreductible lineare homogene Differentialgleichung, deren Coefficienten $f_1, f_2, \ldots f_6$ eindeutige Functionen der unabhängigen Variablen x sind. $u_1, u_2, \ldots u_6$ seien die Elemente eines Fundamentalsystems dieser Gleichung. Durch einen geschlossenen Umlauf von x um einen oder mehrere singuläre Punkte der Differentialgleichung a) mögen sie übergehen in $u'_1, u'_2, \ldots u'_6$. Hierbei haben die Grössen u' bekanntlich die Form

$$\text{b)} \qquad u'_i=\sum_{k=1}^{6}\alpha_{ik}u_k, \qquad (i=1,2,\ldots 6)$$

und zwischen den von x unabhängigen Grössen α besteht die Bedingung

$$\text{c)} \qquad |\alpha_{ik}| \gtrless 0. \qquad (i,k=1,2,\ldots 6)$$

I.

Es mögen zwischen den Integralen $u_1, u_2, \ldots u_6$ der Differentialgleichung a) die vier homogenen quadratischen Gleichungen bestehen:

$$\text{1)} \qquad \begin{cases} u_2^2=u_1u_3, & u_3^2=u_2u_4, \\ u_4^2=u_3u_5, & u_5^2=u_4u_6. \end{cases}$$

Durch einen geschlossenen Umlauf von x gehen dieselben über in die Relationen:

$$\text{2)} \qquad \begin{cases} (u'_2)^2=u'_1u'_3, & (u'_3)^2=u'_2u'_4, \\ (u'_4)^2=u'_3u'_5, & (u'_5)^2=u'_4u'_6, \end{cases}$$

wo die Grössen u' die durch b) definirte Gestalt haben. Da zwischen den Integralen nur das System 1) bestehen soll, so wird das System 2) eine Folge desselben sein. Man gelangt daher, wenn man aus den Gleichungen 1) und je einer der Gleichungen 2) die vier Grössen u_3, u_4, u_5, u_6 eliminirt, zu Identitäten. Setzen wir:

$$\text{3)} \qquad \eta=\frac{u_2}{u_1}=\frac{u_3}{u_2}=\frac{u_4}{u_3}=\frac{u_5}{u_4}=\frac{u_6}{u_5},$$

so ergiebt sich hieraus

$$\text{4)} \qquad u_2=\eta u_1,\ u_3=\eta^2u_1,\ u_4=\eta^3u_1,\ u_5=\eta^4u_1,\ u_6=\eta^5u_1,$$

und setzen wir diese Werthe in die Gleichungen 2) ein, so folgt als Resultat der Elimination:

$$\text{5)} \qquad \left(\sum_{k=1}^{6}\alpha_{ik}\eta^{k-1}\right)^2=\sum_{k=1}^{6}\alpha_{i-1,k}\eta^{k-1}\cdot\sum_{k'=1}^{6}\alpha_{i+1,k'}\eta^{k'-1}. \qquad (i=2,3,4,5)$$

Diese Relationen müssen gelten für jeden Werth, den η annehmen kann.

Durch den obigen Umlauf von x geht η über in:

$$6)\qquad \begin{cases} \eta' = \dfrac{\sum_{k=1}^{6} \alpha_{2k}\eta^{k-1}}{\sum_k \alpha_{1k}\eta^{k-1}} = \dfrac{\sum_k \alpha_{3k}\eta^{k-1}}{\sum_k \alpha_{2k}\eta^{k-1}} \\ = \dfrac{\sum_k \alpha_{4k}\eta^{k-1}}{\sum_k \alpha_{3k}\eta^{k-1}} = \dfrac{\sum_k \alpha_{5k}\eta^{k-1}}{\sum_k \alpha_{4k}\eta^{k-1}} = \dfrac{\sum_k \alpha_{6k}\eta^{k-1}}{\sum_k \alpha_{5k}\eta^{k-1}}. \end{cases}$$

Unter den sechs Summen dürfen nicht zwei bis auf einen constanten Factor identisch sein, da alsdann $\alpha_{\mu k} = c\alpha_{\nu k}\,(\mu \gtrless \nu)$ für $k = 1, 2, \ldots 6$ wäre, was durch die Bedingung c) ausgeschlossen ist. Es müssen daher der Zähler und Nenner eines jeden der Quotienten 6) einen gleichen Factor enthalten, durch dessen Weggang jene Quotienten identische Werthe annehmen.

Da nicht sämmtliche α_{i6} $(i = 1, 2, \ldots 6)$ zugleich null sein können, so muss, wie sich aus 5) ergiebt, α_{16} oder $\alpha_{66} \gtrless 0$ sein.

1. α_{16} und α_{66} mögen gleichzeitig von null verschieden sein. Durch Multiplikation der Gleichungen 2) folgt

$$u_2' u_5' = u_1' u_6',$$

also sind, wenn wir hierin die Werthe aus b) und 4) setzen, dann auch α_{26} und α_{56} ungleich null. Vermöge der Gleichungen 2) gilt dies auch von α_{36} und α_{46}. Also ist unter unserer Annahme α_{i6} $(i = 1, 2, \ldots 6)$ von null verschieden. Daher sind sämmtliche Grössen u' ganze rationale Functionen fünften Grades von η:

$$7)\qquad u_i' = u_1 \sum_{k=1}^{6} \alpha_{ik}\eta^{k-1}. \qquad (i = 1, 2, \ldots 6)$$

Denkt man sich diese Functionen in ihre linearen Factoren zerlegt, so dürfen nicht dieselben linearen Factoren in zweien derselben zugleich sämmtlich enthalten sein, da alsdann ihr Quotient constant wäre. Daher haben u_1' und u_6' mindestens einen Factor, der in beiden verschieden ist. Derselbe muss, wie sich aus den Gleichungen 2) ergiebt, in u_2', u_3', u_4', u_5' enthalten sein. In u_1' sei dieser Factor $\eta - \beta$, und u_5' enthalte denselben k-mal (k eine positive ganze Zahl). Dann muss, da er in u_6' nicht vorhanden ist, u_4' denselben $2k$-mal enthalten, u_3' $3k$-mal, u_2'

$4k$-mal, u'_1 $5k$-mal. Daher ist $k = 1$. Analog gilt dies für $\eta - \gamma$, den entsprechenden Factor in u'_6. Also erhält man für die Grössen u':

$$8)\quad \begin{cases} u'_1 = \alpha_{16}\,(\eta - \beta)^5\,u_1, \\ u'_2 = \alpha_{26}\,(\eta - \beta)^4\,(\eta - \gamma)\,u_1, \\ u'_3 = \alpha_{36}\,(\eta - \beta)^3\,(\eta - \gamma)^2\,u_1, \\ u'_4 = \alpha_{46}\,(\eta - \beta)^2\,(\eta - \gamma)^3\,u_1, \\ u'_5 = \alpha_{56}\,(\eta - \beta)\,(\eta - \gamma)^4\,u_1, \\ u'_6 = \alpha_{66}\,(\eta - \gamma)^5\,u_1. \end{cases}$$

Zwischen diesen 6 Grössen $\alpha_{\lambda 6}$ bestehen vermöge Gleichung 2) die Relationen

$$9)\quad \alpha_{i6}^2 = \alpha_{i-1,6}\;\alpha_{i+1,6}. \qquad (i = 2, 3, 4, 5)$$

Setzen wir

$$\frac{\alpha_{26}}{\alpha_{16}} = \tau,$$

so folgt

$$10)\quad \alpha_{26} = \tau\alpha_{16},\quad \alpha_{36} = \tau^2\alpha_{16},\quad \alpha_{46} = \tau^3\alpha_{16},\quad \alpha_{56} = \tau^4\alpha_{16},\quad \alpha_{66} = \tau^5\alpha_{16}.$$

Im Falle $\alpha_{16}, \alpha_{66} \gtrless 0$ nimmt mithin der Quotient η' den Werth an:

$$11)\quad \eta' = \frac{\tau(\eta - \gamma)}{\eta - \beta},$$

wobei β und γ nicht gleichzeitig null sein können, da $\eta - \beta$ und $\eta - \gamma$ verschiedene Factoren sind ($\beta \gtrless \gamma$).

2. Ist $\alpha_{16} \gtrless 0$, $\alpha_{66} = 0$, so sind auch alle α_{ik}, in denen $i + k > 7$ ist, gleich null, während die Glieder der Determinante, in denen $i + k = 7$ ist, sämmtlich von null verschieden sind, und es ergiebt sich:

$$7\text{a})\quad u'_i = u_1 \sum_{k=1}^{7-i} \alpha_{ik}\,\eta^{k-1}. \qquad (i = 1, 2, \ldots 6)$$

Also ist u'_i eine Function $(6 - i)^{\text{ten}}$ Grades in η. Da u'_6 in Bezug auf η constant ist, so ist der lineare Factor $\eta - \delta$ von u'_5 zweimal in u'_4 enthalten, in u'_3 dreimal, in u'_2 viermal, in u'_1 fünfmal, sodass überhaupt kein anderer in η linearer Factor in den Grössen u' vorhanden sein kann, und diese die Form haben:

$$8\text{a})\quad \begin{cases} u'_1 = \alpha_{16}\,(\eta - \delta)^5\,u_1, \\ u'_2 = \alpha_{25}\,(\eta - \delta)^4\,u_1, \\ u'_3 = \alpha_{34}\,(\eta - \delta)^3\,u_1, \\ u'_4 = \alpha_{43}\,(\eta - \delta)^2\,u_1, \\ u'_5 = \alpha_{52}\,(\eta - \delta)\,u_1, \\ u'_6 = \alpha_{61}\,u_1. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen 2) folgt, dass

9a) $$\alpha_{i,7-i}^2 = \alpha_{i-1,8-i}\,\alpha_{i+1,6-i}. \qquad (i = 2, 3, 4, 5)$$

Setzt man
$$\frac{\alpha_{25}}{\alpha_{16}} = \tau_1,$$
so folgt

10a) $$\alpha_{25} = \tau_1\alpha_{16},\ \alpha_{34} = \tau_1^2\alpha_{16},\ \alpha_{43} = \tau_1^3\alpha_{16},\ \alpha_{52} = \tau_1^4\alpha_{16},\ \alpha_{61} = \tau_1^5\alpha_{16}.$$

Mithin hat in diesem Falle η' die Gestalt:

11a) $$\eta' = \frac{\tau_1}{\eta - \delta}.$$

3. Ist $\alpha_{16} = 0$, $\alpha_{66} \gtrless 0$, so müssen die Grössen α_{ik}, in denen $k > i$ ist, sämmtlich null sein, während die Glieder der Diagonale der Determinante von null verschieden sind. In diesem Falle gelten dieselben Schlüsse wie vorher, es ergeben sich Functionen von der Form 8a), jedoch in umgekehrter Reihenfolge:

8b) $$\begin{cases} u_1' = \alpha_{11}\,u_1, \\ u_2' = \alpha_{22}\,(\eta - \varepsilon)\,u_1, \\ u_3' = \alpha_{33}\,(\eta - \varepsilon)^2 u_1, \\ u_4' = \alpha_{44}\,(\eta - \varepsilon)^3 u_1, \\ u_5' = \alpha_{55}\,(\eta - \varepsilon)^4 u_1, \\ u_6' = \alpha_{66}\,(\eta - \varepsilon)^5 u_1. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen 2) folgt, dass

9b) $$\alpha_{ii}^2 = \alpha_{i-1,i-1}\,\alpha_{i+1,i+1}. \qquad (i = 2, 3, 4, 5)$$

Setzt man
$$\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{11}} = \tau_2,$$
so folgt

10b) $$\alpha_{22} = \tau_2\alpha_{11},\ \alpha_{33} = \tau_2^2\alpha_{11},\ \alpha_{44} = \tau_2^3\alpha_{11},\ \alpha_{55} = \tau_2^4\alpha_{11},\ \alpha_{66} = \tau_2^5\alpha_{11}.$$

In diesem Falle ergiebt sich für η' der Werth:

11b) $$\eta' = \tau_2(\eta - \varepsilon).$$

Hierin ist der Fall mit inbegriffen, dass die Grössen $u_1, u_2, \ldots u_6$ durch einen bestimmten Umlauf in sich selbst multiplicirt mit einer Constanten übergehen beziehungsweise sich unter einander vertauschen, da alsdann ε resp. δ den Werth null erhält.

Aus dem Vorhergehenden [11), 11a), 11b)] ergiebt sich, dass durch einen beliebig gewählten Umlauf die Function η stets übergeführt wird in einen Ausdruck von der Form:

12) $$\eta' = \frac{\lambda + \mu\eta}{\nu + \varrho\eta}.$$

Hierin sind die vier Grössen λ, μ, ν, ϱ von x unabhängig. Aus der Beschaffenheit der in jenen Formeln auftretenden Constanten geht hervor, dass für alle Umläufe

$$\gamma)\qquad \begin{vmatrix} \lambda & \mu \\ \nu & \varrho \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

Es lassen sich nun zwei Functionen von x, nämlich ξ_1 und ξ_2, so bestimmen, dass

$$13)\qquad \frac{\xi_2}{\xi_1} = \eta$$

ist, und zwischen ξ_1 und ξ_2 die Relation besteht

$$14)\qquad \xi_1 \frac{d\xi_2}{dx} - \xi_2 \frac{d\xi_1}{dx} = c,$$

wo c eine Constante bezeichnet. Durch einen Umlauf von x, welcher η in jenen Werth η' überführt, mögen ξ_1 und ξ_2 übergehen beziehungsweise in ξ_1' und ξ_2', sodass

$$15)\qquad \frac{\xi_2'}{\xi_1'} = \eta' = \frac{\lambda + \mu\eta}{\nu + \varrho\eta},$$

$$16)\qquad \xi_1' \frac{d\xi_2'}{dx} - \xi_2' \frac{d\xi_1'}{dx} = c.$$

Vermöge der Gleichung 13) geht 15) über in

$$\frac{\xi_2'}{\xi_1'} = \frac{\lambda\xi_1 + \mu\xi_2}{\nu\xi_1 + \varrho\xi_2},$$

sodass wir setzen können:

$$17)\qquad \begin{cases} \xi_1' = k(x)\,(\nu\xi_1 + \varrho\xi_2), \\ \xi_2' = k(x)\,(\lambda\xi_1 + \mu\xi_2), \end{cases}$$

wo $k(x)$ einen den beiden Grössen ξ_1' und ξ_2' gemeinsamen Factor bezeichnet. Setzt man diese Werthe ein, so wird die Determinante der Gleichung 16)

$$\begin{vmatrix} \xi_1' & \xi_2' \\ \dfrac{d\xi_1'}{dx} & \dfrac{d\xi_2'}{dx} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} k(\nu\xi_1 + \varrho\xi_2) & k(\lambda\xi_1 + \mu\xi_2) \\ \dfrac{dk}{dx}(\nu\xi_1 + \varrho\xi_2) + k\left(\nu\dfrac{d\xi_1}{dx} + \varrho\dfrac{d\xi_2}{dx}\right), & \dfrac{dk}{dx}(\lambda\xi_1 + \mu\xi_2) + k\left(\lambda\dfrac{d\xi_1}{dx} + \mu\dfrac{d\xi_2}{dx}\right) \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante wird durch successive Zerlegung gleich

$$\begin{vmatrix} k & 0 \\ \dfrac{dk}{dx} & k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \nu\xi_1 + \varrho\xi_2 & \nu\dfrac{d\xi_1}{dx} + \varrho\dfrac{d\xi_2}{dx} \\ \lambda\xi_1 + \mu\xi_2 & \lambda\dfrac{d\xi_1}{dx} + \mu\dfrac{d\xi_2}{dx} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} k & 0 \\ \dfrac{dk}{dx} & k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \nu & \varrho \\ \lambda & \mu \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \dfrac{d\xi_1}{dx} & \dfrac{d\xi_2}{dx} \end{vmatrix}.$$

Mit Hülfe der Gleichungen 14) und 16) ergiebt sich

$$\begin{vmatrix} k & 0 \\ \frac{dk}{dx} & k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \nu & \varrho \\ \lambda & \mu \end{vmatrix} = 1.$$

Also ist der gemeinsame Factor $k(x)$ eine Constante

$$k = \frac{1}{\sqrt{\nu\mu - \lambda\varrho}}.$$

Setzt man diesen Werth von k in die Gleichung 17) ein, so erhält man:

$$18) \qquad \begin{cases} \xi_1' = \dfrac{\nu\xi_1 + \varrho\xi_2}{\sqrt{\nu\mu - \lambda\varrho}}, \\ \xi_2' = \dfrac{\lambda\xi_1 + \mu\xi_2}{\sqrt{\nu\mu - \lambda\varrho}}, \end{cases}$$

wo gemäss γ) der Nenner stets von null verschieden ist.

Aus diesen Gleichungen kann man schliessen, dass die durch die Gleichungen 13) und 14) definirten Functionen ξ_1 und ξ_2 ein Fundamentalsystem constituiren einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit eindeutigem Coefficienten:

$$19) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = py.$$

Die hier angewandte Methode ist wesentlich dieselbe, welche Herr Fuchs angegeben hat,[1]) indem er setzt

$$\xi_1^2 = \frac{dx}{d\eta}, \quad \xi_2 = \xi_1\eta.$$

Sind ξ_1 und ξ_2 die Integrale einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = q\frac{dy}{dx} + py,$$

so ist bekanntlich ihr Quotient

$$\eta = \frac{\xi_2}{\xi_1} = \int \frac{e^{\int q\,dx}}{\xi_1^2}dx,$$

also, wenn $q = 0$ d. h. $\xi_1\dfrac{d\xi_2}{dx} - \xi_2\dfrac{d\xi_1}{dx} = c$,

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{1}{\xi_1^2}.$$

1) Acta Math. Bd. I, S. 358. Vergl. Riemann, Ueber die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung. Ges. Werke, S. 298.

Man kann jedoch aus dem Grunde vorziehen, der Substitution die Form 13), 14) zu geben, weil sich aus derselben die Erweiterung auf die Bestimmung von n Grössen ξ mit einem Schlage ergiebt.[1])

Es seien ξ_1 und ξ_2 zwei Integrale der Differentialgleichung 19), deren Quotient gleich η ist, so ergiebt sich aus der Relation 3):

$$20)\qquad \frac{\xi_2}{\xi_1} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \frac{u_4}{u_3} = \frac{u_5}{u_4} = \frac{u_6}{u_5},$$

und hieraus:

$$21)\quad u_2 = \frac{\xi_2}{\xi_1} u_1,\ u_3 = \frac{\xi_2^2}{\xi_1^2} u_1,\ u_4 = \frac{\xi_2^3}{\xi_1^3} u_1,\ u_5 = \frac{\xi_2^4}{\xi_1^4} u_1,\ u_6 = \frac{\xi_2^5}{\xi_1^5} u_1,$$

$$22)\qquad \frac{u_1}{\xi_1^5} = \frac{u_2}{\xi_1^4 \xi_2} = \frac{u_3}{\xi_1^3 \xi_2^2} = \frac{u_4}{\xi_1^2 \xi_2^3} = \frac{u_5}{\xi_1 \xi_2^4} = \frac{u_6}{\xi_2^5}.$$

Setzt man diese Quotienten gleich $\psi(x)$, so ergiebt sich:

$$23)\qquad \begin{cases} u_1 = \psi(x)\, \xi_1^5, & u_2 = \psi(x)\, \xi_1^4 \xi_2, \quad u_3 = \psi(x)\, \xi_1^3 \xi_2^2, \\ u_4 = \psi(x)\, \xi_1^2 \xi_2^3, & u_5 = \psi(x)\, \xi_1 \xi_2^4, \quad u_6 = \psi(x)\, \xi_2^5. \end{cases}$$

Ist $\Phi(v) = 0$ die homogene lineare Differentialgleichung sechster Ordnung, welcher die fünften Potenzen der Integrale der Gleichung 19) genügen, für welche also

$$\xi_1^5,\ \xi_1^4 \xi_2,\ \xi_1^3 \xi_2^2,\ \xi_1^2 \xi_2^3,\ \xi_1 \xi_2^4,\ \xi_2^5$$

ein Fundamentalsystem von Integralen bilden, so gelangt man zur allgemeinsten Form der linearen homogenen Differentialgleichung sechster Ordnung, deren Integrale den Relationen 1) genügen, durch die Substitution

$$v = \frac{u}{\psi(x)}.$$

$\psi(x)$ hat in Folge der Eindeutigkeit der Coefficienten der Gleichung 19), also auch $\Phi(v) = 0$, und der Gleichung a) die Gestalt

$$\psi(x) = e^{\int \varphi(x)\, dx},$$

wo $\varphi(x)$ eine eindeutige Function von x bezeichnet.

Setzt man andererseits in Gleichung 19)

$$y = \frac{z}{\sqrt[5]{\psi(x)}},$$

so erhält man diejenige homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit eindeutigen Coefficienten, deren Integrale so beschaffen sind, dass ihre fünften Potenzen der Gleichung a) genügen.

1) Vergl. II, Formel 10) — 17).

Um die Differentialgleichung sechster Ordnung zu bilden, welcher die fünften Potenzen der Integrale der Gleichung 19) genügen, setzt man[1])

$$v = y^5$$

und erhält durch sechsmalige successive Differentiation, indem man jedesmal die zweite Ableitung von y mit Hülfe der Gleichung 19) reducirt:

$$\frac{dv}{dx} = 5y^4 \frac{dy}{dx},$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = 20y^3 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 5py^5,$$

$$\frac{d^3v}{dx^3} = 60y^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 65py^4 \frac{dy}{dx} + 5\frac{dp}{dx} y^5,$$

$$\frac{d^4v}{dx^4} = 120y \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + 440py^3 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 90\frac{dp}{dx} y^4 \frac{dy}{dx} + \left(65p^2 + 5\frac{d^2p}{dx^2}\right) y^5,$$

$$\frac{d^5v}{dx^5} = 120\left(\frac{dy}{dx}\right)^5 + 1800py^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 800\frac{dp}{dx} y^3 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(1205p^2 + 115\frac{d^2p}{dx^2}\right) y^4 \frac{dy}{dx} + \left(220p\frac{dp}{dx} + 5\frac{d^3p}{dx^3}\right) y^5,$$

$$\frac{d^6v}{dx^6} = 4200py\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + 4200\frac{dp}{dx} y^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + \left(10220p^2 + 1260\frac{d^2p}{dx^2}\right) y^3 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(5110p\frac{dp}{dx} + 140\frac{d^3p}{dx^3}\right) y^4 \frac{dy}{dx} + \left[1205p^3 + 220\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 + 335p\frac{d^2p}{dx^2} + 5\frac{d^4p}{dx^4}\right] y^5.$$

Dies sind sieben lineare Gleichungen für die sechs Grössen

$$y^5,\ y^4\frac{dy}{dx},\ y^3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2,\ y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3,\ y\left(\frac{dy}{dx}\right)^4,\ \left(\frac{dy}{dx}\right)^5,$$

durch deren Elimination man zu dem gesuchten Resultat gelangt. Rechnet man aus den ersten fünf Gleichungen die Werthe von den fünf ersten jener Grössen aus und setzt dieselben in die siebente Gleichung ein, so ergiebt sich für v die gesuchte lineare homogene Differentialgleichung sechster Ordnung mit eindeutigen Coefficienten:

$$24)\quad \frac{d^6v}{dx^6} = 35p\frac{d^4v}{dx^4} + 70\frac{dp}{dx}\frac{d^3v}{dx^3} - \left(259p^2 - 63\frac{d^2p}{dx^2}\right)\frac{d^2v}{dx^2} - \left(518p\frac{dp}{dx} - 28\frac{d^3p}{dx^3}\right)\frac{dv}{dx} + \left[225p^3 - 155p\frac{d^2p}{dx^2} - 130\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 + 5\frac{d^4p}{dx^4}\right] v.$$

1) Vgl. Fuchs, Borch. Journ. Bd. 81, S. 129.

Diese Gleichung ist in die Gleichung a) durch die Substitution

$$v = u e^{-\int \varphi(x)\, dx}$$

überzuführen, wo $\varphi(x)$ als eindeutige Function definirt war. Es gilt daher der Satz:

„Bestehen zwischen den Integralen der Differentialgleichung a) die Relationen 1), so genügen derselben die fünften Potenzen der Integrale einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit eindeutigen Coefficienten. Die Coefficienten der Gleichung a) sind darstellbar als rationale Functionen von zwei eindeutigen Functionen und deren Ableitungen. Ferner ist aus den Formeln 8) und 10) ersichtlich, dass die 36 Grössen α der Determinante c) darstellbar sind als ganze rationale Functionen von 4 Grössen, welche sich für gewisse Umläufe auf 3 resp. 2 reduciren können."

Anmerkung 1. Es bestehe unter den Integralen der Gleichung a) nur eine der Relationen 1), z. B. $u_2^2 = u_1 u_3$.

Diese wird durch einen Umlauf von x übergeführt in die Gleichung

$$(u_2')^2 = u_1' u_3',$$

welche bis auf einen constanten Factor mit jener identisch ist. Setzt man hierin:

$$\eta = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2},$$

$$\omega_1 = \frac{u_4}{u_1}, \quad \omega_2 = \frac{u_5}{u_1}, \quad \omega_3 = \frac{u_6}{u_1},$$

so folgt die Identität für jeden Werth, den η annehmen kann:

$$\frac{\alpha_{21} + \alpha_{22}\,\eta + \alpha_{23}\,\eta^2 + \alpha_{24}\,\omega_1 + \alpha_{25}\,\omega_2 + \alpha_{26}\,\omega_3}{\alpha_{11} + \alpha_{12}\,\eta + \alpha_{13}\,\eta^2 + \alpha_{14}\,\omega_1 + \alpha_{15}\,\omega_2 + \alpha_{16}\,\omega_3}$$
$$= \frac{\alpha_{31} + \alpha_{32}\,\eta + \alpha_{33}\,\eta^2 + \alpha_{34}\,\omega_1 + \alpha_{35}\,\omega_2 + \alpha_{36}\,\omega_3}{\alpha_{21} + \alpha_{22}\,\eta + \alpha_{23}\,\eta^2 + \alpha_{24}\,\omega_1 + \alpha_{25}\,\omega_2 + \alpha_{26}\,\omega_3}.$$

Ein Glied mit η^2 ist vorhanden, weil u_3 in der Gleichung vorkommt. Da nicht sämmtliche Grössen α in zwei Zeilen gleich sein können, muss mindestens einer der Quotienten einen im Zähler und Nenner gemeinsamen, in η linearen Factor haben. Diese Zerlegung ist aber nur möglich, wenn in diesem Quotienten sämmtliche Coefficienten der Grössen $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ null sind. Da der Zähler des ersten Quotienten gleich dem Nenner des zweiten ist, muss dies auch im anderen der Fall sein. Also gehen die Integrale u_1, u_2, u_3 durch jenen Umlauf über in solche von der Form:

$$u_i' = \alpha_{i1}\, u_1 + \alpha_{i2}\, u_2 + \alpha_{i3}\, u_3. \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Daher wäre in diesem Falle die Gleichung a) reductibel, und ihr genügten die Quadrate der Integrale einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung.[1])

1) Fuchs, Acta Math. Bd. I. S. 333.

Anmerkung 2. Derselbe Schluss gilt, wenn nur zwei aufeinanderfolgende der Relationen 1) bestehen, z. B.

$$u_2^2 = u_1 u_3, \quad u_3^2 = u_2 u_4,$$

welche durch einen Umlauf übergehen in

$$(u_2')^2 = u_1' u_3', \quad (u_3')^2 = u_2' u_4'.$$

Dieses System ist eine Folge des vorigen. Setzt man

$$u_1' = \alpha_{11} + \alpha_{12}\eta + \alpha_{13}\eta^2 + \alpha_{14}\eta^3 + \alpha_{15}\nu_1 + \alpha_{16}\nu_2,$$

so ist:

$$u_i' = \alpha_{i1} + \alpha_{i2}\eta + \alpha_{i3}\eta^2 + \alpha_{i4}\eta^3 + \alpha_{i5}\nu_1 + \alpha_{i6}\nu_2. \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Nicht sämmtliche Coefficienten von η^3 sind hierin null, da das Glied mit u_4 vorhanden sein muss. Die Quotienten $\frac{u_2'}{u_1'}$ und $\frac{u_3'}{u_2'}$ sind für jeden Werth von η gleich, ebenso $\frac{u_3'}{u_2'}$ und $\frac{u_4'}{u_3'}$, während nicht sämmtliche α zweier Zeilen einander gleich sein dürfen. Es müssen sich also in je einem Quotienten der beiden Paare gemeinsame Factoren, welche ganze rationale Functionen von η sind, absondern lassen. Dies bedingt, dass darin die Coefficienten von ν_1 und ν_2 null sind, also auch in dem anderen Quotienten. Auch in diesem Falle wäre die Gleichung a) reductibel. Es genügten ihr die Cuben der Integrale einer homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung.[1])

Anmerkung 3. Genügen die Integrale von a) drei aufeinanderfolgenden Gleichungen der Relationen 1) und nur diesen, so ist in derselben Weise wie in den vorhergehenden Anmerkungen zu zeigen, dass auch in diesem Falle die Gleichung sechster Ordnung reductibel wäre, und dass alsdann jene fünf Integrale derjenigen homogenen linearen Differentialgleichung genügten, welche die vierten Potenzen der Integrale einer homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung zu Integralen hat. Es lässt sich nämlich in ebenderselben Weise wie vorher für den Fall der irreductiblen homogenen linearen Differentialgleichung sechster Ordnung zeigen, dass, wenn unter den Integralen $u_1, u_2, \ldots u_n$ einer solchen n^{ter} Ordnung die $n - 2$ Relationen:

$$\begin{gathered} u_2^2 = u_1 u_3, \\ u_3^2 = u_2 u_4, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u_{n-2}^2 = u_{n-3} u_{n-1}, \\ u_{n-1}^2 = u_{n-2} u_n \end{gathered}$$

bestehen, ihr die $(n-1)^{\text{ten}}$ Potenzen der Integrale einer homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügen. Ueber die Coeffi-

1) Goursat, l. c. S. 166. Vergl. Schlesinger, l. c. S. 20.

cienten und die n^2 Grössen α gilt das im vorhergehenden Satz (S. 92) Gesagte. Denn für die Grössen $u'_1, u'_2, \dots u'_n$, in welche $u_1, u_2, \dots u_n$ durch einen geschlossenen Umlauf der unabhängigen Variablen übergeführt werden, lassen sich, wenn

$$\eta = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \dots = \frac{u_n}{u_{n-1}}$$

gesetzt wird, für die drei Fälle:

$$\alpha_{1n} \text{ und } \alpha_{nn} \gtrless 0,$$
$$\alpha_{1n} \gtrless 0,\ \alpha_{nn} = 0,$$
$$\alpha_{1n} = 0,\ \alpha_{nn} \gtrless 0$$

die 8), 8a), 8b) analogen Schemata aufstellen, wobei $n-1$ an die Stelle von 5 tritt. Hieraus folgt, dass durch einen beliebigen Umlauf η übergeht in:

$$\eta' = \frac{\lambda + \mu\eta}{\nu + \varrho\eta}.$$

Durch Einführung der Functionen ξ_1 und ξ_2 vermittelst der Substitution 13), 14) ergiebt sich der obige Satz.

Anmerkung 4. Die Integrale der Gleichung a) mögen den beiden Relationen genügen:

$$u_2^2 = u_1 u_3,\ u_5^2 = u_4 u_6.$$

Das hieraus durch einen Umlauf von x entstehende System

$$(u'_2)^2 = u'_1 u'_3,\ (u'_5)^2 = u'_4 u'_6$$

ist eine Folge des ersteren. Wenn wir

$$\frac{u_2}{u_1} = \eta_1,\ \frac{u_5}{u_4} = \eta_2$$

setzen, haben die Grössen u' die Form:

$$u'_i = (\alpha_{i1} + \alpha_{i2}\eta_1 + \alpha_{i3}\eta_1^2)\,u_1 + (\alpha_{i4} + \alpha_{i5}\eta_2 + \alpha_{i6}\,\eta_2^2)\,u_4,\quad (i = 1, 2, \dots 6)$$

und, wenn wir diese einsetzen, gelangen wir zu den für jeden Werth, den η_1 und η_2 annehmen können, gültigen Identitäten

$$\frac{u'_2}{u'_1} = \frac{u'_3}{u'_2},\ \frac{u'_5}{u'_4} = \frac{u'_6}{u'_5}.$$

Es könnte nun in je einem Quotienten der beiden Paare sowohl im Zähler als im Nenner entweder ein in η_1 und η_2 zugleich linearer Factor enthalten sein oder je ein in η_1 und η_2 linearer Factor. Dies ist beides unmöglich. Es muss daher, damit ein in η_1 oder η_2 linearer Factor vorhanden ist, der Coefficient von u_4 beziehungsweise u_1 identisch null sein und zwar im Zähler und Nenner derselbe. Denn wäre zu setzen:

$$\alpha + \beta \eta_1 = \gamma + \delta \eta_2,$$

so würde hieraus die homogene quadratische Relation unter den Grössen u:

$$(\gamma - \alpha) u_1 u_4 - \beta u_2 u_4 + \delta u_5 u_1 = 0$$

folgen, während nach unserer Voraussetzung nur homogene quadratische Relationen von der Form:

$$\lambda (u_2^2 - u_1 u_3) + \mu (u_5^2 - u_4 u_6) = 0$$

möglich sind.

Da die beiden gleichen Quotientenpaare die Grösse u_2' beziehungsweise u_5' gemeinsam haben, ist dieses Verschwinden auch in jedem der beiden anderen Quotienten der Fall. Aus der Bedingung c) folgt, dass, wenn in dem einen Paare der Coefficient von u_1 null ist, in dem anderen Paare dies für den Coefficienten von u_4 stattfinden muss. Man ersieht hieraus, dass für alle möglichen Umläufe η_1' und η_2' gleichzeitig nur die Werthe annehmen können:

A) $$\eta_1' = \frac{\alpha_1 + \beta_1 \eta_1}{\gamma_1 + \delta_1 \eta_1}, \quad \eta_2' = \frac{\lambda_1 + \mu_1 \eta_2}{\nu_1 + \varrho_1 \eta_2},$$

oder:

B) $$\eta_1' = \frac{\alpha_2 + \beta_2 \eta_2}{\gamma_2 + \delta_2 \eta_2}, \quad \eta_2' = \frac{\lambda_2 + \mu_2 \eta_1}{\nu_2 + \varrho_2 \eta_1}.$$

Bestimmt man nunmehr zwei Functionen ξ_1 und ξ_2 so, dass

$$\xi_2 = \eta_1 \xi_1, \quad \xi_1 \frac{d\xi_2}{dx} - \xi_2 \frac{d\xi_1}{dx} = c_1,$$

ebenso ζ_1 und ζ_2 so, dass

$$\zeta_2 = \eta_2 \zeta_1, \quad \zeta_1 \frac{d\zeta_2}{dx} - \zeta_2 \frac{d\zeta_1}{dx} = c_2,$$

so sind diese beiden Paare von Functionen die Integrale der homogenen linearen Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = p_1 y, \quad \frac{d^2 z}{dx^2} = p_2 z,$$

wo p_1 und p_2 die Wurzeln einer quadratischen Gleichung mit eindeutigen Coefficienten sind[1]) und in einander übergehen für diejenigen Umläufe von x, für welche

$$\eta_1' = \frac{\alpha_2 + \beta_2 \eta_2}{\gamma_2 + \delta_2 \eta_2}.$$

Dann ist

$$u_2 = \frac{\xi_2}{\xi_1} u_1, \quad u_3 = \frac{\xi_2^2}{\xi_1^2} u_1,$$

$$u_5 = \frac{\zeta_2}{\zeta_1} u_4, \quad u_6 = \frac{\zeta_2^2}{\zeta_1^2} u_4,$$

also:

1) Goursat, l. c. S. 152. Vgl. Schlesinger, l. c. S. 27.

$$\frac{u_1}{\xi_1^2} = \frac{u_2}{\xi_1 \xi_2} = \frac{u_3}{\xi_3^2},$$

$$\frac{u_4}{\zeta_1^2} = \frac{u_5}{\zeta_1 \zeta_2} = \frac{u_6}{\zeta_2^2}.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$u_1 = \varphi_1(x)\, \xi_1^2, \quad u_2 = \varphi_1(x)\, \xi_1 \xi_2, \quad u_3 = \varphi_1(x)\, \xi_2^2,$$
$$u_4 = \varphi_2(x)\, \zeta_1^2, \quad u_5 = \varphi_2(x)\, \zeta_1 \zeta_2, \quad u_6 = \varphi_2(x)\, \zeta_2^2.$$

Hierbei sind auch φ_1 und φ_2 die Wurzeln einer quadratischen Gleichung mit eindeutigen Coefficienten und gehen in einander über für ebendieselben Umläufe von x wie p_1 und p_2. Diejenigen linearen homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Integrale derart sind, dass ihre Quadrate der Gleichung a) genügen, erhält man aus den obigen, wenn man darin substituirt

$$y = \frac{v}{\sqrt{\varphi_1(x)}}, \quad z = \frac{w}{\sqrt{\varphi_2(x)}}.$$

Es ergeben sich zwei lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren entsprechende Coefficienten Wurzeln quadratischer Gleichungen mit eindeutigen Coefficienten sind. Hieraus folgt der Satz:

„Genügen die Integrale der Gleichung a) den Relationen:

$$u_2^2 = u_1 u_3, \; u_5^2 = u_4 u_6,$$

so befriedigen dieselbe die Quadrate der Integrale zweier homogener linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren entsprechende Coefficienten die Wurzeln quadratischer Gleichungen mit eindeutigen Coefficienten sind.“

(Schluss folgt.)

VI.

Ueber die Bewegung freier Ketten in rotirenden Linien.

Von

Prof. F. AUGUST

in Berlin.

§ 1. Allgemeine Uebersicht.

In einer Abhandlung „Ueber die Bewegung von Ketten in Curven“ (diese Zeitschrift, Bd. XXXIII S. 321—336), auf welche sich die Citate in der vorliegenden Arbeit beziehen, habe ich untersucht, unter welchen Bedingungen sich eine Kette, d. h. eine vollkommen biegsame, unausdehnbare homogene Massenlinie in sich selbst bewegen kann, so dass also alle Elemente der Kette dieselbe Bahn beschreiben, in der Art, wie die Wagen eines Eisenbahnzuges. Ich will hier ein ähnliches Problem behandeln, nämlich die Bewegung von Ketten in gleichförmig rotirenden Curven, also eine Bewegung, bei welcher die Kette ihrer Form nach stets Bogen einer Curve von unveränderter Gestalt ist, welche mit constanter Winkelgeschwindigkeit um eine feste Axe rotirt, während sich gleichzeitig die ganze Kette in dieser rotirenden Curve verschiebt. Diese rotirende Curve soll als rotirende Kettenbahn bezeichnet werden. Es werden dabei ausser den etwa nöthigen Spannungen in den beiden Endpunkten (äusseren Spannungen) keine äusseren Kräfte vorausgesetzt. Ist die Kette geschlossen, so fallen auch die äusseren Spannungen fort und die Kette bewegt sich vollkommen frei und behält, als Ganzes betrachtet, immer dieselbe Gestalt. Ich werde nachweisen, dass die beschriebene Bewegung sich nur in einer der folgenden Weisen vollziehen kann:

1. Ein ganz singulärer Fall ist die Bewegung der Kette längs der Rotationsaxe mit beliebig veränderlicher Geschwindigkeit (§ 3a). Dieser Fall ist selbstverständlich, die Rotation illusorisch, und man wird auf einen einfachen, früher behandelten Fall (S. 322, 2) zurückgeführt.

In allen anderen Fällen muss die relative Geschwindigkeit der Kette in Bezug auf die rotirende Bahn constant sein (§ 4).

Auch hier giebt es zunächst zwei singuläre Fälle und den allgemeinen Fall, nämlich

2. Die rotirende Bahn ist eine Gerade, senkrecht und im Allgemeinen windschief gegen die Rotationsaxe. (§ 3b. Vergl. auch § 10.)

3. Die rotirende Bahn ist eine Schraubenlinie, die auch in einen Kreis übergehen kann. (§ 5. Vergl. auch § 10.)

4. Im Allgemeinen ist die rotirende Bahn eine räumliche oder ebene Curve, welche sich analytisch durch elliptische Functionen ausdrücken lässt. (§§ 6—9.)

Als Grenzfälle ergeben sich aus dem allgemeinen Falle 4 ausser den singulären Fällen 2 und 3 auch noch einige andere singuläre Fälle. (§ 10.)

In § 11 sind zwei Specialfälle von 4 genauer betrachtet, in § 12 ein dritter, welcher sich in gewissen Fällen sehr einfach angenähert realisiren lässt. In § 13 ist eine Verallgemeinerung des Resultates besprochen.

§ 2. Aufstellung der Differentialgleichungen.

Die Untersuchung lässt sich dadurch auf das in meiner früheren Arbeit behandelte Problem zurückführen, dass man ein bewegliches Coordinatensystem einführt, welches ebenso rotirt, wie die rotirende Bahn. Es ist bekannt, dass man die relative Bewegung in Bezug auf dieses System wie eine absolute betrachten kann, nachdem man in jedem Massenpunkte zu den übrigen angreifenden Kräften die Centrifugalkraft und eine Kraft zugefügt hat, die ich die Foucault'sche Componente nennen werde. Die letztere ertheilt jedem Massenpunkt eine Beschleunigung gleich dem doppelten Product aus der Winkelgeschwindigkeit des bewegten Systems und aus der Projection der relativen Geschwindigkeit des Massenpunktes auf die durch den Massenpunkt gelegte, zur Axe lothrechte Ebene. Ihre Angriffslinie fällt in diese Ebene und bildet mit jener Projection einen Winkel von 90^0 in dem der absoluten Drehung des Coordinatensystems entgegengesetzten Sinne. Sind also x, y, z die Coordinaten eines Massenpunktes m in einem beweglichen System, welches sich mit der Winkelgeschwindigkeit $+\alpha$ um die z-Axe dreht, wo α stets einen von Null verschiedenen Werth haben soll, so ist die Bewegung wie eine absolute zu betrachten, wenn zu den übrigen Componenten folgende Axencomponenten zugefügt werden:

$$m\left(\alpha^2 x + 2\alpha\frac{dy}{dt}\right), \quad m\left(\alpha^2 y - 2\alpha\frac{dx}{dt}\right), \quad 0.$$

Andererseits ist die Curve, in der sich die Kette relativ bewegt, von unveränderlicher Lage gegen das bewegliche Axensystem. Ich habe nun in der früheren Arbeit nachgewiesen, unter welchen Bedingungen eine solche Bewegung möglich ist. Das (S. 325) angegebene Resultat lässt sich so aussprechen:

Wenn eine Kette sich in einer Curve bewegt, so treten zu den übrigen Kräften, die ein Element angreifen, erstens in tangentialer Richtung das Differential der Spannung, zweitens in Richtung der Hauptnormale das Product aus der Spannung und dem Differential des Krümmungswinkels (Contingenzwinkels). Nach Zufügung derselben ist das Element der Kette als frei zu betrachten.

Nehmen wir nun zur Masseneinheit die Längeneinheit, bezeichnen wir die Zeit mit t, den Bogen mit σ, wo $\sigma = s + \vartheta$ ist und ϑ von s unabhängig, aber Function von t ist, die relative Geschwindigkeit der ganzen Kette $\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt}$ mit v, die Componenten der das Massenelement ds angreifenden äusseren Kräfte mit $X\,ds$, $Y\,ds$, $Z\,ds$, die Spannung mit T, und drücken wir die partiellen Ableitungen nach σ -- die zugleich die nach s sind, da σ nur in der Verbindung $\sigma = s + \vartheta$ vorkommt — durch Accente aus, so erhalten wir die Bewegungsgleichungen (S. 322, I):

$$x''(v^2 - T) + x'\left(\frac{dv}{dt} - T'\right) = X$$

und die analogen. Hierzu tritt die Gleichung

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1.$$

Nun sind in Wirklichkeit keine äusseren Kräfte vorhanden; da es sich aber um die relative Bewegung gegen das rotirende Coordinatensystem handelt, so haben wir nach dem vorher Besprochenen zu setzen:

$$X = \alpha^2 x + 2\alpha v y', \quad Y = \alpha^2 y - 2\alpha v x', \quad Z = 0.$$

So erhalten wir die Gleichungen:

$$\text{I)} \qquad \begin{cases} x''(v^2 - T) + x'\left(\dfrac{dv}{dt} - T'\right) = \alpha^2 x + 2\alpha v y', \\ y''(v^2 - T) + y'\left(\dfrac{dv}{dt} - T'\right) = \alpha^2 y - 2\alpha v x', \\ z''(v^2 - T) + z'\left(\dfrac{dv}{dt} - T'\right) = 0; \end{cases}$$

$$\text{II)} \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1.$$

Hierin sind x, y, z Functionen von σ allein, dagegen ist v unabhängig von σ. Für σ sind bei einer endlich begrenzten Kette alle Werthe von $s_1 + \vartheta$ bis $s_2 + \vartheta$ zuzulassen, wo s_1 und s_2 gegebene Constante sind. Ist die Curve (σ) geschlossen, so kann auch die Kette im mechanischen Sinne geschlossen sein.

In der früheren Arbeit waren specieller solche Fälle untersucht, in denen die äusseren Kräfte nur von der Lage des Massenelementes abhängen. Es zeigte sich dabei (S. 326), dass die Bewegung der Kette im Allgemeinen tangential gleichförmig beschleunigt sein konnte.

Das Auftreten der Foucault'schen Componente, also einer von der Geschwindigkeit abhängigen Kraft, in der vorliegenden Untersuchung bedingt eine wesentlich andere Gesetzmässigkeit.

§ 3. Integration in gewissen singulären Fällen. (Geradlinige rotirende Bahnen.)

Da die allgemeine Methode, die wir zur Integration der Gleichungen I) und II) anwenden wollen, in gewissen Ausnahmefällen nicht anwendbar ist, so empfiehlt es sich, diese Fälle vorher zu erledigen.

A. Wir untersuchen zuerst, ob die rotirende Bahn eine Gerade sein kann, setzen also $x''=y''=z''=0$, so dass x', y', z' constant sind. Die drei Gleichungen I) werden dann:

$$\text{III)}\qquad \begin{cases} x'\left(\dfrac{dv}{dt}-T'\right)=\alpha^2 x+2\alpha v y', \\ y'\left(\dfrac{dv}{dt}-T'\right)=\alpha^2 y-2\alpha v x', \\ z'\left(\dfrac{dv}{dt}-T'\right)=0. \end{cases}$$

Aus der dritten dieser Gleichungen folgt entweder $\dfrac{dv}{dt}-T'=0$ oder $z'=0$.

a) Ist $\dfrac{dv}{dt}-T'=0$, so folgt aus den beiden ersten Gleichungen III)

$$\alpha^2(xx'+yy')=0,\quad \text{d. h.}\quad x^2+y^2=const.;$$

da aber x' und y' constant sind, ist dies nur möglich, wenn $x'=y'=0$, $z'=1$ ist. Dann aber ergeben dieselben Gleichungen, dass $x=0$, $y=0$ ist. Die Kette bewegt sich mit ganz beliebiger Beschleunigung in der z-Axe. Eine der beiden Endspannungen eines begrenzten Stückes kann als beliebige Function der Zeit gegeben sein, die andere ist dann bestimmt (S. 322 u. 323). Dies ist der erste der obenerwähnten singulären Fälle.

b) Ist $z'=0$, dann liegt die rotirende Bahn in einer Ebene senkrecht zur z-Axe, die wir zur xy-Axe wählen können. Die Elimination von $\left(\dfrac{dv}{dt}-T'\right)$ aus den beiden ersten Gleichungen ergiebt

$$\alpha^2(xy'-yx')+2\alpha v=0.$$

Es ist aber $xy'-yx'=r_1$, wo r_1 den Abstand der Geraden von der z-Axe bedeutet, mithin, da der Fall $\alpha=0$ ausgeschlossen werden kann, $v=-\dfrac{\alpha}{2}r_1$ $=c$ ebenfalls constant, und $\dfrac{dv}{dt}=0$. Weiter ergeben die beiden ersten Gleichungen III)

$$-T'=\alpha^2(xx'+yy'),\quad \text{also}\quad T=\frac{\alpha^2}{2}(r_0^2-r^2),$$

wo r_0 eine beliebige Constante, r die Entfernung des Elementes von der z-Axe bedeutet.

Dies ist der zweite der obenerwähnten singulären Fälle. Es ist also eine freie Bewegung der Kette in einer rotirenden Geraden möglich, welche senkrecht zur Rotationsaxe steht und von ihr einen beliebigen kürzesten Abstand r_1 hat. Die relative Geschwindigkeit der Kette in Bezug auf diese Bahn ist gleich $-\frac{\alpha}{2}r_1$; das negative Vorzeichen lässt erkennen, dass die Kette in der Geraden sich im entgegengesetzten Sinne der Rotation der Bahn (rückläufig) bewegt. Ist die Kette begrenzt, so müssen selbstverständlich in den Endpunkten die äusseren Spannungen angebracht werden, deren eine wegen der willkürlichen Constanten r_0 beliebig gewählt werden kann. Die Spannung T ist nur positiv in den Punkten, deren Entfernung von der Drehaxe kleiner als r_0 ist. Für die beiden Punkte, für welche $r = r_0$ ist, ist sie Null; für die Punkte $r > r_0$ ist sie negativ, d. h. die Spannung besteht hier in einer gegenseitigen Abstossung der benachbarten Elemente, was zwar mathematisch vorstellbar, aber physikalisch schwer realisirbar ist. Uebrigens lässt sich diese singuläre Lösung durch eine sehr einfache Construction ganz elementar finden, indem man die Schwungkraft und die Foucault'sche Componente für einen beliebigen Punkt einer Geraden der xy-Ebene graphisch darstellt und die Bedingung dafür sucht, dass die Resultante beider in die Richtung der Geraden falle, so dass sie durch das Differential der Spannung aufgehoben werden kann. Man findet dann ebenfalls $v = c = -\frac{\alpha}{2}r_1$. So einfach dieser Fall, mathematisch betrachtet, erscheint, so würde es doch schwer sein, ihn angenähert physikalisch zu realisiren, da die Kette sich nicht schliessen lässt, und das Anbringen vorgeschriebener Endspannungen in einem bewegten Kettenstücke schwer ausführbar ist.

Wählt man $r_1 = 0$, so ist auch $c = 0$, und man erhält eine einfach rotirende Kette von geradliniger Gestalt, welche die Axe senkrecht durchschneidet. Diese Bewegung lässt sich realisiren, da man die äussere Endspannung gleich Null setzen kann. Es kann also ein freies Kettenstück von der Länge $2l$ in Form einer geraden Linie um seinen Mittelpunkt in einer Ebene frei rotiren, und die Spannung ist $\frac{\alpha^2}{2}(l^2 - x^2)$, wenn x den Abstand des Elementes vom Mittelpunkt bedeutet. Wir sind so auf einen sehr einfachen und bekannten Specialfall geführt.

§ 4. Fortsetzung der allgemeinen Untersuchung.

Wir wenden uns nun zu dem Falle gekrümmter rotirender Bahnen und weisen zunächst nach, dass die Bewegung in denselben nur möglich ist, wenn die Geschwindigkeit constant ist. Wir betrachten zu diesem Zwecke eine bestimmte Stelle der Bahn, den Punkt P.

Da die Resultante aller Kräfte, welche das gerade in P befindliche Element angreifen, bei der relativen Bewegung in die Schmiegungsebene der Bahn fällt, und die Resultante der beiden von den Spannungen herrührenden Kräfte dT und $T d\tau$ ebenfalls, so muss auch die Resultante aus der Centrifugalkraft und der Foucault'schen Componente in die Schmiegungsebene der Bahn fallen. Die Centrifugalkraft $\alpha^2 r$ ist nach Grösse und Richtung constant, die Foucault'sche Componente $2\alpha v$ ändert, da die Bahn dieselbe bleibt, ihre Richtung nicht, wohl aber mit v ihre Grösse, folglich ändert, wenn v veränderlich ist, die Resultante beider ihre Grösse und Richtung, doch so, dass sie immer in der Ebene bleibt, welche durch das Element normal zur z-Axe gelegt ist. Folglich muss diese Ebene die Schmiegungsebene sein. Da dies für jeden Punkt der Curve (σ) gilt, so muss diese Curve ihrer ganzen Ausdehnung nach in die Ebene senkrecht zur z-Axe fallen. Hierdurch ist zunächst erwiesen, dass für alle gekrümmten rotirenden Bahnen, die nicht in einer Ebene senkrecht zur z-Axe liegen, die Geschwindigkeit $v = c$ constant sein muss. Fällt aber die rotirende Bahn in eine solche Ebene, so können wir $z = 0$ setzen und erhalten die Bedingungen

$$\text{IV)} \quad \begin{cases} x''(v^2 - T) + x'\left(\dfrac{dv}{dt} - T'\right) = \alpha^2 x + 2\alpha v y', \\ y''(v^2 - T) + y'\left(\dfrac{dv}{dt} - T'\right) = \alpha^2 y - 2\alpha v x'; \end{cases}$$

$$\text{V)} \quad x'^2 + y'^2 = 1.$$

Da in diesem Falle bekanntlich $x''^2 + y''^2 = \frac{1}{\varrho^2}$, $x'y'' - y'x'' = \frac{1}{\varrho}$ ist, wo ϱ den Krümmungsradius bedeutet, so folgt aus den Gleichungen IV) mit Rücksicht auf V)

$$v^2 - T = \alpha^2 \varrho^2 (x x'' + y y'') - 2\alpha v \varrho,$$
$$\frac{dv}{dt} - T' = \alpha^2 (x x' + y y').$$

Differenziirt man die erste dieser Gleichungen nach σ, und eliminirt man dann aus dieser und der zweiten Gleichung T', so folgt

$$\frac{dv}{dt} - 2\alpha v \varrho' + \alpha^2 [[\varrho^2 (x x'' + y y'')]' - (x x' + y y')] = 0.$$

Die Coefficienten dieser Differentialgleichung erster Ordnung von v sind Functionen von σ. Da aber v unabhängig von σ sein muss, so ist die Gleichung nur erfüllbar, wenn entweder v constant $= c$ ist, oder wenn gleichzeitig

$$\text{VI)} \qquad 2\alpha\varrho' = 0, \quad \alpha^2 [(\varrho^2 (x x'' + y y''))' - (x x' + y y')] = -b$$

ist, wo b auch eine Constante bedeutet, und dann wird auch $\frac{dv}{dt} = b$. Aus der ersten dieser Gleichungen folgt aber, dass ϱ constant sein müsste, also müsste die Curve ein Kreis sein. Dann kann man setzen $x = a_1 + \varrho \cos \frac{\sigma}{\varrho}$,

$y = b_1 + \varrho \sin \frac{\sigma}{\varrho}$, wo a_1 und b_1 constant sind. Setzt man aber diese Werthe in die zweite der Gleichungen VI) ein, so folgt $2\alpha^2 \left[a_1 \cos \frac{\sigma}{\varrho} - b_1 \sin \frac{\sigma}{\varrho} \right] = -b$. Da σ veränderlich ist, folgt hieraus $a_1 = 0$, $b_1 = 0$ und $b = \frac{dv}{dt} = 0$, d. h. v constant. Hiermit ist die zu Anfang dieser Nummer aufgestellte Behauptung vollständig erwiesen, und wir können im Folgenden überall $\frac{dv}{dt} = 0$, $v = c$ setzen.

Die Gleichungen I) und II) nehmen also für gekrümmte Bahnen stets die Form an:

$$\text{VII)} \quad \begin{cases} x''(c^2 - T) - x'T' = \alpha^2 x + 2\alpha c y', \\ y''(c^2 - T) - y'T' = \alpha^2 y - 2\alpha c x', \\ z''(c^2 - T) - z'T' = 0; \end{cases}$$

$$\text{VIII)} \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1.$$

Hinsichtlich der Constanten c bemerken wir, dass dieselbe wesentlich positiv genommen werden soll, so dass der Sinn der relativen Bewegung derselbe, wie der der wachsenden σ ist.

Der Werth $c = 0$ ist nicht ausgeschlossen; er hat aber zur Folge, dass es sich um einfaches Rotationsgleichgewicht der Kette handelt, also um ein Problem, dessen Lösung bekannt ist. (Vergl. die Abhandlung des Herrn H. Kiessling: Discussion der Curve, deren Trägheitsmoment ein Maximum oder Minimum ist. Progr. Berlin 1866.) Nichtsdestoweniger ist in der folgenden Untersuchung der Vergleichung wegen der Fall $c = 0$ mit berücksichtigt worden.

§ 5. Dritter singulärer Fall.

Wir betrachten jetzt den Fall, in welchem T eine Constante ist, welche im Allgemeinen von c^2 verschieden ist. Dann ergiebt die dritte der Gleichungen VII), dass $z'' = 0$, also $z' = \cos\gamma$ constant ist, und die übrigen Gleichungen VII) und VIII) werden

$$x''(c^2 - T) = \alpha^2 x + 2\alpha c y',$$
$$y''(c^2 - T) = \alpha^2 y - 2\alpha c x',$$
$$x'^2 + y'^2 = \sin\gamma^2.$$

Durch Elimination von T findet man $\alpha^2(xx' + yy') = 0$, also ist $x^2 + y^2 = r^2$ constant, und da auch $z' = \cos\gamma$ constant ist, so ist die rotirende Bahn eine Schraubenlinie. Setzt man nun $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, so ist $r^2\varphi'^2 = \sin\gamma^2$.

Wir setzen nun fest, dass $r\varphi' = +\sin\gamma$ sei. Hierdurch ist bestimmt, dass der Winkel γ ein positiver spitzer oder stumpfer ist, wenn die relative Bewegung rechtläufig ist. Wir können uns aber der Symmetrie wegen auf spitze Winkel beschränken.

Zur Bestimmung von T erhalten wir

$$(x''^2 + y''^2)(c^2 - T) = \alpha^2(xx'' + yy'') - 2\alpha c(x'y'' - y'x'').$$

Es ist aber $x''^2+y''^2=\frac{1}{r^2}\sin\gamma^4$, $xx''+yy''=-\sin\gamma^2$, $x'y''-y'x''=\frac{1}{r}\sin\gamma^3$. Also ist

$$(c^2-T)\sin\gamma^2+2\alpha c r\sin\gamma+\alpha^2r^2=0,$$

d. h.

$$T=\left(c+\frac{\alpha r}{\sin\gamma}\right)^2.$$

Die Spannung ist also stets positiv; sie wird nur Null, wenn $\sin\gamma=-\frac{\alpha r}{c}$ ist. Sie wird gleich c^2, wenn $\sin\gamma=-\frac{\alpha r}{2c}$ ist. (Beides ist nur bei negativem Winkel möglich.) Unter der Annahme $T=c^2$ wird zwar die dritte Gleichung identisch erfüllt, aber man erkennt mit Hilfe der übrigen Gleichungen leicht, dass auch dann z' constant ist. Für $\gamma=\frac{\pi}{2}$ geht die Schraubenlinie in einen Kreis über. Auch in diesem Falle ist eine angenäherte Realisirung des Bewegungsvorganges nur dann leicht ausführbar, wenn $c=0$ ist, wenn es sich also um Rotationsgleichgewicht handelt.

§ 6. Die allgemeine Integration.

Wir wenden uns nun zu der allgemeinen Integration der Gleichungen VII) und VIII), wobei wir die bereits behandelten Fälle ausschliessen können. Wir multipliciren die Gleichungen VII) der Reihe nach erst mit x', y', z', dann mit $-y, x, 0$ und addiren beidemal. Zu den so erhaltenen Gleichungen fügen wir die dritte der Gleichungen VII) und die Gleichung VIII). So erhalten wir das Gleichungssystem

$$\text{IX)}\quad\left\{\begin{array}{c} -T'=\alpha^2(xx'+yy'),\\ (xy''-yx'')(c^2-T)-(xy'-yx')T'=-2\alpha c(xx'-yy'),\\ z''(c^2-T)-z'T'=0,\\ x'^2+y'^2+z'^2=1.\end{array}\right.$$

Die drei ersten Gleichungen lassen sich ohne Weiteres integriren und ergeben, wenn man die Integrationsconstanten mit $\lambda_1 k^2$, $\mu_1 k^3$, νk^2 bezeichnet:

$$T+\frac{\alpha^2}{2}(x^2+y^2)=\lambda_1 k^2,$$
$$(xy'-yx')(c^2-T)=\mu_1 k^3-\alpha c(x^2+y^2),$$
$$z'(c^2-T)=\nu k^2.$$

Da die Potenzen der Constanten k jedesmal noch mit einem willkürlichen Zahlenfactor λ_1, μ_1, ν multiplicirt erscheinen, können wir ihr unbeschadet der Allgemeinheit von vornherein einen bestimmten Werth geben. Wir setzen fest, dass, wenn c nicht Null ist, $k=c$ genommen werde. Wenn aber $c=0$ ist, also im Falle des einfachen Rotationsgleichgewichtes, verstehen wir unter k eine beliebige von Null verschiedene Länge.

Wir setzen nun in die eben erhaltenen Gleichungen und in die letzte Gleichung IX) die Werthe $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ ein. Dann erhalten wir

$$T + \frac{\alpha^2}{2} r^2 = \lambda_1 k^2,$$
$$r^2\varphi'.(c^2 - T) = \mu_1 k^3 - \alpha c r^2,$$
$$z'(c^2 - T) = \nu k^2,$$
$$r^2\varphi'^2 + r'^2 + z'^2 = 1.$$

Wir führen nun eine neue Veränderliche ein durch die Gleichung $c^2 - T = k^2 u$. (Der Fall, dass T constant ist, ist in § 5 behandelt und wird hier ausgeschlossen.) Dann ist

$$T = c^2 - k^2 u,$$
$$r^2 = \frac{2}{\alpha^2} k^2 \left[\left(\lambda_1 - \frac{c^2}{k^2}\right) + u\right],$$
$$r^2\varphi' = \frac{2k}{\alpha} \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\mu_1 - \frac{c}{k}\lambda_1 + \frac{c^3}{k^3}\right) - \frac{c}{k} u}{u},$$
$$z' = \frac{\nu}{u},$$
$$r^2\varphi'^2 + r'^2 = 1 - \frac{\nu^2}{u^2}$$

oder, wenn wir $\lambda_1 - \frac{c^2}{k^2} = \lambda$, $\frac{\alpha}{2}\mu_1 - \frac{c}{k}\lambda_1 + \frac{c^3}{k^3} = \mu$, $\frac{c}{k} = \varepsilon$ setzen,

$$\text{X)} \quad \left\{ \begin{aligned} T &= k^2(\varepsilon^2 - u), \\ r^2 &= \frac{2}{\alpha^2} k^2 (\lambda + u), \\ r^2\varphi' &= \frac{2k}{\alpha} \frac{\mu - \varepsilon u}{u}, \\ z' &= \frac{\nu}{u}, \\ r^2\varphi'^2 + r'^2 &= 1 - \frac{\nu^2}{u^2}. \end{aligned} \right.$$

Aus der letzten Gleichung X) folgt

$$\text{XI)} \quad r^2 r'^2 = \left(1 - \frac{\nu^2}{u^2}\right) r^2 - (r^2\varphi')^2.$$

Durch Differenziren der zweiten Gleichung X) findet man

$$r r' = \frac{k^2}{\alpha^2} u'.$$

Setzt man diesen Werth und die Werthe für r^2 und $r^2\varphi'$ aus der zweiten und dritten Gleichung X) in XI) ein, so kommt nach Multiplication mit $\frac{u^2\alpha^2}{k^2}$

$$\frac{k^2}{\alpha^2} u^2 u'^2 = 2(u^2 - \nu^2)(u + \lambda) - 4(\mu - \varepsilon u)^2.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist eine ganze rationale Function dritten Grades, welche wir durch $R(u)$ bezeichnen wollen. Da nun $u' = \frac{du}{d\sigma}$ ist, so ergiebt sich

$$d\sigma = \frac{k}{\alpha} \frac{u\,du}{\sqrt{R(u)}}, \quad dz = \frac{v\,d\sigma}{u} = \frac{vk}{\alpha} \cdot \frac{du}{\sqrt{R(u)}};$$

$$d\varphi = \frac{2}{\alpha} k \frac{(\mu - \varepsilon u)}{u} \cdot \frac{d\sigma}{r^2} = \frac{\mu - \varepsilon u}{\lambda + u} \cdot \frac{du}{\sqrt{R(u)}}.$$

Wir erhalten somit schliesslich, wenn wir u_1 als untere Grenze der zu bildenden Integrale wählen:

$$\text{XII)} \left\{ \begin{aligned} & R(u) = 2(u^2 - v^2)(u + \lambda) - 4(\mu - \varepsilon u)^2, \\ & r^2 = 2\frac{k^2}{\alpha^2}(u + \lambda), \quad T = k^2(\varepsilon^2 - u), \\ & z = \frac{vk}{\alpha} \int_{u_1}^{u} \frac{du}{\sqrt{R(u)}}, \quad \sigma = \frac{k}{\alpha} \int_{u_1}^{u} \frac{u\,du}{\sqrt{R(u)}}, \quad \varphi = \int_{u_1}^{u} \frac{\mu - \varepsilon u}{\lambda + u} \frac{du}{\sqrt{R(u)}}. \end{aligned} \right.$$

u_1, λ, μ, v, k sind beliebige Constante, ε ist im Allgemeinen gleich 1; wenn aber $c = 0$, so ist $\varepsilon = 0$.

Es sind also z, σ, φ durch elliptische Integrale bezw. erster, zweiter und dritter Gattung, als Functionen von u dargestellt, während T und r^2 lineare Functionen von u sind. Hierdurch ist die allgemeinste Gestalt der rotirenden Kettenbahnen bestimmt. Sie ist im Allgemeinen eine Raumcurve, geht aber für $v = 0$ in eine ebene Curve über.

Ehe wir in eine speciellere Untersuchung des Resultates eintreten, wollen wir folgende Bemerkungen vorausschicken. Damit die Kettenbahn reell werde, muss zunächst u so gewählt werden, dass stets $(u + \lambda) \geqq 0$ sei; und da ferner auch $R(u) \geqq 0$ sein muss, so wird im Allgemeinen $u^2 > v^2$ sein müssen, so dass das Argument $u = 0$ nicht in dem für u zulässigen Intervall vorkommen kann, u vielmehr entweder immer positiv oder immer negativ ist. Eine Ausnahme ganz singulärer Art tritt nur ein, wenn gleichzeitig $v = 0$ und $\mu = 0$ ist. Dieser Fall wird in § 10 besprochen werden, in der allgemeinen Untersuchung aber ausgeschlossen.

Durch das Vorzeichen der Quadratwurzel wird der Sinn bestimmt, in welchem man auf der Curve fortschreitet. Wählt man nämlich $\frac{u\,du}{\sqrt{R(u)}}$ positiv, so wächst σ, und der Sinn der wachsenden σ giebt, wenn c oder ε nicht etwa Null ist, zugleich den Sinn der relativen Bewegung an. Wählt man dagegen $\frac{u\,du}{\sqrt{R(u)}}$ negativ, so nimmt σ ab. Erreicht u ein Argument, für welches $R(u)$ sein Zeichen wechselt, so entsteht ein Verzweigungspunkt für die Integrale, der nicht überschritten werden darf, und zur reellen Fortsetzung der Kettenbahn muss man alsdann nicht nur bei du, sondern auch bei $R(u)$ einen Zeichenwechsel eintreten lassen.

Endlich bilden wir noch den Ausdruck

XII a) $$\frac{d\varphi}{d\sigma}=\frac{\alpha}{k}\,\frac{\mu-\varepsilon u}{u(\lambda+u)},$$

dessen Vorzeichen, da $\frac{\alpha}{k}\cdot\frac{1}{\lambda+u}$ stets positiv ist, mit demjenigen von $\left(\frac{\mu}{u}-\varepsilon\right)$ übereinstimmt.

Ist nun $\frac{\mu}{u}-\varepsilon$ positiv, so ist es auch $\frac{d\varphi}{d\sigma}$, und die relative Bewegung der Kette ist an der betrachteten Stelle rechtläufig. Ist dagegen $\frac{\mu}{u}-\varepsilon$ negativ, so ist sie rückläufig. (Für $\varepsilon=0$ oder $c=0$ verliert auch diese Bestimmung ihre mechanische Bedeutung; sie behält nur eine rein geometrische.)

§ 7. Bestimmung der Constanten.

Wir wollen nun für eine reelle Kettenbahn die Constanten gegebenen Anfangszuständen entsprechend bestimmen. Da r^2 nicht negativ werden kann, so giebt es einen Minimalwerth für u, den wir mit u_1 bezeichnen und im Allgemeinen in den Formeln XII) als untere Grenze nehmen. Wenn für $u=u_1$ die Integrale unendlich werden, wie es in gewissen singulären Fällen geschieht, so muss natürlich von dieser Bestimmung in sinngemässer Weise Abstand genommen werden, wie dies im § 10 besprochen werden wird. Die dem Argumente u_1 entsprechenden Werthe der übrigen Variablen sollen ebenfalls durch den Index 1 bezeichnet werden. Der zugehörige Curvenpunkt, von welchem wir ausgehen, sei A. Ist γ_1 der Winkel, welchen die Tangente in A mit der z-Axe bildet, so ist $z'_1=\cos\gamma_1$, und zwar können wir die positive Richtung der z-Axe immer so wählen, dass dieser Werth positiv ist, also γ_1 ein spitzer Winkel. Da nun $u'_1=\left(\frac{du}{d\sigma}\right)_{u=u_1}$ nicht unendlich werden kann — denn selbst die Annahme $u_1=0$ würde bewirken, dass $R(u)$ den Factor u^2 erhielte —, so muss $u'_1=0$, also $r_1r'_1=0$ sein, d. h. entweder $r'_1=0$ oder $r_1=0$. Nehmen wir zunächst den allgemeinen Fall, dass r_1 eine gegebene positive, von Null verschiedene Grösse habe, so ist $r'_1=0$, der Punkt A liegt auf der positiven x-Axe, und die Tangente in A steht senkrecht dazu. Dann ergiebt die letzte Gleichung X)

$$(r_1\varphi'_1)^2=\sin\gamma_1^2,$$

und indem wir unter γ_1 einen positiven oder negativen spitzen Winkel verstehen, je nachdem φ' im Punkte A positiv oder negativ ist, erhalten wir $r_1\varphi'_1=\sin\gamma_1$. Ist γ_1 positiv, so ist die relative Kettenbewegung in A rechtläufig, d. h. der Drehungssinn der relativen Bewegung in A ist derselbe, wie der der Bewegung der Bahn; ist γ_1 negativ, so ist sie **rückläufig**; ist $\gamma_1 = 0$, so ist die relative Bewegung in A weder rechtläufig, noch rückläufig, da die Tangente der z-Axe parallel wird. Wir setzen nun noch

XIII) $$\frac{\alpha}{2}\frac{r_1}{k} = \beta,$$

dann ergeben die übrigen Gleichungen X):

XIV) $$T_1 = k^2(\varepsilon^2 - u_1), \quad \lambda = 2\beta^2 - u_1, \quad \mu = (\varepsilon + \beta \sin\gamma_1)u_1, \quad \nu = u_1 \cos\gamma_1.$$

Ist dagegen $r_1 = 0$, also unter Beibehaltung der Formel XIII) auch $\beta = 0$, so ergiebt die letzte Gleichung X) $r'^2_1 = \sin\gamma_1^2$. Die Gleichungen XIV) bleiben bestehen, und da das Glied $\beta \sin\gamma_1 = 0$ wird, so kommt es nicht darauf an, ob wir γ_1 positiv oder negativ wählen. Wir nehmen deshalb in diesem Falle immer an, dass γ_1 ein **positiver** spitzer Winkel sei (s. § 11, 2). Auch in diesem Falle ist die relative Bewegung in A weder rechtläufig, noch rückläufig, da $\left(\frac{d\varphi}{d\sigma}\right)_1 = 0$ ist.

Ist also bekannt: 1. die Lage des Punktes A, also auch r_1, der Minimalwerth von r, der im Allgemeinen von Null verschieden ist, aber auch gleich Null sein kann, 2. die Richtung der Tangente in A, mithin auch γ_1, endlich 3. die Spannung T_1 im Punkte A, so ist, da α, ε ($= 1$ oder $= 0$) und k von vornherein gegeben sind, β durch XIII), u_1 durch die erste der Gleichungen XIV) bestimmt, λ, μ, ν durch die übrigen Gleichungen XIV). Somit ist die rotirende Kettenbahn vollständig bestimmt.

Ferner erkennt man leicht, dass $R(u_1) = 0$ ist, so dass $R(u)$ den Factor $(u - u_1)$ hat. Nennt man die beiden anderen linearen Factoren von $R(u)$ $(u - u_2)(u - u_3)$, so hat man identisch

XV) $$2(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3) = 2(u^2 - \nu^2)(u + \lambda) - 4(\mu - \varepsilon u)^2.$$

Also ergeben sich zur Bestimmung von u_2 und u_3 die Gleichungen:

$$u_2 + u_3 = 2\varepsilon^2 - \lambda - u_1 = 2(\varepsilon^2 - \beta^2),$$
$$u_2 u_3 = 4\varepsilon\mu - \nu^2 - 2u_1(\varepsilon^2 - \beta^2) = 2u_1(\varepsilon^2 + 2\varepsilon\beta \sin\gamma_1 + \beta^2) - u_1^2 \cos\gamma_1^2.$$

Setzt man

XVI) $$\begin{aligned} Q &= (\varepsilon^2 - \beta^2)^2 - 2u_1(\varepsilon^2 + 2\varepsilon\beta \sin\gamma_1 + \beta^2) + u_1^2 \cos\gamma_1^2 \\ &= [(\varepsilon - \beta)^2 - u_1(1 + \sin\gamma_1)] . [(\varepsilon + \beta)^2 - u_1(1 - \sin\gamma_1)], \end{aligned}$$

so ist

XVII) $$u_2 = (\varepsilon^2 - \beta^2) - \sqrt{Q}, \quad u_3 = (\varepsilon^2 - \beta^2) + \sqrt{Q}.$$

Es ist nun nöthig, die Beschaffenheit der drei Wurzeln von $R(u)$ genauer zu untersuchen.

Nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass u_1 die mittelste der drei Wurzeln, dass also $u_3 > u_1 > u_2$ sei, ist

$$+\sqrt{Q} > u_1 - (\varepsilon^2 - \beta^2) > -\sqrt{Q}, \quad \text{d. h.} \quad [u_1 - (\varepsilon^2 - \beta^2)]^2 < Q$$

oder, mit Rücksicht auf XVI)

$$u_1[u_1 \sin\gamma_1^2 + 4\beta(\varepsilon \sin\gamma_1 + \beta)] < 0.$$

Ist dagegen $u_1[u_1 \sin\gamma_1^2 + 4\beta(\varepsilon \sin\gamma_1 + \beta)] > 0$, so treten noch drei Unterfälle ein. Soll nämlich u_1 die einzige reelle Wurzel sein, so muss es liegen zwischen den positiven Werthen $\frac{(\varepsilon-\beta)^2}{1+\sin\gamma_1}$ und $\frac{(\varepsilon+\beta)^2}{1-\sin\gamma_1}$.

Soll u_1 die grösste der drei reellen Wurzeln sein, so ist $u_1 > \varepsilon^2 - \beta^2 + \sqrt{Q}$, also ist u_1 sicher grösser als $\varepsilon^2-\beta^2$. Soll u_1 die kleinste der drei reellen Wurzeln sein, so ist $u_1 < \varepsilon^2-\beta^2-\sqrt{Q}$, also u_1 sicher kleiner als $\varepsilon^2-\beta^2$.

Hiernach ergeben sich folgende Fälle:

a) Ist $u_1[u_1 \sin\gamma_1^2 + 4\beta(\varepsilon \sin\gamma_1 + \beta)] < 0$, so ist u_1 die mittelste der drei Wurzeln.

b) Liegt u_1 zwischen $\frac{(\varepsilon-\beta)^2}{1+\sin\gamma_1}$ und $\frac{(\varepsilon+\beta)^2}{1-\sin\gamma_1}$, so ist u_1 die einzige reelle Wurzel. [Die Bedingungen *a)* und *b)* schliessen sich gegenseitig aus.]

c) Sind die Bedingungen *a)* und *b)* nicht erfüllt, und ist $u_1 > \varepsilon^2-\beta^2$, so ist u_1 die grösste der drei reellen Wurzeln.

d) Sind die Bedingungen *a)* und *b)* nicht erfüllt, und ist $u_1 < \varepsilon^2-\beta^2$, so ist u_1 die kleinste der drei reellen Wurzeln.

Die Uebergangsfälle geben zu Singularitäten Veranlassang, die später (§ 10) besprochen werden sollen. Mit Rücksicht auf die Formeln XVI) und XVII) finden wir weiter Folgendes:

Ist u_1 negativ, so sind nur die Fälle *a)* oder *d)* möglich, und da in diesem Falle $Q > (\varepsilon^2-\beta^2)^2$, so ist u_2 auch stets negativ, nicht nur im Falle *a)*, sondern auch im Falle *d)*.

Ist u_1 positiv, so kann jeder der vier Fälle *a)*, *b)*, *c)*, *d)* eintreten; es können aber auch gewisse Fälle ausfallen, je nach der Beschaffenheit der übrigen Constanten ε, β, γ_1. Da aber bei positivem u_1 $Q < (\varepsilon^2-\beta^2)^2$ ist, so haben u_2 und u_3 beide dasselbe Vorzeichen wie $\varepsilon^2-\beta^2$. Wenn also u_1 die kleinste oder die mittelste der drei Wurzeln ist, ist jedenfalls auch u_2 positiv. Nur wenn u_1 die grösste der drei reellen Wurzeln ist, können u_2 und u_3 beide positiv oder beide negativ sein.

Für die Untersuchung der Kettenbahn handelt es sich nun nur um solche Intervalle, welche reell mit u_1 zusammenhängen, und für welche $R(u)$ positiv ist. Geht nun u von $-\infty$ bis $+\infty$, so geht auch $R(u)$ von $-\infty$ bis $+\infty$, indem es im Allgemeinen dreimal oder einmal sein Vorzeichen wechselt. Hiernach ergeben sich folgende Hauptfälle:

A. Ist u_1 die einzige reelle Wurzel (*b*), oder ist es die grösste der drei reellen Wurzeln (*c*), so kommt das Intervall von u_1 bis $+\infty$ in Betracht.

B. Ist u_1 die kleinste (*d*) oder die mittelste der drei reellen Wurzeln (*a*), so kommt das endliche Intervall von u_1 bis u_2 in Betracht, welches im ersteren Falle vorwärts, im letzteren rückwärts gerichtet ist. Der Fall, dass u_1 die mittelste Wurzel ist, ist übrigens nach der am Anfang dieses Paragraphen gemachten Festsetzung auszuschliessen, da dann r_1 nicht Minimum, sondern Maximum ist. Es ist aber ohne Weiteres zu erkennen, dass auch für diesen Fall die entwickelten Formeln gelten. Natürlich unterscheidet er sich aber der Form nach nur von dem ersten Falle *B*. Berechnet man u_2, den zugehörigen Werth r_2, $\cos\gamma_2 = \frac{r}{u_2} = \frac{u_1 \cos\gamma_1}{u_2}$, $\beta_2 = \frac{\alpha}{2}\frac{r_2}{\varkappa}$, und setzt man u_2, r_2, γ_2, β_2 an Stelle von u_1, r_1, γ_1, β_1, so wird man auch formell auf den ersten Fall zurückgeführt.

Wir wollen nun die beiden Fälle *A.* und *B.* näher ins Auge fassen.

§ 8. Die unendlichen rotirenden Kettenbahnen.

Wir betrachten jetzt den Fall *A*. Für das jedenfalls positive Argument $u = u_1$ haben die Integrale eine Verzweigung. Den beiden Vorzeichen der Quadratwurzel entsprechen zwei im Punkte *A* stetig ineinander übergehende congruente Aeste, deren einer durch Drehung um den Winkel von 180^0 um die x-Axe mit dem andern zur Deckung gebracht werden kann. Für $u = \infty$ wird $\frac{u}{\sqrt{R(u)}}$ von der Ordnung $\frac{1}{2}$ unendlich klein, $\frac{1}{\sqrt{R(u)}}$ von der Ordnung $\frac{3}{2}$, $\frac{\mu - \varepsilon u}{\lambda + u}\frac{1}{\sqrt{R(u)}}$ im Allgemeinen von der Ordnung $\frac{3}{2}$, wenn $\varepsilon = 0$, sogar von der Ordnung $\frac{5}{2}$. Also wird der Bogen σ unendlich gross, während z und φ endlich bleiben, und für $u = \infty$ die Grenzwerthe Z und Φ annehmen mögen. Wir legen durch den Punkt $z = Z$ der z-Axe eine Ebene parallel der xy-Ebene und eine zweite Ebene durch die z-Axe, welche gegen die positive x-Axe (oder xz-Ebene) um den Winkel φ geneigt ist, lassen den Punkt P auf der betrachteten Curve ins Unendliche gehen und suchen die Abstände, die derselbe im Grenzfalle von beiden Ebenen hat. Diese sind $\lim(Z - z)$ und $\lim[r \sin(\Phi - \varphi)]$ für $u = \infty$. Der erste dieser Grenzwerthe ist Null. Für den zweiten können wir im Grenzfall setzen $r(\Phi - \varphi)$.

Setzt man nun $u = \frac{1}{\vartheta}$, $u_1 = \frac{1}{\vartheta_1}$, so wird $r = \frac{k}{\alpha}\sqrt{\frac{2(1+\lambda\vartheta)}{\vartheta}}$ und

$$\varphi = -\int_{\vartheta_1}^{\vartheta} \frac{\mu\vartheta - \varepsilon}{\lambda\vartheta + 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2(1 - \nu^2\vartheta^2)(1 + \lambda\vartheta) - 4\vartheta(\mu - \varepsilon\vartheta)^2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}.$$

Dies Integral geht für $\vartheta = 0$ in Φ über, mithin ist

$$\Phi - \varphi = +\int_0^{\vartheta} \left[\frac{\mu\vartheta - \varepsilon}{\lambda\vartheta + 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2(1 + \nu^2\vartheta^2)(1 + \lambda\vartheta) - 4\vartheta(\mu - \varepsilon\vartheta)^2}}\right] \frac{d\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}$$
$$= 2M\sqrt{\vartheta},$$

wo M einen Mittelwerth der eckigen Klammer unter dem letzten Integral bedeutet, und

$$r(\Phi - \varphi) = \frac{k}{\alpha} 2M\sqrt{2(1 + \lambda\vartheta)}.$$

Im Grenzfalle wird $\vartheta = 0$, $M = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$, also

$$lim\,[r(\Phi - \varphi)] = -\frac{2k\varepsilon}{\alpha} = -\frac{2c}{\alpha}.$$

Aus dem Vorhandensein dieser Grenzwerthe erkennen wir, dass die Curve zwei Asymptoten besitzt, welche in den Ebenen $z = \pm Z$ liegen, mit der xz-Ebene die Winkel $\pm \Phi$ bilden und von der z-Axe die Abstände $\mp \frac{2c}{\alpha}$ haben. Ist $c = 0$, handelt es sich also um ein Rotationsgleichgewicht, so sind auch diese Abstände Null, die Asymptoten schneiden also dann die z-Axe.

Für $c = k$ oder $\varepsilon = 1$ ergiebt sich noch Folgendes:

Da $u \gtreqless u_1$ beständig positiv ist, so ist das Vorzeichen von $\frac{d\varphi}{d\sigma}$ dasselbe, wie von $\mu - u = \beta \sin\gamma_1 u_1 - (u - u_1)$. Ist also γ_1 negativ, so ist dieser Ausdruck von vornherein negativ, mithin die relative Bewegung durchweg rückläufig. Ist dagegen γ_1 positiv, so ist $\frac{d\varphi}{d\sigma}$ positiv, so lange $u < u_1(\beta \sin\gamma_1 + 1)$ ist. Die relative Bewegung ist also nur in der Nähe des Scheitels rechtläufig, vorher und nachher rückläufig.

Für $c = 0$, also $\varepsilon = 0$ wird das Vorzeichen von $\frac{d\varphi}{d\sigma}$ stets gleich dem von γ_1; dies hat aber keine mechanische Bedeutung.

Die Spannung T endlich ist bei positivem T_1 in der Nähe des Scheitels positiv, sie nimmt aber mit Entfernung vom Scheitel ab und wird schliesslich negativ. Bei negativem T_1 ist sie durchweg negativ. Beschränken wir uns auf Ketten im eigentlichen Sinne des Wortes, so muss die Spannung positiv sein, und dies kann nur in einem begrenzten Bogen in der Nähe des Scheitels stattfinden, in dessen beiden Enden die Spannung Null ist. Eine angenäherte Realisirung des Bewegungsvorganges scheint aus den im § 3 angeführten Gründen nicht wohl ausführbar.

§ 9. Die periodischen Kettenbahnen.

Wir betrachten zweitens den Fall B. Für die beiden Argumente u_1 und u_2, welche beide gleiches Vorzeichen haben, haben die Integrale Verzweigungen. Es sind deshalb r und T periodische Functionen von σ, oder auch von φ oder z. Dem Uebergange von u_1 zu u_2 entspricht eine halbe Periode. Jeder vollen Periode, die mit einem der Werthe u_1 oder u_2 beginnt und mit demselben Werthe endet, entspricht ein Bogen, welcher aus zwei congruenten Stücken besteht, die sich in analoger Weise, wie in § 8 besprochen ist, zur Deckung bringen lassen. Je nach der Beschaffenheit der Constanten kann die ganze Curve rechtläufig oder rückläufig sein, oder es können die der Axe näheren Theile rechtläufig, die ferneren rückläufig sein, oder es kann das Umgekehrte stattfinden. (Man vergleiche die speciellen Fälle in § 11.) Da, wenn u_1 die kleinste der drei Wurzeln ist, alle Werthe des Intervalles von u_1 bis u_2 kleiner sind, als $\varepsilon^2-\beta^2$, so ist die Spannung T stets positiv. Bei den periodischen Kettenbahnen handelt es sich also stets um Ketten im eigentlichen Sinne. Die Bewegung in derartigen Bahnen lässt sich in gewissen Fällen angenähert realisiren, worüber weiter unten in § 12 einige Bemerkungen folgen sollen.

§ 10. Die singulären Fälle.

Wenn zwei oder alle drei Wurzeln von $R(u)$ zusammenfallen, hören die Integrale auf, elliptisch zu sein, und es treten gewisse singuläre Uebergangs- und Grenzfälle ein, die wir jetzt besprechen wollen.

1. Der erste singuläre Fall tritt ein, wenn $u_1 \gtrless 0$ und $u_1=u_2<u_3$ ist. Dann ist $R(u)$ in der Nachbarschaft von u_1 negativ und das Intervall ist Null. Es bleibt also u_1 constant und die Kettenbahn ist eine Schraubenlinie oder ein Kreis (vergl. § 5).

Dieser Fall entsteht, wenn

$$u_1=-\frac{4\beta(\varepsilon \sin\gamma_1+\beta)}{\sin\gamma_1{}^2} \text{ und } u_1<\varepsilon^2-\beta^2 \quad (\varepsilon=1 \text{ oder } \varepsilon=0).$$

2. Der zweite Fall tritt ein, wenn $u_1 \gtrless 0$ und *a)* $u_3=u_1>u_2$ ist, oder, was dasselbe in anderer Form ausdrückt, *b)* $u_2=u_3>u_1$.

Da diese letztere Bedingung immer durch Vertauschung der Anfangswerthe auf die erstern zurückgeführt werden kann, so genügt es, den Fall *a)* zu besprechen. Alsdann ist $R(u)$ positiv sowohl zwischen u_2 und u_1, als auch zwischen u_1 und $+\infty$. Da aber für $u=u_1$ z, σ und φ logarithmisch unendlich werden, darf man beim Integriren nicht von u_1 als unterer Grenze ausgehen. Dagegen wird für $u=u_1$ $r=r_1$ und $\lim\frac{dz}{ds}=\cos\gamma_1$. Geht man von einem Werthe aus, der grösser als u_1 ist, so erhält man einen Curvenast, welcher in ähnlicher Weise unendlich wird, wie die in § 8 besprochene Curve, welcher aber, rückwärts fortgesetzt, sich asymptotisch von aussen her einer Schraubenlinie, oder für $\gamma_1=\pm\frac{\pi}{2}$ einem Kreise nähert. Durch Aenderung des Vorzeichens von $R(u)$ erhält man einen Curvenast von analoger Beschaffenheit, bei welchem die Bewegungsrichtung der Kette nach innen geht, wenn sie im ersten Falle nach aussen ging. Diese Curvenäste bilden Grenzfälle für die Curve des § 8. Geht man von einem Werthe aus, der $<u_1$ ist, z. B. von u_2, so erhält man einen zweiten Curvenast, welcher einen inneren Scheitel, entsprechend u_2, hat und deren beide einander congruente Aeste sich von innen her asymptotisch je einer Schraubenlinie nähern. Dieser Curvenast tritt als Grenzfall der periodischen Curven (§ 9) auf.

Die beiden Curvenäste, welche sich ergeben haben, sind für das mechanische Problem als verschiedene Lösungen zu betrachten.

Der Fall 2. *a*) entsteht, wenn

$$u_1 = -\frac{4\beta(\varepsilon \sin\gamma_1 + \beta)}{\sin\gamma_1{}^2} \quad \text{und} \quad u_1 > \varepsilon^2 - \beta^2 \quad (\varepsilon = 1 \text{ oder } \varepsilon = 0).$$

Der Fall 2. *b*) entsteht, wenn

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{(\varepsilon-\beta)^2}{1+\sin\gamma_1} \\ \text{oder } u_1 &= \frac{(\varepsilon+\beta)^2}{1-\sin\gamma_1} \end{aligned}\right\} \quad \text{und} \quad u_1 < \varepsilon^2 - \beta^2 \quad (\varepsilon = 1, \text{ aber nicht } \varepsilon = 0).$$

3. Der dritte Fall tritt ein, wenn $u_1 > 0$ und $u_1 > u_2 = u_3$.

Die Gestalt der Curve weicht nicht wesentlich von der im allgemeinen Falle *A.* ab. Der Fall entsteht, wenn

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{(\varepsilon-\beta)^2}{1+\sin\gamma_1} \\ \text{oder } u_1 &= \frac{(\varepsilon+\beta)^2}{1-\sin\gamma_1} \end{aligned}\right\} \quad \text{und} \quad u_1 > \varepsilon^2 - \beta^2 \quad (\varepsilon = 1 \text{ oder } \varepsilon = 0).$$

4. Der vierte Fall, von noch singulärerer Natur, tritt ein, wenn $u_1 > 0$ und $u_1 = u_2 = u_3$.

Der Verlauf der Curve ist im Wesentlichen derselbe, wie in 2. *a*) für das Intervall von u_1 bis $+\infty$. Aber für $u = u_1$ werden die Integrale nicht logarithmisch unendlich, sondern algebraisch. z und σ drücken sich rational durch $w = \sqrt{2(u-u_1)}$ aus, φ besteht aus drei Gliedern, deren eines umgekehrt proportional mit w ist, während das andere dem $\operatorname{arctg}\frac{w}{2\sqrt{u_1}}$ proportional ist, deren drittes constant ist.

Dieser Fall entsteht, wenn $\varepsilon = 1$, aber nicht $\varepsilon = 0$, und

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{(1-\beta)^2}{1+\sin\gamma_1} \\ \text{oder } u_1 &= \frac{(1+\beta)^2}{1-\sin\gamma_1} \end{aligned}\right\} \quad \text{und} \quad u_1 = 1-\beta^2,$$

also

$$\sin\gamma_1 = -\frac{2\beta}{1+\beta} \quad (\beta < 1) \quad \text{oder} \quad \sin\gamma_1 = -\frac{2\beta}{1-\beta} \quad (\beta < \tfrac{1}{3}).$$

5. Eine ganz besondere Behandlung macht, wie schon im § 6 gesagt ist, die Annahme nöthig, dass u für einen reellen Punkt der Curve Null sein könne, was in keinem der bisher betrachteten Fälle vorkommen konnte. Soll nämlich für $u = 0$ sowohl r^2, als auch $R(u)$ positiv bleiben, so muss gleichzeitig $\mu = 0$ und $\nu = 0$ sein. [Siehe die Formeln XII).] Ist dann noch $\varepsilon = 0$, d. h. $c = 0$, handelt es sich also um gewöhnliches Rotationsgleichgewicht, so wird auch $\varphi = 0$, d. h. die Curve ist eine Gerade, welche die z-Axe senkrecht durchschneidet. Ist aber $\varepsilon = 1$, d. h. $c = k$, so ergeben die Formeln XII)

$$R(u) = 2u^2(u+\lambda-2), \quad r^2 = \frac{2k^2}{\alpha}(u+\lambda), \quad T = k^2(1-u),$$

$$z = 0, \quad \sigma = \frac{k}{\alpha}\int\limits_{u_1}^{u}\frac{du}{\sqrt{2(u+\lambda-2)}}, \quad \varphi = -\int\limits_{u_1}^{u}\frac{1}{u+\lambda}\,\frac{du}{\sqrt{2(u+\lambda-2)}}.$$

Dadurch, dass unter beiden Integralzeichen der Factor u fortgehoben ist, ist eine vollständig unbestimmte Lösung, die dem Argument $u = 0$ entspricht, ausgeschieden. Für die alsdann noch übrig bleibende bestimmte Lösung aber bedingt der Werth $u = 0$ keine Verzweigung oder Unstetigkeit mehr, ist also überhaupt kein ausgezeichnetes Argument mehr. Vielmehr ergiebt sich als untere Grenze für die reelle Curve $u_1 = 2 - \lambda$. Setzt man dann $\sqrt{2(u+\lambda-2)} = w$, so kommt $\sigma = \frac{k}{\alpha}w$, $\varphi = -\,arctg\,\frac{w}{2}$, also $w = -2\,tg\,\varphi$ und $r = \frac{2k}{\alpha}\,\frac{1}{\cos\varphi}$. Die Kettenbahn ist eine Gerade, welche von der Axe den Abstand $r_1 = \frac{2k}{\alpha}$ hat. Wir sind also auf die singuläre Lösung des § 3 unter b) zurückgeführt.

§ 11. Zwei specielle Fälle. ($\gamma_1 = 0$ und $r_1 = 0$.)

Da die allgemeine Lösung wesentlich von drei willkürlichen Constanten abhängt, nämlich λ, μ, ν oder β, γ_1, u_1, so können die Kettenbahnen sehr verschiedene Gestalten haben. Um diese der Anschauung näher zu bringen, ist es zweckmässig, gewisse specielle Fälle in Betracht zu ziehen, in denen sich die Resultate in einer oder der andern Weise vereinfachen. Hierbei wollen wir von den Singularitäten absehen, die im vorigen Paragraphen behandelt worden sind, wenn sie auch als Grenzfälle vorkommen können.

1. Wir betrachten zunächst den Fall, in welchem $\gamma_1 = 0$ ist, also die Tangente der Curve im Punkte A (dem Scheitel) parallel der z-Axe ist.

Dann wird XIV)

$$\lambda = 2\beta^2 - u_1, \quad \mu = \varepsilon u_1, \quad \nu = u_1 \quad \text{und} \quad \frac{d\varphi}{d\sigma} = -\frac{\alpha}{k}\cdot\varepsilon\,\frac{u-u_1}{[2\beta^2+(u-u_1)]\,u}.$$

Für $\varepsilon = 0$ ist $\frac{d\varphi}{d\sigma} = 0$, also $\varphi = 0$, d. h., die Curve liegt in der xz-Ebene.

Ist aber $\varepsilon = 1$, so ist $\frac{d\varphi}{d\sigma} = -\frac{\alpha}{k}\,\frac{u-u_1}{[2\beta^2+(u-u_1)]\,u}$, und dieser Ausdruck ändert innerhalb des Intervalles, welchem die reelle Kettenbahn entspricht, sein Zeichen nicht, er wird nur Null für $u = u_1$. Also ist die Curve entweder immer rechtläufig, oder immer rückläufig. Ferner ist

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{k}{\alpha}\,\frac{1}{\sqrt{2\beta^2+u-u_1}}\,\frac{\sqrt{R(u)}}{(u-u_1)},$$

wird also unendlich für $u = u_1$. In den Stellen $u = u_1$ hat demnach die Projection auf die xy-Ebene Rückkehrpunkte. Nach den Kennzeichen des § 7 ergiebt sich nun Folgendes:

a) Ist $u_1 < 0$, so ist u_1 die mittelste der drei Wurzeln, also ist $u_2 < u_1$ und $u - u_1$ negativ, und da $(2\beta^2 + u(u - u_1))$ stets positiv ist, so ist $\frac{d\varphi}{d\sigma}$ stets negativ, d. h. die relative Bewegung ist immer rückläufig. Die Projection auf die xy-Ebene hat Aehnlichkeit mit einer einfachen Hypocykloide

c) Ist $u_1 < (1 - \beta^2)$, aber positiv, so ist u_1 die kleinste drei Wurzeln, also $u - u_1$ stets positiv und $\frac{d\varphi}{d\sigma}$ stets negativ. Die relative Bewegung ist ebenfalls überall rückläufig, aber die Projection auf die xy-Ebene hat Aehnlichkeit mit einer einfachen Epicykloide.

b) und *d)* Ist $u_1 > 1 - \beta^2$, so ist $\frac{d\varphi}{d\sigma}$ ebenfalls negativ, die relative Bewegung also auch hier rückläufig; die Curve ist nicht periodisch, die Projection auf die xy-Ebene besteht aus zwei symmetrischen, in der Spitze zusammenkommenden unendlichen Aesten.

Wenn also $\gamma_1 = 0$ ist, so ist die relative Bewegung stets rückläufig.

Nun kann man aber durch eine sehr kleine Aenderung der Constanten die Curve so deformiren, dass die Rückkehrpunkte der Projection verschwinden, und zwar, wenn γ_1 positiv wird, wird die Bewegung in der Nähe des Scheitels rechtläufig. Es müssen demnach dann die Rückkehrpunkte in kleine Schleifen übergehen. Wird dagegen γ_1 negativ, so ist die Bewegung im Scheitel rückläufig, sie ist es also durchweg. Auf diese Weise gelangen wir zu allen möglichen Fällen hinsichtlich des Sinnes der relativen Bewegung, nur nicht zu dem, in welchem die Bewegung durchweg rechtläufig ist.

2. Wir betrachten jetzt solche Curven, welche durch die z-Axe gehen, bei welchen also $r_1 = 0$ oder, was dasselbe ist, $\beta = 0$ ist, so dass [XIV)] $\lambda = -u_1$, $\mu = +\varepsilon u_1$ ist. Ist dann $c = 0$ oder $\varepsilon = 0$, so ist φ constant $= 0$, und die Curve liegt in der xz-Ebene. Ist dagegen c nicht Null, also $\varepsilon = 1$, so reducirt sich φ auf ein elliptisches Integral erster Gattung, und es wird $\frac{d\varphi}{dz} = \frac{\alpha}{v.k}$ constant, so dass die Curve auf einer Schraubenfläche liegt.

Wir bilden ferner $\frac{d\varphi}{d\sigma} = -\frac{\alpha}{ku}$. Diese Gleichung lässt erkennen, dass die Bewegung bei positivem u immer rückläufig, bei negativem u immer rechtläufig ist. Ausserdem ergiebt sich $\frac{dr}{d\sigma} = \frac{\sqrt{(u - u_2)(u - u_3)}}{u}$, weil sich der Factor $\sqrt{u - u_1}$ forthebt. Also verschwindet $\frac{dr}{d\sigma}$ nicht für

$u = u_1$, d. h. für $r = 0$, und r wechselt, so oft es Null wird, sein Zeichen. Nach den in § 7 entwickelten Kennzeichen entstehen nun folgende Fälle:

Da $u_1 [u_1 \sin\gamma_1^2 + 4\beta(\varepsilon \sin\gamma_1 + \beta)]$ sich auf $u_1^2 \sin\gamma_1^2$ reducirt, also immer positiv ist, ist u_1 nie die mittlere der drei Wurzeln. Ist u_1 negativ oder ist es positiv, also $< \frac{1}{1+\sin\gamma_1}$, wo γ_1 einen positiven spitzen Winkel bedeutet (vergl. § 7), so ist u_1 die kleinste der drei reellen Wurzeln. Unter den periodischen Curven sind also solche, für welche die Bewegung immer rechtläufig ist ($u_1 < 0$), und solche, für welche sie immer rückläufig ist $\left(\frac{1}{1+\sin\gamma_1} > u_1 > 0\right)$. Ist dagegen $u_1 > \frac{1}{1+\sin\gamma_1}$, so geht die Curve ins Unendliche, weil entweder u_1 die einzige reelle Wurzel ist, oder die grösste der drei reellen Wurzeln, je nachdem u_1 grösser oder kleiner als $\frac{1}{1-\sin\gamma_1}$ ist. Die relative Bewegung ist alsdann stets rückläufig. Die Projectionen der periodischen Curven auf die xy-Ebene haben in der Gestalt Aehnlichkeit mit solchen erweiterten Epicykloiden, welche durch den Mittelpunkt der Bahn hindurchgehen; die Projectionen der unendlichen Curven haben Aehnlichkeit mit einem Hyperbelaste. Aendert man auch hier wieder die Constanten ein wenig, so kann man bewirken, dass $\frac{d\varphi}{d\sigma}$ sein Zeichen nicht wechselt, oder dass es dasselbe wechselt, so dass also auch solche Curven allgemeinerer Art entstehen können, auf denen die relative Bewegung durchweg rechtläufig ist. Diese letzteren gehen aber niemals ins Unendliche, sondern sie sind immer periodisch.

§ 12. Dritter specieller Fall $\nu = 0$. (Ebene rotirende Kettenbahnen.) Angenäherte Realisirung desselben in gewissen Fällen.

Der in der vorliegenden Arbeit betrachtete Bewegungsvorgang wird sich, soweit es sich nicht um den speciellen Fall des Rotationsgleichgewichts handelt, in welchem die Realisirung wohl stets ausführbar ist, nur in gewissen Fällen physikalisch angenähert realisiren lassen. Da zunächst negative Spannungen bei eigentlichen Ketten nicht zulässig sind, so sind die unendlichen Kettenbahnen zum Theil ganz, zum Theil bis auf kleine Bogen zu beiden Seiten des Scheitels von vornherein auszuschliessen; aber auch bei positiver Spannung wird es schwer sein, für Aufrechterhaltung der Spannung in den Endpunkten zu sorgen.

Es giebt aber Fälle, in welchen die physikalischen Bedingungen der angenäherten Realisirung verhältnissmässig einfache sind, und darunter einen Fall, bei welchem sie mit sehr einfachen Hilfsmitteln ausgeführt werden kann. Es sind das diejenigen Fälle, in welchen die Kettenbahn in einer Ebene senkrecht zur Axe liegt und periodisch ist. Alsdann ist $\varepsilon = 1$, $\nu = 0$, $sin \gamma_1 = \pm 1$ und die Formeln XIV)—XVII) und XII) ergeben

$$T_1 = k^2(1-u_1), \quad \lambda = 2\beta^2 - u_1, \quad \mu = (1 \pm \beta) u_1,$$

$$R(u) = 2(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3) = 2u^2(u-u_1+2\beta^2) - 4((u_1-u) \pm \beta u_1)^2$$

$$u_2 = (1-\beta^2) - \sqrt{(1\pm\beta)^2[(1\mp\beta)^2 - 2u_1]},$$

$$u_3 = (1-\beta^2) + \sqrt{(1\pm\beta)^2[(1\mp\beta)^2 - 2u_1]};$$

$$\varepsilon = 0, \quad \sigma(u) = \frac{k}{\alpha}\int_{u_1}^{u} \frac{u\,du}{\sqrt{R(u)}}, \quad \varphi(u) = \int_{u_1}^{u} \frac{(u_1-u) \pm \beta u_1}{2\beta^2 + (u-u_1)} \frac{du}{\sqrt{R(u)}},$$

$$\sigma(u_2) = \Sigma, \quad \varphi(u_2) = \Phi;$$

$$\frac{d\varphi}{d\sigma} = \frac{\alpha}{k} \frac{1}{2\beta^2 + (u-u_1)} \left(\frac{u_1}{u}(1 \pm \beta) - 1\right).$$

Damit aber die Curve periodisch sei, muss nach den in § 7 entwickelten Bedingungen sein:

$$u_1 < \frac{(1\mp\beta)^2}{2},$$

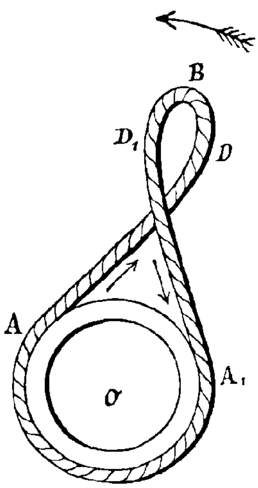
und zwar bedeutet u_1 die kleinste oder die mittelste der drei reellen Wurzeln, je nachdem $u_1[u_1 - 4\beta(1\pm\beta)]$ positiv oder negativ ist.

Im ersteren Falle ist $u_1 < u < u_2$, im letzteren $u_1 > u > u_2$. Dann sind Σ und Φ die halben Perioden von σ und φ.

Im Allgemeinen ist nun $\Phi:\pi$ eine irrationale Zahl, also die Curve nicht geschlossen. Man kann aber die Constanten so bestimmen, dass $\Phi:\pi$ rational ist. Dann ist die Kettenbahn geschlossen, und die Kette selbst kann es ebenfalls sein. Hat also eine freie geschlossene Kette eine solche Form, und ertheilt man allen ihren Gliedern erstens eine Geschwindigkeit $c = k$ in Richtung der Tangente und zweitens eine Drehung um den Mittelpunkt mit der Winkelgeschwindigkeit α, so bewegt sich die Kette beständig mit der relativen Geschwindigkeit c in der rotirenden Bahn. Dieselbe Bewegung kann auch eine im luftleeren Raume geworfene schwere Kette relativ gegen den Schwerpunkt annehmen, während der Schwerpunkt eine Parabel beschreibt. Es ist dazu nur nöthig, dass diese Bewegung durch die Anfangszustände eingeleitet sei.

Es giebt aber noch eine zweite Art der Realisirung, bei welcher $\Phi:\pi$ ein ganz beliebiger Werth, rational oder irrational sein kann. Man gehe nämlich auf einer periodischen ebenen Kettenbahn von einem Punkte A, dessen Vector r_1 ein Minimum ist, aus um den Bogen 2Σ oder auch 4Σ, 6Σ u. s. w. vorwärts, dann gelangt man zu einem Endpunkte A_1, dessen Vector ebenfalls den Minimalwerth r_1 hat, und der bezeichnete Bogen berührt in seinen Endpunkten den Kreis mit dem Radius r_1. Man denke sich ferner diesen Bogen in beiden Enden durch Kreisbogen dieses Kreises fortgesetzt und geschlossen.

Es sei nun eine Kette von der beschriebenen Form um einen festen Cylinder gelegt, dessen Querschnitt eben jener Kreis ist. Wir nehmen zuerst an, dass zwischen der Kette und dem Cylinder keine Reibung stattfinde. Giebt man dann allen freien Elementen der Kette dieselbe Geschwindigkeit wie oben, zusammengesetzt aus der Geschwindigkeit $c=k$ in Richtung der Tangente und aus $r\alpha$ senkrecht gegen den Vector, so dass die Elemente in A und A_1 die tangentiale Geschwindigkeit $\pm k+\alpha r_1 = k(2\beta\pm1)$ erhalten, und giebt man allen Elementen, die auf dem Kreisbogen liegen, ebenfalls die Geschwindigkeit $k(2\beta\pm1)$, so setzt sich die Bewegung in der Weise fort, dass der freie Theil der Kette sich mit der relativen Geschwindigkeit k in der mit der Winkelgeschwindigkeit α rotirenden Bahn bewegt, ebenso aber auch der kreisförmige Theil, welcher auf dem Cylinder gleitet. In dem einen der beiden Punkte A und A_1 wickelt sich hierbei die Kette ab, im andern Punkte wickelt sie sich auf. Die Spannung in dem freien Theile ändert sich hierbei den obigen Formeln entsprechend, in dem anliegenden Theile ist sie constant und ebenso gross wie in A und A_1. In der That sind alsdann sowohl für den freien, wie für den gleitenden Theil alle mechanischen Bedingungen erfüllt und die Bewegung kann sich nicht anders, als in der beschriebenen Art fortsetzen. Wenn Reibung zwischen dem Cylinder und der Kette vorhanden ist, kann die Bewegung in der beschriebenen Weise nicht stattfinden, wenn der Cylinder ruht, wohl aber, wenn er sich so dreht, dass die Punkte der Oberfläche dieselbe Geschwindigkeit haben, wie die anliegende Kette, so dass die Winkelgeschwindigkeit des Cylinders $=\frac{k}{r_1}(2\beta\pm1)=\alpha\pm\frac{k}{r_1}$ ist (also **nicht** gleich der Winkelgeschwindigkeit der Kettenbahn). Ist alsdann die Bewegung der Kette, wie oben eingeleitet, so kommt die Reibung gar nicht zur Wirkung, weil die Spannung des anliegenden Theiles constant ist und der anliegende Theil der Kette nicht gleitet. Die Reibung kann aber sehr wohl kleinen Störungen gegenüber regulirend wirken.



Besonders einfach ist der Fall, wo $\sin\gamma_1 = -1$ ist, d. h. die relative Bewegung in A rückläufig ist, und $\beta=\frac{1}{2}$. Dann ist die Geschwindigkeit des anliegenden Theiles der Kette Null, und der Cylinder muss, wenn Reibung vorhanden ist, in Ruhe bleiben. Dieser Fall kann folgendermassen versinnlicht werden (vergl. die Figur).

Man hängt über einen cylindrischen Körper mit rauher Oberfläche, dessen Axe horizontal gestellt ist, z. B. über ein Muffenfutteral, eine geschlossene Kette und versetzt dieselbe durch passende Bewegung des Cylinders so in Bewegung, dass sie schnell um den Cylinder schwingt, indem sie sich vorn in A von demselben abrollt, hinten in A_1 auf ihn aufrollt, längs des Bogens $A_1 CA$ aber ruhend anliegt; dann stellt sich nach einigem Schwanken, wenn man von dem modificirenden Einfluss der Schwerkraft absehen kann, eine gewisse Stabilität her, indem der freie Theil sich in einer rotirenden Kettenbahn bewegt. (Die Drehungsrichtung der Bahn ist durch den äusseren Pfeil angedeutet, die Richtung der relativen Bewegung der Kette in der Bahn durch die inneren Pfeile.) Die Kettenbahn zeigt, der Rechnung entsprechend, eine schleifenförmige Gestalt. Die relative Bewegung ist nur ganz in der Nähe des äusseren Scheitels B rechtläufig (nämlich auf dem Bogen DBD_1), sonst rückläufig. Die allgemeine Form der Bahn lässt sich übrigens auch ganz elementar folgendermassen erklären. Während sich ein Kettenelement von der Axe entfernt, muss seine seitliche Geschwindigkeit beständig zunehmen. Da nun die Spannungen zwischen dem Element und seinen Nachbarelementen die einzigen Kräfte sind, welche das Element angreifen, so kann die seitliche Geschwindigkeit nur zunehmen, wenn die Kettenbahn an der betreffenden Stelle nach vorn concav ist. Dies gilt für alle Punkte zwischen A und B. Während sich ein Element dagegen der Axe nähert, nimmt seine seitliche Geschwindigkeit beständig ab, also muss die Kettenbahn zwischen B und A_1 nach hinten zu concav sein. Das Element, welches sich in B befindet, muss eine nach dem Mittelpunkte zu gerichtete Beschleunigung empfangen, also muss die Kettenbahn bei B nach innen concav sein. Durch diese Ueberlegungen erkennt man ohne Rechnung, dass im vorliegenden Falle die Kettenbahn eine Schleife bilden muss, falls überhaupt eine Bewegung der Kette in einer rotirenden Bahn möglich ist. Eine wirkliche Einsicht in den ganzen Bewegungsvorgang aber wird man nicht ohne eingehende analytische Betrachtungen gewinnen, wie sie den Gegenstand dieser Arbeit gebildet haben.

§ 13. Schlussbemerkung.

Zum Schluss möge noch auf zwei Folgerungen hingewiesen werden, welche sich an unsere Untersuchungen knüpfen lassen. Wir können nämlich ohne Aenderung der Rechnung die Resultate zunächst dadurch noch etwas verallgemeinern, dass wir dem beweglichen Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt wir bisher als fest angenommen haben, ausser der Rotation um die z-Axe noch eine beliebig gerichtete constante Geschwindigkeit ertheilen. Die relative Bewegung der Kette kann sich hierbei genau so vollziehen, wie wenn der Anfangspunkt ruhte. Insbesondere kann diese Translation in Richtung der z-Axe geschehen, so dass die Kettenbahnen, welche wir ermittelt haben, nicht einfach rotiren, sondern eine Schraubenbewegung ausführen, indem sie sich mit der Winkelgeschwindigkeit α um die z-Axe drehen und gleichzeitig mit beliebiger constanter Geschwindigkeit parallel der z-Axe verschieben, während die Elemente der Kette sich in dieser Bahn mit der constanten Geschwindigheit c verschieben. Auch derartige Bewegungen freier Ketten in schraubenförmig bewegten Bahnen würden sich, wenn die Bahnen periodisch sind, angenähert realisiren lassen, und zwar auf ganz ähnliche Weise, wie oben besprochen ist, indem sich das vordere Ende des freien Kettenstückes von einem ruhenden oder rotirenden Cylinder schraubenförmig abwickelt, das hintere Ende ebenso aufwickelt.

Noch allgemeiner kann sich ferner die betrachtete relative Bewegung vollziehen, wenn auf alle Glieder der Kette eine nach Grösse und Richtung constante beschleunigende Kraft wirkt, z. B. die Schwere, und der Anfangspunkt des beweglichen Systems irgend eine dieser Beschleunigung entsprechende geradlinige oder parabolische Bewegung hat, während sich das bewegliche System ausserdem mit der Winkelgeschwindigkeit α um die z-Axe dreht, deren Richtung unverändert bleibt — ein Fall, auf welchen wir übrigens beiläufig bereits in § 12 hingewiesen haben.

Kleinere Mittheilungen.

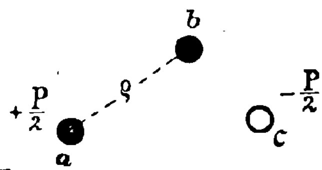
V. Methode zur Bestimmung des specifischen Leitungsvermögens des Erdbodens.

Die Messung des specifischen Leitungsvermögens des Erdbodens, welche in mehrfacher Hinsicht von Werth ist, lässt sich in sicherer Weise weder an einem prismatischen Versuchskörper vornehmen, da der innere Zusammenhang desselben und die von aussen wirkenden Drücke, ebenso der Feuchtigkeitsgehalt dem ursprünglichen Zustande nicht mehr entsprechen, — noch auch mittels in die Erde gesenkter Elektroden von bekannter Gestalt, da die Innigkeit der Berührung derselben mit dem Erdboden sich der genauen Beurtheilung entzieht.

Eine brauchbare Methode lässt sich aus der von mir im Jahrg. 1888 dieser Zeitschrift S. 372 flg. entwickelten Widerstandsgleichung 4) einer Potentialniveaufläche herleiten.

Aus derselben folgt, dass in einem leitenden Mittel das Potential V_b eines Punktes b ausserhalb der mit den constanten Potentialwerthen $+\frac{P}{2}$ und $-\frac{P}{2}$ versehenen Elektroden a und c (Fig. 1) gleich ist:

Fig. 1.



$$1) \qquad V_b = \frac{P}{2}\,\frac{W_{bc} - W_{ab}}{W_{ac}},$$

wenn unter W_{bc}, W_{ab}, W_{ac} die zwischen b und c, a und b, a und c gemessenen Gesammtwiderstände des leitenden Mittels verstanden werden.

Ist das Medium, in welchem die Elektroden liegen, ein unendlich ausgedehntes, homogenes, schlechtleitendes und rückt c in unendliche Entfernung, während sein Ausbreitungswiderstand durch Vergrösserung der Elektrode zum Verschwinden gebracht wird, so geht Gleichung 1) über in

$$2) \qquad V_b = \frac{P}{2}\,\frac{W_b - W_{ab}}{W_a},$$

worin W_b und W_a die Einzelausbreitungswiderstände von a und b bedeuten.

Hierbei ist vorausgesetzt, dass auch in b sich ein leitender Körper befinde, welcher als Elektrode benutzt werden kann.

Unter den angegebenen Verhältnissen lässt sich das Potential V_b auch elektrostatisch bestimmen. Es ist, so lange a und b nicht sehr dicht zusammenrücken,

$$V_b = \frac{P}{2}\,\frac{2\,C_a - \varrho}{\varrho}, \tag{3}$$

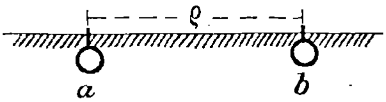
worin ϱ den Abstand von b zu a und C_a die elektrostatische Capacität von a ausdrücken.

Da andererseits

$$W_a = \frac{1}{4 k \pi C_a} \tag{4}$$

ist, ergiebt sich aus 2), 3) und 4) die schon früher von mir aufgestellte Gleichung*

Fig. 2.



5) $$W_{ab} = W_a + W_b - \frac{1}{2 k \pi \varrho}$$

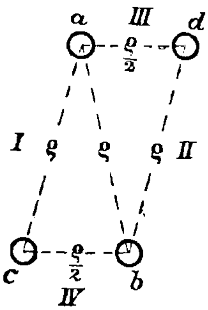
oder (Fig. 2) im einseitig durch eine Ebene begrenzten unendlichen Medium

$$W_{ab} = W_a + W_b - \frac{1}{k \pi \varrho},$$

worin $\frac{1}{k}$ der specifische Leitungswiderstand des Mittels ist.

Hieraus geht für die Untersuchung des Erdbodens Folgendes hervor:

Fig. 3.



Ordnet man vier Elektroden im Boden so an, wie dies Fig. 3 und 4 erkennen lassen, und bezeichnet W_{ac} mit I, W_{bd} mit II, W_{ad} mit III, W_{bc} mit IV, so ist

$$I = W_a + W_c - \frac{1}{k \pi \varrho},$$

$$II = W_b + W_d - \frac{1}{k \pi \varrho},$$

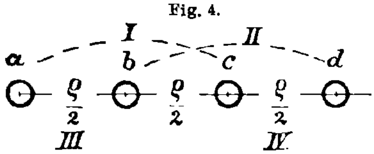
$$III = W_a + W_d - \frac{2}{k \pi \varrho},$$

$$IV = W_b + W_c - \frac{2}{k \pi \varrho};$$

folglich

$$\frac{1}{k} = \frac{\pi \varrho}{2}\,(I + II - III - IV).$$

Fig. 4.



Die Bestimmung von k ist somit unabhängig gemacht von der Gestalt der Elektroden und von der Innigkeit ihrer Berührung mit dem Erdboden. Sie ist andererseits in Bezug gebracht zu der ursprünglichen natürlichen Beschaffenheit des Bodens, an dessen Lagerung und Feuchtigkeitsgehalt nichts geändert wird.

Bei den hiernach bereits angestellten zahlreichen Messungen ist $\varrho = 10$ m genommen worden. Die Werthe $\frac{1}{k}$ liegen für die verschiedenen untersuchten Bodensorten innerhalb der Grenzen 100 Millionen und 7500 Millionen. $\left(\frac{1}{k}\right.$ für Quecksilber $= 0{,}9434.\left.\right)$

* Elektrotechn. Zeitschrift, Berlin 1888, S. 375.

Dr. R. Ulbricht,
Betriebstelegr.-Oberinspector.

VI. Allgemeine Sätze über die elektromotorische Induction.

Von Dr. G. Adler in Wien.

In einer, der Wiener Akademie vorgelegten Abhandlung gelangt der Verfasser, als ausschliessliches Beweisprincip den bekannten Gauss'schen Satz $\Sigma e' V = \Sigma V' e$ benutzend, zu folgenden Ergebnissen.

Die Influenzwirkung eines elektrischen Punktes hat für einen isolirten Conductor eine vom Betrage seiner Ladung unabhängige Veränderung seines Potentialniveaus zur Folge; diese Veränderung ist eine und dieselbe für sämmtliche Conductoren, deren Oberflächen ein System einander zugehöriger Niveauflächen bilden, und somit ist ihr Betrag gleich demjenigen Potentialnivea, welches die im elektrischen Punkte concentrirte Ladung jener Niveau fläche, diese leitend gedacht, ertheilen würde, welche durch den influenzirenden Punkt hindurchgeht.

Die Influenzwirkung des elektrischen Punktes bewirkt in einem auf constantem Potential erhaltenen Conductor eine Veränderung der auf diesem befindlichen Ladung; diese Veränderung ist unabhängig vom Potentialniveau des Conductors, dem Zeichen nach entgegengesetzt der Ladung des influenzirenden Punktes; sie beträgt einen Bruchtheil dieser letzteren, der gegeben ist durch das Verhältniss der Capacität des Conductors zur Capacität jener ihm zugehörigen Niveaufläche, die durch den influenzirenden Punkt hindurchgeht. Für zwei demselben System von Niveauflächen angehörige Conductoren ist somit die in ihnen durch denselben elektrischen Punkt influenzirte Ladung ihrer Capacität proportional.

Die Capacität eines Condensators, der von zwei einander umschliessenden Conductoren von den Capacitäten C_1 und C_2, die demselben System von Niveauflächen angehören, gebildet ist, ist gegeben durch

$$C' = \frac{C_1}{1 - \frac{C_1}{C_2}}.$$

Die Abhandlung stellt sodann die allgemeinen Formeln für die elektro statische Induction durch ein beliebiges elektrisches System auf, und behandelt im Besonderen die wechselseitige Influenz zweier Conductoren. Sie findet, dass bei der Influenzwirkung zweier auf constanten Potentialen erhaltener Conductoren die Ladung beider im Allgemeinen sich verringert, wenn die Potentialwerthe gleichen Zeichens, hingegen stets ansteigt, wenn die Potentialwerthe entgegengesetzten Zeichens sind. Sie findet, dass umgekehrt die wechselseitige Influenzwirkung zwischen zwei isolirten Conductoren bei gleichen Zeichen ihrer Ladungen das Potentialniveau im Allgemeinen erhöht, bei entgegengesetzten stets erniedrigt. Die Grösse dieser Veränderung eingehend untersuchend, gelangt sie zu dem Resultate, dass die Influenzwirkung zwischen isolirten Conductoren in allen Fällen, auch im ersteren, wo beide Potentialniveaux ansteigen, die Tendenz zeigt, die Potentialdifferenz, die beide Conductoren gegeneinander haben, zu verringern.

Die Abhandlung untersucht ferner die aus der Influenzwirkung resultirende Möglichkeit, dass für einen Conductor Ladung und zugehöriges Potentialniveau entgegengesetzten Zeichens sein können, und discutirt auf Grund der hierbei erhaltenen Formeln die einschlägigen experimentellen Anordnungen von Pfaundler und Ayrton.

Die Abhandlung giebt sodann eine Discussion der gefundenen Resultate mit Hilfe der Kraftlinientheorie und untersucht schliesslich die Bedingungen, unter denen zwei gleichnamig geladene Conductoren sich anziehen können.

(Aus den Sitzungsberichten der Wiener Akademie.)

VII. Das Telethermometer.

Von Prof. Dr. J. Puluj in Prag.

Es handelt sich um einen Apparat, der die Angaben beliebiger Temperaturen auf grosse Entfernungen zu übertragen gestattet. Die Construction des Telethermometers beruht auf der Anwendung zweier Leiter, die ihren Widerstand mit der Temperatur im entgegengesetzten Sinne ändern und den thermometrischen Theil des Apparates bilden. Der letztere besteht aus einem an beiden Enden zugeschmolzenen Glasröhrchen, welches einen carbonisirten Kohlenfaden und eine Eisendrahtspirale enthält und der bessern Leitungsfähigkeit halber mit Wasserstoff gefüllt ist. Der Kohlenfaden und die Eisenspirale bilden zwei Zweige der Wheatstone'schen Drahtcombination und sind mittels dreier Zuleitungsdrähte mit einer Messbrücke verbunden, die eine empirische Temperaturskala in Celsiusgraden trägt. Mit der Temperatur nimmt der Widerstand des Kohlenfadens ab, der der Eisenspirale dagegen zu und dementsprechend ändert sich der Nullpunkt der Potentialdifferenz am Messdrahte. Die Temperatur kann entweder mittels eines astatischen Galvanometers, oder eines Telephons und eines mikrophonartigen Stromunterbrechers in der Weise bestimmt werden, dass ein Contact an dem Messdrahte so lange verschoben wird, bis das Galvanometer keinen Ausschlag zeigt, beziehungsweise das Telephon keinen Ton giebt. Das Telethermometer gestattet Temperaturen selbst auf 1 km grosse Entfernungen bis 0,1 ° C. genau zu bestimmen.

Uebrigens kann das Telethermometer als Thermoindicator eingerichtet werden, der die jeweilige Temperatur automatisch anzeigt.

(Aus den Sitzungsberichten der Wiener Akademie v. J. 1889.)

VIII. Ueber zwei Kegelschnittssätze.

Es sei ein Kegelschnitt $\mathfrak{S}$ gegeben.

1. Dreht sich ein rechter Winkel um seinen auf $\mathfrak{S}$ liegenden Scheitel P, so dreht sich die Hypotenusensehne um einen Punkt U, der in der Normale von P liegt. Welches ist der Ort der Punkte U?

2. Schneiden sich drei Krümmungskreise von $\mathfrak{S}$ in einem Punkte Q_0 auf $\mathfrak{S}$ selbst, so schneiden sich die Normalen ihrer Osculationspunkte Q_1, Q_2, Q_3 in **einem** Punkte V. Welches ist der Ort der Punkte V?

Die erste Frage hat B. Sporer erledigt (Bd. 33 dies. Zeitschr., S. 309). Was die zweite betrifft, so weiss man, dass der Fusspunkt Q der vierten Normale, die von V aus nach $\mathfrak{S}$ gezogen werden kann, gerade der Gegenpunkt von Q_0 auf $\mathfrak{S}$ ist, und dass der Schwerpunkt des Dreiecks $Q_1 Q_2 Q_3$ mit dem Mittelpunkte von $\mathfrak{S}$ zusammenfällt (s. Steiner, Ges. Werke, Bd. II S. 691). Ueberdies hat die zweite Frage bereits Steiner beantwortet, indem er V als Höhenpunkt des Dreiecks $Q_1 Q_2 Q_3$ betrachtet (Ges. Werke, Bd. II S. 348).

Es sei mir gestattet, auf einen Zusammenhang beider Aufgaben hinzuweisen, indem ich die vollständige Antwort auf die gestellten Fragen gebe:

Die gesuchten Orte U, V sind zwei mit $\mathfrak{S}$ ähnliche und coaxiale Kegelschnitte, von denen jeder die Evolute von $\mathfrak{S}$ viermal berührt. Die Tangenten der letzteren in den acht Berührungspunkten sind zugleich Tangenten eines und desselben Kreises $\mathfrak{K}$.

(Beide Kegelschnitte U, V schneiden die Hauptaxe von $\mathfrak{S}$ in reellen Punkten. Das Asymptotensystem von U fällt mit dem von $\mathfrak{S}$ zusammen, während das von V dagegen um $\frac{\pi}{2}$ gedreht ist.

Ist $\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ die Gleichung von $\mathfrak{S}$, so ist die Gleichung von U:

$$\left(\frac{x}{a\frac{a^2 \mp b^2}{a^2 \pm b^2}}\right)^2 \pm \left(\frac{y}{b\frac{a^2 \mp b^2}{a^2 \pm b^2}}\right)^2 = 1, \text{ die von } V\text{: } \left(\frac{x}{\frac{a^2 \mp b^2}{2a}}\right)^2 \pm \left(\frac{y}{\frac{a^2 \mp b^2}{2b}}\right)^2 = 1.$$

Der Halbmesser von $\mathfrak{K}$ aber ist $\frac{a^2 \mp b^2}{\sqrt{2(a^2 \pm b^2)}}$.

Ist $\mathfrak{S}$ eine gleichseitige Hyperbel, so fällt V mit $\mathfrak{S}$ zusammen; ist $\mathfrak{S}$ eine Parabel, so liegt V ganz im Unendlichen.)

Betrachtet man nämlich die Punkte U näher, so bemerkt man, dass es viermal vorkommt, dass die Normale PU den Kegelschnitt U berührt. Diese vier Punkte P sind die Punkte von $\mathfrak{S}$, deren Tangenten (oder Normalen) unter dem Winkel $\frac{\pi}{4}$ gegen die Axen geneigt sind; und überdies lässt sich nachweisen, dass die zugehörigen vier Punkte U gerade die Krümmungscentren jener Punkte P sind. — Was andererseits die Punkte V betrifft, so geschieht es ebenfalls viermal, dass eine der drei Normalen $Q_1 V$, $Q_2 V$, $Q_3 V$ den Kegelschnitt V berührt; und zwar fällt dann jedesmal derjenige der Punkte Q_1, Q_2, Q_3, für den dies stattfindet, mit Q zusammen, woraus sofort hervorgeht, dass die zu jenen vier besonderen Punkten Q gehörenden Punkte V die Krümmungsmittelpunkte der ersteren sind. Jene vier Punkte Q sind diejenigen, deren Normalen auf den Verbindungslinien der Scheitel von $\mathfrak{S}$ senkrecht stehen, oder die Schnittpunkte von $\mathfrak{S}$ mit den Diagonalen desjenigen umgeschriebenen Rechtecks, das in den Scheiteln berührt (bei der Ellipse gehören sie zu den Anomalien, die ungerade Vielfache von $\frac{\pi}{4}$ sind). — Uebrigens sei bemerkt, dass U zugleich der Ort der Mitten derjenigen Strecken ist, die vom Axenkreuze auf den Normalen von $\mathfrak{S}$ begrenzt werden. Die sehr einfachen Beweise dieser Behauptungen überlasse ich dem geehrten Leser.

Leipzig, December 1889. Dr. Otto Richter.

Mathematische Preisaufgabe

der

Fürstl. Jablonowski'schen Gesellschaft

in Leipzig

für das Jahr 1893.

Durch die allgemeinen Untersuchungen von Herrn Lie über die Differentialinvarianten der endlichen und unendlichen Transformationsgruppen* sind die Mittel und Wege gegeben, um zu einer Invariantentheorie beliebiger Differentialgleichungen zu gelangen. Die betreffenden allgemeinen Methoden von Lie sind in den zahlreichen Untersuchungen über die Invarianten specieller Differentialgleichungen fast gar nicht berücksichtigt worden; es erscheint der Gesellschaft daher wünschenswerth, dass

die Invariantenbestimmung einer ausgedehnteren Kategorie zunächst von gewöhnlichen Differentialgleichungen auf Grund der Lie'schen Begriffsbestimmungen und Methoden

---

* Vergl. namentlich auch Bd. 24 der Mathem. Annalen, S. 537 flgg.

in Angriff genommen werde. Um die Art der Aufgaben zu bezeichnen, deren Erledigung der Gesellschaft erwünscht sein würde, führen wir beispielsweise an die Bestimmung der Invarianten, welche die allgemeine Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = \omega(x, y, y')$$

einer Ebene (x, y) gegenüber der unendlichen Gruppe

$$x_1 = \varphi(x, y), \quad y_1 = \chi(x, y).$$

aller Punkttransformationen dieser Ebene besitzt, oder die Bestimmung aller Invarianten eines Differentialausdrucks erster Ordnung

$$\Omega(x, y, y')$$

gegenüber der genannten unendlichen Gruppe.*

Preis 1000 Mark.

Die anonym einzureichenden Bewerbungsschriften sind, wo nicht die Gesellschaft im besondern Falle ausdrücklich den Gebrauch einer andern Sprache gestattet, in deutscher, lateinischer oder französischer Sprache zu verfassen, müssen deutlich geschrieben und paginirt, ferner mit einem Motto versehen und von einem versiegelten Umschlag begleitet sein, welcher auf der Aussenseite das Motto der Arbeit trägt, inwendig den Namen und Wohnort des Verfassers angiebt. Jede Bewerbungsschrift muss auf dem Titelblatte die Angabe einer Adresse enthalten, an welche die Arbeit für den Fall, dass sie nicht preiswürdig befunden würde, zurücksenden ist. Die Zeit der Einsendung endet mit dem 30. November des angegebenen Jahres, und die Zusendung ist an den Secretär der Gesellschaft (für das Jahr 1890 geh. Hofrath Prof. Dr. Rudolph Leuckart, Thalstraasse 33) zu richten. Die Resultate der Prüfung der eingegangenen Schriften werden durch die Leipziger Zeitung im März oder April des folgenden Jahres bekannt gemacht. Die gekrönten Bewerbungsschriften werden Eigenthum der Gesellschaft.

* ω und Ω sollen hier sogenannte „analytische“ Functionen bezeichnen, welche in der Umgebung eines Werthsystems $x_0 y_0 y'_0$ von allgemeiner Lage, in gewöhnliche Potenzreihen von $x-x_0$, $y-y_0$, $y'-y'_0$ entwickelt werden können.

W. Scheibner. R. Leuckart. W. Hankel. A. Leskien.
W. Roscher, Präses. **H. Lipsius. F. Zirkel. G. Voigt.**
F. Zarncke.

Preisaufgabe
der
physikalisch-ökonomischen Gesellschaft
zu Königsberg.

Die Gesellschaft wünscht eine möglichst umfassende theoretische Verwerthung der Königsberger Bodentemperatur-Beobachtungen* für die Erkenntniss der Wärmebewegungen in der Erde und ihrer Ursachen und weist besonders auf die von O. Frölich in seiner Dissertation** gegebenen Vorarbeiten hin.

Für die beste Lösung der Aufgabe wird ein Preis von 300 Mark ausgesetzt. Die Arbeiten sind bis zum 1. Februar 1891 mit Motto und versiegeltem Namen an die physikalisch-ökonomische Gesellschaft zu Königsberg i. Pr. (Lange Reihe Nr. 4) einzusenden. Die Wahl der Sprache bleibt den Verfassern überlassen.

---

* Schriften der phys.-ökon. Gesellschaft, Jahrg. 13, 15–18, 20, 23, 27–30.

** Oscar Frölich, Ueber den Einfluss der Absorption der Sonnenwärme in der Atmosphäre auf die Temperatur der Erde. Königsberg, 16. Juni 1868.

VII.

Ueber gewisse homogene quadratische Relationen unter den Integralen einer linearen homogenen Differentialgleichung sechster Ordnung.

Von

Dr. Max Rosenkranz
in Berlin.

(Schluss.)

II.

Wenn die Integrale $u_1, u_2, \dots u_6$ der Gleichung a) durch die drei homogenen quadratischen Relationen:

$$1)\qquad \begin{cases} u_2^2 = u_1 u_4, \\ u_2 u_3 = u_1 u_5, \\ u_3^2 = u_1 u_6 \end{cases}$$

verbunden sind, so nehmen diese durch einen Umlauf der unabhängigen Variablen x, welcher u_i in die durch die Gleichung b) bestimmte Form u_i' überführt, die Gestalt an:

$$2)\qquad \begin{cases} (u_2')^2 = u_1' u_4', \\ u_2' u_3' = u_1' u_5', \\ (u_3')^2 = u_1' u_6'. \end{cases}$$

Da die Grössen $u_1, u_2, \dots u_6$ nur jenen drei Gleichungen genügen sollen, so ist das System 2) eine Folge des Systems 1), und durch Elimination der drei Grössen u_4, u_5, u_6 aus dem System 1) und einer jeden der letzteren drei Gleichungen ergiebt sich eine Identität. Setzt man, um die Elimination auszuführen:

$$3)\qquad \begin{cases} \omega_1 = \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{u_4}{u_2} = \dfrac{u_5}{u_3}, \\[2ex] \omega_2 = \dfrac{u_3}{u_1} = \dfrac{u_5}{u_2} = \dfrac{u_6}{u_3}, \end{cases}$$

so folgt

$$4)\qquad u_2 = \omega_1 u_1,\ u_3 = \omega_2 u_1,\ u_4 = \omega_1^2 u_1,\ u_5 = \omega_1 \omega_2 u_1,\ u_6 = \omega_2^2 u_1.$$

Vermöge der Gleichung b) erhält man mit Hülfe dieser Werthe für die Grössen u':

5) $u'_i = u_1(\alpha_{i1} + \alpha_{i2}\omega_1 + \alpha_{i3}\omega_2 + \alpha_{i4}\omega_1^2 + \alpha_{i5}\omega_1\omega_2 + \alpha_{i6}\omega_2^2)$ $(i=1, 2 \ldots 6)$

Werden diese Grössen in 2) eingesetzt, so folgt:

$$6)\quad \begin{cases} (\alpha_{21} + \alpha_{22}\omega_1 + \alpha_{23}\omega_2 + \alpha_{24}\omega_1^2 + \alpha_{25}\omega_1\omega_2 + \alpha_{26}\omega_2^2)^2 \\ = (\alpha_{11} + \alpha_{12}\omega_1 + \alpha_{13}\omega_2 + \alpha_{14}\omega_1^2 + \alpha_{15}\omega_1\omega_2 + \alpha_{16}\omega_2^2) \\ \times (\alpha_{41} + \alpha_{42}\omega_1 + \alpha_{43}\omega_2 + \alpha_{44}\omega_1^2 + \alpha_{45}\omega_1\omega_2 + \alpha_{46}\omega_2^2), \\ (\alpha_{21} + \alpha_{22}\omega_1 + \alpha_{23}\omega_2 + \alpha_{24}\omega_1^2 + \alpha_{25}\omega_1\omega_2 + \alpha_{26}\omega_2^2) \\ \times (\alpha_{31} + \alpha_{32}\omega_1 + \alpha_{33}\omega_2 + \alpha_{34}\omega_1^2 + \alpha_{35}\omega_1\omega_2 + \alpha_{36}\omega_2^2) \\ = (\alpha_{11} + \alpha_{12}\omega_1 + \alpha_{13}\omega_2 + \alpha_{14}\omega_1^2 + \alpha_{15}\omega_1\omega_2 + \alpha_{16}\omega_2^2) \\ \times (\alpha_{51} + \alpha_{52}\omega_1 + \alpha_{53}\omega_2 + \alpha_{54}\omega_1^2 + \alpha_{55}\omega_1\omega_2 + \alpha_{56}\omega_2^2), \\ (\alpha_{31} + \alpha_{32}\omega_1 + \alpha_{33}\omega_2 + \alpha_{34}\omega_1^2 + \alpha_{35}\omega_1\omega_2 + \alpha_{36}\omega_2^2)^2 \\ = (\alpha_{11} + \alpha_{12}\omega_1 + \alpha_{13}\omega_2 + \alpha_{14}\omega_1^2 + \alpha_{15}\omega_1\omega_2 + \alpha_{16}\omega_2^2) \\ \times (\alpha_{61} + \alpha_{62}\omega_1 + \alpha_{63}\omega_2 + \alpha_{64}\omega_1^2 + \alpha_{65}\omega_1\omega_2 + \alpha_{66}\omega_2^2). \end{cases}$$

Diese Identitäten gelten für jeden Werth, den ω_1 und ω_2 annehmen können. Gehen ω_1 und ω_2 durch den obigen Umlauf von x über beziehungsweise in ω'_1 und ω'_2, so ist:

$$6)\quad \begin{cases} \omega'_1 = \dfrac{u'_2}{u'_1} = \dfrac{u'_4}{u'_2} = \dfrac{u'_5}{u'_3}, \\ \omega'_2 = \dfrac{u'_3}{u'_1} = \dfrac{u'_5}{u'_2} = \dfrac{u'_6}{u'_3}, \end{cases}$$

und in Uebereinstimmung mit 6):

$$8)\quad \begin{cases} \omega'_1 = \dfrac{\alpha_{21} + \alpha_{22}\omega_1 + \alpha_{23}\omega_2 + \alpha_{24}\omega_1^2 + \alpha_{25}\omega_1\omega_2 + \alpha_{26}\omega_2^2}{\alpha_{11} + \alpha_{12}\omega_1 + \alpha_{13}\omega_2 + \alpha_{14}\omega_1^2 + \alpha_{15}\omega_1\omega_2 + \alpha_{16}\omega_2^2} \\ \quad = \dfrac{\alpha_{41} + \alpha_{42}\omega_1 + \alpha_{43}\omega_2 + \alpha_{44}\omega_1^2 + \alpha_{45}\omega_1\omega_2 + \alpha_{46}\omega_2^2}{\alpha_{21} + \alpha_{22}\omega_1 + \alpha_{23}\omega_2 + \alpha_{24}\omega_1^2 + \alpha_{25}\omega_1\omega_2 + \alpha_{26}\omega_2^2} \\ \quad = \dfrac{\alpha_{51} + \alpha_{52}\omega_1 + \alpha_{53}\omega_2 + \alpha_{54}\omega_1^2 + \alpha_{55}\omega_1\omega_2 + \alpha_{56}\omega_2^2}{\alpha_{31} + \alpha_{32}\omega_1 + \alpha_{33}\omega_2 + \alpha_{34}\omega_1^2 + \alpha_{35}\omega_1\omega_2 + \alpha_{36}\omega_2^2}, \\ \omega'_2 = \dfrac{\alpha_{31} + \alpha_{32}\omega_1 + \alpha_{33}\omega_2 + \alpha_{34}\omega_1^2 + \alpha_{35}\omega_1\omega_2 + \alpha_{36}\omega_2^2}{\alpha_{11} + \alpha_{12}\omega_1 + \alpha_{13}\omega_2 + \alpha_{14}\omega_1^2 + \alpha_{15}\omega_1\omega_2 + \alpha_{16}\omega_2^2} \\ \quad = \dfrac{\alpha_{51} + \alpha_{52}\omega_1 + \alpha_{53}\omega_2 + \alpha_{54}\omega_1^2 + \alpha_{55}\omega_1\omega_2 + \alpha_{56}\omega_2^2}{\alpha_{21} + \alpha_{22}\omega_1 + \alpha_{23}\omega_2 + \alpha_{24}\omega_1^2 + \alpha_{25}\omega_1\omega_2 + \alpha_{26}\omega_2^2} \\ \quad = \dfrac{\alpha_{61} + \alpha_{62}\omega_1 + \alpha_{63}\omega_2 + \alpha_{64}\omega_1^2 + \alpha_{65}\omega_1\omega_2 + \alpha_{66}\omega_2^2}{\alpha_{31} + \alpha_{32}\omega_1 + \alpha_{33}\omega_2 + \alpha_{34}\omega_1^2 + \alpha_{35}\omega_1\omega_2 + \alpha_{36}\omega_2^2}. \end{cases}$$

In den gleichen Ausdrücken 8) können wegen der Bedingung c) nicht zwei Zähler respective Nenner bis auf einen constanten Factor identisch sein. Ferner können aus demselben Grunde nicht überall die Coefficienten von ω_1^2, $\omega_1\omega_2$, ω_2^2 verschwinden. Daher müssen in den einzelnen Quotienten, welche gleich ω_1' sind, sofern dieselben nicht in ω_1 und ω_2 linear sind, im Zähler und Nenner gleiche lineare Factoren vorhanden sein, während der andere lineare Factor im Zähler beziehungsweise im Nenner allen gemeinsam ist. Dasselbe gilt für die Quotienten, welche gleich ω_2' sind.

u_2' und u_3' können nicht die Gestalt haben

$$u_\lambda' = u_1(\alpha_\lambda + \beta_\lambda\omega_1 + \gamma_\lambda\omega_2)^2, \qquad (\lambda = 2, 3)$$

da alsdann, wie sich aus 6) ergiebt, u_1' und u_4' beziehungsweise u_1' und u_6' sich nur durch einen constanten Factor unterscheiden würden. Die linearen Factoren von u_1' und u_4' sind in u_2' vorhanden. Deshalb müssen sie denselben linearen Factor je zweimal enthalten. Dasselbe gilt mit Beziehung auf u_3' von u_6'. Einen linearen Factor haben u_2' und u_3' gemeinsam, da in beiden derjenige von u_1' enthalten sein muss. Es zeigt sich somit für die Grössen u' das folgende Schema:

$$\text{9)} \quad \begin{cases} u_1' = (a_1 + b_1\omega_1 + c_1\omega_2)^2 u_1, \\ u_2' = (a_1 + b_1\omega_1 + c_1\omega_2)(a_2 + b_2\omega_1 + c_2\omega_2) u_1, \\ u_3' = (a_1 + b_1\omega_1 + c_1\omega_2)(a_3 + b_3\omega_1 + c_3\omega_2) u_1, \\ u_4' = (a_2 + b_2\omega_1 + c_2\omega_2)^2 u_1, \\ u_5' = (a_2 + b_2\omega_1 + c_2\omega_2)(a_3 + b_3\omega_1 + c_3\omega_2) u_1, \\ u_6' = (a_3 + b_3\omega_1 + c_3\omega_2)^2 u_1. \end{cases}$$

Zugleich ist ersichtlich, dass die 36 Grössen α der Determinante c) sich darstellen lassen als ganze rationale Functionen von höchstens 9 Grössen.

Bildet man aus der Vergleichung von 9) und b) diese Determinante, so ist

$$|\alpha_{ik}| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots 6)$$

$$= \begin{vmatrix} a_1^2, & 2a_1b_1, & 2a_1c_1, & b_1^2, & 2b_1c_1, & c_1^2 \\ a_1a_2, & a_2b_1+b_2a_1, & a_2c_1+c_2a_1, & b_1b_2, & b_2c_1+c_2b_1, & c_1c_2 \\ a_1a_3, & a_3b_1+b_3a_1, & a_3c_1+c_3a_1, & b_1b_3, & b_3c_1+c_3b_1, & c_1c_3 \\ a_2^2, & 2a_2b_2, & 2a_2c_2, & b_2^2, & 2b_2c_2, & c_2^2 \\ a_2a_3, & a_3b_2+b_3a_2, & a_3c_2+c_3a_2, & b_2b_3, & b_3c_2+c_3b_2, & c_2c_3 \\ a_3^2, & 2a_3b_3, & 2a_3c_3, & b_3^2, & 2b_3c_3, & c_3^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1^2, & 2a_1b_1, & 2a_1c_1, & b_1^2, & 2b_1c_1, & c_1^2 \\ a_2, & b_2, & c_2, & 0, & 0, & 0 \\ a_3^2, & 2a_3b_3, & 2a_3c_3, & b_3^2, & 2b_3c_3, & c_3^2 \\ 0, & a_2, & 0, & b_2, & c_2, & 0 \\ a_1a_3, & a_3b_1+b_3a_1, & a_3c_1+c_3a_1, & b_1b_3, & b_3c_1+c_3b_1, & c_1c_3 \\ 0, & 0, & a_2, & 0, & b_2, & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b_1 & 0 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & c_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Vermöge der Formel c) ist dies Product von null verschieden. Daher ergiebt sich für die neun Grössen a, b, c die Bedingung

$$\gamma') \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

Setzt man die Werthe 9) in 7) ein, so haben die Grössen ω_1' und ω_2' die Werthe:

$$10) \qquad \omega_1' = \frac{a_2 + b_2\,\omega_1 + c_2\,\omega_2}{a_1 + b_1\,\omega_1 + c_1\,\omega_2},$$

$$11) \qquad \omega_2' = \frac{a_3 + b_3\,\omega_1 + c_3\,\omega_2}{a_1 + b_1\,\omega_1 + c_1\,\omega_2}.$$

Da dieser Umlauf beliebig gewählt war, folgt, dass durch irgend einen Umlauf von x ω_1 und ω_2 stets in solche Formen übergeführt werden, wo die Grössen a, b, c von x unabhängig und für die verschiedenen Umläufe verschieden sind. Ersichtlich ist, dass in ω_1' und ω_2' der Nenner bei einem bestimmten Umlaufe derselbe ist.

Man kann nunmehr 3 Grössen ξ_1, ξ_2, ξ_3 als Functionen von x so bestimmen, dass

$$12)\quad \begin{cases} \dfrac{\xi_2}{\xi_1} = \omega_1, \quad \dfrac{\xi_3}{\xi_1} = \omega_2, \\ \Delta(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{vmatrix} \xi_1, & \dfrac{d\xi_1}{dx}, & \dfrac{d^2\xi_1}{dx^2} \\ \xi_2, & \dfrac{d\xi_2}{dx}, & \dfrac{d^2\xi_2}{dx^2} \\ \xi_3, & \dfrac{d\xi_3}{dx}, & \dfrac{d^2\xi_3}{dx^2} \end{vmatrix} = c, \end{cases}$$

wo c eine constante Grösse bezeichnet. Durch einen Umlauf, welcher ω_1 und ω_2 in die Werthe 10) und 11) überführt, mögen ξ_1, ξ_2, ξ_3 übergehen in ξ_1', ξ_2', ξ_3'. Dann ist vermöge 10) und 11):

$$13)\quad \begin{cases} \dfrac{\xi_2'}{\xi_1'} = \dfrac{a_2 + b_2\omega_1 + c_2\omega_2}{a_1 + b_1\omega_1 + c_1\omega_2}, \\ \dfrac{\xi_3'}{\xi_1'} = \dfrac{a_3 + b_3\omega_1 + c_3\omega_2}{a_1 + b_1\omega_1 + c_1\omega_2}, \\ \Delta(\xi_1', \xi_2', \xi_3') = c. \end{cases}$$

Setzt man hierin für ω_1 und ω_2 ihre Werthe aus 12), so ergiebt sich:

$$14)\quad \begin{cases} \dfrac{\xi_2'}{\xi_1'} = \dfrac{a_2\xi_1 + b_2\xi_2 + c_2\xi_3}{a_1\xi_1 + b_1\xi_2 + c_1\xi_3}, \\ \dfrac{\xi_3'}{\xi_1'} = \dfrac{a_3\xi_1 + b_3\xi_2 + c_3\xi_3}{a_1\xi_1 + b_1\xi_2 + c_1\xi_3}, \end{cases}$$

und hieraus:

$$15)\quad \begin{cases} \xi_1' = k(x)\,(a_1\xi_1 + b_1\xi_2 + c_1\xi_3), \\ \xi_2' = k(x)\,(a_2\xi_1 + b_2\xi_2 + c_2\xi_3), \\ \xi_3' = k(x)\,(a_3\xi_1 + b_3\xi_2 + c_3\xi_3), \end{cases}$$

wobei $k(x)$ ein den Grössen ξ_1', ξ_2', ξ_3' gemeinsamer Factor ist. Setzt man diese Werthe ein, so wird

$$\Delta(\xi_1', \xi_2', \xi_3')$$

$$= \left| \begin{array}{l} k(a_1\xi_1+b_1\xi_2+c_1\xi_3),\, k\left(a_1\frac{d\xi_1}{dx}+b_1\frac{d\xi_2}{dx}+c_1\frac{d\xi_3}{dx}\right)+\frac{dk}{dx}(a_1\xi_1+b_1\xi_2+c_1\xi_3), \\ \qquad k\left(a_1\frac{d^2\xi_1}{dx^2}+b_1\frac{d^2\xi_2}{dx^2}+c_1\frac{d^2\xi_3}{dx^2}\right)+2\frac{dk}{dx}\left(a_1\frac{d\xi_1}{dx}+b_1\frac{d\xi_2}{dx}+c_1\frac{d\xi_3}{dx}\right) \\ \qquad\qquad +\frac{d^2k}{dx^2}(a_1\xi_1+b_1\xi_2+c_1\xi_3), \\ k(a_2\xi_1+b_2\xi_2+c_2\xi_3),\, k\left(a_2\frac{d\xi_1}{dx}+b_2\frac{d\xi_2}{dx}+c_2\frac{d\xi_3}{dx}\right)+\frac{dk}{dx}(a_2\xi_1+b_2\xi_2+c_2\xi_3), \\ \qquad k\left(a_2\frac{d^2\xi_1}{dx^2}+b_2\frac{d^2\xi_2}{dx^2}+c_2\frac{d^2\xi_3}{dx^2}\right)+2\frac{dk}{dx}\left(a_2\frac{d\xi_1}{dx}+b_2\frac{d\xi_2}{dx}+c_2\frac{d\xi_3}{dx}\right) \\ \qquad\qquad +\frac{d^2k}{dx^2}(a_2\xi_1+b_2\xi_2+c_2\xi_3), \\ k(a_3\xi_1+b_3\xi_2+c_3\xi_3),\, k\left(a_3\frac{d\xi_1}{dx}+b_3\frac{d\xi_2}{dx}+c_3\frac{d\xi_3}{dx}\right)+\frac{dk}{dx}(a_3\xi_1+b_3\xi_2+c_3\xi_3), \\ \qquad k\left(a_3\frac{d^2\xi_1}{dx^2}+b_3\frac{d^2\xi_2}{dx^2}+c_3\frac{d^2\xi_3}{dx^2}\right)+2\frac{dk}{dx}\left(a_3\frac{d\xi_1}{dx}+b_3\frac{d\xi_2}{dx}+c_3\frac{d\xi_3}{dx}\right) \\ \qquad\qquad +\frac{d^2k}{dx^2}(a_3\xi_1+b_3\xi_2+c_3\xi_3) \end{array} \right|$$

$$= \left| \begin{array}{ccc} k & 0 & 0 \\ \frac{dk}{dx} & k & 0 \\ \frac{d^2k}{dx^2} & 2\frac{dk}{dx} & k \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} a_1\xi_1+b_1\xi_2+c_1\xi_3,\ a_1\frac{d\xi_1}{dx}+b_1\frac{d\xi_2}{dx}+c_1\frac{d\xi_3}{dx}, \\ \qquad a_1\frac{d^2\xi_1}{dx^2}+b_1\frac{d^2\xi_2}{dx^2}+c_1\frac{d^2\xi_3}{dx^2}, \\ a_2\xi_1+b_2\xi_2+c_2\xi_3,\ a_2\frac{d\xi_1}{dx}+b_2\frac{d\xi_2}{dx}+c_2\frac{d\xi_3}{dx}, \\ \qquad a_2\frac{d^2\xi_1}{dx^2}+b_2\frac{d^2\xi_2}{dx^2}+c_2\frac{d^2\xi_3}{dx^2}, \\ a_3\xi_1+b_3\xi_2+c_3\xi_3,\ a_3\frac{d\xi_1}{dx}+b_3\frac{d\xi_2}{dx}+c_3\frac{d\xi_3}{dx}, \\ \qquad a_3\frac{d^2\xi_1}{dx^2}+b_3\frac{d^2\xi_2}{dx^2}+c_3\frac{d^2\xi_3}{dx^2}, \end{array} \right|$$

$$= \left| \begin{array}{ccc} k & 0 & 0 \\ \frac{dk}{dx} & k & 0 \\ \frac{d^2k}{d^2x} & 2\frac{dk}{dx} & k \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{array} \right| \Delta(\xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

Da sich aus 12) und 13) ergiebt, dass

$$\Delta(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \Delta(\xi_1', \xi_2', \xi_3'),$$

so folgt hieraus, dass $k(x)$ constant ist und gleich λ, wenn λ den reciproken Werth der dritten Wurzel aus der von null verschiedenen Determinante γ') bezeichnet. Durch einen Umlauf von x gehen also ξ_1, ξ_2, ξ_3 über in:

$$\text{16)} \qquad \begin{cases} \xi_1' = \lambda(a_1 \xi_1 + b_1 \xi_2 + c_1 \xi_3), \\ \xi_2' = \lambda(a_2 \xi_1 + b_2 \xi_2 + c_2 \xi_3), \\ \xi_3' = \lambda(a_3 \xi_1 + b_3 \xi_2 + c_3 \xi_3). \end{cases}$$

Die durch die Gleichungen 12) definirten Functionen ξ_1, ξ_2, ξ_3 genügen daher einer homogenen linearen Differentialgleichung dritter Ordnung mit eindeutigen Coefficienten:

$$\text{17)} \qquad \frac{d^3 y}{dx^3} = p \frac{dy}{dx} + qy.$$

Es seien nunmehr ξ_1, ξ_2, ξ_3 drei Integrale eines Fundamentalsystems der Gleichung 17) und zwar so beschaffen, dass $\frac{\xi_2}{\xi_1} = \omega_1, \frac{\xi_3}{\xi_1} = \omega_2$ ist, so ergiebt sich aus den Gleichungen 4):

$$\text{18)} \qquad \begin{cases} u_2 = \frac{\xi_2}{\xi_1} u_1,\ u_3 = \frac{\xi_3}{\xi_1} u_1,\ u_4 = \frac{\xi_2^2}{\xi_1^2} u_1, \\ u_5 = \frac{\xi_2 \xi_3}{\xi_1^2} u_1,\ u_6 = \frac{\xi_3^2}{\xi_1^2} u_1, \end{cases}$$

und hieraus folgt die Relation:

$$\text{19)} \qquad \frac{u_1}{\xi_1^2} = \frac{u_2}{\xi_1 \xi_2} = \frac{u_3}{\xi_1 \xi_3} = \frac{u_4}{\xi_2^2} = \frac{u_5}{\xi_2 \xi_3} = \frac{u_6}{\xi_3^2}.$$

Haben diese Quotienten den Werth $\psi(x)$, so erhalten wir für $u_1, u_2, \ldots u_6$ die Werthe:

$$u_1 = \psi(x)\, \xi_1^2,\ \ u_2 = \psi(x)\, \xi_1 \xi_2,\ \ u_3 = \psi(x)\, \xi_1 \xi_3,$$
$$u_4 = \psi(x)\, \xi_2^2,\ \ u_5 = \psi(x)\, \xi_2 \xi_3,\ \ u_6 = \psi(x)\, \xi_3^2.$$

Wenn $X(v) = 0$ die homogene lineare Differentialgleichung ist, welcher die Quadrate der Integrale der Gleichung 17) genügen, für welche also

$$\xi_1^2,\ \xi_1 \xi_2,\ \xi_1 \xi_3,\ \xi_2^2,\ \xi_2 \xi_3,\ \xi_3^2$$

ein Fundamentalsystem ist, so erhält man die allgemeine Form der Gleichung sechster Ordnung, deren Integrale die Gleichung 1) erfüllen, wenn man setzt

$$v = \frac{u}{\psi(x)}.$$

Aus der Eindeutigkeit der Coefficienten der Gleichungen a) und $X(v) = 0$ folgt, dass

$$\psi(x) = e^{\int \varphi(x)\, dx}$$

zu bestimmen ist, wo $\varphi(x)$ eine eindeutige Function bezeichnet. Setzt man nunmehr in Gleichung 17)

$$y = \frac{z}{\sqrt{\psi(x)}},$$

so ergiebt sich diejenige homogene lineare Differentialgleichung dritter Ordnung mit eindeutigen Coefficienten, deren Integrale derart sind, dass ihre Quadrate Integrale der Gleichung a) sind.

Zugleich ergiebt sich, dass diese Gleichung nicht eine solche sein kann, welcher die Quadrate der Integrale ζ_1, ζ_2 einer homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügen. Denn ein Fundamentalsystem derselben ist $\zeta_1^2, \zeta_1\zeta_2, \zeta_2^2$. Die Gleichung, welcher die Quadrate dieser Grössen genügen, ist ersichtlich von der fünften Ordnung und stimmt natürlich mit derjenigen überein, welcher die vierten Potenzen der Integrale jener Gleichung zweiter Ordnung genügen.

Um jene Differentialgleichung sechster Ordnung $X(v) = 0$ zu erhalten, der die Quadrate der Integrale der Gleichung 17) genügen, setze man $v = y^2$. Durch successive sechsmalige Differentiation und Elimination der höheren als zweiten Ableitungen von y vermittelst der Gleichung 17) erhält man

$$v = y^2,$$

$$\frac{dv}{dx} = 2y\frac{dy}{dx},$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2y\frac{d^2y}{dx^2},$$

$$\frac{d^3v}{dx^3} = 6\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} + 2py\frac{dy}{dx} + 2qy^2,$$

$$\frac{d^4v}{dx^4} = 6\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + 8p\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (10q + 2p')\,y\frac{dy}{dx} + 2py\frac{d^2y}{dx^2} + 2q'y^2,$$

$$\begin{aligned}\frac{d^5v}{dx^5} = {} & 30p\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} + (22q + 4p')\,y\frac{d^2y}{dx^2} + (10q + 10p')\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \\ & + (14q' + 2p'' + 2p^2)\,y\frac{dy}{dx} + (2pq + 2q'')\,y^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^6v}{dx^6} = {} & (54p' + 42q)\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} + 30p\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + (32p^2 + 12p'' + 24q')\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \\ & + (54pq + 8pp' + 2p''' + 16q'')\,y\frac{dy}{dx} + (2p^2 + 6p'' + 36q')\,y\frac{d^2y}{dx^2} \\ & + (2pq' + 6p'q + 22q^2 + 2q''')\,y^2.\end{aligned}$$

Man erhält so sieben lineare Gleichungen für die sechs Grössen

$$y^2,\ y\frac{dy}{dx},\ \left(\frac{dy}{dx}\right)^2,\ y\frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2},\ \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2.$$

Die Elimination derselben führt zu der gesuchten Gleichung $X(v) = 0$, deren Coefficienten rationale Functionen von p, q und ihren Ableitungen sind. Durch die Substitution

$$v = ue^{-\int \varphi(x)\,dx}$$

erhalten wir die lineare homogene Differentialgleichung sechster Ordnung mit eindeutigen Coefficienten, welche mit a) identisch ist. Die Coefficienten derselben sind ersichtlich ebenfalls rationale Functionen von p, q, φ und deren Ableitungen, wobei p, q, φ als eindeutige Functionen definirt sind. Es ergiebt sich hieraus der Satz:

„Sind die Integrale der Differentialgleichung a) verbunden durch die Relationen 1), so genügen derselben die Quadrate der Integrale einer linearen homogenen Differentialgleichung dritter Ordnung mit eindeutigen Coefficienten. Die Coefficienten von a) lassen sich in diesem Falle rational darstellen durch drei eindeutige Functionen und deren Ableitungen. Die 36 Grössen α der Determinante c) lassen sich rational und ganz darstellen durch 9 Grössen, die der Bedingung γ') genügen."

III.

Es mögen unter den Integralen $u_1, u_2, \ldots u_6$ eines Fundamentalsystems der Gleichung a) die beiden homogenen quadratischen Gleichungen:

$$1)\qquad \begin{cases} u_1 u_4 = u_2 u_3, \\ u_1 u_6 = u_2 u_5 \end{cases}$$

bestehen. Durch einen Umlauf von x, welcher u_i in u_i' überführt, gehen dieselben über in:

$$2)\qquad \begin{cases} u_1' u_4' = u_2' u_3', \\ u_1' u_6' = u_2' u_5'. \end{cases}$$

Setzt man für die Grössen u' die Werthe b) hierin ein, so muss, da nur die Relationen 1) bestehen sollen, das System 2) eine Folge des Systems 1) sein. Durch Elimination der Grössen u_4 und u_6 aus den Gleichungen 1) und einer jeden von 2) ergeben sich daher zwei Identitäten. Zu diesem Zwecke setzen wir:

$$3)\qquad \begin{cases} \eta = \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{u_4}{u_3} = \dfrac{u_6}{u_5}, \\[2ex] \omega_1 = \dfrac{u_3}{u_1} = \dfrac{u_4}{u_2}, \\[2ex] \omega_2 = \dfrac{u_5}{u_1} = \dfrac{u_6}{u_2}. \end{cases}$$

Hieraus folgt:

$$4)\quad \begin{cases} u_2 = \eta\, u_1,\ u_3 = \omega_1 u_1,\ u_4 = \eta\, \omega_1 u_1, \\ u_5 = \omega_2 u_1,\ u_6 = \eta\, \omega_2\, u_1. \end{cases}$$

Dies in b) eingesetzt ergiebt für die Grössen u' die Werthe:

$$5)\quad u'_i = u_1(\alpha_{i1} + \alpha_{i2}\eta + \alpha_{i3}\omega_1 + \alpha_{i4}\eta\omega_1 + \alpha_{i5}\omega_2 + \alpha_{i6}\eta\omega_2).\quad (i = 1, 2, \dots 6)$$

Hierdurch erhalten die Gleichungen 2) die Form:

$$6)\quad \begin{cases} (\alpha_{11} + \alpha_{12}\eta + \alpha_{13}\omega_1 + \alpha_{14}\eta\omega_1 + \alpha_{15}\omega_2 + \alpha_{16}\eta\omega_2) \\ \times(\alpha_{41} + \alpha_{42}\eta + \alpha_{43}\omega_1 + \alpha_{44}\eta\omega_1 + \alpha_{45}\omega_2 + \alpha_{46}\eta\omega_2) \\ = (\alpha_{21} + \alpha_{22}\eta + \alpha_{23}\omega_1 + \alpha_{24}\eta\omega_1 + \alpha_{25}\omega_2 + \alpha_{26}\eta\omega_2) \\ \times(\alpha_{31} + \alpha_{32}\eta + \alpha_{33}\omega_1 + \alpha_{34}\eta\omega_1 + \alpha_{35}\omega_2 + \alpha_{36}\eta\omega_2), \\ (\alpha_{11} + \alpha_{12}\eta + \alpha_{13}\omega_1 + \alpha_{14}\eta\omega_1 + \alpha_{15}\omega_2 + \alpha_{16}\eta\omega_2) \\ \times(\alpha_{61} + \alpha_{62}\eta + \alpha_{63}\omega_1 + \alpha_{64}\eta\omega_1 + \alpha_{65}\omega_2 + \alpha_{66}\eta\omega_2) \\ = (\alpha_{21} + \alpha_{22}\eta + \alpha_{23}\omega_1 + \alpha_{24}\eta\omega_1 + \alpha_{25}\omega_2 + \alpha_{26}\eta\omega_2) \\ \times(\alpha_{51} + \alpha_{52}\eta + \alpha_{53}\omega_1 + \alpha_{54}\eta\omega_1 + \alpha_{55}\omega_2 + \alpha_{56}\eta\omega_2). \end{cases}$$

Diese Gleichungen müssen gelten für alle Werthe, welche die durch 3) definirten Grössen η, ω_1, ω_2 annehmen können. Werden durch den obigen Umlauf von x die Grössen η, ω_1, ω_2 übergeführt beziehungsweise in $\eta', \omega'_1, \omega'_2$, so folgt aus 3) und 5) in Uebereinstimmung mit 6):

$$7)\quad \begin{cases} \eta' = \dfrac{\alpha_{21} + \alpha_{22}\eta + \alpha_{23}\omega_1 + \alpha_{24}\eta\omega_1 + \alpha_{25}\omega_2 + \alpha_{26}\eta\omega_2}{\alpha_{11} + \alpha_{12}\eta + \alpha_{13}\omega_1 + \alpha_{14}\eta\omega_1 + \alpha_{15}\omega_2 + \alpha_{16}\eta\omega_2} \\ \quad = \dfrac{\alpha_{41} + \alpha_{42}\eta + \alpha_{43}\omega_1 + \alpha_{44}\eta\omega_1 + \alpha_{45}\omega_2 + \alpha_{46}\eta\omega_2}{\alpha_{31} + \alpha_{32}\eta + \alpha_{33}\omega_1 + \alpha_{34}\eta\omega_1 + \alpha_{35}\omega_2 + \alpha_{36}\eta\omega_2} \\ \quad = \dfrac{\alpha_{61} + \alpha_{62}\eta + \alpha_{63}\omega_1 + \alpha_{64}\eta\omega_1 + \alpha_{65}\omega_2 + \alpha_{66}\eta\omega_2}{\alpha_{51} + \alpha_{52}\eta + \alpha_{53}\omega_1 + \alpha_{54}\eta\omega_1 + \alpha_{55}\omega_2 + \alpha_{56}\eta\omega_2}. \end{cases}$$

$$8)\quad \begin{cases} \omega'_1 = \dfrac{\alpha_{31} + \alpha_{32}\eta + \alpha_{33}\omega_1 + \alpha_{34}\eta\omega_1 + \alpha_{35}\omega_2 + \alpha_{36}\eta\omega_2}{\alpha_{11} + \alpha_{12}\eta + \alpha_{13}\omega_1 + \alpha_{14}\eta\omega_1 + \alpha_{15}\omega_2 + \alpha_{16}\eta\omega_2} \\ \quad = \dfrac{\alpha_{41} + \alpha_{42}\eta + \alpha_{43}\omega_1 + \alpha_{44}\eta\omega_1 + \alpha_{45}\omega_2 + \alpha_{46}\eta\omega_2}{\alpha_{21} + \alpha_{22}\eta + \alpha_{23}\omega_1 + \alpha_{24}\eta\omega_1 + \alpha_{25}\omega_2 + \alpha_{26}\eta\omega_2}. \end{cases}$$

$$9)\quad \begin{cases} \omega'_2 = \dfrac{\alpha_{51} + \alpha_{52}\eta + \alpha_{53}\omega_1 + \alpha_{54}\eta\omega_1 + \alpha_{55}\omega_2 + \alpha_{56}\eta\omega_2}{\alpha_{11} + \alpha_{12}\eta + \alpha_{13}\omega_1 + \alpha_{14}\eta\omega_1 + \alpha_{15}\omega_2 + \alpha_{16}\eta\omega_2} \\ \quad = \dfrac{\alpha_{61} + \alpha_{62}\eta + \alpha_{63}\omega_1 + \alpha_{64}\eta\omega_1 + \alpha_{65}\omega_2 + \alpha_{66}\eta\omega_2}{\alpha_{21} + \alpha_{22}\eta + \alpha_{23}\omega_1 + \alpha_{24}\eta\omega_1 + \alpha_{25}\omega_2 + \alpha_{26}\eta\omega_2}. \end{cases}$$

Wegen der Bedingung c) können in den einzelnen gleichen Quotienten nicht zwei Zähler beziehungsweise Nenner bis auf einen constanten

Factor identisch sein. Aus demselben Grunde können nicht überall die Coefficienten von $\eta\,\omega_1$ resp. $\eta\,\omega_2$ verschwinden. Es müssen daher die Zähler und Nenner, welche ganze rationale Functionen von höchstens zweitem Grade in η, ω_1, ω_2 sind, sich in Factoren der Formen $a + b\eta$ und $c + d\omega_1 + e\omega_2$ zerlegen lassen, und die einzelnen Quotienten müssen im Zähler und Nenner je einen gleichen Factor haben, während der andere Factor sämmtlichen Zählern resp. Nennern der gleichen Quotienten gemeinsam ist. Es kann jedoch nicht $\alpha + \beta\eta = \gamma + \delta\omega_1 + \varepsilon\omega_2$ sein für alle Werthe, welche die durch 3) definirten Grössen η, ω_1, ω_2 annehmen können. Denn hieraus würde sich eine homogene lineare Beziehung zwischen u_1, u_2, u_3, u_5 ergeben, welche unmöglich ist, da $u_1, u_2, \ldots u_6$ nach unserer Annahme ein Fundamentalsystem bilden. Daher sind für die Grössen η', ω_1', ω_2' nur Quotienten möglich von der Form:

A) $$\frac{\lambda + \mu\eta}{\nu + \varrho\eta},$$

B) $$\frac{a_1 + b_1\omega_1 + c_1\omega_2}{a_2 + b_2\omega_1 + c_2\omega_2}.$$

Es sei

$$\eta' = \frac{u_2'}{u_1'} = \frac{a_1 + b_1\omega_1 + c_1\omega_2}{a_2 + b_2\omega_1 + c_2\omega_2}.$$

Dann könnte man setzen:

$$u_1' = (\tau + \sigma\eta)\,(a_2 + b_2\omega_1 + c_2\omega_2)\,u_1,$$
$$u_2' = (\tau + \sigma\eta)\,(a_1 + b_1\omega_1 + c_1\omega_2)\,u_1,$$

und erhielte wegen der Gleichungen 2) und 6):

$$u_3' = (\tau_1 + \sigma_1\eta)\,(a_2 + b_2\omega_1 + c_2\omega_2)\,u_1,$$
$$u_4' = (\tau_1 + \sigma_1\eta)\,(a_1 + b_1\omega_1 + c_1\omega_2)\,u_1,$$
$$u_5' = (\tau_2 + \sigma_2\eta)\,(a_2 + b_2\omega_1 + c_2\omega_2)\,u_1,$$
$$u_6' = (\tau_2 + \sigma_2\eta)\,(a_1 + b_1\omega_1 + c_1\omega_2)\,u_1.$$

Daraus ergäben sich die Werthe:

$$\omega_1' = \frac{u_3'}{u_1'} = \frac{\tau_1 + \sigma_1\eta}{\tau + \sigma\eta},$$

$$\omega_2' = \frac{u_5'}{u_1'} = \frac{\tau_2 + \sigma_2\eta}{\tau + \sigma\eta}.$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen η, so folgt

$$\frac{\tau\omega_1' - \tau_1}{\sigma_1 - \sigma\omega_1'} = \frac{\tau\omega_2' - \tau_2}{\sigma_2 - \sigma\omega_2'}$$

und hieraus die Relation

$$(\sigma_1\tau - \sigma\tau_1)\,\omega_2' = (\sigma\tau_2 - \sigma_2\tau)\,\omega_1' + (\sigma_2\tau_1 - \sigma_1\tau_2),$$

deren Coefficienten nicht gleich null sein können, da alsdann der Quotient zweier Grössen u' gegen die Annahme constant wäre. Diese Relation ist unmöglich, da sich daraus eine homogene lineare Gleichung unter den Integralen des Fundamentalsystems $u_1', u_2', \ldots u_6'$ ergeben würde. Folglich kann η' nicht die Form B) haben.

Ist andererseits

10) $$\eta' = \frac{u_2'}{u_1'} = \frac{\lambda + \mu\eta}{\nu + \varrho\eta},$$

so sei:

11) $$\begin{cases} u_1' = (\nu + \varrho\eta)\,(l + m\omega_1 + n\omega_2)\,u_1, \\ u_2' = (\lambda + \mu\eta)\,(l + m\omega_1 + n\omega_2)\,u_1. \end{cases}$$

Dann ist in Folge der Gleichungen 2) und 6):

11) $$\begin{cases} u_3' = (\nu + \varrho\eta)\,(l_1 + m_1\omega_1 + n_1\omega_2)\,u_1, \\ u_4' = (\lambda + \mu\eta)\,(l_1 + m_1\omega_1 + n_1\omega_2)\,u_1, \\ u_5' = (\nu + \varrho\eta)\,(l_2 + m_2\omega_1 + n_2\omega_2)\,u_1, \\ u_6' = (\lambda + \mu\eta)\,(l_2 + m_2\omega_1 + n_2\omega_2)\,u_1. \end{cases}$$

Hieraus folgt:

$$\omega_1' = \frac{u_3'}{u_1'} = \frac{l_1 + m_1\omega_1 + n_1\omega_2}{l + m\omega_1 + n\omega_2},$$

$$\omega_2' = \frac{u_5'}{u_1'} = \frac{l_2 + m_2\omega_1 + n_2\omega_2}{l + m\omega_1 + n\omega_2}.$$

Also gehen durch den obigen Umlauf η, ω_1, ω_2 bezüglich über in die Werthe:

10) $$\eta' = \frac{\lambda + \mu\eta}{\nu + \varrho\eta},$$

12) $$\omega_1' = \frac{l_1 + m_1\omega_1 + n_1\omega_2}{l + m\omega_1 + n\omega_2},$$

13) $$\omega_2' = \frac{l_2 + m_2\omega_1 + n_2\omega_2}{l + m\omega_1 + n\omega_2}.$$

Hierbei haben für einen bestimmten Umlauf ω_1' und ω_2' denselben Nenner. Die 13 Coefficienten sind von x unabhängig und nehmen für die verschiedenen Umläufe im Allgemeinen andere Werthe an. Aus der Zusammenstellung der Formeln 5) und 11) ergiebt sich, dass die 36 Grössen α der Determinante c) sich als ganze rationale Functionen von höchstens 13 Grössen darstellen lassen.

Bildet man diese Determinante, so ist

$$|\alpha_{ik}| \qquad (i, k = 1, 2, \dots 6)$$

$$= \begin{vmatrix} l\nu & l\varrho & m\nu & m\varrho & n\nu & n\varrho \\ l\lambda & l\mu & m\lambda & m\mu & n\lambda & n\mu \\ l_1\nu & l_1\varrho & m_1\nu & m_1\varrho & n_1\nu & n_1\varrho \\ l_1\lambda & l_1\mu & m_1\lambda & m_1\mu & n_1\lambda & n_1\mu \\ l_2\nu & l_2\varrho & m_2\nu & m_2\varrho & n_2\nu & n_2\varrho \\ l_2\lambda & l_2\mu & m_2\lambda & m_2\mu & n_2\lambda & n_2\mu \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} l & 0 & l_1 & 0 & l_2 & 0 \\ 0 & n & 0 & n_1 & 0 & n_2 \\ m & 0 & m_1 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & l & 0 & l_1 & 0 & l_2 \\ n & 0 & n_1 & 0 & n_2 & 0 \\ 0 & m & 0 & m_1 & 0 & m_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \nu & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \varrho & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & \varrho & 0 & 0 & \mu \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & \nu & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 & \varrho & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l & l_1 & l_2 \\ m & m_1 & m_2 \\ n & n_1 & n_2 \end{vmatrix}^2 \begin{vmatrix} \nu & \lambda \\ \varrho & \mu \end{vmatrix}^3.$$

Dieses Product ist entsprechend der Bedingung c) von null verschieden. Daher gelten für die 13 Grössen die Bedingungen

$$\gamma'') \qquad \begin{vmatrix} l & l_1 & l_2 \\ m & m_1 & m_2 \\ n & n_1 & n_2 \end{vmatrix} \gtrless 0, \quad \begin{vmatrix} \nu & \lambda \\ \varrho & \mu \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

Man kann nunmehr zwei Functionen ξ_1 und ξ_2 so bestimmen, dass

$$14) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\xi_2}{\xi_1} &= \eta, \\ \xi_1 \frac{d\xi_2}{dx} - \xi_2 \frac{d\xi_1}{dx} &= c_1, \end{aligned} \right.$$

und es ergiebt sich unter Berücksichtigung der Gleichung 10) genau wie vorher[1]), dass die hierdurch definirten Functionen ξ_1 und ξ_2 ein Fundamentalsystem von Integralen einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit eindeutigem Coefficienten bilden:

$$15) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = ry.$$

Ebenso lässt sich setzen:

1) Vgl. I, 13)—19).

$$16)\qquad \begin{cases} \dfrac{\zeta_2}{\zeta_1} = \omega_1, \dfrac{\zeta_3}{\zeta_1} = \omega_2, \\ \Delta(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = c_2,[1] \end{cases}$$

und in Folge der Gleichungen 12) und 13) sind ζ_1, ζ_2, ζ_3 hierdurch bestimmt als Integrale eines Fundamentalsystems einer linearen homogenen Differentialgleichung dritter Ordnung mit eindeutigen Coefficienten:

$$17)\qquad \frac{d^3 z}{dx^3} = p\frac{dz}{dx} + qz.$$

Sind die Grössen ξ_1, ξ_2 durch 14), ζ_1, ζ_2, ζ_3 durch 16) definirt, so ergiebt sich aus den Gleichungen 4):

$$18)\quad u_2 = \frac{\xi_2}{\xi_1}u_1, u_3 = \frac{\zeta_2}{\zeta_1}u_1, u_4 = \frac{\xi_2}{\xi_1}\frac{\zeta_2}{\zeta_1}u_1, u_5 = \frac{\zeta_3}{\zeta_1}u_1, u_6 = \frac{\xi_2}{\xi_1}\frac{\zeta_3}{\zeta_1}u_1,$$

und hieraus folgt:

$$19)\qquad \frac{u_1}{\zeta_1\xi_1} = \frac{u_2}{\zeta_1\xi_2} = \frac{u_3}{\zeta_2\xi_1} = \frac{u_4}{\zeta_2\xi_2} = \frac{u_5}{\zeta_3\xi_1} = \frac{u_6}{\zeta_3\xi_2}.$$

Diese Quotienten seien gleich $\psi(x)$, so erhält man:

$$20)\qquad \begin{cases} u_1 = \psi(x)\zeta_1\xi_1, u_2 = \psi(x)\zeta_1\xi_2, u_3 = \psi(x)\zeta_2\xi_1, \\ u_4 = \psi(x)\zeta_2\xi_2, u_5 = \psi(x)\zeta_3\xi_1, u_6 = \psi(x)\zeta_3\xi_2. \end{cases}$$

Ist $\Psi(v) = 0$ die Gleichung, der die Producte eines Integrals der Gleichung 15) und eines solchen der Gleichung 17) genügen, für welche daher

$$\zeta_1\xi_1, \zeta_1\xi_2, \zeta_2\xi_1, \zeta_2\xi_2, \zeta_3\xi_1, \zeta_3\xi_2$$

ein Fundamentalsystem ist, so ergiebt sich die allgemeine Form der linearen homogenen Differentialgleichung sechster Ordnung, deren Integrale den Gleichungen 1) genügen, durch die Substitution

$$v = \frac{u}{\psi(x)}.$$

Aus der Eindeutigkeit der Coefficienten der Differentialgleichung $\Psi(v) = 0$ und der Gleichung a) folgt, dass $\psi(x)$ die Form $e^{\int\varphi(x)dx}$ hat, wo $\varphi(x)$ eine eindeutige Function von x bezeichnet.

Es ergiebt sich zugleich, dass Gleichung 17) nicht diejenige sein kann, welcher die Quadrate der Integrale der Differentialgleichung 15) genügen, da die Producte der Integrale dieser beiden Gleichungen ersichtlich einer linearen homogenen Differentialgleichung fünfter Ordnung genügen.

1) Vgl. II, 12)—17).

Ueber den Fall, dass der Differentialgleichung 17) die Quadrate der Integrale einer von 15) verschiedenen linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügen, s. Anmerkung 1.

Um die obige Gleichung $\Psi(v) = 0$ zu bilden, setze man

$$v = yz,$$

differenzire diese Gleichung successive sechsmal und reducire dabei jedesmal die zweite Ableitung von y vermittelst der Gleichung 15) und die dritte Ableitung von z mit Hülfe der Gleichung 17). Es ergeben sich hierdurch sieben lineare Gleichungen für die sechs Grössen

$$yz,\; y\frac{dz}{dx},\; y\frac{d^2z}{dx^2},\; \frac{dy}{dx}z,\; \frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx},\; \frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dx^2},$$

deren Elimination die gesuchte Gleichung liefert. Ihre Coefficienten sind ersichtlich rationale Functionen von p, q, r und deren Ableitungen also eindeutige Functionen von x. Setzt man

$$v = u e^{-\int \varphi(x)\,dx},$$

wo $\varphi(x)$, wie oben gesagt ist, eine eindeutige Function von x bezeichnet, so geht die Gleichung $\Psi(v) = 0$ über in die Gleichung a).

Es seien zwei beliebige Functionen $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ so beschaffen, dass

21) $$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) = \varphi(x).$$

Dieselben können stets als eindeutige gewählt werden. Setzen wir in den Gleichungen 15) und 17):

$$y = te^{-\int \varphi_1(x)\,dx},\quad z = we^{-\int \varphi_2(x)\,dx},$$

so ergeben sich die homogenen linearen Differentialgleichungen:

22) $$\frac{d^2t}{dx^2} + s_1\frac{dt}{dx} + s_2 t = 0,$$

23) $$\frac{d^3w}{dx^3} + p_1\frac{d^2w}{dx^2} + q_1\frac{dw}{dx} + r_1 w = 0,$$

deren Coefficienten ebenfalls eindeutig sind. Es ist

$$t_i = \xi_i\, e^{\int \varphi_1(x)\,dx}, \qquad (i = 1,\, 2)$$

$$w_k = \zeta_k\, e^{\int \varphi_2(x)\,dx} \qquad (k = 1,\, 2,\, 3)$$

und hieraus folgt:

$$t_i\, w_k = \xi_i\, \zeta_k\, e^{\int \varphi(x)\,dx} = u_\lambda. \qquad (\lambda = 1,\, 2, \ldots 6)$$

Wir finden daher den Satz:

„Genügen die Integrale der Differentialgleichung a) den Relationen 1), so genügen ihr die Producte der Integrale einer linearen homogenen

Differentialgleichung zweiter Ordnung und einer solchen dritter Ordnung mit eindeutigen Coefficienten. Die Coefficienten der Gleichung a) sind darstellbar als rationale Functionen von vier eindeutigen Functionen und deren Ableitungen. Die 36 Grössen der Determinante c) sind ganz und rational darstellbar durch 13 Grössen, die der Bedingung γ'') genügen."

Zu erwähnen bleibt, dass die beiden durch die Gleichung 21) definirten Functionen φ_1 und φ_2 nicht eindeutig gewählt zu sein brauchen. In diesem Falle gilt dasselbe von den Coefficienten der den Gleichungen 22) und 23) entsprechenden Differentialgleichungen.

Anmerkung 1. Tritt zu den Relationen 1) noch die Gleichung

$$u_3^2 = u_1 u_5,$$

so ist

$$\frac{u_3^2}{u_1^2} = \frac{u_5}{u_1},$$

also nach den Gleichungen 3)

$$\omega_2 = \omega^2,$$

wenn wir in diesem Falle ω_1 durch ω ersetzen. Gemäss Gleichung 12) wäre dann

$$\omega' = \frac{l_1 + m_1\omega + n_1\omega^2}{l + m\omega + n\omega^2}.$$

Dieser Ausdruck muss sich, falls n oder n_1 von null verschieden ist, auf einen im Zähler und Nenner höchstens linearen reduciren, da nach Gleichung 13)

$$\omega_2' = (\omega')^2 = \frac{l_2 + m_2\omega + n_2\omega^2}{l + m\omega + n\omega^2}.$$

Zugleich ergiebt sich, dass

$$l + m\omega + n\omega^2 = (\alpha + \beta\omega)^2$$

sein muss, also

$$\text{11a)} \qquad \begin{cases} l_1 + m_1\omega + n_1\omega^2 = (\alpha + \beta\omega)(\gamma + \delta\omega), \\ l_2 + m_2\omega + n_2\omega^2 = (\gamma + \delta\omega)^2. \end{cases}$$

Demnach wird das Schema 11) in unserem Falle:

$$\text{11a)} \qquad \begin{cases} u_1' = (\nu + \varrho\eta)(\alpha + \beta\omega)^2 u_1, \\ u_2' = (\lambda + \mu\eta)(\alpha + \beta\omega)^2 u_1, \\ u_3' = (\nu + \varrho\eta)(\alpha + \beta\omega)(\gamma + \delta\omega) u_1, \\ u_4' = (\lambda + \mu\eta)(\alpha + \beta\omega)(\gamma + \delta\omega) u_1, \\ u_5' = (\nu + \varrho\eta)(\gamma + \delta\omega)^2 u_1, \\ u_6' = (\lambda + \mu\eta)(\gamma + \delta\omega)^2 u_1, \end{cases}$$

so dass man für η' und ω' die Werthe erhält:

$$\eta' = \frac{\lambda + \mu\eta}{\nu + \varrho\eta}, \quad \omega' = \frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega}.$$

Es ist die Determinante[1])

$$\begin{vmatrix} l & l_1 & l_2 \\ m & m_1 & m_2 \\ n & n_1 & n_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha\gamma & \gamma^2 \\ 2\alpha\beta & \beta\gamma+\alpha\delta & 2\gamma\delta \\ \beta^2 & \beta\delta & \delta^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha^2 & 2\alpha\beta & \beta^2 \\ \gamma & \delta & 0 \\ 0 & \gamma & \delta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}^3 .$$

Da $\Sigma \pm l\, m_1\, n_2$ von null verschieden war, so gilt auch für die Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Bedingung

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

Also ist η wie vorher zu betrachten als Quotient zweier Integrale ξ_1 und ξ_2 eines Fundamentalsystems der Gleichung 15), ω als ein solcher zweier Integrale ϑ_1 und ϑ_2 eines Fundamentalsystems der linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit eindeutigem Coefficienten:

$$\text{15a)} \qquad \frac{d^2 y_1}{dx^2} = s y_1 .$$

Da nach den Gleichungen 16):

$$\omega_1 = \omega = \frac{\zeta_2}{\zeta_1} = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_1},$$

$$\omega_2 = \omega^2 = \frac{\zeta_3}{\zeta_1} = \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_1^2},$$

so ergiebt sich:

$$\zeta_1 = \vartheta_1^2, \; \zeta_2 = \vartheta_1 \vartheta_2, \; \zeta_3 = \vartheta_2^2 .$$

Also genügen in diesem Falle der Differentialgleichung 17) die Quadrate der Integrale der Gleichung 15a). Ein etwaiger ihnen gemeinsamer Factor ist constant, weil in der Gleichung 17) der Coefficient der zweiten Ableitung null ist. Es gilt daher der Satz:

„Genügen die Integrale der Gleichung a) den drei Relationen:

$$u_1 u_4 = u_2 u_3,$$

$$u_1 u_6 = u_2 u_5,$$

$$u_3^2 = u_1 u_5,$$

so befriedigen dieselbe die Producte der Integrale einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit eindeutigen Coefficienten

1) S. S. 31.

und der Quadrate der Integrale einer anderen von ebenderselben Beschaffenheit".

Die erstere ist die Gleichung 22), die letztere erhält man aus 15a) durch die Substitution

$$y_1 = w_1 e^{-\frac{1}{2}\int \varphi_2(x)\,dx},$$

wo die eindeutige Function φ_2 definirt ist durch die Gleichung 21).

Ferner sieht man:

„In diesem Falle sind die 36 Grössen α der Determinante c) darstellbar als ganze rationale Functionen von höchstens acht Grössen, welche den Bedingungen: $\alpha\delta - \beta\gamma \gtrless 0$, $\nu\mu - \lambda\varrho \gtrless 0$ genügen."

„Die Coefficienten der Gleichung a) sind darstellbar als rationale Functionen der drei eindeutigen Functionen r, s, φ und der Ableitungen derselben."

Dies ergiebt sich durch sechsmalige aufeinanderfolgende Differentiation der Gleichung

$$v = y_1^2 y,$$

indem man die zweite Ableitung von y und y_1 jedesmal vermöge der Gleichungen 15) und 15a) reducirt. Man erhält dadurch sieben lineare Gleichungen für die sechs Grössen

$$y_1^2 y,\ y_1^2 \frac{dy}{dx},\ \ y_1 \frac{dy_1}{dx} y,\ \ y_1 \frac{dy_1}{dx}\frac{dy}{dx},\ \left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2 y,\ \left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2 \frac{dy}{dx}.$$

Die Elimination derselben liefert diejenige homogene lineare Differentialgleichung sechster Ordnung mit eindeutigen Coefficienten, der die Producte der Integrale von 15) und der Quadrate der Integrale von 15a) genügen. Durch die Substitution

$$v = u e^{-\int \varphi(x)\,dx}$$

ergiebt sich die in diesem Falle mit a) identische Gleichung.

Anmerkung 2. Besteht unter den Integralen von a) nur eine der Gleichungen 1), z. B.

$$u_1 u_4 = u_2 u_3,$$

so könnte man setzen:

$$\frac{u_2}{u_1} = \eta_1,\ \frac{u_3}{u_1} = \eta_2,\ \frac{u_5}{u_1} = \nu_1,\ \frac{u_6}{u_1} = \nu_2$$

und erhielte aus der Gleichung

$$u_1' u_4' = u_2' u_3',$$

wenn für u_i' die Werthe aus der Gleichung b) gesetzt werden, die Identität für jeden Werth, den η_1, η_2, ν_1 und ν_2 annehmen können:

$$\frac{\alpha_{11}+\alpha_{12}\eta_1+\alpha_{13}\eta_2+\alpha_{14}\eta_1\eta_2+\alpha_{15}\nu_1+\alpha_{16}\nu_2}{\alpha_{21}+\alpha_{22}\eta_1+\alpha_{23}\eta_2+\alpha_{24}\eta_1\eta_2+\alpha_{25}\nu_1+\alpha_{26}\nu_2}$$
$$=\frac{\alpha_{31}+\alpha_{32}\eta_1+\alpha_{33}\eta_2+\alpha_{34}\eta_1\eta_2+\alpha_{35}\nu_1+\alpha_{36}\nu_2}{\alpha_{41}+\alpha_{42}\eta_1+\alpha_{43}\eta_2+\alpha_{44}\eta_1\eta_2+\alpha_{45}\nu_1+\alpha_{46}\nu_2}.$$

Damit sich in einem dieser Quotienten ein in η_1 oder η_2 linearer Factor im Zähler und Nenner ergiebt, müssen die Coefficienten von ν_1 und ν_2 null sein, in Folge der Identität also auch in anderen Quotienten. Die Gleichung a) wäre in diesem Falle reductibel, da u_1, u_2, u_3, u_4 einer linearen homogenen Differentialgleichung vierter Ordnung mit eindeutigen Coefficienten genügen.[1])

1) Ueber dieselbe s. Goursat, l. c. S. 150. Vgl. Schlesinger, l. c. S. 26

VIII.

Ueber die algebraischen Integrale algebraischer Differentialgleichungen.

Von

Dr. E. Jahnke.

Es werde eine irreductible Differentialgleichung erster Ordnung und m^{ten} Grades von der Form

$$1) \qquad F(u, U) = \sum_{\varkappa = 0, \varrho_1 \ldots \varrho_i, m} f_\varkappa(u)\, U^{m-\varkappa} = 0$$

zu Grunde gelegt, wo

$$U = \frac{du}{dz}$$

und die Coefficienten f ganze rationale Functionen von u bedeuten.

Wir verlangen, dass ihr Integral eine eindeutige und zwar eine rationale Function sei; dann folgen die allgemeinen Bedingungsgleichungen, welche zwischen den Coefficienten einer Differentialgleichung, die eine rationale Function definirt, bestehen müssen, aus denen, welche ich* für die Differentialgleichungen mit eindeutigen doppeltperiodischen Integralfunctionen aufgestellt habe, durch die Forderung, dass $R(y)$ mindestens einen Linearfactor dritten Grades enthalte, eine Forderung, die nicht etwa den Briot und Bouquet'schen Untersuchungen** entnommen zu werden braucht; der Nachweis für ihre Richtigkeit wird weiter unten (p. 152) erbracht werden.

Die vorgelegte Differentialgleichung 1) muss, wie auch im ersten Abschnitt meiner Inauguraldissertation* gezeigt ist, eine Form haben, bei der $(f_0 u) = 1$ ist, und die Coefficienten $f_{\varrho_l}(u)$ ganze rationale Functionen $2\varrho_l$ten Grades von u bedeuten. In diese Form gehen auch diejenigen Differentialgleichungen ein, bei denen die Coefficienten $f_{\varrho_l}(u)$ Functionen niedrigeren Grades darstellen, da sich durch gebrochene lineare Substitutionen für u stets erreichen lässt, dass sie den Grad $2\varrho_l$ wirklich annehmen.

Wieder betrachten wir den Specialfall, wo die rationale Function y, welche durch die Differentialgleichung:

---

* Zur Integration von Differentialgleichungen erster Ordnung etc. Inauguraldissertation. Halle 1889.

** Théorie des fonctions elliptiques. Paris 1879.

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 = R(y), \quad R(y) = \sum_{\nu=0}^{4} g_\nu y^{4-\nu}$$

definirt wird, mit u in der Beziehung steht:

$$U = V(u) + y\, W(u), \tag{2}$$

wenn $V(u)$, $W(u)$ rationale Functionen von u bedeuten. Der Nachweis, dass ein solches y überhaupt existirt, wird durch den Verlauf unserer Untersuchung selbst erbracht. Ohne Schaden für die Allgemeinheit können wir auch hier* $V(u)$ und $W(u)$ vorweg als ganze rationale Functionen auffassen, wie aus dem Gleichungssystem B. Nr. II (l. c. p. 7) hervorgeht.

Aus den in Nr. II** aufgestellten allgemeinen Bedingungsgleichungen werden nun für $\varrho_\varkappa = \varkappa$ die folgenden erhalten.

Aus A. Nr. II geht hervor:

$$(m-\nu) A_1^{\,1-\nu} M_\nu(u) = [a_{\nu-1} + (m-2) a_\nu]\, V(u) + \frac{m-1}{m} a_\nu f_1(u)$$
$$(\nu = 2, 3, \ldots, m-2),$$

wo

$$a_\nu = \frac{A_\nu}{A_1^{\,\nu}}$$

gesetzt ist, und andererseits aus B.:

$$m A_1^{\,1-\nu} \left[(m-2)\, V(u) + \frac{m-1}{m} f_1(u)\right]^{\nu-1} M_\nu(u)$$
$$= \binom{m}{\nu} V^\nu(u) + \binom{m-1}{\nu-1} f_1(u)\, V^{\nu-1}(u) + \cdots + f_\nu(u), \quad (\nu = 1, \ldots, m-2)$$

so dass sich durch Elimination von $M_\nu(u)$ ergiebt:

$$\text{I)}\quad \begin{aligned} &\frac{m}{m-\nu}\left\{[a_{\nu-1} + (m-2) a_\nu]\, V(u) + \frac{m-1}{m} a_\nu f_1(u)\right\}\left[(m-2)\, V(u) + \frac{m-1}{m} f_1(u)\right]^{\nu-1} \\ &\quad = \binom{m}{\nu} V^\nu(u) + \binom{m-1}{\nu-1} f_1(u)\, V^{\nu-1}(u) + \cdots + f_\nu(u), \qquad (\nu = 2, \ldots, m-2) \end{aligned}$$

eine Recursionsformel zwischen $V(u)$, $f_1(u)$, $\ldots$, $f_{m-2}(u)$, die illusorisch nur dann werden könnte, wenn A_1 identisch verschwände. Eliminirt man nun $a_2, \ldots, a_{m-3}$ aus I), so findet sich als Eliminationsresultat:

$$m V^{m-1}(u) + (m-1) f_1(u)\, V^{m-2}(u) + \cdots + 2 f_{m-2}(u)\, V(u) = 0,$$

das mit der zweiten Gleichung in B. Nr. II verglichen zu:

$$\text{II)}\qquad f_{m-1}(u) = 0$$

führt, so dass die zweite Gleichung in B. als identische Folge des Systems I) anzusehen ist. Zur Berechnung von $V(u)$ wählen wir die Gleichung $(\nu = 2)$ in I), welche sich so schreiben lässt:

$$m\left[(m-2) a_2 - \frac{m-3}{2}\right] V(u)\, [m(m-2)\, V(u) + 2(m-1) f_1(u)]$$
$$+ (m-1)^2 a_2 f_1^{\,2}(u) - m(m-2) f_2(u) = 0.$$

---

* Wie in meiner Inauguraldissertation, l. c. p. 7.

** l. c.

Da wir *a priori* wissen, dass $V(u)$ eine ganze rationale Function von u darstellt, so muss die Discriminante dieser Gleichung ein vollständiges Quadrat sein:

III) $(m-1)^2(m-3)f_1^2(u)-2m(m-2)^2 f_2(u)=[m-3-2a_2(m-2)]P_2^2(u)$,

wo $P_2(u)$ eine ganze rationale Function zweiten Grades von u bedeutet. Demnach wird:

$$V(u)=\frac{1}{m(m-2)}[-(m-1)f_1(u)+P_2(u)], \tag{3}$$

und es ergiebt sich:

$$M_0(u)=\frac{1}{m^2 A_1}P_2(u),$$

$$M_1(u)=\frac{1}{m(m-2)}[-f_1(u)+P_2(u)],$$

allgemein:

$$M_\nu(u)=\frac{A_1^{\nu-1}}{m(m-2)(m-\nu)}\{-(m-1)a_{\nu-1}f_1(u)+[a_{\nu-1}+(m-2)a_\nu]P_2(u)\}.$$

Zugleich erkennt man, dass die Recursionsformel I) die Coefficienten $f_3(u), \ldots, f_{m-2}(u)$ als ganze rationale Functionen von $f_1(u)$ und $P_2(u)$ darstellt. Eine Darstellung für $f_m(u)$ mittels derselben Grössen liefert die erste Gleichung in B. Nr. II*, welche mit Rücksicht auf 18) Nr. II* die Form annimmt:

IV) $$m^{m-2}A_1^{m-1}F[V(u)]=P_2^{m-1}(u)\,P_1^2(u),$$

wo $V(u)$ aus 3) einzusetzen ist und $P_1(u)$ eine lineare Function von u bedeutet.

Was endlich die Bedingungsgleichungen C. angeht, so haben die Coefficienten der M_ν-Functionen ($\nu \leqq m-2$) die Werthe:

$$m(m-2)(m-\nu)r_{n\nu}=A_1^{\nu-1}\{-(m-1)a_{\nu-1}\alpha_n+[a_{\nu-1}+(m-2)a_\nu]\pi_n\}$$
$$\begin{pmatrix}\nu=0,\,1,\,\ldots,\,m-2\\ n=0,\,1,\,2\end{pmatrix},$$

$$r_{0m}=c_0,\quad r_{1m}=-2c_0c_1,\quad r_{2m}=c_0c_1^2,$$

wenn

$$f_1(u)=\alpha_0u^2+\alpha_1u+\alpha_2,$$
$$P_2(u)=\pi_0u^2+\pi_1u+\pi_2,$$
$$P_1^2(u)=c_0(u-c_1)^2$$

gesetzt wird. Daher stellen sich die Grössen $s_\varkappa$ in Gleichung 20)* als lineare Functionen von Δ_0, Δ_1, Δ_2 und, wenn $\varkappa \geqq m$, als ebensolche von $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ dar, so dass sich das Gleichungssystem C.* in die Form setzen lässt:

V) $$\sum_{\mu=0}^{4}\mathfrak{A}_{\mu\nu}\Delta_\nu=0, \qquad (\nu=1,\,\ldots,\,m-3)$$

wo

* l. c.

$$\begin{aligned}
\Delta_0 &= r_1^2 - 4 r_0 r_2, \\
\Delta_1 &= \alpha_1 r_1 - 2(\alpha_0 r_2 + \alpha_2 r_0), \\
\Delta_2 &= \alpha_1^2 - 4\alpha_0\alpha_2, \\
\Delta_3 &= -2c_0(c_1^2 r_0 + c_1 r_1 + r_2), \\
\Delta_4 &= -2c_0(c_1^2\alpha_0 + c_1\alpha_1 + \alpha_2)^*
\end{aligned}$$

angenommen sind. Dabei sind die $\mathfrak{A}_{\mu\nu}$ ganz und rational aus $A_1, A_2, \ldots, A_{m-3}$ zusammengesetzt.

In I) bis V) haben wir die Bedingungsgleichungen dafür, dass die vorgelegte Differentialgleichung 1) eine doppeltperiodische Integralfunction besitzt.** Soll diese aber rational sein, so treten als zwei weitere Bedingungen die Eliminationsresultate aus

$$R(b_1) = 0, \quad R'(b_1) = 0, \quad R''(b_1) = 0$$

hinzu, wenn b_1 eine dreifache Wurzel von $R(y) = 0$ bezeichnet. Denkt man sich die willkürlichen Constanten in $P_1^2(u)$ so bestimmt, dass

$$\mathfrak{g}_4 = 0,$$

so nehmen die erwähnten Bedingungsgleichungen die Gestalt an:

$$\text{VI)} \qquad \mathfrak{g}_\nu^2 = 3\,\mathfrak{g}_{\nu-1}\,\mathfrak{g}_{\nu+1}. \qquad (\nu = 1, 2)$$

Dabei sind die Coefficienten $\mathfrak{g}_\nu$ $(\nu = 0, 1, 2, 3)$ gemäss V) von der Form:

$$4) \qquad \mathfrak{B}_\nu\,\mathfrak{g}_\nu = \sum_{\mu=0}^{4} \mathfrak{B}_{\mu\nu}\,\Delta_\mu,$$

wo die $\mathfrak{B}$ ganze rationale Functionen der A darstellen.

Die vorgelegte Differentialgleichung 1) muss mithin die folgende Gestalt haben:

1. Die Coefficienten $f_\varkappa(u)$ sind ganze rationale Functionen von höchstens $2\varkappa$tem Grade;
2. $f_0(u) = 1$, $f_{m-1}(u) = 0$;
3. zwischen $f_1(u)$ und $f_2(u)$ besteht die Beziehung III);
4. $f_3(u), \ldots, f_{m-2}(u)$ sind mit $f_1(u)$ und $P_2(u)$ durch die Recursionsformel I) verbunden, wo der Werth für $V(u)$ aus 3) einzusetzen ist;
5. $f_m(u)$ ist in IV) durch $f_1(u)$, $P_2(u)$ und $P_1^2(u)$ ausgedrückt. Die in IV) gestellte Forderung lässt sich noch anders aussprechen. Beachtet man, dass die Recursionsformel I) für $V(u), f_3(u), \ldots, f_{m-2}(u)$ Ausdrücke in $f_1(u)$ und $P_2(u)$ liefert, welche, in die zweite Gleichung von B.*** substituirt, dieselbe identisch befriedigen müssen, da sich ja diese Gleichung als identische Folge von I) darstellt, dass also die Gleichung

$$\frac{dF[V(u)]}{dV(u)} = 0$$

* l. c. ist $c_0 = 1$ angenommen.

** und hiermit ist zugleich die Lücke ausgefüllt, welche im Abschnitt III meiner Inauguraldissertation geblieben ist.

*** l. c.

unter Zuhilfenahme der genannten Ausdrücke für $f_3(u), \ldots, f_{m-2}(u)$ den in 3) angegebenen Werth für $V(u)$ als Wurzel haben muss, so lässt sich die ganze rationale Function $2m$ten Grades $F[V(u)]$ als ein Theiler der Discriminante der algebraischen Gleichung 1) auffassen. Die Bedingung IV) verlangt nun, dass diese Discriminante, und zwar der ausserordentliche Theiler* derselben, durch die $2(m-1)$te Potenz von $P_2(u)$ und das Quadrat von $P_1^2(u)$ theilbar ist;

6. dabei genügen die Grössen A, $\varDelta$ den Systemen V) und VI) algebraischer Gleichungen.

Die Integralfunction von 1) ergiebt sich aus:

$$5)\quad u = \frac{-\sum_{\lambda=0}^{m} r_{1\lambda}\, y^{m-\lambda} + y\left(y + \frac{g_1}{3 g_0}\right)\sum_{\lambda=0}^{m} A_\lambda\, y^{m-\lambda} \sqrt{y\left(g_0 y + \frac{g_1}{3}\right)}}{2\sum_{\lambda=0}^{m} r_{0\lambda}\, y^{m-\lambda}}.$$

Hiernach erkennt man leicht, dass es Differentialgleichungen der Form

$$\sum f_\varkappa(u)\, U^{m-\varkappa} = 0, \qquad (\varkappa = \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_i, m)$$

in denen von vornherein nur $i+1$ Coefficienten angenommen werden,** mit der Eigenschaft, einfach periodische oder rationale Integralfunctionen zu besitzen, unter Voraussetzung der Bedingung 2) nicht giebt.

Dagegen existiren binomische Differentialgleichungen mit der in Rede stehenden Eigenschaft. Nämlich damit hier rationale Integralfunctionen auftreten, ist

$$A_{0m} = 0 \text{***}$$

zu setzen, und dies ist zugleich die Bedingung dafür, dass $P_1(u)$ ein Theiler von $V(u)$ ist; demnach nimmt hier die Differentialgleichung die Gestalt an:

$$U^m = G(u-a)^{m+1}(u-b)^{m-1}, \dagger$$

deren Integral lautet:

$$u = \frac{(\varDelta - \alpha_1)\, y^m - 2a\alpha^m}{2\alpha_0 y^m - 2\alpha^m}.$$

Dabei bedeutet

$$V(u) = \alpha_0 u^2 + \alpha_1 u + \alpha_2,$$
$$(m-2)\alpha = A_1,$$
$$\varDelta^2 = \alpha_1^2 - 4\alpha_0\alpha_2.$$

Die Integrale der in Rede stehenden Differentialgleichungen haben also die bemerkenswerthe Form:

$$x^m = \varphi(u),$$

---

* Vergl. Kronecker, Ueber die Discriminante algebraischer Functionen einer Variablen, Crelle's J. Bd. 91 p. 313.

** welche in Nr. IV und Nr. V l. c. untersucht worden sind.

*** Vergl. Nr. VI l. c.

† Hiermit ist der p. 148 erwähnte Nachweis erbracht.

wo $\varphi(u)$ eine lineare Function des Argumentes bezeichnet. Diese Eigenschaft bleibt noch, wie Herr Klitzkowski* bemerkt hat, für die Differentialgleichungen mit nicht eindeutigen algebraischen Integralfunctionen erhalten.

$$m = 3.$$

Die Differentialgleichung

$$U^3 + f_1(u)\,U^2 + f_2(u)\,U + f_3(u) = 0$$

hat wegen

$$f_2(u) = 0 \quad ,$$
$$2^2 f_1^3(u) + 3^3 f_3(u) = 3^3 P_3^2(u),$$

wo

$$P_3(u) = P_1(u)\,P_2(u) \quad ,$$
$$P_1^2(u) = c_0(u - c_1)^2 \quad ,$$
$$P_2(u) = r_0 u^2 + r_1 u + r_2,$$

und wegen

$$4\Delta_1^2 = 3\Delta_0\Delta_2,$$
$$\Delta_1^2 = 12\Delta_1\Delta_3$$

die Form:

$$U^3 + f_1(u)\,U^2 + d_0(u + d_1)^3\,Q_3(u) = 0,$$

wenn $Q_3(u)$ eine ganze rationale Function dritten Grades von u bezeichnet, und das Integral:

$$u = \frac{-r_1 y^3 + \alpha_1 y^2 + 2c_0 c_1 + y\left(y - \frac{2\Delta_1}{3\Delta_0}\right)\sqrt{y(\Delta_0 y - \frac{2}{3}\Delta_1)}}{2(r_0 y^3 - \alpha_0 y^2 + c_0)},$$

wo

$$f_1(u) = \alpha_0 u^2 + \alpha_1 u + \alpha_2$$

und c_1 durch die Gleichung

$$c_1^2\alpha_0 + c_1\alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

bestimmt ist. Da die beiden willkürlich gebliebenen Functionen $f_1(u)$ und $P_3(u)$ einen Factor gemeinschaftlich haben können, so lässt sich noch eine Form der vorgelegten Differentialgleichung aufstellen, wo $f_1(u)$ die zweite Potenz eines Linearfactors von $f_1(u)$ enthält.

Ein Vergleich dieser Resultate mit den von den Herren Briot und Bouquet gewonnenen** zeigt, dass die allgemeinste Differentialgleichung dritten Grades, welcher durch rationale Functionen genügt werden kann, in die hier behandelte Classe gehört, also die durch 2) geforderte Bedingung stets erfüllt.

$$m = 4.$$

Die Differentialgleichung

$$U^4 + f_1(u)\,U^3 + f_2(u)\,U^2 + f_3(u)\,U + f_4(u) = 0$$

unterliegt den Bedingungen:

---

* Ueber die Integration der $m$ten Wurzel aus einer rationalen Function. Inauguraldissertation. Königsberg, 1887.

** l. c.

$$f_3(u) = 0,$$
$$3^2 f_1^2(u) - 2^5 f_2(u) = P_2^2(u),$$
$$[3 f_1(u) - P_2(u)]^3 [f_1(u) + P_2(u)] + 2^{12} f_4(u) = \frac{2^8}{A_1^3} P_1^2(u)\, P_2^3(u),$$
$$\varDelta_0^2 + 2\varDelta_0 \varDelta_1 + 16 \varDelta_1^2 - 12 \varDelta_0 \varDelta_2 = 0,$$
$$-7 \varDelta_0 \varDelta_1 + 10 \varDelta_1^2 + 7 \varDelta_0 \varDelta_2 - 18 \varDelta_1 \varDelta_2 + 8 \varDelta_2^2 = 0,$$
$$2^5 \varDelta_4 = A_1^3 \varDelta_2.$$

Ihr Integral stellt sich dar in der Form:

$$u = \frac{-\pi_1 y^4 + 2A_1(\alpha_1 - \pi_1) y^3 + A_1^2(3\alpha_1 - \pi_1) y^2 + 2A_1^4 c_0 c_1 + y(y + A_1)\left[y + \frac{2A_1(\varDelta_0 - 2\varDelta_1)}{3\varDelta_0}\right]\sqrt{A_1 y[\varDelta_0 y + \frac{2}{3}A_1(\varDelta_0 - 2 \ldots}}{2[\pi_0 y^4 - 2A_1(\alpha_0 - \pi_0) y^3 - A_1^2(3\alpha_0 - \pi_0) y^2 + 16 A_1 c_0]}$$

wo

$$P_2(u) = \pi_0 u^2 + \pi_1 u + \pi_2$$

gesetzt ist und c_1 derselben Relation wie im Falle $m = 3$ genügt.

IX.

Beiträge zur Theorie ebener Kräftesysteme.

Von

F. Kosch,

Ingenieur und ord. Lehrer a. d. Königl. Oberrealschule zu Breslau.

---

§ 1.

Die Seitenkraft eines Kräftesystems ist die Resultante der parallelen Componenten der einzelnen Kräfte des Systems. Dass die Mittelpunkte dieser nach den verschiedenen Richtungen bestimmten Componenten, also die Angriffspunkte der Seitenkräfte eines ebenen Kräftesystems auf einer geraden Linie, der Centrallinie des Systems, liegen, ist bereits von Möbius, Minding und Schweins bewiesen worden. (Crelle's Journal f. Math., Bd. 14, 15, 16, 38, 47.) Die Arbeiten dieser drei Forscher geben aber keinen weiteren Aufschluss über die Eigenschaften der Seitenkräfte und der Centrallinie, speciell über die Veränderungen ihrer Lagen bei gewissen Aenderungen des Kräftesystems, und auch sonst ist, wenigstens in der mir bekannten Literatur, ein solcher nicht zu finden. Die folgenden Untersuchungen wollen daher die Theorie ebener Kräftesysteme nach obiger Richtung erweitern; zugleich sind der Vollständigkeit und Einheitlichkeit der Darstellung wegen auch einige bereits bekannte Sätze noch einmal abgeleitet worden.

§ 2.

Unter dem Mittelpunkt eines Kräftesystems, welches einer Resultante äquivalent ist, versteht man bekanntlich denjenigen festen Punkt, um welchen die Resultante sich dreht, wenn die Kräfte unter Beibehaltung ihrer Grösse und gegenseitigen Neigung zu einander um ihre fest gedachten Angriffspunkte sich drehen. Die Resultante behält dabei ihre Grösse und Neigung zu den einzelnen Kräften gleichfalls bei, weil das aus den einzelnen Kräften zusammengesetzte Kräftepolygon, dessen Schlusslinie sie ja ist, bei dieser Drehung stets sich selbst congruent bleibt.

Dass ein solcher Mittelpunkt vorhanden ist, lässt sich, wie bekannt, leicht beweisen. Sind P_1 und P_2 zwei Kräfte, p_1 und p_2 ihre Angriffspunkte und o ihr Durchschnittspunkt, so bewegt sich o auf einem festen Kreise, welcher durch p_1 und p_2 geht, falls P_1 und P_2 sich um p_1 bez. p_2 gleichmässig drehen. Da nun die Resultante R der beiden Kräfte immer die gleiche Neigung zu P_1 und P_2 beibehält, so muss der Angriffspunkt r, um welchen R sich dreht, gleichfalls auf diesem Kreise liegen, da dann die Winkel $p_1 or$ und $p_2 or$ als Peripheriewinkel über constanten Bogen selbst constant bleiben. Ist eine dritte Kraft P_3 mit dem Angriffspunkte p_3 vorhanden, so lässt sich mit Hilfe eines zweiten Kreises aus R und P_3 mit r und p_3 die Resultante T der drei Kräfte P_1, P_2, P_3 und ihr Angriffspunkt t finden, u. s. f.

Sind dabei irgend zwei zu vereinigende Kräfte parallel, so liegt ihr Durchschnittspunkt in der Unendlichkeit, und der zu beschreibende Kreis wird zu einer Geraden, welche die Angriffspunkte der beiden Kräfte verbindet und auf welcher der Angriffspunkt der Resultante liegt.

In welcher Reihenfolge man nun auch die Kräfte vereinigen mag, immer gelangt man zu demselben einen Mittelpunkt, weil, wenn deren mehrere vorhanden wären, die Resultante in ihren verschiedenen Lagen diese sämmtlich enthalten müsste, was offenbar unmöglich ist.

Man kann aber auch zu dem Mittelpunkte des Kräftesystems in anderer Weise gelangen. Man bildet nämlich von sämmtlichen Kräften die Componenten nach zwei beliebigen Richtungen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, wodurch man zwei Parallelsysteme erhält. Von jedem dieser beiden Systeme construirt man die Resultante A bezw. B und ihre Mittelpunkte a bezw. b. A und B wollen wir zwei adjungirte Seitenkräfte, a und b zwei adjungirte Mittelpunkte des Systems nennen. Es ist einleuchtend, dass zwei adjungirte Seitenkräfte dem ganzen System äquivalent sind; ferner ist ersichtlich, dass die Resultante R des ganzen Systems durch den Schnittpunkt o zweier adjungirter Seitenkräfte geht und dass dieser Schnittpunkt, der Mittelpunkt m des ganzen Systems, den wir Hauptmittelpunkt nennen wollen, und die beiden adjungirten Mittelpunkte der Seitenkräfte wiederum auf einem Kreise liegen müssen, durch welchen der Hauptmittelpunkt auf der Resultante R bestimmt ist. Dieser Kreis soll ein Mittelpunktskreis des Systems heissen.

§ 3.

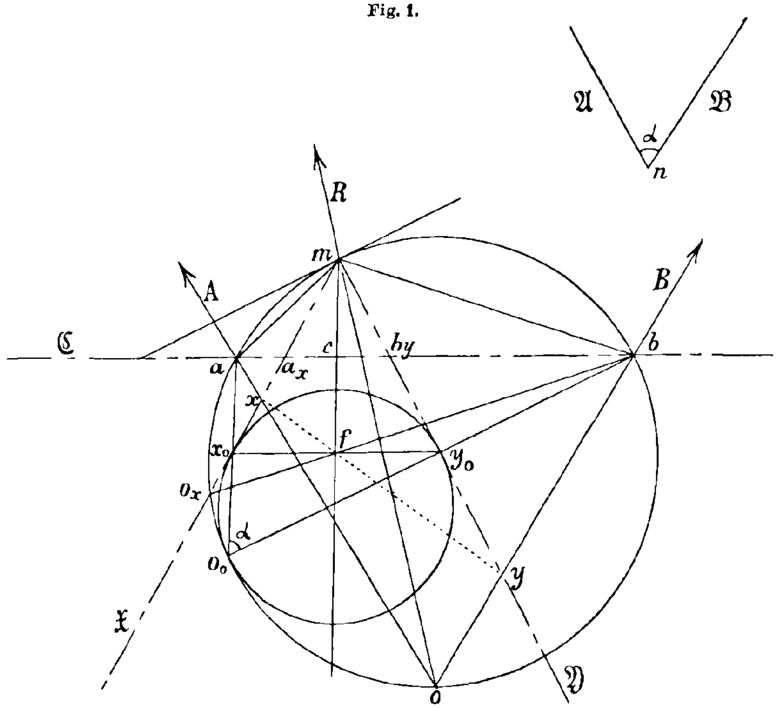
Wir wollen jetzt die beiden adjungirten Seitenkräfte A und B in je zwei Componenten $A_a A_b$ und $B_a B_b$, welche paarweis parallel sind, zerlegen. Durch Vereinigung von $A_a B_a$ bezw. $A_b B_b$ erhält man zwei neue adjungirte Seitenkräfte A_1 und B_1. Da nun $A_a \| B_a$ und $A_b \| B_b$, so liegen die Mittelpunkte a_1 und b_1 dieser neuen Seitenkräfte auf der Verbindungslinie ab der Mittelpunkte der Seitenkräfte A und B, und, weil die Richtung von A_a und B_b beliebig gewählt war, erhält man den Satz:

Die Mittelpunkte aller Seitenkräfte eines Kräftesystems liegen auf einer festen Geraden — der **Centrallinie** des Systems.

§ 4.

A und *B* seien wieder zwei adjungirte Seitenkräfte, welche parallel den Richtungen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind; *o* sei ihr Durchschnittspunkt auf der Resultante *R*, *a* und *b* die adjungirten Mittelpunkte, *m* der Hauptmittelpunkt (Fig. 1).

Fig. 1.



Diese vier Punkte *m*, *o*, *a* und *b* liegen auf einem Mittelpunktskreise. Da nun $\angle AB = \angle \mathfrak{A}\mathfrak{B} = \angle \alpha$ ein constanter ist, so ist $\angle amb$ gleichfalls constant; *ma* und *mb* beschreiben daher, wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ um ihren Durchschnittspunkt *n* unter Beibehaltung ihres Neigungswinkels α sich drehen, zwei projectivisch gleiche Strahlenbüschel, deren gemeinsamer Mittelpunkt der Hauptmittelpunkt *m* ist; infolge dessen sind die beiden adjungirten Mittelpunkte *a* und *b* entsprechende Punkte zweier projectivischen Punktreihen, deren gemeinschaftlicher Träger die Centrallinie $\mathfrak{C}$ ist. Sind a_x und b_y die den unendlich fernen Punkten b_x^∞ bezw. a_y^∞ entsprechenden Punkte, so ist leicht einzusehen, dass die beiden Geraden ma_x und mb_y, die wir $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ nennen wollen, gegen die Centrallinie $\mathfrak{C}$ unter dem Winkel α geneigt sind.

Wir lassen jetzt den Durchschnittspunkt *o* den Mittelpunktskreis durchwandern, dann drehen sich *A*, *B*, *R* um ihre Mittelpunkte *a*, *b* und *m*; *A* und *B* beschreiben zwei projectivische Strahlenbüschel um *a* und *b*, ihre Durchschnittspunkte *x* und *y* mit den Geraden $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ zwei projectivische

Punktreihen. Letztere liegen perspectivisch, da der Durchschnittspunkt m ihrer Träger sich selbst entspricht, und bestimmen somit ein Strahlenbüschel erster Ordnung, dessen Mittelpunkt f sein mag. Trifft o in a ein, so ist A als Tangente an den Mittelpunktskreis parallel $\mathfrak{X}$ und der Punkt x, der Schnittpunkt von A mit $\mathfrak{X}$, ist der unendlich ferne Punkt von $\mathfrak{X}$, während y, der Schnittpunkt von B mit $\mathfrak{Y}$, in b_y fällt. Der zugehörige Strahl $x^\infty b_y$, welcher den Mittelpunkt f enthalten muss, wird daher parallel $\mathfrak{X}$, und in gleicher Weise folgt, dass der Strahl $y^\infty f a_x$ parallel $\mathfrak{Y}$ ist; $m a_x f b_y$ ist demnach ein Rhombus und f der Gegenpunkt vom Hauptmittelpunkt m in Bezug auf die Centrallinie $\mathfrak{C}$. Wir wollen den Punkt f kurz den **Gegenpunkt des Kräftesystems** nennen.

Zieht man nun $x_0 f y_0$ parallel $\mathfrak{C}$, so müssen, weil auch x_0 und y_0 entsprechende Punkte der beiden Punktreihen $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ sind, die Strahlen $a x_0$ und $b y_0$ sich gleichfalls in einem Punkte o_0 des Mittelpunktskreises begegnen. Beschreibt man ferner um das Dreieck $o_0 x_0 y_0$ einen Kreis $\mathfrak{K}$, so berührt dieser wegen der perspectivischen Lage der beiden Dreiecke $o_0 x_0 y_0$ und $o_0 a b$ den Mittelpunktskreis in o_0. Da aber $\angle m x_0 y_0 = \angle m y_0 x_0 = \angle x_0 o_0 y_0 = \alpha$, so sind die beiden Geraden $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ Tangenten an den Kreis $\mathfrak{K}$, $x_0 y_0$ ist die Berührungssehne und somit die Polare des Hauptmittelpunktes m in Bezug auf $\mathfrak{K}$. Die Lage und Grösse dieses Kreises $\mathfrak{K}$ ist ebenso, wie die Lage der Punkte x_0 und y_0 allein abhängig von der Grösse des Winkels α, unabhängig dagegen von der Wahl der beiden adjungirten Mittelpunkte a und b des dazu gehörigen Mittelpunktskreises. Diese beiden Mittelpunkte erzeugen, wie schon oben gezeigt worden ist, zwei projectivische Punktreihen und werden aus den beiden Punkten x_0 und y_0 durch zwei projectivische Strahlenbüschel projicirt, deren entsprechende Strahlen $x_0 a$ und $y_0 b$ im Berührungspunkt des zugehörigen Mittelpunktskreises mit dem Kreise $\mathfrak{K}$ einander begegnen. Weil nun die Centrallinie $\mathfrak{C}$ den Kreis $\mathfrak{K}$ nie schneidet, so können die beiden Strahlen $x_0 a$ und $y_0 b$ auch keinen gemeinschaftlichen Punkt auf $\mathfrak{C}$ haben, woraus folgt, dass die von a und b beschriebenen, aufeinander liegenden projectivischen Punktreihen keine reellen Doppelpunkte besitzen.

Stehen die beiden Geraden $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, nach welchen die Zerlegung der Kräfte erfolgte, normal zueinander, so fallen die beiden Geraden $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ mit der Mittellinie $m c f$ zusammen, der Kreis $\mathfrak{K}$ degenerirt zum Punkte f und alle Mittelpunktskreise gehen durch die beiden Punkte m und f, während die adjungirten Mittelpunkte eine Involution von Punktepaaren bilden, deren Mittelpunkt der Punkt c — **der Centralpunkt des Kräftesystems** — ist.

Wir können nun die Hauptresultate unserer Untersuchung in folgenden Satz zusammenfassen:

Alle Mittelpunktskreise umhüllen im Allgemeinen einen Kreis $\mathfrak{K}$. Dieser verändert mit der Grösse des Winkels ($\mathfrak{A}\mathfrak{B}$)

seine Grösse und Lage derart, dass der Hauptmittelpunkt m und der Gegenpunkt f in Bezug auf ihn stets conjugirt sind und dass die von m an $\mathfrak{K}$ gelegten Tangenten $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ mit der Centrallinie den Winkel $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ bilden. Ist der Winkel $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ ein rechter, so wird der Kreis $\mathfrak{K}$ zum Punkte f, und alle Mittelpunktskreise bilden ein Kreisbüschel, dessen Grundpunkte der Hauptmittelpunkt und Gegenpunkt des Kräftesystems sind.

Die adjungirten Mittelpunkte a und b sind entsprechende Punkte zweier projectivischen Punktreihen und werden aus den Berührungspunkten x_0, y_0 der beiden Tangenten $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ durch zwei Strahlen projicirt, welche sich im Berührungspunkte des zugehörigen Mittelpunktskreises und des Kreises $\mathfrak{K}$ schneiden. Bei der orthogonalen Zerlegung bilden a, b eine elliptische Involution von Punktepaaren, deren Mittelpunkt c ist.

§ 5.

Wir lassen den Punkt o den Mittelpunktskreis bis zu dem Schnittpunkte o_x mit der Geraden $\mathfrak{X}$ durchwandern; dann verbindet $o_x b$, die Seitenkraft B, zwei entsprechende Punkte der projectivischen Punktreihen $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$, und muss deshalb auch Punkt f enthalten. Die Resultante R fällt mit der Geraden $\mathfrak{X}$ zusammen, und da diese Lagenbeziehung für alle Mittelpunktskreise gilt, so erhält man:

Wenn die Resultante mit der Geraden $\mathfrak{X}$ oder mit $\mathfrak{Y}$ zusammenfällt, so bilden alle Seitenkräfte B bezw. A ein Strahlenbüschel erster Ordnung, dessen Mittelpunkt f ist.

Da f der Gegenpunkt von m in Bezug auf die Centrallinie $\mathfrak{C}$ ist, so ergiebt sich, dass der Bogen $\overparen{am}$ gleich dem Bogen $\overparen{ao_x}$ des Mittelpunktskreises ist; $\triangle\, amo_x$ ist daher gleichschenklig. Trifft nun Punkt o mit m zusammen, so fällt die Seitenkraft A auf ma, die Seitenkraft B auf mb und die Resultante R berührt in m den Mittelpunktskreis. Wegen des bekannten Satzes vom Abschnittswinkel folgt dann leicht, dass die Seitenkräfte A und B die Winkel halbiren, welche die Resultante R mit den Geraden $\mathfrak{X}$ bezw. $\mathfrak{Y}$ bildet.

§ 6.

Es sei ein beliebiger Punkt o gegeben. Wir drehen das Kräftesystem und mit ihm die Resultante R um m so weit, bis R den Punkt o enthält. Dann können wir o als Durchschnittspunkt zweier adjungirter Seitenkräfte auffassen. Wir beschreiben den Mittelpunktskreis, welcher durch o und m geht und den Kreis $\mathfrak{K}$ berührt. Dieser Mittelpunktskreis bestimmt auf der Centrallinie $\mathfrak{C}$ zwei adjungirte Mittelpunkte a und b, die Mittelpunkte der sich in dem gegebenen Punkte o schneidenden Seitenkräfte A und B, welche selbst durch oa und ob gegeben sind.

Durch o, m und $\mathfrak{K}$ sind aber im Allgemeinen zwei Mittelpunktskreise festgelegt, woraus folgt, dass durch einen Punkt o im Allgemeinen zwei Paar zugehöriger Seitenkräfte gehen. Wenn aber der Punkt o auf dem Kreise $\mathfrak{K}$ liegt, so giebt es einen einzigen Mittelpunktskreis und infolge dessen auch nur ein Paar zugehöriger Seitenkräfte, welche durch $x_0 y_0$ gehen und dadurch bestimmt sind. Wenn endlich o innerhalb des Kreises $\mathfrak{K}$ liegt, so schneiden sich in ihm keine reellen Seitenkräfte.

Ist o der Schnittpunkt von R mit der Centrallinie $\mathfrak{C}$, so fällt entweder A oder B mit $\mathfrak{C}$ zusammen, und es folgt, da die adjungirte Seitenkraft B resp. A dann mit $\mathfrak{C}$ den Winkel $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = \alpha$ bildet, dass $B \| \mathfrak{Y}$ bezw. $A \| \mathfrak{X}$ sein muss. Wenn endlich o mit m zusammenfällt, so berührt der Mittelpunktskreis die Resultante R in m, und wir sahen schon in § 5, dass die Seitenkräfte A und B die Winkel, bezw. ihre Nebenwinkel halbiren, die R mit $\mathfrak{X}$ bezw. $\mathfrak{Y}$ bildet.

Bei der orthogonalen Zerlegung wird der Kreis $\mathfrak{K}$ zum Punkte f, woraus hervorgeht, dass in jedem Punkte ein Paar adjungirter Seitenkräfte sich begegnen, aber eben nur ein Paar, da durch die Punkte m, o, f nicht mehr als ein Mittelpunktskreis zu legen ist. Dagegen in f selbst begegnen sich alle Seitenkräfte, wenn die Resultante R normal zur Centrallinie $\mathfrak{C}$ gerichtet ist. Da ferner $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ mit mf zusammenfallen, so ergiebt sich weiter, dass durch den Schnittpunkt von R mit $\mathfrak{C}$ die zur Centrallinie normale Seitenkraft gehen muss.

§ 7.

Aufgabe: Es ist ein Paar adjungirter Seitenkräfte A und B gegeben. Man soll den Ort ihres Durchschnittspunktes o bestimmen, wenn A und B sich parallel verschieben.

Da die Mittelpunkte a und b zweier adjungirten Seitenkräfte entsprechende Punkte zweier projectivischen Punktreihen sind, so bilden A und B zwei projectivische Parallelstrahlenbüschel; ihr Durchschnitt ist daher eine Hyperbel, deren Asymptoten parallel A und B sind. Die durch die Punkte a_x und b_y gelegten Seitenkräfte A_x bezw. B_y sind die Asymptoten selbst, weil die ihnen adjungirten Kräfte B_x und A_y durch die unendlich fernen Punkte b_x^∞ bezw. a_y^∞ gehen, mithin ihr Durchschnitt o_x und o_y mit A_x bezw. B_y die beiden unendlich fernen Punkte der Hyperbel sind. Es ist einleuchtend, dass die Resultante R in diesem Falle parallel A_x bezw. B_y sein muss.

Da es innerhalb des Kreises $\mathfrak{K}$ nach § 6 keinen Punkt o, auf dem Kreise $\mathfrak{K}$ nur einen solchen Punkt giebt, nämlich den Schnittpunkt der durch die beiden Punkte x_0 resp. y_0 gelegten Seitenkräfte A_0 und B_0, so folgt, dass die Hyperbel den Kreis $\mathfrak{K}$ berührt. Da endlich auch o in den Hauptmittelpunkt m fallen kann, so enthält die Hyperbel auch diesen.

Wir erhalten somit als Resultat:

Der geometrische Ort für die Durchschnittspunkte o paralleler adjungirter Seitenkräfte A und B ist eine Hyperbel.

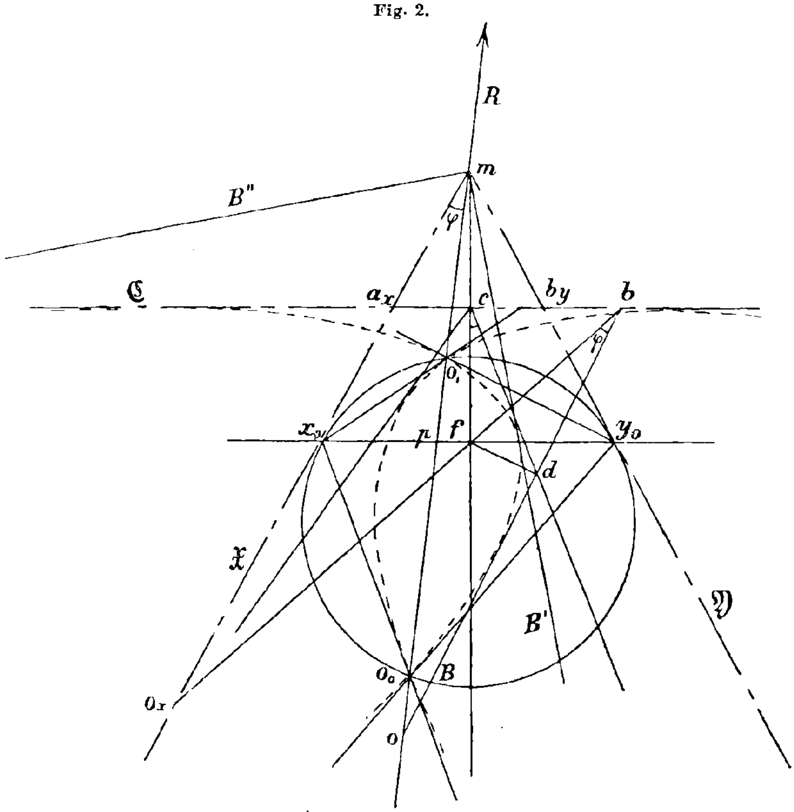
Die den verschiedenen Richtungen entsprechenden Hyperbeln enthalten sämmtlich den Hauptmittelpunkt m und berühren den Kreis $\mathfrak{K}$. Ihre Asymptoten sind die durch die beiden Punkte a_x und b_y gezogenen Seitenkräfte A_x und B_y; ihr Mittelpunkt, der Durchschnitt von A_x mit B_y, liegt auf einem Kreise, welcher die Geraden $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ in den Punkten a_x und b_y berührt.

Bei der orthogonalen Zerlegung erhalten wir dagegen ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln, dessen zwei reelle Grundpunkte der Hauptmittelpunkt m und der Gegenpunkt f sind, und welche sämmtlich den Centralpunkt c zum Mittelpunkt haben.

§ 8.

Wir fanden in § 5, dass sämmtliche Seitenkräfte B in f sich begegnen, wenn die Resultante R mit der Geraden $\mathfrak{X}$ zusammenfällt. Drehen wir

Fig. 2.



jetzt R um den Hauptmittelpunkt m, so drehen sich die Seitenkräfte B um ihre Mittelpunkte b in gleicher Weise um den Winkel φ. Sind die Mittellinie fc und die Linie fb (Fig. 2) zwei solcher Seitenkräfte in ursprünglicher Lage, dc und db in der neuen Lage, so sind die Winkel fcd bezw. $fbd = \varphi$, woraus folgt, dass $fcbd$ ein Sehnenviereck ist. Da nun der Winkel fcb ein rechter, so ist es auch Winkel fdb, d. h. der Fusspunkt des von f auf die Seitenkraft B gefällten Lothes liegt auf der Geraden cd, und da dies von allen Seitenkräften gilt, so folgt weiter, dass die Seitenkräfte B sämmtlich Tangenten einer Parabel $\mathfrak{P}_b$ sind, deren Brennpunkt f und deren Scheiteltangente cd ist. Ganz analog lässt sich nachweisen, dass die Seitenkräfte A eine Parabel $\mathfrak{P}_a$ umhüllen. Nun kann sowohl A, als auch B einmal mit der Centrallinie $\mathfrak{C}$ zusammenfallen, in welchem Falle nach § 6 die adjungirten Seitenkräfte B resp. A parallel $\mathfrak{Y}$ bezw. $\mathfrak{X}$ sind und sich im Schnittpunkte der Resultante mit der Centrallinie treffen. Daraus folgt einerseits, dass sowohl $\mathfrak{P}_a$, als auch $\mathfrak{P}_b$ die Centrallinie berühren, andererseits, dass die an $\mathfrak{P}_a$ und $\mathfrak{P}_b$ parallel $\mathfrak{X}$ bezw. $\mathfrak{Y}$ gelegten Tangenten sich mit der Resultante auf der Centrallinie begegnen.

Der Hauptmittelpunkt m ist der Gegenpunkt des Brennpunktes f in Bezug auf die Tangente $\mathfrak{C}$, daher ein Punkt der beiden Leitlinien und zugleich der Pol der Linie $x_0 f y_0$.

Man ziehe von m die beiden Tangenten B' und B'' an $\mathfrak{P}_b$, so halbiren diese Seitenkräfte nach § 6 den Winkel, den R mit $\mathfrak{Y}$ bildet, und seinen Nebenwinkel; die vier Strahlen R, $\mathfrak{Y}$, B', B'' sind mithin vier harmonische, und daher R und $\mathfrak{Y}$ zwei conjugirte Strahlen in Bezug auf die Parabel $\mathfrak{P}_b$. Ist p der Schnittpunkt von R mit der Geraden $x_0 y_0$, so ist das Dreieck pmy_0 ein Polardreieck für die Parabel $\mathfrak{P}_b$ und ebenso pmx_0 ein Polardreieck für die Parabel $\mathfrak{P}_a$. Schneidet die Resultante R den Kreis $\mathfrak{K}$ in den beiden Punkten o_0 und o_1, so sind nach §§ 4 und 6 $o_0 x_0$ und $o_0 y_0$ einerseits, $o_1 x_0$ und $o_1 y_0$ andererseits zwei Paare adjungirter Seitenkräfte und daher Tangenten an $\mathfrak{P}_a$ bezw. $\mathfrak{P}_b$. Da nun R die Polare von x_0 bezw. y_0 ist, so sind o_0 und o_1 die beiden Berührungspunkte und daher die Schnittpunkte von $\mathfrak{P}_a$ und $\mathfrak{P}_b$.

Nun entsprechen jeder Lage der Resultante zwei solche — adjungirte — Parabeln, welche sämmtlich dieselben Eigenschaften haben. Wir erhalten somit:

Zu jeder Resultante R gehören im Allgemeinen zwei adjungirte Parabeln $\mathfrak{P}_a$ und $\mathfrak{P}_b$, welche von den Seitenkräften A und B umhüllt werden und in Bezug auf welche R und $\mathfrak{X}$ bezw. $\mathfrak{Y}$ conjugirte Strahlen sind. Diese beiden Parabeln begegnen sich mit R auf dem Kreise $\mathfrak{K}$ in zwei reellen oder imaginären Punkten; ihre Leitlinien schneiden sich im Hauptmittelpunkte m, ihre Scheiteltangenten im Centralpunkte c und bilden mit der Mittellinie mf denselben Winkel, den die Resultante R mit $\mathfrak{X}$ bezw. $\mathfrak{Y}$ einschliesst. Die parallel $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ an $\mathfrak{P}_a$ bezw. $\mathfrak{P}_b$ gelegten Tangenten treffen sich mit der Resultante auf der Centrallinie $\mathfrak{C}$. Alle den verschiedenen Lagen von R entsprechenden Parabeln bilden eine Parabelschaar, deren gemeinschaftliche Tangente die Centrallinie $\mathfrak{C}$, deren Brennpunkt der Gegenpunkt f ist, und für alle ist die Gerade x_0y_0 die Polare des Hauptmittelpunktes m. Nur wenn die Resultante R mit den Geraden $\mathfrak{X}$ oder $\mathfrak{Y}$ zusammenfällt, bilden die Seitenkräfte B oder A ein Strahlenbüschel erster Ordnung, dessen Mittelpunkt f ist, während in diesem Falle die Parabeln $\mathfrak{P}_a$ und $\mathfrak{P}_b$ die Geraden $\mathfrak{X}$ bezw. $\mathfrak{Y}$ in den Punkten x_0 oder y_0 berühren.

§ 9.

Bei der orthogonalen Zerlegung fallen die beiden Geraden $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ mit der Mittellinie mf zusammen, und infolge dessen vereinigen sich auch die beiden adjungirten Parabeln $\mathfrak{P}_a$ und $\mathfrak{P}_b$ zu einer. Die Resultante R wird der Scheiteltangente parallel, ist demnach die Leitlinie.

Daher haben wir:

Alle Seitenkräfte umhüllen bei orthogonaler Zerlegung eine Parabel, deren Leitlinie die Resultante, deren Scheiteltangente die der Resultante parallele Seitenkraft ist. Sämmtliche den verschiedenen Lagen der Resultante entsprechenden Parabeln bilden eine Parabelschaar, deren gemeinschaftliche Tangente die Centrallinie, deren gemeinschaftlicher Brennpunkt der Gegenpunkt f ist. Nur wenn die Resultante normal zur Centrallinie gerichtet ist, bilden sämmtliche Seitenkräfte ein Strahlenbüschel erster Ordnung, dessen Mittelpunkt der Gegenpunkt f ist.

Soll die Lage einer Seitenkraft A von bestimmter Richtung $\mathfrak{A}$ ermittelt werden, so haben wir nur nöthig, an die Parabel eine zu $\mathfrak{A}$ parallele Tangente zu legen, bezw. durch den Gegenpunkt f eine Parallele zu $\mathfrak{A}$ zu ziehen. Dadurch ist A und der dazu gehörige Mittelpunkt a bestimmt. Dreht sich die Linie $\mathfrak{A}$ um einen Punkt und erzeugt sie somit ein Strahlenbüschel, so beschreibt A ein ihm projectivisches Strahlenbüschel zweiter oder erster Ordnung, je nachdem die Resultante einen spitzen oder einen rechten Winkel mit der Centrallinie bildet, und der dazu gehörige Mittelpunkt a beschreibt eine diesen Büscheln projectivische Punktreihe.

Man sieht dabei leicht ein: die zur Resultante parallele Seitenkraft hat den Centralpunkt zum Mittelpunkt, die zur Resultante normale Seitenkraft dagegen den unendlich fernen Punkt der Centrallinie.

§ 10.

Unsere bisherigen Untersuchungen behandelten Lagenbeziehungen der Seitenkräfte bei festliegendem Hauptmittelpunkt und festliegender Centrallinie; die Veränderungen, denen das Kräftesystem unterworfen war, bestanden nur in gleichmässigen Drehungen sämmtlicher Kräfte um ihre Angriffspunkte. Wir gehen nun dazu über, die Intensität einzelner Kräfte zu verändern, oder, was für vorliegende Aufgabe damit gleichbedeutend ist, wir fügen dem System neue Kräfte hinzu und untersuchen, welche Lagen Hauptmittelpunkt, Gegenpunkt, Centralpunkt und Centrallinie dabei einnehmen, wobei wir uns der Einfachheit wegen nur orthogonaler Zerlegungen bedienen werden.

Es sei ein Kräftesystem Σ' mit seinem Hauptmittelpunkte m', seiner Resultante R' etc. gegeben. Wir vereinigen mit diesem System eine Kraft P, deren Angriffspunkt p sein mag, und erhalten dadurch das System Σ. Schneiden R' und P sich im Punkte o, so muss zunächst die Resultante R des Systems Σ auch durch o gehen, und der Hauptmittelpunkt m ist der Schnittpunkt von R mit dem durch die drei Punkte m', p, o bestimmten Kreise $\mathfrak{M}$.

Die Grösse und Richtung von R ist nun abhängig von dem Verhältniss der Resultante R' zu der Kraft P und durch das Parallelogramm zu finden. Setzen wir

$$\frac{P}{R'} = \lambda,$$

so ist leicht einzusehen, dass auch

$$-\frac{mm'}{mp} = \lambda$$

ist; es entspricht also den verschiedenen Werthen von λ je eine bestimmte Richtung von R, eine bestimmte Lage von m auf dem Kreise $\mathfrak{M}$. Den Werthen $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$ entsprechen die beiden Punkte m' bezw. p; durch diese Punkte wird die Peripherie von $\mathfrak{M}$ in zwei Theile getheilt, deren einer den positiven, deren anderer den negativen Werthen von λ zugehört. Wenn daher P alle möglichen positiven und negativen Werthe annimmt, so beschreibt m eine Punktreihe auf dem Kreise $\mathfrak{M}$ und R ein zu dieser perspectivisches Strahlenbüschel.

Ist $R' \parallel P$, so wird der Kreis $\mathfrak{M}$ zu einer Geraden, welche m' mit p verbindet; m beschreibt eine gerade Punktreihe und R ein zu ihr perspectivisches Parallelstrahlenbüschel. Die Lage von m und von R ist bestimmt durch die Gleichung

$$-\frac{mm'}{mp} = \frac{P}{R'} = \lambda.$$

§ 11.

Wir bilden nach der Richtung $\mathfrak{A}$ die Seitenkraft A' des Systems Σ', die Componente A^p der Kraft P und erhalten durch Vereinigung der beiden parallelen Kräfte A' und A^p die Seitenkraft A des Systems Σ. Die Mittelpunkte dieser drei parallelen Kräfte a', p und a liegen auf einer Geraden, welche wir einen **Mittelpunktsstrahl** nennen wollen. Beschreibt nun $\mathfrak{A}$ ein Strahlenbüschel, so erzeugen a' und a nach § 9 zwei dem Büschel projectivische Punktreihen, deren Träger die Centrallinien $\mathfrak{C}'$ und $\mathfrak{C}$ sind. Diese Punktreihen befinden sich in perspectivischer Lage, da a' und a immer auf einem durch p gehenden Mittelpunktsstrahle liegen; sie sind die Schnitte von $\mathfrak{C}'$ und $\mathfrak{C}$ mit einem Büschel von Mittelpunktsstrahlen, dessen Mittelpunkt p ist.

Wir bezeichnen in der Folge mit

A_p die Seitenkraft parallel einer Kraft P,
B_p die Seitenkraft normal zur Kraft P,
a_p den Mittelpunkt der ersteren,
b_p den Mittelpunkt der zweiten Kraft

und unterscheiden durch rechts oben angebrachte Accente, welchem System diese Kräfte und Mittelpunkte angehören; wir nennen endlich $\mathfrak{S}_p$ den Mittelpunktsstrahl, welcher die Mittelpunkte a_p enthält, und $\mathfrak{T}_p$ den Mittelpunktsstrahl, welcher die Mittelpunkte b_p trägt.

Wegen der perspectivischen Lage der beiden von a' und a erzeugten Punktreihen entspricht der Durchschnittspunkt von $\mathfrak{C}'$ und $\mathfrak{C}$ sich selbst; er ist, wie leicht einzusehen ist, der Mittelpunkt b_p der zur Kraft P normalen Seitenkraft B_p des Systems Σ. Die Componente B_p^p von P, normal zu P genommen, ist nämlich Null, woraus folgt, dass die parallelen Seitenkräfte B'_p und B_p der Systeme Σ' und Σ und damit auch ihre Mittelpunkte b'_p und b_p zusammenfallen. B_p^p bleibt aber stets Null, welche Grösse die Kraft P auch immer haben mag; d. h. der Punkt b'_p ist ein fester, der nur von der Richtung, nicht aber von der Intensität der Kraft P abhängig ist. Aendert sich das Verhältniss $\frac{P}{R'} = \lambda$, so beschreibt die Centrallinie $\mathfrak{C}$ um b'_p ein Strahlenbüschel.

Wir bilden die zur Resultante R normalen Seitenkräfte B'_r, B_r, B_r^p, deren Mittelpunkte b'_r, b_r und p sind und auf dem Mittelpunktsstrahle $\mathfrak{T}_r$ liegen; b_r ist nach § 9 der unendlich ferne Punkt von $\mathfrak{C}$, mithin ist $\mathfrak{C} \| \mathfrak{T}_r$. Aendert λ seinen Werth, so beschreibt R ein Strahlenbüschel, b'_r auf $\mathfrak{C}'$ eine ihm projectivische Punktreihe und somit $\mathfrak{T}_r$ und $\mathfrak{C}$ ein ihm projectivisches Büschel.

Der Mittelpunkt a'_r der zu R parallelen Seitenkraft A'_r ist dem Mittelpunkt b'_r adjungirt und bildet mit ihm ein Punktepaar einer Involution § 4, daher sind $\mathfrak{S}_r$ und $\mathfrak{T}_r$ zugeordnete Strahlen eines involutorischen Strahlenbüschels. Der Centralpunkt c des Systems Σ ist aber der Mittelpunkt der Seitenkraft A_r und liegt als solcher sowohl auf der Centrallinie $\mathfrak{C}$, als auch auf dem Mittelpunktsstrahle $\mathfrak{S}_r$. Da nun $\mathfrak{C}$ immer parallel $\mathfrak{T}_r$ ist. so erzeugt die Centrallinie mit $\mathfrak{S}_r$ einen Kegelschnitt, auf welchem alle Centralpunkte c liegen. Da $\mathfrak{S}_r$ und $\mathfrak{T}_r$ wegen des elliptischen Charakters der Involution nie zusammenfallen, so kann auch $\mathfrak{C}$ niemals parallel $\mathfrak{S}_r$

werden; der von $\mathfrak{C}$ beschriebene Kegelschnitt hat daher keine Punkte auf der unendlich fernen Geraden und ist demnach eine Ellipse, welche wir mit $\mathfrak{E}^{(2)}$ bezeichnen wollen. Dieselbe enthält natürlich auch die Punkte p, b'_p und c'.

Ist λ so gewählt, dass $R \| P$ ist, so fällt $\mathfrak{T}_r$ mit $\mathfrak{T}_p$, d. h. mit der Linie $p b'_p$ zusammen, und da $\mathfrak{C} \| \mathfrak{T}_r$ ist, so wird für diesen Fall $\mathfrak{C}$ mit $p b'_p$ identisch. Dann ist $\mathfrak{S}_p$ der Strahl, welcher die Ellipse $\mathfrak{E}^{(2)}$ in p berührt.

Wir können aber auch für λ einen Werth annehmen, der die Resultante R normal zur Kraft P bestimmt. Dann fällt $\mathfrak{S}_r$ mit $\mathfrak{T}_p$, d. h. mit $p b'_p$ zusammen und $\mathfrak{C}$ wird parallel $\mathfrak{S}_p$, weil $\mathfrak{T}_r$ mit $\mathfrak{S}_p$ identisch ist. $\mathfrak{C}$ ist aber in unserem Falle eine Tangente im Punkte b'_p an die Ellipse $\mathfrak{E}^{(2)}$. Somit sind die beiden in p und b'_p an die Ellipse $\mathfrak{E}^{(2)}$ gelegten Tangenten parallel; $p b'_p$ ist für $\mathfrak{E}^{(2)}$ ein Durchmesser.

§ 12.

Die Seitenkräfte A', A umhüllen bekanntlich Parabeln, deren Brennpunkte f' und f sind; die Parabel $\mathfrak{P}'$ gehöre dem System Σ', $\mathfrak{P}$ dem System Σ an. $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{P}$ haben nun entweder eine oder drei reelle gemeinschaftliche Tangenten; diese sind gleichgerichtete, zusammenfallende Seitenkräfte der Systeme Σ' und Σ. Die eine stets reelle Tangente ist die zu P normale Seitenkraft B_p, welche durch den Schnittpunkt b'_p von $\mathfrak{C}'$ und $\mathfrak{C}$ geht (§ 11). Sind B_u und B_v die beiden anderen Seitenkräfte, $b'_u b_u$ und $b'_v b_v$ ihre Mittelpunkte, so ist einleuchtend, dass B_u und B_v mit den Verbindungsstrahlen der Mittelpunkte $b'_u b_u$ und $b'_v b_v$, d. h. mit $\mathfrak{T}_u$ und $\mathfrak{T}_v$ zusammenfallen müssen; diese Strahlen schneiden sich aber in p, woraus folgt, dass B_u und B_v die beiden von p an die Parabeln gelegten Tangenten sind. Je nachdem also p ausserhalb oder innerhalb der Parabel $\mathfrak{P}'$ liegt, sind B_u und B_v reell oder imaginär. Da p und $\mathfrak{P}'$ und, wie wir gesehen haben, auch die Lage von B_p von dem Werthe des Verhältnisses λ unabhängig sind, so berührt die Parabel $\mathfrak{P}$ des Systems Σ bei veränderlichem λ stets die drei festen Geraden B_p, B_u, B_v, ihr Brennpunkt bewegt sich daher auf einem Kreise $\mathfrak{F}$, welcher dem aus diesen drei Geraden gebildeten Dreieck umschrieben ist; p ist somit ein Punkt dieses Kreises, und es ist einleuchtend, dass f' diesem Kreise gleichfalls angehört.

Der Fall, bei dem die Resultante R' normal zur Centrallinie $\mathfrak{C}'$ ist, bedarf noch einer speciellen Untersuchung, da dann die Parabel $\mathfrak{P}'$ verschwindet und an ihre Stelle ein Strahlenbüschel erster Ordnung mit dem Mittelpunkte f' tritt. pf' ist eine Gerade, welche zwei zusammenfallende Seitenkräfte enthält, berührt also $\mathfrak{P}$; die zu P normale Seitenkraft B_p ist die Verbindungslinie von f' mit b'_p und ist die zweite von f' an $\mathfrak{P}$ gelegte Tangente. Die zu R' normale Seitenkraft $B'_{r'}$ hat ihren Mittelpunkt im Unendlichen, ist somit parallel der Centrallinie $\mathfrak{C}'$; daher ist auch der Mittelpunktsstrahl $\mathfrak{T}_{r'}$ oder die Linie $p b'_{r'}$, welche den Mittelpunkt $b_{r'}$ der Seitenkraft $B_{r'}$ enthält, parallel $\mathfrak{C}'$; $B_{r'}$ fällt somit mit $\mathfrak{T}_{r'}$ zusammen und ist die eine vom Punkte p an $\mathfrak{P}$ gelegte Tangente, die andere ist pf'. Die drei Geraden pf', B_p und $B_{r'}$ behalten ihre Lage bei, wenn λ seinen Werth ändert, und werden von der Parabel $\mathfrak{P}$ berührt; der Kreis $\mathfrak{F}$ enthält daher ihre drei Schnittpunkte, nämlich den Punkt p, den Punkt f' und den Schnittpunkt von B_p mit der durch p zu $\mathfrak{C}'$ gelegten Parallelen.

Die zu den Parabeln $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{P}$ gehörigen Leitlinien sind die Resultanten R' und R (§ 9); dieselben schneiden sich immer im Punkte o (§ 10). Nun ist bekanntlich der Schnittpunkt der Leitlinien aller einem Dreieck einbeschriebenen Parabeln der Höhenschnittpunkt dieses Dreiecks; sein Gegenpunkt in Bezug auf eine Seite liegt immer auf dem umschriebenen Kreise. Wir erhalten somit leicht einen neuen Punkt unseres Kreises $\mathfrak{F}$, wenn wir den Gegenpunkt von o in Bezug auf die Seitenkraft B_p nehmen.

§ 13.

Wir behandeln hier den besondern Fall, dass $P \| R'$ ist. Die zu P normale Seitenkraft B'_p ist auch normal zu R', der Mittelpunkt b'_p, um welchen die Centrallinie $\mathfrak{C}$ sich dreht, ist der unendlich ferne Punkt von $\mathfrak{C}'$, d. h. $\mathfrak{C}$ beschreibt ein Parallelstrahlenbüschel. Da die Centralpunkte c entsprechende Punkte, d. h. Mittelpunkte gleichgerichteter Seitenkräfte sind, so bewegt sich c auf dem Mittelpunktsstrahl $\mathfrak{S}_{r'}$ oder pc'. Ebenso wird der Kreis $\mathfrak{F}$ zur Verbindungslinie pf'; die Mittellinie mcf verschiebt sich also parallel mit sich selbst, wobei sich die drei Punkte m, c und f auf drei Geraden fortbewegen, welche in p sich schneiden. Die specielle Lage von mcf ist bestimmt durch

$$-\frac{mm'}{mp} = -\frac{cc'}{cp} = -\frac{ff'}{fp} = \frac{P}{R'} = \lambda.$$

Ist $\lambda = -1$, so ist $P = -R'$; das System Σ ist äquivalent einem Kräftepaare; m, c, f, $\mathfrak{C}$ und R liegen im Unendlichen.

Wenn dagegen $R' = 0$, λ also $= \infty$ wird, so fallen m, c und f in den Angriffspunkt p der Einzelkraft P, und jede durch p gehende Gerade kann als Centrallinie angesehen werden.

§ 14.

Es seien zwei Kräftesysteme Σ' und Σ'' gegeben; das Verhältniss der Resultanten sei

$$\frac{R''}{R'} = \lambda.$$

Σ' und Σ'' werden zu einem System Σ vereinigt. Der Ort für die Resultante R und den Hauptmittelpunkt m bestimmt sich genau so, wie in § 10, wenn für P die Resultante R'', für p der Hauptmittelpunkt m'' gesetzt wird.

Wir bilden wieder nach der Richtung $\mathfrak{A}$ die beiden Seitenkräfte A' und A''; ihre Mittelpunkte a' und a'' beschreiben, wenn $\mathfrak{A}$ gedreht wird, zwei zum Büschel $\mathfrak{A}$ und daher zueinander projectivische Punktreihen auf den beiden Centrallinien $\mathfrak{C}'$ und $\mathfrak{C}''$. Die Mittelpunktsstrahlen $a'a''$ oder $\mathfrak{S}$, auf welchen immer der Mittelpunkt a des Systems Σ liegen muss, umhüllen daher einen Kegelschnitt $\mathfrak{C}^{(2)}$, welcher $\mathfrak{C}'$ und $\mathfrak{C}''$ berührt. Wir bestimmen ferner die Mittelpunkte $b'_{r'}$ und $b''_{r'}$ der zur Resultante R' normalen Seitenkräfte; $b'_{r'}$ ist der unendlich ferne Punkt der Centrallinie $\mathfrak{C}'$, woraus folgt, dass der entsprechende Mittelpunktsstrahl $\mathfrak{T}_{r'}$, welcher die Punkte $b'_{r'}$ und $b''_{r'}$ enthält, der Centrallinie $\mathfrak{C}'$ parallel läuft. Ebenso folgt, dass $\mathfrak{T}_{r''}$ parallel $\mathfrak{C}''$ ist. Die vier Linien $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{T}_{r'}$, $\mathfrak{C}''$, $\mathfrak{T}_{r''}$ bilden daher ein dem Kegelschnitt $\mathfrak{C}^{(2)}$ umschriebenes Parallelogramm, dessen Diagonalen zwei conjugirte Durchmesser sind; die Mitte der Diagonale $b'_{r''} b''_{r'}$ ist daher der Mittelpunkt u des Kegelschnitts $\mathfrak{C}^{(2)}$.

Die Centrallinie $\mathfrak{C}$ des Systems Σ schneide $\mathfrak{C}'$ in einem Punkte a'_0; dann liegt der entsprechende Mittelpunkt a_0 einmal auf $\mathfrak{C}$, zum Zweiten aber auch auf dem Mittelpunktsstrahl $\mathfrak{S}_0$, welcher a'_0 mit a''_0 verbindet. $\mathfrak{C}$ fällt daher mit $\mathfrak{S}_0$ zusammen, ist daher gleichfalls eine Tangente an $\mathfrak{C}^{(2)}$. Wir construiren den Mittelpunktsstrahl $\mathfrak{T}_r$, welcher die Mittelpunkte b'_r, b''_r, b_r der zur Resultante R normalen Seitenkräfte enthält; da b_r der unendlich ferne Punkt von $\mathfrak{C}$ ist, so ist $\mathfrak{C} \parallel \mathfrak{T}_r$. Bei veränderlichem λ beschreibt R ein Strahlenbüschel, $\mathfrak{T}_r$ und damit auch $\mathfrak{C}$ zwei ihm projectivische Büschel zweiter Ordnung, deren Träger $\mathfrak{C}^{(2)}$ ist.

Die adjungirten Mittelpunkte a'_r und b'_r zweier zueinander normalen Seitenkräfte sind Punktepaare einer elliptischen Involution (§ 4) auf der Tangente $\mathfrak{C}'$; die beiden adjungirten Mittelpunktsstrahlen $\mathfrak{S}_r$ und $\mathfrak{T}_r$ sind daher zwei involutorisch gepaarte Tangenten an $\mathfrak{C}^{(2)}$. Ihr Schnittpunkt liegt daher immer auf einer Geraden $\mathfrak{G}$, und wenn s und t die Berührungspunkte von $\mathfrak{S}_r$ und $\mathfrak{T}_r$ sind, so geht die Verbindungslinie st immer durch einen Punkt g, den Pol zur Geraden $\mathfrak{G}$ in Bezug auf $\mathfrak{C}^{(2)}$. Man nennt g bekanntlich Involutionscentrum und $\mathfrak{G}$ Involutionsaxe. Da nun wegen des elliptischen Charakters der Involution die beiden Strahlen $\mathfrak{S}_r$ und $\mathfrak{T}_r$ und damit auch die beiden Punkte s und t nie zusammenfallen können, so muss g stets innerhalb, $\mathfrak{G}$ stets ausserhalb des Kegelschnittes $\mathfrak{C}^{(2)}$ liegen.

Wir haben gesehen, dass die Centrallinie $\mathfrak{C}$ stets dem Mittelpunktsstrahl $\mathfrak{T}_r$ parallel ist. Ist r der Berührungspunkt von $\mathfrak{C}$, so sind r und t als Endpunkte eines Durchmessers gleichfalls involutorisch gepaart; das dazu gehörige Involutionscentrum ist der Mittelpunkt u des Kegelschnitts. Daraus folgt, dass s und r entsprechende Punkte zweier projectivischen Punktreihen auf dem Kegelschnitte $\mathfrak{C}^{(2)}$ sind. (Den speciellen Fall, bei welchem s und r selbst involutorisch gepaart sind, behandeln wir weiter unten.) Diese beiden Punktreihen haben stets zwei reelle Doppelpunkte, da die beiden Geraden tur und tgs zweimal mit dem Durchmesser ug zusammenfallen. Weil g stets innerhalb des Kegelschnittes liegt, so hat der Durchmesser ug immer zwei reelle Endpunkte; diese sind jene obenerwähnten Doppelpunkte.

Drr Centralpunkt c, der Angriffspunkt der zu R parallelen Seitenkraft, liegt auf dem Mittelpunktsstrahl $\mathfrak{S}_r$ und auf $\mathfrak{C}$; er ist also der Schnittpunkt der beiden an $\mathfrak{C}^{(2)}$ in s und r gelegten Tangenten, und beschreibt daher, wenn durch Veränderung von λ die Richtung der Resultante variirt wird, einen Kegelschnitt $\mathfrak{E}^{(2)}$, welcher den Kegelschnitt $\mathfrak{C}^{(2)}$ in den beiden Doppelpunkten der von s und r beschriebenen Punktreihen doppelt berührt. (Vergl. Schröter, Theorie der Kegelschnitte. 2. Aufl., S. 350.) Da diese Doppelpunkte die Endpunkte des Durchmessers ug sind, so sind die beiden gemeinschaftlichen Tangenten parallel und parallel der Involutionsaxe $\mathfrak{G}$; der Durchmesser ug ist somit auch ein solcher für den Kegelschnitt $\mathfrak{E}^{(2)}$. Die beiden Kegelschnitte sind daher concentrisch gelegen.

Da r und t Endpunkte eines Durchmessers sind, t und s nie zusammenfallen, so können s und r niemals Endpunkte desselben Durchmessers sein; die beiden Tangenten $\mathfrak{S}_r$ und $\mathfrak{C}$ sind daher nie parallel. Mithin hat der Kegelschnitt $\mathfrak{E}^{(2)}$ mit der unendlich fernen Geraden keine reellen Schnittpunkte und ist eine Ellipse.

Wenn die beiden Involutionscentra u und g in Bezug auf $\mathfrak{C}^{(2)}$ conjugirt sind, so sind auch die beiden Punkte r und s involutorisch gepaart; die Verbindungslinie rs geht immer durch ein drittes Involutionscentrum e. Die drei Punkte u, g und e bilden ein Tripel conjugirter Punkte, durch welche die drei Seiten rt, ts, rs des dem Kegelschnitt $\mathfrak{C}^{(2)}$ einbeschriebenen Dreiecks gehen. (Schröter, Kegelschnitte. 2. Aufl., S. 149.) Da nun u der Mittelpunkt ist, so liegen g und e auf der unendlich fernen Geraden und die Involutionsaxe $\mathfrak{G}$ ist ein Durchmesser. Weil dieser den Kegelschnitt nicht schneiden darf, so ist der vorliegende Fall nur möglich, wenn $\mathfrak{C}^{(2)}$ eine Hyperbel ist. Der Schnittpunkt c der beiden in r und s an die Hyperbel gelegten Tangenten $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{S}_r$ bewegt sich nun auf der Polare $\mathfrak{E}$ des Punktes e; e und g waren aber zwei conjugirte unendlich ferne Punkte, also sind $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{G}$ zwei conjugirte Durchmesser, von denen $\mathfrak{E}$ die Hyperbel stets in zwei reellen, $\mathfrak{G}$ in zwei imaginären Punkten schneidet.

Wir wollen hier noch erwähnen, dass der zuletzt untersuchte Fall besonders dann eintritt, wenn die beiden Kräftesysteme Σ' und Σ'' so ineinander liegen, dass ihre Centralpunkte c' und c'' sich decken.

§ 15.

Die beiden Parabeln $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{P}''$ der beiden Systeme Σ' und Σ'' haben drei reelle oder eine reelle und zwei imaginäre gemeinschaftliche Tangenten A_x, A_y, A_z. Es sind dies wieder drei Paare paralleler Seitenkräfte, welche mit ihren Mittelpunktsstrahlen $\mathfrak{S}_x$, $\mathfrak{S}_y$, $\mathfrak{S}_z$ zusammenfallen. Die entsprechenden Seitenkräfte des Systems Σ liegen gleichfalls auf diesen Strahlen; die Tangenten A_x, A_y, A_z berühren daher auch $\mathfrak{C}^{(2)}$ und die Parabel $\mathfrak{P}$ des Systems Σ. Durch Veränderung von λ nimmt die Parabel $\mathfrak{P}$ andere Lagen an; sie berührt aber immer die drei Geraden A_x, A_y, A_z; ihr Brennpunkt f durchläuft daher den Kreis $\mathfrak{F}$, welcher dem Dreiseit $A_x A_y A_z$ umschrieben ist und auch die Punkte f' und f'' enthält.

Die Leitlinien der drei Parabeln $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$, $\mathfrak{P}$ sind die drei Resultanten R', R'' und R, welche sich im Punkte o, dem Höhenschnittpunkt des Dreiseits, schneiden. Der Gegenpunkt t von f in Bezug auf eine Seite, z. B. A_x, liegt auf der Leitlinie R und beschreibt, wenn f den Kreis $\mathfrak{F}$ durchwandert, einen congruenten Kreis, welcher mit dem Kreise $\mathfrak{F}$ in Bezug auf A_x symmetrisch liegt und den Punkt o enthält. Daher ist das Büschel, welches R durch Drehung um o erzeugt, projectivisch der Kreispunktreihe, die dieser Gegenpunkt t beschreibt, also auch projectivisch der Punktreihe, welche f auf dem Kreise $\mathfrak{F}$ bestimmt. Es sind dabei aber die Bogen, welche f und sein Gegenpunkt t auf den beiden congruenten Kreisen in umgekehrter Richtung durchlaufen, einander gleich; da dieser Gegenpunkt t und der Hauptmittelpunkt m immer auf demselben Strahle, der Resultante R, liegen und R sich immer um den Punkt o, den Schnittpunkt des Kreises $\mathfrak{M}$ und des von Punkt t beschriebenen Kreises, dreht, so erzeugen m auf dem Kreise $\mathfrak{M}$ und f auf dem Kreise $\mathfrak{F}$ zwei projectivisch-ähnliche, aber in umgekehrter Richtung laufende Punktreihen.

Hieraus folgt die Aehnlichkeit der beiden Dreiecke $m'mm''$ und $f'ff''$, und es ist

$$\angle\, m'mm'' = \angle\, f'ff''.$$

Dadurch ist $\mathfrak{F}$ als ein Kreis bestimmt, welcher $f'f''$ als Sehne enthält und $\angle\, f'ff'' = \angle\, m'mm''$ als Peripheriewinkel fasst.

Man hat aber auch nach § 10

$$-\frac{mm'}{mm''} = -\frac{ff'}{ff''} = \lambda,$$

wodurch der Punkt f selbst auf dem Kreise $\mathfrak{F}$ bestimmt ist.

Bei der Erzeugung der Punktreihe $\mathfrak{F}$ trifft der Punkt f in den Eckpunkten des Tangentendreiseits $A_x A_y A_z$ mit der Resultante R zusammen; R ist dann normal zur Gegenseite. In diesem Falle zerfällt die Parabel $\mathfrak{P}$ in ein Strahlenbüschel erster Ordnung, dessen Mittelpunkt f ist; das Kräftesystem Σ befindet sich dabei in der ausgezeichneten Lage, bei welcher R normal zur Centrallinie $\mathfrak{C}$ ist. $\mathfrak{C}$ ist dann der gemeinschaftlichen Tangente an $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{P}''$, also dem Mittelpunktsstrahle $\mathfrak{T}_r$, parallel. Bei fester Lage von R' und R'' tritt dieser Fall dreimal oder einmal ein, je nachdem $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{P}''$ drei oder nur eine reelle gemeinschaftliche Tangente haben.

Wir können die zuletzt gefundenen Resultate noch benutzen, um in anderer Weise den Ort für den Centralpunkt c zu gewinnen. Projiciren wir nämlich m und f durch die Radien der Kreise $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{F}$, so erhalten wir zwei projectivisch gleiche Büschel mit entgegengesetztem Drehungssinne. Zweimal werden dabei die entsprechenden Strahlen gerade entgegengesetzt gerichtet sein und dadurch die beiden parallelen Durchmesser d_m bezw. d_f bestimmen, deren entgegengesetzt liegende Endpunkte entsprechende sind. Nimmt man nun zwei Punkte m_x und m_y so an, dass $m_x m_y \| d_m$, so ist die Verbindungslinie $f_x f_y$ der beiden entsprechenden Punkte wegen der Aehnlichkeit der Punktreihen gleichfalls parallel d_f, und man hat

$$m_x m_y : f_x f_y = d_m : d_f = \text{constant}.$$

Es ist aber $m_x m_y f_y f_x$ ein Trapez, dessen zwei Gegenseiten $m_x f_y$ und $m_y f_x$ sich stets im äusseren Aehnlichkeitspunkte der beiden Kreise $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{F}$ schneiden. Die Mitten v und w dieser beiden Seiten liegen daher auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt u die Mitte der Verbindungslinie der Mitten der beiden Kreise $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{F}$ ist und dessen Durchmesser die Länge $\frac{1}{2}(d_m + d_f)$ hat. Die Mittellinie vw des Trapezes schneidet die beiden Diagonalen $m_x f_x$ und $m_y f_y$ in den Centralpunkten c_x bezw. c_y, und man hat daher, wenn $d_m > d_f$ ist,

$$c_x c_y = \tfrac{1}{2}(m_x m_y - f_x f_y),$$

während

$$v w = \tfrac{1}{2}(m_x m_y + f_x f_y)$$

ist. Es folgt daraus das Verhältniss

$$\frac{c_x c_y}{v w} = \frac{m_x m_y - f_x f_y}{m_x m_y + f_x f_y} = \frac{d_m - d_f}{d_m + d_f},$$

mithin constant.

Die parallelen Sehnen vw des Kreises um u werden durch c_x und c_y in constantem Verhältniss verkürzt; somit ergiebt sich, dass c_x und c_y die Endpunkte paralleler Sehnen einer Ellipse $\mathfrak{C}^{(2)}$ sind, deren Hauptaxe gleich der Summe, deren Nebenaxe gleich der Differenz der Durchmesser der beiden Kreise $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{F}$ sind und deren Mittelpunkt u die Mitte der Centrale dieser beiden Kreise ist.

Haben die beiden Kreise $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{F}$ gleichen Durchmesser, so wird das Trapez $m_x m_y f_y f_x$ ein Parallelogramm, dessen Diagonalen sich halbiren; c_x und c_y fallen zusammen und der Centralpunkt c beschreibt in diesem Falle eine gerade Linie (§ 14) von der Länge des Durchmessers.

§ 16.

Die beiden projectivischen Punktreihen $\mathfrak{C}'$ und $\mathfrak{C}''$ können ihren Durchschnitt a_p entsprechend gemein haben und liegen dann perspectivisch. Die beiden ineinander liegenden Strahlenbüschel, welche $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{S}$ durch Umhüllung von $\mathfrak{C}^{(2)}$ erzeugen, zerfallen in zwei Strahlenbüschel erster Ordnung, deren Mittelpunkte a_p bezw. p sind. Der Fall ist analog dem in § 11 behandelten. Die Centrallinie $\mathfrak{C}$ erzeugt dann mit dem Mittelpunktsstrahl $\mathfrak{S}_r$ die Ellipse $\mathfrak{C}^{(2)}$, welche durch a_p und p geht und diese Punkte zu Endpunkten eines Durchmessers hat. Die in a_p und p an $\mathfrak{C}^{(2)}$ gelegten Tangenten haben die Richtung des Mittelpunktsstrahles $\mathfrak{T}_p$, welcher dem Strahle $\mathfrak{S}_p$ oder pa_p adjungirt ist.

Die drei festen Tangenten A_x, A_y, A_z an die Parabel $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{P}''$ und an $\mathfrak{P}$ bestimmen auch hier in ihren Durchschnittspunkten den Kreis $\mathfrak{F}$. Die eine stets reelle Tangente A_x ist identisch mit der dem Durchschnittspunkte

a_p entsprechenden Seitenkraft Δ_p; die beiden anderen reellen oder imaginären Tangenten sind von p an $\mathfrak{P}'$ oder $\mathfrak{P}''$ gelegt. Der Mittelpunkt p und die Gegenpunkte f', f'' bestimmen daher den Kreis $\mathfrak{F}$.

§ 17.

Wenn die beiden Resultanten R' und R'' parallel sind, so sind die beiden unendlich fernen Punkte $b'_{r'}$, $b''_{r''}$ der Centrallinien $\mathfrak{C}'$ und $\mathfrak{C}''$ entsprechende; der Strahl $\mathfrak{T}_r$ ist die unendlich ferne Gerade. Der Kegelschnitt $\mathfrak{C}^{(2)}$ wird eine Parabel. Die Centralpunkte c', c'', c liegen als Mittelpunkte paralleler Seitenkräfte auf einer Geraden, dem Mittelpunktsstrahle $\mathfrak{S}_r$, welcher $\mathfrak{C}^{(2)}$ berührt. Nun ist allemal $mc = mf$ und die drei Punkte m, c und f liegen stets auf einer Geraden, welche normal zu $\mathfrak{C}$ ist. Wird $R' = -R''$, so gehören m und c und damit auch f der unendlich fernen Geraden an, woraus hervorgeht, dass in diesem Falle der Ort für f, der Kreis $\mathfrak{F}$, selbst eine Gerade wird, f also eine gerade Punktreihe beschreibt, welche der von m und c erzeugten projectivisch ist.

Sehr einfach gestaltet sich der Beweis für den Fall, dass die Hauptmittelpunkte m', m'' und damit auch m zusammenfallen. Dann liegen auch die Resultanten R', R'' und R auf einer Geraden, und da c', c'', c die Mitten von mf', mf'', mf sind, so erhalten wir durch $f'f''f$ eine zweite Gerade, welche parallel $c'c''c$ ist. Nun ist allemal $mc \perp \mathfrak{C}$; da c sich auf $c'c''$ bewegt, so umhüllt $\mathfrak{C}$ eine Parabel, nämlich $\mathfrak{C}^{(2)}$, für welche m der Brennpunkt, $c'c''$ die Scheiteltangente und $f'f''$ die Leitlinie ist. Die drei Parabeln $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$, $\mathfrak{P}$ haben dieselbe Leitlinie R und daher nur zwei gemeinschaftliche, zueinander normale Tangenten, deren Schnittpunkt der gemeinschaftliche Punkt der Leitlinie R und der Verbindungslinie der Brennpunkte $f'f''$ ist. Bei der Drehung von R durchwandert dieser Punkt $f'f''$, und die beiden Tangenten umhüllen fortwährend die Parabel $\mathfrak{C}^{(2)}$.

§ 18.

Wir können Σ' und Σ'' als Theile eines einzigen Kräftesystems Σ auffassen und die in den §§ 10—17 gewonnenen Resultate daher in folgender Weise zusammenfassen:

Theilt man die Kräfte eines ebenen Kräftesystems in zwei Gruppen, deren eine nur constante Kräfte enthält, während die Kräfte der andern Gruppe ihre Intensität proportional verändern, so

1. beschreibt die Resultante ein Strahlenbüschel erster Ordnung,
2. erzeugt der Hauptmittelpunkt und sein Gegenpunkt je eine kreisförmige Punktreihe $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{F}$,

3. umhüllen die Centrallinie und die Mittelpunktsstrahlen denselben Kegelschnitt $\mathfrak{C}^{(2)}$ oder beschreiben zwei Strahlenbüschel erster Ordnung,
4. bewegt sich der Centralpunkt auf einer Ellipse $\mathfrak{E}^{(2)}$, deren Hauptaxe gleich der Summe, deren Nebenaxe gleich der Differenz der Durchmesser der beiden Kreise $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{F}$ sind, deren Mittelpunkt die Mitte der Centrale dieser beiden Kreise ist, und welche den Kegelschnitt $\mathfrak{C}^{(2)}$ in den Endpunkten eines Durchmessers berührt, bezw. die Mittelpunkte der beiden Strahlenbüschel erster Ordnung zu Endpunkten eines Durchmessers hat. In besonderen Fällen, wenn $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{F}$ gleichen Durchmesser haben, degenerirt die Ellipse $\mathfrak{E}^{(2)}$ zu einem Durchmesser des Kegelschnitts $\mathfrak{C}^{(2)}$.

Alle diese erzeugten Gebilde sind projectivisch aufeinander bezogen und enthalten die entsprechenden Elemente der beiden Gruppen des Systems.

Wenn endlich die beiden Resultanten der Gruppen parallel sind, so beschreibt die Resultante ein Parallelstrahlenbüschel, der Hauptmittelpunkt, sein Gegenpunkt und der Centralpunkt je eine gerade Punktreihe, während die Centrallinie eine Parabel umhüllt.

X.

Neues Verfahren zur Bestimmung der reellen Wurzeln zweier numerischer algebraischer Gleichungen mit zwei Unbekannten.

Von

Dr. R. MEHMKE,
Professor an der techn. Hochschule zu Darmstadt.

Hierzu Taf. III Fig. 1–9.

Nach den bisherigen Methoden zwei numerische algebraische Gleichungen mit zwei Unbekannten aufzulösen, ist bei nicht ganz niedrigem Grade der Gleichungen eines der unangenehmsten Geschäfte, die man sich denken kann. Am zweckmässigsten erscheint es noch, zuerst, bei Deutung der Unbekannten als Cartesische Coordinaten eines veränderlichen Punktes der Ebene, die durch die gegebenen Gleichungen vorgestellten Curven aufzuzeichnen, wodurch man in den Coordinaten ihrer Schnittpunkte Näherungswerthe der gesuchten Wurzelpaare erhält, und alsdann durch Anwendung des von Scheffler* angegebenen, dem Horner'schen nachgebildeten Verfahrens die Genauigkeit zu erhöhen. Man mache sich aber recht klar, welche Arbeit allein zum Verzeichnen jener Curven nöthig ist, sobald der Grad die Zahl 2 oder 3 übersteigt. Es giebt hierzu bis jetzt keinen andern Weg, als für x bezw. y eine Reihe von angenommenen Werthen in die betreffenden Gleichungen einzusetzen und die so entstehenden Gleichungen mit einer Unbekannten aufzulösen.

Das Verfahren, welches im Folgenden beschrieben werden soll, ist dagegen ein bequemes und im Hinblick auf die Schwierigkeit der Aufgabe einfaches zu nennen, bei dem die Arbeit auf das unumgänglich nöthige Maass zurückgeführt ist. Es bildet die natürliche Fortsetzung des logarithmischen Verfahrens der Auflösung numerischer Gleichungen mit einer Unbekannten.** Ich beginne auch damit, die Gleichungen graphisch aufzulösen, zu welchem Zwecke die Schnitte zweier Paare von leicht zu con-

* Scheffler, Auflösung der algebraischen und transcendenten Gleichungen, 1859, S. 71.

** Neue Methode, beliebige numerische Gleichungen mit einer Unbekannten graphisch aufzulösen, Civilingenieur 1889, Bd. XXXV S. 617. Die logarithmische Berechnung der Wurzeln zeige ich nebst anderen Methoden in einer Abhandlung, welche in dieser Zeitschrift abgedruckt werden wird.

struirenden Flächen im Grundriss gezeichnet werden müssen — eine leichte Aufgabe für Jeden, der mit den Methoden der darstellenden Geometrie ein wenig vertraut ist. Irgendwelche Rechnung ist nicht erforderlich. Bei einem Maassstabe, wie er bei Zeichnungen in der darstellenden Geometrie angewendet zu werden pflegt, ergeben sich die Logarithmen der gesuchten Wurzeln auf zwei bis drei Decimalen. Weitere Decimalen können dann durch eine in einfacher Weise fortschreitende Rechnung, bei der entweder gewöhnliche Logarithmen oder Additionslogarithmen zur Anwendung kommen, in beliebiger Anzahl gefunden werden. Es ist noch zu bemerken, dass dieses Verfahren auch auf transcendente Gleichungen ausgedehnt werden kann.

I. Graphische Auflösung.

§ 1. Vorbereitungen.

Es liegt im Wesen des logarithmischen Verfahrens, dass durch dasselbe nur die positiven Werthe von x und y geliefert werden, die den Gleichungen

$$f(x, y) = 0, \quad g(x, y) = 0$$

gleichzeitig genügen. Sehr häufig wird es auch die Natur der Aufgabe mit sich bringen, dass man blos die positiven Wurzeln sucht. Sollten aber z. B. noch diejenigen, die Gleichungen befriedigenden Werthepaare von x und y verlangt sein, bei denen x positiv, y negativ ist, so wird man einfach

$$f(x, -y) = 0, \quad g(x, -y) = 0$$

an Stelle der gegebenen Gleichungen setzen und die positiven Wurzeln der neuen Gleichungen bestimmen.

Die obige Form der Gleichungen, bei der die rechten Seiten Null sind, eignet sich nicht sehr für die logarithmische Behandlung. Man zerlege deshalb auf irgend eine Weise die linken Seiten in die Differenz zweier Functionen $f_1(x, y)$ und $f_2(x, y)$, bezw. $g_1(x, y)$ und $g_2(x, y)$, so dass die Gleichungen jetzt geschrieben werden können:

$$f_1(x, y) = f_2(x, y), \quad g_1(x, y) = g_2(x, y).$$

Die einfachste und am nächsten liegende Art, bei einer Gleichung diese Form herzustellen, besteht darin, dass man alle negativen Glieder der ursprünglichen linken Seite auf die rechte Seite bringt. In der Regel soll auch diese, mit besonderen Vortheilen verbundene Zerlegungsweise angewendet werden.

Mitunter bringt es Nutzen, eine der Gleichungen oder beide mit einer Potenz von x oder y zu dividiren. Weil hierbei grosse Willkür besteht und weil auch sehr verschiedene Zerlegungen vorgenommen werden können, so giebt es eigentlich eine grosse Mannigfaltigkeit von Wegen, die man bei der Auflösung einschlagen kann. Es werden sich noch Gesichtspunkte ergeben, die bei der Entscheidung für den einen oder andern in Betracht kommen.

§ 2. Grundgedanke der logarithmisch-graphischen Auflösung.

Wenn man jede Seite der beiden Gleichungen in der Form, die wir ihnen zuletzt ertheilt haben, mit z bezeichnet, so erhält man die beiden Systeme:

$$z = f_1(x, y), \quad z = f_2(x, y)$$

und

$$z = g_1(x, y), \quad z = g_2(x, y),$$

von denen jedes die betreffende ursprüngliche Gleichung, aus der es abgeleitet ist, ersetzen kann. Man fasse x, y, z als rechtwinklige Cartesische Coordinaten eines veränderlichen Punktes im Raume auf. Dann stellt jede der vorhergehenden Gleichungen eine Fläche dar, also jedes der beiden Gleichungssysteme eine Raumcurve. Die Coordinaten der Schnittpunkte, welche die XY-Projectionen jener Raumcurven liefern, sind offenbar die gesuchten Wurzeln der gegebenen Gleichungen.

Es wäre eine recht mühsame Aufgabe, die ebengenannten Flächen selbst darzustellen. Eine überraschende Vereinfachung wird herbeigeführt, wenn man auf jene Flächen die logarithmische Transformation anwendet, welche darin besteht, dass $\log x$, $\log y$, $\log z$ an Stelle von x, y, z gesetzt werden. Von den neuen Flächen kann man nämlich, und zwar ohne jede Rechnung, beliebig viele Punkte, wie auch ebene Schnitte mit bemerkenswerther Leichtigkeit construiren. Hierauf beruht wesentlich die Brauchbarkeit des Verfahrens. Dass, wie es offenbar der Fall ist, die Logarithmen der gesuchten Wurzeln sich ergeben, wird in vielen Fällen ganz erwünscht sein. Will man jedoch unmittelbar die Zahlenwerthe selbst haben, so braucht man nur die Coordinaten mit einem logarithmischen Maassstabe zu messen.

§ 3. Logarithmisches Bild einer Function von zwei Veränderlichen. Additionscurve.

Die Fläche, welche sich ergiebt, wenn $\log x$, $\log y$, $\log z$ zu rechtwinkligen Cartesischen Coordinaten eines veränderlichen Punktes genommen werden, und z irgend eine Function von x und y ist, möge das logarithmische Bild dieser Function heissen. Beginnen wir mit dem einfachsten Falle, dass

$$z = a x^m y^n$$

ist. Man hat:

$$\log z = \log a + m \log x + n \log y.$$

In den Coordinaten des veränderlichen Punktes ist diese Gleichung linear, sie stellt also eine Ebene vor. Die Spur dieser Ebene mit der XZ-Ebene hat die Gleichung

$$\log z = \log a + m \log x,$$

ist also eine durch den Punkt $\log a$ der Z-Axe gehende Gerade von der Steigung m. Ebenso findet man, dass die XZ-Spur der Ebene gleichfalls den Punkt $\log a$ der Z-Axe enthält, aber die Steigung n besitzt. Hat man nach diesen Angaben die XZ- und YZ-Spur gezeichnet, so ergeben sich die Schnittpunkte der Ebene mit der X- und Y-Axe und damit, falls $\log a \gtrless 0$ ist, ihre XY-Spur von selbst. Wenn aber $\log a = 0$, so wird die Gleichung der XY-Spur:

$$0 = m \log x + n \log y,$$

wodurch eine den Nullpunkt enthaltende Gerade vorgestellt ist, deren Winkel mit der X-Axe die trigonometrische Tangente $-m:n$ besitzt. Man beachte, dass m und n nicht positiv und auch keine ganzen Zahlen zu sein brauchen.

Wenn z die Form hat:

$$z = a x^m y^n + a_1 x^{m_1} y^{n_1} + \cdots + a_k x^{m_k} y^{n_k},$$

so stelle man zuerst die Ebenen dar, welche dem Vorhergehenden zufolge die logarithmischen Bilder der einzelnen Glieder von z sind. Man muss sich jetzt für ein bestimmtes Darstellungsverfahren entscheiden. Wir wollen das Grund- und Aufrissverfahren benützen, indem wir in der üblichen Weise die XY-Ebene zur Grundrisstafel, die XZ-Ebene zur Aufrisstafel wählen oder doch wenigstens die Tafeln parallel zu den Coordinatenebenen annehmen. Die Grundriss-, Aufriss- und Seitenspuren der obengenannten Ebenen seien der Reihe nach S, T, U; S_1, T_1, U_1; ...; S_k, T_k, U_k. Wir stellen uns nun die Aufgabe, einen Punkt p der Fläche zu construiren, dessen Grundriss p' beliebig angenommen worden ist (s. Fig. 1, welche dem Falle $z = 12x^2y^{-3} + 40x^{-1}y^{-\frac{1}{2}}$ entspricht). Die durch p' gehende Senkrechte schneide jene Ebenen in den Punkten $q, q_1, \ldots, q_k$. Die Aufrisse dieser Punkte, deren Grundrisse mit p' zusammenfallen, werden in bekannter Weise gefunden. Der Schnittpunkt des gemeinschaftlichen Grundlothes derselben mit dem Grundschnitte heisse o. Zur Abkürzung sollen noch die einzelnen Glieder von z, bezw. die Werthe, welche sie annehmen, wenn man für x und y die der Lage von p' entsprechenden Werthe einsetzt, durch $Q, Q_1, \ldots, Q_k$ bezeichnet werden. Dann ist im Aufriss

$$o q'' = \log Q, \quad o q''_1 = \log Q_1, \quad \ldots, \quad o q''_k = \log Q_k.$$

Wenn wir zunächst den Fall setzen, dass die Coefficienten $a, a_1, \ldots, a^k$ alle positiv sind, so besteht die Aufgabe darin, den Punkt p'' so zu bestimmen, dass

$$o p'' = \log z = \log (Q + Q_1 + \cdots + Q_k).$$

Diese Aufgabe wird am bequemsten mit Hilfe der Additionscurve (s. Fig. 2) gelöst (vergl. Nr. 2 der angeführten Abhandlung). Dieselbe ist nämlich durch

$$u = \log t, \quad v = \log\left(1 + \frac{1}{t}\right)$$

dargestellt, worin u und v die Coordinaten eines Punktes der Curve bezeichnen und t einen Parameter bedeutet. Sie hat die positive U-Axe und die Halbirungslinie des Winkels zwischen der positiven V-Axe und der negativen U-Axe zu Asymptoten.

Betrachten wir zuerst den Fall von zwei Gliedern (s. Fig. 3, in welcher zur Vereinfachung die Striche an den Buchstaben fortgelassen worden sind). Setzt man $q q_1 = u$, so ist

$$u = o q_1 - o q = log\, Q_1 - log\, Q = log \frac{Q_1}{Q},$$

aber andererseits

$$u = log\, t,$$

also

$$t = \frac{Q_1}{Q},$$

und ferner

$$q_1 p = op - o q_1 = log (Q + Q_1) - log\, Q_1 - log \left(1 + \frac{1}{\frac{Q_1}{Q}}\right) = log \left(1 + \frac{1}{t}\right) = v.$$

Demnach bilden die Strecken $q q_1$ und $q_1 p$ Abscisse und Ordinate eines Punktes der Additionscurve. Folglich wird p gefunden, indem man die Strecke $q q_1$ in den Zirkel nimmt, auf der U-Axe als Abscisse aufträgt, die zugehörige Ordinate der Additionscurve misst und $q_1 p$ gleich derselben macht.

Sind mehr als zwei Punkte vorhanden, so hat man mittels der Additionscurve zuerst aus den Punkten q und q_1 (s. Fig. 4) einen Hilfspunkt r_1 von der Beschaffenheit abzuleiten, dass $o r_2 = log (Q + Q_1)$, dann aus r_1 und q_2 einen Hilfspunkt r_2, so dass $o r_3 = log ((Q + Q_1) + Q_2)$ u. s. w. Aus dem letzten Hilfspunkte r_{k-1} und dem letzten der gegebenen Punkte geht dann auf dieselbe Weise der gesuchte Punkt p hervor.

§ 4. Fortsetzung. Subtractionscurve.

Nehmen wir jetzt an, dass unter den Coefficienten $a, a_1, \ldots, a_k$ auch negative vorkommen. Im Falle zweier Glieder:

$$z = a x^m y^n - a_1 x^{m_1} y^{n_1} = Q - Q_1,$$

hat man die Aufgabe, den Punkt p so zu bestimmen (Fig. 5), dass

$$op = log (Q - Q_1),$$

wobei

$$oq = log\, Q, \quad o q_1 = log\, Q_1.$$

Da die Punkte p, q_1, q in derselben Beziehung stehen, wie die Punkte q, q_1, p der Fig. 3, so könnte wieder die Additionscurve verwendet werden, die zu $q_1 q$ als Ordinate eine Abscisse gleich der gesuchten Strecke pq_1 liefert. Statt dessen kann man sich auch einer besondern „Subtractionscurve" bedienen (Fig. 6). Dieselbe besitzt die Eigenschaft, dass die Ordinate v irgend eines ihrer Punkte gleich $log\left(1 - \frac{1}{t}\right)$ ist, wenn seine Abscisse den Werth $log\, t$ hat. Wie leicht bewiesen werden kann, ist diese Curve zur Halbirenden des Winkels zwischen der $+U$- und $-V$-Axe symmetrisch und nähert sich genannten Axen asymptotisch. Setzt man $q_1 q = u$, so dass

$$u = log\, t = oq - oq_1 = log\, Q - log\, Q_1 = log\, \frac{Q}{Q_1},$$

also $t = \frac{Q}{Q_1}$ wird, so ist

$$qp = op - oq = log(Q - Q_1) - log\, Q = log\left(1 - \frac{1}{\frac{Q}{Q_1}}\right) = log\left(1 - \frac{1}{t}\right) = v.$$

Man muss daher zu $q_1 q$ als Abscisse die zugehörige Ordinate v der Subtractionscurve bestimmen und dieselbe von q aus nach unten abtragen, um den gesuchten Punkt p zu erhalten.

Beim Vorhandensein mehrerer Glieder mit verschiedenen Vorzeichen kommen die Additions- und Subtractionscurve beide zur Anwendung. Es sind hier ebenso viele verschiedene Constructionen möglich, wie Anordnungen der Glieder. Im Allgemeinen wird es zweckmässig sein, zuerst alle positiven Glieder und dann alle negativen je für sich zusammenzufassen. Wenn die negativen Glieder die positiven überwiegen, so ist natürlich $log\, z$ und damit auch p imaginär.

Das Verfahren ist auch auf den Fall anwendbar, wo z aus einer Summe von Gliedern besteht, die nicht die Form $ax^m y^n$ haben. Sie können z. B. transcendente Functionen sein. Man muss wieder von den logarithmischen Bildern der einzelnen Glieder ausgehen, die jetzt aber keine Ebenen mehr sind. Im Folgenden soll dieser Fall nicht weiter berücksichtigt werden.

Statt im Aufriss, kann man selbstverständlich alle Constructionen auch im Seitenriss durchführen.

§ 5. Senkrechte Schnitte der betrachteten Flächen.

Man wird von der Fläche F, die das logarithmische Bild der Function

$$z = ax^m y^n + a_2 x^{m_1} y^{n_1} + \cdots + a_k x^{m_k} y^{n_k}$$

ist, nicht planlos beliebige Punkte construiren. Das Ziel ist ja die logarithmische Darstellung einer algebraischen Gleichung mit zwei Unbekannten x und y durch eine ebene Curve, welche der Grundriss der Durchdringungscurve zweier Flächen der betrachteten Art ist. Nun wird bekanntlich die Schnittcurve zweier Flächen auf folgende Weise construirt. Man führt (Hilfsflächen bezw.) Hilfsebenen von solcher Beschaffenheit ein, dass sie beide Flächen in Curven schneiden, die leicht gezeichnet werden können. Die gemeinsamen Punkte der Schnittcurven einer und derselben Hilfsebene mit den gegebenen Flächen sind alsdann Punkte der gesuchten Durchdringungscurve beider Flächen. Im vorliegenden Falle sind senkrechte Hilfsebenen am geeignetsten. Sei H (Fig. 1) die Grundrissspur einer solchen Ebene. Die zu den einzelnen Gliedern von z gehörigen Ebenen, deren Spuren S, T, U; S_1, T_1, U_1; ... bereits gezeichnet worden sind, mögen E, E_1, ..., E_k heissen. Man construire in bekannter Weise die Aufrisse der Geraden G, G_1, ..., G_k, in welchen jene Ebenen von der Hilfsebene H geschnitten werden. Unter Benützung dieser Geraden können jetzt mit grosser Schnelligkeit beliebig viele Punkte von der Schnittcurve C der Hilfsebene mit der Fläche F im Aufriss bestimmt werden. Es liegt nämlich offenbar, wie auch p' (vergl. §§ 3 und 4) auf H gewählt worden ist, q immer in G, q_1 in G_1 u. s. w.

Man bemerkt, dass die Curve C und ebenso ihr Aufriss von derselben Art ist, wie die zur logarithmisch-graphischen Auflösung von Gleichungen mit einer Unbekannten dienenden Curven. Darum hat sie (vergl. a. a. O. Nr. 4) von den Geraden G diejenige mit grösster und diejenige mit kleinster Steigung zu Asymptoten, und wenn die Coefficienten a, a_1, ..., a_k sämmtlich positiv sind, so ist sie frei von Wendepunkten, wie auch weiteren Asymptoten, und nach oben gekrümmt.

In der Regel wird man Hilfsebenen parallel zur Aufrisstafel oder parallel zur Seitentafel anwenden; im letzteren Falle sind die Constructionen natürlich im Seitenriss, statt im Aufriss vorzunehmen.

§ 6. Asymptotenebenen und asymptotische Cylinder.

Die transcendenten Flächen, mit denen wir es im Vorhergehenden zu thun gehabt haben, also die logarithmischen Bilder von Functionen der Form

$$z = F(x, y) = a x^m y^n + a_1 x^{m_1} y^{n_1} + \cdots + a_k x^{m_k} y^{n_k},$$

besitzen einige bemerkenswerthe Eigenschaften, die nicht mit Stillschweigen übergangen werden sollen.

Es hat sich gezeigt, dass jeder senkrechte Schnitt C der Fläche F diejenigen beiden unter den Schnittlinien G, G_1, ..., G_k der Ebene von C mit den zu den einzelnen Gliedern von z gehörigen Ebenen E, E_1, ..., E_k, welche die grösste bezw. kleinste Horizontalneigung besitzen, zu Asymptoten hat. Die asymptotische Annäherung findet immer da statt, wo die betreffende Gerade sich über die anderen erhebt.

Es lässt sich nun ein einfach zusammenhängendes, aus Theilen von einzelnen oder sämmtlichen Ebenen E zusammengesetztes offenes Polyeder Π von der Beschaffenheit angeben, dass der Schnittpunkt irgend einer senkrechten Geraden mit einer Seitenfläche dieses Polyeders höher liegt, als die Schnittpunkte derselben Geraden mit den übrigen Ebenen E. Um dieses Polyeder zu construiren, wird man so verfahren: Von den Schnittpunkten einer beliebigen Senkrechten mit den Ebenen E, E_1, ..., E_k liege der höchste etwa in E_i. Von diesem Punkte aus geht man in der Ebene E_i nach allen Seiten fort, bis man auf Schnittlinien mit anderen Ebenen E stösst. Es ist auf diese Weise in E_i ein offenes oder geschlossenes Polygon abgegrenzt worden, das die erste Seitenfläche von Π bildet. Nun überschreitet man die Grenzlinien dieses Polygons und geht hierbei jedesmal in diejenigen der noch nicht betretenen Ebenen über, deren Punkte an dieser Stelle höher liegen, als die der übrigen Ebenen. In den Ebenen, in welche man so gelangt, begrenzt man wieder in der gleichen Weise Polygone u. s. w., bis alle Ebenen durchschritten sind.

Man sieht leicht ein, dass alle offenen Seitenflächen des Polyeders Π Asymptotenebenen der Fläche F bilden. Denn jede offene Seitenfläche kann auf unendlich viele Arten durch eine senkrechte Ebene so geschnitten werden, dass die Schnittlinie unbegrenzt bleibt, sich deshalb, wegen der Grundeigenschaft des Polyeders Π, nach der unbegrenzten Seite hin unaufhörlich über die Schnittlinien derselben Ebene mit den (erweiterten) übrigen Seitenflächen des Polyeders erhebt und somit für den Schnitt jener Ebene mit der Fläche F Asymptote ist (s. die perspectivische Figur 7). Hieraus folgt noch: Wenn bei zwei Flächen F und F' irgend zwei offene Seitenflächen der zugehörigen Polyeder Π und Π' sich so schneiden, dass die Schnittlinie nach einer Seite hin unbegrenzt bleibt, so ist letztere eine Asymptote der Durchdringungscurve beider Flächen.

Besteht $F(x, y)$ nur aus zwei bezw. drei Gliedern, so sind die zugehörigen Ebenen E, E_1 bezw. E, E_1, E_2 offenbar alle beide bezw. alle drei Asymptotenebenen. Es könnte auch noch aus den Constructionen der §§ 3 und 4 mit Leichtigkeit der Satz abgeleitet werden, dass im ersteren Falle die Fläche F ein Cylinder mit zur Schnittlinie von E und E_1 parallelen Mantellinien ist.

Aus einer Bemerkung des § 5 geht hervor, dass die Fläche F überall elliptisch gekrümmt und nach oben offen ist, sich ganz oberhalb des Polyeders Π befindet und ausser den genannten Seitenflächen von Π keine Asymptotenflächen besitzt, wenn die Coefficienten a, $a_1, \ldots, a_k$ alle positiv sind. Die Fläche zeigt eine wesentlich andere Gestalt, wenn in ihrer Gleichung negative Coefficienten vorkommen. Zwar bilden auch in diesem Falle die offenen Seitenflächen des Polyeders Π Asymptotenebenen, aber es treten ausserdem noch asymptotische Cylinder auf. Um dieses einzusehen, trenne man in der Function $F(x, y)$ die negativen von den positiven Gliedern, schreibe also

$$F(x, y) = F_1(x, y) - F_2(x, y),$$

wo F_1 und F_2 nur positive Glieder enthalten sollen.

Die logarithmischen Bilder von F_1 und F_2 sind Flächen der vorhin beschriebenen Art. Schneiden sich diese beiden Flächen in einer reellen Curve C — die offen oder geschlossen sein oder aus einzelnen getrennten Theilen bestehen kann —, so ist für jeden Punkt von C:

$$F_1(x, y) = F_2(x, y) \text{ oder } F(x, y) = 0, \text{ also } \log z = -\infty.$$

Daher nähert sich die Fläche F nach unten, d. i. in der Richtung der $-Z$-Axe, unbegrenzt dem Cylinder mit senkrechten Mantellinien, der C zur Leitlinie hat. Durch diesen Cylinder wird der Raum in zwei oder mehrere Theile geschieden. Nur in denjenigen Theilen besitzt die Fläche F reelle Mäntel, wo die Fläche F_1 höher als F_2 liegt, d. h. $F_1(x, y) > F_2(x, y)$ ist. In den übrigen cylindrischen Raumtheilen kommen reelle Flächenmäntel zum Vorschein, sobald nicht F, sondern $-F(x, y) = F_2(x, y) - F_1(x, y)$ logarithmisch dargestellt wird. Es wäre schliesslich noch leicht zu beweisen, dass in den Gebieten, wo die Flächen F_1 und F_2 sich ins Unendliche erstrecken, die höher liegende von beiden eine Asymptotenfläche von F bezw. $(-F)$ ist.

§ 7. Beispiel.

(Aus Heis' Aufgabensammlung genommen.)

Die aufzulösenden Gleichungen seien:

$$x^7 - 5x^2y^4 + 1506 = 0, \quad y^5 - 3x^4y - 103 = 0.$$

Nach Trennung der positiven und negativen Glieder haben wir:

$$x^7 + 1506 = 5x^2y^4, \quad 3x^4y + 103 = y^5.$$

Die rechten Seiten stellen geneigte Ebenen vor. Eine Vereinfachung wird erzielt, wenn man mit x^2y^4 bezw. y^5 dividirt, wodurch die rechten Seiten Constanten werden, also die betreffenden Ebenen waagerechte Lage annehmen. Die Gleichungen heissen dann:

$$x^5y^{-4} + 1506x^{-2}y^{-4} = 5, \quad 3x^4y^{-4} + 103y^{-5} = 1.$$

Der Deutlichkeit wegen ist jede in einer besondern Figur dargestellt worden (s. Fig. 8 und 9).

Weil die linken Seiten blos aus zwei Gliedern bestehen, so gehören zu ihnen (vergl. § 6) Cylinder, welchem Umstande behufs Vereinfachung der Constructionen in verschiedener Weise Rechnung getragen werden kann. Die rechte Seite stellt bei der ersten Gleichung die waagerechte Ebene durch den Punkt $log\,5 = 0{,}699$ der Z-Axe, bei der zweiten Gleichung die XY-Ebene vor. Nach § 6 sind die Schnittlinien der zu den Gliedern der linken Seite gehörigen Ebenen mit den genannten waagerechten Ebenen Asymptoten der betreffenden waagerechten Cylinderschnitte, welche Beziehung im Grundrisse zum Ausdruck kommt. Legt man die Grundrisse der Fig. 8 und 9 so aufeinander, dass die entsprechenden Axen sich decken, so liefern die beiden Curven zwei Schnittpunkte, deren Coordinaten folgende sind:

$$log\,x_1 = 0{,}30, \quad log\,y_1 = 0{,}48;$$
$$log\,x_2 = 1{,}18, \quad log\,y_2 = 1{,}30.$$

(Um dies zu verdeutlichen, ist die Curve der Fig. 8 in Fig. 9 punktirt eingezeichnet worden.)

Somit besitzen die gegebenen Gleichungen zwei Paare positiver Wurzeln, deren Werthe nahezu sind:

$$x_1 = 2, \quad y_1 = 3; \quad x_2 = 15, \quad y_2 = 20.$$

§ 8. Einfluss einer Verschiebung auf die Gleichung einer Fläche.

Wenn das logarithmische Bild F einer Function

$$z = + ax^my^n \pm a_1x^{m_1}y^{n_1} \pm \cdots \pm a_kx^{m_k}y^{n_k}$$

irgendwie parallel zu sich selbst verschoben wird, welche Function gehört alsdann zur verschobenen Fläche?

Werden die Beträge der Verschiebung parallel den Coordinatenaxen bezw. $log\,\varrho$, $log\,\sigma$, $log\,\tau$ genannt, so hat der Flächenpunkt mit den Coordinaten $log\,x$, $log\,y$, $log\,z$ vor der Verschiebung die Coordinaten

$$log\,x - log\,\varrho = log\frac{x}{\varrho}, \quad log\,y - log\,\sigma = log\frac{y}{\sigma}, \quad log\,z - log\,\tau = log\frac{z}{\tau}$$

besessen. Daher ist die Gleichung der verschobenen Fläche:

$$\frac{z}{\tau} = \pm a\left(\frac{x}{\varrho}\right)^m\left(\frac{y}{\sigma}\right)^n \pm a_1\left(\frac{x}{\varrho}\right)^{m_1}\left(\frac{y}{\sigma}\right)^{n_1} \pm \cdots \pm a_k\left(\frac{x}{\varrho}\right)^{m_k}\left(\frac{y}{\sigma}\right)^{n_k}$$

oder

$$z = \pm \frac{a\tau}{\varrho^m\sigma^n}x^m y^n \pm \frac{a_1\tau}{\varrho^{m_1}\sigma^{n_1}}x^{m_1}y^{n_1} \pm \cdots \pm \frac{a_k\tau}{\varrho^{m_k}\sigma^{n_k}}x^{m_k}y^{n_k}.$$

Wie man sieht, ändert sich die Form der Flächengleichung durch die Verschiebung nicht, es erhalten nur die Coefficienten andere Werthe. Da man über drei Constanten ϱ, σ, τ zu verfügen hat, so kann im Allgemeinen immer eine solche Verschiebung angegeben werden, bei der drei beliebig ausgewählte Coefficienten in der Gleichung der verschobenen Fläche irgendwelche (natürlich von Null verschiedene) angenommenen Werthe erhalten. Sollen z. B. die Coefficienten der drei ersten Glieder gleich Eins werden, so hat man ϱ, σ, τ so zu bestimmen, dass

$$\frac{a\tau}{\varrho^m\sigma^n} = 1, \quad \frac{a_1\tau}{\varrho^{m_1}\sigma^{n_1}} = 1, \quad \frac{a_2\tau}{\varrho^{m_2}\sigma^{n_2}} = 1$$

oder

$$\begin{aligned} m\,log\,\varrho + n\,log\,\sigma - log\,\tau &= log\,a, \\ m_1\,log\,\varrho + n_1\,log\,\sigma - log\,\tau &= log\,a_1, \\ m_2\,log\,\varrho + n_2\,log\,\sigma - log\,\tau &= log\,a_2. \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem hat eine einzige Auflösung, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} m & n & 1 \\ m_1 & n_1 & 1 \\ m_2 & n_2 & 1 \end{vmatrix}$$

nicht Null ist, d. h. wenn die zu den betreffenden Gliedern der Function z gehörigen Ebenen keiner gemeinsamen Richtung parallel sind. Ist aber Letzteres der Fall, so können im Allgemeinen blos zwei der drei Coefficienten, jedoch auf unendlich viele Arten, zu Eins gemacht werden u. s. w. Geometrisch leuchtet alles dieses ohne Weiteres ein. Damit nämlich der Coefficient eines Gliedes Eins wird, muss die Fläche offenbar so verschoben werden, dass die zu jenem Gliede gehörige Ebene durch den Ursprung des Coordinatensystems geht. Schneiden sich also die drei fraglichen Ebenen im Endlichen, so verschiebe man, bis der Schnittpunkt in den Ursprung fällt; dann werden die jenen Ebenen entsprechenden Coefficienten in der Gleichung der verschobenen Fläche den Werth Eins erhalten. Sind die Ebenen einer und derselben Richtung parallel, ohne eine gemeinsame Gerade zu besitzen, dann können blos zwei von ihnen dazu gebracht werden, durch den Nullpunkt zu gehen, und sogar nur bei einer Ebene ist Letzteres möglich, wenn alle drei parallel sind. In diesem Falle können daher blos zwei der zugehörigen Coefficienten, bezw. nur ein solcher, den Werth Eins annehmen.

§ 9. Apparate zur mechanischen Auflösung zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten.

Auf Grund der Ergebnisse des vorhergehenden Paragraphen können bei Gleichungen von bestimmter Form zuweilen Apparate — in ein- für allemal gezeichneten einzelnen Curven oder Curventafeln bestehend — construirt werden, die eine rein mechanische Bestimmung der gesuchten Wurzeln, durch richtiges Aufeinanderlegen der betreffenden Curven und Ablesen an ihren Schnittpunkten möglich machen.

Angenommen, die eine der beiden gegebenen Gleichungen bestehe nur aus drei Gliedern. Dann kann ihr die Form gegeben werden:

$$\pm\, a x^k y^l \pm b x^m y^n = c.$$

Die linke Seite stellt logarithmisch einen Cylinder, die rechte eine waagerechte Ebene vor. Jener Cylinder kann durch blosses Verschieben parallel zur XY-Ebene aus demjenigen zur Gleichung

$$z = \pm\, x^k y^l \pm x^m y^n$$

erhalten werden. In dieser Gleichung kommen die Coefficienten a, b, c nicht mehr vor. Da die waagerechten Schnitte des Cylinders und ebenso deren Grundrisse unter sich congruent sind, so ist, wenn die Exponenten k, l, m, n bestimmte Werthe haben, das logarithmische Bild der gegebenen Gleichung eine Curve von bestimmter Form; nur ihre Lage hängt von den Coefficienten a, b, c ab.

Wenn die betreffende Gleichung vier Glieder hat, so stelle man die Form her:

$$\pm\, a x^h y^i \pm b x^k y^l \pm c x^m y^n = d.$$

Zur rechten Seite gehört wieder eine waagerechte Ebene, zur linken eine Fläche, die durch Verschieben aus dem logarithmischen Bilde von

$$z = \pm\, x^h y^i \pm x^k y^l \pm x^m y^n$$

hervorgeht. Man hat es daher in diesem Falle mit einer Schaar von Curven, nämlich dem Grundrisse aller waagerechten Schnitte der zuletzt betrachteten Fläche zu thun. Diese Curvenschaar hängt allein von den Exponenten h, i, k, l, m, n ab; die Coefficienten a, b, c, d haben nur auf ihre Lage Einfluss. Die richtige Einstellung der Curve bezw. Curvenschaar ist leicht und ohne Rechnung zu bewerkstelligen, worauf jedoch nicht weiter eingegangen werden soll.

Es ist hiermit gezeigt, dass zur graphisch-mechanischen Auflösung zweier numerischer Gleichungen bestimmter Gestalt mit zwei Unbekannten nach dem logarithmischen Verfahren erforderlich sind: zwei einzelne Curven, wenn beide Gleichungen drei Glieder besitzen, dagegen eine einzelne Curve und eine Curvenschaar, wenn eine von ihnen drei Glieder, die andere vier Glieder hat, und endlich zwei Curvenschaaren, wenn die Zahl der Glieder bei beiden Gleichungen vier beträgt.*

Besondern Vortheil bringt noch die Benützung gewisser Affinitätsbeziehungen, von denen eine spätere Mittheilung handeln wird. Wie ich ohne Beweis hier anführe, gestattet dieselbe, eine der beiden Curven bezw. Curvenschaaren auf eine Normalform zurückzuführen, die von dem Werthe der Exponenten in der betreffenden Gleichung unabhängig ist.

* Ueber Apparate zur mechanischen Auflösung numerischer Gleichungen mit einer Unbekannten sehe man a. a. O. Nr. 9 – 12.

(Fortsetzung folgt.)

Kleinere Mittheilungen.

IX. Eine Summationsformel.

Bei einer Arbeit über gewisse Determinanten, die ich demnächst zum Abschluss zu bringen hoffe, wurde ich auf eine Summationsformel geführt, welche, soweit mir bekannt, noch nicht aufgestellt ist* und daher im Folgenden mitgetheilt werden mag. Sie lautet:

Wenn n eine ganze positive Zahl, x, y, v beliebige Zahlen sind, so gilt die Gleichung:

$$
1)\quad
\begin{aligned}
&\frac{(x+v+n-1)(x+v+n-2)\dots(x+v)}{(x+n-1)(x+n-2)\dots x}\\
&-(n)_1\frac{(x+v+n-1)\dots(x+v+1)}{(x+n-1)\dots(x+1)}\cdot\frac{y+v+n-1}{y}\\
&+(n)_2\frac{(x+v+n-1)\dots(x+v+2)}{(x+n-1)\dots(x+2)}\cdot\frac{(y+v+n-1)(y+v+n)}{y(y+1)}\mp\dots\\
&+(-1)^{n-1}(n)_{n-1}\frac{x+v+n-1}{x+n-1}\cdot\frac{(y+v+n-1)\dots(y+v+2n-3)}{y\dots(y+n-2)}\\
&+(-1)^n\frac{(y+v+n-1)\dots(y+v+2n-2)}{y\dots(y+n-1)}\\
&=\frac{v(v+1)\dots(v+n-1)(y-x)(y-x+1)\dots(y-x+n-1)}{x(x+1)\dots(x+n-1)\,y(y+1)\dots(y+n-1)}
\end{aligned}
$$

oder auch:

$$=\frac{(v+n-1)_n\,(y-x+n-1)_n}{(x+n-1)_n\,(y+n-1)_n}.$$

Beweis. Beide Seiten der Gleichung 1) sind bezüglich v ganze Functionen n^{ten} Grades und ich wende den betreffenden Satz in folgender Form an: Wenn zwei ganze Functionen n^{ten} Grades von v für n Werthe der Variabelen übereinstimmen und ausserdem auch die Coefficienten der n^{ten}

* Herr Prof. Lindemann, mein verehrter College, dem ich die Formel mittheilte, hatte die Güte, mich darauf aufmerksam zu machen, dass sie leicht als Specialfall einer hypergeometrischen Reihe dritter Ordnung nach Art der von Pochhammer im 102. Bande des Journals für Mathematik S. 75 flgg. behandelten aufzufassen ist. Daraus folgt jedoch, soviel ich sehe, nur, dass die dortigen betreffenden bestimmten Doppelintegrale, durch welche sich die hypergeometrische Reihe dritter Ordnung darstellen lässt, bei den obigen besonderen Voraussetzungen, in die rechte Seite der obigen Gleichung 1), mit einem gewissen einfachen Factor versehen, zurückführen lassen müssen.

Potenzen von v gleich sind, so sind die Functionen identisch gleich. Demgemäss beweise ich zuerst, dass die linke Seite der Gleichung 1) für die n Werthe:

$$v = 0, \ -1, \ -2, \ \ldots, \ -(n-1),$$

für welche die rechte Seite verschwindet, sich ebenso verhält, und sodann, dass die Coefficienten von v^n beiderseits übereinstimmen. Setze ich also zuerst:

$$v = -h, \quad h = 0, \ 1, \ 2, \ \ldots, \ (n-1),$$

so ist das erste Glied links:

$$\frac{(x-h+n-1)(x-h+n-2)\ldots(x-h)}{(x+n-1)(x+n-2)\ldots x};$$

nun ist aber $h \overline{\gtrless} n-1$, also $x-h+n-1 \overline{\gtrless} x$, daher hebt sich jedenfalls der erste Factor oben gegen den letzten unten fort, aber im Allgemeinen noch mehr Factoren, so dass (wenn wir $h=0$ zunächst ausschliessen) der höchste Factor, der oben stehen bleibt, $(x-1)$ und der niedrigste Factor, der unten stehen bleibt, $(x+n-h)$ ist und also das Glied selbst die Form:

$$2) \qquad \frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-h)}{(x+n-1)\ldots(x+n-h)}$$

annimmt. Aus diesem Gliede entsteht, wie die Gleichung 1) zeigt, der von x abhängige Factor des zweiten, durch Multiplication mit $\frac{x}{x+v}$, d. i. $\frac{x}{x-h}$, der folgende aus diesem durch Multiplication mit $\frac{x+1}{x-h+1}$ etc.; setzen wir daher z. B.:

$$(x+n-1)(x+n-2)\ldots(x+n-h) = M,$$

so werden die sämmtlichen $n+1$ von x abhängigen Factoren der linken Seite von 1):

$$3) \qquad \begin{gathered} \frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-h)}{M}, \ \frac{x(x-1)\ldots(x-h+1)}{M}, \ \frac{(x+1)x\ldots(x-h+2)}{M}, \\ \ldots, \ \frac{(x+n-1)(x+n-2)\ldots(x+n-h)}{M}, \end{gathered}$$

ihre Zähler bilden also eine arithmetische Reihe h^{ten}, d. i. höchstens $n-1^{\text{ten}}$ Grades.

Ebenso ist das letzte Glied der linken Seite von 1), wenn wir zunächst $h=n-1$ ausschliessen, abgesehen vom Vorzeichen:

$$\frac{(y+n)(y+n+1)\ldots(y+2n-2-h)}{y(y+1)\ldots(y+n-2-h)}$$

und sämmtliche $n+1$ Glieder, soweit sie von y abhängig sind, wenn:

$$y(y+1)\ldots(y+n-2-h) = N$$

gesetzt wird:

$$4) \qquad \begin{gathered} \frac{y(y+1)\ldots(y+n-2-h)}{N}, \ \frac{(y+1)(y+2)\ldots(y+n-1-h)}{N}, \\ \frac{(y+2)\ldots(y+n-h)}{N}, \ \ldots, \ \frac{(y+n)(y+n+1)\ldots(y+2n-2-h)}{N}, \end{gathered}$$

ihre Zähler bilden also eine arithmetische Reihe $n-1-h^{\text{ten}}$ Grades; daher entstehen durch die Multiplication der zusammengehörigen Glieder in 3) und in 4) Brüche mit dem Nenner MN, deren Zähler eine arithmetische Reihe $n-1^{\text{ten}}$ Grades bilden. Folglich ist nach Multiplication mit den betreffenden positiven und negativen Binomialcoefficienten $(n)_0$, $-(n)_1$, $(n)_2$ etc. ihre Summe, dem Arndt'schen Satze zufolge, Null. Dies bleibt auch für $h=0$, wobei die Ausdrücke 3), und für $h=n-1$, wobei die Ausdrücke 4) durch die Einheit zu ersetzen sind, richtig.

Zu beweisen bleibt nunmehr noch die Gleichung:

$$\frac{1}{(x+n-1)(x+n-2)\ldots x}-\frac{(n)_1}{(x+n-1)\ldots(x+1)y}$$
$$+\frac{(n)_2}{(x+n-1)\ldots(x+2)\,y(y+1)}\mp\cdots+\frac{(-1)^n}{y(y+1)\ldots(y+n-1)}$$
$$=\frac{(y-x)(y-x+1)\ldots(y-x+n-1)}{x(x+1)\ldots(x+n-1)\,y(y+1)\ldots(y+n-1)}.$$

Multiplicirt man dieselbe aber mit dem Nenner der rechten Seite und schreibt sie in der Form:

$$(y+n-1)\ldots y+(n)_1(y+n-1)\ldots(y+1)(-x)$$
$$+(n)_2(y+n-1)\ldots(y+2)(-x)(-x-1)+\cdots+(-x)(-x-1)\ldots(-x-n+1)$$
$$=(y+n-1-x)(y+n-2-x)\ \ldots(y-x),$$

so erkennt man sofort ihre Richtigkeit aus dem gewöhnlichen Factoriellensatze.

Königsberg, Februar 1890. LOUIS SAALSCHÜTZ.

X. Ueber eine Verallgemeinerung des dritten Kepler'schen Gesetzes.

Der Satz, den ich darlege, bezieht sich zunächst auf Systeme von materiellen Punkten, unter Voraussetzung der Existenz einer Kräftefunction, die in den Coordinaten homogen ist und die Zeit, sowie die Geschwindigkeiten nicht explicite enthält. Hierher gehört z. B. der Fall, wo die Punkte sich umgekehrt der n^{ten} Potenz der Entfernung anziehen, wenn n von 1 verschieden ist. Die Annahme $n=1$ werde ich gesondert behandeln.

Das dritte Kepler'sche Gesetz* giebt für den Fall der Bewegung zweier Himmelskörper eine Beziehung zwischen der Umlaufszeit und den anderen das System bestimmenden Grössen. Soll nun das zu suchende Gesetz ebenfalls die Umlaufszeit zum Gegenstande haben, so ist von vornherein klar, dass nur periodische Bewegungen in Frage kommen. Diese Periodicität wird in dem hier behandelten Falle nicht eine derartig singuläre sein, dass sie bei jeder Aenderung der Anfangsbedingungen aufhört.

* Ich meine hier zunächst den Satz: Beschreiben zwei Himmelskörper elliptische Bahnen und denkt man sich die Anfangsbedingungen so geändert, dass die Bahn periodisch bleibt, so verhalten sich die Quadrate der Umlaufszeiten wie die Cuben der grossen Axen.

Es giebt vielmehr immer Variationen,* welche die Periodicität nicht stören und die, wenn sie unendlich klein sind, auch nur eine unendlich wenig variirte Bewegung zur Folge haben. Unser Satz vergleicht solche periodische** Bewegungen miteinander, welche durch stetige Variation der Anfangsbedingungen auseinander hervorgehen können.

Ich bezeichne mit U die Kräftefunction, k die Dimension von U, r_i den Abstand des Punktes mit der Masse m_i von dem Anfangspunkte der Coordinaten, R die Grösse $\Sigma m_i r_i^2$, h die Constante des Integrales der lebendigen Kraft, T die actuelle Energie, τ die Umlaufszeit. Dann gilt die Gleichung***

$$1)\qquad \frac{d^2R}{dt^2} = U(2k+4)+4h$$

oder:

$$1\text{a})\qquad (k+2)\,2T = \frac{d^2R}{dt^2}+2kh.$$

Multiplicirt man mit dt und integrirt über die Umlaufszeit, so kommt, wenn man berücksichtigt, dass $\frac{dR}{dt}$ zu Anfang und Ende der betrachteten Zeit denselben Werth annimmt:

$$2)\qquad (k+2)\mathfrak{A} = 2kh\tau,$$

wobei $\mathfrak{A}$ die Wirkung des Systems während der genannten Zeit bezeichnet. Den Fall $k=-2$ schliessen wir aus, weil er, wie bekannt, im Allgemeinen keine Periodicität zulässt.

---

* Einige von diesen können auch immer angegeben werden. In meiner Arbeit über „Die moleculare Attraction“ (Wiedemann's Annalen XXXVI) habe ich ein System von materiellen Punkten behandelt und daselbst gezeigt, dass man eine Reihe von Systemen dieser Art bilden kann, deren Bewegungen untereinander ähnlich sind. Da dasselbe hier gilt, so sind die Variationen, die diese Bewegungen ineinander überführen, gerade von der verlangten Art. Wählen wir zwei Bewegungen aus einer solchen Reihe und bezeichnen mit $\frac{e_1}{e_2}$ das Verhältniss entsprechender Entfernungen, mit $\frac{t_1}{t_2}$ das Verhältniss entsprechender Zeiten, mit $\frac{m_1}{m_2}$ das Verhältniss der Massen (das für alle Punkte gleich angenommen wird), so gilt die Gleichung $\frac{e_1^{n+1}}{t_1^2 . m_1} = \frac{e_2^{n+1}}{t_2^2 . m_2}$ (l. c. S. 385 Gl. 2) oder, falls $n=2$ ist, $\frac{e_1^3}{t_1^2 m_1} = \frac{e_2^3}{t_2^2 m_2}$, worin man ein Analogon des dritten Kepler'schen Gesetzes erkennt. Es wird sich auch dieses als Specialfall des allgemeinen Gesetzes ergeben.

** Die Frage, welche Gestalt der Kräftefunction und welche Anfangsbedingungen Periodicität zur Folge haben, liegt ausserhalb unserer Betrachtungen. Es genügt zu wissen, dass es periodische Bewegungen giebt, welche unter Voraussetzung eines solchen Potentials, wie wir es annehmen, zu Stande kommen.

*** Siehe Jacobi's Vorlesungen über Dynamik, 1866, S. 22. Diese Gleichung ist mit der Virialgleichung in der Hauptsache einerlei. Sie gilt auch in ganz ähnlicher Form, wenn man statt r_i die gegenseitigen Abstände der Punkte einführt und annimmt, der Schwerpunkt bewege sich in gerader Linie, welche letztere Annahme also unsere Entwickelung nicht verändert.

Nun wende ich das Princip der variirenden Wirkung an. Dasselbe ist in der Gleichung* ausgesprochen:

$$\delta\mathfrak{A} = \left\{\Sigma m\left(\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z\right)\right\}$$
$$- \left[\Sigma m\left(\frac{dx}{dt}dx + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z\right)\right] + \tau\,\delta h.$$

Vergleichen wir zwei benachbarte Umläufe eines periodischen Systems, so heben sich die beiden ersten Glieder der rechten Seite auf und es ergiebt sich

3) $$\delta\mathfrak{A} = \tau\,\delta h.$$

Die Combination von 2) und 3) liefert

$$(k+2)\tau\,\delta h = 2k\,\delta(h\tau) \quad \text{oder} \quad (2-k)\,\delta\,log h = 2k\,\delta\,log\tau$$

und endlich

4) $$h^{2-k}\,\tau^{-2k} = const.$$

Aus den Gleichungen 2) und 3) ergiebt sich auch die Beziehung

5) $$\mathfrak{A}^{2-k} = const.\,\tau^{2+k},$$

welche die Abhängigkeit der Wirkung von der Umlaufszeit darstellt.

Im Falle der Attraction umgekehrt proportional der Entfernung gilt anstatt der Gleichung 1a) die folgende:

6) $$2T = \tfrac{1}{2}\frac{d^2R}{dt^2} + \Sigma m_k m_i$$

und daher

7) $$\mathfrak{A} = (\Sigma m_k m_i)\cdot\tau.$$

Aehnlich wie vorhin ist dann $\tau\,\delta h = \delta\tau\cdot\Sigma m_k m_i$, d. h.

$$(\Sigma m_k m_i)\cdot log\,t - h = const.$$

Wir haben daher den folgenden Satz gefunden:

Es sei ein periodisches System von freien materiellen Punkten gegeben und es existire für dasselbe eine homogene Kräftefunction von der Dimension k. Lässt man dasselbe System eine andere periodische Bewegung ausführen (von der wir annehmen, dass sie durch stetige Variation der Anfangsbedingungen aus der ersten hervorgehen könne), so verhalten sich die $-2k^{\text{ten}}$ Potenzen der Umlaufszeiten umgekehrt wie die $2-k^{\text{ten}}$ Potenzen der von einem geeigneten Nullpunkte gezählten Energie ($h = T - U =$ Energie $- const.$). Findet aber Anziehung umgekehrt proportional der Entfernung statt, so gilt der Satz: Die Differenz zwischen der Energie und dem mit $\Sigma m_k m_i$ multiplicirten *log. nat.* der Umlaufszeit ist constant.

Speciell für ein Newton'sches System gilt: Die Quadrate der Umlaufszeit verhalten sich umgekehrt wie die Cuben der vom erwähnten Nullpunkte gezählten Energie.

* Siehe dasselbe in dieser Form bei Thomson und Tait, Theoretische Physik.

Ich bemerke, dass man diesen Satz noch etwas erweitern kann, indem man auch Systeme mit veränderten Massen in Vergleich zieht, wenn man annimmt, dass die Massen sich um das gleiche Vielfache verändern.

Bezeichnen wir das Verhältniss der Massen zweier Systeme (das für alle Punkte nach dem eben Gesagten gleich angenommen wird) mit $\mu_1 : \mu_2$, so gilt

$$h_1^{2-k}\,\tau_1^{-2k}\,\mu_1^{k-4} = h_2^{2-k}\,\tau_2^{-2k}\,\mu_2^{k-4}.$$

Diese Gleichung folgt aus unserem Hauptsatz in Verbindung mit der ersten Anmerkung auf S. 189.

Man sieht, dass ähnliche Sätze gelten müssen, wenn nur eine der Gleichung 1a) ähnliche Gleichung besteht. Dieselbe Gleichung gilt z. B. auch dann, wenn wir die Bedingungen $f = 0$, $\varphi = 0$ etc. einführen, wo f, φ etc. homogene Functionen der Coordinaten sind.

Es ist leicht, unsern Satz an einfachen Beispielen zu verificiren. Es sei z. B. um die x-Axe ein gerader Kreiskegel beschrieben. Auf diesem bewege sich ein der Schwerkraft unterworfener Punkt. Demselben sei eine solche Anfangsgeschwindigkeit ertheilt, dass er sich in einem Kreise senkrecht zur x-Axe bewege. In diesem Falle ist $U = -mgx$, d. h. $k = 1$, mithin müssen sich nach dem obigen Satze die Umlaufszeiten wie die Quadratwurzeln der Grösse h verhalten. Führen wir, um dieses zu bewahrheiten, Polarcoordinaten ein durch $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi\cos\psi$, $z = r\sin\varphi\sin\psi$, so ist das particuläre Integral, welches der genannten Bewegung entspricht, $\frac{d\psi}{dt} = \sqrt{\frac{g\cos\varphi}{r\sin\varphi^2}}$, $r = const.$ Es ist dann $h = T - U = \frac{3}{2}\,mgr\cos\varphi$, $\tau = 2\pi\sqrt{r}\sqrt{\frac{\sin\varphi^2}{g\cos\varphi}}$ und $\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{\sqrt{h_1}}{\sqrt{h_2}}$, wie es der Satz verlangte.

Es sei ferner $k = 2$. Dann folgt aus unserem Satze, dass die Umlaufszeit constant ist. Hiermit ist der Isochronismus kleiner Pendelschwingungen ausgesprochen. Aehnliche Beispiele, welche unsern Satz bewahrheiten, lassen sich leicht finden.

Dorpat. PIERS BOHL.

XI. Ueber die Temperaturmessungen im Bohrloche zu Sauerbrunn.

In dieser, von Herrn Prof. Dr. Puluj in Prag übersendeten Abhandlung werden die Resultate jener, mit Hilfe eines vom Verfasser construirten Telethermometers ausgeführten Messungen mitgetheilt und aus denselben das Gesetz der Abhängigkeit der Temperatur t von der Tiefe h unter Tage nach der Methode der kleinsten Quadrate, sowie die geothermische Tiefenstufe berechnet. Die Rechnung ergab die empirische Formel:

$$t = 11{,}459^0 + 0{,}031182\,(h - 30)$$

und die geothermische Tiefenstufe von 32,07 m für je 1^0 C. Ausserdem werden in der Abhandlung die Resultate der Temperaturbestimmungen in fünf

Bohrlöchern besprochen, welche von der königl. preussischen Bergverwaltung in den letzten Jahren mit grossem Aufwand an Mühe und Kosten ausgeführt wurden, und daran, entgegen der herrschenden Ansicht, die Bemerkung geknüpft, dass infolge der geothermischen Temperaturdifferenz in Schladebach von 1° C. bei 36 m Tiefe keine Wasserströmungen entstehen können, im Gegentheil das Wasser in circa 3 km Tiefe die Siedetemperatur erreichen könnte, ohne jedoch deshalb zu sieden oder zu Strömungen in der Richtung gegen die Oberfläche Veranlassung zu geben, was im Meere ebenfalls der Fall sein dürfte.

(Aus den Wiener Sitzungsber. 1890, Nr. 6.)

Berichtigungen.

Seite	104	Zeile	15 v. u.	lies:	$(xx'+yy')$	statt	$(xx'-yy')$,
„	110	„	4 v. o.	„	$\frac{\nu}{u_2}$	„	$\frac{r}{u_2}$,
„	110	„	4 v. o.	„	k	„	x,
„	110	„	13 v. u.	„	Φ	„	φ.

XI.

Beitrag zum Studium der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Integrale feste Verzweigungspunkte besitzen, insbesondere derjenigen, welche die Ableitung bis zum dritten Grade enthalten.

Von Dr. GEORG WALLENBERG.

Die vorliegende Arbeit soll einen Beitrag liefern zu dem Studium der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Integrale feste Verzweigungspunkte besitzen, insbesondere derjenigen, welche die Ableitung bis zum dritten Grade enthalten.

Die linearen Differentialgleichungen besitzen die charakteristische Eigenschaft, dass die Verzweigungsstellen ihrer Integrale sich nicht stetig mit den Anfangswerthen verschieben, sondern eine feste, von denselben unabhängige Lage haben, und diese Eigenschaft ist es gerade, welche den Verlauf ihrer Integrale so übersichtlich macht. Die nicht linearen Differentialgleichungen besitzen im Allgemeinen nicht diese Eigenschaft, und aus diesem Grunde ist ihre Behandlung weit schwieriger als die der linearen. Es lag daher nahe, aus den nicht linearen Differentialgleichungen diejenigen auszusondern, deren Integrale ebenfalls feste Verzweigungspunkte besitzen. Diese Aufgabe hat Herr Fuchs* in einer in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie vom Jahre 1884 enthaltenen Abhandlung** gelöst; er gelangt daselbst zu folgendem Resultat:

„Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die Integrale der Gleichung

$$\text{A)} \qquad F(z, y, y') = 0$$

feste, sich nicht mit den Aenderungen der Anfangswerthe stetig verschiebende Verzweigungspunkte besitzen, sind die folgenden:

I. Die Gleichung A) hat die Form:

$$\text{F)} \qquad y'^m + \psi_1 \cdot y'^{m-1} + \psi_2 \cdot y'^{m-2} + \cdots + \psi_m = 0,$$

worin $\psi_1, \psi_2 \cdots \psi_m$ ganze rationale Functionen von y mit von z abhängigen Coefficienten von der Beschaffenheit sind, dass ψ_k höchstens vom Grade $2k$ in Bezug auf y ist.

* Zunächst für Differentialgleichungen erster Ordnung.

** Sitzung vom 26. Juni 1884; pag. 699.

II. Ist $y = \eta$ eine Wurzel der Discriminantengleichung $D(z, y) = 0$, für welche die durch F) definirte algebraische Function y' von y sich verzweigt, so ist η ein Integral der Differentialgleichung F); in der y' als algebraische Function von y darstellenden Riemann'schen Fläche hat y' in sämmtlichen über $y = \eta$ liegenden Verzweigungspunkten den Werth

$$y = \zeta = \frac{d\eta}{dz}.$$

III. Je α Blättern, welche sich in $y = \eta$, $y' = \zeta = \frac{d\eta}{dz}$ verzweigen, entsprechen mindestens $\alpha - 1$ mit $y = \eta$ zusammenfallende Wurzeln der Gleichung $F(z, y, \zeta) = 0$ mit der Unbekannten y."

Ich will im folgenden die Differentialgleichungen, welche diesen Bedingungen genügen, kurz die „Fuchs'schen" nennen; einen sehr speciellen Fall derselben bilden die von **Briot** und **Bouquet** behandelten Differentialgleichungen, in denen die unabhängige Variabele explicite nicht vorkommt und deren Integrale daher eindeutige Functionen sind. Die Fuchs'schen Differentialgleichungen werden am besten nach dem Geschlecht der durch

$$\text{F)} \qquad F(z, y, y') = 0$$

definirten algebraischen Function y' von y classificirt, wie es Herr **Fuchs*** und Herr **Poincaré,**** der dieselben einem tieferen Studium unterzogen, gethan haben.

Für den Fall $p = 0$ setzt Herr **Fuchs**:

$$1) \qquad y = \frac{\varphi_1(t)}{\varphi_0(t)}, \qquad\qquad 2) \qquad y' = \frac{\varphi_2(t)}{\varphi_0(t)},$$

wo φ_0, φ_1, φ_2 ganze rationale Functionen von t sind, mit Coefficienten, die von z abhängen; differenzirt man 1) und vergleicht damit 2), so erhält man eine Differentialgleichung erster Ordnung für t, welche, wenn die Differentialgleichung F) fest verzweigte Integrale besitzt, ebenfalls diese Eigenschaft haben, also den oben angeführten Bedingungen gemäss lauten muss:

$$\text{B)} \qquad \frac{dt}{dz} + P_0 + P_1 t + P_2 t^2 = 0,$$

wo P_0, P_1, P_2 Functionen von z sind. Dies ist die Riccati'sche Differentialgleichung in ihrer allgemeinsten Form.† — Wir werden im letzten Abschnitt einige Beispiele nach dieser Methode integriren.

---

* Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1884, pag. 708.

** Acta mathematica 7 : 1. Sur un théorème de M. **Fuchs**, pag. 1.

† Dieselbe lässt sich bekanntlich durch die logarithmische Substitution $t = \frac{1}{P_2} \cdot \frac{d \log u}{dz}$ auf eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \left[-\frac{P_2'}{P_2} + P_1\right] \cdot \frac{du}{dz} + P_2 P_0 \,.\, u = 0$$

zurückführen; ist $P_2 = 0$, in welchem Falle die Substitution versagt, so ist B) eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung und ihr Integral:

$$y = C \,.\, e^{-\int P_1 dz} - e^{-\int P_1 dz} \,.\int P_0\, e^{\int P_1 dz}\, dz.$$

Ist $p = 1$, so setzt Herr Fuchs nach dem Vorgange von Clebsch:*

$$y = \frac{\Phi_1(t) + \Psi_1(t)\sqrt{R(t)}}{\Phi_0(t) + \Psi_0(t)\sqrt{R(t)}}, \qquad y' = \frac{\Phi_2(t) + \Psi_2(t)\sqrt{R(t)}}{\Phi_0(t) + \Psi_0(t)\sqrt{R(t)}},$$

wo die Φ, Ψ und R wieder ganze rationale Functionen von t sind, mit Coefficienten, die von z abhängen, und insbesondere R vom vierten Grade in t ist. Die Differentialgleichung F) wird dadurch auf eine Differentialgleichung für t zurückgeführt, welche $\frac{dt}{dz}$ nur im zweiten Grade enthält und ebenfalls fest verzweigte Integrale besitzt:

$$\text{C)} \qquad \frac{dt}{dz} = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \lambda \cdot \sqrt{R(t)},$$

wo A_0, A_1, A_2 und λ Functionen von z sind und $R(t)$ der Differentialgleichung

$$\text{D)} \qquad \frac{\partial R}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial t} \cdot (A_0 + A_1 t + A_2 t^2) = (B_0 + B_1 t) \cdot R$$

genügt. Die Differentialgleichung C) bringt Herr Poincaré durch eine geeignete linear gebrochene Substitution auf die Form

$$\text{E)} \qquad \frac{dt}{dz} = \lambda \cdot \sqrt{R(t)},$$

wo R nur von t und λ nur von z abhängt, die Variabelen also getrennt sind. Diese Differentialgleichung lässt sich durch einfache Quadratur integriren: wird $\lambda = \frac{d\mu}{dz}$, also $\mu = \int \lambda\, dz$ gesetzt, so lautet die Differentialgleichung E)

$$\frac{dt}{\sqrt{R(t)}} = d\mu$$

und ihr Integral

$$t = \varphi(\mu + C),$$

wo φ der Algorithmus einer doppeltperiodischen Function und C willkürliche Constante ist. Da die Verzweigungspunkte der Function t diejenigen der Function μ sind, so zeigt uns diese Form des Integrals die Unabhängigkeit derselben von der Integrationsconstanten. Trotzdem ist diese Form nicht in allen Fällen die geeignetste; sie erweckt die Vermuthung, dass der Algorithmus der doppeltperiodischen Function für die Integrale der Fuchs'schen Differentialgleichungen vom Geschlecht 1 charakteristisch ist, und doch giebt es zahlreiche Differentialgleichungen dieser Art, deren Integrale algebraisch sind, wie z. B. die bekannte Differentialgleichung

$$\frac{dy}{\sqrt{R(y)}} + \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} = 0,$$

durch deren algebraische Integration Euler das Additionstheorem der

* Crelle, B. 64, S. 222.

elliptischen Functionen anticipirte; in diesem Falle ist eben μ seinerseits ein elliptisches Integral.

Ist endlich $p > 1$, so hat Herr Poincaré gezeigt,* dass in diesem Falle die Integrale der Fuchs'schen Differentialgleichungen algebraisch sind, wenn $F(z, y, y')$ nicht nur algebraische Function von y' und y, sondern auch von z ist. Er betrachtet die Gleichung

$$F(z, y, y') = 0$$

als Repräsentantin einer Riemann'schen Fläche, die sich mit z ändert und beweist, dass, wenn die Integrale der Differentialgleichung

$$F(z, y, y') = 0$$

feste Verzweigungspunkte besitzen, zwei Riemann'sche Flächen

$$(S_0)\ F(z_0, y_0, y_0') = 0 \text{ und } (S_1)\ F(z_1, y_1, y_1') = 0,$$

worin z_0 und z_1 nicht zu den — festen — Verzweigungspunkten gehören, stets durch eine birationale Transformation in einander übergeführt werden können und dass demnach die — $3p-3$ — Moduln der Riemann'schen Fläche

$$(S)\ F(z, y, y') = 0$$

von z unabhängig sind. Während man nun, wenn $p = 0$, durch eine dreifache, wenn $p = 1$, durch eine einfache Unendlichkeit von birationalen Transformationen von S_0 zu S_1 übergehen kann, giebt es für den Fall $p > 1$, wie Herr Poincaré zeigt und bereits Herr Klein** es ausgesprochen hat, im Allgemeinen nur eine einzige birationale Transformation, welche den Uebergang gestattet, und es giebt stets nur eine endliche Anzahl, sodass man dieselben durch rein algebraische Processe muss finden können. Ist

$$y_1 = R(y_0, y_0'), \quad y'_1 = R_1(y_0, y_0')$$

eine solche Transformation, in welcher R und R_1 rationale Functionen bedeuten, deren Coefficienten von z_0 und z_1 abhängen, und betrachtet man z_0 als Constante, z_1 als unabhängige Variabele, so repräsentirt nach Unterdrückung des Index 1 die Gleichung

$$y = R(y_0, y_0'),$$

in welcher die Integrationsconstanten y_0 und y_0' durch die Gleichung

$$F(z_0, y_0, y_0') = F_0(y_0, y_0') = 0$$

verbunden sind, das allgemeine Integral der Differentialgleichung F); dasselbe ist also, falls $F(z, y, y')$ auch von z algebraisch abhängt, algebraischer Natur.

---

* l. c.

** In einem Briefe an Herrn Poincaré vom 3. April 1882.

Nach dieser Darstellung der Resultate der Herren Fuchs und Poincaré wenden wir uns zu den eigenen Untersuchungen. Im ersten Abschnitt werden die binomischen Fuchs'schen Differentialgleichungen erledigt und diejenigen, welche sich auf binomische zurückführen lassen, durch eine Transformation, welche einer aus der Theorie der algebraischen Gleichungen bekannten Transformation analog ist. Die drei folgenden Abschnitte beschränken sich hauptsächlich auf das Studium derjenigen Fuchs'schen Differentialgleichungen, in denen die erste Ableitung höchstens im dritten Grade vorkommt, insbesondere auch derjenigen, welche vom Geschlecht 0 oder 1 und doch algebraisch integrirbar sind. Abschnitt II behandelt die eigentlichen trinomischen Differentialgleichungen, deren typische Form explicite aufgestellt und deren — algebraische — Integration geleistet wird. Abschnitt III enthält die vollständigen Differentialgleichungen dritten Grades; es wird die Maximalzahl ihres Geschlechtes bestimmt, es wird gezeigt, wie man die von Herrn Fuchs aufgestellten Bedingungen in Bedingungsgleichungen für die Coefficienten umsetzen kann und ein bemerkenswerther Ausdruck für den zweiten Differentialquotienten aufgestellt, welcher ein Mittel zur Integration an die Hand giebt. Abschnitt IV behandelt die Differentialgleichungen, in welchen das Glied mit der zweiten Potenz der Ableitung fehlt, eingehender; es wird wieder in hinreichend allgemeinen Fällen ihre typische Form bestimmt und die — algebraische — Integration nach verschiedenen Methoden durchgeführt. Abschnitt V enthält einige allgemeinere, Früheres zusammenfassende Untersuchungen über Fuchs'sche Differentialgleichungen jeden Grades und Abschnitt VI Beispiele.

Es wird im Folgenden überall vorausgesetzt, dass $F(z, y, y')$ irreductibel ist und meistens, dass die Discriminantengleichung von $F(z, y, y') = 0$ nur einfache Wurzeln besitzt.

I.

Eine binomische Fuchs'sche Differentialgleichung hat die Gestalt:

$$\text{A)} \qquad y'^m = R(z, y),$$

wo R eine ganze rationale Function höchstens $2m^{\text{ten}}$ Grades in y ist, deren Coefficienten von z abhängen. Da hier jeder Verzweigungspunkt $y = \eta$ Wurzel von $R(z, y) = 0$ ist und zwar nach Bedingung III ein αfacher Verzweigungspunkt mindestens αfache Wurzel, so ist die Gesammtzahl der einfachen Verzweigungen

$$w \leqq 2m,$$

also das Geschlecht

$$p \leqq 1,$$

wie sich aus der Riemann'schen Gleichung*

$$w = 2m + 2(p-1)$$

ergiebt. Man kann daher diese binomischen Differentialgleichungen nach den in der Einleitung enthaltenen Bemerkungen auf eine Riccatische Differentialgleichung zurückführen (wenn $p = 0$) respective durch einfache Quadratur integriren (wenn $p = 1$); sie gestatten aber eine viel schönere Behandlung, welche zugleich alle überhaupt möglichen Formen derselben aufzustellen erlaubt. Ist $y = \eta$ eine Wurzel von $R(z, y) = 0$, für welche y' sich verzweigt, so muss der zweiten von Herrn **Fuchs** aufgestellten Bedingung gemäss $y = \eta$ ein Integral der Differentialgleichung A) sein, und zwar muss, wenn $y' = \zeta$ eine gemeinschaftliche Wurzel der beiden Gleichungen

$$F(z, \eta, y') = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F(z, \eta, y')}{\partial y'} = 0$$

ist, $\zeta = \dfrac{d\eta}{dz}$ sein. Aber ζ ist hier gleich Null, also: $\dfrac{d\eta}{dz} = 0$, d. h. η von z unabhängig. $R(z, y)$ darf also nur solche von z abhängige Factoren enthalten, für welche y' als algebraische Function von y aufgefasst sich nicht verzweigt. Enthält also $R(z, y)$ einen von z abhängigen Factor, so muss derselbe darin zu einer Potenz erhoben vorkommen, die gleich m oder gleich einem Multiplum von m ist, oder, da $R(z, y)$ höchstens vom $2m^{\text{ten}}$ Grade in y ist, zu einer Potenz, die gleich m oder $2m$ ist. Es sei zunächst diese Potenz die $2m$te, dann enthält $R(z, y)$ keinen anderen Factor in y mehr; es ist also

$$y'^m = \lambda (y - \eta)^{2m},$$

wo λ und η Functionen von z allein sind; diese Gleichung ist aber in Bezug auf y' und y reductibel, wenn $m > 1$. Enthält $R(z, y)$ einen von z abhängigen Factor $(y - \eta)^m$, so können folgende Fälle eintreten:

1) $y'^m = \lambda (y - \eta)^m$; in diesem Falle ist die Differentialgleichung reductibel, es sei denn, dass $m = 1$ ist.

2) $y'^m = \lambda (y - \eta_1)^m . (y - \eta_2)^m = \lambda [(y - \eta_1) . (y - \eta_2)]^m$, wo η_1 η_2 und λ Functionen von z sind; auch in diesem Falle ist die Differentialgleichung reductibel, es sei denn $m = 1$.

3) $y'^m = \lambda (y - \eta)^m . \overline{R}(y)$, wo $\overline{R}(y)$ von z unabhängig ist, aber y wirklich enthält. Indem wir einer Argumentation von **Briot** und **Bouquet**** folgen, schreiben wir Gleichung 3) in der Form:

$$y' = \mu (y - \eta) \cdot (y - a)^{\frac{p}{n}} \cdot (y - b)^{\frac{p'}{n'}} \cdots,$$

* **Crelle**, Bd. 54 S. 129.

** Théorie des fonctions doubl. périod. Paris 1859, pag. 304.

wo $\mu = \sqrt[m]{\lambda}$ ist und $a, b, \ldots$ von z unabhängig. Da der Grad von $\overline{R}(y)$ nicht m übersteigen darf, also $\frac{p}{n} + \frac{p'}{n'} + \cdots$ höchstens gleich 1 ist, so darf $\overline{R}(y)$ höchstens zwei Factoren enthalten, weil in Folge der Bedingung III) jeder der Brüche $\frac{p}{n}, \frac{p'}{n'}, \cdots$ mindestens gleich $\frac{1}{2}$ ist. Enthält es zwei Factoren, so muss $\frac{p}{n} = \frac{p'}{n'} = \frac{1}{2}$ sein; enthält es nur einen Factor, so kann sein Exponent gleich der Einheit sein; ist er kleiner und daher nach Bedingung III) von der Form $1 - \frac{1}{n}$, so muss $n = 2$ sein, da die Function $v = \frac{1}{y}$ zugleich mit y feste Verzweigungspunkte besitzt, ihre Differentialgleichung

$$-v' = \mu(1 - \eta v) \cdot (1 - av)^{1 - \frac{1}{n}} \cdot v^{\frac{1}{n}}$$

also denselben Bedingungen genügen muss. Wir haben somit das folgende Resultat:

Eine irreductibele binomische Fuchs'sche Differentialgleichung, deren Grad grösser als 2 ist, muss die Form haben:

$$\text{B)} \qquad y'^m = \lambda \cdot R(y),$$

wo λ nur von z und $R(y)$ nur von y abhängig ist; oder in einer irreductibelen binomischen Fuchs'schen Differentialgleichung von höherem als dem zweiten Grade sind die Variabelen separirt.

Diese Differentialgleichungen lassen sich also durch einfache Quadraturen integriren; aber wir können noch weiter schliessen: Wird $\lambda = \nu^m$ und $\nu\, dz = d\mu$ gesetzt, so geht die Gleichung B) über in

$$\text{C)} \qquad \left(\frac{dy}{d\mu}\right)^m = R(y).$$

Dies ist aber in Folge der Bedingungen, denen die ursprüngliche Differentialgleichung A) genügt, eine „Briot und Bouquet'sche Differentialgleichung."* Briot und Bouquet haben die in sehr beschränkter Zahl vorhandenen Typen der binomischen Differentialgleichungen mit eindeutigen Integralen aufgestellt; dieselben gelten nach den obigen Auseinandersetzungen mit einigen Modificationen auch hier. Wir haben demnach folgende Tabelle der irreductibelen binomischen Fuchs'schen Differentialgleichungen:

$$\text{1)} \qquad y'^2 = \lambda \cdot (y-a)(y-b)(y-c)(y-d),$$
$$\text{2)} \qquad y'^3 = \lambda \cdot (y-a)^2 \cdot (y-b)^2 \cdot (y-c)^2,$$
$$\text{3)} \qquad y'^4 = \lambda \cdot (y-a)^2 \cdot (y-b)^3 \cdot (y-c)^3,$$

* l. c. pag. 302.

4) $$y'^6 = \lambda \cdot (y-a)^3 \cdot (y-b)^4 \cdot (y-c)^5,$$
5) $$y'^m = \lambda \cdot (y-a)^{m+1} \cdot (y-b)^{m-1}.$$

6) $$y'^2 = \lambda \cdot (y-\eta)^2 \cdot (y-a) \cdot (y-b),$$
7) $$y' = \lambda \cdot (y-\eta_1) \cdot (y-\eta_2).$$

Die Grössen a, b, c, d bedeuten Constanten; $\lambda, \eta, \eta_1, \eta_2$ Functionen von z. Die Tabelle enthält nur die wesentlich verschiedenen Formen; man erhält Modificationen derselben, indem man z. B. η_1 gleich η_2 setzt oder indem man eine der Grössen a, b, c, d durch eine geeignete Transformation — z. B. $y - a = \frac{1}{u}$ — ins Unendliche rücken lässt. Die Formen 1) bis 4) sind vom Geschlecht 1*, die Formen 5) bis 7) vom Geschlecht 0. Die Formen 1) bis 5), in denen die Variabelen separirt sind, lassen sich durch einfache Quadratur integriren; bezeichnen wir sie typisch durch:
$$y'^m = \lambda \cdot R(y),$$
so setzen wir, um sie zu integriren, zunächst wieder $\lambda = \nu^m$ und $\frac{d\mu}{dz} = \nu$, dann wird sie:
$$\left(\frac{dy}{d\mu}\right)^m = R(y).$$

Diese Differentialgleichung ergiebt uns nach Briot und Bouquet**
$$y = \varphi(\mu + C),$$
wo C die willkürliche Constante ist und φ für die Formen 1), 2), 3), 4) den Algorithmus einer ganz bestimmten doppeltperiodischen Function**, für 5) den einer bestimmten rationalen Function bedeutet. μ ist gleich $\int \nu dz$, wird also durch reine Quadratur gefunden; die Verzweigungspunkte von y stecken alle in μ, sodass die Form des Integrals
$$y = \varphi(\mu + C),$$
da φ eine eindeutige Function, uns wiederum sofort zeigt, dass die Verzweigungsstellen der particulären Integrale sich nicht mit den Anfangswerthen stetig verschieben, sondern „fest" sind.

Die Differentialgleichung
$$\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{(z-a)^2} \cdot (1-y^2)(1-k^2y^2)$$
z. B. hat, da hier
$$\frac{d\mu}{dz} = \frac{\alpha}{z-a}, \quad \text{also:} \quad \mu = \log(z-a)^\alpha + \overline{C}$$
und

* Also in einer binomischen Fuchs'schen Differentialgleichung vom Geschlecht 1 sind die Variabelen stets getrennt.

** l. c. Seite 312 flg. (Nr. 261 u. 262.)

$$d\mu = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}, \quad \text{also:} \quad (\bar{C} + C' = C)$$

$$\mu + C' = log\,(z-a)^\alpha + C = \int^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$$

ist, das Integral:

$$y = sin\,am\,[log\,(z-a)^\alpha + C].$$

y kann hier eine eindeutige Function von z sein, wenn nämlich $\alpha\, 2\pi i$ eine Periode des Modularsinus ist; im Allgemeinen aber ist die Stelle $z = a$ für die Function y eine logarithmische Verzweigungsstelle.

Es bleiben noch die Fälle 6) und 7) zu erledigen. Die in 7) enthaltenen Fälle:

$$y = \lambda\,(y-\eta_1)\,(y-\eta_2), \quad y = \lambda\,(y-\eta)^2, \quad y = \lambda\,(y-\eta)$$

sind durch die Bemerkungen auf Seite 194 (Anmerkung) bereits erledigt.

Die Differentialgleichung

$$6) \qquad y'^2 = \lambda\,(y-\eta)^2 \cdot (y-a) \cdot (y-b) \qquad (p = 0)$$

reduciren wir zunächst durch die Substitution $u = \dfrac{1}{y-b}$ auf eine Differentialgleichung der Form:

$$y'^2 = \lambda\,(y-\eta)^2 \cdot (y-a).$$

Wird dann

$$y' = (y-\eta) \cdot t$$

gesetzt, so liefert die letztere Gleichung

$$y - a = \frac{t^2}{\lambda} \quad \text{und} \quad y' = \left(\frac{t^2}{\lambda} + a - \eta\right) \cdot t.$$

Hieraus resultirt für t die Differentialgleichung

$$\frac{dt}{dz} = \frac{a-\eta}{2} \cdot \lambda + \frac{\lambda'}{2\,\lambda} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot t^2,$$

welche auf eine lineare homogene Differentialgleichung zurückführbar ist.

Auf die binomischen lässt sich eine allgemeinere Classe von Fuchsschen Differentialgleichungen zurückführen, welche die Form haben:

$$(y' - P(z, y))^m - R(z, y) = 0.$$

Man kann nämlich auf die Fuchs'schen Differentialgleichungen einen ähnlichen Satz anwenden wie auf algebraische Gleichungen. Bekanntlich lässt sich in jeder algebraischen Gleichung

$$x^n + a\,x^{n-1} + \cdots + p = 0$$

durch eine einfache Transformation das Glied mit der $n-1^{\text{ten}}$ Potenz der Unbekannten fortschaffen.

Ebenso lässt sich in jeder Fuchs'schen Differentialgleichung m^{ten} Grades in Bezug auf die Ableitung das Glied mit der $m-1^{\text{ten}}$ Potenz der Ableitung fortschaffen.

Es sei gegeben die Fuchs'sche Differentialgleichung:

$$\text{F)}\quad F(z,y,y') = y'^m - mP_1 \cdot y'^{m-1} + P_2 \cdot y'^{m-2} + \cdots + P_k \cdot y'^{m-k} + \cdots + P_{m-1} \cdot y' + P_m = 0,$$

so ist P_1 nach Bedingung I) höchstens vom zweiten Grade in y, also:

$$P_1 = a_0 + a_1 y + a_2 y^2.$$

Die Differentialgleichung F) kann ich in der Form schreiben:

$$\text{G)}\quad F(z,y,y') = (y' - P_1)^m + \bar{P}_2(y' - P_1)^{m-2} + \cdots + \bar{P}_k(y' - P_1)^{m-k} + \bar{P}_{m-1}(y' - P_1) + \bar{P}_m = 0.$$

Die $\bar{P}_k$ lassen sich leicht durch die P_k ausdrücken; ihre Grade genügen ebenfalls der Bedingung I). Da P_1 drei Grössen enthält, die zum Verschwinden gebracht werden sollen, so muss man in der zu diesem Zwecke angewendeten Substitution drei Grössen zur Verfügung haben; ich bediene mich daher der linear gebrochenen Substitution

$$y = \frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta},$$

in welcher α, β, γ, δ Functionen von z sind, die der Bedingung

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

genügen. Durch Differentiation von y erhalte ich

$$y' = \frac{(\beta'\delta - \beta\delta') + (\alpha'\delta - \alpha\delta' + \beta'\gamma - \beta\gamma')\,u + (\alpha'\gamma - \alpha\gamma')\,u^2 + u'}{(\gamma u + \delta)^2}$$

$$= \frac{B_0 + B_1 u + B_2 u^2 + u'}{(\gamma u + \delta)^2},$$

und es wird $P_1 = \dfrac{A_0 + A_1 u + A_2 u^2}{(\gamma u + \delta)^2}$,

wo

$$A_0 = a_0\delta^2 + a_1\beta\delta + a_2\beta^2,$$
$$A_1 = 2a_0\gamma\delta + a_1(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2a_2\alpha\beta,$$
$$A_2 = a_0\gamma^2 + a_1\alpha\gamma + a_2\alpha^2$$

ist.

Wird in G) nach vollendeter Transformation zunächst mit $(\gamma u + \delta)^{2m}$ heraufmultiplicirt, so sind alle Nenner fortgeschafft; damit nun

$$y' - P_1 = \frac{u'}{(\gamma u + \delta)^2}$$

werde, muss gesetzt werden:

1) $A_2 = B_2$ oder $a_0\gamma^2 + a_1\alpha\gamma + a_2\alpha^2 = \alpha'\gamma - \alpha\gamma'$,

2) $A_1 = B_1$ oder $2a_0\gamma\delta + a_1(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2a_2\alpha\beta = \alpha'\delta - \alpha\delta' + \beta'\gamma - \beta\gamma'$,

3) $A_0 = B_0$ oder $a_0\delta^2 + a_1\beta\delta + a_2\beta^2 = \beta'\delta - \beta\delta'$.

Um α, β, γ, δ diesen Bedingungsgleichungen gemäss zu bestimmen, betrachte ich die Riccati'sche Differentialgleichung

$$\frac{dv}{dz} = a_0 + a_1 v + a_2 v^2;$$

dieselbe geht durch die Substitution $v = -\frac{1}{a_2} \cdot \frac{w'}{w}$ in die homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\text{D)} \qquad w'' - \left(a_1 + \frac{a'_2}{a_2}\right) w' + a_0 a_2 w = 0$$

über. Deren allgemeines Integral laute:

$$w = c_1 w_1 + c_2 w_2,$$

wo w_1, w_2 ein Fundamentalsystem von Integralen bedeutet, also das allgemeine Integral der Riccati'schen Differentialgleichung:

$$v = -\frac{1}{a_2} \cdot \frac{w'}{w} = -\frac{1}{a_2} \cdot \frac{c_1 w'_1 + c_2 w'_2}{c_1 w_1 + c_2 w_2}$$
$$= -\frac{1}{a_2} \cdot \frac{c w'_1 + w'_2}{c w_1 + w_2}.$$

Ich behaupte nun, dass, wenn ich

$$\frac{c\alpha + \beta}{c\gamma + \delta} = -\frac{1}{a_2} \cdot \frac{c w'_1 + w'_2}{c w_1 + w_2}$$

setze, den drei Gleichungen 1), 2) und 3) durch die Functionen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ genügt wird. Es ist nämlich dann

$$\frac{\alpha c + \beta}{\gamma c + \delta}$$

das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$\frac{dv}{dz} = a_0 + a_1 v + a_2 v^2,$$

also:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\alpha c + \beta}{\gamma c + \delta}\right) = a_0 + a_1 \left(\frac{\alpha c + \beta}{\gamma c + \delta}\right) + a_2 \left(\frac{\alpha c + \beta}{\gamma c + \delta}\right)^2.$$

Da c eine willkürliche Constante ist, so folgen hieraus, indem sich auf beiden Seiten $(\gamma c + \delta)^2$ forthebt, durch Vergleichung der Coefficienten von c^0, c^1, c^2 die drei Gleichungen 1), 2) und 3). Um also P_1 fortzuschaffen, mache ich die Substitution

$$y = \frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta}$$

und setze darin

$$\alpha = -\frac{\lambda}{a_2} \cdot w'_1, \qquad \beta = -\frac{\lambda}{a_2} \cdot w'_2,$$
$$\gamma = \lambda \cdot w_1, \qquad \delta = \lambda \cdot w_2,$$

wo w_1, w_2 ein beliebiges, aber bestimmtes Fundamentalsystem von Integralen der linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung (D) ist.

Die Function λ wird aus der Beziehung

$$1 = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{\lambda}{a_2}\cdot w'_1, & -\frac{\lambda}{a_2}\cdot w'_2 \\ \lambda\cdot w_1, & \lambda\cdot w_2 \end{vmatrix} = \frac{\lambda^2}{a_2}\begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ w'_1 & w'_2 \end{vmatrix}$$

bestimmt. Bekanntlich ist

$$\begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ w_1' & w_2' \end{vmatrix} = C\cdot e^{\int\left(a_1+\frac{a'_2}{a_2}\right)dz} = Ca_2\cdot e^{\int a_1 dz}.$$

Wähle ich, was stets leicht zu erreichen ist, der Einfachheit wegen das Fundamentalsystem w_1, w_2 so, dass die Constante C gleich 1 wird, so erhalte ich

$$\lambda^2\cdot e^{\int a_1 dz} = 1, \quad \text{folglich } \lambda = e^{-\int\frac{a_1}{2}dz}.$$

Man hat demnach zu wählen:

$$\alpha = -\frac{1}{a_2}e^{-\int\frac{a_1}{2}dz}\cdot w'_1, \qquad \beta = -\frac{1}{a_2}e^{-\int\frac{a_1}{2}dz}\cdot w'_2,$$

$$\gamma = +e^{-\int\frac{a_1}{2}dz}\cdot w_1, \qquad \delta = e^{-\int\frac{a_1}{2}dz}\cdot w_2.$$

Die Differentialgleichung G) geht durch diese Substitution über in:

$$\text{H)}\quad f(z,u,u') = u'^m + p_2\cdot u'^{m-2} + \cdots + p_k\cdot u'^{m-k} + \cdots + p_{m-1}\cdot u' + p_m = 0.$$

Hierin ist

$$p_k(u) = (\gamma u+\delta)^{2k}\cdot \overline{P}_k\left(\frac{\alpha u+\beta}{\gamma u+\delta}\right)$$
$$= (\gamma u+\delta)^{2k-r_k}\cdot \mathfrak{P}_k(u) \qquad (k = 2, 3, \cdots m),$$

wo $\mathfrak{P}_k(u)$ eine ganze rationale Function vom Grade $\leqq r_k$ in u ist, wenn r_k den Grad von $\overline{P}_k(y)$ in y bedeutet; dieser ist nach Obigem stets $\leqq 2k$, sodass die $p_k(u)$ ganze rationale Functionen von höchstens $2k^{\text{tem}}$ Grade in u sind. Sind die Verzweigungspunkte von y fest, so sind es auch diejenigen von u; die Differentialgleichung H) genügt daher auch den von Herrn **Fuchs** dafür aufgestellten Bedingungen; sie ist eine Fuchssche Differentialgleichung.

Da diese Transformation der Fuchs'schen Differentialgleichungen durch eine lineare gebrochene Substitution die Integration einer Riccati'schen resp. einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung erfordert, so hat sie im Allgemeinen nur formale Bedeutung. In vielen Fällen aber werden uns durch die Natur dieser Differentialgleichungen direct Integrale der Riccati'schen Differentialgleichung

$$\frac{dv}{dz} = P_1(v)$$

geliefert. Haben z. B. $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$, $\cdots \overline{P}_k$, $\cdots \overline{P}_m$ alle* einen gemeinsamen

* oder von einem $\overline{P}_i$ an.

Factor $y - \eta$ derart, dass sich y' für $y = \eta$ wirklich verzweigt, so muss nach Bedingung II) η ein Integral von G) sein, oder es muss

$$\eta' - P_1(\eta) = 0,$$

d. h. η ein Integral der Riccati'schen Differentialgleichung

$$v' = P_1(v)$$

sein. Kennt man nun auf solche Weise drei Particularintegrale v_1, v_2, v_3 derselben, so lautet ihr allgemeines Integral*

$$v = \frac{c_3 v_1 (v_2 - v_3) + c v_2 (v_3 - v_1)}{c_3 (v_2 - v_3) + c (v_3 - v_1)},$$

wo c_3 eine numerische und c die willkürliche Constante bedeutet. In diesem Falle ist man also der besonderen Integration der linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung überhoben.

Die Fuchs'schen Differentialgleichungen von der Form

$$[y' - P(z, y)]^m - R(z, y) = 0,$$

deren Typen denen der binomischen Differentialgleichungen analog sind, werden durch die gedachte Substitution auf binomische:

$$u'^m - r(z, u) = 0$$

zurückgeführt. Wenden wir die Substitution insbesondere auf die vier Typen vom Geschlecht 1 an:

$$1^*) \qquad (y' - P)^2 = \lambda (y - \eta_1)(y - \eta_2)(y - \eta_3)(y - \eta_4),$$

$$2^*) \qquad (y' - P)^3 = \lambda (y - \eta_1)^2 (y - \eta_2)^2 (y - \eta_3)^2,$$

$$3^*) \qquad (y' - P)^4 = \lambda (y - \eta_1)^2 (y - \eta_2)^3 (y - \eta_3)^3,$$

$$4^*) \qquad (y' - P)^6 = \lambda (y - \eta_1)^3 (y - \eta_2)^4 (y - \eta_3)^5,$$

wo λ und die η_i Functionen von z sind. Da hier die η_i sämmtlich Verzweigungsstellen der algebraischen Function y' von y sind, so sind sie Integrale der respectiven Differentialgleichungen 1*), 2*), 3*), 4*) und daher Integrale der Riccati'schen Differentialgleichung:

$$\frac{dv}{dz} - P(v) = 0.$$

In diesem Falle kennt man also mindestens drei Particularintegrale der letzteren und folglich auch ihr allgemeines Integral. Im Falle 1*) hat auch Herr Poincaré** eine linear gebrochene Substitution angewendet; aber während er durch dieselbe drei der η_i von z unabhängig macht und dann zeigt, dass in der so transformirten Differentialgleichung P verschwindet und auch η_4 von z unabhängig sein muss, bringen wir von

* Königsberger: Allgem. Untersuch. aus der Theorie der Differentialgleichungen, § 9, pag. 99.

** cfr. Einleitung pag. 195.

vornherein P zum Verschwinden und wenden dann den vorher bewiesenen Satz an, dass in einer binomischen Fuchs'schen Differentialgleichung vom Geschlecht 1 die Variabelen getrennt, d. h. die η_i von z unabhängig sind.* Uebrigens kann man auch in 2*), 3*) und 4*) sogleich durch eine linear gebrochene Substitution die η_i von z unabhängig machen, z. B. $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = +1$, $\eta_3 = -1$. Dann verschwindet in der transformirten Differentialgleichung P identisch, weil es höchstens vom zweiten Grade in y ist und die drei Wurzeln $0, +1, -1$ besitzen muss.

II.

Eine trinomische Fuchs'sche Differentialgleichung hat die Form

$$\text{A)} \qquad F(z, y, y') = y'^m - mP \cdot y'^{m-1} - (m-1)^{m-1} \cdot Q = 0,$$

worin P höchstens vom zweiten, Q höchstens vom $2m^{\text{ten}}$ Grade in y ist. Um ihre Discriminante zu finden, differenziren wir A) nach y':

$$\text{B)} \qquad \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y'} &= m y'^{m-1} - m(m-1) P y'^{m-2} \\ &= m y'^{m-2} \cdot [y' - (m-1) P]. \end{aligned}$$

Die Gleichungen A) und B) werden zunächst durch $y' = 0$, $Q = 0$ befriedigt; Q ist also ein Factor der Discriminante. Den restirenden Factor der Discriminante finden wir durch Elimination von y' aus den Gleichungen

$$F = 0 \quad \text{und} \quad y' - (m-1) P = 0.$$

Er lautet

$$-(m-1)^{m-1} \cdot (P^m + Q) = -(m-1)^{m-1} \cdot \Delta.$$

Da jede einfache Wurzel η_i der Discriminantengleichung wirklich ein Verzweigungspunkt der algebraischen Function y' von y ist und der zugehörige Werth der mehrfachen Wurzel y' durch die Gleichung

$$y' - (m-1) P = 0$$

gegeben wird, so muss unter der Voraussetzung, dass Δ keine quadratischen Factoren enthält, infolge der Bedingung II) für jede Wurzel η_i von $\Delta = 0$ identisch

$$\frac{\partial \Delta(\eta_i)}{\partial z} + \frac{\partial \Delta(\eta_i)}{\partial \eta_i} \cdot (m-1) P(\eta_i) = 0$$

sein, d. h. es muss sein:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial z} + \frac{\partial \Delta}{\partial y} \cdot (m-1) P = (A + By) \cdot \Delta,$$

wo A und B nur von z abhängen.

---

* cfr. Anmerkung pag. 200.

Stellen wir die Forderung, dass die Discriminantengleichung

$$D = 0$$

überhaupt keine mehrfachen Wurzeln besitzt, dass also auch kein Doppelpunkt der durch

$$F = 0$$

definirten algebraischen Curve im Endlichen liegt, so darf auch Q nur einfache Factoren besitzen; das ist nach Bedingung III) aber nur möglich, wenn $m \leqq 3$ ist, und mit dem Fall $m = 3$ wollen wir uns im Folgenden beschäftigen. Wir betrachten also die Differentialgleichung:

$$\text{C)} \qquad y'^3 + 3\,Py'^2 + 4\,Q = 0,\text{*}$$

in welcher P höchstens vom zweiten, Q höchstens vom sechsten Grade in y ist; ihre Coefficienten sollen nunmehr als rationale Functionen von z vorausgesetzt werden. Da Q nur einfache Factoren enthalten soll, so ist nach Bedingung II) jede Wurzel η von $Q = 0$ ein Integral der Differentialgleichung C) und der Werth ζ der zugehörigen Doppelwurzel y' gleich $\frac{d\eta}{dz}$; derselbe ist aber andererseits $= 0$, folglich η von z unabhängig. Q enthält daher nur von z unabhängige Factoren**; wir haben also:

$$P = a + by + dy^2,$$
$$Q = \lambda (c_0 + c_1 y + c_2 y^2 + \cdots + c_6 y^6) = \lambda \cdot \overline{Q},$$

wo a, b, d, λ rationale Functionen von z und die c_i von z unabhängig sind. Die Voraussetzung, dass der Discriminantenfactor

$$\Delta = P^3 + Q$$

nur einfache Factoren enthält — die spätere Entwicklung muss allerdings diese Voraussetzung erst rechtfertigen — involvirt, dass P und Q keinen gemeinsamen Factor besitzen dürfen, denn derselbe müsste mindestens Doppelfactor von Q sein†, es würde also aus Δ mindestens ein quadratischer Factor heraustreten. Da die Wurzeln von $Q = 0$ sämmtlich von z unabhängig, also Integrale von C) sind und hier, da P und Q keinen gemeinsamen Factor haben, nur einfache Verzweigungen vorkommen, so ist nunmehr dafür, dass die Integrale der Differentialgleichung C) feste Verzweigungspunkte besitzen, allein das Bestehen der Gleichung

$$\text{1)} \qquad \frac{\partial \Delta}{\partial z} - \frac{\partial \Delta}{\partial y} \cdot 2P = (A + By) \cdot \Delta$$

nothwendig und hinreichend, oder der Gleichung:

---

* Die Pluszeichen sind hier bequemer.

** Jeder von z abhängige Factor muss in Q quadratisch vorkommen, wenn die Differentialgleichung C) den Fuchs'schen Bedingungen genügt.

† cfr. Bedingung III).

$$2)\qquad 3P^2\frac{\partial P}{\partial z}+\lambda' Q-6P^3\frac{\partial P}{\partial y}-2\lambda\frac{d\overline{Q}}{dy}P=(A+By)(P^3+\lambda\overline{Q}).$$

Aus 2) folgt zunächst, dass:

$$\overline{Q}\cdot[A\lambda-\lambda'+\lambda By]$$

durch P theilbar sein muss, und da $\overline{Q}$ nach Voraussetzung mit P keinen gemeinsamen Theiler hat, so muss

$$A\lambda-\lambda'+\lambda By$$

durch P theilbar sein, d. h. es muss identisch

$$A\lambda-\lambda'+\lambda By=0$$

sein, also:

$$A\lambda-\lambda'=0\quad\text{und}\quad B=0,\quad\text{da}\quad\lambda\neq 0.$$

Aus 1) folgt aber, dass, wenn $B=0$ ist, P nur vom ersten Grade in y sein darf; ist umgekehrt von vornherein P vom ersten Grade in y, so muss in 1) $B=0$ gesetzt werden, und es folgt dann wie vorher

$$A\lambda-\lambda'=0.$$

Weiter folgt aus 2) unter Berücksichtigung, dass

$$A\lambda-\lambda'=0,\quad B=0,\quad d=0$$

ist, durch Vergleichung der Coefficienten gleich hoher Potenzen von y:

$$3)\qquad -12\lambda c_6 b=0,$$

$$4)\qquad -12\lambda c_6 a-10\lambda c_5 b=0,$$

$$5)\qquad -10\lambda c_5 a-8\lambda c_4 b=0,$$

also, da λ und b von 0 verschieden:

$$c_6=0,\quad c_5=0,\quad c_4=0.$$

Ferner:

$$6)\qquad b^3\cdot\frac{\lambda'}{\lambda}=3b'b^2-6b^4-6\lambda c_3 b,$$

$$7)\qquad 3ab^2\cdot\frac{\lambda'}{\lambda}=6abb'+3a'b^2-18ab^3-4\lambda c_2 b-6\lambda c_3 a,$$

$$8)\qquad 3a^2b\cdot\frac{\lambda'}{\lambda}=6a'ab+3a^2b'-18a^2b^2-2\lambda c_1 b-4\lambda c_2 a,$$

$$9)\qquad a^3\cdot\frac{\lambda'}{\lambda}=3a'a^2-6ba^3-2\lambda c_1 a,$$

oder, da a und b von 0 verschieden:

$$6)\qquad \frac{\lambda'}{\lambda}=3\frac{b'}{b}-6b-\frac{6\lambda c_3}{b^2},$$

$$9)\qquad \frac{\lambda'}{\lambda}=3\frac{a'}{a}-6b-\frac{2\lambda c_1}{a^2},$$

$$7)\qquad \frac{\lambda'}{\lambda}=2\frac{b'}{b}+\frac{a'}{a}-6b-\frac{4}{3}\frac{\lambda c_2}{ab}-\frac{2\lambda c_3}{b^2},$$

8) $$\frac{\lambda'}{\lambda} = 2\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} - 6b - \frac{2}{3}\frac{\lambda c_1}{a^2} - \frac{4}{3}\frac{\lambda c_2}{ab}.$$

Diese vier Gleichungen sind nicht unabhängig von einander; subtrahirt man Gleichung 9) von 6), so erhält man eine Gleichung, welche mit derjenigen identisch ist, die durch Subtraction der achten von der siebenten Gleichung entsteht. Wir haben also nur drei Gleichungen, z. B. 6), 9) und 7). Multiplicirt man Gleichung 6) mit 2, addirt dazu Gleichung 9) und subtrahirt dann die mit 3 multiplicirte Gleichung 7), so erhält man:
$$3c_3 a^2 - 2c_2 ab + c_1 b^2 = 0$$
oder:
$$3c_3\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 2c_2\frac{a}{b} + c_1 = 0.$$

Da c_1, c_2, c_3 Constanten sind, so ist auch das Verhältniss $\frac{a}{b}$ von z unabhängig; es ist:

10) $$\frac{a}{b} = \frac{c_2}{3c_3} \pm \frac{1}{3c_3}\cdot\sqrt{c_2^{\,2} - 3c_1c_3} = \alpha,$$

also $a = \alpha \cdot b$ und $P = b(y + \alpha)$, wo α von z nicht abhängt. Unsere Bedingungsgleichungen werden:

6) $$\frac{\lambda'}{\lambda} = 3\frac{b'}{b} - 6b - \frac{6\lambda c_3}{b^2};$$

9) $$\frac{\lambda'}{\lambda} = 3\frac{b'}{b} - 6b - \frac{2\lambda c_1}{\alpha^2 b^2};$$

7) $$\frac{\lambda'}{\lambda} = 3\frac{b'}{b} - 6b - \frac{4}{3}\frac{\lambda c_2}{\alpha b^2} - 2\frac{\lambda c_3}{b^2}.$$

Durch Subtraction der Gleichung 7) von Gleichung 6) kommt:
$$\alpha = \frac{c_2}{3c_3},$$
folglich aus 10):
$$c_2^{\,2} - 3c_1c_3 = 0$$
oder:
$$\frac{c_2}{3c_3} = \frac{c_1}{c_2} = \alpha.$$
Es ist daher:
$$c_2 = 3c_3\cdot\alpha, \quad c_1 = c_2\cdot\alpha = 3c_3\cdot\alpha^2$$
und die drei Gleichungen 6), 9) und 7) schrumpfen in die eine zusammen:

6) $$\frac{\lambda'}{\lambda} = 3\frac{b'}{b} - 6b - 6\frac{\lambda\cdot c_3}{b^2}.$$

Die Differentialgleichung C) erhält somit die Gestalt:
$$y'^3 + 3b(y+\alpha)\cdot y'^2 + 4\lambda\left(c_0 + c_3\left[3\alpha^2 y + 3\alpha y^2 + y^3\right]\right) = 0.$$

Setzen wir $c_0 = c_3\cdot\alpha^3 + \varepsilon$, wo ε eine neue Constante, so lautet die Differentialgleichung:

D) $$y'^3 + 3b(y+\alpha)\cdot y'^2 + 4\lambda\left[\varepsilon + c_3(y+\alpha)^3\right] = 0.$$

Hier darf ε nicht gleich 0 sein, in welchem Falle die Differentialgleichung D) homogen in y' und $y + \alpha$, also reductibel würde. Wenn wir daher ε in λ hineinziehen und

$$\frac{c_3}{\varepsilon} = k, \quad b = \mu, \quad y + \alpha = u$$

setzen, so erhalten wir die Differentialgleichung in der Gestalt:

$$\text{E)} \qquad u'^3 + 3\mu u u'^2 + 4\lambda(1 + k u^3) = 0.$$

k, λ und μ sind durch die Gleichung verbunden:

$$\text{11)} \qquad \frac{\lambda'}{\lambda} = 3\frac{\mu'}{\mu} - 6\mu - 6\frac{k \cdot \lambda}{\mu^2}\,*$$

oder:

$$-\frac{\lambda'}{\lambda^2} + \left(3\frac{\mu'}{\mu} - 6\mu\right) \cdot \frac{1}{\lambda} - \frac{6k}{\mu^2} = 0.$$

Wird $\frac{1}{\lambda} = w$ gesetzt, so lautet sie:

$$w' + \left(3\frac{\mu'}{\mu} - 6\mu\right) \cdot w - \frac{6k}{\mu^2} = 0.$$

Dies ist für w eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung; ihr allgemeines Integral ist

$$w = c \cdot e^{\int\left(6\mu - 3\frac{\mu'}{\mu}\right)dz} + e^{\int\left(6\mu - 3\frac{\mu'}{\mu}\right)dz} \cdot 6k \cdot \int \frac{1}{\mu^2}\, e^{\int\left(3\frac{\mu'}{\mu} - 6\mu\right)dz}\, dz.$$

Da auch der Fall $k = 0$ zu berücksichtigen ist, so darf nicht von vornherein die willkürliche Constante c gleich 0 gesetzt werden. In

$$w = c \cdot \mu^{-3} \cdot e^{\int 6\mu\, dz} + 6k\, \mu^{-3} \cdot e^{\int 6\mu\, dz} \cdot \int \mu\, e^{-\int 6\mu\, dz}\, dz$$

---

* Kürzere Herleitung. Da $A\lambda - \lambda' = 0$ und $B = 0$ ist, so folgt aus 2) nach Division durch P:

$$\text{2*)} \qquad 3P\frac{\partial P}{\partial z} - 6P^2\frac{\partial P}{\partial y} - 2\lambda\frac{d\overline{Q}}{dy} - \frac{\lambda'}{\lambda}P^2 = 0.$$

Daher ist $\frac{d\overline{Q}}{dy}$ durch P theilbar:

$$\frac{d\overline{Q}}{dy} = L.P,$$

folglich $P = \mu.\mathfrak{P}$, wo μ nur von z und $\mathfrak{P}$ nur von y abhängt. Dann folgt aber aus 2*):

$$\frac{d\overline{Q}}{dy} = 3k.\mathfrak{P}^2 \quad (\text{also } \overline{Q} = k.\mathfrak{P}^3 + c),$$

wo k eine Constante ist. Dividirt man Gl. 2*) durch $\mathfrak{P}^2$, so erhält man zwischen λ, μ und k die oben gefundene Relation:

$$3\mu\mu' - 6\mu^3 - 6\lambda k - \frac{\lambda'}{\lambda} \cdot \mu^2 = 0.$$

sollen μ und w rationale Functionen von z sein; deshalb muss, wenn man c willkürlich lässt, μ auf die Form $-\frac{1}{6}\frac{\nu'}{\nu}$ gebracht werden können, wo ν eine rationale Function von z ist. Dann wird:

$$w = c\,\mu^{-3}\cdot\nu^{-1} + 6k\,\mu^{-3}\cdot\nu^{-1}\cdot\int\mu\,\nu\,dz$$

und

$$\lambda = \mu^3\nu\cdot\frac{1}{c+6k\cdot\int\mu\,\nu\,dz} = -\frac{1}{6^3}\cdot\frac{\nu'^3}{\nu^2}\cdot\frac{1}{c-k\nu}.$$

Hierin sind c und k beliebige Constanten, die nur nicht gleichzeitig gleich 0 sein dürfen. Setze ich:

$$c = \frac{4}{6^3}\cdot\gamma \quad\text{und}\quad k = -\frac{4}{6^3}\cdot\delta,$$

so wird:

$$\mu = -\frac{1}{6}\cdot\frac{\nu'}{\nu},$$

$$\lambda = -\frac{1}{4}\cdot\frac{\nu'^3}{\nu}\cdot\frac{1}{\gamma+\delta\nu},$$

und unsere Differentialgleichung lautet in ihrer einfachsten Gestalt:

$$\text{F)}\qquad u'^3 - \frac{1}{2}\,\frac{\nu'}{\nu}\,u\,u'^2 - \frac{\nu'^3}{\nu^2}\cdot\frac{1}{\gamma+\delta\nu}\cdot\left[1-\frac{\delta}{54}u^3\right] = 0,$$

wo nunmehr ν eine beliebige rationale Function von z bedeutet und γ und δ beliebige Constanten sind, die nur nicht gleichzeitig verschwinden dürfen. Diese Differentialgleichung hat, wenn δ von 0 verschieden, das Geschlecht 1, wenn $\delta = 0$ ist, das Geschlecht 0. — Wir führen die Integration zunächst für den Fall $\delta = 0$ aus. Wenn $\delta = 0$ ist, so muss γ von 0 verschieden sein, ich kann daher $\frac{\nu}{\gamma}$ statt ν als Parameterfunction wählen; die Differentialgleichung lautet dann:

$$u'^3 - \frac{1}{2}\,\frac{\nu'}{\nu}\,u\,u'^2 - \frac{\nu'^3}{\nu^2} = 0.$$

Zur Integration betrachte ich die durch $u = \frac{1}{y}$ transformirte Differentialgleichung:

$$\text{G)}\qquad y'^3 + \frac{1}{2}\,\frac{\nu'}{\nu}\,y\,y'^2 + \frac{\nu'^3}{\nu^2}\,y^6 = 0$$

und setze:

$$y' = y^2\cdot t,$$

dann drücken sich y und y' in folgender Weise rational durch t aus:

$$y = -\frac{\frac{1}{2}\,\frac{\nu'}{\nu}\,t^2}{t^3+\frac{\nu'^3}{\nu^2}},\quad y' = \frac{\frac{1}{4}\,\frac{\nu'^2}{\nu^2}\,t^5}{\left(t^3+\frac{\nu'^3}{\nu^2}\right)^2}.$$

Es ist also:*

$$\varphi_0 = \left(t^3 + \frac{\nu'^3}{\nu^2}\right)^2, \quad \varphi_1 = -\frac{1}{2}\frac{\nu'}{\nu} t^2 \left(t^3 + \frac{\nu'^3}{\nu^2}\right), \quad \varphi_2 = \frac{1}{4}\frac{\nu'^2}{\nu^2} t^5$$

und, wenn $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \bar{\varphi}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varphi'$ gesetzt wird:

$$\frac{dt}{dz} = \frac{\varphi_0 \bar{\varphi}_2 - \bar{\varphi}_1 \varphi_0 + \varphi_1 \bar{\varphi}_0}{\varphi'_1 \varphi_0 - \varphi_1 \varphi'_0} = A_0 + A_1 \cdot t + A_2 \cdot t^2.$$

Die Rechnung ergiebt:

$$\frac{dt}{dz} = \frac{\frac{2\nu\nu'' - \nu'^2}{2\nu^2}}{\frac{\nu'}{\nu}} \cdot t = \left[\frac{\frac{d}{dz}\left(\frac{\nu'}{\nu}\right)}{\frac{\nu'}{\nu}} + \frac{1}{2}\frac{\nu'}{\nu}\right] \cdot t.$$

Daraus findet man:

$$t = \bar{C} \cdot \frac{\nu'}{\nu} \cdot \nu^{1/2} = C^{1/2} \cdot \frac{\nu'}{\nu^{1/2}}$$

und

$$y = \frac{-\frac{1}{2}\frac{\nu'}{\nu} t^2}{t^3 + \frac{\nu'^3}{\nu^2}} = \frac{-\frac{1}{2}\frac{\nu'^3}{\nu^2} C}{\frac{\nu'^3}{\nu^2}\left(C^{3/2}\nu^{1/2} + 1\right)} = \frac{-\frac{1}{2} C}{C^{3/2}\nu^{1/2} + 1},$$

also:

$$u = \frac{1}{y} = \frac{C^{3/2}\nu^{1/2} + 1}{-\frac{1}{2} C}.$$

Diese Form des Integrals zeigt, dass die Verzweigungsstellen von der Integrationsconstanten C, also von den Anfangswerthen unabhängig sind; es sind nämlich die Null- und Unendlichkeitsstellen der rationalen Function ν, was die Gestalt der Differentialgleichung G) *a priori* erkennen lässt. Das Integral H) der Differentialgleichung G) lautet in rationaler Form:

$$y^2 \nu(z) C^3 - \frac{C^2}{4} - Cy - y^2 = 0.$$

Beispiel:

$$\nu = \frac{4}{27} b (z-a)^3,$$

$$y'^3 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(z-a)} y y'^2 + 4 b y^6 = 0.$$

Das Integral dieser Differentialgleichung ist:

$$\frac{4}{27} b y^2 (z-a)^3 C^3 - \frac{C^2}{4} - Cy - y^2 = 0$$

oder, wenn man $\frac{4b}{3} C = \bar{C}$ setzt:

$$4(z-a)^3 y^2 \bar{C}^3 - 9\bar{C}^2 - 48 b y \bar{C} - 64 b^2 y^2 = 0.$$

---

* cfr. pag. 194.

Für den Fall $\delta \neq 0$, also $p = 1$, führen wir die Integration nach einer Methode durch, die später allgemein behandelt werden soll. Die Differentialgleichung F) lautet, da $\frac{du}{dz} = \frac{du}{d\nu} \cdot \nu'$ ist:

$$\text{J)} \quad f\left(\nu, u, \frac{du}{d\nu}\right) = \nu^2(\gamma + \delta\nu) \cdot \left(\frac{du}{d\nu}\right)^3 - \frac{1}{2}\nu(\gamma + \delta\nu)u \cdot \left(\frac{du}{dz}\right)^2 - 1 + \frac{\delta}{54} \cdot u^3 = 0.$$

Man findet nun durch Rechnung:

$$\frac{\partial f}{\partial \nu} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial f}{\partial\left(\frac{du}{d\nu}\right)} \cdot \left[\frac{3\gamma + 5\delta\nu}{6\nu(\gamma + \delta\nu)} \cdot \frac{du}{d\nu} - \frac{\delta}{18\nu(\gamma + \delta\nu)} \cdot u\right].$$

Es ist daher, da sich durch Differentiation von $f\left(\nu, u, \frac{du}{d\nu}\right) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial \nu} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{du}{d\nu} + \frac{\partial f}{\partial\left(\frac{du}{d\nu}\right)} \cdot \frac{d^2u}{d\nu^2} = 0$$

ergiebt:

$$\text{K)} \qquad \nu(\gamma + \delta\nu) \cdot \frac{d^2u}{d\nu^2} + \left(\frac{1}{2}\gamma + \frac{5}{6}\delta\nu\right) \cdot \frac{du}{d\nu} - \frac{\delta}{18} \cdot u = 0.$$

Sieht man zunächst von singulären Lösungen ab, für welche gleichzeitig $f = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{du}{d\nu}\right)} = 0$ ist, so ist das allgemeine Integral der Differentialgleichung erster Ordnung J) in dem allgemeinen Integral der Differentialgleichung zweiter Ordnung K) enthalten und kann aus diesem nur dadurch hervorgehen, dass zwischen dessen beiden willkürlichen Constanten eine bestimmte Relation mit constanten Coefficienten besteht. — Ist zunächst $\gamma = 0$, so lautet die Differentialgleichung K) nach Fortheben des gemeinsamen Factors δ:

$$\text{K*)} \qquad \frac{d^2u}{d\nu^2} + \frac{5}{6}\,\frac{1}{\nu} \cdot \frac{du}{d\nu} - \frac{1}{18}\,\frac{1}{\nu^2} \cdot u = 0.$$

Dieselbe geht bekanntlich durch die Substitution $x = log\,\nu$ in

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{1}{6} \cdot \frac{du}{dx} - \frac{1}{18} \cdot u = 0$$

über; die charakteristische Gleichung:

$$r^2 - \frac{1}{6}r - \frac{1}{18} = 0$$

hat die Wurzeln $r_1 = \frac{1}{3}$ und $r_2 = -\frac{1}{6}$, so dass das allgemeine Integral der Differentialgleichung K*)

$$u = c_1 \cdot \nu^{1/3} + c_2 \cdot \nu^{-1/6}$$

ist. Differenzirt man dasselbe:

$$\frac{du}{d\nu} = \frac{1}{3} c_1 \cdot \nu^{-2/3} - \frac{1}{6} c_2 \cdot \nu^{-7/6}$$

und setzt die Werthe für u und $\frac{du}{d\nu}$ in

$$\text{J*)} \qquad \nu^3 \left(\frac{du}{d\nu}\right)^3 - \frac{1}{2} \nu^2 u \left(\frac{du}{d\nu}\right)^2 - \frac{1}{\delta} + \frac{1}{54} u^3 = 0$$

ein, so erhält man nach einigen Rechnungen zwischen c_1 und c_2 die einfache Relation:

$$\frac{1}{8} c_1 c_2^2 - \frac{1}{\delta} = 0,$$

so dass in diesem Falle, wenn man noch $\frac{c_2}{2} = c$ setzt, das allgemeine Integral von F) resp. J*)

$$u = \frac{2}{\delta c^2} \nu^{1/3} + 2 c \nu^{-1/6}$$

lautet. Dasselbe ist eine algebraische Function der Parameterfunction ν.

Wenn $\gamma \neq 0$ ist, so kann man die Differentialgleichung K) schreiben:

$$\nu \left(\nu + \frac{\gamma}{\delta}\right) \cdot \frac{d^2 u}{d\nu^2} + \left(\frac{1}{2} \frac{\gamma}{\delta} + \frac{5}{6} \nu\right) \cdot \frac{du}{d\nu} - \frac{1}{18} \cdot u = 0.$$

Dieselbe geht durch die Substitution

$$\nu = -\frac{\gamma}{\delta} \cdot x$$

in die Differentialgleichung der Gauss'schen Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$:

$$\text{L)} \qquad x(x-1) \cdot \frac{d^2 u}{dx^2} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{5}{6} x\right) \cdot \frac{du}{dx} - \frac{1}{18} \cdot u = 0$$

über, und zwar ist hier:

$$\gamma = \frac{1}{2}, \quad \alpha + \beta + 1 = \frac{5}{6}, \quad \alpha \cdot \beta = -\frac{1}{18},$$

also entweder $\alpha = \frac{1}{6}$, $\beta = -\frac{1}{3}$, oder $\alpha = -\frac{1}{3}$, $\beta = \frac{1}{6}$; da

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = F(\beta, \alpha, \gamma, x)$$

ist, so genügt eine Wahl. — Wählt man

$$\alpha = \frac{1}{6}, \quad \beta = -\frac{1}{3}, \quad \gamma = \frac{1}{2},$$

so sind*

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = F\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, x\right)$$

und

* cfr. Gauss III und Kummer in Crelle's Journal, Bd. XV pag. 52.

$$x^{1-\gamma} \cdot F(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma,\ x) = x^{1/3} \cdot F\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}, x\right)$$

Particularintegrale der Gauss'schen Differentialgleichung. Nun ist:*

$$F\left(\alpha, \alpha-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x\right) = \frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{x})^{\nu} + (1-\sqrt{x})^{\nu}\right]$$

und

$$x^{1/2} \cdot F\left(\alpha, \alpha+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, x\right) = \frac{1}{2\nu}\left[(1+\sqrt{x})^{\nu} - (1-\sqrt{x})^{\nu}\right],$$

wo $\nu = \gamma - \alpha - \beta = 1 - 2\alpha$ ist; also in unserem Falle $\left(\alpha = \frac{1}{6}, \nu = \frac{2}{3}\right)$:

$$F\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, x\right) = \frac{1}{2} \cdot \left[(1+\sqrt{x})^{2/3} + (1-\sqrt{x})^{2/3}\right]$$

und

$$x^{1/2} \cdot F\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{3}{2}, x\right) = \frac{3}{4} \cdot \left[(1+\sqrt{x})^{2/3} - (1-\sqrt{x})^{2/3}\right].$$

Daher sind

$$(1+\sqrt{x})^{2/3} \text{ und } (1-\sqrt{x})^{2/3}$$

Particularintegrale der Differentialgleichung L), deren allgemeines Integral infolge dessen:

$$u = c_1 \cdot (1+\sqrt{x})^{2/3} + c_2 \cdot (1-\sqrt{x})^{2/3}$$

ist. Differenzirt man dasselbe:

$$\frac{du}{dx} = \frac{c_1}{3} \cdot (1+\sqrt{x})^{-1/3} \cdot x^{-1/2} - \frac{c_2}{3} \cdot (1-\sqrt{x})^{-1/3} \cdot x^{-1/2}$$

und setzt diese Werthe für u und $\frac{du}{dx}$ in die Differentialgleichung

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^3 - \frac{1}{2x} u \left(\frac{du}{dx}\right)^2 - \frac{1}{x^2(x-1)} \cdot \left(\frac{1}{\delta} - \frac{u^3}{54}\right) = 0,$$

welche aus J) durch die oben angewandte Substitution $\nu = -\frac{\gamma}{\delta} \cdot x$ hervorgeht, ein, so erhält man nach einigen Rechnungen zwischen c_1 und c_2 die Relation:

$$\frac{2}{27} c_1^3 + \frac{2}{27} c_2^3 - \frac{1}{\delta} = 0.$$

Damit ist aber die vollständige Integration der Differentialgleichung F) geleistet; ihr Integral ist eine algebraische Function der Parameterfunction ν.

Damit die Coefficienten der Differentialgleichung E) rationale Functionen von z seien, genügt es, wenn ein particuläres Integral w der

* cfr. 1. Gauss, Bd. III pag. 127 Formel II und IV; 2. Schwarz, Crelle Bd. 75: Ueber diejenigen Fälle, in denen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt, pag. 324.

durch $\lambda = \frac{1}{w}$ transformirten Differentialgleichung 11) eine rationale Function von z ist.* Dann muss, da μ eine rationale Function sein soll, jedenfalls für ein bestimmtes c:

$$\frac{c}{6k} \cdot e^{\int 6\mu\, dz} + e^{\int 6\mu\, dz} \cdot \int \mu\, e^{-\int 6\mu\, dz}\, dz = R(z)$$

sein, wo $R(z)$ eine rationale Function von z bedeutet. Durch Differentiation erhält man:

$$6\mu \cdot e^{\int 6\mu\, dz}\left(\frac{c}{6k} + \int \mu \cdot e^{-\int 6\mu\, dz} \cdot dz\right) + \mu = R'(z)$$

oder:

$$6\mu \cdot R(z) + \mu = R'(z),$$

also:

$$\mu = \frac{R'(z)}{1 + 6R(z)}$$

und daher:

$$w = \frac{1}{\lambda} = 6k\,\mu^{-3} R(z) = \frac{6k\,(1 + 6R(z))^3 R(z)}{R'^3(z)},$$

d. h.:

$$\lambda = \frac{R'^3(z)}{6k\,R(z)\,(1 + 6\,R(z))^3}.$$

In diesem Falle lautet also die Differentialgleichung E), wenn man noch $R(z) = \nu$ setzt:

$$\text{M)} \qquad u'^3 + 3\frac{\nu'}{1 + 6\nu}\, u\, u'^2 + 4\frac{\nu'^3}{6k\nu(1 + 6\nu)^3}(1 + ku)^3 = 0$$

oder, da wieder $\frac{du}{dz} = \frac{du}{d\nu} \cdot \nu'$ ist:

$$\text{M*)} \qquad \left(\frac{du}{d\nu}\right)^3 + \frac{3}{1 + 6\nu}\, u \cdot \left(\frac{du}{d\nu}\right)^2 + \frac{2}{3}\,\frac{1}{k\nu\,(1 + 6\nu)^3}(1 + ku^3) = 0.$$

Setzt man wieder:

$$F\left(\nu, u, \frac{du}{d\nu}\right) = 3k\nu(1 + 6\nu)^3 \cdot \left(\frac{du}{d\nu}\right)^3 + 9k\nu\,(1 + 6\nu)^2 u \left(\frac{du}{d\nu}\right)^2 + 2(1 + ku^3),$$

so erhält man:

$$\frac{\partial F}{\partial \nu} + \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{du}{d\nu} = -\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{du}{d\nu}\right)} \cdot \left[\left(\frac{1}{3\nu} + \frac{7}{1 + 6\nu}\right) \cdot \frac{du}{d\nu} + \frac{1}{3\nu(1 + 6\nu)^2} \cdot u\right].$$

Die Differentialgleichung zweiter Ordnung für u lautet daher in diesem Falle:

---

* cfr. pag. 210.

$$\text{N)}\qquad \frac{d^2u}{d\nu^2}+\left(\frac{1}{3\nu}+\frac{7}{1+6\nu}\right)\cdot\frac{du}{d\nu}+\frac{1}{3\nu(1+6\nu)^2}\cdot u=0$$

oder, wenn $6\nu=-x$ gesetzt wird:

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\left(\frac{2}{x}+\frac{7}{x-1}\right)\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{du}{dx}-\frac{1}{18x(x-1)^2}\cdot u=0.$$

Die determinirende Fundamentalgleichung* in der Umgebung des singulären Punktes $x=1$:

$$s(s-1)+\frac{7}{6}s-\frac{1}{18}=0,$$

hat die Wurzeln $s_1=\frac{1}{6}$ und $s_2=-\frac{1}{3}$. Die Differentialgleichung für u wird daher durch die Substitution:**

$$u=(x-1)^{-1/3}\cdot v$$

in die folgende übergeführt:

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\left(\frac{1}{3x}+\frac{1}{2(x-1)}\right)\cdot\frac{dv}{dx}-\frac{1}{18x(x-1)}\cdot v=0$$

oder:

$$\text{N*)}\qquad x(x-1)\cdot\frac{d^2v}{dx^2}+\left(\frac{5}{6}x-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{dv}{dx}-\frac{1}{18}\cdot v=0.$$

Dies ist wieder die Differentialgleichung der Gauss'schen Reihe, und zwar ist hier:

$$\gamma=\frac{1}{3},\quad \alpha+\beta+1=\frac{5}{6},\quad \alpha\cdot\beta=-\frac{1}{18},$$

also etwa:

$$\alpha=\frac{1}{6},\quad \beta=-\frac{1}{3},\quad \gamma=\frac{1}{3}.$$

Ausser $F(\alpha,\beta,\gamma,x)=F\left(\frac{1}{6},-\frac{1}{3},\frac{1}{3},x\right)$ sind auch ***

$$F(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1,1-x)=F\left(\frac{1}{6},-\frac{1}{3},\frac{1}{2},1-x\right)$$

und:

$$(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\cdot F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma-\alpha-\beta+1,1-x)$$
$$=(1-x)^{1/2}\cdot F\left(\frac{1}{6},\frac{2}{3},\frac{3}{2},1-x\right)$$

Particularintegrale der Differentialgleichung N*). Es ist aber† $\left(\alpha=\frac{1}{6},\ \nu=\frac{2}{3}\right)$:

---

* Fuchs, Crelle's Journal, Bd. 66.

** cfr. u. A. Heffter, Inauguraldissertation, Berlin 1886, pag. 5 flg.

*** Kummer, Crelle's Journal, Bd. XV pag. 52 Formel 5) und 7).

† cfr. pag. 215.

$$F\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1-x\right) = \frac{1}{2}\cdot[(1+\sqrt{1-x})^{2/3} + (1-\sqrt{1-x})^{2/3}]$$

und:

$$(1-x)^{1/2}\cdot F\left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 1-x\right) = \frac{3}{4}\cdot[(1+\sqrt{1-x})^{2/3} + (1-\sqrt{1-x})^{2/3}].$$

Es sind also:

$$(1+\sqrt{1-x})^{2/3} \text{ und } (1-\sqrt{1-x})^{2/3}$$

Particularintegrale der Differentialgleichung N*) [welche in die Differentialgleichung L) übergeht, wenn x an Stelle von $1-x$ gesetzt wird], so dass ihr allgemeines Integral

$$v = \bar{c}_1\cdot(1+\sqrt{1-x})^{2/3} + \bar{c}_2\cdot(1-\sqrt{1-x})^{2/3}$$

und daher das allgemeine Integral der Differentialgleichung N)

$$u = c_1\cdot(1+6\nu)^{-1/3}\cdot(1+\sqrt{1+6\nu})^{2/3} + c_2\cdot(1+6\nu)^{-1/3}\cdot(1-\sqrt{1+6\nu})^{2/3}$$

ist. Die Relation zwischen c_1 und c_2, deren Kenntniss man zur vollständigen Integration der Differentialgleichung M) bedarf, ist in der angegebenen Weise wieder leicht herzustellen.

Es sei noch bemerkt, dass man die Gleichung 11) auch ohne Integration behandeln kann. Schreibt man dieselbe:

$$6\mu\left(1+\frac{k\lambda}{\mu^3}\right) = 3\frac{\mu'}{\mu} - \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{d}{dz}\log\frac{\mu^3}{\lambda}$$

und setzt

$$\frac{\mu^3}{\lambda} = w,$$

so erhält man:

$$6\mu\left(1+\frac{k\lambda}{\mu^3}\right) = \frac{w'}{w},$$

also:

$$\mu = \frac{w'}{6(w+k)}$$

und

$$\lambda = \frac{\mu^3}{w} = \frac{1}{6^3}\cdot\frac{w'^3}{w(w+k)^3}.$$

Diese Ausdrücke für λ und μ gehen, wie man leicht sieht, in die oben (pag. 216) gefundenen über, wenn $w = 6\cdot k\nu$, und in die Ausdrücke pag. 211, wenn $w+k = \frac{c}{\nu}$ gesetzt wird. Diese Darstellung hat den Vorzug, dass die Parameterfunction w jede willkürliche Function von z bedeuten kann.

(Fortsetzung folgt.)

XII.

Ueber die durch ein lineares Flächensystem n^{ter} Ordnung definirten mehrdeutigen involutorischen Raumverwandtschaften.

Von

Chas. Steinmetz

in New-York City.

Erstes Capitel.

Die räumliche, mehrdeutig-involutorische Verwandtschaft, definirt durch ein allgemeines Flächengebüsch n^{ter} Ordnung.

§ 1. Der Punkt.

1. Wir nehmen im Raume ein lineares dreistufiges Flächensystem, ein Flächengebüsch n^{ter} Ordnung, an, also die dreifach unendliche Mannichfaltigkeit aller Flächen, die sich aus vier willkürlichen Flächen n^{ter} Ordnung linear, d. i. durch fortgesetzte Büschelbildung componiren lassen. Ferner setzen wir zunächst das Flächengebüsch als ein allgemeines voraus, dessen Flächen also weder einzelne oder mehrfache Punkte, noch ganze Curven mit einander gemein haben.

Durch je drei Punkte ist eine Fläche α des Flächengebüsches eindeutig bestimmt.

Durch je zwei Punkte ist ein Flächenbüschel A bestimmt, dessen Flächen sich in einer Raumcurve $n^{2\,ter}$ Ordnung c schneiden.

Durch jeden Punkt ist ein Flächennetz bestimmt, dessen Flächen sich in n^3 Punkten schneiden.

Eine solche Gruppe von n^3 Punkten, den Grundpunkten eines Flächennetzes im Flächengebüsche, wollen wir eine Gruppe associirter oder conjugirter Punkte nennen.

2. Jedem Punkte $\mathfrak{x}$ des Raumes gehören weitere (n^3-1) Punkte $\mathfrak{y}$ zu, welche mit $\mathfrak{x}$ zusammen ein Gruppe conjugirter Punkte bilden. Jedem Punkte $\mathfrak{y}$ hinwiederum gehört ausser den anderen Punkten $\mathfrak{y}$ auch der Punkt $\mathfrak{x}$ zu.

Die Punkte $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ definiren also eine involutorische, (n^3-1)-deutige Raumverwandtschaft.

3. Diejenigen Punkte $\mathfrak{x}$, welche mit einem ihrer zugeordneten Punkte $\mathfrak{y}$ zusammenfallen, liegen auf einer Fläche $4(n-1)^{ter}$ Ordnung, der Kernfläche H der Verwandtschaft (vergl. § 8, 24).

§ 2. Die Gerade.

4. Um die Ordnung der involutorischen Raumverwandtschaft zu bestimmen, suchen wir die Raumcurve C, die einer Geraden l entspricht.

1. Methode.

Wir bedienen uns einer Abbildung des Flächengebüsches n^{ter} Ordnung F auf das Ebenengebüsch E, das von sämmtlichen Ebenen des Raumes gebildet wird, indem wir jeder Fläche φ von F ihre Polarebene ε in Bezug auf irgend einen festen Punkte $\mathfrak{p}$* zuordnen.

Es gehören dann zu:

allen Flächen φ, Flächenbüscheln und Flächennetzen in F die Ebenen ε, Ebenenbüschel und Ebenenbündel in E,

den Grundcurven $n^{2\text{ter}}$ Ordnung c der Flächen des F also die Axen g der Ebenenbüschel in E,

den Gruppen conjugirter Punkte in F der Mittelpunkt des dem Flächennetze entsprechenden Ebenenbündels in E.

Umgekehrt gehört jeder Ebene ε in E eine Fläche φ in F zu. Denn die ersten Polarflächen dreier Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ von ε bilden drei projectivische Flächengebüsche, von denen ein einziger Tripel entsprechender Flächen $\alpha\beta\gamma$ durch $\mathfrak{p}$ geht. Diese drei Flächen $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung α, β, γ sind Polarflächen einer Fläche n^{ter} Ordnung φ des Gebüsches F, die der Ebene ε von E zugehört.

Jeder Geraden g des Ebenengebüsches E entspricht eine Curve c_g der $n^{2\text{ten}}$ Ordnung in F.

Jedem Punkte $\mathfrak{x}$ des Ebenengebüsches E entspricht eine Gruppe von n^3 Punkten in F.

Die Verwandtschaft $E:F$ ist also eine $1:n^3$-deutige.

Einer Geraden g von F muss demnach, da dieselbe jede φ in n Punkten schneidet, eine Curve k_g angehören, welche die der Fläche φ zugeordnete Ebene ε in n Punkten schneidet, also von der n^{ten} Ordnung ist.**

Einer Ebene ε des Flächengebüsches F muss, da dieselbe jede Curve c_g in n^2 Punkten schneidet, eine Fläche ψ_ε zugehören, welche die der c_g

---

* von dem wir aber voraussetzen, dass er weder auf der Kernfläche H liegt, noch (§ 15) ein Grundpunkt ist, da in diesem Falle das Ebenengebüsch degenerirte.

** Diese Curve k_g ist vom Geschlechte O, von der Classe $3(n-2)$. Sie besitzt $4(n-3)$ Wendeschmiegungsebenen, keine Rückkehrpunkte und stationären Tangenten; sie ist die Rückkehrkante einer Developpablen von der Ordnung $2(n-1)$, deren Knotencurve von der Ordnung $2(n-1)(n-3)$ ist. Ihre biosculirende Developpable ist von der $2(n-2)(n-3)^{\text{ten}}$ Classe. Durch jeden Punkt gehen $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Secanten der Raumcurve k_g.

entsprechende Gerade g in E in n^2 Punkten schneidet, also von der $n^{2\text{ten}}$ Ordnung ist.

Einer Geraden l von F entspricht in E eine Curve k_l n^{ter} Ordnung. Diese k_l entspricht in F, da sie die einer beliebigen Ebene E von F in E entsprechende ψ_E in n^3 Punkten schneidet, eine Curve in F, welche jede beliebige Ebene ε in n^3 Punkten schneidet, also von der $n^{3\text{ten}}$ Ordnung ist. Von dieser Curve spaltet sich die Gerade l ab, und bleibt somit:

eine Curve C_l der $(n^3-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche einer beliebigen Geraden l entspricht.

2. Methode.

5. Jedem Punkte $\mathfrak{x}$ einer Geraden l entsprechen (n^3-1) Punkte $\mathfrak{y}$, welche mit $\mathfrak{x}$ zusammen die Grundpunkte eines Flächennetzes sind und bestimmt werden durch drei beliebige Flächen α, β, γ des Netzes. Als solche drei Bestimmungsflächen können wir nun die drei Flächen α, β, γ benutzen, die das durch $\mathfrak{x}$ gehende Flächennetz mit drei beliebigen Flächenbüscheln A, B, Γ gemein hat, von denen wir voraussetzen, dass sie eine Fläche φ gemeinsam besitzen (damit sie das Flächengebüsch F gerade bestimmen).

Die Gerade l wird dann erzeugt von den drei Flächenbüscheln A, B, Γ. Deren weitere Schnittpunkte beschreiben die der Geraden l entsprechende Curve C_l.

Die Zuordnung der drei Flächenbüschel ist eine $1:n:n$-deutige, indem jeder Fläche α des einen Flächenbüschels A, da sie l in n Punkten schneidet, n Flächen β_i des Flächenbüschels B, und n Flächen γ_i des Flächenbüschels Γ entsprechen, welche einander paarweise zugeordnet sind und n Schnittcurven $|\beta_i\gamma_i|$ $n^{2\text{ter}}$ Ordnung erzeugen. Diese schneiden α in n^4 Punkten.

Von diesen n^4 Punkten auf α sind n Schnittpunkte mit l, die übrigen n^4-n Punkte aber die Schnittpunkte der der Geraden l entsprechenden Curve C_l. Diese ist also, da α von der n^{ten} Ordnung ist, von der $(n^3-1)^{\text{ten}}$ Ordnung.

3. Methode.

6. Die drei Büschel A, B, Γ, als deren Erzeugniss wir die Gerade l und ihre zugehörige Curve C_l ansehen können, schneiden eine beliebige Ebene ε in drei Curvenbüscheln n^{ter} Ordnung A, B, C, welche eine Curve f gemeinsam haben und einander durch die Gerade l zugeordnet sind.

Durch einen beliebigen Punkt $\mathfrak{x}$ einer in ε gelegenen Geraden g geht eine Curve a des Büschels A, der im Büschel B n Curven b entsprechen, welche g in n^2 Punkten $\mathfrak{y}$ schneiden. Umgekehrt gehören jedem Punkte $\mathfrak{y}$ n^2 Punkte $\mathfrak{x}$ zu. Es fallen daher (Chasles) $2n^2$-mal entsprechende Punkte $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ zusammen, Büschel A und B erzeugen demnach eine Curve $2n^{2\text{ter}}$ Ordnung.

Da nun aber die A und B gemeinsame Curve f sich in beiden Büscheln n-mal entspricht, spaltet sie sich n-fach ab, und verbleibt demnach als Erzeugniss der beiden Büschel A und B eine Curve χ_1 der $n^{2\text{ten}}$ Ordnung.

Ebenso erzeugen die Büschel B und C eine Curve χ_2 der $n^{2\text{ten}}$ Ordnung.

Diese beiden Curven χ_1 und χ_2 schneiden sich in n^4 Punkten.

Da aber jeder Curve a n Curven b, jeder Curve b aber nun nicht mehr n, sondern nur eine Curve C durch l zugeordnet ist, sind von den n^4 Schnittpunkten von χ_1 und χ_2 nur der n^{te} Theil Schnittpunkte dreier durch l einander zugeordneter Curven a, b, c, und da einer dieser Punkte der Schnittpunkt $(l\varepsilon)$ ist, bleiben (n^3-1) Schnittpunkte von ε mit C_l. D. h.: C_l ist von der $(n^3-1)^{\text{ten}}$ Ordnung.

7. Es ergiebt sich also die Ordnung unserer Verwandtschaft:

„Die Ordnung unserer mehrdeutig-involutorischen Verwandtschaft ist gleich ihrer Deutigkeit, nämlich gleich (n^3-1)."

8. Jede Gerade l schneidet die Kernfläche H in $4(n-1)$ Punkten, welche sich selbst zugeordnet sind, also auf der Curve C_l liegen:

„Jede Gerade l wird von ihrer zugeordneten Curve C_l in $4(n-1)$ Punkten geschnitten."

Ausser in diesen $4(n-1)$ Punkten schneidet die Curve C_l die Fläche H noch in $4(n-1)(n^3-2)$ Punkten. Also:

„Auf jeder Geraden l giebt es $4(n-1)(n^3-2)$ Punkte, die unter ihren zugeordneten Punkten ein Paar zusammenfallender Punkte besitzen."

„Der Ort aller Punkte, welche unter ihren zugeordneten Punkten einen Doppelpunkt besitzen, ist eine Fläche H' der $4(n-1)(n^3-2)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche wir die der Kernfläche H zugeordnete Fläche nennen wollen."

Denn die Flächen H' und H entsprechen zusammen der Fläche H in der Verwandtschaft.

9. Alle Verbindungsgeraden entsprechender Punkte $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ bilden eine dreifache Mannichfaltigkeit.

Jede solche Gerade l wird von ihrer entsprechenden Curve C_l in $4n-2$ Punkten geschnitten, nämlich in $4(n-1)$ auf der Kernfläche H gelegenen Punkten und in zwei einander entsprechenden Punkten.

§ 3. Die Ebene.

1. Methode.

10. In der in 4. angewandten Abbildung entspricht jeder Ebene ε in F eine Fläche φ in E, welche jede Gerade g in ebensoviel Punkten schneidet, als die der Geraden g in F entsprechende Curve $n^{2\text{ter}}$ Ordnung die ε schneidet. φ ist daher von der $n^{2\text{ten}}$ Ordnung.

Dieser Fläche $n^{2\text{ter}}$ Ordnung φ in E entspricht nun in F eine Fläche, welche von einer Geraden g in ebensoviel Punkten geschnitten wird, als φ von der der g entsprechenden c_g geschnitten wird, also in n^3 Punkten.

Da sich nun von dieser der φ entsprechenden Fläche die Ebene ε, welcher die φ entsprach, abspaltet, bleibt:

„Jeder Ebene ε entspricht eine Fläche Φ_ε der $(n^3-1)^{\text{ten}}$ Ordnung."

2. Methode.

11. Benutzen wir wieder drei beliebige Flächenbüschel A, B, Γ des Gebüsches, welche eine Fläche φ gemeinsam haben. (5.)

Eine Fläche α des Büschels A schneidet ε in einer Curve $|\varepsilon\alpha|$ der n^{ten} Ordnung, durch welche die Büschel B und Γ einander n^2-deutig zugeordnet sind. Denn eine Fläche β von B schneidet $|\varepsilon\alpha|$ in n^2 Punkten $[\varepsilon\alpha\beta]$, durch deren jeden eine Fläche γ von Γ bestimmt ist.

Die Büschel B und Γ erzeugen eine Fläche $n^{3\,\text{ter}}$ Ordnung $\psi_{\beta\gamma}$. Denn durch einen Punkt $\mathfrak{x}$ einer beliebigen Geraden g geht eine Fläche β, der n^2 Flächen γ angehören, welche g in n^3 Punkten $\mathfrak{y}$ schneiden. Umgekehrt gehören jedem Punkte $\mathfrak{y}$ n^2 Punkte $\mathfrak{x}$ zu. $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ coincidiren also für $2n^3$ Punkte. D. h.: das Erzeugniss von B und Γ ist von der $2n^{3\,\text{ten}}$ Ordnung.

Da aber die gemeinsame Fläche φ der drei Büschel sich n^2-fach abspaltet, bleibt als Erzeugniss von B und Γ eine Fläche $\psi_{\beta\gamma}$ der $n^{3\,\text{ten}}$ Ordnung.

Diese Fläche $\psi_{\beta\gamma}$ schneidet α ausser in der ebenen Curve n^{ter} Ordnung $|\varepsilon\alpha|$ noch in einer Raumcurve der $n(n^3-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche der Ort sämmtlicher auf α liegender und Punkten von ε entsprechender Punkte ist, also die Schnittcurve von α mit der ε entsprechenden Φ ist. Da nun α von der n^{ten} Ordnung ist, ergiebt sich:

Φ_ε ist von der $(n^3-1)^{\text{ten}}$ Ordnung.

Zu demselben Resultate führt Methode 3.

12. Jede Ebene ε wird von der Kernfläche H in einer Curve $4(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung H geschnitten, welche als Ort entsprechender Punkte zu Punkten von ε — nämlich sich selbst entsprechender Punkte — auf Φ_ε liegt.

Ausser in der Curve H schneidet Φ_ε die ε noch in einer Curve der $n^3-1-4(n-1)=(n-1)(n^2+n-3)^{\text{ten}}$ Ordnung ψ_ε, deren Punkte einander paarweise zugeordnet sind als entsprechende Punkte in der Verwandtschaft.

Die Verbindungslinien entsprechender Punkte der Curve ψ_ε umhüllen eine Curve der $2(n-1)(n^2+n-3)^{\text{ten}}$ Classe (vergl. § 10, 28).

Ausser in der Curve H schneidet Φ_ε die Kernfläche H noch in einer Curve $4(n-1)(n^3-2)^{\text{ter}}$ Ordnung h, deren Punkte zugeordnet sind der Schnittcurve der $4(n-1)(n^3-2)^{\text{ten}}$ Ordnung der Ebene ε mit der „der Kernfläche zugeordneten Fläche H'".

„Auf jeder Ebene giebt es eine Curve h' der $4(n-1)(n^3-2)^{\text{ten}}$ Ordnung, deren Punkte unter ihren zugeordneten einen Doppelpunkt besitzen. Diese Doppelpunkte erfüllen eine Raumcurve h der $4(n-1)(n^3-2)^{\text{ten}}$ Ordnung."

§ 4. Gerade und Ebenen.

13. Einer Geraden g und einer Ebene ε entsprechen eine Curve C und eine Fläche Φ_ε der $(n^2-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche sich in $(n^3-1)^2$ Punkten schneiden. Von diesen Punkten entsprechen (n^3-1) Punkte dem Schnittpunkte (εg), und werden auf C_g durch eine beliebige durch (εg) gehende Fläche, auf Φ durch eine beliebige Curve des Gebüsches herausgeschnitten.

Da C_g die ε in (n^3-1) Punkten schneidet, giebt es auf ε (n^3-1) Punkte, welche einen entsprechenden Punkt auf g liegen haben. Diese entsprechenden Punkte sind die Schnittpunkte von g und Φ_ε. Also:

„Auf einer beliebigen Geraden g und einer beliebigen Ebene ε giebt es (n^3-1) Paare einander in der Verwandtschaft entsprechender Punkte.

Jedem dieser Punktepaare entsprechen noch weitere (n^3-2) Punkte, allen (n^3-1) Punktepaaren also $(n^3-1)(n^3-2)$ Punkte, welche mit den dem Schnittpunkte $(g\varepsilon)$ entsprechenden (n^3-1) Punkten die Schnittpunkte der g und ε entsprechenden C_g und Φ_ε sind.“

14. Zwei Ebenen ε_1 und ε_2 schneiden sich in einer Geraden $g=|\varepsilon_1\varepsilon_2|$, welcher eine Curve C_g zugehört, die auf den den Ebenen ε_1 und ε_2 zugehörigen Flächen Φ_{ε_1} und Φ_{ε_2} liegt.

Ausser in C_g schneiden sich Φ_{ε_1} und Φ_{ε_2} noch in einer Raumcurve C_{12} der $(n^3-1)(n^3-2)^{\text{ten}}$ Ordnung.

Die der Schnittcurve $|\varepsilon_1\Phi_{\varepsilon_2}|$ $(n^3-1)^{\text{ter}}$ Ordnung entsprechenden Punkte müssen sowohl auf der der ε_1 zugehörigen Φ_{ε_1} liegen, als auch entweder auf ε_2, oder auf Φ_{ε_2}.

Die ebenen Curven $(n^3-1)^{\text{ter}}$ Ordnung $|\varepsilon_1\Phi_{\varepsilon_2}|$ und $|\varepsilon_2\Phi_{\varepsilon_1}|$ entsprechen einander also eindeutig und punktweise, und jedem einander entsprechenden Punktepaare beider Curven entsprechen ausserdem noch (n^3-2) Punkte, welche auf C_{12} liegen. Also:

„Auf je zwei beliebigen Ebenen ε_1 und ε_2 giebt es zwei Curven $(n^3-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, deren Punkte einander paarweise entsprechen, und denen ausserdem noch die Punkte einer Raumcurve $(n^3-1)(n^3-2)^{\text{ter}}$ Ordnung C_{12} entsprechen, welche mit der der Schnittlinie $g=|\varepsilon_1\varepsilon_2|$ zugehörigen C_g zusammen den Durchschnitt der den beiden Ebenen entsprechenden Φ_{ε_1} und Φ_{ε_2} bildet.“

15. Die Ebene ε_1 wird

von Φ_2 in einer Curve $(n^3-1)^{\text{ter}}$ Ordnung $|\varepsilon_1\Phi_{\varepsilon_2}|$,

von Φ_{ε_1}

1. in einer Curve H der $4(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, der Schnittcurve von ε_1 mit der Kernfläche H,
2. in einer Curve ψ_{ε_1} der $(n-1)(n^2-n-3)^{\text{ten}}$ Ordnung

geschnitten, deren Punkte einander paarweise entsprechen.

Die Curve $|\varepsilon_1 \Phi_{\varepsilon_2}|$ schneidet nun

die Curve H in $4(n-1)(n^3-1)$ Punkten,

„ „ ψ_{ε_1} „ $(n-1)(n^2+n-3)(n^3-1)$ Punkten.

Von den ersteren $4(n-1)(n^3-1)$ Schnittpunkten liegen

a) $4(n-1)$ Punkte auf $g = |\varepsilon_1 \varepsilon_2|$ als sich selbst entsprechende, auf H gelegene Punkte;

b) die weiteren $4(n-1)(n^3-2)$ Punkte sind Doppelpunkte in ε_1, denen in ε_2 ein conjugirter Punkt und auf C_{12} daher nur noch (n^3-3) Punkte zugehören.

Von den letzteren $(n-1)(n^2+n-3)(n^3-1)$ Schnittpunkten sind

c) $(n-1)(n^2+n-3)$ Punkte die weiteren Schnittpunkte der der Geraden $g = |\varepsilon_1 \varepsilon_2|$ zugehörigen C_g mit der Ebene ε_1, und haben daher auf g einen conjugirten Punkt;

d) die weiteren $(n-1)(n^2+n-3)(n^3-2)$ Punkte sind mit den Punkten *b*) zusammen die Schnittpunkte von ε_1 mit der C_{12}, und zerfallen in Paare einander entsprechender Punkte, deren jeder in ε_2 noch einen entsprechenden Punkt besitzt.

Es ergiebt sich daraus:

1. „Auf jeder Ebene giebt es $4(n-1)$ sich selbst entsprechende Punkte, die zugleich noch in einer beliebigen andern Ebene sich selbst entsprechende Punkte sind.“ [*a*).]

2. „Auf jeder Ebene giebt es $4(n-1)(n^3-2)$ sich selbst entsprechende Punkte, die auf einer beliebigen andern Ebene einen entsprechenden Punkt besitzen.“ [*b*).]

3. „Auf jeder Ebene giebt es $4(n-1)(n^3-2)$ Punkte, die auf einer beliebigen andern Ebene einen sich selbst entsprechenden Punkt als zugeordneten Punkt besitzen.“ [*b*).]

4. „Auf jeder Ebene giebt es $(n-1)(n^2+n-3)$ Punkte, die auf einer beliebigen Geraden derselben Ebene einen zugeordneten Punkt besitzen.“ [*c*).]

5. „Auf jeder Ebene giebt es (n^3-1) Punkte, die auf einer beliebigen, nicht in derselben Ebene liegenden Geraden einen zugeordneten Punkt besitzen.“ (Vergl. 13.)

6. „Auf jeder Ebene giebt es $\frac{(n-1)(n^2+n-3)(n^3-2)}{2}$ Punktepaare, die auf einer beliebigen andern Ebene einen zugeordneten Punkt besitzen.“ [*d*).]

7. „Auf jeder Ebene giebt es $\frac{(n-1)(n^2+n-3)(n^3-2)}{2}$ Punkte, die auf einer beliebigen andern Ebene ein zugeordnetes Punktepaar besitzen.“

16. Die einander entsprechenden Punktepaare zweier Ebenen ε_1 und ε_2 bilden zwei Curven $|\varepsilon_1 \Phi_{\varepsilon_2}|$ und $|\varepsilon_2 \Phi_{\varepsilon_1}|$ $(n^3-1)^{\text{ter}}$ Ordnung.

Jedem Paare entsprechender Punkte derselben gehören noch weitere (n^3-2) Punkte an, welche auf einer Curve C_{12} der $(n^3-1)(n^3-2)^{\text{ten}}$ Ordnung liegen.

Diese schneidet eine dritte Ebene ε_3 in $(n^3-1)(n^3-2)$ Punkten. Also:

„Auf drei beliebigen Ebenen ε_1, ε_2, ε_3 giebt es $(n^3-1)(n^3-2)$ Tripel einander entsprechender Punkte.“

Diesen Punkttripeln entsprechen ausserdem noch $(n^3-1)(n^3-2)(n^3-3)$ Punkte, welche auf den drei, den Ebenen ε_1, ε_2, ε_3 zugehörigen Φ_{ε_1}, Φ_{ε_2}, Φ_{ε_3} liegen, sowie auf den drei Curven C_{12}, C_{13}, C_{23}, deren jede zwei ebenen Curven $|\varepsilon_1 \Phi_{\varepsilon_2}|$ und $|\varepsilon_2 \Phi_{\varepsilon_1}|$, $|\varepsilon_1 \Phi_{\varepsilon_3}|$ und $|\varepsilon_3 \Phi_{\varepsilon_1}|$, $|\varepsilon_2 \Phi_{\varepsilon_3}|$ und $|\varepsilon_3 \Phi_{\varepsilon_2}|$ entspricht und die conjugirten Punkte der sich in den betreffenden beiden Ebenen entsprechenden Punktepaare enthält.

§ 5. Schaaren von Flächen Φ und Curven C.

17. Allen durch eine Gerade g gehenden Ebenen gehören die Flächen Φ einer einstufigen Flächenschaar vom Index (n^3-1) an. Denn durch einen beliebigen Punkt $\mathfrak{a}$ des Raumes gehen (n^3-1) Flächen, welche den (n^3-1) Ebenen entsprechen, welche durch die dem Punkte $\mathfrak{a}$ des Ebenenbüschels g in der Verwandtschaft entsprechenden (n^3-1) Punkte gehen.

Allen durch einen Punkt $\mathfrak{p}$ gehenden Ebenen des Raumes entsprechen die Flächen einer zweistufigen Flächenschaar vom Index $(n^3-1)^2$. Denn durch zwei beliebige Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gehen $(n^3-1)^2$ Flächen der Schaar.

Allen Ebenen des Raumes entspricht ein dreistufiges Flächensystem $(n^3-1)^{\text{ter}}$ Ordnung und vom Index $(n^3-1)^3$.

18. Allen Geraden eines ebenen Strahlenbüschels entsprechen die Raumcurven eines Curvenbüschels vom Index 1, dessen Curven auf einer Φ liegen und n^3-1 feste Grundpunkte besitzen.

Allen Geraden, die durch einen Punkt $\mathfrak{p}$ gehen, entsprechen die Curven C einer Curvenschaar vom Index (n^3-1). Denn durch jeden Punkt $\mathfrak{a}$ gehen (n^3-1) Curven der Schaar, welche den Verbindungslinien von $\mathfrak{p}$ mit den $\mathfrak{a}$ entsprechenden Punkten zugehören.

Allen Geraden des Raumes entspricht eine vierstufige Curvenschaar vom Index $(n^3-1)^2$.

19. Es gehören also zu einem

Ebenenbüschel — Flächenbüschel vom Index (n^3-1) mit einer Grundcurve der $(n^3-1)^{\text{ten}}$ Ordnung,

Ebenenbündel — Flächennetz vom Index $(n^3-1)^2$ mit (n^3-1) festen Grundpunkten,

Ebenensystem — Flächensystem vom Index $(n^3-1)^3$,

Strahlenbüschel — Curvenbüschel vom Index 1 auf einer Φ mit (n^3-1) festen Grundpunkten,

Strahlenbündel — Curvenbündel vom Index (n^3-1) mit (n^3-1) festen Grundpunkten,
vierstufigen Strahlsystem — vierstufiges Curvensystem vom Index $(n^3-1)^2$.

§ 6. Die Curve und Fläche m^{ter} Ordnung und ihre entsprechende Curve und Fläche.

20. Einer Fläche m^{ter} Ordnung entspricht in der Verwandtschaft eine Fläche $m(n^3-1)^{ter}$ Ordnung.

Denn: die der Fläche m^{ter} Ordnung entsprechende Fläche wird von einer Geraden g in ebensoviel Punkten geschnitten, als die Fläche m^{ter} Ordnung von der der Geraden g entsprechenden C_g, also in $m(n^3-1)$ Punkten.

21. Einer Curve m^{ter} Ordnung entspricht in der Verwandtschaft eine Curve $m(n^3-1)^{ter}$ Ordnung. Ist die Curve m^{ter} Ordnung der (partielle) Schnitt zweier Flächen p^{ter} und q^{ter} Ordnung, so ist die zugehörige Curve $m(n^3-1)^{ter}$ Ordnung der (partielle) Schnitt zweier Flächen $p(n^3-1)^{ter}$ und $q(n^3-1)^{ter}$ Ordnung."

Zweites Capitel.

Die Kernfläche der Verwandtschaft.

§ 7. Der sich selbst entsprechende Punkt.

22. Fällt ein Punkt $\mathfrak{p}$ mit einem seiner conjugirten zusammen, so schneiden sich die Flächen des durch ihn gehenden Flächennetzes sämmtlich in zwei unendlich benachbarten Punkten, haben also in $\mathfrak{p}$ eine Tangente p gemeinsam.

Durch jeden nicht auf der Tangente p gelegenen unendlich benachbarten Punkt geht ein Flächenbüschel unseres Flächengebüsches, dessen Flächen sich in $\mathfrak{p}$ berühren. Die Berührungsebene π geht durch p. Die Grundcurve jedes dieser unendlich vielen Flächenbüschel hat in $\mathfrak{p}$ einen Doppelpunkt.

Unter den Flächen eines dieser Flächenbüschel giebt es eine Fläche, die noch durch einen weiteren, unendlich benachbarten, nicht auf π gelegenen Punkt geht. Diese Fläche hat in $\mathfrak{p}$ einen Doppelpunkt und gehört allen Flächenbüscheln an, deren Flächen sich in $\mathfrak{p}$ berühren.

Unter diesen Büscheln giebt es eines, dessen Flächen noch durch einen weiteren, auf p liegenden unendlich benachbarten Punkt gehen. Seine Grundcurve hat p zur stationären Tangente.

Umgekehrt, wenn in einem Punkte $\mathfrak{p}$ sich die Flächen eines Büschels in einer Ebene π berühren, oder, was dasselbe ist, wenn in $\mathfrak{p}$ eine Grundcurve eines Büschels einen Doppelpunkt hat, dann ist $\mathfrak{p}$ für eine Fläche dieses Büschels ein Doppelpunkt, und eine nicht zum Büschel gehörige, aber durch $\mathfrak{p}$ gehende Fläche schneidet π in einer Geraden p, welche gemeinsame Tangente aller Flächen des durch das Flächenbüschel und die nicht zu ihm gehörige Fläche bestimmten, dem Punkte $\mathfrak{p}$ zugehörigen Flächennetzes ist. Der Punkt $\mathfrak{p}$ ist also dann sich selbst conjugirt.

Ist $\mathfrak{p}$ ein Doppelpunkt einer Fläche des Gebüsches, so bildet diese Fläche mit einer beliebigen andern Fläche zusammen ein Flächenbüschel, dessen Flächen sich sämmtlich in der Berührungsebene der letzteren Fläche berühren. Oder: so schneidet jede weitere durch $\mathfrak{p}$ gehende Fläche die Fläche mit Doppelpunkt in einer Grundcurve mit einem Doppelpunkte in $\mathfrak{p}$ u. s. w.

23. Die Punkte $\mathfrak{p}$ des Kerngebildes haben also die Eigenschaften: sie sind

1. Grundpunkte von Flächennetzen, deren Flächen in $\mathfrak{p}$ eine gemeinsame Tangente p haben,
2. Berührungspunkte der Flächen unendlich vieler Flächenbüschel, deren Berührungsebenen ein Ebenenbüschel mit der Axe p bilden,
3. Doppelpunkte je einer Fläche des Gebüsches,
4. Doppelpunkte unendlich vieler Grundcurven von Flächenbüscheln.
5. In ihnen hat ein Flächenbüschel eine stationäre Tangente p.

§ 8. Die Kernfläche.

24. In einem Punkte $\mathfrak{p}$ des Kerngebildes hat eine Fläche des Flächengebüsches einen Doppelpunkt. Die Polarebene dieses Punktes in Bezug auf die Fläche mit Doppelpunkt ist unbestimmt. Die ersten Polarflächen aller Punkte des Raumes in Bezug auf die Fläche mit Doppelpunkt geht also durch den Doppelpunkt $\mathfrak{p}$. Die Punkte des Kerngebildes sind also die Punkte, in denen sich sämmtliche ersten Polarflächen einer Fläche des Gebüsches in Bezug auf sämmtliche Punkte des Raumes schneiden.

Wir nehmen vier beliebige Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ im Raume an. Ihre ersten Polarflächen in Bezug auf die Flächen des Flächengebüsches n^{ter} Ordnung bilden vier projectivische Flächengebüsche $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung A, B, Γ, Δ.

Durch jeden Punkt $\mathfrak{x}$ einer beliebigen Geraden g geht nun ein Flächennetz des Gebüsches A, dem im Gebüsche B ein Flächennetz zugehört, von dem ein Büschel durch $\mathfrak{x}$ geht. Diesem Büschel entspricht wieder in Γ ein Flächenbüschel, von dem eine einzige Fläche durch $\mathfrak{x}$ geht. Dieser Fläche entspricht in Δ eine weitere Fläche, die g in $(n-1)$ Punkten $\mathfrak{y}$ schneidet. Umgekehrt geht durch jeden Punkt $\mathfrak{y}$ ein Flächengebüsch in Δ, denen in A, B, Γ drei projectivische Flächengebüsche $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung zugehören, welche* eine Fläche $3(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung erzeugen, die g in $3(n-1)$ Punkten $\mathfrak{x}$ schneidet.

---

* Zwei projectivische Flächenbüschel $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung erzeugen eine Fläche $2(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Denn: durch einen Punkt $\mathfrak{x}$ einer Geraden g geht eine Fläche des einen Büschels, der im zweiten Büschel eine Fläche zugehört, welche g in

Da jedem Punkte $\mathfrak{x}$ $(n-1)$ Punkte $\mathfrak{y}$,
" " $\mathfrak{y}$ $3(n-1)$ " $\mathfrak{x}$
zugehören, coincidiren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ für $4(n-1)$ Punkte der Geraden g. D. h.: auf jeder Geraden g giebt es $4(n-1)$ Punkte, in denen sich vier entsprechende Flächen der vier Polargebüsche A, B, Γ, Δ schneiden und in denen sich daher alle ersten Polaren einer Fläche des Grundgebüsches n^{ter} Ordnung schneiden. Also:

„Das Kerngebilde ist eine Fläche H der $4(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung und der $4(n-1)(4n-5)^{2\text{ten}}$ Classe“,

da die Kernfläche im Allgemeinen keine Doppelpunkte besitzt.

Diese Kernfläche ist die Hessiana der vier das Flächengebüsch n^{ter} Ordnung constituirenden Flächen.

25. Die Polarebenen jedes Punktes $\mathfrak{p}$ der Kernfläche H in Bezug auf alle Flächen des Gebüsches schneiden sich in einem Punkte $\mathfrak{q}$, der auf einer Fläche der $4(n-1)^{3\text{ten}}$ Ordnung liegt. Umgekehrt schneiden sich die ersten Polarflächen von $\mathfrak{q}$ in $\mathfrak{p}$.

26. Die den Punkten der Kernfläche H in der Verwandtschaft zugeordneten, je n^2-2 Punkte liegen auf einer Fläche der $4(n-1)(n^3-2)^{\text{ten}}$ Ordnung, der der Kernfläche zugeordneten Fläche H' (vergl. § 2, 8).

Drittes Capitel.

Ein durch die Verwandtschaft bestimmter Strahlencomplex.

§ 9. Der Strahlencomplex.

27. Nehmen wir in einer Ebene π einen Punkt $\mathfrak{p}$ an, so entspricht einer durch $\mathfrak{p}$ in π gezogenen Geraden a eine Curve C_a, welche π ausser in $4(n-1)$ auf a gelegenen Punkten noch in $(n-1)(n^2+n-3)$ Punkten b schneidet. Diese ergeben, mit $\mathfrak{p}$ verbunden, $(n-1)(n^2+n+3)$ Strahlen b. Umgekehrt gehören jedem Strahle b $(n-1)(n^2+n-3)$ Strahlen a an, a und b coincidiren daher für $2(n-1)(n^2+n-3)$ Strahlen. Diese Coincidenzstrahlen sind die in π durch $\mathfrak{p}$ gehenden Complexstrahlen. Daraus folgt:

$(n-1)$ Punkten $\mathfrak{y}$ schneidet; und umgekehrt gehören jedem Punkte $\mathfrak{y}$ $(n-1)$ Punkte $\mathfrak{x}$ zu. $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ coincidiren also für $2(n-1)$ Punkte. Drei projectivische Flächennetze $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung erzeugen eine Fläche $3(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung.

* Denn: durch einen Punkt $\mathfrak{x}$ einer beliebigen Geraden g geht ein Paar entsprechender Flächen der beiden ersten Netze, denen im dritten Netze eine Fläche zugehört, welche g in $(n-1)$ Punkten $\mathfrak{y}$ schneidet. Umgekehrt geht durch jeden Punkt $\mathfrak{y}$ ein Flächenbüschel des dritten Netzes, dem im ersten und im zweiten Netze zwei projectivische Büschel angehören, welche nach Vorigem eine Fläche $2(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung erzeugen, die g in $2(n-1)$ Punkten $\mathfrak{x}$ schneidet. $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ coincidiren daher für $3(n-1)$ Punkte, q. e. d.

„Die Verbindungslinien entsprechender Punkte der Verwandtschaft bilden einen Strahlencomplex vom Grade $2(n-1)(n^2+n-3)$."

„Die durch einen Punkt $\mathfrak{p}$ gehenden Complexstrahlen bilden einen Kegel der Ordnung $2(n-1)(n^2+n-3)$; die in einer Ebene liegenden Complexstrahlen umhüllen eine Curve der Classe $2(n-1)(n^2+n-3)$."

§ 10. Complexcurven und Complexflächen.

28. Auf jedem Complexstrahl liegen zwei einander in der Verwandtschaft entsprechende Punkte, die wir die singulären Punkte des Complexstrahles nennen wollen.

„Die singulären Punkte der in einer Ebene liegenden Complexstrahlen bilden eine Curve $(n-1)(n^2+n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung (§ 3, 12), während die Complexstrahlen selber eine Curve $2(n-1)(n^2+n-3)^{\text{ter}}$ Classe umhüllen."

29. Die singulären Punkte aller durch einen Punkt $\mathfrak{p}$ gehenden Complexstrahlen bilden eine Raumcurve, welche von jedem Kegelstrahl ausser in $\mathfrak{p}$ noch in zwei Punkten geschnitten wird, von denen für (n^3-1) Kegelstrahlen ein Punkt nach $\mathfrak{p}$ fällt.

Die Raumcurve geht also (n^2-1)-mal durch $\mathfrak{p}$, und da eine beliebige durch $\mathfrak{p}$ gelegte Ebene die Raumcurve ausser in dem (n^3-1)-fachen Punkte $\mathfrak{p}$ noch in je zwei Punkten auf jedem der $2(n-1)(n^2+n-3)$ Kegelstrahlen schneidet, in denen die Ebene den Complexkegel schneidet, so schneidet die Ebene die Curve in $(n^3-1)+4(n-1)(n^2+n-3)=(n-1)(5n^2+5n-11)$ Punkten. Also:

„Alle durch einen Punkt $\mathfrak{p}$ gehenden Complexstrahlen bilden einen Kegel $2(n-1)(n^2+n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung. Die singulären Punkte dieser Complexstrahlen liegen auf einer Raumcurve der $(n-1)(5n^2+5n-11)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche den Punkt $\mathfrak{p}$ zum (n^3-1)-fachen Punkte und in ihm seine Verbindungsstrahlen mit seinen conjugirten Punkten zu Tangenten hat. Diese Raumcurve hat den Complexkegel zum Perspectivkegel."

30. Die singulären Punkte sämmtlicher eine Gerade g schneidenden Complexstrahlen liegen auf einer Fläche, welche durch g (n^3-1)-mal hindurchgeht — denn jeder Punkt von g ist (n^3-1)-facher Punkt seiner Complexkegelcurve — und von der Ordnung $2(n-1)(n^2+n-1)$ ist. Denn jede durch g gelegte Ebene ε schneidet sie ausser in der (n^3-1)-fachen Geraden g noch in einer Curve ψ_ε (§ 3, 12) der $(n-1)(n^2+n-3)^{\text{ten}}$ Ordnung.

31. „Drei beliebige Gerade g_1, g_2, g_3 werden von $4(n-1)(n^2+n-3)$ Complexstrahlen geschnitten."

Denn: Legen wir durch g_3 eine Ebene $\varepsilon_{\mathfrak{x}}$, welche g_1 in einem Punkte $\mathfrak{x}$ schneidet. Sämmtliche durch $\mathfrak{x}$ gehenden Complexstrahlen bilden nun einen

Kegel von der Ordnung $2(n-1)(n^2+n-3)$, von dem g_2 in ebenso vielen Punkten $\mathfrak{y}$ geschnitten wird, die, mit g_3 verbunden, $2(n-1)(n^2+n-3)$ Ebenen $\varepsilon_{\mathfrak{y}}$ ergeben. Umgekehrt gehören jeder Ebene $\varepsilon_{\mathfrak{y}}$ $2(n-1)(n^2+n-3)$ Ebenen $\varepsilon_{\mathfrak{x}}$ zu. $\varepsilon_{\mathfrak{x}}$ und $\varepsilon_{\mathfrak{y}}$ coincidiren daher für $4(n-1)(n^2+n-3)$ Ebenen. In jeder derselben liegt ein Complexstrahl, der $g_1 g_2 g_3$ schneidet, q. e. d.

32. „Alle Complexstrahlen, welche zwei beliebige Gerade g_1 und g_2 schneiden, bilden eine Regelfläche $4(n-1)(n^2+n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung."

Da eine Ebene durch g die Regelfläche nur in $2(n-1)(n^2+n-3)$ Strahlen schneidet, sind g_1 und g_2 $2(n-1)(n^2+n-3)$-fache Directricen der Regelfläche.

Da auf jeder Generatrix zwei singuläre Punkte liegen, jede Ebene durch g in $2(n-1)(n^2+n-3)$ Generatricen schneidet, bilden die singulären Punkte der Generatricen der Regelfläche eine Raumcurve $4(n-1)(n^2+n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung.

Viertes Capitel.

Eine durch die Verwandtschaft bestimmte Strahlencongruenz.

§ 11. Einige Hilfssätze.

33. Diejenigen Strahlen des im III. Capitel betrachteten Strahlencomplexes, deren singuläre Punkte zusammenfallen, bilden eine Strahlencongruenz. Es sind dies gleichzeitig die sämmtlichen Flächen eines Flächennetzes gemeinsamer Tangenten p (§ 7), welche zu den Punkten $\mathfrak{p}$ der Kernfläche H in Beziehung stehen.

Um Ordnung, Classe und Rang dieser Congruenz zu bestimmen, müssen wir zunächst einige Hilfssätze ableiten.

1. Hilfssatz.

34. „Die Berührungspunkte der Ebenen eines Ebenenbüschels g und der Flächen eines Flächenbüschels n^{ter} Ordnung liegen auf einer Curve $(n-1)(3n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche die Axe g des Ebenenbüschels in $2(n-1)$ Punkten schneidet."

Denn: Jede Ebene ε des Ebenenbüschels wird von den Flächen des Flächenbüschels in einem Curvenbüschel n^{ter} Ordnung geschnitten. Jeder Doppelpunkt einer solchen Curve ist ein Berührungspunkt einer Fläche des Flächenbüschels mit der Ebene ε und hat die Eigenschaft, dass seine gerade Polare in Bezug auf die betreffende Curve des Curvenbüschels unbestimmt ist, dass also die ersten Polaren aller Punkte der Ebene in Bezug auf die Curve mit Doppelpunkt sich im Doppelpunkte schneiden.

Um die Anzahl der Doppelpunkte zu finden, brauchen wir also nur die Zahl der Punkte zu bestimmen, in denen sich die ersten Polaren dreier beliebiger Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ der Ebene ε in Bezug auf eine beliebige Curve des Büschels schneiden.

Die ersten Polaren von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ in Bezug auf die Curven des Büschels bilden drei projectivische Curvenbüschel $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung A, B, C.

Die projectivischen Büschel A und B erzeugen eine Curve $2(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung.

Die projectivischen Büschel A und C erzeugen eine Curve $2(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung.

Diese beiden Curven haben die $(n-1)^2$ Grundpunkte des Büschels A gemeinsam.

Sie schneiden sich daher ausserdem noch in $3(n-1)^2$ Punkten, welche Berührungspunkte von ε mit Flächen des Flächenbüschels sind.

Die Gerade g wird nun von $2(n-1)$ Flächen des Flächenbüschels berührt, welchen $2(n-1)$ Ebenen des Ebenenbüschels entsprechen, die eine Fläche in einem Punkte von g berühren.

Die Gesammtzahl der auf ε liegenden Berührungspunkte von Ebenen des Ebenenbüschels mit Flächen des Flächenbüschels beträgt also:

$$3(n-1)^2+2(n-1)=(n-1)(3n-1),$$

q. e. d.

2. Hilfssatz.

35. „Die Berührungspunkte der Ebenen eines Ebenenbüschels g und der Flächen eines Flächennetzes n^{ter} Ordnung bilden eine Fläche der Ordnung $(3n-2)$, welche durch die Axe g des Ebenenbüschels und durch sämmtliche Grundpunkte des Flächennetzes hindurchgeht."

Denn: Jede Ebene ε des Ebenenbüschels g wird von dem Flächennetze in einem Curvennetze n^{ter} Ordnung geschnitten. Die Doppelpunkte der Curven dieses Netzes sind Berührungspunkte von Flächen. In ihnen schneiden sich die ersten Polaren aller Punkte der Ebene ε in Bezug auf die Curve mit Doppelpunkt.

Die ersten Polaren aller dreier Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ der Ebene ε bilden drei projectivische Curvennetze A, B, C $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung.

Dieselben erzeugen (vergl. § 8, 24, Anm.) eine Curve $3(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, die Doppelpunktscurve des Netzes.

Die Gerade g wird in jedem ihrer Punkte von **einer** Fläche des Flächennetzes berührt, gehört also vollständig dem Orte der Berührungspunkte an.

Derselbe schneidet also die Ebene ε

1. in einer Curve $3(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung,
2. in der Geraden g,

ist also von der $(3n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung, q. e. d.

3. Hilfssatz.

36. „Die Berührungspunkte der Ebenen eines Ebenenbündels $\mathfrak{p}$ und der Flächen eines Flächenbüschels n^{ter} Ordnung bilden eine Fläche

$(2n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche durch die Grundcurve des Flächenbüschels und durch den Punkt $\mathfrak{p}$ hindurchgeht."

Denn: Die Ebenen des Ebenenbündels $\mathfrak{p}$ berühren eine Fläche des Flächenbüschels längs ihrer Schnittcurve mit der ersten Polaren von $\mathfrak{p}$ in Bezug auf die betreffende Fläche. Die Flächen des Flächenbüschels n^{ter} Ordnung und seines ersten Polarenbüschels $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung in Bezug auf $\mathfrak{p}$ erzeugen nun eine Fläche $(2n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche durch $\mathfrak{p}$ u. s. w. geht, q. e. d.

§ 12. Die Ordnung der Congruenz.

37. Jeder Congruenzstrahl, der durch einen Punkt $\mathfrak{p}$ geht, berührt in seinem singulären Punkte $\mathfrak{x}$ sämmtliche Flächen eines Flächennetzes. Dieses Flächennetz hat mit jedem beliebigen Flächenbüschel des Flächengebüsches je eine Fläche gemein, kann also ersetzt werden durch die drei Flächen, die es mit drei festen Flächenbüscheln A, B, Γ des Gebüsches gemein hat. Diese drei Flächenbüschel nehmen wir nun, da durch A und B das Flächengebüsch bereits vollständig bestimmt ist, so an, dass das Büschel Γ sowohl mit A eine Fläche φ_A, als auch mit B eine Fläche φ_B gemein hat.

Die singulären Punkte $\mathfrak{x}$ der durch $\mathfrak{p}$ gehenden Congruenzstrahlen sind demnach die Punkte, in denen je eine Fläche der drei Büschel A, B, Γ von durch $\mathfrak{p}$ gehenden Ebenen berührt wird, und liegen daher:

1. auf der Berührungsfläche des Büschels A,
2. " " " " " B,
3. " " " " " Γ

mit den Ebenen des Ebenenbündels $\mathfrak{p}$, sind also Schnittpunkte dieser drei Berührungsflächen $(2n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung (Hilfssatz 3).

A und Γ haben nun eine Fläche φ_A der n^{ten} Ordnung gemein, welche von den Ebenen des Bündels $\mathfrak{p}$ längs einer Curve $n(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung berührt wird. Diese Curve schneidet nun die Berührungsfläche von B in $n(n-1)(2n-1)$ Punkten, welche zwar Schnittpunkte aller drei Berührungsflächen, nicht aber Congruenzpunkte $\mathfrak{x}$ sind, da in ihnen nur zwei Flächen des Gebüsches von Ebenen des Bündels $\mathfrak{p}$ berührt werden. Diese Punkte spalten sich daher von den $(2n-1)^3$ Schnittpunkten der drei Berührungsflächen ab.

Ebenso spalten sich die $n(n-1)(2n-1)$ Schnittpunkte der der B und Γ gemeinsamen Fläche φ_B zugehörigen Berührungscurve mit der dem A zugehörigen Berührungsfläche ab.

Ferner geht der Punkt $\mathfrak{p}$ als gemeinsamer Schnittpunkt der drei Berührungsflächen ab.

Es bleiben demnach:

$$(2n-1)^3 - 2\cdot n(n-1)(2n-1) - 1 = 2(n-1)(2n^2-n+1)$$

Punkte $\mathfrak{x}$ übrig. Also:

„Die Ordnung der Congruenz, d. h. die Zahl der Congruenzstrahlen, welche durch einen beliebigen Punkt $\mathfrak{p}$ gehen, ist

$$=2(n-1)(2n^2-n+1).“$$

§ 13. Die Classe der Congruenz.

1. Methode.

38. Jede Ebene ε wird von den Flächen des Flächengebüsches in einem Curvengebüsche geschnitten.

Ist $\mathfrak{x}$ singulärer Punkt eines in ε gelegenen Congruenzstrahles p, so berühren sich in $\mathfrak{x}$ in jeder durch p gelegten Ebene, also auch in ε, unendlich viele Flächen eines Büschels, das die Ebene ε in einem Curvenbüschel schneidet, dessen Curven sämmtlich in $\mathfrak{x}$ einen Doppelpunkt besitzen.

Dieses Curvenbüschel hat mit jedem Curvennetze eine Curve gemein und ist bestimmt durch zwei seiner Curven.

Sämmtliche Doppelpunkte der Curven eines Netzes im Gebüsch liegen auf einer Curve $3(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung (vergl. § 11), die Doppelpunkte eines zweiten Netzes liegen auf einer zweiten Curve $3(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Diese beiden Curven schneiden sich zunächst in den $3(n-1)^2$ Doppelpunkten des den beiden Netzen gemeinsamen Curvenbüschels, haben ausserdem also noch $6(n-1)^2$ Schnittpunkte, deren jeder für zwei, also für unendlich viele Curven des Gebüsches Doppelpunkt ist, mithin singulärer Punkt $\mathfrak{x}$ eines auf ε gelegenen Congruenzstrahles p ist. Also:

„Die Classe der Congruenz, d. h. die Zahl der in einer Ebene ε liegenden Congruenzstrahlen ist

$$=6(n-1)^2.“$$

2. Methode.

39. Wir betrachten ein Ebenenbüschel g und zwei Flächennetze A und B des Flächengebüsches.

Die Ebenen des Ebenenbüschels g (Hilfssatz 2) berühren die Flächen
des Netzes A in einer Fläche χ_A der $(3n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung,
„ „ B „ „ „ χ_B „ „ „

Diese beiden Berührungsflächen schneiden sich also ausser in g noch in einer Curve $[(3n-2)^2-1]^{\text{ter}}$ Ordnung.

Von dieser Curve spaltet sich die Curve (Hilfssatz 1) $(n-1)(3n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung ab, welche die Berührungscurve des beiden Netzen gemeinsamen Flächenbüschels mit dem Ebenenbüschel g ist.

Die Punkte der übrig bleibenden Curve $2(n-1)(3n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung haben die Eigenschaft, dass in ihnen eine Ebene des Ebenenbüschels g zwei verschiedene Flächen des Flächengebüsches, also ein ganzes Flächenbüschel berührt, dass dieser Punkt daher singulärer Punkt $\mathfrak{x}$ eines g schneidenden Congruenzstrahles p ist. Also:

„Sämmtliche eine Gerade g schneidenden Congruenzstrahlen haben ihre singulären Punkte auf einer Raumcurve $2(n-1)(3n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche g in $4(n-1)$ Punkten schneidet; sie berühren also die Kernfläche längs dieser Curve."

Da nun eine beliebige durch g gelegte Ebene ε die Congruenzcurve in $2(n-1)(3n-1)$ Punkten schneidet, von denen aber $4(n-1)$ Punkte auf g liegen, ihre Congruenzstrahlen p also nicht auf ε liegen haben (da dieselben nur an die Bedingung geknüpft waren, g zu schneiden), so bleibt als Zahl der in ε liegenden Congruenzstrahlen übrig:

$$2(n-1)(3n-1)-4(n-1)=6(n-1)^2,$$

q. e. d.

3. Methode.

40. Die Curve der singulären Punkte $\mathfrak{x}$ aller durch eine Gerade g gelegten Congruenzstrahlen p muss:

1. auf der Kernfläche H liegen,
2. auf der Berührungsfläche des Ebenenbüschels g mit einem beliebigen Flächennetze.

Diese beiden Flächen schneiden sich in einer Curve $4(n-1)(3n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, von der sich indess die Curve der Doppelpunkte des Flächennetzes, also eine Curve $6(n-1)^{2\text{ter}}$ Ordnung abspaltet, so dass übrig bleibt eine Curve:

$$4(n-1)(3n-2)-6(n-1)^2=2(n-1)(3n-1)^{\text{ter}} \text{ Ordnung}$$

u. s. w., wie oben.

§ 14. Der Rang der Congruenz.

41. Unter dem Range der Congruenz verstehen wir die Anzahl der Congruenzstrahlen, welche zwei beliebige Gerade g_1 und g_2 schneiden.

Die singulären Punkte $\mathfrak{x}$ aller g_1 und g_2 schneidenden Congruenzstrahlen p liegen:

1. auf der Kernfläche H der $4(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung,
2. „ „ Berührungsfläche des Ebenenbüschels g_1,
3. „ „ „ „ „ g_2

mit den Flächen je eines beliebigen Flächennetzes im Flächengebüsche, also auf zwei Flächen $(3n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung χ_1 und χ_2.

Diese drei Flächen schneiden sich in $4(n-1)(3n-2)^2$ Punkten.

Nun liegen aber die Doppelpunkte des ersten Flächennetzes auf einer Curve $6(n-1)^{2\text{ter}}$ Ordnung, welche auf H liegt und von der Berührungsfläche χ_2 des zweiten Netzes in $6(n-1)^2(3n-2)$ Punkten geschnitten wird, während die Doppelpunktscurve des zweiten Netzes von der Berührungsfläche χ_1 des ersten Netzes ebenfalls in $6(n-1)^2(3n-2)$ Punkten geschnitten wird. Diese beiden Punktgruppen sind daher von den obigen $4(n-1)(3n-2)^2$ Punkten abzurechnen.

Dabei sind aber doppelt abgerechnet worden die beiden Doppelpunkts-curven gemeinsamen Doppelpunkte des beiden Flächennetzen gemeinsamen Flächenbüschels n^{ter} Ordnung, also $4(n-1)^3$ Punkte.

Es bleiben daher übrig als singuläre Punkte $\mathfrak{r}$ der die Geraden g_1 und g_2 schneidenden Congruenzstrahlen p:

$$4(n-1)(3n-2)^2 - 2\cdot 6(n-1)^2(3n-2) + 4(n-1)^3$$
$$= 4(n-1)(n^2+n-1) \text{ Punkte.}$$

Also:

„Der Rang der Congruenz, d. h. die Zahl der zwei beliebige Gerade schneidenden Congruenzstrahlen ist

$$= 4(n-1)(n^2+n-1).\text{“}$$

42. Nehmen wir beide Gerade g_1 und g_2 als sich schneidend an, so bestehen die g_1 und g_2 schneidenden Congruenzstrahlen:

1. aus den in der Ebene $[g_1 g_2]$ liegenden,
2. aus den durch den Punkt $(g_1 g_2)$ gehenden Congruenzstrahlen,

ihre Anzahl ist also:

$$6(n-1)^2 + 2(n-1)(2n^2-n+1) = 4(n-1)(n^2+n-1),$$

was mit obigem Resultate übereinstimmt.

(Fortsetzung folgt.)

XIII.

Ueber die Anzahl der Lösungen gewisser Aufgaben und allgemeine Eigenschaften algebraischer Curven.

Von

Benedikt Sporer.

Eine grosse Anzahl von Aufgaben, deren Lösungen selbst auf unüberwindliche Schwierigkeiten führen, lässt dennoch wenigstens die Bestimmung der Zahl dieser Lösungen zu. Eng damit in Verbindung stehen gewisse Eigenschaften algebraischer Curven. Aufgabe dieser Arbeit ist es nun, zur Behandlung solcher Aufgaben einen rein geometrischen Weg zu eröffnen. Es wird sich für Denjenigen, der mit Aufmerksamkeit unsere Arbeit verfolgt, zeigen, dass die hier entwickelte Art der Behandlung in vielen Fällen sicherer zum Ziele führt, als die von Chasles gegebene Bedingung des Zusammenfallens von Punkten, während bei anderen Fällen es umgekehrt der Fall sein mag. Namentlich lassen sich oft die von Chasles als *„solutions etrangères“* bezeichneten Lösungen bei einiger Vorsicht leicht ausscheiden. Ueberdies eröffnet diese Art der Behandlung solcher Fragen den Weg zur Untersuchung einer Fülle von Fragen über die Eigenschaften algebraischer Curven, und namentlich sind es die Resultate, welche Steiner in seinen Arbeiten:

Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Curven. Gesammelte Werke, Bd. 2 S. 493—500;

Ueber solche algebraische Curven, die einen Mittelpunkt haben, und über darauf bezügliche Eigenschaften allgemeiner Curven, sowie über geradlinige Transversalen der letzteren. Ebenda Bd. 2 S. 501—601, und

Eigenschaften der Curven vierten Grades rücksichtlich ihrer Doppeltangenten. Ebenda Bd. 2 S. 603—612

gab, die sich mittels der hier entwickelten Art beinahe durchweg leicht beweisen lassen, wie wir theils hier, theils in anderen Arbeiten zeigen werden.

I.

Ueber die Anzahl Kegelschnitte, welche durch Punkte, Tangenten und Normalen bestimmt sind.

1. Irgend ein Büschel Kegelschnitte durch vier Punkte, $B(C^2)$, sei gegeben. Ein Kegelschnitt C^2, der diesem Büschel angehört, bestimmt auf zwei Geraden G und $\mathfrak{H}$ zwei Punkte P und Q und also eine Gerade PQ

derart, dass durch jeden Punkt von G oder $\mathfrak{H}$ zwei, aber auch nur zwei solche Gerade PQ gehen. Schneidet jedoch ein Kegelschnitt des Büschels durch den Schnitt A von G und $\mathfrak{H}$ diese Geraden noch in B und C, so sind auch AB und AC als besondere Lagen der Geraden PQ anzusehen, G und $\mathfrak{H}$ also ebenfalls im Ort der Geraden PQ und zwar je als einfache Tangente anzusehen. Durch jeden Punkt von G (oder $\mathfrak{H}$) gehen also drei Gerade PQ, von denen eine mit G (oder $\mathfrak{H}$) vereinigt ist; d. h. wir erhalten:

Der Ort der Geraden PQ ist eine Curve dritter Classe, die G und $\mathfrak{H}$ zu Tangenten hat.

Durch irgend einen Punkt R, der nicht auf G oder $\mathfrak{H}$ gelegen ist, gehen also auch drei Gerade PQ. Drehen wir nun $\mathfrak{H}$, bis $\mathfrak{H}$ mit G zusammenfällt, so kann die Anzahl von drei durch R gehenden Geraden PQ sich nicht ändern, PQ wird jedoch jetzt nicht mehr Sehne im Kegelschnitt B^2, sondern Tangente in P auf G, und da durch irgend einen Punkt P auf G nur eine solche Tangente PQ hindurchgeht, die mit G nicht zusammenfällt, so ist G jetzt zweifache Tangente des Ortes geworden, d. h. wir erhalten:

Liegt der Berührungspunkt einer Tangente T eines Kegelschnittes C^2 eines Büschels $B(C^2)$ auf einer festen Geraden G, so ist der Ort der Tangente T eine Curve dritter Classe T_2^3 mit G als zweifacher Tangente.*

Daraus ergiebt sich uns folgender bekannter Satz:

Die Kegelschnitte eines Büschels sind so beschaffen, dass je zwei derselben eine Gerade berühren und je drei derselben eine Gerade senkrecht durchschneiden.

2. Ist ebenso ein System Kegelschnitte $S(C^2)$ gegeben, welches die Eigenschaft besitzt, dass alle Kegelschnitte desselben durch drei Punkte gehen und eine Gerade L berühren, so zeigt uns der oben angeführte Satz direct, dass durch jeden Punkt P einer Geraden G zwei Kegelschnitte des Systems $S(C^2)$ gehen. Diese beiden Kegelschnitte bestimmen jedoch auf einer zweiten Geraden $\mathfrak{H}$ vier Punkte Q. Lassen wir die Punkte P und Q wieder in den Schnitt von G und $\mathfrak{H}$ fallen, so folgt daraus wieder:

Der Ort der Geraden PQ ist eine Curve sechster Classe mit G und $\mathfrak{H}$ als Doppeltangenten.

Fällt weiter G mit $\mathfrak{H}$ zusammen, so giebt dies uns den Satz:

Liegt der Berührungspunkt einer Tangente T eines Kegelschnittes C^2 des obigen Systems auf einer Geraden G, so ist der Ort der Tangente T eine Curve sechster Classe T_4^6 mit G als vierfacher Tangente. Und:

---

* Wir haben dieses Resultat, das ja allgemein bekannt ist, absichtlich auf diese umständliche Art entwickelt, um das Wesen der hier behandelten Fragen besser hervortreten zu lassen.

Die Kegelschnitte des Systems sind so beschaffen, dass je vier derselben eine Gerade G berühren und sechs derselben diese Gerade senkrecht durchschneiden.

3. Hat das System Kegelschnitte $S(C^2)$ die Eigenschaft, dass alle Kegelschnitte desselben durch zwei Punkte x, y gehen und zwei Gerade berühren, so finden wir ebenso bei analoger Bezeichnung:

Der Ort der Geraden PQ ist eine Curve zwölfter Classe mit G und $\mathfrak{H}$ als vierfachen Tangente, P^{12}.

Fällt jedoch jetzt G mit $\mathfrak{H}$ zusammen, so ist die neu entstehende Curve zwar auch noch von der zwölften Classe, aber sie zerfällt in eine Curve achter Classe mit G als vierfacher Tangente und in den Schnittpunkt von xy mit G, der vierfach zählend eine Curve vierter Classe bildet, indem jede Gerade durch diesen Punkt auch vierfach als Gerade PQ anzusehen ist. Demnach erhalten wir:

Liegt der Berührungspunkt der Tangente T des Systems Kegelschnitte, das durch zwei Tangenten und zwei Punkte bestimmt ist, auf einer Geraden G, so ist der Ort dieser Tangente eine Curve achter Classe T_4^8, mit G als vierfacher Tangente. Und:

Die Kegelschnitte des genannten Systems sind so beschaffen, dass je vier derselben eine Gerade berühren und je acht eine Gerade senkrecht durchschneiden.

4. Berühren ferner alle Kegelschnitte eines Systems $S(C^2)$ die Seiten eines Dreiecks ABC und gehen alle durch einen Punkt D, so finden wir ebenso:

Der Ort der Geraden PQ ist eine Curve zwölfter Classe mit G und $\mathfrak{H}$ als vierfachen Tangenten.

Demnach würde sich für den Fall, dass G und $\mathfrak{H}$ zusammenfallen, wieder eine Curve zwölfter Classe mit G als achtfacher Tangente ergeben, und acht Kegelschnitte müssten somit G berühren und dem System $S(C^2)$ angehören. Dies ist in der That so; aber auch hier treten uneigentliche Lösungen auf. Jede der Geraden AD, BD und CD zählt nämlich als zwei solche Kegelschnitte und es bleiben somit nur zwei weitere eigentliche Kegelschnitte übrig, und ebenso zerfällt die Curve zwölfter Classe in je drei zweifach zählende Curven erster Classe, d. h. in die drei zweifach zählenden Schnittpunkte von AD, BD, CD mit G, und in eine Curve sechster Classe, d. h.: diese letztere Curve hat in den genannten drei Punkten Doppelpunkte. Wir erhalten also:

Liegt der Berührungspunkt einer Tangente T eines Kegelschnittes C^2 eines Systems $S(C^2)$, von dem jeder Kegelschnitt durch einen Punkt geht und drei Gerade berührt, auf einer Geraden G, so ist der Ort der Tangente T eine Curve sechster Classe mit G als zweifacher Tangente T_2^4. Und:

Unter den Kegelschnitten des Systems berühren je zwei eine Gerade G und durchschneiden je sechs eine Gerade senkrecht.

5. Ganz ebenso erhalten wir für das System $S(C^2)$, das durch vier Tangenten bestimmt ist, wenn wir an obiger Bezeichnung festhalten:

Berühren die Kegelschnitte eines Systems alle vier gegebenen Geraden, so ist der Ort der Tangente T eine Curve T_1^3 der dritten Classe, die auch G berührt. Und:

Die Curven des Systems sind so beschaffen, dass je eine derselben eine fünfte Gerade berührt und drei derselben eine Gerade senkrecht durchschneiden.

6. Ist weiter ein System Kegelschnitte so beschaffen, dass jeder Kegelschnitt derselben durch drei Punkte geht und eine Gerade zur Normalen hat, so folgt aus 1 und 2, dass je drei Kegelschnitte des Systems noch durch einen weiteren Punkt gehen, und je sechs derselben noch eine zweite Gerade berühren. Durchschneidet ein solcher Kegelschnitt nun eine Gerade G in einem Punkte P und ziehen wir in P an diesen Kegelschnitt eine Tangente, so gehen durch jeden Punkt P auf G drei Tangenten T, während T auch sechsmal mit G zusammenfällt, nämlich für jeden der sechs Kegelschnitte des Systems, welche G berühren, je einmal. Daraus schliessen wir:

Der Ort der Geraden T ist eine Curve neunter Classe T_6^9, mit G als sechsfacher Tangente. Und:

Es giebt neun Kegelschnitte, die durch drei Punkte gehen und zwei gegebene Geraden zu Normalen haben.

7. Ebenso finden wir auf gleiche Art durch Combination von 2—5:

Ist jeder Kegelschnitt eines Systems $S(C^2)$ so beschaffen, dass er durch zwei Punkte geht, eine Gerade berührt und eine zweite Gerade zur Normale hat, und soll der Berührungspunkt einer Tangente T eines solchen Kegelschnittes auf einer Geraden G gelegen sein, so ist der Ort der Tangente T eine Curve 14. Classe T_8^{14} mit G als achtfacher Tangente. Und:

Es giebt 14 Kegelschnitte, welche durch zwei Punkte gehen, eine Gerade berühren und zwei andere Gerade zu Normalen haben. Und ebenso:

Es giebt auch 14 Kegelschnitte, die durch einen Punkt gehen, zwei Gerade berühren und zwei Gerade zu Normalen haben. Und es giebt weiter neun Kegelschnitte, welche drei Gerade berühren und zwei andere senkrecht durchschneiden.

8. Aus den in 6 und 7 entwickelten Sätzen können wir wieder folgenden ableiten:

Ist ein System Kegelschnitte so beschaffen, dass alle Kegelschnitte des Systems durch zwei Punkte gehen und zwei Gerade senkrecht durchschneiden, so ist das System Kegelschnitte so beschaffen, dass je neun durch einen dritten Punkt gehen und je 14 eine Gerade berühren.

Hieraus ergiebt sich uns wieder eine Ortscurve T_{14}^{23}, und diese liefert wieder:

Es gehen 23 Kegelschnitte durch zwei Punkte und haben drei Gerade zu Normalen.

Auf ganz gleiche Art folgt weiter:

Soll ein Kegelschnitt durch einen Punkt gehen, eine Gerade berühren und nebstdem noch drei weitere Gerade zu Normalen haben, so ist die Anzahl der Lösungen gleich 28. U. s. w.

9. Fahren wir auf diese Art fort, so ergiebt sich uns in Bezug auf die Lösungen der Kegelschnitte, welche durch Punkte, Tangenten und Normalen bestimmt sind, wenn wir die Anzahlen Punkte mit P, Tangenten mit T, Normalen mit N und Lösungen mit L bezeichnen, in Uebereinstimmung mit Steiner (Ges. Werke Bd. 2 S. 683) folgendes Schema:

Nr.	P	T	N	L
1	4	.	1	3
2	.	4	1	3
3	3	1	1	6
4	1	3	1	6
5	2	2	1	8
6	3	.	2	9
7	.	3	2	9
8	2	1	2	14
9	1	2	2	14
10	2	.	3	23
11	.	2	3	23
12	1	1	3	28
13	1	.	4	51
14	.	1	4	51
15	.	.	5	102

10. Betrachten wir die Lösungen für sich, so können wir, wenn wir von den Zahlen 1, 2, 4; 4, 2, 1 ausgehen, welche unsere Tabelle vollständig ergänzen würden, wenn wir auch die Fälle $N=0$ aufgenommen hätten, folgendes Bildungsgesetz aufstellen:

1 2 4 4 2 1

3 (1.1 + 1.2) 6 (1.2 + 1.4) 8 (1.4 + 1.4) 6 (1.4 + 1.2) 3 (1.2 + 1.3)

9 (1.3 + 1.6) 14 (1.6 + 1.8) 14 (1.8 + 1.6) 9 (1.6 + 1.3)

23 (1.9 + 1.14) 28 (1.14 + 1.14) 23 (1.9 + 1.14)

51 (1.23 + 1.28) 51 (1.28 + 1.23)

102 (1.51 + 1.51).

Hiermit haben wir eines der einfachsten Beispiele dieser Art behandelt. Es genügte dabei, dass wir auf einfachste Weise die Kegelschnitte eines Systems $S(C^2)$ in Verbindung mit einer Geraden G derart brachten, dass wir auf ihr den Berührungspunkt einer Tangente T jedes Kegelschnittes des Systems fortgleiten liessen. Der Ort dieser Tangente T lieferte uns alsdann sofort das gewünschte Resultat. Dass dies nicht immer so einfach sich verhält, werden die folgenden Beispiele zur Genüge zeigen.

Mit diesen Zahlen L, die wir erhalten, stehen, wie wir kaum noch zu bemerken brauchen, auch andere Aufgaben in engem Zusammenhange.

II.

Ueber die Anzahl Kegelschnitte, welche durch Punkte, Tangenten und berührende Kegelschnitte bestimmt sind.

1. Schon hier genügt es nicht mehr, ein System von Curven mit der Geraden G allein in Beziehung zu setzen, sondern wir sind überdies noch gezwungen, ein zweites System mit derselben Geraden G in Verbindung zu bringen, und zwar ist dies für alle hierher gehörigen Fälle ein Büschel Kegelschnitte $B(P^2)$ durch vier Punkte P_0. Zu diesem Büschel gehört in ganz gleicher Weise wie in I, 1 eine Curve dritter Classe, die der dortigen Curve T_2^3 entspricht und die wir ein- für allemal mit P_2^3 bezeichnen wollen. Ebenso wollen wir kurz vom Ort der Geraden T reden und darunter eben die Einhüllende der Tangente T verstehen, welche je einen Kegelschnitt C^2 des auftretenden Systems $S(C^2)$ in einem Punkte auf G berührt. Weiter wollen wir in Bezug auf das System von dem Orte des Punktes t reden, d. h. dem Berührungspunkte der Tangenten solcher Kegelschnitte C^2, welch' erstere alle durch einen Punkt Q gehen. Weiter werden wir diese Ortscurven mit T_y^x und t_v^u bezeichnen, wobei x die Classe, y wie oft G vielfach als Tangente zu rechnen ist, u ebenso den Grad mit Q als v-fachem Punkte bezeichnet. Dies vorausgesetzt, erhalten wir folgende stufenweise Entwickelung.

2. Das System $S(C^2)$ sei ein Büschel Kegelschnitte durch vier Grundpunkte. Irgend eine Gerade durch Q wird von zwei Kegelschnitten des Büschels $S(C^2)$ in zwei Punkten t berührt. Der Punkt t fällt jedoch auch einmal in Q selbst, nämlich für die Tangente in Q an den durch Q gehenden Kegelschnitt C^2. Auf jeder durch Q gehenden Geraden liegen also drei Punkte t. Dies und das bereits in I, 1 Entwickelte giebt uns den Satz:

Zu dem System $S(C^2)$ von Kegelschnitten durch vier Punkte gehören in Bezug auf eine Gerade G und einen Punkt Q zwei Curven T_2^3 und t_1^3.

Nun haben die beiden Curven T_2^3 und P_2^3 im Ganzen neun Tangenten gemein. Davon fallen jedoch $2.2=4$ auf G selbst und fünf sind von G verschieden. Jeder dieser gemeinsamen fünf Tangenten entspricht eine solche

Curve C^2, die gerade eine andere Curve P^2 des Büschels $B(P^2)$ in einem Punkte auf G berührt. Daraus erhalten wir:

Soll ein Kegelschnitt C^2 eines Büschels $S(C^2)$ einen Kegelschnitt eines zweiten Büschels $B(P^2)$ berühren, so ist der Ort des Berührungspunktes R eine Curve fünften Grades R_1^5, die auch durch die Grundpunkte der Büschel geht.*

Der letztere Umstand ergiebt sich sofort, wenn Q in einen der Grundpunkte der Büschel fällt. Auch hier haben wir die Curve R_1^5 mit zwei Indices versehen, wobei der obere 5 $(=x)$ hier und auch später den Grad der Ortscurve, der rechts unten 1 $(=y)$ anzeigen soll, wie oft jeder der Punkte P_0 als Punkt des Ortes R_1^5 $(=R_y^x)$ anzusehen ist. — Die Curve R_1^5 hat nun mit irgend einem Kegelschnitte P^2 des Büschels $B(P^2)$ zehn Punkte gemein. Hiervon fallen jedoch vier in die vier Grundpunkte P_0, so dass nur sechs andere gemeinsame Punkte auftreten. Dies giebt uns jedoch:

Soll ein Kegelschnitt durch vier Punkte gehen und einen Kegelschnitt P^2 berühren, so giebt es sechs Lösungen.

3. Ist ebenso ein System $S(C^2)$ von Kegelschnitten durch drei Punkte und eine Tangente gegeben, so gehören zu diesem System zwei Ortscurven T_4^6 und t_2^6 (vergl. I 2).

Die Curve T_4^6 hat mit der Curve P_2^3 jedoch ausser G noch

$$6.3 - 4.2 = 10$$

Tangenten gemein. Daraus schliessen wir:

Soll ein Kegelschnitt C^2 durch drei Punkte gehen, eine Gerade und nebstdem noch irgend einen Kegelschnitt P^2 eines Büschels $B(P^2)$ in irgend einem Punkte R berühren, so ist der Ort dieses Berührungspunktes eine Curve R_2^{10}. Ausser den vier Grundpunkten, jeder zweifach zählend, hat diese Curve mit irgend einem Kegelschnitte P^2 des Büschels $B(P^2)$ noch $19.2 - 4.2 = 12$ Punkte R gemein. Dies giebt:

Soll ein Kegelschnitt durch drei Punkte gehen, eine Gerade und irgend einen Kegelschnitt P^3 berühren, so giebt es zwölf Lösungen.

4. Weiter erhalten wir für das System Kegelschnitte, das durch zwei Punkte und zwei Tangenten gegeben ist, in Bezug auf die Gerade G, den Punkt Q und das Büschel $B(P^2)$ die Curven T_4^8, t_4^8 und R_4^{16}, woraus folgt:

Es giebt 16 Kegelschnitte, welche durch zwei Punkte gehen, zwei Gerade und irgend einen Kegelschnitt P^2 berühren.

5. Gleicherweise erhalten wir aus den Curven T_2^6, t_4^6 und R_4^{14} für das System Kegelschnitte, das durch einen Punkt und drei Tangenten bestimmt ist:

* Von dieser Curve lassen sich ausser den Tangenten in den acht Grundpunkten noch 22 andere Punkte leicht linear construiren.

Es giebt zwölf Kegelschnitte, die durch einen Punkt gehen, drei Gerade und irgend einen Kegelschnitt berühren.

Und ferner für das System Kegelschnitte, das durch vier Tangenten bestimmt ist, die Curven t_2^3, T_1^3, R_2^7, also:

Es giebt sechs Kegelschnitte, die vier Gerade und einen Kegelschnitt P^2 berühren.

6. Wir haben in dem Obigen nun sämmtliche Fragen entwickelt, welche wir in Bezug auf die Zahl der Lösungen für Kegelschnitte, welche durch Punkte, Tangenten und einen berührenden Kegelschnitt bestimmt sind, aufstellen können. Diese Lösungen gestatten uns jedoch wieder weitere Combinationen; wir können nämlich die Resultate in 2 und 3 zusammenfassen und folgenden Satz aussprechen:

Das System von Kegelschnitten, welche durch drei Punkte gehen und einen festen Kegelschnitt K^2 $(=P^2)$ berühren, ist so beschaffen, dass je sechs dieser Kegelschnitte durch einen Punkt gehen und zwölf eine Gerade berühren.

Durch jeden Punkt auf G gehen nun wieder sechs von G verschiedene Geraden T, während T zwölfmal mit G zusammenfällt, und auf jeder Geraden durch Q liegen zwölf von Q verschiedene Punkte, während in Q sechs Punkte t vereinigt sind, nämlich jedesmal einer für einen Kegelschnitt des Systems, der durch Q geht. Wir erhalten also zwei Curven T_{12}^{18} und t_6^{18}. Die gemeinsamen Tangenten von T_{12}^{18} mit der oftgenannten Curve P_2^3, die zu einem Büschel $B(P^2)$ gehört (das jedoch K^2 nicht enthält), zerfallen in die 24fach zählende Gerade G und 30 andere Tangenten. Auf G sind also 30 Punkte gelegen, in denen ein Kegelschnitt des Büschels einen solchen des Systems berührt. Hieraus erhalten wir wieder eine Curve R_6^{30}, welche mit irgend einer P^2 wieder ausser den vier Grundpunkten $2.30-6.4=36$ Punkte gemein hat. Also:

Es giebt 36 Kegelschnitte, welche durch drei Punkte gehen und irgend zwei Kegelschnitte nebstdem noch berühren.

7. Ebenso haben wir weiter:

Gehen alle Kegelschnitte eines Systems durch zwei Punkte und berühren eine Gerade und einen Kegelschnitt K^2, so bedecken sie die ganze Ebene derart, dass durch jeden Punkt zwölf derselben gehen und je 16 eine Gerade berühren (aus 3 und 4). Dies giebt uns wieder Curven T_{12}^{28}, t_{11}^{28}, R_{12}^{52} und:

Es giebt 56 Kegelschnitte, die durch zwei Punkte gehen, zwei Kegelschnitte K^2 und eine Gerade berühren.

8. Auf ganz gleiche Weise lassen sich die anderen Fragen vollends behandeln, und wir erhalten dabei folgende Tabelle:

Nr.	Bestimmungsstücke.			Hilfscurven.			Lösungen	Gesetz der Bildung
	P	T	K^2	T_y^x	t_x^y	R_v^u		
1	4	.	1	T_2^3	t_1^3	R_1^5	6	2.1 + 2.2
2	3	1	1	T_4^6	t_2^6	R_2^{10}	12	2.2 + 2.4
3	2	2	1	T_4^8	t_4^8	R_4^{16}	16	2.4 + 2.4
4	1	3	1	T_2^6	t_4^6	R_4^{14}	12	2.4 + 2.2
5	.	4	1	T_1^3	t_2^3	R_2^7	6	2.2 + 2.1
6	3	.	2	T_{12}^{18}	t_6^{18}	R_6^{30}	36	2. 6 + 2.12
7	2	1	2	T_{16}^{28}	t_{12}^{28}	R_{12}^{52}	56	2.12 + 2.16
8	1	2	2	T_{12}^{28}	t_{16}^{28}	R_{16}^{60}	56	2.16 + 2.12
9	.	3	2	T_6^{18}	t_{12}^{18}	R_{12}^{42}	36	2.12 + 2. 6
10	2	.	3	T_{56}^{92}	t_{36}^{92}	R_{36}^{164}	184	2.36 + 2.56
11	1	1	3	T_{56}^{112}	t_{56}^{112}	R_{56}^{224}	224	2.56 + 2.56
12	.	2	3	T_{36}^{92}	t_{56}^{92}	R_{56}^{204}	184	2.56 + 2.36
13	1	.	4	T_{224}^{408}	t_{184}^{408}	R_{184}^{776}	816	2.184 + 2.224
14	.	1	4	T_{184}^{408}	t_{224}^{408}	R_{224}^{856}	816	2.224 + 2.184
15	.	.	5	T_{816}^{1632}	t_{816}^{1632}	R_{816}^{3264}	3264	2.186 + 2.816

Hierbei sind die im Bildungsgesetz zuerst auftretenden Zahlen 1, 2, 4, 4, 2, 1 die Anzahl Lösungen für den Fall, dass der Kegelschnitt nur durch Punkte und Tangenten bestimmt ist.

III.

Ueber Kegelschnitte, welche irgend fünf gegebene Curven berühren.

1. Tritt in Obigem an Stelle des Büschels $B(P^2)$ irgend ein Büschel Curven x^{ten} Grades, so erhalten wir in Bezug auf die Curven dieses Büschels und irgend zwei Geraden G und $\mathfrak{H}$ folgende Betrachtung:

Durch jeden Punkt M von G geht eine Curve C^x des Büschels $B(C^x)$ und diese Curve bestimmt auf der zweiten Geraden $\mathfrak{H}$ x Punkte N, wodurch auch x Gerade MN gegeben sind. Lassen wir weiter den Punkt M und auch den Punkt N in den Schnittpunkt A von G und $\mathfrak{H}$ fallen, so finden wir, dass MN auch je $(x-1)$-mal mit G und mit $\mathfrak{H}$ zusammenfällt. Daraus können wir jedoch schliessen, dass der Ort der Geraden MN von der $(2x-1)^{\text{ten}}$ Classe ist und dass G und $\mathfrak{H}$ je $(x-1)$-fache Tangenten dieses Ortes sind. Durch irgend einen Punkt Q ausserhalb der beiden Geraden G und $\mathfrak{H}$ gehen also $(2x-1)$ Gerade MN. Diese Zahl $(2x-1)$ kann sich nun nicht ändern, wenn $\mathfrak{H}$ um A sich dreht, und bleibt auch dann noch, wenn $\mathfrak{H}$ mit G zusammenfällt. Durch jeden Punkt M der Geraden G geht jetzt jedoch nur noch eine einzige solche Gerade MN, die mit G nicht zusammenfällt, nämlich die Tangente in M, an die durch M gehende Curve des Büschels; G ist also nothwendig zur $(2x-2)$-fachen Tangente geworden, oder wir haben:

Liegt der Berührungspunkt einer Tangente P einer Curve C^x eines Büschels auf einer Geraden G, so ist der Ort dieser Tangente eine Curve $(2x-1)^{\text{ter}}$ Classe $P^{2x-1}_{2(x-1)}$, mit G als $2(x-1)$-facher Tangente.

Von diesem Satze ausgehend, können wir in analoger Weise wie in II stufenweise die Aufgabe behandeln: Es soll die Anzahl Kegelschnitte bestimmt werden, die irgend fünf gegebene Curven C^p, C^q, C^r, C^s und C^t berühren. Es dürfte genügen, wenn wir hier das Schema der Lösungen geben.

Nr.	P	T	C^x	Lösungen	Bildungsgesetz
1	4	.	1	$p(p+1)=A$	$1\alpha_1+2\beta_1$
2	3	1	1	$2p(p+1)=B$	$2\alpha_1+4\beta_1$
3	2	2	1	$4p^2=C$	$4\alpha_1+4\beta_1$
4	1	3	1	$2p(p-1)=D$	$4\alpha_1+2\beta_1$
5	.	4	1	$p(2p-1)=E$	$2\alpha_1+\beta_1$
6	3	.	2	$pq(p+1)(q-1)=F$	$A\alpha_2+B\beta_2$
7	2	1	2	$2pq(pq+p+q-1)=G$	$B\alpha_2+C\beta_2$
8	1	2	2	$2pq(2pq-1)=H$	$C\alpha_2+D\beta_2$
9	.	3	2	$pq(4pq-2(p+q)+1)=J$	$D\alpha_2+E\beta_2$
10	2	.	3	$rpq\{rpq+(rp+rq+pq)+(p+q+r)-3\}=K$	$F\alpha_3+G\beta_3$
11	1	1	3	$2rpq\{rpq+(rp+rq+pq)-(p+q+r)\}=L$	$G\alpha_3+H\beta_3$
12	.	2	3	$pqr\{4pqr-2(pq+pr+rq)+3\}=M$	$H\alpha_3+J\beta_3$
13	1	.	4	$pqrs\{pqrs+(rpq+rps+rqs+pqs)+(rp+rq+rs+pq+ps+qs)-3(p+q+r+s)+3\}=N$	$K\alpha_4+L\beta_4$
14	.	1	4	$pqrs\{2pqrs+2(pqr+pqs+prs+qrs)-2(pq+pr+ps+qr+qs+rs)+3\}=O$	$L\alpha_4+M\beta_4$
15	.	.	5	$pqrst\{pqrst+(pqrs+pqrt+prst+qrst+(pqr+pqs+pqt+prs+prt+pst+qrs+qrt+qst+rst)-3(pq+pr+ps+pt+qr+qs+qt+rs+rt+st)+3(p+q+r+s+t)\}=P$	$N\alpha_5+O\beta_5$

Hierbei sind die Werthe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \beta_1, \beta_2, \ldots$ bestimmt durch folgende Gleichungen:

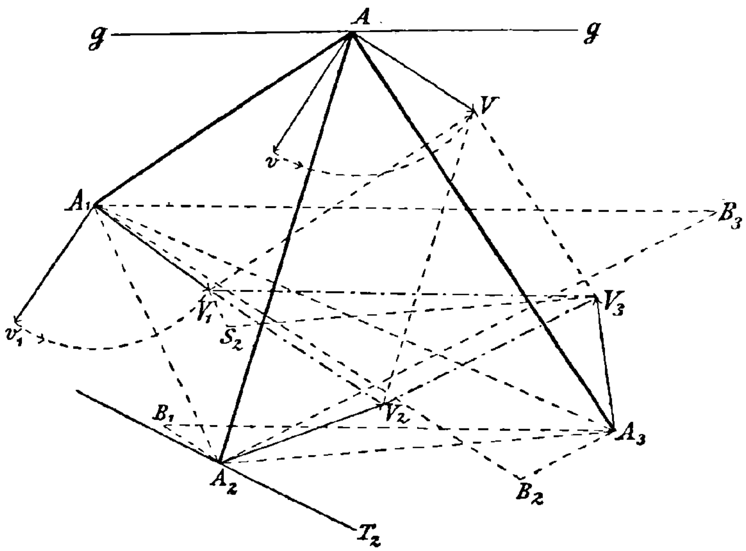
$$\alpha_1=p(p-1),\quad \alpha_2=q(q-1),\quad \alpha_3=r(r-1),\quad \alpha_4=s(s-1),\quad \alpha_5=t(p-1);$$
$$\beta_1=p,\quad \beta_2=q,\quad \beta_3=r,\quad \beta_4=s,\quad \beta_5=t.$$

(Schluss folgt.)

Kleinere Mittheilungen.

XII. Die momentane Bewegung dreier starrer Geraden mit einem gemeinschaftlichen Punkte in einer Ebene.

Drei starre in einer Ebene sich bewegende Gerade seien im Punkte A (s. d. Fig.) drehbar verbunden, während je ein Punkt auf jeder der drei



Geraden sich mit einer nach Grösse und Richtung vorgeschriebenen Geschwindigkeit bewegen soll; die drei Punkte seien A_1, A_2, A_3, ihre Geschwindigkeiten v_1, v_2, v_3. Unter diesen Voraussetzungen ist im Allgemeinen die Bewegung des Punktes A und folglich auch der drei Geraden nicht möglich, denn die Geschwindigkeit v des Punktes A ist nach Grösse und Richtung schon bestimmt durch die Geschwindigkeiten zweier der drei Punkte A_1, A_2, A_3. Denn zerlegt man die Geschwindigkeiten der Punkte einer starren Geraden je in zwei Componenten nach der Richtung der Geraden und senkrecht zu ihr, so sind die ersteren Componenten zufolge der Starrheit der Geraden nothwendig einander gleich; hiernach sind z. B. die Componenten von v in der Richtung von A_1A, bez. A_2A gleich denjenigen von v_1, bez. v_2, weshalb sich v sofort findet, indem man die letzteren Componenten im Punkte A anträgt und in den Endpunkten derselben Lothe zu A_1A, bez. A_2A errichtet. Diese Lothe schneiden sich im Endpunkte der Strecke, welche v

nach Grösse und Richtung darstellt; es ist sonach die momentane Bewegung von A völlig durch v_1 und v_2 bestimmt. Hieraus erkennt man, dass die Bewegung des Punktes A unter den eingangs erwähnten Voraussetzungen im Allgemeinen überbestimmt, also unmöglich ist. Man übersieht jedoch sofort, dass die momentane Bewegung von A möglich wird, wenn die orthogonalen Componenten von v in Richtung der drei Geraden AA_1, AA_2, AA_3 übereinstimmen mit den orthogonalen Componenten von v_1, bezw. v_2 und v_3. Es entsteht daher die Frage, welchen Bedingungen die Längen der drei Geraden AA_1, AA_2, AA_3 zu genügen haben, damit die momentane Bewegung des gemeinschaftlichen Punktes A und damit der drei Geraden selbst möglich sei, oder, was auf dasselbe hinausläuft, damit die Geschwindigkeit v eindeutig durch die drei gegebenen Geschwindigkeiten v_1, v_2 und v_3 bestimmt wird.

Die Beantwortung dieser Frage wird erheblich vereinfacht, wenn wir die Bestimmung von v in etwas anderer Weise ausführen und zwar unter Benutzung der sogenannten lothrechten oder orthogonalen Geschwindigkeiten,* d. i. der im gleichen Sinne um 90^0 gedrehten Geschwindigkeiten.** Es liegen bekanntlich die Endpunkte der Strecken, welche die orthogonalen Geschwindigkeiten der Punkte einer starren Geraden nach Grösse und Richtung darstellen, auf einer Parallelen zu der Geraden; sind also $A_1 V_1$ und $A_2 V_2$ die lothrechten Geschwindigkeiten der Punkte A_1 und A_2, so liegt der Endpunkt v der lothrechten Geschwindigkeit AV des Punktes A sowohl auf der durch V_1 gelegten Parallelen zu $A_1 A$, als auch auf der durch V_2 gehenden Parallelen zu $A_2 A$, folglich im Schnittpunkte beider Parallelen. Aus dieser Construction des Punktes geht unmittelbar hervor, dass sich im Allgemeinen für V hier drei Punkte ergeben, weil V im Schnittpunkte je zweier der drei bezw. durch V_1, V_2, V_3 gelegten Parallelen zu den drei Geraden $A_1 A$, $A_2 A$, $A_3 A$ liegen muss. Wenn dagegen die erwähnten drei Parallelen sich in einem Punkte schneiden (wie dies in der Figur angenommen wurde), so ist die orthogonale Geschwindigkeit AV des Punktes A eindeutig bestimmt, also auch die Geschwindigkeit v dieses Punktes. Es reducirt sich hiernach die Beantwortung der gestellten Frage auf die Lösung des folgenden geometrischen Problems: Es ist der Ort aller Punkte A zu finden, welche, mit den Eckpunkten eines beliebigen Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ verbunden, Gerade ergeben, deren durch die entsprechenden Ecken eines beliebigen zweiten Dreiecks $V_1 V_2 V_3$ gelegten Parallelen sich in einem Punkte V schneiden.

Wir finden diesen geometrischen Ort durch folgende Ueberlegung. Es sei A (s. die Fig.) ein Punkt des gesuchten geometrischen Ortes und g eine

* Vergl. Schadwill, Das Gliedvierseit als Grundlage der Kinematik. Verhandl. des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleisses 1876, 55. Jahrg. S. 378; ferner Burmester, Lehrbuch der Kinematik, Bd. I S. 55.

** In der Figur sind diese Drehungen nur für v und v_1 angedeutet.

beliebige durch A gehende Gerade. Wir ermitteln zunächst alle die Punkte V, welche sich Punkten auf der Geraden g zuordnen. Zu dem Ende lassen wir A alle Punkte von g durchlaufen; es bilden dann die durch V_1 parallel zu A_1A gelegten Strahlen ein Strahlbüschel, dessen Träger in V_1 liegt und das projectivisch ist zu dem Büschel, welches die durch V_2 parallel zu A_2A gelegten Strahlen zusammensetzen. Denn die Strahlen A_1A und A_2A stehen über derselben Punktreihe g, gehören also perspectivischen Strahlbüscheln an, und hieraus resultirt die behauptete Projectivität. Das Erzeugniss der beiden projectivischen Strahlbüschel ist ein Kegelschnitt K_{12}, welcher durch V_1 und V_2 geht. Die durch V_3 parallel zu A_3A gelegten Strahlen constituiren ebenfalls ein Büschel, welches aus den gleichen Gründen zu den beiden vorgenannten Büscheln projectivisch ist. Das Erzeugniss derjenigen beiden Büschel, deren Träger V_2, bez. V_3 sind, ist folglich auch ein Kegelschnitt K_{23}, welcher durch V_2 und V_3 geht. Die beiden Kegelschnitte K_{12} und K_{23} haben ausser V_2 noch drei Punkte gemeinsam; letztere sind diejenigen Punkte, in denen sich je drei einander zugeordnete Strahlen der erwähnten drei Büschel schneiden. Diesen drei Punkten entsprechen drei Punkte auf der Geraden g und zwar sind letztere die Schnittpunkte von g mit dem gesuchten geometrischen Ort der Punkte A, welcher folglich eine Curve dritter Ordnung sein muss. Es lässt sich jedoch leicht zeigen, dass diese Curve in einen Kegelschnitt K und die unendlich ferne Gerade zerfällt. Denn der unendlich ferne Punkt auf der Geraden g ist ein Punkt des geometrischen Ortes, weil die ihm entsprechenden Strahlen der drei Büschel parallel sind, also in einem Punkte V, und zwar einem unendlich fernen, sich schneiden; alle unendlich fernen Punkte der Ebene gehören sonach dem gesuchten geometrischen Orte an. Hiermit ist der rein geometrische Theil des Problems gelöst und in Rücksicht auf den Ausgangspunkt unserer Betrachtungen zugleich das folgende Resultat erhalten worden:

Bewegen sich drei beliebige Punkte A_1, A_2, A_3 in einer Ebene mit gegebenen Geschwindigkeiten, so ist der geometrische Ort aller Punkte A, deren Verbindung mit A_1, A_2 und A_3 durch starre Gerade die gegenseitige Beweglichkeit der letzteren nicht aufhebt, eine aus der unendlich fernen Geraden und einem Kegelschnitt K bestehende Curve dritter Ordnung.

Wir können dieses Ergebniss noch in einer etwas allgemeineren Form aussprechen. Fassen wir nämlich jede der drei starren Geraden A_1A, A_2A, A_3A als Repräsentanten einer beweglichen starren Ebene auf, und v_1, v_2, v_3 als Geschwindigkeiten je eines beliebigen Punktes der drei Ebenen, so ist der Ort aller Punkte, in denen die drei complanen Ebenen verbunden werden können, ohne dass hierdurch die momentane Bewegung der Ebenen gegen einander und die ruhende Ebene aufgehoben wird, eine Curve dritter Ordnung, welche in die unendlich ferne Gerade und einen Kegelschnitt K zerfällt.

Von diesem Kegelschnitte lassen sich leicht sechs Punkte und drei Tangenten angeben, so dass derselbe unmittelbar construirt zu werden vermag. Denken wir uns die willkürliche Gerade g in die Verbindungslinie A_2A gelegt, so zerfallen die Kegelschnitte K_{12} und K_{23} je in zwei Gerade, von denen die eine die durch V_2 gehende Parallele zu g ist, während die andere der durch V_1 gehende Parallelstrahl zur Verbindungslinie A_1A_2, bezw. der durch V_3 gehende Parallelstrahl zu A_3A_2 sein muss. Dem Schnittpunkte S_2 der letzteren Parallelstrahlen entspricht als Punkt des Kegelschnittes K der Punkt A_2; es geht also K durch A_2. Lässt man nun A auf K fortrückend mit A_2 zusammenfallen, so erkennt man, dass die Richtung des Stabes A_2A dann identisch wird mit derjenigen der Tangente A_2T_2 des Kegelschnittes K in A_2; andererseits ist aber A_2A parallel dem zugeordneten Strahle des Büschels (V_2), in diesem Falle also der Geraden V_2S_2, so dass wir $A_2T_2 \| V_2S_2$ finden. Durch die analogen Schlüsse gelangt man zu dem Resultat, dass auch die Punkte A_1 und A_3 auf dem Kegelschnitt K liegen, ferner, dass die Tangenten in A_1 und A_3 in der gleich einfachen Weise bestimmbar sind. Weitere drei Punkte von K finden sich durch folgende Ueberlegung. Der Punkt V_2 war den beiden Kegelschnitten K_{12} und K_{23} gemeinsam; ihm entspricht folglich ein Punkt von K. Dieser Punkt ergiebt sich als Schnittpunkt B_2 der Strahlen, welche wir durch A_1, bezw. A_3 parallel zu V_1V_2, bezw. V_3V_2 legen. Analog finden sich B_1 und B_3.

Die hier behandelte kinematische Aufgabe steht in engstem Zusammenhange mit einem scheinbar gänzlich verschiedenen Probleme, welches allgemeinere Bedeutung besitzt. In einer Ebene möge die Lage von k Punkten durch rechtwinklige Coordinaten x_α, y_α gegeben sein. Bezeichnen x_hy_h und x_iy_i die Coordinaten zweier dieser Punkte, deren Entfernung a_{hi} beträgt, so sind bekanntlich $2k-3$ Gleichungen der Form

$$\text{A)}\qquad (x_h-x_i)^2+(y_h-y_i)^2-a_{hi}^2=0$$

nothwendig, um die gegenseitig unveränderliche Lage der k Punkte analytisch auszudrücken. Hinreichend sind die Gleichungen A) aber nur dann, wenn sie von einander nicht abhängen, also die Functionaldeterminante D des Gleichungssystems A) von Null verschieden ist. Diese Functionaldeterminante steht nun in directer Beziehung zu der vorher gefundenen Curve dritter Ordnung, bez. dem Kegelschnitte K, wie jetzt erwiesen werden soll. In dieser Absicht führen wir hier einige Begriffe und Bezeichnungen aus der Fachwerkstheorie ein, einerseits weil sich der beabsichtigte Beweis dann wesentlich übersichtlicher und einfacher erbringen lässt, andererseits weil hierdurch zugleich ein Einblick gewonnen wird in dasjenige Specialgebiet, für welches diese Untersuchungen von besonderer Wichtigkeit sind.

Denken wir uns die k Punkte durch s starre Strecken oder Stäbe von den Längen a_{hi} derart verbunden, dass in jedem der k Punkte mindestens zwei Strecken oder Stäbe zusammenstossen, so bildet diese Stabverbindung ein sogenanntes ebenes Stabwerk oder Fachwerk. Die Punkte selbst heissen dann **Knotenpunkte** des Fachwerkes; speciell heisst ein solcher Punkt ein i-**facher** Knotenpunkt, wenn in demselben i Stäbe verbunden sind. Das Fachwerk wird **starr** oder **steif** genannt, wenn die Knotenpunkte desselben durch die sie verbindenden Stäbe in gegenseitig unveränderlicher Lage erhalten werden. Hierzu sind mindestens $s = 2k - 3$ starre Stäbe nothwendig und im Allgemeinen auch hinreichend. Das Fachwerk heisst ein **einfaches**, falls die Anzahl der Stäbe die nothwendige, also $s = 2k - 3$ ist; wenn dagegen $s > 2k - 3$, so nennt man das Fachwerk ein **zusammengesetztes**.

Es leuchtet ohne Weiteres ein, dass die nothwendige und hinreichende Bedingung der Starrheit oder Steifheit eines ebenen **einfachen** Fachwerkes identisch ist mit der gegenseitigen Unabhängigkeit der Stablängen a_{hi}, also der Gleichungen A); ist demnach die erwähnte Functionaldeterminante D von Null verschieden, so muss das Fachwerk starr sein, im andern Falle beweglich. Dieses allgemeine Kriterium der Starrheit eines ebenen einfachen Fachwerkes ist von **Henneberg*** in eine für die Beurtheilung bequemere Form gebracht worden und zwar unter Benutzung des Umstandes, dass sich die Frage nach der Starrheit bei allen derartigen Fachwerken, welche **zweifache** Knotenpunkte enthalten, viel einfacher und directer beantworten lässt.

Tritt in einem einfachen Fachwerk ein zweifacher Knotenpunkt e auf, so steht derselbe, wie man unmittelbar übersieht, mit den übrigen $k-1$ Knotenpunkten in starrer Verbindung, wenn die beiden nach ihm führenden Stäbe nicht in gerader Linie liegen, vorausgesetzt, dass die übrigen $k-1$ Knotenpunkte unter sich starr verbunden sind. Ist die letztere Voraussetzung nicht erfüllt, so kann auch das ganze Fachwerk nicht starr sein. Es lässt sich deshalb die Frage nach der Starrheit eines Fachwerkes mit einem zweifachen Knotenpunkte zurückführen auf die des Fachwerkes von $k-1$ Knotenpunkten, indem man den zweifachen Knotenpunkt durch Entfernung der beiden von ihm ausgehenden Stäbe beseitigt. Enthält das so reducirte Fachwerk wieder zweifache Knotenpunkte, so kann man in der angegebenen Weise die Zahl der Knotenpunkte noch weiter reduciren; durch diese Reduction wird man schliesslich entweder auf ein Dreieck geführt, in welchem Falle das ursprüngliche Fachwerk unbedingt starr ist, oder auf ein einfaches Fachwerk** ohne zweifachen Knotenpunkt. Es ist daher nur noch für die letzteren Fachwerke ein einfaches Kriterium ihrer Starrheit aufzustellen. Hierbei stützen wir uns auf den leicht beweisbaren Satz, dass einfache Fachwerke ohne zweifachen Knotenpunkt mindestens sechs dreifache Knotenpunkte enthalten müssen.

---

* Statik der starren Systeme. Darmstadt 1886. S. 214 flgg.

** Dass das reducirte Fachwerk stets wieder ein einfaches sein muss, erkennt man daraus, dass die Relation $s = 2k - 3$ auch für die reducirten Fachwerke bestehen bleibt, weil sich bei der Reduction immer k um 1 und s um 2 verringert.

Es sei A ein dreifacher Knotenpunkt, dessen Coordinaten mit x, y bezeichnet werden mögen; A_1, A_2, A_3 seien diejenigen Knotenpunkte des Fachwerkes, mit denen A durch starre Stäbe von den Längen a_1, a_2, a_3 direct verbunden ist. Bezeichnen $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$ die Coordinaten dieser letzteren Punkte, so bestehen die drei Gleichungen

$$\begin{aligned}(x-x_1)^2+(y-y_1)^2-a_1^2&=0,\\(x-x_2)^2+(y-y_2)^2-a_2^2&=0,\\(x-x_3)^2+(y-y_3)^2-a_3^2&=0.\end{aligned}$$

Zu diesen treten noch $2k-6$ Gleichungen der Form A), in denen aber x und y nicht vorkommen. Die Functionaldeterminante dieser $2k-3$ Gleichungen nimmt hier, wenn wir noch zur Abküzung

$$x-x_i=X_i, \quad y-y_i=Y_i \qquad (i=1,2,3)$$

setzen, die Form an

$$D=\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & -X_1 & -Y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\ldots \\ X_2 & Y_2 & 0 & 0 & -X_2 & -Y_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\ldots \\ X_3 & Y_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -X_3 & -Y_3 & 0 & 0 & 0 & 0\ldots \\ 0 & 0 & X_{14} & Y_{14} & X_{24} & Y_{24} & . & . & . & . & . & .\ldots \\ 0 & 0 & X_{15} & Y_{15} & X_{25} & Y_{25} & . & . & . & . & . & .\ldots \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & .\ldots \end{vmatrix};$$

in derselben enthalten die Glieder X_{14}, Y_{14}, X_{24}, Y_{24}, ... (von der vierten Horizontalreihe an) x und y nicht, während die Glieder der beiden ersten Vertikalreihen von der vierten Horizontalreihe an gleich Null sind. Diese Determinante kann durch Addition entsprechender Vertikalreihen leicht auf die folgende Form gebracht werden:

$$D=\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & -X_1 & -Y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\ldots \\ X_2 & Y_2 & 0 & 0 & -X_2 & -Y_2 & 0 & 0 & 0 & 0\ldots \\ X_3 & Y_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\ldots \\ 0 & 0 & X'_{14} & Y'_{14} & X'_{24} & Y'_{24} & . & . & . & .\ldots \\ 0 & 0 & X'_{15} & Y'_{15} & X'_{25} & Y'_{25} & . & . & . & .\ldots \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & .\ldots \end{vmatrix};$$

von dieser Determinante gilt bezüglich der Glieder von der vierten Horizontalreihe ab das Gleiche, wie von der vorhergehenden. Entwickelt man D nach Subdeterminanten der ersten drei Horizontalreihen,* so erhält man

$$D=-X_1(X_2Y_3-X_3Y_2)D'_{23}-Y_1(X_2Y_3-X_3Y_2)D''_{23}+X_2(X_3Y_1-X_1Y_3)D'_{13}$$
$$+Y_2(X_3Y_1-X_1Y_3)D''_{13};$$

in demselben bedeuten D'_{23}, D''_{23}, D'_{13}, D''_{13} die adjungirten Determinanten der vier Subdeterminanten, welche x und y nicht enthalten. Dieser Aus-

* Vergl. u. A.: Baltzer, Theorie der Determinanten, 4. Aufl., S. 29 flgg.

druck für D ist vom dritten Grade in x und y, stellt also, gleich Null gesetzt, eine Curve dritter Ordnung dar. Beachtet man jedoch, dass z. B.

$$X_2 Y_3 - X_3 Y_2 = x(y_2 - y_3) + y(x_2 - x_3) + x_2 y_3 - x_3 y_2,$$

also die Glieder dritter Ordnung in x und y aus D sich fortheben, so erkennt man, dass die Curve $D = 0$ in die unendlich ferne Gerade und einen Kegelschnitt zerfällt.* Wir erhalten somit den Satz, dass ein Fachwerk der in Frage kommenden Art beweglich ist oder starr, je nachdem sich der Punkt A auf der Curve $D = 0$ befindet oder nicht.

Das erhaltene Resultat ist zunächst nur eine geometrische Interpretation des allgemeinen Kriteriums der Starrheit und gewährt keine Vereinfachung für die Anwendungen, falls man nicht im Stande ist, die Curve $D = 0$, bezw. den letzterwähnten Kegelschnitt einfach zu bestimmen. Letzteres ist nun thatsächlich möglich und zwar deshalb, weil sich dieser Kegelschnitt völlig deckt mit dem Kegelschnitt K des vorher behandelten kinematischen Problems, wie weiterhin dargethan werden soll.

Beseitigt man die drei nach A führenden Stäbe $A_1 A$, $A_2 A$, $A_3 A$ des Fachwerkes, so ist die Anzahl der Stäbe des übrig bleibenden Stabwerkes

$$n = s - 3,$$

die Zahl der Knotenpunkte desselben

$$g = k - 1;$$

da zwischen s und k die Relation $s = 2k - 3$ besteht, so erhält man

$$n + 3 = 2(g + 1) - 3$$

oder

$$n = 2g - 4.$$

Diese Relation sagt aber aus, dass das so reducirte Fachwerk eine sogenannte zwangläufig bewegliche ebene kinematische Kette darstellt,** d. i. eine solche bewegliche Verbindung von starren Stäben, in welcher die Stäbe bei ihren gegenseitigen Bewegungen nur einen Grad der Freiheit besitzen, oder, was auf dasselbe hinauskommt, in welcher bei den Relativbewegungen der Stäbe die Knoten- oder Gelenkpunkte nach Gestalt und Länge ganz bestimmte Curven beschreiben. In dieser kinematischen Kette durchlaufen sonach, falls einem Stabe gegen einen andern ruhend gedachten Stab eine mögliche Bewegung ertheilt wird, die Punkte A_1, A_2, A_3 nach

* Die hier gegebene Entwickelung des Ausdruckes für D weicht etwas ab von derjenigen, wie sie sich bei Henneberg (a. a. O. S. 217 flgg.) findet; jedoch stimmt der hier gefundene Kegelschnitt mit demjenigen der Henneberg'schen Darlegung der Hauptsache nach überein.

** Vergl. hierüber: Grübler, Allgemeine Eigenschaften der ebenen zwangläufigen kinematischen Ketten. Civilingenieur 1883, S. 176; ferner Burmester, Lehrbuch der Kinematik, S. 424.

Grösse und Richtung ganz bestimmte Wege; es sind folglich auch die Geschwindigkeiten dieser drei Punkte in jedem Moment der Bewegung ganz bestimmte von einander abhängige. Nimmt man die Grösse der Geschwindigkeit eines beliebigen Knoten- oder Gelenkpunktes in seiner Bewegung gegen den ruhenden Stab willkürlich an, dann sind die Geschwindigkeiten aller übrigen Knotenpunkte hierdurch nach Grösse und Richtung völlig bestimmt, also auch die der drei Punkte A_1, A_2, A_3. Die Construction dieser drei Geschwindigkeiten erfolgt am einfachsten unter Benutzung der schon erwähnten orthogonalen Geschwindigkeiten und zwar nach geometrischen Methoden, wie sie hauptsächlich von Burmester* ausgebildet worden sind. Da sich sonach im ursprünglichen Fachwerk die Endpunkte A_1, A_2, A_3 der drei nach A führenden Stäbe mit nach Grösse und Richtung vorgeschriebenen Geschwindigkeiten bewegen müssten, falls das Fachwerk beweglich wäre, andererseits aber die Möglichkeit der gegenseitigen Bewegung der drei Stäbe an die Bedingung geknüpft ist, dass der Punkt A sich auf dem Kegelschnitt K oder im Unendlichen befindet, so erkennen wir, dass die Beweglichkeit des ursprünglichen Fachwerkes der gleichen Bedingung unterliegt, d. h. dass das Fachwerk nur dann beweglich ist, wenn der Punkt A auf dem Kegelschnitt K oder auf der unendlich fernen Geraden liegt. Es ist ferner dieser Kegelschnitt identisch mit demjenigen, welchen die Gleichung $D=0$ repräsentirt, und dies war noch zu beweisen. Es kann daher auf rein geometrischem Wege entschieden werden, ob ein Fachwerk mit einem dreifachen Knotenpunkte starr ist oder nicht, bezw. ob die Functionaldeterminante D der Gleichungen A) von Null verschieden ist oder nicht.

Für die Beurtheilung der Starrheit von ebenen einfachen Fachwerken ist die Bemerkung noch von Wichtigkeit, dass derartige Fachwerke ohne zweifache oder dreifache Knotenpunkte nicht möglich sind.

Riga. Prof. M. Grübler.

XIII. Das Problem der Winkelhalbirenden.

Die Aufgabe: Ein Dreieck zu zeichnen oder zu berechnen, wenn drei Winkelhalbirende ihrer Grösse nach gegeben sind, ist bekanntlich zur Zeit eine ungelöste.

Bezeichnet man die drei Seiten eines Dreiecks durch x_i $(i=1,2,3)$, die gegenüberliegenden Winkel durch A_i, die drei diese Winkel halbirenden Transversalen, gemessen vom Winkelscheitel bis zum Schnittpunkt mit der Gegenseite, durch w_i, so lauten die drei in Frage kommenden Gleichungen:

$$1)\qquad \begin{cases} x_2x_3(x_1+x_2+x_3)(-x_1+x_2+x_3)=w_1^2(x_2+x_3)^2, \\ x_3x_1(x_1+x_2+x_3)(x_1-x_2+x_3)\quad =w_2^2(x_3+x_1)^2, \\ x_1x_2(x_1+x_2+x_3)(x_1+x_2-x_3)\quad =w_3^2(x_1+x_2)^2. \end{cases}$$

* Lehrbuch der Kinematik, Bd. I S. 430 flgg.

Man kann nun hieraus leicht zwei Gleichungen ableiten, die nur noch die Verhältnisse der Seiten als Unbekannte enthalten; allein die Berechnung eines dieser Verhältnisse führt schliesslich auf eine Gleichung zehnten Grades von erdrückendem Coefficientenbau, so dass man auf diesem Wege überhaupt nicht weiter vordringen kann.

Um so bemerkenswerther dürfte es daher erscheinen, dass die folgende etwas modificirte Aufgabe eine befriedigende Auflösung gestattet. — Man denke sich um das oben erwähnte Dreieck den umschriebenen Kreis gezeichnet und die Winkelhalbirenden w_i einseitig verlängert, bis sie diesen Kreis zum zweiten Male schneiden. Die so erhaltenen winkelhalbirenden Sehnen s_i $(i=1,2,3)$ seien ihrer Länge nach gegeben, und die Seiten x_i sollen berechnet werden.

Eine einfache geometrische Betrachtung* führt auf folgendes Gleichungssystem:

$$2)\qquad \begin{cases} s_1^2(x_1+x_2+x_3)(-x_1+x_2+x_3)=x_2x_3(x_2+x_3)^2,\\ s_2^2(x_1+x_2+x_3)(x_1-x_2+x_3)\quad=x_3x_1(x_3+x_1)^2,\\ s_3^2(x_1+x_2+x_3)(x_1+x_2-x_3)\quad=x_1x_2(x_1+x_2)^2.\end{cases}$$

Wollte man hier auf eine directe Ermittelung der Seitenverhältnisse ausgehen, so würde man sich ganz wie bei der ursprünglichen Aufgabe in unübersehbare Rechnungen verlieren. Dessen ungeachtet kommt man leicht auf trigonometrischem Wege zum Ziele, wenn man drei Hilfswinkel in folgender Weise einführt.

Man denke sich den Durchmesser d des umschriebenen Kreises dreimal gezogen und zwar nach den Ecken A_i; die Winkel, welche bei A_i zwischen d und s_i entstehen, heissen α_i $(i=1,2,3)$. Dann ist bekanntlich

$$3)\qquad 2\alpha_1=A_2-A_3,\quad 2\alpha_2=A_3-A_1,\quad 2\alpha_3=A_1-A_2,$$

ausserdem

$$4)\qquad s_1=d\cos\alpha_1,\quad s_2=d\cos\alpha_2,\quad s_3=d\cos\alpha_3.$$

Wegen

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0$$

hat man

$$\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+\cos^2\alpha_3-2\cos\alpha_1\cos\alpha_2\cos\alpha_3=1$$

oder mit Rücksicht auf 4)

$$5)\qquad d^3-(s_1^2+s_2^2+s_3^2)\,d+2s_1s_2s_3=0.$$

Aus dieser Gleichung findet man den Durchmesser d, vermöge 4) ergeben sich die Hilfswinkel α_i, und mit Rücksicht auf 3) erhält man für die Dreieckswinkel

$$6)\quad A_1=\tfrac{2}{3}(R-\alpha_2+\alpha_3),\quad A_2=\tfrac{2}{3}(R-\alpha_3+\alpha_1),\quad A_3=\tfrac{2}{3}(R-\alpha_1+\alpha_2),$$

* Man kann die Gleichungen 2) auch sofort aus 1) gewinnen, wenn berücksichtigt wird, dass $s_1w_1=x_2x_3$ u. s. w.

womit nun das Gleichungssystem 2) gelöst ist; denn man hat für die Seiten des Dreiecks

7) $$x_i = d \sin A_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Wie ersichtlich, erfordert die gestellte Aufgabe ausser der Auflösung einer cubischen Gleichung auch noch eine wiederholte Winkeldreitheilung, und diesem letzten Umstande ist es zuzuschreiben, dass eine rein algebraische Auflösung ohne Hilfswinkel zu sehr verwickelten Rechnungen führen muss.

Ob in ähnlicher Weise auch die Auflösung des Gleichungssystems 1) geleistet werden kann, lassen wir jetzt dahingestellt sein. Es sei aber bemerkt, dass die Formeln für sonstige Dreieckstransversalen reichlich Stoff zu verwandten Aufgaben bieten, unter denen nicht wenige sind, die zunächst grosse algebraische Schwierigkeiten haben, schliesslich aber doch durch eine geeignete Parameterdarstellung gelöst werden können.

Plauen i. V. W. Heymann.

XIV.

Beitrag zum Studium der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Integrale feste Verzweigungspunkte besitzen, insbesondere derjenigen, welche die Ableitung bis zum dritten Grade enthalten.

Von

Dr. Georg Wallenberg.

(Fortsetzung.)

III.

Eine vollständige Differentialgleichung erster Ordnung dritten Grades in Bezug auf die Ableitung hat die Gestalt:

$$\text{A)} \qquad \psi_0 \cdot \left(\frac{dy}{dz}\right)^3 + \psi_1 \cdot \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + \psi_2 \cdot \frac{dy}{dz} + \psi_3 = 0,$$

wo ψ_0, ψ_1, ψ_2, ψ_3 rationale Functionen von y sind, deren Coefficienten von z abhängen. Soll die Differentialgleichung eine Fuchs'sche sein, so muss sie zunächst die Form haben:

$$\text{B)} \qquad F(z, y, y') = \left(\frac{dy}{dz}\right)^3 + P \cdot \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + Q \cdot \left(\frac{dy}{dz}\right) + R = 0,$$

worin P höchstens vom zweiten, Q höchstens vom vierten und R höchstens vom sechsten Grade in y ist:

$$\begin{aligned} P &= A_0 + A_1 y + A_2 y^2, \\ Q &= B_0 + B_1 y + B_2 y^2 + B_3 y^3 + B_4 y^4, \\ R &= C_0 + C_1 y + C_2 y^2 + C_3 y^3 + C_4 y^4 + C_5 y^5 + C_6 y^6. \end{aligned}$$

Die A_i, B_i, C_i sollen für's Erste als rationale Functionen von z vorausgesetzt werden. — Die Discriminante der Differentialgleichung B), d. h. die Eliminationsresultante von y' aus $F = 0$ und $\dfrac{\partial F}{\partial y'} = 0$, lautet:

$$D(z, y) = 4 P^3 R - P^2 Q^2 - 18 P Q R + 4 Q^3 + 27 R^2.$$

Dieselbe ist also höchstens vom zwölften Grade in y. — Aus den von Herrn Fuchs aufgestellten Bedingungen folgt nun zunächst:

1. Jeder nicht quadratische Factor der Discriminante $D(z, y)$ muss, gleich Null gesetzt, ein Integral der Differentialgleichung B) ergeben.

Es muss nämlich nach Bedingung II) jede Wurzel η der Discriminantengleichung $D(z, y) = 0$, für welche y', als algebraische Function von y aufgefasst, sich wirklich verzweigt, ein Integral der Differentialgleichung B) sein; verzweigt sich nun y', als algebraische Function von y aufgefasst, nicht für $y = \eta$, so folgt, wenn $y' = \zeta$ eine zu $y = \eta$ gehörige gemeinsame Wurzel der beiden Gleichungen $F = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$ ist und $y = \eta + u$, $y' = \zeta + v$ gesetzt wird, aus der Entwickelung:

$$F(z, y, y') = F(\eta, \zeta) + \frac{\partial F}{\partial \zeta} \cdot v + \frac{\partial F}{\partial \eta} \cdot u$$
$$+ \frac{1}{2!} \cdot \left[\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta^2} \cdot v^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta \cdot \partial \eta} \cdot vu + \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \cdot u^2\right] + \cdots,$$

da $F(\eta, \zeta) = \frac{\partial F}{\partial \zeta} = 0$ ist, dass

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} = 0$$

sein muss, und da

$$\frac{\partial D}{\partial \eta} = \frac{\partial F}{\partial \eta} + \frac{\partial F}{d \zeta} \cdot \frac{d \zeta}{d \eta}$$

ist, dass

$$\frac{\partial D}{\partial \eta} = 0$$

ist; also $y = \eta$ ist dann doppelte Wurzel der Discriminantengleichung, d. h. jeder Factor der Discriminante, der keinen Verzweigungspunkt liefert, kommt in derselben quadratisch vor.* — Der zweite Theil der Bedingung II): „in der y' als algebraische Function von y darstellenden Riemann'schen Fläche hat y' in allen über $y = \eta$ liegenden Verzweigungspunkten den Werth $y' = \zeta = \frac{d\eta}{dz}$" kommt bei den Differentialgleichungen dritten Grades in y' nur für einen Verzweigungspunkt in Betracht, weil in einer dreiblättrigen Riemann'schen Fläche nicht mehrere Verzwei-

* Anmerkung. Alle einfachen Factoren der Discriminante, die, wie oben gezeigt, stets Integrale unserer Differentialgleichung liefern müssen, gehören zum wesentlichen Theiler der Discriminante (cfr. Kronecker, Crelle 91) und bleiben daher bei jeder rationalen Transformation von y und y' erhalten; dies hat namentlich für solche Differentialgleichungen, deren Integrale algebraisch sind, eine gewisse Bedeutung; denn in diesem Falle lässt sich (cfr. pag. 270) das allgemeine Integral einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung $F(z, y, y') = 0$ in der Form darstellen: $C = R(z, y, \Delta)$, wo C willkürliche Constante, R eine rationale Function ihrer Argumente und Δ durch $F(z, y, \Delta) = 0$ definirt ist.

gungspunkte übereinander liegen können; er besagt nur, dass, wenn ζ von $\frac{d\eta}{dz}$ verschieden ist, in $y=\eta$, $y'=\zeta$ keine Verzweigung stattfinden darf.

Weiter folgt:

2. Jede einfache Wurzel der Discriminantengleichung darf nur einen einfachen Verzweigungspunkt liefern.

Wenn nämlich die algebraische Function y' von y sich an der Stelle $y=\eta$, $y'=\zeta=\frac{d\eta}{dz}$ in drei Blättern verzweigt, so ist nach Bedingung III) $y=\eta$ mindestens doppelte Wurzel der Gleichung $F(z, y, \zeta)=0$ mit der Unbekannten y, also $\frac{\partial F(z, \eta, \zeta)}{\partial \eta}=0$. Daraus folgt wieder:

$$\frac{\partial D(z, \eta)}{\partial \eta}=0,$$

d. h. $y=\eta$ muss in diesem Falle mindestens Doppelwurzel der Discriminantengleichung sein. — Diese Bedingung, dass jede einfache Wurzel der Discriminantengleichung nur einen einfachen Verzweigungspunkt liefern darf, hat einen beschränkenden Einfluss auf das Geschlecht der Fuchs-schen Differentialgleichungen, allerdings nicht derart beschränkend, dass, wie bei den Briot und Bouquet'schen Differentialgleichungen, das Geschlecht $p \leqq 1$ sein muss.* — So darf die Differentialgleichung B) höchstens vom Geschlecht 4 sein, während das Maximalgeschlecht einer Curve sechsten Grades 10 ist: die Discriminante von B) ist nämlich vom zwölften Grade in y; jeder einfache Factor derselben liefert nur einen einfachen Verzweigungspunkt; also ist hier die Gesammtzahl der einfachen Verzweigungen der die algebraische Function y' von y darstellenden Riemann'schen Fläche:

$$w \leqq 12;$$

und da $m=3$ ist, so folgt aus der bekannten Riemann'schen Relation

$$w=2m+2(p-1):$$

$$p \leqq 4.$$

Diese Maximalzahl des Geschlechts wird später noch um eine Einheit herabgedrückt werden.

Weiter ergeben sich einige Folgerungen, welche die äussere Gestalt der von uns zu behandelnden Differentialgleichungen betreffen:

3. Hat R mit Q einen gemeinsamen Factor, so muss derselbe, falls er nicht von z unabhängig ist, doppelter Factor von R sein.

---

* cfr. u. A. Fuchs, l. c. pag. 710.

Denn hat R mit Q einen gemeinsamen Factor, der einfacher Factor von R ist, so ist derselbe auch einfacher Factor der Discriminante

$$D(z, y) = 4P^3 R - P^2 Q^2 - 18 PQR + 4Q^3 + 27 R^2.$$

Die entsprechende Wurzel $y = \eta$ der Discriminantengleichung muss daher nach 1) ein Integral der Differentialgleichung B) sein, d. h. es muss, wenn $y' = \zeta$ die gemeinsame Wurzel der beiden Gleichungen $F(z, \eta, y') = 0$ und $\frac{\partial F(z, \eta, y')}{\partial y'} = 0$ ist, $\zeta = \frac{d\eta}{dz}$ sein. Aber ζ ist hier gleich 0, da $y = \eta$ gemeinsame Wurzel von $Q = 0$ und $R = 0$ ist; also $\frac{d\eta}{dz} = 0$ oder: η ist von z unabhängig.

4. Hat R mit Q und P einen gemeinsamen Theiler, so muss derselbe stets Doppelfactor von R und, falls er nicht von z unabhängig ist, doppelter Factor von Q und dreifacher Factor von R sein.

Das Erstere folgt aus Bedingung III), das Letztere wieder aus Bedingung II): Ist nämlich $y = \eta$ die gemeinsame Wurzel von $P = 0$, $Q = 0$ und $R = 0$, so ist das zugehörige y' gleich Null. Wird demgemäss $y = \eta + u$, $y' = U$ gesetzt, so lauten in Gleichung B) die Glieder niedrigster Dimension:

$$U^3 + \alpha U^2 u + \beta U u + \gamma u^2.$$

Das Glied, welches u allein enthält, muss fehlen, weil sonst die Entwickelung von U nach gebrochenen Potenzen von u mit $u^{1/3}$ beginnen würde,* was der Bedingung III) widerstreitet. Ist ferner γ oder β von 0 verschieden, d. h. $y = \eta$ nur zweifache Wurzel von $R = 0$ oder nur einfache Wurzel von $Q = 0$, so verzweigt sich U in $U = 0$, $u = 0$,* d. h. y' in $y = \eta$, $y' = 0$; es muss dann nach Bedingung II) $\frac{d\eta}{dz} = 0$, d. h. η von z unabhängig sein. — Ist dagegen $\beta = 0$ und $\gamma = 0$, also $y = \eta$ dreifache Wurzel von $R = 0$ und zweifache Wurzel von $Q = 0$, so lauten die Glieder niedrigster Dimension:

$$U^3 + \alpha U^2 u + \delta U u^2 + \varepsilon u^3;$$

in diesem Falle verzweigt sich die algebraische Function U von u nicht in $U = 0$, $u = 0$. Die algebraische Function y' von y ist übrigens in diesem Falle höchstens vom Geschlecht 1; denn aus der Discriminante tritt ein sechsfacher Factor $y - \eta$ heraus, der keinen Verzweigungspunkt liefert; daher ist $w \leq 6$ und folglich $p \leq 1$.

Um nun die Fuchs'schen Differentialgleichungen dritten Grades in y' einem tieferen Studium zugänglich zu machen, um insbesondere die Bedingung II) in geeigneter Weise in Bedingungsgleichungen für die Coefficienten

* cfr. Puiseux' algebr. Unters.

umzusetzen, unterziehen wir die Differentialgleichung B) der bereits Abschn. I in G) angegebenen Transformation und schreiben sie in der Form:

C) $$F(z, y, y') = (y' - \mathfrak{P})^3 - 3\,\mathfrak{Q}\,(y' - \mathfrak{P}) - 2\,\mathfrak{R} = 0.$$

$\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ sind dann mit P, Q, R durch die Gleichungen verbunden:

$$P = -3\mathfrak{P}, \quad Q = 3(\mathfrak{P}^2 - \mathfrak{Q}), \quad R = -\mathfrak{P}^3 + 3\,\mathfrak{P}\,\mathfrak{Q} - 2\,\mathfrak{R}$$

oder:

$$\mathfrak{P} = -\frac{1}{3}P, \quad \mathfrak{Q} = \frac{1}{9}P^2 - \frac{1}{3}Q, \quad \mathfrak{R} = -\frac{2}{27}P^3 + \frac{1}{6}PQ - \frac{1}{2}R.$$

$\mathfrak{P}$ ist also ebenfalls höchstens vom zweiten, $\mathfrak{Q}$ höchstens vom vierten, $\mathfrak{R}$ höchstens vom sechsten Grade in y:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{P} &= a_0 + a_1 y + a_2 y^2, \\
\mathfrak{Q} &= b_0 + b_1 y + b^2 y^2 + b_3 y^3 + b_4 y^4, \\
\mathfrak{R} &= c_0 + c_1 y + c_2 y^2 + c_3 y^3 + c_4 y^4 + c_5 y^5 + c_6 y^6,
\end{aligned}$$

wo die a_i, b_i und c_i rationale Functionen von z sind.

Die Discriminante lautet:

D) $$\Delta = \mathfrak{R}^2 - \mathfrak{Q}^3$$

und die Cardani'sche Formel ergiebt aus Gleichung C):

E) $$y' - \mathfrak{P} = \alpha \sqrt[3]{\mathfrak{R} + \sqrt{\Delta}} + \alpha^2 \sqrt[3]{\mathfrak{R} - \sqrt{\Delta}},$$

wo α eine dritte Einheitswurzel bedeutet.

Hier lassen sich wieder zunächst einige die äussere Gestalt der Differentialgleichung betreffende Folgerungen ziehen:

5. Haben $\mathfrak{Q} = 0$ und $\mathfrak{R} = 0$ eine gemeinsame Wurzel $y = \eta$, so muss dieselbe jedenfalls Doppelwurzel von $\mathfrak{R} = 0$ sein; und, wenn sie kein Integral der Riccati'schen Differentialgleichung $v' = \mathfrak{P}(v)$ ist, muss sie zweifache Wurzel von $\mathfrak{Q} = 0$ und dreifache Wurzel von $\mathfrak{R} = 0$ sein.

Das Erstere folgt wieder leicht aus Bedingung III), da die Entwickelung von $y' - \zeta$ nach Potenzen von $y - \eta$ sonst, wie aus E) hervorgeht, mit $(y - \eta)^{1/3}$ beginnen würde. Das Letztere folgt aus der Bedingung II), da man für $y = \eta$ aus C) $y' = \zeta = \mathfrak{P}(\eta)$ erhält und, wenn $\zeta = \mathfrak{P}(\eta)$ von $\frac{d\eta}{dz}$ verschieden ist, in $y = \eta$, $y' = \zeta$ keine Verzweigung stattfinden darf, was nach E) zur Folge hat, dass $y - \eta$ Doppelfactor von $\mathfrak{Q}$ und dreifacher Factor von $\mathfrak{R}$ sein muss; in diesem Falle ist das Geschlecht der Differentialgleichung wieder höchstens gleich 1, da aus der Discriminante Δ, die vom zwölften Grade in y ist, ein Factor sechsten Grades $(y - \eta)^6$ heraustritt, der keinen Verzweigungspunkt liefert. Uebrigens kann man den gemeinsamen Factor $y - \eta$ von $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ durch die Substitution

$$y = \eta + \frac{1}{u}, \quad y' = \eta' - \frac{u'}{u^2}$$

fortschaffen; in dem Falle, wo $y = \eta$ nur einfache Wurzel von $\mathfrak{Q} = 0$ und Doppelwurzel von $\mathfrak{R} = 0$, also nach Obigem ein Integral der Riccati'schen Differentialgleichung $v' = \mathfrak{P}(v)$ ist, wird durch diese Substitution:

$$y' - \mathfrak{P}(y) = \eta' - \frac{u'}{u^2} - \mathfrak{P}\left(\eta + \frac{1}{u}\right) = \frac{-u' + u^2 \cdot [\eta' - \mathfrak{P}(\eta)] + d_1 u + d_0}{u^2},$$

also, da $\eta' - \mathfrak{P}(\eta) = 0$ ist, gleichzeitig $\mathfrak{P}(y)$ auf den ersten Grad reducirt.*

Gleichung E) lehrt endlich noch, dass eine Verzweigung in drei Blätter nur statthaben kann, wenn $\mathfrak{R}$ und Δ, d. h. wenn $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{Q}$ einen gemeinsamen Factor besitzen.

Wir gehen nun daran, die wichtige Bedingung II) in Bedingungsgleichungen für die Coefficienten umzusetzen, unter der Voraussetzung, dass die Discriminante Δ nur einfache Factoren enthält, dass also auch $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ keinen gemeinsamen Factor besitzen. Unter dieser Voraussetzung ist nach den obigen Auseinandersetzungen nunmehr die Bedingung II) allein nothwendig und hinreichend dafür, dass die Differentialgleichung C) eine Fuchs'sche sei.

Aus

C) $$F = (y' - \mathfrak{P})^3 - 3\mathfrak{Q}(y' - \mathfrak{P}) - 2\mathfrak{R}$$

und

F) $$\frac{\partial F}{\partial y'} = 3(y' - \mathfrak{P})^2 - 3\mathfrak{Q}$$

erhält man:

G) $$-\frac{1}{2}\left[F - \frac{1}{3}\frac{\partial F}{\partial y'}(y' - \mathfrak{P})\right] = \mathfrak{Q}(y' - \mathfrak{P}) + \mathfrak{R}.$$

Es muss also nach Bedingung II) gleichzeitig

$$\mathfrak{Q}(y' - \mathfrak{P}) + \mathfrak{R} = 0$$

und

$$\frac{\partial \Delta}{\partial z} + \frac{\partial \Delta}{\partial y} \cdot y' = 0$$

sein für jeden Werth $y = \eta$ (und $y' = \eta'$), für welchen $\Delta = 0$ ist; d. h. es muss:

$$(\mathfrak{R} - \mathfrak{P}\mathfrak{Q})\frac{\partial \Delta}{\partial y} - \mathfrak{Q}\frac{\partial \Delta}{\partial z} \equiv 0 \ mod \Delta$$

sein, oder, da man auf der linken Seite dieser Congruenz ein beliebiges Vielfaches von Δ hinzufügen kann:

---

* cfr. Abschn. I.

$$(\mathfrak{R} - \mathfrak{P}\mathfrak{Q})\frac{\partial \Delta}{\partial y} - \mathfrak{Q}\frac{\partial \Delta}{\partial z} + 3\frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial z}\Delta + 3\mathfrak{P}\frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial y}\Delta \equiv 0 \mod \Delta$$

oder:

$$\text{H)} \quad \mathfrak{R}\frac{\partial \Delta}{\partial y} - \mathfrak{P}\left[\mathfrak{Q}\frac{\partial \Delta}{\partial y} - 3\frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial y}\Delta\right] - \left[\mathfrak{Q}\frac{\partial \Delta}{\partial z} - 3\frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial z}\Delta\right] \equiv 0 \mod \Delta.$$

Es ist aber:

$$\text{J)} \quad \begin{cases} \mathfrak{Q}\dfrac{\partial \Delta}{\partial y} - 3\dfrac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial y}\Delta = \mathfrak{R}\left[2\mathfrak{Q}\dfrac{\partial \mathfrak{R}}{\partial y} - 3\dfrac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial y}\mathfrak{R}\right], \\ \mathfrak{Q}\dfrac{\partial \Delta}{\partial z} - 3\dfrac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial z}\Delta = \mathfrak{R}\left[2\mathfrak{Q}\dfrac{\partial \mathfrak{R}}{\partial z} - 3\dfrac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial z}\mathfrak{R}\right]. \end{cases}$$

Wir können daher die Congruenz H) durch $\mathfrak{R}$ dividiren, da Δ mit $\mathfrak{R}$ keinen gemeinsamen Theiler hat, und erhalten:

$$\text{K)} \quad \frac{\partial \Delta}{\partial y} - \mathfrak{P}\left(2\mathfrak{Q}\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial y} - 3\frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial y}\mathfrak{R}\right) - \left(2\mathfrak{Q}\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial z} - 3\frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial z}\mathfrak{R}\right) \equiv 0 \mod \Delta.$$

Es sei nun zunächst $\mathfrak{P}$ wirklich vom zweiten, $\mathfrak{Q}$ vom vierten, $\mathfrak{R}$ vom sechsten Grade in y. Da in diesem Falle $\mathfrak{R}^2$ vom selben (zwölften) Grade wie $\mathfrak{Q}^3$ ist, so kann $\Delta = \mathfrak{R}^2 - \mathfrak{Q}^3$ durch Fortheben der höchsten Potenzen eine Graderniedrigung erleiden; es sei n der Grad von Δ $(n \leqq 12)$. Dann ist auf der linken Seite der Gleichung K) $\frac{\partial \Delta}{\partial y}$ vom $n-1^{\text{ten}}$ Grade; ferner, wie aus den Gleichungen J) hervorgeht,

$$S = \mathfrak{P}\left(2\mathfrak{Q}\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial y} - 3\frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial y}\mathfrak{R}\right)$$

höchstens vom Grade

$$2 + n + 3 - 6 = n - 1$$

und

$$T = \left(2\mathfrak{Q}\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial z} - 3\frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial z}\mathfrak{R}\right)$$

höchstens vom Grade

$$n + 4 - 6 = n - 2.$$

Der Ausdruck auf der linken Seite von K) ist also höchstens vom $n-1^{\text{ten}}$ Grade in y; derselbe muss daher, da er durch Δ theilbar, identisch verschwinden, d. h. es muss identisch:

$$6) \quad \frac{\partial \Delta}{\partial y} - \mathfrak{P}\left(2\mathfrak{Q}\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial y} - 3\frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial y}\mathfrak{R}\right) - \left(2\mathfrak{Q}\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial z} - 3\frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial z}\mathfrak{R}\right) = 0$$

sein. Daraus folgt zunächst, dass Δ nicht zwölf einfache Factoren enthalten darf; denn die Ausdrücke S und T sind dann höchstens vom zehnten Grade in y, während $\frac{\partial \Delta}{\partial y}$ vom elften Grade in y wäre. Δ darf auch nicht elf einfache Factoren enthalten; denn es sei:

$$\Delta = A(y - \eta_1) \cdot (y - \eta_2) \cdots (y - \eta_{11}),$$

wo A und die η_i Functionen von z bedeuten, so kann man durch die Substitution $y = \eta + \frac{1}{u}$ die Gleichung E) in:

$$\bar{\text{E}})\qquad u' - \bar{\mathfrak{P}}(z, u) = \alpha \sqrt[3]{\bar{\mathfrak{R}} + \sqrt{\bar{\Delta}}} + \alpha^2 \sqrt[3]{\bar{\mathfrak{R}} - \sqrt{\bar{\Delta}}}$$

transformiren, indem man auf beiden Seiten mit $-u^2$ heraufmultiplicirt. Hierin ist

$$\bar{\Delta} = A\,((\eta - \eta_1)u + 1)\cdot((\eta - \eta_2)u + 1)\cdots((\eta - \eta_{11})u + 1)\cdot u.$$

Wählt man nun η von den η_i verschieden, so enthält $\bar{\Delta}$ zwölf einfache Factoren, was, da $\bar{\text{E}}$) ebenfalls eine Fuchs'sche Differentialgleichung ist, nach den aus 6) gezogenen Schlüssen nicht der Fall sein darf.

Wenn eine der beiden Grössen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{Q}$ ihren vollen Grad in y besässe, die andere nicht, so würde Δ vom zwölften Grade in y sein; der Ausdruck auf der linken Seite der Congruenz K) wäre höchstens vom elften Grade in y, es würde also wieder Gleichung 6) bestehen. Aus dieser lässt sich aber wie vorher folgern, dass Δ, wenn es nur einfache Factoren enthält, höchstens vom zehnten Grade in y sein darf. Gleichung E) lehrt nun, dass quadratische Factoren von Δ, die in R nicht enthalten sind, keinen Verzweigungspunkt für die algebraische Function y' von y liefern, dass ferner für eine Verzweigung in drei Blättern nothwendig R mit Δ, also auch mit Q einen gemeinsamen Factor besitzen muss, der daher nach 5) Doppelfactor von R und folglich dreifacher Factor von Δ ist, und dass derselbe endlich, wenn wirklich eine Verzweigung in drei Blättern stattfinden soll, sogar mindestens vierfacher Factor von Δ sein muss. Wenn man dies berücksichtigt, so kann man den Satz aussprechen, dass die Anzahl der einfachen Verzweigungen der durch C) $F = 0$ definirten algebraischen Function y' von y

$$w \leqq 10$$

ist, dass also, wie die Riemann'sche Relation $w = 2m + 2(p-1)$ ergiebt, das Geschlecht dieser algebraischen Function

$$p \leqq 3$$

ist. — Zugleich ergiebt sich aus den obigen Entwickelungen, dass, wenn Δ nur einfache Factoren enthält, entweder gleichzeitig der Grad von $\mathfrak{Q}$ gleich 4 und derjenige von $\mathfrak{R}$ gleich 6, oder gleichzeitig der Grad von $\mathfrak{Q}$ < 4 und derjenige von $\mathfrak{R}$ < 6 sein muss; und zwar muss in dem letzteren Falle der Grad von $\mathfrak{Q}$ $\leqq 2$ und der von $\mathfrak{R}$ $\leqq 3$, also $p \leqq 1$ sein: d. h. wenn $p > 1$ ist, müssen $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ beide ihren höchstmöglichen Grad in y wirklich besitzen. Es sei nämlich $\mathfrak{Q}$ vom dritten Grade in y, so darf zunächst $\mathfrak{R}$* höchstens vom vierten Grade in y sein, weil sonst in der durch die Substitution $y=\frac{1}{v}$ transformirten Gleichung E) die Entwickelung von v' nach Potenzen von v mit $v^{1/2}$ beginnen würde, was der Bedingung III) widerstreitet. Ist aber $\mathfrak{Q}$ vom dritten und $\mathfrak{R}$ vom vierten Grade in y oder zwar $\mathfrak{Q}$ von kleinerem als dem dritten, aber $\mathfrak{R}$ vom vierten oder zwar $\mathfrak{R}$ von kleinerem als dem vierten, aber $\mathfrak{Q}$ vom dritten Grade, so ist in der transformirten Gleichung E) $v=0$ ein wirklicher Verzweigungspunkt der algebraischen Function v' von v; $v=0$ ist nur dann kein Verzweigungspunkt, wenn $\mathfrak{Q}$ gerade vom zweiten und $\mathfrak{R}$ vom dritten Grade in y ist; $v=0$ muss daher nach Bedingung II) ein Integral der durch $y=\frac{1}{v}$ transformirten Differentialgleichung E) sein, folglich enthält $\overline{\mathfrak{P}}(v)$ den Factor v, d. h. in der ursprünglichen Gleichung E) ist $\mathfrak{P}(y)$ vom ersten Grade in y. Ist aber $\mathfrak{P}(y)$ höchstens vom ersten Grade in y, so muss, wie wir jetzt zeigen wollen, stets der Grad von $\mathfrak{Q}$ ≤ 2, derjenige von $\mathfrak{R} \leq 3$ sein.

Wenn $\mathfrak{P}$ höchstens vom ersten Grade in y ist, so besteht zunächst die Gleichung 6) in jedem Falle. Denn es sei k der Grad von $\mathfrak{Q}$ $(k \leq 4)$ und l der Grad von $\mathfrak{R}$ $(l \leq 6)$. Ist dann erstens $3k=2l$, so kann in Δ ein Fortheben der höchsten Potenzen von y, also eine Graderniedrigung eintreten; dies ist der Fall, wenn entweder $k=4$ und $l=6$, oder wenn $k=2$ und $l=3$ ist. Wenn n den wirklichen Grad von Δ bedeutet, so ist auf der linken Seite der Congruenz K) $\frac{\partial \Delta}{\partial y}$ vom $n-1^{\text{ten}}$ Grade, ferner unter Berücksichtigung der Gleichungen J)

$$S=P\left[2\mathfrak{Q}\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial y}-3\frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial y}\mathfrak{R}\right]$$

höchstens vom Grade

$$1+n+k-1-l=n+k-l,$$

also höchstens vom Grade $n-1$, und $T=2\mathfrak{Q}\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial z}-3\frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial z}\mathfrak{R}$ höchstens vom Grade $n+k-l$, also ebenfalls höchstens vom $n-1^{\text{ten}}$ Grade in y. In diesem Falle besteht also Gleichung 6). — Ist zweitens $3k>2l$, so ist $3k$ der Grad von Δ; S und T sind höchstens vom $k+l^{\text{ten}}$ Grade in y, und da hier

$$k+l<k+\frac{3k}{2}<3k$$

ist, so besteht wieder Gleichung 6). — Ist endlich drittens $3k<2l$, so ist $2l$ der Grad von Δ; S und T sind wieder höchstens vom $k+l^{\text{ten}}$ Grade in y, und da hier

* dessen Grad dann nach Obigem jedenfalls <6 ist.

$$k + l < \frac{2l}{3} + l < 2l$$

ist, so besteht wiederum Gleichung 6).

Angenommen nun, es sei

$$k > 2 \quad \text{oder} \quad l > 3.$$

Ist dann wieder erstens $3k = 2l$, also $k = 4$ und $l = 6$, und giebt n den Grad von Δ an, so würde unter Berücksichtigung der Gleichungen J) in Gleichung 6) S höchstens vom Grade $1 + n + 3 - 6 = n - 2$, T höchstens vom Grade $n + 4 - 6 = n - 2$ in y sein, während $\frac{\partial \Delta}{\partial y}$ vom $n-1^{\text{ten}}$ Grade wäre. Gleichung 6) könnte also nicht bestehen; folglich darf nicht $k = 4$, $l = 6$ sein.

Ist zweitens $3k > 2l$, und wäre $k > 2$ oder $l > 3$, was ebenfalls $k > 2$ zur Folge haben würde, so wäre in Gleichung 6) $\frac{\partial \Delta}{\partial y}$ vom Grade $3k - 1$, während S und T höchstens vom $k + l^{\text{ten}}$ Grade in y sein würden, und da hier

$$k + l < k + \frac{3k}{2} \text{ oder } < 3k - \frac{k}{2},$$

also wegen $k > 2$:

$$k + l < 3k - 1$$

wäre, so könnte Gleichung 6) nicht bestehen; es darf also in diesem Falle nicht $k > 2$ oder $l > 3$ sein.

Ist endlich drittens $3k < 2l$, und wäre $l > 3$ oder $k > 2$, was ebenfalls $l > 3$ zur Folge haben würde, so wäre in Gleichung 6) $\frac{\partial \Delta}{\partial y}$ vom Grade $2l - 1$, während S und T höchstens vom $k + l^{\text{ten}}$ Grade in y sein würden, und da hier:

$$k + l < l + \frac{2l}{3} \text{ oder } < 2l - \frac{l}{3},$$

also wegen $l > 3$:

$$k + l < 2l - 1$$

wäre, so könnte Gleichung 6) nicht bestehen; es darf also auch in diesem Falle nicht $k > 2$ oder $l > 3$ sein.

Wir haben daher das Resultat:

Wenn $\mathfrak{P}$ nur vom ersten Grade in y ist, darf $\mathfrak{Q}$ höchstens vom zweiten und $\mathfrak{R}$ höchstens vom dritten Grade in y sein; und da Δ in diesem Falle höchstens vom sechsten Grade ist, so ist das Geschlecht der durch Gleichung C) definirten algebraischen Function y' von y höchstens gleich 1.

Ist $\mathfrak{Q}$ wirklich vom zweiten, $\mathfrak{R}$ vom dritten Grade, so kann Gleichung 6) sehr wohl bestehen; dagegen folgt aus den letzten Entwickelungen noch, dass, wenn $\mathfrak{Q}$ vom zweiten Grade in y ist, der Grad von $\mathfrak{R}$ nicht kleiner als 3, und wenn $\mathfrak{R}$ vom dritten Grade, der Grad von $\mathfrak{Q}$ nicht kleiner als 2 sein darf. Ist z. B. $\mathfrak{R}$ vom zweiten Grade, so muss $\mathfrak{Q}$ vom ersten Grade sein und umgekehrt.

Aus Gleichung 6) ergeben sich nun weiter dadurch, dass man die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von y einzeln gleich Null setzt, zwischen den im Allgemeinen in der Zahl 15 auftretenden Coefficienten a_i, b_i, c_i der Differentialgleichung C) und deren ersten Ableitungen nach z Bedingungsgleichungen, deren Anzahl gleich dem Grade der Discriminante Δ in y ist.

Wir wollen jetzt aus Gleichung 6) noch eine wichtige Folgerung ziehen und geben ihr zu diesem Zwecke folgende Gestalt:

$$\mathfrak{R}\left[2\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial y}+3\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial y}\mathfrak{P}+3\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial z}\right]=\mathfrak{Q}\left[3\mathfrak{Q}\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial y}+2\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial y}\mathfrak{P}+2\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial z}\right].$$

Da nach Voraussetzung $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ keinen gemeinschaftlichen Factor besitzen, so müssen die beiden Gleichungen bestehen:

$$7)\qquad\begin{cases}3\dfrac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial z}+3\dfrac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial y}\mathfrak{P}+\ 2\ \dfrac{\partial\mathfrak{R}}{\partial y}=(A+By)\cdot\mathfrak{Q},\\[2ex] 2\dfrac{\partial\mathfrak{R}}{\partial z}+2\dfrac{\partial\mathfrak{R}}{\partial y}\mathfrak{P}+3\mathfrak{Q}\dfrac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial y}=(A+By)\cdot\mathfrak{R},\end{cases}$$

wo A und B von z allein abhängen; — diese Gleichungen sind übrigens sehr geeignet zur Aufstellung der Bedingungsgleichungen zwischen den Coefficienten der Differentialgleichung C) und ihren ersten Ableitungen nach z.

Ferner ist, wenn zur Abkürzung

$$(y'-\mathfrak{P})^3-3\mathfrak{Q}(y'-\mathfrak{P})-2\mathfrak{R}=F(z,y,y')=F$$

gesetzt wird:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot y'\\ &=-3(y'-\mathfrak{P})^2\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial z}-3\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial z}(y'-\mathfrak{P})+3\mathfrak{Q}\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial z}-2\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial z}\\ &\quad-3(y'-\mathfrak{P})^2\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial y}y'-3\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial y}(y'-\mathfrak{P})y'+3\mathfrak{Q}\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial y}{}'-2\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial y}\cdot y'\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}&\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot y'+\frac{\partial F}{\partial y'}\left[\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial z}+\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial y}\cdot y'\right]\\ &=-3\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial z}(y'-\mathfrak{P})-2\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial z}-3\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial y}(y'-\mathfrak{P})y'-2\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial y}y'\\ &=-3\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial z}(y'-\mathfrak{P})-2\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial z}-3\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial y}(y'-\mathfrak{P})^2-2\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial y}(y'-\mathfrak{P})\\ &\qquad-3\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial y}(y'-\mathfrak{P})\mathfrak{P}-2\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial y}\mathfrak{P};\end{aligned}$$

folglich ist:

$$\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot y'+\frac{\partial F}{\partial y'}\left[\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial z}+\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y}\cdot y'+\frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial y}\right]$$

$$=-2\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial z}-2\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial y}\mathfrak{P}-3\mathfrak{Q}\frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial y}-(y'-\mathfrak{P})\left[3\frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial z}+3\frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial y}\mathfrak{P}+2\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial y}\right]$$

also nach den Gleichungen 7)

$$=-(A+By)\cdot[\mathfrak{R}+\mathfrak{Q}(y'-\mathfrak{P})]$$

und nach G)

$$=\frac{1}{2}(A+By)\left[F-\frac{1}{3}\frac{\partial F}{\partial y'}(y'-\mathfrak{P})\right].$$

Man hat daher:

$$\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot y'$$

8) $$=\frac{1}{2}(A+By)\cdot F-\left[\frac{1}{6}(A+By)(y'-\mathfrak{P})+\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial z}+\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y}\cdot y'+\frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial y}\right]\cdot\frac{\partial F}{\partial y'}.\text{*}$$

Damit ist für unsere Differentialgleichungen die wirkliche Herstellung der Relation geleistet, welche Poincaré in der citirten Abhandlung pag. 3 für die Fuchs'schen Differentialgleichungen in der von ihm aufgestellten

* Anmerkung. Setzt man umgekehrt voraus, dass für eine algebraische Differentialgleichung erster Ordnung m^{ten} Grades in y':

$$F(z,y,y')=y'^m+P_1y'^{m-1}+P_2y'^{m-2}+\cdots+P_ky'^{m-k}+\cdots+P_m=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot y'=K.F+L.\frac{\partial F}{\partial y'}$$

ist und L wie oben die Gestalt hat:

$$L=l_0+l_1y+l_2y^2+l_3y^3+(l_4+l_5y)y'=M+Ny',$$

so folgt zunächst:

$$K=\frac{\partial P_1}{\partial y}-m.N$$

und für die P_i ergiebt sich das System von Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P_1}{\partial z}+\frac{\partial P_2}{\partial y}&=P_1\cdot\frac{\partial P_1}{\partial y}+mM-1P_1.N,\\
\frac{\partial P_2}{\partial z}+\frac{\partial P_3}{\partial y}&=P_2\cdot\frac{\partial P_1}{\partial y}+(m-1)P_1.M-2P_2.N,\\
\frac{\partial P_3}{\partial z}+\frac{\partial P_4}{\partial y}&=P_3\cdot\frac{\partial P_1}{\partial y}+(m-2)P_2.M-3P_3.N,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\frac{\partial P_k}{\partial z}+\frac{\partial P_{k+1}}{\partial y}&=P_k.\frac{\partial P_1}{\partial y}+(m-(k-1))P_{k-1}.M-kP_k.N,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\frac{\partial P_{m-1}}{\partial z}+\frac{\partial P_m}{\partial y}&=P_{m-1}\cdot\frac{\partial P_1}{\partial y}+2P_{m-2}.M-(m-1)P_{m-1}.N,\\
\frac{\partial P_m}{\partial z}\qquad&=P_m\cdot\frac{\partial P_1}{\partial y}+1P_{m-1}.M-mP_m.N.
\end{aligned}$$

Für den Fall $m=3$ geht, wie man sich leicht überzeugen kann, dieses System von Bedingungsgleichungen in die Gleichungen 7) über, für den Fall $m=2$ in die Gleichung C) der Einleitung.

vierten Bedingung angiebt; darnach muss nämlich jede Fuchs'sche Differentialgleichung $F(z, y, y') = 0$ der Relation genügen:

$$\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot y' = P \cdot F + Q \cdot \frac{\partial F}{\partial y'},$$

wo P und Q ganze rationale Functionen von y sind, deren Coefficienten von z abhängen.

Durch Differentiation von

$$F = 0$$

erhält man:

$$\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot y' + \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \frac{dy'}{dz} = 0,$$

also:

$$\frac{dy'}{dz} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot y'}{\frac{\partial F}{\partial y'}}.$$

Ist nun y ein Integral der Differentialgleichung $F = 0$, welches nicht zugleich $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$ befriedigt, so wird unter Berücksichtigung von 8):

$$\frac{dy'}{dz} = \frac{1}{6}(A + By) \cdot (y' - \mathfrak{P}) + \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y} \cdot y' + \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial y}$$

oder:

$$9) \qquad \frac{d(y' - \mathfrak{P})}{dz} = \frac{1}{6}(A + By) \cdot (y' - \mathfrak{P}) + \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial y}.$$

Dieser Ausdruck für den zweiten Differentialquotienten giebt uns ein Mittel zur Integration der Differentialgleichung C) an die Hand: Wenn zunächst das Geschlecht der durch C) definirten algebraischen Function y' von y grösser als 1, also nach den obigen Ausführungen $\mathfrak{P}$ vom zweiten, $\mathfrak{Q}$ vom vierten, $\mathfrak{R}$ vom sechsten Grade in y ist, so muss, wie Herr Poincaré gezeigt hat, das allgemeine Integral der Differentialgleichung C) algebraisch sein.* Die von demselben angedeutete birationale Transformation, durch welche die Riemann'schen Flächen (S_0) und (S_1) in einander übergeführt werden, ist aber im Allgemeinen sehr schwierig aufzufinden und daher die wirkliche Herstellung des algebraischen Integrals praktisch schwer ausführbar. Daher scheint mir zu diesem Zwecke eine von Herrn Fuchs für die algebraische Integration der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung angegebene Methode geeigneter zu sein, welche auf dem folgenden von ihm gefundenen Theorem über die Form des algebraischen Integrals beruht:** Wenn das allgemeine Integral einer algebraischen irreductibelen Differentialgleichung erster Ordnung

* cfr. Einleitung.

** Sitzungsberichte der Akademie. Berlin, 11. December 1884, p. 1171; cfr. pag. 258 Anm.

$F(z, y, y') = 0$ algebraisch ist, so lässt sich dasselbe in der Form darstellen:

$$\Gamma = R(z, y, \Delta),$$

wo Γ die willkürliche Constante, R eine rationale Function ihrer Argumente bedeutet und Δ durch die Gleichung $F(z, y, \Delta) = 0$ definirt wird. Bekanntlich lässt sich nun jede rationale Function der Wurzel einer cubischen Gleichung als linear gebrochene Function derselben darstellen, mit Coefficienten, welche in den Coefficienten der rationalen Function und der cubischen Gleichung rational sind. Das Integral der Differentialgleichung C) kann daher in die Form gesetzt werden:

$$10)\qquad \Gamma = \frac{\varphi_0 + \varphi_1 \cdot (y' - \mathfrak{P})}{\psi_0 + \psi_1 \cdot (y' - \mathfrak{P})},$$

wo φ_0, φ_1, ψ_0, ψ_1 ganze rationale Functionen von y sind, deren Coefficienten von z abhängen und von denen φ_0, ψ_0 einerseits und φ_1, ψ_1 andererseits von gleichem Grade in y vorausgesetzt werden dürfen, während $y' - \mathfrak{P}$ durch die Gleichung C) als algebraische Function von y und z definirt wird.

Differenzirt man Gleichung 10) nach z, beachtet den durch 9) gegebenen Ausdruck für $\frac{d(y' - \mathfrak{P})}{dz}$ und reducirt die Gleichung, die dadurch erhalten wird, mittels C) auf den zweiten Grad in Bezug auf $y' - \mathfrak{P}$, so muss dieselbe wegen der Irreductibilität von C) eine identische sein. Indem man daher in ihr die Coefficienten von $(y' - \mathfrak{P})^0$, $(y' - \mathfrak{P})^1$ und $(y' - \mathfrak{P})^2$ einzeln gleich 0 setzt, erhält man die identischen Gleichungen:

$$11)\quad \begin{cases} \overline{L} + L' \cdot \mathfrak{P} + 2\mathfrak{R} \cdot N' + \dfrac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial y} \cdot M = 0, \\ L' + \dfrac{\partial M}{\partial z} - 2\overline{M} + \left(\dfrac{\partial M}{\partial y} - 2M'\right) \cdot \mathfrak{P} + 3\mathfrak{Q} \cdot N' + \dfrac{A + By}{6} \cdot M = 0, \\ \dfrac{\partial M}{\partial y} - 2M' + \overline{N} + N' \cdot \mathfrak{P} = 0, \end{cases}$$

wenn:

$$\begin{array}{ll} \psi_0\varphi_1 - \varphi_0\psi_1 = M; & \psi_0\overline{\varphi}_0 - \varphi_0\overline{\psi}_0 = \overline{L}; \\ \overline{\psi}_0\varphi_1 - \overline{\varphi}_0\psi_1 = \overline{M}; & \psi_0\varphi'_0 - \varphi_0\psi'_0 = L'; \\ \psi'_0\varphi_1 - \varphi'_0\psi_1 = M'; & \psi_1\overline{\varphi}_1 - \varphi_1\overline{\psi}_1 = \overline{N}; \\ & \psi_1\varphi'_1 - \varphi_1\psi'_1 = N'; \end{array}$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial z} = \overline{\varphi}_i, \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} = \varphi'_i; \qquad \frac{\partial \psi_i}{\partial z} = \overline{\psi}_i, \quad \frac{\partial \psi_i}{\partial y} = \psi'_i, \quad (i = 0, 1)$$

gesetzt wird. Werden in den Gleichungen 11) die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von y einzeln gleich Null gesetzt, so ergeben sich daraus Gleichungen zwischen den Coefficienten von $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, φ_0, φ_1, ψ_0, ψ_1 und deren ersten Ableitungen nach z; diese Gleichungen müssen durch rationale Functionen von z befriedigt werden können. — Hierzu ist noch Folgendes zu bemerken: Wenn $p > 1$ ist, kann Δ höchstens zwei Doppelfactoren besitzen, welche keinen Verzweigungspunkt liefern. Enthält Δ zehn einfache Factoren und einen Doppelfactor, so kann der letztere durch eine bereits des Oeftern angewandte linear gebrochene Substitution fortgeschafft werden; dieser Fall lässt sich demnach auf den von uns behandelten zurückführen. Enthält Δ acht einfache Factoren und zwei Doppelfactoren, so kann ebenfalls durch eine linear gebrochene Substitution der eine fortgeschafft, der andere von z unabhängig gemacht werden, so dass Δ die Gestalt hat:

$$y^2 \cdot (y - \eta_1) \cdot (y - \eta_2) \cdots (y - \eta_8).$$

Auf diesen Fall, der in ähnlicher Weise sich behandeln lässt, gehen wir hier nicht näher ein.

Ist $\mathfrak{P}$ vom ersten Grade in y, so ist nach den Ausführungen dieses Abschnittes $\mathfrak{Q}$ höchstens vom zweiten, $\mathfrak{R}$ höchstens vom dritten Grade in y, und das Geschlecht der durch C) definirten algebraischen Function y' von y kleiner oder gleich 1; ferner ergiebt sich aus den Gleichungen 7), dass dann $B = 0$ sein muss. Gleichung 9) stellt daher in diesem Falle eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung dar; hier ist es also unmittelbar einleuchtend, dass die Integrale der Differentialgleichung C) feste Verzweigungspunkte besitzen. — Sieht man wieder zunächst von singulären Lösungen, für welche zugleich $F = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$ ist, ab, so muss das allgemeine Integral der Differentialgleichung erster Ordnung C) in dem allgemeinen Integral der Differentialgleichung 9) enthalten sein und aus diesem dadurch hervorgehen, dass zwischen dessen beiden willkürlichen Constanten eine bestimmte Relation mit constanten Coefficienten erhalten wird.* Das allgemeine Integral von 9) hat bekanntlich die Form:

$$y = c_1 \cdot \varphi + c_2 \cdot \psi + \chi, \tag{12}$$

wo c_1, c_2 die beiden Integrationsconstanten und φ, ψ, χ Functionen von z bedeuten. Differenzirt man 12):

$$y' = c_1 \cdot \varphi' + c_2 \cdot \psi' + \chi' \tag{13}$$

und trägt aus 12) und 13) die Werthe für y und y' in C) ein, so muss sich aus C) jene Relation zwischen c_1 und c_2 ergeben, und unter Berücksichtigung derselben stellt dann Gleichung 12), welche nunmehr nur eine willkürliche Constante enthält, das allgemeine Integral der Differential gleichung C) dar.

* cfr. Abschnitt II.

(Schluss folgt.)

XV.

Ueber die durch ein lineares Flächensystem n^{ter} Ordnung definirten mehrdeutigen involutorischen Raumverwandtschaften.

Von

Chas. Steinmetz
in New-York City.

(Fortsetzung.)

Fünftes Capitel.

Degeneration der Verwandtschaft bei Annahme fester Grundpunkte.

§ 15. Anzahl und Multiplicität der Grundpunkte.

43. Nehmen wir an, das die mehrdeutige, involutorische Verwandtschaft definirende Flächengebüsch n^{ter} Ordnung habe eine Anzahl fester, allen Flächen des Gebüsches gemeinsamer Grundpunkte, und zwar sei:

ν_1 die Anzahl der einfachen Grundpunkte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \ldots,$
ν_2 „ „ „ doppelten „ $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3, \ldots,$
ν_3 „ „ „ dreifachen „ $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \mathfrak{c}_3, \ldots,$
. . . . ,
ν_k die Anzahl der k-fachen Grundpunkte $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \mathfrak{k}_3, \ldots$

44. Es gilt nun:
ein k-facher Grundpunkt als k^3 feste Schnittpunkte dreier Flächen des Gebüsches, aber nur als $\frac{k(k+1)(k+2)}{6}$ Bestimmungsstücke des Flächengebüsches (Cremona, Salmon).

Das Flächengebüsch ist aber bestimmt durch $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}-4$ Bestimmungsstücke, und wenn es überhaupt eine Verwandtschaft definiren soll, dürfen höchstens (n^3-2) Schnittpunkte je dreier seiner Flächen durch die Grundpunkte festgelegt sein. Daraus ergiebt sich:

$$1. \qquad \sum^k \nu_k \frac{k(k+1)(k+2)}{6} \leqq \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} - 4,$$

$$2. \qquad \sum^k \nu_k k^3 \leqq n^3 - 2.$$

45. Ferner aber dürfen von höheren Multiplicitäten als $\left|\frac{n}{2}\right|$, wo $\left|\frac{n}{2}\right|$ die höchste in $\frac{n}{2}$ enthaltene ganze Zahl, also entweder $\frac{n}{2}$, oder $\frac{n-1}{2}$ ist, höchstens eine vorhanden sein. Denn wenn die Summe der Multiplicitäten zweier Grundpunkte höher als n ist, so hat ihre Verbindungsgerade mehr als n Schnittpunkte mit allen Flächen des Flächengebüsches, liegt also auf allen Flächen des Gebüsches und ist somit Grundlinie des Gebüsches, ein Fall, den wir erst im VIII. Capitel behandeln.

Ebenso liegt eine Curve m^{ter} Ordnung auf allen Flächen des Gebüsches, wenn die Summe der Multiplicitäten der auf ihr liegenden Punkte grösser als mn ist.*

Daraus ergiebt sich:

3. Die Summe der Multiplicitäten je zweier beliebiger Grundpunkte muss $\leqq n$ sein.

4. Liegen eine Anzahl Grundpunkte auf einer Curve m^{ter} Ordnung, so muss die Summe ihrer Multiplicitäten $\leqq mn$ sein.

4. *b)* Die Summe der Multiplicitäten aller auf einer Geraden liegenden Grundpunkte muss $\leqq n$ sein.

4. *c)* Die Summe der Multiplicitäten von fünf in einer Ebene liegenden Grundpunkten muss $\leqq 2n$ sein. (Sonst geht durch sie ein Grundkegelschnitt.) U. s. w.

Wir führen die Bezeichnung ein:

$$N = \sum^k \nu_k k^3,$$

wo N die Summe der festen Schnittpunkte sämmtlicher Flächen des Gebüsches ist.

§ 16. Der Punkt.

46. „Jedem Punkte entsprechen in der Verwandtschaft $(n^3 - N - 1)$ Punkte."

„Die Verwandtschaft ist $(n^3 - N - 1)$-deutig."

„Jeder k-fache Grundpunkt erniedrigt die Verwandtschaftsdeutigkeit um k^3."

„Den Grundpunkten entsprechen sämmtliche Punkte des Raumes in der Verwandtschaft, und jedem beliebigen Punkte gehört jeder k-fache Grundpunkt als k^3-facher Punkt zu."

„Jeder Grundpunkt liegt auf der Kernfläche $4(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung H, und ist daselbst mehrfacher Punkt."

---

* Auch wenn die Summe der Multiplicitäten $< mn$, etwa $= r$, ist, kann die Curve auf allen Flächen des Gebüsches liegen, nämlich wenn $(r-1)$ der Punkte bereits eine auf einer Fläche n^{ter} Ordnung gelegene Schnittpunktgruppe $[mn]$ bestimmen. Vergl. Reye, Annalen II.

§ 17. Die Hauptlinien.

47. Ist die Summe der Multiplicitäten zweier Grundpunkte $=n$, so entspricht jedem Punkte ihrer Verbindungslinie die ganze Verbindungslinie. Dieselbe liegt daher auf der Kernfläche H.

Eine solche Linie möge eine Hauptgerade heissen.

Da drei Flächen n^{ter} Ordnung, welche eine Gerade gemein haben, sich noch in n^3-3n+2 Punkten schneiden (Cremona), drei beliebige Flächen des Flächengebüsches, welche durch eine Hauptgerade l gehen, aber bereits N feste Schnittpunkte besitzen, von denen zwei indess bereits durch die Gerade l absorbirt werden, so folgt, dass sich die drei Flächen ausser in der Geraden l und den Grundpunkten des Gebüsches noch in

$$n^3-N-3n+4$$

weiteren Punkten schneiden, die allen Punkten der Hauptgeraden zugehören, und deren jedem die anderen derartigen Punkte und ausserdem sämmtliche Punkte der Hauptgeraden entsprechen.

Diese Punkte mögen der Hauptgeraden zugeordnete Hauptpunkte heissen.

Ist die Anzahl der auf einer Hauptgeraden liegenden Grundpunkte $=i$, so schneiden sich alle durch die Hauptgerade gehenden Flächen noch in

$$n^3-N-3n+2+i$$

zugeordneten Hauptpunkten. Also:

„Ist die Summe der Multiplicitäten zweier oder mehrerer (i) auf einer Geraden l gelegener Grundpunkte $=n$, so gehören jedem Punkte dieser Hauptgeraden sämmtliche Punkte der Hauptgeraden und ausserdem noch

$$n^3-N-3n+4 \text{ resp. } n^3-N-3n+2+i$$

der Hauptgeraden l zugeordnete Hauptpunkte zu, jedem dieser Hauptpunkte aber die ganze Hauptgerade und ausserdem noch die übrigen Hauptpunkte."

„Die Hauptgeraden liegen auf der Kernfläche, nicht aber im Allgemeinen die Hauptpunkte."

48. Da sich drei Flächen n^{ter} Ordnung, die eine Curve m^{ter} Ordnung und r^{ten} Ranges gemein haben, noch in $(n^3-m(3n-2)+r)$ Punkten schneiden (Cremona), so folgt analog:

„Liegen i Grundpunkte, deren Multiplicitäten in Summe $=mn$ sind, auf einer Curve m^{ter} Ordnung und r^{ten} Ranges, so gehören jedem Punkte dieser Curve alle Punkte der Curve und ausserdem noch

$$n^3-N-m(3n-2)+i+r$$

der Curve zugeordnete Hauptpunkte, jedem dieser Hauptpunkte aber die ganze Hauptcurve und ausserdem noch die anderen Hauptpunkte zu."

„Die Hauptpunkte liegen auf der Kernfläche, nicht aber im Allgemeinen ihre zugeordneten Hauptpunkte."

§ 18. Die Gerade.

49. Die einer Geraden l entsprechende Curve C_l ergiebt sich genau nach denselben Methoden, wie in § 2, 4, 5, 6, als eine Curve $(n^3-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche durch die festen Grundpunkte hindurchgeht.

Um die Multiplicität der Grundpunkte für die einer beliebigen (keinen Grundpunkt enthaltenden und keine Hauptgerade oder -curve schneidenden) Geraden l zu bestimmen, legen wir in § 2, 6 die Ebene ε und die Gerade g durch einen k-fachen Grundpunkt.

Die Curven χ_1 und χ_2 sind nach wie vor von der $n^{2\text{ten}}$ Ordnung.

Durch einen beliebigen Punkt $\mathfrak{x}$ von g geht eine Curve a des Büschels A, der im Büschel B n Curven b entsprechen, deren jede in $\mathfrak{k}$ einen k-fachen Punkt hat, die also zusammen g ausser in $\mathfrak{k}$ noch in $n(n-k)$ Punkten $\mathfrak{y}$ schneiden. Umgekehrt gehören jedem Punkte $\mathfrak{y}$ $n(n-k)$ Punkte $\mathfrak{x}$ zu, es finden also $2n(n-k)$ Coincidenzen $\mathfrak{x}=\mathfrak{y}$ statt; $\mathfrak{k}$ ist demnach, da das Erzeugniss der beiden Büschel von der Ordnung $2n^2$ ist, ein $2nk$-facher Punkt desselben. Es spaltet sich aber die A und B gemeinsame Curve f, welche in $\mathfrak{k}$ einen k-fachen Punkt besitzt, n-fach ab, und ist daher $\mathfrak{k}$ für χ_1 ein nk-facher Punkt.

Ebenso ist $\mathfrak{k}$ für χ_2 ein nk-facher Punkt, ist also n^2k^2-facher Schnittpunkt von χ_1 und χ_2, folglich:

„Die einer Geraden l entsprechende Curve C_l der $(n^3-1)^{\text{ten}}$ Ordnung besitzt in jedem k-fachen Grundpunkte einen nk^2-fachen Punkt."

Dasselbe ergiebt sich nach der Methode in § 2, 5.

§ 19. Die Ebene.

50. Die Ordnung der einer Ebene ε entsprechenden Fläche Φ_ε ergiebt sich nach den Methoden in § 3, 10, 11 ebenfalls $= (n^3-1)$.

Da jedem Schnittpunkte der Ebene mit einer Hauptlinie die ganze Hauptlinie und ausserdem ihre zugeordneten Punkte entsprechen, geht die ihr entsprechende Fläche Φ_ε durch alle Hauptgeraden und ihre zugeordneten Punkte einfach hindurch, durch alle Hauptcurven m^{ter} Ordnung und ihre zugeordneten Hauptpunkte m-fach.

Um die Multiplicität eines k-fachen Grundpunktes für die Fläche Φ_ε zu bestimmen, verfahren wir nach der Methode § 3, 11.

Die Fläche $\psi_{\beta\gamma}$ ist gleichfalls von der $n^{3\text{ten}}$ Ordnung.

Legen wir die Gerade g durch den k-fachen Grundpunkt $\mathfrak{k}$, so geht durch jeden Punkt $\mathfrak{x}$ von g eine Fläche β, der n^2 Flächen γ entsprechen, welche ausser in dem k-fachen Punkte $\mathfrak{k}$ noch in $n^2(n-k)$ Punkten $\mathfrak{y}$ schneiden, und umgekehrt. $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ coincidiren also für $2n^2(n-k)$ Punkte, und $\mathfrak{k}$ ist daher für das Erzeugniss der Büschel B und Γ ein $2n^2k$-facher Punkt. Er ist aber ein k-facher Punkt der sich n^2-fach abspaltenden Fläche φ, ist also für $\psi_{\beta\gamma}$ noch ein n^2k-facher Punkt, demnach auch für Φ_ε ein n^2k-facher Punkt. Also:

„Jeder Ebene ε entspricht in der Verwandtschaft eine Fläche Φ_ε der $(n^3-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche in jedem k-fachen Grundpunkte einen n^2k-fachen Punkt, in jedem einer Hauptlinie zugeordneten Punkte einen einfachen, in jedem einer Hauptcurve m^{ter} Ordnung zugeordneten Hauptpunkte einen m-fachen Punkt besitzt, durch jede Hauptlinie hindurchgeht und sich in jeder Hauptcurve m^{ter} Ordnung m-fach durchschlingt."

§ 20. Gerade und Ebenen.

51. Auf einer Geraden und einer beliebigen Ebene giebt es (n^3-1) Paare einander entsprechender Punkte. Jedem dieser Punktepaare entsprechen noch weitere n^3-N-2 Punkte.

Die einer Geraden g entsprechende C_g und die einer Ebene ε entsprechende Φ_ε haben $(n^3-1)^2$ Punkte gemeinsam. Von diesen Punkten entsprechen

dem Schnittpunkte (εg) n^3-N-1 Punkte,

den (n^3-1) entsprechenden Punktepaaren auf g und ε $(n^3-1)(n^3-N-2)$ Punkte,

jedem k-fachen Grundpunkte, da er auf C_g nk^2-fach, auf Φ_ε n^2k-fach ist, n^3k^3 Punkte,

allen Grundpunkten also $\sum^k \nu_k n^3k^3 = n^3N$ Punkte,

in Summe: $(n^3-N-1)+(n^3-1)(n^2-N-2)+n^3N=(n^3-1)^2$,

q. e. d.

§ 21. Specielle Gerade.

52. Trifft eine Gerade g eine Hauptgerade l oder eine Hauptcurve c der m^{ten} Ordnung, so spaltet sich diese von der der Geraden entsprechenden Curve C_g ab. Die Ordnung von C_g erniedrigt sich daher um die Ordnung der Hauptlinie oder Hauptcurve, resp., wenn die Gerade g die Hauptcurve i-mal schneidet, um im.

Die Multiplicität jedes auf der Hauptcurve gelegenen und für dieselbe λ-fachen Punktes um λ resp. $i\lambda$.

53. Geht eine Gerade l durch einen Grundpunkt $\mathfrak{k}$, so gehört ihr eine Curve C_l an, welche eine beliebige Ebene ε in ebensoviel Punkten schneidet,

als die der Ebene ε entsprechende Φ_ε von l in ausserhalb des k-fachen Punktes gelegenen Punkten geschnitten wird, also in n^3-1-n^2k Punkten; d. h.: die einer durch einen Grundpunkt k^{ter} Ordnung $\mathfrak{k}$ gehenden Geraden l entsprechende C_l ist von der Ordnung

$$n^2(n-k)-1.$$

In § 2, 5, 6 werden die drei Flächenbüschel A, B, Γ durch eine durch einen k-fachen Grundpunkt $\mathfrak{k}$ gehende Gerade l nur $1:(n-k):(n-k)$-deutig einander zugeordnet, und es ergiebt sich dann die Ordnung von χ_1, χ_2 zu $n(n-k)$, die Ordnung von C_l zu $n^2(k-1)-1$.

Legt man in § 2, 6 die Ebene ε und die Gerade g durch einen i-fachen Punkt $\mathfrak{i}$, resp. durch den k-fachen Grundpunkt $\mathfrak{k}$, so ergeben sich als weitere Schnittpunkte von ε mit C_l noch $n^2(k-1)-1-(n-k)i^2$ resp. $n^2(k-1)-1-(n-k)k^2$ Schnittpunkte, $\mathfrak{i}$ resp. $\mathfrak{k}$ ist also für C_l ein $(n-k)i^2$-facher, resp. [da sich in $\mathfrak{k}$ noch der Schnittpunkt (εl) abspaltet] $(n-k)k^2-1$-facher Punkt. [Für χ_1 und χ_2 war er $(n+k)i$-fach.] Also:

„Geht eine Gerade l durch einen k-fachen Grundpunkt $\mathfrak{k}$, so entspricht ihr eine Curve C_l der $(n^2(n-k)-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche in jedem i-fachen Grundpunkte einen $(n-k)i^2$-fachen, in $\mathfrak{k}$ aber nur einen $((n-k)k-1)$-fachen Punkt besitzt."

„Dadurch, dass eine Gerade l durch einen k-fachen Grundpunkt $\mathfrak{k}$ geht, wird die Ordnung der ihr in der Verwandtschaft zugehörigen Curve C_l um n^2k, die Multiplicität jedes ihrer in einem i-fachen Grundpunkte gelegenen Punktes um ki^2, die Multiplicität von $\mathfrak{k}$ aber um k^3+1 erniedrigt."

54. „Der Verbindungslinie l eines k-fachen Grundpunktes $\mathfrak{k}$ und eines i-fachen Grundpunktes $\mathfrak{i}$ entspricht, vorausgesetzt $k+i \leqq n-1$, eine Curve der $(n^2(n-k-i)-1)^{\text{ten}}$ Ordnung C_l, welche in jedem λ-fachen Grundpunkte einen $(n-k-i)\lambda^2$-fachen, in $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{i}$ dagegen $((n-k-i)k^2-1)$- resp. $((n-k-i)i^2-1)$-fache Punkte besitzt."

Also:

„Der Verbindungslinie l eines k-fachen Punktes $\mathfrak{k}$ und eines $(n-1-k)$-fachen Punktes $\mathfrak{i}$ entspricht eine Curve C_l der $(n^2-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche jeden λ-fachen Grundpunkt zum λ^2-fachen Punkte, die Punkte $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{i}$ aber zu $(k^2-1)^2$- resp. $(n-2-k)^2$-fachen Punkten besitzt und mit l zusammen die Grundcurve der Flächen eines Büschels im Gebüsche ist."

„Der Verbindungslinie eines k-fachen und eines $(n-k)$-fachen Punktes entsprechen als einer Hauptgeraden (vergl. § 17, 47) die ihr zugeordneten Hauptpunkte und ausserdem die Hauptgerade selber.

55. „Einer Geraden l, die durch einen, einer Hauptgeraden oder Hauptcurve zugeordneten oder auf ihr liegenden Hauptpunkt geht, entspricht eine Curve m^{ter} Ordnung C_l, von der sich die dem Hauptpunkte zugehörige Hauptgerade resp. Hauptcurve abspaltet, deren Ordnung sich also um 1 resp. m erniedrigt. Die Multiplicität der auf der Hauptlinie

liegenden Grundpunkte für die l wird dabei um die Multiplicität vermindert, die sie für die betreffende Hauptlinie besitzen."

Durch weitere Combination der in 52. bis 55. enthaltenen Specialisirungen lassen sich eine grosse Anzahl specieller Curvenarten C_l erhalten, auf die einzugehen wir für die Untersuchung specieller derartiger Raumverwandtschaften aufschieben.

§ 22. Specielle Ebenen.

56. In analoger Weise ergiebt sich:

„Geht eine Ebene ε durch einen k-fachen Grundpunkt $\mathfrak{k}$, so erniedrigt sich die Ordnung ihrer zugehörigen Fläche Φ_ε um nk^2, die Multiplicität jedes ihrer in einem i-fachen Grundpunkte gelegenen Punktes um ik^2, die Multiplicität von $\mathfrak{k}$ aber um k^3+1."

„Jeder durch einen k-fachen Grundpunkt $\mathfrak{k}$ gehenden Ebene ε gehört also eine Fläche Φ_ε der $n(n^2-k^2)-1^{\text{ten}}$ Ordnung an, die in jedem i-fachen Grundpunkte einen $i(n^2-k^2)$-fachen, in $\mathfrak{k}$ aber einen $(k(n^2-k^2)-1)$-fachen Punkt besitzt."

„Der Verbindungsebene ε dreier k-, i-, λ-fachen Grundpunkte $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{i}$, λ gehört eine Fläche Φ_ε der $n(n^2-k^2-i^2-\lambda^2)-1^{\text{ten}}$ Ordnung an, welche in jedem ϱ-fachen Grundpunkte einen $\varrho(n^2-k^2-i^2-\lambda^2)$-fachen Punkt besitzt" u. s. w.

„Der Verbindungsebene ε dreier $\frac{n}{2}$-fachen Punkte gehört eine Fläche Φ_ε der $\left(\frac{n^3}{4}-1\right)^{\text{ten}}$ Ordnung an."

„Die einer Ebene ε zugehörige Fläche Φ_ε ist bei allgemeiner Lage der Grundpunkte mindestens $=\frac{n^3}{4}-1$."

§ 23. Allgemeine Curven und Flächen.

57. Die einer Curve m^{ter} Ordnung entsprechende Curve C_m der $m(n^3-1)^{\text{ten}}$ Ordnung hat in jedem k-fachen Grundpunkte einen mnk^2-fachen Punkt."

„Die einer Fläche m^{ter} Ordnung entsprechende Fläche Φ_m der $m(n^3-1)^{\text{ten}}$ Ordnung hat in jedem k-fachen Grundpunkte einen mn^2k-fachen Punkt, geht durch jede Hauptgerade und ihre zugeordneten Punkte m-mal, durch jede Hauptcurve r^{ter} Ordnung und ihre zugeordneten Punkte mr-mal hindurch" u. s. w.

Sechstes Capitel.

Degeneration der Kernfläche bei Annahme fester Grundpunkte.

§ 24. Hauptlinien und Hauptcurven.

58. Die Kernfläche $4(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung H geht durch sämmtliche Hauptlinien und Hauptcurven der Verwandtschaft einfach hindurch, nicht aber im Allgemeinen durch die diesen zugeordneten Hauptpunkte.

Denn jeder Punkt einer Hauptlinie ist ein sich selbst entsprechender. Existiren also Hauptlinien oder Hauptcurven, so lässt sich (Reye, Annalen II) die Kernfläche durch Büschel niederer Flächen oder Ebenen projectivisch erzeugen und erscheint als totales oder partielles Erzeugniss zweier projectivischen Büschel.

§ 25. Einfluss der einfachen Grundpunkte.

59. Die Kernfläche H der $4(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung wird erzeugt durch die vier projectivischen Polarengebüsche $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche vier beliebigen Punkten in Bezug auf das Flächengebüsch n^{ter} Ordnung zugehören (vergl. § 8, 24).

Nehmen wir als diese vier Punkte einen einfachen Grundpunkt $\mathfrak{a}$ und drei beliebige Punkte $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$. Ihre zugehörigen Polarengebüsche seien A, B, Γ, Δ. Alle Flächen von A gehen durch $\mathfrak{a}$, von B, Γ, Δ aber geht nur ein Tripel entsprechender Flächen durch $\mathfrak{a}$, nämlich die Polarflächen der Fläche n^{ter} Ordnung, welche in $\mathfrak{a}$ einen Doppelpunkt besitzt.

Wir legen durch $\mathfrak{a}$ eine Gerade g und suchen die Anzahl der Schnittpunkte, die sie ausser in $\mathfrak{a}$ noch mit H besitzt, um dadurch die Multiplicität von $\mathfrak{a}$ für H zu bestimmen.

Durch einen beliebigen Punkt $\mathfrak{x}$ von g gehen drei einander entsprechende Flächen der Gebüsche B, Γ, Δ, denen in A eine Fläche zugehört, welche g ausser in $\mathfrak{a}$ noch in $(n-2)$ Punkten $\mathfrak{y}$ schneidet.

Umgekehrt geht durch jeden Punkt $\mathfrak{y}$ ein Flächennetz in A, denen in B, Γ, Δ drei projectivische Flächennetze zugehören, welche (vergl. § 8, 24, Anm.) eine Fläche $3(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung erzeugen, die durch $\mathfrak{a}$ geht, weil sich in $\mathfrak{a}$ ein Tripel entsprechender Flächen schneiden, und g daher noch in $(3n-4)$ Punkten $\mathfrak{x}$ schneidet.

Jedem Punkte $\mathfrak{x}$ gehören $(n-2)$ Punkte $\mathfrak{y}$,
„ „ $\mathfrak{y}$ „ $(3n-4)$ „ $\mathfrak{x}$
zu, $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ coincidiren also für $(4n-6)$ Punkte, und da H von der $(4n-4)^{\text{ten}}$ Ordnung ist, fallen nach $\mathfrak{a}$ also zwei Schnittpunkte von H.

Ist g dagegen Tangente oder Osculirende der einzigen Fläche des Gebüsches n^{ter} Ordnung, welche in $\mathfrak{a}$ einen Doppelpunkt hat, so fallen von der dem durch $\mathfrak{x}$ gehenden Flächentripel in A entsprechenden Fläche zwei resp. drei Punkte nach $\mathfrak{a}$, und $\mathfrak{a}$ ist also drei- resp. vierfacher Schnittpunkt der g mit der Kernfläche H. Also:

„Die Kernfläche $4(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung H der Verwandtschaft hat in jedem einfachen Grundpunkte des Flächengebüsches n^{ter} Ordnung einen Doppelpunkt, und hat in diesem Doppelpunkte denselben Berührungskegel mit denselben Osculirenden, wie die einzige Fläche des Flächengebüsches, welche in diesem Grundpunkte einen Doppelpunkt hat."

§ 26. Einfluss der mehrfachen Grundpunkte.

1. Hilfssatz.

60. „Haben sämmtliche Flächen zweier projectivischen Flächenbüschel $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung in einem Punkte $\mathfrak{k}$ einen $(k-1)$-fachen Punkt, so erzeugen sie eine Fläche $2(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche in $\mathfrak{k}$ einen $2(k-1)$-fachen Punkt besitzt."

Denn:

Sei g eine beliebige, durch $\mathfrak{k}$ gehende Gerade, B und Γ die beiden Flächenbüschel.

Durch jeden Punkt $\mathfrak{x}$ von g geht nun eine Fläche β des Büschels B, der in Γ eine Fläche γ zugehört, welche g ausser in dem $(k-1)$-fachen Punkte $\mathfrak{k}$ noch in $(n-k)$ Punkten $\mathfrak{y}$ schneidet. Umgekehrt entsprechen jedem Punkte $\mathfrak{y}$ $(n-k)$ Punkte $\mathfrak{x}$. $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ coincidiren also für $2(n-k)$ Punkte. Die von den beiden projectivischen Büscheln erzeugte Fläche $2(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung schneidet g also in $2(n-k)$ von $\mathfrak{k}$ verschiedenen Punkten, hat demnach in $\mathfrak{k}$ einen $2(k-1)$-fachen Punkt.

2. Hilfssatz.

61. „Haben sämmtliche Flächen dreier projectivischen Netze $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung einen $(k-1)$-fachen Punkt $\mathfrak{k}$ gemeinsam, so erzeugen sie eine Fläche $3(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche in $\mathfrak{k}$ einen $3(k-1)$-fachen Punkt besitzt."

Denn:

Durch jeden Punkt $\mathfrak{x}$ einer durch $\mathfrak{k}$ gelegten Geraden g geht, wenn die drei projectivischen Netze A, B, Γ seien, ein Paar entsprechender Flächen A und B, denen in Γ eine Fläche γ zugehört, welche g ausser in $\mathfrak{k}$ noch in $(n-k)$ Punkten $\mathfrak{y}$ schneidet. Umgekehrt geht durch jeden Punkt $\mathfrak{y}$ ein Flächenbüschel im Netze Γ, welchem in A und B zwei projectivische Flächenbüschel zugehören, die nach 60. eine Fläche $2(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung erzeugen, welche g ausser in ihrem $2(k-1)$-fachen Punkte $\mathfrak{k}$ noch in $2(n-k)$ Punkten $\mathfrak{x}$ schneidet.

$\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ coincidiren daher für $3(n-k)$ Punkte, und da die von den projectivischen Netzen erzeugte Fläche von der $3(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung ist, hat sie $\mathfrak{k}$ zum $3(k-1)$-fachen Punkte.

3. Hilfssatz.

62. „Haben sämmtliche Flächen von vier projectivischen Flächengebüschen A, B, Γ, Δ in einem Punkte $\mathfrak{k}$ einen $(k-1)$-fachen gemeinsamen Punkt, die Flächen des Flächengebüsches A sogar einen k-fachen, und sind die Flächengebüsche projectivisch, so erzeugen sie eine Fläche $4(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche in $\mathfrak{k}$ einen $(4k-3)$-fachen Punkt besitzt."

Denn:

Durch jeden Punkt $\mathfrak{x}$ einer durch $\mathfrak{k}$ gelegten Geraden g geht ein Tripel entsprechender Flächen der drei Gebüsche B, Γ, Δ, welchem in A eine Fläche α entspricht, die g ausser in $\mathfrak{k}$ noch in $(n-k-1)$ Punkten $\mathfrak{y}$ schneidet. Umgekehrt geht durch jeden Punkt $\mathfrak{y}$ ein Flächennetz in A, dem in B, Γ, Δ drei projectivische Flächennetze entsprechen, welche nach 61. eine Fläche $3(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung erzeugen, die g ausser in dem $3(k-1)$-fachen Punkte $\mathfrak{k}$ noch in $3(n-k)$ Punkten $\mathfrak{x}$ schneidet.

$\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ coincidiren daher für $4(n-k)-1$ Punkte, also, da die vier Flächengebüsche A, B, Γ, Δ eine Fläche $4(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung erzeugen, ist $\mathfrak{k}$ für dieselbe ein $(4k-3)$-facher Punkt.

63. Wenden wir diese Hilfssätze auf die Erzeugungsweise der Kernfläche H in § 8, 24 an, so ergiebt sich:

„Die Kernfläche H der Verwandtschaft hat in jedem k-fachen Grundpunkte einen $(4k-3)$-fachen Punkt",

ausgenommen $k=1$.

Für $k=1$ hat H nicht, wie sich daraus ergäbe, in $\mathfrak{k}$ einen einfachen, sondern sogar einen Doppelpunkt. Diese Ausnahme beruht darauf, dass in einem einfachen Grundpunkte eine Fläche des Gebüsches einen Doppelpunkt besitzt, nicht aber in einem k-fachen Grundpunkte eine Fläche einen $(k+1)$-fachen Punkt.

Siebentes Capitel.

Degeneration des Strahlencomplexes und der Strahlencongruenz bei Annahme fester Fundamentalpunkte.

§ 27. Der Strahlencomplex.

64. Wir behalten die Bezeichnungen des V. Capitels bei und beschränken uns überall, wo die Resultate sich nach den Methoden des III. und IV. Capitels ergeben, allein auf die Angabe der Resultate, und zwar nur insoweit, als sie von den Resultaten des III. und IV. Capitels abweichen.

Es ergiebt sich:

„Der Strahlencomplex ist vom Grade $2(n-1)(n^2+n-3)$. Sein Grad wird also durch die Annahme fester Fundamentalpunkte nicht verändert."

65. „Alle in einer Ebene ε liegenden Complexstrahlen umhüllen eine Curve $2(n-1)(n^2+n-3)^{\text{ter}}$ Classe, welche alle $\frac{m(m-1)}{2}$ Verbindungslinien der Schnittpunkte jeder Hauptcurve m^{ter} Ordnung berührt."

„Die singulären Punkte aller in einer Ebene gelegenen Complexstrahlen liegen auf einer Curve $(n-1)(n^2+n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche in jedem Schnittpunkte einer Hauptcurve m^{ter} Ordnung einen $(m-1)$-fachen Punkt besitzt."

66. „Alle durch einen Punkt $\mathfrak{p}$ gehenden Complexstrahlen bilden einen Kegel $2(n-1)(n^2+n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, der nach jedem k-fachen Grundpunkte $\mathfrak{k}$ hin einen $2nk^2$-fachen Kegelstrahl besitzt."

„Die singulären Punkte aller Strahlen dieses Complexkegels liegen auf einer Raumcurve $((n-1)(5n^2+5n-11)-N)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche den Complexkegel zum Perspectivkegel hat, in $\mathfrak{p}$ einen (n^3-N-1)-fachen und in jedem k-fachen Grundpunkte einen $2nk^2$-fachen Punkt besitzt."

67. „Die singulären Punkte aller eine Gerade g schneidenden Complexstrahlen liegen auf einer Complexfläche $(2(n-1)(n^2+n-1)-N)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche die Gerade g zur (n^3-N-1)-fachen Geraden besitzt. Von dieser Complexfläche hatte sich die Verbindungsebene $[g\mathfrak{k}]$ der Geraden g mit jedem k-fachen Grundpunkte $\mathfrak{k}$ k^3-fach abgespaltet."

68. „Alle Complexstrahlen, welche zwei Gerade g_1 und g_2 schneiden, liegen auf einer Regelfläche $4(n-1)(n^2+n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche durch jeden k-fachen Grundpunkt hindurchgehend eine k^3-fache Generatrix besitzt."

§ 28. Specielle Complexcurven, Kegel und Flächen.

69. Geht eine Ebene ε durch einen k-fachen Grundpunkt, so hat ihre Schnittcurve $(n^3-1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit der zugehörigen Φ_ε in $\mathfrak{k}$ einen n^2k-fachen Punkt. Von ihr spaltet sich aber die Schnittcurve $4(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung H mit der Kernfläche H ab, welche in $\mathfrak{k}$ einen $(4k-3)$-fachen Punkt besitzt. Also:

„Geht eine Ebene ε durch einen k-fachen Grundpunkt $\mathfrak{k}$, so liegen die singulären Punkte der auf ε befindlichen Complexstrahlen auf einer Curve $(n-1)(n^2+n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche in $\mathfrak{k}$ einen $(k(n^2-4)+3)$-fachen Punkt besitzt.

Geht die Ebene ε aber durch einen einfachen Grundpunkt $\mathfrak{a}$, so ist dieser für die Curve der singulären Punkte ein (n^2k-2)-facher.

Das Letztere wegen § 26, 63.

„Von der Complexcurve $2(n-1)(n^2+n-3)^{\text{ter}}$ Classe in ε spaltet sich das k^3-fach gerechnete Strahlenbüschel $\mathfrak{k}$ ab, und bleibt daher eine Curve der $(2(n-1)(n^2+n-3)-2nk^2)^{\text{ten}}$ Classe übrig."

70. „Der Complexkegel, der einen k-fachen Grundpunkt $\mathfrak{k}$ zur Spitze hat, zerfällt in das Strahlenbündel $\mathfrak{k}$ und einen Kegel der Ordnung

$2(n-k)(n^2-k^2-4)+2$, welcher in einem i-fachen Grundpunkte einen $2k(n^2-i^2)$-fachen Punkt besitzt.

Ist die Spitze des Kegels ein einfacher Grundpunkt $\mathfrak{a}$, so ist die Ordnung des Kegels $=2(n-1)(n^2-5)+4$."

Denn: Einem in der Ebene ε durch $\mathfrak{k}$ resp. $\mathfrak{a}$ gezogenen Strahle a gehört eine Curve C_a der $(n^3-n^2k-1)^{\text{ten}}$ resp. $(n^3-n^3-1)^{\text{ten}}$ Ordnung zu (§ 21, 53), welche in $\mathfrak{k}$ resp. $\mathfrak{a}$ einen $(nk^2-(k^3+1))$-fachen, resp. $(n-2)$-fachen Punkt besitzt und a ausser in $\mathfrak{k}$ resp. $\mathfrak{a}$ noch in $(4(n-k)-1)$ resp. $(4n-6)$ Punkten schneidet (§ 26, 63). Sie schneidet ε daher ausserdem noch in

$$(n^3-n^2k-1)-(nk^2-(k^3+1))-(4(n-k)-1)=(n-k)(n^2-k^2-4)+1$$

resp. in

$$(n^3-n^2-1)-(n-2)-(4n-6)=(n-1)(n^2-5)+2$$

Punkten, welche mit $\mathfrak{k}$ resp. $\mathfrak{a}$ verbunden ebensoviele Strahlen b ergeben.

a und b coincidiren daher für

$2(n-k)(n^2-k^2-4)+2$ resp. $2(n-1)(n^2-5)+4$ Strahlen, q. e. d.

71. „Der einem einer Hauptgeraden oder Hauptcurve m^{ter} Ordnung zugeordneten Hauptpunkte zugehörige Complexkegel zerfällt in die doppelte Verbindungsebene des Hauptpunktes mit seiner zugeordneten Hauptgeraden, resp. in den doppelten Perspectivkegel der dem betreffenden Hauptpunkte zugeordneten Hauptcurve, und in einen Kegel $(2(n-1)(n^2+n-3)-2)^{\text{ter}}$ resp. $(2(n-1)(n^2+n-3)-2m)^{\text{ter}}$ Ordnung, welcher durch alle seiner Spitze beigeordneten Hauptpunkte hindurchgeht.

Liegt die Kegelspitze dagegen auf der Hauptgeraden oder Hauptcurve selbst, so ist der Complexkegel von der $2(n-1)(n^2+n-3)^{\text{ten}}$ resp. $(2(n-1)(n^2+n-3)-2(m-1))^{\text{ten}}$ Ordnung" u. s. w.

§ 29. Die Strahlencongruenz.

72. „Die Ordnung der Congruenz ist

$$=2(n-1)(2n^2-n+1)-N\text{"},$$

indem sich in jedem k-fachen Grundpunkte ein k^3-fach zu rechnendes Strahlenbündel abzweigt und die Ordnung der Congruenz sich daher um $\sum_k \nu_k k^3 = N$ erniedrigt.

73. „Die Classe der Congruenz ist

$$=6(n-1)^2.\text{"}$$

74. „Der Rang der Congruenz, d. h. die Zahl der zwei beliebige Gerade g und g_1 schneidenden Congruenzstrahlen, ist

$$=4(n-1)(n^2+n-1)-N\text{"}$$

u. s. w.

Achtes Capitel.

Untersuchung der Frage nach der Möglichkeit der Definition eindeutiger involutorischer Raumverwandtschaften durch Flächengebüsche mit festen Grundpunkten.

§ 30.

75. Soll ein Flächengebüsch n^{ter} Ordnung eine eindeutige involutorische Raumverwandtschaft definiren, so müssen sämmtliche Flächen des Gebüsches (n^3-2) feste Schnittpunkte gemein haben, diese (n^3-2) festen Schnittpunkte aber nur höchstens $\left(\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}-4\right)$ Bestimmungsstücke repräsentiren, da durch diese Anzahl von Bestimmungsstücken ein Flächengebüsch gerade eindeutig bestimmt ist.

Es gilt nun:

ein	einfacher	Grundpunkt	als	1 Bestimmungsstück	und	1 Schnittpunkt,
„	doppelter	„	„	4 Bestimmungsstücke	„	8 Schnittpunkte,
„	dreifacher	„	„	10 „	„	27 „
„	vierfacher	„	„	20 „	„	64 „
„	k-facher	„	„	$\frac{k(k+1)(k+2)}{6}$ Bestimmungsstücke	und	k^3 Schnittpunkte.

Im Allgemeinen gilt also ein mehrfacher Grundpunkt als mehr Schnittpunkte, denn als Bestimmungsstücke, so dass eine Anzahl α, β, ..., $\varkappa$-facher Grundpunkte bereits mehr Schnittpunkte der Flächen des Gebüsches festlegen, als die Anzahl der Bestimmungsstücke des Gebüsches beträgt, die sie repräsentiren.

Es fragt sich nun, ob man (n^3-2) Schnittpunkte aller Flächen des Gebüsches in einer Anzahl von Grundpunkten festlegen kann, die als weniger oder höchstens $\left(\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}-4\right)$ Bestimmungsstücke gelten.

76. Durch alleinige Annahme einfacher Grundpunkte ist dies nur möglich im Falle

$$n^3-2 \leqq \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}-4,$$

also für $n=2$.

„Das Quadriflächengebüsch mit sechs festen Grundpunkten definirt eine eindeutige involutorische Verwandtschaft.“ Vergl. § 39, 97.

77. Die allgemeine Untersuchung dieses Problems wird wesentlich vereinfacht durch den Nachweis, dass man in einer gegebenen Anzahl von Bestimmungsstücken bei Annahme von Punkten höherer Multiplicität mehr Schnittpunkte festlegen kann, als bei Annahme von Grundpunkten niederer Multiplicität, dass also, wenn durch Annahme fester Grundpunkte des Flächengebüsches überhaupt eindeutige Verwandtschaften definirt werden

können, sie sicher durch Grundpunkte höchst möglicher Multiplicität erzielt werden können, und andererseits, dass, wenn sich nachweisen liesse, dass bei Annahme von Grundpunkten höchst möglicher Multiplicität (vergl. § 15, 45) doch die Anzahl der Bestimmungsstücke nicht ausreicht, um (n^3-2) Schnittpunkte festzulegen, eindeutige Verwandtschaften durch Annahme fester Grundpunkte im Flächengebüsch überhaupt nicht erzeugt werden können.

Der Nachweis, dass durch eine Anzahl von Bestimmungsstücken, wenn sie zur Bestimmung von Grundpunkten höherer Multiplicität verwandt werden, mehr Schnittpunkte der Flächen des Flächengebüsches festgelegt werden, als wenn die Bestimmungsstücke zur Definition von Grundpunkten niederer Multiplicität verwandt werden, ergiebt sich daraus, dass das Verhältniss der Bestimmungsstücke zu dem der dadurch festgelegten Schnittpunkte:

$$\frac{k(k+1)(k+2)}{6k^3}=\frac{1}{6}+\frac{1}{2k}+\frac{1}{3k^2},$$

mit wachsendem k abnimmt.

§ 31.

78. Grundpunkte von höherer Multiplicität als $\left|\frac{n}{2}\right|$, wo $\left|\frac{n}{2}\right|$ die höchste in $\frac{n}{2}$ enthaltene ganze Zahl, also entweder $=\frac{n}{2}$, oder $=\frac{n-1}{2}$ ist, können nur einfach vorkommen (vergl. § 15, 45).

Nehmen wir also einen $(n-\delta)$-fachen Punkt als Bestimmungsstück an, wobei wir voraussetzen

$$1\leqq\delta\leqq\left|\frac{n-1}{2}\right|.$$

Denn: $\delta=0$ ergäbe ein Gebüsch von lauter Kegeln, das gar keine Verwandtschaft definirte; den Fall $\delta=\frac{n}{2}$ aber sparen wir uns besonderer Betrachtung auf.

Die übrigen Bestimmungsstücke des Flächengebüsches nehmen wir als lauter δ-fache Punkte an — die höchsten Punkte, die ausser dem $(n-\delta)$-fachen Punkte noch vorkommen können.

Hierbei sehen wir davon ab, dass die Zahl der δ-fachen Punkte eine ganze sein muss und dass wir daher nicht alle weiteren Bestimmungsstücke durch δ-fache Grundpunkte verbrauchen können, sondern einen Theil durch Grundpunkte niederer Multiplicität ausfüllen müssen, welche nach Obigem weniger Schnittpunkte festlegen. Denken wir uns daher [ausser dem $(n-\delta)$-fachen Punkte] sämmtliche weiteren Bestimmungsstücke durch δ-fache Punkte ausgefüllt, so werden sich damit mehr feste Schnittpunkte ergeben, als in Wirklichkeit möglich ist. Wenn gleichwohl die Zahl der dann festgelegten Schnittpunkte (n^3-2) nicht erreichte, wäre die Unmöglichkeit der Erzeugung einer eindeutigen Verwandtschaft unter den obigen Voraussetzungen bewiesen.

79. Ein $(n-\delta)$-facher Grundpunkt gilt als

$(n-\delta)^3$ feste Schnittpunkte und als

$\frac{(n-\delta)(n-\delta+1)(n-\delta+2)}{6}$ Bestimmungsstücke.

Es bleiben zur Bestimmung des Flächengebüsches n^{ter} Ordnung also noch übrig:

$$\frac{(n^3+1)(n+2)(n+3)}{6}-4-\frac{(n-\delta)(n-\delta+1)(n-\delta+2)}{6}$$

Bestimmungsstücke, in welchen

$$n^3-2-(n-\delta)^3$$

Schnittpunkte festgelegt werden sollen.

Soll dies durch Annahme höchstens δ-facher Punkte möglich sein, so muss der Quotient sein:

$$\frac{\delta(\delta+1)(\delta+2)}{6\delta^3}<\frac{\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}-4-\frac{(n-\delta)(n-\delta+1)(n-\delta+2)}{6}}{n^3-2-(n-\delta)^3},$$

d. h. es muss sein:

$$\mathsf{X}(\delta)\equiv(\delta+1)(\delta-2)\left[n^3-2-(n-\delta)^3\right]$$
$$-6\delta^2\left[\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}-4-\frac{(n-\delta)(n-\delta+1)(n-\delta+2)}{6}\right]<0.$$

Es ist aber, ausgerechnet:

$$\begin{aligned}\mathsf{X}(\delta)&\equiv 6\delta^4-15n\delta^3+\delta^2(6n^2-15n+16)+6\delta(n^2-1)-4\\&\equiv 6n^2\delta(\delta+1)-15n\delta^2(\delta+1)+(6\delta^4+16\delta^2-6\delta-4),\end{aligned}$$

daher:

für $\delta=1$

$$\mathsf{X}(1)\equiv 15n^2-30n+12,$$

also

$$\mathsf{X}(1)>0 \text{ für } n>2, \quad \mathsf{X}(1)=0 \text{ für } n=2.$$

„Bei Annahme eines $(n-1)$-fachen und lauter einfacher Grundpunkte ist eine eindeutige Verwandtschaft nur im Falle $n=2$ möglich."

Für $\delta=\frac{n-1}{2}$

$$\mathsf{X}\left(\frac{n-1}{2}\right)=\tfrac{1}{8}(3n^2+53n^2-115n+27),$$

also

$$\mathsf{X}\left(\frac{n-1}{2}\right)>0 \text{ für } n\geqq 2.$$

„Bei Annahme eines $\frac{n+1}{2}$-fachen und lauter $\frac{n-1}{2}$-fachen Punkten ist eine eindeutige Verwandtschaft nie möglich."

80. Der Differentialquotient der — als stetig behandelten — Function $\mathsf{X}(\delta)$ ist

$$\frac{\partial\mathsf{X}(\delta)}{\partial\delta}\equiv 24\delta^3-45n\delta^2+2\delta(6n^2-15n+16)+6(n^2-1),$$

also:

für $\delta = 1$

$$\frac{\partial X(1)}{\partial \delta} \equiv 18n^2 - 75n + 50,$$

also

$$> 0 \text{ für } n > 2;$$

für $\delta = \frac{n-1}{2}$

$$\frac{\partial X\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\partial \delta} \equiv \tfrac{1}{4}(9n^3 + 6n^2 - 115n + 100),$$

also

$$< 0 \text{ für } n \geqq 2.$$

Daraus ergiebt sich über den Verlauf der Function $X(\delta)$ im Intervalle $1 \leqq \delta \leqq \frac{n-1}{2}$:

Die Function $X(\delta)$ steigt am Anfange und fällt am Ende dieses Intervalles. Da sie nun für $\delta = 1$ und für $\delta = \frac{n-1}{2} > 0$ ist, so folgt, dass, wenn sie in diesem Intervalle < 0 werden sollte, sie, nachdem sie anfangs gestiegen ist, sich nach unten wenden, 0 überschreiten müsste, ein Minimum erreichen, wieder steigen, um nach erneuter Ueberschreitung der 0 und Erreichung eines zweiten Maximums bis $\delta = \frac{n-1}{2}$ hin abzufallen. Sie müsste daher in diesem Intervalle mindestens zweimal die Krümmung wechseln, also mindestens zwei Wendepunkte besitzen. Dies ist aber nicht der Fall, denn für den Wendepunkt ist

$$\frac{\partial^2 X(\delta)}{\partial \delta^2} \equiv 72\delta^2 - 90n\delta + 2(6n^2 - 15n + 16) = 0,$$

also

$$\delta = \frac{5n}{8} \pm \frac{1}{24}\sqrt{960n - 159n^2 - 1024}.$$

Sind also überhaupt zwei reelle Wendepunkte vorhanden, so liegt doch mindestens der eine stets ausserhalb des Intervalles $1 \leqq \delta \leqq \frac{n-1}{2}$.

Die Function $X(\delta)$ ist also in diesem Intervalle stets > 0. Also:

„Durch Annahme eines $(n-\delta)$-fachen und lauter weiterer, höchstens δ-facher Grundpunkte ist die Erzeugung einer eindeutigen involutorischen Verwandtschaft mittels eines Flächensystems n^{ter} Ordnung nicht möglich.“

Vorausgesetzt: $\delta < \frac{n}{2}$.

§ 32.

81. Wir betrachten jetzt den bisher ausgeschlossenen Fall $\delta = \frac{n}{2}$.

Es fragt sich nun, ob im Flächengebüsch n^{ter} Ordnung $(n = 2m)$ durch Annahme möglichst vieler $m = \frac{n}{2}$-facher Grundpunkte sich eine eindeutige Verwandtschaft erzeugen lässt.

Unsere obige Function wird

$$X\left(\frac{n}{2}\right) \equiv -\tfrac{1}{8}(6n^3 - 32n^2 + 24n + 32) < 0,$$

beweist also nichts.

Aber auch in diesem Falle ergiebt sich die Unmöglichkeit der Entstehung eindeutiger Verwandtschaften. Denn:

Da ein m-facher Punkt m^3 Schnittpunkte festlegt, im Ganzen aber $8m^3 - 2$ feste Schnittpunkte vorhanden sind, so können höchstens sieben m-fache Punkte angenommen werden. Die übrigen Bestimmungsstücke können entweder für einen $(m-1)$-fachen Punkt und Punkte niederer Multiplicität verwandt werden, — dann ergiebt sich in ähnlicher Weise die Unmöglichkeit eindeutiger Verwandtschaften —, oder es können mehrere Punkte höherer Multiplicität angenommen werden — dann können dieselben höchstens von der Multiplicität $\left|\frac{4m}{5}\right|$ sein, und es ergiebt sich gleichfalls die Unmöglichkeit eindeutiger Verwandtschaften. Also:

„Eindeutige involutorische Raumverwandtschaften können durch ein Flächengebüsch n^{ter} Ordnung mit festen Grundpunkten **nicht** definirt werden."

Neuntes Capitel.

Degeneration der Verwandtschaft bei Annahme fester Grund- und Fundamental-Linien und Curven.

§ 33. Das Skelett des Flächengebüsches.

82. Sämmtliche Flächen eines Flächengebüsches n^{ter} Ordnung können besitzen:

1. eine Anzahl gemeinsamer Grundpunkte verschiedener Multiplicität, und zwar:
   a) isolirte Grundpunkte,
   b) Grundpunkte, die auf Grund- oder Fundamentallinien oder -curven liegen.

Haben die Flächen in einem Grundpunkte eine oder mehrere gemeinsame Tangenten oder Osculirenden, oder ihre Berührungskegel eine gemeinsame i-fache Generatrix, so gilt:

jede gemeinsame Tangente als ein weiterer Grundpunkt,
„ „ Osculirende als zwei weitere einfache Grundpunkte,
„ „ i-fache Kegelgeneratrix als ein i-facher Grundpunkt.

83. 2. eine Anzahl Grundlinien oder Grundcurven m^{ter} Ordnung. Es sind dies Linien oder Curven, auf denen eine Anzahl fester Grundpunkte liegen, deren Summe der Multiplicitäten grösser ist,

als die Summe der möglichen Schnittpunkte der Grundlinie mit einer Fläche n^{ter} Ordnung, also $> n$ resp. mn, und die daher auf allen Flächen des Gebüsches liegen.

Da durch eine Anzahl beliebig auf einer F_n gewählter Punkte eine Schnittpunktsgruppe einer F_n mit zwei anderen Flächen bestimmt sein kann (Reye, Annalen II), deren weitere Punkte gleichfalls auf F_n liegen, so genügt es für eine Schnittcurve C_{pq} zweier Flächen p^{ter} und q^{ter} Ordnung, damit sie Grundcurve sei, dass die Summe der auf ihr liegenden unabhängigen Grundpunkte $>$ die Zahl der Bestimmungsstücke einer Punktgruppe $[n, p, q]$ sei.

84. 3. Fundamentallinien oder -curven. Es sind dies Linien oder Curven, welche allen Flächen des Gebüsches gemeinsam sind. Auf ihnen können ausserdem noch je eine Anzahl Grundpunkte gemeinsam liegen, deren Multiplicitäten aber in Summe $< n+1$ resp. $mn+1$* sein muss, da andernfalls die Linie oder Curve bereits der auf ihr liegenden Grundpunkte wegen auf allen Flächen des Gebüsches liegt, also eine Grundlinie oder Grundcurve ist.

Diese Fundamentallinien können mehrfache Linien sein.

Jeder Schnittpunkt zweier einfacher Grund- oder Fundamentallinien gilt als zweifacher, jeder Schnittpunkt einer i-fachen und einer k-fachen Linie als $(i+k)$-facher Grundpunkt.

Jede Linie oder Curve, welche eine Anzahl Grund- oder Fundamentallinien schneidet, so dass die Summe der Multiplicitäten der Schnittpunkte $> n$ resp. mn* ist, ist selber eine Grundlinie.

85. 4. Hauptlinien und Hauptcurven. Dies sind Verbindungslinien von Grundpunkten, deren Summe der Multiplicitäten gleich der Summe der möglichen Schnittpunkte der Hauptlinie oder -curve mit einer Fläche n^{ter} Ordnung, also $= n$ resp. mn* ist. Diese Hauptlinien oder -curven gehören daher sämmtlichen Flächen eines Netzes im Flächengebüsche an, und die Punkte, in denen sich die Flächen ausser in der Hauptlinie oder Hauptcurve und in dem festen Gebüschskelett noch weiterhin schneiden, können wir als der Hauptlinie resp. Hauptcurve zugeordnete Hauptpunkte bezeichnen.

Beträgt die Summe der Multiplicitäten der auf einer Geraden oder Curve m^{ter} Ordnung gelegenen Grundpunkte $= n-1$ resp. $= mn-1$*, so liegt die Gerade oder Curve auf sämmtlichen Flächen eines Flächenbüschels, und ihre in der Raumverwandtschaft entsprechenden Punkte erfüllen den übrigen Theil der Grundcurve dieses Büschels, also eine Curve (n^2-1) resp. $(n^2-m)^{\text{ter}}$ Ordnung.

86. 5. Hauptebenen und Hauptflächen. Es sind dies Ebenen, die mit allen Flächen des Gebüsches ein und dieselbe feste Schnittcurve

* vergl. 83.

besitzen. Diese Ebenen oder Flächen m^{ter} Ordnung spalten sich von allen Flächen eines Flächennetzes im Gebüsche ab, indem jedem (ausserhalb des Grund- oder Fundamentalgebildes gelegenen) Punkte der Hauptebene oder Fläche die ganze Ebene oder Fläche und ausserdem noch ein Flächennetz $(n-1)^{ter}$ resp. $(n-m)^{ter}$ Ordnung zugehört.

Die Flächen dieses Fälchennetzes können sich, ausser in dem festen Gebüschskelett, noch in einer Anzahl weiterer Punkte schneiden, welche wir als der Hauptebene oder Hauptcurve zugeordnete Hauptpunkte bezeichnen können.

Enthält eine Ebene oder Fläche dagegen ein Bestimmungsstück weniger, als zur Bestimmung einer festen Schnittcurve mit allen Flächen des Gebüsches nöthig ist, so spaltet sie sich nur von den Flächen eines Flächenbüschels ab, das jetzt von der $(n-1)^{ten}$ resp. $(n-m)^{ten}$ Ordnung ist und dessen Grundcurve die sämmtlichen den Punkten einer solchen Fläche, welche wir Hauptebene oder Hauptfläche zweiter Art nennen könnten, in der Verwandtschaft zugehörigen Punkte enthält und als die der Hauptebene oder Hauptfläche zweiter Art zugeordnete Hauptcurve zweiter Art bezeichnet werden könnte.

Die nähere Untersuchung des Einflusses einer Hauptebene oder Hauptfläche auf die Verwandtschaft versparen wir auf Capitel X.

87. 6. Alle sonstigen Grundgebilde lassen sich theils in ein- und mehrfache Punkte, theils in Curven und Linien der bereits betrachteten Art zerlegen und als Complicationen derselben auffassen, bringen also nichts wesentlich Neues und können bei der allgemeinen Betrachtung übergangen werden.

§ 34. Deutigkeit der Verwandtschaft.

88. Um die Deutigkeit der involutorischen Raumverwandtschaft zu bestimmen, die durch ein Flächengebüsch n^{ter} Ordnung mit festem Skelett bestimmt ist, suchen wir die Anzahl der variablen Schnittpunkte dreier Flächen des Gebüsches.

Wir betrachten zunächst zwei Flächen des Gebüsches.

Dieselben schneiden sich im Allgemeinen in einer Curve $n^{2\,ter}$ Ordnung, von der sich sämmtliche Fundamental- und Grundlinien und -curven abspalten, und zwar jede i-fache Curve m^{ter} Ordnung i^2-fach, so dass also, wenn wir setzen: $\sum i\, i^2 m = M$, die Schnittcurve zweier Flächen des Gebüsches von der $(n^2-M)^{ten}$ Ordnung ist.

Diese Schnittcurve besitzt:

1. in jedem isolirten k-fachen Grundpunkte einen k^2-fachen Punkt,
2. in jedem auf einer λ-fachen Grund- oder Fundamentalcurve gelegenen k-fachen Grundpunkte einen $(k^2-\lambda^2)$-fachen Punkt,
3. in jedem auf mehreren, der Reihe nach λ-, μ-, ν-, ...-fachen Grund- oder Fundamentallinien oder -curven gelegenen k-fachen Grundpunkte einen $(k^2-\lambda^2-\mu^2-\cdots)$-fachen Punkt,

4. auf jeder i-fachen Fundamentalgeraden, auf der Punkte von den Multiplicitäten λ_1, μ_1, ... liegen, ausser in diesen Punkten noch $2i([n-i]-1-[\lambda-i]-[\mu-i]-\cdots)$ Punkte,
5. auf jeder Fundamentalcurve m^{ter} Ordnung, auf der die $(\lambda, \mu, \nu, \ldots)$-fachen Punkte liegen, noch $2m(n-1)-q-(\lambda-1)-(\mu-1)-\cdots$ Punkte, wenn q der Rang der Fundamentalcurve, d. h. die Zahl der eine Gerade schneidenden Tangenten derselben ist (Cremona, Raum).

89. Nehmen wir jetzt eine beliebige dritte Fläche des Flächengebüsches n^{ter} Ordnung zu, so schneidet dieselbe die Schnittcurve $(n^2-M)^{\text{ter}}$ Ordnung der ersten beiden in $n(n^2-M)$ Punkten.

Von diesen Schnittpunkten liegen aber:

1. in jedem k-fachen isolirten Grundpunkte k^3, in allen isolirten Grundpunkten also $\sum k^2 = K$,
2. in jedem auf einer λ-fachen Curve gelegenen k-fachen Grundpunkte $k(k^2-\lambda^2)$, im Ganzen also $\sum k(k^2-\lambda^2) = L$,
3. in jedem auf mehreren λ-, μ-, ν-, ...-fachen Fundamental- oder Grundcurven gelegenen k-fachen Punkte $k(k^2-\lambda^2-\mu^2-\cdots)$, im Ganzen also $\sum k(k^2-\lambda^2-\mu^2-\cdots) = L'$,
4. auf jeder i-fachen Fundamentalgeraden
$$2i^2([n-i]-1-[\lambda-i]-[\mu-i]-\cdots),$$
im Ganzen also
$$\sum 2i^2([n-i]-1-[\lambda-i]-[\mu-i]-\cdots) = J \text{ Punkte},$$
5. auf jeder Fundamentalcurve m^{ter} Ordnung
$$2m(n-1)-q-(\lambda-1)-(\mu-1),$$
im Ganzen
$$\sum (2m[n-1]-q-[\lambda-1]-\cdots) = Q \text{ Punkte}.$$

Es bleiben demnach variable Schnittpunkte:
$$n(n^2-M)-(K+L-L'+J+Q)$$
oder wenn wir setzen
$$N = nM+K+L+L'+J+Q:$$
$$n^3-N.$$

„Die Verwandtschaft ist also (n^3-N-1)-deutig."

§ 35. Ordnung der Verwandtschaft.

90. Die einer Geraden l entsprechende Curve C_l hat in jedem k-fachen Grundpunkte einen nk^2-fachen Punkt. Von ihr spaltet sich daher jede i-fache Grund- oder Fundamentallinie oder -curve ni^2-fach ab, und es ergiebt sich daher:

„Die einer Geraden l entsprechende Curve C_l ist von der $(n^3-nM-1)^{\text{ten}}$ Ordnung und hat in jedem isolirten k-fachen Grundpunkte einen nk^2-fachen, in jedem auf einer Anzahl λ-, μ-, ν-, ...-facher Grund- oder

Fundamentallinien gelegenen k-fachen Punkte aber einen $n(k^2 - \lambda^2 - \mu^2 - \ldots)$-fachen Punkt."

91. „Die einer Ebene ε entsprechende Fläche Φ_s der $(n^3 - nM - 1)^{\text{ten}}$ Ordnung enthält jede i-fache Grundlinie $n^2 i$-fach" u. s. w.

Von neuen Arten specieller Ebenen tritt nur die Ebene ε auf, die durch eine i-fache Fundamentalgerade geht und deren zugehöriger Fläche Φ_s Ordnung dadurch um $2i^2[(n-i)-1-(\lambda-i)-\cdots]$ und ausserdem noch um die durch die auf der betreffenden Fundamentalgeraden etwa liegenden λ-, μ-, …-fachen Grundpunkte bedingte Zahl sinkt.

Für Gerade g ist's gleich, ob sie i-fache Curven oder Grundpunkte treffen.

§ 36. Die Kernfläche.

92. Die Kernfläche H der $4(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung enthält:

1. alle einfachen Grundpunkte als Doppelpunkte,
2. „ k-fachen „ „ $(4k-3)$-fache Punkte,
3. „ einfachen Grundlinien oder -curven doppelt,
4. „ „ Fundamentallinien oder -curven doppelt,
5. „ i-fachen „ „ „ $(4i-3)$-fach,
6. „ „ Grundlinien „ „ „
7. „ Hauptlinien oder -curven einfach.

(Schluss folgt.)

XVI.

Ueber die Anzahl der Lösungen gewisser Aufgaben und allgemeine Eigenschaften algebraischer Curven.

Von

Benedikt Sporer.

(Schluss.)

IV.

Ueber Kegelschnitte, welche gegebene Curven unter gegebenen Winkeln durchschneiden.

1. Alle die vorher entwickelten Resultate sind nur specielle Fälle der viel allgemeineren Aufgabe:

Es soll die Anzahl Kegelschnitte bestimmt werden, welche irgend fünf gegebene Curven unter gegebenen Winkeln durchschneiden, oder vielmehr, welche mit jeder der gegebenen Curven einen solchen besondern Punkt gemein haben, dass die Tangenten in diesen Punkten an den Kegelschnitt mit den Tangenten an die gegebenen Curven gegebene Winkel bilden.

Wir wollen uns jedoch bei der Behandlung dieser Frage, die im Allgemeinen auf keine grosse Schwierigkeit führt, aber umständliche Formeln liefert, auf den Fall beschränken, wo die fünf gegebenen Curven Kegelschnitte und alle gegebenen Winkel rechte sind, d. h. auf die Aufgabe:

Es soll die Anzahl Kegelschnitte bestimmt werden, die irgend fünf gegebene Kegelschnitte rechtwinklig (in einem Punkte) durchschneiden.

Ueberdies werden wir auch hier nur die ersten Reihen der Tabelle entwickeln.

Auch hier gehen wir wieder aus von dem Büschel Kegelschnitte durch vier Punkte P_0. Durch irgend einen Punkt N auf G geht ein Kegelschnitt P^2 des Büschels $B(P^2)$. Ziehen wir in diesem Punkte eine Normale NM des Kegelschnittes, die N zum Fusspunkte hat, so ist jeder Punkt N der Geraden G so beschaffen, dass durch ihn eine nicht mit G zusammenfallende Gerade NM geht. Nach I. durchschneiden aber drei Kegelschnitte P^2 die Gerade G rechtwinklig, also fällt NM dreimal mit G zusammen. Dies giebt uns den Satz:

Soll der Fusspunkt der Normale N eines Kegelschnittes P^2 des Büschels $B(P^2)$ auf der Geraden G gelegen sein, so ist der Ort dieser Normalen eine Curve vierter Classe $N_3{}^4$ mit G als dreifacher Tangente.

Diese Curve $N_3{}^4$ ist es nun, die in dieser Frage die Stelle einnimmt, die in II. die Curve $P_2{}^3$ inne hatte.

Ist nun ein zweites Büschel $B(C^2)$ gegeben, so gehört zu diesem Büschel in Bezug auf die Tangente T einzelner Curven C^2 dieses Büschels, die ihren Berührungspunkt auf G haben, eine Curve $T_2{}^3$. Diese Curve hat mit der Curve $N_3{}^4$ ausser G noch $4.3-2.3=6$ Tangenten gemein, woraus wir wieder finden:

Soll ein Kegelschnitt C^2 eines Büschels $B(C^2)$ einen Kegelschnitt eines zweiten Büschels rechtwinklig durchschneiden, so ist der Ort des Schnittpunktes eine Curve $R_1{}^6$.

$R_1{}^6$ hat nun mit irgend einem Kegelschnitte P^2 ausser den vier Grundpunkten noch $6.2-4.1=8$ Punkte gemein; also:

Es giebt acht Kegelschnitte, welche durch vier Punkte gehen und irgend einen Kegelschnitt rechtwinklig durchschneiden.

Auf diese Art erhalten wir leicht folgende Tabelle:

Nr.	Bestimmungsstücke.			Hilfscurven.		Lösungen	Bildungs-Gesetz
	P	T	K	T_y^x	R_v^u		
1	4	.	1	T_2^3	R_1^6	8	1.4 + 2.2
2	3	1	1	T_4^6	R_2^{13}	16	2.4 + 4.2
3	2	2	1	T_4^8	R_4^{20}	24	4.4 + 4.2
4	1	3	1	T_2^6	R_4^{18}	20	4.4 + 2.2
5	.	4	1	T_1^3	R_2^9	10	2 4 + 1.2
6	3	.	2	T_{16}^{24}	R_8^{48}	64	8.4 + 16.2
7	2	1	2	T_{24}^{40}	R_{16}^{88}	112	16.4 + 24.2
8	1	2	2	T_{20}^{44}	R_{24}^{116}	136	24.4 + 20.2
9	.	3	2	T_{10}^{30}	R_{20}^{90}	100	20 4 + 10 2
10	2	.	3	T_{112}^{176}	R_{64}^{368}	480	64.4 + 112.2
11	1	1	3	T_{136}^{248}	R_{112}^{584}	720	112.4 + 136.2
12	.	2	3	T_{100}^{236}	R_{136}^{644}	744	136.4 + 100.2
13	1	.	4	T_{720}^{1200}	R_{480}^{2640}	3360	480.4 + 720.2
14	.	1	4	T_{744}^{1464}	R_{720}^{3624}	4368	720.4 + 744.2
15	.	.	5	T_{4368}^{7728}	R_{3360}^{17808}	22176	3360 4 + 4368.2

Es giebt somit 22176 Kegelschnitte, die irgend fünf Kegelschnitte in einzelnen Punkten rechtwinklig durchschneiden.

Hiermit wollen wir die Zahl der Beispiele abschliessen, dabei jedoch noch bemerken, dass die bis jetzt erhaltenen Resultate uns gestatten, auch noch die Anzahl Lösungen zu bestimmen, wenn die gesuchte Curve K^2 irgend fünf beliebigen der obigen Bedingungen gehorchen muss.

V.

Ueber das bei obigen und verwandten Fragen auftretende Bildungsgesetz.

1. Schon die wenigen gegebenen Beispiele lassen uns darauf schliessen, dass es bei der Entwickelung solcher Fragen nur auf die Bestimmung gewisser Coefficienten ankommen wird. Wir finden nämlich, dass im Schema zu I. die Zahlen 1, 1, im Schema zu II. die Zahlen 2, 2 und im Schema zu IV. die Zahlen 4, 2 im Bildungsgesetz immer wiederkehren, und dass diese Gesetzmässigkeit auch in III. auftritt, in dem dortigen Schema jedoch auf gewisse Gruppen beschränkt bleibt. In allen den genannten Fällen kommt ein Satz zum Ausdruck, den bereits Chasles gegeben hat. Es ist dies der Satz:

Gehen von einem System Kegelschnitte, das durch vier Bedingungen gegeben ist, je a durch einen Punkt, während je b derselben eine Gerade berühren, so giebt es $ap+bq$ Kegelschnitte, welche noch eine fünfte weitere Bedingung erfüllen und wobei p und q gewisse Constanten sind, die nur von der fünften Bedingung abhängen, das System möge beschaffen sein wie es wolle.

Hierbei wollen wir jedoch ausdrücklich bemerkt haben, dass, wenn der Satz giltig sein soll, unter Umständen fremdartige, uneigentliche Lösungen mitgezählt werden müssen. Unter dieser Voraussetzung wollen wir dem Satze, bevor wir ihn beweisen, eine etwas allgemeinere Fassung geben, nämlich die folgende:

Ist irgend ein System Curven n^{ten} Grades, das $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ Bedingungen gehorcht, gegeben und so beschaffen, dass je a der Curven desselben durch einen Punkt gehen, während je b eine Gerade berühren, so erfüllen je $(ap+bq)$ Curven des Systems noch eine weitere Bedingung, wo a und b nur von der letzten Bedingung abhängige Constanten sind.

Wir erhalten nämlich zunächst den Satz:

Soll der Berührungspunkt t einer Tangente T einer Curve C^n obigen Systems $S(C^n)$ auf einer Geraden G gelegen sein, so ist der Ort der Geraden T eine Curve $(a+b)^{ter}$ Classe T_b^{a+b}, und soll T durch einen Punkt Q gehen, so ist der Ort von t eine Curve $(a+b)^{ten}$ Grades t_a^{a+b}.

Soll das System nun noch eine letzte Bedingung erfüllen in Bezug auf eine Curve C^r, so können wir diese Bedingung ausdehnen auf ein Büschel

Curven r^{ten} Grades $B(C^r)$, dem obige Curve C^r angehört, und erhalten dann in Beziehung auf dieselbe Gerade G eine Curve $(x+y)^{\text{ter}}$ Classe mit G als y-facher Tangente, d. h. wir erhalten den Satz:

Sollen Curven des Systems $S(C^n)$ in Bezug auf eine andere Curve C^r eine anderweitige letzte Eigenschaft haben, so können wir diese Beziehung ausdehnen auf die Curven eines Büschels $B(C^r)$ durch r^2 Grundpunkte P_0 und diese Curven in entsprechende Beziehung zur Geraden G setzen, so dass die genannte letzte Eigenschaft durch eine Curve $(x+y)^{\text{ter}}$ Classe $B_y{}^{x+y}$ mit G als y-facher Tangente zum Ausdruck kommt.

Beide Curven $T_b{}^{a+b}$ und $B_y{}^{x+y}$ haben nun $(x+y)(a+b)$ Tangenten gemein, von denen jedoch by auf G gelegen sind, also noch $(a(x+y)+bx)$ andere übrig bleiben. Daraus schliessen wir jedoch wieder:

Soll eine der Curven des Systems $S(C^n)$ in irgend einem Punkte R einer Curve C^r eines Büschels $B(C^r)$ irgend eine bestimmte Bedingung erfüllen, so sind auf jeder Geraden G je $(a(x+y)+bx)$ Punkte R gelegen, oder der Ort des Punktes R ist eine Curve $(a(x+y)+bx)^{\text{ten}}$ Grades $R^{a(x+y)+bx}$, welche die r^2 Grundpunkte des Büschels zu a-fachen Punkten hat.

Da ferner die Curve $R_a{}^{a(x+y)+bx}$ mit jeder Curve C^r ausser den r^2 Grundpunkten noch

$$ra(x+y)+rbx-ar^2=ar(x+y-r)+brx$$

Punkte gemein hat, so folgt daraus:

Sollen die Curven eines Systems $S(C^n)$ in Bezug auf irgend eine beliebige Curve C^r noch eine letzte Bedingung erfüllen, so giebt es im Allgemeinen je

$$r(x+y-r)a+rxb$$

solche Curven des Systems.

Hierbei sind die Coefficienten von a und b thatsächlich nur von der letzten Bedingung abhängig, das System möge beschaffen sein, wie es wolle. Um letztere Coefficienten also zu bestimmen, können wir namentlich das System so einfach wie nur möglich voraussetzen. Insbesondere können wir zu deren Bestimmung z. B. ein Büschel Geraden durch einen Punkt wählen und hierbei von der Geraden G absehen, und erhalten dann den Satz:

Hat eine Gerade H in Bezug auf eine gegebene Curve C^r die verlangte Eigenschaft und gehen x derselben durch einen Punkt, während je y von den Curven eines Büschels $B(C^r)$ eine beliebige Gerade H nach der verlangten Bedingung schneiden, so sind die obigen Coefficienten gleich

$$r(x+y-r) \text{ und } rx.$$

Oder:

Ist der Ort des Punktes R, in welchem eine Gerade durch einen festen Punkt eine Curve eines Büschels unter irgendwelcher gegebener Bedingung durchschneidet, eine Curve $(x+y)^{\text{ten}}$ Grades, welche den festen Punkt zum x-fachen Punkte hat, so sind die obigen Coefficienten durch $r(x+y-r)$ und rx gegeben.

Oder vollständiger:

Ist der Ort des Punktes R, in welchem eine Gerade durch einen festen Pol P eine Curve C^r eines Büschels $B(C^r)$ durch r^2 Grundpunkte unter irgendwelcher Bedingung durchschneidet, eine Curve $(x+y)^{\text{ten}}$ Grades mit P als x-fachem Punkte, so giebt es stets $r(x+y-r)a+brx$ solche Curven eines durch $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ gegebene Bedingungen bestimmten Systems, welche eine bestimmte Beziehung zu einer Curve C^r haben, und wobei a und b angeben, wieviele der Curven des Systems durch einen Punkt gehen, resp. eine Gerade berühren.

Hierbei wollen wir jedoch ausdrücklich und wiederholt bemerken, dass, wenn der Satz giltig sein soll, nöthigenfalls auch uneigentliche Lösungen oder einzelne Lösungen als mehrwerthig gezählt werden müssen. Wir sind nämlich davon ausgegangen, dass zwei Curven ausser einer bestimmten Geraden G noch weitere von G verschiedene Tangenten T_1 gemein haben. Die von uns gegebene Anzahl von solchen Tangenten T_1 kann jedoch aus mehrerlei Gründen hinfällig werden. So können z. B. in G mehr Tangenten, als angenommen worden, vereinigt sein, dann nämlich, wenn G von beiden Curven in gleichen Punkten berührt wird, oder aber es kann jede Tangente T_1 (wie wir weiter unten sehen werden) als mehrfach zählend angesehen werden müssen, oder aber auch die Gerade G_∞ als Tangente T_1 auf uneigentliche Lösungen führen u. s. w.

Will man demnach sicher gehen, so hat man auf der Geraden G das Fortschreiten der Tangenten, welche uns beide obige Curven geben, vollständig und genau zu verfolgen.

Dass dies nöthig ist, mag uns folgendes Beispiel zeigen:

Ein System Kegelschnitte ist so beschaffen, dass jeder Kegelschnitt durch drei Punkte geht und auf einer Geraden G je dieselben Punkte bestimmt, wie die Kegelschnitte eines Büschels $B(C^2)$; es soll die Anzahl Kegelschnitte bestimmt werden, die die zugehörigen Kegelschnitte in vier solchen Punkten schneiden, von denen drei auf G gelegen sind. Oder:

Zwei Kegelschnitte, welche zwei Büscheln $B(C^2)$ und $B(P^2)$ angehören, bestimmen auf einer Geraden G dieselbe Involution; es soll die Anzahl der Kegelschnitte des einen Büschels $B(C^2)$ bestimmt werden, die den zugehörigen Kegelschnitt in einem Punkte A von G berühren und in einem zweiten Punkte B auf G schneiden.

Ziehen wir in irgend einem Punkte P auf G die Tangenten an die beiden Kegelschnitte der Büschel, die durch P gehen, so erhalten wir als Ortscurven dieser Tangenten zwei Curven dritter Classe B_2^3 und D_2^3, die beide G zur Doppeltangente haben. Beide Curven berühren jedoch G in denselben Punkten, die Gerade G zählt somit nicht vierfach als gemeinsame Tangente, sondern sechsfach. Dementsprechend giebt es nur noch drei der verlangten Kegelschnittpaare, während den zwei durch G weiter absorbirten Tangenten Kegelschnittpaare entsprechen, die die verlangte Bedingung nicht erfüllen, vielmehr zu den uneigentlichen Lösungen zu rechnen sind.

VI.

Anwendungen des Hauptsatzes obigen Theils.

Von dem obigen Hauptsatze wollen wir nur einige Anwendungen machen, und zwar:

1. Es soll die Anzahl Kegelschnitte bestimmt werden, welche fünf gegebene Geraden zu Normalen haben.

Jede Gerade N gehört zu einem Büschel $B(N)$. Der Ort der Fusspunkte der Strahlen eines Büschels $B(P)$, die senkrecht stehen auf den Strahlen des Büschels, ist ein Kreis über der Verbindungslinie der Mittelpunkte beider Büschel, also eine Curve R_1^2. Daraus folgt:

$$x+y=2, \quad x=1, \quad r=1;$$
$$r(x+y-r)=1, \quad rx=1,$$

also das Bildungsgesetz als gegeben durch $a+b$, woraus die Lösung stufenweise folgt. (Siehe I.)

2. Es soll die Anzahl Kegelschnitte eines Systems bestimmt werden, welche irgend eine Curve dritten Grades berühren.

Wir haben den Satz: Der Ort der Berührungspunkte der Tangenten von einem Pole P an die Curven des Büschels ist eine Curve fünften Grades, mit P als einfachem Punkte; R_4^5. Also ist:

$$x+y=5, \quad x=1, \quad y=4,$$

und da $r=3$ ist, folgt:

$$r(x+y-3)=6, \quad rx=3,$$

woraus wir das Bildungsgesetz erhalten:

$$L=6a+3b,$$

d. h. das Gesetz, das sich uns z. B. auch ergiebt, wenn wir etwa p in III. $=3$ setzen. Es ist dort:

$$\alpha_1=p(p-1)=6, \quad \beta_1=p=3.$$

3. Es soll die Anzahl Kegelschnitte bestimmt werden, die irgend fünf Curven dritten Grades senkrecht durchschneiden.

Wir haben zunächst, wie wir unten in VII. zeigen werden, den Satz:

Fällen wir von einem Punkte P Normalen auf die Curven eines Büschels $B(C^3)$, so ist der Ort des Fusspunktes derselben eine Curve sechsten Grades, welche P zum einfachen Punkte hat. Dies giebt:

$$x+y=6, \quad y=1$$

und, da $r=3$:

$$r(x+y-3)=9, \quad rx=3,$$

also das Bildungsgesetz:

$$L=9a+3b.$$

Gehen wir nun von den Werthen 1, 2, 4, 4, 2, 1 aus, so erhalten wir zur Entwickelung der Aufgabe folgendes Schema:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & 2 & & 4 & & 4 & & 2 & & 1 \\
& 15 & & 30 & & 48 & & 42 & & 21 & \\
& & 225 & & 414 & & 658 & & 441 & & \\
& & & 9267 & & 5700 & & 7245 & & & \\
& & & & 46503 & & 73035 & & & & \\
& & & & & 637632. & & & & &
\end{array}$$

Es giebt somit im Allgemeinen je 637632 Kegelschnitte, die irgend fünf Curven dritten Grades in einem Punkte senkrecht durchschneiden. U. s. w.

Hiermit wollen wir den ersten Haupttheil, der sich mit der Frage nach der Anzahl der Lösungen einer Aufgabe beschäftigt, verlassen und übergehen zu dem zweiten Theile, der sich mehr mit den Eigenschaften allgemeiner Curven befasst.

VII.

Ueber die Anzahl Normalen einer Curve, welche durch einen Punkt gehen.

Zur Behandlung dieser Frage gehen wir ebenfalls von einem Büschel Curven n^{ten} Grades $B(C^n)$ durch n^2 Grundpunkte aus. Wir haben zunächst den Satz:

Liegt der Berührungspunkt einer Tangente T einer Curve C^n eines Büschels auf einer Geraden G, so ist der Ort der Tangente selbst eine Curve T^{2n-1}_{2n-2}.

Ebenso haben wir:

Liegt der Scheitel eines rechten Winkels auf einer Geraden G, während der eine Schenkel durch einen festen Punkt geht, so umhüllt der andere Schenkel eine Parabel P_0^2, welche auch G berührt.

Beide Curven T^{2n-1}_{2n-2} und P_1^2 haben nun ausser G selbst noch

$$2(2n-1)-(2n-2)=2n$$

Tangenten gemein, woraus jedoch sofort folgt:

Fällen wir von irgend einem Punkte P Lothe auf die Curven eines Büschels, so liegen deren Fusspunkte alle auf einer Curve $2n^{\text{ten}}$ Grades R_1^{2n}, welche auch durch die Grundpunkte des Büschels geht.

Ausser den letzteren Grundpunkten hat nun die Ortscurve mit einer einzelnen Curve C^n des Büschels noch $2n^2-n^2=n^2$ Punkte gemein, woraus wir jedoch weiter folgern können:

Durch jeden Punkt gehen n^2 Normalen einer Curve n^{ten} Grades.

VIII.

Ueber die Anzahl Curven dreier Büschel, die sich alle in einem Punkte berühren, und über osculirende Curven zweier Büschel und die Hesse'sche Curve.

1. Wir hatten bereits oben den Satz:

Liegt der Berührungspunkt einer Tangente T einer Curve C^r eines Büschels $B(C^r)$ auf einer Geraden G, so ist der Ort der Tangente T eine Curve $(2r-1)^{\text{ter}}$ Classe mit G als $(2r-2)$-facher Tangente. Wenden wir dies auf zwei Büschel $B(C^r)$ und $B(C^s)$ an, so erhalten wir daraus zwei Curven $G^{2r-1}_{2(r-1)}$ und G^{2s-1}_{2s-2}, welche ausser G noch

$$(2r-1)(2s-1)-4(r-1)(s-1)=(2r+2s-3)$$

Tangenten gemein haben. Daraus folgt:

Soll eine Curve eines Büschels $B(C^r)$ eine Curve des Büschels $B(C^s)$ berühren, so ist der Ort des Berührungspunktes eine Curve $(2r+2s-3)^{\text{ten}}$ Grades $R_1^{2r+2s-3}$, welche auch durch die Grundpunkte beider Büschel geht.

Hieraus erhalten wir zunächst:

Eine Curve C^r wird von $r(r+2s-3)$ Curven eines Büschels $B(C^r)$ berührt (Steiner, Ges. W., Bd. 2 S. 500.)

2. Insbesondere sind also unter den Curven des Büschels $B(C^s)$ auch je

$$(2r+2s-3)(2r+2s-3+2s-3)=(8s^2+4r^2+12sr-18r-24s+18)$$

solche enthalten, welche die Ortscurve $R_1^{2r+2s-3}$ berühren. Hierin sind jedoch inbegriffen:

A. Curven C^s, welche $R_1^{2r+2s-3}$ in einem der Grundpunkte des Büschels berühren, und zwar zählt jede dieser Curven zweifach;

B. Curven C^s, von denen jede die Ortscurve $R_1^{2r+2s-3}$ in einem Punkte q, der Grundpunkt des Büschels $B(C^r)$ ist, berührt; jede solche Curve zählt einfach, und

C. diejenigen Curven des Büschels $B(C^s)$, welche einen Doppelpunkt haben.

Ziehen wir nun von dem obigen Werthe für diese drei Fälle die Zahlen $2s^2$, r^2 und $3(s-1)^2$ ab, so bleiben noch

$$3(r^2+s^2+4rs-6r-6s+5)$$

Curven des Büschels, die $R_1^{2r+2s-3}$ eigentlich berühren. Zu jedem solchen Berührungspunkte gehört aber eine solche Curve C^s, die eine der Curven C^r in diesem Punkte osculirt. Daraus folgern wir:

Unter den Curven zweier Büschel giebt es insbesondere auch je $3\{(p+q)(p+q-6)+2pq+5\}$, welche einander in irgend einem Punkte osculiren. (Vergl. Steiner, Ges. W., Bd. 2 S. 500).

3. Sind ferner drei Büschel $B(C^r)$, $B(C^s)$ und $B(C^t)$ gegeben, so können wir das eine Mal das Büschel $B(C^r)$ und das Büschel $B(C^s)$, das andere Mal das Büschel $B(C^r)$ und das Büschel $B(C^t)$ combiniren und erhalten auf diese Art zwei Curven $R_1^{2r+2s-3}$ und $R_1^{2r+2t-3}$. Beide haben

$$(2r+2s-3)(2r+2t-3)$$

Punkte gemein. Hiervon gehen ab für die Grundpunkte des Büschels $B(C^r)$ r^2 solche Werthe und für $3(r^2-1)$ Doppelpunkte einzelner Curven des Büschels ebenso viele. Es bleiben demnach noch

$$(2r+2s-3)(2r+2t-3)-r^2-3(r-1)^2=4(rs+rt+st)-6(r+s+t-1)$$

andere übrig. Dementsprechend haben wir auch:

Unter den Curven dreier Büschel giebt es je

$$4(rt+rs+st)-6(r+s+t-1)$$

solche, die sich alle drei in einem Punkte berühren. (Steiner, Ges. W., Bd. 2 S. 500.)

4. Berühren sich irgend zwei Curven r^{ten} Grades in einem Punkte P, so ist unter den Curven des Büschels, das durch beide Curven bestimmt ist, insbesondere auch stets eine solche, die P zum Doppelpunkte hat.

Lassen wir nun den Pol Q auf einer Geraden G sich bewegen, so bilden alle zu diesen Polen Q gehörigen ersten Polaren Q^{n-1} in Bezug auf eine Basis C^n einen Büschel $B(Q^{n-1})$ von Curven $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades. Bewegt sich ebenso der Pol N auf einer zweiten Geraden, so gehört auch hierzu ein Büschel erster Polaren, $B(N^{n-1})$. Soll nun weiter eine der Curven Q^{n-1} eine der Curven N^{n-1} berühren, so ist nach 1. der Ort des gemeinsamen Berührungspunktes R eine Curve vom Grade $(2(n-1)+2(n-1)-3) = 4n-7$. Diese Curve enthält jedoch als Theil die erste Polare Q_0^{n-1} in Bezug auf die Basis, welche durch die Grundpunkte beider Büschel erster Polaren geht, zerfällt also in diese Curve Q_0^{n-1} und eine Curve $3(n-2)^{\text{ten}}$ Grades $H^{3(n-2)}$, welche die Hesse'sche Curve heisst. Wir erhalten also:

Soll die erste Polare einen Doppelpunkt haben, so ist der Ort dieses Doppelpunktes eine Curve $3(n-2)^{\text{ten}}$ Grades, welche die Hesse'sche Curve heisst.

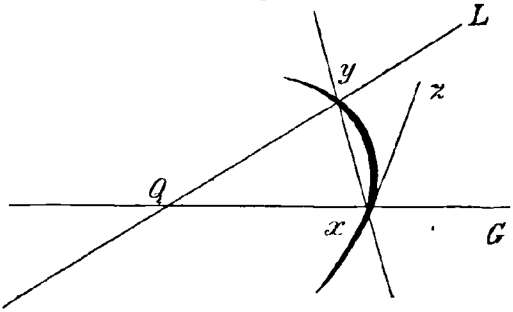
Hiermit haben wir die Grundlage zur Betrachtung der Resultate gegeben, die sich in der Steiner'schen Arbeit S. 498 der Ges. W. Bd. 2 entwickelt finden, und die wir in einer andern Arbeit eingehend behandeln werden.

IX.

Ueber die Anzahl der Wende- und Doppeltangenten einer Curve C^n.

1. Soll diese Anzahl bestimmt werden, so gehen wir auch hier wieder von einem Büschel Curven C^n aus.

Fig. 1.



Schneidet irgend eine der Curven die Gerade G in einem Punkte x und eine Gerade L in einem Punkte y, so ist der Ort der Geraden xy eine Curve $(2n-1)^{\text{ter}}$ Classe, G^{2n-1}_{n-1}, mit G als $(n-1)$-facher Tangente. Ziehen wir weiter in x an C^n eine Tangente xZ an C^n, so ist der Ort derselben eine Curve $(2n-1)^{\text{ter}}$ Classe mit G als $2(n-1)$-facher Tangente. Beide Curven haben $(2n-1)^2-2(n-1)^2 = 2n^2-1$ Tangenten gemein, die mit G nicht zusammenfallen. Hiervon geht jedoch noch eine weitere ab, welche durch den Schnittpunkt Q von G und L geht. Es bleiben somit noch $2n^2-2$ weitere Tangenten übrig. Hieraus erhalten wir:

Soll der Berührungspunkt x einer Tangente xy einer Curve des Büschels auf einer Geraden G gelegen sein, so liegen von den weiteren Schnittpunkten der Curve mit der Tangente noch je $2n^2-2$ auf der Geraden L. Oder:

*Liegt der Berührungspunkt einer Tangente an eine Curve des Büschels auf einer Geraden G, so ist der Ort der übrigen Schnittpunkte der Tangente mit der Curve, die ihr zugehört, eine Curve $2n^2-2^{\text{ten}}$ Grades.**

Diese letztere Curve hat mit der Geraden G wieder $2n^2-2$ Punkte gemein. Diese zerfallen in $2(n-1)$ Gruppen von je $(n-2)$ Punkten, wovon jede Gruppe zu einer Curve C^n gehört, die G berührt, und $2n^2-2-2(n-1)(n-2)=6(n-1)$ andere Punkte, die Wendepunkte einzelner Curven des Büschels sind.

Lassen wir G durch einen Grundpunkt des Büschels gehen, so finden wir auf analoge Art, dass ausser demselben nur noch $(6n-9)$ Wendepunkte auf dieser Geraden G liegen.

* Dieser Satz enthält für $n=2$ einen scheinbaren Widerspruch, da sich eine Curve sechsten Grades ergiebt. Diese Curve ist zusammengesetzt aus den sechs Verbindungslinien der vier Grundpunkte des Büschels, und alle Punkte dieser Geraden sind thatsächlich als Wendepunkte einzelner Kegelschnitte des Büschels anzusehen.

Dies giebt wieder den Satz:

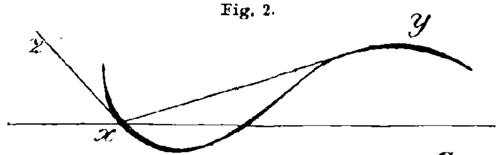
Der Ort der Wendepunkte der Curven eines Büschels ist eine Curve $6(n-1)^{\text{ten}}$ Grades $W_3^{6(n-1)}$, welche die Grundpunkte des Büschels zu dreifachen Punkten hat.

Hieraus ergiebt sich weiter:

Jede Curve n^{ten} Grades hat im Allgemeinen $3n(n-2)$ Wendepunkte, und durch diese Wendepunkte gehen unendlich viele Curven $3(n-2)^{\text{ten}}$ Grades.

2. Zur Bestimmung der Doppeltangenten dient folgendes Verfahren:

Fig. 2.



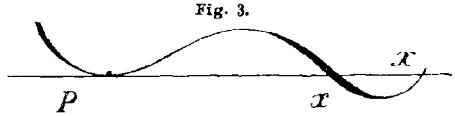
Ist x ein Punkt einer Curve C^n eines Büschels $B(C^n)$ auf G und ziehen wir von G die Tangenten xy an die Curve, so ist der Ort dieser Tangenten eine Curve $n(n-1)-2+2(n-1)(n-2)=(3n^2-7n+2)^{\text{ten}}$ Grades $G^{3n^2-7n+2}_{2(n-1)(n-2)}$, welche G zur $2(n-1)(n-2)$-fachen Tangente hat. Ferner ist der Ort der Tangente xz im Punkte x an die Curve C^n eine Curve $2(n-1)^{\text{ter}}$ Classe $G^{2n-1}_{2(n-1)}$, mit G als $2(n-1)$-facher Tangente. Beide Curven haben nun ausser G selbst noch $(2n-1)(3n^2-7n+2)-4(n-1)^2(n-2)$ Tangenten Z oder auch $(2n^3-n^2-9n+6)$ solche Tangenten gemein. Diese letzteren bestehen aber aus den Wendetangenten der Curven des Büschels, deren Wendepunkte in G liegen, und aus solchen Doppeltangenten einzelner Curven des Büschels, die die zugehörige Curve in einem Punkte auf G berühren. Jeder solchen Wendetangente entsprechen in beiden Curven dieselben Berührungspunkte, oder jede derselben ist doppelt zu zählen. Wie wir oben sahen, giebt es jedoch in G je $6(n-1)$ Wedepunkte einzelner Curven des Büschels. Ziehen wir von obiger Anzahl hierfür den Werth $2.6(n-1)$ ab, so bleiben noch $2n^3-n^2-9n+6-12(n-1)=2n^3-n^2-21n+18$ Tangenten, die Doppeltangenten mit obiger Eigenschaft sind. Daraus folgt:

Der Ort der Berührungspunkte der Doppeltangenten einzelner Curven des Büschels ist eine Curve des $2n^3-n^2-21n+18$ $=(n-3)(2n^2+5n-6)^{\text{ten}}$ Grades $R_x^{(n-3)(2n^2+5n-6)}$.

Es erübrigt uns nur noch zu bestimmen, welcher Art die Grundpunkte des Büschels in dieser Curve sind.

Zu diesem Zwecke können wir wie folgt verfahren:

Fig. 3.



Ist P einer der Grundpunkte des Büschels, so ziehen wir in P an die einzelnen Curven Tangenten, welche mit den Curven noch weitere einzelne Punkte x gemein haben. Da der Punkt x jedoch dreimal mit P zusammenfällt, so oft als P zum Wendepunkte einer ein zelnen Curve des Büschels wird, so liegen auf jeder durch P gehenden Geraden auch $(n+1)$ Punkte x, von denen drei in P fallen; der Ort des Punktes x ist also eine Curve des $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades X_3^{n+1} mit P als dreifachem Punkte. Soll nun die Gerade PX Doppeltangente einer einzelnen Curve des Büschels sein, so muss PX diese Ortscurve in x berühren. Von P gehen also noch $(n+1)n-12 = n^2+n-12 = (n-3)(n+4)$ Tangenten an die Ortscurve. Daraus folgt:

Die Ortscurve $R_x^{(n-3)(2n^2+5n-6)}$ hat die Grundpunkte zu $(n-3)(n-4)$-fachen Punkten.

Ausser den Grundpunkten hat die Basis mit dieser Ortscurve nur noch

$$n(n-3)(2n^2+5n-6) - n^2(n-3)(n+4) = n(n-3)(n-2)(n+3)$$

Punkte gemein. Da diese paarweise zu den Doppeltangenten gehören, folgt daraus:

Die Basis n^{ten} Grades hat im Allgemeinen

$$\frac{n}{2}(n-2)(n-3)(n+3) = \frac{n}{2}(n-2)(n^2-9)$$

Doppeltangenten.

Und da ferner irgend eine Curve n^{ten} Grades $(n-3)(n+4)$-fach als Theil einer Curve $R_{(n-5)(n+4)}^{(n-3)(2n^2+5n-6)}$, welche durch die sämmtlichen gemeinsamen Punkte der Ortscurve und der Basis geht, so folgt ferner:

Durch die Berührungspunkte der Doppeltangenten einer Basis gehen Curven $(n-2)(n-3)(n+3) = (n-2)(n^2-9)^{\text{ten}}$ Grades.

X.

Polarenveloppen.

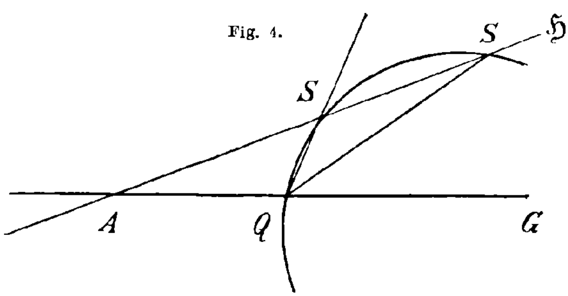
1. Wir nehmen zunächst folgenden Satz als erwiesen an:

Liegt der Punkt P in der x^{ten} Polare von P einer Basis C^n, also in P^{n-x}, so liegt auch P in der $(n-x)^{\text{ten}}$ Polare von Q, also in Q^x.

Dies vorausgesetzt, können wir das System Polaren, deren Pole auf irgendwelcher Curve gelegen sind, leicht untersuchen. Wir finden nämlich weiter:

Soll die Polare P^x eines Poles P durch einen Punkt Q gehen, so giebt es je $(n-x)t$ Pole P auf einer Curve t^{ten} Grades D^t.

Fig. 4.



Lassen wir nun den Pol Q auf dieser Geraden G sich bewegen, so bestimmen die durch Q gehenden Polaren P^x auf einer zweiten Geraden $\mathfrak{H}_x$ Punkte S, und zwar im Ganzen je $tx(n-x)$ Punkte S, welche zu je einem Punkte Q gehören, in dem $t(n-x)$ Polaren P^x durch Q gehen, deren Pole auf D^t gelegen sind. Fällt ferner Q oder S in den Schnitt A von G und $\mathfrak{H}$, so fällt QS je auch $t(x-1)(n-x)$-mal auf G und $\mathfrak{H}$. Durch jeden Punkt Q der Geraden G gehen also $tx(n-x)+t(x-1)(n-x)$ Gerade QS, von denen jedoch nur $tx(n-x)$ von G verschieden sind. Daraus erhalten wir:

Der Ort der Sehne QS ist eine Curve der $t(2x-1)(n-x)^{\text{ten}}$ Classe, mit G und $\mathfrak{H}$ als $t(x-1)(n-x)$-fachen Tangenten.

Lassen wir jetzt G und $\mathfrak{H}$ zusammenfallen, so ändert sich die Classe der Curve nicht, aber durch einen Punkt Q auf G gehen jetzt nur noch $t(n-x)$ von G verschiedene Gerade QS und diese Geraden berühren in den Punkten Q die zugehörigen Polaren. Also:

Bewegt sich der Pol P einer Polare P^x auf einer Curve D^t, und ziehen wir in den Punkten, welche P^x mit irgend einer Geraden G gemein hat, an die Polare P^x Tangenten QS, so ist der Ort der Tangente QS eine Curve der $t(n-x)(2n-1)^{\text{ten}}$ Classe, $G^{t(n-x)(2x-1)}$, mit G als $2t(n-x)(n-1)$-facher Tangente.

Und hieraus:

Das ganze System Polaren P^x einer Basis C^n für Pole P auf einer Curve D^t ist so beschaffen, dass je $t(n-x)$ durch einen Punkt gehen und je $2t(n-x)(x-1)$ eine Gerade berühren.

2. Ist insbesondere $t=1$, so folgt:

Bewegt sich der Pol P auf einer Geraden, so ist das ganze System Polaren P^x in Bezug auf eine Basis C^n so beschaffen, dass deren je $(n-x)$ durch einen Punkt gehen und $2(n-x)(x-1)$ eine Gerade berühren. Und:

Bewegt sich der Pol auf einer Geraden und soll der Berührungspunkt der Tangente T auf einer Geraden G gelegen sein, so ist der Ort dieser Tangente eine Curve $(n-x)(2x-1)^{\text{ter}}$ Classe $G^{(n-x)(2x-1)}_{2(x-1)(n-x)}$, mit G als $2(x-1)(n-x)$-facher Tangente.

3. Bringen wir nun alle diese Polaren P^x mit den Curven L^r eines Büschels $B(L^r)$ derart in Beziehung, dass wir in jedem Punkte Q der Geraden G auch an die durch ihn gehende Curve L^r eine Tangente ziehen, so ist der Ort dieser Tangente nach dem Obigen eine Curve $(2r-1)^{\text{ter}}$ Classe mit G als $(2r-2)$-facher Tangente. Diese letztere Curve hat jedoch mit der Ortscurve $G^{(n-x)(2x-1)}$ im Allgemeinen

$$(2r-1)(n-x)(2x-1)$$

Tangenten gemein. Von denselben kommen jedoch

$$4(r-1)(n-x)(x-1)$$

auf die Gerade G selbst zu liegen, und es bleiben demnach noch deren

$$(n-x)(2r+2x-3)$$

übrig, die mit G nicht zusammenfallen. Daraus schliessen wir:

Liegt der Pol P auf einer Geraden D, so ist das ganze System Polaren P^x so beschaffen, dass deren gerade je $(n-x)(2r+2x-3)$ eine Curve L^r eines Büschels $B(L^r)$ in einem Punkte von G berühren. Oder:

Soll die Polare P^x eines Poles P auf einer Geraden D irgend eine Curve L^r des Büschels $B(L^r)$ berühren, so ist der Ort des Berührungspunktes eine Curve $R_{(n-x)}^{(n-x)(2r+2x-3)}$, welche die Grundpunkte des Büschels zu $(n-x)$-fachen Punkten hat.

Letzteres folgt daraus, dass durch jeden Grundpunkt $(n-x)$ der genannten Polaren gehen.

Ausser diesen Grundpunkten hat nun die Ortscurve mit irgend einer Curve des Büschels noch

$$r(n-x)(2r+2x-3)-r^2(n-x)=r(r+2x-3)(n-x)$$

weitere Punkte gemein. Dies giebt uns weiter:

Das System Polaren P^x für Pole auf einer Geraden D ist so beschaffen, dass deren je $r(r+2x-3)(n-x)$ irgend eine Curve r^{ten} Grades berühren.

4. Ist nun R_0 irgend ein solcher Berührungspunkt auf der Curve L^r, so gehört zu demselben als Pol in Bezug auf C^n eine Polare P^{n-x}. Bewegt sich jedoch der Pol R auf der Curve L^r, so wird umgekehrt auch für den Pol R_0 der entsprechende Pol P_0 auf D die Eigenschaft haben, dass in ihm zwei zusammenfallende Polaren P^{n-x} für zwei aufeinanderfallende Punkte der Curve L^r in R_0 sich durchschneiden, oder der zu R_0 gehörige Pol P_0 auf D wird auf der Enveloppe von Polaren P^{n-x} für Pole auf L^r gelegen sein. Wir erhalten also den Satz:

Die x^{te} Polare der Leitlinie L^r in Bezug auf eine Basis C^n ist eine Curve E_x vom Grade $r(n-x)(r+2x-3)$. Oder:

Bewegt sich der Pol auf einer Curve L^r, so ist seine x^{te} Polarenveloppe vom genannten Grade.

Hiermit haben wir den von Steiner (vergl. Bd. 2 S. 496) gegebenen Hauptsatz über Polarenveloppen bewiesen.

Schon die wenigen Beispiele zeigen, dass es mittels der entwickelten Methode möglich sein wird, einen grossen Theil aller Sätze über algebraische Curven zu behandeln, und in der That könnten wir die Zahl von Beispielen in grosser Menge noch anführen. Namentlich ist dies der Fall bei Fragen, die auf Transversalen algebraischer Curven sich beziehen, wie wir in einer besondern Arbeit, in der wir sämmtliche von Steiner gegebenen Sätze über „geradlinige Transversalen bei algebraischen Curven", Ges. W. Bd. 2 S. 574—596, beweisen und theils erweitern werden, zeigen wollen.

Weingarten (Württemb.), im October 1889.

XVII.

Ueber die analytische Verwendung des Energieprincips in der Mechanik.

Von

GEORG HELM

in Dresden.

Stellt T die kinetische Energie eines frei beweglichen Punktes dar, der die Masse m und die Geschwindigkeitscomponenten x', y', z' besitzt, bezogen auf ein absolutes Coordinatensystem, so ist

1a) $$T = \frac{1}{2} m (x'^2 + y'^2 + z'^2),$$

1b) $$dT = mx''.dx + my''.dy + mz''.dz.$$

Wenn andererseits X, Y, Z die den Punkt beeinflussenden Kraftcomponenten bezeichnen, also das im Allgemeinen nicht vollständige Differential

2) $$dA = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

die in der Zeit dt auf m übertragene Arbeit darstellt, so fordert das Energieprincip, dass die Gleichung besteht

3a) $$dT = dA,$$

folglich

3b) $$(mx'' - X)\,dx + (my'' - Y)\,dy + (mz'' - Z)\,dz = 0.$$

Die dynamischen Differentialgleichungen des frei beweglichen Punktes

4) $$mx'' = X, \quad my'' = Y, \quad mz'' = Z$$

würden also eine Folge des Energieprincips sein, wenn es gestattet wäre, die Gleichung 3b) so zu zerfällen, dass jedes einzelne der drei Glieder verschwindet. Für den freien Punkt stellen nun $dx = x'dt$, $dy = y'dt$, $dz = z'dt$ alle Verschiebungen dar, welche bei der Passirung der Stelle xyz mit beliebiger Geschwindigkeit $x'y'z'$ überhaupt möglich sind; sie besitzen daher zwar unendlich klein zu wählende, sonst aber völlig willkürliche Werthe. Demgemäss würde eine bekannte Schlussweise in der That von der Gleichung 3b) zu den Gleichungen 4) führen, wenn man das in den Gleichungen 3) ausgesprochene Energieprincip für alle den Bedingungen gemäss noch möglichen Bewegungen giltig erklärt. Für den frei beweglichen Punkt würde dann das Energieprincip mit dem d'Alembert'schen Princip zusammenfallen.

Ich habe das im Anschlusse an die Besprechung des Poncelet'schen Arbeitsprincips in meiner „Lehre von der Energie"* S. 83 hervorgehoben

* Leipzig, 1887.

und in diesem Buche noch mehrfach Gelegenheit gehabt, die Wichtigkeit der Anwendung des Energieprincips auf die möglichen Veränderungen zu betonen.

Sieht man beispielsweise in der thermodynamischen Gleichung

$$dE = \theta\, dS - p\, dv,$$

welche den Zusammenhang der Eigenenergie E eines Körpers mit Temperatur θ, Entropie S, Druck p und Volum v desselben darstellt, die Grössen S und v als unabhängige Veränderliche an, so folgt

$$\frac{\partial \theta}{\partial v} = -\frac{\partial p}{\partial S}$$

nur dann aus dem in ihr ausgesprochenen Energieprincip, wenn man dasselbe für jede beliebige im Coordinatensystem S, v mögliche Veränderung als giltig ansieht. Bei der Wichtigkeit, welche diesem Schlusse zukommt, erscheint mir die Giltigkeit des Energieprincips für alle möglichen Veränderungen, nicht allein für die einzelne wirklich eintretende Veränderung als ein wesentlicher Bestandtheil seines Begriffes.

Dieser Bestandtheil des Energieprincips ist auch von Planck bemerkt worden, dessen Buch „Das Princip der Erhaltung der Energie"* fast gleichzeitig mit meiner eben erwähnten, denselben Gegenstand behandelnden Schrift erschien. Er hält es aber für zweckmässig, diese Seite der Energievorstellungen in einem besonderen Gesetze zum Ausdruck zu bringen, das er als Princip der Uebereinanderlagerung der Energien (S. 116) bezeichnet und das wesentlich in der Aussage besteht: die einzelnen Energieformen, welche die Eigenenergie eines Körpers bestimmen, sind unabhängig von einander.

Diese Auffassung fällt bei ihrer praktischen Verwendung offenbar mit der meinigen zusammen; denn wenn man in einem gegebenen Falle feststellen will, welche Energieformen sich in der Eigenenergie eines Körpers übereinanderlagern, so muss man sich der Erfahrung bedienen (Planck z. B. S. 148 u. 187), und die Erfahrung ist es auch, welche die unter gegebenen Bedingungen möglichen Veränderungen erkennen lehrt.

In den folgenden Ausführungen dieser Gedanken soll nun allgemein gezeigt werden, dass der zunächst aus allgemeinen energetischen, besonders physikalisch-technischen Gesichtspunkten gefolgerte Satz:

5) *Bei jeder möglichen Veränderung bleibt die Energie unverändert*,

zu den Differentialgleichungen der Dynamik führt. Für die formelle Entwickelung der Lehre von der Energie scheint es mir wesentlich, zu entscheiden, ob die Mechanik nur, wie bisher, den Beweis führen kann, dass die aus ihren Principien gezogenen Folgerungen mit dem Energiegesetze im Einklang stehen, oder ob umgekehrt dieses Energiegesetz an Stelle jener Principien zur allgemeinen Grundlage der Mechanik gemacht werden kann.

* Leipzig 1887.

Es ist kaum nöthig, der Untersuchung noch die Bemerkung voranzuschicken, dass das eben ausgesprochene Energieprincip, welches als allgemeines Princip der Mechanik hervortreten soll, nicht mit dem Satze von der Erhaltung der Energie verwechselt werden darf, der ja nur für gewisse Systeme Giltigkeit hat, die man als conservativ bezeichnet.

Es würde zweckmässig sein, diesen der Mechanik geläufigen Satz zum Unterschied von dem eben angeführten Energieprincip, das sich wesentlich als eine Gleichung zwischen Differentialen herausstellt, als das Energie-Integral zu bezeichnen.

Das Zeichen d wird, wie es in energetischen, insbesondere in thermodynamischen Betrachtungen üblich geworden ist, im Folgenden immer eine der möglichen, d. h. mit den Bedingungen vereinbaren Veränderungen, andeuten, nicht nur die wirklich eintretende Veränderung, für die es meist in der Mechanik benutzt wird. Die seit Lagrange mit δ bezeichneten virtuellen Veränderungen sind mit den eben definirten möglichen nur dann identisch, wenn die Zeit nicht explicit in den Bedingungsgleichungen auftritt.

I. Für einen frei beweglichen Massenpunkt führt zufolge der eingangs angestellten Erörterungen das Energieprincip 5) zu den Gleichungen 3) und 4), wenn nur durch die Erfahrung festgestellt ist (oder bei rein theoretischen Fragen zugestanden wird), dass keine anderen Energieformen in kinetische Energie umwandelbar sind, als solche, welche sich durch Kräfte XYZ in der Form 2) darstellen lassen, d. h. durch Begriffe, welche in einer hier nicht weiter auseinanderzusetzenden Weise die in den Gesetzen vom Parallelogramm und von der Wechselwirkung niedergelegten Erfahrungsthatsachen zum Ausdruck bringen. (Die Kraftcomponenten erscheinen demnach als Intensitäten ihrer Energieform — im Sinne der in meinem eben angeführten Buche vorgeschlagenen Bezeichnungsweise.)

Ist jedoch die Bewegung des Punktes m einer die Zeit nicht explicit enthaltenden Beschränkung

6a) $$\varphi(x, y, z) = 0,$$

6b) $$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = 0$$

unterworfen, so muss zunächst wieder die Erfahrung entscheiden (beziehungsweise theoretisch bestimmt werden), ob das Aufrechterhalten einer solchen Bedingung einen Arbeitsaufwand erfordert und wie derselbe für die verschiedenen noch möglichen Bewegungen zu bemessen ist.

Falls für keine der möglichen Bewegungen ein Arbeitsaufwand dieser Art zu berücksichtigen ist, ergiebt sich aus 3a) nach bekannter Methode unter Einführung eines unbestimmten Coefficienten λ

7a) $$\left(mx'' - X - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) dx + \left(my'' - Y - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) dy + \left(mz'' - Z - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) dz = 0,$$

wo nun etwa noch dx und dy willkürlich gewählt werden dürfen und λ so zu bestimmen ist, dass der Factor von dz verschwindet. Somit sind die Differentialgleichungen zu erfüllen

7b) $$mx'' = X + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad my'' = Y + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad mz'' = Z + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Der Einfluss, den die Bedingung $\varphi(xyz) = 0$ auf die Bewegung ausübt, wird also wieder durch eine Kraft dargestellt, d. h. durch eine mit XYZ gleichartige Grösse, deren Componenten $\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ sind.

Wenn die Aufrechterhaltung der Bedingung $\varphi(xyz) = 0$ mit einem Arbeitsverbrauch, z. B. mit Reibungsarbeit

$$dA_b = X_b\, dx + Y_b\, dy + Z_b\, dz,$$

verbunden ist, so fordert das Energieprincip:

$$dT = dA - dA_b;$$

es werden also die Grössen X, Y, Z in den Gleichungen 7) um X_b, Y_b, Z_b vermindert auftreten. Das erfordert ebenso wenig eine weitere Ausführung, als es nöthig erscheint, die vorstehenden Betrachtungen auf Systeme von Punkten zu übertragen, welche beliebigen Kräften unterworfen sind und beliebigen Bedingungen unterliegen; nur dürfen letztere die Zeit nicht explicit enthalten. Bis hierher stimmt ja im Wesentlichen der analytische Ausdruck des Energieprincips mit dem des d'Alembert'schen Princips überein, da unter der bis jetzt eingehaltenen Beschränkung die d mit Lagrange's δ identisch sind.

II. Sobald aber der Bewegung eines Massenpunktes eine die Zeit explicit enthaltende Bedingung

8a) $$\varphi(x, y, z, t) = 0,$$

8b) $$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz + \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt = 0$$

vorgeschrieben ist, so wird im Allgemeinen ein Arbeitsaufwand zum Erzwingen dieser Beschränkung unumgänglich. Denn sonst wäre die Gleichung

9) $$\left(mx'' - X - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) dx + \left(my'' - Y - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) dy + \left(mz'' - Z - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) dz - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt = 0$$

zu erfüllen, entsprechend der Gleichung 7a) im Falle zeitfreier Beschränkungen. Die Gleichung 9) kann aber nicht für jede noch mögliche Bewegung erfüllt werden, wie das Energieprincip doch fordert. Denn die Wahl $dx = dy = 0$ für die in der Zeit dt eintretende Bewegung zieht die Gleichung

10) $$\frac{\partial \varphi}{\partial z} dz + \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot z' + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

nach sich, führt also 9) über in

11) $$mz'' = Z.$$

Diese Gleichung steht aber im Allgemeinen in Widerspruch mit 10), wie die Differentiation der Gleichung 10) nach t zeigt.

Der Energiebetrag, der zugeführt werden muss, um die Bedingung 8) aufrecht zu erhalten, möge mit $d_t A$ bezeichnet werden. Ueber die Höhe desselben muss die Erfahrung entscheiden. Für den Fall, dass gewisse Energieumformungen, insbesondere die Reibungsarbeit, unbeträchtlich sind, wird gewöhnlich das Erfahrungsergebniss in der Ausdrucksweise des Princips der virtuellen Arbeiten dahin zusammengefasst: „Der Arbeitsaufwand $d_t A$ sei so beschaffen, dass er für alle Bewegungen $d_0 x$, $d_0 y$, $d_0 z$, welche der Bedingung

12) $$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot d_0 x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot d_0 y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot d_0 z = 0$$

genügen, verschwinde." Da diese künstlich herangezogenen virtuellen Veränderungen d_0 nicht zu den unter der Bedingung

$$\varphi(x, y, z, t) = 0$$

möglichen gehören, so können wir das in solcher Form niedergelegte Erfahrungsergebniss nur mit einiger Weitläufigkeit für unser Princip 5) verwerthen.

Wir führen zu diesem Zwecke neue Differentiale d_t ein, welche die Gleichungen

$$dx = d_0 x + d_t x, \quad dy = d_0 y + d_t y, \quad dz = d_0 z + d_t z$$

erfüllen, und schreiben nun das Energieprincip

13a) $$dT = dA + d_t A$$

folgendermassen:

13b) $$\begin{aligned} 0 = &\left(m x'' - X - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) dx + \left(m y'' - Y - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) dy \\ &+ \left(m z'' - Z - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) dz - \left(\frac{d_t A}{dt} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = &\left(m x'' - X - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) d_0 x + \left(m y'' - Y - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) d_0 y \\ &+ \left(m z'' - Z - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) d_0 z \\ &+ \left(m x'' - X - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) d_t x + \left(m y'' - Y - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) d_t y \\ &+ \left(m z'' - Z - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) d_t z - \left(\frac{d_t A}{dt} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) dt. \end{aligned}$$

Nun verlangt die oben angegebene Fassung des in Rede stehenden Erfahrungsergebnisses, dass (vergl. 7)

$$\left(m x'' - X - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) d_0 x + \left(m y'' - Y - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) d_0 y + \left(m z'' - Z - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) d_0 z = 0$$

sei für jede der Bedingung 12) genügende Veränderung, oder dass

14) $$m x'' = X + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad m y'' = Y + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad m z'' = Z + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Daraus folgt

$$d_t A = -\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz. \tag{15}$$

Dieses Ergebniss zeigt, dass man im gegebenen Falle unmittelbar aus Gleichung 13) die Differentialgleichungen und den zuzuführenden Energiebetrag entnehmen kann, indem man diese Gleichung so behandelt, als wären dx, dy, dz und dt nur der Bedingung 8) unterworfene, sonst von einander völlig unabhängige willkürliche Differentiale. Dann geht sofort 13) über in die Gleichungen 14) und 15).

Besser aber, als in dieser Form, drückt man wohl das Erfahrungsergebniss über den Arbeitsaufwand, den die Aufrechterhaltung einer gegebenen Bedingung erheischt, in folgender Weise aus: Um die Bewegung eines Punktes der Bedingung $\varphi(x, y, z, t) = 0$ unterworfen zu halten, muss ihm jedenfalls während des Zeitelementes dt eine Arbeit zugeführt werden, die durch Gleichung 15) bestimmt ist; dabei ist λ ein Coefficient, der so bestimmt werden muss, dass die Gleichungen 14) mit der Bedingung $\varphi = 0$ vereinbar sind. Ausser dieser Arbeit $d_t A$ sind meist noch andere Arbeiten, wie z. B. die Reibungsarbeit, zu berücksichtigen; sie fallen je nach der Art, wie die Bedingung $\varphi = 0$ physisch erzwungen wird, verschieden aus und können im Allgemeinen nur in der Darstellung 2) angegeben werden.

Drückt man in dieser Form, also mit Hilfe von Gleichung 15), unsere erfahrungsmässige Kenntniss von dem dynamischen Einfluss gegebener Bedingungen aus, so führt das Energieprincip 13) sofort zu der Gleichung

$$\begin{aligned} \left(mx'' - X - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) dx + \left(my'' - Y - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) dy \\ + \left(mz'' - Z - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) dz = 0, \end{aligned} \tag{16}$$

welche wegen der Willkür bei der Wahl von dx, dy, dz die Differentialgleichungen der Bewegung ergiebt.

Schliesslich erkennt man, dass, auch wenn $\varphi = 0$ die Zeit explicit enthält, der Einfluss einer solchen Bedingung einer zur Fläche $\varphi = 0$ normal gerichteten Kraft zugeschrieben werden kann, und gewinnt so den Ausgangspunkt für die physikalisch einleuchtendste Begründung der Gleichung 15). In ihr stellt $d_t A$ die Arbeit dar, welche von einer Kraft, deren Componenten $\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ sind, im Zeitelement dt geleistet wird, und ist also Null bei zeitfreien Bedingungen. Unsere Erfahrung über den Einfluss von Bedingungen findet wenigstens angesichts der gewöhnlich zur Ausübung eines Bewegungszwanges angewendeten mechanischen Einrichtungen gewiss ihren natürlichsten Ausdruck durch die Normalkräfte. Ich habe diesen Ausgangspunkt nur vermieden, weil mir daran lag, zu zeigen, dass man vom Energieprincip zu den Normalkräften hingeführt wird, wenn man die Gleichung $\varphi = 0$ ohne Rücksicht auf die Art ihrer Realisirung als analytische Bedingungsgleichung einführt.

III. Für die praktische Verwendbarkeit des Energieprincips bei der Lösung mechanischer Aufgaben ist der Umstand wesentlich, dass in ihm an Stelle der die Beschleunigung enthaltenden Glieder des d'Alembert-schen Princips die Aenderung der kinetischen Energie auftritt; dadurch ermöglicht das Energieprincip dieselbe bequeme Coordinatentransformation, welche das Hamilton'sche Princip gewährt.

Es sei die jederzeitige Lage des Systems durch die Coordinaten s_1, $s_2, \ldots, s_n$ allein völlig bestimmt. Von diesen Veränderlichen können zwar einzelne als Functionen der Zeit von vornherein bekannt sein, aber die x, y, z jedes Punktes im System sollen sich dann als Functionen jener n Veränderlichen s allein darstellen und nicht etwa noch ausserdem die Zeit explicit enthalten. Ich werde diejenigen s, deren Abhängigkeit von der Zeit vor der Lösung des Problems unbekannt ist, die echten Parameter nennen, während die als Functionen der Zeit von vornherein vorgeschriebenen Coordinaten s die Hilfsparameter heissen mögen.

Nun lässt sich die Summe aller während des Zeitelements dt im System geleisteten Arbeiten $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ in die Form

$$\Sigma S\,ds = S_1\,ds_1 + S_2\,ds_2 + \cdots + S_n\,ds_n \tag{17}$$

setzen, indem mit S_k eine Summe bezeichnet wird, deren Glieder die Form besitzen

$$X\frac{\partial x}{\partial s_k} + Y\frac{\partial y}{\partial s_k} + Z\frac{\partial z}{\partial s_k}.$$

Um andererseits das Element dt der kinetischen Energie als Summe von Gliedern darzustellen, die $ds_1, ds_2, \ldots, ds_n$ zu Factoren haben, bedenke man, dass unter obigen Bedingungen T eine homogene Function zweiten Grades der Grössen s' ist. Daher darf in

$$dT = \sum\frac{\partial T}{\partial s}ds + \sum\frac{\partial T}{\partial s'}ds' = \sum\frac{\partial T}{\partial s}ds + \sum\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial s'}\cdot s'\right)dt - \sum\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial s'}\right)\cdot ds$$

gesetzt werden

$$2T = \sum\frac{\partial T}{\partial s'}\cdot s',$$

und es folgt

$$dT = \sum\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial s'}\right) - \frac{\partial T}{\partial s}\right\}ds. \tag{18}$$

Hiernach gestaltet sich der Ausdruck des Energieprincips

$$dT = dA + d_t A \tag{19a}$$

in folgender Weise:

$$\sum\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial s'}\right) - \frac{\partial T}{\partial s}\right\}ds = \Sigma S\,ds + d_t A. \tag{19b}$$

Wesentliche Bedingung für diese Entwickelung ist die Darstellbarkeit von T als homogene Function der s'. Da, z. B. bei Vorhandensein verborgener Bewegungen, T auch anders dargestellt werden kann, so ist es wichtig, anzumerken, dass die Entwickelung nur für diese canonische Form von T giltig ist.

Sind nun die Coordinaten s völlig unabhängig von einander, und ist keine als Function der Zeit vorgeschrieben, so ergiebt die obige Gleichung $d_t A = 0$ und zerfällt im Uebrigen in die Lagrange'schen Differentialgleichungen der zweiten Form.

Sind aber die Veränderlichen s nicht sämmtlich echte Parameter, oder bestehen Bedingungsgleichungen zwischen ihnen, so stehen zur Bestimmung von $d_t A$ und zur Aufstellung der dynamischen Differentialgleichungen zwei Wege zur Verfügung, die Methode der unbestimmten Coefficienten und die Methode der unabhängigen Parameter.

Nach ersterer ergiebt sich, wenn etwa nur die eine Bedingung

20a) $$\varphi(s_1, s_2, \ldots, s_n, t) = 0,$$

20b) $$\frac{\partial \varphi}{\partial s_1} d s_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial s_2} d s_2 + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial s_n} d s_n + \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt = 0$$

zu erfüllen wäre, das Energieprincip in der Form

21) $$\sum \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial s'}\right) - \frac{\partial T}{\partial s} - S - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right\} ds - \left\{ \frac{d_t A}{dt} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\} dt = 0.$$

Hier lassen sich zunächst die Differentiale der Hilfsparameter durch dt darstellen und die ihnen entsprechenden Glieder mit dem letzten Gliede obiger Gleichung zusammenziehen. Dann führen die früher im entsprechenden Falle ausgeführten Schlüsse einerseits zu soviel Differentialgleichungen, als echte Parameter vorhanden sind, andererseits zur Kenntniss der für Aufrechterhaltung der Bedingungen anzuwendenden Arbeit $d_t A$.

Nach der Methode der unabhängigen Parameter führt man solche Coordinaten q ein, welche die Bedingungsgleichungen $\varphi = 0$ identisch erfüllen, so dass die Differentialquotienten $\frac{\partial \varphi}{\partial q} = 0$ werden. Setzt man noch Q_i für die Summe aller von den einzelnen Punkten des Systems gelieferten Glieder von der Form

$$X \frac{\partial x}{\partial q_i} + Y \frac{\partial y}{\partial q_i} + Z \frac{\partial z}{\partial q_i},$$

so folgen die Differentialgleichungen aus

22) $$\sum \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} - Q \right\} dq - d_t A = 0.$$

Diese Beziehung liefert soviel dynamische Differentialgleichungen, als echte unabhängige Parameter q vorhanden sind, d. h. soviel, als die Freiheitsstufe des Systems anzeigt, während die in ihrer Abhängigkeit von der Zeit bekannten Hilfsparameter den Werth von $d_t A$ bestimmen.

IV. Die vorstehenden Darlegungen lassen ersehen, dass das Energieprincip, welchem für die physikalische Auffassung der mechanischen Vorgänge eine fundamentale Bedeutung längst zugestanden wird, auch als mechanisches Princip im analytischen Sinne angesehen werden kann: es führt, wie die anderen Principien, zu den Differentialgleichungen der Bewegung; aber es hat, wie mir scheint, die unmittelbare Evidenz vor den anderen Principien voraus und die Fähigkeit, auf andere als rein mechanische Vorgänge, nämlich auf alle physikalischen Erscheinungen übertragbar zu sein.

Bei seiner Anwendung hat man einerseits die kinetische Energie zu bestimmen, die für Systeme starrer Körper vorzüglich nach der von Carl Neumann durchgearbeiteten Methode aufgestellt wird, welche sich auf Poinsot's geometrische Auffassungen gründet. Andererseits ist die Arbeit der wirkenden Kräfte, bez. die zugeführte potentielle Energie anzusetzen, sowie im Allgemeinen die Eigenenergie der Körper, aus denen das System besteht. Diese Eigenenergie ist nur bei starren Körpern unveränderlich, also einflusslos, bei elastischen und flüssigen Körpern aber von den zur Bestimmung einer Affintransformation des Volumelements nöthigen Parametern abhängig, während die Probleme der Thermik und Elektrik die Heranziehung weiterer, nicht räumlicher Parameter erfordern.

Als ein Nachtheil des Energieprincips gegenüber den anderen Principien der Mechanik wird es wohl Manchem erscheinen, dass auch schon bei seiner Anwendung auf Punktsysteme im Allgemeinen eine der Eigenenergie nicht starrer Körper vergleichbare Function $d_t A$ auftritt, welche dem Problem nach der gewöhnlichen Auffassung fremd ist; aber man braucht sich nur die Erfahrungen zu vergegenwärtigen, welche in Problemen, die explicit die Zeit enthalten, zum Ausdruck gelangen, um einzusehen, dass gerade in der Bedingungsenergie $d_t A$ eine dem mechanischen Vorgange wesentlich anhaftende Grösse bekannt wird, die man nur zur Aufstellung der dynamischen Differentialgleichungen nicht zu kennen braucht.

Die Benutzung des Energieprincips zur Ermittelung sonst unbekannt bleibender Energiebeträge ist übrigens gar nicht auf den behandelten Fall beschränkt.

Es sei z. B. ein System nur Bedingungen unterworfen, welche die Zeit nicht explicit enthalten. Behandelt man die Aufgabe nach der Methode der unabhängigen Parameter, so erfährt man die Druckkräfte nicht, die zur Aufrechterhaltung der Bedingungen erforderlich sind. Die Frage nach jeder einzelnen derselben lässt sich aber offenbar so fassen: Welche Arbeit würde nöthig sein, um dem System eine Verschiebung dq_0, welche in Wirklichkeit durch die Bedingungen unmöglich gemacht ist, zu ertheilen? An Stelle des Problems wird also ein neues mit einer um 1 erhöhten Freiheitsstufe zu lösen sein, wenn es gilt, eine der Bedingungskräfte (oder eine ihrer Componenten) zu ermitteln. Die kinetische Energie dieses allgemeineren Problems sei T, so dass also T eine Function von $q_1, q_2, \ldots, q_n$ und q_0 bedeutet, die, wenn q_0 constant, etwa gleich 0 erhalten, also auch $q'_0 = 0$, $q''_0 = 0$ gesetzt wird, in T übergeht. Dann liefert das Energieprincip die Gleichung

$$23)\quad 0 = \sum_{1 \ldots n} \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathsf{T}}{\partial q'}\right) - \frac{\partial \mathsf{T}}{\partial q} - Q \right\} dq + \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathsf{T}}{\partial q'_0}\right) - \frac{\partial \mathsf{T}}{\partial q_0} - Q_0 \right\} dq_0 .$$

Hier bezeichnet $Q_0\, dq_0$ die unbekannte Arbeit, die zur Veränderung dq_0 erforderlich sein würde. Da nun die $dq_1, dq_2, \ldots, dq_n, dq_0$ sämmtlich von einander unabhängig sind, so erhält man, sobald $q_0 = 0$, $q'_0 = 0$, $q''_0 = 0$ gesetzt wird, aus dem ersten Gliede obiger Beziehung die n Differentialgleichungen

$$24\text{a})\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

und aus dem zweiten

$$24\text{b})\qquad [Q_0]_{q_0 = const.} = \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathsf{T}}{\partial q'_0}\right) - \frac{\partial \mathsf{T}}{\partial q_0}\right]_{q_0 = const.},$$

wobei durch die Indicirung $q_0 = const.$ angedeutet werden soll, dass in die Formel der Werth 0 für q'_0, q''_0 einzusetzen ist, um die Bedingungskraft Q_0 des speciellen Problems zu finden.

Als ein Beispiel zur Erläuterung dieses Verfahrens behandle ich die Atwood'sche Fallmaschine. Ist M die Masse des etwa links aufsteigenden, $M + m$ die Masse des zur Rechten herabsinkenden Gewichtes, h die rechts, also $c - h$ die links freihängende Fadenstrecke, wobei c eine Constante bezeichnet, so ist die kinetische Energie der Gewichte

$$25\text{a})\qquad T = \tfrac{1}{2}(M+m)h'^2 + \tfrac{1}{2}M(c-h)'^2 = \tfrac{1}{2}(2M+m)h'^2$$

und bei einer Bewegung dh gewinnen die Gewichte an potentieller Energie V

$$26\text{a})\quad dV = -dA = -g(M+m)\,dh - gMd(c-h) = -gm\,dh.$$

Auf die in der Bewegung des Fadens und der Rolle, sowie in Reibung sich äussernden Energieformen soll hier — um den Hauptpunkt allein hervortreten zu lassen — keine Rücksicht genommen werden.

Man erhält nun als Gleichung des Energieprincips $dT + dV = 0$:

$$27\text{a})\qquad \{(2M+m)h'' - gm\}\,dh = 0$$

und demgemäss

$$h'' = \frac{m}{2M+m} \cdot g.$$

So erfährt man nichts über den Druck der Rolle auf ihr Lager oder über die Reaction U des Lagers gegen die Rolle. Denkt man sich aber die Rolle während der Zeit dt um du gehoben, so hängt nun das Problem von zwei unabhängigen Veränderlichen h, u ab, und es wird die kinetische Energie

$$\text{25 b)}\quad \begin{aligned} \mathsf{T} &= \tfrac{1}{2}(M+m)(h-u)'^2 + \tfrac{1}{2}M(c-h-u)'^2 \\ &= \tfrac{1}{2}(2M+m)(h'^2+u'^2) - mu'h'; \end{aligned}$$

die potentielle aber ändert sich im Zeitelemente dt um

$$\text{26 b)}\quad \begin{aligned} d\Phi = -\,d\mathsf{A} &= -\,g(M+m)\,d(h-u) - gM d(c-h-u) \\ &= -\,gm\,dh + g(2M+m)\,du. \end{aligned}$$

Das Energieprincip liefert die Gleichung $d\mathsf{T} = d\mathsf{A} + U\,du$, also

$$\text{27 b)}\quad \begin{aligned} &\{(2M+m)h'' - mu'' - mg\}\,dh \\ &+ \{(2M+m)u'' - mh'' + g(2M+m) - U\}\,du = 0. \end{aligned}$$

Sie zerfällt wegen der Willkürlichkeit von dh und du in zwei Gleichungen, die, auf den Fall $u = const. = 0$, $u' = 0$ angewendet, ergeben

$$\text{28)}\qquad h'' = \frac{mg}{2M+m}, \quad U = g(2M+m) - \frac{m^2 g}{2M+m}.$$

Der Druck auf's Lager ist also abhängig von der eintretenden Beschleunigung h'', wie bekanntlich durch Anhängen des Apparates an eine Waage (etwa in der Weise von Poggendorff) gezeigt werden kann. Unmittelbar aus Gleichung 24 b) findet man

$$\text{29)}\qquad Q_0 = U - g(2M+m) = -\,mh''.$$

Es hindert nichts, die vorstehende Betrachtung unter den Gesichtspunkt zu bringen, dass u eine gegebene Function der Zeit, nämlich constant ist, und $U\,du$ mit der in Formel 22) auftretenden Grösse $d_t A$ identisch zu erachten.

V. Dass man in geeigneten Fällen unmittelbar vom Energieprincipe zu den gewünschten Ergebnissen gelangen kann, ohne erst in der gewöhnlichen Weise die Differentialgleichungen aus ihm herzuleiten, ist schon an der seit Poncelet in der technischen Mechanik üblichen Behandlung zwangläufiger conservativer Systeme zu erkennen. Hier möge gezeigt werden, wie das Energieprincip unmittelbar zu den Integralprincipien der Mechanik führt.

Die Schwerpunktssätze erhält man in folgender Weise. Es seien x_i, y_i, z_i die absoluten Coordinaten eines beliebigen Punktes von der Masse m_i; in Bezug auf ein bewegtes und zwar sich parallel verschiebendes Coordinatensystem, dessen Ursprung die absoluten Coordinaten ξ, η, ζ besitzt, mögen die Coordinaten jenes beliebigen Massenpunktes u_i, v_i, w_i heissen, so dass

$$x_i = \xi + u_i, \quad y_i = \eta + v_i, \quad z_i = \zeta + w_i.$$

Dann wird, wenn noch $\Sigma m = M$ gesetzt wird, die kinetische Energie des Punktsystems

$$\text{30 a)}\quad \begin{aligned} T = \Sigma \tfrac{1}{2} m (x'^2 + y'^2 + z'^2) &= \tfrac{1}{2} M (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) + \tfrac{1}{2}\Sigma m (u'^2 + v'^2 + w'^2) \\ &\quad + \xi'(\Sigma m u)' + \eta'(\Sigma m v)' + \zeta'(\Sigma m w)'. \end{aligned}$$

Wählt man als Anfangspunkt ξ, η, ζ den Schwerpunkt des Massensystems, so fallen die letzten drei Glieder aus. Die Arbeit der sämmtlichen Kräfte wird

$$\text{30b)}\quad \begin{aligned} dA = \Sigma(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = (\Sigma X)\,d\xi + (\Sigma Y)\,d\eta + (\Sigma Z)\,d\zeta \\ + \Sigma(X\,du + Y\,dv + Z\,dw). \end{aligned}$$

Hiernach verlangt das Energieprincip $dT = dA$, dass die Gleichung besteht

$$\text{31)}\quad \begin{aligned} 0 = (M\xi'' - \Sigma X)\,d\xi + (M\eta'' - \Sigma Y)\,d\eta + (M\zeta'' - \Sigma Z)\,d\zeta \\ + \Sigma\{(mu'' - X)\,du + (mv'' - Y)\,dv + (mw'' - Z)\,dw\}. \end{aligned}$$

Bei der gegenseitigen Unabhängigkeit der Grössen ξ, η, ζ, u_i, v_i, w_i zerfällt die Gleichung in die ihren einzelnen Gliedern entsprechenden Differentialgleichungen, in denen die Schwerpunktssätze ihre bekannte Grundlage finden.

Die Flächensätze erhält man, indem man die Axe, für welche die Giltigkeit derselben erwiesen werden soll, etwa zur Z-Axe wählt und statt xy Polarcoordinaten einführt:

$$\text{32)}\quad x_i = r_i \cos\varphi_i, \quad y_i = r_i \sin\varphi_i.$$

So wird die kinetische Energie

$$\text{33a)}\quad T = \tfrac{1}{2}\Sigma m r^2 \varphi'^2 + \tfrac{1}{2}\Sigma m r'^2 + \tfrac{1}{2}\Sigma m z'^2$$

und die binnen des Zeitelements dt geleistete Arbeit

$$\text{33b)}\quad dA = \Sigma(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = \Sigma\Phi\,d\varphi + \Sigma R\,dr + \Sigma Z\,dZ,$$

wo $\Phi = Yx - Xy$ ein Drehmoment bezeichnet und $R = X\cos\varphi + Y\sin\varphi$ gesetzt ist. Von den aus $dT = dA$ nach Gleichung 22) folgenden Differentialgleichungen

$$\text{34)}\quad \frac{d}{dt}(\Sigma m r^2 \varphi') = \Sigma\Phi, \quad \Sigma m r'' - \Sigma m r \varphi'^2 = \Sigma R, \quad \Sigma m z'' = Z$$

liefert die erste die Grundlage der Flächensätze, während die zweite zum Begriffe der Centripetalbeschleunigung führt.

Die folgende Herleitung des Energieintegrals aus dem Energieprincip hat hauptsächlich den Zweck, hervortreten zu lassen, wie beschränkt der Giltigkeitsbereich des ersteren im Vergleich mit dem letzteren ist.

Nach Gleichung 13b) lautet für ein beliebiges Punktsystem das Energieprincip $dT = dA$, wobei dA eine Summe von Gliedern der Form

$$\left(X + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dx + \left(Y + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)dy + \left(Z + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)dz + \left(d_t A + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)$$

darstellt und T die gesammte kinetische Energie des Systems ausdrückt. Offenbar ist die Unabhängigkeit der Bedingungsgleichungen $\varphi = 0$ von der Zeit im Allgemeinen ein erstes Erforderniss der Integrirbarkeit dieser Gleichung. Ist diese Forderung erfüllt, so bleibt noch die Gleichung

$$dT = \Sigma(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

zu integriren. Bisher stellten dx, dy, dz jede im Zeitelemente dt mögliche Veränderung dar; jetzt ist festzustellen, welche dx, dy, dz auf dem Integrationswege einander angeschlossen werden sollen. Im Allgemeinen wird man die Wahl nur so treffen dürfen, dass die Geschwindigkeitscomponenten am Ende eines Wegelements mit denen übereinstimmen, die das nächstfolgende Wegelement zu Anfang besitzt. Der Integrationsweg muss also eine der möglichen Bahnen sein, und auf ihm dürfen unstetige Aenderungen der Geschwindigkeit nicht vorkommen. Bei der Wahl einer solchen Bahn steht im Allgemeinen nur noch die Willkür bei der Bestimmung der Geschwindigkeitscomponenten zu Anfang des ersten Wegelements frei.

So bleibt endlich die bekannte Bedingung zu erfüllen, dass $\Sigma(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$ über jede mögliche Bahn integrabel oder ein vollständiges Differential nach x, y, z sei. Sie wird im Besondern erfüllt durch

35) $$X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial z},$$

wo nun V als potentielle Energie des Systems zu bezeichnen ist. Nur wenn diesen Bedingungen genügt wird, erscheint das Energieintegral in der für conservative Systeme giltigen Form

36) $$T + V = \text{Constante}.$$

Aus dieser Herleitung ersieht man deutlich, wie mit der in der Mechanik bisher üblichen Behandlung des Energiegesetzes nur eine Seite des zu Grunde liegenden Gedankens getroffen wird, während die Tragweite, welche die physikalischen Energievorstellungen auch für die analytische Mechanik haben, dadurch bei Weitem nicht erschöpft ist.

VI. Dass endlich der durch Anwendung des Energieprincips ermöglichte unmittelbare Anschluss an die mit der Energie in Verbindung stehenden Begriffe, wie die Entropie, von erheblichem Vortheil sein muss, liegt für alle diejenigen Probleme auf der Hand, die über das Gebiet der Mechanik im engsten Sinne hinausgreifen. Aber auch schon innerhalb dieses Gebietes erwachsen gelegentlich Vortheile, wie das folgende Beispiel zeigen soll.

Das Energieprincip schliesst für den Fall des Gleichgewichts aus $dT = 0$ auf $dA = 0$, gelangt also, wenn etwa ein materieller Punkt der Bedingung $\varphi(x, y, z) = 0$ unterworfen ist, zu der dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten entsprechenden Beziehung

$$\left(X - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) dx + \left(Y - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) dy + \left(Z - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = 0.$$

Aber die Quelle, aus der das hier in der Form 5) angewendete Energieprincip stammt, versagt auch dann nicht, wenn der Zwang, dem die Bewegung unterliegt, durch Ungleichungen ausgedrückt wird. Soll etwa

$$\varphi(x, y, z) \leqq 0$$

sein, der bewegliche Punkt also eine gegebene Fläche nicht überschreiten, so liegt ein Fall nicht-umkehrbarer Veränderungen vor, wie er in den vorangehenden Erörterungen ausser Betracht gelassen worden ist. Dass Bewegung in der einen Richtung möglich, in der entgegengesetzten unmöglich ist, lässt sich mit den Energievorstellungen nur durch die Annahme vereinigen, dass in dem Falle, wo die Bewegung unmöglich ist, eine andere Energieform erzeugt wird. Das kann' nur auf Kosten der vorhandenen kinetischen Energie geschehen (wenigstens wenn man, wie üblich, den Fall ausschliesst, dass die Berührung des Punktes mit der Fläche Energie entbindet). So folgt als Gleichgewichtsbedingung

37a) $$dT \leqq 0$$

und hiernach die im vorliegenden Falle dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten entsprechende Beziehung

37b) $$\left(X - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) dx + \left(Y - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) dy + \left(Z - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) dz \leqq 0.$$

XVIII.

Beitrag zum Studium der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Integrale feste Verzweigungspunkte besitzen, insbesondere derjenigen, welche die Ableitung bis zum dritten Grade enthalten.

Von

Dr. Georg Wallenberg.

(Schluss.)

IV.

In diesem Abschnitte wollen wir im Anschluss an die Ausführungen des vorigen, ähnlich wie im III. Abschnitt die eigentlichen trinomischen, diejenigen Fuchs'schen Differentialgleichungen dritten Grades in y' behandeln, in denen das Glied mit der zweiten Potenz der Ableitung fehlt; d. h. wir wollen die Form der Fuchs'schen Differentialgleichung:

A) $$y'^3 - 3Qy' - 2R = 0,$$

explicite aufstellen und ihre Integration wirklich durchführen, wieder unter der Voraussetzung, dass ihre Coefficienten zunächst rationale Functionen von z sind und dass die Discriminante Δ nur einfache Factoren enthält. — Wir können uns die Differentialgleichung A) aus einer vollständigen Differentialgleichung C) des vorigen Abschnittes durch eine Transformation hervorgegangen denken, welche im II. Abschnitte ausführlich behandelt worden ist.

Da $P = 0$ ist, so folgt aus den Entwickelungen des vorigen Abschnittes, dass Q höchstens vom zweiten, R höchstens vom dritten Grade in y sein darf, dass also das Geschlecht p der durch A) definirten algebraischen Function y' von $y \leqq 1$ ist.

Ferner werden die Bedingungsgleichungen 7) desselben Abschnittes:

1) $$\begin{cases} 3\dfrac{\partial Q}{\partial z} + \quad 2\dfrac{\partial R}{\partial y} = A \cdot Q, \\ 2\dfrac{\partial R}{\partial z} + 3Q\dfrac{\partial Q}{\partial y} = A \cdot R, \end{cases}$$

und Gleichung 9) desselben Abschnittes wird

2) $$\frac{dy'}{dz} = \frac{A}{6} \cdot y' + \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Ausführlich hingeschrieben lauten die Bedingungsgleichungen 1):

$$1^*)\quad \begin{cases} 3(a'_0+a'_1y+a'_2y^2)+2(b_1+2b_2y+3b_3y^2)=A(a_0+a_1y+a_2y^2), \\ 2(b'_0+b'_1y+b'_2y^2+b'_3y^3)+3(a_0+a_1y+a_2y^2)(a_1+2a_2y) \\ \qquad =A(b_0+b_1y+b_2y^2+b_3y^3). \end{cases}$$

Durch Vergleichung gleich hoher Potenzen von y ergeben sich daraus die Bedingungsgleichungen:

$$3)\quad \begin{cases} A=\dfrac{3a'_0+2b_1}{a_0}=\dfrac{3a'_1+4b_2}{a_1}=\dfrac{3a'_2+6b_3}{a_2} \\ \quad =\dfrac{2b'_0+3a_0a_1}{b_0}=\dfrac{2b'_1+6a_0a_2+3a_1^2}{b_1}=\dfrac{2b'_2+9a_1a_2}{b_2}=\dfrac{2b'_3+6a_2^2}{b_3}. \end{cases}$$

Wir betrachten zuerst den Fall, dass Q von y unabhängig, also $a_1=a_2=0$ ist; dann muss, wie aus den Gleichungen 1*) folgt, auch $b_2=b_3=0$ sein, und die Differentialgleichung A) lautet:

$$B)\quad y'^3-3a_0y'-2(b_0+b_1y)=0 \qquad (p=0).$$

Die Bedingungsgleichungen 3) werden:

$$A=\frac{3a'_0+2b_1}{a_0}=\frac{2b'_0}{b_0}=\frac{2b'_1}{b_1}.$$

Aus ihnen folgt zunächst:

$$b_0=b_1c,$$

wo c eine Constante bedeutet; setzt man $y+c=u$, so wird Gleichung B):

$$B^*)\quad u'^3-3a_0u'-2b_1u=0.$$

Zwischen a_0 und b_1 besteht die Gleichung

$$4)\quad a'_0-\frac{2}{3}\,\frac{b'_1}{b_1}\cdot a_0+\frac{2}{3}b_1=0.$$

Diese ergiebt, wenn man a_0 durch b_1 ausdrückt:

$$a_0=a\,b_1^{2/3}-b_1^{2/3}\,\frac{2}{3}\int b_1^{1/3}\,dz.$$

Lässt man in dem Ausdrucke für a_0 die Integrationsconstante a willkürlich, so muss, da a_0 und b_1 rationale Functionen von z sein sollen, b_1 die Gestalt ν'^3 haben, wo ν eine beliebige rationale Function von z bedeutet. Dann ist

$$a_0=a\nu'^2-\frac{2}{3}\nu'^2\nu,$$

ferner

$$A=6\frac{\nu''}{\nu'},$$

und Gleichung 2) ergiebt:

$$u''=\frac{\nu''}{\nu'}u',$$

also

$$u'=c_1\nu' \text{ und } u=c_1\nu+c_2.$$

Trägt man diese Werthe für u und u' in die Differentialgleichung B*) ein, deren endgiltige Form:

B**) $$u'^3 - 3\left(a - \frac{2}{3}v\right)v'^2 u' - 2v'^3 u = 0$$

ist, so erhält man zwischen c_1 und c_2 die Relation:

$$c_1^3 - 3ac_1 - 2c_2 = 0,$$

so dass

$$u = \frac{c_1^3}{2} - \frac{3}{2}ac_1 + c_1 v$$

das allgemeine Integral von B**) darstellt; dasselbe ist eine rationale Function von z.

Damit die Coefficienten der Differentialgleichung B*) rationale Functionen von z seien, ist aber nur nothwendig, dass ein particuläres Integral a_0 der Differentialgleichung 4) eine rationale Function von z sei, wenn b_1 eine solche ist. Also für ein bestimmtes a soll der Ausdruck

$$a_0 = a b_1^{2/3} - \frac{2}{3} b_1^{2/3} \int b_1^{1/3} dz$$

eine rationale Function von z sein; dann muss jedenfalls, da auch b_1 eine solche ist,

$$a - \frac{2}{3}\int b_1^{1/3} dz = b_1^{1/3} R(z)$$

sein, wo $R(z)$ eine rationale Function von z bedeutet. Durch Differentiation erhält man:

$$-\frac{2}{3} b_1^{1/3} = b_1^{1/3} R'(z) + \frac{1}{3} b_1^{-2/3} b'_1 R(z)$$

oder, wenn man durch $b_1^{1/3} R(z)$ dividirt:

$$-\frac{2}{3}\frac{1}{R(z)} = \frac{R'(z)}{R(z)} + \frac{1}{3}\frac{b'_1}{b_1},$$

also, wenn

$$b_1 R^3(z) = R_1(z)$$

gesetzt wird:

$$-\frac{2}{R(z)} = \frac{R'_1(z)}{R_1(z)} \quad \text{und} \quad R(z) = -2\frac{R_1(z)}{R'_1(z)};$$

daher:

$$b_1 = \frac{R_1(z)}{R^3(z)} = -\frac{1}{8}\frac{R'^3_1(z)}{R_1^2(z)} \quad \text{und} \quad a_0 = b_1 R(z) = \frac{1}{4}\frac{R'^2_1(z)}{R_1(z)}.$$

Ferner wird:

$$u'' = \frac{A}{6}\cdot u' = \frac{1}{3}\frac{b'_1}{b_1}\cdot u',$$

also

$$u' = c_1 b_1^{1/3}$$

und

$$u = c_1\int b_1^{1/3} dz + \bar{c}_2 = -\frac{3c_1}{2} R_1^{1/3}(z) + c_2 = -\frac{3}{2}c_1 b_1^{1/3} \cdot R(z) + c_2.$$

In diesem Falle ist das Integral der Differentialgleichung B*) zwar keine rationale, aber eine algebraische Function von z. Die Relation zwischen c_1 und c_2 kann wieder leicht aufgestellt werden; sie lautet:

$$c_1^3 + 2c_2 = 0.$$

Zu demselben Resultat gelangt man wieder directer, wenn man in die Bedingungsgleichung $\frac{3a'_0+2b_1}{a_0}=\frac{2b'_1}{b_1}$ oder $\frac{2b_1}{a_0}=\frac{2b'_1}{b_1}-\frac{3a'_0}{a_0}$ sogleich $\frac{b_1^2}{a_0^3}=\nu(z)$ einführt; dieselbe ergiebt dann:

$$\frac{2b_1}{a_0}=\frac{\nu'(z)}{\nu(z)},$$

also:

$$a_0=\frac{1}{4}\,\frac{\nu'^2(z)}{\nu^3(z)} \text{ und } b_1=\frac{1}{8}\,\frac{\nu'^3(z)}{\nu^4(z)}.$$

Diese Darstellung hat den Vorzug, dass hier die Parameterfunction $\nu(z)$ eine beliebige Function von z bedeuten kann; das Integral der Differentialgleichung B*) ist dann, wenn auch keine algebraische Function von z, so doch algebraisch in den Coefficienten von B*). — Die jetzt gefundenen Formen von a_0 und b_1 werden übrigens mit den obigen identisch, wenn man $\nu(z)=\frac{1}{R_1(z)}$ setzt.

Diese Untersuchungen lassen sich leicht auf die trinomischen Gleichungen m^{ten} Grades von der Gestalt:

$$\alpha)\qquad F=y'^m-m\,Q\cdot y'+(m-1)\,R=0$$

ausdehnen. Es ist:

$$\beta)\qquad \frac{\partial F}{\partial y'}=my'^{m-1}-m\,Q$$

und

$$\gamma)\qquad -F+\frac{1}{m}y'\frac{\partial F}{\partial y'}=(m-1)\,[Q\,y'-R].$$

Durch Elimination von y' aus den Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial y'}=0 \text{ und } -F+\frac{1}{m}y'\frac{\partial F}{\partial y'}=0$$

erhält man

$$\Delta=R^{m-1}-Q^m=0.$$

Unter der Voraussetzung, dass Δ nur einfache Factoren enthält, dass also nur einfache Verzweigungen stattfinden und Q mit R keinen gemeinschaftlichen Theiler besitzt, ist die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Differentialgleichung α) eine Fuchs'sche sei, allein das Bestehen der Gleichungen

$$\frac{\partial\Delta}{\partial z}+\frac{\partial\Delta}{\partial y}\cdot y'=0 \text{ und } Qy'-R=0$$

für jeden Werth von y, für welchen $\Delta=0$ ist, d. h. das Bestehen der Congruenz:

$$Q\frac{\partial\Delta}{\partial z}+R\frac{\partial\Delta}{\partial y}\equiv 0 \mod \Delta$$

oder:

$$R\frac{\partial\Delta}{\partial y}+\left[Q\frac{\partial\Delta}{\partial z}-m\frac{\partial Q}{\partial z}\Delta\right]\equiv 0 \mod \Delta$$

oder, da:

$$Q\frac{\partial\Delta}{\partial z}-m\frac{\partial Q}{\partial z}\Delta=R^{m-2}\left[(m-1)\,Q\frac{\partial R}{\partial z}-m\frac{\partial Q}{\partial z}R\right]$$

ist und Δ mit R keinen gemeinschaftlichen Theiler besitzt:

$$\frac{\partial\Delta}{\partial y}+R^{m-3}\left[(m-1)\,Q\frac{\partial R}{\partial z}-m\frac{\partial Q}{\partial z}R\right]\equiv 0 \ mod\,\Delta.$$

Durch eine der des vorigen Abschnittes analoge Schlussweise folgt aus dieser Congruenz, dass identisch:

$$\delta)\qquad \frac{\partial\Delta}{\partial y}+R^{m-3}\left[(m-1)\,Q\frac{\partial R}{\partial z}-m\frac{\partial Q}{\partial z}R\right]=0$$

sein muss. Bedeutet nämlich k den Grad von Q, l den Grad von R, so kann in Δ ein Fortheben der höchsten Potenzen von y nur stattfinden, wenn

$$mk=(m-1)l$$

ist, d. h. wenn

$$k=2(m-1),\quad l=2m\quad \text{oder}\quad k=m-1,\quad l=m$$

ist. Es sei n der Grad von Δ, so ist im ersten Falle

$$T=R^{m-3}\left[(m-1)\,Q\frac{\partial R}{\partial z}-m\frac{\partial Q}{\partial z}R\right]=\frac{1}{R}\left[Q\frac{\partial\Delta}{\partial z}-m\frac{\partial Q}{\partial z}\Delta\right]$$

höchstens vom $n-2^{\text{ten}}$, im zweiten Falle höchstens vom $n-1^{\text{ten}}$ Grade in y. — Ist dagegen $mk>(m-1)l$, so ist mk der Grad von Δ, und unter Berücksichtigung der Ungleichung $m(m-2)<(m-1)^2$ ist der Grad von T höchstens:

$$k+(m-2)l<k+\frac{m(m-2)}{m-1}k<mk.$$

Ist endlich:

$$mk<(m-1)l,$$

so ist $(m-1)l$ der Grad von Δ, und unter Beachtung derselben Ungleichung ist der Grad von T höchstens:

$$k+(m-2)l<\frac{m-1}{m}l+(m-2)l$$

oder

$$<\frac{m-1+m(m-2)}{m}l<(m-1)l.$$

Damit ist das Bestehen der Gleichung δ) erwiesen.

Aus Gleichung δ) folgt unter Berücksichtigung von

$$\frac{\partial\Delta}{\partial y}=(m-1)\,R^{m-2}\frac{\partial R}{\partial y}-m\,Q^{m-1}\frac{\partial Q}{\partial y},$$

dass $Q^{m-1}\frac{\partial Q}{\partial y}$ oder, da Q mit R keinen gemeinsamen Theiler hat, dass $\frac{\partial Q}{\partial y}$ durch R^{m-3} theilbar sein muss. Gleichung δ) kann aber andererseits, wie man leicht sieht, nur bestehen, wenn der Grad von Q kleiner ist als der Grad von R; folglich muss, wenn $m>3$ ist, $\frac{\partial Q}{\partial y}=0$, d. h. Q von y unabhängig sein.

Dividirt man nunmehr Gleichung δ) durch R^{m-3}, so erhält man:

$$(m-1) R \frac{\partial R}{\partial y} + (m-1) Q \frac{\partial R}{\partial z} - m \frac{\partial Q}{\partial z} R = 0$$

oder:

$$\varepsilon) \qquad (m-1) Q \frac{\partial R}{\partial z} = R \left[m \frac{\partial Q}{\partial z} - (m-1) \frac{\partial R}{\partial y} \right].$$

Aus dieser Gleichung folgt, da Q von y unabhängig, dass R höchstens vom ersten Grade in y ist; die Differentialgleichung α) hat also die Gestalt:

$$y'^m - m a_0 y' + (m-1)(b_0 + b_1 y) = 0.$$

a_0, b_0 und b_1 sind Functionen von z, zwischen denen infolge von ε) die Gleichungen bestehen:

$$\frac{b'_0}{b_0} = \frac{b'_1}{b_1} = \frac{m a'_0 - (m-1) b_1}{(m-1) a_0}.$$

Daraus ergiebt sich zunächst $b_0 = b_1 c$, und setzt man $y + c = u$, so lautet die Differentialgleichung α):

$$\alpha^*) \qquad f(z, u, u') = u'^m - m a_0 u' + (m-1) b_1 u = 0.$$

Aus

$$\zeta) \qquad a'_0 - \frac{m-1}{m} \frac{b'_1}{b_1} a_0 - \frac{m-1}{m} b_1 = 0$$

erhält man:

$$a_0 = a b_1^{\frac{m-1}{m}} + \frac{m-1}{m} b_1^{\frac{m-1}{m}} \int b_1^{\frac{1}{m}} dz.$$

Lässt man wieder in dem Ausdrucke für a_0 die Integrationsconstante a willkürlich, so muss, wenn a_0 und b_1 rationale Functionen von z sein sollen, auch $b_1^{\frac{m-1}{m}}$ und $\int b_1^{\frac{1}{m}} dz$ eine rationale Function von z sein, also b_1 die Gestalt haben:

$$b_1 = \nu'^m(z),$$

wo $\nu(z)$ eine beliebige rationale Function bedeutet. Dann wird:

$$a_0 = a \nu'^{m-1}(z) + \frac{m-1}{m} \nu'^{m-1}(z) \nu(z)$$

$$= \nu'^{m-1}(z) \left(a + \frac{m-1}{m} \nu(z) \right).$$

Ferner findet man unter Berücksichtigung der Gleichung ζ):

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot u' = \frac{b'_1}{b_1} \cdot f - \frac{1}{m} \frac{b'_1}{b_1} u' \cdot \frac{\partial f}{\partial u'}.$$

Jedes Integral von $f = 0$ ist auch ein Integral von:

$$\eta) \qquad u'' = - \frac{\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot u'}{\frac{\partial f}{\partial u'}} = \frac{1}{m} \frac{b'_1}{b_1} \cdot u',$$

wenn man zunächst von singulären Lösungen, für welche zugleich $f = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial u'} = 0$ ist, absieht.*

* cfr. pag. 271.

Aus η) erhält man:

$$u' = c_1 b_1^{\frac{1}{m}} = c_1 \nu'(z) \text{ und } u = c_1 \nu(z) + c_2.$$

Werden die Werthe für u' und u in α^*) $f=0$ eingesetzt, so resultirt zwischen c_1 und c_2 die Relation:

$$c_1^m - m a c_1 + (m-1) c_2 = 0,$$

so dass

$$u = -\frac{c_1^m}{m-1} + \frac{m}{m-1} a c_1 + c_1 \nu(z)$$

das allgemeine Integral von α^*) darstellt.

Soll, was genügend ist, nur ein partikuläres Integral a_0 der Differentialgleichung ζ) eine rationale Function von z sein, so muss wieder jedenfalls für ein bestimmtes a:

$$a + \frac{m-1}{m} \int b_1^{\frac{1}{m}} dz = b_1^{\frac{1}{m}} R(z)$$

sein, wo R eine rationale Function von z bedeutet.

Durch Differentiation ergiebt sich:

$$\frac{m-1}{m} b_1^{\frac{1}{m}} = b_1^{\frac{1}{m}} R'(z) + \frac{1}{m} b_1^{\frac{1}{m}-1} R(z)$$

oder

$$\frac{m-1}{m} \frac{1}{R(z)} = \frac{R'(z)}{R(z)} + \frac{1}{m} \frac{b'_1}{b_1}$$

und, wenn

$$b_1 R^m(z) = R_1(z)$$

gesetzt wird:

$$\frac{m-1}{R(z)} = \frac{R'_1(z)}{R_1(z)}, \text{ also } R(z) = (m-1) \frac{R_1(z)}{R'_1(z)}.$$

Dann wird:

$$b_1 = \frac{R_1(z)}{R^m(z)} = \frac{1}{(m-1)^m} \frac{R'^m_1(z)}{R_1^{m-1}(z)}$$

und

$$a_0 = b_1 R(z) = \frac{1}{(m-1)^{m-1}} \frac{R'^{m-1}_1(z)}{R_1^{m-2}(z)}.$$

Ferner erhält man aus

$$u'' = \frac{1}{m} \frac{b'_1}{b_1} \cdot u':$$

$$u' = c_1 b_1^{\frac{1}{m}} \text{ und } u = c_1 \int b_1^{\frac{1}{m}} dz + \bar{c}_2 = \frac{m}{m-1} c_1 b_1^{\frac{1}{m}} R(z) + c_2.$$

Zwischen c_1 und c_2 besteht die Relation:

$$c_1^m + (m-1) c_2 = 0.$$

Aus der Bedingungsgleichung:

$$\frac{m a'_0 - (m-1) b_1}{a_0} = (m-1) \frac{b'_1}{b_1} \text{ oder } (m-1) \frac{b_1}{a_0} = m \frac{a'_0}{a_0} - (m-1) \frac{b'_1}{b_1}$$

erhält man wieder direct, wenn $\frac{a_0^m}{b_1^{m-1}} = \nu(z)$ gesetzt wird:

$$(m-1)\frac{b_1}{a_0}=\frac{\nu'(z)}{\nu(z)},$$

also

$$a_0=\frac{1}{(m-1)^{m-1}}\,\frac{\nu'^{m-1}(z)}{\nu^{m-2}(z)}\quad\text{und}\quad b_1=\frac{1}{(m-1)^m}\,\frac{\nu'^m(z)}{\nu^{m-1}(z)}.$$

Hier kann $\nu(z)$ eine beliebige Function von z sein; das Integral der Differentialgleichung α^*) ist dann algebraisch in $\nu(z)$.

Es sei nun in Differentialgleichung A) Q vom ersten Grade in y, dann muss nach den Gleichungen 1) R vom zweiten Grade sein:

$$Q=a_0+a_1y,\quad R=b_0+b_1y+b_2y^2,$$

C) $$y'^3-3(a_0+a_1y)\cdot y'-2(b_0+b_1y+b_2y^2)=0\qquad(p=0).$$

Aus den Bedingungsgleichungen 3) heben wir die folgende heraus:

5) $$\frac{3a'_1+4b_2}{a_1}=2\frac{b'_2}{b_2}.$$

Aus ihr ergiebt sich wieder:

$$a_1=a\,b_2^{2/3}-\frac{4}{3}\,b_2^{2/3}\int b_2^{1/3}\,dz.$$

Lässt man in dem Ausdrucke für a_1 die Integrationsconstante a willkürlich, so muss, wenn a_1 und b_2 rationale Functionen von z sein sollen, $b_2=\nu'^3(z)$ sein, wo $\nu(z)$ ein beliebige rationale Function von z bedeutet. Dann wird

$$a_1=a\nu'^2-\frac{4}{3}\nu'^2\nu=\nu'^2\left(a-\frac{4}{3}\nu\right)\quad\text{und}\quad\frac{A}{6}=\frac{1}{3}\,\frac{b'_2}{b_2}=\frac{\nu''}{\nu'}.$$

Ferner wird die Gleichung 2):

$$y''=\frac{A}{6}y'+a_1=\frac{\nu''}{\nu'}y'+a_1.$$

Dieselbe ergiebt:

$$y'=c_1\nu'+\nu'\int\left(a-\frac{4}{3}\nu\right)\nu'\,dz=c_1\nu'+a\nu\nu'-\frac{2}{3}\nu^2\nu'$$

und

$$y=c_1\nu+\frac{a}{2}\nu^2-\frac{2}{9}\nu^3+c_2.$$

Das Integral der Differentialgleichung C) ist also eine rationale Function; die zwischen c_1 und c_2 bestehende Relation ergiebt sich durch Einsetzen der Werthe für y und y' in C). Um auch die Anwendung des Fuchs'schen Theorems (S. 269) zu zeigen, setzen wir an:

$$\Gamma=\varphi_0+\varphi_1\Delta$$

und erhalten durch Differentiation, indem wir Gleichung 2) beachten:

$$0=\frac{\partial\varphi_0}{\partial z}+\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right)\cdot\Delta+\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\cdot\Delta^2+\varphi_1\left(\frac{A}{6}\cdot\Delta+\frac{\partial Q}{\partial y}\right).$$

Daraus ergeben sich die drei Gleichungen:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}=0,\ \text{also } \varphi_1 \text{ nur von } z \text{ abhängig},$$

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial y}+\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}+\frac{A}{6}\varphi_1=0,\quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial z}+\varphi_1\frac{\partial Q}{\partial y}=0$$

oder, da $\frac{\partial Q}{\partial y}=a_1$ und $\frac{A}{6}=\frac{\nu''}{\nu'}$ ist:

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial y}+\varphi_1'(z)+\frac{\nu''}{\nu'}\varphi_1=0 \text{ und } \frac{\partial \varphi_0}{\partial z}+a_1\varphi_1=0.$$

Aus der ersten Gleichung folgt, dass

$$\varphi_0=m(z)\,y+n(z),$$

aus der zweiten, dass $m(z)$ gleich einer Constanten sein muss $(=m)$. Zwischen $\varphi_1(z)$, $n(z)$ und m bestehen dann die Gleichungen:

$$m+\varphi_1'(z)+\frac{\nu''}{\nu'}\varphi_1(z)=0 \text{ und } n'(z)+a_1\varphi_1(z)=0.$$

Die erste ergiebt:

$$\varphi_1=\frac{c}{\nu'}-m\frac{\nu}{\nu'},$$

die zweite, da $a_1=\nu'^2\left(a-\frac{4}{3}\nu\right)$ war:

$$n(z)=-ac\nu+\left(\frac{am}{2}+\frac{2}{3}c\right)\nu^2-\frac{4}{9}m\nu^3.$$

Die Coefficienten von φ_0 und φ_1 sind also in der That rationale Functionen von z. — Wenn, was genügend ist, nur ein partikuläres Integral a_1 der Bedingungsgleichung 5) eine rationale Function von z sein soll, so lässt sich wieder leicht zeigen, dass in diesem Falle das allgemeine Integral der Differentialgleichung C) eine algebraische Function ist, wenn man (für $m=3$ und $k=2$) folgenden allgemeinen Satz berücksichtigt: Ist b eine rationale Function von z von der Beschaffenheit, dass $\int b^{\frac{1}{m}}dz$ eine algebraische Function von z ist, so sind auch:

$$\int dz\, b^{\frac{1}{m}}\int b^{\frac{1}{m}}dz,\quad \int dz\, b^{\frac{1}{m}}\int dz\, b^{\frac{1}{m}}\int b^{\frac{1}{m}}dz,\ \ldots,$$

allgemein:

$$\overset{(k)}{\int} dz\, b^{\frac{1}{m}}\cdots\int dz\, b^{\frac{1}{m}}\int b^{\frac{1}{m}}dz$$

algebraische Functionen von z. Wenn nämlich $\int b^{\frac{1}{m}}dz$ eine algebraische Function von z sein soll, so muss sie die Gestalt haben:*

$$\int b^{\frac{1}{m}}dz=b^{\frac{1}{m}}R(z)+C,$$

wo $R(z)$ eine rationale Function von z und C die Integrationsconstante bedeutet.

---

* Jos. Liouville im Journal polytechn., t. XIV cah. 22 pag. 131: Sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique.

Durch Differentiation findet man:

$$b^{\frac{1}{m}} = b^{\frac{1}{m}} R'(z) + \frac{1}{m} b^{\frac{1}{m}-1} b' R(z),$$

also:

$$\frac{1}{R(z)} = \frac{R'(z)}{R(z)} + \frac{1}{m}\frac{b'}{b} = \frac{d \log b^{\frac{1}{m}} R(z)}{dz};$$

d. h. $R(z)$ hat, wenn

$$b R^m(z) = R_1(z)$$

gesetzt wird, die Gestalt:

$$R(z) = m \frac{R_1(z)}{R'_1(z)}.$$

Ferner wird:

$$b = \frac{R_1(z)}{R^m(z)} = \frac{1}{m^m} \frac{R'_1{}^m(z)}{R_1{}^{m-1}(z)},$$

also:

$$\int b^{\frac{1}{m}} dz = R_1^{\frac{1}{m}}(z) + c_1,$$

$$b^{\frac{1}{m}} \int b^{\frac{1}{m}} dz = \frac{1}{m} R_1^{\frac{2-m}{m}}(z) R'_1(z) + \frac{c_1}{m} R_1^{1-\frac{1}{m}}(z) R'_1(z)$$

und

$$\int dz\, b^{\frac{1}{m}} \int b^{\frac{1}{m}} dz = \frac{1}{2} R_1^{\frac{2}{m}}(z) + c_1 R_1^{\frac{1}{m}}(z) + c_2;$$

ebenso erhält man:

$$\int dz\, b^{\frac{1}{m}} \int dz\, b^{\frac{1}{m}} \int b^{\frac{1}{m}} dz = \frac{1}{3!} R_1^{\frac{3}{m}}(z) + \frac{c_1}{2!} R_1^{\frac{2}{m}}(z) + \frac{c_2}{1!} R_1^{\frac{1}{m}}(z) + c_3$$

und allgemein:

$$\overset{(k)}{\int} dz\, b^{\frac{1}{m}} \cdots \int b^{\frac{1}{m}} dz$$

$$= \frac{1}{k!} R_1^{\frac{k}{m}}(z) + \frac{c_1}{(k-1)!} R_1^{\frac{k-1}{m}}(z) + \cdots + \frac{c_\nu}{(k-\nu)!} R_1^{\frac{k-\nu}{m}}(z) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{c_{k-1}}{1!} R_1^{\frac{1}{m}}(z) + c_k.$$

$$= \frac{1}{k!} R_1^{\frac{k}{m}}(z) + \frac{c_1}{(k-1)!} R_1^{\frac{k-1}{m}}(z) + \cdots + \frac{c_\nu}{(k-\nu)!} R_1^{\frac{k-\nu}{m}}(z) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{c_{k-1}}{1!} R_1^{\frac{1}{m}}(z) + c_k.$$

Damit ist aber der Satz bewiesen.

Wir kommen endlich zu dem Falle, dass Q vom zweiten, R vom dritten Grade in y ist, nehmen aber, was keine wesentliche Beschränkung ist, der Einfachheit wegen $a_0 = 0$ an; dann folgt aus den Bedingungsgleichungen 1*):

$$b_1 = 0, \quad a_1 = 0, \quad b_2 = 0,$$

und die Differentialgleichung A) lautet:

D) $$y'^3 - 3 a_2 y^2 y' - 2(b_0 + b_3 y^3) = 0.$$

Zwischen a_2, b_0 und b_3 bestehen die Bedingungsgleichungen:

6) $$2 \frac{b'_0}{b_0} = \frac{3 a'_2 + 6 b_3}{a_2} = \frac{2 b'_3 + 6 a_2^2}{b_3}.$$

$$a_2 = \nu^2(z), \quad b_3 = \nu^3(z),$$

wo $\nu(z)$ eine rationale Function von z bedeutet. Die Gleichung

$$\frac{3a'_2 + 6b_3}{a_2} = \frac{2b'_3 + 6a_2^2}{b_3}$$

ist dann von selber erfüllt, und die Gleichungen 6) gehen in die eine über:

$$\frac{b'_0}{b_0} = \frac{3\nu'}{\nu} + 3\nu,$$

welche $b_0 = c\,\nu^3 e^{\int 3\nu\,dz}$ ergiebt. Da auch b_0 eine rationale Function von z sein soll, so muss ν die Gestalt haben: $\nu = \frac{1}{3}\frac{\mu'}{\mu}$, wo $\mu(z)$ eine beliebige rationale Function von z ist; dann wird:

$$b_0 = \frac{c}{27}\frac{\mu'^3}{\mu^2}, \quad a_2 = \left(\frac{1}{3}\frac{\mu'}{\mu}\right)^2, \quad b_3 = \left(\frac{1}{3}\frac{\mu'}{\mu}\right)^3;$$

und die Differentialgleichung D) lautet:

$$\text{D*)} \qquad y'^3 - 3\left(\frac{1}{3}\frac{\mu'}{\mu}\right)^2 y^2 \cdot y' - 2\left(\frac{1}{27}\frac{\mu'^3}{\mu^2} + \left(\frac{1}{3}\frac{\mu'}{\mu}\right)^3 y^3\right) = 0,$$

wenn $\frac{\mu}{c}$ statt μ gesetzt wird, was erlaubt ist, da c von 0 verschieden sein muss, wenn die Differentialgleichung D) nicht reductibel sein soll. Hier ist:

$$\frac{A}{6} = \frac{\nu'}{\nu} + \nu = \frac{\mu''}{\mu'} - \frac{2}{3}\frac{\mu'}{\mu};$$

also lautet Gleichung 2):

$$y'' = \left(\frac{\mu''}{\mu'} - \frac{2}{3}\frac{\mu'}{\mu}\right) y' + \frac{2}{9}\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^2 y$$

oder, da $\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{d\mu}\mu'$, $\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{d^2y}{d\mu^2}\mu'^2 + \frac{dy}{d\mu}\mu''$ ist:

$$\text{2*)} \qquad \frac{d^2y}{d\mu^2} + \frac{2}{3}\frac{1}{\mu}\cdot\frac{dy}{d\mu} - \frac{2}{9}\frac{1}{\mu^2}\cdot y = 0.$$

Diese Differentialgleichung geht bekanntlich durch die Substitution

$$u = \log\mu$$

in

$$\frac{d^2y}{du^2} - \frac{1}{3}\frac{dy}{du} - \frac{2}{9}y = 0$$

über; die charakteristische Gleichung

$$r^2 - \frac{1}{3}r - \frac{2}{9} = 0$$

hat die Wurzeln $r_1 = -\frac{1}{3}$ und $r_2 = \frac{2}{3}$; das allgemeine Integral von 2*) lautet daher:

$$y = c_1\mu^{-1/3} + c_2\mu^{2/3}.$$

Um die Relation zwischen c_1 und c_2 zu finden, differenzire man dasselbe:

$$y' = -\tfrac{1}{3}c_1\mu^{-4/3}\mu' + \tfrac{2}{3}c_2\mu^{-1/3}\mu'$$

und setze die Werthe für y und y' in D*) ein, so erhält man nach einigen Rechnungen:

$$c_1 c_2^2 + \tfrac{2}{27} = 0.$$

Das allgemeine Integral der Differentialgleichung D*) lautet also:

$$y = -\frac{2}{27 c_2^2}\mu^{-\frac{1}{3}} + c_2 \mu^{\frac{2}{3}}$$

oder, wenn $c_2 = \frac{c}{3}$ gesetzt wird:

$$y = -\frac{2}{3 c^2}\mu^{-\frac{1}{3}} + \frac{c}{3}\mu^{\frac{2}{3}};$$

dasselbe ist eine algebraische Function der Parameterfunction μ.

Ist $a_2^3 \neq b_3^2$, also $p = 1$, so erhält man aus den Gleichungen 6) zunächst:

$$3\frac{a'_2}{a_2} - 2\frac{b'_3}{b_3} = 6\left(\frac{a_2^2}{b_3} - \frac{b_3}{a_2}\right) = 6\,\frac{\frac{a_2^3}{b_3^2} - 1}{\frac{a_2}{b_3}}$$

oder:

$$\frac{b_3}{a_2}\left(\frac{a_2^3}{b_3^2} - 1\right) = \frac{1}{6}\,\frac{d\log\frac{a_2^3}{b_3^2}}{dz}.$$

Wird

$$\frac{a_2^3}{b_3^2} = \lambda(z)$$

gesetzt, so kommt:

$$\frac{b_3}{a_2}(\lambda - 1) = \frac{1}{6}\,\frac{\lambda'}{\lambda} \quad \text{oder} \quad \frac{b_3}{a_2}\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{6}\,\frac{\lambda'}{\lambda^2},$$

also, wenn $1 - \frac{1}{\lambda} = u$ gesetzt wird:

$$\frac{b_3}{a_2} = \frac{1}{6}\,\frac{u'}{u},$$

dann aus $1 - \frac{b_3^2}{a_2^3} = u$:

$$a_2 = \frac{\left(\frac{1}{6}\,\frac{u'}{u}\right)^2}{1 - u} \quad \text{und} \quad b_3 = \frac{\left(\frac{1}{6}\,\frac{u'}{u}\right)^3}{1 - u}.$$

Setzt man:

$$u = \frac{w}{w - 1},$$

so erhält man, da:

$$\frac{u'}{u} = \frac{d\log\frac{w}{w-1}}{dz} = \frac{w'}{w(1-w)} \quad \text{und} \quad 1 - u = \frac{1}{1 - w}$$

ist, a_2 und b_3 in der zweiten Form:

$$a_2 = \frac{\left(\frac{1}{6}\,\frac{w'}{w}\right)^2}{1 - w} \quad \text{und} \quad b_3 = \frac{\left(\frac{1}{6}\,\frac{w'}{w}\right)^3}{(1 - w)^2}, \quad \left(\frac{b_3}{a_2} = \frac{1}{6}\,\frac{w'}{w(1-w)}\right).$$

[Anmerkung: Aehnliches ergiebt die Betrachtung der Riccati'schen Differentialgleichung

$$b'_3 = -3a_2^2 + \frac{3}{2}\,\frac{a'_2}{a_2}\,b_3 + \frac{3}{a_2}\,b_3^2.$$

Dieselbe geht durch die Substitution

$$b_3 = -\frac{a_2}{3}\,\frac{v'}{v} \quad \text{oder} \quad \frac{b_3}{a_2} = -\frac{1}{3}\,\frac{v'}{v}$$

in die lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$v'' - \frac{1}{2}\,\frac{a'_2}{a_2}\,v' - 9\,a_2\,v = 0$$

oder, da $a_2 = \dfrac{\left(\frac{1}{6}\,\frac{u'}{u}\right)^2}{1-u}$, also

$$\frac{1}{2}\,\frac{a'_2}{a_2} = \frac{u''}{u'} - \frac{u'}{u} + \frac{1}{2}\,\frac{u'}{1-u}$$

ist, in

$$v'' - \left(\frac{u''}{u'} - \frac{u'}{u} + \frac{1}{2}\,\frac{u'}{1-u}\right)v' - 9\,\frac{\left(\frac{1}{6}\,\frac{u'}{u}\right)^2}{1-u}\,v = 0$$

über. Ein Integral dieser Differentialgleichung ist, wie aus

$$\frac{b_3}{a_2} = \frac{1}{6}\,\frac{u'}{u} = -\frac{1}{3}\,\frac{v'}{v}$$

hervorgeht:

$$v_1 = u^{-\frac{1}{2}}.$$

Da a_2 dieselbe Form behält, wenn man $\dfrac{1}{u} + \dfrac{1}{w} = 1$ oder $u = \dfrac{w}{w-1}$ setzt, so hat diese Differentialgleichung auch das Integral:

$$v_2 = w^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{u}{u-1}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Das allgemeine Integral der Differentialgleichung lautet also:

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 = c_1 u^{-\frac{1}{2}} + c_2 \left(\frac{u}{u-1}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

und daher das allgemeine Integral der Riccati'schen Differentialgleichung, wenn $\dfrac{c_2}{c_1} = \bar{c} = +ic$ gesetzt wird:

$$b_3 = -\frac{a_2}{3}\,\frac{v'}{v} = \frac{a_2}{6}\,\frac{u'}{u}\,\frac{1 + c(1-u)^{-\frac{1}{2}}}{1 + c(1-u)^{\frac{1}{2}}}.$$

Sollen a_2 und b_3 rationale Functionen von z sein und u eine willkürliche rationale Function von z bedeuten, so hat man $c = 0$ oder $c = \infty$ zu wählen, was auf die beiden vorhin aufgestellten Formen für a_2 und b_3 zurückführt.]

Es ist ferner nach den Bedingungsgleichungen 6):

$$\frac{b'_0}{b_0} = \frac{1}{2}\,\frac{3\,a'_2 + 6\,b_3}{a_2} = \frac{3\,w''}{w'} - \frac{5}{2}\,\frac{w'}{w} + \frac{2\,w'}{1-w},$$

also:

$$b_0 = \bar{k}\,w'^3 w^{-5/2} (1-w)^{-2}.$$

Soll b_0 eine rationale Function sein, so muss $w = \mu^2$ sein, wo nunmehr μ eine beliebige rationale Function bedeutet, und man erhält:

$$a_2 = \frac{\left(\frac{1}{3}\,\frac{\mu'}{\mu}\right)^2}{1-\mu^2}, \quad b_3 = \frac{\left(\frac{1}{3}\,\frac{\mu'}{\mu}\right)^3}{(1-\mu^2)^2} \quad \text{und} \quad b_0 = k\,\mu\,\frac{\left(\frac{1}{3}\,\frac{\mu'}{\mu}\right)^3}{(1-\mu^2)^2}.$$

Um den vorhin behandelten Fall $p=0$ mit einzuschliessen, setze man $\sqrt{c}\,\mu$ an Stelle von μ, dann lautet die Differentialgleichung D):

$$y'^3 - 3\frac{\left(\frac{1}{3}\frac{\mu'}{\mu}\right)^2}{1-c\mu^2}y^2y' - 2\frac{\left(\frac{1}{3}\frac{\mu'}{\mu}\right)^3}{(1-c\mu^2)^2}[k\mu+y^3]=0.$$

Damit diese Differentialgleichung irreductibel sei, muss $k \neq 0$ sein; k kann daher ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit gleich 1 vorausgesetzt werden, man hat nur μ an Stelle von $k\mu$ und c an Stelle von $\frac{c}{k^2}$ zu setzen. — Die Discriminante der Differentialgleichung D) ist:

$$\Delta = R^2 - Q^3 = \frac{\left(\frac{1}{3}\frac{\mu'}{\mu}\right)^6}{(1-c\mu^2)^4}[k^2\mu^2 + 2k\mu y^3 + c\mu^2 y^6].$$

Im vorhin behandelten Falle ist $c=0$ und daher das Geschlecht der durch D) definirten algebraischen Function y' von y gleich 0. — Ist dagegen $c \neq 0$, so ist das Geschlecht $p=1$; in diesem Falle kann man $c=1$ voraussetzen, indem man wieder μ an Stelle von $\sqrt{c}\,\mu$ setzt:

$$\text{D}^{**})\qquad y'^3 - 3\frac{\left(\frac{1}{3}\frac{\mu'}{\mu}\right)^2}{1-\mu^2}y^2y' - 2\frac{\left(\frac{1}{3}\frac{\mu'}{\mu}\right)^3}{(1-\mu^2)^2}[k\mu+y^3]=0.$$

Die Gleichung:

$$2)\qquad \frac{dy'}{dz} = \frac{A}{6}\cdot y' + \frac{\partial Q}{\partial y}$$

wird in diesem Falle:

$$2^{**})\qquad y'' = \left(\frac{\mu''}{\mu'} - \frac{2}{3}\frac{\mu'}{\mu} + \frac{4}{3}\frac{\mu\mu'}{1-\mu^2}\right)\cdot y' + 2\frac{\left(\frac{1}{3}\frac{\mu'}{\mu}\right)^2}{1-\mu^2}\cdot y$$

oder, da $y' = \frac{dy}{d\mu}\mu'$ und $y'' = \frac{dy}{d\mu}\mu'' + \frac{d^2y}{d\mu^2}\mu'^2$ ist:

$$2^{**})\qquad \frac{d^2y}{d\mu^2} + \left(\frac{2}{3}\frac{1}{\mu} + \frac{4}{3}\frac{\mu}{\mu^2-1}\right)\cdot\frac{dy}{d\mu} + \frac{2}{9}\frac{1}{\mu^2(\mu^2-1)}\cdot y = 0$$

$$\left[y_1\frac{dy_2}{d\mu} - y_2\frac{dy_1}{d\mu} = Ce^{-\int\left(\frac{2}{3}\frac{1}{\mu}+\frac{4}{3}\frac{\mu}{\mu^2-1}\right)d\mu} = C\mu^{-2/3}(\mu^2-1)^{-2/3}\right].$$

Die determinirende Fundamentalgleichung* in der Umgebung des singulären Punktes $\mu=0$

$$s(s-1) + \tfrac{2}{3}s - \tfrac{2}{9} = 0,$$

hat die Wurzeln $s_1 = \frac{2}{3}$, $s_2 = -\frac{1}{3}$. Durch die Substitution*

$$y = \mu^{-1/3}u$$

geht die Differentialgleichung 2**) über in:

$$\frac{d^2u}{d\mu^2} + \frac{4}{3}\frac{\mu}{\mu^2-1}\cdot\frac{du}{d\mu} - \frac{2}{9}\frac{1}{\mu^2-1}\cdot u = 0.$$

Um diese Differentialgleichung in diejenige der Gauss'schen Reihe überzuführen, setze man:

---

* cfr. pag. 217.

$$\mu = mx + n;$$

für $\mu = 1$ soll $x = 1$ sein, für $\mu = -1$ soll $x = 0$ sein, also: $n = -1$, $m = 2$ und $\mu = 2x - 1$. Durch diese Substitution geht die Differentialgleichung in die folgende über:

$$x(x-1)\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{2}{3}(2x-1)\frac{du}{dx} - \frac{2}{9}u = 0.$$

Dies ist wieder die Differentialgleichung der Gauss'schen Reihe, und zwar ist hier:

$$\alpha = \tfrac{2}{3}, \quad \beta = -\tfrac{1}{3}, \quad \gamma = \tfrac{2}{3}.$$

Ausser $F(\alpha, \beta, \gamma\ x) = F(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, x)$ sind auch*

$$x^{1-\gamma}.F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, x) = x^{1/3}.F(1, 0, \tfrac{4}{3}, x)$$

und

$$(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}.F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x) = (1-x)^{1/3}.F(0, 1, \tfrac{2}{3}, x)$$

Integrale dieser Differentialgleichung. Aber es ist

$$F(1, 0, \tfrac{4}{3}, x) = 1 \text{ und ebenso } F(0, 1, \tfrac{2}{3}, x) = 1.$$

Das allgemeine Integral ist daher algebraisch und lautet:

$$u = c_1 x^{1/3} + c_2 (x-1)^{1/3}.$$

Es war

$$x = \frac{\mu+1}{2}, \quad x - 1 = \frac{\mu-1}{2}, \text{ ferner } y = \mu^{-1/3} u$$

gesetzt; das allgemeine Integral der Differentialgleichung 2**) lautet also:

$$y = \frac{c_1}{\sqrt[3]{2}}\left(\frac{\mu+1}{\mu}\right)^{1/3} + \frac{c_2}{\sqrt[3]{2}}\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right)^{1/3}.$$

Um nun das allgemeine Integral der Differentialgleichung D**) zu ermitteln, bedarf es noch der Kenntniss des Zusammenhanges zwischen den willkürlichen Constanten c_1 und c_2. Zu diesem Behufe differenziren wir wieder:

$$y' = -\frac{1}{3}\frac{c_1}{\sqrt[3]{2}}\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{-2/3}\frac{\mu'}{\mu^2} + \frac{1}{3}\frac{c_2}{\sqrt[3]{2}}\left(1-\frac{1}{\mu}\right)^{-2/3}\frac{\mu'}{\mu^2}$$

und setzen die Werthe für y und y' in die Differentialgleichung D**) ein; so ergiebt sich nach einigen Rechnungen zwischen c_1 und c_2 der Zusammenhang:

$$c_2^3 - c_1^3 - k = 0.$$

Setzt man $c_1 = C$, so lautet das allgemeine Integral der Differentialgleichung D**):

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} C\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{1/3} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\sqrt[3]{k+C^3}\left(1-\frac{1}{\mu}\right)^{1/3}.$$

Dasselbe ist eine algebraische Function der Parameterfunction μ. Obige Form des Integrals zeigt wieder, dass die Verzweigungsstellen desselben von den Anfangswerthen unabhängig sind; sie sind nämlich die Null- und Unendlichkeitsstellen von μ resp. $\mu+1$ und $\mu-1$.

---

* Kummer in Crelle's Journal, Bd. XV pag. 52, Formeln 3) und 2).

Es sei an dieser Stelle bemerkt, dass mit der algebraischen Integration einer Fuchs'schen Differentialgleichung vom Geschlecht 1 zugleich ein algebraisches Transformationsproblem für elliptische Integrale gelöst ist; denn es muss in diesem Falle die Differentialgleichung für den Parameter t, durch den y und y' dargestellt werden:

$$\frac{dt}{dz} = \lambda \sqrt{R(t)}^{*} \quad \text{oder} \quad \frac{dt}{\sqrt{R(t)}} = \lambda\, dz,$$

algebraisch integrirbar sein, und zwar ist die algebraische Function t von z leicht darzustellen, da man y als — algebraische — Function einerseits von t, andererseits von z kennt. Die Differentialgleichung zwischen den Variabelen t und z enthält daher nichts Anderes als ein algebraisches Transformationsproblem für das elliptische Differential $\frac{dt}{\sqrt{R(t)}}$, ein Problem, welches, da man die algebraische Beziehung zwischen t und z kennt, als gelöst zu betrachten ist.

Setzt man, um auch hier das Fuchs'sche Theorem** anzuwenden:

$$\Gamma = \varphi_0 + \varphi_1 \cdot \Delta$$

an, so wird man zwar nicht verlangen können, dass die Coefficienten von φ_0 und φ_1 rationale Functionen von z, wohl aber erwarten dürfen, dass sie algebraische Functionen sind. In der That führen die auftretenden Bedingungsgleichungen auf lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche von den oben behandelten nicht wesentlich verschieden sind und daher ebenfalls algebraische Integrale besitzen.

Durch Differentiation der oben angesetzten Gleichung erhält man nämlich unter Berücksichtigung der Gleichung 2) $\left(\frac{d\Delta}{dz} = \frac{A}{6} \cdot \Delta + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)$:

$$0 = \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} + \varphi_1 \frac{\partial Q}{\partial y} + \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \frac{A}{6}\varphi_1\right)\Delta + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \cdot \Delta^2;$$

folglich ist wegen der Irreductibilität der Gleichung D) identisch:

$$\frac{d\varphi_1}{dy} = 0, \quad \text{d. h.} \quad \varphi_1 = \psi(z) \quad \text{nur von } z \text{ abhängig;}$$

ferner:

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial z} + \psi(z)\frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + \psi'(z) + \frac{A}{6}\psi(z) = 0.$$

Aus der letzten Gleichung folgt, dass

$$\varphi_0 = \varepsilon y + \delta$$

sein muss, wo δ und ε von z allein abhängen; dann folgt aus der vorletzten Gleichung, dass Q höchstens vom zweiten Grade in y sein darf; dies ist in der Differentialgleichung D) der Fall, unser Verfahren ist daher gerechtfertigt. — Die beiden letzten Gleichungen ergeben, da $Q = a_2 y^2$ ist:

* S. Einleitung pag. 195.

** cfr. pag. 269 u. 328.

$$\varepsilon + \psi'(z) + \frac{A}{6}\psi(z) = 0, \quad \varepsilon' + 2a_2\psi(z) = 0, \quad \delta' = 0,$$

d. h. δ ist eine Constante, die in die willkürliche Constante Γ eingeht; eliminirt man ferner aus den ersten beiden Gleichungen und aus der Gleichung

$$\varepsilon'' + 2a'_2\psi(z) + 2a_2\psi'(z) = 0,$$

welche durch Differentiation aus der zweiten entsteht, $\psi(z)$ und $\psi'(z)$, so erhält man für ε die lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\varepsilon'' = \left(\frac{a'_2}{a_2} - \frac{A}{6}\right)\varepsilon' + 2a_2\varepsilon$$

oder, da $\frac{A}{6} = \frac{1}{2}\frac{a'_2}{a_2} + \frac{b_3}{a_2}$ ist:

$$\varepsilon'' = \left(\frac{1}{2}\frac{a'_2}{a_2} - \frac{b_3}{a_2}\right)\varepsilon' + 2a_2\varepsilon,$$

während $\psi(z)$ sich dann aus der zweiten Gleichung ergiebt. — Die Differentialgleichung für ε lautet, wenn man die oben gefundenen Ausdrücke für a_2 und b_3 beachtet:

$$\varepsilon'' = \left(\frac{\mu''}{\mu'} - \frac{4}{3}\frac{\mu'}{\mu} + \frac{2}{3}\frac{c\mu\mu'}{1-c\mu^2}\right)\cdot\varepsilon' + 2\,\frac{\left(\frac{1}{3}\frac{\mu'}{\mu}\right)^2}{1-c\mu^2}\cdot\varepsilon$$

oder, da $\varepsilon' = \frac{d\varepsilon}{d\mu}\mu'$ und $\varepsilon'' = \frac{d^2\varepsilon}{d\mu^2}\mu'^2 + \frac{d\varepsilon}{d\mu}\mu''$ ist:

$$\frac{d^2\varepsilon}{d\mu^2} + \left(\frac{4}{3}\frac{1}{\mu} + \frac{2}{3}\frac{c\mu}{c\mu^2-1}\right)\cdot\frac{d\varepsilon}{d\mu} + \frac{2}{9}\frac{1}{\mu^2(c\mu^2-1)}\cdot\varepsilon = 0.$$

Wenn $c = 0$ ist, so geht die dadurch entstehende Differentialgleichung:

$$\frac{d^2\varepsilon}{d\mu^2} + \frac{4}{3}\frac{1}{\mu}\cdot\frac{d\varepsilon}{d\mu} - \frac{2}{9}\frac{1}{\mu^2}\cdot\varepsilon = 0$$

unmittelbar in die Differentialgleichung 2*), S. 331:

$$\frac{d^2y}{d\mu^2} + \frac{2}{3}\frac{1}{\mu}\cdot\frac{dy}{d\mu} - \frac{2}{9}\frac{1}{\mu^2}\cdot y = 0$$

über, wenn man y an Stelle von ε und $\frac{1}{\mu}$ an Stelle von μ setzt; das allgemeine Integral der Differentialgleichung ist daher:

$$\varepsilon = c_1\mu^{1/3} + c_2\mu^{-2/3},$$

d. h. eine algebraische Function der Parameterfunction μ. — Wenn $c \neq 0$, so durfte es gleich 1 vorausgesetzt werden; die Differentialgleichung für ε entspricht dann der Gleichung 2**), S. 334. Dieselbe nimmt, da die determinirende Gleichung in der Umgebung des singulären Punktes $\mu = 0$:

$$s(s-1) + \tfrac{4}{3}s - \tfrac{2}{9} = 0$$

die Wurzeln $-\frac{2}{3}$ und $\frac{1}{3}$ hat, durch die Substitution $\varepsilon = \mu^{-2/3}v$ die einfachere Gestalt an:

$$\frac{d^2v}{d\mu^2} + \frac{2}{3}\frac{\mu}{\mu^2-1}\cdot\frac{dv}{d\mu} - \frac{2}{9}\frac{1}{\mu^2-1}\cdot v = 0,$$

und die Differentialgleichung für v wird wieder durch die Substitution

$$\mu = 2x - 1$$

in die Differentialgleichung der Gauss'schen Reihe

$$x(x-1)\frac{d^2v}{dx^2} + \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}\right)\frac{dv}{dx} - \frac{2}{9}v = 0$$

übergeführt. Hier ist:

$$\gamma = \tfrac{1}{3}, \quad \alpha + \beta + 1 = \tfrac{2}{3}, \quad \alpha\beta = -\tfrac{2}{9},$$

also:

$$\alpha = \tfrac{1}{3}, \quad \beta = -\tfrac{2}{3}, \quad \gamma = \tfrac{1}{3}.$$

Zwei Partikularintegrale sind:*

$$v_1 = x^{1-\gamma} \cdot F(\alpha - \gamma + 1,\ \beta - \gamma + 1,\ 2 - \gamma,\ x) = x^{2/3} \cdot F(1,\ 0,\ \tfrac{5}{3},\ x) = x^{2/3}$$

und

$$v_2 = (1-x)^{\gamma - \alpha - \beta} \cdot F(\gamma - \alpha,\ \gamma - \beta,\ \gamma,\ x) = (1-x)^{2/3} \cdot F(0,\ 1,\ \tfrac{1}{3},\ x) = (1-x)^{2/3},$$

so dass das allgemeine Integral

$$v = c_1 x^{2/3} + c_2 (x-1)^{2/3} \quad \text{oder} \quad v = c_1\left(\frac{\mu+1}{2}\right)^{2/3} + c_2\left(\frac{\mu-1}{2}\right)^{2/3},$$

also

$$\varepsilon = \frac{c_1}{\sqrt[3]{4}}\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^{2/3} + \frac{c_2}{\sqrt[3]{4}}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)^{2/3}$$

ist. ε ist also in der That eine algebraische Function der Parameterfunction μ.

V.

1. Es mögen in diesem Abschnitte zunächst einige Bemerkungen über die zweite der von Herrn Fuchs für die feste Lage der Verzweigungspunkte der Integrale aufgestellten Bedingungen, dass nämlich der wesentliche Theiler der Discriminante singuläre Integrale der Differentialgleichung liefern muss, folgen. Dieselbe ist, wie die Entwickelungen der früheren Abschnitte zeigen, von grosser Wichtigkeit. Man glaubte früher, dass stets der wesentliche Theiler der Discriminante $D(z, y)$ ein singuläres Integral der Differentialgleichung $F(z, y, y') = 0$ liefern müsste, bis das Beispiel von Serret:**

$$y'^2 + 2xy' - y = 0$$

eines Bessern belehrte. In diesem Falle stellt die Discriminantengleichung

$$y + x^2 = 0$$

nicht die Enveloppe der durch das allgemeine Integral repräsentirten Curvenschaar, sondern den geometrischen Ort von Rückkehrpunkten der partikulären Curven dar. Man kann daher die zweite Fuchs'sche Bedingung geometrisch dahin aussprechen, dass die durch das allgemeine Integral einer Fuchs'schen Differentialgleichung repräsentirte Curvenschaar stets eine Enveloppe besitzen muss.

Man kann diese Bedingung folgendermassen in Bedingungsgleichungen für die von z abhängenden Coefficienten der Differentialgleichung $F(z, y, y') = 0$

---

* cfr. pag. 335.

** Serret, Cours d'Analyse, Bd. II pag. 381.

umsetzen: Es sei H_1 ein einfacher irreductibler Factor der Discriminante $D(z, y)$, d. h. der Eliminationsresultante von y' aus $F=0$ und $\frac{\partial F}{\partial y'}=0$ $\left(\text{oder besser aus } \frac{\partial F}{\partial y'}=0 \text{ und } mF-y'\frac{\partial F}{\partial y'}=0, \text{ wenn } F \text{ vom } m^{\text{ten}} \text{ Grade in } y'\right)$, so ist für alle Werthepaare z, y, für welche $H_1(z, y)=0$, zu gleicher Zeit $F=0$ und $\frac{\partial F}{\partial y'}=0$. Soll nun $H_1(z, y)=0$ ein Integral der Differentialgleichung $F=0$ sein, so muss für alle Werthepaare z, y, für welche $H_1(z, y)=0$ ist, gleichzeitig mit den Gleichungen $F=0$ und $\frac{\partial F}{\partial y'}=0$ auch die Gleichung bestehen:

$$\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot y'=0$$

[dieselbe wird nicht etwa dadurch erfüllt, dass einzeln $\frac{\partial F}{\partial z}=0$ und $\frac{\partial F}{\partial y}=0$ ist; denn da H_1 als einfacher Discriminantenfactor vorausgesetzt ist, so muss $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$* sein]. Bezeichnet man daher die Eliminationsresultante von y' aus $\frac{\partial F}{\partial y'}=0$ und $\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot y'=0$ $\left(\text{oder besser, da } F=y'^m+Py'^{m-1}+\cdots+Z \text{ vorausgesetzt werden kann, aus } \frac{\partial F}{\partial y'}=0 \text{ und } \frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot y'-\frac{\partial P}{\partial y}\cdot F=0\right)$ mit $\Delta(z, y)$, so muss $\Delta(z, y)=0$ sein für alle Werthepaare z, y, für welche $H_1(z, y)=0$ ist; d. h. es muss, wegen der Irreductibilität von H_1, $\Delta(z, y)$ durch $H_1(z, y)$ theilbar sein:

$$\Delta(z, y)=S_1(z, y)\cdot H_1(z, y).$$

Seien $H_2, H_3, \ldots$ weitere derartige irreductible Discriminantenfactoren, so folgt in derselben Weise, dass $\Delta(z, y)$ durch $H_2, H_3, \ldots$ theilbar sein muss; wird daher das Product $H_1 H_2 H_3 \cdots$ mit H bezeichnet, so muss identisch:

$$\Delta(z, y)=S(z, y)\cdot H(z, y)$$

sein, wo $S(z, y)$ eine ganze rationale Function von y ist, deren Coefficienten von z abhängen. Vergleicht man auf beiden Seiten die Coefficienten der gleich hohen Potenzen von y, so ergeben sich hieraus Bedingungsgleichungen zwischen den Coefficienten der Differentialgleichung $F=0$ und ihren ersten Ableitungen nach z, deren Anzahl gleich ist dem Grade von $H(z, y)$ in Bezug auf y. Man kann auch auf folgende Weise verfahren:** Bekanntlich ergiebt sich bei der Elimination von y' aus $F=0$ und $\frac{\partial F}{\partial y'}=0$ $\left(\text{oder besser aus dem äquivalenten Gleichungssystem } \frac{\partial F}{\partial y'}=0 \text{ und } mF-y'\frac{\partial F}{\partial y'}=0\right)$ die mehrfache Wurzel y' schliesslich aus einer linearen Gleichung:

$$Q(z, y)+R(z, y)\cdot y'=0,$$

* cfr. pag. 258.

** cfr. pag. 262.

22*

wo Q und R ganze rationale Functionen von y sind. Andererseits erhält man aus $H(z, y) = 0$ durch Differentiation:

$$\frac{\partial H(z, y)}{\partial z} + \frac{\partial H(z, y)}{\partial y} \cdot y' = 0.$$

Diese beiden Gleichungen müssen für alle Werthepaare z, y, für welche $H(z, y) = 0$ ist, bestehen; d. h. es muss

$$R(z, y)\frac{\partial H(z, y)}{\partial z} - Q(z, y)\frac{\partial H(z, y)}{\partial y} = T(z, y) \cdot H(z, y)$$

sein, wo T eine ganze rationale Function von y bedeutet, deren Coefficienten von z abhängen; hieraus ergeben sich wieder für die Coefficienten von $F = 0$ und ihre ersten Ableitungen nach z Bedingungsgleichungen, deren Anzahl gleich dem Grade von $H(z, y)$ in y ist.

Die beiden ersten im III. Abschnitte aufgestellten hierher gehörigen Sätze,* dass jeder nicht quadratische Factor der Discriminante, gleich Null gesetzt, ein Integral der Differentialgleichung ergeben muss und dass jede einfache Wurzel der Discriminantengleichung nur einen einfachen Verzweigungspunkt liefert, gelten, wie die dortige Argumentation zeigt, allgemein für Fuchs'sche Differentialgleichungen m^{ten} Grades.

Man kann ferner mit Hilfe der Puiseux'schen graphischen Methode zeigen, dass infolge von Bedingung III ein α-facher Verzweigungspunkt (für den also eine Verzweigung in $\alpha + 1$ Blättern stattfindet) mindestens α-fache Wurzel der Discriminantengleichung sein muss, und daraus einen Schluss ziehen auf die Maximalzahl des Geschlechtes einer allgemeinen Fuchs'schen Differentialgleichung. Die Discriminante $D(z, y)$ ist als Eliminationsresultante von y' aus $F(z, y, y') = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$ höchstens vom $2m(m-1)^{\text{ten}}$ Grade in y; es ist daher die Gesammtzahl der einfachen Verzweigungen:

$$w \leqq 2m(m-1).$$

Daraus folgt mit Berücksichtigung der Riemann'schen Relation

$$w = 2m + 2(p-1),$$

dass das Geschlecht der durch $F(z, y, y') = 0$ definirten algebraischen Function y' von y

$$p \leqq m(m-2) + 1 \text{ oder } < (m-1)^2$$

ist.

2. Die Untersuchungen der früheren Abschnitte zeigen, dass die Gestalt des zweiten Differentialquotienten für die Integration der Fuchs'schen Differentialgleichungen von fundamentaler Bedeutung ist; insbesondere zeigt die Anwendung des Fuchs'schen Theorems,** dass die Form des zweiten Differentialquotienten über die algebraische Natur der Integrale allein ent-

---

* cfr. pag. 258 u. 259.

** l. c. cfr. pag. 269 flg.

scheidet. — Um ein allgemeineres Beispiel hierfür zu bringen, wollen wir folgenden Satz beweisen:

Wenn eine Differentialgleichung

A) $$F(z, y, y') = 0,$$

wo F eine ganze rationale Function von z, y und y' ist, die Eigenschaft besitzt, dass:

B) $$\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot y' = \lambda y' \cdot \frac{\partial F}{\partial y'} \text{*}$$

ist, so sind ihre Integrale algebraisch. Es sei:

$$F = A_0 y'^m + A_1 y'^{m-1} + \cdots + A_k y'^{m-k} + \cdots + A_{m-1} y' + A_m$$

und

$$A_k = a_{k_0} + a_{k_1} y + \cdots + a_{k_{l_k}} y^{l_k};$$

dann folgt aus B) durch Vergleichung der Coefficienten von y'^{m-k}:

C) $$\frac{\partial A_k}{\partial z} + \frac{\partial A_{k+1}}{\partial y} = (m-k) \lambda A_k.$$

Daraus ergiebt sich zunächst:

1) $\frac{\partial A_m}{\partial z} = 0$, d. h. A_m von z unabhängig;

2) $\frac{\partial A_0}{\partial y} = 0$, d. h. A_0 von y unabhängig;

3) A_k höchstens vom k^{ten} Grade in y (also $l_k \leq k$), da A_{k+1} höchstens um einen Grad höher als A_k und A_0 vom nullten Grade in y ist.

Ferner folgt aus C) das System von Bedingungsgleichungen:

4) $$\lambda = \frac{1}{m-k} \frac{a'_{k_l} + (l+1) a_{k+1_{l+1}}}{a_{k_l}} \quad \begin{pmatrix} l = 0, 1, \ldots, k \\ k = 0, 1, 2, \ldots, m-1 \end{pmatrix}.$$

Um zu zeigen, dass das allgemeine Integral der Differentialgleichung A) algebraisch ist, setze ich die Gleichung an:

D) $$\Gamma = \varphi_0 + \varphi_1 \cdot \Delta.\text{**}$$

Γ ist willkürliche Constante und Δ durch $F(z, y, \Delta) = 0$ definirt. Durch Differentiation von D) erhält man unter Berücksichtigung der Gleichung B):

$$0 = \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} + \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right) \cdot \Delta + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \cdot \Delta^2 - \varphi_1 \lambda \cdot \Delta.$$

Es muss also sein:

5) $\frac{\partial \varphi_0}{\partial z} = 0$, d. h. φ_0 nur von y abhängig: $\varphi_0 = \varphi(y)$;

6) $\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 0$, d. h. φ_1 nur von z abhängig: $\varphi_1 = \psi(z)$;

7) $$\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \lambda \varphi_1 = 0.$$

---

* Es ist leicht einzusehen, dass diese Differentialgleichungen zur Classe der Fuchs'schen gehören.

** cfr. pag. 270.

Aus Gleichung 7) folgt unter Beachtung der Gleichungen 5) und 6), dass

$$\varphi_0 = ay + b$$

sein muss, wo a und b Constanten sind. Dann wird Gleichung 7):

7*) $$\psi'(z) - \lambda\,\psi(z) + a = 0.$$

Das Gleichungssystem 4) ergiebt aber für $k = m - 1$:

$$\lambda = \frac{a'_{m-1_l} + (l+1)\,a_{m_{l+1}}}{a_{m-1_l}} \qquad (l = 0, 1, \ldots, m-1)$$

oder:

$$a'_{m-1_l} - \lambda\,a_{m-1_l} + (l+1)a_{m_{l+1}} = 0,$$

und die $a_{m_{l+1}}$ sind infolge von 1) von z unabhängig, constant. Setzt man daher in 7*):

$$a = (l+1)\,a_{m_{l+1}},$$

so wird diese Differentialgleichung für $\psi(z)$ durch $\psi(z) = a_{m-1_l}$ befriedigt; a_{m-1_l} ist nach Voraussetzung eine rationale Function von z, daher ist das allgemeine Integral von A) algebraisch; dasselbe lautet, wenn b in die willkürliche Constante Γ hineingezogen wird:

D) $$\Gamma = (l+1)\,a_{m_{l+1}}\,y + a_{m-1_l}\,\Delta,$$

wo Δ durch $F(z, y, \Delta) = 0$ als algebraische Function von z und y definirt ist. — Ein Beispiel hierzu bieten die Fuchs'schen Differentialgleichungen von der Form:

E) $$\Phi = ay'^m + byy'^{m-1} + \cdots + ry^{m-1}y' + sy^m + t = 0,$$

wo a, b, ..., r, s, t rationale Functionen von z sind, von denen s und t ein von z unabhängiges Verhältniss haben oder, wenn man sich Gleichung E) bereits durch eine geeignete rationale Function von z dividirt denkt, selber von z unabhängig sind.

Setzt man ferner voraus, dass in der homogenen Function m^{ter} Dimension F von y und y':

F) $$\begin{aligned} F &= ay'^m + byy'^{m-1} + \cdots + ry^{m-1}y' + sy^m \\ &= a\,(y' - \lambda_1 y)(y' - \lambda_2 y)\cdots(y' - \lambda_m y) \end{aligned}$$

die λ_i alle von einander verschieden sind, so haben $\frac{\partial \Phi}{\partial y'} = \frac{\partial F}{\partial y'}$ und $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y}$ keinen gemeinsamen Factor $y' - \mu y$; denn derselbe müsste infolge der Euler'schen Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial y'}y' + \frac{\partial F}{\partial y}y = mF$$

auch in F enthalten und daher Doppelfactor von F sein, was der Voraussetzung, dass die λ_i von einander verschieden sind, widerspricht. Da ausserdem $\Phi = 0$ durch $y' = 0$, $y = 0$ nicht befriedigt wird, so wird die Discriminante der Gleichung E) im Allgemeinen nur einfache Factoren enthalten und vom $m(m-1)^{\text{ten}}$ Grade in y sein. Das Geschlecht der durch $\Phi = 0$ definirten algebraischen Function y' von y ist daher, wie die des Oeftern erwähnte Riemann'sche Relation lehrt, mindestens gleich $\frac{m(m-3)}{2}+1$ $=\frac{(m-1)(m-2)}{2}$, und es ist factisch $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$, da das Maximalgeschlecht einer Curve m^{ter} Ordnung $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ ist; daraus folgt dann, dass jede der $m(m-1)$ einfachen Wurzeln der Discriminantengleichung nur einen einfachen Verzweigungspunkt liefert. Geometrisch gesprochen: Die Curve $\Phi=0$ hat das Geschlecht $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$, weil keine Doppelpunkte vorhanden sind; im Endlichen liegen keine, da $\frac{\partial \Phi}{\partial y}=0$ und $\frac{\partial \Phi}{\partial y'}=0$ gleichzeitig nur durch $y=0$, $y'=0$ befriedigt werden, wodurch $\Phi=0$ nicht befriedigt wird, und im Unendlichen keine, denn die m Punkte, in denen die unendlich ferne Gerade die Curve $\Phi=0$ schneidet, sind die unendlich fernen Punkte der m Geraden:

$$y'-\lambda_1 y=0, \quad y'-\lambda_2 y=0, \quad \ldots, \quad y'-\lambda_m y=0;$$

diese sind keine Doppelpunkte, weil ihre Coordinaten weder $\frac{\partial \Phi}{\partial y'}=0$, noch $\frac{\partial \Phi}{\partial y}=0$ befriedigen, auch deshalb, weil die unendlich ferne Gerade eine Curve m^{ter} Ordnung nur in m einfachen Punkten schneiden kann. — Es sollen nun in der Differentialgleichung E) die Coefficienten so bestimmt werden, dass ihre Integrale feste Verzweigungspunkte besitzen; dieselbe muss dann, wenn $m>3$, also $p>1$ ist, nach Poincaré algebraisch integrirbar sein. Von den Bedingungen des Herrn Fuchs ist zunächst die erste erfüllt; da ferner die Discriminantengleichung nur einfache Wurzeln besitzt, deren jede nur einen einfachen Verzweigungspunkt liefert, so ist auch der zweite Theil von Bedingung II und die Bedingung III von selber erfüllt. Es bleibt noch die Bedingung, dass die Wurzeln der Discriminantengleichung Integrale der Differentialgleichung E) sein müssen. Nach den im ersten Theile dieses Abschnittes gemachten Auseinandersetzungen muss das Eliminationsresultat von y' aus $\frac{\partial \Phi}{\partial z}+\frac{\partial \Phi}{\partial y}\cdot y'=0$ und $\frac{\partial \Phi}{\partial y'}=0$ theilbar sein durch die Discriminante, d. h. durch die Eliminationsresultante von y' aus $\Phi=0$ und $\frac{\partial \Phi}{\partial y'}=0$. Es ist aber:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z}+\frac{\partial \Phi}{\partial y}y'=y'\left[(a'+b)y'^{m-1}+(b'+2c)yy'^{m-2}+\cdots+(r'+ms)y^{m-1}\right].$$

Die Werthe $y=0$, $y'=0$ können von vornherein unberücksichtigt bleiben, da $\Phi=0$ durch dieselben nicht befriedigt wird. Dann enthält das Eliminationsresultat von $\frac{y'}{y}$ aus $\frac{\partial \Phi}{\partial y'}=0$ und $\frac{1}{y'}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial z}+\frac{\partial \Phi}{\partial y}\cdot y'\right]=0$, da in beiden Gleichungen auf der linken Seite eine homogene Function $(m-1)^{\text{ter}}$ Dimension in y und y' steht, nur z allein; und da dasselbe durch die Discriminante, die y und z enthält, theilbar sein soll, so muss es identisch verschwinden, d. h. $\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot y'$ muss mit $\frac{\partial \Phi}{\partial y'}$ einen gemeinsamen Theiler besitzen, oder wenn, wie wir voraussetzen und es im Allgemeinen der Fall sein wird, $\frac{\partial \Phi}{\partial y'}$ in dem Rationalitätsbereiche von Φ irreductibel ist, muss $\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot y'$ durch $\frac{\partial \Phi}{\partial y'}$ theilbar sein:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot y' = \lambda y' \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y'}.$$

Die Differentialgleichung E) gehört also zur Classe der durch B) charakterisirten Differentialgleichungen A) und hat somit stets algebraische Integrale. Ihr allgemeines Integral kann nach D) in die Form gebracht werden:

$$\Gamma = msy + r\Delta,$$

wo Γ willkürliche Constante und Δ durch $\Phi(z, y, \Delta) = 0$ definirt ist.

3. Wir haben in den früheren Abschnitten eine Reihe von Differentialgleichungen erster Ordnung behandelt, deren durch Differentiation sich ergebender zweiter Differentialquotient eine lineare Function von y und y' ist.* Die Bedingungsgleichungen dafür werden aus denen der Anmerkung S. 268 flg. erhalten, wenn dort:

$$l_2 = l_3 = l_5 = 0$$

gesetzt wird. — Es möge die Differentialgleichung

G) $$F(z, y, y') = 0$$

diese Eigenschaft besitzen, d. h. es möge

$$\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot y' = K \cdot F + (\lambda y' + \mu y + r) \cdot \frac{\partial F}{\partial y'}$$

sein, so dass für die Integrale der Differentialgleichung $F = 0$:

$$\frac{dy'}{dz} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot y'}{\frac{\partial F}{\partial y'}} = -(\lambda y' + \mu y + \nu)$$

oder:

H) $$y'' + \lambda y' + \mu y + \nu = 0$$

ist. Wenn man von singulären Lösungen, für welche zugleich $F = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$ ist, zunächst absieht, so wird das allgemeine Integral der Differentialgleichung G) in dem von H) enthalten sein und aus diesem dadurch hervorgehen, dass zwischen dessen beiden willkürlichen Constanten eine bestimmte Relation mit constanten Coefficienten besteht, welche sich, wie wir gesehen, ergiebt, indem man aus dem allgemeinen Integral von H), welches bekanntlich die Form hat:

---

* Anmerkung. Dieselben gehören, wie man leicht einsieht, zur Classe der Fuchs'schen Differentialgleichungen.

8) $$y = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \psi,$$
und dessen Ableitung:
9) $$y' = c_1\varphi'_1 + c_2\varphi'_2 + \psi'$$
die Werthe für y und y' in G) einträgt. [φ_1, φ_2 und ψ sind Functionen von z, und zwar bilden φ_1 und φ_2 ein Fundamentalsystem von Integralen der reducirten Differentialgleichung $y'' + \lambda y' + \mu y = 0$, während ψ ein Partikularintegral der Differentialgleichung H) ist.] — Diese Integrationsmethode nun setzt uns zugleich in den Stand, die Differentialgleichung G) derart zu zerlegen, dass sie durch eine birationale Transformation — die hier bilinear ist — in sich selbst transformirt wird, so dass die von Poincaré* angegebene Integrationsmethode zur Anwendung gelangen kann. Man findet nämlich aus den Gleichungen 8) und 9):

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} y-\psi, & \varphi_2 \\ y'-\psi', & \varphi'_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_1, & \varphi_2 \\ \varphi'_1, & \varphi'_2 \end{vmatrix}} \quad \text{und} \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} \varphi_1, & y-\psi \\ \varphi'_1, & y'-\psi' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_1, & \varphi_2 \\ \varphi'_1, & \varphi'_2 \end{vmatrix}}.$$

Die Determinante $\begin{vmatrix} \varphi_1, & \varphi_2 \\ \varphi'_1, & \varphi'_2 \end{vmatrix}$ ist von 0 verschieden, da φ_1 und φ_2 ein Fundamentalsystem von Integralen bilden; man kann daher schreiben:

$$c_1 = Ay + By' + K, \quad c_2 = Dy + Ey' + L,$$

wo A, B, D, E, K und L Functionen von z sind.

Die zwischen c_1 und c_2 bestehende Relation sei

$$f(c_1, c_2) = 0,$$

wo f eine ganze rationale Function ihrer Argumente bedeutet. Dann hat also die Differentialgleichung G) die Gestalt:

$$F(z, y, y') = f(Ay + By' + K,\ Dy + Ey' + L) = 0.$$

Die durch $f = 0$ dargestellte Riemann'sche Fläche wird durch

$$\begin{aligned} A(z_1)\,y_1 + B(z_1)\,y'_1 + K(z_1) &= A(z_2)\,y_2 + B(z_2)\,y'_2 + K(z_2), \\ D(z_1)\,y_1 + E(z_1)\,y'_1 + L(z_1) &= D(z_2)\,y_2 + E(z_2)\,y'_2 + L(z_2) \end{aligned}$$

in sich selbst transformirt, so dass die oben erwähnte Poincaré'sche Integrationsmethode hier keine Schwierigkeiten darbietet.** In den Differentialgleichungen D*) und D**) des vorigen Abschnittes z. B. sind die der Differentialgleichung zweiter Ordnung II) entsprechenden Differentialgleichungen 2*) und 2**) linear homogen, also $\nu = 0$, $\psi = 0$, $K = 0$, $L = 0$. — In D*) resp. 2*) war:

$$y = c_1\mu^{-\frac{1}{3}} + c_2\mu^{\frac{2}{3}}, \quad y' = -\tfrac{1}{3}c_1\mu^{-\frac{4}{3}}\mu' + \tfrac{2}{3}c_2\mu^{-\frac{1}{3}}\mu'.$$

* siehe Einleitung pag. 196.

** Anmerkung. Die allgemeinsten Differentialgleichungen, welche durch eine bilineare Transformation in sich selbst übergeführt werden können, haben die Gestalt:

$$f\left(\frac{a_1 y + b_1 y' + c_1}{d_1 y + e_1 y' + f_1},\ \frac{a_2 y + b_2 y' + c_2}{d_2 y + e_2 y' + f_2}\right) = 0,$$

wo die a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i Functionen von z bedeuten.

Daraus erhält man:

$$c_1 = \frac{2}{3}\mu^{1/3}y - \frac{\mu^{4/3}}{\mu'}y' \text{ und } c_2 = \frac{1}{3}\mu^{-2/3}y + \frac{\mu^{1/3}}{\mu'}y'.$$

Zwischen c_1 und c_2 besteht die Relation:

$$c_1 c_2^2 + \tfrac{2}{27} = 0.$$

Die Differentialgleichung D*) lässt sich daher, zerlegt, in folgender Gestalt schreiben:

$$10) \qquad \left(\frac{2}{3}\mu^{1/3}y - \frac{\mu^{4/3}}{\mu'}y'\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\mu^{-2/3}y + \frac{\mu^{1/3}}{\mu'}y'\right)^2 + \frac{2}{27} = 0.$$

Denkt man sich die Differentialgleichung von vornherein in dieser Gestalt gegeben, so kann die Poincaré'sche Integrationsmethode angewendet werden. Die Differentialgleichung 10) wird durch die Transformation $[\mu(z_1) = \mu_1,\ \mu(z_2) = \mu_2]$:

$$\frac{2}{3}\mu_1^{1/3}y_1 - \frac{\mu_1^{4/3}}{\mu'_1}y'_1 = \frac{2}{3}\mu_2^{1/3}y_2 - \frac{\mu_2^{4/3}}{\mu'_2}y'_2,$$

$$\frac{1}{3}\mu_1^{-2/3}y_1 + \frac{\mu_1^{1/3}}{\mu'_1}y'_1 = \frac{1}{3}\mu_2^{-2/3}y_2 + \frac{\mu_2^{1/3}}{\mu'_2}y'_2$$

in sich selbst transformirt. Aus diesen beiden Gleichungen erhält man:

$$\mu_1^{1/3}y_1 = \left(\frac{1}{3}\mu_2^{-2/3}y_2 + \frac{\mu_2^{1/3}}{\mu'_2}y'_2\right)\mu_1 + \frac{2}{3}\mu_2^{1/3}y_2 - \frac{\mu_2^{4/3}}{\mu'_2}y'_2$$

oder, wenn z_2, y_2, y'_2 als constant aufgefasst und der Index 1 unterdrückt wird:

$$y = M\mu^{2/3} + N\mu^{-1/3},$$

wo $M = \frac{1}{3}\mu_2^{-2/3}y_2 + \frac{\mu_2^{1/3}}{\mu'_2}y'_2$ und $N = \frac{2}{3}\mu_2^{1/3}y_2 - \frac{\mu_2^{4/3}}{\mu'_2}y'_2$ Constanten sind; zwischen M und N besteht infolge von 10) die Relation:

$$M^2 N + \tfrac{2}{27} = 0.$$

Ebenso erhält man für die Differentialgleichung D**) aus dem allgemeinen Integral der linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung 2**):

$$y = \frac{c_1}{\sqrt[3]{2}}\left(\frac{\mu+1}{\mu}\right)^{1/3} + \frac{c_2}{\sqrt[3]{2}}\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right)^{1/3}$$

und seiner Ableitung:

$$y' = -\frac{1}{3}\frac{c_1}{\sqrt[3]{2}}\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{-2/3}\frac{\mu'}{\mu^2} + \frac{1}{3}\frac{c_2}{\sqrt[3]{2}}\left(1-\frac{1}{\mu}\right)^{-2/3}\frac{\mu'}{\mu^2}$$

für c_1 und c_2 folgende Ausdrücke:

$$c_1 = \frac{\frac{\sqrt[3]{2}}{3}\left(1-\frac{1}{\mu}\right)^{-2/3}\frac{\mu'}{\mu^2}\cdot y - \sqrt[3]{2}\left(1-\frac{1}{\mu}\right)^{1/3}\cdot y'}{\frac{2}{3}\mu^{-2/3}(\mu^2-1)^{-2/3}\mu'},$$

$$c_2 = \frac{\frac{\sqrt[3]{2}}{3}\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{-\frac{2}{3}}\frac{\mu'}{\mu^2}\cdot y + \sqrt[3]{2}\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot y'}{\frac{2}{3}\mu^{-\frac{2}{3}}(\mu^2-1)^{-\frac{2}{3}}\mu'};$$

zwischen c_1 und c_2 besteht die Relation:

$$c_2^3 - c_1^3 - k = 0.$$

Der Differentialgleichung D**) kann man daher folgende Gestalt geben:

11) $$(Dy+Ey')^3 - (Ay+By')^3 - k = 0,$$

wenn zur Abkürzung

$$A = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}\mu^{-\frac{2}{3}}(\mu+1)^{\frac{2}{3}}, \quad B = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}\frac{\mu^{\frac{1}{3}}}{\mu'}(\mu-1)(\mu+1)^{\frac{2}{3}},$$
$$D = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}\mu^{-\frac{2}{3}}(\mu-1)^{\frac{2}{3}}, \quad E = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2}\frac{\mu^{\frac{1}{3}}}{\mu'}(\mu+1)(\mu-1)^{\frac{2}{3}}$$

gesetzt wird. — Die Differentialgleichung 11) wird durch die bilineare Transformation:

$$A(z_1)y_1 + B(z_1)y'_1 = A(z_2)y_2 + B(z_2)y'_2,$$
$$D(z_1)y_1 + E(z_1)y'_1 = D(z_2)y_2 + E(z_2)y'_2$$

in sich selbst transformirt. Aus diesen beiden Gleichungen erhält man:

$$y_1 = \frac{[A(z_2)E(z_1) - D(z_2)B(z_1)]y_2 + [B(z_2)E(z_1) - E(z_2)B(z_1)]y'_2}{A(z_1)E(z_1) - B(z_1)D(z_1)}$$

oder, wenn wieder z_2, y_2, y'_2 als constant aufgefasst und der Index 1 unterdrückt wird:

$$y = M\frac{E(z)}{A(z)E(z) - B(z)D(z)} - N\frac{B(z)}{A(z)E(z) - B(z)D(z)},$$

wo

$$M = A(z_2)y_2 + B(z_2)y'_2 \quad \text{und} \quad N = D(z_2)y_2 + E(z_2)y'_2$$

Constanten sind. Es ist aber:

$$\frac{E(z)}{A(z)E(z) - B(z)D(z)} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\frac{1}{3}}$$

und

$$\frac{-B(z)}{A(z)E(z) - B(z)D(z)} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(1-\frac{1}{\mu}\right)^{\frac{1}{3}},$$

also:

$$y = M\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\frac{1}{3}} + N\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(1-\frac{1}{\mu}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Zwischen M und N besteht infolge von 11) die Relation:

$$N^3 - M^3 - k = 0.$$

VI. Beispiele.

1) $$y'^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0^*$$

(Lagrange).

Die entsprechende Curve ist vom Geschlecht $p=0$, da $y=0$, $y'=0$ ein Doppelpunkt. Wird

* cfr. Einleitung pag. 194.

$$y = \lambda y'$$

gesetzt, so erhält man

$$y' = 4\lambda(x - 2l), \quad y = 4\lambda^2(x - 2\lambda).$$

Durch Differentiation der zweiten und Comparation mit der ersten Gleichung ergiebt sich für λ die Differentialgleichung:

$$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{1}{2},$$

also:

$$\lambda = \frac{x - C}{2} \quad \text{und} \quad y = (x - C)^2 C.$$

2) $$F = x^3 y'^3 - y'^2(r^4 + 4x^2 y) + y'(4xy^2 - 2r^2 x) - x^2 = 0^*$$

(Dissertation von Karl Schmidt, Giessen 1884, pag. 29).

Die drei Gleichungen

$$F = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 3x^3 y'^2 - 2y'(r^4 + 4x^2 y) + 4xy^2 - 2r^2 x = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = y'(8xy - 4x^2 y') = 0$$

werden befriedigt durch

$$2y - xy' = 0, \quad y' = -\frac{x}{r^2},$$

also durch

$$y' = -\frac{x}{r^2}, \quad y = -\frac{x^2}{2r^2};$$

folglich ist $-\frac{x}{r^2}$, $-\frac{x^2}{2r^2}$ ein Doppelpunkt und die Differentialgleichung $F = 0$ vom Geschlecht 0. Setzt man

$$y' = -\frac{x}{r^2} + u, \quad y = -\frac{x^2}{2r^2} + v,$$

so wird die Differentialgleichung:

$$x^3 u^3 - 4x^2 u^2 v + 4xuv^2 - \left(r^4 + \frac{x^4}{r^2}\right)u^2 + \frac{4x^3}{r^2}uv - \frac{4x^2}{r^2}v^2 = 0.$$

Wird hierin $u = \lambda v$ gesetzt, so ergiebt sich:

$$v = \frac{\left(r^4 + \frac{x^4}{r^2}\right)\lambda^2 - \frac{4x^3}{r^2}\lambda + \frac{4x^2}{r^2}}{\lambda(x^3\lambda^2 - 4x^2\lambda + 4x)}, \quad u = \frac{\left(r^4 + \frac{x^4}{r^2}\right)\lambda^2 - \frac{4x^3}{r^2}\lambda + \frac{4x^2}{r^2}}{x^3\lambda^2 - 4x^2\lambda + 4x}.$$

Da

$$y' = -\frac{x}{r^2} + v' = -\frac{x}{r^2} + u,$$

so ist $v' = u$. Differenzirt man daher die erste Gleichung und vergleicht damit die zweite, so erhält man, indem man beachtet, dass die Differentialgleichung für λ die Form

$$\frac{d\lambda}{dx} = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2$$

haben muss, für λ die Differentialgleichung:

* cfr. Einleitung pag. 194.

$$\frac{d\lambda}{dx} = -\lambda^2 + \frac{\lambda}{x}$$

oder, wenn $\frac{1}{\lambda} = w$ gesetzt wird, für w die Differentialgleichung:

$$\frac{dw}{dx} + \frac{w}{x} - 1 = 0,$$

also:

$$w = \overline{C} \cdot e^{-\int \frac{dx}{x}} + e^{-\int \frac{dx}{x}} \int e^{\int \frac{dx}{x}} dx$$
$$= \overline{C} \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \frac{x^2}{2}$$

oder, wenn $\overline{C} = \frac{C}{2}$ gesetzt wird:

$$w = \frac{C + x^2}{2x} \text{ und } \lambda = \frac{1}{w} = \frac{2x}{C + x^2}.$$

Dann wird:

$$y = v - \frac{x^2}{2r^2} = \frac{r^6 x^2 + r^6 C + C^3}{2 r^2 C^2}$$

oder, wenn man

$$C = \frac{C}{r^2}$$

als willkürliche Constante wählt:

$$y = \frac{x^2 + r^2 C + C^3}{2 C^2}.$$

Die Discriminante der Differentialgleichung 2) lautet, in ihre Factoren zerlegt:

$$D = x^2 (2 r^2 y + x^2)^2 (4 r^6 + 27 x^4 + 36 r^2 x^2 y - 4 r^4 y^2 - 32 x^2 y^3).$$

Der einfache wesentliche Theiler der Discriminante liefert das singuläre Integral; $x = 0$ und $2 r^2 y + x^2 = 0$ sind hier ebenfalls Integrale und zwar partikuläre. — Das Integral der Differentialgleichung 2) lässt sich leicht in der von Herrn Fuchs angegebenen Form* darstellen; es ist nämlich einerseits:

$$y' = \frac{x}{C^2},$$

andererseits:

$$\frac{1}{C^2} = \frac{2y - C}{x^2 + r^2 C},$$

also:

$$y' = \frac{2xy - xC}{x^2 + r^2 C}$$

und daher:

$$C = \frac{2xy - x^2 y'}{x + r^2 y'}.$$

So ist die Integrationsconstante C als linear gebrochene Function der durch $F = 0$ als algebraische Function von x und y definirten Grösse y' dargestellt;** mit anderen Worten: man geht von y' zu C durch die Sub-

* cfr. pag. 270.

** cfr. pag. 270, 10).

stitution $\begin{pmatrix} 2xy, & -x^2 \\ x, & r^2 \end{pmatrix}$ über. Die Discriminante D der Differentialgleichung $F=0$ kann sich daher von derjenigen der Integralgleichung:

$$C^3 - 2y\,C^2 + r^2\,C + x^2 = 0$$

nur durch das Quadrat der Substitutionsdeterminante unterscheiden. Das ist in der That der Fall; denn D unterscheidet sich von der Discriminante der Integralgleichung:

$$4r^6 + 27x^4 + 36r^2x^2y - 4r^4y^2 - 32x^2y^3$$

um den Factor:

$$\begin{vmatrix} 2xy, & -x^2 \\ x, & r^2 \end{vmatrix}^2 = x^2(2r^2y + r^2)^2.$$

Die Differentialgleichung 2) kann auch als Beispiel zu den Differentialgleichungen A) resp. G) des V. Abschnittes behandelt werden, wodurch erst ihre wahre Natur zum Vorschein kommt. Es ist nämlich, wenn

$$F = xy'^3 - y'^2\left(\frac{r^4}{x^2} + 4y\right) + y'\left(\frac{4y^2}{x} - \frac{2r^2}{x}\right) - 1$$

gesetzt wird:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot y' = -3y'^3 + \frac{2r^4}{x^3}y'^2 + \frac{8y}{x}y'^2 - \frac{4}{x^2}y^2y' + \frac{2r^2}{x^2}y'$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 3xy'^2 - 2y'\left(\frac{r^4}{x^2} + 4y\right) + \frac{4y^2}{x} - \frac{2r^2}{x},$$

also:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot y' = -\frac{1}{x}y'\cdot\frac{\partial F}{\partial y'}.$$

Daher ist:

$$y'' = \frac{1}{x}y', \quad y' = 2c_1x, \quad y = c_1x^2 + c_2.$$

Zwischen c_1 und c_2 ergiebt sich durch Einsetzen der Werthe für y und y' in $F=0$ die Relation:

$$8c_1c_2^2 = (1 + 2r^2c_1)^2.$$

Setzt man $c_1 = \frac{1}{2C^2}$, so lautet die Relation:

$$\frac{4c_2^2}{C^2} = \left(1 + r^2\frac{1}{C^2}\right)^2$$

oder:

$$\frac{2c_2}{C} = \pm\left(1 + \frac{r^2}{C^2}\right);$$

da C als willkürliche Constante alle positiven und negativen Werthe annimmt, so genügt es, wenn man

$$c_2 = +\frac{C}{2}\left(1 + \frac{r^2}{C^2}\right)$$

wählt. Das Integral lautet dann in Uebereinstimmung mit dem vorher gefundenen:

$$y = \frac{1}{2C^2}x^2 + \frac{C}{2}\left(1 + \frac{r^2}{C^2}\right) = \frac{x^2 + r^2C + C^3}{2C^2}.$$

Aus $y' = 2c_1 x$ erhält man noch, wenn $2c_1 = \Gamma$ gesetzt wird:

$$\Gamma = \frac{1}{x} y'.$$

Betrachtet man y' als algebraische Function von x und y, definirt durch $F = 0$, so ist dies eine zweite Darstellung des Integrals in der von Herrn Fuchs angegebenen Form. Wir hatten vorhin:

$$C = \frac{2xy - x^2 y'}{x + r^2 y'},$$

und da $\Gamma = \frac{1}{C^2}$ ist, so kann die Differentialgleichung 2) auf folgende Form gebracht werden:

$$\frac{(x + r^2 y')^2}{(2xy - x^2 y')^2} = \frac{y'}{x}.$$

Man findet dies auch,* indem man aus

$$y' = 2c_1 x \quad \text{und} \quad y = c_1 x^2 + c_2$$

c_1 und c_2 berechnet:

$$2c_1 = \frac{y'}{x}, \quad c_2 = y - \frac{x}{2} y'$$

und diese Werthe für c_1 und c_2 in die zwischen c_1 und c_2 bestehende Relation einträgt; man erhält so:

$$\frac{4y'}{x}\left(y - \frac{x}{2} y'\right)^2 = \left(1 + r^2 \frac{y'}{x}\right)^2.$$

Die so zerlegte Differentialgleichung wird — um auch Poincaré's Integrationsmethode anzuwenden — durch die bilineare Transformation:

$$\frac{y'_1}{x_1} = \frac{y'_2}{x_2}, \quad y_1 - \frac{x_1}{2} y'_1 = y_2 - \frac{x_2}{2} y'_2$$

in sich selbst transformirt; aus diesen beiden Gleichungen erhält man:

$$y_1 = \frac{x_1^2}{2} \frac{y'_2}{x_2} + y_2 - \frac{x_2}{2} y'_2$$

oder, wenn x_2, y_2, y'_2 als constant aufgefasst und der Index 1 unterdrückt wird:

$$y = \Gamma_1 x^2 + \Gamma_2,$$

wo $\Gamma_1 = \frac{1}{2} \frac{y'_2}{x_2}$ und $\Gamma_2 = y_2 - \frac{x_2}{2} y'_2$ Constanten sind, zwischen denen infolge der Differentialgleichung die Relation besteht:

$$8\Gamma_1 \Gamma_2^2 = (1 + 2r^2 \Gamma_1)^2.$$

$$3) \qquad y'^3 - \frac{4}{x} y y'^2 + \frac{4}{x^2} y^2 y' - \frac{1}{x} = 0.$$

Diese Differentialgleichung soll zunächst in eine andere transformirt werden, in welcher das Glied mit der zweiten Potenz der Ableitung fehlt.** Es ist hier:

$$P = \frac{4}{3x} y, \quad \text{also} \quad a_0 = 0, \quad a_1 = \frac{4}{3x}, \quad a_2 = 0.$$

* cfr. Abschn. V, 3, pag. 345.

** cfr. Abschn. I, pag. 202 flg.

Die Riccati'sche Differentialgleichung

$$\frac{dv}{dz} = a_0 + a_1 v + a_2 v^2$$

hat das Integral $v = Cx^{4/3}$; ich wähle daher in $y = \frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta}$

$$\alpha = x^{4/3}, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 1.$$

$\alpha\delta - \beta\gamma$ ist hier allerdings nicht gleich 1, sondern gleich $x^{4/3}$; diese Wahl der Grössen α, β, γ, δ ist hier eben für die Rechnung bequemer.

Durch $y = x^{4/3} u$, $y' = x^{1/3}(\frac{4}{3} u + x u')$ wird die Differentialgleichung 3) in die folgende transformirt:

$$u'^3 - 3\left(\frac{2u}{3x}\right)^2 u' - 2\left(\frac{1}{2x^5} - \left(\frac{2u}{3x}\right)^3\right) = 0,$$

$$Q = \left(\frac{2u}{3x}\right)^2, \quad R = \frac{1}{2x^5} - \left(\frac{2u}{3x}\right)^3;$$

$$\Delta = R^2 - Q^3 = -\frac{1}{4 \cdot 27\, x^{10}}\,[32 x^2 u^3 - 27].$$

Diese Differentialgleichung ist ein Beispiel zu den Differentialgleichungen D*) (S. 331) des IV. Abschnittes, und zwar ist $\mu = -\frac{27}{16}\frac{1}{x^2}$ zu setzen. Ihr allgemeines Integral lautet daher bei passender Wahl der willkürlichen Constanten:

$$u = C_1 x^{2/3} + C_2 x^{-4/3},$$

wo C_1 und C_2 durch die Relation

$$8 C_1 C_2^2 - 1 = 0$$

unter einander verbunden sind. Folglich lautet das allgemeine Integral $y = x^{4/3} u$ der Differentialgleichung 3), wenn noch $2C_2 = C$ gesetzt wird:

$$y = \frac{x^2 + C^3}{2C^2} \quad \text{oder} \quad C^3 - 2yC^2 + x^2 = 0.$$

4) $$(4zy' - y)^4 - z^3 y'^4 + b = 0,$$

wo b eine beliebige Constante bedeutet. Diese Differentialgleichung bildet ein Beispiel zu den Differentialgleichungen E) des V. Abschnittes (Theil 2, S. 342); sie genügt den Fuchs'schen Bedingungen; ihr Geschlecht ist gleich 3, sie muss daher algebraisch integrirbar sein. Ihr allgemeines Integral lautet in der Fuchs'schen Form:

$$\Gamma = y - 4z \cdot \Delta,^*$$

wo Δ durch $(4z\Delta - y)^4 - z^3 \Delta^4 + b = 0$ als algebraische Function von z und y definirt ist.

Auch hier lässt sich Poincaré's Integrationsmethode mit Erfolg anwenden, indem die Differentialgleichung 4) durch

* cfr. pag. 270.

$$4 z_0 y'_0 - y_0 = 4 z_1 y'_1 - y_1,$$
$$z_0^3 y'^4_0 = z_1^3 y'^4_1 \quad (z_0^{3/4} y'_0 = z_1^{3/4} y'_1)$$

in sich selbst transformirt wird. Als Integral ergiebt sich daraus:

$$y = y_0 + 4 z_0 y'_0 (z_0^{-1/4} z^{1/4} - 1).$$

y_0 und y'_0 sind durch die Gleichung

$$(4 z_0 y'_0 - y_0)^4 - z_0^3 y'^4_0 + b = 0$$

verbunden; aus dieser erhält man:

$$y_0 = 4 z_0 y'_0 + \sqrt[4]{z_0^3 y'^4_0 - b}$$

und daher:

$$y = \sqrt[4]{z_0^3 y'^4_0 - b} + 4 z_0^{3/4} y'_0 z^{1/4}.$$

Setzt man $z_0^3 y'^4_0 - b = C^4$, so lautet das allgemeine Integral der Differentialgleichung 4):

$$y = C + 4 \sqrt[4]{z(b + C^4)}.$$

Diese Form des Integrals zeigt, dass seine Verzweigungsstellen fest sind, nämlich $z = 0$ und $z = \infty$.

XIX.

Ueber die durch ein lineares Flächensystem n^{ter} Ordnung definirten mehrdeutigen involutorischen Raumverwandtschaften.

Von

CHAS. STEINMETZ

in New-York City.

(Schluss.)

Zehntes Capitel.

Degeneration der Verwandtschaft bei Existenz von Hauptebenen und Hauptflächen.

§ 37. Ordnung der Verwandtschaft.

93. Unter den Flächen des Flächengebüsches n^{ter} Ordnung giebt es bei Existenz einer Hauptebene oder Hauptfläche m^{ter} Ordnung erster Art, d. h. einer Fläche, die mit allen Flächen des Gebüsches dieselbe Schnittcurve mn^{ter} Ordnung besitzt, ein Flächennetz $(n-m)^{\text{ter}}$ Ordnung, von dessen Flächen sich die Hauptebene oder Hauptfläche m^{ter} Ordnung abspaltet, und dessen Flächen daher die in der Hauptfläche liegenden Grundpunkte und Curven in der um ihre Multiplicität für die Hauptfläche verminderten Multiplicität enthalten.

Um die dann in der Verwandtschaft einer beliebigen Geraden l entsprechende Curve C_l zu bestimmen, denken wir uns die Gerade l wieder, wie in § 2, 5, 6 und § 18, 49 erzeugt durch drei mehrdeutig projectivische Flächenbüschel A, B, Γ, deren weitere Schnittpunkte die Curve C_l erzeugen.

Als Büschel A, B nehmen wir zwei Büschel $(n-m)^{\text{ter}}$ Ordnung des speciellen Flächennetzes, als Γ ein beliebiges Büschel n^{ter} Ordnung.

Eine Fläche γ der letzteren schneidet l in n Punkten, deren jedem eine Fläche α und eine Fläche β angehört, welche sich in einer Curve $(n-m)^{2\text{ter}}$ Ordnung schneiden, von welcher sich alle nicht auf der Hauptfläche liegenden i-fachen Grund- oder Fundamentalcurven i^2-fach, die auf der Hauptfläche liegenden und für dieselbe λ_{i_1}-fachen, i_1-fachen Grund-oder Fundamentalcurven aber nur $(i_1-\lambda_{i_1})^2$-fach abspalten. Es spalten sich also im Ganzen ab Curven von der Summe der Ordnungen:

$$\sum\nolimits^{i} i^2+\sum\nolimits^{i_1}(i_1-\lambda_{i_1})^2=M-\sum\nolimits^{i_1}(2i_1-\lambda_{i_1})\lambda_{i_1}=M-H_1,$$

wenn wir setzen:

$$H_1=\sum\nolimits^{i_1}\lambda_{i_1}(2i_1-\lambda_{i_1}).$$

Die Schnittcurve der beiden Flächen α und β ist also von der Ordnung:

$$(n-m)^2-(M-H_1).$$

Berücksichtigt man nun, dass die n derartigen Curven $|\alpha\beta|\,\gamma$ in denselben Punkten schneiden, wie l und C_l, so ergiebt sich:

„Existirt in einem Flächengebüsche eine Hauptfläche m^{ter} Ordnung erster Art, so ist die durch das Flächengebüsch definirte involutorische Raumverwandtschaft von der $(n[n-m]^2-n[M-H_1]-1)^{ten}$ Ordnung. Es entspricht jeder Geraden l eine Curve C_l der Ordnung: $(n[n-m]^2-n[M-H_1]-1)$, jeder Ebene ε eine Fläche Φ_ε derselben Ordnung."

94. Besitzt dagegen das Flächengebüsch n^{ter} Ordnung nur eine Hauptebene oder Hauptfläche m^{ter} Ordnung zweiter Art, d. h. eine Fläche, die einen festen Grundpunkt weniger enthält, als zur Bestimmung ihrer Schnittcurve mn^{ter} Ordnung mit den Flächen n^{ter} Ordnung des Gebüsches nöthig ist, dann enthält das Flächengebüsch nur ein Flächenbüschel $(n-m)^{ter}$ Ordnung, von dessen Flächen sich die Hauptfläche abspaltet.

Nimmt man dies Büschel als Büschel A in 93, und als B und Γ zwei beliebige Büschel n^{ter} Ordnung, so ergiebt sich in derselben Weise, wie in 93, wenn man:

$$\sum\nolimits^{i_1} i_1\lambda_{i_1}=H_2$$

setzt:

„Existirt eine Hauptfläche m^{ter} Ordnung zweiter Art im Flächengebüsche n^{ter} Ordnung, so definirt dasselbe eine involutorische Raumverwandtschaft von der $(n^2[n-m]-n[M-H_2]-1)^{ten}$ Ordnung. Es entspricht jeder Geraden l eine Curve C_l der Ordnung $(n^2[n-m]-n[M-H_2]-1)$, jeder Ebene ε eine Fläche Φ_ε derselben Ordnung."

§ 38. Die Kernfläche.

95. Von der Kernfläche $4(n-1)^{ter}$ Ordnung H der Verwandtschaft spaltet sich jede Hauptebene oder Hauptfläche m^{ter} Ordnung erster Art doppelt ab. Also:

„Die Kernfläche H der durch ein Flächengebüsch n^{ter} Ordnung definirten involutorischen Raumverwandtschaft, welche eine Hauptfläche m^{ter} Ordnung erster Art enthält, ist von der Ordnung:

$$4(n-1)-2m."$$

96. Von der Kernfläche H der Verwandtschaft spaltet sich jede Hauptebene oder Hauptfläche m^{ter} Ordnung zweiter Art einfach ab. Also:

„Die Kernfläche H der durch ein Flächengebüsch n^{ter} Ordnung definirten involutorischen Raumverwandtschaft, welche eine Hauptfläche m^{ter} Ordnung zweiter Art enthält, ist von der Ordnung:

$$4(n-1)-m.\text{“}$$

Elftes Capitel.

Einige specielle eindeutige Verwandtschaften.

§ 39. Eine Verwandtschaft siebenter Ordnung: $n=2$.

97. Wie in § 30, 76 nachgewiesen, wird durch ein Quadriflächengebüsch mit sechs festen Grundpunkten eine eindeutige Raumverwandtschaft definirt.

Dieselbe ist von V. Eberhard in seiner Inaugural-Dissertation, Breslau 1885, näher untersucht worden, und genüge es daher hier, die wichtigsten Resultate daraus anzuführen:*

„Die Kernfläche der Verwandtschaft ist eine Fläche vierter Ordnung, welche die sechs Grundpunkte $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_6$ zu Doppelpunkten hat, und durch die sie verbindende Raumcurve dritter Ordnung sowohl, als auch durch die 15 Verbindungslinien der sechs Grundpunkte und durch die zehn Schnittgeraden der durch die sechs Grundpunkte möglichen zehn Ebenenpaare hindurchgeht.“

Denn diese 25 Geraden sind Hauptgerade, die Raumcurve dritter Ordnung eine Hauptcurve.

„Jeder Geraden entspricht eine Curve siebenter Ordnung, welche die sechs Grundpunkte $\mathfrak{P}_i$ zu Doppelpunkten besitzt.“

„Der jedesmalige Durchschnitt einer Geraden l mit einer Hauptlinie der Verwandtschaft erniedrigt die Ordnung der entsprechenden Curve um die Ordnung der Hauptlinie“ u. s. w.

„Jeder Ebene entspricht eine Fläche siebenter Ordnung, welche die sechs Punkte $\mathfrak{P}_i$ zu vierfachen Punkten besitzt, durch die 25 Hauptgeraden geht und sich in der cubischen Hauptcurve dreifach durchschlingt.“

„Die Fläche H ist von der 24. Classe.“

„Sie ist in 15 cubischen Verwandtschaften sich selbst zugeordnet.“

„Die Verwandtschaft siebenter Ordnung ist in drei cubische Verwandtschaften zerlegbar“ u. s. w.

---

* Hierbei sei auf einen Irrthum in der citirten Schrift aufmerksam gemacht: Jedem der sechs Punkte $\mathfrak{P}_i$ entsprechen nicht, wie S. 8, 3 angeführt, sämmtliche Punkte des Quadrikegels, der von $\mathfrak{P}_i$ aus die Hauptcurve $C^{(3)}$ projicirt, sondern der $\mathfrak{P}_i$ entsprechende Punkt ist unbestimmt, und jeder beliebige Punkt des Raumes kann als entsprechender angesehen werden.

§ 40. Eine Verwandtschaft elfter Ordnung: $n = 3$.

98. Ein Flächengebüsch dritter Ordnung ist bestimmt durch 16 Bestimmungsstücke.

Als solche können einfache Punkte und Doppelpunkte auftreten.

Nehmen wir δ Doppelpunkte $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_\delta$ und ε einfache Punkte $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_\varepsilon$ als Bestimmungsstücke des Gebüsches an.

Je zwei Flächen des Gebüsches schneiden sich in einer Curve neunter Ordnung, von der sich sämmtliche Verbindungslinien der δ Doppelpunkte, im Ganzen also $\frac{\delta(\delta-1)}{2}$ Gerade, abspalten, da jede Verbindungslinie zweier Doppelpunkte des Gebüsches mit allen Flächen vier Punkte gemein hat, also auf ihnen liegt.

Zwei Flächen des Gebüsches schneiden sich demnach ausser in den $\frac{\delta(\delta-1)}{2}$ Grundgeraden noch in einer Curve $\left(9 - \frac{\delta(\delta-1)}{2}\right)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche in jedem Doppelpunkte $\mathfrak{b}_i$ einen $(4-(\delta-1)) = (5-\delta)$-fachen, in jedem einfachen Grundpunkte $\mathfrak{a}_i$ einen einfachen Punkt besitzt.

Jede dritte Fläche des Gebüsches schneidet diese Curve in $3\left(9 - \frac{\delta(\delta-1)}{2}\right)$ Punkten, von denen in jedem Doppelpunkte $\mathfrak{b}_i$: $2(5-\delta)$, in jedem einfachen Grundpunkte $\mathfrak{a}_i$ einer liegt, so dass übrig bleiben: $3\left(9 - \frac{\delta(\delta-1)}{2}\right) - 2\delta(5-\delta) - \varepsilon$ variable Schnittpunkte.

Soll die Verwandtschaft eine eindeutige sein, so müssen drei beliebige Flächen des Gebüsches zwei variable Schnittpunkte mit besitzen, es muss also sein:

$$3\left(9 - \frac{\delta(\delta-1)}{2}\right) - 2\delta(5-\delta) - \varepsilon = 2$$

oder

1) $$\delta^2 - 17\delta - 2\varepsilon = -50.$$

Da nun die Summe der Bestimmungsstücke, die die δ Doppelpunkte und die ε einfachen Punkte repräsentiren, höchstens $=16$ sein darf, jeder Doppelpunkt aber als vier, jeder einfache Punkt als ein Bestimmungsstück gilt, ergiebt sich:

2) $$4\delta + \varepsilon < 16.$$

Daraus ergiebt sich, da δ eine ganze positive Zahl sein muss:

$$\delta_1 = 6, \quad \delta_2 = 3, \quad \delta_3 = 5, \quad \delta_4 = 4.$$

Dazu gehören die Werthe:

$$\varepsilon_1 = -8, \quad \varepsilon_2 = 4, \quad \varepsilon_3 = -5, \quad \varepsilon_4 = -1.$$

Als einzig möglicher Werth ergiebt sich daher, da auch ε positiv sein muss:

$$\delta = 3, \quad \varepsilon = 4,$$

dann ist die Zahl der Bestimmungsstücke: $4\delta + \varepsilon = 16$, das Gebüsch also gerade bestimmt:

„Eine eindeutige involutorische Raumverwandtschaft wird definirt durch ein cubisches Flächengebüsch, dessen Flächen sämmtlich drei

Doppelpunkte $\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 \mathfrak{b}_3$ und vier einfache Punkte $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3 \mathfrak{a}_4$ gemeinsam haben."

„Die Verwandtschaft ist dadurch vollkommen bestimmt."

„Sämmtliche Flächen des Gebüsches besitzen die drei Geraden: $l_1 = |\mathfrak{b}_2 \mathfrak{b}_3|$, $l_2 = |\mathfrak{b}_3 \mathfrak{b}_1|$, $l_3 = |\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2|$ als Grundgeraden gemeinsam, und haben die Ebene $\pi = [\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 \mathfrak{b}_3] = [l_1 l_2 l_3]$ zur Hauptebene."

Die Hauptebene π.

99. Durch sämmtliche Punkte $\mathfrak{x}$ der Hauptebene π gehen die Flächen eines Flächennetzes, welche π (in der Voraussetzung, dass $\mathfrak{x}$ nicht auf einer der Geraden l liegt) in den drei Linien l und ausserdem noch im Punkte $\mathfrak{x}$ schneiden, also π ganz enthalten.

Es existirt daher im cubischen Flächengebüsch ein **Netz von Quadriflächen**, das die sieben festen Punkte $\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 \mathfrak{b}_3 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3 \mathfrak{a}_4$ zu Grundpunkten besitzt und daher noch einen achten associirten Punkt $\mathfrak{q}$ als Grundpunkt besitzt, den der Hauptebene π zugeordneten Hauptpunkt.

Die Quadriflächen schneiden die Hauptebene π in einem Kegelschnittnetze mit drei festen Grundpunkten $\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 \mathfrak{b}_3$.

Jedem Punkte $\mathfrak{x}$ der Hauptebene π gehören alle Punkte der ganzen Hauptebene π und ausserdem noch der **zugeordnete Hauptpunkt** $\mathfrak{q}$ zu.

Dem Hauptpunkte $\mathfrak{q}$ gehören sämmtliche Punkte der Hauptebene π zu.

„Unter den Quadriflächen des Netzes giebt es eine unendliche Reihe von Kegeln, deren Spitzen eine Raumcurve sechster Ordnung erfüllen" (welche durch die Punkte: $\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 \mathfrak{b}_3 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3 \mathfrak{a}_4 \mathfrak{q}$ **nicht** hindurchgeht).

Denn: Die Spitzen aller Kegel, welche durch $\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 \mathfrak{b}_3 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3$ gehen, liegen auf einer Fläche vierter Ordnung, der Kernfläche H der in § 39 behandelten Verwandtschaft siebenter Ordnung.

Die Spitzen aller Kegel, welche durch $\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 \mathfrak{b}_3 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_4$ gehen, liegen gleichfalls auf einer Fläche vierter Ordnung.

Beide Flächen haben die zehn Verbindungslinien der Punkte $\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 \mathfrak{b}_3 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2$ gemeinsam, schneiden sich ausserdem also noch in einer Curve sechster Ordnung, q. e. d.

Die Hauptlinien.

101. Die zwölf Verbindungslinien $|\mathfrak{b}_i \mathfrak{a}_k| = l_i^k$ schneiden sämmtliche Flächen des Gebüsches je in drei festen Punkten, sind also Hauptlinien, und liegen auf doppelt unendlich vielen Flächen des Gebüsches, welche ein Netz bilden.

Jedem Punkte von l_i^k gehören daher sämmtliche Punkte von l_i^k als entsprechende zu, und ausserdem noch je zwei der Hauptlinie l_i^k zugeordnete Hauptpunkte l_i^k und $\bar{l}_i^k$.

Jedem der 24 Hauptpunkte l_i^k und $\bar{l}_i^k$ gehört daher der andere, beigeordnete Hauptpunkt $\bar{l}_i^k$ resp. l_i^k, und ausserdem sämmtliche Punkte der zugeordneten Hauptlinie zu.

102. Als Hauptlinien zweiter Art können die sechs Verbindungslinien $|\mathfrak{a}_i\mathfrak{a}_k|$ betrachtet werden, deren jeder eine Curve dritter Ordnung durch $\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{a}_l\mathfrak{a}_m\mathfrak{q}$ zugehört, welche $|\mathfrak{a}_i\mathfrak{a}_k|$ zur Secante hat, und mit ihm Grundcurve eines Quadriflächenbüschels ist.

103. Jede Ebene $[l_i\mathfrak{a}_k]=\pi_i^k$ kann als Hauptebene dritter Art betrachtet werden. Denn sei $l_i=|\mathfrak{b}_\lambda\mathfrak{b}_\mu|$, so gehen durch zwei Punkte der beiden Hauptlinien l_λ^k und l_μ^k in π_i^k sämmtliche Flächen eines Büschels, die l_λ^k und l_μ^k enthalten und sich ausserdem noch in einer Curve vierter Ordnung schneiden.

Durch einen dritten Punkt von π_i^k geht eine Fläche dieses Büschels, von der sich die Ebene π_i^k abspaltet, die aber eine Quadrifläche ist, welche durch $\mathfrak{b}_\lambda\mathfrak{b}_\mu$ und alle $\mathfrak{a}$ ausser $\mathfrak{a}_k$ geht, und in $\mathfrak{b}_i$ einen Doppelpunkt besitzt, also ein Quadrikegel mit der Spitze in $\mathfrak{b}_i$ ist, der die beiden anderen Punkte $\mathfrak{b}_\lambda$ und $\mathfrak{b}_\mu$, sowie die drei nicht auf π_i^k liegenden einfachen Grundpunkte $\mathfrak{a}$ und den Punkt $\mathfrak{q}$ projicirt.

Es giebt zwölf solcher Hauptebenen dritter Art $\pi_i^k=[l_i\mathfrak{a}_k]$, denen als zweiter Theil der cubischen Fläche je ein Quadrikegel, mit der Spitze im gegenüberliegenden doppelten Grundpunkt liegend, zugehört, im Ganzen also zwölf Quadrikegel, deren Spitzen zu je vier in jedem der drei doppelten Grundpunkte liegen, und deren jeder durch einen einfachen Grundpunkt nicht geht.

104. Von singulären Elementen besitzt diese eindeutige, involutorische Verwandtschaft daher:

drei doppelte und vier einfache Grundpunkte,
drei Grundlinien,
eine Hauptebene mit einem zugeordneten Punkte,
zwölf Hauptlinien mit 24 zugeordneten Punkten,
ein Quadriflächennetz mit einer Kegelspitzencurve sechster Ordnung,
zwölf Hauptebenen dritter Art mit zwölf zugeordneten Quadrikegeln, deren Spitzen in den Doppelpunkten liegen,
sechs Hauptlinien zweiter Art.

Die Kernfläche der Verwandtschaft.

105. Von der Kernfläche der Verwandtschaft spaltet sich die Hauptebene ab. Also:

„Die Kernfläche H der Verwandtschaft, oder der Art coincidenter Punkte, ist eine Fläche sechster Ordnung, welche die drei Doppelpunkte $\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3$ zu dreifachen, und die vier einfachen Punkte $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$ zu Doppelpunkten besitzt, und durch die drei Grundlinien $l_1l_2l_3$ und die zwölf Hauptlinien l_i^k einfach hindurchgeht. Sie schneidet die Hauptebene π ausser in den drei Geraden $l_1l_2l_3$ noch in einer Curve dritter Ordnung, welche die drei Punkte $\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3$ zu einfachen Punkten besitzt, die zwölf Hauptebenen dritter Art $[\mathfrak{b}_\lambda\mathfrak{b}_\mu\mathfrak{a}_k]$ aber in den drei Geraden l_i, l_λ^k, l_μ^k, in dem Kegelschnitt, in dem diese Ebene von dem conjugirten Quadrikegel geschnitten wird, und noch in der Schnittgeraden der Hauptebene mit der Ebene $[\mathfrak{a}_i \mathfrak{a}\lambda \mathfrak{a}_\mu]$. Sie geht ausserdem durch die Kegelspitzencurve sechster Ordnung."

Die Ordnung der Verwandtschaft und die Curve C.

106. Um die Ordnung der Verwandtschaft festzustellen, suchen wir die einer Geraden l entsprechende Curve C_l.

Nehmen wir drei Flächenbüschel in der Verwandtschaft an, A, B, Γ, von denen wir die beiden ersten als Quadriflächenbüschel voraussetzen, das dritte Γ als ein beliebiges Cubiflächenbüschel, das mit den beiden ersten A und B eine Fläche φ gemein hat.

1. Methode:

Jede Fläche γ des Büschels Γ schneidet l in drei Punkten. Durch jeden dieser drei Punkte gehen zwei entsprechende Quadriflächen α und β der beiden Büschel A und B, welche sich in einer Biquadricurve schneiden, die durch die Punkte $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b}_i$, $\mathfrak{q}$ geht.

Die drei so entstehenden Biquadricurven schneiden γ in 36 Punkten, von denen drei auf l liegen, so dass als Schnittpunkte von γ mit C_l 33 Punkte übrig bleiben. Also:

„Die Verwandtschaft ist elfter Ordnung."

2. Methode:

107. Die drei Flächenbüschel A, B, Γ schneiden eine beliebige Ebene ε in drei Curvenbüscheln A, B, C, von denen die ersten beiden, A und B, Kegelschnittbüschel, C ein Büschel von Curven dritter Ordnung ist, das eine in eine Gerade und einen, auch den Büscheln A und B gemeinsamen Kegelschnitt $\mathfrak{f}$ zerfallende Curve enthält.

Durch die Punkte der Geraden l werden die Curven der drei Büschel A, B, C einander so zugeordnet, dass

jeder	Curve	c	von	C	je drei	Curven	a	und	b,
„	„	a	„	A	„ zwei	„	c	„	b,
„	„	b	„	B	„ „	„	c	„	a

entsprechen.

Durch einen beliebigen Punkt $\mathfrak{x}$ einer beliebigen, in ε angenommenen Geraden g geht nun eine Curve c, der drei Curven a entsprechen, welche g in sechs Punkten $\mathfrak{y}$ schneiden. Umgekehrt geht durch jeden Punkt $\mathfrak{y}$ eine Curve a, der zwei Curven c entsprechen, welche g in sechs Punkten $\mathfrak{x}$ treffen. $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ coincidiren daher für zwölf Punkte, die Büschel A und C erzeugen demnach eine Curve zwölfter Ordnung, von der sich aber der A und C gemeinsame Kegelschnitt $\mathfrak{f}$ dreifach abspaltet, so dass eine Curve sechster Ordnung χ_1 übrig bleibt.

Weiterhin geht durch einen Punkt $\mathfrak{x}$ von g ein Kegelschnitt von B, dem in A zwei Kegelschnitte a entsprechen, die g in vier Punkten $\mathfrak{y}$ schneiden, und umgekehrt entsprechen jedem Punkte $\mathfrak{y}$ vier Punkte $\mathfrak{x}$. A und B erzeugen daher eine Curve achter Ordnung, von der sich indess der doppelt zu rechnende Kegelschnitt $\mathfrak{f}$ abspaltet, so dass eine Curve χ_2 der vierten Ordnung übrig bleibt.

Die Curven χ_1 und χ_2 schneiden sich in 24 Punkten, von denen indessen nur die Hälfte Schnittpunkte von C_l oder l sind. Da von diesen zwölf Punkten einer der Schnittpunkt (εl) ist, bleiben als Schnittpunkte (εC_l) elf Punkte übrig.

Legt man nun die Ebene ε durch einen Punkt $\mathfrak{a}_i$ oder $\mathfrak{b}_i$, und g ebenfalls durch diesen Punkt, so ergiebt sich in derselben Weise, dass C_l in jedem Punkte $\mathfrak{a}_i$ einen Doppelpunkt hat, denn

χ_1 und χ_2 haben einen Doppelpunkt,

in jedem Punkte $\mathfrak{b}_i$ einen Quadrupelpunkt hat, denn

χ_1 hat einen Quadrupelpunkt, χ_2 hat einen Doppelpunkt. Also:

„Jeder Geraden l entspricht in unserer eindeutigen Raumverwandtschaft eine Curve C_l der elften Ordnung, welche in jedem einfachen Grundpunkte $\mathfrak{a}_i$ einen Doppelpunkt, in jedem doppelten Grundpunkte $\mathfrak{b}_i$ einen Quadrupelpunkt besitzt."

Geschlecht der Curve C_l.

108. Um das Geschlecht der Verwandtschaftscurve C_l zu finden, suchen wir die Anzahl der von einem Punkte des Raumes durch C_l gelegten Secanten.

Als solchen Punkt nehmen wir einen Punkt von l, den wir auf folgende Weise erhalten:

Legen wir durch l eine Ebene ε, so schneidet sie C_l ausser in den sieben Punkten $(C_l l)$, in denen l von der Kernfläche und somit auch von C_l geschnitten wird, noch in vier weiteren Punkten, deren sechs Verbindungslinien sechs Secanten sind, welche l in sechs Punkten schneiden, durch die ausser l noch eine weitere Secante in ε durch C_l geht. Drehen wir nun ε um l, so beschreiben die sechs erwähnten Schnittpunkte eine Involution auf l, welche zehn Doppelpunkte besitzt.

Fassen wir einen solchen Doppelpunkt ins Auge. Durch ihn gehen:

1. die zwei durch den Coïncidenzpunkt der Involution bedingten Secanten,

2. die siebenmal schneidende Secante l, welche als $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$-fache Secante gilt,

3. die vier Verbindungslinien nach den Doppelpunkten $\mathfrak{a}_i$,

4. die drei Verbindungslinien nach den vierfachen Punkten $\mathfrak{b}_i$, deren jede als $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ Secanten, zusammen also als 18 Secanten gelten.

Im Ganzen ergeben sich demnach:

$$2+21+4+18=45 \text{ Secanten.}$$

Das Geschlecht einer Raumcurve m^{ter} Ordnung mit ϱ Secanten ist aber $\frac{(m-1)(m-2)}{2}-\varrho$, also:

„Die Verwandtschaftscurve elfter Ordnung C_l ist vom Geschlechte 0.“ Wie vorauszusehen war.

Die einer Ebene ε entsprechende Fläche Φ.

109. Nehmen wir wieder drei Flächenbüschel A, B, Γ an, und seien A und B Quadriflächenbüschel.

Eine beliebige Fläche γ von Γ schneidet eine beliebige Ebene ε dann in einer cubischen Curve c, durch deren Punkte die Schnittkegelschnittbüschel A und B einander sechsdeutig zugeordnet werden. Denn jede a schneidet c in sechs Punkten, denen sechs b zugehören. A und B erzeugen daher eine Curve, A und B also eine Fläche 24. Ordnung, welche in $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{b}_i$ zwölffache Punkte besitzt. Von dieser Fläche spaltet sich die sechsfach zu rechnende, A und B gemeinsame Quadrifläche φ ab, und bleibt demnach eine Fläche zwölfter Ordnung ψ übrig, welche in $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{b}_i$ sechsfache Punkte besitzt.

Diese Fläche schneidet γ ausser in der cubischen Curve c noch in einer Curve 33. Ordnung, welche in $\mathfrak{a}_i$ sechsfache, in $\mathfrak{b}_i$ zwölffache Punkte besitzt.

Diese Curve ist nun Schnittcurve von γ mit Φ_ε.

Also:

„Jeder Ebene ε entspricht eine Fläche Φ_ε der elften Ordnung, welche sämmtliche sieben Grundpunkte $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{b}_i$ zu sechsfachen Punkten besitzt und durch sämmtliche 21 Verbindungsgeraden dieser Grundpunkte hindurchgeht.“

Auch $|\mathfrak{a}_i\mathfrak{a}_k|$ gehört der Φ_ε an. Denn durch den Schnittpunkt $(|\mathfrak{a}_i\mathfrak{a}_k|, \varepsilon)$ geht ein Quadriflächenbüschel, dessen Flächen $|\mathfrak{a}_i\mathfrak{a}_k|$ gemeinsam haben.

110. Jeder Geraden l entspricht eine Curve elfter Ordnung C_l, welche in $\mathfrak{a}_i$ zweifache, in $\mathfrak{b}_i$ vierfache Punkte besitzt.

Jeder Ebene ε entspricht eine Fläche elfter Ordnung Φ_ε, welche $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{b}_i$ zu sechsfachen Punkten besitzt.

C_l und Φ_ε schneiden sich in 121 Punkten, von denen

in jedem der 4 $\mathfrak{a}_i$: 12 Punkte,
„ „ „ 3 $\mathfrak{b}_i$: 24 „

liegen, in allen $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{b}_i$ zusammen also $4.12+3.24=120$ Punkte, so dass ein variabler Schnittpunkt übrig bleibt, als der dem Schnittpunkte $(l\varepsilon)$ in der Verwandtschaft entsprechende Punkt.

Specielle Geraden.

111. Nach denselben Methoden, wie im Vorigen, ergiebt sich:

Einer Geraden l, welche:	entspricht einer Curve C_l der Ordnung:
durch einen einfachen Grundpunkt $\mathfrak{a}_i$ geht	6, welche die übrigen $\mathfrak{a}_k$ einfach, die $\mathfrak{b}_i$ doppelt enthält.
„ „ doppelten „ $\mathfrak{b}_i$ „	5, die $\mathfrak{a}_i$, und den $\mathfrak{b}_i$ einfach, die übrigen $\mathfrak{b}_k$ doppelt enthält.
„ zwei einfache Grundpunkte $\mathfrak{a}_i\mathfrak{a}_k$ „	3, welche die übrigen zwei $\mathfrak{a}_\varrho$ und die $\mathfrak{b}_i$ einfach enthält, und $\|\mathfrak{a}_i\mathfrak{a}_k\|$ zur Secante hat.
„ einen einfachen und einen doppelten Grundpunkt $\mathfrak{a}_i\mathfrak{b}_i$ geht,	1, nämlich $\|\mathfrak{a}_i\mathfrak{b}_i\|$ selber.
1, 2, ..., k Hauptgeraden schneidet, z. B.:	10, 9, ..., $11-k$, wobei sich die Multiplicität jedes auf der Hauptgeraden liegenden Grundpunktes um 1 vermindert.
der Geraden $\|(\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{b}_3\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4)(\mathfrak{b}_2\mathfrak{a}_2,\ \mathfrak{b}_3\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4)\|$	7, welche $\mathfrak{a}_i$ einfach, $\mathfrak{b}_3$ zweifach, $\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2$ dreifach enthält u. s. w.

Specielle Ebenen.

112. Es ergiebt sich:

Geht eine Ebene ε durch:	so entspricht ihr eine	welche in:
einen einfachen Grundpunkt: $\mathfrak{a}_1$	Fläche Φ_ε: 9. Ordn.,	$\mathfrak{a}_1$ einen vierfachen, den übrigen $\mathfrak{a}_i$ und den $\mathfrak{b}_i$ einen fünffachen Punkt besitzt.
„ doppelten „ $\mathfrak{b}_1$	„ „ 7. „	$\mathfrak{b}_1$ einen dreifachen, den übrigen $\mathfrak{b}_i$ und den $\mathfrak{a}_i$ vierfache Punkte besitzt.
zwei einfache Grundpunkte: $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$	„ „ 7. „	$\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ dreifache, den übrigen $\mathfrak{a}_i$ und den $\mathfrak{b}_i$ vierfache Punkte besitzt.
einen einfachen und einen doppelten Grundpunkt: $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$	„ „ 5. „	$\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$ zweifache, den übrigen $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{b}_i$ dreifache Punkte besitzt.
zwei doppelte Grundpunkte: $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$	„ „ 3. „	$\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$ einfache, den übrigen $\mathfrak{b}_i$, und den $\mathfrak{a}_i$ zweifache Punkte besitzt.
drei einfache Grundpunkte: $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$	„ „ 5. „	$\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ zweifache, in $\mathfrak{a}_4$ und den $\mathfrak{b}_i$ dreifache Punkte besitzt.
zwei einfache und einen doppelten Grundpunkt: $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_1$	„ „ 3. „	$\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_1$ einfache, den übrigen $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{b}_i$ zweifache Punkte besitzt.
einen einfachen und zwei doppelte Grundpunkte: $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$	Ebene ε: 1. „	nämlich die Ebene ε selbst.
drei doppelte Grundpunkte: $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{b}_3$	der ganze Raum.	

Ein näheres Eingehen auf die speciellen Geraden und Ebenen, sowie eine Betrachtung der einer Raumcurve oder Fläche m^{ter} Ordnung zugehörigen Raumcurven oder Flächen $11m^{ter}$ Ordnung, von denen die erstere in $\mathfrak{a}_i$ $2m$-fache, in $\mathfrak{b}_i$ $4m$-fache; die letztere in $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{b}_i$ $6m$-fache Punkte besitzt, ersparen wir uns, da ihre Untersuchung keine weiteren Schwierigkeiten mehr bietet.

§ 41. Eine Verwandtschaft 15. Ordnung: $n = 4$.

113. Haben die Flächen eines Flächengebüsches vierter Ordnung einen Tripelpunkt $\mathfrak{c}$ gemeinsam, so können sie von Doppelpunkten höchstens

noch fünf gemeinsam haben, da ein Tripelpunkt und fünf Doppelpunkte 30 Bestimmungsstücke repräsentiren, und das Flächengebüsch vierter Ordnung durch 31 Stücke bestimmt ist.

Weniger als fünf Doppelpunkte dürfen sie nicht besitzen. Denn hätten sie $\delta < 4$ Doppelpunkte gemeinsam, $\mathfrak{b}_i$, und ausserdem ε einfache Punkte, so würden zwei Flächen vierter Ordnung sich in einer Curve $(16-\delta)^{\text{ter}}$ Ordnung schneiden, welche in $\mathfrak{c}$ einen $(9-\delta)$-fachen, in $\mathfrak{b}_i$ dreifache und in $\mathfrak{a}_i$ einfache Punkte besitzt. Eine dritte Fläche vierter Ordnung schnitte dann in $4(16-\delta)$ Punkten, von denen nach $\mathfrak{c}$: $3(9-\delta)$, nach den δ, $\mathfrak{b}_i$ $3.2.\delta$, nach den ε, $\mathfrak{a}_i$ ε fallen, also übrig bleiben:

1) $$4(16-\delta)-3(9-\delta)-6\delta-\varepsilon=2,$$

woraus wegen $\delta \leqq 4$ folgt:

$$\varepsilon \geqq 7.$$

Es muss aber die Zahl der Bestimmungsstücke sein:

2) $$10+4\delta+\varepsilon \leqq 31,$$

woraus folgt, mit Benutzung von 1):

$$\varepsilon < 3.$$

Mit weniger als fünf Doppelpunkten ist also eine eindeutige Verwandtschaft im Flächensystem vierter Ordnung nicht erzeugbar.

114. Sei die Zahl der Doppelpunkte $=5$: $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_5$, und die Zahl der einfachen Punkte $=\varepsilon$: $\mathfrak{a}_i$.

Zwei Flächen des Gebüsches schneiden sich in einer Raumcurve 16. Ordnung, von der sich die fünf Geraden $|\mathfrak{c}\mathfrak{b}_i|$ abspalten, und die Raumcurve dritter Ordnung, welche $\mathfrak{c}$ mit den fünf $\mathfrak{b}_i$ verbindet. Es bleibt demnach eine Schnittcurve achter Ordnung, die in $\mathfrak{c}$ einen dreifachen, in $\mathfrak{b}_i$ zweifache, in $\mathfrak{a}_i$ einfache Punkte besitzt, von einer dritten Fläche vierter Ordnung daher in 32 Punkten geschnitten wird, von denen in $\mathfrak{c}$ 9 liegen, in den fünf $\mathfrak{b}_i$ $5.4=20$, in den ε, $\mathfrak{a}_i$ ε, so dass übrig bleiben:

1) $$32-9-20-\varepsilon=2,$$

also:

$$\varepsilon=1.$$

Daraus ergiebt sich:

„Durch ein Flächengebüsch vierter Ordnung mit einem dreifachen Grundpunkte $\mathfrak{c}$, fünf doppelten Grundpunkten $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_5$ und einem einfachen Grundpunkte $\mathfrak{a}$ wird eine eindeutige, involutorische Raumverwandtschaft definirt."

Das Flächengebüsch ist durch die Grundpunkte vollständig bestimmt.

Die Grundgebilde und die Hauptgebilde.

115. „Die fünf Verbindungslinien $|\mathfrak{c}\mathfrak{b}_i|$ des Tripelpunktes mit den Doppelpunkten sind allen Flächen gemeinsam, also Grundlinien."

„Die Verbindungscurve dritter Ordnung des Tripelpunktes $\mathfrak{c}$ mit den fünf Doppelpunkten ist allen Flächen gemeinsam, also Grundcurve Γ."

116. „Die Verbindungslinie $|\mathfrak{c}\mathfrak{a}|$ des Tripelpunktes mit dem einfachen Grundpunkte, sowie die zehn Verbindungslinien $|\mathfrak{b}_i \mathfrak{b}_k|$ je zweier Doppelpunkte sind Hauptlinien."

„Die fünf Verbindungscurven dritter Ordnung des Tripelpunktes und des einfachen Punktes mit je vier der Doppelpunkte sind Hauptcurven."

117. „Der Quadrikegel, der die Grundcurve Γ vom Tripelpunkte $\mathfrak{c}$ aus projicirt, ist Hauptkegel. Allen seinen Punkten gehört der ganze Hauptkegel und ausserdem noch ein Quadriflächennetz, dessen Flächen sich ausser in den sieben Punkten $\mathfrak{c}\mathfrak{a}\mathfrak{b}_i$ noch in einem Punkte $\mathfrak{q}$ schneiden, dem dem Hauptkegel zugeordneten Hauptpunkte."

Die Verwandtschaft besitzt also:

einen Tripelpunkt $\mathfrak{c}$,
fünf Doppelpunkte $\mathfrak{b}_i$,
einen einfachen Grundpunkt $\mathfrak{a}$,
fünf Grundlinien $|\mathfrak{c}\mathfrak{b}_i|$,
eine Grundcurve dritter Ordnung Γ,
elf Hauptlinien $|\mathfrak{c}\mathfrak{a}|$ und $|\mathfrak{b}_i \mathfrak{b}_k|$,
fünf Hauptcurven dritter Ordnung,
einen Hauptquadrikegel.

Die Kernfläche der Verwandtschaft.

119. „Die Kernfläche H der Verwandtschaft ist, da sich der Hauptkegel von ihr abspaltet, von der achten Ordnung.

Sie geht durch die fünf Grundlinien $|\mathfrak{c}\mathfrak{b}_i|$ und die Grundcurve Γ, sowie durch die elf Hauptlinien $|\mathfrak{c}\mathfrak{a}|$ und $|\mathfrak{b}_i \mathfrak{b}_k|$, und die fünf Hauptcurven einfach hindurch.

Sie besitzt in $\mathfrak{c}$ einen fünffachen, in $\mathfrak{b}_i$ dreifache und in $\mathfrak{a}$ einen Doppelpunkt."

Ordnung der Verwandtschaft.

120. In derselben Weise, wie im vorher betrachteten Falle: $n=3$, ergiebt sich hier:

„Die eindeutige, involutorische Raumverwandtschaft ist von der 15. Ordnung, jeder Geraden l gehört also eine Raumcurve C_l der 15. Ordnung, jeder Ebene ε eine Fläche Φ_ε der 15. Ordnung an,"

so dass ein näheres Eingehen auf diese Curven und Flächen erspart werden kann.

§ 42. Eine Verwandtschaft 19. Grades: $n=5$.

121. Eine den drei letztbetrachteten Verwandtschaften 7., 11. und 15. Ordnung analoge Verwandtschaft 19. Ordnung wird erzeugt durch ein Flächengebüsch fünfter Ordnung, dessen Flächen sämmtlich

vier Tripelpunkte: $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{c}_3$, $\mathfrak{c}_4$ und
drei Doppelpunkte: $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{b}_3$

als Grundpunkte gemeinsam haben.

122. Diese Verwandtschaft besitzt:

die sechs Verbindungsgeraden $|\mathfrak{c}_i \mathfrak{c}_k|$ der vier Tripelpunkte zu Grundlinien,

die drei Verbindungscurven dritter Ordnung der vier Tripelpunkte mit je zweien der drei Doppelpunkte zu Grundcurven,

die zwölf Verbindungslinien $|\mathfrak{c}_i \mathfrak{b}_k|$ je eines Tripelpunktes und eines Doppelpunktes zu Hauptlinien,

die vier Verbindungscurven dritter Ordnung der drei Doppelpunkte mit je dreien der vier Tripelpunkte zu Hauptcurven,

die Fläche dritter Ordnung, welche die vier Tripelpunkte $\mathfrak{c}_i$ zu Doppelpunkten und die drei Doppelpunkte $\mathfrak{b}_i$ zu einfachen Punkten besitzt, zur Hauptfläche, die sich in einem Quadriflächennetze abspaltet, dessen Grundpunkte $\mathfrak{c}_i$, $\mathfrak{b}_i$ und der der Hauptfläche zugeordnete Hauptpunkt sind.

123. Die Kernfläche zehnter Ordnung dieser Verwandtschaft 19. Ordnung enthält:

die vier Tripelpunkte $\mathfrak{c}_i$ zu fünffachen Punkten,
" drei Doppelpunkte $\mathfrak{b}_i$ zu dreifachen Punkten

und geht durch sämmtliche Grundlinien und Curven, sowie sämmtliche Hauptlinien und Curven einfach hindurch.

§ 43. Eine Verwandtschaft 23. Ordnung: $n = 6$.

124. Der nächste Fall einer den vorherigen analogen, eindeutig involutorischen Raumverwandtschaft wird erzeugt durch ein Flächengebüsch sechster Ordnung mit einem vierfachen Grundpunkte $\mathfrak{b}$ und sechs dreifachen Grundpunkten $\mathfrak{c}_i$. Diese Verwandtschaft ist von der 23. Ordnung, enthält als Grundgebilde:

sechs Gerade $|\mathfrak{b}\mathfrak{c}_i|$ und sechs Raumcurven dritter Ordnung,

als Hauptgebilde:

15 Gerade $|\mathfrak{c}_i \mathfrak{c}_k|$ und eine Raumcurve dritter Ordnung,

sowie eine Hauptfläche vierter Ordnung mit einem Tripelpunkt $\mathfrak{b}$ und sechs Doppelpunkten $\mathfrak{c}_i$.

Die Kernfläche der Verwandtschaft ist eine Fläche zwölfter Ordnung mit einem siebenfachen Punkte $\mathfrak{b}$ und sechs fünffachen Punkten $\mathfrak{c}_i$, welche durch alle Grund- und Hauptlinien und Curven einfach hindurchgeht u. s. w.

§ 44. Eine Verwandtschaft 14. Ordnung mit einer Fundamentalcurve vierter Ordnung: $n = 3$.

125. Im Quadriflächengebüsch kann durch Annahme einer festen, allen Flächen gemeinsamen Fundamentalcurve überhaupt keine Verwandtschaft erzeugt werden, da bei Annahme einer Fundamentalgeraden oder eines Fundamentalkegelschnittes überhaupt gar keine abhängigen Punkte auftreten, eine cubische Fundamentalcurve aber das Gebüsch überbestimmt.

126. Dagegen für den Fall $n = 3$ können wir durch Annahme fester Fundamentalcurven und Punkte eindeutige Verwandtschaften erzielen.

Nehmen wir nämlich eine Raumcurve vierter Ordnung zweiter Species Γ, die Schnittcurve zweier Quadriflächen, als Fundamentalcurve an. Dieselbe gilt (Reye, Annalen 2) als elf Bestimmungsstücke. Eine dem Früheren analoge Betrachtung zeigt nun, dass ausser ihr noch fünf feste Schnittpunkte $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_5$ als Grundpunkte angenommen werden müssen.

Dadurch ist das cubische Flächengebüsch vollständig bestimmt, und durch dasselbe die eindeutige Verwandtschaft.

Hauptgebilde.

127. Die Verwandtschaft besitzt zehn Hauptgeraden, nämlich die fünf Paar Secanten a_i und a'_i, die man von den fünf einfachen Grundpunkten $\mathfrak{a}_i$ durch die Fundamentalcurve Γ legen kann.

Als Hauptlinien zweiter Art könnte man die zehn Verbindungslinien $|\mathfrak{a}_i \mathfrak{a}_k|$ und die doppelt unendlich vielen Secanten der Γ bezeichnen, sowie die Generatricen der fünf Kegel vierter Ordnung, welche die Curve Γ von $\mathfrak{a}_i$ aus projiciren.

Als Hauptebenen dritter Art kann man die zehn Ebenen $[\mathfrak{a}_i \mathfrak{a}_k \mathfrak{a}_\lambda]$ bezeichnen.

Die Kernfläche.

128. Die Kernfläche H der Verwandtschaft ist eine Fläche achter Ordnung, welche die Fundamentalcurve Γ zur Doppelcurve und die fünf Grundpunkte $\mathfrak{a}_i$ zu Doppelpunkten enthält, und durch die zehn Hauptgeraden $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{a}'_i$ einfach hindurchgeht.

Im Doppelpunkte $\mathfrak{a}_1$ hat die Kernfläche H denselben Berührungskegel, wie die einzige Fläche des Gebüsches, welche in $\mathfrak{a}_1$ einen Doppelpunkt besitzt, und hat zu Osculirenden dieses Kegels die sechs Geraden:

$$|\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2|, \quad |\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_3|, \quad |\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_4|, \quad |\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_5|, \quad a_1, \; a'_1.$$

Die Gerade l und ihre Curve C_l.

129. „Die involutorische, eindeutige Verwandtschaft ist von der 14. Ordnung.“

„Einer Geraden l gehört eine Curve C_l der 14. Ordnung zu, welche in den fünf Punkten $\mathfrak{a}_i$ dreifache Punkte besitzt.“

„Einer Geraden l, welche durch einen einfachen Grundpunkt $\mathfrak{a}_i$ geht oder die Fundamentalcurve Γ einmal schneidet, gehört eine Curve C_l der neunten Ordnung zu, welche in allen Punkten $\mathfrak{a}_k$ Doppelpunkte besitzt, ausser in dem von l getroffenen, in dem sie einen einfachen Punkt besitzt.“

„Einer Geraden l, welche durch zwei Grundpunkte $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{a}_k$ geht, oder durch einen Grundpunkt $\mathfrak{a}_i$ geht und die Fundamentalcurve Γ einmal schneidet, oder die Fundamentalcurve Γ zweimal schneidet, gehört eine Curve C_l der vierten Ordnung zu, welche durch alle von den Geraden l nicht getroffenen Grundpunkte $\mathfrak{a}_\varrho$ einfach hindurchgeht und mit l und Γ zusammen vollständiger Durchschnitt zweier cubischer Flächen ist."

„Eine Hauptgerade $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{a}'_i$ gehört sich selber zu."

Die Ebene ε und ihre Fläche Φ_ε.

130. „Einer Ebene ε gehört eine Fläche Φ_ε der 14. Ordnung zu, welche sich in der Fundamentalcurve Γ fünffach durchschlingt, die fünf Grundpunkte $\mathfrak{a}_i$ zu fünffachen Punkten besitzt und durch die zehn Hauptgeraden a_i, a'_i einfach hindurchgeht."

„Eine Ebene ε, welche durch einen Grundpunkt $\mathfrak{a}_1$ geht, gehört eine Fläche Φ_ε der elften Ordnung zu, welche sich in der Curve Γ vierfach durchschlingt, $\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5$ zu vierfachen, $\mathfrak{a}_1$ zum dreifachen Punkte besitzt und durch a_i, a'_i geht."

„Einer Ebene ε, welche durch zwei Grundpunkte $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ geht, gehört eine Fläche Φ_ε der achten Ordnung zu, welche sich in Γ dreifach durchschlingt, $\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5$ zu dreifachen und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ zu Doppelpunkten besitzt."

„Einer Ebene $\varepsilon = [\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3]$ gehört eine Fläche der fünften Ordnung Φ_ε zu, welche Γ zur Doppelcurve und $\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5$ zu Doppelpunkten besitzt, und durch $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3$ einfach hindurchgeht" u. s. w.

§ 45. Eine specielle Verwandtschaft achter Ordnung mit einer Fundamentalcurve sechster Ordnung: $n = 3$.

131. Eine merkwürdige Verwandtschaft achter Ordnung, *in der jeder* Geraden eine ebene Curve achter Ordnung entspricht, wird *definirt durch ein* cubisches Flächengebüsch, dessen Flächen sämmtlich eine Raum*curve sechster* Ordnung Γ_{23}, die Schnittcurve einer Quadrifläche, enthalten, und ausser*dem* noch sich in einem Punkte $\mathfrak{a}$ schneiden.

Dann ist die einzige durch Γ_{23} gehende Quadrifläche P eine Hauptfläche und spaltet sich von einem Flächennetze des Gebüsches ab, als dessen anderer Theil das Ebenenbündel $\mathfrak{a}$ übrig bleibt.

Jeder Geraden l entspricht dann eine Curve achter Ordnung, welche in der Ebene $[\mathfrak{a}l]$ liegt.

Man erhält sie, indem man $[\mathfrak{a}l]$ durch ein beliebiges ($[\mathfrak{a}l]$ nicht enthaltendes) Flächennetz des Gebüsches in einem Curvennetze schneiden lässt und in der dadurch definirten ebenen Verwandtschaft die der Geraden l entsprechende Curve aufsucht, d. h. den Ort der Grundpunkte der Curvenbüschel des Curvennetzes, die einen Grundpunkt in l haben, ein Ort, der im Allgemeinen von der Ordnung: $(n^2 - 1)$, hier also von der achten Ordnung ist.

Zwölftes Capitel.

Einige specielle mehrdeutige Verwandtschaften.

§ 46. Eine siebendeutige Verwandtschaft siebenter Ordnung: $n = 2$.

132. Im allgemeinen Quadriflächengebüsch, dessen Flächen keine gemeinsamen Punkte besitzen, gehören jedem Punkte als Grundpunkt eines Flächennetzes sieben associirte Punkte zu, welche eine siebendeutige involutorische Verwandtschaft siebenter Ordnung definiren.

Kernfläche der Verwandtschaft.

133. Die Kernfläche der Verwandtschaft ist eine Fläche vierter Ordnung H, welche weder Doppelpunkte, noch Geraden enthält. Sie ist der Ort der Spitzen aller Kegel des Gebüsches.

Sie ist von der Classe 36.

Die Gerade und die Ebene.

144. Einer Geraden l entspricht eine Raumcurve C_l^7 der siebenten Ordnung, welche die l in vier Punkten der Kernfläche schneidet.

Jeder Ebene ε entspricht eine Fläche Φ_ε^7 der siebenten Ordnung, welche die Ebene ε in einer Curve vierter Ordnung schneidet, deren Punkte sich selbst entsprechen, also auf H liegen, und ausserdem in einer Curve dritter Ordnung ψ_ε, deren Punkte einander paarweise zugeordnet sind. Die Verbindungslinien dieser zugeordneten Punkte umhüllen eine Curve sechster Classe.

Auf jeder Ebene giebt es eine Curve 24. Ordnung, deren Punkte unter ihren zugehörigen Punkten einen Doppelpunkt besitzen. Diese Doppelpunkte liegen auf einer Raumcurve 24. Ordnung.

Auf jeder beliebigen Geraden g und Ebene ε giebt es sieben Paare einander in der Verwandtschaft entsprechender Punkte, deren jedem noch weitere sechs Punkte entsprechen. Diese so erhaltenen 42 Punkte bilden mit den sieben dem Schnittpunkt $(g\varepsilon)$ entsprechenden Punkten zusammen die 49 Schnittpunkte der l und ε entsprechenden C_l^7 und Φ_ε^7.

Auf zwei beliebigen Ebenen ε_1 und ε_2 giebt es zwei Curven siebenter Ordnung, deren Punkte einander paarweise in der Verwandtschaft entsprechen. Die übrigen je sechs entsprechenden Punkte erfüllen eine Raumcurve 42. Ordnung.

Auf jeder Ebene ε_1 giebt es 24 sich selbst entsprechende Punkte, denen in einer beliebigen zweiten Ebene ε_2 noch ein entsprechender Punkt zugehört.

Auf jeder Ebene ε_1 giebt es 24 Punkte, denen in einer beliebigen zweiten Ebene ε_2 ein Doppelpunkt oder sich selbst entsprechender Punkt entspricht.

Auf jeder Ebene ε_1 giebt es neun einander zugeordnete Punktepaare, denen auf einer beliebigen zweiten Ebene ε_2 noch je ein Punkt entspricht.

Auf jeder Ebene ε_1 giebt es neun Punkte, denen in einer beliebigen zweiten Ebene ε_2 noch je ein Paar conjugirter Punkte entspricht.

Auf jeder Ebene ε giebt es sieben Punkte, die auf einer beliebigen Geraden l noch einen entsprechenden Punkt besitzen.

Auf je drei beliebigen Ebenen ε_1, ε_2, ε_3 giebt es 42 Tripel einander entsprechender Punkte, deren jedem noch weitere fünf Punkte zugehören, welche den drei den Ebenen entsprechenden Φ_{ε_1}, Φ_{ε_2}, Φ_{ε_3} gemeinsam sind. Diese $5.42 = 210$ Punkte, die den 3.7 Paaren entsprechender Punkte auf den ε_1 und $|\varepsilon_2 \varepsilon_3|$, ε_2 und $|\varepsilon_1 \varepsilon_3|$, ε_3 und $|\varepsilon_1 \varepsilon_2|$ entsprechenden $3.7.6 = 126$ und die sieben dem Punkte $(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3)$ entsprechenden Punkte bilden zusammen die 343 Schnittpunkte $(\Phi_{\varepsilon_1} \Phi_{\varepsilon_2} \Phi_{\varepsilon_3})$.

Da jeder Doppelpunkt oder sich selbst entsprechende Punkt die Spitze eines Quadrikegels ist, lässt sich ein Theil der letzteren Sätze noch anders aussprechen.

145. Denjenigen Geraden, welche entsprechende Punkte der Verwandtschaft verbinden, gehören Raumcurven dritter Ordnung an, welche die Gerade in zwei Punkten schneiden und mit ihr Grundcurve eines Büschels bilden.

Der Strahlencomplex.

146. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte der Verwandtschaft bilden einen Strahlencomplex sechsten Grades.

Die Strahlen des Strahlencomplexes sind diejenigen Geraden, die nicht nur auf einer, sondern auf unendlich vielen Quadriflächen des Gebüsches liegen, die also Theile von Grundcurven von Flächenbüscheln sind.

Alle in einer Ebene liegenden Complexstrahlen umhüllen eine Curve sechster Classe, ihre singulären Punkte liegen auf einer Curve dritter Ordnung.

Alle durch einen Punkt gehenden Complexstrahlen bilden einen Kegel sechster Ordnung. Ihre singulären Punkte liegen auf einer Raumcurve 19. Ordnung, welche die Kegelspitze zum siebenfachen Punkte hat.

Alle Complexstrahlen, welche zwei Gerade g_1, g_2 schneiden, bilden eine Regelfläche zwölfter Ordnung, welche g_1 und g_2 zu sechsfachen Geraden besitzt. Die auf ihr liegenden singulären Punkte bilden eine Raumcurve zwölfter Ordnung.

Drei beliebige Geraden werden von zwölf Complexstrahlen geschnitten.

Die Strahlencongruenz.

147. Die Congruenz der Complexstrahlen, deren beide singulären Punkte zusammenfallen, ist von der

Ordnung: 14,
Classe: 6,
Rang: 20.

D. h.:

Durch jeden Punkt y des Raumes gehen 14 Strahlen, längs deren sich in einem ihrer Punkte die Flächen von unendlich vielen Büscheln, die ein Netz bilden, berühren.

In jeder Ebene liegen sechs Strahlen, längs deren sich in einem ihrer Punkte unendlich viele Flächenbüschel berühren, die ein Flächennetz bilden. Oder: Es giebt sechs Flächenbüschel, deren Flächen sämmtlich die Ebene berühren.

Je zwei Geraden g_1 und g_2 werden von 20 gemeinschaftlichen Tangenten der Flächen je eines Flächennetzes geschnitten.

Die Berührungspunkte aller durch eine Gerade g gelegten Congruenzstrahlen liegen auf einer Raumcurve 18. Ordnung.

§ 47. Eine zweideutige Verwandtschaft siebenter Ordnung: $n=2$.

148. Haben die Flächen eines Quadriflächengebüsches fünf feste Punkte gemein, so bestimmen sie eine zweideutige involutorische Verwandtschaft siebenter Ordnung.

Seien $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_5$ die fünf festen Grundpunkte.

Die Kernfläche der Verwandtschaft.

149. Die Kernfläche der Verwandtschaft ist eine Fläche vierter Ordnung H, welche die fünf Grundpunkte $\mathfrak{a}_i$ zu Doppelpunkten besitzt und durch die zehn Verbindungsgeraden $|\mathfrak{a}_i\mathfrak{a}_k|$ hindurchgeht.

Die Gerade.

150. Einer Geraden l entspricht eine Curve $C_l{}^7$ der siebenten Ordnung, welche die fünf Grundpunkte $\mathfrak{a}_i$ zu Doppelpunkten besitzt.

Einer Geraden l, welche durch einen Grundpunkt $\mathfrak{a}_1$ geht, entspricht eine Curve $C_l{}^3$ dritter Ordnung, welche durch $\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5$ geht, l doppelt schneidet und mit ihr die Grundcurve eines Quadriflächenbüschels bildet.

Eine Hauptgerade $|\mathfrak{a}_i\mathfrak{a}_k| = l$ entspricht sich selber.

Es giebt zehn Hauptgeraden $|\mathfrak{a}_i\mathfrak{a}_k|$.

Einer Geraden l, welche eine Hauptgerade $|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2|$ schneidet, entspricht eine Curve sechster Ordnung $C_l{}^6$, welche $\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5$ zu Doppelpunkten, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ zu einfachen Punkten besitzt.

Einer Geraden l, welche zwei Hauptgeraden $|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2|$ und $|\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4|$ schneidet, entspricht eine Curve fünfter Ordnung $C_l{}^5$, welche durch $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$ geht und in $\mathfrak{a}_5$ einen Doppelpunkt besitzt.

Einer Geraden l, welche in einer Ebene $[\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3]$ liegt, entspricht eine Curve vierter Ordnung $C_l{}^4$, welche $\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5$ zu Doppelpunkten hat.

Einer Geraden l, welche in $[\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3]$ liegt und durch den Schnittpunkt dieser Ebene mit der Linie $|\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5|$ geht, entspricht eine Curve dritter Ordnung $C_l{}^3$, welche durch $\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5$ geht.

Die durch $\mathfrak{a}_1$ gehende Gerade, welche $|\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3|$ und $|\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_4|$ schneidet, entspricht sich selbst.

Solche sich selbst entsprechende Geraden, die Schnittgeraden $|[\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3][\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5]|$, giebt es 15.

Die Ebene.

151. Einer Ebene ε entspricht eine Fläche siebenter Ordnung $\Phi_\varepsilon{}^7$, welche die fünf Grundpunkte $\mathfrak{a}_i$ zu vierfachen Punkten besitzt und durch die zehn Hauptgeraden einfach hindurchgeht.

Einer Ebene ε, die durch einen Punkt $\mathfrak{a}_1$ geht, entspricht einer Fläche $\Phi_\varepsilon{}^5$ der fünften Ordnung, welche $\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5$ zu dreifachen, $\mathfrak{a}_1$ zum zweifachen Punkte besitzt.

Einer Ebene ε, die durch zwei Punkte $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ geht, entspricht eine Fläche dritter Ordnung $\Phi_\varepsilon{}^3$, welche durch $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ geht und $\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5$ zu Doppelpunkten besitzt.

Einer Ebene $\varepsilon = [\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3]$ entspricht eine zweite, durch $|\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5|$ gehende Ebene u. s. w.

Diese Verwandtschaft war durch das Gebüschskelett nicht vollständig bestimmt.

§ 48. Eine dreideutige Verwandtschaft 17. Ordnung: $n = 3$.

152. Betrachten wir von den durch ein cubisches Flächengebüsch definirten mehrdeutig involutorischen Raumverwandtschaften eine näher, die erzeugt ist durch ein cubisches Flächengebüsch, dessen Flächen sämmtlich eine Raumcurve dritter Ordnung Γ und sechs Punkte $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_6$ mit einander gemein haben.

Das Flächengebüsch ist dadurch gerade bestimmt.

Da drei beliebige Flächen dritter Ordnung, welche eine Raumcurve dritter Ordnung vierten Ranges gemein haben, sich noch in weiteren $27 - 3(9-2) + 4 = 10$ Punkten schneiden (Cremona, Raum), von denen sechs in $\mathfrak{a}_i$ fest sind, so existiren vier variable Punkte, d. h.:

„Die Verwandtschaft ist dreideutig.“

153. Die Verwandtschaft enthält sechs Hauptgeraden $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_6$, die sechs von den Punkten $\mathfrak{a}_i$ an die Fundamentalcurve Γ gelegten Secanten.

154. Die Kernfläche

ist eine Fläche achter Ordnung H, welche die Curve Γ zur Knotencurve hat, in den sechs Punkten $\mathfrak{a}_i$ Doppelpunkte besitzt und durch die sechs Hauptgeraden a_i einfach hindurchgeht.

155. **Die Gerade.**

Es entspricht:	eine Curve C der:	welche die Punkte:
einer beliebigen Geraden	17. Ordnung,	$\mathfrak{a}_i$ zu dreifachen Punkten besitzt.
einer durch einen Grundpunkt $\mathfrak{a}_1$ gehenden Geraden	11. „	$\mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_6$ zu Doppelpunkten, $\mathfrak{a}_1$ zum einfachen Punkte besitzt.
einer die Fundamentalcurve Γ schneidenden Geraden	11. „	$\mathfrak{a}_i$ zu Doppelpunkten besitzt.
einer durch zwei Grundpunkte $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2$ gehenden Geraden	5. „	welche durch die Punkte $\mathfrak{a}_3 \mathfrak{a}_4 \mathfrak{a}_5 \mathfrak{a}_6$ einfach hindurchgeht.
einer Secante der Fundamentalcurve	5. „	welche durch den Punkt $\mathfrak{a}_i$ einfach hindurchgeht.
einer durch einen Grundpunkt $\mathfrak{a}_1$ gehenden und die Fundamentalcurve Γ einmal schneidenden Geraden	5. „	welche durch die Punkte $\mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3 \mathfrak{a}_4 \mathfrak{a}_5 \mathfrak{a}_6$ einfach hindurchgeht.

Die Hauptgeraden a_i entsprechen sich selber.

Schneidet eine Gerade l: 1, 2, 3, 4 Hauptlinien a, so erniedrigt sich die Ordnung ihrer zugehörigen Curve um 1, 2, 3, 4. C_l ist also dann von der 16., 15., 14., 13. Ordnung und hat jeden auf einer von l geschnittenen Hauptlinie gelegenen Punkt zum Doppelpunkte, jeden weiteren Grundpunkt zum Tripelpunkte.

Z. B.:

Den 15 Paaren von Schnittlinien je vierer Hauptgeraden $a_i a_k a_\varrho a_\mu$ entsprechen 15 Paare von Raumcurven 13. Ordnung, welche die Punkte $\mathfrak{a}_i \mathfrak{a}_k \mathfrak{a}_\varrho \mathfrak{a}_\mu$ zu Doppelpunkten, $\mathfrak{a}_\nu \mathfrak{a}_\varrho$ zu Tripelpunkten besitzen.

156. **Die Ebene.**

Es entspricht:	eine Fläche Φ der:	welche sich in Γ:	und die Punkte:
einer beliebigen Ebene	17. Ordnung,	sechsfach durchschlingt	$\mathfrak{a}_i$ zu sechsfachen Punkten besitzt.
einer Ebene, welche durch einen Grundpunkt $\mathfrak{a}_1$ geht	14. „	fünffach „	$\mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3 \mathfrak{a}_4 \mathfrak{a}_5 \mathfrak{a}_6$ zu fünffachen, $\mathfrak{a}_1$ zum vierfachen,
einer Ebene, welche durch zwei Grundpunkte $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2$ geht	11. „	vierfach „	$\mathfrak{a}_3 \mathfrak{a}_4 \mathfrak{a}_5 \mathfrak{a}_6$ zu vierfachen, $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2$ zu dreifachen,
einer Ebene, welche durch drei Grundpunkte $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3$ geht	8. „	dreifach „	$\mathfrak{a}_4 \mathfrak{a}_5 \mathfrak{a}_6$ zu dreifachen, $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3$ zu zweifachen

Punkten besitzt und durch die sechs Hauptgeraden a_i einfach hindurchgeht.

§ 49. Eine fünfdeutige Verwandtschaft 17. Ordnung: $n = 3$.

157. Als Beispiel einer Verwandtschaft mit Hauptebene zweiter Art betrachten wir noch die Verwandtschaft, die durch ein Cubiflächengebüsch dritter Ordnung definirt wird, dessen Flächen sämmtlich acht in einer Ebene π gelegene Punkte $y_1, \ldots, y_8$, und ausserdem noch einen Doppelpunkt $\mathfrak{b}$ und vier weitere einfache Grundpunkte $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_4$ besitzen.

Die Verwandtschaft ist dadurch gerade bestimmt. Denn die zwölf einfachen Grundpunkte $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{a}_i$ und der als vier Bestimmungsstücke rechnende Doppelpunkt $\mathfrak{b}$ sind gerade die zur Bestimmung des Cubiflächengebüsches nöthigen 16 Bestimmungsstücke.

Alle Flächen des Gebüsches schneiden die Ebene π in cubischen Curven, welche acht feste Punkte $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_8$, also noch einen neunten Punkt $\mathfrak{p}_9$ gemeinsam haben, der gleichfalls als Grundpunkt des Flächengebüsches auftritt. Wir haben hier den bisher noch nicht betrachteten Fall, dass durch die zur Bestimmung des Flächengebüsches angenommenen Grundpunkte weitere Grundpunkte des Gebüsches mit bestimmt sind, vergl. § 33, 83.

158. Drei beliebige Flächen des Gebüsches schneiden sich in dem achtfachen Schnittpunkte $\mathfrak{b}$ und in den vier Punkten $\mathfrak{a}_i$ und neun Punkte $\mathfrak{p}_i$, ausserdem also noch in sechs variablen Schnittpunkten. Die Verwandtschaft ist also

fünfdeutig.

Die Hauptgebilde.

159. Die Verwandtschaft besitzt eine Hauptebene zweiter Art, nämlich die Ebene π.

Denn durch einen beliebigen Punkt von π gehen unendlich viele Flächen eines Netzes, welche mit π eine feste Curve dritter Ordnung gemein haben. Durch einen weiteren, nicht auf dieser Curve gelegenen Punkt von π geht in diesem Netze ein Flächenbüschel, von dessen Flächen sich sämmtlich die Ebene π abspaltet. Die Flächen dieses Büschels sind also Quadriflächen, welche $\mathfrak{a}_i$ zu einfachen und $\mathfrak{b}$ zum Doppelpunkt besitzen, also Quadrikegel sind. Also:

„Es existirt ein Gebüsch von Quadrikegeln, welche $\mathfrak{b}$ zur gemeinsamen Spitze und die vier Strahlen $|\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}_i|$ zu gemeinschaftlichen Generatricen besitzen."

„Die der Hauptebene zweiter Art π zugeordnete Hauptcurve zweiter Art besteht aus vier in einem Punkte $\mathfrak{b}$ zusammenlaufenden Hauptgeraden $|\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}_i|$."

„Unter den Quadrikegeln des Gebüsches giebt es drei Ebenenpaare:

$$[\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}_i\,\mathfrak{a}_k], \quad [\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}_\varrho\,\mathfrak{a}_\mu]."$$

160. Die Verwandtschaft besitzt von Hauptlinien erster Art:

1. die vier Geraden $|\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}_i|$, welche der Hauptebene π zugeordnet sind und keine zugeordneten Hauptpunkte besitzen,
2. die neun Geraden $|\mathfrak{b}\,y_i|$,
3. die drei Schnittgeraden der in Ebenenpaare zerfallenden Quadrikegel:

$$|[\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}_i\,\mathfrak{a}_k][\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}_\varrho\,\mathfrak{a}_\mu]| = l_{ik} = l_{\varrho\mu}.$$

Die Linien $|\mathfrak{a}_i\,\mathfrak{a}_k|$ können als Hauptgerade zweiter Art angesehen werden.

Die Kernfläche.

161. Die Kernfläche der Verwandtschaft ist, da sich von ihr die Ebene π abspaltet, eine

Fläche H siebenter Ordnung,

welche $\mathfrak{b}$ zum fünffachen, $\mathfrak{a}_i$ zu doppelten, $\mathfrak{p}_i$ zu einfachen Punkten besitzt und durch die 16 Hauptlinien erster Art: $|\mathfrak{b}\mathfrak{a}_i|$, $|\mathfrak{b}\mathfrak{p}_i|$, l_{ik} hindurchgeht.

Ordnung der Verwandtschaft.

162. In derselben Weise, wie im Vorhergehenden, ergiebt sich:

„Die Ordnung der Verwandtschaft ist $=17$."

„Einer Geraden l gehört eine Raumcurve C_l der 17. Ordnung zu."

„Einer Ebene ε gehört eine Fläche Φ, 17. Ordnung zu, welche durch sämmtliche Hauptgebilde hindurchgeht" u. s. w.

Wie man sieht, ist also bereits bei den niedrigsten Flächengebüschen $n=2, 3, \ldots$ die Zahl und die Verschiedenartigkeit der durch sie definirten involutorischen Raumverwandtschaft eine sehr grosse, und wächst mit steigendem n bei dem massenhaften Auftreten von Grundcurven und Hauptebene rapide ins Unbegrenzte.

Kleinere Mittheilungen.

XIV. Zur Integration der binomischen Differentialgleichung dritter Ordnung.

Die binomischen Differentialgleichungen sind von den Herren Briot und Bouquet[1]) in der ersten Auflage ihres Werkes über die doppeltperiodischen Functionen allgemein behandelt worden. Sie fanden, dass nicht mehr als elf Differentialgleichungen der Form

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^n = f(u),$$

unter $f(u)$ eine ganze rationale Function verstanden, aus denen eindeutige doppeltperiodische Functionen entspringen, vorhanden sind, dass sie sich aber auf vier typische Formen zurückführen lassen. Dasselbe Resultat ist in der Inauguraldissertation von Herrn Netto[2]) als der specielle Fall enthalten, dass die Classe der betrachteten Functionen gleich Eins ist. Später ist Herr Fuchs[3]) in einem Briefe an Herrn Hermite zu den Formen der binomischen Differentialgleichungen, welche eine eindeutige doppeltperiodische Integralfunction besitzen, dadurch gelangt, dass er den Satz vom Geschlecht der algebraischen Gleichungen zu Grunde legte. Herr Klitzkowski[4]) hat eine allgemeinere Form der binomischen Differentialgleichungen betrachtet, für welche sich die Briot und Bouquet'schen Resultate als Sonderfall ergeben. Neuerdings habe ich in meiner Inauguraldissertation[5]) die in Rede stehenden Differentialgleichungen abgeleitet, indem ich von dem Satze, dass sich eine eindeutige doppeltperiodische Function n^{ten} Grades durch eine rationale umkehrbare Substitution in eine solche zweiten Grades überführen lässt, ausging und eine Bedingungsgleichung, die bei der Transformation erfüllt sein soll, zu Grunde legte.

Das Verfahren, wodurch die Herren Briot und Bouquet die binomischen Differentialgleichungen auf solche zweiten Grades reduciren, weicht

1) Théorie des fonctions doublement périodiques. Paris 1859.

2) De transformatione aequationis $y^n = R(x)$ etc. Berlin 1870.

3) Sur une équation différentielle de la forme $f\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0$. Comptes rendus 1881.

4) Ueber die Integration der m^{ten} Wurzel aus einer rationalen Function. Königsberg 1883.

5) Zur Integration von Differentialgleichungen erster Ordnung etc. Halle 1889.

von dem für die allgemeinen trinomischen gegebenen ab, es ist der speciellen Gestalt der Gleichungen angepasst. In meiner Inauguraldissertation habe ich angegeben, wie die allgemeine daselbst erörterte Integrationsmethode für den Fall der in Rede stehenden Gleichungen zu modificiren ist. Es soll hier ein ganz anderer Weg betreten werden, der dadurch charakterisirt ist, dass wir zu einer Transformationsformel gelangen, die für beliebig gegebenes $z = z_0$ und $u = u_0$ den bestimmten numerischen Werth $s = \infty$ giebt. Die Lösung des entsprechenden Problems für Differentialgleichungen zweiten Grades rührt von Herrn Weierstrass[1]) her. Wir führen die Rechnung für den Fall der binomischen Differentialgleichung dritten Grades durch, welche die Form[2]) hat:

$$1)\qquad \left(\frac{du}{dz}\right)^3 = P^2(u),$$

wo $P(u)$ eine ganze rationale Function dritten Grades bezeichnet.

Betrachten wir die Ausdrücke, durch welche sich die Differentialgleichungen

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^2 = F(u),$$

wo $F(u)$ eine ganze rationale Function zweiten, dritten oder vierten Grades bezeichnet, integriren lassen, so werden wir zu der Vermuthung geführt, dass der Differentialgleichung 1) ein analog gebildeter Ausdruck genügen werde. Wir setzen also an:

$$y = l\sqrt[3]{P(u)} + mu + n$$

und verstehen unter y eine elliptische Function zweiten Grades. Die Unbekannten l, m, n sind nun so zu bestimmen, dass die rechte Seite dieser Ansatzgleichung blos zwei Unendlichkeitsstellen besitzt. Zu dem Ende entwickeln wir $\sqrt[3]{P(u)}$ nach fallenden Potenzen von u. Sei

$$P(u) = \mathfrak{a}_0 u^3 + \mathfrak{a}_1 u^2 + \mathfrak{a}_2 u + \mathfrak{a}_3,$$

so wird

$$\sqrt[3]{P(u)} = \mathfrak{a}_0^{1/3} e^{\frac{2\varrho\pi i}{3}} \left[u + \frac{1}{3}\frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{a}_0} + \mathfrak{P}\left(\frac{1}{u}\right)\right], \qquad \varrho = 0, 1, 2,$$

wo $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{u}\right)$ eine nach negativen Potenzen von u fortschreitende Potenzreihe bedeutet, die für $u = \infty$ gleich Null wird. Demnach hat $\sqrt[3]{P(u)}$ drei Werthe, deren jeder für $u = \infty$ von der ersten Ordnung unendlich wird. Um also die gewünschte Eigenschaft für y zu erreichen, brauchen wir nur

$$m = -l\mathfrak{a}_0^{1/3}$$

zu setzen. Des Weiteren ist es ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit gestattet,

$$n = 0, \quad l = \mathfrak{a}_0^{2/3}$$

anzunehmen, so dass die Gleichung zwischen u und y die Form erhält:

---

1) Vergl. die Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen aus dem Sommersemester 1885.

2) l. c.

2) $$L_0(y)\,u^2 + L_1(y)\,u + L_2(y) = 0,$$
wenn
$$L_0(y) = \mathfrak{a}_0^2(3y-\mathfrak{a}_1), \quad L_1(y) = \mathfrak{a}_0(3y^2-\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_2), \quad L_2(y) = y^3 - \mathfrak{a}_0^2\mathfrak{a}_3.$$
Durch Differentiation von Gleichung 2) nach y und u folgt:
$$3(y^2+2\mathfrak{a}_0 yu + a_0^2u^2)\,dy + [2L_0(y)\,u + L_1(y)]\,du = 0.$$
Hier ist nun
$$(y+\mathfrak{a}_0 u)^2 = \mathfrak{a}_0^{4/3}\sqrt[3]{Q(u)}$$
mit Einführung von
$$P^2(u) = Q(u)$$
und ausserdem
$$2L_0(y)\,u + L_1(y) = \sqrt{L_1^2(y) - 4L_0(y)\,L_2(y)}.$$
Setzt man ferner
$$L_1^2(y) - 4L_0(y)\,L_2(y) = 9\mathfrak{a}_0^{8/3}R(y),$$
wo $R(y)$ die Darstellung hat:
$$9\mathfrak{a}_0^{2/3}R(y) = -3y^4 + 4\mathfrak{a}_1y^3 - 6\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_2y^2 + 12\mathfrak{a}_0^2\mathfrak{a}_3y + \mathfrak{a}_0^2(\mathfrak{a}_2^2 - 4\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3),$$
so wird die Transformation

3) $$\frac{du}{\sqrt[3]{Q(u)}} + \frac{du}{\sqrt{R(u)}} = 0$$
einmal durch die Formel

4) $$y = \mathfrak{a}_0^{2/3}\sqrt[3]{P(u)} - \mathfrak{a}_0 u$$
und umgekehrt durch den aus 2) resultirenden Ausdruck

5) $$u = \frac{-3y^2 + \mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_2 + 3\mathfrak{a}_0^{1/3}\sqrt{R(y)}}{2\mathfrak{a}_0(3y-\mathfrak{a}_1)}$$

geleistet. Dabei entspricht dem Werthe $u=\infty$ der Werth $y=\infty$ und umgekehrt. Um an Stelle des speciellen Werthes $u=\infty$ einen beliebigen $u=u_0$ zu substituiren, führen wir
$$u' = \frac{1}{u-u_0}$$
ein. $Q(u)$ werde nach Potenzen von $u-u_0$ geordnet:
$$Q(u) = (u-u_0)^6(r_0u'^3 + r_1u'^2 + r_2u' + r_3)^2,$$
und eine Function $\mathfrak{Q}(u')$ so bestimmt, dass
$$\sqrt[3]{Q(u)} = (u-u_0)^2\sqrt[3]{\mathfrak{Q}(u')}$$
ist, dann verwandelt sich 3) in
$$\frac{du'}{\sqrt[3]{\mathfrak{Q}(u')}} = \frac{dy}{\sqrt{\mathfrak{R}(y)}},$$
wo $\mathfrak{R}(y)$ aus $R(y)$ durch Vertauschung von a_i mit r_i für $i=0,1,2,3$ hervorgeht, und die Integralausdrücke 4) und 5) gehen resp. in

6) $$y = \frac{\sqrt[3]{Q(u_0)}\sqrt[3]{P(u)} - P(u_0)}{u-u_0}$$
und
$$u' = \frac{-3y^2 + r_0r_2 - 3r_0^{1/3}\sqrt{\mathfrak{R}(y)}}{2r_0(3y-r_1)}$$

über, wo

$$9 r_0^{2/3} \Re(y) = -3y^4 + 4 r_1 y^3 - 6 r_0 r_2 y^2 + 12 r_0^2 r_3 y + r_0^2 (r_2^2 - 4 r_1 r_3),$$
$$r_0 = P(u_0),$$
$$r_1 = [P'(u)]_{u=u_0},$$
$$2 r_2 = [P''(u)]_{u=u_0},$$
$$r_3 = \mathfrak{a}_3.$$

Aus der Formel für u' finden wir:

$$7) \quad u - u_0 = \frac{P(u_0)}{2} \frac{-3y^2 + (\mathfrak{a}_1 + 3\mathfrak{a}_0 u_0) P(u_0) + 3\sqrt[3]{P(u_0)}\sqrt{\Re(y)}}{y^3 - \mathfrak{a}_0 Q(u_0)}.$$

Um endlich u durch die Weierstrass'sche $\wp$-Function ausgedrückt zu erhalten, haben wir nur die allgemeine elliptische Function zweiten Grades y in die genannte Function mit der Nebenbedingung überzuführen, dass für $y = y_0$ $s = \infty$ wird. Die bezüglichen Formeln sind von Herrn Weierstrass[1]) entwickelt worden und liefern für den Fall $y_0 = \infty$:

$$y = \frac{r_0^{2/3}}{2} \frac{27\sqrt{-3}\, r_0^{1/3} \sqrt{S} + 18 r_1 s + r_0^{1/3}(r_1 r_2 - 9 r_0 r_3)}{27 r_0^{2/3} s + r_1^2 - 3 r_0 r_2}$$

und

$$\frac{1}{9}\sqrt{\Re(y)} = \frac{1}{9}\frac{dy}{ds}\sqrt{S} = \frac{\frac{3}{2} r_0 (g_2 - 12 s^2)\sqrt{-3} - r_0^{2/3} r_1 + 3 r_0^{2/3} y \sqrt{S}}{27 r_0^{2/3} s + r_1^2 - 3 r_0 r_2},$$

wo in dem für die Irrationalität gegebenen Ausdrucke an Stelle von y die davor stehende Formel in Anwendung zu bringen ist. Dabei bezeichnet

$$S = 4 s^3 - g_2 s - g_3,$$

und die Invarianten g_2 und g_3 haben die Werthe:

$$8) \quad g_2 = 0,$$
$$g_3 = -\frac{1}{3^6}(r_1^2 r_2^2 - 4 r_1^3 r_3 + 18 r_0 r_1 r_2 r_3 - 4 r_0 r_2^3 - 27 r_0^2 r_3^2).$$

Somit stimmt g_3 bis auf einen Factor mit der Discriminante von $\mathfrak{P}(u')$ überein, einer Function, deren Bedeutung aus der Gleichung

$$\sqrt[3]{P(u)} = (u - u_0)\sqrt[3]{\mathfrak{P}(u')}$$

hervorgeht. Da nun $\mathfrak{P}(u')$ aus $P(u)$ durch lineare Transformation entstanden ist, so unterscheiden sich ihre Discriminanten nur durch Factoren, und es ergiebt sich:

$$9) \quad g_3 = -\frac{1}{3^6}(\mathfrak{a}_1^2 \mathfrak{a}_2^2 - 4\mathfrak{a}_0 \mathfrak{a}_2^3 + 18 \mathfrak{a}_0 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3 - 4 \mathfrak{a}_1^3 \mathfrak{a}_3 - 27 \mathfrak{a}_0^2 \mathfrak{a}_3^2),$$

so dass wir schliesslich erhalten:

$$10) \quad y = \frac{\sqrt[3]{Q(u_0)}}{2} \frac{27\sqrt{-3}\sqrt[3]{P(u_0)}\sqrt{S} + 18 P'(u_0) s + \sqrt[3]{P(u_0)}\left[(\mathfrak{a}_1 + 3\mathfrak{a}_0 u_0) P'(u_0) - 9\mathfrak{a}_0 P(u_0)\right]}{27 s \sqrt[3]{Q(u_0)} + P'^2(u_0) - 3 P(u_0)(\mathfrak{a}_1 + 3\mathfrak{a}_0 u_0)},$$

$$11) \quad \sqrt{\Re(y)} = -9\sqrt[3]{Q(u_0)} \frac{18\sqrt{-3}\sqrt[3]{P(u_0)}\, s^2 + P'(u_0) - 3y\sqrt{S}}{27 s \sqrt[3]{Q(u_0)} + P'^2(u_0) - 3 P(u_0)(\mathfrak{a}_1 + 3\mathfrak{a}_0 u_0)}.$$

---

1) Vergl. die Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen aus dem Sommersemester 1883.

Was die Darstellung von s durch die Thetafunction angeht, so tritt hier gegen den allgemeinen Fall eine Vereinfachung ein, die eine Folge unserer Integrationsmethode ist. Wir finden nämlich:

$$z - z_0 = \int_{\infty}^{s} - \frac{ds}{\sqrt{S}},$$

woraus

$$s = p(z - z_0),$$

während sich im Allgemeinen $z - z_0$ als die Differenz zweier Normalintegrale darstellt.

Die hier auftretende p-Function ist dieselbe, auf welche man bei der Theilung der Curve

$$r^3 = \frac{2 \cos 3\varphi}{\sqrt{g_3}}$$

in $6q + 1$ gleiche Theile geführt wird. Das zugehörige Periodenpaar ist $(2\omega, 2\varepsilon\omega)$, wenn ε eine Wurzel der Gleichung

$$4s^3 - g_3 = 0$$

bedeutet. Eine solche p-Function hat aber die charakteristische Eigenschaft, complexe Multiplication und zwar im Gebiete der dritten Einheitswurzeln zuzulassen. Dieselbe Eigenschaft kommt daher auch den doppeltperiodischen Functionen zu, welche einer binomischen Differentialgleichung erster Ordnung und dritten Grades genügen.

Zum Schlusse wollen wir noch darauf hinweisen, wie die Frage, wann die durch 1) definirte Function in eine einfachperiodische resp. rationale Function ausartet, durch Betrachtung der p-Function entschieden werden kann. Bekanntlich geht diese in eine Exponentialfunction über, falls

$$g_2^3 - 27 g_3^2 = 0,$$

und in eine rationale Function, falls

$$g_2 = 0, \quad g_3 = 0.$$

Berücksichtigt man nun die in 8) und 9) gegebenen Werthe der Invarianten, so erkennt man, dass die Differentialgleichung 1) keine einfach periodische Function definiren kann, und dass ihr eine rationale Function von z dann genügt, wenn die Gleichung

$$P(u) = 0$$

gleiche Wurzeln besitzt, ein Resultat, das schon von den Herren Briot und Bouquet gefunden worden ist.

Berlin, im Juli 1890. Dr. Jahnke.

XV. Ueber einen Satz aus der projectivischen Geometrie.

Im 27. Jahrgang dieser Zeitschrift, S. 380, stellt Herr Schlömilch folgenden Satz auf:

Es sei $ABCD$ ein gewöhnliches Viereck, E der Durchschnitt von AC und BD, F der von AB und CD, G der von DA und BC; wird nun $ABCD$ mittels eines beliebig gewählten Projectionscentrums O perspectivisch auf eine Ebene projicirt, welche die Gerade FG in sich enthält, und ist $A'B'C'D'$ die entstandene Abbildung, so gehen die vier Geraden AC', BD', CA', DB' durch einen und denselben Punkt P. Dreht sich die Projectionsebene um FG, so durchläuft P die Gerade EO.

Dieser zunächst von Herrn Sachse (Jahrg. 27 S. 381 flg.) und später in einfacherer Art von den Herren Schroeter (Jahrg. 28 S. 178 flg.) und Quidde (Jahrg. 28 S. 192) bewiesene Satz kann als ein besonderer Fall des folgenden allgemeineren aufgefasst werden:

Projicirt man ein vollständiges Vierseit aus einem Punkte des Raumes auf eine andere Ebene und verbindet irgend zwei Gegenpunkte des einen Vierseits wechselweise mit den entsprechenden Gegenpunkten des andern durch zwei Gerade, so schneiden sich diese auf einer bestimmten Geraden.

Zum Beweise dieses Satzes nehmen wir in der Ebene ε ein vollständiges Vierseit $abcd$ an und bezeichnen seine Gegenpunkte

$$\begin{array}{llllllll} a\cdot b & \text{und} & c\cdot d & \text{mit} & A & \text{und} & B, \\ a\cdot c & „ & b\cdot d & „ & C & „ & D, \\ a\cdot d & „ & b\cdot c & „ & E & „ & F. \end{array}$$

Projiciren wir dann dieses Vierseit aus einem Punkte O des Raumes auf eine Ebene ε', so erhalten wir in dieser ein vollständiges Vierseit $a'b'c'd'$ mit den Gegenpunkten A' und B', C' und D', E' und F'. Verbinden wir ferner die Gegenpunkte A und B des einen Vierseits wechselweise mit den entsprechenden Gegenpunkten A' und B' des andern durch die Geraden AB' und BA', so schneiden sich diese in einem Punkte P, weil diese beiden Paare von Gegenpunkten in einer durch O gehenden Ebene liegen. Da nun in dem Viereck $ABB'A'$ die Gegenseiten AA' und BB' durch O, die Gegenseiten AB und $A'B'$ durch einen Punkt S auf der Schnittlinie s der Ebenen ε und ε' und die Gegenseiten AB' und BA' durch P gehen, so ist letzterer Punkt harmonisch getrennt von O durch die Geraden AB und $A'B'$, also auch durch die Ebenen ε und ε'. P liegt also auf derjenigen durch s gehenden Ebene π, welche von O durch ε und ε' harmonisch getrennt ist. Andererseits ist auch P harmonisch getrennt durch OA und OB von S, folglich geht die Gerade OP durch denjenigen Punkt T auf der Diagonale AB, welcher der Geraden s conjugirt ist.

In ganz ähnlicher Weise lässt sich zeigen, dass der Punkt P_1, in welchem die Geraden CD' und DC' sich schneiden, 1. auf jener Ebene π liegt und 2. auf einer Geraden OT_1, welche die Diagonale CD in dem zu s conjugirten Punkte trifft. Ebenso liegt der Punkt P_2, durch welchen die Geraden EF' und FE' gehen, 1. auf der Ebene π und 2. auf der Geraden OP_2, welche die Diagonale EF in dem zu s conjugirten Punkte T_2 trifft.

Diese drei auf den Diagonalen AB, CD und EF des vollständigen Vierseits gelegenen Punkte T, T_1 und T_2, welche der Geraden s conjugirt sind, liegen nun aber selbst in einer Geraden t. Projiciren wir nämlich aus einem Punkte R des Raumes die Figur der Ebene ε auf eine zu der Ebene Rs parallele Ebene ϱ, so ist die unendlich ferne Gerade dieser Ebene die Projection von s, und folglich sind die Mittelpunkte der Diagonalen des Vierseits in ϱ die Projectionen von T, T_1 und T_2. Da nun aber nach Gauss jene drei Mittelpunkte in einer Geraden liegen, so gilt dies auch von T, T_1 und T_2.

Weil P, P_1 und P_2 die Projectionen von den in der Geraden t gelegenen Punkten T, T_1 und T_2 sind, so liegen sie in der Ebene Ot, und da sie andererseits auch Punkte der Ebene π sind, so liegen sie auf der Schnittlinie p dieser beiden Ebenen.

Dreht sich ε' um s, so behält die Ebene Ot ihre Lage bei, folglich beschreibt alsdann p in der Ebene Ot um den Punkt S einen Strahlenbüschel erster Ordnung, welcher, wie man leicht erkennt, zu dem Ebenenbüschel $s(\varepsilon')$ projectivisch ist.

Für den Fall, dass die Projectionsebene ε' durch eine Diagonale des Vierseits in ε, z. B. durch AB geht, hat P, weil alsdann AB' auf BA fällt, eine unbestimmte Lage in dieser Geraden, folglich müssen die mit P in einer Geraden liegenden Punkte P_1 und P_2 zusammenfallen. Dies ist der Schlömilch'sche Satz. Wir sehen, wie er sich als ein besonderer Fall des hier entwickelten erweist.

Das Correlat des Satzes kann wie folgt ausgesprochen werden:

Schneiden sich zwei vollständige Vierkante in einem vollständigen Viereck und bringt man irgend zwei Gegenebenen des einen Vierkants wechselweise zum Durchschnitt mit den entsprechenden Gegenebenen des andern Vierkants, so liegen die beiden Schnittgeraden in einer Ebene, die durch eine bestimmte Gerade geht.

Saarbrücken, im Juni 1890. Dr. Theodor Meyer.

XVI. Bemerkung über eine zahlentheoretische Formel.

Bei der Berechnung der Anzahl der Primzahlen innerhalb eines gegebenen Zahlenraumes nach der Meissel'schen Recursionsformel* ist eine Function $\Phi(m, n)$ von Wichtigkeit, welche die Anzahl der Zahlen in dem

* Mathematische Annalen, Bd. II.

Gebiete der natürlichen Zahlenreihe von 1 bis m darstellt, die durch keine der n ersten Primzahlen theilbar sind.

So ist z. B.

$$\Phi(30, 6) = 5$$

die Anzahl der Zahlen im Gebiete von 1 bis 30, welche durch keine der 6 ersten Primzahlen

$$p_1 = 2, \quad p_2 = 3, \quad \ldots, \quad p_6 = 13$$

theilbar sind.

Lässt man m unbestimmt und scheidet für ein gegebenes n aus der natürlichen Zahlenreihe alle Zahlen aus, die durch irgend eine der n ersten Primzahlen theilbar sind, so bemerkt man, dass die Reihe in Abschnitte zerfällt, die in Bezug auf die Aufeinanderfolge der Intervalle congruent sind. Denn sämmtliche unendlich vielen Zahlen von der Form

$$g \cdot p_1 \cdot p_2 \cdots p_x \cdots p_n + r$$

(unter g und r ganze Zahlen verstanden) sind durch eine der n ersten Primzahlen p_x theilbar oder nicht, je nachdem r durch p_x theilbar ist oder nicht. Es stellt also

$$\pi = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n$$

ein Zahlengebiet dar, dessen Intervalle sich periodisch wiederholen.

Diese Eigenschaft der periodischen Wiederholung ermöglicht eine Erleichterung bei einer wirklichen Berechnung der Function $\Phi(m, n)$, sobald man im Stande ist, die Anzahl der zu einer Gruppe von dem Umfange 1 bis π gehörigen Zahlen von vornherein anzugeben. Da nun

$$\begin{aligned}\Phi(\pi, n) &= p_1 \cdot p_2 \cdots p_n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_n}\right) \\ &= (p_1 - 1)(p_2 - 1) \ldots (p_n - 1),^*\end{aligned}$$

so erhält man leicht die von Herrn Meissel bei der Berechnung von Primzahlmengen im II. Bande der Mathem. Annalen benutzte Formel:

$$\Phi(g \cdot p_1 \cdot p_2 \cdots p_n + r) = g \cdot (p_1 - 1)(p_2 - 1) \ldots (p_n - 1) + \Phi(r, n).$$

Nun bin ich durch Herrn Bischof Baranowski in Kowno darauf aufmerksam gemacht worden, dass jede Reihe, welche einer Function $\Phi(m, n)$ entspricht, neben der periodischen Wiederkehr derselben Intervalle auch eine symmetrische Vertheilung derselben innerhalb jeder Gruppe π zeigt, und dass auch diese Thatsache bei einer auszuführenden Rechnung mit Vortheil verwendet werden könnte.

---

* Wertheim, Elemente der Zahlentheorie, S. 19, 20.

Offenbar ist nämlich auch die Theilbarkeit der Zahl

$$g \cdot p_1 \cdot p_2 \ldots p_x \ldots p_n - r$$

durch die Primzahl p_x bedingt durch die Theilbarkeit der Zahl r.

Die Bemerkung des Herrn Baranowski weist also auf eine Ergänzung der Meissel'schen Formel hin, welche nun folgende Form annehmen würde:

$$\Phi(g \cdot p_1 \cdot p_2 \ldots p_n \pm r) = g \cdot (p_1 - 1)(p_2 - 1) \ldots (p_n - 1) \pm \Phi(r, n).$$

Die Ergänzung durch das Minuszeichen hat freilich nur für den Fall Bedeutung, dass m näher an der obern, als an der untern Grenze einer Periode liegt.

Eisenach. Dr. Carl Hossfeld.

Historisch-literarische Abtheilung

der

Zeitschrift für Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.

XXXV. Jahrgang.

Leipzig,

Verlag von B. G. Teubner.

1890.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Inhalt.

I. Abhandlungen.

II. Recensionen.

Geschichte der Mathematik.

Arithmetik, Algebra, Analysis.

Synthetische, analytische, descriptive, praktische Geometrie.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Mechanik, Physik, Meteorologie.

Historisch-literarische Abtheilung.

Ueber Marcus Marci de Kronland.

Von

Dr. W. Láska

in Prag.

Schon seit längerer Zeit sammle ich Materialien zu einer Geschichte der exacten Wissenschaften in Böhmen und hoffe, wenn kein Hinderniss dazwischen kommt, schon in dem nächsten Jahre mit der Publication der Quellen zu beginnen.

Diesmal möchte ich nur bei Gelegenheit einer Bemerkung etwas über Marcus Marci mittheilen.

In dem Aufsatze von E. Gelcich, Ueber die Geschichte des Stosses, der in den letzten Heften dieser Zeitschrift publicirt wurde, finde ich S. 45 die Bemerkung, dass die Schrift Marcus Marci, De proportione motus, den englischen Physikern unbekannt geblieben; denn sonst hätten ja Männer wie Wallis und Huygens nicht versäumt, die englische Akademie auf sie aufmerksam zu machen. Goethe hatte Marcus Marci gekannt.

Dass Huygens sehr bald die Kunde von diesem Werke erhielt, ja, dass Marcus Marci's Schriften ihm durch Kinnereus von Loewenthurm schon im Jahre 1654 zugeschickt wurden und dass sie von Huygens gelesen wurden, geht aus einem Brief Huygens' an Kinnereus hervor.* Huygens tadelt sie sehr. Doch enthalten sie so viele treffliche Bemerkungen und eine ausgezeichnet philosophische Begründung, die stets auf die Erfahrung zurückgeht, dass sie in der Geschichte der exacten Wissenschaften immer eine ehrenvolle Stelle einnehmen werden.

Ausserdem hat er ja bekanntlich die Gesetze des Stosses zuerst untersucht, ohne jedoch zu den heutigen Formeln zu gelangen.

Ich erlaube mir, auf einzelne Stellen und Capitelüberschriften hinzuweisen, in der Hoffnung, dass sie einen Forscher, dem mehr Zeit zur Verfügung steht als mir, zu weiteren Studien veranlassen werden.

* Oeuvres compl. de Huygens pub. p. l. Soc. holland. des scienc. Tom. I, p. 307. Editio 1888.

Für die wichtigsten seiner Schriften werden allgemein anerkannt:

I. De proportione motus seu regula sphygmica ad celeritatem et tarditatem pulsuum ex illius motu ponderibus geometricis librato absque errore metiendam. Pragae 1639.

II. De proportione motus figurarum rectilinearum et circuli quadratura ex motu. Pragae 1648.

III. Thaumantias: liber de arcu coelesti deque colorum apparentium natura ortu et causis, in quo pellucidi opticae fontes a sua scaturigine ab his vero colorigeni rius dirivantur, ducibus geometria et physica hermetoperipatetica. Pragae 1848.

Ausser diesen besitze ich noch von ihm folgende minder wichtige Schriften:

IV. Idearum operatricium idea. Pragae 1639.

V. Labyrintus in quo via ad circuli quadraturam pluribus modis exhibetur. Pragae 1653.

In der Bibliothek der k. k. Universität befinden sich ausserdem:

VI. Observationes exactico-philosophicae. Pragae 1647.

VII. De causis natur. pluviae purpureae bruxellensis. Pragae 1647.

VIII. Dissertatio de natura iridis. Pragae 1650.

IX. De longitudine seu de differentia inter duos meridianos una cum motu vero lunae invenienda ad tempus datae observationis 1650.

Einige der wichtigeren Capitel sind die folgenden:

Aus der Schrift de proportione motus I.

Positio IV. Virtus agendi et actio inter se sunt aequales.

Propositio IV. Impulsus in quodlibet puncto circuli per lineam fit tangentem.

Propositio VII. Velocitas motus eandem rationem habet quam intervalla, rationem vero suorum temporum reciprocam.

Propositio XII. Incrementa velocitatis rationem habent quam temporum quadrata.

Propositio XV. Motus ex eodem puncto per lineas subtensas *(Kreissehnen)* sunt aequales motui per diametrum ejusdem circuli.

Propositio XXXII. Motus perfecte mixtus fit per diametrum parallelogrami, cujus latera constituit motus simplex.

In der zweiten De proportione motus stellt er als Axioma III auf: Motus gravium fit per lineas rectas se intersecantes in mundi centro.

Nicht minder wichtig ist die Schrift Thaumantias.

Hier wird die Dispersion, Refraction und Reflexion besprochen.

Zunächst *De iride trigonia* (Prismenspectrum) *illius proprietatibus et earundem causis.* In der observatio II wird gesagt: *Colores in iride primarii sunt quatuor: puniceus, viridis, caeruleus et purpureus: veluti fascis a se discreti.* Sodann wird in Theorema XX gezeigt, dass *Refractio superveniens* (wiederholte Refraction) *radio collorato non mutat speciem coloris.*

Als *causa refractionis* wird S. 126 die *contractio radiorum in medio denso, ob multitudinem materiae* angegeben. Sodann wird die Reflexion besprochen. Diese höchst wichtige Stelle theile ich etwas ausführlicher mit. S. 132 Z. 4 v. u.

Principiis ergo positis insistendo, dico ab iisdem causis reflexionem et refractionem provenire. Quia enim radiationes luminosae sphaerice et in orbem fiunt radiis rectis ex uno communi centro luce propagata ... Unitas autem sphaerae radiosae ab unitate medii pendet ... At vero cum medium occurit partium magis minusve confertarum; non eo quo prius tenore progredi potest: unde neglecta sua, in jus et leges novae sphaerae se addicit: cujus centrum est punctum incidentiae.

Zum Schlusse möchte ich bemerken, dass sich freilich bei Marcus Marci Wahres und Falsches beisammenfindet, dass aber selbst das Falsche in seinem System begründet ist. Er sucht mit allem Ernst die Wahrheit, macht sich selbst Einwürfe, die er widerlegt, bespricht stets die Meinungen Anderer, indem er die bezüglichen Stellen ihrer Schriften an geeigneten Orten anführt, so dass seine Leistung für die damalige kritiklose Zeit nicht hoch genug angeschlagen werden kann.

Recensionen.

Greek Geometry from Thales to Euclid by George Johnston Allman, LL. D., D. Sc.; Fellow of the Royal Society; Professor of Mathematics in Queen's College, Galway; Member of the senate of the Royal University of Ireland. Dublin University Press Series 1889. Dublin u. London. XII, 237 pag.

Herr Allmann hat 1877 angefangen, Abhandlungen über die älteste griechische Geometrie in einer in Dublin unter dem Titel Hermathena erscheinenden Zeitschrift zu veröffentlichen. Die ersten dieser eine zusammenhängende Reihe bildenden Abhandlungen hat Referent in dem I. Bande seiner Vorlesungen über Geschichte der Mathematik berücksichtigt, in den folgenden Abhandlungen ist umgekehrt das oben genannte Werk von Herrn Allman benutzt, benutzt freilich, wie jedes frühere Werk von jedem gewissenhaften späteren Schriftsteller benutzt werden soll und muss, unter kritischer Prüfung und unter ehrlicher Nennung Dessen, was man ihm schuldet. Wir freuen uns, sagen zu dürfen, dass im Grossen und Ganzen die Ergebnisse nur gesicherter auftreten, welche Bretschneider 1870 der Hauptsache nach zuerst zusammenstellte, auf welche dann der Referent und theils mit, theils nach ihm so zuverlässige Forscher wie Herr Allman in England, Herr Paul Tannery in Frankreich zurückkamen. Wir könnten kaum einen wichtigen geschichtlichen Satz aussprechen, der durch diese wiederholte Sichtung und Prüfung vollständig umgestossen wäre, mag auch Einzelnes noch strittig bleiben. Herr Allman hat nun seine sämmtlichen Aufsätze in einen Band vereinigt und dieselben dadurch leichter zugänglich gemacht, als solches früher der Fall war, da die Verbreitung der Dubliner Hermathena insbesondere auf dem Festlande eine kaum nennenswerthe ist. Freilich war Herr Allman mit Sonderabzügen seiner Untersuchungen gegen die eigentlichen Fachgenossen freigebig, aber selbstverständlich auch nur gegen diese, während die Buchausgabe die weiteste Verbreitung ermöglicht. Ob Herr Allman bei Veranstaltung der Buchausgabe nicht Aenderungen hätte vornehmen können und sollen, ist Geschmacksache. Herr Allman hat es vorgezogen, von Aenderungen im fortlaufenden Texte abzusehen und nur am Schlusse 7 Seiten Zusätze beizufügen, in welchen er sich mit einigen Einwürfen und neueren Ansichten abzufinden sucht.

Cantor.

A History of the study of mathematics at Cambridge by W. W. Rouse Ball, Fellow and lecturer of Trinity College, Cambridge. Cambridge 1889 at the university Press. XVI, 264 pag.

Wir haben einen Band über Geschichte der Mathematik desselben Verfassers, Bd. XXXIV hist.-lit. Abth. S. 103—105, nicht anders als ungünstig zu beurtheilen vermocht. Der uns heute zum Bericht unterbreitete Band trägt eine nur um ein Jahr höhere Jahreszahl, scheint also in ziemlich rascher Arbeit gefertigt. Wenn man Solches auch manchen Stellen anmerkt, wo das Festina lente entschieden zu wünschen gewesen wäre, welches wir Herrn Ball als wohl zu beachtende Zukunftsregel dringend empfehlen möchten, so ist doch der Gesammteindruck des neuen Werkchens ein wesentlich angenehmerer. Herr Ball gehört selbst der Cambridger Hochschule an. Die Schriften, welche auf die Entstehung und Entwickelung dieser seiner geistigen Heimath sich beziehen, standen ihm dort leicht und vollzählig zur Verfügung. Ueberdies führte die überall begreifliche, in England ganz vorzugsweise entwickelte Liebe zur Erziehungsstätte, aus der er hervorgegangen und an der er weiter wirkt, seine Feder. So konnte, wir möchten beinahe sagen, so musste ein reiferes Werk entstehen, für welches der Verfasser keinen über den eigenen Sehkreis hinausreichenden Boden nutzbar zu machen hatte, dafür aber umsomehr in die Tiefe drang.

Der Inhalt ist in zwei ziemlich gleichen Raum erfüllende Theile gegliedert. Die erste Abtheilung, S. 1—137, schildert in sieben Capiteln die Mathematiker der Universität Combridge. Einige von ihnen, denen auch die allgemeine Geschichte der Mathematik einen Platz einzuräumen nicht unterlassen kann, sind etwas ausführlicher behandelt. Wir nennen in der Reihe ihrer Zeitfolge Robert Recorde, Henry Briggs, John Wallis, Isaac Barrow, Roger Cotes und natürlich in allererster Linie den Heros der Universität Cambridge, den Weltmathematiker Newton. Ueber seine unsterblichen Verdienste, über die nur etwa durch Archimed, Fermat und Gauss ihm streitig zu machende erste Stellung unter den Mathematikern aller Zeiten wird kaum ein Streit möglich sein, und wenn Herr Ball ihm ein eigenes Capitel widmet, so sind wir weit entfernt zu meinen, er habe damit zu viel gethan, eher zu wenig. Trotzdem müssen wir wiederholen, was wir in der Besprechung des früheren Buches sagten. Herr Ball hätte die Gerechtigkeit gegen Newton nicht darin finden sollen, dass er ungerecht gegen Leibniz wurde; er hätte nicht Newton's Charakter seinem Geiste gleichstellen dürfen; er hätte mit einem Worte nicht einseitig Partei für den Parteigänger ergreifen sollen. Newton's Benehmen gegen Flamsteed musste genügen, den Satz unterdrücken zu lassen, jener sei gegen seine Gegner, wenn nicht grossmüthig, doch stets gerecht gewesen.

Die zweite Abtheilung, S. 138—254, handelt in vier Capiteln von englischem Universitätsleben und Sitten, von der Entwickelung Cambridges und den dort gelehrten Dingen, von der Erwerbung wissenschaftlicher Grade und von den in den mathematischen Wissenschaften zu Grunde gelegten Lehrbüchern. Dieser Abtheilung gegenüber müssen wir ein eigentliches Urtheil ablehnen. Von allen diesen Sachen wussten wir so gut als Nichts, bevor wir Herrn Ball's anziehende Schilderungen gelesen hatten. Wir haben indessen aus den am Anfange auseinandergesetzten Gründen nicht die geringste Veranlassung, daran zu zweifeln, dass wir hier vor einer zutreffenden, bis ins Einzelne richtigen Schilderung uns befinden und wir wissen dem Verfasser um so aufrichtigeren Dank dafür, je schwieriger es sonst für den Ausländer ist, sich über diese ganz eigenartigen Zustände eine richtige Kenntniss zu erwerben.

Cantor.

Philipp Melanchthon als Praeceptor Germaniae von Dr. Karl Hartfelder, Professor am Gymnasium in Heidelberg. Berlin 1889 bei A. Hofmann & Co. XXVIII, 687 S. (VII. Band der Monumenta Germaniae Paedagogica. Unter Mitwirkung einer Anzahl von Fachgelehrten herausgegeben von Karl Kehrbach.)

Den III. Band des grossartig angelegten Sammelwerkes von Schulordnungen, Schulbüchern und pädagogischen Miscellaneen aus den Landen deutscher Zunge haben wir Bd. XXXIII hist.-lit. Abth. S. 109—111 angezeigt. Er enthielt Günther's Geschichte des mathematischen Unterrichts im deutschen Mittelalter bis zum Jahre 1525 und war durch seinen Gegenstand, wie durch seinen Verfasser uns und unseren Lesern zum Voraus warm empfohlen. Der VII. Band dagegen schien der Ueberschrift nach einer Besprechung in dieser Zeitschrift wenig zu bieten, und wenn Referent auch als Heidelberger das Vergnügen der Bekanntschaft des Verfassers hat, als Mathematiker musste er dessen Namen nicht kennen. Dass wir trotzdem unsere Leser auf das Hartfelder'sche Buch aufmerksam zu machen für richtig halten, beruht darauf, dass Melanchthon unzweifelhaft eine Persönlichkeit von nach Gegenstand und Wirkungskreis so weit sich erstreckendem Einflusse war, dass auch die Mathematik sich diesem Einflusse nicht entziehen konnte, und Herr Hartfelder hat es vortrefflich verstanden, die Vielseitigkeit, man wäre fast versucht, zu sagen, die Allseitigkeit seines Helden ins richtige Licht zu setzen. Unsere Aufgabe kann es nicht sein, über das ganze Buch zu berichten, dessen Bedeutung die theologische Facultät der Universität Heidelberg durch Ernennung des Verfassers zum Doctor der Theologie anerkannt hat; wir beschränken uns auf die Betonung Dessen, was für den Geschichtsschreiber der Mathematik aus dem stattlichen Bande zu erlernen ist. Es deckt sich dieses allerdings bis zu einem gewissen Grade mit den Schlusscapiteln von Günther's obengenanntem Werke, sowie mit den ersten Druckbogen von Unger's Methodik der praktischen Arithmetik (Leipzig 1888), aber doch nur so, wie man von der Verwandtschaft dreier Gemälde reden könnte, deren zwei am äussersten Rande, einmal rechts, einmal links, eine Persönlichkeit erkennen lassen, die auf dem dritten Bilde den ganzen Mittelgrund stattlich erfüllt.

Philipp Melanchthon war schon zu Lebzeiten Praeceptor Germaniae genannt. Deutschlands Lehrer hat er um den Unterricht sich verdient gemacht, welchen Namen auch die Bildungsstätten führten, um welche es sich handelte. Eine Art von solchen Bildungsstätten müssen wir freilich ausnehmen, die Volksschule. Vorschriften für diese hat Melanchthon nicht gegeben; erst die niedere Lateinschule, in drei Classen zerfallend und darum Trivialschule genannt, erfreute sich des Wohlwollens des für die Schule begeisterten Humanisten, der so sehr Humanist war, dass er einen Unterricht nicht würdigte, welcher nicht in lateinischer Sprache ertheilt wurde, also selbst den Unterricht in der Universitätssprache als ersten Lehrgegenstand bedingte. „Die Schulmeister", sagt M., „sollen selbst, soweit möglich, nichts denn lateinisch mit den Knaben reden." Schulherr dieser niederen Lateinschule war nicht mehr, wie früher, eine kirchliche, sondern eine weltliche Behörde. In gemeinsamer Berücksichtigung des für Staat und Kirche Unentbehrlichen war dem Staate, beziehungsweise der Stadt, die Pflicht auferlegt, Ersatz für die arg heruntergekommene reine Kirchenschule zu schaffen. Um so auffallender erscheint es dem heutigen Leser, dass die Lehrgegenstände, welche den praktischen Lebensbedürfnissen gegenwärtig weit mehr zugezählt werden, als die Kenntniss der lateinischen Sprache, dass Rechnen, Geschichte und Geographie der Trivialschule fremd sind. Erst die Universität und die ihr ziemlich gleichstehende höhere Schule zu Nürnberg, die auch wirklich in nicht allzulanger Frist zur Universität Altorf sich umwandelte, kennen Lehrer der Mathematik und mathematischen Unterricht niedrigsten Gegenstandes. „Die Anfangsgründe der Arithmetik, das Addiren und Subtrahiren sind unbedingt zum täglichen Gebrauche nothwendig und so leicht, dass Knaben sie erlernen können; die Regeln der Multiplication und Division erfordern allerdings ein wenig mehr Aufmerksamkeit, aber bei einiger Anstrengung werden sie doch bald begriffen." So lauten M.'s Ansichten über den arithmetischen Gehalt von Universitätsvorlesungen. Zu ihrer Bethätigung hielt er zwei Professuren der Mathematik für nothwendig unter den zehn Professuren der philosophischen Facultät, wie man damals gerade statt des früheren Namens der Artisten zu sagen anfing. Der heutige Mathematiker wird halb spöttisch, halb mitleidig von der seinen Amtsvorgängern gestellten Aufgabe hören, und dennoch wird er M. gegenüber sich zu Dank verpflichtet fühlen, denn dieser schuf, freilich in Nachahmung einer Einrichtung der Wiener Universität, welche auf Kaiser Maximilian zurückgeht, für Deutschland die Form, der die sich entwickelnde Wissenschaft allmälig erst den Inhalt liefern sollte. M. begnügte sich nicht damit, in dieser allgemeinen Weise für unsere Wissenschaft einzutreten. Er hat an der Herausgabe mathematischer Werke sich wenigstens durch Vor-reden betheiligt, und unter den so durch ihn empfohlenen Schriften nennen wir Stifel's Arithmetica integra, das bedeutendste mathematische Werk eines deutschen Verfassers im XVI. Jahrhunderte. Auch einige Declamationen M.'s sind zu nennen. Declamationen nannte M. lateinische Reden, welche bei festlichen Anlässen von ihm selbst oder von Anderen, für die er sie schrieb, vorgetragen wurden. Eine solche Declamation verfasste M. als Antrittsvorlesung für Joachim Rhäticus. Eine zweite über Regiomontanus hielt er selbst. Als eine dritte Declamation M.'s hat in der Ausgabe seiner Werke (Corpus Reformatorum ed. C. G. Bretschneider XI, 531—544, Halle 1843) die Rede Abdruck gefunden, welche einst Regiomontanus in Padua als Einleitung zu seinen Vorlesungen über Alfraganus hielt. Bei der grossen Seltenheit des Nürnberger Druckes jener Rede von 1537 ist die Möglichkeit, dieselbe auch unter M.'s Namen zu lesen, gewiss sehr angenehm, aber dass M. sie jemals als sein Eigenthum beansprucht haben sollte, scheint uns wenigstens unmöglich. Wir vermuthen hier eine kleine Ungeschicklichkeit des Herausgebers des Corpus Reformatorum, dadurch hervorgerufen, dass in jenem Nürnberger Drucke von 1537 ausser der Rede des Regiomontanus auch eine „Epistola Philippi Melanthonis nuncupatoria ad Senatum Norimbergensem" abgedruckt ist, und dass die Urheberschaft der Rede und des Briefes vermengt wurden. Unsere Leser dürften an diesen geringfügigen Auszügen aus einem kleinen Theile des umfangreichen Bandes erkennen, wie vielerlei in demselben abgehandelt ist. M.'s Denkspruch war: „Multum, non multa." Sein Biograph hat „multum et multa" geliefert.

Cantor.

Geschichte der unendlichen Reihen von Dr. R. Reiff, Professor am Gymnasium zu Heilbronn. Tübingen 1889. Verlag von H. Laupp. IV, 212 S.

Referent glaubt seinen Bericht mit den Worten beginnen zu sollen, dass ihm selten eine sorgsamere, fleissigere, sauberere Arbeit in die Hände gekommen ist, als die vorliegende. Herr Reiff hat mit tiefem Verständnisse die Aufgabe gestellt, er hat sie unter Bewältigung ihrer grossen Schwierigkeiten zu lösen gewusst und seinen hoffentlich recht zahlreichen Lesern die Gelegenheit geboten, in der mathematischen Sprache der Gegenwart zu lesen, was in der Ausdrucksweise der betreffenden Schriftsteller selbst sich anzueignen nicht immer so leicht ist, als Mancher denken mag.

Herr Reiff hat seinen Gegenstand in drei Abschnitten behandelt. Der erste Abschnitt ist der der beginnenden Beschäftigung mit unendlichen Reihen gewidmet. Wallis, der, beiläufig bemerkt, das Zeichen der Unendlichkeit eingeführt zu haben scheint, Brouncker, Mercator mit seiner Entwickelung von $\frac{1}{1+a}$ durch fortgesetzte Division, James Gregory, dem der Name der Reihenconvergenz zu verdanken ist, sind die Männer, welche den Boden vorbereiteten, auf welchen dann Newton, Leibniz, Jacob und Johann Bernoulli den Samen streuten, aus welchem eine neue Lehre entstehen sollte. Ueber Newton's Abhandlung „De analysi per aequationes numero terminorum infinitas“ wird verdientermassen ausführlich berichtet. Als Zweiter der Zeit nach erscheint Leibniz, aber mit anderen Zwecken, mit anderen Hilfsmitteln. Müssig, wie der Streit um das Erfinderrecht der Infinitesimalrechnung, zu welcher die beiden Nebenbuhler von ganz verschiedenen Seiten und auf von einander verschiedenen Wegen gelangten, wäre es zu fragen, wieviel in der Reihenlehre der Eine etwa von dem Andern entlehnt habe. Bei Leibniz ist insbesondere die Anwendung der von Descartes erfundenen Methode der unbestimmten Coefficienten auf unendliche Reihenentwickelung merkwürdig, und die erste, wenn auch noch nicht vollbewusste Anwendung des Satzes von der Convergenz solcher Reihen, deren Glieder bei wechselndem Vorzeichen kleiner und kleiner werden. Die beiden Bernoulli sammeln die durch sie selbst wesentlich vermehrte Reihenlehre zu einem Ganzen.

In dem zweiten Abschnitte zeigt sich die Periode der formalen Behandlungsweise der Reihen. Moivre mit der Erweiterung des binomischen Satzes zum polynomischen (einer Aufgabe, der Leibniz sich allerdings schon 1695 zugewandt hatte), dann mit der Erfindung der recurrenten Reihen steht an der Spitze dieses Zeitraumes, ihm zunächst Brook Taylor. Stirling und Mac Laurin setzen ihre Arbeiten fort. Letzterer bringt die vorher in ihrer Bedeutung verkannte Taylor'sche Reihe zu richtiger Würdigung. Die Periode gipfelt in Euler, an ihrer unteren Grenzscheide steht Lagrange. Der erste Band von Euler's Einleitung in die Analysis des Unendlichen stellt zugleich das erste Lehrbuch der Reihenlehre dar, fussend auf der Binomialentwickelung. In einem Aufsatze von 1754 ist die erste nach trigonometrischen Functionen von Vielfachen der Veränderlichen fortschreitende Reihe summirt. So waren jetzt die beiden Hauptgattungen unendlicher Reihen der Wissenschaft erworben, aber es war eine nur formale Errungenschaft. Vergeblich hatte Varignon, hatte Nicolaus Bernoulli vor Anwendung divergenter Reihen gewarnt, vergebens Euler selbst 1734 ein Convergenzkriterium entdeckt. Die ausschliesslich formale Behandlungsweise blieb siegreich, und selbst Lagrange hält es noch für erlaubt, von der Entwickelbarkeit jeder Function in eine Potenzreihe seinen Ausgang zu nehmen.

Der dritte Abschnitt führt uns zur Periode der exacten Behandlungsweise, die mit Gauss beginnt. Cauchy, Abel, Raabe, Kummer, Bertrand, Ossian Bonnet sind die Namen der Männer, welche die Kenntniss der Convergenzbedingungen vorzugsweise verbreiteten. Dirichlet gab der Lehre von den trigonometrischen Reihen eine feste Grundlage. Stokes und Seidel schufen den Begriff der gleichmässigen Convergenz.

Damit bricht die Geschichte der Lehre von den unendlichen Reihen ab. Sie geht in den Entwickelungen unserer neuesten Mathematik auf. Sie wird Gegenwart.

CANTOR.

A Bibliography of Geodesy by J. HOWARD GORE, B. S. Ph. D., Professor of mathematics, Columbian University; sometime astronomer U. S. Geological survey; acting assistant U. S. coast and geodetic survey; author of elements of geodesy. Washington 1889. Government Printing Office. 200 pag. 4°.

Der Verfasser erzählt uns in der Vorrede die Entstehungsweise des Bandes, welcher heute im Drucke vollendet vor uns liegt. Er stellte sich 1885 die Aufgabe, eine Geschichte der Geodäsie zu schreiben, stiess aber gleich zu Anfang auf die Schwierigkeit des überall sich vordrängenden Zweifels, ob denn auch die gesammte Literatur des Gegenstandes bewältigt sei? Wir können Herrn Gore diesen Zweifel recht deutlich nachempfinden, der uns bei unseren eigenen Arbeiten genau ebenso gequält hat und der sicherlich keinem gewissenhaften Geschichtsforscher erspart geblieben ist. Herr Gore fing nun an, für seine schriftstellerischen Zwecke Titel von Werken geodätischen Inhaltes zu sammeln und alphabetisch zu ordnen. Aber siehe da, die Sammlung wuchs zu nicht geahntem Umfange an und stellte schliesslich selbst ein Buch dar. Verschiedene gelehrte Körperschaften erboten sich zur Herausgabe des so entstandenen Werkes, ihm wie sich selbst dadurch ein glänzendes Zeugniss ausstellend. H. Gore hat begreiflicher Weise geglaubt, das Anerbieten annehmen zu müssen, welches in seiner Heimath ihm gemacht wurde, und somit erschien der Band als eine Veröffentlichung der Küsten- und Landesvermessungsbehörde der Vereinigten Staaten von Nordamerika. Damit ist für Jeden, der irgend einmal eine Veröffentlichung dieser Behörde sah, zugleich ausgesprochen, dass die Ausstattung Nichts zu wünschen übrig lässt. Will eine derartige Bibliographie brauchbar sein, so muss sie eine doppelte Anordnung besitzen, einmal nach dem Gegenstande der aufgeführten Schriften und zweitens nach dem Namen ihrer Verfasser. Herr Gore hat in der That diese beiden Anordnungen getroffen, hat sie aber beim Drucke in eine Reihenfolge verbunden, so dass ein Namens- und Inhaltsverzeichniss einheitlich vor uns liegt. Inwieweit Vollständigkeit erreicht ist, kann nur längerer Gebrauch erkennen lassen. Stichproben, die wir auch nach verhältnissmässig seltenen und weniger bekannten Werken anstellten, fielen nicht ungünstig aus.

CANTOR.

Janus, ein Datumweiser für alle Jahrhunderte, zusammengestellt von Dr. J. E. DOLIARIUS. Leipzig, Dyk'sche Buchhandlung.

In der Grösse eines gewöhnlichen Wandkalenders und zum Preise von nur 1 Mark ist hier eine ganz angenehme Vorrichtung geschaffen, welche durch eine in gewöhnlichen Jahren einmal, in Schaltjahren zweimal zu vollziehende, leicht auf ihre Richtigkeit zu prüfende Verschiebung zum wirklichen Kalender des betreffenden Jahres wird. Rückwärts reicht die Benutzbarkeit bis zu Christi Geburt, vorwärts bis zum Ende des Jahres 2099. Praktisch ist daher die Bezeichnung „für alle Jahrhunderte" immerhin gerechtfertigt, und wahr ist auch, was der Verleger neben dem Hauptvorzuge der einfachen Schiebereinstellung betont, dass die Tafel die Daten des ganzen, nicht blos eines halben Jahres auf einen Blick ersichtlich macht, und dass das Aufsuchen nach einmal eingestelltem Schieber so rasch wie bei einem gewöhnlichen Kalender, den man vor sich zu haben wähnen kann, erfolgt.

CANTOR.

Die Meteorologie ihrem neuesten Standpunkte gemäss und mit besonderer Berücksichtigung geographischer Fragen dargestellt von Dr. S. GÜNTHER. Mit 71 Abbildungen. München, Verlag von Th. Ackermann. 1889. 8°. VIII, 304 S.

In den Werken von Sprung, von Hann und Woeikow, von van Bebber besitzen wir musterhafte Leistungen, ausserordentlich reiche und schöne wissenschaftliche Darstellungen der Hauptzweige der Meteorologie, nicht minder in den kleineren Büchern von Klein und Mohn auf das Wichtigste sich beschränkende, im besten Sinn populäre Behandlungen des genannten Wissenszweiges, der theoretisch ebenso interessant, als praktisch wichtig zugleich in der regsten fortschreitenden Entwickelung begriffen ist. Gleichwohl glaubte der Verfasser, dass es fehle „an einem nicht zu umfangreichen Buch, welches zunächst die Wünsche der Studirenden ins Auge fasst und den meteorologischen Tagesfragen in weiterem Rahmen gerecht zu werden sucht, zugleich auch nach Möglichkeit die massenhaft anschwellende schriftstellerische Arbeit der allerneuesten Zeit verwerthet" — und eben ein solches Buch will er nun in der vorliegenden Arbeit darbieten.

Diese wendet sich drum auch in erster Linie an Studirende der Naturwissenschaften und der Erdkunde, dann überhaupt an einen nicht mit der Fachwelt im engeren Sinne zusammenfallenden Leserkreis. Gerade aus letzterem Grunde ist von der Verwendung und Ausnützung mathematischer Betrachtungen und Formeln fast durchweg Abstand genommen, wohl aber tritt allerorten im Buche das Bestreben zu Tage, Gedankengang und Ergebnisse der von den Männern der Wissenschaft durchgeführten bezüglichen mathematischen Untersuchungen dem Leser in sachgemässer Umschreibung vorzutragen und zwar wirklich die Meteorologie in ihrer neuesten Gestaltung vorzutragen.

Und auch auf das zweite, wie alle seitherigen Werke, so auch dieses Buch des Verfassers kennzeichnende Merkmal sei hier sofort hingewiesen, auf das die ganze Darstellung beherrschende Bestreben, die geschichtliche

Entwickelung der einzelnen Lehren der Meteorologie recht deutlich hervortreten zu lassen. Freilich ist die Durchführung nicht derart gehalten, dass etwa jedem Abschnitt eine Uebersicht seiner Geschichte voranginge und ihr dann die systematische Darstellung folgte so, wie diese nach der wissenschaftlichen Auffassung des Verfassers heute zu geben ist, sondern in geschichtlicher Erzählung voranschreitend und mit dieser verwebt, zwischen hinein kritisch behandelt und wohl auch gesichtet, wird der wissenschaftliche Stoff vorgeführt. Nun ist Referent ein sehr grosser Freund geschichtlicher Forschung und ist überaus geneigt, deren Ergebnisse aus methodischen und didaktischen Rücksichten verwerthet zu sehen, er ist auch persönlich dem Verfasser zu Dank verpflichtet für die vielfältige Anregung und Belehrung, die er gerade aus den geschichtlichen Ueberblicken des Buches gewonnen; aber gleichwohl scheint ihm der Verfasser hier zu weit gegangen, ihm scheint das jeweilige wissenschaftliche Schlussergebniss der einzelnen Unter- und Hauptabschnitte des Buches nicht deutlich genug herauszutreten; der schon Orientirte findet sich ja gewiss rasch zurecht; der Studirende aber, dem ja in erster Linie das Buch gelten soll, mag einige Mühe haben, gerade Das, was er lernen und festhalten will, sich zusammenzusuchen und es gegliedert neben einander zu sehen, und dies um so mehr, als der Mangel an paragraphenweiser Abtheilung des Buches jenen Missstand verstärkt. Eben hierdurch ist die auch wiederholt zu beobachtende Erscheinung bedingt, dass verhältnissmässig nebensächliche Dinge in den Text aufgenommen sind, wichtige, sogar grundlegende Erklärungen aber in die Fussnoten verwiesen erscheinen.

Immerhin ist die vom Verfasser gebotene Leistung eine recht fleissige und dankenswerthe. Eine rasche Uebersicht über die Hauptheile des Buches möge den reichen Gehalt desselben hervortreten lassen.

Eine Einleitung (S. 1—10) bespricht „die Aufgabe und geschichtliche Entwickelung der Meteorologie“, zeigt, wie allmälig Sinn und Umfang des unter diesem Namen zusammengefassten Wissenszweiges gewechselt, wie heute sein Wesen genauer zu bestimmen und in welche Hauptheile die Meteorologie behufs bequemer Uebersicht zu zerfällen sei.

Da ja doch ausschliesslich die Zustände innerhalb des unsere Erdkugel umschliessenden „Luftkreises“ (— warum nicht „Luftschale“ oder „Lufthülle“? —) zur Betrachtung zu kommen haben, so lehrt das erste Hauptstück (S. 10—77) die „Allgemeinen Eigenschaften der Atmosphäre und deren Beobachtung“. Es werden die geometrischen, die chemischen, die physikalischen Eigenschaften der Luft dargelegt, ohne vorerst ihrer Bewegung näher zu treten, und es werden dann (S. 31 flg.) die zum Studium jener Eigenschaften dienenden acht Hauptarten von Instrumenten besprochen, wobei das Evaporimeter als „das Zukunftsinstrument der Klimakunde“ besondere Beachtung findet; auch die Verfahrungsweisen, überhaupt Beobachtungen anzustellen und rechnerisch oder graphisch weiter zu verarbeiten, werden nicht vergessen.

Die Ausführungen sind überall recht deutlich — mit wenigen Ausnahmen. So ist die Unterscheidung der Hagelarten (S. 29) gewiss nicht überklar; so wäre eine deutlichere Aufklärung zu Fig. 10, eine deutlichere Figur selbst statt Fig. 11 wohl zu wünschen; wenn dann das August'sche Psychrometer denn doch „zu einer Art souverainer Herrschaft sich emporgeschwungen hat“ (S. 54), so war dieses mindestens ebenfalls abzubilden und nicht abzuthun durch einen Hinweis auf Fig. 7, welche man nicht wenig genug ansehen sollte; so wäre ferner zur Beschreibung der Fuess-schen Windfahne die Zugabe einer Figur sehr erwünscht; so dürfte S. 67 die den Beaufort'schen Stärkezahlen entsprechende annähernde Luftgeschwindigkeit in Metern angegeben sein.

Das zweite Hauptstück (S. 77—149) bringt „die Lehre von den Bewegungen in der Atmosphäre“, die sogen. dynamische Meteorologie und ist im Wesentlichen eine Popularisirung des schon genannten Werkes von Sprung. Natürlich ist hier das barische Windgesetz zunächst geschichtlich das Ziel, gleichwie weiterhin methodisch die Unterlage der Betrachtung; letztere wird schliesslich auch dem grossen atmosphärischen Kreislauf gerecht.

Als Einschaltung zu betrachten ist der Abschnitt über Luftelektricität (S. 99—117) und der über die kosmische Meteorologie (S. 117—125); in jenem wird eine Entscheidung über die ursächliche Bedingtheit nicht gegeben, in diesem eine Einwirkung der Sonnenflecken sowohl, wie eine des Mondes auf die Luftbewegung als unmerklich abgewiesen.

Das dritte Hauptstück (S. 149—198) ist der „Allgemeinen Klimatologie“, das vierte Hauptstück (S. 198—237) der „Speciellen klimatischen Beschreibung der Erdoberfläche“ gewidmet, und wie im vorigen Hauptstück das Werk von Sprung, so geben hier die betreffenden Werke von Hann und Woeikow die Grundlage ab: auch hier wiederum ist die geschichtliche Entwickelung der Lehren mit überaus grosser Sachkenntniss und weiserer Beschränkung mit aufgenommen und die klimatische Kennzeichnung der grossen Haupt- und der kleinen Einzelgebiete wird in dankenswerther Weise zusammengefasst.

Zwei Anhänge beschliessen das Buch. Der erste Anhang (S. 237 bis 268) verbreitet sich über „Praktische Witterungskunde“ und behandelt, an van Bebber's bekanntes Handbuch sich anlehnend, die Meteorologie des Meeres und der Küsten sammt Sturmwarnung und Witterungsvorherverkündigung, sowie in Kürze die Meteorologie im Dienste der Land- und Forstwirthschaft; gerade dieser erste praktisch wichtige Anhang ist äusserst klar und dürfte wohl dem Buche viele Leser gewinnen. — Der zweite Anhang (S. 268—296) giebt endlich noch eine geschichtlich entwickelnde und physikalisch begründende Darlegung der so mannigfachen Erscheinungen und Lehren, die unter dem Namen der „Meteorologischen Optik“ zusammengefasst werden können; leider konnten hierbei Kiessling's Untersuchungen noch keine Benützung finden.

Das Vorstehende zeigt, einen wie reichen Inhalt der Verfasser auf den knapp 300 Seiten seines Buches zu bewältigen verstanden hat. Dabei ist, trotz der fast zu reichen Stoffanhäufung, die Form der Darstellung fast durchweg deutlich und klar, so dass das Buch entschieden empfohlen werden kann, trotz der einzelnen Ausstellungen, die ich oben zu machen hatte und zu welchen selbst noch eine weitere zugefügt werden könnte, nämlich den gar zu häufigen Gebrauch wohl vermeidbarer Fremdwörter betreffend — oder sollten nicht z. B. generell, illusorisch und gar die „passagère Hebung" (S. 178) u. Aehnl. vermieden werden können?

Die Ausstattung des Buches ist gut, nur hätte von Seiten des Verlegers für eine gleichmässigere Zeichnung der Figuren gesorgt werden sollen. Man vergleiche nur Fig. 53 mit 50 oder 46 und gar mit Fig. 7! Solch' rohe Figuren, wie Nr. 7 oder 21 oder selbst 26 sollten heute doch nicht mehr geboten werden; dies zu vermeiden ist der Verleger dem Leser, wie dem Verfasser in gleicher Weise schuldig.

P. Treutlein.

Fehler bei Bestimmung der Schwingungsdauer von Magneten und ihr Einfluss auf absolute Messungen der Horizontalintensität des Erdmagnetismus. Von E. Leyst. St. Petersburg 1887. In Commission der kais. Akademie (Leipzig, Voss' Sortiment). 4°. 33 S.

Untersuchung über Nadelinclinatorien. Von E. Leyst. Ebenda. 4°. 133 S. 2 Tafeln.

Nach dem Vorgange A. v. Humboldt's wird die Grösse der erdmagnetischen Stärke gemeiniglich durch die Schwingungen einer horizontal frei beweglichen Nadel gemessen, doch war allerdings schon früher, besonders von Kohlrausch, darauf hingewiesen worden, dass dieses Verfahren mit mancherlei Fehlerquellen behaftet sei, und wesentlich aus diesem Grunde hat man sich neuerdings der Wägungsmethode in ihren verschiedenen Abzweigungen (Toepler und L. Weber) zugewendet. Herr Leyst, Observator des berühmten geophysikalischen Observatoriums von Pawlowsk, untersucht in der zuerst erwähnten Abhandlung jene Fehler auf analytischem Wege, indem er den Einfluss berechnet, welchen die unrichtige Bestimmung einer der zahlreichen in die Schlussformel für die Horizontalcomponente eingehenden Grössen auf das Resultat ausübt. Er findet, dass die noch erträgliche Grösse einer gewissen Störung — in den S. 9 formulirten Lehrsatz hat sich ein auf den ersten Blick selbst als kleine Störung empfundener Druckfehler eingeschlichen — der Schwingungsdauer der Magnete umgekehrt proportional ist. Fernerhin lehrt er die Folgen abzuschätzen, welche sich aus einer Veränderung der zu messenden Kraft im Verlaufe der Beobachtung ergeben; nimmt nämlich diese Kraft bei Beginn der Beobachtungen zu, um sich nachher wieder zu verkleinern, so fällt das allgemeine Mittel zu klein aus, und umgekehrt verhält es sich, wenn auch die Aenderungstendenz in der Grösse der Horizontalcomponente die entgegengesetzte ist. Diese und andere Wahrnehmungen, vornehmlich hinsichtlich der Rücksichtnahme auf Temperaturänderungen und nicht ausreichend genau bekanntes Trägheitsmoment des oscillirenden Stabes, werden in der Praxis beachtet werden müssen.

Die zweite, umfangreichere Schrift verdankt ihre Entstehung dem Umstande, dass der Verfasser die Leistungen dreier sehr weit voneinander getrennter Nadelinclinatorien — in Pawlowsk, Jekaterineburg und Irkutsk — mit denen eines an ersterem Orte aufgestellten Erdinductors zu vergleichen sich in die Lage versetzt sah. Die mit hingebendem Fleisse durchgeführte und auf ein ungeheures Zahlenmaterial sich stützende Untersuchung führt dahin, die Bedeutung der Unvollkommenheiten zu erkennen, welche das älteste und natürlichste, schon von Gilbert und Kepler angegebene Instrument zur Messung der magnetischen Steigung in seiner Wirkung beeinträchtigen, und zwar sind solcher Fehler im Wesentlichen vier vorhanden. Für's Erste wird der Drehpunkt der Nadel nicht genau mit dem Mittelpunkte des Theilkreises sich decken (Excentricitätsfehler); zum Zweiten ist im Allgemeinen der Parallelismus zwischen der Limbusebene und den parallelen Endflächen der Nadel nicht mit absoluter Schärfe herzustellen; drittens bringen die jetzt meist im Interesse exacterer Ablesung verwendeten Mikroskope ein Element der Unsicherheit herein, weil ihre Fadenstellung sehr leicht unrichtig wird, und zum Schlusse bringt die Verticalstellung der bei den älteren Werkzeugen dieser Art horizontal liegenden Arretirvorrichtung mancherlei Unzuträglichkeiten mit sich. Um diesen Mängeln möglichst abzuhelfen und doch das einfache Princip unmittelbarer Ablesung der gesuchten Winkelgrösse zu retten, schlägt der Verfasser vor, Kreise von grossem Halbmesser anzuwenden; freilich soll der Magnetstab an sich nur kurz sein, allein die Ausgleichung ist unschwer herbeizuführen, indem man diesem Stabe auf beiden Seiten Verlängerungen von unmagnetischem Stoffe ansetzt, welche bis zu dem eingetheilten Rande reichen. Die Mikroskope wären gleichzeitig als Nonien zu benützen. Auch sonst noch theilt der Verfasser aus dem reichen Schatze seiner persönlichen Erfahrungen manche Winke und Erinnerungen mit, welche dazu dienen können, der Inclinationsbussole wieder zu der Werthschätzung zu verhelfen, deren sie im Laufe der letzten Jahre allmälig verlustig gehen zu wollen schien.

München. Dr. S. Günther.

Ebene und räumliche Geometrie des Maasses in organischer Verbindung mit der Lehre von den Kreis- und Hyperbelfunctionen, neu dargestellt von Dr. L. Huebner, Oberlehrer am Gymnasium zu Schweidnitz. Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner. 1888. XVI, 340 S. 8°.

Das vorliegende Werk verdient die Bezeichnung einer originellen Arbeit im vollsten Maasse. Die Thatsache, dass Kreis- und Hyperbelfunctionen zwei einander in jeder Hinsicht gleichwerthige analytische Gebilde seien, ist ja wohl eine allseitig zugestandene, allein der Versuch, diesen Umstand in einem elementargeometrischen Systeme zur consequenten Durchführung zu bringen, ist, soweit wenigstens des Berichterstatters Kunde reicht, noch nicht unternommen worden. Wie sich die Schule gegen diese Neuerung zu verhalten habe, das bildet für uns, da wir ja nicht für eine didaktische Zeitschrift die Anzeige zu liefern haben, diesmal keinen Gegenstand der Untersuchung; der Verfasser selbst denkt sich sein Buch zunächst blos in den Händen der Lehrer und, für's Erste wenigstens, noch nicht in denen der Schüler, obwohl er annimmt, dass der Inhalt nirgends über das Verständniss eines Oberprimaners hinausgehe. Mag dies auch etwas zu optimistisch gedacht sein, so wird doch sicherlich das Buch einem strebenden Lehrer eine Fülle von Anregungen bringen, die er später beim Unterricht zu verwerthen in der Lage ist; aber, davon ganz abgesehen, schon an und für sich enthält diese „Trigonometrie im weitesten Wortsinne", wie man sie wohl nennen könnte, der eigenartigen Darstellungen genug, um ihr, ohne jede Rücksicht auf unmittelbare pädagogische Verwendung, einen selbständigen Werth zu sichern.

Schon die Einführung der gewöhnlichen goniometrischen Functionen vollzieht sich in einer von dem üblichen Hergange mehrfach abweichenden Weise, nämlich durch Vergleichung von Rechtecks- und Dreiecksflächen. Die Erweiterung der Begriffe Sinus u. s. w. auf stumpfe und erhabene Winkel betrachtet der Verfasser, ohne allerdings dieses Ausdruckes sich zu bedienen, als einfachen Ausfluss des Hankel'schen Permanenzgesetzes und stellt sie der allgemeinen Definition der Potenz a^{p-q} als Analogon zur Seite. Daran schliesst sich die Berechnung des schiefwinkligen Dreieckes, deren Formeln er da und dort eine weniger beachtete oder, wie auf Seite 24, halb und halb in Vergessenheit gerathene Seite abzugewinnen versteht. Von den Halbmessern des Umkreises, des Inkreises und der drei Ankreise wird, wie dies jetzt überhaupt vielfach geschieht, ein ziemlich ausgedehnter Gebrauch gemacht, um die früher entwickelten Formeln geschmeidiger und eleganter zu gestalten, und auch die Lehre von den Dreieckstransversalen wird gründlich abgehandelt. Während sonst gewöhnlich das Additionstheorem an die Spitze gestellt wird, leitet es der Verfasser durch einen sehr einfachen und uns persönlich in dieser Form neuen Gedankengang aus der Formel $a = b\cos\gamma + c\cos\beta$ her und führt so den Nachweis, dass die gesammte ebene Trigonometrie in dem von ihm aufgestellten Systeme dreier homogener Gleichungen enthalten sei. Die Polygonometrie, die sich auf den jetzt erst zugezogenen Coordinatenbegriff stützt, schliesst sich an die Trigonometrie an, und es werden in diesem Abschnitte zugleich die Formeln für schwingende Bewegungen hergeleitet, um für Ausdrücke von der Form $(m\pi \pm \alpha)$ eine Veranschaulichung zu gewinnen. Die Betrachtung derjenigen Curven, welche für Tangens und Sinus dieselbe Bedeutung haben, wie die bekannte Wellenlinie für Sinus, führt von selbst zur gleichseitigen Hyperbel, welche hiermit ihre Stellung neben dem Kreise angewiesen erhält. Indessen werden, ehe man zu ihrer näheren Untersuchung schreitet, zuvor noch die Lehrsätze von Moivre und die verschiedenen Reihenentwicklungen vorgenommen, bei welch' letzteren sich auch Gelegenheit bietet, den Leser mit der imaginären Einheit und ihren Potenzen vertraut zu machen.

Die Veranlassung, hyperbolische Argumente und Functionen ins Auge zu fassen, ergiebt sich dem Verfasser durch eine Ueberlegung, welche, seiner eigenen Angabe zufolge, das geometrische Gegenstück jener algebraischen Recursionsgleichungen darstellt, auf welchen Goetting in seiner Schrift „Die Functionen Cosinus und Sinus beliebiger Elemente" (Berlin 1881) die ganze Goniometrie aufgebaut hat. So werden die Grundformeln sehr leicht erhalten, die Einerleiheit der cyklischen und hyperbolischen Functionen beim Uebergange des Argumentes aus dem reellen in das imaginäre Gebiet und umgekehrt bietet sich gleichfalls ganz ungezwungen dar; sehr hübsch ist u. A. die Anwendung der Hyperbelfunctionen auf die Quadratur der Parabel. Unter den einen bedeutenden Platz einnehmenden Rechnungen, in denen Kreis- und Hyperbelfunctionen vermischt miteinander auftreten, ist uns manches Neue und nicht minder die grosse Fertigkeit des Verfassers in der Transformation verwickelter Formeln aufgefallen. Die Nutzanwendung beschränkt sich auch nicht auf die Ebene, sondern es wird auch zur dritten Dimension aufgestiegen und für die durch die Umdrehung von Kegelschnitten entstandenen Körper die Inhalts- und Oberflächenbestimmung durchgeführt, wobei sich die Auflösung cubischer Gleichungen irreducibeln und reducibeln Falles als Corollar hinzugesellt. Die Projection wird dabei vielfach und sehr geschickt verwendet. Manches, was wir hier sehen, ist in der That würdig, Gemeingut der Lehrbücher für Analysis und höhere Geometrie zu werden, so z. B. die Complanation des zweiaxigen Rotationsellipsoides.

Den Schluss des Werkes bildet die räumliche Trigonometrie, deren Begründung nicht minder an vielen Orten die ausgefahrenen Gleise verlässt. Vielleicht wäre es, zumal da in früheren Capiteln auf die Anschaulichkeit entschieden Werth gelegt ist, Manchem erwünscht gewesen, die Deduction nicht so ausschliessend analytisch gehalten zu sehen, wie sie es in Wirklichkeit ist. Die zur Darlegung des Nutzens dieser Disciplin in ziemlichem Umfange eingestreuten sphärisch-astronomischen Aufgaben werden durchweg auch mit Zuhilfenahme der hyperbolischen Functionen aufgelöst, die sich in vielleicht unerwarteter Weise gerade für die Probleme der nautischen Astronomie sehr förderlich erweisen. Sodann aber geht der Verfasser zu einer Einführung in die Sphärik selbst über und erledigt deren wichtigste Sätze, überall an das graphische Bild anknüpfend, mit einem verhältnissmässig geringen Aufgebote von eigentlichem Calcul. Sogar das apollonische Taktionsproblem auf der Kugelfläche und die sphärischen Kegelschnitte werden in den Kreis der Erörterung gezogen. Nachdem dann gezeigt ist, wie sich für den Kugelradius unendlich alle Wahrheiten der sphärischen in solche der ebenen Trigonometrie verwandeln, reiht sich noch eine Anwendung der Raumtrigonometrie auf die Körperlehre an, welche in der Bestimmung der wichtigen Elemente für die Construction der fünf regelmässigen Polyeder gipfelt. Literargeschichtliche Noten beenden das Buch und machen den Leser mit Erscheinungen des Büchermarktes von verwandtem Charakter bekannt.

Kenntniss der Infinitesimalrechnung wird nicht vorausgesetzt, die algebraische Vorbildung dagegen muss immerhin eine etwas tiefer gehende sein, nicht sowohl der thatsächlichen Anforderungen halber, sondern mehr deshalb, weil der Verfasser einen geübten Formelrechner allenthalben voraussetzt. Von den Determinanten wird nur ganz gelegentlich ein ziemlich beschränkter Gebrauch gemacht. Die Liersemann'schen Anschauungen über das unendlich Grosse und Kleine, zu denen sich auch Herr Huebner bekennt, haben uns niemals behagt und können es auch jetzt nicht, denn wir vermögen erstens nicht einzusehen, dass damit ein wirklicher Gewinn erzielt werde, und befürchten ferner, dass der Anfänger durch die Ausdrücke ε, Θ und Π sich sehr leicht verleiten lassen könnte, veränderliche Grössen als constante zu behandeln. Doch dies nur nebenbei.

München. Dr. S. Günther.

Bing's Kreiswinkel, ein Beitrag zur Lösung der Quadratur des Kreises. Redigirt vom Regierungsbauführer Dorst. Druck und Verlag von Schleicher & Schüll in Düren.

Der Unterzeichnete würde eine Kritik des vorliegenden Schriftchens für unnöthig halten, wenn dasselbe nicht von Seiten des Verlegers mit folgender Reclame ausgestattet wäre (S. 4):

> Nachstehendes Gutachten ging uns von einer Autorität ersten Ranges zu:
>
> „Ich halte den Kreiswinkel für ein sehr nützliches Instrument, da die Anwendung desselben die rasche und exacte Lösung einer grossen Zahl mathematischer Aufgaben ermöglicht, ohne dass man nöthig hat, umständliche Rechnungen, gegebenen Falls unter Zuhilfenahme trigonometrischer Tabellen durchzuführen."
>
> L. Pinzger,
> Prof. d. Maschinenbaukunde am königl. Polytechnikum in Aachen.

Wie viel, oder besser, wie wenig an diesen Behauptungen ist, wird das Folgende zeigen.

Im Vorworte sagt der Erfinder Ed. Bing (technischer Director einer Waggonfabrik in Riga), dass die Bemühungen, den Kreis durch Constructionen zu rectificiren und quadriren, „noch heutzutage fortgesetzt werden" —; das gilt allerdings für unwissende Dilettanten, nicht aber für Mathematiker, denen bekannt ist, dass π nicht Wurzel einer algebraischen Gleichung sein kann.

Unter „Kreiswinkel α" versteht der Verfasser den durch die Gleichung $\cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ bestimmten spitzen Winkel, welcher (auf Bruchtheile von Secunden genau) $= 27^\circ\,35'\,50''$ ist und, in Hartgummi ausgeführt, von dem Verleger bezogen werden kann. Für einen über dem Durchmesser d beschriebenen Kreis ist nun $d\cos\alpha$ die Seite des Quadrats von gleicher Fläche, $d\cos^2\alpha$ die Länge des Kreisquadranten; ebenso leicht lassen sich die umgekehrten Aufgaben durch Projectionen lösen, und es mag dies bequem für solche Zeichner sein, die viele Kreise zu quadriren bez. zu rectificiren haben.

Die Quadratur einer aus den Halbaxen a und b construirten Ellipse wird auf die Quadratur des Kreises vom Durchmesser $a + b$ zurückgeführt (Nr. 5), so dass die Ellipsenfläche $= \frac{1}{4}\pi(a + b)^2$ sein müsste. Hier zeigt sich eine grobe Unwissenheit, die nicht selten zu riesigen Fehlern führt; beispielsweise ist im Falle $a = 11$, $b = 3$ die wahre Ellipsenfläche $= 33\pi = 103{,}67$, die nach der vorigen Formel berechnete $= 49\pi = 153{,}94$, also um circa 50% zu gross und überdies grösser als die Fläche des um die Ellipse construirten Rechtecks $22 \,.\, 6 = 132$. —

Das Problem der „Verwandlung eines Kreisbogens in eine gerade Linie" bezeichnet der Verfasser als „ein höchst wichtiges, welches bis jetzt nicht graphisch gelöst werden konnte, sich aber überraschend leicht mittels des Kreiswinkels löst." Dazu erhält man folgende Anweisung: Ziehe im Kreise vom Halbmesser $CA = 1$ die zu einander senkrechten Durchmesser ACB und DCE, nehme den Peripheriewinkel $BAG = \alpha$, lege GH normal zu AB (so dass $AH = \frac{1}{4}\pi$), schneide von D nach C hin die Strecke $DJ = AH$ ab, beschreibe aus H und J mit dem Radius AH Kreisbögen, die sich in K schneiden; wird nun von dem festen Punkte K nach irgend einem Punkte F des Kreisquadranten AD die Gerade KF gezogen, welche die Sehne AD in L schneidet, und wird ferner durch L eine Parallele zu DH gelegt, die AB in M trifft, so ist, „fast mathematisch genau", $AM = arc\,AF$.* Durch Einfachheit überrascht diese Construction sicherlich nicht, da sie das Ziehen von 7 Geraden und 2 Kreisbögen verlangt; sie ist aber auch überflüssig, da man seit 200 Jahren eine sehr

* Die zugehörige Fig. 5 passt insofern nicht zum Texte, als darin F in einer Geraden mit K und C liegt, während der Text ein beliebiges F voraussetzt.

2*

elegante und leicht zu merkende graphische Lösung des besprochenen Problems kennt, von der freilich der Verfasser nichts zu wissen scheint.*

Hieran knüpft sich die Trisection des Winkels, „die als unlösbares Problem gilt", sowie die Theilung eines Bogens in beliebig viel gleiche Theile, mithin auch die Construction regelmässiger Vielecke. Ein paar Beispiele hierzu sind folgende.

Die Seite des regelmässigen Siebenecks soll in einem Dreiecke, welches den Radius 1 zur Basis und die Winkel 60^0 und α zu anliegenden Winkeln hat, die Gegenseite zu $\angle 60^0$ sein, und der begangene Fehler $\frac{1}{11727} = 0{,}000085$ betragen. Dieser Construction würde die Siebenecksseite

$$\frac{\sin 60^0}{\sin(60^0+\alpha)} = 0{,}86679$$

entsprechen, welche von der wahren Siebenecksseite $0{,}86777$ um $0{,}00098$ differirt. Der wirkliche Fehler beträgt demnach mehr als das Zehnfache der vorigen Angabe.

Für das 13-Eck wird schlechtweg $\alpha = 27^0\,35'\,50''$ statt des wahren Centriwinkels $27^0\,41'\,32''$ genommen und als Fehler $\frac{1}{306} = 0{,}00327$ angegeben. Hier ist der wirkliche Fehler $= 0{,}00161$, also nur halb so gross.

Die *sectio aurea* einer Geraden $AB = 1$ will der Verfasser gleichfalls mittels des Kreiswinkels bewerkstelligen; man soll nämlich ein Dreieck ABD aus AB, $\angle BAD = 30^0$, $\angle ABD = \alpha$ construiren und an dessen Höhe DE den Kreiswinkel in D so anlegen, dass der freie Schenkel desselben die Gerade AB zwischen E und B in C trifft, wo nun AC der grössere Abschnitt, und der begangene Fehler $\frac{1}{1761} = 0{,}000568$ sein soll. Abgesehen davon, dass hier die bekannte einfache und genaue Construction von AC durch ein Näherungsverfahren ersetzt wird, das ein besonderes Instrument verlangt, enthält das angegebene Verfahren einen starken Irrthum. Dasselbe liefert nämlich

$$AC = \frac{\cos(30^0-\alpha)}{\sin(30^0+\alpha)} \tan\alpha = 0{,}618577$$

statt des wahren Werthes

$$AC = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1) \qquad = 0{,}668035,$$

mithin beträgt der Fehler $0{,}049458$, d. h. circa das Achtundachtzigfache der Angabe. Schon bei so kleinen Dimensionen wie $AB = 6$ Centimeter erreicht der Fehler die sehr merkliche Grösse von fast 3 Millimetern, die weit über das erlaubte Maass hinausgeht.

Nach dem Mitgetheilten bleibt es geradezu räthselhaft, wie Herr Prof. Pinzger ein so klägliches Dilettantenmachwerk empfehlen konnte.

---

* Ist PQ ein aus dem Mittelpunkte O beschriebener Kreisbogen, so nimmt man längs PO die Strecke $PR = 3PO$ und zieht RQ bis zum Durchschnitte S mit der Kreistangente an P; für $\angle POQ < 45^0$ ist dann sehr nahe $PS = arc PQ$. Bei grösseren Winkeln rectificirt man den halben oder Viertelbogen u. s. w.

Schlömilch.

Der Unterricht in der analytischen Geometrie. Für Lehrer und zum Selbstunterricht von Dr. WILHELM KRUMME, Director der Ober-Realschule zu Braunschweig. Mit 53 Figuren im Text. Braunschweig bei Otto Salle. 1889. XVI, 311 S.

Der durch sein Lehrbuch der Physik, sowie durch zahlreiche Abhandlungen im pädagogischen Archiv wohlbekannte Verfasser beabsichtigt durch das vorliegende Werk, die erfahrungsmässig mit grossen Schwierigkeiten verknüpfte erste Einführung in die analytische Geometrie der Ebene Lehrer und Schülern zu erleichtern. Dasselbe ist vorzugsweise und sein erster (allgemeiner) Theil ausschliesslich für Lehrer bestimmt. Hinsichtlich der Methodik des Unterrichtes stellt der Verfasser Anschaulichkeit und Kürze in den Vordergrund. Er verwirft daher das rein analytische Verfahren, dem Anschaulichkeit ganz und Kürze je nach Umständen abgesprochen werden muss. Vielmehr soll der Schüler analytisches und Euklidisches Verfahren wie zwei stets bereite Werkzeuge zur Hand haben und Rechnungen vermeiden, wo es nur geht. Weiter fordert der Verfasser, dass auf der obersten Unterrichtsstufe hauptsächlich das Auffinden von Sätzen geübt werde, weniger das Beweisen derselben, und zeigt hierauf an einzelnen Musterbeispielen, wie er sich die praktische Durchführung dieser Grundsätze denkt. Was sodann die Anwendungen betrifft, so identificire man nicht analytische Geometrie und Kegelschnittslehre; wem es nur um letztere zu thun ist, der verfahre lieber nach Euklidischer Methode, die das Ziel rascher erreichen lässt. Vielmehr soll der Schüler durch Beispiele aus der Physik, astronomischen Geographie u. s. w. „in der analytischen Geometrie ein nothwendiges und unersetzliches Hilfsmittel zur Erforschung und zur Darstellung von Vorgängen in der Natur kennen lernen“. Ueber diesen Punkt spricht sich der Verfasser besonders eingehend aus. Von den hierher gehörigen Aufgaben seien genannt: Brechung des Lichtes durch Kalkspath, Gestalt der Erdbahn, Gestalt des Erdkörpers, hyperbolische Figur zwischen zwei Platten durch Haarröhrchenkraft entstanden, paraboloidische Oberfläche eines mit Wasser gefüllten Cylinders im Drehungszustand u. s. w. Besonderes Gewicht legt er endlich auf die graphische Wiedergabe numerischer Gleichungen und bietet namentlich ein reichhaltiges Uebungsmaterial quadratischer Gleichungen mit zwei Veränderlichen, aus welchen Mittelpunkte, Axen u. s. w. der zugehörigen Kegelschnitte bestimmt werden sollen. Um nun dem analytisch-geometrischen Unterricht den zum Gedeihen nothwendigen Raum zu verschaffen, schränke man die geometrischen Concurrenzfächer nach Möglichkeit ein. Man verschone den Schüler der Oberclassen mit besonders schwierigen Aufgaben und mit Kunstgriffen, die ziemlich werthlos und sogar bedenklich sind. Ebenso sei die planmässige Untersuchung der Kegelschnitte nach Euklidischer Art als vollständig überflüssig zu verwerfen und auch die sogenannte neuere Geometrie vom Unterricht auszuschliessen. Da indess die

Lehrpläne von 1882 für Realgymnasien und Oberrealschulen die Grundlehren der synthetischen Geometrie verlangen, so möge man die Sätze von den harmonischen Gebilden und den polaren Beziehungen beim Kreis durchnehmen, die Betrachtung der Kegelschnitte als Kreisprojectionen und als Erzeugnisse projectivischer Punktreihen und Strahlenbüschel aber habe bei ihrer geringen Verwendbarkeit auf anderen Gebieten für die Schule keinen Werth.

Diesem allgemeinen Theil folgt als besonderer ein auf den obigen Grundsätzen aufgebautes Lehr- und Uebungsbuch. Dasselbe ist so gründlich bearbeitet, dass es auch sehr wohl zum Selbstunterricht benutzt werden kann. Es zerfällt in drei Stufen, von denen jede folgende an die Denkarbeit des Schülers grössere Anforderungen stellt, als die vorhergehende. Die erste Stufe umfasst die Capitel, welche man gemeiniglich auf der Schule durchzunehmen pflegt. Hierbei ist fast durchgängig das rechtwinklige Coordinatensystem benutzt, ausserdem sind mehrfach Uebersichten aufgestellt, welche den Stoff enthalten, der dem Gedächtniss durch fortgesetzte Uebungen einzuprägen ist. Auf der zweiten Stufe werden die abgekürzte Bezeichnungsweise der Gleichungen gerader Linien, polare Beziehungen beim Kreis und Kegelschnittsgleichungen für schiefwinkliges System behandelt, endlich auf der dritten die allgemeine Gleichung zweiten Grades, ihre Entstehung, ihre Anwendung auf Kegelschnitts-Eigenschaften und ihre geometrische Bedeutung.

Aus den obigen Angaben wird man wohl zur Genüge erkennen, dass das vorliegende Buch die Frucht einer reichen pädagogischen Erfahrung ist. Von den Grundsätzen des Verfassers wollen wir namentlich die Verbindung der analytischen Geometrie mit der Euklidischen hervorheben, da wir gerade diese für einen wesentlichen Fortschritt unseres heutigen analytisch-geometrischen Unterrichts halten. Ist doch auch in der höheren Geometrie der Gegensatz zwischen analytischem und synthetischem Verfahren, der zu Steiner's und Magnus' Zeiten in der schärfsten Weise hervortrat, schon seit Jahrzehnten zum Ausgleich gebracht. Man versäume daher nie, den Schüler darauf hinzuweisen, wie oft sich ein durch mühsame Rechnung gefundenes Resultat auf synthetischem Wege durch einfache und anschauliche Betrachtungsweise herleiten lässt.

Die beiden einzigen Punkte, in welchen wir mit dem Verfasser nicht übereinstimmen, sind die Anwendungen der Euklidischen und neugeometrischen Methode auf die Kegelschnitte. Erstere soll nur im Dienst der analytischen Geometrie auftreten, eine selbständige Verwendung derselben aber wird verworfen. Nun giebt es aber eine nicht geringe Anzahl von Sätzen, welche sich rein Euklidisch weit einfacher beweisen lassen, als selbst mittels gemischter Methode, wie z. B. auf S. 37, S. 151 etc. Wenn nun auch in solchen Fällen der Verfasser der letzteren das Wort redet, so befindet er sich im Widerspruch mit der an verschiedenen Orten (z. B. auf derselben

S. 37) geäusserten Ansicht, immer den einfachsten Weg zu wählen. Unseres Erachtens führt man den Schüler am besten nach der von ihm bereits als bewährt erkannten Euklidischen Methode in die Kegelschnittslehre ein, und zwar in der Classe, in welcher die Kreislehre eingeübt wird, da er schon in dieser sehr wohl im Stande ist, die ersten einfachen Constructionen, namentlich die, welche sich auf die Tangente beziehen, zu verstehen und anzuwenden. Sodann behandle man die Kegelschnitte in der Stereometrie als Schnittfiguren des Umdrehungskegels und zwar nach der jetzt allgemein verbreiteten Methode der Dandelin'schen Kugeln. Die graphische Deutung numerischer quadratischen Gleichungen, auf welche der Verfasser mit Recht Gewicht legt, würden wir ebenfalls lieber als Vorbereitung zum Unterricht der analytischen Geometrie, und zwar in der Algebra durchgenommen sehen. Man würde sich auf diese Weise mehr dem historischen Weg nähern, dessen allgemeine Ignorirung sich zweifellos in der Schule rächt. Denn als Bedürfniss tritt die analytische Geometrie erst in der Curvenlehre auf, in der Lehre von der Geraden und dem Kreis wird sie dem Anfänger immer gekünstelt erscheinen. Ist aber erst der Schüler in der angegebenen Weise stofflich und methodisch vorbereitet, so werden die Schwierigkeiten, welche sich ohne diese Vorbereitung zeigen, von selbst verschwinden. Was endlich die Gründe betrifft, welche der Verfasser gegen die neuere Geometrie geltend macht, so stimmen wir ihm nur dann bei, wenn er letztere im Sinne Steiner's auffasst. Warum will man aber nicht statt deren die Centralprojection Poncelet's wählen? Letztere ist unbedingt vom pädagogischen Standpunkt aus der ersteren vorzuziehen. Ist nun der Schüler mit den harmonischen Gebilden und den polaren Beziehungen beim Kreis bekannt geworden, was ja der Verfasser dem Schulunterricht noch zugestehen will, weiss er ferner (S. 210), dass sich jeder Kegelschnitt centrisch zum Kreis projiciren lässt, so ist das gesammte Material entwickelt, um die Hauptsätze der neueren Geometrie am Kegelschnitt ohne irgendwelche Schwierigkeit auffinden und beweisen zu können. Der Schüler lernt nun in sehr wenig Stunden den ganzen Giltigkeitsbereich der Sätze von den polaren Gebilden kennen und findet zugleich, dass der Satz vom ebenen Schnitt des geraden Kreiskegels nicht allein „an sich interessant" ist, sondern dass er eine fundamentale Bedeutung hat. Aber gerade da, wo Lehrer und Schüler die Frucht ihrer gemeinsamen Arbeit geniessen können — schneidet der Verfasser den Faden ab, damit die analytische Geometrie nicht leide. Dem können wir allerdings nicht beipflichten.

Indess berührt diese Meinungsverschiedenheit den analytisch-geometrischen Unterricht selbst zu wenig, und es sind der Vorzüge des Buches so viele, dass wir ihm im Interesse des mathematischen Unterrichts eine weite Verbreitung wünschen.

Tharandt. Ph. Weinmeister.

Methodik der stetigen Deformation von zweiblättrigen Riemann'schen Flächen. Ein Uebungsbuch für den geometrischen Theil der Functionentheorie. Von Fritz Hofmann. Halle, Louis Nebert. 1888.

Gestalt und Deformation der Riemann'schen Flächen stellen an die Vorstellungskraft des Studirenden der Functionentheorie hohe Anforderungen. Mit der vorliegenden Schrift will der Verfasser diese Schwierigkeiten überwinden helfen, indem er in anschaulicher Weise die Vorgänge bei der Umformung der sich unmittelbar darbietenden Typen in andere besser zu übersehende, sogenannte Normalflächen auseinandersetzt. Viele durch Schattirung gut plastisch wirkende Figuren lassen die verschiedenen Processe des „Umstülpens", des „Ansetzens und Beseitigens von Henkeln"* u. s. w. leicht verfolgen. Kurz, das Buch bietet, was es bieten soll. Im Interesse der Leser desselben sei es erlaubt, auch an dieser Stelle auf eine richtigstellende Bemerkung des Herrn Dyck (Math. Ann. Bd. 32 S. 458) bezüglich § 8 hinzuweisen.

Hannover. C. Rodenberg.

Die synthetischen Grundlagen der Theorie des Tetraedroid-Complexes. Von Fritz Hofmann. (Separatdruck aus Grunert's Archiv der Mathematik und Physik, 2. Reihe Theil V.) Leipzig 1887, C. A. Koch's Verlag.

Der untersuchte Complex ist vom zweiten Grade und wird gebildet durch die Gesammtheit der Geraden, welche zwei Flächen zweiten Grades in vier harmonischen Punkten schneiden.

Der Inhalt des ersten der beiden Abschnitte, in welche die Arbeit zerfällt, gipfelt in dem Nachweise, dass der Complex vom zweiten Grade sei. Hierbei legt der Verfasser besonderes Gewicht darauf, zu zeigen, dass eine als von der zweiten Ordnung erkannte Curve sich auch wirklich durch projective Büschel erzeugen lasse. Auf die Pflicht des Synthetikers, einen solchen Nachweis zu erbringen, machte früher Schur schon einmal aufmerksam.

Der zweite Abschnitt ist der Singularitätenfläche gewidmet. Der Verfasser sagt zwar, dass die Ermittelung der Knotenpunkte einfacher synthetischer Behandlung noch ganz gut zugänglich sei, aber er construirt sie nicht und entnimmt ausserdem wichtige Sätze der analytischen Geometrie. Dasselbe gilt für die Doppelebenen, denn die Angabe einer Collineation, welche die eine der gegebenen Flächen zweiten Grades in eine Kugel, die andere in ein Rotationshyperboloid überführt, fehlt. Durch diese Collineation wäre allerdings eine Doppelebene in die unendlich ferne transformirt und

* Vergl. über diese Dinge auch Klein: „Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen", insbesondere Seite 28.

die dieser entsprechende Ebene wäre die gesuchte. Da also der Zweck, an den man bei Heranziehung metrischer Eigenschaften denken könnte, nämlich eine wirkliche Durchführung der Construction, doch nicht erreicht wird, so ist es nicht recht verständlich, weshalb der Boden der rein projectiven Geometrie verlassen wurde.

Auf die bekannten synthetischen Behandlungsweisen der allgemeinen Complexe zweiten Grades ist kein Bezug genommen. Die Schrift wird daher ihren Leserkreis unter Denjenigen suchen müssen, welche sich speciell für den Tetraedroid-Complex interessiren.

Hannover. C. Rodenberg.

Beiträge zu graphischen Ausgleichungen. Inauguraldissertation von Carl Genge. Zürich, 1887.

Die Methode der kleinsten Quadrate stellt bei der Bestimmung der wahrscheinlichsten Lage eines Punktes, für welchen mehr als zwei, nicht durch denselben Punkt gehende Bestimmungsgeraden derselben Ebene, als sich widersprechende geometrische Oerter gegeben sind, die Bedingung auf, dass die Summe der Quadrate aller Abstände des gesuchten Punktes von jenen Geraden ein Minimum sein müsse. Bei ungleichen Gewichten sind den Abständen noch constante Factoren beizufügen. Die genannte Quadratsumme ist für jeden Punkt der Ebene eine ganz bestimmte Grösse. Trägt man sie als Ordinate senkrecht zur Ebene in dem betreffenden Punkt auf, so liegen die Endpunkte dieser Ordinaten auf einer krummen Fläche, und das gewünschte Minimum entspricht einem Flächenpunkt, dessen Tangentenebene parallel der gegebenen ist. Für eine gegebene Gerade erhält man einen parabolischen Cylinder, welcher die Ebene längs dieser Geraden berührt, für zwei Punkte ein elliptisches Paraboloid, dessen Scheitel der Schnittpunkt der beiden Geraden ist, welche ihrerseits Spuren conjugirter Durchmesserebenen sind. Bei drei und mehr Geraden erhält man immer noch eine solche Fläche, deren Axe senkrecht zur Ebene steht, aber das Minimum ist jetzt nicht mehr Null, sondern die Entfernung des Scheitels von der Ebene.* Die Methode des Verfassers zeigt nun, wie man aus den Involutionen conjugirter Durchmesserebenen der Paraboloide von $(n-1)$ Geraden diese Involution des Paraboloids von n Geraden ableiten, und damit die Bestimmung der gesuchten Scheitelprojection durch allmäliges Aufsteigen bis zur gegebenen Anzahl erledigen kann.

Gegeben ist das Paraboloid durch sechs Ordinaten, da der unendlich ferne Punkt mit seiner Tangentenebene drei Constanten äquivalent ist. Jene Ordinaten können zweckmässig gewählt werden auf den Seiten eines

---

* Direct aus den Fehlergleichungen wurde das Paraboloid gefunden von Jordan. Vergl. d. Zeitschr. 1871, S. 164—167.

Rechtecks, von dem zwei Ecken mit Schnittpunkten gegebener Geraden zusammenfallen, wodurch sich noch Manches vereinfacht.

Ueber den praktischen Werth der Methode mögen die Geodäten entscheiden. Beachtung verdient die interessante Schrift schon wegen der strengen Systematik im Gange der Entwickelung.

Hannover. C. RODENBERG.

Netze zum Anfertigen zerlegbarer Krystallmodelle. Für den Unterricht an höheren Lehranstalten herausgegeben und erläutert von Dr. W. WAEGE, ordentl. Lehrer am Königstädtischen Gymnasium zu Berlin. Neun Tafeln und Text. Berlin 1888, R. Gärtner's Verlagsbuchhandlung.

Beim Entwurfe der vorliegenden Netze war hauptsächlich der Gesichtspunkt massgebend, ein Anschauungsmittel zu schaffen, durch welches die Schüler, welche keine Kenntnisse der Stereometrie und Projectionslehre haben, während des kurzen mineralogischen Unterrichts ein klares Bild von den einfachsten Gesetzen der Krystallographie gewinnen können. Die Modelle sollen aus Pappe und zwar vom Schüler selbst hergestellt werden. Das einfachste selbstgefertigte Modell kann gewiss, was den Nutzen für den Schüler anlangt, mit dem vielleicht viel eleganteren käuflich erworbenen concurriren und so ist der zu Grunde liegende Gedanke ein guter. Es ist nur die Frage, ob sich Zeit zu Derartigem erübrigen lässt. Eine zweckmässige Arbeitstheilung, wie sie der Verfasser vorschlägt, lässt wohl eine Bejahung dieser Frage zu, namentlich da die Netze in geeigneter Grösse gezeichnet vorliegen und nur ein Uebertragen mit Copirnadel nothwendig ist.

Von den Gestalten sind 33 dem regulären und 11 dem hexagonalen System entnommen. Die einzelnen Theile, aus welchen ein Modell aufgebaut wird, lassen an letzterem einerseits die verschiedenen wichtigen Schnitte erkennen, andererseits bringen sie Klarheit über die Entwickelung einer Krystallform aus einer andern. Z. B. lässt sich die Combination von Würfel und Octaeder, ein als Cubo-Octaeder bezeichneter Körper, durch Aufsetzen von Pyramiden sowohl zur einen als der andern Grundgestalt ergänzen. Die Sammlung ist jedenfalls des Versuchs einer Einführung werth. Uebrigens will der Verfasser noch im nächsten Schulprogramm (1889, Gärtner's Verlag) seine Ansicht über die Methodik des elementaren krystallographischen Unterrichts ausführlich darlegen.

Hannover. C. RODENBERG.

Projectivische Maassstäbe. Ein Hilfsmittel zum Studium der synthetischen Geometrie von Dr. FELIX BUKA, Oberlehrer am städtischen Realprogymnasium zu Charlottenburg und Privatdocent an der königl. technischen Hochschule zu Berlin. Berlin, Winkelmann & Söhne. 1888.

Die Theilung der beiden auf Carton angeführten projectivischen Maassstäbe besteht aus Punkten zweier projectivischer Punktreihen. Die Punkte sind so gewählt, dass zu jedem Paar auch die beiden ihm zugeordneten entsprechend gleichen Strecken abgelesen werden können. Durch Verschieben der Maassstäbe an einander kann man folglich nach und nach alle diese Streckenpaare zur Deckung bringen. Es ist gewiss gut und lehrreich für den Anfänger, wenn ihm dieser Vorgang einmal vor Augen geführt wird. Ebenso nützlich ist es, zu sehen, wie bei Coincidenz zweier entsprechender Punkte, aber nicht vereinigten Trägern, die Verbindungslinien beliebiger entsprechender Punkte genau durch einen Punkt gehen. Allgemeine Lagen der Maassstäbe führen unmittelbar zu einer Tangentenschaar eines Kegelschnitts, die Parabel natürlich ausgenommen. Vereinigt man im Schnittpunkt der Träger zwei Theilpunkte, so kann man unmittelbar zwei conjugirte Durchmesser angeben. Sind jene Punkte insbesondere Endpunkte entsprechend gleicher Strecken, so erhält man die Axen. Auf diese und andere Benutzungsarten wird im begleitenden Texte hingewiesen, unter häufiger Bezugnahme auf Steiner-Schröter's „Kegelschnitte".

Als Anschauungsmittel, aber nur als solches ist das Gebotene recht empfehlenswerth. Kegelschnitte aus beliebig gegebenen Elementen kann man nicht mit den Maassstäben construiren. Ich finde, dass alle Kegelschnitte der Gleichungsform $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ erhalten werden können, für welche $2b \leqq$ Abstand der Potenzpunkte der beiden Reihen ist.

Hannover. C. Rodenberg.

Uebungsstoff für den praktischen Unterricht in der Projectionslehre (Parallel-Perspective, Central-Perspective und Schattenlehre), von Dr. Guido Hauck, geh. Regierungsrath und Professor an der Technischen Hochschule zu Berlin. Zwei Hefte. Berlin 1888, Jul. Springer.

Für das planimetrische „gebundene Zeichnen" ist längst durch Entlehnung von Kunstformen des architektonischen und textilen Flächenornamentes ein reichhaltiger Uebungsstoff geschaffen worden, der neben den abstract geometrischen Constructionsaufgaben verwerthet wird und durch die ihm innewohnende Kraft auf die Ausbildung des Formensinnes des Schülers von wohlthätiger Wirkung ist. Mit den vorliegenden Heften hat der Verfasser begonnen, bezüglich der körperlichen Gebilde etwas Aehnliches zu schaffen. Die gebotenen Beispiele sind dadurch gewonnen, dass architektonische Motive unter Wahrung ihres ursprünglich ästhetischen Gehaltes auf ihren stereometrischen Grundgedanken zurückgeführt wurden. Die dargestellten Gegenstände sind Kreuze, Denksteine, gegliederte Obelisken, Altar, Fachwerkhäuschen, gothische Thürme, Gesimse im Style der Renaissance u. dergl. Die Gliederungen sind durchweg so einfach wie möglich gehalten, meist geradlinig; Curven (Kreisbögen) kommen nur da zur Verwendung, wo es aus ästhetischen Gründen unerlässlich erscheint. Die Formen sind sehr geschickt gewählt. Das Auftreten vieler einspringender Winkel macht es dem Anfänger nicht leicht, aus dem gegebenen Grund- und Aufrisse die räumliche Gestalt herauszulesen, und diese Schwierigkeit fordert zur selbständigen Ableitung weiterer Ansichten durch Anwendung der verschiedenen Transformationen, beziehungsweise zur Herstellung der Perspective oder Angabe der Beleuchtung auf. Das häufige Auftreten von Wiederkehren veranlasst zu einer steten Benutzung des wichtigen Diagonal-(Gehrungs-)Fluchtpunktes in der Perspective.

Der Berichterstatter benutzt die Hefte in den Uebungsstunden; die Gegenstände werden gern gezeichnet und der Preis von 1 Mark für das Heft (eines genügt) ist ein so niedriger, dass von jedem Studirenden die Anschaffung erwartet werden darf. Dann kann man während des Vortrags an einem einfachen Beispiele die Verwendung zeigen und sich umsomehr das Anzeichnen verwickelter Figuren ersparen, als überall, wo es wünschenswerth, die Construction auf dem Blatte selbst kurz angegeben ist.

Die Benutzung des gebotenen Stoffes kann allen Lehrern der darstellenden Geometrie wärmstens empfohlen werden.

Hannover. C. Rodenberg.

Lehrbuch der Differential-Gleichungen von Dr. Andrew Russell Forsyth, Professor am Trinity College zu Cambridge. Mit einem Anhange: Die Resultate der im Lehrbuche angeführten Uebungsaufgaben enthaltend, herausgegeben von H. Maser. Autorisirte Uebersetzung. 742 S. Braunschweig, Druck und Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn. 1889. Preis: 14 M.

Bei dem Mangel an ausführlicheren deutschen Lehrbüchern über die Integration der Differentialgleichungen ist es mit Freuden zu begrüssen, dass Herr H. Maser eine gelungene Uebersetzung des vortrefflichen Buches von Forsyth geliefert hat.

Das Werk zerfällt in zehn Capitel und behandelt auf circa 46 Druckbogen in elementarer Weise die Theorie der Differentialgleichungen, wobei das Integrationsproblem betont ist, während eigentliche functionentheoretische Untersuchungen ausgeschlossen sind.

In leicht fasslicher Weise führt der Verfasser den Studirenden in die Vorbegriffe ein und erledigt sodann im zweiten Capitel die einfachsten Integrationsmethoden der Gleichungen erster Ordnung. — Hervorgehoben sei die Behandlung der singulären Lösung mit geometrischen Anwendungen. — Man wird in diesem Capitel eine kurze Theorie des integrirenden Factors erwarten. Indessen bemerkt der Herr Herausgeber im Vorwort, „dass die theoretisch allerdings sehr wichtige, praktisch aber immerhin nur fraglichen Werth besitzende Methode des integrirenden Factors ganz übergangen ist".

Wir möchten dem nicht beistimmen. Der Begriff des integrirenden Factors ist nun einmal ein so fundamentaler, dass er in einem umfassenden und selbständigen Lehrbuch nicht fehlen darf. Und wenn man auch jenen Factor bei dem eigentlichen Integrationsproblem zur Noth entbehren kann, so bleibt er doch — selbst vom praktischen Standpunkt aus — ausserordentlich wichtig durch seine specifische Bedeutung in der Geometrie und Mechanik. — Uebrigens ist an manchen Stellen des Lehrbuches, z. B. S. 20 und 99 vom integrirenden Factor Gebrauch gemacht worden.

Im dritten Capitel findet man die allgemeine lineare Differentialgleichung mit constanten Coefficienten. Hier tritt uns Forsyth als englischer Originalmathematiker entgegen: Er benutzt daselbst das Symbol D für $\frac{d}{dx}$, D^2 für $\frac{d^2}{dx^2}$ u. s. w. Dieses Symbol gehorcht bekanntlich den Grundregeln der Algebra und darf auch mit negativem Index — als Integral — eingeführt werden, so dass durch selbiges die erheblichsten und elegantesten Vereinfachungen gegeben sind.

Merkwürdiger Weise hat diese Bezeichnungsart in den deutschen Lehrbüchern bisher fast gar keine Berücksichtigung gefunden, obschon dieser Calcül durch Cayley, Boole, Harley u. A. seit längerer Zeit streng und sorgfältig ausgebildet ist.

Im vierten Capitel sind vermischte Methoden aufgeführt. Zunächst werden behandelt die Gleichungen, in denen $y^{(n)}$ eine Function von x, oder y, oder $y^{(n-1)}$, oder $y^{(n-2)}$ ist, überhaupt Gleichungen, für welche die Ordnung erniedrigt werden kann. Dann findet man die exacten Gleichungen.

Weiterhin kommt Verfasser gelegentlich der Reduction einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung in die Normalform auf die Invariante der Coefficienten und auf die Schwarz'sche Abgeleitete zu sprechen, dann auf die Aequivalenz zweier Gleichungen. Den Schluss dieses Capitels bilden die bekannten allgemeinen Sätze über lineare Differentialgleichungen (Variation der Constanten) und geometrische Anwendungen (Trajectorien).

Das fünfte Capitel bringt die Integration durch Reihen. Zuerst wird die Differentialgleichung der hypergeometrischen Functionen höherer Ordnung, symbolisch:

$$\left\{\varphi\left(x\frac{d}{dx}\right)+\frac{1}{x}\psi\left(x\frac{d}{dx}\right)\right\}y=0$$

in Betracht gezogen. Dann aber werden die in der Physik so wichtigen Gleichungen von Legendre und Bessel durch Reihen integrirt, ihr Zusammenhang erörtert, die Kugelfunctionen P_n und Q_n eingeführt, ingleichen die Bessel'sche Function J_n und endlich gewisse von der Differentialgleichung abhängige Eigenschaften dieser Functionen entwickelt.

Schliesslich wird auch die Riccati'sche Gleichung behandelt; zuerst ihre Sonderfälle, zuletzt aber der allgemeine Fall mittels Bessel'scher Functionen.

Das sechste Capitel ist der hypergeometrischen Reihe von Gauss gewidmet. Es werden 24 particuläre Integrale aufgestellt und deren Beziehungen zueinander untersucht; hierbei wird die Gauss'sche Π-Function eingeführt. Zuletzt werden jene Fälle besprochen, bei welchen die Integration in endlicher Form möglich ist.

Die letztgenannten beiden Capitel V und VI bilden eine vorzügliche Grundlage für gewisse Studien über mathematisch-physikalische Probleme und dürften auch eine sehr geeignete Vorbereitung auf eine grosse Anzahl von wichtigen, die hypergeometrischen Functionen betreffenden Originalabhandlungen von Kummer, Schwarz, Cayley, Goursat u. A. sein.

Im siebenten Capitel wendet sich Verfasser den Lösungen durch bestimmte Integrale zu.

Diese interessante Methode der Integration, wie sie von Euler, Laplace, Kummer u. A. ausgebildet worden ist, erfreut sich nicht so vieler Anhänger, als man erwarten sollte. Dies scheint seinen Grund darin zu finden, dass jene Integralformen zuweilen schwer discutirbar sind, zuweilen einen präcisen Sinn überhaupt nicht besitzen; hierzu kommt, dass die neuere Functionentheorie — im Sinne der Untersuchungen von Fuchs — die Eigenschaften der Integrale direct aus der Differentialgleichung abzuleiten versucht.

Aber der Herr Verfasser bemerkt mit Recht, dass die erwähnten Integralformen bei einigen Aufgaben der mathematischen Physik „die einzigen bisher erhaltenen Lösungen" bilden (insbesondere bei gewissen linearen partiellen Differentialgleichungen).

Im vorliegenden Capitel kommen indessen nur gewöhnliche Differentialgleichungen vor, nämlich zunächst die Gleichung von Laplace

$$x\varphi\left(\frac{d}{dx}\right)y+\psi\left(\frac{d}{dx}\right)y=0,$$

welcher genügt wird durch $y=\int e^{xt}\,T\,dt$.

Eben dasselbe Integral wird sodann gebraucht zu einer Transformation der linearen Gleichung n^{ter} Ordnung mit algebraischen Coefficienten vom höchstens m^{ten} Grade in eine andere, in welcher Grad mit Ordnung vertauscht ist.

Weiter wird die Riccati'sche Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\lambda x^n y=0$$

durch bestimmte Integrale gelöst. Den Schluss bildet die geschlossene Integration der Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe.

Capitel VIII bringt: Gewöhnliche Differentialgleichungen mit mehr als zwei Veränderlichen.

Daselbst wird zunächst jene Differentialgleichung integrirt, welche das Additionstheorem der elliptischen Functionen darstellt; dann wird nach einem andern Verfahren der allgemeine Fall eines Systems von $n-1$ Gleichungen (Abel'sche Transcendente) zwischen n Veränderlichen behandelt.

Nach diesem kommen die totalen Differentialgleichungen mit mehr als zwei Veränderlichen, für welche die Bedingung der Integrabilität aufgestellt und die Integration geleistet wird. Die geometrische Interpretation fehlt nicht.

Endlich wird die Methode ausgedehnt auf Gleichungen mit n Veränderlichen.

Der zweite Theil dieses Capitels ist den simultanen Differentialgleichungen gewidmet.

Behandelt werden:

1. Die linearen Gleichungen mit constanten Coefficienten in der symbolischen Form

$$f_1(D)x + \varphi_1(D)y = T_1, \quad f_2(D)x + \varphi_2(D)y = T_2;$$

derselbe Fall für drei abhängige Veränderliche. Hierbei ist Rücksicht genommen auf die Reellität resp. Gleichheit der Wurzeln der Charakteristik.

2. Simultane Gleichungen mit veränderlichen Coefficienten. — Nachdem gezeigt ist, dass es genügt, ein System von n Gleichungen der ersten Ordnung zu betrachten, wird dieses auf eine einzige Gleichung n^{ter} Ordnung zurückgeführt.

Die Sonderfälle, in denen sich Vereinfachungen ergeben, sind durch passende Beispiele gekennzeichnet.

3. Das der Dynamik entnommene Gleichungssystem, welches die Bewegung eines Punktes bestimmt, den ein Kräftecentrum nach dem Gravitationsgesetze anzieht.

Wir kommen nun zu den beiden Schlusscapiteln IX und X des Buches, in welchen die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, dann diejenigen der zweiten und höheren Ordnung abgehandelt werden.

Hier überrascht die Vollständigkeit des Dargebotenen, und eine sachgemässe Gliederung erleichtert das Eindringen in die Methoden ungemein.

Nach den nöthigen allgemeinen Erörterungen und der Classification der Integrale, wobei auf die geometrische Deutung stete Rücksicht genommen ist, wird die Integration von Lagrange's linearer Differentialgleichung vorgeführt und das Verfahren auf Gleichungen mit n unabhängigen Veränderlichen ausgedehnt.

Dann kommen die sogenannten Hauptformen, gewisse leicht integrirbare Gleichungen, die sich durch ihre geometrische Bedeutung auszeichnen, wie die Differentialgleichung der abwickelbaren Flächen, der Cylinderflächen, die Clairaut'sche Form u. s. f. Das sich durch geometrische Betrachtungen von selbst darbietende Dualitätsprincip findet Berücksichtigung.

Für die Auflösung der allgemeinen Gleichung

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

wird die Methode von Lagrange und Charpit vorgeschlagen und ihr Erfolg an den Hauptformen gezeigt. — Die allgemeinste Differentialgleichung mit beliebig vielen unabhängigen Veränderlichen wird nach der Methode Jacobi's, wie sie sich in dessen Dynamik vorfindet, integrirt.

Den Schluss des neunten Capitels bildet die Bour'sche Methode für simultane partielle Differentialgleichungen.

Nun die partiellen Differentialgleichungen höherer Ordnung. Nach Feststellung der Begriffe „vollständiges Integral“ und „Zwischenintegral“ werden die einfachsten Fälle der linearen Gleichung

$$Rr + Ss + Tt = V$$

integrirt. Hierauf wird auf eben dieselbe Gleichung die Methode von Monge angewendet, wobei die allgemeinere

$$Rr + Ss + Tt + U(rt - s^2) = V$$

von selbst in den Kreis der Betrachtung hineingezogen wird. Aus dieser Gleichung wird schliesslich mittels des Dualitätsprincipes die entsprechende abgeleitet.

Jetzt folgen die Methoden von Laplace für lineare und von Poisson für homogene Gleichungen. Die linearen partiellen Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten werden mittelst symbolischer Methoden integrirt. Die Analogie dieser Differentialgleichungen mit den gewöhnlichen Differentialgleichungen tritt deutlich hervor; der ganze Calcul ist höchst elegant.

Unter den vermischten Methoden, die Capitel X abschliessen, sei die Integration der Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

erwähnt. Diese in der Theorie der Wärmeleitung auftretende Gleichung wird zunächst durch Reihen, dann durch bestimmte Integrale (nach Riemann und Laplace) gelöst.

Durch Reihen wird ferner die wichtige Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

integrirt. Endlich wird an dieser Stelle noch die Ampère'sche Auflösungsmethode der Gleichung

$$Rr + Ss + Tt + U(rt - s^2) = V$$

mitgetheilt.

Nun auch ein Wort über die Aufgaben des Forsyth'schen Buches.

Man findet über achthundert Uebungsbeispiele den verschiedenen Capiteln einverleibt; viele derselben sind den Originalabhandlungen hervorragender (citirter) Mathematiker entnommen und dürften zum Theil classischen Werth besitzen. Manches der Beispiele bietet so viel Interessantes, dass es anstandslos in den Haupttext hätte gestellt werden können.

Der Herr Herausgeber hat sich im Verein mit Herrn A. Baerthel der Mühe unterzogen, in einem ca. 250 Seiten starken Anhang die Anleitung zur Lösung der Aufgaben zu geben, sowie die Resultate beizufügen. Das Buch wird daher schon jenen Studirenden, die das Studium der Differentialgleichungen eben erst beginnen, ein vorzüglicher Rathgeber sein.

Aber auch sehr weitgehenden Ansprüchen ist Genüge geschehen, und dort, wo sich der Herr Verfasser Beschränkung auferlegen musste, hat er durch reichliche Quellenangaben und sonstige Bemerkungen werthvolle Winke gegeben.

Am Schlusse des Buches findet sich ein Autorenverzeichniss mit Bezug auf Lehrbücher und Zeitschriften.

Bemerkt sei noch Folgendes: Der Herr Verfasser beabsichtigt später in einem zweiten Bande speciellere und moderne Probleme aus dem Gebiete der Differentialgleichungen zu erörtern, wobei er insbesondere auf die Untersuchungen von Fuchs, Hermite, Halphen, Klein, Lie, Mayer u. A. zurückzukommen gedenkt.

Ein solches Unternehmen würde gewiss sehr freudig begrüsst werden. Zunächst aber sei der erste Band auf das Angelegentlichste empfohlen.

Plauen i. V., 12. April 1889. WOLDEMAR HEYMANN.

CH. HARMS, **Zwei Abhandlungen über den Rechenunterricht.** Oldenburg, Stalling. 1889. 72 S.

Die erste Abhandlung: „Das Rechnen mit den Zahlen von 1 bis 100“ ist ein methodisch geordneter Stufengang der hierher gehörigen Uebungen. Der Verfasser, ein Gegner der Grube'schen Methode, hat zwar keine eingehende, vernichtende Kritik an ihr geübt (wie wir in unserer Methodik d. prakt. Arithm. S. 191 flgg.), ihre Schwächen aber hinreichend aufgedeckt, dass die Widernatürlichkeit dieser Unterrichtsmanier in die Augen springen muss. Wenn ein Schulmann, der auf eine fast 5 Jahrzehnte umspannende Erfahrung zurückblickt und dessen Name einen guten Klang in der Rechenliteratur hat, gegen eine Methode seine Stimme erhebt, so fällt diese Stimme besonders ins Gewicht. Leider hat die Grube'sche Methode trotz ihrer Verkehrtheit noch manche Freunde, freilich sind darunter Viele, welche nicht darnach zu unterrichten, sondern nur anzuordnen haben, und die innerlich seufzenden Lehrer schweigen lieber, damit ihre Klage über wenig Erfolg bei saurer Arbeit nicht als Ungeschick gedeutet werde. Der von Harms aufgestellte Stufengang mit den eingestreuten Bemerkungen lässt Schritt für Schritt den gewiegten Praktiker erkennen. Die Hauptübungen werden von den nebensächlicheren geschieden, die nach jeder Abtheilung festzuhaltenden Ergebnisse zusammengestellt, die neuauftretenden Schwierigkeiten markirt und die bequemsten Wege zu ihrer Ueberwindung gezeigt, Addition und Subtraction sind anfangs wegen ihres engen Anschlusses ans Aufwärts- und Abwärtszählen mit Recht bevorzugt. Nur hätten wir gewünscht, dass der Satz (S. 25): „Die Grundlage alles Rechnens ist das Zählen" an die Spitze gestellt und dass die Reihenübungen (S. 27) als sprungweises Zählen aufgefasst und auf sie ebenso grosses Gewicht gelegt worden wäre, als auf das „Vollmachen des Zehners". Da alles Rechnen ein Schreiten von Zahl zu Zahl (in verschieden grossen Schritten) ist, so müssen die verschiedenen Schritte geübt werden, und wir halten es nach dem Grundsatze vom Leichten zum Schweren für zweckmässig, wenn nach dem Einerschritt (dem Zählen) der Zweierschritt (d. i. das Zählen in geraden und in ungeraden Zahlen), dann der Dreierschnitt etc. in entsprechend grossen Zahlgebieten geübt wird. Die Reihenübungen und die dekadischen Ergänzungen bilden eine sichere Grundlage für alle Species.

In der zweiten Abhandlung: „Ueber Rechenunterricht und Rechenbücher" giebt der Verfasser einen geschichtlichen Ueberblick über seine schriftstellerische Thätigkeit auf dem Gebiete des Rechnens. Entstehung, Bestimmung und Einrichtung seiner Rechenbücher, sowie die Veränderungen derselben bei Neuauflagen sind kurz angegeben. Auch werthvolle Winke für den Unterricht findet man hier und da. Die weite Verbreitung der Rechenbücher von Harms resp. Harms-Kallius beruht nicht zum geringsten Theile auf ihrem inneren Werthe.

Leipzig-Reudnitz. Dr. Unger.

Der Brocard'sche Winkel des Dreiecks. Eine geschichtliche Studie von Dr. A. Emmerich. Beilage zum 36. Jahresberichte des Realgymnasiums zu Mühlheim a. d. Ruhr. (1889. Progr. Nr. 455.) 24 S.

Ist ABC ein gegebenes Dreieck, so giebt es in dessen Innerem zwei Punkte Ω, Ω', welche folgende Winkelbeziehungen eintreten lassen:

$$\angle \Omega AB = \Omega BC = \Omega CA \text{ und } \angle \Omega' AC = \Omega' CB = \Omega' BA.$$

In beiden Fällen ist der dreimal auftretende Winkel derselbe. Er wird durch den Buchstaben ω bezeichnet und heisst seit 1883 der Brocard'sche Winkel, nachdem seit 1881 die Punkte Ω, Ω' den Namen der Brocard-schen Punkte erhalten haben. Diese Punkte und dieser Winkel sind allerdings nicht erst durch H. Brocard den Mathematikern gekennzeichnet worden. Crelle hat sie 1816 entdeckt. C. F. A. Jacobi (von Pforta) hat ihnen 1825 ein gehaltvolles Schulprogramm gewidmet. Andere, vorwiegend deutsche Schriftsteller folgten bis 1855. Dann aber traten die Punkte wieder in Vergessenheit. H. Brocard hat sie 1875 neu entdeckt, und an seine Veröffentlichung reihten sich so viele andere an, immer neue und neue Eigenschaften des Dreiecks enthüllend, dass man berechtigt ist, von einer seit jener Zeit entstandenen neusten Geometrie des Dreiecks zu reden, und dass man die Ehre, einigen ihrer Gebilde den Namen gegeben zu haben, füglich Demjenigen gönnen darf, der sie thatsächlich erst zum Allgemeingut der Geometer machte. Mit den Brocard'schen Gebilden in nahem Zusammenhang stehen weitere Punkte, Gerade, Kreise, denen die neuere Literatur die Namen der Herren Grebe, Lemoine u. s. w. beigelegt hat. Herr Emmerich hat sich die dankbare Aufgabe gestellt, eine Geschichte dieser neuen Forschungen zu schreiben. Er beginnt mit der Geschichte des Brocard'schen Winkels und verspricht die Geschichte jener anderen hier nur beiläufig erwähnten Gebilde folgen zu lassen. Wir hoffen sehr, er werde sein Versprechen lösen, zudem, da er selbst als Schriftsteller auf dem angedeuteten Gebiete wiederholt aufgetreten ist und es vollständig beherrscht.

Cantor.

Aufgabe und Anschauung besonders in der Stereometrie, vom Oberlehrer Professor Dr. K. Schwering. Beilage zum Jahresbericht des königl. Gymnasiums zu Coesfeld. 1888—1889. (1889. Progr. Nr. 335.) *Coesfeld.* 11 S.

Der Inhalt dieser Programmabhandlung macht sie zu einer solchen in doppelter Bedeutung. Sie ist nicht blos einem Jahresberichte beigegeben, sie enthält das Programm ihres Verfassers über manche Fragen des mathematischen Mittelschulunterrichts. Referent war wiederholt in der Lage, sich entschuldigen zu sollen, wenn er glaubte, in derartige Dinge, für die er keinerlei Erfahrung mitbringt, als solche, die er sehr mittelbar sich erwarb, hineinreden zu dürfen. Auch heute können wir nur unter dem gleichen Vorbehalte, unter diesem aber vollständig unsere Meinungsübereinstimmung mit Herrn Schwering aussprechen. Mancherlei Worte haben wir in seiner Abhandlung gelesen, die wir vollgiltig unterschreiben. Das Hauptgewicht legt er auf die Untersuchung, wie wohl der jetzt fast widerspruchslos angenommene Satz, dass die Aufgabe es sei, in welcher der mathematische Unterricht gipfeln müsse, in der Stereometrie zur Anwendung zu kommen habe. Er will die Aufgabe so gefasst wissen, dass die zu Auflösungen nothwendigen Zeichnungen stets in der Ebene vollzogen werden, wie sie ja auch nur in der Ebene vollzogen werden können. Einige Beispiele erörtern seine Meinung näher, z. B. die Aufgabe, die Höhe des Tetraeders zu finden, dessen sechs Kanten gegeben sind. Er will daneben die Rechnungsaufgabe auch nicht missen, welche dazu führe, dass der Schüler den Stoff sich vollends aneigne, der ihm vorher immer noch mehr oder weniger fremd gegenüberstehe. Diese beiden Punkte dürften die wichtigsten sein, welche Herr Schwering in der gewandten, oft etwas humoristisch gefärbten Sprache behandelt, welche unsere Leser an ihm kennen.

Cantor.

Ueber die Kurven, deren Bogen einer Potenz der Abscisse proportional ist, von Dr. Richard Müller. Besonderer Abdruck aus dem Programm des Königl. Realgymnasiums zu Berlin. Ostern 1889. 16 S.

Ueber die Rectification gewisser gegebener Curven haben in den letzten Jahren namentlich die Herren Humbert und de Longchamps in den Comptes Rendus der Pariser Akademie sehr lesenswerthe Untersuchungen veröffentlicht. Herr Müller geht von der entgegengesetzten Aufgabe aus. Er bestimmt die Curve, für welche

$$s = a x^{\mu}, \text{ mithin} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = (\mu a)^2 . x^{2\mu-2} - 1 .$$

Aus $s = a x^{\mu}$ folgt, dass nur von solchen Curven die Rede sein soll, deren Bogenlänge auf der Ordinate des Anfangspunktes beginnt, wo gleichzeitig $x = 0$ und $s = 0$. Daraus folgt weiter, dass $x = 0$ ein endliches y liefern muss, und daraus wieder, dass $0 < \mu \leq 1$ sein muss. Zunächst allerdings verlangt die obige Differentialgleichung nur $(\mu a)^2 . x^{2\mu-2} - 1 \geq 0$ auch bei $x = 0$, welches $2\mu - 2 \leq 0$ zur Folge hat, oder $\mu \leq 1$. Wird nun das Integral

$$y = \pm \int_0^{x^1} \sqrt{(\mu a)^2 x^{2\mu-2} - 1}\, dx$$

gebildet, wo x_1 derjenige äusserste Werth von x ist, bei welchem die Wurzelgrösse aufhört, reell zu sein, und entwickelt man die Wurzelgrösse zum Zwecke der Integration noch Potenzen von $x^{1-\mu}$, so wird unter Annahme von immer positiven Quadratwurzeln

$$y = const + a x^{\mu} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2-\mu} \cdot \frac{x^{2-\mu}}{\mu a} + \cdots,$$

also y endlichen Werthes auch bei $x = 0$, nur wenn $2 > \mu > 0$, wo die obere Grenze vermöge der früheren Betrachtungen auf 1 heruntergeht.

Nachdem so für μ und für x Grenzen gewonnen sind, innerhalb deren eine wirkliche Curve von der Gleichung $s = a x^{\mu}$ vorhanden ist, geht der Verfasser zu seiner Hauptaufgabe über, der Umwandlung der Gleichung in eine solche von geschlossener Form zwischen x und y, und er findet, dass die dabei erforderliche Integration am leichtesten von Statten geht, wenn man eine neue Veränderliche u einführt, durch welche x wie y ausgedrückt wird. Allerdings genügt hier nicht eine algebraische Beziehung zu diesem neuen Parameter. Trigonometrische und elliptische Functionen sind es, die in Gebrauch treten, wie an mehreren Beispielen zur Darstellung gelangt.

Cantor.

Eulers's Methode der Parameterdarstellung algebraischer Kurven, von Hermann Hahn, ordentl. Lehrer an der Margarethenschule. Wissenschaftliche Beilage zum dritten Jahresbericht über die Margarethenschule in Berlin. Ostern 1889. 32 S.

Die Aufgabe, eine Resultirende aus einer Anzahl von Gleichungen zu finden, in welcher gewisse Grössen nicht mehr vorkommen, besitzt ein Gegenstück in der Aufgabe, gegebene Gleichungen zwischen mehreren Grössen als Resultirende aus einem Systeme von mehr Gleichungen mit noch mehr Grössen aufzufassen. So behandelt die Lehre von den Raumcurven, so diejenige von den Oberflächen den Gegenstand ihrer Untersuchungen. So ist das bekannte Joachimsthal'sche Verfahren zur Auffindung der Berührungslinien an eine ebene Curve mittels der Substitution $\frac{x-x_1}{k}=\frac{y-y_1}{l}=\varepsilon$ aufzufassen. Im engsten geistigen Zusammenhang damit steht auch die Parameterdarstellung algebraischer Curven, wobei man $F(x,y)=0$ ersetzt durch $x=\varphi_1(z)$ und $y=\varphi_2(z)$, wobei F das Symbol einer algebraischen Functionalität ist. Die analytische Behandlung der Unicursalcurven hängt damit ebenso zusammen, wie die der Curven vom Geschlecht 1. Herr Hahn ist dem Ursprunge dieser Betrachtungsweise nachgegangen und hat ihn bis zu Euler's Einleitung in die Analysis des Unendlichen, Bd. I, Capitel 3 § 52 flgg. (deutsch von Maser, S. 41 flgg.), verfolgt. Euler's Methode $ay^\alpha+bz^\beta+cy^\gamma z^\delta=0$ in zwei Gleichungen für y und z in x ausgedrückt umzuwandeln besteht darin, dass zunächst $y=x^m z^n$ gesetzt und dann in
$$ax^{\alpha m}z^{\alpha n}+bz^\beta+cx^{\gamma m}z^{\gamma n+\delta}=0$$
der Exponent n der Art bestimmt wird, dass z aus dieser Gleichung in x gefunden werden kann; y ist alsdann gleichfalls sofort in x gegeben.

Kramer hat in seiner „Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques" die Frage in einer unseren neuesten Anschauungen nicht unähnlichen Gestalt behandelt, und Baltzer hat vor wenigen Jahren in seiner ungemein reichhaltigen Analytischen Geometrie (Leipzig 1882) sich neuerdings damit beschäftigt. Das waren die Vorarbeiten, auf welche Herr Hahn sich stützt. Er hat die Parameterdarstellung für eine nicht unbeträchtliche Anzahl von Curven gegeben, insbesondere für die Kegelschnitte, auch für einige Curven dritten Grades, z. B. für die logocyklische Curve
$$(x^2+y^2)(2a-x)=a^2x,$$
welche den Parametergleichungen
$$x=\frac{2a}{1+v^2},\quad y=\frac{a(1-v^2)}{v(1+v^2)}$$
entspricht. Manche von den Beispielen dürften zur Einübung der Eigenschaften algebraischer Curven passende Verwendung finden. Cantor.

Die Elemente der analytischen Geometrie der Ebene. Zum Gebrauch an höheren Lehranstalten, sowie zum Selbststudium dargestellt und mit zahlreichen Uebungsbeispielen versehen von Dr. H. Ganter, Professor an der Kantonschule zu Aarau, und Dr. F. Rudio, Professor am Polytechnikum zu Zürich. Leipzig 1888, B. G. Teubner. VIII, 166 S.

Wir befinden uns in der angenehmen Lage, dem in der Ueberschrift genannten Buche ein uneingeschränktes Lob spenden zu müssen. Es ist klar, fasslich bei aller Wissenschaftlichkeit und, was bei dem so unzählige Mal breitgetretenen Inhalt fast Wunder nehmen kann, es ist reich an Eigenthümlichkeiten. Der Inhalt erstreckt sich bis zur allgemeinen Gleichung zweiten Grades ausschliesslich, und wenn wir zugleich auch angeben sollen, welche Hilfsmittel die Verfasser sich anzuwenden gestatten, so ist es nur das einfachste Buchstabenrechnen, sowie die Auflösung von lineären und quadratischen Gleichungen, aber ohne Determinanten, welches sie als bekannt voraussetzen. Ueber die Abgrenzung hat jeder Verfasser allein zu entscheiden. Er ist dabei von den Verhältnissen, innerhalb deren er lebt, von den Kreisen, innerhalb deren er zunächst seine Leser sucht, abhängig. Wir dürfen also nicht darüber rechten, ob wir die Ausschliessung der allgemeinen Gleichung zweiten Grades billigen, ob wir nicht Determinanten benutzt sehen möchten. Von den Eigenthümlichkeiten des Buches wollen wir, fast auf das Gerathewohl, nur zwei hervorheben. Meistens wird als selbstverständlich vorausgesetzt, dass und wie gegebene Längen aufgetragen werden. Die Verfasser unterstützen den Leser im Verständnisse dieser einfachsten Aufgabe, indem sie zwei Punkte O und E auf einer Geraden als gegeben annehmen lassen: den Anfangspunkt und den Einheitspunkt. Nach Ableitung der bekannten Flächenformel für das n-Eck aus den Coordinaten seiner Eckpunkte wird sofort die Folgerung gezogen, dass, wenn neue Eckpunkte eines neuen n-Ecks die gleichen Abscissen wie im ersten Falle, aber solche Ordinaten besitzen, welche zu den früheren im Verhältnisse $l:n$ stehen, die neue Fläche zur alten das gleiche Verhältniss aufweise. Später wird dieser Satz zur Auffindung der Ellipsenfläche mit Zugrundelegung der bekannten Kreisfläche angewandt. Die letztere Ableitung ist ja keineswegs neu; sie findet sich beispielsweise in dem bekannten Lehrbuche von O. Fort; aber dass sie so frühzeitig vorbereitet würde, ist uns noch nirgend aufgefallen, nicht einmal in dem vollständigsten aller Werke, bei Salmon-Fiedler. Wir könnten noch manches Aehnliche anführen, begnügen uns aber lieber damit, dem Buche selbst Leser und Käufer zu wünschen, die es entschieden verdient.

Cantor.

Bibliographie

vom 1. November bis 15. December 1889.

Periodische Schriften.

Register zu den Jahrgängen 1846—1885 der Berichte über die Verhandlungen und zu den Bänden I—XII der Abhandlungen der mathem.-physikal. Cl. d. königl. sächs. Ges. d. Wissensch. Leipzig, Hirzel. 1 Mk.

Sitzungsberichte der königl. böhm. Gesellsch. d. Wissensch. Mathem.-naturw. Cl. 1889. Prag, Calve-Tempsky. 7 Mk. 20 Pf.

Almanach der kaiserl. Akademie der Wissensch. in Wien. 39. Jahrg. 1889. Wien, Tempsky. 3 Mk. 40 Pf.

Publicationen des astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. Nr. 24. Leipzig, Engelmann. 8 Mk.

Meteorologisches Jahrbuch für Bayern etc., herausgegeben v. C. Lang u. F. Erk. 11. Jahrg. 1889. 2. Heft. München, Ackermann. compl. 18 Mk.

Jahresbericht des badischen Centralbureaus für Meteorologie etc. Jahrg. 1888. Karlsruhe, Braun. 5 Mk. 40 Pf.

Veröffentlichungen der grossherzogl. Sternwarte zu Karlsruhe, herausgeg. v. W. Valentiner. 3. Heft. Ebendas. 16 Mk.

Mathematische Annalen, herausgeg. v. F. Klein, W. Dyck u. A. Mayer. 35. Bd., 1. u. 2. Heft. Leipzig, Teubner. 20 Mk.

Astronomische Nachrichten, herausgeg. v. A. Krueger. 123. Bd. Kiel und Hamburg, Mauke S. compl. 15 Mk.

Reine Mathematik.

Lejeune-Dirichlet's Werke, herausgeg. v. L. Kronecker, 1. Bd. Berlin, G. Reimer. 21 Mk.

Enneper, A., Elliptische Functionen; neu bearbeitet von F. Müller. Halle a. S., Nebert. 22 Mk. 50 Pf.

Königsberger, L., Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variabelen. Leipzig, Teubner. 8 Mk.

Sickenberger, A., Uebungsbuch zur Algebra. 1. Abth. München, Ackermann. 1 Mk.

Servus, H., Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra. 4. Heft. Leipzig, Teubner. 75 Pf.

Doehlemann, K., Untersuchung der Flächen, welche sich durch eindeutig aufeinander bezogene Strahlenbüschel erzeugen lassen. München, Ackermann. 1 Mk.

WEILER, A., Neue Behandlung der Parallelprojectionen und der Axonometrie. Leipzig, Teubner. 6 Mk.

DRASCH, H., Elemente der analytischen Geometrie der Geraden und der Kegelschnitte. Wien, Hölder. 1 Mk. 20 Pf.

RUDEL, K., Die Verwerthung der Symmetrie im Geometrieunterricht. Nürnberg, Heerdegen-Barbeck. 1 Mk.

TREUTLEIN, P., Das geschichtliche Element im mathematischen Unterrichte. Vortrag, gehalten in der Naturforscherversamml. zu Heidelberg, 1888. Braunschweig, Salle. 60 Pf.

SULYKOS, J., Der mathematische Grundbaum mit neuen geometrischen Entdeckungen. Wien, Perles. 1 Mk.

Angewandte Mathematik.

BALL, R., Theoretische Mechanik starrer Systeme; herausgeg. v. H. GRAVELIUS. Berlin, G. Reimer. 14 Mk.

OEKINGHAUS, E., Ueber die Bewegung der Himmelskörper im widerstehenden Mittel. Halle a. S., Schmidt. 6 Mk.

ISRAEL-HOLZWART, A., Abhandlungen aus der mathematischen Astronomie. Ebendas. 2 Mk. 40 Pf.

REBEUR-PASCHWITZ, E. v., Hilfstafeln zur Berechnung der Parallaxe für Planeten und Kometen nach Hansen. Karlsruhe, Braun. 1 Mk.

SCHMIDT, W., Zum Unterricht in der mathematischen Geographie am Untergymnasium. Wien, Hölder. 1 Mk.

GLEICHEN, A., Die Haupterscheinungen der Brechung und Reflexion des Lichts, dargestellt nach neuen Methoden. Leipzig, Teubner. 1 Mk. 60 Pf.

WEYRAUCH, J., Robert Mayer, der Entdecker des Princips von der Erhaltung der Energie. Rede. Stuttgart, Wittwer. 1 Mk. 20 Pf.

Physik und Meteorologie.

MIETHE, A., Zur Actinometrie astronomisch-photographischer Fixsternaufnahmen. Rostock, Volckmann. 1 Mk.

Historisch-literarische Abtheilung.

Beiträge zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter.

Von

Dr. J. L. Heiberg

in Kopenhagen.

Hierzu Taf. II.

I.

Liber Archimenidis de comparatione figurarum circularium ad rectilineas.

I. Omnis circulus orthogonio triangulo est equalis, cuius unum duorum laterum rectum continentium angulum medietati diametri circuli equatur et alterum ipsorum linee circulum continenti.

(Fig. 1.) sit itaque circulus $abgd$ triangulo e equalis, secundum quod ante narrauimus in propositione. dico itaque, quod eius mensura ipsius mensure equatur.

quod si non ita fuerit, tunc circulus aut maior aut minor eo erit. sit itaque primo maior. faciam autem in circulo quadratum $abgd$, secabo autem arcum ab in duo media super punctum f et arcus ei similes similiter, et copulabo af et fb et ei similes. iam ergo separatum est etiam ex residuis portionibus circuli $abgd$ plus medietate ipsarum et est afb et sibi similes. cum ergo fecerimus ita secundum illud, quod sequitur, remanebunt portiones, que erunt minores quantitate eius, quod circulus addit super triangulum, et etiam figura tunc rectilinea polligonia, quam continet circulus, erit maior triangulo. sit itaque figura illa afb et eius similes.

ponam autem centrum circuli n et producam perpendicularem ns; linea igitur ns est minor uno duorum laterum trianguli continentium rectum angulum. et linea circumdans poligonium est minor reliquo latere ipsorum, quoniam ipsa etiam est minor circumferentia circuli. quod autem fit ex multiplicatione unius duorum laterum trianguli continentium rectum angulum in alterum et est duplum trianguli, est plus aggregato

11) ei] scr. eis.

ex *ns* linea in lineam circumdantem poligonium et est duplum poligonii. cum igitur illud ita sit, tunc triangulus est maior poligonio. sed iam fuerat minor; et hoc quidem est contrarium et impossibile.

(Fig. 2.) sit etiam circulus minor triangulo *e*, si fuerit illud possibile; describam autem super circulum ipsum quadratum continentem ipsum sitque quadratus *qc*. et iam quidem separatum est ex quadrato *qc* plus medietate eius et est circulus. diuidam autem arcum *ba* in duo media et arcus sibi similes in duo media. linee ergo, que transeunt per puncta sectionum, contingunt circulum. tunc linea *zt* iam diuisa est in duo media super *f*, et linea *cf* est perpendicularis super *zt* et similiter linee ei similes. et quoniam linee *zc* et *ct* sunt maius *zt*, et est earum medietas maior medietate ipsius, tunc linea *ct* est maior *tf*, que est equalis *tb*. ergo triangulus *fct* est maior medietate figure *fcb*; et multo plus illo erit maior medietate figure *fcb*, que continetur duabus lineis *fc*, *cb* et arcu *bf*. et similiter erit triangulus *cfz* maior medietate figure *cfa*. ergo totus *tcz* est maior medietate figure *afbc*, que continetur duabus lineis *ac*, *cb* et arcu *afb*, et similiter sunt trianguli similes sibi plus medietate portionum aliarum sibi similium. cum ergo fecerimus illud in eo, quod sequitur, remanebunt portiones super circulum, que, cum aggregabuntur, erunt minus augmento trianguli *e* supra circulum *abgd*. remaneat ergo portio *fza* et portiones sibi similes. figura igitur rectilinea, que circulum continet, erit minor triangulo *e*. sed hoc quidem est impossibile, quoniam fuit maior, et illud ideo, quoniam *nf* equatur catheto trianguli, et linea continens poligonium est maior reliquo latere trianguli, quod continet rectum angulum, eo quod sit maior linea circumdante circulum; illud ergo, quod fit ex multiplicatione *fn* in lineam continentem figuram poligoniam, est maius eo, quid fit ex multiplicatione unius duorum laterum trianguli continentium rectum angulum in alterum. non est igitur circulus minor triangulo *e*. et iam quidem ostensum fuit in hiis, que premissa sunt, quod ipse non est maior eo. circulus igitur *abgd* est equalis triangulo *e*. Et etiam quia area trianguli *e* est equalis ei, quod fit ex multiplicatione perpendicularis sue in medietatem basis ipsius, et eius perpendicularis est equalis medietati diametri *abgd* et basis eius equalis circumferencie circuli *abgd*, tunc quod fit ex multiplicatione eius in medietatem sectionis circumferencie, est area figure accepta equalis aree trianguli *e*. et propter hoc erit multiplicatio medietatis diametri in medietatem porcionis circumferencie area figure, que continetur ab illa porcione et duabus lineis egredientibus a duabus extremitatibus porcionis ad centrum.

---

9) est] m. rec. 15) *cfa*] *cfa cfa*. 20) remaneat] remanet. 21) igitur] igitur *tunc* (?) m. rec. 23) *nf*] *lfnf*. 27) multiplicatione] multiplicationem. 36) accepta] fort. accepte?

et est illud, cuius uoluimus declarationem.

II. Proportio aree omnis circuli ad quadratum diametri ipsius est sicut proportio undecim ad quatuordecim.

(Fig. 3.) exempli causa sit linea *ab* diametrus circuli, et super ipsam quidem faciam quadratum *hg* sitque *dg* medietas *de*, et sit linea *ez* septima *gd*. et quia proportio trianguli *age* ad triangulum *agd* est sicut proportio III ad I, et proportio trianguli *agd* ad triangulum *aez* est sicut proportio VII ad I, tunc propter illud fit trianguli *agz* proportio ad triangulum *agd* sicut proportio XXII ad VII. quadratum uero *gh* est quadruplum trianguli *adg*, et triangulus *agz* est equalis circulo *ab*, quoniam perpendicularis *ag* est equalis linee, que egreditur e centro circuli ad lineam ipsum circumdantem, et basis *gz* est equalis circumferencie circuli, quoniam plus est triplo diametri ipsius et VII[a] diametri fere. iam igitur uerificatum est, quod diximus, quod proportio circuli *ab* ad quadratum *gh* est sicut proportio XI ad XIIII. et illud est, quod uoluimus declarare.

III. Omnis linea continens circulum addit super triplum diametri ipsius minus septima et plus X partibus septuaginta unius partium diametri.

(Fig. 4.) exempli causa sit linea *ag* diametrus circuli *ag*, sitque eius centrum *e*, et linea *dz* sit contingens circulum, et sit angulus *zeg* tertia anguli recti. ergo proportio *ez* ad *zg* est sicut proportio CCCVI ad CLIII. diuidam autem angulum *zeg* in duo media linea *he*. ergo proportio *ze* ad *eg* est sicut proportio *zh* ad *gh*. ergo proportio *ze* et *eg* coniunctorum ad *zg* est sicut proportio *eg* ad *gh*. fit ergo proportio *eg* ad *gh* maior proportione quingentorum LXXI ad CLIII. ergo proportio *eh* in potentia ad *hg* in potentia est plus proportione CCC milium et XLIX milium et CCCCL ad XXIII milia et CCC et IX. ergo proportio eius ad ipsam in longitudine est maior quingentorum proportione et XCI et octaue ad CLIII. et angulum quoque *heg* diuidam in duo media linea *et*. ergo secundum similitudinem eius, quod diximus, declaratur, quod proportio *eg* ad *gt* est maior proportione MCLXII et octaue ad CLIII. ergo proportio *te* ad *tg* est maior proportione MCLXXII et octaue ad CLIII. angulum quoque *teg* diuidam in duo media linea *ek*. proportio igitur *eg* ad *gk* est maior proportione MMCCCXXXIIII et quarte

---

Fig. 3 ist zum Theil weggeschnitten, so dass die Buchstaben *degz* fehlen. 6) *gd*] *ḍgd*. quia] ·/quia, mg. m. 1: ·/vel sic. et quia *gd* est septupla ... *ez* et *de* dupla *dg*, erit ergo *ge* continens *ez* uicesies et semel. ergo proportio *gz* totalis ad *ez* est sicut proportio XXII ad I. ergo proportio trianguli *agz* ad triangulum *aez* est sicut XXII ad I. 17) linea] -a in ras. m. 1. 18) Mg. m. 1: sudor Archimenidis. 21) Mg. m. 1: quia linea *ez* est dupla ad lineam *gz* ex 4 et 32 et 6 primi euclidis protracta *gd* ad equalitatem *dz*. 23) *ze*] (alt.) corr. ex *z* m. 1. et] ẹt et 25) ad] (alt.) supra scr. m. 1. Mg. m. 1: ex ∂... et VIII quiuti. 27) CCC] scr. CCCC. 29) et] (pr.) supra scr. m. 1.

ad CLIII. et angulum etiam *keg* diuidam in duo media linea *le*. proportio ergo *eg* ad *gl* in longitudine est maior proportione IIII milium et DC et LXXIII et medietatis ad CLIII. et quia angulus *zeg* fuit tertia anguli recti, oportet, ut sit angulus *leg* quadragesima octaua pars anguli recti. faciam autem supra punctum *e* angulum equalem angulo *leg* sitque angulus *gem*; angulus igitur *lem* est XXIIII$^{\text{a}}$ pars recti anguli. linea ergo recta *lm* est latus figure poligonie continentis circulum et habentis XCVI angulos equales. et quoniam iam declarauimus, quod proportio *eg* ad *gl* est maior proportione IIII milium et DC et LXXIII et medietatis ad CLIII, et duplum *eg* est linea *ag* et duplum *gl* est linea *lm*, et sequitur, ut sit proportio *ag* ad lineam circumdantem figuram poligoniam XCVI angulorum maior proportione IIII milium DC et LXXIII et medietatis ad XIIII milia et DC et LXXXVIII. et illud quod est plus triplo eius secundum quantitatem sexcentorum LXVII et medietatis, cuius proportio ad IIII milia et DC$^{\text{ta}}$ et LXXIII et medietatem est minor septima. oportet ergo, ut sit figura poligonia continens circulum plus triplo diametri ipsius per id, quod est minus septima diametri et plus diminutione linee continentis circulum a triplo diametri eius et septima.

(Fig. 5.) at sit circulus, cuius diametrus *ag*.

describam autem in ipso latus exagoni, quod sit *gb*. angulus igitur *gab* est tertia recti. ergo proportio *ab* ad *bg* est minor proportione M et CCC$^{\text{tor}}$ et LI ad septingenta octoginta, propterea quod proportio *ag* ad *gb* est sicut proportio M et D et LX ad DCCLXXX, quoniam *ag* est dupla *gb*. Diuidam autem angulum *gab* in duo media linea *ah*. et quia angulus *bah* est equalis angulo *hag* angulo *hag* communi, erunt anguli trianguli *ahg* equales angulis *abz*. ergo proportio *ah* ad *hg* est sicut proportio *ab* ad *bz* et sicut proportio *ag* ad *gz* et sicut *ga ab* coniunctarum ad *bg*. et ex eo declaratur, quod proportio *ah* ad *hg* est minor proportione duorum milium et DCCCC$^{\text{tor}}$ et XI ad DCC$^{\text{ta}}$ et LXXX, et quod proportio *ag* ad *hg* est minor proportione trium milium et XIII et medietatis et quarte ad DCCLXXX. diuidam autem angulum *gah* in duo media linea *at*. declarabitur ergo ex eo, quod premisimus, quod proportio *at* ad *tg* est minor proportione V milium et DCCCC et XIIII et medietatis et quarte ad DCCLXXX; et illud est sicut proportio MDCCC et XXIII ad CCXL, quoniam proportio cuiusque duorum numerorum primorum ad suum reliquum duorum numerorum posteriorum est sicut proportio trium

10) linea] supra scr. m. 1. *lm*] *lra*? 12) milium] supra scr. m. 1. 14) quod] ꝗ·, fort. quidem. LXVII] seq. ras. 1 litt. 18) et plus — 19) eius] bis. 23) septingenta] septuaginta. 24) et D] ad D. 26) *hag*] (alt.) scr. *ahg*. 29) Mg. m. 1: quoniam proportio *ab* ad *bz* est tanquam *ag* ad *gz* per 3 sexti et permutatim. 34) XIIII] scr. XXIV. 36) numerorum] nume⁻ψ. 37] reliquum] (?) rl'm.

et quarte ad unum. fit ergo proportio *ag* ad *gt* minor proportione M et DCCC et XXXVIII et IX undecimarum partium unius ad CCXL. et etiam diuidam angulum *tag* in duo media linea *ak*. ergo proportio *ak* ad *kg* est minor proportione trium milium et DC et LXI et IX undecimarum unius ad CCXL; et illud est sicut proportio M et VII ad LXVI, quoniam proportio cuiusque duorum numerorum primorum ad suum reliquum duorum numerorum postremorum est sicut proportio XL ad XI. ergo proportio *ag* ad *kg* est sicut proportio M et IX et sexte ad LXVI. angulum quoque *kag* diuidam in duo media linea *al*. ergo proportio *al* ad *lg* est minor proportione duum milium et XVI et sexte ad LXVI. ergo proportio *ag* ad *gl* est minor proportione duum milium et XVII et quarte ad LXVI. cum ergo conuertimus, fiet proportio linee continentis figuram poligoniam, cuius unumquodque laterum est latus exagoni, ad diametrum maior proportione VI milium CCC^tor^ et XXXVI ad duo milia et XVII et quartam. sed proportio VI milium et CCC et XXXVI est plus triplo II milium et XVII et quarte secundum plus X partibus LXXI^us^ partium unius. ergo linea continens figuram poligoniam habentem XCVI angulos, quam circulus continet, addit super triplum diametri eius plus X partibus LXXI partium. et fit augmentum eius. fit ergo linea continens circulum plus tripla diametri secundum id, quod est plus X partibus LXXI partium, et fit augmentum eius super hanc quantitatem plus augmento laterum figure poligonie.

linea ergo continens circulum addit super triplum diametri eius minus septima ipsius et plus X partibus LXXI. et illud est, quod declarare uoluimus.

Voranstehende Uebersetzung der κύκλου μέτρησις des **Archimedes** ist dem so viele seltene Reste der mathematischen Lehrbücher des Mittelalters enthaltenden cod. Dresd. lat. Db86 entnommen, den **Curtze** Zeitschr. f. Math. u. Phys., hist.-lit. Abth. 1883 sorgfältig beschrieben hat. Sie steht darin fol. 175^v—176^r, 178^r. Eine zweite Handschrift derselben ist mir nicht bekannt, und die Uebersetzung scheint im Mittelalter wenig verbreitet gewesen zu sein; wenigstens habe ich nur eine Anführung daraus gefunden, nämlich bei **Bradwardin**, Geometria speculativa (Paris 1530) V, 5: suppono unam propositionem Archimenidis de mensura circuli et erit mihi petitio, quoniam eam demonstrare requireret maiorem tractatum, quam sit istud capitulum, et est ista propositio: omnis circulus triangulo orthogonio

1) et] corr. ex ad m. 1. 5) CCXL] ḌCCXL. 7) reliquum] rl'm. 11) et sexte — 12) XVII] mg. m. 1. 13) figuram] figugram. 17) secundum] ꝭ. 19) et fit augmentum eius] supra haec scr. va-cat m. 1. 20) tripla] -a e corr. m. 1. 24) quod] qđẹ. — Mit quanti-, Z. 22, endet fol. 176^v, mg. m. 1: verte folium primum ⸎. Die Fortsetzung fol. 178^r ⸎. Fol. 177 ist von dem Anfang einer andern Abhandlung aufgenommen, die fol. 178^r fortgesetzt wird; ein Vogel in mg. weist darauf hin.

est equalis, cuius unum duorum rectum laterum angulum continentium est semidiameter circuli, et latus alterum equatur linee continenti circulum. est autem proportio linee continentis circulum ad diametrum tripla sesquiseptima. Wo man sonst die Erwähnung derselben erwartet, werden andere Quellen über Kreisquadratur herangezogen, wie z. B. bei Albertus de Saxonia, Zeitschr. f. Math. u. Phys. XXIX, hist.-lit. Abth. S. 91: sexta conclusio: omnis circulus est equalis triangulo orthogono, cuius alterum laterum rectum angulum continentium est equale circumferentie in rectam extense, et reliquum latus rectum angulum continentium est equale semidiametro eiusdem circuli, wo die abweichende Fassung die Verschiedenheit der Quelle beweist, und ausserdem Archimedes nicht als Urheber genannt ist.

Ich habe die Lesart des Dresd. wiedergegeben bis auf einige orthographische Kleinigkeiten; auch die Figuren entsprechen genau denjenigen der Hds.; nur ist darin zu prop. I noch ein Stern mit vier Spitzen gezeichnet, mit dem Buchstaben *k* bezeichnet, dessen Bedeutung mir verborgen geblieben. Zweifelhaft ist mir die Abbreviatur rl'm S. 44, 37 und 45, 7; denn reliquum befriedigt den Sinn nicht, vielleicht relatum (entsprechend).

Dass die Uebersetzung nicht direct aus dem griechischen Originaltext stammt, wird Jedem sofort einleuchten, der mittelalterliche Uebersetzungen nach dem Griechischen eingesehen hat; da entspricht jedes lateinische Wort einem griechischen, und wenn man mit der Terminologie der griechischen Mathematiker vertraut ist, fühlt man aus den lateinischen Wörtern leicht die griechischen Termini heraus, was hier nicht der Fall ist. Also muss sie durch das Arabische gegangen sein, und dafür spricht auch schon der Titel mit der weitläufigen Umschreibung des kurzen griechischen Ausdrucks und mit der Namensform Archimenides. Andere Phrasen, die für arabische Vermittelung zeugen, finden sich S. 41, 6: eius mensura ipsius mensure equatur, S. 41, 13: secundum illud quod sequitur (d. h. fortwährend), S. 41, 23: et est duplum trianguli, est plus aggregato ex etc., S. 42, 18: in eo quod sequitur, S. 43, 30: secundum similitudinem eius quod diximus (d. h. in derselben Weise wie vorher, διὰ τὰ αὐτά), S. 45, 19 flgg. u. s. w.

Nun wissen wir nur von einer einzigen Uebersetzung einer Schrift des Archimedes nach dem Arabischen, nämlich von Gherardo da Cremona, unter dessen Uebersetzungen (Boncompagni, Della vita e delle opere di Gherardo Cremonese. Roma 1851) angeführt wird: Archimenidis tractatus I; es liegt also nicht allzufern, zu vermuthen, dass der „tractatus unus“ die κύκλου μέτρησις, und dass unsere Uebersetzung von Gherardo sei.

Die Uebersetzung schliesst sich in propp. II—III dem griechischen Text eng an, in prop. I weniger, indem sie hier mehrere Erweiterungen der sehr gedrängten griechischen Darstellung hat. Schon die Fassung der πρότασις ist besser und logischer, als die unzweifelhaft verunstaltete (s. Archimedis opp. I S. 259 not. 1) unserer Handschriften. Auch S. 41, 5 ist richtiger als Archim. I S. 258, 5, und die ganze Vorbereitung des Beweises in prop. I S. 41, 11—17, die darauf hinausläuft, die Anwendung von Elem. X, 1 zu ermöglichen, und die im griechischen Text hier nur durch das ἤδη I S. 258, 9 angedeutet ist, ist wenigstens im Geiste des archimedischen Beweises und ist im zweiten Theil ausführlicher berücksichtigt (I S. 260, 10—12), wo die lateinische Fassung S. 42, 6 flgg. ebenfalls klarer und genauer ist. Auch die Einleitung (S. 41, 8) und der Abschluss (S. 42, 28 flgg.) des Beweises ist streng euklidisch, während die griechische Fassung flüchtiger und summarischer ist. Man könnte also versucht sein, in der arabisch-lateinischen Bearbeitung die ursprünglichere Gestalt von prop. I zu sehen. Es bleibt doch aber zweifelhaft, ob der arabische Uebersetzer wirklich bessere griechische Vorlagen hatte, oder ob er nicht vielmehr seiner Vertrautheit mit der euklidischen Form seine Besserungen verdankt. Für die letztere Auffassung spricht, dass wenigstens die an sich correcte Einleitung des apagogischen Beweises S. 41, 8: quod si non ita fuerit, tunc circulus aut maior aut minor erit, nicht nur bei Archimedes fehlt, sondern auch in dem (etwas umgestalteten) Referat bei Pappus I S. 314, 8 (Zenodor De isoperimetris bei Hultsch, Pappus III S. 1196 hat sie), wurde also jedenfalls vom Uebersetzer in seiner Vorlage nicht vorgefunden. Der Schluss S. 42, 28 steht allerdings bei Pappus I S. 316, 13, aber etwas kürzer. Auch die verdeutlichenden, aber nicht gerade nothwendigen Zusätze S. 41, 21 flgg. und S. 42, 25 flgg., sowie S. 45, 4, der mit der Vermuthung Wallis' Archim. I S. 270, 1 zusammentrifft, sind Interpolationen nicht unähnlich, ebenso der auf die Construction bezügliche Zusatz S. 44, 21, welcher dadurch besonders verdächtig ist, dass durch ihn der offenbare Fehler S. 45, 13: cuius unumquodque laterum est latus exagoni (Archimedes hat nur τοῦ πολυγώνου I S. 270, 6, d. h. des 96-Ecks) veranlasst ist. Das Corollarium zu prop. I S. 42, 31 flgg., das allerdings etwas unklar ist, aber doch unzweifelhaft die Arealberechnung eines Sectors lehrt, scheint auch sicher unecht, da es hier nichts zu thun hat. Es fehlen auch nicht andere sichere Anzeichen der Interpolation. So ist S. 42, 8 linee ergo que transeunt per puncta sectionum contingunt circulum ungeschickt für I S. 260, 8 καὶ ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι διὰ τῶν σημείων, und der folgende Beweis (S. 42, 11—12) für $ct > tf$ ist zu weitläuftig; s. Archim. I S. 260, 9. Ebenfalls S. 44, 25 flgg. ist der Beweis für die Proportion $ga + ab : bg = ah : hg$ nicht der ursprüngliche; denn selbst nach Berichtigung des falschen hag Z. 26 passt communi nur für die Fassung des Beweises bei Archimedes I p. 268, 1 flgg.; die Dreiecke ahg, abz haben eben keinen angulus communis. Weniger entscheidend ist die Aenderung S. 44, 3 = Archim. I S. 266, 4 und der Umstand, dass im Lateinischen prop. I zwei Figuren hat und infolge dessen im zweiten Theil des Beweises andere Buchstaben, als der griechische Text, der nur eine Figur kennt.

Da also einige der Abweichungen entschieden dem arabischen Bearbeiter angerechnet werden müssen, ist es nicht unwahrscheinlich, dass die Neugestaltung von prop. I überhaupt von ihm herrührt. Und diese Auffassung findet darin eine Stütze, dass die Uebersetzung sonst dieselbe Ueberlieferung und dieselben Fehler bietet, als unser griechischer Text. Nicht nur steht prop. II vor prop. III, was gewiss ursprünglich nicht der Fall war, da sie von prop. III abhängt; sondern auch im Einzelnen finden wir dieselben Interpolationen, wie μήκει I S. 266, 2 (fehlt bei Eutocius) = S. 44, 2 in longitudine, der falsche Zusatz I S. 266, 21—22 = S. 44, 23 (nur angepasst durch propterea quod statt δέ), ebenso I S. 262, 13—16 = S. 43, 11 flgg. (nur etwas besser gestaltet). Endlich deutet das unrichtige est sicut S. 45, 8 darauf, dass dem Uebersetzer ein ähnlich corrumpirter Text vorlag, als uns Archim. I S. 270, 2.

Nicht schwer wiegen dagegen die Stellen, wo offenbare Fehler der griechischen Hdss. in der Uebersetzung nicht wiederkehren (wie I S. 264, 3, wo das unrichtige ἤ des Cod. F. fehlt, I S. 264, 6—7, wo die Interpolation ἐναλλάξ καὶ συνθέντι fehlt, wohl auch I S. 262, 13, wo statt $A\Gamma\Delta Z$ das regelmässige *agz* steht). Denn da der arabische Uebersetzer jedenfalls den Inhalt vollkommen verstand und die griechische geometrische Form vollständig beherrschte, kann er selbst diese Verbesserungen vorgenommen haben, ebenso wie die Richtigstellung der in unseren Hdss. oft verschriebenen Zahlen (I S. 266, 2, 21; 268, 12, 14, 15, 16; 270, 1, 2, 7, 8, 9, 12). Direct anwendbar für die Herstellung der ursprünglichen Gestalt der κύκλου μέτρησις ist unsere Uebersetzung also kaum; sie steht im Wesentlichen auf demselben Boden, als unsere griechische Ueberlieferung. Aber als eine der sparsamen Quellen des mathematischen Wissens im Mittelalter scheint sie mir doch interessant genug, um der Herausgabe gewürdigt zu werden. Ehe das Material, das noch vielfach in Handschriften, namentlich alter Klosterbibliotheken, verborgen liegt, ans Tageslicht gezogen worden ist, können wir uns ja überhaupt nur eine blasse Vorstellung von dem mathematischen Wissen und Streben des Mittelalters bilden und die beiden Kanäle, wodurch ihm dieses zugeführt worden (direct vom Griechischen oder durch Vermittelung des Arabischen), nicht verfolgen, noch ihre Ergiebigkeit bemessen.

II.

Euklid's Elemente im Mittelalter.

Für die schwierige Frage, wie die Uebersetzungen Adelhard's und Campano's von den Elementen sich zu einander verhalten, hat bekanntlich M. Curtze, Philolog. Rundschau I (1881) S. 943 flgg. neues Material beigebracht. In diesem Aufsatze berichtet er nämlich nach Mittheilungen von Herrn G. Meyer, damals Bibliothekssecretär in München, über zwei Münchener Handschriften cod. lat. 13021 (*R*) und cod. lat. 560 (*q* bei Friedlein, Boetius p. 373) und entwickelt in Anschluss an Meyer folgende Ansichten über ihr Verhältniss zu Adelhard-Campano:

R stimmt sehr oft mit dem Wortlaut der Sätze in den gewöhnlichen Handschriften der Uebersetzung von Adelhard-Campano, aber in mehreren Sätzen weicht er davon ab und stimmt dann mit dem griechischen Text und mit dem sogenannten Boetius, Schriften d. röm. Feldmesser I S. 377 flgg. Wir haben also in *R* eine ältere lateinische Uebersetzung, die fragmentarisch auch in *q* vorliegt und von Adelhard für die Sätze benutzt wurde, während er die Beweise (und den Wortlaut der mit *R* nicht stimmenden Sätze) aus dem Arabischen übersetzte.

Durch eine Nachprüfung dieses Materials, die ich in diesem Sommer in München vornahm, bin ich in Bezug auf *R* zu einem wesentlich andern Resultat gekommen, und da die Sache für die Geschichte der Euklid-Studien im Mittelalter von Wichtigkeit ist, werde ich hier meine Auffassung darlegen.

Zuerst einige weitere Notizen über die fraglichen Münchener Handschriften.

Cod. Monac lat. 13021, fol., pergam., saec. XII besteht aus zwei verschiedenen Handschriften, von denen die zweite (fol. 212 flgg. Chalcidius in Timaeum), von einer andern Hand geschriebene uns hier nicht angeht. Der erste Theil enthält eine Sammlung von Lehrbüchern für das Quadrivium, wie sie im Mittelalter gebräuchlich waren, nämlich für Arithmetik fol. 1 die Arithmetik des Boetius, für Astronomie fol. 27 ein anonymes Lehrbuch, fol. 69 Heremanni de astrolabio, fol. 72 Gerbert von demselben Instrument, fol. 79 Heremanni de compositione horolog., fol. 87 liber iudiciorum Messehahlach, für Musik fol. 97 Boetii musica, fol. 150 Guidonis michrologus, fol. 157 Guidonis musica, fol. 163 anonymus de fistularum mensura, für Geometrie endlich fol. 164 die propositiones von Euklid's Elem. I—XV, das uns hier beschäftigende Stück, fol. 188 „Gerbert's“ Geometrie ohne Verfassernamen, fol. 194 die sogenannte Geometrie des Boetius. Am Schluss der Handschrift auf der sonst leeren Seite fol. 211^v steht folgende Bemerkung: anno domini MCC nonagesimo VII feria secunda in annuntiatione beate virginis sub domino ulrico abbate huius loci XVI° magister wernherus medicus canonicus veteris capelle Rat(isbonensis) amicus domini abbatis et omnium fratrum specialissimus hunc librum ex diuersimoda secessione ante multos annos perditum et a memoria omnium quasi funditus substractum sua pecunia aput quendam aurificem, qui ipsum venalem publice portabat, comparauit et ipsum pro remedio anime sue ad honorem [sancti Georgi patroni nostri ecclesie in Prufening]* restituit sine omni ipsius dampno liberaliter et precise, unde ctatuimus, ut nullus ipsum deinceps extra septa ecclesie audeat commodare. Die Handschrift entstammt also dem Kloster

* Die eingeklammerten Worte in Rasur, doch von derselben Hand.

Prüfening bei Regensburg (von dessen Bibliothek s. Becker, Catalogi bibliothecarum antiqui nr. 95 p. 209 flgg. und nr. 198 p. 291) und ist ohne allen Zweifel daselbst geschrieben.

Cod. Monac. lat. 560, 4° pergam. saec. XI ex libris H. Schedelii, dann der alten bibliotheca electoralis angehörig, enthält fol. 1^r astronomische Tafeln, fol. 1^v eine Abhandlung über das Astrolabium, fol. 14^v de orol(og)io secundum Alchoram, fol. 20 Firmicus Maternus, fol. 61 Astrologisches, fol. 89 astronomia auctoritate cuiusdam Arati, fol. 97 Arati genus, fol. 98 bis 121 Scholia in Aratum, und schliesst fol. 149^v—150 mit einer Aufzählung slavischer Völker. Der näheren Beschreibung des uns hier allein interessirenden Theiles fol. 122—149^r stelle ich gleich die Beschreibung eines eng verwandten Bamberger Codex zur Seite. Es ist Cod. Bamberg. HJ. IV, 22, 4° pergam. saec. X (worüber vergl. L. v. Jan, Zeitschrift für die Alterthumswissenschaft, 1844 Nr. 55).

Monac.:	Bamb.:
fol. 122—128^r = Schriften d. röm. Feldmesser I S. 393 bis 406 (ohne Ueberschrift).	fol. 1^v—6^r.
fol. 128^v—129^r incipiunt capitulationes huius libri. tu qui vis perfectus esse geometricus lege ista omnia ... *des.* nam qui ignorant regulam huius artis multa opponunt falsa pro ueris. expliciunt capitulationes, = Boetius* p. 1541.	fol. 6^v (capitulationes] capitula). expliciunt capitulationes] om.
fol. 129^r: incipit liber Anicii Manilii Seuerini Boetii geometricorum elementorum ab Euclide translatorum ad omnem plenitudinem huius artis geometrie. primum.	fol. 7^r (eine rothe Ueberschrift wegradirt, darauf): explicit liber primus. incipit de figuris.
fol. 129^r—129^v: quomodo inventa est geometria. unde vocata est geometria. quid est geometria. quae utilitas, qui ordo, qui titulus prescriptionis, si proprius codex, in quot partes eius diuisio. Darauf die Antworten:** inventam esse geometriam ... *des.* demonstratio et conclusio, = Boetius p. 1541—42.	fol. 15^v—16^r.
fol. 129^v—132^v: Ueber Zahlen, *inc.* restat autem nobis profundissimum ... *des.* multitudinemque protenditur, = Boetius p. 1542—44.	fehlt.

* Opera omnia, Basil. 1570, fol.

** Z. B. fol. 129^r: tituli inscriptio. tituli prescriptio est elementorum que figure simpliciores sunt ex his alie componuntur que in his etiam resoluuntur. si proprius codex. codex iste secundum dispositionem Euclidis esse dicitur, secundum demonstrationem uel inuentionem figurarum aliorum plerumque esse dicitur.

fol. 132^{v}—134^{r}: de paribus et imparibus numeris. *inc.* discriptio autem quae subposita ... *des.* propositum conuertamus, = Boetius p. 1544—46. Darauf: liber primus geometrie explicit.	fehlt.
fol. 134^{v}: incipit liber secundus artis geometriae de figuris.	vgl. fol. 7^{r} oben.
fol. 134^{v}—137^{v}: = Boetius ed. Friedlein S. 373, 27 principium — S. 379, 24 mit den dort angeführten Varianten (d. i. Elem. I deff., postul., communes not.; Elem. II deff.; II, 1 propositio; III deff.; IV deff., VI, 1 prop.; 2 deff. von Elem. III, die vorher defect waren; vgl. Friedlein S. 379).	fol. 7^{r}—8^{v}.
fol. 137^{v}—140^{r}: incipit de trianguli ratione et linearum = Boetius ed. Friedlein S. 380, 2—385, 3 (d. i. die Sätze von Elem. I).	fol. 8^{v}—10^{r} incipit] om.
fol. 140^{v}—141^{r} = Boetius S. 385, 4—386, 23 (d. i. die Sätze von Elem. II).	fol. 10^{r} flgg.
Am Schluss: explicit liber geometrice artis secundus.	fehlt.
Darauf: incipit liber III Anicii Manilii Seuerini Boetii geometricorum ab Euclide translatorum.	fehlt.
fol. 141^{v}—143^{r} = Boetius S. 387, 1—389, 16 (Agrimensorisches, einige Sätze aus Elem. III—IV).	bis fol. 12^{r}; dann eine kleine leere Stelle.
Am Schluss: explicit liber III Anicii Manilii Seuerini et Boetii geometricorum ab Euclide translatorum qui continet numerorum causas et diuisiones circulorum et omnium figurarum rationes extremitatium et summitatium genera angulorum et mensurarum expositiones.	fehlt.
fol. 143^{r}—144^{v}: incipit altercatio duorum geometricorum de figuris lineis et mensuris.	fehlt.
Schriften der röm. Feldm. I S. 407, 3 bis 409, 17.	fol. 12^{r}.
Am Schluss: explicit altercatio.	fehlt.
fol. 144^{v}—145^{r} = Schriften der röm. Feldm. I S. 409, 18 bis 410, 7.	bis fol. 13^{r}.
fol. 145^{r}—145^{v}: einige Sätze aus Elem. III; am Schluss einige Zeilen Agrimensorisches.	fol. 13^{r}—13^{v}.
fol. 146^{r}—149^{r}: Agrimensorisches in dialogischer Form, *inc.* quoniam diuersae formae agrorum ... *des* in demonstratione summitas et in conclusione extremitas (vergl. Schriften der röm. Feldm. I	fol. 13^{v}—15^{v}.

S. 412). Am Schluss: explicit Anicii Manilii Seuerini et Boetii liber artis geometriae ab Euclide de greco in latinum translatus quartus.	fehlt (über fol. 15v bis 16r s. oben. fol. 16v ist leer, darauf folgt Astronomisches, Stücke von Macrobius u. s. w.).

Aus dieser Zusammenstellung ergiebt sich bei der sonstigen Uebereinstimmung der beiden Handschriften, auch in einzelnen Schreibfehlern, und bei dem höheren Alter des Bamb., dass der Schreiber von *q* seine Vorlage mehrfach umgestaltet hat. Erstens hat er einen ganzen Abschnitt arithmetischen Inhalts (fol. 129v—134r) eingeschaltet, wohl um etwas zu geben, das den ersten Angaben des Capitelverzeichnisses entspräche, welche (nach Boetii opera omnia. Basil. 1570 p. 1541) so lauten: nam in primis scire oportet arithmeticam artem, quae continet numerorum causas ac diuisiones, id est qualis est diffinitio ac diuisio de paribus imparibus numeris, qualis est compositus numerus et qualis incompositus, qualis est perfectus numerus et qualis imperfectus, qualis est diuisibilis numerus et qualis indiuisibilis, qualis est particularis numerus et qualis superpartiens, qualis est superfluus numerus et qualis diminutiuus, qualis est multiplex numerus et qualis submultiplex, qualis est solidus numerus et qualis sphaericus.

Diese Absicht, den Rahmen des Capitelverzeichnisses auszufüllen, ist nun allerdings nicht erreicht; denn das arithmetische Excurs besteht nur aus willkürlich zusammengestoppelten Brocken aus verschiedenen Stellen der Arithmetik des Boetius (in Friedlein's Ausgabe p. 66, 5—17; 4, 30 bis 5, 5;* 66, 17—18; 3, 10—18; 9, 8—11; 10, 10—20; 12, 14—19, 6—12; 10, 27—11, 1; 66, 18—67, 21; 39, 28—42, 10; 46, 6—17; 49, 23—26; 28, 6 bis 30, 3; 52, 22—57, 5), worin keine der Fragen des Capitelverzeichnisses ordentlich beantwortet ist. Aber eben dadurch ist die andere Möglichkeit ausgeschlossen, die auch sonst, wie wir sehen werden, wenig Wahrscheinlichkeit hat, dass nämlich das arithmetische Stück wirklich ein echter Bestandtheil derjenigen Schrift sein sollte, wofür jener Capitelindex ursprünglich verfasst wurde.

Weiter hat der Redactor in *q* die Unterschriften der einzelnen Bücher mit dem Namen des Boetius hinzugesetzt, wovon in Bamb. keine Spur ist; denn eine solche in der wegradirten Ueberschrift fol. 7r suchen zu wollen, ist gänzlich unbegründet. Die Unterschrift unter lib. III ist sachlich unzutreffend; von numerorum causae et diuisiones, mensurarum expositiones u. s. w. ist in diesem Buche keine Rede; es könnte eher Unterschrift des

* Diese Stelle lautet p. 1542: nos tamen quae de numeris a Nicomacho diffusius disputata sunt uel a Varrone de mensuris ostensa sunt moderata breuitate collegimus. In der Arithmetik ist von Varro keine Rede.

ganzen Werkes sein. Wahrscheinlich ist der Redactor eben durch die Arithmetik, woraus er Excerpte aufnahm, darauf gebracht worden, den Namen des Boetius auch hier anzubringen. Die Angabe über Euklid als Verfasser konnte er der oben S. 50 Anm. angeführten Stelle entnehmen, und Anleitung dazu, den Boetius als Uebersetzer aus dem Griechischen zu bezeichnen, hatte er in dem analogen Verhältniss bei der Arithmetik (vgl. z. B. S. 3, 10 ea quae ex Graecarum opulentia litterarum in Romanae orationis thesaurum sumpta conueximus).

Endlich scheint derselbe die Umstellung des Stückes fol. 129^{r-v} vorgenommen zu haben; denn gegen Lachmann, Röm. Feldm. II S. 85, halte ich die Anordnung im Bamb. für ursprünglicher, weil die darin erhaltene Dialogform, wodurch die Zusammengehörigkeit mit dem Stück fol. 146—149 (= fol. 13—15 Bamb.) gesichert wird, leichter ausgemerzt, als künstlich hergestellt werden konnte. Ueber den Wortlaut des Bamb. kann man sich bei Boetius Opera p. 1541—42 unterrichten, nur ist den Fragen ein D(iscipulus), den Antworten ein M(agister) vorgesetzt.

Wenden wir uns nunmehr zur reineren Ueberlieferung des Bamb., so springt die auch von Lachmann, Röm. Feldm. II S. 87, hervorgehobene Thatsache sofort in die Augen, dass in der Vorlage dieser Handschrift Blätterversetzungen stattgefunden haben; denn fol. 13^{v} steht: quadrilaterum figurarum, quae circulis ambiuntur, was den Anfang von Elem. III, 22 bildet; die Fortsetzung aber findet sich einige Blätter früher (zwischen fol. 10 und fol. 12^{r}) so: (sed ab aeterno creatore formata) ex aduerso sibimet anguli constituti duobus rectis angulis (anguli fügt Bamb. hier hinzu, während es in *q* fol. 142^{r} mit Recht fehlt) sunt aequales. Hieraus ergiebt sich, dass das Stück fol. 13^{r-v} ursprünglich vor dem andern (= Boetius ed. Friedlein p. 388, 3 flgg.) stand. Wenn wir es dahin versetzen, erhalten wir eine bis auf einige Auslassungen und Umstellungen regelmässig fortlaufende Reihe von Sätzen aus Elem. III, nämlich III, 12, 10, 13, 14, 16, 18, 19, 23, 24, 22, 27, 30, 31, 32; dann folgen inmitten einer corrumpirten Stelle Reste von III, 33 (ex hoc igitur manifestum est quoniam si a puncto circuli due linee recte sese contingant et sibi inuicem sunt equales super dectas rectas lineas circuli describere partes, que dato rectilineo angulo unus quis suas intus circulo oportet accipere portiones),* dann IV, 1—4, 6, 8, 12, 13.

Durch Blätterversetzung kann auch der Capitelindex fol. 6^{v} von der „altercatio" fol. 13^{v}—16^{r} abgetrennt sein. Aber schon Jan S. 439 hat bemerkt, dass wir mit der blossen Annahme von Blätterumstellungen nicht auskommen; dafür ist die Zerrüttung allzugross. Die Einschiebsel Friedlein p. 375, 1 lapides finales (mit Figuren), p. 375, 18 finitima autem linea

* Aehnliche unverständliche Worte stehen schon früher; s. Friedlein, pag. 387, 22 quas unusquisque intus forma oportet accipere portiones.

mensuralis est, quae aut aliqua observatione aut aliquo terminorum servatur, p. 378, 7 nemo resistere ullo tempore parti convenienti poterit, p. 378, 14 hic de extracluso loco dicit — hic de trigono dicit, p. 379, 18 hic trigonus (es war wohl eine Figur da) können noch ganz gut als Federproben oder Glossen betrachtet werden, die vom Rande in den Text gekommen, wenn auch der Zusatz p. 375, 11* wegen seiner Stellung als absichtlich aussieht. Aber die Zerstückelung von Elem. III kann kaum durch einen ungünstigen Zufall erklärt werden. Ausser der oben angeführten Reihe finden sich nämlich Spuren davon sowohl in dem dieser vorangehenden Stück (Friedlein p. 387, 1—388, 2)** als fol. 12^v = Röm. Feldm. I p. 408, 3—7 (Elem. III, 17, 9, beide corrumpirt). Auch ist es auffallend, dass die fremdartigen, meist agrimensorischen Zusätze, die oft nur wenige Zeilen umfassen, fast regelmässig bei dem Ende eines Abschnittes wiederkehren, das doch nicht immer mit dem Blattende zusammengefallen sein wird; so nach II deff. Friedlein p. 378 habebere possessores, nach III deff. p. 379, 18 hic trigonus (s. oben), nach IV deff. p. 379, 24 die Wiederholung von III deff. 6, 8 (die oben p. 379, 5—9 in defecter Gestalt in *q* überliefert sind, s. die Varianten bei Friedlein), nach Elem. II das ganz verworrene Stück S. 387, nach Elem. IV die hierher nicht gehörigen Worte S. 389, 12—16, endlich fol. 13^v nach dem ersten Theil von Elem. III einige Zeilen Agrimensorisches. Vergl. auch die Einleitung Friedlein p. 373, 27 bis 374, 1. Es bleibt also wohl nur übrig, mit Jan anzunehmen, dass der Compilator die ihm vorliegende Euklid-Uebersetzung excerpirte, mit seinen agrimensorischen Zusätzen ausstattete und mit dem dabei herauskommenden Unsinn zufrieden war. Für diese Erklärung der Genesis der Compilation spricht noch ein anderer Umstand. Nach II deff. (Friedlein p. 378, 13) folgt in *q**** II, 1 etwas verstümmelt (s. die Varianten bei Friedlein), und ebenso nach IV deff. (Friedlein p. 379, 24) IV, 1, obgleich beide auch unten bei den übrigen Sätzen von II und IV wiederholt werden (Friedlein p. 385, 4; 388, 23). Das kann doch nur so erklärt werden, dass der Compilator eine Euklid-Uebersetzung vor sich hatte, wo die Definitionen und Sätze der einzelnen Bücher beisammen standen; daraus hat er dann zuerst die Defi-

* Ich citire hier und im Folgenden den Wortlaut nach *q*, weil ich vom Bamb. keine vollständige Collation habe; im Wesentlichen stimmen sie aber genau überein.

** Friedlein p. 387, 1—4 ist in sehr corrumpirter Fassung — s. die Varianten aus *q* — Elem. III, 3; p. 387, 6—8 erinnern an III, 9, vergl. Röm. Feldm. I p. 408, 5—6; p. 387, 16 ist der Anfang von III def. 11; p. 387, 18—21 scheint III, 32 zu sein, wenn auch die Lesart von *q* sehr abweicht.

*** Auch Bamb. hat II, 1 an derselben Stelle — Varianten: his quae] his quibus, qui] que, rectiangulo] rectiangula, habebere] conuenit habere —, lässt sie aber dann unten p. 385, 4 weg. IV, 1 scheint Bamb. dagegen wie *q* an beiden Stellen zu haben; an der ersten hat Bamb. dieselben Fehler als *q*, nur exitad statt excitat.

nitionen sämmtlicher Bücher zusammengestellt und darauf die Sätze folgen lassen, nahm aber aus Versehen die Sätze II, 1 und IV, 1, welche den betreffenden Definitionen unmittelbar folgten, schon bei diesen mit.

Wir gelangen also zu dem Resultat, dass der Compilator sein hübsches Werkchen aus zwei verschiedenen Schriften zusammenstellte. Erstens benutzte er einen in Dialogform abgefassten Katechismus des Feldmessens. Ueber dessen Inhalt sind wir durch den Capitelindex fol. 6^v = Boetii opera p. 1541 unterrichtet. Darnach ist der ganze arithmetische Theil verloren gegangen; er war natürlich auch in Fragen mit kurzen Antworten in Definitionsform abgefasst, so dass auch von dieser Seite her das arithmetische Excerpt in *q* sich als unecht erweist. Von dem übrigen Theil des Katechismus haben wir Ueberreste in der „altercatio" Bamb. fol. 13^v—16^r, worin die meisten Fragen des Capitelverzeichnisses beantwortet werden; nur ist die Ordnung eine andere, und die Ueberlieferung hat auch sonst gelitten. Zweitens lag dem Compilator eine Euklid-Uebersetzung vor, die wenigstens Definitionen und Sätze von Elem. I—IV enthielt. Davon, dass sie auch die übrigen Bücher enthalten hätte, ist keine Spur vorhanden; dagegen ist es nicht unwahrscheinlich, dass auch die Beweise dabei waren; sicher ist es jedenfalls, dass sie Beweise für I, 1—3 hatte. Das geht daraus hervor, dass cod. Gudianus gr. 21 saec. X (Ebert, Zur Handschriftenkunde II, S. 12 flgg.; Röm. Feldm. I S. X) von derselben Uebersetzung die Definitionen, Postulate und κοιναὶ ἔννοιαι von Elem. I enthält nebst Elem. I, 1—3 mit den Beweisen Röm. Feldm. I S. 377—381, 21). Da Gud. weder die übrigen Sätze von Elem. I noch II—IV hat, welche doch, wie wir aus *q* Bamb. ersehen, in der Uebersetzung da waren, ist es ja möglich, dass wir in Gud. den Anfang der ursprünglichen Gestalt derselben haben, und dass also sämmtliche Beweise da waren.

Ob aber diese Uebersetzung von Boetius herrühre, ist sehr zu bezweifeln. Nicht nur giebt es Differenzen zwischen ihr und den Euklidcitaten in den echten Werken des Boetius (Philologus XLIII S. 518), sondern ich möchte auch dem als Uebersetzer aus dem Griechischen so thätigen Boetius mehr Kenntnisse der Sprache zutrauen, als unserem Uebersetzer zu Gebote stand, wenn er τραπέζια καλοῦνται (statt καλείσθω I def. 22) übersetzt: trapezia calontae, id est mensulae, nominentur (Röm. Feldm. I S. 379, 2—3 nach Gud., die Uebrigen lassen calontae weg); auch die Lesart von *q* bei Friedlein p. 387, 1—3: si in circulo per centrum linea quaedam recta dirigatur equandam (l. *et* quandam) lineam rectam in (l. non per) centrum positam in duas aequas diuidet (l. diuidit, *et*) prorectus eam angulus secat, et si proporrectos angulos etc. scheint auf Missverständniss von πρὸς ὀρθάς zu beruhen.

Jedenfalls entstammt unsere Uebersetzung direct dem griechischen Original (aetimata id est petitiones p. 379, 8; cynae ennye Z. 17), und wegen einiger guten alten Lesarten (Studien üb. Euklid S. 217) darf sie nicht zu spät angesetzt werden. Vielleicht ist sie der von Teuffel, Röm. Literaturgesch.[2], § 489 erwähnten wissenschaftlichen Uebersetzungsliteratur des VII.—VIII. Jahrhunderts beizugesellen. Mit dem Fragment bei Hultsch, Censorinus p. 60 flgg. hat sie nichts zu thun. Sie muss im Mittelalter ziemlich verbreitet gewesen sein, wie die Aufnahme in mehrere Handschriften des corpus agrimensorum zeigt. Auch in der sogenannten Geometrie des Boetius hat sie, wie schon berührt, Platz gefunden. Von den übrigen Handschriften derselben (Röm. Feldm. II S. 64 flgg.) ist mir nicht soviel bekannt, dass ich den Versuch wagen könnte, ihr Verhältniss zur Ueberlieferung in *q* Bamb. zu bestimmen. Nur für den von Friedlein zu Grunde gelegten cod. Erlangensis ist dies möglich. Eine Vergleichung zeigt, dass die Fassung des Erlang. viel mehr vom Griechischen sich entfernt, also umgestaltet und weniger rein ist. Doch ist es unzweifelhaft dieselbe Uebersetzung und zwar aus derselben Quelle geschöpft, der *q* Bamb. entstammen. Denn bei Friedlein p. 388, 3 kommt nur der letzte Theil von III, 22 vor: ex aduerso sibimet anguli constituti duobus rectis angulis sunt equales; der durch Blätterversetzung in *q* Bamb. losgetrennte Anfang: quadrilaterum figurarum quae circulis ambiuntur fehlt mit dem ganzen abgerissenen und versetzten Stück von Elem. III (s. oben). Folglich fand der Compilator der Boetius-Geometrie diese Verstümmelung in seiner Quelle schon vor, sowie überhaupt eine Durchmusterung der unten beigegebenen Varianten aus *E* ergiebt, dass der Schreiber oder Compilator die meisten Schreibfehler von *Bq* schon vorfand und durch (meist ungeschickte) Conjectur beseitigte; wir haben hierin wiederum einen entscheidenden Beweis für die späte Entstehung jenes Schriftstücks. Andererseits aber finden wir in der Boetius-Geometrie eine Reihe von Sätzen aus den Elementen, welche in *q* Bamb. fehlen, und es ist nicht der geringste Grund da, die Zusammengehörigkeit derselben und unserer Uebersetzung anzuzweifeln. Daraus folgt also, dass für die Herstellung der Boetius-Geometrie nicht *q* Bamb. gedient haben, sondern eine gemeinsame Quelle, welche die alte Uebersetzung vollständiger enthielt, und dass somit auch die Boetius-Geometrie für die Wiederherstellung derselben heranzuziehen ist. Ob jene vollständigere Quelle auch die Beweise noch hatte, so dass Elem. I, 1—3 mit den Beweisen (Friedlein p. 390—392) daraus in die Boetius-Geometrie flossen, ist sehr zweifelhaft. Denn der Erlang. ist ja aus sehr verschiedenen Bestandtheilen zusammengestellt (u. A. einer agrimensorischen Aufgabensammlung und einer Abacusabhandlung), und die Stellung jener drei Beweise, von den übrigen Sätzen aus Euklid abgetrennt, spricht sehr dafür, dass sie einer andern Quelle, etwa einer dem Gud. ähnlichen Hds., entnommen sind.

Diese alte Uebersetzung soll nun nach der Hypothese von Meyer-Curtze, wenn ich sie richtig verstanden habe,* vollständig für alle XV

* Der Aufsatz von Curtze ist mir hier nicht zugänglich; ich habe in München einen Auszug daraus gemacht.

Bücher der Elemente in *R* erhalten sein und dem Adelhard bei seiner Uebersetzung aus dem Arabischen für die Wiedergabe der προτάσεις gedient haben.

An und für sich will es wenig einleuchten, weshalb denn Adelhard nicht alle προτάσεις der in *R* enthaltenen Uebersetzung entnahm, sondern sich die Mühe gab, nebst sämmtlichen Beweisen auch einige Sätze nach dem Arabischen neu zu übersetzen. Aber es können auch starke positive Gründe gegen die genannte Auffassung geltend gemacht werden.

Von Bedeutung ist hier namentlich die Verschiedenheit der Terminologie, die sich bei genauerer Untersuchung in *R* zeigt. So wird παράλληλος bald mit alternus, bald mit equidistans wiedergegeben, z. B:

I, 30 alterne uni iterum ipsae rectae lineae aduersus se ipsas erunt altera alteri (= Boetius)*; I, 38 triangula que in coequalibus basibus et in eisdem alternis lineis sunt constituta equalia sibi inuicem sunt (= Boetius); I, 39 omnes duo trianguli equales si in eandem basim ex eadem parte ceciderit inter duas lineas equidistantes erunt (= Campanus); I, 42 equidistantium laterum superficiem designare cuius angulus sit angulo assignato equalis ipsa uero superficies triangulo assignato equalis (= Campanus).

An der zuletzt angeführten Stelle heisst παραλληλόγραμμον superficies equidistantium laterum, dagegen I, 44 iuxta datam rectam lineam dato triangulo dato rectilineo paralellogramum equale pretendendum est (= Boetius).

Ebenso unvereinbar sind die Uebersetzungen des griechischen τὸ ὑπὸ ... περιεχόμενον ὀρθογώνιον bald genau dem Griechischen entsprechend mit rectangulum quod sub ... continetur, wie in II, 8, bald ganz ungriechisch als Product wie in II, 1: si fuerint duae quarum una indiuisa et alia in quotlibet partes diuidatur illud quod ex ductu unius earum in altera fiet equum erit his que ex ductu linee indiuise in unamquamque partem linee diuise particulatim rectiangula producuntur (= Campanus).

Hierdurch erscheint doch die Einheitlichkeit der Uebersetzung in *R* als äusserst unwahrscheinlich, und die Abhängigkeit der wechselnden Terminologie von der jeweiligen Uebereinstimmung mit dem Griechischen oder mit Campanus, die oben durch die parenthetischen Zusätze angedeutet wurde, giebt die richtige Auffassung an die Hand: *R* ist durch Contamination zweier Uebersetzungen entstanden, deren eine nach dem Griechischen, die andere nach dem Arabischen gemacht war. So wird auch der Umstand erklärlich, dass nur diejenigen Sätze in *R* mit Adelhard stimmen, welche vom Griechischen beträchtlicher abweichen, was denn doch sehr auffallend wäre, wenn die Uebersetzung in *R* dem Adelhard vorgelegen hätte; denn wie und weshalb sollte er gerade alle mit dem

* D. h. die von Friedlein herausgegebene Geometrie.

griechischen Text genau stimmenden Sätze ausgemerzt und mit neuen Uebersetzungen aus dem Arabischen ersetzt haben?

Für diese Entstehung von *R* sprechen auch andere Merkmale. Dass dem Schreiber von *R* die arabische Tradition geläufig war, muss Meyer selbst zugeben angesichts der Definition in I: alia est elinuam (d. h. helmuayn Rhombus; dasselbe arabische Wort ist dann noch auf den Figuren des Rhombus und des Rhomboids beigeschrieben), und er erklärt sich die Sache so, dass „der tüchtige Schreiber" von *R* den „ihm bekannten" Terminus einsetzte. Ist nun schon an und für sich diese Erklärung bedenklich (*R* ist sehr schlecht geschrieben mit vielen argen Fehlern, und die Anwendung des Terminus auf zwei verschiedene Figuren zeigt ja eben, dass der Terminus dem Schreiber nicht bekannt war), so fällt mit der Annahme einer Contamination jeder Grund weg, um die Interpolation des arabischen Wortes in so künstlicher Weise zu erklären. Wir haben darin nur ein besonders greifbares Beispiel, wie *R* überhaupt zusammengeschweisst ist.

Charakteristisch ist auch die Lesart in *R* bei den petitiones. Die Ueberschrift lautet wie bei Boetius und in einigen griechischen Handschriften: petitiones sunt quinque, aber dennoch wird den fünf auch bei Boetius aufgeführten noch eine sechste beigefügt: item duas rectas lineas impossibile est claudere superficiem, welche bei Campanus vorkommt.

(Schluss folgt.)

Recensionen.

Elemente der analytischen Geometrie der Geraden und der Kegelschnitte. Für den Schulunterricht, sowie zum Selbststudium bearbeitet von Heinrich Drasch, Professor an der k. k. Staats-Oberrealschule in Linz. Mit 76 in den Text eingedruckten Figuren. VIII, 112 S. Wien 1889. Alfred Hölder, k. k. Hof- und Universitätsbuchhändler.

Der Verfasser beschränkt sich auf die Anwendung rechtwinkliger Coordinaten, neben welchen nur in einem kurzen (dem fünften) Abschnitte Polarcoordinaten auftreten. Von geradlinigen Coordinaten, die einen andern Axenwinkel, als den von 90 Grad bilden, erfährt der Leser Nichts. Es ist nahezu selbstverständlich, dass ihm daher auch die conjugirten Durchmesser der Kegelschnitte unbekannt bleiben. Die Asymptoten der Hyperbel kommen als Tangenten an unendlich fern gelegene Punkte vor, andere Eigenschaften derselben werden nicht besprochen. Der sechste Abschnitt behandelt die allgemeine Gleichung zweiten Grades, als welche $y^2 + axy + bx^2 + cy + dx + f = 0$ bezeichnet wird; der Fall, in welchem die Coefficienten von x^2 und von y^2 verschwinden, wird mit keinem Worte erwähnt. Die „Discussion der allgemeinen Gleichung des II. Grades mit zwei Veränderlichen" in § 34 ist dementsprechend eine nichts weniger als vollständige. Dagegen sind in den ersten Abschnitten die Lage von Punkten auf einer Geraden mit Einschluss der dabei auftretenden Richtungszeichen, harmonische Theilungen und harmonische Strahlen, Verbindungen von zwei Geraden zu einem Geradenpaar, Pole und Polaren beim Kreis wie bei den Kegelschnitten verhältnissmässig ausführlich behandelt. Damit haben wir die wesentlichen Lücken, den wesentlichen Inhalt des Buches angegeben. An Anstalten, die gerade diese Theile der analytischen Geometrie ihrem Schulplane eingefügt haben, mag man das Werkchen benutzen. Der geschilderte Rahmen ist nicht ungeschickt ausgefüllt, und insbesondere ist einiges Gewicht auf die Lösung von in denselben passenden Aufgaben und Zahlenbeispielen gelegt.

Cantor.

Sur une nouvelle méthode de résolution des équations linéaires et sur l'application de cette méthode au calcul des déterminants par B. J. Clasen, chanoine de la cathédrale de Luxembourg. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1889. 31 pag. [Extrait des Annales de la Société scientifique de Bruxelles, 12e année, 1887—1888, pp. 251—281.]

5*

Der Grundgedanke der Darstellung des Herrn Clasen ist folgender. Es sei ein System linearer Gleichungen zwischen $x, y, z, s, \ldots$ gegeben, deren drei erste durch die symbolische Schreibweise $X_1 = 0$, $Y_1 = 0$, $Z_1 = 0$ sich darstellen, wo

$$X_1 \equiv a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 s + \cdots,$$
$$Y_1 \equiv a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 s + \cdots,$$
$$Z_1 \equiv a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 s + \cdots$$

Man sieht sofort, dass

$$a_1 Y_1 - a_2 X_1 \equiv (a_1 b_2 - a_2 b_1) y + (a_1 c_2 - a_2 c_1) z + (a_1 d_2 - a_2 d_1) s + \cdots \equiv Y_2 = 0,$$
$$b_2 X_1 - b_1 Y_1 \equiv (a_1 b_2 - a_2 b_1) x + (c_1 b_2 - c_2 b_1) z + (d_1 b_2 - d_2 b_1) s + \cdots \equiv X_2 = 0.$$

Diese Gleichungen enthalten die erste y, die zweite x mit einem und demselben Coefficienten, dagegen die erste x, die zweite y nicht mehr. Vervielfacht man daher $Z_1 = 0$ mit $-(a_1 b_2 - a_2 b_1)$ und $Y_2 = 0$ mit b_3, sowie $X_2 = 0$ mit a_3, so liefert die Addition der drei Gleichungen eine neue Gleichung

$$Z_3 = 0,$$

in welcher x und y fehlen und z einen Coefficienten R besitzt. Es ist einleuchtend, dass in ganz ähnlicher Weise auch noch Gleichungen

$$X_3 = 0, \quad Y_3 = 0$$

abgeleitet werden können, deren erste y und z, deren zweite x und z nicht mehr enthält, während die bezüglichen Coefficienten von x und y jetzt R', R'' heissen. Nun wird behauptet, es sei $R = R' = R''$, und dieses Princip der gleichen Coefficienten wird durch den Schluss von n auf $n+1$ bewiesen.

Man sieht sofort, wie der weitere Verlauf des Eliminationsverfahrens ist. Die Verbindung von $X_3 = 0$, $Y_3 = 0$, $Z_3 = 0$ mit einer vierten Grundgleichung $S_1 = 0$ schafft eine neue Gleichung ohne x, y, z u. s. w. Dass das Ergebniss dieses Verfahrens kein anderes sein kann, als das jedes der üblichen Eliminationsverfahren, ist selbstverständlich, aber die neue Ableitung lässt Anfänger deutlicher erkennen, wie es kommt, dass die Addition der mit gewissen Factoren vervielfachten Grundgleichungen zum Verschwinden sämmtlicher Unbekannten bis auf eine führt, und darin dürfte in der That ein Vorzug liegen. Verstehen wir Herrn Clasen recht, so wünscht er im Unterricht die ganze Determinantenlehre auf dieser Grundlage aufgebaut.

Cantor.

Aufstellung von n Königinnen auf einem Schachbrett von n^2 Feldern derart, dass keine von einer andern geschlagen werden kann (von $n = 4$ bis $n = 10$), von Dr. Aug. Pein, Oberlehrer an der Realschule zu Bochum. Mit 7 Figurentafeln. 62 S. Leipzig 1889, in Commission bei Gustav Fock.

Seit 1850 ist die in der Ueberschrift der uns vorliegenden Druckschrift genannte Aufgabe den Freunden combinatorischer Untersuchungen vorgelegt.

Eine Anzahl von Mathematikern hat ihr Aufmerksamkeit gewidmet, unter denen ich nur Gauss zu nennen habe, um zu beweisen, dass es um eine Scharfsinn beanspruchende und Interesse verdienende Aufgabe sich handelt. Gelöst ist sie bis auf den heutigen Tag nicht, wenigstens nicht theoretisch, sondern nur praktisch, indem man ein allerdings systematisches Probiren eintreten liess, statt der längst ins Arithmetische übersetzten Fragestellung auch eine arithmetische Antwort folgen zu lassen. Herr Günther dürfte durch eine sehr glücklich gewählte Bezeichnung das Probiren wesentlich erleichtert haben. An seinen Aufsatz, welchen Herr Pein gleich den Arbeiten der übrigen Vorgänger kennt und auch den Lesern in vortrefflichen Auszügen bekannt macht, schliessen sich spätere Versuche, zuletzt die von Herrn Pein selbst an. Man wird sagen dürfen, es sei jetzt wohl das letzte Wort des Empirikers gesprochen, und Tabellen wie Diagramme lassen zur Verdeutlichung Nichts zu wünschen übrig. Um so wünschenswerther erschiene endlich einmal eine von jedem Probiren freie und unabhängige Behandlung der Frage.

CANTOR.

Theorie der Congruenzen (Elemente der Zahlentheorie) von P. L. TSCHEBYSCHEFF. Deutsch mit Autorisation des Verfassers herausgegeben von Dr. HERMANN SCHAPIRA, a. o. Professor an der Universität Heidelberg. Berlin 1889, bei Mayer & Müller. XVIII, 313 S. und 31 S. Tabellen.

Die deutsche Bearbeitung ist ziemlich genau 40 Jahre später als das russische Original erschienen. In unserem schnelllebigen Jahrhundert ist das eine Frist, innerhalb deren auch die verdienstvollsten Werke zu veralten pflegen und nur dann neu herausgegeben werden, wenn ihre Verfasser zu den Klassikern der Wissenschaft gehören. Diesen Rang nimmt Tschebyscheff unzweifelhaft ein. Aber auch an und für sich war der wiederholte Druck eines Buches gerechtfertigt, das bei der geringen Zahl von des Russischen kundigen Lesern so gut wie unbekannt geblieben ist, während es allgemein bekannt zu sein vollauf verdient. Schon die allgemeinste Anordnung ist ganz verschieden von derjenigen, welcher zahlentheoretische Werke sonst zu folgen pflegen, und schliesst sich eng an das in algebraischen Werken Gebräuchliche an. Nach wenigen einleitenden Sätzen eröffnet ein Capitel über Congruenzen im Allgemeinen die Untersuchung. Es folgen die Congruenzen ersten Grades, dann die Congruenzen n^{ten} Grades, und nun erst werden die besonderen Fälle betrachtet, welche einerseits durch $n=2$, andererseits durch Einschränkung der Gliederzahl auf zwei (binomische Congruenzen) sich ergeben. Exponentialcongruenzen ($a^x \equiv A$) schliessen sich an. Damit ist die eigentliche Lehre von den Congruenzen abgeschlossen, und der Verfasser ordnet ihr die Lehre von den quadratischen Formen in der Weise zu, dass er von Congruenzen mit zwei

Unbekannten redet. Wie im Allgemeinen, so ist auch in jedem einzelnen Capitel die Darstellung durchaus eigenartig. So führt z. B. der Satz, dass in jeder mp-gliedrigen arithmetischen Progression, deren Differenz d zu p theilerfremd ist, immer genau m Glieder durch p theilbar sein müssen (S. 17), zur Entwickelung der Gauss'schen φ-Function (S. 22); so liefert der Fermat'sche Lehrsatz (S. 50) die Auflösung der Congruenzen ersten Grades (S. 57); so zeigt sich der Wilson'sche Satz (S. 73) als Folgerung aus dem Satze, dass eine Congruenz m^{ten} Grades nicht mehr als m Wurzeln besitzen könne, es sei denn, dass alle Glieder Vielfache des Modulus p zu Coefficienten besitzen (S. 70); so führt der gleiche Hilfssatz von der grössten Anzahl von Wurzeln einer Congruenz m^{ten} Grades zum Beweise der Auflösbarkeit der Congruenz mit zwei Unbekannten $x^2 + Ay^2 + B \equiv 0 \ (mod\, p)$ unter der Voraussetzung, dass p eine Primzahl und kein Theiler von A ist (S. 208) u. s. w. Der Uebersetzer des vortrefflichen Buches, Herr Schapira, ist Russe von Geburt und seit 1878 in Heidelberg wohnhaft. Er war also durch vollständige Beherrschung beider Sprachen zur Bearbeitung gleichsam vorausbestimmt, und er hat sich, soweit wir aus dem deutschen Texte allein zu beurtheilen im Stande sind, seiner Aufgabe auf's Beste entledigt. Eine ganze Reihe von kleineren und grösseren Zusätzen, durch eckige Klammern kenntlich gemacht, dienen dazu, die Bearbeitung noch folgerichtiger und lückenloser zu gestalten, als sie es im Original schon war. Wir wissen dafür, wie für die ganze Veröffentlichung Herrn Schapira aufrichtigen Dank.

Cantor.

Zur Lehre vom Unendlichen. Antrittsrede zur Uebernahme der ausserordentlichen Professur der Mathematik an der Universität Tübingen, gehalten am 28. Juni 1888 von Dr. W. Franz Meyer an der Bergakademie Clausthal. Tübingen 1889, bei H. Laupp. 24 S.

Als Referent 1855 seine „Grundzüge einer Elementararithmetik" veröffentlichte, stellte er an die Spitze des Ganzen den Satz, die Mathematik sei eine Erfahrungswissenschaft, und von diesem Glaubensbekenntnisse abzugehen hat er inzwischen nicht die geringste Veranlassung gehabt. Herr Meyer dagegen fordert, die Arithmetik und Analysis sollen, soweit dies die Eigenart unserer Geistesanlagen nur irgend zulässt, als ein Bestandtheil der reinen Logik auftreten. Ist damit ein so grundsätzlicher Widerspruch der beiden Auffassungen an den Tag gelegt, dass eine Würdigung der gegentheiligen Meinung für beide ausgeschlossen scheint? Wir glauben es nicht. Wir fügten damals sofort hinzu, dass die Mathematik auf gewonnener Erfahrungsgrundlage mittels Abstractionen weiter baue, und Herr Meyer verschmäht es keineswegs, die sinnliche Wahrnehmung zu Hilfe zu ziehen, um mathematische Begriffe zu erläutern, wenn nicht zu bilden, und darin stimmen wir Beide gewiss überein, dass das Unendliche nicht Erfahrungsergebniss allein sein kann, sowie darin, dass mit einzig philosophischen Redensarten die Schwierigkeit des Unendlichkeitsbegriffes nicht behoben wird. Herr Meyer giebt sich in seiner anziehend und geschmackvoll geschriebenen Antrittsvorlesung als Anhänger derjenigen Anschauungen zu erkennen, welche seither vorzugsweise in Herrn Georg Cantor und Herrn Richard Dedekind ihre Vertreter fanden. War es dem Letzteren auch mehr um eine anfechtungsfreie Einführung der Irrationalzahl zu thun, so durfte Herr Meyer doch gerade ihm die Begriffsbestimmung entnehmen, ein Inbegriff von Dingen sei unendlich, wenn er mit einem Theile seiner selbst gleiche Mächtigkeit besitzt, im andern Falle dagegen endlich. Unter gleicher Mächtigkeit ist dabei diejenige Eigenschaft zweier Mengen verstanden, welche gestattet, je ein Element der einen auf ein solches der zweiten und umgekehrt zu beziehen. Das Verdienstliche an dieser Definition ist, wie Herr Meyer sehr richtig hervorhebt, darin zu finden, dass sie zum ersten Male ein positives Merkmal für das Unendliche ausspricht, welches früher von der Sprache, wie von dem Mathematiker immer nur **un**-endlich, also mit negativem Namen genannt wurde.

CANTOR.

Curso de analyse infinitesimal por F. GOMES TEIXEIRA, Director da Academia Polytechnica do Porto, professor na mesma Academia, antijo professor na Universidade de Coimbra, socio correspondente das Academias Reaes das Sciencias de Lisboa, Madrid etc. Calculo Integral (Primeira parte). Porto 1889, Typographia Occidental. 312 pag.

Die Differentialrechnung des gleichen Verfassers ist 1887 erschienen und S. 213—215 der hist.-lit. Abth. des XXXIII. Bandes dieser Zeitschrift angezeigt. Der I. Band der Integralrechnung, welcher heute uns vorliegt, bestätigt die gute Meinung, welche wir bei jener früheren Gelegenheit aussprechen durften. Herr Teixeira ist Mathematiker der neuesten Schule und hat dementsprechend in sein Lehrbuch Dinge aufgenommen, welche älteren derartigen Werken durchaus fremd waren. Dass Herr Teixeira einen guten Theil seiner Schulung in Paris durchgemacht hat, dass er dementsprechend die Schriften des Herrn Hermite, das schnell klassisch gewordene Werk des Herrn Darboux über Oberflächen häufiger als Quellen benutzte, als Werke, welche in anderen Sprachen geschrieben sind, wollen wir ihm um so weniger verargen, je mehr wir die Hochschätzung der genannten Schriften mit ihm theilen. Wir wollen auch schon darum nicht ihn der Vernachlässigung dieser oder jener Untersuchungen anschuldigen, weil wir nicht wissen können, welchen Inhalt Herr Teixeira dem II. Bande der Integralrechnung aufgespart hat. Voraussichtlich wird dort die functionentheoretische Richtung mehr eingeschlagen werden und Gelegenheit bieten, zu zeigen, dass Herr Teixeira seine für einen Romanen seltenen

Sprachkenntnisse nicht dazu nur angewandt hat, in die Zeitschriften der verschiedensten Länder zu schreiben, sondern in jenen Zeitschriften auch die Abhandlungen der Eingeborenen zu lesen und sie da zu benutzen, wo von ihnen aus die Neugestaltung mathematischer Auffassungen entstanden ist. Wenn wir oben bemerkten, der Inhalt des gegenwärtig erschienenen Bandes gehe vielfach weit über das hinaus, was man in älteren Lehrbüchern finde, so hält es nicht schwer, insbesondere aus dem 1., 2. und 4. Capitel Beispiele dafür zu nennen. Das 1. Capitel ist der unbestimmten Integration gewidmet. Hier ist die Aufgabe behandelt, den algebraischen Theil des Integrals $\int \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\, dx$ zu ermitteln, ohne die Wurzeln von $\psi(x) = 0$ zu kennen, sofern $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ ganze rationale Functionen bedeuten. In dem gleichen Capitel ist der Satz bewiesen, dass die Gleichung der Unicursalcurven in zwei neue Gleichungen zerfällt, deren jede einzelne eine der Coordinaten x, y als rationale Function eines Parameters t darstellt. Im 2. Capitel wird, vom unbestimmten Integral ausgehend, das bestimmte Integral ermittelt. Wir erwähnen hier einer ganzen Anzahl von Mittelwerthsätzen, aus welchen interessante Annäherungen sich ergeben. Im 4. Capitel finden sich Anwendungen bestimmter Integrale auf die Lehre von den Gleichungen, insbesondere zum Beweise des Gauss'schen Fundamentalsatzes der Algebra u. s. w. Diese wenigen Anführungen dürften genügen, unser dem neuen Lehrbuche günstiges Urtheil zu begründen.

Cantor.

Beiträge zur Theorie und Praxis der Invalidenversicherung von Oberlehrer Dr. Aug. Wilh. Wolf. Programm des städtischen Realgymnasiums zu Leipzig für das Schuljahr von Ostern 1888 bis Ostern 1889. [1889 Progr. Nr. 529.] 40 S. 4°, worunter 28 S. Text und 12 S. Tabellen.

Der Verfasser beginnt seine Abhandlung, deren Gegenstand er so glücklich zu wählen wusste, dass das Erscheinen des Programms fast genau mit der Erlangung von Gesetzeskraft des Reichsinvalidengesetzes zusammentraf, mit einer kurzen, aber höchst lehrreichen Geschichte der einschlagenden deutschen Arbeiten. Nachdem Hülsse die statistische Thatsache festgestellt hatte, dass gemäss der aus Knappschafts- und Fabrikscassen ermittelten Zahlen auf je 1000 Arbeitsfähige jeden Alters durcheinander gezählt 68 Invaliden vorkommen, suchte Karl Heim diese Zahlen zu deuten, beziehungsweise in ihre Bestandtheile zu zerlegen. Wenn mit 68 pro Mille Arbeitsunfähigen der Beharrungszustand hergestellt ist, so muss nothwendigerweise die Zahl der unter 1000 Arbeitern jährlich invalid werdenden der Zahl der unter 68 Invaliden jährlich Absterbenden gleich sein. Letzteren Bruchtheil nahm Heim zu 3 Procent an, mithin 2,04 von 68, und so gewann er 0,002 als Invaliditätswahrscheinlichkeit des gesunden Arbeiters. Aber diese Invaliditätswahrscheinlichkeit zerfällt nach Heym selbst wieder in zwei einander für die Durchschnittszahl gleiche Summanden, deren einer vom Alter des Arbeiters unabhängig die durch Naturkräfte, durch das Gewerbe drohende Invalidität, nahe verwandt, wenn auch nicht übereinstimmend mit der Unfallsgefahr, in Zahlen darstellt, während der andere in geometrischer Progression mit dem Alter des Arbeiters wachsend die bei fortschreitenden Jahren regelmässige Kräfteabnutzung misst. Ist also die Invaliditätswahrscheinlichkeit nicht eines Arbeiters überhaupt, sondern eines x-jährigen Arbeiters zu bestimmen, und 20 Jahre etwa das Anfangsalter für die in Rechnung tretenden Arbeiter,* so ist die Invaliditätswahrscheinlichkeit $i_x = a + b \,.\, c^{x-20}$. Die Constante a wurde, wie schon erwähnt, zu $\frac{1}{2} \,.\, 0{,}002 = 0{,}001$ angenommen; die beiden Zahlen b, c wurden auf Grundlage zweier weiteren Annahmen berechnet: Erstlich, dass mit 20 Jahren der Summand $b \,.\, c^{x-20} = b = 0{,}00002$ sei, zweitens dass $i_{79} = 1$, mithin $0{,}00002 \,.\, c^{79-20} = 1 - 0{,}001$ sei oder $c = \sqrt[59]{49950} = 1{,}2292$. Diese ersten Grundlagen der Untersuchung gehen bis 1855 zurück. Seit 1868 etwa wandte August Wiegand der hochwichtigen Aufgabe seine Aufmerksamkeit zu. Die 79 Jahre der Heim'schen Rechnung erkannte er in erster Linie als zu hoch und ersetzte sie durch 71, wodurch ein entsprechend vergrössertes c sich berechnete. Ueberdies veranlasste er den Verein deutscher Eisenbahnverwaltungen, genaue Zusammenstellungen aller Zahlen, die sich bei ihren zahlreichen Bediensteten (1868: 62853 Angestellte, 1869: 73342 Angestellte u. s. w.) ergaben, zu veröffentlichen, aus welchen weitere Folgerungen abgeleitet wurden. Herr Wolf hat neuerdings die Erfahrungen von drei Kassen zu prüfen gehabt, um über die Lebensfähigkeit jener Kassen selbst ein Urtheil zu gewinnen; es waren dieses die Pensionsanstalt der Genossenschaft deutscher Bühnenangehöriger, die Pensions-Zuschusskasse für Beamte der deutschen Reichspost- und Telegraphenverwaltung und die Pensions-Zuschusskasse der Musikmeister des königl. preussischen Heeres. Die Zahlen dieser drei Anstalten sind von ihm erstmalig veröffentlicht. Ein gemeinschaftliches Ergebniss der sämmtlichen seither angestellten Untersuchungen besteht in der Unübertragbarkeit der Zahlen von einem Berufe auf den andern. Die eigene Statistik einer jeden Kasse liefert auch bei weniger reichhaltigen Berufen einen gesicherteren Maassstab für die Lebensfähigkeit der Kasse, als die Vermengung mit Zahlen, welche einem andern Berufe angehören. Die Invaliditätscurven, welche Herr Wolf als Versinnlichung seiner Rechnungen gezeichnet hat, sind besonders lehrreich. Sie zeigen beispielsweise, dass männliche Bühnenangehörige, Eisenbahnbeamte und Postbeamte einerseits, weibliche Bühnenmitglieder und Militärmusikmeister an-

---

* Dem Invaliden-Reichsgesetze entsprechend sollte dieses Anfangsjahr allerdings auf das 16. Jahr gelegt werden.

dererseits zwei Gruppen bilden, deren zweite eine von Anfang an wesentlich steiler ansteigende Invaliditätscurve besitzt. Bei den Musikmeistern tritt ein ganz besonderer Verlauf vom 58. bis zum 61. Lebensjahre ein, wo die Curve fällt, d. h. also die Invaliditätswahrscheinlichkeit 3 Jahre lang abnimmt, um alsdann freilich um so rascher zuzunehmen.

Haben wir somit etwa die Hälfte des Textes der Berichterstattung unterworfen, so können wir über die zweite Hälfte rascher hinweggehen, wiewohl sie die eigentlich wichtigere ist. Herr Wolf hat nämlich hier die Formeln abgeleitet, nach welchen er seine Berechnungen anstellt, und aus Formeln lässt sich der Natur der Sache nach ein Auszug nicht geben. Die Ableitung selbst bietet aber, gleich der der weitaus meisten Formeln des Versicherungswesens, keine eigentlichen mathematischen Schwierigkeiten, da sie der Hauptsache nach nur von der Summirung mehr oder weniger verwickelter geometrischer Reihen abhängt. Der Fachmann wird die Formeln selbst zu benutzen haben, der Laie — auch der mathematische Laie — lässt sich daran genügen, dass sie vorhanden sind.

CANTOR.

Einführung in die Wahrscheinlichkeitslehre von Dr. BRUNO BORCHARDT. Berlin 1889, Verlag von Julius Springer. VI, 86 S.

In dem Vorworte spricht der Verfasser von dem seitherigen Mangel an einem Werkchen, welches eine erste Einführung in die Wahrscheinlichkeitslehre als Aufgabe sich setze, und soweit man den Ausspruch auf in deutscher Sprache verfasste Schriften einschränkt, ist derselbe vollständig gerechtfertigt. Hier war in der That ein Bedürfniss zu befriedigen, und wir dürfen mit Vergnügen bezeugen, dass Herr Borchardt die von ihm erkannte Lücke unserer Literatur auszufüllen verstanden hat. Dass es nur um eine Einführung sich handelt, dass auf 86 Seiten kein Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung gegeben werden kann, ist selbstverständlich, aber doch geht Herr Borchardt weiter in seinen Entwickelungen, als es mit den Mitteln der ganz elementaren Mathematik möglich ist, und dadurch, dass er die Anwendung des Integralzeichens ab und zu sich gestattet, ist er in den Stand gesetzt, seine Leser nicht nur in die Anfangsgründe der Wahrscheinlichkeitslehre, sondern in diese selbst einzuführen. Das Büchelchen zerfällt in vier Abschnitte: I. Von der Wahrscheinlichkeit; II. Von der Hoffnung; III. Von den Ursachen; IV. Anwendung auf die Lebensversicherung. Die Namen lassen den Inhalt unschwer erkennen. Sollen wir die äussersten Grenzen angeben, bis zu welchen die Darstellung sich erstreckt, so nennen wir aus dem ersten Abschnitte die Untersuchung über häufig wiederholte Ereignisse und über die Wahrscheinlichkeit einer Abweichung von der wahrscheinlichsten Combination derselben, also die Grundlage des Gesetzes der grossen Zahlen, wenn dieses selbst auch (unserer Meinung nach mit Unrecht) nicht genannt, noch ausgesprochen ist. Der zweite Abschnitt führt bis zum Petersburger Problem. Im dritten Abschnitte ist von der Wahrscheinlichkeit von Ursachen, beziehungsweise von der der Wiederholung eines Ereignisses die Rede; hier wird derselbe Grenzpunkt wie im ersten Abschnitte erreicht. Der vierte Abschnitt ist mit 17 Seiten etwas stiefmütterlich bedacht; gleichwohl wird er genügen, dem Leser soviel von der Lehre von den Lebensversicherungen beizubringen, als erforderlich ist, die Lust nach weiterer Belehrung in ausführlichen Fachschriften in ihm zu erwecken.

CANTOR.

Zum Gesetz der grossen Zahlen. Untersuchung der Ziehungsergebnisse der Prager und Brünner Lotterie vom Standpunkte der Wahrscheinlichkeitsrechnung, von EMANUEL CZUBER. Prag 1889, Verlag von H. Dominicus. 41 S.

Das Zahlenlotto, bei welchem aus 90 Nummern jedesmal 5 gezogen werden, und ein Gewinn auf alle Diejenigen fällt, denen es gelang, eine der mehrere von den gezogenen Nummern zu errathen, gehört zu den Spielen, welche in fast allen Lehrbüchern der Wahrscheinlichkeitsrechnung untersucht werden. Es gestattet die Anwendung verschiedener Formeln der Wahrscheinlichkeit *a priori*. Aber in Staaten, wo es geduldet wird, entfesselt dieses Lotto auch eine blinde Spielwuth namentlich der unteren Bevölkerungsschichten, welche nicht selten den Schein eines einsichtsvollen Spieles anzunehmen liebt. So erklärt sich das Erscheinen von Listen, in welchen sämmtliche Ziehungsergebnisse der Zahlenlotterie in Prag und in Brünn von 1754 bis 1886 gesammelt und abgedruckt sind. Sind diese Listen einmal vorhanden, so gestatten sie reichliche Verwerthung in der Lehre von der Wahrscheinlichkeit *a posteriori*, und das ist die Aufgabe, welche Herr Czuber sich neuerdings gestellt hat.

Wir wollen einige von den Einzelfragen hervorheben, welche er der Untersuchung unterworfen hat. Unter den 90 Nummern, aus welchen 5 gezogen werden, befinden sich 9 einziffrige und 81 zweiziffrige. Die Wahrscheinlichkeit $p^{(0)}$, dass keine einziffrige, sondern 5 zweiziffrige Nummern gezogen werden, ist *a priori* $\frac{81.80.79.78.77}{90.89.88.87.86}=\frac{64701}{110983}$ oder $p^{(0)}=0{,}58298$. Die Wahrscheinlichkeit $p^{(1)}$, dass neben 1 einziffrigen 4 zweiziffrige Nummern gezogen werden, ist $\frac{81.80.79.78.9.5}{90.89.88.87.86}=\frac{45}{77}p^{(0)}$ oder $p^{(1)}=0{,}34070$ u. s. w. Die Theorie wurde nun mit der Erfahrung verglichen, welche aus 2854 Prager und 2703 Brünner Ziehungsergebnissen bestand. Es wurde ferner die Abweichung der berechneten und der beobachteten Zahlen ermittelt und die theoretisch auffindbaren wahrscheinlichen Grenzen dieser Abweichung. Ueberall zeigte sich eine befriedigende Uebereinstimmung. Bei einer zweiten Untersuchung handelte es sich um die Wahrscheinlichkeit p, dass die fünf gezogenen Nummern in natürlicher Grössenfolge von der niedersten zur höchsten oder umgekehrt von der höchsten zur niedersten dem Rade entnommen wurden. *A priori* ist $p = \frac{2}{1.2.3.4.5} = \frac{1}{60}$. Auch hier waren die Zahlen, welche *a posteriori* den Listen entnommen wurden, in auffallender Uebereinstimmung mit der Rechnung. Das Gleiche zeigte sich bei der dritten Untersuchung, welche die Erschöpfung sämmtlicher Nummern zum Zielpunkte hatte. Herr Czuber hat noch einige weitere Fragen an der Hand der Berechnung und der Erfahrung beantwortet und die Ergebnisse verglichen.

Es ist ja keineswegs überraschend, dass das Gesetz der grossen Zahlen, d. h. das Wegfallen von Zufälligkeiten bei Häufung der Beobachtungen, sich bewährte, aber wer Vorlesungen zu halten hat, welche ausschliesslich oder theilweise auf Wahrscheinlichkeitsrechnung sich beziehen, ist vielfach in der Lage, nach geeigneten Beispielen sich umzusehen, die gar nicht häufig sich vorfinden. Für solche Zwecke können wir die kleine Schrift warm empfehlen, welche zudem mit den früheren Veröffentlichungen des gleichen Verfassers die Tugend theilt, sich leicht und angenehm lesen zu lassen.

Cantor.

Ueber die Genauigkeit logarithmischer Berechnungen von Dr. Hans Stadthagen. Berlin 1888, Ferd. Dümmler's Verlagsbuchhandlung. 82 S.

Seien N und $N+1$ zwei aufeinanderfolgende Zahlen, deren Logarithmen L_1 und L_2 aus einer Logarithmentafel zu entnehmen sind, sei $N+\varepsilon$ eine zwischen N und $N+1$ liegende Zahl, deren Logarithme L durch Interpolation zu finden ist; unter Benutzung der ersten Differenzen ist alsdann

$$log(N+\varepsilon) = log\, N + \varepsilon\,(log(N+1) - log\, N)$$

oder

$$L = L_1 + \varepsilon(L_2 - L_1) = (1-\varepsilon)L_1 + \varepsilon L_2.$$

Nun sind aber fast alle Logarithmen abgekürzte, mit einem Fehler behaftete Zahlen, und der bei L_1, L_2, L begangene Fehler möge f_1, f_2, F heissen. Die Interpolation selbst bewirkt noch einen weiteren Fehler f_3. Die gefundene Gleichung muss daher eigentlich

$$L + F = (1-\varepsilon)(L_1 + f_1) + \varepsilon(L_2 + f_2) + f_3$$

geschrieben werden, und aus beiden Gleichungen vereinigt ergiebt sich

$$F = (1-\varepsilon)f_1 + \varepsilon f_2 + f_3.$$

Jeder der Fehler f_1, f_2, f_3 liegt aber positiv oder negativ zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ der letztgewonnenen Decimale in den Logarithmen. Nimmt man $f_1 = f_2 = f_3 = \pm\frac{1}{2}$ an, so erscheint der höchstmögliche Werth von F, nämlich

$$F = \pm 1.$$

Mit anderen Worten: bei jedem in der Logarithmentafel unmittelbar aufgeschlagenen Logarithmus bleibt der Fehler immer unter $\frac{1}{2}$ der letzten Decimale, bei jedem interpolirten Logarithmen unter der Einheit der letzten Decimale, sei es als positiver, sei es als negativer Fehler.

Von dieser Grundwahrheit geht Herr Stadthagen aus, um die praktisch hochwichtige Frage nach der Genauigkeit logarithmischer Berechnungen zu erörtern, oder, anders ausgesprochen, die Frage, wievielstelliger Logarithmen man sich zu bedienen habe, um den begangenen Fehler des logarithmischen Rechnens in gegebene Grenzen einzuschliessen?

Er bedient sich dazu der Formeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung, aber er prüft senie Ergebnisse auch an der Hand der Erfahrung. Es giebt ja glücklicherweise Logarithmentafeln von der allerverschiedensten Ausdehnung der Logarithmen. Wird nun eine Rechnung das eine Mal mit m_1-stelligen, das andere Mal mit m_2-stelligen Logarithmen ausgeführt, und wedren von dem zweiten Ergebnisse $m_2 - m_1$ Decimalen gestrichen, die letzte Decimale aber, welche stehen bleibt, unverändert belassen oder um 1 erhöht, je nachdem die gestrichenen Stellen unter $\frac{1}{2}$ bleiben, oder diese Grenze erreichen, beziehungsweise übersteigen, so ist damit der Prüfungsmaassstab der mit der geringeren Anzahl von Decimalen ausgeführten Rechnung gegeben und man kann Theorie und Praxis vergleichen.

Ausführlicheres Eingehen auf die angestellten Rechnungen und Versuche würde die Grenzen eines Berichtes überschreiten, während das hier Gesagte schon genügen dürfte, auf die inhaltsreiche kleine Schrift aufmerksam zu machen, die namentlich dem praktischen Astronomen die werthvollsten Fingerzeige zu geben angethan ist.

Cantor.

---

v. Miller-Hauenfels, **Richtigstellung der in bisheriger Fassung unrichtigen mechanischen Wärmetheorie und Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Aetherbewegungen.** Wien 1880, Verlag von Manz.

Verf. erklärt es als eine willkürliche Annahme, dass die innere Wärme blos von dem Anfangs- und Endzustand eines Körpers abhänge, indem er die Unzulässigkeit speciell bei den Gasen durch Gegenüberstellen der Resultate nachweist, welche entweder aus der Theorie gefolgert, oder durch das Experiment gewonnen wurden. Bei der Aufstellung eines neuen Ausdrucks für die innere Wärme bemerkt der Verfasser, dass wir bei der Erwärmung des constanten Volumens eines Gases zweierlei wahrnehmen: erstens eine Erwärmung unserer Hand und zweitens ein Wachsen der Spannung. Dann fährt er fort: „Da hier deutlich zweierlei Wirkungen auf dasselbe Sinnesorgan (das Gemeingefühl zugleich Tastsinn) erfolgen, so werden wir auch nothwendig annehmen müssen, dass jede derselben ihren besonderen Energieaufwand erfordere.“ Verf. nimmt daher an, dass stets ein und dieselben

Nerven Temperatur und Druck empfinden, während dies von medicinischer Seite nicht als allgemein giltig betrachtet wird. Diesen Einwand ahnt der Verf. selbst, da er am Schlusse des ersten Theiles in einem Anhang darauf zurückkommt, indem er trotz dieses Einwandes die doppelte Energieannahme zu rechtfertigen sucht.

In der allgemein mathematischen Ausdrucksweise für das Wärmeincrement ist die Temperatur vernachlässigt, weil bei ihrer Aufstellung die bisherige Voraussetzung einer allgemein giltigen Abhängigkeit zwischen Temperatur, Druck und Volumen zu Grunde gelegt wurde. Diese Vernachlässigung sei unstatthaft, weil sie in einem besonderen Falle mit der Erfahrung im Widerspruch steht, auch werde man unter obiger Annahme auf allgemein nicht integrable Werthe geführt.

Vorläufig sieht der Verf. von jeder Annahme über den Bau der Molecule und deren innerer, uns unsichtbarer Bewegungsweise ab und fasst die durch die Wärme an den Körpern hervorgebrachten Erscheinungen einfach nur als das Ergebniss anziehender und abstossender Kräfte auf. Nunmehr werden die Unterschiede zwischen der Massen- und Molecularanziehung hervorgehoben und darauf der Nachweis geliefert, dass die Molecularanziehung und ihre Unterarten, insbesondere die Krystallisation ebenfalls dem Gesetz für Centralkräfte unterliegen.

Die eigenartige Aufstellung der allgemeinen Temperaturgleichung fühlt selbst der Verf., indem er sagt: allfällige Zweifel gegen die Richtigkeit dieser Formel werden dadurch behoben, dass sich dieselbe später aus der allgemeinen Wärmegleichung ableiten lasse. Letztere erleidet je nach dem Aggregatzustand gewisse Kürzungen. Absichtlich wurde die sogenannte absolute Temperatur vermieden, weil dieser Begriff nur für Gase zulässig sei und in diesem Falle als Verdampfungstemperatur eines als vollkommen gedachten Gases zu bezeichnen wäre.

Bei den Gasen ergiebt sich die Abweichung von dem Mariotte'schen Gesetz als eine Zusammenwirkung dreier Kräfte, der Massen- und Molecularanziehung und der Cohäsionskraft.

Die Ausdehnungscurven, d. h. die Beziehung zwischen Volumen und Temperatur, bestehen nach des Verfassers Ableitungen bei Gasen und Flüssigkeiten aus Hyperbelzweigen, bei starren Körpern jedoch aus einem Parabelstück. — Bei dem Versuche, ein Bild von der Temperaturfunction in den drei Aggregatzuständen zu erhalten, dehnt der Verf. das Dulong-Petit'sche Gesetz der constanten Atomwärme bei starren Körpern zunächst auf Gase aus und findet hier als Constante 3,431, welche Zahl mit Rücksicht auf die von ihm aufgestellte Formel für die specifische Wärme bei constantem Druck der Wahrheit näher komme, als die Zahl 6,..., welche für starre Körper gefunden worden ist. Auch bei den Flüssigkeiten gelte das Gesetz der constanten Atomwärme, das sich aber direct nicht erkennen lasse, weil das zweite Glied in der soeben erwähnten Formel zu sehr vorherrsche. Es bestehe demnach kaum mehr ein Zweifel, dass das Gesetz der constanten Atomwärme ein wirkliches Naturgesetz sei, und es sei sehr wahrscheinlich, dass die Temperaturfunction einen für alle Körper und alle Aggregatzustände gemeinsamen Bau besitze. Die Ursache des eigenthümlichen Verhaltens bei Aenderung des Aggregatzustandes, wie es sich in Ueberschmelzung u. s. w. zu erkennen giebt, ist in dem Bestreben zu suchen, dem Temperaturgesetz um jeden Preis gerecht zu werden.

Nachdem noch einmal ausdrücklich hervorgehoben worden ist, dass die Cohäsion bei jedem der drei Aggregatzustände einen positiven Werth besitze, wird die Frage ventilirt, ob denn in der Schöpfung nicht auch ein „Etwas“ existiren könnte, bei welchem die Cohäsion negativ wäre. Ein solches Gebilde, welches sich im Weltall körper- und umfanglos verbreiten muss, ist in dem Aether repräsentirt. Nunmehr wird der feste Boden der naturwissenschaftlichen Erkenntniss völlig verlassen. Der zweite, grössere Theil des Buches ist lediglich eine mathematisch-philosophische Ausarbeitung der Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Aetherbewegungen. So interessant auch dieser Theil ist, so würde hier ein näheres Daraufeingehen zu weit führen, zumal es sich schliesslich doch nur um ein „Glauben oder Nichtglauben“ handeln kann. Momentan müssen wir unsere grössere Aufmerksamkeit noch dem ersten Theil des Buches zuwenden. Erst wenn hier eine völlige Einigung stattgefunden hat, sind wir berechtigt, weiter zu gehen, um dem rascheren Gedankenfluge des Verf. zu folgen.

So oft wir auch den ersten Theil des Buches betrachten, immer kommen wir wieder auf die erste Hypothese zurück und können uns mit derselben bis jetzt noch nicht ganz befreunden, zumal die oft eigenartige Ableitung specieller Formeln an einigen Stellen den Eindruck macht, als ob das Resultat nur erreicht worden wäre, weil es schon vorher bekannt war. — Wenn wir demnach nicht vollständig mit dem Verfasser einverstanden sind, so sei damit sein Verdienst in keiner Weise geschmälert, die mechanische Wärmetheorie von einer neuen, allgemeineren Seite aus betrachtet zu haben, was für die Theorie selbst nur fruchtbringend ist, indem dadurch neue Gedanken angeregt werden.

B. Nebel.

Ignaz Wallentin. **Lehrbuch der Physik** für die oberen Classen der Mittelschulen und verwandter Lehranstalten. (Ausgabe für Gymnasien.) 5. veränderte Auflage. Wien 1888, Verlag von A. Pichler's Wittwe & Sohn. Preis 2 Mk. 80 Pf.

Wenn wir die vorliegende Auflage mit der im Jahre 1881 erschienenen ersten vergleichen, so finden wir allerdings in jeder Beziehung zum Theil grosse Veränderungen. Für ein Schulbuch sind eingreifende Veränderungen nicht erwünscht, indessen sind wir damit einverstanden, falls die Nothwendigkeit dazu zwingt. Leider trifft dies in dem vorliegenden Falle mit wenigen Ausnahmen nicht zu; denn bei dem Gegenüberstellen dieser fünften Auflage und der ersten fehlen oft ganze Partien, namentlich in der Astronomie, die wir sehr ungern vermissen. Dafür ist z. B. zuviel über die Planeten und Planetoiden gesagt. Auch die Krystalloptik könnte entbehrt werden. Ueberall bemerken wir, dass der Verfasssr eifrigen Studien oblag; nur glauben wir, dass er dabei übersehen hat, dass ein Schulbuch, welches für ein gewisses Alter bestimmt ist, denselben nicht in diesem Maasse folgen darf. An die mathematischen Kenntnisse der Schüler werden hohe Ansprüche gemacht, auch die Ausdrucksweise, wie z. B. „ein Bewegliches befinde sich etc.“, dürfte manchmal einfacher sein. — Was die äussere Ausstattung des Buches betrifft, so können wir leider die Bemühungen des Verf. nicht unbedingt anerkennen. Mit Rücksicht auf die Augen hat der Verf. einen „weiteren und deshalb deutlicheren Satz“ angeordnet, indessen fehlt den einzelnen Buchstaben die Kraft, so dass bei Seiten ohne Unterbrechung die Augen leicht übergehen, wie bei einer Handschrift, welcher die Grundstriche fehlen. Den zahlreichen Figuren fehlt in hohem Maasse die Einheit. Bei den Abbildungen, weiss auf schwarzem Grunde, wechselt zu sehr die Strichdicke, z. B. Fig. 204 und 205, sodann lässt der schwarze Grund oft sehr zu wünschen übrig, wodurch allerdings die schlechten Schultafeln gut nachgeahmt sind. Häufig sind die neu hergestellten Figuren weniger scharf ausgefallen, so dass man nicht einsieht, weshalb die alten verdrängt worden sind, z. B. Fig. 99 der 1. Auflage und Fig. 73 der 5. Auflage. Zum Mindesten ist es störend, dass in Fig. 77 die Klammern, welche die Höhen angeben sollen, stärker sind, als die Gefässwände. Fig. 44 ist perspectivisch unrichtig. Die Ausführung von Fig. 71 erinnert sehr an die Abbildungen in schlechten französischen Witzblättern. Bei der Correctur hätten die Formeln mehr berücksichtigt werden sollen, z. B. die ungleichen Buchstaben t gegenüber den anderen auf S. 23. So gut auch das Buch bezüglich seines Inhaltes ist, so sind wir mit der äusseren Ausstattung keineswegs zufrieden, besser wäre in diesem Falle ein Verzicht auf die Preisermässigung. Mit Rücksicht auf die Bedürfnisse der Schule ist die vorliegende Physik sehr vollständig, während die Chemie zu stiefmütterlich behandelt ist.

B. Nebel.

H. Frerichs, **Die Hypothesen der Physik.** Ein Versuch einer einheitlichen Darstellung derselben. 2. Aufl. Norden 1889, Verlag von H. Fischer Nachfolger. Preis 2 Mk. 50 Pf.

Eine eingehende Besprechung der 1. Auflage dieses Buches findet sich im 25. Jahrgange dieser Zeitschrift, weshalb wir hier darauf verweisen müssen.

B. Nebel.

H. Frerichs, **Zur modernen Naturbetrachtung.** Vier Abhandlungen. 2. Aufl. Norden 1889, Verlag von H. Fischer Nachfolger. Preis 2 Mk. 50 Pf.

Der Inhalt des Buches ist rein philosophischer Natur und besteht aus den vier Abhandlungen: Zur monistischen Naturerklärung. — Mechanismus und Zweckmässigkeit in der Natur. — Kampf und Entwickelung. — Ethik.

B. Nebel.

Dziobek, **Die mathematischen Theorien der Planetenbewegungen.** Leipzig, 1888, Verlag von J. A. Barth. Preis 9 Mk.

Der Verf. hat sich der höchst verdienstlichen Aufgabe unterzogen, die klassischen Arbeiten der grossen Mathematiker über das Problem der Bewegung der Himmelskörper in einem kurzgefassten Lehrbuche einheitlich zusammenzufassen, um dadurch die Anwendung der analytischen Mechanik auf die Astronomie, das grossartigste Beispiel in der Natur, einer grossen Zahl von Mathematikern zugänglich zu machen, welche sich nicht mit dem Quellenstudium befassen können. Die meisten bisherigen Zusammenfassungen der Theorien der Planetenbewegungen sind mehr elementarer Natur, während das vorliegende Werk volle Wissenschaftlichkeit verfolgt und dabei zugleich die neuesten Untersuchungen mit berücksichtigt und die jetzt schwebenden Fragen kennzeichnet. Mit Recht dürfen wir daher dem Verf. zugestehen, mit diesem Lehrbuch eine Lücke in der bestehenden Literatur ausgefüllt zu haben.

Was den Inhalt selbst betrifft, so zerfällt derselbe in drei Abschnitte.

Der erste geht aus von dem Newton'schen Gravitationsgesetz und behandelt die Lösung des Problems zweier Körper, dem eine kurze geschichtliche Uebersicht folgt. Daran schliesst sich an das Problem der n Körper, für welches die allgemeinen Integrale aufgestellt werden. Die weiteren Untersuchungen werden wegen des symmetrischen Formelbaues nur auf das Problem der drei Körper ausgedehnt, darauf folgt noch die Behandlung einer Reihe specieller Fälle. Den Schluss bilden geschichtliche Notizen über das Problem der drei Körper.

In dem zweiten Abschnitte werden die allgemeinen Eigenschaften der Integrale einer näheren Betrachtung unterzogen. Den Ausgang hierzu bilden die Poisson'sche und die Lagrange'sche Formel mit ihrer Entwickelung für die Elemente der elliptischen Bahn der Planeten um die Sonne. Am Schlusse erhalten wir wieder einen geschichtlichen Ueberblick über den Inhalt des zweiten Abschnittes.

Der dritte Abschnitt umfasst die Theorie der Störungen. Zunächst wird unser Sonnensystem betrachtet als ein System von n Punkten, woran sich die Bahnen der Planeten um die Sonne anschliessen. Dies giebt den Anlass zu der Theorie der absoluten Störungen, für deren Berechnung sich verschiedene Formeln aufstellen lassen. Nachdem die analytischen Ausdrücke der Störungen ermittelt sind, wird zu der Variation der Elemente und einer angenäherten Integration der für diese aufgestellten Differentialgleichungen übergegangen. Unmittelbar darauf folgen die säcularen Werthe der Elemente und deren Variation, sowie eine Verbindung der Theorie der absoluten Störungen mit der Theorie der Variation der Elemente. Trotz dieser Störungen bleibt aber die Stabilität des Planetensystems erhalten, und ebenso wird die Unveränderlichkeit der grossen Axen nachgewiesen. Nach einer kurzen Geschichte der Störungstheorien macht der Verfasser noch einige Bemerkungen zu den am Schlusse beigefügten Tabellen, welche nach Leverrier und Newcomb für unser Planetensystem die numerischen Werthe der in der allgemeinen Theorie eingeführten Grössen enthalten.

Es ist wohl als sicher anzunehmen, dass sich dieses Werk bald eine grosse Zahl von Freunden erwerben wird, und wir sehen gern den weiteren Theilen entgegen, welche die Theorie der Rotation der Körper um ihren Schwerpunkt, die Theorie von Ebbe und Fluth, der Gestalt der Körper umfassen werden.

Nicht unerwähnt mag die vorzügliche Ausstattung des Werkes, insbesondere der übersichtliche und exacte Druck der Formeln bleiben.

B. Nebel.

C. Bohn, **Ueber Linsenzusammenstellungen** und ihren Ersatz durch eine Linse von vernachlässigbarer Dicke. Leipzig 1888, Verlag von B. G. Teubner.

In dem vorliegenden Werkchen wird die Lehre von der einer Linsenzusammenstellung äquivalenten einfachen Linse, welche Bilder derselben Art, Stellung und Grösse, wie die Zusammenstellung, aber an anderem Ort wie diese liefert, erweitert durch die Untersuchung über eine Linse, welche eine Bedingung mehr als die äquivalente erfüllt, nämlich die Bilder auch am richtigen Orte entwirft. Dabei ergiebt sich, dass die Brennweite dieser Ersatzlinse und die ihr anzuweisende Stellung mit der Gegenstandsweite sich ändern, dass der Ersatz nicht immer vollständig, zuweilen nur unvollständig, zuweilen gar nicht möglich ist.

In dem allgemeinen Theile wird ein Vergleich zwischen der Aequivalentlinse und der Ersatzlinse angestellt, wobei sich die Bedingungen ergeben, unter welchen die Aequivalentlinse zugleich Ersatzlinse werden kann. Nach Berechnung der Fundamentalpunkte werden die Bilder und deren Artänderung für die drei Gruppen von Linsenzusammenstellungen einer eingehenden Discussion unterzogen und dabei der Symptose besondere Aufmerksamkeit geschenkt. Indessen sind die gewonnenen mathematischen Ausdrücke keineswegs übersichtlich, so dass es angezeigt war, in dem „besonderen", weitaus grösseren Theile des Buches eine Reihe von Sonderfällen über den Abstand der Linsen für sich zu behandeln, wobei sich eine Menge interessanter Beziehungen, wie z. B. für die teleskopischen Systeme, ergeben. Durch sorgfältig durchgerechnete Zahlenbeispiele, welche in tabellarischer Form zusammengestellt sind, erhält man für die betreffenden Sonderfälle einen genauen Einblick in die Veränderungen, welche die verschiedenen Grössen, die Bilder und deren Art infolge einer zunehmenden Gegenstandsweite erleiden. Gleichzeitig ergeben sich hierbei die Grenzen, innerhalb welcher eine Ersatzlinse überhaupt möglich ist. — Wenn auch die Ersatzlinse für die praktischen Bedürfnisse von keiner so grossen Bedeutung ist, wie die Aequivalentlinse, so gewährt sie doch manchen wünschenswerthen Aufschluss, weshalb das vorliegende Buch nur bestens empfohlen werden kann.

B. Nebel.

The elastical researches of Barré de Saint-Venant (Extract from Vol. II of Todhunter's History of the theory of Elasticity) by K. Pearson. Cambridge, Universitätsdruckerei. 1889.

Den vorliegenden Band müssen wir gleichsam als einen Theil des 2. Bandes von Todhunter's Geschichte der Elasticitätstheorie betrachten; er trägt seinen Titel zu Ehren von Saint-Venant, welcher innerhalb 35 Jahren zahlreiche Untersuchungen auf diesem Gebiete geliefert und Anderen dadurch Anregung gegeben und neue Ideen geweckt hat. Somit darf Saint-Venant mit Recht als Repräsentant in diesem Zweige der Wissenschaft während des genannten Zeitraumes bezeichnet werden. Seine Untersuchungen, welche sich durch Schärfe und Klarheit auszeichnen, sind insofern von grosser Bedeutung, als sie neben der Theorie auch der Praxis Rechnung tragen. Vervollständigt werden dieselben durch die Arbeiten seiner Zeitgenossen, so dass wir es wirklich mit einer Geschichte zu thun haben. Gerechtfertigt wird auch die Herausgabe dieses Sonderbandes dadurch, dass nach dem ursprünglichen Plane von Todhunter nur zwei Bände: die Theorie und die Geschichte der Elasticität in Aussicht genommen waren, wornach sich eine Reihe wichtiger Abhandlungen weder in dem einen, noch in dem andern Bande unterbringen liessen. Sicher hätte Todhunter seinen Plan noch geändert, wäre er nicht zu früh durch den Tod abberufen worden. In richtiger Beurtheilung der Verhältnisse ist der Verfasser von dem ursprünglichen Gedanken abgewichen, was nur im Interesse des ganzen Werkes sein kann, denn nunmehr ist dasselbe bis auf die neueste Zeit ausgedehnt.

B. Nebel.

L. Mann, **Der Feuerstoff.** Sein Wesen, seine bewegende Kraft und seine Erscheinungen in der unorganischen und organischen Welt. Berlin 1888, Verlag von H. Steinitz. Preis 2 Mk.

Das vorliegende Werkchen zerfällt in zwei Abschnitte, von welchen der erste die moderne Potentialtheorie umfasst. Der Verfasser sucht darin die Hinfälligkeit derselben nachzuweisen, indem er dabei eingehender behandelt die Massenanziehung und den Aether, die Messung der Kraft, die potentielle Energie, die relativen Bewegungen, die kinetische Wärmetheorie. Als Ersatz dafür denkt er sich einen Feuerstoff, welcher die intramolecularen Räume ausfüllt und durchströmt. Dem Wesen und den Wirkungen dieses Feuerstoffes ist der zweite Abschnitt gewidmet. Ausgehend von der Gestalt und räumlichen Lagerung der Atome, kommt der Verf. auf das Wesen des Feuerstoffes, welchem die merkwürdige Eigenschaft zugeschrieben wird, dass er in verschiedenen Aggregatzuständen existiren kann. Den Schluss bilden die Kräfte des Feuerstoffs in der unorganischen Welt und die Erscheinungen des Feuerstoffs in der organischen Welt. So eigenthümlich uns auch dieser zweite Abschnitt berühren mag, so anregend wirkt doch der erste, indem er gleichsam anfeuert, selbst Kritik an den vorhandenen Theorien auszuüben.

B. Nebel.

Daurer, **Uebungsbuch zum Studium der elementaren Mechanik.** Eine Aufgabensammlung für Lehrer und Studirende an mittleren und höheren Unterrichtsanstalten. Mit 52 Abbildungen. 141 S. Wien 1889, Verlag von A. Hölder. Preis 2 Mk. 40 Pf.

Vorliegende Aufgabensammlung soll dazu dienen, die Mechanik auch schon in den Mittelschulen einzuführen, damit der Schüler durch die praktischen Anwendungen für diese Wissenschaft erwärmt wird. Die Aufgaben selbst sind so gefasst, dass sie zum Nachdenken auffordern. In 506 Aufgaben werden die Lehren der Geo-, Hydro- und Aëromechanik eingeübt, deren Lösungen im Anhang zu finden sind. Zuletzt sind noch eine Reihe wünschenswerther Tabellen beigefügt.

Die gediegene Ausstattung und die klaren Figuren empfehlen schon äusserlich auf's Beste dieses Buch.

B. Nebel.

C. Pabst, **Leitfaden der theoretischen Optik** zum Gebrauche auf höheren Unterrichtsanstalten und beim Selbstunterricht. 100 S. Halle a. S. 1888, Verlag von H. W. Schmidt. Preis 1 Mk. 25 Pf.

Gewöhnlich versteht man unter „theoretischer Optik“ etwas ganz Anderes, als Das, was der Verf. hier zusammengestellt hat; er hätte sich mit einem bescheideneren Titel begnügen sollen.

Der Verf. glaubt, dass in den gebräuchlichen physikalischen Lehrbüchern die Optik meist nur experimentell dargestellt sei, weshalb er die mathematische Behandlung der wichtigsten Gesetze der Optik eines besonderen Buches würdigt und dasselbe mit zahlreichen Aufgaben ausstattet.

Mit Rücksicht auf die Anforderung der Gymnasien erstreckt sich das Werkchen nur auf die Gesetze der Reflexion, der Brechung und Dispersion des Lichts. Für die Anordnung und Behandlung des Stoffes können wir uns nicht erwärmen; das Ganze erinnert zu sehr an ein Geometriebuch: zuerst Lehrsatz, dann Beweis. Die Spiegel- und Linsengesetze gehören nach unserer Ansicht von einem Gesichtspunkte aus behandelt, wie es z. B. in Jochmann's Physik theilweise angedeutet ist, damit der Schüler das Ganze leichter übersehen kann, statt genöthigt zu sein, sich durch eine Masse von Lehrsätzen, Beweisen, Folgerungen u. s. w. durchzudrängen. Der Verf. ist eben ein Mathematiker und kein Physiker, sonst hätte er nicht in der vorliegenden todten Weise die Optik behandeln können. Die elegante graphische Bestimmung der Brechung in Prismen und Linsen scheint dem Verf. nicht bekannt zu sein.

B. Nebel.

A. Steinhauser, **Die Lehre von der Aufstellung empirischer Formeln mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate** für Mathematiker, Physiker und Techniker. Mit 15 Figuren. 292 S. Leipzig 1889, Verlag von B. G. Teubner.

Verf. theilt in dem Vorwort mit, dass er an keine seiner vielen literarischen Arbeiten mit solcher Lust gegangen sei, wie an die Bearbeitung dieses Werkes. Das Nämliche könnten wir bezüglich der Recension sagen; denn wer sich experimentell beschäftigt, ist vielfach genöthigt, seine Beobachtungen in empirischen Formeln auszudrücken. Die Anleitung hierzu musste man sich bisher meistens selbst geben oder sich mühsam aus anderen Arbeiten erwerben. Es ist deshalb ein grosses Verdienst des Verf., diesem zeitraubenden Uebelstand abgeholfen zu haben, wodurch er sich den Dank namentlich von Seiten der studirenden Jugend in hohem Maasse erworben hat.

Zahlreiche Beispiele dienen zur Erleichterung des Verständnisses, üben gleichzeitig die Anwendung der Formeln und gewähren einen Einblick über den Umfang der Rechnung.

Es würde zu weit führen, wollten wir auf den Inhalt näher eingehen, zumal schon der Titel hinreichend erwähnt, um was es sich hier handelt.

B. Nebel.

A. Dähne, **Neue Theorie der Flugbahn von Langgeschossen** auf Grund einer neuen Theorie der Drehung der Körper. 63 S. Berlin 1888, Verlag von R. Eisenschmidt.

Gleich von vornherein erklärt der Verf., dass das von ihm erzielte Resultat keineswegs eine Lösung des Problems der mathematischen Bestimmbarkeit der Flugbahn sei, im Gegentheil, dass es zeige, wie weit man noch von dem erwünschten Ziele entfernt sei.

In dem ersten Theile, welcher sich mit der Theorie der Drehung der Körper beschäftigt, geht der Verf. von der irrthümlichen Anwendung des Princips der Stabilität der Drehaxe aus, welche sich in directem Widerspruch mit dem Gesetz über die Zusammensetzung der Kräfte befindet, und erläutert dann eingehend das Gesetz vom Parallelogramm der Drehungen. Die Ursache der Ablenkung der Drehaxe rotirender Körper wird auf den Einfluss der rotirenden Luft zurückgeführt. Von den allgemeinen Beispielen, wie Cylinder, Kugel, Kreisel u. s. w., welche in dem ersten Theile in die Betrachtungen aufgenommen wurden, sieht der zweite Theil vollständig ab, indem hier ausschliesslich die Form des Langgeschosses in Erwägung gezogen wird. Nachdem die Einzelheiten der Geschossbewegung auf Grund der neuen Theorie erläutert sind, werden auch die bisherigen irrigen Anschauungen hervorgehoben, die zu fehlerhaften Folgerungen Anlass gegeben haben. Schliesslich wird die Vertheilung der Geschossmasse auf die bestehende Form der Kritik unterzogen und dadurch ein noch ideales Geschoss erdacht, dessen Axe von der Tangente der idealen Bahn möglichst wenig abweicht. — Eine präcisere, mehr mathematisch gehaltene Ausdrucksweise dürfte das Lesen an manchen Stellen erleichtern.

B. Nebel.

Bibliographie

vom 16. December 1889 bis 28. Februar 1890.

Periodische Schriften.

Sitzungsberichte der königl. preuss. Akademie d. Wissensch. Jahrg. 1890, I u. II. Berlin, G. Reimer. 12 Mk.

Abhandlungen d. math.-phys. Classe d. königl. bayer. Akademie d. Wissensch. 17. Bd. 1. Abth. München, Franz. 7 Mk.

Sitzungsberichte d. kaiserl. Akademie d. Wissensch. zu Wien. Math.-naturw. Classe, Abth. IIa. 98. Bd. 6. u. 7. Heft. Wien, Tempsky. 11 Mk. 60 Pf.

Die veränderlichen Tafeln des astronom. und chronolog. Theils des preuss. Normalkalenders für 1891. Herausgeg. v. W. Förster u. P. Lehmann. Berlin, statist. Bureau. 5 Mk.

Astronomischer Kalender f. 1890. Herausgeg. v. d. k. k. Sternwarte. Wien, Gerold. 1 Mk. 60 Pf.

Meteorologisches Jahrbuch f. d. Königr. Sachsen f. 1887 u. 1888. Herausgeg. v. P. Schreiber. Chemnitz, Bülz. 10 Mk.

Annalen d. physikal. Centralobservatoriums in Petersburg; red. v. H. Wild. Jahrg. 1888, Thl. I. Leipzig, Voss. 10 Mk. 20 Pf.

Journal für reine u. angewandte Mathematik, begr. v. Crelle, fortges. v. L. Kronecker. 106. Bd. 1. Heft Berlin, G. Reimer. compl. 12 Mk.

Mathematisch-naturwissenschaftliche Mittheilungen, redig. v. O. Böklen. 3. Bd., 2 Hefte. Tübingen, Fues. 3 Mk.

Monatshefte für Mathematik u. Physik. Herausgeg. v. G. v. Escherich u. E. Weyer. 1. Jahrg. 1890; 12 Hefte. 1. Heft. Wien, Manz. compl. 14 Mk.

Zeitschrift f. praktische Physik. Herausgeg. v. M. Krieg. 3. Jahrg. Magdeburg, Faber. compl. 6 Mk.

Annalen der Physik u. Chemie, begr. v. Poggendorff, fortges. v. G. Wiedemann. Jahrg. 1890, 1. Heft. Leipzig, Barth. compl. 36 Mk.

Beiblätter hierzu. 14. Bd. 1. Heft. Ebendas. 16 Mk.

Fortschritte der Physik im Jahre 1883, dargestellt von d. physikal. Gesellschaft in Berlin. 39. Jahrg. 2. Abth., enthalt. Physik des Aethers. 3. Abth., Physik der Erde. Red. v. E. Rosochatius u. B. Schwalbe. Berlin, G. Reimer. 38 Mk.

Zeitschrift für Vermessungswesen. Herausgeg. v. W. Jordan u. C. Steppes. 19. Jahrg. (1890), 1. Heft. Stuttgart, Wittwer. compl. 9 Mk.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft, red. v. E. Schönfeld u. H. Seeliger. 24. Jahrg., 2.—4. Heft. Leipzig, Engelmann. 6 Mk.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Festschrift der mathemat. Gesellschaft in Hamburg, anlässl. ihres 200jähr. Jubelfestes. 1. Thl.: Geschichte d. Gesellsch. v. 1690—1890. 2. Thl.: Wissenschaftliche Abhandlungen. Leipzig, Teubner. 6 Mk.

Lasswitz, K., Geschichte der Atomistik vom Mittelalter bis Newton. 1. Bd. Hamburg, Voss. 20 Mk.

Reine Mathematik.

Tafelmacher, A., Zum dritten Gauss'schen Beweise des Reciprocitätsgesetzes f. quadrat. Reste. Inaug.-Diss. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 1 Mk. 20 Pf.

Braun, H., Ueb. Curven ohne Wendepunkte. München, Ackermann. 2 Mk. 80 Pf.

Landsberg, O., Untersuchungen über die Gruppen einer fünffachen linearen Mannichfaltigkeit. (Inaug.-Diss.) Breslau, Preuss & Jünger. 1 Mk. 50 Pf.

Schick, J., Grundlagen einer Isogonalcentrik. Tübingen, Fues. 2 Mk.

Walther, F., Zur Theorie des Strahlensystems 1. Ordn., 1. Cl. und des linearen Strahlencomplexes. (Inaug.-Dissert.) Jena, Pohle. 1 Mk. 50 Pf.

Reich, A., Die Hauptlehren der Mathematik, mit einer Aufgabensammlung. Heft II, Planimetrie. Hanau, Reich. 2 Mk. 25 Pf.

Fenkner, H., Arithmetische Aufgaben für Gymnasien etc. Pensum v. Tertia u. Secunda. Braunschweig, Salle. 3 Mk.

Brockmann, J., Versuch einer Methodik zur Lösung planimetr. Constructionsaufgaben. Leipzig, Teubner. 1 Mk. 50 Pf.

Conradt, F., Lehrbuch der ebenen Trigonometrie. Ebendas. 2 Mk.

Winter, W., Stereometrie. Lehrb. u. Aufg. München, Ackermann. 1 Mk. 60 Pf.

——, Trigonometrie. Lehrb. u. Aufg. Ebendas. 1 Mk.

Angewandte Mathematik.

BESSEL, W., Untersuchungen über die Länge des einfachen Secundenpendels. Herausgeg. v. H. BRUNS. (Aus Ostwald's Classiker der exacten Wissenschaften.) Leipzig, Engelmann. 3 Mk.

BROSINSKY, Ueber die Vergrösserung des Erdschattens bei Mondfinsternissen. Inaug.-Dissert. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 2 Mk.

BUSCHBAUM, C., Untersuchungen über die Bahn d. Kometen 1886, IX (Barnard-Hartwig). Inaug.-Dissert. Ebendas. 2 Mk. 40 Pf.

THOMSEN, J., Anwendungen der Dynamik auf Physik u. Chemie. Autoris. Uebers. Leipzig, Engel. 6 Mk.

MATHIEU, E., Theorie des Potentials m. Anwend. auf Elektrostatik u. Magnetismus. Deutsch v. H. MASER. Berlin, Springer. 10 Mk.

LASKA, W., Sammlung von Formeln der reinen u. angew. Mathem. 3. Lief. 1. Abth. Braunschweig, Vieweg. 5 Mk.

Physik und Meteorologie.

SCHLESINGER, J., Ueber das Wesen des Stoffes und des allgemeinen Raumes. Antrittsrede. Wien, Hölder. 54 Pf.

WINKELMANN, A., Handbuch der Physik. (Aus der Encyklopädie der Naturwissensch.) 2. Lief. Breslau, Trewendt. 3 Mk. 60 Pf.

HELMHOLTZ, R. v., Die Licht- und Wärmestrahlung verbrennender Gase. Gekrönte Preisschr. Berlin, Simion. 4 Mk.

JULIUS, W., Die Licht- und Wärmestrahlung verbrannter Gase. Gekrönte Preisschr. Ebendas. 5 Mk.

GEIGEL, R., Die Frage nach der Schwingungsrichtung des polarisirten Lichts. Würzburg, Stahel. 2 Mk.

CLASSEN, J., Beobachtungen über die specifische Wärme des flüssigen Schwefels. Hamburg, Gräfe. 1 Mk. 20 Pf.

Berichtigung.

Zufolge eines Schreibfehlers steht in meiner Besprechung von „Bing's Kreiswinkel" (S. 18 der histor.-literar. Abth. von Heft 1 des laufenden Jahrg.) die irrthümliche Angabe

$$\tfrac{1}{2}(\sqrt{5}\quad 1) = 0{,}668035 \text{ statt } 0{,}618035.$$

Dies hat jedoch keinen Einfluss auf meine tadelnde Bemerkung, dass Herr Bing die sehr einfache und mathematisch genaue Construction der *sectio aurea* durch ein weniger genaues Verfahren ersetzen will, wozu noch ein besonderes Instrument erforderlich ist.

SCHLÖMILCH.

Historisch-literarische Abtheilung.

Beiträge zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter.

Von

Dr. J. L. HEIBERG

in Kopenhagen.

(Schluss.)

Für genauere Bestimmung der Art und des Umfanges der Contamination ist es ein wesentliches Hinderniss, dass die ursprüngliche Gestalt der in den Handschriften sehr verschieden überlieferten Adelhard-Uebersetzung noch nicht ermittelt ist. Wo *R* mit dem gedruckten Campanus stimmt, ist die Sache klar; schwieriger ist die Frage da, wo *R* weder mit Campanus, noch mit dem griechischen Text sich deckt. Doch können wir im Allgemeinen festhalten, dass diejenigen Sätze in *R*, welche mit dem Griechischen nicht stimmen, einer dem Compilator* vorliegenden Hds. der Adelhard-Uebersetzung entnommen sind, so dass *R* zu berücksichtigen sein wird, wenn die Reconstruction jener Uebersetzung in Angriff genommen wird. Hier werde ich die Sache von der andern Seite fassen und zunächst die der alten Uebersetzung nach dem Griechischen entnommenen Bestandtheile von *R* heraussuchen.

Zuerst gebe ich aber eine Uebersicht der Uebereinstimmung mit Adelhard-Campanus (von dem ich die Ausgabe Basel 1546 benutze) in den Hauptzügen.

Was ich aus Elem. III notirt habe, stimmt meist mit Campanus; so III, 15 (altero] alterutro *R*, recta] om. *R*, est] om. *R*, rectam] om. *R*, esse amplissimum] amplissimum esse *R*, unde — contingere] om. *R*),** III, 17 (linea recta] recta linea *R*, super lineam] que supra lineam est *R*), III, 18 (linea recta] recta linea *R*, esse necesse est] necesse est esse *R*), III, 21 (eius duos angulos] duos angulos eius *R*, necesse est] conuenit *R*), III, 22 (similes circuli] circuli similes *R*, rectam] om. *R*, assignatam] om. *R*, cadere] eandem *R*), III, 25 (das erstere seu] om. *R*, circumferentiam *R*, anguli

* Bei der grossen Fehlerhaftigkeit des Textes ist es wenig glaublich, dass der Schreiber von *R* selbst der Compilator sei.

** Kleine Abweichungen und Schreibfehler sind nicht berücksichtigt.

consistant] consistant anguli *R*, super aequos arcus eos] in arcus equos *R*), III, 29 (am Schlusse fügt *R* hinzu: res postulat), III, 30 (si uero] sin autem *R*, minore — semicirculo] om. *R*, recto minor] rectior minorum *R*; das Uebrige om. *R*), III, 31 (si circulum recta linea contingat, a contactu uero in circulum linea recta preter centrum ducatur, quosque angulos facit duos duobus angulis, qui in alternis portionibus circuli super arcus consistunt, sunt equales); wohl auch der verstümmelte III, 23: si circulorum similes portiones aequales esse necesse est.

In IV stimmen sämmtliche 16 Sätze mit Campanus (1 lineae rectae] recte linee, quae — existat] non maiori quam diametrus, rectam] om. 2 assignatum — triangulum] om. triangulo assignato] assignato triangulo, collocare] designare, 3 triangulum] om. 4 describere] designare, 5 illud sit] sit illud, orthogonium] oxogonium, oxygonium] ortogonium, 7 describere] designa, 9 quadratum assignatum, 10 duum] duorum, triangulum] triangulorum, existat] exis, 12 pentagonum circulum, vor designare: circulum, 13 pentagonum assignatum equilaterum etc., describere] om., 15 describere] designare, itaque] igitur, quod] quia, circuli cui inscribitur] om., 16 deinde] inde, circa] om., aequiangulum] equiangulum describere).

V hat 25 Sätze, wie bei Nasireddin Tusi (Campanus hat 34); die Definitionen stimmen mit Campanus in Zahl und Reihenfolge und, soviel ich weiss, auch im Wortlaut, so def. 4 (proportio*nis*), 5 (autem] om., proportionalitatem habere, sibi] om., addunt] sibi addunt), 6 (esse] om., multiplices aequales multiplicibus] multiplicationes itemque, aequalibus] om., uel additione] in additione, sumptae] om.), 7 (est una proportio), 9, 16 (eundem] earum, mediorum — summorum] medio numero relicto equalitatis extremitatis).

VI 33 Sätze (Campanus 32); es stimmen def. 1 (superficies *rerum*, dicuntur] sunt, aequales] equales sunt), 2 (mutuorum] mutorum, sunt] dicuntur; def. 3 om.), prop. 1 (superficierum] figurarum), 2 Anfang, 33 (= 32 Camp.; aequalibus] equalibus siue, angulos illos); mehr habe ich nicht notirt.

VII 39 Sätze, wovon 19—22 = Campanus 20—23. 20 Definitionen, die zum Theil mit Campanus stimmen, wie 13 productus uero dicitur qui ex eorum multiplicatione concrescit, zum Theil aber weder mit ihm, noch mit dem Griechischen, wie numerus impariter impar est quem cuncti impares connumerantes imparibus uicibus numerant; nicht bei Campanus finden sich die Definitionen von numerus quadratus, cubicus, superficialis, solidus, perfectus, numeri proportionales, superficiales siue solidi similes (*R* nr. 14 bis 20, im Griech. 19, 20, 17, 18, 23, 21, 22).

VIII 24 Sätze, Campanus 25.

IX 37 Sätze, Campanus 39. Prop. 19—20 = Campanus (19 eis tertius] tertius eis *R*, 20 conuenit vor inquirere *R*).

Nach IX steht fol. 175v—176r eine Einleitung zu X in drei Abschnitten; inc. quot sunt species principales aloge linee? XIII; weiter unten:

quare uocas illas alias V comites? Woher diese und die überschiessenden Definitionen in VII stammen, bleibt noch zu ermitteln; dass sie so wenig wie jene direct aus griechischer Quelle geflossen ist, zeigt schon die dialogische Form.

X hat 5 Definitionen, 103 Sätze (Campanus 107); 103 = Campanus 107.

XI hat nur 13 Definitionen wie Campanus; wie bei ihm und den Arabern fehlen die Definitionen der platonischen Körper. 36 = Campanus 39, 37 = Camp. 40 (cubi), 38 = Camp. 41 (corpora seratilia).

XII nur 15 Sätze wie Campanus.

XIII 17 Sätze (Campanus 18); 5—7 = Campanus.

XIV ohne die griechische Vorrede wie Campanus; unverkennbare Uebereinstimmung mit ihm zeigt folgende Stelle: ad explicandum quod ait Aristeus in libro sic intitulato: expositio scientie V figurarum nec non et Apollonius in dono secundo in proportionalitate figure 13 basium ad figuram 20 basium dicens etc. (des. tantorum assertio philosophorum rata constet atque incussa ueritate incussa subnixa). Der letzte Satz stimmt mit Camp. 3.

XV 5 Sätze mit den Nummern 1—4, 6 = Campanus 1—4 und 6 (5 ist also in *R* ausgefallen); der Wortlaut stimmt wesentlich (1 triangulas — designare] equilaterum componere; 2 triangulas atque aequilateras] equilateras triangulas, triangularium] triangularum, aequalium laterum] equilaterum; 3 triangularium] triangularum; 4 triangularium — aequilateratum] triangularum equalium laterum; 6 et] triangularum, atque — angulorum] om.).

Also ist für Elem. IV—XV gar nichts von der Uebersetzung nach dem Griechischen in *R* zu finden; dieser ganze Theil ist, wie fast das ganze III. Buch, aus arabischen Quellen geflossen. Aber auch in den Büchern I—II ist Manches von derselben Herkunft, wie eine Vergleichung mit Campanus zeigt. So die Definitionen der Drei- und Vierecke (vergl. oben), die sechste petitio* (vergl. oben), I, 22 (lineis rectis] rectis lineis, duae quaelibet] queque due, sint longiores] sunt maiores, lineis illis] rectis lineis sibi), 23 (cuilibet] quolibet), 24 (maior erit] erit maior), 39 (et] om.), 42, II def. 2 (diameter] diametros, consistere dicuntur] dicuntur contineri, eorum] horum, una] unum); II, 1 (linee] om., una] una indiuisa et alia, alterius] unius earum, alteram] altera, iis] his, particulatim diuisae] diuise particulatim), 13. Eine Einwirkung zeigen:

I, 5 Schluss: cuius trianguli si illa equalia latera directe producantur, angulos quoque, qui sub basi erunt, equales esse necesse est;**	Campanus: quod si eius duo latera directe protrahantur, fient quoque sub basi duo anguli inuicem aequales;

* In den „communes animi conceptiones" finden sich Spuren nicht nur von den bei Campanus als 7, 8, 9 aufgeführten, sondern auch — zwischen 8 und 9 — von den im Commentar des Campanus erwähnten. S. unten.

** Doch ist dies vielleicht anders zu erklären. S. unten.

I, 19 omnium triangulorum maior angulus maiori lateri opponitur;	Campanus: omnis trianguli maior angulus longiori lateri oppositus est;
II, 4 Zusatz: hinc igitur constat in omni quadrato duas superficies quas diagonalis per medium diuidit ambas esse quadratas;	ex hoc manifestum est, quod in omni quadrato duae superficies quas diameter secat per medium sunt ambae quadratae;
III, 13 In circulo que recte linee equalibus spatiis distant equaliter a centro distare et si eque a centro distiterint equales esse oportet;	rectae lineae in circulo si fuerint aequales eas a centro aequidistare et si a centro aequidistirint aequales esse necesse est.

In III, 11, die sonst mit *q* stimmt, ist III, 12 des griechischen Textes mit einbegriffen (si duo circuli *seu ab exteriore uel ab interiore se parte* contingant), wie bei den Arabern (Euclidis opp. V p. XCVII) und stillschweigend bei Campanus (si circulus circulum contingat, linea etc.).

Der Rest von Elem. I—II in *R* stimmt im Wesentlichen mit der Boetius-Geometrie des Erlangensis; in III, 10—12, welche dort fehlen, ist die Aehnlichkeit mit *q* Bamb. nicht zu leugnen.* Da *R* also einerseits Sätze hat, die Erlang. nicht hat, andererseits oft, wo *q* Bamb. fehlen, den Text des Erlang. giebt, ist eine vollständigere gemeinsame Quelle anzunehmen. Nun enthält aber *R* ausser dem schon erwähnten Stoffe einige Sätze, die weder in Erlang., noch in *q* Bamb. stehen (wie I, 9; II, 2, 7, 8); da diese überschiessenden Sätze mit Campanus nichts gemein haben, dagegen mit dem griechischen Text stimmen und dieselbe Terminologie zeigen, als die Bruchstücke in Erlang. *q* Bamb., müssen wir darin weitere, jener gemeinsamen Quelle entnommene Ueberreste der griechisch-lateinischen Uebersetzung sehen; *R* ist also bei der Restitution derselben herbeizuziehen.

Bei der Wichtigkeit dieser Uebersetzung für die Ueberlieferungsgeschichte des mathematischen Wissens im Mittelalter und bei der Zerstreutheit der Reste halte ich es für zweckmässig, eine Zusammenstellung von Allem folgen zu lassen, was bis jetzt aufgefunden ist. Ich bediene mich dabei folgender Hilfsquellen:

cod. Erlangensis — *E* — nach Friedlein's Collation,
„ Monacensis 560 — *q* — „ „ „ und meinen Notizen,
„ „ 13021 — *R* — nach meinen Notizen,**
„ Gudianus — *G* — nach der Collation in den „Schriften der römischen Feldmesser",
„ Bambergensis — *b* — nach derselben Collation.

---

* Mit *q* Bamb. stimmt auch der Zusatz am Schlusse der κοιναὶ ἔννοιαι: nemo resistere ullo tempore parti conuenienti poterit.

** *R* ist nicht vollständig collationirt; nur positive Angaben gelten. Kleinigkeiten und bedeutungslose Schreibfehler sind überhaupt nicht berücksichtigt.

Da die Uebersetzung unzweifelhaft aus dem Griechischen stammt, habe ich diejenige Fassung, welche dem griechischen Wortlaut am nächsten kommt, in den Text aufgenommen; der Apparat giebt dann über die allmälige Umgestaltung Auskunft, sowie über das gegenseitige Verhältniss der Textesquellen. Am reinsten ist *G*, der dem Griechischen meist Wort für Wort folgt; etwas geringer und unter sich eng verwandt *Bq*, am schlechtesten (wegen Interpolationen und sinnlosen Schreibfehlern) bei Weitem *E*.

Erst muss ich noch eine Frage berühren, die sich aufdrängt, wenn man Campanus mit unserer Uebersetzung vergleicht. Es ist nämlich eine gewisse Uebereinstimmung im lateinischen Ausdruck nicht zu verkennen, nicht besonders zwischen Campanus und *R*, sondern eher zwischen ihm und *q*. Dass diese Uebereinstimmung nicht zufällig ist, beweist folgende Zusammenstellung (Elem. IV, 1):

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ μὴ μείζονι οὔσῃ τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου ἴσην εὐθεῖαν ἐναρμόσαι.	Intra datum circulum date recte linee non maiori quam diametrus equam lineam coaptare (*R*).	Intra datum circulum date recte linee *que diametro minime maior existat* equam rectam lineam coaptare (*q*).	Intra datum circulum datae lineae rectae *quae diametro minime maior existat,* aequam rectam lineam coaptare (Campanus).

Andere auffallende Uebereinstimmungen findet man z. B. II def. 2; III, 32 (= 31 Camp.); IV def. 2 (perhibetur).

Es ist also sicher, dass im gedruckten Campanus die alte griechisch-lateinische Uebersetzung benutzt ist; zu untersuchen bleibt noch, ob die Handschriften des Campanus und des Adelhard an den bezeichneten Stellen bedeutendere Varianten bieten. Erst eine solche Untersuchung kann feststellen, ob der Herausgeber oder Campanus selbst oder gar Adelhard jene Uebersetzung herbeigezogen hat. Bei den bedeutenden Abweichungen der Adelhard-Handschriften unter sich ist die Möglichkeit auch nicht ausgeschlossen, dass die Uebersetzung Gerhard's von Cremona in den Handschriften mit der Adelhard'schen verwechselt oder contaminirt worden sei. So stimmen die obenerwähnten Zusätze zu den κοιναὶ ἔννοιαι in der Form weder mit dem gedruckten Campanus, noch mit dem von Weissenborn, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 1880, Suppl. S. 147 flgg. mitgetheilten Adelhard-schen Text, während der Inhalt derselbe ist. In *R* folgt nämlich auf die vier κοιναὶ ἔννοιαι der Boetius-Geometrie:

si fuerint duo, quorum utrumque unius eiusdemque duplum fuerit, utrumque eorum alteri equale erit. Si aliqua res alicui rei superponatur appliceturque ei, nec excedat altera alteram, ille sibi inuicem sunt equales. Si duo equalia ad quodlibet tertium comparentur, ambo illa comparata aut eque maiora aut eque minora aut equalia eidem sunt. Quanta proportione se habet quidlibet ad aliud, tanta proportione se habet aliquid tertium ad aliud quartum; nam multitudo in infinitum crescit; magnitudo vero e contrario et similiter decrescit. Omne totum sua parte maius est.

Die Verwandtschaft mit Adelhard-Campanus ist augenscheinlich; Manches stimmt sogar wörtlich; aber dennoch ist der Unterschied zu gross, um die eine Lesart als Variante der andern betrachten zu können. Es scheinen vielmehr zwei verschiedene Bearbeitungen desselben Originals vorzuliegen. Da aber diese Zusätze mit dem griechischen Text nichts zu thun haben, muss die Quelle in den arabischen Uebersetzungen gesucht werden, und über sie wissen wir leider gar zu wenig. Wir haben uns also auf einem weiten Umwege wieder der Ansicht von Meyer-Curtze genähert, aber sie hat doch eine wesentlich andere Gestalt angenommen, und ich hoffe, dass der zurückgelegte Weg überhaupt dazu beigetragen hat, Art und Umfang der vorliegenden Frage klarer zu stellen.

I. Buch.

1. Punctum est, cujus pars nulla est.
2. Linea uero praeter latitudinem longitudo.
3. Lineae uero fines puncta sunt.
4. Recta linea est, quae ex aequo in suis punctis iacet.
5. Superficies uero est, quod longitudinem ac latitudinem solas habet.
6. Superficiei uero fines lineae sunt.
7. Plana superficies est, quae ex aequo in suis rectis lineis iacet.
8. Planus angulus est duarum linearum in plano inuicem sese tangentium et non in directo iacentium ad alterutram conclusio.
9. Quando autem, quae angulum continent lineae, rectae sunt, tunc rectilineus angulus nominatur.
10. Quando autem recta linea super rectam lineam stans circum se angulos aequos sibi inuicem fecerit, rectus est uterque aequalium angulorum, et quae superstat linea, super eam, quam insistit, perpendicularis uocatur.
11. Obtusus angulus est maior recto.
12. Acutus autem minor recto.
13. Figura est, quod sub aliquo uel aliquibus terminis continetur.
14. Terminus uero, quod cuiusque est finis.

---

1) punctus *q*. 2) lineae *Bq*. sine latitudine *E*. longitudo est *E*. 3) uero] om. *B*. puncti *G*. 4) ex aequo] aequaliter *E*. punctis iacet] protenditur punctis *E*. 5) est] om. *BG*. longitudine latitudineque *E*, latitudinem *q*, latitudinem ac longitudinem *B*. solam *q*. solas habet] censetur *E*. 6) uero] autem *E*. finis *q*. 7) est] dicitur *E*. aequaliter in rectis 'suis lineis continetur *E*. 9) in] om. *Bq*. collusio *q*. 12) quando autem] cum vero *E*, quando *G*. lineam] om. *G*. 12) aequos sibi invicem fecerit angulos *E*. 13) fecerint *q*. est] om *G*. 14) et — insistit] et linea super rectam lineam stans *E*. perpendicularis] superpendicularis *B*, stans superpendicularis *q*. 15) dicitur *E*. 16) maior recto est *E*. 17) autem] angulus *B*, autem angulus *E*, angulus est *q*. recto minor est *E*. 19) uero est *Bq*. est] om. *q*.

15. Circulus est figura plana, quae sub una linea continetur, quae uocatur circumducta, ad quam ab uno puncto eorum, quae intra figuram sunt posita, omnes, quae incidunt, rectae aequae sibi inuicem sunt.
16. Hoc uero punctum centrum circuli nominatur.
17. Diametrus circuli est recta quaedam linea per centrum ducta et ab utraque parte a circumferentia circuli terminata, quae in duas aequas partes circulum diuidit.
18. Semicirculus uero est figura plana, quae sub diametro et ea, quam diametrus adprehendit, circumferentia continetur.
19. Rectilineae figurae sunt, quae sub rectis lineis continentur, trilatera quidem figura, quae sub tribus rectis lineis continetur, quadrilatera uero, quae sub quattuor, multilatera uero, quae sub pluribus quam quattuor lateribus continetur.
20. Aequilaterum igitur triangulum est, quod tribus aequis lateribus clauditur, isosceles uero, quod duo tantummodo latera habet aequalia, scalenon uero quod tria latera inaequalia possidebit.
21. Amplius trilaterarum figurarum ortogonium, id est rectiangulum, quidem triangulum est, quod habet angulum rectum, amblygonium uero, quod est obtusiangulum, in quo obtusus angulus fuerit, oxygonium uero, id est acutiangulum, in quo tres anguli sunt acuti.
22. Quadrilaterarum uero figurarum quadratum uocatur, quod est aequilaterum atque rectiangulum, parte uero altera longius, quod rectiangulum quidem est, sed aequilaterum non est, rhombos uero, quod aequilaterum quidem est, sed rectiangulum non est, rhomboides autem, quod in contrarium conlocatas lineas atque angulos habet aequales, quod nec rectis angulis nec aequis lateribus continetur; praeter haec autem omnes quadrilaterae figurae trapezia calonte, id est mensulae, nominentur.

---

1) circulus vero est figura quaedam *E.* quae — 2) circumducta] quae uocatur circumducta et sub una linea continetur *Bq*, et circumducta et sub una linea contenta *E.* ab uno] a *E.* eorum quae] quod *E.* 3) sunt posita] posita sunt *q*, positum est *E.* rectae lineae *EBq.* sunt invicem sibi aequales *E.* 5) diametrum *G*, diametrus autem *E.* quaedam recta *E.* 6) a] ad *GB*, in *E*, om. *q.* circumferentiam *GB.* partes aequas *E.* 10) rectilinea *B*, rectae lineae *Eq.* figura est *B.* continetur *B.* 11) quae] est quae *GE.* tribus] duabus *Bq.* 12) uero] autem *E.* multilatere *q.* multilatera itaque figura est *E.* 15) continetur *E.* hisoceles *q*, isokeles *B.* 16) continet inaequalia *E.* 17) amplius — figurarum] om. *B.* hortogonium *G*, ortogoneum *B.* 18) rectum] undique rectum *Bq.* ampligonium *Bq.* 19) uero] enim *E.* est] latine *E*, habet *q.* obtusum angulum *GBq*, obtusiangulum dicitur *E.* in — fuerit] est quod obtusum habet angulum *E.* 20) acutum angulum *G*, acutiangulum est *E.* sunt anguli *E.* 21) quadrilaterum *B.* 22) uero] om. *E.* longius] longius uero est *E.* 23) rombos *EBq.* uero est *E.* 24) romboides *BE*, rhombo id est *G*, rombon id est *q.* 25) autem] om. *Bq.* 26) quod nec] id autem nec *Gq*, non autem *E.* 27) figurae] om. *E.* trapizea *q*, trapeziae *E.* calonte] *G*, om. *EBq.* 28) nominantur *EB.*

23. Parallelae, id est alternae, rectae lineae nuncupantur, quae in eadem plana superficie conlocatae atque utrimque productae in neutra parte concurrent.

Ethimata, id est petitiones, sunt quinque. petatur

1. ab omni puncto in omne punctum rectam lineam ducere;
2. item definitam lineam in continuum rectumque producere;
3. item omni centro et omni spatio circulum designare;
4. et omnes rectos angulos aequos sibi inuicem esse;
5. et si in duas rectas lineas linea incidens interiores et ad easdem partes duos angulos duobus rectis fecerit minores, productas in infinitum rectas lineas concurrere ad eas partes, quibus duobus rectis anguli sunt minores.

Cynas etnyas, id est communes animi conceptiones, hae:

1. Quae eidem sunt aequalia, et sibi inuicem sunt aequalia;
2. et si ab aequalibus aequalia auferantur, quae relinquuntur, aequalia sunt;
3. et si aequalibus addantur aequalia, tota quoque aequalia sunt;
4. et quae sibimet conueniunt, aequalia sunt.

1.

Super datam rectam lineam terminatam triangulum aequilaterum constituere.

sit data recta linea terminata *ab*. oportet igitur super eam quae est *ab* triangulum aequilaterum constituere. et centro quidem *a* spatio uero *b* circulus scribatur *bced*, et rursus centro *b* spatio autem *a* circulus scribatur *acfd*, et ab eo puncto quod est *c*, quo se circuli diuidunt, ad ea puncta quae sunt *a*, *b* adiungantur rectae lineae *ca*, *cb*.

---

1) parallilae *G*. quae] qui *G*. 2) superficiae *G*. atque utrimque productae] om. *E*. 3) concurrunt *E*. 4) Ethimata id est] *G*, om. *BqE*. petitiones vero, sive postulata, ut veteribus placuit, dicantur, quinque sunt *E*. petatur] prima ut *E*. 5) omne] omnem *GE*. recta linea ducatur postulat *E*. 6) secunda ut definita recta linea *E*. producatur ammonet *E*. 7) item] tertia *E*. designare praecipit *E*. 8) et] quarta *E*. sibi invicem aequos esse vult *E*. aequos sibi] quos ibi *q*. 9) et] item *Bq*, quinta autem *E*. in] inter *B*. interius sit *B*. et] om. *GB*. ad easdem partes] om. *E*. eas *G*. 10) rectas lineas in infinitum productas ad eas partes in quibus duo interiores anguli duobus rectis minores sunt concurrere iubet *E*. in] om. *q*. 11) partes] om. *Bq*. duo recti *B*. angulis *q*. 13) Cynas etnyas id est] *G*, uero *Bq*, om. *ER*. communes igitur *E*, communes uero *R*. hae] sunt haec *Bq*; sunt quae a Graecis kenas ethnias (et hynas *R*) uocantur *ER*. 14) quae] aequae *G*, om. B, cum spacia et interualla *ER*. eidem] idem *GE*, quidem *B*, sint eidem *R*. sunt] om. *R*. et] sunt et *E*. 15) auferatur *q*. 17) aequalia addantur *E*. 18) et quae] quaecunque *R*. sibimet] *GR*, sibimet ipsi *B*, sibimet ipsis *Eq*. conuenit animo finitionis *q*. omnino aequalia *R*. sunt] *GREq*, esse *B*. 20—26] om. *Bq*. 20) super] *G*, *E* p. 390, 6; supra *E* p. 380, 2, *R*. 22—26] om. *E* p. 380, *R*. 22) rectilinea *E* p. 390. 25) *afcd* *E*.

quoniam igitur *a* punctum centrum est *bced* circuli, aequa est *ab* ei quae est *ac*. rursum quoniam *b* punctum centrum est *acfd* circuli, aequa est *ab* ei quae est *bc*. sed et *ab* ei quae est *ca* aequa esse monstrata est; et *ac* igitur ei quae est *bc* erit aequalis. tres igitur quae sunt *ca*, *ab*, *bc* aequae sibi inuicem sunt. aequilaterum igitur est *cab* triangulum; et constitutum est supra datam rectam lineam terminatam eam quae est *ab*; quod oportebat facere.

2.

Ad datum punctum datae rectae lineae aequalem rectam lineam collocare.

sit quidem datum punctum *a*, data uero recta linea *bc*. oportet igitur ad punctum *a* rectae lineae *bc* aequam rectam lineam collocare. adiungatur enim ab *a* puncto ad *b* punctum recta linea ea quae est *ab*, et constituatur super *ab* rectam lineam triangulum aequilaterum quod est *dab*, et eiciantur in rectum *da*, *db* rectae lineae ad *ag* et *bm*, et centro quidem *b* spatio autem *bc* circulus scribatur *cfe*, et rursus centro *d* spatio autem *df* circulus describatur *fkl*. quoniam igitur *b* punctum centrum est *cfe* circuli, aequa est *cb* ei quae est *bf*. rursus quoniam *d* punctum centrum est *flk* circuli, aequa est *dl* ei quae est *df*; quarum quidem *ad* ei quae est *db* aequa est; aequilaterum enim triangulum est id quod est *dab*; reliqua igitur *al* reliquae *bf* existit aequalis. sed et *bf* ei quae est *bc* aequa esse monstrata est, et *bc* ei quae est *al* erit aequalis. ad datum igitur punctum id quod est *a* datae rectae lineae ei quae est *bc* aequa locata est ea quae est *al*; quod oportebat facere.

3.

Duabus inaequalibus rectis lineis datis a maiore minori aequam rectam lineam abscidere.

sint datae duae rectae lineae inaequales *ab*, *cd*, et sit maior *ab*. oportet igitur a maiore *ab* minori *cd* aequam lineam abscidere. collocetur enim ad *a* punctum ei quae est *cd* aequa ea quae est *ae*, et centro *a* spatio uero *ae* circulus describatur *egf*. quoniam igitur *a* punctum centrum est *egf* circuli, aequa est † igitur *ae* ei quae est *cd* erat aequalis, et *cd* ei quae est *ag* erit aequalis. duabus igitur datis rectis lineis inaequalibus eis quae sunt *ab*, *cd*, a maiore quae est *ab* minori quae est *cd* aequalis abscisa est ea quae est *ag*; quod oportebat facere.

1–7) om. *BqE* p. 380, *R*. 1) aequam *G*. 2) rursus *E*. est centrum *E*. 11–24] om. *E* p. 380, *BRq*. 13) ea] om. *E* p. 391. 17) *df*] *fd E*. 19) aequa est] *E*, aequa *G*. 21) reliquae] reliquis *G*, reliquiis *E*. existat *G*. 26) rectis lineis inaequalibus *E* p. 380, *E* p. 392. aequalibus *B*. datis] propositis *E* p. 392. minori] minore *q*, minorem *B*, *E* p. 380, *E* p. 392. aequa *G*. 27) rectam] om. *G*, *E* p. 392. 28—35] om. *Bq*, *E* p. 380, *R*. 29) aequam] minorem *E* p. 392. 30) aequa] a qua *E*. 32) aequa est igitur] et *E*. 35) *ag*] *cd ag E*. facere] hic desin. *G*.

4. Si duo triangula duo latera duobus lateribus habent aequa alterum alteri et angulum angulo habent aequum eum, qui sub aequalibus rectis lineis continetur, et basim basi aequam habebunt, et triangulum triangulo aequum erit, et reliqui anguli reliquis angulis erunt aequales alter alteri, sub quibus aequalia latera subtenduntur.

5. Si triangulus aequalia latera habeat, qui sub eius basi anguli sunt, aequales alter alteri sunt, et productis aequalibus lineis qui sub basi sunt anguli aequales utrique erunt.

6. Si trianguli duo anguli aequi sibimet inuicem sint, et quae sub aequalibus angulis subtenduntur latera sibi inuicem erunt aequalia.

7. Super eandem aequalem rectam lineam duabus eisdem rectis lineis aliae duae rectae lineae altera alteri nullo modo constituentur ad aliud atque aliud punctum ad easdem partes eosdem fines aequalibus rectis lineis possidentes.

8. Si duo trianguli duo latera duobus lateribus aequa possideant alterum alteri et basim basi habeant aequam, et angulum angulo habebunt aequalem, qui sub aequalibus rectis lineis continetur.

9. Datum angulum in duas aequales diuidere partes.

10. Datam rectam lineam terminatam in duas aequales diuidere partes.

11. Et datae rectae lineae ab eo, quod in ea est, puncto rectam lineam secundum rectos angulos eleuare.

12. Et super datam rectam lineam infinitam ab dato puncto, quod ei non inest, perpendicularem. rectam lineam ducere.

13. Quocumque super rectam lineam recta consistens angulos fecerit, aut duos rectos faciet aut duobus rectis reddet aequales.

14. Si ad aliquam rectam lineam atque ad eius punctum duae rectae lineae non in eandem partem ducantur et circum se angulos duobus rectis fecerint aequos, in directum sibi eas lineas iacere necesse est.

15. Si duae rectae lineae sese diuidant, ad uerticem angulos sibi inuicem facient aequos.

16. Omnium triangulorum exterior angulus utrisque interioribus et ex aduerso angulis constitutis maior existit.

---

1) trianguli *E*. duobus] duo *B*. alterum] corr. ex laterum *B*. 2) habent aequum] habente cum *Bq*. eum] eos *B*, eis *q*. 3) continentur *q*. basim] basi *B*, basis *q*. basi] basim *Bq*. 6—8] om. *Bq*, hab. *ER*. 6) sub] supra *R*. basim *R*. anguli] *R*, trianguli *E*. 7) et] von hier ab anders *R*. productis] om. *E*. qui sub] et *E*. basi sunt] basibus et *E*. 8) angulis *E*. aequalibus *E*. 9) aequae *Bq*. 10) sunt *E*. aequales *Bq*. 11) et super *E*. 12) altera] scr. aequae altera. 13) easdem *B*. aequali rectae lineae *E*. 15) si] om. *Bq*. possident *q*. 16) aequa *Bq*. angulo angulum *E*. 17) aequale *Bq*. 18) *R*, in triangulo *BEq*. 19) lineam rectam *B*. in] om. *q*. 20) ea] eo *Eq*. 21) eleuare non disconuenit *ER*. 22) et] om. *E*. supra *B*. datam] datam vero *E*. lineam rectam *E*. 23) inest] inem *q*. ducere oportet *ER*. 24) quaecumque *ER*. super] per *Bq*, recta linea super *R*. recta] om. *R*. 25) duabus rectis lineis *B*. 26) aliquam] aequam *E*. 27) duabus *B*. 28) aequis *Bq*.

17. Omnium triangulorum duo anguli duobus rectis angulis sunt minores omnifariam sumpti.

18. Omnium triangulorum maius latus sub angulo maiore subtenditur.

19. Omnium triangulorum maior angulus sub latere maiore protenditur.

20. Omnium triangulorum duo latera ceteris maiora sunt in omnem partem sumpta.

21. Si in uno quolibet trianguli latere a finibus lateris duae rectae lineae interius constituantur angulum facientes, quae constituuntur reliquis quidem trianguli duobus lateribus sunt minores, maiorem uero angulum continebunt.

22. Datis tribus rectis lineis quae sunt aequales tres in eo qui datus est triangulo rectas lineas oportet constituere quarum duo latera ceteris maiora oportet esse omnifariam sumpta propter hoc quod omnium triangulorum duo latera ceteris fortiora sunt in omnem partem suscepta.

23. Ad datam rectam lineam et datum in ea punctum dato rectilineo angulo aequales rectilineos angulos collocare.

24. Si duo triangula duo latera duobus lateribus aequalia habuerint alterum alteri, quod angulum angulo maiorem habebit eum, qui sub aequali recta linea continetur, ita et basim basi maiorem habebit.

25. Si duo triangula duo latera duobus lateribus aequalia habuerint alterum alteri, quod basim basi maiorem habebit, et angulum angulo maiorem habebit eum, qui sub aequalibus rectis lineis continetur.

26. Si duo trianguli duos angulos duobus angulis habuerint aequos alterum alteri, unumque latus uni lateri sit aequale, siue quod aequis adiacet angulis, seu quod sub uno aequalium subtenditur angulorum, et reliqua latera reliquis lateribus habebunt aequa alterum alteri et reliquum angulum aequalem reliquo angulo possidebunt.

27. Si in duas rectas lineas recta linea incidens alternatim angulos fecerit aequos, rectas lineas alternas esse necesse est.

28. Si in duas rectas lineas linea incidens exteriorem angulum interiori et ex aduerso angulo constituto reddat aequalem, rectas lineas sibi alternas esse conueniet.

---

1) minoris *B*. 4] *E*, om. *Bq*. 5–6] *ER*, om. *Bq*. 6) sumpta] *R*, suscepta *E*. 9) duobus] om. *Bq*. minores] maiores *E*. 11—15] *E* (corrupt), om. *Bq*. 16) rectilineo] recto lineo *Bq*. 17) rectilineos] rectilineae *Bq*. collocare necesse est *E*. 18–23] *E*, om. *Bq*. 19) scr. sub aequalibus rectis lineis continetur, id et. 24) triangula *q*. 25) siue] sibi *Bq*, siue id *E*. 26) dequalium *q*. tenditur *E*. 27) alterum alteri] latera *B*, altera alteri *q*, altera alteris *E*. 29) incidens] incidens quod *Bq*. angulos] sit et hos angulos *Bq*. fecerint *B*. 31) in] om. *q*. interior *Bq*. 32) lineas] lineas aequales *E*. sibi] sub *BEq*.

29. Si in duas alternas inter se rectas lineas recta linea inciderit, alternos angulos inter se aequales esse, et qui deintus et contra similiter aequales esse, qui uero deintus et in eisdem partibus lineae sunt, duobus rectis angulis aequales esse necesse est.

30. Alternae uni iterum ipsae rectae lineae aduersus se ipsas erunt altera alteri.

31. Per datum punctum datae rectae lineae alternam rectam lineam designare.

32. Omnium triangulorum exterior angulus duobus interius et ex aduerso constitutis angulis est aequalis, interiores uero trianguli tres duobus rectis angulis sunt aequales.

33. Quae aequas et alternas rectas lineas ad easdem partes rectae lineae coniungunt, ipsae quoque et alternae sunt et aequales.

34. Eorum spatiorum, quae alternis lateribus continentur, quae parallelogramma nominantur, ex aduerso latera atque anguli constituti sibi inuicem sunt aequales, eaque diametrus in duo aequa partitur.

35. Omnia parallelogramma, quae in eisdem basibus et in eisdem alternis lineis fuerint constituta, sibi inuicem probantur aequalia.

36. Iam parallelogramma in basibus aequalibus et in eisdem alternis lineis constituta aequalia esse necesse est.

37. Aequa sibi sunt cuncta triangula, quae in aequis basibus et in iisdem alternis fuerint constituta.

38. Triangula, quae in coaequalibus basibus et in eisdem alternis lineis sunt constituta, aequalia sibi inuicem sunt.

39. Aequa triangula, quae in eadem basi et in easdem partes fuerint constituta, in eisdem quoque alternis lineis esse pronuntio.

40. Aequa triangula in aequis atque in directum positis basibus constituta et in eisdem partibus, et in eisdem quoque alternis esse necesse est.

41. Si parallelogrammum triangulumque in eadem basi atque in eisdem alternis fuerint constituta, parallelogrammum triangulo duplex esse conueniet.

1—4] *RE*, om. *Bq*. 1) alternas] om. *E*. incidens *E*. 2) inter — et] aequales inter se fecerit *E*. contra] *E*, circa *R*. similiter — 4) est] *R*, et in eisdem partibus sunt et quae deintus lineae sunt duabus rectis lineis sunt aequales *E*. 5—6] *RE*, om. *Bq*. 5) alternae uni] *R*, om. *E*. 7) data recta linea *B*. alteram *BEq*. 8) designare necesse est *E*. 9) et exterior *Bq*. 10) interioris *q*. trianguli] m. 1 *B*, *E*; tris angulis *q*, tres anguli m. 2 *B*. tres] *E*, om. *Bq*. 13) et] om. *Bq*. et] om. *q*. 14) lateribus] alteribus *q*. parallelogrimma *q*. 15) ex] et ex *BEq*. 16) aequales sunt *E*. eamque *Bq*, ea quoque *E*. aeque partiuntur *Bq*. 18) fuerint] om. *Eq*. 19) Iam] nam *BEq*. 21) aequa] aequalia *B*. 22) fuerint] lineis fuerint *E*, fuerint lineis *q*. 23—24] *RE*, om. *Bq*. 23) aequa triangula *E*. quae in] quae *E*. 24) aequalia — sunt] *R*, om. *E*. 25) aequi *q*. eadem parte *E*. 26) pronuntianda sunt *E*. 27) aequi *q*. 28) esse] om. *Bq*. 31) alternis lineis *E*.

42. Dato triangulo aequale parallelogrammum in dato rectilineo angulo constituere.
43. Omnis parallelogrammi spatii eorum, quae circa diametrum sunt, parallelogrammorum supplementa aequa sibi inuicem esse necesse est.
44. Iuxta datam rectam lineam dato triangulo in dato rectilineo angulo parallelogrammum aequale protendere.
45. Dato rectilineo aequale parallelogrammum in dato rectilineo angulo collocare.
46. Quadratum a data recta linea terminata describere.
47. In his triangulis, in quibus unus rectus est angulus, quae rectiangula nominamus, quadratum, quod a latere rectum angulum subtendente describitur, aequum est his quadratis, quae a continentibus rectum angulum lateribus conscribuntur.
48. Si ab uno trianguli latere quadratum quod describitur aequum fuerit his quadratis, quae ab reliquis duobus lateribus describuntur, rectus est angulus, qui sub duobus reliquis lateribus continetur.

II. Buch.

1. Omne parallelogrammum rectiangulum sub his duabus rectis lineis, quae rectum ambiunt angulum, dicitur contineri.
2. Omnis uero parallelogrammi spatii eorum, quae circa eandem diametrum sunt, parallelogrammorum quodlibet unum cum supplementis duobus gnomo nominetur.

---

1. Si sint duae rectae lineae, quarum una quidem indiuisa, altera uero quotlibet diuisionibus secta, quod sub duabus rectis lineis rectiangulum continetur, aequum erit his, quae sub ea quae indiuisa est et unaquaque diuisione rectiangula continentur.
2. Si recta linea in partes diuidatur, quadratum, quod a tota describitur, aequum est rectangulis, quae sub tota et portionibus describuntur.

1—2) et 3—4) permut. *BEq.* 1) aequalem *B.* recto lineo *B.* 3) circa] circum *B*, circa eandem *E.* 4) aequa] ea quae *B.* 5) datam] *ER*, om. *Bq.* in] om. *BEq.* in angulo *q.* angulo] om. *R.* 6) aequalem *Bq.* praetendere *Bq*, protendendum est *ER.* 7) recto lineo *B*, rectilineo angulo *E.* aequalem *Bq.* recto lineo *B.* 8) collocare id est diametrum *Bq*, collocare id est diametrum oportet *E.* 9) a] ad *BEq.* datam lineam terminatam *E.* recta] *B*, om. *Eq.* 10) quem rectiangulum *RBEq.* 11) subtendentem *Bq.* 12) a] ac *q.* 18) rectis] om. *R.* 19) ambiunt] *RBq*, om. *E.* 20) omnes *B.* quae] qui *B.* spatii — 22) nominetur] spacium unumquodque gnomio eorum quae circa diametrum eandem sunt parallelogrammorum nuncupatur *E.* 20) eundem *q.* 21) quodlibet] *RB*, quot libet *q.* 22) gnomo] *R*, gynomo *B*, ginomo *q.* 23—26] bis *Bq.* 23) quidem est *E.* 24) quolibet q^2. secta] recta q^2, recti B^2. 25) quae] quibus B^1, quae sunt *E.* ea quae] aeque B^2. 26) unaquaeque $B^1 B^2 q^1 q^2$. rectiangulum q^2, quod rectiangulo q^1, quod rectiangula B^1. continetur $B^1 B^2 q^1 q^2$, *E.* 27—29] *R*, om. *EBq.* 27) toto *R.*

3. Si recta linea secetur, quod sub tota et una portione rectiangulum continetur, aequum est ei, quod sub utraque portione rectiangulum clauditur, et ei quadrato, quod ad praedictam portionem describitur.

4. Si recta linea secetur ut libet, quod describitur a tota quadratum, aequum est his, quae describuntur ab unaquaque portione, quadratis et bis ei rectangulo, quod sub eisdem portionibus continetur.

5. Si recta linea per aequalia et per inaequalia secetur, quod sub inaequalibus totius sectionibus rectilineum continetur cum eo quadrato, quod ab ea describitur, quae inter utrasque est sectiones, aequum est ei quod describitur a dimidia quadrato.

6. Si recta linea per aequalia diuidatur, alia uero ei in directum linea recta iungatur, quod sub tota et ea quae adiecta est rectilineum continetur cum eo quod describitur a dimidia quadrato aequum est ei quadrato, quod describitur ab ea quae constat ex adiecta atque dimidia.

7. Si recta linea in duo secetur, quod describitur a tota quadratum cum eo quadrato quod ex una partium qualibet fit utraque quadrata pariter accepta aequa sunt ei rectiangulo, quod sub tota et aequali portione bis continetur, et ei quadrato, quod ad reliquam partem describitur.

8. Si recta linea in duo diuidatur, alia uero in directum ei iungatur recta linea uni partium aequalis, quadratum, quod describitur a tota composita, aequum est ei rectiangulo, quod sub prima et addita quater continetur, et ei quadrato, quod ad reliquam partium prime describitur.

9. Si recta linea per aequalia ac per inaequalia secetur, quadrata, quae ab inaequalibus totius portionibus describuntur, dupla sunt his quadratis, quae fiunt a dimidia et ab ea quae inter utrasque est sectiones.

10. Si recta linea per aequalia secetur, eique in directum quaedam linea recta iungatur, quadratum quod describitur a tota cum addita, et quadratum, quod describitur ab ea, quae addita est, utraque quadrata pariter accepta ab eo quadrato, quod scribitur a dimidia, et ab eo quadrato, quod ab ea describitur, quae ex dimidia adiectaque consistit, utrisque quadratis pariter acceptis dupla esse necesse est.

---

1) rectianguli *E*. 2) ei] eius *q*. quod] quae *E*. 3) scr. a praedicta portione. proportionem *Eq*. describit *E*. 4) toto *E*. 5) unaquoque *q*. 6) bis ei] uis ei *Bq*, idem uis *E*. portionibus continetur] est portionibus *E*, portionibus conuenit *Bq*. 7) rectae lineae *B*. et per] ac per *E*, ac pro *q*. 8) sectionis *B*. 10) ei — quadrato] ei quadrato qui describitur ab ea quae constat ex adiecta atque dimidia *E*. describit *B*. dimidio *B*. 11) per aequali *q*, pro aequali *B*. diuiditur *Bq*. directam *B*. lineam rectam *q*. 12) iungantur *Bq*. toto *B*. ea quae] aequae *B*. rectilineam *q*. 13) dimidio *EB*. aeque *q*, aequumque *B*. 14) quod] qui *B*. 15–23] *R*, om. *BEq*. 15) toto *R*. 18) scr. a reliqua parte. 22) reliquum *R*. scr. a reliqua partium. 24–26] *BER*, om. *q*. 24) per] (pr.) quae per *B*. 26) est] continetur *R*. 27) directam *B*. 28) iungantur *q*. a] om. *q*. cum] eum *q*. 30) a] ad *q*. 31) ea] eo *q*. ex] om. *q*. 32) dupla esse] corr. ex duplicem *B*.

11. Datam rectam lineam sic secare, ut quod sub tota et una portione rectilineum continetur aequum sit ei, quod fit ex reliqua sectione quadratum.
12. In his triangulis, quae obtusum habent angulum, tanto ea quae obtunso subtendit angulo lateribus amplius potest, quae obtunsum continent angulum, quantum est quod tenetur bis sub una earum quae ad obtunsum angulum a perpendiculari extra deprehenditur.
14. Dato rectilineo aequum collocare quadratum.

III. Buch.

1. Aequales circuli sunt, quorum diametri aequales sunt, inaequales uero, qui sic se non habent.
2. Recta linea circulum contingere dicitur, quae cum circulum tangat et in utraque eiecta parte non secat circulum.
3. Circuli sese inuicem contingere dicuntur, qui tangentes sese inuicem non secant.
4. Rectae lineae in circulo aequaliter a centro distare dicuntur, quando a centro in ipsas ductae perpendiculares sibi inuicem sunt aequales.
5. Plus uero a centro distare dicitur, in quam perpendicularis longior cadit.
6. Portio circuli est figura, quae sub recta linea et circuli circumferentia continetur.
8. In portione angulus esse dicitur, quando in circumferentia sumitur aliquod punctum, ab eo uero puncto ad lineae terminos duae rectae subiunguntur, angulus qui sub duabus subiunctis lineis continetur.
9. Quando autem, quae adiunguntur, aliquam circumferentiae comprehendunt particulam, in ea angulus consistere perhibetur.
10. Sector circuli est figura, quae sub duabus a centro ductis lineis et sub circumferentia, quae ab eisdem comprehenditur, continetur.

---

1) secare conuenit RE. 2) aequum] cum B. ei] om q. quod] quo q, que B. sectione] portione R. 3) quadratum] R, quadratum sive trigonum BE, sibi trigonum q. 4) his] BR, ista q, hac E. triangulis] BRq, trianguli figura E. quae] qui q. tanto amplius E. obtunsos obtendit angulos Eq. 5) amplius] om. E. quae] quam ea quae E, qui q. 6) continet E. bis] q, uis B, om. E. 7) anguli q. a — deprehenditur] om. E. 8) rectilineo] trigono R. aequum] cum B, aequum necesse est ER. 10) aequales] om. B. circuli aequales E. sunt aequales q. 11) uero sunt E. 12) recta linea] circulus E. non contingere E. quae] qui E. cum] eum B. 13) eiecta egesta q. 14) sese] se E. 15) non] om. BEq. 16) rectae] ratae B. a] om. B. quando] om. B. 17) inuicem sibi E. 18) centro] circulo BEq. in] linea in E. perpendiculares q. 19 — 23] bis Bq. 19) est — 21) angulus] ERB^2q^2, om. B^1q^1. 19) sub] sur q^2. recta] recta est B^2. circuli] ERq^2, om. B^2. 21) portione] B^2q^2, portione circuli ER. dicatur $B^1B^2q^1q^2$. circumferentia] EB^2, circumferentiam $B^1q^1q^2$. 22) ab eo uero] et ab eodem E. punctum B^1. 23) subiaciuntur B^1. qui] circuli dicitur qui E, dicitur qui B^1q^1. angulus — continetur] om. B^2q^2. continentur B^1. 24) autem] lineae E. circumferentia B. 25) ut in BEq. angulos q. perhibeatur BEq.

11. Similes circulorum portiones dicuntur, quae aequales suscipiunt angulos, uel in quibus qui describuntur anguli sibi inuicem sunt aequales.

---

3. Si in circulo per centrum linea quaedam recta dirigatur et quandam lineam rectam non per centrum positam in duas aequas diuidat partes, per rectos eam angulos secat; et si per rectos angulos secet, in duas aequas eam diuidet partes.
7. Si intra circulum punctum sumatur in diametro, quod non est centrum, et ab eo puncto ad circulum duae lineae uel plures dirigantur.
9. Si in circulo punctum sumatur interius, et ab eo puncto ad circulum plures quam duae lineae dirigantur, illud punctum centrum circuli esse necesse est.
10. Ubi circulus circulum secat, secundum puncta plura quam duo minime secat.
12. Si duo circuli ab exteriore sese parte contingant, quae ad centra eorum linea recta dirigitur, in iuncturam incidit circulorum.
13. Ubi circulus circulum contingit, secundum plura puncta quam unum minime contingit, seu ab interiore seu ab exteriore parte contigerit.
14. In circulo aequae rectae lineae aequalibus spatiis absunt a centro, et quae aequalibus spatiis a centro absunt rectae lineae sibi inuicem aequales sunt.
16. Quae in extrema diametro circuli per rectos angulos linea recta dirigitur, extra circulum cadet et inter ipsam et circuli circumferentiam alia recta non incidit; et semicirculi angulus ab acuto angulo rectilineo maior existit, reliquus uero ab acuto angulo rectilineo minor existit.
17. A dato puncto duas rectas lineas ducere, quae datum circulum tangant.

---

2) inscribuntur *E*. 3) pro centro *E*. et quandam] aequandam *q*, ad acquandam *E*. 4) non] om. *BEq*. per] in *BEq*. centro *E*. aequas] corr. ex aequales *q*. diuidet *q*, om. *E*. 5) partes] om. *q*. per] om. *E*, pro *q*. rectus *BEq*. angulus *BEq*. per] om *E*, propor *q*. rectus *BEq*. angulus *Bq*, eam angulus *E*. 6) aequas] om. *BEq*. eam] eum agrum *BEq*. diuidat *B*. 7) sumatur] corr. ex summittatur *q*. in diametro] interius *BEq*. non] om. *BEq*. 9—11] *Bq*, om. *E*. 9] circulum *Bq*. 12—13] *BRq*, om. *E*. 12) secundum — 13) secat] om. *B*. 12) secundum] si *R*. puncta] om. *R*. duo] duo puncta *R*. 13) minime secat] *R*, om. *q*. 14—15] *BRq*, om. *E*. 14) ab] seu ab *R*. sese] *q*, se *B*, uel ab interiore se *R*. 15) iunctura *BRq*. circulum *BRq*. 16—17] *BRq*, om. *E*. 16) ubi — circulum] *Rq*, om. *B*. contingit] *R*, om. *Bq*. secundum] si *R*. 17) seu] *R*, et seu *Bq*. inferiore *q*, exteriori *R*. seu] *q*, sub *R*, iste seu *B*. interiori *R*. contingit *R*. 18—20] *BRq*, om. *E*. 18) aequae] *q*, quae *BR*. absunt] von hier ab anders *R*. absunt a] assumpta *q*, sumpta *B*. 19) et quae] co *Bq*. absunt] haec sunt *Bq*. sibi] si *q*. 20) sunt] om. *Bq*. 21—26] *Bq*, om. *E*. 21) per] pro *q*. rectus angulus *Bq*. recta] directa *Bq*. 22) et] (alt.) uel *Bq*. 23) rectum *Bq*. ab] sub *Bq*. acutiangulo *B*. 24) reliquos *Bq*. 26) A] *q*, ad *B*. quae] qui *Bq*. tangunt *q*.

18. Si circulum linea quaedam recta contingat, et a centro ad contactum linea recta dirigatur, perpendicularis erit ea, quae ducitur, super eam quae circulum tangit.
19. Si circulum linea recta contingat, a contactu uero ei quae tangit in circulo per rectos angulos recta linea dirigatur, in ea quae dirigitur circuli centrum esse conueniet.
22. Quadrilaterarum figurarum, quae circulis ambiuntur, ex aduerso sibimet anguli constituti duobus rectis angulis sunt aequales.
23. In recta linea duae circuli portiones similes atque inaequales in iisdem partibus nullo modo constituentur.
24. Circulorum similes portiones, quae in aequis rectis lineis constituuntur, sibi inuicem sunt aequales.
27. In aequis circulis qui in circumferentiis aequalibus anguli consistunt, sibimet inuicem sunt aequales, seu a centro seu a circumferentia progrediantur.
30. Datam circumferentiam circuli in duo aequa diuidere potis est.
31. In circulo is quidem angulus, qui in semicirculo est, rectus existit, qui uero in maiore portione est angulus, minor est recto, qui autem in minore portione est angulus, maior est recto, et maioris quidem portionis angulus recto maior existit, minoris uero portionis angulus recto minor existit.
32. Si circulum linea recta contingat, a contactu uero in circulum quaedam circulum secans linea recta ducatur, quoscumque angulos facit, ii duobus angulis, qui sunt in alternatim circuli portionibus sunt aequales.
33. Super datam rectam lineam circuli describere portionem, quae dato rectilineo angulo unus quis suas intus...
34. Circulo oportet accipere portiones...

IV. Buch.

1. Figura intra figuram dicitur inscribi, quando ea, quae inscribitur, eius, in quam inscribitur, latera unoquoque suo angulo ab interiore parte contingit.

1–6) *Bq*, om. *E*. 1) contractum *q*. 2) lineae *Bq*. propendicularis *q*. 4) contractu *q*. quae] qui *Bq*. 5) per rectos] pro rectos *q*, porrecto *B*. angulus *B*. in ea] linea *q*. dirigantur *Bq*. 7–8) *BEq*. 7) quadrilaterarum – ambiuntur] om. *E*. quadrilaterum *Bq*. 8) angulis anguli *B*, anguli *q*. 9–10] *q*, om. *BE*. in iisdem] isdem *q*. 11) quae] sunt qui *q*, sunt quem corr. ex in quem sunt *B*. 13) qui] corr. ex quae *B*. 14) sibimet] sibi et *B*. a] ac *B*. seu] sibi *q*. 16) circuli] semicirculi *BEq*. potis est] *E*, possit *Bq*. 17) is quidem] isdem *Bq*, id est *E*. 18) minor] maior *E*. 19) maior] minor *E*. 21) existat *q*. 22) si] si in *B*. in circulum] in circum *Bq*, in circumferentia *E*. 24) ii] II *B*, om. *Eq*. duo anguli *BEq*. alternatim] corr. ex alternatem *B*, alterna ante *q*, alternis *E*. 26) datas *BE*, dectas *q*. rectas lineas *BEq*. portionem] partes *Bq*, partes convenit *E*. quae – 27) intus] *Bq*, om. *E*. 27) unus – intus]

2. Circumscribi uero figura figurae perhibetur, quotiens ea, quae circumscribitur, figura eius, cui circumscribitur, suis omnibus lateribus omnes angulos tangit.

---

1. Intra datum circulum datae rectae lineae, quae diametro minime maior existat, aequam rectam lineam coaptare.
2. Intra datum circulum dato triangulo aequorum angulorum triangulum collocare.
3. Circa datum circulum dato triangulo aequalium angulorum triangulum designare.
4. Intra datum triangulum circulum designare.
6. Intra datum circulum quadratum describere.
8. Intra propositum quadratum circulum designare.
12. Circa datum circulum quinquangulum aequilaterum et aequiangulum designare.
13. Intra datum quinquangulum, quod est aequilaterum atque aequiangulum, circulum designare.

III.

Die vorzügliche Handschrift der Arithmetik des Boetius Bamberg. *HJ* IV, 11 saec. X (*b* bei Friedlein) enthält auf fol. 1—7 eine mittelalterliche Einleitung in das Studium der Mathematik, die mir nicht uninteressant scheint, namentlich auch deshalb, weil sie einige Kenntniss des Griechischen verräth. Da dieselbe Handschrift hinten einen auf irische Verhältnisse bezüglichen Brief enthält, den ich anderswo veröffentlichen werde, vermuthe ich, dass auch jene kleine Abhandlung auf Irland entstanden ist; denn zu dieser Zeit ist Kenntniss des Griechischen im Occident fast nur bei den Iren zu finden. Das Stück fängt an:

Mathematica latine dicitur doctrinalis scientia;

darauf Definitionen der Arithmetik, Geometrie, Musik und Astronomie; dann schliesst die Vorrede: quas disciplinas deinceps paulo latius indicamus, ut earum cause competenter possint ostendi.

---

scr. angulum aequalem intus capiat. 28) *Bq*, om. *E*; scr. a dato circulo oportet accipere portionem. 30) figuram *q*. eam *Bq*. 31) inscribitur] *E*, scribitur *Bq*.

1) circulus scribi *Bq*, circuli *E*, circulum scribi *R*. figurae circumscribi *E*. figurae] om. *B*. ea quae] mut. in ea qua *B*, aequa *q*. circumscribitur] *E*, om. *Bq*. 2) figurae *E*. circum inscribitur *Bq*. 4–5] *RE*, bis *Bq*. 4) quae] quae in $B^1 q^1$. quae – 5) existat] non maiori quam diametrus *R*. 4) diametri B^2. 5) excitat q^1, exit ad B^1. rectam] om. *R*. coaptare] $R B^2 q^2$, quae aptare $B^1 q^1$, coaptare oportet *E*. 7) collocare convenit *E*. 8) circa] circulum *B*. dato] date *q*. 9) designandum est *E*. 10) circulum triangulum *BEq*. interdum designare necesse est *E*. 11) aliquid describere utile est *E*. 12) infra *E*. 13) qui angulum *q*. 14) designare geometres praecipiunt *E*. 15) datum] datum circulum *E*. quinqueangulum *B*. atque] om. *B*. 16) circulum] om. *BE*. designare non disconvenit *E*.

Darauf ein Capitelindex:

Dann folgen die zehn Capitel, woraus ich hervorhebe:

I Arithmetica est disciplina numerorum; greci enim numerum rithmon dicunt etc.

II Numeri disciplinam apud grecos primum pytagoram autumant conscripsisse ac deinde a nicomacho diffusius esse dispositam, quam apud latinos primus apuleius deinde boetius transtulerunt.

III numerus autem est multitudo ex unitatibus constituta; nam unum semen numeri esse, non numerum.

IV lautet vollständig so:

Numero nummus nomen dedit et a sui frequentatione uocabulum indidit. unum a greco nomen trahit; greci enim unum ena dicunt. sic duo et tres, quos illi dua et tria appellant. quatuor uero a figura quadrata nomen sumpserunt. quinque autem non secundum naturam, sed secundum placitum uoluntatis uocabulum acceperunt ab eo, qui numeris nomina indidit. sex autem et septem a greco ueniunt; in multis enim nominibus, que in greco aspirationem habent, nos pro aspiratione s ponimus. inde est pro ex sex, pro epta septem, sicut pro erpillo* erba serpillum. octo uero per translationem sicut illi et nos ita. illi nea nos nouem, illi deca nos decem. dicti autem decem a greca ethimologia, eo quod ligent et coniungant infra iacentes numeros; nam desmos coniungere uel ligare apud eos dicitur. porro uiginti dicti, quod sint decem bis geniti u pro b litera posita; triginta, quod a tertio denario gignantur. sic usque ad nonaginta. centum uero uocati a canthu, quod est circulus; ducenti a duo centum. sic et reliqui usque ad mille. mille autem a multitudine, unde et militia quasi multicia. inde et milia, que greci mutata litera miriades uocant.

VIII handelt zum Theil von den Polygonalzahlen (mit Figuren); darin: linealis numerus est, qui inchoans a monade linealiter scribitur usque ad infinitum. unde alfa ponitur pro designatione linearum, quoniam hec litera unum significat apud grecos Θ (auf den Figg. a).

---

* d. h. ἕρπυλλος, Quendel.

Fol. 7ᵛ beim Schluss dieser Abhandlung vor dem Boetius, der fol. 8 anfängt, steht, zum Theil auf dem Rande, folgende curiose Einleitung zur Arithmetik (vergl. die Bemerkung in cod. *a* bei Friedlein p. 3, 1):

Ne subesse possit similitudo falsitatis, in auctore tria requiruntur inicio libri, que nobis certa sunt: persona, tempus et locus. persona fuit boetius romanus et consul tempore iustini imperatoris, cuius tempore thedericus rex gothorum italiam et romanos inuasit et per triginta annos et eo amplius potestatem exercuit rome. et certe in italia fuit. ideo forsitan queritur, ut, si mendosi habentur libri, illuc reuertatur, quo certiores esse arbitrantur. causa arithmetice discipline scribende hec fuit,* ut numeri et proportiones numerorum scirentur a sedulis lectoribus, qui ipsam sollerti indagine perlecturi erant. nam in numeris maxima uersatur dubitatio, quam iste boetius contendit auferre, dum obscure a nicomacho et breuiter dicta plana producto sermone reddit et diffuse dicta moderata breuitate collegit. causa insuper requiritur, que ea est, ut sciat uidelicet naturam numerorum, quemadmodum ex unitatibus ipse numerus crescat ac multiplicetur, et ut quelibet eius summa facile ualeat deprehendi, ut verbi causa si proponatur octies VIII quot sunt et si qua similia.

Rithmon greci dicunt numerum. inde arithmetica disciplina numerorum. cuius arithmetice pytagoras apud grecos primus fuit auctor, postea nicomachus, apud latinos uero apuleius, deinde boetius. nam latini imitati sunt grecos fontem scientie ab ipsis haurientes et in proprium sermonem transferentes, et licet quedam discipline ab egyptiis originem uideantur habere, ipsas tamen greci ab eis accipientes postea tradiderunt romanis.

Domino patri Symmacho boetius. Boetius consul fuit; eius** dignitatem sui liberi post sunt adepti. Symmachus quoque consul fuit et suo tempore clarus et fuit boetii socer, et hanc epistolam loco proemii et prefacionis illi ponere placuit. Boetius interpretatur adiutor, quod nomen non eius proprium fuit, sed seuerinus; nam ex accidente boetius dictus est; plurimis enim prodesse satagebat maxime pupillos et inopes suis fouens stipendiis. Symmachus quoque interpretatur compugnans; syn con, machia pugna dicitur. In inicio sue epistole boetius morem descripsit humanum dicens, qualiter nobilium amicorum foedera muneribus confirmentur, ita ut, dum sibi inuicem munera tribuunt, nec ille qui dat aliud aliquid carius habeat quam*** id quod dat, nec is qui suscipit carius aliud quid ab altero suscipiat unquam quam id, quod ab amico suscipit, quia eadem uelle et eadem nolle firma est amicitia,† quod in malis factio appellatur.††

* cod. discipline·/ hec fuit·/ scribende.

** eius e corr. cod.

*** $\overline{\text{qm}}$ supra scr. cod.

† Sallust. Catil. 20, 5.

†† Sallust. Jugurth. 31, 15.

Recensionen.

Studierlampe, herausgegeben von Dr. ph. A. SAMMLER. Zweite wesentlich vermehrte Auflage. Werdau i. S., Verlag von Curt Anz. 1890. 71 S. Preis geb. 1 Mk.

Ein Sammelsurium von Merkverschen, Akrostichen, Chronostichen, Palindromen, Epigrammen, Sentenzen, Räthseln u. dergl. m. — Der mathematische Theil enthält vorzugsweise algebraische Aufgaben, die durch ihre metrische Form, ihre Beziehungen zur Mythologie und zu anderen Gebieten interessant sein sollen, und die sich fast alle in der Aufgabensammlung von Heis unter den eingekleideten Gleichungen ersten Grades finden; ferner einige Rechenscherze und Kunststückchen, die ohne besonderen Werth sind.

F. SCHÜTTE.

Lehr- und Uebungsbuch der Arithmetik für Unter-Realschulen. Von FRANZ VILLICUS, Professor an der k. k. Staats-Oberrealschule am Schottenfelde in Wien. Erster Theil für die 1. Classe. Neunte verbesserte Auflage. Wien, 1888. Verlag von A. Pichler's Wittwe & Sohn. 124 S. Preis in hübschem Callicoband 1 Mk. 44 Pf.

Ein vorzügliches Büchlein. Der Stoff ist übersichtlich geordnet, die Lehrsätze klar, die Erklärungen leicht verständlich, die Aufgaben dem ins Auge gefassten Schülerkreise angemessen. Die gerechtfertigte Bevorzugung der Decimalbrüche und ihre Einführung schon vor der gewöhnlichen Bruchrechnung ist eine Eigenthümlichkeit und ein Vorzug des Werkchens. Auf verschiedene Vortheile bei gewissen Rechnungen wird hingewiesen; doch ungern vermissen wir die Neunerprobe bei der Multiplication. Einige Druckfehler S. 102 Z. 9, S. 104 Z. 14, S. 105 Z. 8; ferner ist an vielen Stellen der Decimalpunkt ausgeblieben, und dürfte sich statt dessen das üblichere Komma empfehlen. Druck und Papier sind gut.

F. SCHÜTTE.

Allgemeine Arithmethik* und Algebra in ihrer Beziehung zu einander und zu den höheren bürgerlichen Rechnungsarten, insbesondere zu den den Kapital- und Renten-Versicherungen grundleglichen Zinseszinsrechnungen. Für Seminaristen und Lehrer in einer für den Selbst-

* Das zweite *th* ist Eigenthum des Verfassers!

unterricht geeigneten Form bearbeitet von KARL LEMBKE, Seminarlehrer. Wismar, Hinstorff'sche Buchhandlung. 1888. 190 S. Preis 3 Mk.

Dass die Hauptresultate, die wichtigsten Formeln, Erklärungen und Sätze auch typographisch als solche hervorgehoben sind, und dadurch die Erlernung derselben und die Uebersicht wesentlich erleichtert wird: dieser Vorzug haftet dem Buche nicht an.

Der erste Theil behandelt die algebraischen Gleichungen. Die Einleitung derselben (§ 4) ist verfehlt und für den Anfänger unverständlich und überflüssig. Bei der Erklärung der Auflösungsmethoden sind für die vorgenommenen Operationen niemals die Gründe angegeben, sondern es ist auf die Paragraphen der „Allgemeinen Arithmetik" des Verfassers hingewiesen, was selbst für Solche, die jenes Buch zur Hand haben, nicht sehr angenehm, für Einen, der es nicht besitzt, höchst fatal ist. Ebenso bequem macht es sich der Verfasser mit den Uebungsaufgaben; er verweist auf „Meier-Hirsch's Algebra", so dass der Studirende sich auch dieses Buch anschaffen müsste.

Die Auflösung der Gleichungen geschieht nun durch Ordnen, Transponiren, sieben verschiedene Arten von Reductionen, durch Isolirungen, „mit umgekehrten Vorzeichen auf die andere Seite bringen", „Wegstreichen" von Gliedern u. dergl. m. Der Leser kommt dadurch kaum zur klaren Einsicht, dass er es mit ganz gewöhnlichen algebraischen Operationen zu thun hat, sondern, wie der Verf. selbst in liebenswürdiger Weise gesteht (S. 5 u. 8), „erwächst ihm erst allmälig die Erkenntniss" von der Richtigkeit des Verfahrens; „und die Begründung kann mehr und mehr zurücktreten, und die Entwickelung der Gleichung mechanisch sich vollziehen".

Bei den Gleichungen mit mehreren Unbekannten hätte für die Zwecke des Buches die Substitutionsmethode genügt. Die übrigen, dazu noch mangelhaft erklärten Methoden hätten unterbleiben können.

Die Auflösung der allgemeinen Gleichung zweiten Grades wird vom Verf. nicht gegeben, statt dessen wird bei jedem Beispiele das Experiment der sogenannten quadratischen Ergänzung gemacht.

Die folgenden Abschnitte des Buches, Logarithmenrechnung, Progressionen, Zinseszinsrechnung sind, abgesehen von kleineren Mängeln — z. B. ist die Definition der steigenden und fallenden Reihen falsch — fasslicher bearbeitet. Die beigefügten Tabellen sind, soweit Stichproben dieses ergeben, zuverlässig.

F. SCHÜTTE.

Der praktische Ansatz der Regeldetri- und Prozentrechnungen als Lösung der Aufgabe. Aehnliches für Gesellschaftsrechnung, Mischungsrechnung u. s. w. von P. B. RICHTER. Leipzig 1889.

Der Verfasser geht von dem Streben aus, schon beim ersten mathematischen Unterricht das Denken in Gleichungen mehr zur Geltung zu bringen. Er erläutert an Beispielen, wie mit Hilfe der Gleichungen einfachster Form die Aufgaben der einfachen und zusammengesetzten Regeldetri, der Tara-, Rabatt-, Zins- und Discontorechnung nach wenigen Regeln gelöst werden kann. Umgekehrte Regeldetri, deren Anwendung oft zu argen Sprachverrenkungen, zuweilen auch zu falschen Schlüssen seiten der Schüler führt, wird durch dieses Verfahren überflüssig.

Beispiel: Welches Kapital bringt in 5 Jahren 28 Mk. Zinsen, wenn 680 Mk. in 3 J. 96 Mk. Zinsen geben?

$$\begin{array}{lcc} & K\;\;J & Z \\ \text{Ansatz mit. . . .} & \dfrac{x\,.5}{680.3} = & \dfrac{28}{96}. \\ \text{Andeutung der Gl.:} & & \end{array} \qquad \text{Also } x = \frac{680.3.28}{5.96}.$$

Das Buch ist lesenswerth, wenn auch Referent gestehen muss, dass der Schüler bei ausschliesslicher Anwendung jener Methode leicht in den Fehler des Formalismus verfällt.

Dr. E. Jahnke.

Bibliographie

vom 1. März bis 31. Mai 1890.

Periodische Schriften.

Mathematische und naturwissensch. Mittheilungen aus den Sitzungsberichten der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften. Jahrg. 1890, 1. Heft. Berlin, G. Reimer. 8 Mk.

Abhandlungen d. math.-phys. Classe d. königl. Gesellschaft d. Wissensch. in Leipzig. 15. Bd. Leipzig, Hirzel. 35 Mk.

Sitzungsberichte der math.-phys. Classe d. königl. Gesellschaft d. Wissensch. in Leipzig. 1889, II—IV. Ebendas. 3 Mk.

Sitzungsberichte der math.-phys. Classe der königl. Akademie d. Wissensch. zu München. 1889, 3. Heft. München, Franz. 1 Mk. 20 Pf.

Denkschriften der kaiserl. Akademie d. Wissensch. in Wien. Mathem.-naturwiss. Classe. 56. Bd. Wien, Tempsky. 52 Mk. 50 Pf.

Sitzungsberichte d. kaiserl. Akademie d. Wissensch. zu Wien. Math.-naturw. Classe, Abth. IIa. 98. Bd. 8. u. 9. Heft. Ebendas. 5 Mk. 40 Pf.

Mémoires de l'Académie des sciences de St. Pétersbourg. VII. série, tome XXXVII, No. 4 et 5. Leipzig, Voss. 4 Mk. 50 Pf.

Astronomische Arbeiten des k. k. Gradmessungsbureau. Herausgeg. von E. Weiss u. R. Schram. 1. Bd.: Längenbestimmungen. Wien, Tempsky. 16 Mk.

Verhandlungen der physikal. Gesellschaft zu Berlin i. J. 1889. 8. Jahrg., redig. v. A. König. Berlin, G. Reimer. 2 Mk.

Annalen d. physikal. Centralobservatoriums. Herausgeg. v. H. Wild. Jahrg. 1888, II. Leipzig, Voss. 15 Mk. 40 Pf.

Acta mathematica. Herausgeg. v. G. Mittag-Leffler. 14. Bd. 1. Heft. Berlin, Mayer & Müller. 15 Mk.

Mathematische Annalen, begr. v. Neumann u. Clebsch, herausgeg. v. Klein, Dyck u. Maier. 36. Bd. 1. Heft. Leipzig, Teubner. compl. 20 Mk.

Zeitschrift für mathem. u. naturwissenschaftl. Unterricht, herausgeg. v. J. C. V. Hoffmann. Jahrg. 1890, 1. Heft. Ebendas. compl. 12 Mk.

Astronomische Nachrichten, herausgeg. v. A. Krueger. 124. Bd. Hamburg, Mauke Söhne. 15 Mk.

Mathematische und naturwissenschaftl. Berichte aus Ungarn, redig. v. Fröhlich. 7. Bd., Juni 1888 bis Oct. 1889. Berlin, Friedländer & S. 8 Mk.

Repertorium der Physik, herausgeg. v. E. Exner. 26. Bd., 1. Heft. München, Oldenbourg. compl. 24 Mk.

Bibliotheca mathematica, herausgeg. v. G. Eneström. Neue Folge, Jahrg. 1890. Berlin, Mayer & Müller. 4 Mk.

Astronomisches Jahrbuch für 1892. Herausgeg. v. F. Tietjen. Berlin, Dümmler. 12 Mk.

Sternephemeriden für 1892. (Aus dem Berliner astron. Jahrb.) Ebendas. 6 Mk.

Meteorologische Zeitschrift, redig. v. J. Hann u. W. Köppen. 7. Jahrg. 1890, 1. Heft. Wien, Hölzel. compl. 20 Mk.

Deutsches meteorolog. Jahrbuch für 1889; 2. Heft, herausgeg. v. W. v. Bezold. Berlin, Asher. 3 Mk.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Rothlauf, B., Die Physik Plato's. 2. Thl. München, Kellerer. 1 Mk.

Rosenberger, F., Geschichte der Physik in den letzten hundert Jahren. 2. Abth. Braunschweig, Vieweg. 10 Mk. 40 Pf.

Lasswitz, K., Geschichte der Atomistik vom Mittelalter bis Newton. 2. Bd. (Schluss.) Hamburg, Voss. 20 Mk.

Reine Mathematik.

Jonquière, A., Ueber einige Transcendente, die bei wiederholter Integration rationaler Functionen auftreten. (Inaug.-Dissert.) Bern, Huber & Comp. 1 Mk.

Siemon, P., Ueber die Integrale einer nichthomogenen Differentialgleichung II. O. Berlin, Gärtner. 1 Mk.

Lie, S., Theorie der Transformationsgruppen. 2. Abschn., bearb. v. F. Engel. Leipzig, Teubner. 16 Mk.

Hess, N., Beiträge zur Theorie der räumlichen Configurationen. Leipzig, Engelmann. 3 Mk.

THIENEMANN, W., Ueber eine transcendente Minimalfläche, welche eine Schaar algebraischer Raumcurven 4. Grades enthält. Leipzig, Fock. 80 Pf.

SCHROETER, H., Grundzüge einer rein-geometrischen Theorie der Raumcurven 4. Ordn. u. 1. Species. Leipzig, Teubner. 2 Mk. 80 Pf.

SICKENBERGER, A., Uebungsbuch zur Algebra. 2. Abth. (Quadr. Gleichungen, Reihen, Combinatorik.) München, Ackermann. 1 Mk. 80 Pf.

HEILERMANN, H. u. J. DIEKMANN. Grundlehren der Trigonometrie und Stereometrie. 2. Thl.: Stereometrie. Essen, Baedeker. 40 Pf.

PERLEWITZ, P., Die Fusspunktlinien des umbeschriebenen Kreises eines Dreiecks. Berlin, Gärtner. 1 Mk.

BAUR, C. W. v., Mathematische Abhandlungen. Zum 70. Geburtstage des Verf. herausgegeben von seinen früheren Schülern. Stuttgart, Wittwer. 6 Mk.

Angewandte Mathematik.

GALILEO, G., Unterredungen über mathematische Demonstrationen und die Mechanik. (Arcetri 1638.) Aus dem Italienischen übersetzt von A. v. OETTINGEN. (Ostwald's „Klassiker d. exacten Wissensch.“ Nr. 11.) Leipzig, Engelmann. 3 Mk.

NAGEL, A., Astronomisch-geodätische Arbeiten für die europäische Gradmessung im Königr. Sachsen. II. Abth. (Das trigon. Netz I. Ordn.) 2. Heft. Berlin, Stankiewitz. 18 Mk.

KARSTEN, G., Die internationale Generalconferenz für Maass und Gewicht in Paris 1889. Rectoratsrede. Kiel, Universitätsbuchhandlung. 1 Mk.

OEHLER, W., Ueber die Anwendung der Neumann'schen Flächenorte zur Darstellung der Formen des regulären Systems. Freiberg, Engelhardt. 1 Mk.

LINGG, F., Ueber die bei Kimmbeobachtungen am Starnberger See wahrgenommenen Refractionserscheinungen. (Leop.-Carolin. Akad.) Leipzig, Engelmann. 7 Mk.

FRANZ, D., Ueber die astronomischen Beobachtungen des Mondes. (Königsberger phys. Gesellsch.) Königsberg i. Pr., Koch. 40 Pf.

SCHORR, R., Untersuchungen über die Bewegungsverhältnisse in dem dreifachen Sternsysteme ξ Scorp. (Inaug.-Dissert.) Kiel, Lipsius & Tischer. 3 Mk.

WEYER, E., Kurze Azimuttafel für alle Declinationen, Stundenwinkel und Höhen der Gestirne auf beliebigen Breiten. Zum Seegebrauch bei der geogr. Ortsbestimmung etc. Hamburg, Friederichsen & Co. 3 Mk.

WOLF, R., Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte und Litteratur. 1. Halbband. Zürich, Schulthess. 8 Mk.

FÖPPL, A., Leitfaden und Aufgabensammlung zur angewandten Mechanik. 1. Heft. Leipzig, Teubner. 2 Mk.

Physik und Meteorologie.

KANT, J., Allgemeine Naturgeschichte des Himmels. (1755.) Herausgeg. v. H. EBERT. (Ostwald's „Klassiker der exacten Wissenschaften" Nr. 12.) Leipzig, Engelmann. 1 Mk. 50 Pf.

LINDNER, G., Theorie der Gasbewegung. Berlin, Simion. 10 Mk.

KÖVESLIGETHY, R. v., Grundzüge einer theoretischen Spectralanalyse. Halle a. S., Schmidt. 15 Mk.

ROSCOE, E., Die Spectralanalyse. 3. Aufl., neu bearb. vom Verf. u. A. SCHUSTER. Braunschweig, Vieweg. 16 Mk.

NEUMANN, F., Die mathematischen Gesetze der inductiven elektrischen Ströme, herausgeg. v. C. NEUMANN. (Ostwald's „Klassiker der exacten Wissenschaften" Nr. 10.) Leipzig, Engelmann. 1 Mk. 50 Pf.

THOMPSON, SILV., Die dynamoelektrischen Maschinen. Für Studirende der Elektrotechnik. Uebers. v. C. GRAWINKEL. Halle, Knapp. 23 Mk.

FARADAY, M., Experimentaluntersuchungen über Elektricität; deutsch v. KALISCHER. 2. Bd. Berlin, Springer. 8 Mk.

Mathematisches Abhandlungsregister.

1889.

Erste Hälfte: 1. Januar bis 30. Juni.

A.

Abbildung.

1. Ueber die Abbildung ebener Curven und Flächenstücke. Am. Wagner. Hamburg. Mitth. I, 64.
2. Sulla limitata possibilita di trasformazioni conformi nello spazio. A. Capelli. Annali mat. Ser. 2, XIV, 227.

Aerodynamik.

3. Zur Theorie der atmosphärischen Wirbel. A. Sprung. Hamb. Mitth. I, 27.
4. Ueber die Bewegungserscheinungen der Atmosphäre. A. Oberbeck. Berl. Akad.-Ber. 1888, 383.
5. Ueber atmosphärische Bewegungen. H. v. Helmholtz. Berl. Akad.-Ber. 1888, 647.
6. Zur Thermodynamik der Atmosphäre. W. v. Bezold. Berl. Akad.-Ber. 1888, 485
7. Die Knotenlinien der Atmo- und Hydrosphäre. S. Günther. Hamb. Mitth. II, 15.

Analytische Geometrie der Ebene.

8. Sur les coordonnées tripolaires. Ed. Lucas. Mathesis IX, 129, 173.
9. Étude intrinsèque de quelques lignes planes. E. Cesaro. Mathesis IX, 209.
10. Sur une projection imaginaire. W. Mantel. Mathesis IX, 217. [Vergl. Nr. 91.]
11. Sur un certain cercle analogue au cercle de courbure. Cl. Servais. Mathesis IX, 105.
12. Propriété fondamentale des courbes parallèles. E. Wasteels. Mathesis IX, 190.
13. Hyperarithmetische und hyperharmonische Mittel nebst geometrischen Anwendungen. O. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, 59.
14. Sur les sommets d'un triangle d'aire donnée. Emmerich etc. Mathesis IX, 275.
15. Strophoïde et parabole engendrées à la fois. Jeřábek etc. Mathesis IX, 99. — Pisani etc. ibid. 99.
16. Sur une courbe du 3. ordre. Brunel. Mathesis IX, 144.
17. Sur une courbe plane du 4. degré. Déprez. Mathesis IX, 253.
18. Courbes représentées par les équations $x_n = \frac{1 - \sin \Theta^{2n+4}}{\cos \Theta}$, $y_n = \sin \Theta^{2n+3}$. P. Molenbroeck. Mathesis IX, 82.

Vergl. Ellipse. Geometrie (abzählende). Geometrie (descriptive). Geometrie (höhere). Hyperbel. Kegelschnitte. Kreis. Lemniskate. Parabel.

Analytische Geometrie des Raumes.

19. Sulla similitudine delle curve. G. Pirondini. Annali mat. Ser. 2, XV, 55.
20. Sui sistemi doppiamente infiniti di raggi. L. Bianchi. Annali mat. Ser. 2, XV, 161.
21. Dichte der Sehnen von Flächen und ebenen Curven. R. Hoppe. Grun. Archiv 2. R. VII, 165.
22. Die ebenen und die sphärischen cykloidalen Curven. H. Ekama. Grun. Archiv 2. R. VII, 207.

Vergl. Cubatur. Geodäsie. Geometrie (höhere). Kugel. Mehrdimensionale Geometrie. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung.

Astronomie.

23. Note zur Störungstheorie. H. Bruns. Hamb. Mitth. II, 3.
24. Ueber die Lage der Mondsichel gegen den Horizont des Beobachters. E. Oekinghaus. Grun. Archiv 2. R. VII, 195.
25. Zur Theorie der astronomischen Strahlenbrechung. E. Oekinghaus. Grun. Archiv 2. R. VII, 437.

Vergl. Geschichte der Mathematik 115, 119, 120, 127, 135.

B.

Bernoulli'sche Zahlen.

26. Sur un théorème de M. Lipschitz et sur la partie fractionnaire des nombres de Bernoulli. E. Cesaro. Annali mat. Ser. 2, XIV, 221.

Bestimmte Integrale.

27. Sur les résidus intégraux qui donnent des valeurs approchées des intégrales. P. Tchebycheff. Acta math. XII, 287. [Vergl. Bd. XXXII, Nr. 35.]
28. Ueber eine Classe von Functionen einer complexen Variabeln, welche die Form bestimmter Integrale haben. L. Pochhammer. Crelle CIV, 152.
29. On certain definite integrals. C. Malet. Annali mat. Ser. 2, XVI, 277.

Vergl. Functionen 84.

C.

Combinatorik.

30. Si n est premier avec b on a c_{2n-4}^{n-2} multiple de n^2-n. Emmerich et Déprez. Mathesis IX, 170.
31. Relation entre des nombres combinatoires. Durfee. Mathesis IX, 194.

Cubatur.

32. Berechnung der Volumina von Rotationskörpern, insbesondere von Fässern. Th. Sinram. Hamb. Mitth. I, 20.

D.

Determinanten.

33. Sur le déterminant Wronskien. G. Peano. Mathesis IX, 75, 110.
34. Ueber den grössten gemeinsamen Theiler zweier ganzer Functionen. E. Netto. Hamb. Mitth. II, 36.
35. Choisir n de manière que $\begin{vmatrix} n-4 & n+2 & n-2 \\ n-1 & n & n+4 \\ n+3 & n-3 & n+1 \end{vmatrix}$ soit un carré parfait. Brocard etc. Mathesis IX, 257.

Vergl. Gleichungen 161.

Differentialgleichungen.

36. Der Cauchy'sche Satz von der Existenz der Integrale einer Differentialgleichung. L. Königsberger. Crelle CIV, 174.
37. Ueber einen Satz aus der Theorie der algebraischen Functionen und über eine Anwendung desselben auf die Differentialgleichungen zweiter Ordnung. L. Fuchs. Berl. Akad. Ber. 1887, 159.
38. Ueber Relationen zwischen den Integralen von Differentialgleichungen. L. Fuchs. Berl. Akad.-Ber. 1887, 1077.
39. Ueber die Form der logarithmischen Integrale einer linearen nicht homogenen Differentialgleichung. C. Koehler. Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, 36. [Vergl. Bd. XXXIV, Nr. 24.]
40. Ueber eine Anwendung der Theorie der linearen Differentialgleichungen auf die algebraischen Functionen. L. W. Thomé. Crelle CIV, 1.
41. Ueber invariante Differentialausdrücke. J. N. Hazzidakis. Crelle CIV, 102.
42. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients algébriques. C. Guichard. Acta math. XII, 57.
43. Ueber drei lineare Differentialgleichungen vierter Ordnung. L. Pochhammer. Crelle CIV, 116.
44. Ueber eine Differentialgleichung. W. Láska. Grun. Archiv 2. R. VII, 436.
45. Intégrer l'équation $ny=xy'+by''$. V. Jamet. Mathesis IX, 250.
46. Intégrer $48x(1-x)y''+(32-56x)y'+y=0$. Fauquembergue. Mathesis IX, 273.

47. Ueber ein System linearer partieller Differentialgleichungen. J. Horn. Acta math. XII, 113.
48. Sui sistemi di integrali indipendenti di una equazione lineare ed omogenea a derivate parziali di 1. ordine. G. Ricci. Annali mat. Ser. 2, XV, 127.
49. Ueber lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung. P. du Bois-Reymond. Crelle CIV, 241.
50. Zur Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen. P. Järisch. Hamb. Mitth. II, 110.
51. Sur une classe d'équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. E. Picard. Acta math. XII, 323.
52. Intégrer l'équation aux différentielles partielles $(x-6y)p+(10x-y)q=6y^2-4x^2-36xy$. H. Brocard. Mathesis IX, 138.
53. Intégrer l'équation $\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=z\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x.\partial y}$. Lambotte etc. Mathesis IX, 201.

Vergl. Elasticität 59. Elliptische Transcendenten 70.

Differentialquotient.

Vergl. Functionen 77, 78, 79. Invariantentheorie 172.

E.

Elasticität.

54. Kritik der Anwendbarkeit der Gleichungen der Elasticitätstheorie auf endliche Körper. P. Jaerisch. Hamb. Mitth. I, 54.
55. Lösungen der Elasticitätsgleichungen von der Form $f(t,x,y,z)\cos(at+a_1x+a_2y+a_3z)$. P. Jaerisch. Hamb. Mitth. I, 88.
56. Ueber das Gleichgewicht einer elastischen Kugel. P. Jaerisch. Hamb. Mitth. I, 155.
57. Ueber das Gleichgewicht des elastischen Kreiscylinders. P. Jaerisch. Hamb. Mitth. I, 167.
58. Zur Theorie der Elasticität isotroper Rotationskörper. P. Jaerisch. Hamb. Mitth. I, 275.
59. Allgemeine Integration der Elasticitätsgleichungen für die Schwingungen und das Gleichgewicht isotroper Rotationskörper. P. Jaerisch. Crelle CIV, 177.
60. Sopra la dilatazione cubica di un corpo elastico isotropo in uno spazio di curvatura costante. C. Somigliana. Annali mat. Ser. 2, XVI, 101.

Elektrodynamik.

61. Das Gesetz zwischen Ausdehnung und Stromstärke für einen von galvanischen Wechselströmen durchflossenen Leiter. C. Cranz. Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, 92.

Ellipse.

62. Sur les cercles osculateurs de l'ellipse. P. Molenbroek. Mathesis IX, 191.
63. Points communs aux circonférences décrites de deux points G et H d'une ellipse avec le demidiamètre parallèle à GH comme rayon. Droz. Mathesis IX, 122. — Molenbroek ibid. 123. — J. Neuberg ibid. 124.
64. Former avec deux points de deux ellipses et un troisième point un triangle semblable à un triangle donné. Déprez & Stuyvaert. Mathesis IX, 164.
65. Ein geometrischer Ort. K. Zelbr. Grun. Archiv 2. R. VII, 434.

Ellipsoid.

66. Sur le déplacement d'un ellipsoïde parallèlement à lui-même pendant lequel le centre décrit une circonférence. Stuyvaert & Mosnat. Mathesis IX, 98.

Vergl. Potential 285, 286.

Elliptische Transcendenten.

67. Sechs Beweise für den die elliptischen Integrale erster Gattung betreffenden Additionssatz. U. Bigler. Grun. Archiv 2. R. VII, 401.
68. Die elliptischen Integrale dritter Gattung, die sich auf solche erster Gattung zurückführen lassen. L. Saalschütz. Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, 199.
69. Sur une méthode pour obtenir le développement en série trigonométrique de quelques fonctions elliptiques. M. Lerch. Acta math. XII, 51.

70. Le equazioni differenziali pei periodi delle funzioni ellitiche. F. Brioschi. Annali mat. Ser. 2, XIV, 238.
71. Alcune formole relative agl'integrali ellittici G. Torelli. Annali mat. Ser. 2, XV, 67.
Vergl. Functionen 84. Mechanik 217.

F.

Factorenfolge.

72. Ueber die Bestimmung eines unendlichen Productes. R. Mildner. Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, 55.
73. Ueber die Entwickelung von Functionen in unendliche Producte. J. W. Bock. Hamb. Mitth. I, 76.

Formen.

74. Studi sulle forme ternarie. F. Brioschi. Annali mat. Ser. 2, XV, 235.

Functionen.

75. Sopra le coupures del sig. Hermite, i Querschnitte e le superficie di Riemann, ed i concetti d'integrazione sì reale che complessa. F. Casorati. Annali mat. Ser. 2, XV, 223; XVI, 1.
76. Sur une généralisation de la théorie des fonctions d'une variable imaginaire. V. Volterra. Acta math. XII, 233.
77. Ueber Differenzirbarkeit und Anschaulichkeit willkürlicher Functionen. A. Köpcke. Hamb. Mitth. I, 128.
78. Analytische Darstellung einer differentiirbaren Function mit Oscillationen in jedem Intervalle. A. Köpcke. Hamb. Mitth. II, 128.
79. Ueber Riemann's punktirt unstetige Function. J. Frischauf. Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, 193.
80. Bemerkungen zur Theorie der mehrfach linear verknüpften Functionen. K. Heun. Acta math. XII, 103. [Vergl. Bd. XXXIV, Nr. 62.]
81. Zur Theorie der Lamé'schen Functionen. P. Jaerisch. Hamb. Mitth. I, 212.
82. Zur Theorie der mehrwerthigen Functionen. G. Vivanti. Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, 382.
83. Développement d'une fonction entière du degré n selon les dérivées de la fonction même avec changement de l'argument d'une dérivée à l'autre. Pisani. Mathesis IX, 80.
84. Ueber das Integral $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin\varphi \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin\varphi^2}}$. Wangerin. Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, 119.
Vergl. Bernoulli'sche Zahlen. Bestimmte Integrale. Determinanten. Differentialgleichungen. Elliptische Transcendenten. Factorenfolge. Formen. Gleichungen. Integration (unbestimmte). Invariantentheorie. Kettenbrüche. Kugelfunctionen. Maxima und Minima. Philosophie der Mathematik 262. Potential. Reihen. Taylor's Reihe. Thetafunctionen. Ultraelliptische Transcendenten. Umkehrungsproblem. Unbestimmte Formen. Variationsrechnung. Zahlentheorie.

G.

Geodäsie.

85. Sulle formule fondamentali della Geodesia geoidica. G. Pucci. Annali mat. Ser. 2, XIV, 193.

Geometrie (abzählende).

86. Ueber die Zahl der Bilder bei einem Winkelspiegel. H. Schubert. Hamburg. Mitth. I, 18.
87. Einstufige Ausartungen der quadratischen Transformation der Ebene. H. Schubert. Hamb. Mitth. I, 31.
Vergl. Geschichte der Mathematik 149. Mehrdimensionale Geometrie.

Geometrie (descriptive).

88. Ueber die parallelperspectivische Auffassung der Zeichnungsebene bei der Grund- und Aufrissprojection. G. Hauck. Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, 254.
89. Points d'inflexion du développement de la section plane d'un cône. A. Thiré. Mathesis IX, 184.

90. Construction des normales communes à deux cônes de révolution. Ph. Breton. Mathesis IX, 73.
91. Ueber Imaginärprojection. Chr. Beyel. Zeitschr. Math. Phys. XXX, 64. [Vergl. Nr. 10.]

Geometrie (höhere).

92. Sur l'analyse barycentrique des courbes. E. Cesaro. Annali mat. Ser. 2, XV, 313.
93. Sur la réversibilité de la transformation linéaire. Cl. Servais. Mathesis IX, 267. [Vergl. Bd. XXXIII, Nr. 59.]
94. Ueber die Fundamentalinvolutionen auf rationalen Curven. W. Stahl. Crelle CIV, 38.
95. Ueber lineare Mannigfaltigkeiten projectiver Ebenenbüschel und collinearer Bündel oder Räume. Th. Reye. Crelle CIV, 211.
96. Die Polaren der algebraischen Curven. R. Gaertner. Grun. Archiv 2. R. VII, 180.
97. Sui sistemi lineari di curve algebriche di genere qualunque. G. Jung. Annali mat. Ser. 2, XV, 277; XVI, 291.
98. Ricerche sulle trasformazioni piane, univoche, involutorie, e loro applicazione alla determinazione delle involuzioni di quinta classe. L. Berzolari. Annali mat. Ser. 2, XVI, 191.
99. Eine Erweiterung des Doppelverhältnissbegriffes. Chr. Beyel. Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, 375.
100. LVII Sätze über das orthogonale Viereck. Chr. Beyel. Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, 218, 290.
101. Zurückführung der Grassmann'schen Definitionen der Curve dritter Ordnung auf die von Chasles, Cayley und Hesse angegebenen Erzeugungsweisen. H. Schroeter. Crelle CIV, 62.
102. Der gegenwärtige Stand unserer Kenntnisse der cubischen Raumcurven. Th. Reye. Hamb. Mitth. II, 43.
103. Ueber die rationale ebene Curve vierter Ordnung. W. Stahl. Crelle CIV, 302. [Vergl. Bd. XXXIII, Nr. 441.]
104. Ueber das System der Tangentialpunkte einer unicursalen Plancurve vierter Ordnung. W. Binder. Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, 272.
105. Quelques propriétés d'une quartique plane trinodale. J. C. Malet. Mathesis IX, 89.
106. Die sphärische Curve vierter Ordnung als Einhüllende von Kreisschaaren. E. Czuber. Grun. Archiv 2. R. VII, 143. [Vergl. Bd. XXX, Nr. 209.]
107. Ueber die Doppelpunkte der Koppelcurve. R. Müller. Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, 303, 372.
108. Ueber Kreisfusspunktcurven. O. Richter. Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, 338.
109. Ueber gewisse ebene Configurationen. J. de Vries. Acta math. XII, 63.
110. Sopra alcune configurazioni piane. V. Martinetti. Annali mat. Ser. 2, XIV, 161.
111. Sulle configurazioni piane μ_3. V. Martinetti. Annali mat. Ser. 2, XV, 1.
112. Die trilineare Verwandtschaft zwischen drei einstufigen Grundgebilden. H. Schubert. Hamb. Mitth. I, 1.
113. Ueber eine gewisse Familie von Configurationen. H. Schubert. Hamb. Mitth. I, 82.

Vergl. Geschichte der Mathematik 150. Kegelschnitte. Kinematik. Kreis. Mannigfaltigkeiten. Mehrdimensionale Geometrie. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung.

Geschichte der Mathematik.

114. Ein babylonisches Grundrissfragment. L. Borchardt. Berl. Akad.-Ber. 1888, 129.
115. Ueber alt-irânische Sternnamen. A. Weber. Berl. Akad.-Ber. 1888, 3.
116. Entstehung der römischen Zahlzeichen. K. Zangemeister. Berl. Akad.-Ber. 1887, 1011.
117. Ueber Gleichungen vierten Grades im X. Buche von den Elementen des Euklid. S. A. Christensen. Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, hist.-lit. Abth. 201.
118. Neue Studien zu Archimedes. J. L. Heiberg. Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, Suppl. 1.
119. Finsterniss-Canon für das Untersuchungsgebiet der römischen Chronologie. F. K. Ginzel. Berl. Akad.-Ber. 1887, 1099.

120. Ueber einige von persischen und arabischen Schriftstellern erwähnte Sonnen- und Mondfinsternisse. F. K. Ginzel. Berl. Akad.-Ber. 1887, 709.
121. Ein Zahlendreieck bei einem Araber des X. Jahrhunderts. M. Steinschneider. Biblioth. math. 1889, 35.
122. Ueber den Liber de similibus arcubus des Ahmed ben Jusuf. M. Curtze. Biblioth. math. 1889, 15.
123. Der arithmetische Tractat des Radulph von Laon. A. Nagl. Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, Suppl. 85.
124. Ueber eine Algorismushandschrift des XII. Jahrhunderts und über die Verbreitung der indisch-arabischen Rechenkunst und Zahlzeichen im christlichen Abendlande. A. Nagl. Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, hist.-lit. Abth. 129, 161.
125. Johannes de Ligneriis. M. Steinschneider. Biblioth. math. 1889, 37.
126. Das Quadripartitum des Joannes de Muris und das praktische Rechnen im XIV. Jahrhundert. A. Nagl. Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, Suppl. 135.
127. Baculus Jacobi. M. Steinschneider. Biblioth. math. 1889, 37.
128. Ueber einige Constructionen von Lionardo da Vinci. M. Cantor. Hamb. Mitth. II, 8.
129. Lucas Paciuolo. H. Staigmüller. Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, hist.-lit. Abth. 81, 121.
130. Beitrag zur Geschichte der Mathematik um 1500. E. Wappler. Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, Suppl. 147.
131. Die mathematischen und naturphilosophischen Disputationen an der Universität Leipzig 1512—1526. H. Suter. Biblioth. math. 1889, 17.
132. Ueber den Familiennamen Bürgi und über die Beziehungen der beiden Snellius zum Hofe in Cassel. R. Wolf. Biblioth. math. 1889, 33.
133. Sur un théorème de Kepler équivalent à l'intégration d'une fonction trigonométrique. G. Eneström. Biblioth. math. 1889, 65.
134. Beiträge zur Geschichte der mathematischen Gesellschaft in Hamburg. J. F. Bubendey. Hamb. Mitth. I, 8.
135. Die ersten Bestimmungen der Rotationsdauer der Sonne durch Beobachtung der Sonnenflecke. E. Gelcich. Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, hist.-lit. Abth. 1, 41.
136. Zur Geschichte des Princips der kleinsten Action. H. v. Helmholtz. Berl. Akad.-Ber. 1887, 225. [Vergl. Nr. 215.]
137. Sur le premier emploi du symbole π pour 3,14159 ... G. Eneström. Biblioth. math. 1889, 28.
138. Eine hebräische Uebersetzung des XI. und XII. Buches der Euklidischen Elemente. M. Steinschneider. Biblioth. math. 1889, 36.
139. Sur la première étude du cercle dit de Taylor. E. Catalan. Mathesis IX, 250.
140. Nekrolog von Paul du Bois-Reymond, † 7. IV. 1889. L. Kronecker. Crelle CIV, 352.
141. Notizie sulle fonti bibliografiche per gli studi di storia delle matematiche in Italia. A. Favaro. Biblioth. math. 1889, 113.
142. Di alcune opere di prospettiva di autori Italiani ommesse nella Histoire de la perspective di M. Poudra. P. Riccardi. Biblioth. math. 1889, 39.
143. Il Bulletino di Bibliografia e di Storia delle scienze matematiche e fisiche pubblicato da D. B. Boncompagni (1868—1887). A. Favaro. Biblioth. math. 1889, 109.
144. Quelques mots sur l'histoire des connaisances antérieures à la science. V. Bobynin. Biblioth. math. 1889, 104.
145. Bibliographie suédoise de l'histoire des mathématiques 1667—1888. G. Eneström. Biblioth. math. 1889, 1.
146. Sur les études historico-mathématiques en Pologne. S. Dickstein. Biblioth. math. 1889, 43.
147. Bibliographische Notiz über das Studium der Geschichte der Mathematik in Dänemark. S. A. Christensen & J. L. Heiberg. Biblioth. math. 1889, 75.
148. Ueber das Studium der Geschichte der Mathematik in Norwegen. E. Holst. Biblioth. math. 1889, 97.
149. Addizioni alle notizie sulla Geometria numerativa. G. Loria. Biblioth. math. 1889, 23.
150. Rassegna di alcuni scritti sui poligoni di Poncelet. G. Loria. Bibl. math. 1889, 67.

Vergl. Mechanik 223. Trigonometrie 302. Zahlentheorie 329.

Gleichungen.

151. Ueber einen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra. F. v. Dalwigk. Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, 185. [Vergl. Bd. XXIX, Nr. 230.]
152. Anwendung der Modulsysteme auf eine elementare algebraische Frage. E. Netto. Crelle CIV, 321.
153. Principii di una teoria sulla trasformazione delle equazioni algebriche. F. Brioschi. Annali mat. Ser. 2, XVI, 329.
154. Détermination du degré de multiplicité des racines d'une equation. A. Demoulin. Mathesis IX, 268.
155. Sur les limites des racines d'une équation. A. Gob. Mathesis IX, 269. — A. Demoulin ibid. 269.
156. Sulle funzioni definite da un'equazione algebrico-differenziale del primo ordine. G. Vivanti. Annali mat. Ser. 2, XVI, 117.
157. Sopra una trasformazione delle equazioni del quinto grado. F. Brioschi. Annali mat. Ser. 2, XVI, 181.
158. Sur l'équation du sixième degré. F. Brioschi. Acta math. XII, 83.
159. Sur l'équation $x^{2n}+x^{2n-2}+\cdots+x^2+1=0$. Durfee. Mathesis IX, 196. Pisani & Gelin ibid. 197.
160. Ueber die Wurzeln einiger transcendenter Gleichungen. A. Hurwitz. Hamb. Mitth. II, 25.
161. Sur une nouvelle méthode de résolution des équations linéaires et sur l'application de cette méthode au calcul des déterminants. B. J. Clasen. Mathesis IX, Suppl. 2.
162. Ueber die Auflösbarkeit eines Systems linearer Gleichungen. C. Schmidt. Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, 189.
163. Résolution de 3 équations du 4. degré. Brocard etc. Mathesis IX, 258.
164. Résolution de trois équations entre autant d'inconnues sous certaines conditions. H. Brocard etc. Mathesis IX, 279.

Vergl. Differentialgleichungen 40. Geschichte der Mathematik 117.

H.

Hydrodynamik.

165. Hydrodynamik nach dem Hamilton'schen Princip. J. W. Bock. Hamb. Mitth. I, 108.

Hyperbel.

166. Hyperbole engendrée au moyen des tangentes d'un cercle. H. Brocard etc. Mathesis IX, 260.
167. D'un point donné dans un plan mener une sécante par un angle de façon que le segment entre les côtés de l'angle ait une longueur donnée. G. Russo. Mathesis IX, 96. — J. Neuberg ibid. 96, 189.

I.

Integration (unbestimmte).

168. Reduction einiger Integrale. W. Láska. Grun. Archiv 2. R. VII, 110.
169. $\int \frac{(\lambda-1)\cos(\lambda+1)x+(\lambda+1).\cos(\lambda-1)x}{\cos x^2}\,dx$. Cl. Servais. Mathesis IX, 236.

Vergl. Geschichte der Mathematik 133.

Integratoren.

170. Ueber den Hohmann-Coradi'schen Flächenintegrator. F. H. Reitz. Hamb. Mitth. I, 48.

Invariantentheorie.

171. Zur Invariantentheorie. Veltmann. Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, 321.
172. Sui parametri e gli invarianti delle forme quadratiche differenziali. G. Ricci Annali mat. Ser. 2, XIV, 1.
173. Sopra certi covarianti simultanei dei sistemi di due quartiche e di due quintiche. E. Pascal. Annali mat. Ser. 2, XVI, 85.

Vergl. Differentialgleichungen 41.

K.

Kegelschnitte.

174. Zur Construction der Kegelschnittslinien. H. Schober. Grun. Archiv 2. R. VII, 99.
175. Ueber die Aufgabe, durch fünf Punkte einen Kegelschnitt zu legen. R. Böger. Hamb. Mitth. I, 131.
176. Ueber die Indicatricen der Kegelschnitte. A. Haas. Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, 65.
177. Bemerkungen über Pol und Polare eines Kegelschnittes. Chr. Beyel. Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, 249.
178. Sur le cercle de Joachimsthal. G. de Longchamps. Mathesis IX, 153.
179. Ueber die Osculationskreise bei Kegelschnitten. A. Weiler. Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, 1, 177, 282.
180. Eine projectivische Eigenschaft des Pascal-Brianchon'schen Sechsecks. O. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, 188.
181. Ueber eine Anwendung der Symbolik bei einer Aufgabe aus der Theorie der Kegelschnitte. C. Schmidt. Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, 365.
182. Coniques décrites par deux points rattachés à un triangle tandis qu'un troisième point décrit une droite. E. Lemoine. Mathesis IX, 167. — Emmerich etc. ibid. 169.
183. Lieu des points desquels on mène à la courbe $x^3 = a^2 y$ deux tangentes faisant avec la direction des x des angles complémentaires. H. Brocard. Mathesis IX, 137.
184. Sur deux droites tournantes autour de leurs extrémités avec la même vitesse angulaire. Meurice etc. Mathesis IX, 198.
185. Conique décrite par les points d'intersection de deux droites variables passant par les extrémités de la base d'un triangle isoscèle. De Bozoky etc. Mathesis IX, 236.
186. Lieux du centre du cercle circonscrit et du centre du cercle des neuf points d'un triangle à sommet fixe. François etc. Mathesis IX, 255. — S. B. ibid. 256.
187. Enveloppe d'une droite satisfaisant à la condition $\lambda a^2 + \mu b^2 = k^2$. Verniory & Déprez. Mathesis IX, 203.
188. Trouver l'enveloppe des cercles décrits sur les cordes focales d'une conique comme diamètres. Mandart. Mathesis IX, 165. — Mosnat & Verniory ibid. 166. — Déprez ibid. 167.
189. Ueber geometrische Orte und Enveloppen bei Kegelschnittbüscheln und Kegelschnittschaaren. J. Heller. Grun. Archiv 2. R. VII, 325.

Vergl. Ellipse. Hyperbel. Kreis. Mehrdimensionale Geometrie 230. Parabel.

Kettenbrüche.

190. Ueber eine besondere Art der Kettenbruchentwickelung reeller Grössen. A. Hurwitz. Acta math. XII, 367.

Kinematik.

191. Die Krümmungsradien der Polbahnen. M. Grübler. Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, 305. [Vergl. Bd. XXXIV, Nr. 155.]
192. Ueber den Ort der Axen derjenigen Schraubenbewegungen, durch welche eine Strecke in eine beliebige Lage im Raume gebracht werden kann. P. Miloslav. Grun. Archiv 2. R. VII, 1.

Kreis.

193. Déduction géométrique du côté d'un polygone régulier de $2n$ côtés connaissant celui du polygone de n côtés et le rayon du cercle circonscrit. E. Francken. Mathesis IX, 109.
194. Sur quelques hexagones circonscrits à des cercles. Mdlle. Bouwmeester etc. Mathesis IX, 226. — Emmerich ibid. 228. — Déprez ibid. 229.
195. Circonférence lieu géométrique de l'intersection de deux droites. Déprez & Russo. Mathesis IX, 204.
196. Deux segments de droites vus de tout point d'une circonférence donnée sous des angles égaux ou supplémentaires. Russo etc. Mathesis IX, 277.
197. Circonférence passant par deux points donnés et tangente à une droite donnée. E. Lebon. Mathesis IX, 184.
198. Sur 4 points d'une circonférence. François etc. Mathesis IX, 148.

199. Sur les centres de similitude de deux cercles. E. Vigarié. Mathesis IX, 106.
200. Sur les tangentes communes à deux circonférences. C. Brandza. Mathesis IX, 271.
201. Sur deux cercles tangents entre eux et touchant respectivement les côtés de deux angles d'un triangle. Déprez. Mathesis IX, 224.
202. Trouver au moyen de la règle et de l'équerre le centre radical de trois cercles non tracés tous les trois. Déprez & Molenbroek. Mathesis IX, 200.

Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 11. Ellipse 62, 63. Geometrie (höhere) 108. Kegelschnitte 179. Maxima und Minima 212.

Kugel.

203. Ueber das Pentagramma mirificum. H. Ahlborn. Hamb. Mitth. II, 69.
204. Geometrie der Kreise einer Kugel. F. Schumacher. Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, 257.
205. L'arc de grand cercle est le plus court chemin d'un point à un autre sur la sphère. P. Mansion. Matthesis IX, 112, 212.

Kugelfunctionen.

206. Bemerkung zu Dr. W. Braun's Mittheilung Bd. XXXIII S. 314. L. Schendel. Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, 191.

L.

Lemniskate.

207. Die Lemniskate. E. Oekinghaus. Grun. Archiv 2. R. VII, 337.
208. Ueber Cassini'sche Curven. U. Bigler. Grun. Archiv 2. R. VII, 311.

Vergl. Oberflächen 244.

M.

Magnetismus.

209. Methode zur Prüfung der homogenen Magnetisirung eines Magnetstabes. E. Hoppe. Hamb. Mitth. II, 105.

Mannigfaltigkeiten.

210. Su una corrispondenza fra un gruppo di punti ed un continuo ambedue lineari. R. Bettazzi. Annali mat. Ser. 2, XVI, 49.

Maxima und Minima.

211. Théorèmes sur les minimums. E. Gelin. Mathesis IX, 185.
212. Maximum d'un segment de cercle dont la corde aboutit dans un point donné d'une tangente donnée. Fauquembergue. Mathesis IX, 192.

Vergl. Kugel 205. Variationsrechnung.

Mechanik.

213. Zurückführung der Gleichungen relativer Bewegung auf die canonische Form. J. Rachmaninow. Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, 25.
214. Ueber Kraftlinien der Anziehung von Linien. R. Hoppe. Grun. Archiv 2. R. VII, 330.
215. Sur les considérations d'Ostrogradsky et de Jacobi relatives au principe de la moindre action. G. Sabinine. Annali mat. Ser. 2, XV, 27. [Vergl. Nr. 136.]
216. Zum Problem der Brachistochrone. L. Heffter. Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, 313.
217. Die elliptischen Integrale der Bewegung eines schweren Punktes in der verticalen Parabel. E. Oekinghaus. Grun. Archiv 2. R. VII, 34.
218. Sur le mouvement d'un fil dans un plan fixe. P. Appell. Acta math. XII, 1.
219. Die Darstellung der cyklischen Curven und ihre Bedeutung für die Schwingungstheorie. C. Eichler. Hamb. Mitth. II, 92.
220. Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe. S. Kowalevski. Acta math. XII, 177.
221. Die Bewegung von Massenpunkten nach dem Newton'schen Gesetze. K. W. O. Schrader. Hamb. Mitth. I, 6.
222. Untersuchungen über die Attraction zweier homogenen Körper. E. Liebenthal. Hamb. Mitth. I, 43.
223. Bemerkungen über Dirichlet's letzte Arbeiten. L. Kronecker. Berl. Akad.-Ber. 1888, 439.

224. Zur Theorie des Billardspiels. J. Keferstein. Hamb. Mitth. I, 113.
225. Ueber die Bewegung eines Luftballons in ruhiger Luft. E. Oekinghaus. Grun. Archiv 2. R. VII, 445.

Vergl. Aerodynamik. Astronomie. Elasticität. Elektrodynamik. Geschichte der Mathematik 136. Hydrodynamik. Magnetismus. Optik. Potential. Wärmelehre.

Mehrdimensionale Geometrie.

226. Die n-dimensionale Verallgemeinerung des dreidimensionalen Satzes, dass es zwei Strahlen giebt, welche vier gegebene Strahlen schneiden. H. Schubert. Hamb. Mitth. I, 87.
227. Lösung des Charakteristikenproblems für lineare Räume beliebiger Dimension. H. Schubert. Hamb. Mitth. I, 134.
228. Ueber Räume zweiten Grades. H. Schubert. Hamb. Mitth. I, 290.
229. Sulle superficie e le varietà degli spazi a più dimensioni le cui sezioni sono curve normali del genere p. P. del Pezzo. Annali mat. Ser. 2, XV, 115.
230. Kegelschnitt-Anzahlen als Functionen der Raumdimension n. H. Schubert. Hamb. Mitth. II, 172.

O.

Oberflächen.

231. Zur Krümmungstheorie der Flächen. R. v. Lilienthal. Crelle CIV, 341.
232. Teorema relativo alle linee di curvatura delle superficie e sue applicazioni. G. Pirondini. Annali mat. Ser. 2, XVI, 61.
233. Geometrischer Beweis eines Satzes der Flächentheorie. E. Czuber. Grun. Archiv 2. R. VII, 432.
234. Sulle superficie elicoidali. G. Pirondini. Annali mat. Ser. 2, XVI, 137.
235. Anzahl der Moduln einer Classe algebraischer Flächen. M. Noether. Berl. Akad.-Ber. 1888, 123.
236. Sur la génération des surfaces et des courbes gauches par des faisceaux des surfaces. J. S. Vaněček & M. N. Vaněček. Annali mat. Ser. 2, XIV, 73; XV, 73.
237. Aggiunte alla memoria sopra i sistemi tripli ortogonali di Weingarten. L. Bianchi. Annali mat. Ser. 2, XIV, 115. [Vergl. Bd. XXXI, Nr. 600.]
238. Die flache Kreisschraubenfläche. Fr. Schiffner. Grun. Archiv 2. R. VII, 54.
239. Sur une surface du 3. degré. Choisis etc. Mathesis IX, 252.
240. Untersuchungen über eine Fläche dritter Ordnung, welche von Kreisen erzeugt wird, die durch zwei Punkte gehen und eine Gerade treffen. Fr. Schiffner. Grun. Archiv 2. R. VII, 104.
241. Ueber die Flächen dritter Ordnung (F^3) und vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt (F^4), insbesondere über deren Geraden. Küpper. Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, 129.
242. Su le superficie di 4. ordine con conica doppia. H. G. Zeuthen. Annali mat. Ser. 2, XIV, 31.
243. Ueber eine specielle Fläche vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt. F. Rudio. Crelle CIV, 85.
244. Ueber die Schaaren von Flächen vierten Grades mit 16 singulären Punkten, welche durch eine Lemniskate gehen. W. Schjerning. Grun. Archiv 2. R. VII, 113.
245. Ueber die sogenannten Strahlencongruenzen ohne Brennfläche. R. Sturm. Hamb. Mitth. II, 61.

Vergl. Geodäsie. Integratoren.

Oberflächen zweiter Ordnung.

246. Einfache Ableitung der Bedingungen, welche die Coefficienten einer Rotationsfläche zweiten Grades erfüllen müssen. Fr. Hofmann. Grun. Archiv 2. R. VII, 101.
247. Ueber den Tangentenkegel einer Fläche zweiter Ordnung. Wangerin. Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, 126.
248. Ueber die Flächen zweiten Grades, welche ein gegebenes Tetraeder zum gemeinsamen Polartetraeder haben. K. Meister (A. Rasche). Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, 6, 73. [Vergl. Bd. XXXII, Nr. 163.]
249. Ueber das räumliche Achteck, welches die Schnittpunkte dreier Oberflächen zweiter Ordnung bilden. H. Dobriner. Acta math. XII, 339. — H. G. Zeuthen ibid. 362.

250. Su certi gruppi di superficie di secondo grado. D. Montesano. Annali mat. Ser. 2, XIV, 131.
Vergl. Ellipsoid. Kugel.

Optik.

251. Sulla propagazione libera e perturbata delle onde luminose in un mezzo isotropo. G. A. Maggi. Annali mat. Ser. 2, XVI, 21.
252. Ueber die Brechung des Lichtes durch Prismen. A. Gleichen. Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, 161.
253. Ueber den optischen Einfluss sehr kleiner Stofftheilchen. J. Kiessling. Hamb. Mitth. I, 289.
254. Die Refractionsfläche des Meeresbodens. E. Oekinghaus. Grun. Archiv 2. R. VII, 440.
255. Zur Erklärung des Sehens mit bewaffnetem Auge. J. Kiessling. Hamb. Mitth. II, 125.
256. Ueber die Verwerthung der Resultate photometrischer Messungen. H. Krüss. Hamb. Mitth. I, 73.
257. Spectralapparat mit automatischer Einstellung der Prismen. H. Krüss. Hamb. Mitth. II, 153.
Vergl. Astronomie 25. Geometrie (abzählende) 86. Geschichte der Mathematik 142.

P.

Parabel.

258. Normales aux enveloppes de certaines droites dans un plan tangentes à une même parabole. E. Cesaro. Mathesis IX, 83.
259. Enveloppe de l'axe d'une parabole qui reste tangente à une parabole donnée tandis que son foyer se déplace sur l'axe de la courbe fixe. J. Neuberg. Mathesis IX, 118.
260. Lieu des sommets et enveloppe des axes des paraboles tangentes à une droite donnée et passant par deux points fixes sur la perpendiculaire à la droite. Déprez. Mathesis IX, 254.
261. Sur les paraboles passant par deux sommets d'un triangle équilatéral, la directrice passant par le troisième sommet. Verniory. Mathesis IX, 232.
Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 15.

Philosophie der Mathematik.

262. Ueber den Begriff der Zahl. H. Keferstein. Hamb. Mitth. II, 119.
263. Une discussion sur la ligne droite entre Fourier et Monge. Mathesis IX, 139.

Planimetrie.

264. Géométrie élémentaire récente. M. J. Casey. Mathesis IX, 5,
265. Premier inventaire de la géométrie du triangle. E. Vigarié. Mathesis IX, Suppl. 3.
266. Der Simson'sche Satz vom Dreieck und dessen Erweiterung. H. Schotten. Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, 311.
267. Notes de géométrie récente. A. Gob. Mathesis IX, Suppl. 1.
268. Triangles automédians. Jeřábek etc. Mathesis IX, 261.
269. Théorèmes sur le triangle. Emmerich etc. Mathesis IX, 101.
270. Théorèmes sur le triangle. Cl. Thiry. Mathesis IX, 95.
271. Théorèmes sur le triangle dont les sommets sont les points de milieux entre les sommets homologues de deux triangles donnés. Emmerich. Mathesis IX, 84. — Denys etc. ibid. 85. — J. Neuberg ibid. 86.
272. Einige Beziehungen zwischen den drei Höhen und zwischen den drei seitenhalbirenden Ecktransversalen eines Dreiecks. C. Pabst. Grun. Archiv 2. R. VII, 10.
273. Triangle dans lequel une hauteur, une médiane et une bissectrice menées chacune d'un autre sommet se coupent en un même point. Droz etc. Mathesis IX, 229.
274. Beweis eines Dreieckssatzes. R. Caspar. Grun. Archiv 2. R. VII, 109.
275. Sur les démonstrations de quelques propriétés métriques du triangle. E. Lebon. Mathesis IX, 245.
276. Parallélogramme formé par deux côtés d'un triangle et les parallèles qu'on leur a menées par un point du troisième côté. Pisani etc. Mathesis IX, 124.
277. Ueber Vierecke am Kreise. Beyssell. Grun. Archiv 2. R. VII, 426.

278. Metrische Relationen am Sehnenviereck. O. Zimmermann. Grun. Archiv 2. R. VII, 64.
279. Neues über Vier- und Vielecke. B. Sporer. Grun. Archiv 2. R. VII, 389.
280. Rotation d'une figure plane formée de droites autour d'un point fixe. Laisant. Mathesis IX, 150.
281. Projections des côtés d'un angle sur sa bissectrice. Brocard etc. Mathesis IX, 171.
282. Théorèmes de géométrie. H. van Aubel. Mathesis IX, 188.
283. Problèmes de géométrie. Fuhrmann etc. Mathesis IX, 243.
Vergl. Geschichte der Mathematik 128, 139. Kreis. Philosophie der Mathematik 263. Trigonometrie. Zahlentheorie 346.

Potential.

284. Ueber Potentialwerthe verschiedener Kräfte und Folgerungen daraus. J. W. Bock. Hamb. Mitth. I, 119.
285. Das Potential des Ellipsoids. E. Liebenthal. Hamb. Mitth. I, 237.
286. Bestimmung der Potentialfunction eines homogenen Ellipsoids. Jahnke. Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, 331.
287. Potential einer elliptischen Walze. U. Bigler. Grun. Archiv 2. R. VII, 225. [Vergl. Bd. XXXIV, Nr. 225.]
288. Das Potential homogener ringförmiger Körper, insbesondere eines Ringkörpers mit Kreisquerschnitt. Züge. Crelle CIV, 89.

R.

Reihen.

289. Ueber die Dirichlet'sche Methode der Werthbestimmung der Gauss'schen Reihen. L. Kronecker. Hamb. Mitth. II, 32.
290. Ueber die Reihe $\sum_{1}^{\infty} sin(n!x\pi)$. A. Köpcke. Hamb. Mitth. I, 106.
291. Ueber Reihentheoreme. W. Láska. Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, 316.
292. Neuer Beweis einer Kirchhoff'schen Formel. M. Lerch. Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, 63. [Vergl. Bd. XXXII, Nr. 389.]
293. Ueber eine besondere Art von Reihen. F. Rogel. Grun. Archiv 2. R. VII, 372.
294. Relations entre les nombres de deux séries. Molenbroek etc. Mathesis IX, 234.
295. Étant données deux progressions arithmétiques on veut sommer autant de termes de l'une que préscrit un terme de l'autre. François etc. Mathesis IX, 102.
296. Limite de la somme $\frac{n}{p-1} - \left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^p + \left(\frac{n}{n+2}\right)^p + \cdots\right]$ lorsque n augmente. W. Mantel. Mathesis IX, 274.
Vergl. Elliptische Transcendenten 69. Taylor's Reihe.

S.

Stereometrie.

297. Projections d'un triangle sur tous les plans passant par une droite donnée dans le plan du triangle. Déprez & Decamps. Mathesis IX, 259.
Vergl. Kugel. Tetraeder.

T.

Taylor'sche Reihe.

298. Une nouvelle forme du reste dans la formule de Taylor. G. Peano. Mathesis IX, 182.

Tetraeder.

299. Construire un tétraèdre équifacial $SABC$, connaissant la droite sur laquelle est l'arête SA, le plan mené par SA parallèlement à BC, un point de BC, enfin un triangle semblable à ABC. Beyens & Déprez. Mathesis IX, 170.

Thetafunctionen.

300. Combinatorische Ableitung einiger Eigenschaften der Θ-Functionen. J. W. Bock. Hamb. Mitth. II, 74.
301. Ueber einige Differentialbeziehungen im Gebiete der Thetafunctionen zweier Veränderlichen. M. Krause. Annali mat. Ser. 2, XV, 173.

Trigonometrie.

302. La trigonométrie rectiligne réduite à une seule formule. J. Ozanam. Mathesis IX, 161. — Brocard ibid. — P. Mansion ibid. 162, 181, 265.
303. Ueber trigonometrische Functionen von Winkelsummen und über Relationen zwischen Polygonwinkeln. Seipp. Grun. Archiv 2. R. VII, 27.
304. Relations entre les sinus de quelques angles. Verniory. Mathesis IX, 147.
305. Problème de la droite inaccessible. E. Gelin. Mathesis IX, 93.
306. Relation entre les cotés et les angles de tout triangle. J. Beyens. Mathesis IX, 276.
307. Triangle dont les angles présentent la relation

$$\cos A \,.\, \cos B \,.\, \cos C = \left(2 \sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2}\right)^2.$$

Beyens. Mathesis IX, 100. — Verniory & Fr. Falisse ibid. 100.
308. Relations entre les distances des sommets d'un triangle 1. au centre du cercle inscrit, 2. à l'orthocentre. Déprez. Mathesis IX, 205.
Vergl. Gleichungen 159.

U.

Ultraelliptische Transcendenten.

309. Sulla teorica delle funzioni iperellittiche di primo ordine. F. Brioschi. Annali mat. Ser. 2, XIV, 241.
310. Ueber hyperelliptische Integrale zweiter und dritter Gattung. M. Krause. Annali mat. Ser. 2, XV, 187.
311. Darstellung der hyperelliptischen Integrale zweiter und dritter Gattung und erster Ordnung durch Integrale erster Gattung. G. Schirdewahn. Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, 355.
312. Ueber den Zusammenhang der hyperelliptischen σ- und ϑ-Functionen. J. Schröder. Hamb. Mitth. II, 162.

Umkehrungsproblem.

313. Ueber die Umkehrung von Functionen zweier Veränderlichen. L. Fuchs. Berl. Akad.-Ber. 1887, 99.

Unbestimmte Form.

314. Ueber in unbestimmter Form erscheinende Ausdrücke. L. Saalschütz. Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, 192. [Vergl. Bd. XXXIII, Nr. 248.]

V.

Variationsrechnung.

315. Sur le minimum d'une intégrale. G. Sabinine. Annali mat. Ser. 2, XIV, 13.
Vergl. Mechanik 215, 216.

W.

Wärmelehre.

316. Zur mechanischen Wärmetheorie. B. W. Stankewitsch. Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, 111.
Vergl. Aerodynamik 6.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

317. Die sociale Gesetzgebung und die Mathematik. W. Lazarus. Hamb. Mitth. II, 158.
318. Die mathematischen Grundlagen der Militärdienstversicherung. F. Fischer. Hamb. Mitth. I, 4.
319. Probabilité d'un certain jeu de tirage. B. Peirce. Mathesis IX, 97. — P. Mansion ibid. 98.
320. Ermittelung der Tragweite der Neunerprobe bei Kenntniss der subjectiven Genauigkeit des Rechnenden. Fr. Hofmann. Ztschr. Math. Phys. XXXIV, 116. — A. Emmerich ebenda 320.
Vergl. Zahlentheorie 336.

Z.

Zahlentheorie.

321. Zur Theorie der allgemeinen complexen Zahlen und der Modulsysteme. L. Kronecker. Berl. Akad.-Ber. 1888, 429, 447, 557, 595.
322. Lehrsätze über arithmetische Eigenschaften der Irrationalzahlen. E. B. Christoffel. Annali mat. Ser. 2, XV, 253.

323. Die Bestimmung der Anzahl Primzahlen, welche nicht grösser als eine gegebene Zahl sind. F. Rogel. Grun. Archiv 2. R. VII, 381.
324. Eine Methode zur Bestimmung der primitiven Wurzeln der Congruenz $g^{p-1} \equiv 1$ $(mod. p)$ für einen reellen Primzahlmodul p. H. Keferstein. Hamb. Mitth. I, 256.
325. Ueber eine neue zahlentheoretische Function. J. W. Bock. Hamb. Mitth. I, 187, 201.
326. Fonctions énumératrices. E. Cesaro. Annali mat. Ser. 2, XIV, 141.
327. Ueber einen elementaren Beweis des Satzes, dass jede Primzahl von der Form $4n+1$ gleich der Summe zweier ganzen Quadratzahlen ist. J. W. Bock. Hamb. Mitth. I, 101.
328. Décomposer $\frac{1}{3}(3n^4 - 4n^3 + n)$ en somme algébrique de $2(n-1)$ carrés. V. Jamet. Mathesis IX, 119.
329. Ueber die arithmetischen Sätze, welche Lejeune-Dirichlet in seiner Breslauer Habilitationsschrift entwickelt hat. L. Kronecker. Berl. Akad.-Ber. 1888, 417.
330. Zur Anwendung der Geometrie auf die Zahlentheorie. E. Busche. Crelle CIV, 32.
331. Beweis des quadratischen Reciprocitätsgesetzes in der Theorie der aus den vierten Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen. E. Busche. Hamb. Mitth. II, 80.
332. Schering's Beweis des Reciprocitätssatzes für quadratische Reste, dargestellt mit Hilfe des Zeichens $[x]$. J. Hacks. Acta math. XII, 109.
333. Première partie du chapitre XIII de la note sur la théorie des résidus quadratiques. A. Genocchi. Crelle CIV, 345.
334. Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste. L. Kronecker. Crelle CIV, 348.
335. Sur une proposition de la théorie asymptotique des nombres. E. Cesaro. Annali mat. Ser. 2, XVI, 178.
336. Sur l'équation $ax + by = n$ et la probabilité que ses solutions entières non négatives soient d'un certain nombre. J. Neuberg. Mathesis IX, 116.
337. Sur l'équation $x + y + z = n + 2$. Bellens. Mathesis IX, 125. — Verniory ibid. 126.
338. Sulla risoluzione in numeri positivi, interi o nulli, delle equazioni: $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_n = r$; $1\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + \cdots + n\lambda_n = n$. E. Sadun. Annali mat. Ser. 2, XV, 209.
339. Sur l'équation indéterminée $U^4 + V^4 = S^4 + W^4$. E. Fauquembergue. Mathesis IX, 241.
340. Ueber die Gleichung $x^p + y^p = z^p$. A. Rieke. Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, 238.
341. Sur les diviseurs des nombres $10^n \pm 1$. E. Gelin. Mathesis IX, 110. [Vergl. Bd. XXXIII, Nr. 266.]
342. Divisibilité des nombres. Mathesis IX, 184.
343. Quelles valeurs de a et de b rendent $\frac{249a^2}{113a + 89b}$ nombre entier? V. Jamet. Mathesis IX, 278.
344. Sur une question d'arithmétique. E. Catalan. Mathesis IX, 249.
345. Ein Satz aus der Zahlenlehre. A. Rieke. Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, 190.
346. Le triangle des côtés 3, 4, 5 est le seul dont les côtés sont des entiers consécutifs et dans lequel le rapport de deux angles est un nombre entier. E. Cesaro. Mathesis IX, 142.

Vergl. Combinatorik 30. Determinanten 35. Geschichte der Mathematik 121.

Historisch-literarische Abtheilung.

Recensionen.

Elementare Mechanik als Einleitung in das Studium der theoretischen Physik. Von Dr. WOLDEMAR VOIGT, o. ö. Professor der Physik an der Universität Göttingen. Leipzig, Veit & Comp. 1889.

Unter den neueren Lehrbüchern der Mechanik nimmt das Werk von Voigt, welches uns hier zur Besprechung vorliegt, eine hervorragende Stelle ein. Besonders der Physiker wird darin ein werthvolles Hilfs- und Handbuch finden. Man würde irren, wenn man aus dem Titel „Elementare Mechanik" den Schluss ziehen wollte, dass von der mathematischen Analysis in dem Werke nur ein beschränkter Gebrauch gemacht sei. Die Hilfsmittel der Differential- und Integralrechnung, ohne die ein richtiges Verständniss der Grundgesetze der Mechanik nicht möglich ist, sind in reichlichem Maasse benutzt; nur von dem Gebrauch specieller mathematischer Disciplinen, wie der elliptischen Functionen, der Fourier'schen Reihen, der Kugelfunctionen und Aehnlichem ist Umgang genommen.

Auch darin unterscheidet sich das Werk von anderen mehr mathematische Ziele verfolgenden, dass überall, sowohl bei der Ableitung allgemeiner Gesetze, als bei der Anwendung auf einzelne Probleme in erster Linie massgebend ist, was für das Verständniss der in der Natur oder im physikalischen Laboratorium vorkommenden Vorgänge brauchbar und wichtig ist, dass dem Anschaulichen, Concreten überall der Vorzug gegeben wird. Daher werden auch Probleme, in welchen Kräfte wie Reibung und Luftwiderstand wirken, deren genaue Gesetze nicht bekannt sind und denen deshalb der Mathematiker gerne aus dem Wege geht, nicht vermieden, sondern eingehend und mit Vorliebe behandelt.

Wenn Kirchhoff in seinem berühmten Buche als die Aufgabe der Mechanik die Beschreibung und nicht die Erklärung der Bewegungsvorgänge in der Natur hingestellt hat und durch Einschränkung der Aufgabe zu einem Lehrgebäude zu gelangen sucht, welches allen Anforderungen mathematischer und logischer Strenge genügt, welches aber freilich auf manche Frage, die an die Mechanik sonst gestellt wurde, keine Antwort hat, steht das Voigt'sche Werk auf einem durchaus andern Standpunkte. Es werden hier von vornherein neben dem Begriff Raum, Zeit, Geschwindigkeit, Beschleunigung die Vorstellung der mit Trägheit begabten Materie zugelassen, die anschauliche Vorstellung eines Impulses als Ursache der Geschwindigkeitsänderung benutzt und daraus der Begriff einer Kraft gewonnen. Diese Betrachtung geht, gegen den gewöhnlichen Gebrauch, nicht von der geradlinigen Bewegung aus, wodurch der Leser von vornherein darauf hingewiesen wird, dass die Beschleunigung keineswegs immer in die Richtung der Geschwindigkeit fällt, wie es bei der geradlinigen Bewegung der Fall ist.

Das Product aus Masse und Beschleunigung ist dabei also durchaus nicht mit dem Begriffe der Kraft identisch, so dass nur zwei Namen für dieselbe Sache wären, sondern das Product ist nur das Maass für die Kraft, das Mittel zur Anwendung der Analysis auf die Mechanik.

Der Uebergang vom Impuls zu der stetig wirkenden Kraft geschieht nach den Grundsätzen der Infinitesimalrechnung.

Die Statik tritt bei dieser Auffassung nur als ein ganz specieller Fall der Mechanik auf, wie denn auch die statischen Lehrsätze nur beiläufig berührt werden. Hieraus ergiebt sich für die Behandlung der Bewegung bedingter Systeme der Weg, der den thatsächlichen Verhältnissen entsprechend ist, dass dem Einfluss der Bedingungen durch die Einführung besonderer Reactionskräfte Rechnung getragen wird, die in jedem besondern Falle nur insoweit in Wirksamkeit treten, als sie durch den Bewegungsvorgang in Anspruch genommen werden. Hieraus leiten sich in allen den behandelten Fällen, ohne Hilfe der allgemeinen Principien, wie des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten und des d'Alembert'schen, welche in dem ganzen Buche nicht vorkommen, die Bewegungsgleichungen her.

So werden, um hier nur einen der wichtigsten Fälle zu erwähnen, im ersten Theil, der von der Bewegung materieller Punkte handelt, für ein unter dem Einfluss beliebiger Kräfte stehendes freies Punktsystem der Satz von der Bewegung des Schwerpunktes und die Flächensätze hergeleitet. Diese Sätze liefern sechs Differentialgleichungen für die Bewegung des Systems, in welchen alle inneren Kräfte, wenn sie nur dem Princip der Wirkung und Gegenwirkung entsprechen und zwischen je zwei Punkten des Systems die Richtung der Verbindungslinie haben, herausgefallen sind.

Da nun die Reactionskräfte zwischen den einzelnen Theilen eines starren Körpers, wie sie sonst auch beschaffen sein mögen, gewiss diese Eigenschaften haben, da ein starrer Körper niemals unter dem alleinigen Einfluss seiner inneren Kräfte in Bewegung kommen kann, so sind die beiden genannten Lehrsätze auf ihn anwendbar und geben unmittelbar die sechs Differentialgleichungen der Bewegung eines starren Körpers, welche im zweiten Theile, der von der Mechanik starrer Körper handelt, auf zahlreiche besondere Fälle angewandt werden.

Wir heben aus dem reichen Inhalt des Werkes einzelne bemerkenswerthe Punkte hervor.

Die Reibung wird im I. Theile erklärt als eine Kraft, welche der stattfindenden oder von den sonstigen Kräften erstrebten Bewegung entgegenwirkt, deren Grösse mit der Inanspruchnahme wechselt, aber einen gewissen Maximalwerth nicht übersteigen kann. Interessante Anwendungen auf die eigenthümliche Bewegung einer Kugel unter dem Einflusse einer anfänglichen Rotations- und Translationsgeschwindigkeit werden hiervon im II. Theile (§ 24) gemacht. Es ergiebt sich dabei ein sehr lehrreiches Beispiel zu einer kurz zuvor angestellten Betrachtung, unter welchen Umständen man berechtigt ist, einen Körper von kleinen Dimensionen bei der Bewegung als materiellen Punkt zu betrachten. Es zeigt sich, dass diese Vereinfachung nicht zulässig ist, wenn die auf einen Punkt des Körpers wirkenden Kräfte von der Gestalt und der Zusammensetzung des ganzen Körpers abhängig sind. Ein Beispiel hierzu ist eine auf einer vollkommen reibenden, d. h. jedes Gleiten ausschliessenden Bahn herabrollende Kugel, bei welcher die Beschleunigung zwar constant, aber, wie klein auch die Dimensionen der Kugel seien, immer nur der $\frac{5}{7}$te Theil von der ist, wie sie bei einem ohne Reibung herabgleitenden Punkte sein würde.

Hierin ist die vollständige Theorie des Galilei'schen Fallversuches auf der schiefen Ebene enthalten.

Es seien ferner hier erwähnt die Betrachtungen des § 25 über die Anziehung und das Potential von räumlich vertheilten Massen, welche nach dem Newton'schen Gesetz wirken, und die Anwendungen auf die Gesetze der Schwere auf der Erde.

Nach Aufstellung der Kraftcomponenten und Definition des Potentials werden zunächst die Bedingungen aufgesucht, unter denen man die Wirkung eines ausgedehnten Körpers auf einen äusseren Punkt als von einem Punkte ausgehend betrachten kann. Bezeichnet man die Verhältnisse der Körperdimensionen zu der Entfernung vom angezogenen Punkte als Grössen erster Ordnung, so kann man sich ganz allgemein die anziehende Masse im Schwerpunkt vereinigt denken, wenn man Glieder zweiter Ordnung vernachlässigt. Sind die Hauptträgheitsmomente einander gleich, oder ist ausserdem der Körper in Bezug auf seine Hauptebenen symmetrisch gestaltet, so ist diese Vereinfachung schon bei Vernachlässigung von Grössen dritter oder vierter Ordnung zulässig.

Es schliessen sich hieran die Sätze über Potential und Anziehung von Massen auf einen inneren Punkt und speciell die Anwendung auf Kugeln, deren Dichtigkeit in concentrischen Schichten constant ist. Es wird unter Anderem der merkwürdige Satz abgeleitet, dass, je nachdem die Dichtigkeit der Oberflächenschicht einer solchen Kugel kleiner oder grösser ist als zwei Drittel der mittleren Dichtigkeit der ganzen Kugel, die Anziehung innerhalb der Oberflächenschicht von aussen nach innen zu- oder abnimmt.

Da bei der Erde nach den Beobachtungen die Schwere mit der Tiefe zunimmt, so folgt, dass die mittlere Dichte der ganzen Erde mehr als $1\frac{1}{2}$ mal so gross sein muss, als die Oberflächendichte. Die Anwendung auf die Versuche von Airy ist wegen ungenauer Erfüllung der Voraussetzungen unzuverlässig.

Es werden noch weitere Anwendungen gemacht auf die Gesetze der Aenderung der beschleunigenden Kraft der Schwere mit der Höhe und der geographischen Breite und auf die Versuche von Cavendish, Reich, Baily, Cornu und Baille zur Bestimmung der mittleren Dichtigkeit der Erde.

Der III. Theil des Werkes behandelt die Mechanik nicht starrer Körper, also die Bewegung und das Gleichgewicht von Flüssigkeiten und elastischen Körpern. Nachdem in einem einleitenden Paragraphen die kinematische Theorie der mit der Stetigkeit verträglichen Deformationen und Verrückungen einer Masse eingehend erörtert ist, werden aus der Annahme molecularer Kräfte, d. h. solcher, deren Wirkung nur auf eine unendlich kleine Entfernung hin merkbar ist, die inneren Druckkräfte und die Bedingungen des Gleichgewichts und der Bewegung in einer Form hergeleitet, die gleichmässig auf ideale Flüssigkeiten, auf reibende Flüssigkeiten, auf elastische Körper, sowie überhaupt auf alle Körper anwendbar ist, bei welchen eine innere, die Stetigkeit nicht verletzende Deformation Druckkräfte hervorruft. Die einzelnen Fälle unterscheiden sich nur durch die besonderen Annahmen, die man über die Abhängigkeit des Druckes von den eingetretenen Verschiebungen macht.

Die allgemeinen Principien werden zunächst angewandt auf eine ruhende Flüssigkeit und die Druckvertheilung, die in einer solchen unter verschiedenen Umständen sich ergiebt, wobei eine eigenthümliche, sehr einfache Theorie der Ebbe und Fluth sich findet.

Bei der Bewegung idealer, d. h. nicht reibender Flüssigkeiten wird zunächst, nach Helmholtz, unterschieden zwischen Potentialbewegung und Wirbelbewegung und von dem kinematischen Unterschied der beiden Arten von Bewegung eine klare Anschauung gegeben. Mehrere, zum Theil neue, interessante und lehrreiche Beispiele für diese Bewegungen und für die Bestimmung des gegen feste Körper ausgeübten Druckes werden durchgeführt.

Im § 34 werden aus derselben Quelle auf Grund der Hypothese, dass die Reibungskräfte lineare Functionen der Deformationsgeschwindigkeiten sind, die Differentialgleichungen für die Bewegung einer der Reibung unterworfenen Flüssigkeit hergeleitet, welche zwei Reibungscoefficienten enthalten, von denen der eine bei relativen Verschiebungen der Theilchen ohne Volumenänderung, der andere bei räumlicher Dilatation zur Geltung gelangt. Auch diese Gleichungen werden dann auf einzelne Beispiele, besonders unter der Voraussetzung unendlich kleiner Geschwindigkeiten angewandt.

Zur Ableitung der Gleichungen für das Gleichgewicht und die Bewegung elastischer Körper, welchen der Schluss des Werkes gewidmet ist, wird ein ganz analoger Weg verfolgt wie in der Theorie der Reibung der Flüssigkeiten, nur dass an Stelle der Geschwindigkeiten die Verschiebungen treten. Die Annahme isotroper Substanzen reducirt auch in diesen Problemen die Anzahl der Constanten auf zwei. Aehnlich wie bei Flüssigkeiten Potentialbewegung und Wirbelbewegung, so wird bei den elastischen Körpern zwischen Potentialdeformation und Drillungsdeformation unterschieden und die allgemeine Deformation daraus zusammengesetzt. Aber auch bei der Drillungsdeformation ergiebt sich in analoger Weise eine besondere Art, die Potentialdrillung, welche dadurch charakterisirt ist, dass die Drillungscomponenten die partiellen Ableitungen einer Function sind. Ein schönes Beispiel hierzu bietet die Saint-Venant'sche Theorie der Torsion der Prismen, die hier in einfachster Weise abgeleitet ist.

Endlich wird die Theorie der Wellenbewegung entwickelt und zwar die Ausbreitung ebener und kugelförmiger Wellen im unendlich ausgedehnten Medium, die Reflexion ebener Wellen an der Grenze des Mediums und die Schwingung elastischer Saiten. Das Hilfsmittel, durch welches die Resultate in diesem Theile hergeleitet werden, ist die schöne Integrationsmethode partieller Differentialgleichungen, welche Riemann in der Abhandlung über die Luftschwingungen von endlicher Amplitude angewandt hat, welche besonders geeignet ist, den Einfluss des Anfangszustandes auf den Zustand in einer beliebigen Zeit und an einer beliebigen Stelle anschaulich zu machen und daher dieser Art von Problemen, in welchen es sich um die Fortpflanzung eines gegebenen Zustandes handelt, durchaus angemessen ist.

Marburg, im December 1889. H. Weber.

P. Münch, **Lehrbuch der Physik.** Mit einem Anhange: Die Grundlehren der Chemie und der mathematischen Geographie. 9. Aufl. Freiburg i. B. 1889, Herder'sche Verlagshandlung. 448 S. Preis 4 Mk.

Obgleich die vorliegende Auflage sehr rasch der vorhergehenden gefolgt ist, so zeigt sie doch eine höchst bedeutende Erweiterung durch die Einführung des absoluten Maasssystems. Je mehr die Elektricität im praktischen Leben Verwendung findet, um so wichtiger ist es, dass überall Klarheit über die Einheiten des Maasssystems herrscht. Daher ist es sehr anzuerkennen, dass Verf. bestrebt ist, schon in der Schule mit dem absoluten Maasssysteme zu beginnen. Um den Schüler indessen vor Verwirrung zu bewahren, welche ihm für die Zukunft nur Schaden bringt, muss ihm das absolute Maasssystem übersichtlich mitgetheilt werden, damit er sofort den Zusammenhang zwischen den in der Technik gewählten Einheiten und den absoluten Einheiten erkennt. Eine solche Zusammenstellung fehlt in diesem Buche, dagegen sind die absoluten Maasse und die für die Technik gewählten Einheiten an den betreffenden Stellen eingefügt. Künftighin könnte dies auch bezüglich der absoluten Maasse beibehalten werden, während die Tabelle auf S. 359 wesentlich erweitert werden müsste. Die Deutung, welche Verf. den Dimensionen daselbst beilegt, ist allgemein nicht üblich und kann in einem jungen Kopfe nicht verstanden werden; denn er findet direct, dass z. B. $Q = Q_1 . v^{-1}$ ist und nicht $Q_1 . v$ u. s. w. Bei den in dem Text abgeleiteten Maassen ist nicht genügend hervorgehoben, dass den technischen Einheiten das elektromagnetische Maasssystem zu Grunde gelegt ist und nicht das elektrostatische; das elektrodynamische Maasssystem wird gar nicht erwähnt. Ausdrücke wie Dyncentimeter statt Erg sind nicht üblich. S. 80 fehlt bei der Pferdekraft der Factor 10^5. Wie man auch über das elektrische Maasssystem denken mag, so muss man doch der Einheit wegen an den Bestimmungen wenigstens so lange festhalten, bis anderweitige Beschlüsse gefasst werden. Von diesen wenigen Ausstellungen abgesehen, denen bei einer neuen Auflage Rechnung getragen werden kann, sind Inhalt und Ausstattung des Buches derart, dass wir es nur bestens empfehlen können.

B. Nebel.

Michael Faraday, **Experimental-Untersuchungen üb. Elektricität.** Deutsche Uebersetzung von S. Kalischer. I. Band. Berlin 1889. Verlag von J. Springer. 515 S. Preis 12 Mk.

Die grossen Verdienste M. Faraday's um die Elektricität finden von Jahr zu Jahr mehr Anerkennung, seine Kraftlinientheorie bildet schon einen wichtigen Ausgangspunkt für die Theorie der elektrischen Maschinen, so dass es äusserst wünschenswerth ist, dass seine Untersuchungen einem grösseren Leserkreise zugänglich gemacht werden. Wenngleich Poggendorff einen grösseren Theil der Experimental Researches in Electricity schon in seine Annalen aufgenommen hat, so sind diese doch nur für einen kleinen Leserkreis bestimmt und einzeln nur äusserst schwierig zu erhalten. Daher können wir den Plan des Uebersetzers nur billigen, nicht nur eine vollständige Uebertragung der Researches ins Deutsche herzustellen, sondern auch die kleineren Arbeiten Faraday's, welche in Journalen zerstreut sind, zu sammeln und der vorliegenden Uebersetzung einzuverleiben. Das ganze Werk wird drei Bände umfassen, von denen der erste jetzt vorliegt. Auf den Inhalt werden wir näher eingehen, sobald auch die beiden anderen Bände erschienen sind; indessen sagt uns jetzt schon der Name Faraday, dass wir es hier mit einem klassischen Werke zu thun haben, das uns einen Einblick gewährt in die genialen Untersuchungen eines der scharfsinnigsten Forscher. Da das Studium derartiger Werke ungemein fruchtbringend wirkt, so wünschen wir dem vorliegenden eine grosse Verbreitung auch auf deutschem Boden.

B. Nebel.

Balfour Steward und Haldane Gee, **Praktische Physik** für Schulen und jüngere Studierende. Deutsche Uebersetzung von K. Noack. I. Theil: Elektricität und Magnetismus. 196 S. mit 123 Abbildungen. Berlin 1889, Verlag von J. Springer. Preis 2 Mk. 50 Pf.

Obwohl in Deutschland in Kohlrausch's Praktischer Physik ein ausgezeichnetes Buch existirt, mit Hilfe dessen die experimentelle Seite der Physik auf's Gründlichste ausgebildet werden kann, so ist es doch auch von Interesse, zu erfahren, wie dieser Zweig der Physik in ausserdeutschen Ländern behandelt wird. Da das Buch englischen Verhältnissen angepasst ist, so lässt es sich direct nicht in den deutschen Schulunterricht über Physik einreihen, wohl aber lehrt es, dass Theorie und Praxis Hand in Hand gehen sollen, falls der Unterricht mit Erfolg gekrönt sein soll. — Apparate und Theorie der Versuche werden jeweils zuerst mitgetheilt, daran knüpfen sich Aufgaben, deren Lösung oft nach mehreren Methoden angegeben wird. Gleichsam die Einleitung bilden die vorbereitenden Messungen, die sich auf Längen- und Winkelmessungen, sowie auf Gewichtsbestimmungen erstrecken. Der Elektrostatik, dem Magnetismus, der Berührungselektricität sind grössere Capitel gewidmet. Der Wichtigkeit des Tangentengalvanometers, der Messung von Widerständen und des Quadrantgalvanometers wird durch besondere Capitel Rechnung getragen. Den Anhang bilden die Preisverzeichnisse von Apparaten und Materialien, sowie die Aufzählung der nothwendigsten Werkzeuge und die Angabe der Erfordernisse eines physikalischen Schullaboratoriums. Dem deutschen Handfertigkeitsunterricht für Schüler unserer Gymnasien, wie er privatim schon in manchen Städten ertheilt wird, dürfte das vorliegende Buch als die Grundlage einer gediegenen Erweiterung dienen.

B. Nebel.

H. Helmholtz, **Ueber die Erhaltung der Kraft.** Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften. Nr. 1. 60 S. Leipzig 1889, Verlag von W. Engelmann. Preis 80 Pf.

Es ist ein gutes Zeichen unserer Zeit, den Errungenschaften auf naturwissenschaftlichem Gebiete eine möglichst grosse Verbreitung zu verschaffen, einmal um den Sinn für die Naturwissenschaften mehr zu wecken, sodann um das Studium derselben in jeder Beziehung zu erleichtern. Diesem Streben verdanken wir eine grosse Reihe der gediegensten Werke älterer Forscher, neu aufgelegt oder auch aus fremden Sprachen ins Deutsche übertragen. Derartige Ausgaben sind ihrer Vollständigkeit wegen nur für die eigentlichen Fachleute bestimmt, während einzelne Arbeiten darin, die auch für ein weiteres Publicum von Interesse sind, durch den relativ hohen Preis des Ganzen nicht die berechtigte Verbreitung finden. Diesem Mangel soll durch die Herausgabe von Ostwald's Klassikern der exacten Wissenschaften abgeholfen werden. Die allgemeine Redaction liegt in der bewährten Hand des auf dem Gebiete der physikalischen Chemie rühmlichst bekannten Professors Ostwald, welcher für die Leitung der einzelnen Zweige der exacten Wissenschaften hervorragende Persönlichkeiten gewonnen hat. Der Verleger hat Alles aufgeboten, um die Anschaffung der Klassiker Jedem zu ermöglichen; der Preis für den Druckbogen beträgt nur 16—20 Pf., jede Abhandlung bildet ein Heft, welches nur in Leinwand gebunden ausgegeben wird. Es war ein glücklicher Gedanke der Redaction, mit der Helmholtz'schen Arbeit über die Erhaltung der Kraft dieses Unternehmen zu beginnen; denn sie bildet das Fundament der exacten Naturforschung und verdient daher in den weitesten Kreisen verbreitet zu werden. — Was die Abhandlung selbst betrifft, so erschien dieselbe als Brochure im Jahre 1847 und wurde von Helmholtz mit Anmerkungen versehen, als er sie im Jahre 1882 bei der Herausgabe seiner wissenschaftlichen Abhandlungen abdrucken liess. Die vorliegende Ausgabe ist ein genauer Abdruck von dem Original, mit Angabe der Seitenzahlen, welche ebenfalls, auf den besonderen Wunsch von Helmholtz, mit den oben genannten Anmerkungen ausgestattet wurde.

Der Inhalt zerfällt in sechs Abschnitte, wovon in dem ersten auf indirecte Weise das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kraft bewiesen wird, während der zweite sich mit dem Nachweis von dem Princip von der Erhaltung der Kraft beschäftigt. Der dritte Theil bringt die Anwendung des Princips in den mechanischen Theoremen, und die drei letzten handeln von dem Kraftäquivalent der Wärme, der elektrischen Vorgänge, des Magnetismus und Elektromagnetismus.

B. Nebel.

G. Recknagel, **Joh. Chr. Walberer's Anfangsgründe der Mechanik fester Körper,** mit vielen Uebungsaufgaben zum Schulgebrauche an Gymnasien und verwandten Lehranstalten. 6. Aufl. München 1889, Verlag von Th. Ackermann. 178 S.

Die vorliegende sechste Auflage ist eine Neubearbeitung von Walberer's Anfangsgründen der Mechanik fester Körper. Nach einer kurzen Einleitung, in welcher einige Grundbegriffe festgestellt werden, wird zu der Statik übergegangen, welche den ersten Theil umfasst und wiederum in sechs Capitel zerfällt. Der zweite, kürzere Theil behandelt die Dynamik, welche in drei Capitel gegliedert ist. Der dritte Theil ist einer grossen Zahl von Aufgaben gewidmet. Leider sind die Lösungen, d. h. die Zahlenwerthe nicht beigegeben, so dass der Schüler, welcher privatim sich einübt, kein Criterium für die Richtigkeit besitzt, während der Lehrer aus der Behandlung der von ihm gestellten Aufgaben sofort ersieht, ob die Lösung blos abgeschrieben ist oder nicht. Weshalb auf S. 26 flgg. x mit einem Strich versehen wurde, x_1, x_2, ... dagegen nicht, ist nicht recht erklärlich. Sehr anzuerkennen ist, dass Verf. bei den Einheiten der Kraft und der Masse das CGS-System einführt und klar hervorhebt den Unterschied zwischen der neuen und alten Krafteinheit; zu bedauern ist, dass bei der Arbeit das absolute Maasssystem gar nicht mehr erwähnt wird. Ohne grosse Anstrengung machen sich die Schüler mit Hilfe des vorliegenden Buches die Grundzüge der Mechanik fester Körper zu eigen, wozu wesentlich die übersichtliche Darstellung des Stoffes und die deutlichen, gut ausgeführten Figuren beitragen werden. Sicherlich wird dasselbe bei dem Unterricht in Gymnasien allenthalben gerne Verwendung finden.

B. Nebel.

R. Geigenmüller, **Die Anfangsgründe der theoretischen Mechanik** mit Anwendungen auf Maschinen; zugleich als Sammlung von Beispielen und Uebungsaufgaben, mit den einfachsten mathematischen Hilfsmitteln für technische Fachschulen, Werkmeisterschulen und zum Selbststudium bearbeitet. 198 S. Mittweida 1889, Verlag der polytechnischen Buchhandlung von R. Schulze. Preis 3 Mk. 60 Pf.

Dass Verf. unter den zahlreichen Lehrbüchern der Mechanik keines finden konnte, welches den Anforderungen einer Werkmeisterschule vollkommen gerecht wird, ist leicht begreiflich; denn derartige Verhältnisse sind den meisten anderen Schulen durchaus fremd. Die vorliegende Mechanik macht ganz den Eindruck, als ob Verf. das Richtige getroffen hat, da sich den kurzen Erläuterungen unmittelbar stets eine Reihe von Beispielen anschliessen, die vielfach der Praxis entnommen sind und deren Lösung sofort beigedruckt ist. Gewiss wird dieses Buch bei den betreffenden Schülern beliebt sein. Von des Verfassers Standpunkt aus ist wohl der Titel „Theoretische Mechanik" ganz berechtigt, indessen wäre das Wort „theoretisch" besser weggeblieben, da man unter „theoretischer Mechanik" doch etwas Anderes versteht, wenn dieses Buch mit anderen Lehrbüchern der Mechanik verglichen wird. Die Ausdrucksweise erscheint an einigen Stellen verbesserungsfähig, z. B. S. 154: „welche den Körper aus längerem (!) Ruhezustand in Bewegung versetzt". Zum Mindesten eigenthümlich ist es, dass Verf. S. 172 Aufg. 350 „Zirka" statt Circa schreibt. — Die nöthigen Figuren enthalten zwei dem Buche beigefügte Tafeln.

B. Nebel.

M. Zwerger, **Der Schwingungsmittelpunkt zusammengesetzter Pendel.** Historisch-kritische Untersuchung nach den Quellen bearbeitet. Mit 1 Figurentafel. München 1889, Verlag von J. Lindauer (Schöpping). 129 S.

Verf. hat sich der löblichen Aufgabe unterzogen, die Entwickelungsgeschichte specieller Probleme der Mechanik festzustellen und die betreffenden Arbeiten und Ansichten darüber einer kritischen Beurtheilung zu unterwerfen. Durch derartige Arbeiten wird nicht nur das Studium der Geschichte der Physik wesentlich erleichtert, sondern es wird dadurch auch der Forscher auf dem betreffenden speciellen Gebiete bezüglich der Literatur sehr schnell und eingehend orientirt, was für ihn eine grosse Zeitersparniss ist. — Zu wünschen wäre nur, dass derartige Bücher in gleichem Format und in demselben Verlage erscheinen würden, wodurch die physikalische Forschung ungemein gefördert würde.

B. Nebel.

W. Jordan, **Handbuch der Vermessungskunde.** Dritte verbesserte und erweiterte Auflage. Stuttgart 1888, Verlag von J. B. Metzler. I. Band: Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. 361 S. Preis 7 Mk. 30 Pf. II. Band: Feld- und Landmessung. 698 S. mit 55 S. Hilfstafeln im Anhang. Preis 14 Mk. 70 Pf.

Sehr anzuerkennen ist das unermüdliche Bestreben des Verfassers, seine Werke durch Umarbeitung und Erweiterung zu vervollkommnen. Der gesammte Inhalt soll sich nunmehr auf drei Bände erstrecken, wovon der letzte Band noch aussteht. Ein glücklicher Gedanke war es, den ersten Band: Ausgleichungsrechnung, nach der Methode der kleinsten Quadrate derartig zu behandeln, dass er ein Ganzes für sich bildet und als solches auch von der Verlagsbuchhandlung einzeln abgegeben wird. Infolge dessen kann derselbe auch von Nichtgeometern mit Vortheil benützt werden, wenngleich die zahlreichen Beispiele nur der praktischen Geometrie entlehnt sind. Nach einem kurzen Ueberblick über die Geschichte der Methode der kleinsten Quadrate folgt die allgemeine Theorie der kleinsten Fehlerquadratsumme. Der trigonometrischen Punkteinschaltung und der Ausgleichung der Triangulirungsnetze sind je besondere Capitel gewidmet. Ehe zu der Theorie der Genauigkeit der geodätischen Punktbestimmung übergegangen wird, erfährt das Gesetz der Fehlerwahrscheinlichkeit eine eingehende Behandlung. Die vier Tabellen, welche den Anhang bilden, tragen dazu bei, diesen ersten Band in der Praxis unentbehrlich zu machen.

Der zweite Band umfasst die eigentliche Feld- und Landmessung. Nicht nur werden die einzelnen Methoden gründlich erläutert und mit einander verglichen, sondern auch die dazu nöthigen Messinstrumente ausführlich beschrieben und deren Leistungsfähigkeit hervorgehoben. Die zahlreichen der Praxis entnommenen Beispiele geben Aufschluss über die Verwendbarkeit der vorgetragenen Methoden.

Ueberall macht sich die grosse Erfahrung des Verf. bemerkbar. Bei der Fülle des Materials würde es hier zu weit führen, wollten wir auf den Inhalt des Buches näher eingehen. Wünschenswerth ist, dass auch der dritte Band möglichst bald erscheine.

B. Nebel.

L. HUEBNER, **Beitrag zur Entwickelungsgeschichte der Lehre von der Capillarität.** Programm des evangel. Gymnasiums zu Schweidnitz. *Schweidnitz* 1889, Druck von Otto Maisel. 19 S.

In dem speciell geschichtlichen Theile beleuchtet der Verf. insbesondere die theoretischen Arbeiten von Clairaut, Laplace und Poisson und wendet sich dann der Gauss'schen Theorie zu, die von F. Neumann vielfach erweitert worden ist. Der zweite Theil enthält die durch die Beobachtung gewonnenen Resultate, die zur Bestätigung der Theorie wesentlich beigetragen haben. Die wichtigsten literarischen Erscheinungen werden in chronologischer Reihenfolge mitgetheilt, wobei bemerkt werden muss, dass die in Poggendorff's Annalen erschienenen Aufsätze hier nicht aufgeführt wurden, da sie in dem 1888 erschienenen Sachregister übersichtlich zusammengestellt sind. Der letzte Theil umfasst die Entwickelung der Capillarität seit dem Jahre 1880, insbesondere die Arbeiten von Volkmann, Quincke und deren Schülern. Der Verf. hat die einzelnen Arbeiten einer kritischen Betrachtung unterzogen, die Mängel derselben hervorgehoben und darauf hingewiesen, in welcher Richtung weiter zu arbeiten wäre. Leider fehlt es noch an einem ebenso exacten, als ausgedehnten Beobachtungsmaterial, was mit der Schwierigkeit der Ausführung derartiger Messungen zusammenhängt.

Der Verf. hat sich durch die vorliegende Arbeit sicher den Dank und die Anerkennung eines Jeden erworben, der genöthigt ist, sich auf dem Gebiete der Capillarität zu orientiren.

B. NEBEL.

LEONHARDT, **Beiträge zur Kenntniss des Gay-Lussac'schen Gesetzes.** Abhandlung zum Jahresbericht des Herzogl. Friedrichs-Realgymnasiums zu Dessau für das Schuljahr 1888/89. Programm Nr. 643. 1889.

Verf. geht von dem schon von Bosscha ausgesprochenen Gedanken aus, dass die Ausdehnung flüssiger Körper für jeden Grad Erwärmung um denselben Bruchtheil des jedesmaligen Volumens zunehme. Mathematisch drückt sich dieses Gesetz in der Form $v_t = v_0 e^{\alpha t}$ aus, während bisher das Gay-Lussac'sche Gesetz $v_t = v_0(1 + \alpha t)$ zur Anwendung kam. Dieses Gesetz der absolut gleichen Ausdehnung wird nun mit dem obigen Gesetz der relativ gleichen Ausdehnung an den von Regnault für Quecksilber gewonnenen Zahlen verglichen, wobei das letztere Gesetz eine grössere Wahrscheinlichkeit für seine Richtigkeit erlangt, zumal auch die aus der Ausdehnung des Quecksilbers berechneten Temperaturen eine genauere Uebereinstimmung mit den Temperaturen nach dem Luftthermometer ergeben. Dasselbe gilt auch bezüglich der berechneten Volumina. Die gleichen Berechnungen werden auch bei dem geschmolzenen Schwefel und Phosphor angestellt, indessen sind die Beobachtungsdaten in der Nähe der Schmelztemperatur gelegen und ausserdem nur in geringer Zahl vorhanden, so dass das Resultat nicht so eclatant ausfällt, wie bei dem Quecksilber. Für das Gesetz der relativ gleichen Ausdehnung spricht auch die Aehnlichkeit in dem Gange der Ausdehnungscoefficienten und der specifischen Wärme, sowie die durch das Gewichtsthermometer gefundene Constanz in den Ausdehnungscoefficienten der Luft auch in höheren Temperaturen. Obwohl die Ausdehnung der Flüssigkeiten bei höheren Temperaturen noch eine grössere ist, als die aus dem Gesetz der relativ gleichen Ausdehnung gefolgerte, so ist doch der Unterschied wesentlich geringer, als derjenige, welcher sich nach dem Gesetze der absolut gleichen Ausdehnung ergiebt. Leider existiren nicht weitere zuverlässige Beobachtungen über die Ausdehnung einfacher Elemente, so dass es dem Verf. nicht vergönnt ist, jetzt schon die Entscheidung zu Gunsten des Gesetzes der relativ gleichen Ausdehnung endgiltig treffen zu können.

B. Nebel.

Lehrbuch der analytischen Mechanik von S. D. Poisson, deutsch herausgegeben und mit einem Anhang versehen von Dr. August Pfannstiel. Dortmund, Verlag von H. Meyer. 1888.

Es ist weiter die 2.—4. Lieferung erschienen. Eingehendere Besprechung nach Abschluss des Uebersetzungswerkes.

Cranz.

Dr. Otto Rausenberger, **Lehrbuch der analytischen Mechanik.** 2. Bd.: Mechanik der zusammenhängenden Körper. Leipzig, Teubner.

Von dem Werke, dessen erster Theil früher besprochen wurde, liegt nunmehr auch der zweite Theil vor. Hier handelte es sich um mehr physikalische Probleme, und eine Hauptschwierigkeit lag in der geeigneten Auswahl unter den zahlreichen Partien der auf Physik angewandten Mechanik. Man muss zugeben, dass diese Auswahl des Verfassers eine durchaus glückliche ist gegenüber dem Zwecke, den sich derselbe bei Abfassung des Werkes gesetzt hat, ein Lehrbuch der Mechanik für die Anfänger unter den Studirenden zu schreiben.

Die Abschnitte des zweiten Bandes enthalten der Reihe nach: die Mechanik der unelastisch festen Körper; die Mechanik der elastisch festen Körper, wobei die Elemente der Wellenlehre abgehandelt werden; ferner die Hydromechanik und die Aëromechanik. Eine nähere Aufzählung der behandelten Probleme möge unterbleiben und statt dessen auf die klare und leicht fassliche Darstellungsweise rühmend aufmerksam gemacht werden, welche an gewisse französische Muster erinnert.

Um von Einzelheiten, die uns während der Lecture aufgestossen sind, nur einige wenige zu erwähnen, so hätten wir im Interesse der Studirenden technischer Hochschulen, besonders der Elektrotechniker und Ingenieure, ein kurzes Eingehen auf die Wärmeleitung bei Gelegenheit der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung gewünscht, ferner eine etwas andere Behandlung der Axiome der Mechanik; endlich ist Referent der Ansicht, dass es eine statische Theorie von Ebbe und Fluth in dem Sinne des Herrn Verfassers nicht geben kann. Wenn Mond und Erde nicht in beschleunigter Bewegung gegen einander begriffen gedacht werden, sondern in relativer Ruhe, so lässt sich der Fluthberg, welcher auf der dem Monde abgewandten Seite der Erde entsteht, nicht erklären. Recensent stimmt hierin mit Herrn E. Mach völlig überein. Dies sind jedoch Einzelheiten, welche dem Werth des Ganzen wenig Abbruch zu thun vermögen, und wir wollen nicht versäumen, die Studirenden auf vorliegendes Werk zur Einführung in die analytische Mechanik empfehlend aufmerksam zu machen.

Cranz.

Lehrbuch der Geometrie für Gymnasien und höhere Lehranstalten. Von Prof. Dr. F. W. Fischer in Kempen. Drei Theile in einem Bande: Planimetrie — Stereometrie — Ebene und spärische Trigonometrie. 2. Ausgabe. Mit vielen in den Text gedruckten Holzschnitten. Freiburg i. Br., Herder'sche Verlagsbuchhandl. 1887. Preis 5 Mk. 20 Pf.

Das Buch macht durch weise Beschränkung des Lehrstoffes, durch übersichtlichen Druck, durch zweckmässige Einlage und Vorbereitung von Aufgaben, endlich durch correcte Zeichnung der Figuren einen günstigen Eindruck. Um so weniger haben wir Veranlassung, mit einigen Ausstellungen zurückzuhalten, die dem Werthe des Buches übrigens keinen Abbruch thun.

Völlig verfehlt ist S. 13 der bekannte Hauptsatz über die Parallelen. GJ und HC sind nach Voraussetzung parallel, GA liegt zwischen GJ und HC und muss gegen HC convergiren. Einem solchen Verfahren gegenüber kann man doch kaum etwas Anderes thun, als auf irgend eine Lebensbeschreibung von Gauss und das Jahr 1792 verweisen und dabei bemerken, dass seit 1792 beinahe 100 Jahre verflossen sind.

Der Kreis tritt verhältnissmässig spät auf. Die vom Verfasser so ansprechend behandelten Aufgaben S. 26 flgg. hätten ihm dafür ein Fingerzeig sein können. Gern hätten wir dem Verfasser den Satz geschenkt, dass durch zwei Punkte unzählig viele Kreise möglich sind. Ebenso ist die Proportionalität der Strecken und Flächen S. 87 und 101 viel zu breitspurig behandelt. Solche Weitläufigkeiten ermüden den Schüler, werden auswendig gelernt und dann vergessen. Selbständige Thätigkeit des Lernenden ist dabei so gut wie unmöglich. Zugleich liefern solche veraltete Bestandtheile des Euklidischen Wunderbaues gewissen Eiferern den geeigneten Angriffspunkt. — Schön ist die Transversalentheorie, welche den Pascal'schen Lehrsatz enthält, ebenso die Lösung des Tactionsproblems nach Steiner.

Was über die Irrationalität von π gesagt wird, ist nach dem jetzigen Standpunkte der Wissenschaft nicht mehr genügend.

In der Stereometrie zeigt der Verfasser ebenfalls ein glückliches Geschick in Auswahl und Anordnung der Lehrsätze. Die Hineinziehung der Kegelschnitte hat uns hier ebenso gefallen, als uns die langweiligen Sätze über die Kugel mit dem widersinnigen Beisatze „Beweis leicht“ missfällen haben. Die Aufgaben gehen über den herkömmlichen Schatz nicht hinaus, doch finden sich einige recht ansprechende.

In der Trigonometrie hat der Verfasser die bekannte Schwierigkeit, welche die rein geometrische Erklärung nach sich zieht, wohl erkannt. Allein der von ihm gewählte Weg führt ihn, wie alle Anderen, welche diesen Weg einschlagen, bei Ableitung der Additionstheoreme in ein wahres Dorngestrüpp von Formeln. Ganz verfehlt ist auch die Ableitung der Multiplicationsformeln, wobei der Verf. zum Schlusse selbst, ohne es zu beabsichtigen, auf die einzig richtige Methode verweist. Die Ableitung und Behandlung der Grundaufgaben geschieht mit löblicher Strenge. Unter den Aufgaben finden wir die Sonnenuhr recht ansprechend und ausführlich behandelt.

Die sphärische Trigonometrie ist recht inhaltsreich und dabei klar und kurz dargestellt.

Im Anhange finden wir einige unendliche Reihen, deren Kenntniss dem Abiturienten nicht vorenthalten werden sollte, da erst durch diese Reihen eine völlige geistige Beherrschung der logarithmischen und trigonometrischen Tafeln gegeben wird. Hier im Anhange begegnen wir denn auch endlich dem Moivre'schen Lehrsatze nebst schönen Anwendungen, welche das Verhalten der trigonometrischen Functionen in den verschiedenen Quadranten für den Lernenden aus dem dumpfen Bereiche des todten Wissens herauszuheben einzig geeignet sind. Der Verfasser hat auf die Einführung des Moivre'schen Satzes genau an der richtigen Stelle S. 30 selbst verwiesen, leider ohne diese Absicht.

Coesfeld, im Januar 1890. K. Schwering.

Lehrbuch der ebenen Geometrie, nebst einer Sammlung von 800 Uebungsaufgaben zum Gebrauche an höheren Lehranstalten und beim Selbststudium von Dr. Carl Spitz. 9. verbesserte und vermehrte Aufl. Mit 251 in den Text gedruckten Holzschnitten. Leipzig, C. F. Winter'sche Verlagshandlung. 1888. Preis 3 Mk.

Anhang zu dem Lehrbuche der ebenen Geometrie von Dr. Carl Spitz. Die Resultate und Andeutungen zur Auflösung der in dem Lehrbuche befindlichen Aufgaben enthaltend. 9. verbesserte und vermehrte Aufl. Mit 112 in den Text gedruckten Figuren. Leipzig, ebenda. Preis 1 Mk. 50 Pf.

Man kann dem Buche, wie auch dem Anhange das Zeugniss ausstellen, dass der Verfasser und der letzte Bearbeiter bemüht gewesen sind, den herkömmlichen Stoff passend zu ordnen, nach Grundsätzen zu gliedern und dabei für leichte Aneignung und Selbstthätigkeit des Lernenden gebührend Sorge zu tragen. Da das Buch auch für das Selbststudium bestimmt ist, so bemerkt man beim Vortrage eine gewisse Ausführlichkeit, keineswegs zum Schaden des Buches. — S. 21 tritt der Hauptlehrsatz aus der Parallelentheorie in der Fassung auf: Durch einen Punkt ausserhalb einer Geraden lässt sich zu dieser nur eine Parallele ziehen. Der „Beweis“ stützt sich auf Parallelbewegung und ist soviel werth, wie die anderen „Beweise“ anderer Lehrbücher in diesem Falle werth zu sein pflegen. Der Verf. hat jedoch ein Heftchen erscheinen lassen, um die Theorie der Parallelen dem Lehrer nach Bolyai's Grundsätzen vorzulegen. Dies Heftchen ist dem Referenten nicht zugänglich. Indess hat ihn eine ziemlich lange Erfahrung gelehrt, dass didaktisch kaum etwas Anderes zulässig ist, als die Einführung des obigen Satzes als Grundsatz oder die Ableitung der Winkelsumme des Dreiecks durch Umschreiten. Alle anderen Methoden sind entweder falsch, oder verhüllen die wirklich vorhandene Schwierigkeit — auch der Umschreitungsmethode hat man mit Grund diesen Vorwurf gemacht —, oder sie sind für den doch erst im Anfang seiner geometrischen Bildung befindlichen Schüler unerreichbar und dann vom ernstlichsten Schaden. — Die Proportionalität der Strecken und Figuren ist zwar in hergebrachter Weise behandelt, doch deutet der Verfasser ein kürzeres Verfahren S. 136 an. Möge dieses kürzere Verfahren und zwar im Anschluss an fortgesetzte Decimaltheilung, welche doch dem Lernenden ganz besonders zugänglich zu sein pflegt, immer mehr zur Alleinherrschaft gelangen. Die beigegebenen Rechnungsaufgaben sind recht ansprechend. Die letzten Abschnitte des Buches, welche sich mit Pol, Polare, Doppelverhältniss, Involution u. s. w. befassen und die Sätze von Pascal, Carnot u. s. w. enthalten, sind durchaus lobenswerth. Wenn es gestattet ist, eine Kleinigkeit zu bemängeln, so sind es die Producte der Strecken beim Ceva-Menelaischen Satze. Wir würden diese unfassbaren Dinge durch Theilverhältnisse und zwar ohne Vorzeichen genommen, also durch innere und äussere Theilverhältnisse ersetzen.

Der Anhang leistet, soweit wir uns überzeugen konnten, wirklich, was er verspricht: er bereitet die Aufgaben wirksam zur Lösung vor.

Coesfeld, im Januar 1890. K. Schwering.

Lehrbuch der ebenen Trigonometrie nebst einer Sammlung von 630 Beispielen und Uebungsaufgaben zum Gebrauche an höheren Lehranstalten und beim Selbststudium von Dr. Carl Spitz. 6. verbesserte und vermehrte Aufl. mit 47 in den Text gedruckten Figuren. Leipzig, C. F. Winter'sche Verlagshandlung. 1888. Preis 2 Mk.

Anhang zum Lehrbuche u. s. w. Resultate und Andeutungen zur Auflösung. Preis 1 Mk.

Mit dem Inhalte und der Darstellung des vorliegenden Lehrbuches können wir uns im Allgemeinen einverstanden erklären. Die Darstellung der Dreiecksgrundaufgaben ist sogar recht schön. Leider müssen wir aber, selbst auf die Gefahr hin, oft Gesagtes zu wiederholen, uns durchaus gegen die Darstellung des Begriffes der trigonometrischen Functionen, wie er uns hier und in vielen anderen Büchern entgegentritt, erklären. Man geht vom Coordinatenbegriffe aus und gewinnt so eine Definition, welche die genannten Functionen zeichenrichtig für Winkel der vier Quadranten erklärt. Diese Definition ist schon nicht im Stande, die Functionen negativer Winkel und solcher Winkel, welche 2π übersteigen, zu erklären. Es muss da künstlich nachgeholfen werden. Ueber diesen Mangel könnte man wegsehen, da er den Lernenden nicht eben zu drücken pflegt. Aber nun kommen die Additionstheoreme und unser Buch — es ist das eine löbliche Gründlichkeit — unterscheidet S. 30 ganze zehn Fälle, die der Reihe nach erledigt werden. Auch der Verf. scheint gefühlt zu haben, wie „schrecklich" eine solche Darstellung eines im Grunde genommen doch so einfachen Satzes ist. Wenigstens zeigt er in einer Anmerkung, dass man durch ein Verfahren, welches von den complexen Zahlen ausgeht, schneller zur allgemeinen Herleitung gelange. — Mein Freund V. Schlegel hat es freilich ohne dieses Mittel schon im Jahre 1880 in seinem Lehrbuche der Trigonometrie noch viel kürzer und einfacher bewerkstelligt. — Wenn S. 15 durch vorgesetztes $\pm$ die Doppeldeutigkeit der Quadratwurzel bezeichnet wird, so ist das ebenso überflüssig wie veraltet.

Die Aufgabensammlung ist reichhaltig und im Anhange sehr zweckmässig erläutert. Unter den Aufgaben bemerkten wir mit Vergnügen die Malfatti'sche und die Siebzehntheilung des Kreises. Leider konnten wir der im Anhang gegebenen Lösung dieser letzteren Aufgabe keinen Geschmack abgewinnen.

Coesfeld, im Januar 1890. K. Schwering.

Textgleichungen geometrischen Inhalts. Für den Gebrauch beim Unterricht entworfen von Dr. Th. Harmuth, ord. Lehrer am Königl. Wilhelmsgymnasium in Berlin. Berlin, Verlag von Julius Springer. 1888. Preis 1 Mk. 20 Pf.

Auf 58 Seiten werden eine Menge Aufgaben vorgeführt, welche sich theils als Berechnungsaufgaben aus Geometrie und Stereometrie auffassen lassen, theils erst durch eine geringere oder grössere Mühe den Ansatz einer Gleichung liefern. Es ist im Allgemeinen nicht zu verkennen, dass in solchen geometrischen Uebungen mehr mathematischer Sinn steckt, als in dem alten Hausrath, der sich in den Sammlungen als „nicht angesetzte Gleichung“ zusammenfindet. Manche dieser Aufgaben entbehren nicht des historischen Reizes, da man ihren Urbildern in Indien und Griechenland, ja in Aegypten begegnet. Dennoch möchten sie eben ihrer Künstlichkeit wegen eher dem Missbrauche ausgesetzt sein, als ähnliche Aufgaben, welche der Geometrie entstammen. — Unser Buch enthält keine Figuren und keine Andeutungen zur Lösung.

Coesfeld, im Januar 1890. K. Schwering.

Sätze **und Regeln der Arithmetik und Algebra,** nebst Beispielen und gelösten Aufgaben. Zum Gebrauche an Baugewerkenschulen, Gewerbeschulen u. s. w. von H. Wolff, Lehrer an der K. Baugewerkenschule in Leipzig. Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner. 1888.

Auf 102 Seiten finden wir hier die Grundbegriffe und Lehren der Algebra in guter Darstellung. Besondere Sorgfalt ist den Aufgaben und Uebungsbeispielen zugewandt. Recht zweckmässig ist die Darstellung der logarithmischen Function durch eine Zeichnung und die auf den letzten Seiten vorgeführten geometrischen Anwendungen. Die Beispiele und Aufgaben hat der Verf. laut Vorrede theils selbst ausgedacht, theils aus der bekannten Sammlung von Heis entnommen. Auf diese Sammlung wird auch im Buche selbst noch besonders verwiesen. — Was der Verf. S. 92 unten zum Verständnisse eines negativen Lösungswerthes sagt, ist kaum ausreichend.

Coesfeld, im Januar 1890. K. Schwering.

A. Weiler, **Neue Behandlung der Parallelprojectionen und der Axonometrie.** Leipzig, Verlag von B. G. Teubner. 1889. VII u. 210 S.

Das vorliegende Buch beabsichtigt solchen Lesern, denen die einfachsten Kenntnisse in der descriptiven Geometrie geläufig sind, einen auch über die Zwecke der Praxis hinausgreifenden Einblick in die Theorie zu geben. Die Begründungen sollen hierbei möglichst elementarer Natur sein. Der ganze Stoff wird in sechs Theilen behandelt, von denen der dritte und der vierte die wichtigsten sind.

Im ersten Capitel wird mit möglichst einfachen Mitteln die Parallelprojection ebener Gebilde erörtert. Das Hauptaugenmerk wird hierbei auf die „Rechtwinkelpaare“ oder „gegenüberliegenden“ Strahlen gerichtet. Dieselben entstehen durch die Projection von rechten Winkeln. Nach dem Satze vom Höhenpunkte findet man mit Hilfe eines vollständigen Viereckes zu jeder Geraden gegenüberliegende, wenn man zwei nicht parallele Rechtwinkelpaare der Bildebene kennt; hierzu ist nur das Ziehen von Parallelen erforderlich. Daran schliesst sich die Construction eines Kreisbildes aus einem Durchmesser oder aus drei Punkten, sowie das Abtragen und Vergleichen von Winkeln. Die Aufgabe, einen gegebenen Winkel zu halbiren, schliesst in sich die andere, eine gegebene Strecke von einer Geraden in eine nicht parallele andere zu übertragen.

Auch der Nachweis einer centrisch-affinen Beziehung zwischen der Bildebene und anderen zur originalen ähnlichen wird an die Betrachtung der Rechtwinkelpaare angeschlossen. Man schneide die von einem Punkte P der Bildebene ausgehenden Rechtwinkelpaare durch die willkürliche Anschlussgerade g. Die Kreise, welche die entstehenden Strecken zu Durchmessern haben, schneiden sich in zwei hinsichtlich g symmetrisch liegenden Punkten Q und R, wie hier aus Aehnlichkeitssätzen gefolgert werden kann. Die Ebene der Q wie die der R ist ähnlich zu der gegebenen, centrisch-affin zu der Bildebene. Wird g zur Schnittgeraden beider Ebenen, so entsteht die Ebene der Q wie die der R durch Umlegung der gegebenen in die Bildebene. Der erste Theil schliesst mit näherer Betrachtung der centrisch-affinen Transformation.

Nachdem Herr W. im zweiten Theile die nöthigen Sätze über das orthogonale Trieder entwickelt hat, behandelt er im dritten und vierten Capitel die orthogonale und schiefe Axonometrie nach einem von Herrn Pelz ins Auge gefassten neuen Gesichtspunkte. Sind die Projectionen der Axen, mit dem Kreuzungspunkte N, sowie ihre Spuren X, Y, Z in der Bildebene gegeben, so ist die Lage der Coordinatenebenen, der Grund-, Auf- und Seitenrissebenen fixirt. Jedes Object giebt nun zu drei Rissen und, indem auch diese projicirt werden, zu vier Bildern Veranlassung. Liegen zwei von diesen Bildern vor (das des Objects und seines Grundrisses), so ist das Object nach Lage und Gestalt völlig bestimmt. Es müssen sich also Messungen und Constructionen, die im Raume möglich sind, in der Bildebene vollziehen, beziehlich ausdeuten lassen. Einzelne Constructionen von dieser Art hatte für orthogonale Projectionen bereits Herr Pelz gegeben.

Eine Ebene kann durch das Bild ihres Spurendreiecks charakterisirt werden. Die zur Bildebene parallelen ergeben unter sich ähnliche spitzwinklige Dreiecke, welche die im Allgemeinen beliebigen Bilder der Axen zu Höhen haben. Das entstehende Bild bleibt ungeändert, welche von diesen parallelen Ebenen, die durch ihr Spurendreieck XYZ fixirt ist, man auch als Bildebene betrachtet. Beschreibt man über irgend einer Höhe des Spurendreiecks, z. B. über ZU, einen Halbkreis und schneidet ihn mit der Geraden, die parallel zu der zugehörigen Seite, hier zu XY, durch N gezogen ist, so erhält man den Distanzpunkt D; ND ist die Entfernung des Anfangspunktes der Coordinaten O_r von der Bildebene. Damit aber der Distanzpunkt die Ebene eindeutig fixire, muss man den erwähnten Halbkreis nach der einen oder der andern Seite der Höhe annehmen, je nachdem die Bildebene vor oder hinter O_r liegt. Die Bildebene ist dann festgelegt, wenn ein Punkt in derselben gegeben ist. Man findet ihre Spuren, wenn man eine der Geraden zeichnet, die den Punkt enthalten und parallel zu den Spuren der Ebene verlaufen.

Hieran schliesst sich unmittelbar die Umlegung der Geraden g, g' in die Zeichnungsebene. Sind für die Bildebenen zweier Punkte A, A' und B, B' D_1 und D_2 die Distanzpunkte, so braucht man nur ND_1 und ND_2 auf AB in A und B senkrecht aufzutragen und zwar nach derselben oder nach verschiedenen Seiten, je nachdem D_1 und D_2 auf derselben Seite von N liegen oder nicht. Die Endpunkte A_0, B_0 der genannten Strecken bestimmen die gesuchte Umlegung in die durch O_r gehende Bildebene. Soll in die Bildebene mit dem Distanzpunkte D umgelegt werden, so tritt lediglich D für N ein.

Die Hauptgerade einer Ebene, in welcher sie die Bildebene schneidet, ist mit Hilfe ihrer Spuren in den Coordinatenebenen leicht zu finden. Die hierzu senkrechten Falllinien sind leicht in die Bildebene umzulegen, weil ihre Bilder mit dem der Hauptgeraden rechte Winkel einschliessen. Damit liegt sofort die Umlegung der Ebene vor, ihr Neigungswinkel gegen die Bildebene u. s. w.

Nachdem Herr W. des einzigen bei orthogonaler Projection möglichen Specialfalles gedacht, wendet er das Vorige auf einige Beispiele an. Es wird die Normalebene fixirt, welche durch einen Punkt zu einer Geraden sich legen lässt, ferner der Neigungswinkel zweier Ebenen, sowie der einer Geraden gegen eine Ebene; durch zwei Gerade werden die parallelen Ebenen gelegt; endlich wird aus dem Bilde eines Kreises seine Ebene bestimmt. Zuletzt wird der Berührungskreis des Kegels aufgesucht, der an eine durch Mittelpunkt und Radius gegebene Kugel von einem Punkte aus sich legen lässt.

Im vierten Theile zur schiefen Axonometrie übergehend, erörtert Herr W. zunächst, wie man bei gegebenen Axenbildern und gegebenem Spurendreieck der Bildebene sich über die Richtung der projicirenden Strahlen orientiren kann. Ist O der Kreuzungspunkt der Axenbilder und N der Höhenpunkt des Dreiecks XYZ, so ist NO die orthogonale Projection des projicirenden Strahles, der den Anfangspunkt der Coordinaten O_r enthält. Construirt man wie vorher den Distanzpunkt der Ebene XYZ und trägt ND senkrecht auf NO bei N ab, bis (O), so ist $NO(O)$ die Umlegung des Dreiecks, welches aus dem Scheitel O_r, seiner Orthogonalprojection N und aus O besteht. ON ist die Fluchtlinie. Geht man von der Bildebene P zu einer parallelen P_1 über, so bleibt das Bild ganz ungeändert, der Fusspunkt N aber geht zu einer andern Lage N_1 auf ON über. NN_1 ist zur Zwischendistanz beider Ebenen proportional. Um die neue Bildebene auf die alte orthogonal zu projiciren, hat man nur an jedem Punkte der zweiten Zeichnung nach Grösse und Richtung die Strecke N_1N

anzutragen. Diese Bemerkung gestattet es auch bei schiefer Axonometrie mit mehreren Zeichnungsebenen zugleich zu operiren. Um z. B. die Gerade g, g' auf die Bildebene umzulegen, suche man zu zwei Punkten G_1, G'_1; G_2, G'_2 die Bildebenen nach dem Verfahren, das bei orthogonaler Axonometrie giltig war. Alsdann trage man die zugehörige Distanz $N_2 N_1$ nach Grösse und Richtung von G_2 bis G_n hin ab, mache auf einer Parallelen zu g $G_n S$ gleich der Zwischendistanz d_{12}, fälle von G_n das Loth $G_n Q$ auf g und trage QS bei Q bis (G) senkrecht auf, so ist $G_1(G)$ die Umlegung der Geraden in die Bildebene von G_1, G'_1.

Auch die Aufgabe, die Senkrechte von einem Punkte auf eine Ebene zu fällen, sowie die Umlegung der Ebene auf die Zeichnungsebene zu gewinnen und die Behandlung des Kreisbildes können auf das Princip der beiden Zeichnungsebenen zurückgeführt werden. Nach Kennzeichnung der Art, wie man bei den entstandenen Bildern sichtbare von nicht sichtbaren Theilen zu trennen hat, geht Herr W. auf die Specialfälle ein, welche durch parallele Lage der Bildebene zu einer der drei Axen oder durch Annahme der Projectionsrichtung in einer dieser Axen entstehen.

Der fünfte Theil handelt vom Zusammenhang von Object und Bild bei der orthogonalen Projection. Ist eine Raumfigur durch o, die Projection durch b Bedingungen gegeben, so sind bei fixirtem Bilde $x = o - b + 2$ Bedingungen verfügbar. Dieses Gesetz wird an verschiedenen Beispielen erläutert. Der wichtigste Specialfall ist der, dass drei von einem Punkte ausgehende Gerade als Projectionen eines orthogonalen Trieders aufgefasst werden können. Es wird bewiesen, dass die Längeneinheiten, welche für die projicirten Axen gelten, in den Verhältnissen $e_1 : e_2 : e_3$ angenommen werden können, wenn sich diese Zahlen wie die Seiten eines spitzwinkligen Dreiecks verhalten. Für die Winkel zwischen den Axenbildern werden die bekannten Ausdrücke entwickelt.

Haben o und b die obenerwähnte Bedeutung, so sind bei schiefer Axonometrie $o + 4 - b$ Bedingungen am Objecte verfügbar, wenn dessen Bild vorliegt. Hieraus ergiebt sich ein Hinweis auf Pohlke's Fundamentalsatz, indem von einem Tetraeder, dessen Bild ein gegebenes vollständiges Viereck sein soll, noch fünf Bedingungen verfügbar sind; dasselbe kann somit zu einem gegebenen Tetraeder ähnlich angenommen werden. Als eine empfindliche Lücke des Buches muss es erscheinen, dass Herr W. sich mit diesem Hinweis auf den Fundamentalsatz begnügt, ohne einen wirklich befriedigenden Nachweis desselben zu reproduciren.

Berlin, im März 1890. Ernst Kötter.

K. Bobek, **Einleitung in die projektivische Geometrie der Ebene.** Nach Vorträgen des Herrn C. Küpper bearbeitet. Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner. 1889. VI u. 210 S.

Die Vorträge, welchen das vorliegende Buch seine Entstehung verdankt, waren bestimmt, in äusserst knapp bemessener Zeit einen Ueberblick über die projectivische Geometrie zu geben. Massgebend ist daher das Streben nach einer möglichst gedrängten Darstellung. Besonders wird darnach gestrebt, die imaginären Elemente, soweit sie paarweise auftreten, möglichst bald den reellen gleichzustellen. Z. B. sind die verschiedenen Arten von Kegelschnittbüscheln gleich von Anfang an zusammen behandelt.

Während stofflich natürlich nichts Neues geboten wird, treten in methodischer Hinsicht manche Besonderheiten hervor. Projectivische Gebilde werden (I. Capitel) nach älterer Art als solche Gebilde definirt, die mit perspectivischen Gebilden congruent sind. Dass zwei projectivische Punktreihen Schnitte eines Strahlbüschels werden, wenn irgend zwei homologe Punkte derselben zur Deckung gelangen, wird für projectivisch-ähnliche Punktreihen aus Proportionssätzen gefolgert und alsdann mit Hilfe des Desargues'schen Dreieckssatzes für den allgemeinen Fall abgeleitet. Hiermit ist der Uebergang zum Fundamentaltheorem und den bekannten Folgerungen daraus gegeben. Bei ineinanderliegenden „conlocalen" projectivischen Punktreihen entsprechen je zwei Punkte einander wechselseitig, sobald die Fluchtpunkte zusammenfallen; es wird dies aus der bekannten metrischen Relation ($\mathfrak{J}A . \mathfrak{J}_1 A_1 = \mathit{Constans}$) geschlossen. Nachdem so die Punktinvolution eingeführt ist, wird der Satz vom vollständigen Viereck bewiesen und mit Hilfe der „Deckelemente" (Doppelpunkte) der Involution die Lehre von den harmonischen Punktgruppen begründet. Dann werden die für Strahleninvolutionen nöthigen Modificationen angeführt.

Im II. Capitel wird die collineare Beziehung zwischen zwei Punktebenen erörtert. Affinität, Aehnlichkeit und Congruenz werden als Specialfälle der collinearen Beziehung erkannt. Was über v. Staudt's Entwickelungen zum Fundamentaltheorem und seine Definition der Collineation im I. und II. Capitel gegeben wird, erscheint dem Referenten nicht ausreichend.

Im III. Capitel werden die Kegelschnitte zunächst als collineare Bilder von Kreisen definirt. Da die Entstehungsweise des Kreises aus congruenten Strahlbüscheln elementar begründet ist, ergiebt sich ohne Weiteres, dass zwei projectivische Strahlbüschel, deren Centren auf dem Kegelschnitte willkürlich wählbar sind, denselben erzeugen. Hieran schliessen sich die bekannten linearen Constructionen. Der Uebergang zu der zweiten Erzeugungsweise erfolgt, wie üblich, mit Hilfe des eingeschriebenen Viereckes und des zugehörigen umgeschriebenen Vierseites. Bei projectivischen Gebilden auf einem Kegelschnitte wird die Existenz der „Vervollständigungsaxe" nachgewiesen, der Geraden, auf welcher bc' und cb' sich schneiden, sobald b zu b' und c zu c' homolog ist. Hieraus wird beiläufig auf den Pascal-schen Satz geschlossen. Aus dem Satze von der Vervollständigungsaxe wird der von der „Polare" einer Involution durch einen Grenzübergang gewonnen. Hieraus folgt dann die Existenz des Poles der Involution und der Polare.

Er ist der allen Trägern von Involutionspaaren gemeinsame Punkt. Mit der Entwickelung der Polareigenschaften und des Reciprocitätsgesetzes schliesst das III. Capitel ab.

Im IV. Capitel werden die imaginären Elemente eingeführt und die bekannten eindeutigen Kegelschnittconstructionen durchgeführt. Im V. Capitel wird die Bestimmung der Schnittpunkte zweier Kegelschnitte an die Steiner'sche Verwandtschaft angeknüpft, zu der die gemeinsamen Paare conjugirter Punkte Veranlassung geben. Alle Kegelschnitte, die mit einem festen zu derselben Steiner'schen Verwandtschaft Veranlassung geben, gehören mit ihm zu einem Büschel. Aus der fundamentalen Eigenschaft des Büschels wird abgeleitet, dass ein Kegelschnitt durch fünf Paare conjugirter Punkte im Allgemeinen bestimmt ist. Das Netz wird dann als die Mannigfaltigkeit definirt, deren Kegelschnitte drei gegebene Paare conjugirter Punkte haben (Cap. VII).

In eigenartiger Weise werden (Cap. VI) die Brennpunkte eingeführt. Aus den Eigenschaften der Steiner'schen Verwandtschaft kann man folgern: Bestimmen Paare conjugirter Punkte eines Kegelschnittes an einer Ecke eines Poldreiecks Paare einer Involution, von der auch die beiden betreffenden Seiten ein Paar bilden, so stehen sie in derselben Beziehung auch zu den beiden anderen Ecken des Poldreiecks. Durch Specialisirung des dualen Satzes erfährt man, dass zwei aufeinander senkrecht stehende conjugirte Strahlen auf den beiden Axen Paare von zwei bestimmten Involutionen ausschneiden, die den Mittelpunkt des Kegelschnittes zum Mittelpunkt haben. Die eine hat dann die reellen Brennpunkte zu Doppelpunkten u. s. w. Noch einfacher kann man dies übrigens aus dem Satze ablesen, nach dem das dritte Seitenpaar eines vollständigen Vierecks aus zwei zu einander senkrechten conjugirten Strahlen besteht, wenn dies von den beiden ersten gilt, und dieselben nicht zu einander parallel sind. Entwickelt werden das Spiegelungsgesetz, die Entfernungseigenschaften der Kegelschnitte und die Eigenschaften der Foure'schen Polkreise.

Die folgenden Capitel VII und VIII beschäftigen sich mit der Curve dritter Ordnung als Erzeugniss eines Strahlbüschels und eines auf Grund der Polareigenschaften projectivisch darauf bezogenen Kegelschnittbüschels. Um die Allgemeingiltigkeit der Erzeugung nachzuweisen, benutzt Herr K. eine zu der Steiner'schen duale Verwandtschaft. In derselben werden je zwei Gerade einander zugeordnet, welche die Schnittpunkte zweier Kegelschnitte enthalten, die beliebig aus zwei festen Büscheln entnommen sind. Dreht sich die eine Gerade um einen festen Punkt, so umhüllt die andere einen Kegelschnitt, der die Seiten eines festen Dreiecks berührt. Die Ecken f, g, h desselben liegen auf einem Kegelschnitte des ersten und auf einem des zweiten Büschels; beide begegnen sich noch in e. Herr K. betrachtet nun zwei zunächst getrennte Mannigfaltigkeiten von Curven dritter Ordnung. Die einen werden mit Hilfe des ersten Büschels erzeugt und enthalten die (reellen) Grundpunkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ des zweiten, die anderen werden mit Hilfe des zweiten Büschels erzeugt und enthalten die (reellen) Grundpunkte a, b, c, d des ersten. Das Centrum $\mathfrak{p}$ bezw. p des zugehörigen Strahlbüschels bewegt sich über den ausgezeichneten Kegelschnitt des zweiten bez. ersten Büschels. Der Punkt e ist allen Curven gemeinsam. Auf jeder e enthaltenden Geraden liegt ferner eine Involution, die sowohl von der ersten, als auch von der zweiten Mannigfaltigkeit ausgeschnitten wird. Dasselbe Paar schneiden zwei Curven aus, wenn ihre Centren p und $\mathfrak{p}$ mit e in einer Geraden liegen. Hieraus folgt die Identität der beiden Mannigfaltigkeiten oder die unendlich vielfache Erzeugbarkeit der Curven dritter Ordnung. Die bekannten nächstliegenden Folgerungen aus diesem Satze werden gezogen. Dann wird nachgewiesen, dass ein Curvenbüschel mit neun reellen Grundpunkten auf den Geraden der Ebene projectivische Involutionen dritter Ordnung ausschneidet. Eine Involution dritter Ordnung wird zuerst auf einem Kegelschnitte erhalten, und zwar von einem Kegelschnittbüschel ausgeschnitten, von dem ein Grundpunkt auf ihm und ein zweiter ausserhalb desselben willkürlich ist (Cap. VI). Zu jedem derartigen Büschel ist die Involution projectivisch. Der Beweis knüpft an die obenerwähnte Verwandtschaft an. Die Involution vierter Ordnung wird analog behandelt. Den Abschluss bildet die Behandlung der Curve dritter Ordnung als Tripelcurve und die Einführung des Netzes der Polarkegelschnitte. Nach bekannter Weise erhält man für jeden Curvenpunkt einen Polarkegelschnitt. Es wird dann nachgewiesen, dass diese Curven einem Netze angehören. Auch jede andere Curve dieses Netzes kann einem bestimmten Punkte so zugeordnet werden, dass der Satz von der gemischten Polare allgemein gilt; sie wird als Polarkegelschnitt des Punktes bezeichnet.

Referent möchte übrigens auf seine eigenen auf algebraische Curven überhaupt bezüglichen Untersuchungen hinweisen, aus denen die Sätze über die Erzeugung der Curve dritter Ordnung sich vielleicht einfacher ergeben haben würden, als es hier geschieht.

Berlin, im März 1890. Ernst Kötter.

J. Schick, **Grundlagen einer Isogonal-Zentrik.** Tübingen, Verlag und Druck von Franz Fues. 1889. 91 S.

Fällt man von einem Centrum P aus Lothe auf die Seiten eines Polygons, so bilden ihre Fusspunkte das „Fusspunktspolygon“ des gegebenen; dieses ist zu jenem orthogonal-centrisch; eine ähnliche Figur, das isogonisch-centrische Polygon zum ersten, entsteht, wenn Gerade unter demselben constanten Winkel gegen die Seiten statt der Lothe gewählt werden. Meist werden Dreiecke zu Grunde gelegt, Vier- und n-Ecke kommen nur beiläufig in Betracht. So lange P noch nicht gegeben ist, kann das Fusspunktspolygon noch zwei Bedingungen unterworfen werden. Für die ausgiebige Gruppe von Aufgaben, die sich hier ergiebt, die nöthigen Anhaltspunkte zu geben, ist die Aufgabe der Schrift. Fundamental ist hierbei der Satz, dass bei einem Winkel α mit der Spitze A die Fusspunktsdistanz, die zu P gehört, gleich $AP \sin\alpha$ ist, also constant bleibt, wenn P im Kreise um A herum bewegt wird. Soll also beim Dreieck ABC und dem zugehörigen Fusspunktsdreieck XYZ $\frac{XY}{XZ}$ constant bleiben, so muss P einen B und C harmonisch trennenden, Apollonischen Kreis durchlaufen. Der Winkel bei X bleibt constant für Punkte eines B und C enthaltenden Kreises u. s. w. Beim Viereck $ABCD$ sind zwei gegenüberliegende Seiten des Fusspunktvierecks gleich, wenn P auf einem zu B und C gehörigen Apollonischen Kreise fortschreitet, parallel, wenn P einen B, C enthaltenden Kreis durchläuft. Es giebt daher zwei Lagen von P, für die das Fusspunktsdreieck zum Parallelogramm wird.

Im zweiten Abschnitte: „Transversal-Zentrik“, benutzt Herr Sch. neben seinem Fundamentalsatze die Lagrange'sche Gleichung, nach welcher für jeden Punkt P eines Kreises

$$AP^2 . m_1 + BP^2 . m_2 + CP^2 . m_3 = a^2 (m_1 + m_2 + m_3)$$

ist, wobei a der Radius des Kreises ist, m_1, m_2, m_3 aber die Gewichte sind, mit denen die Ecken des Dreiecks zu belasten sind, damit der Mittelpunkt des Kreises als Schwerpunkt sich ergiebt. Mit Hilfe dieser Mittel findet man zwei „Aequilateralpole“ J und J_1, deren jeder ein gleichseitiges Fusspunktsdreieck ergiebt. Die Kreise, welche diese Punkte mit A, B, C verbinden, sind Orte für Pole mit gleichschenkligen Dreiecken. Ihre Mittelpunkte D, E, F werden auf BC, CA, AB von den Tangenten des Umkreises in A, B, C ausgeschnitten. Schreitet P auf einem Kreise um D fort, so bleibt $XY^2 - XZ^2$ constant. Die erwähnten drei Kreise schneiden den Umkreis nochmals in den „Transversalpolen“ T_1, T_2, T_3. Die Mittelpunktstransversalen von XYZ verhalten sich zu den entsprechenden von ABC der Reihe nach wie $PT_1 : 2r$, $PT_2 : 2r$, $PT_3 : 2r$ (r Radius des Umkreises). AT_1, BT_2, CT_3 schneiden sich in dem zum Schwerpunkt inversen „Schwerpol“ Q. Auf einem Kreise um Q liegen Pole mit constantem $YZ^2 + ZX^2 + XY^2$. Die Pole Q_1, Q_2, Q_3 des Umkreises hinsichtlich BC, CA, AB werden als „Nebenschwerpole“ bezeichnet. Bei constantem PQ_1 bleibt auch $XY^2 + XZ^2 - YZ^2$ constant. Auf JJ_1 liegt nicht blos, wie selbstverständlich, der Mittelpunkt des Umkreises, sondern auch der Schwerpol Q.

In der „Areal-Zentrik“ wird zuerst nachgewiesen, dass für Punkte eines Kreises um den Höhenpunkt die Inhaltssumme der Rechtecke constant bleibt, welche über YZ, ZX, XY mit den Diagonalneigungen α, β, γ errichtet sind. Der bekannte Hauptsatz ist aber, dass ein Fusspunktpolygon denselben Inhalt hat, so lange sich P im Kreise um den „Aequiarealpol“ bewegt. Dieser Punkt ist der von Steiner eingeführte Punkt S, der beim Abrollen des Polygons auf einer Geraden die Rollcurve vom kleinsten Inhalt ergiebt und der beim Uebergang zu einer Curve zum Krümmungsschwerpunkte wird.

In der „Höhen-Zentrik“ wird nachgewiesen, dass die A entsprechende Höhe des Fusspunktdreiecks fest bleibt, wenn sich P auf einer Conchoide des Umkreises mit dem Doppelpunkte A bewegt. Für die Cardioide ist die neue Höhe der alten gleich. Der letzte Abschnitt des Buches bietet metrische Beziehungen unter den eingeführten merkwürdigen Punkten des Dreiecks.

Berlin, im März 1890. ERNST KÖTTER.

K. DOEHLEMANN, **Untersuchung der Flächen, welche sich durch eindeutig aufeinander bezogene Strahlenbündel erzeugen lassen.** München, Ackermann. 1889. 40 S.

Zwei mit Hilfe einer Cremona'schen Transformation n^{ter} Ordnung aufeinander bezogene Strahlenbündel S_1 und S_2 erzeugen im Allgemeinen eine Curve $(n+2)^{\text{ter}}$ Ordnung als Ort der Punkte, in denen sich homologe Strahlen begegnen. In Ausnahmefällen jedoch können auch je zwei homologe Strahlen sich treffen und mit $S_1 S_2$ in derselben Ebene liegen. Die Punktfelder, welche die Bündel auf irgend einer Hilfsebene ausschneiden, sind alsdann in perspectivischer Beziehung. Es entsteht dann eine Fläche n^{ter} Ordnung mit der $(n-2)$-fachen Geraden $S_1 S_2$ und den $(n-1)$-fachen Punkten S_1 und S_2. Die Schnittcurve der Fläche mit der gewählten Hilfsebene entspricht in der Verwandtschaft sich selbst; die Tangentenkegel von S_1 und S_2 schneiden die Curven aus, welche als Fundamentalcurven dem Schnittpunkte S von $S_1 S_2$ in der einen oder anderen Ebene zugehören. Alle drei Curven haben S zum $(n-2)$-fachen Punkte und berühren die $(n-2)$ Geraden, welche die Tangentialebenen der Fläche längs $S_1 S_2$ ausschneiden. Von den Kegelschnitten der Fläche durch S_1 und S_2 zerfallen $2(n-1)$ in Geradenpaare durch S_1 und S_2, andere $(n-2)$ Gerade der Fläche liegen in den Tangentialebenen längs $S_1 S_2$. Die Classe der Fläche wird auf $2(3n-5)$ angegeben. Der analytische Apparat, mit dessen Hilfe die obigen Resultate abgeleitet werden, ist ein etwas umständlicher.

Ausgehend von der gewonnenen Gleichungsform

$$x_3 x_4 \varphi^{(n-2)}(x_1, x_2) + x_3 \varphi_1^{(n-1)}(x_1, x_2) + x_4 \varphi_2^{(n-1)}(x_1, x_2) + \varphi^{(n)}(x_1, x_2) = 0$$

stellt nun Herr D. die Gleichung der Hesse'schen Fläche auf und giebt einige Eigenschaften derselben an.

Berlin, im März 1890. ERNST KÖTTER.

Einleitung in die analytische Geometrie von D. J. FRISCHAUF, Professor an der Universität Graz. Dritte, sehr vermehrte Auflage. Graz 1889, bei Leuschner & Lubensky. 76 S.

Der Eigenartigkeiten des kleinen Büchleins sind manche zu erwähnen. Der Verfasser hat nicht, wie es in Elementarschriften fast ausnahmslos zu geschehen pflegt, auf die Ebene sich beschränkt, sondern auch die Raumgeometrie in das Bereich seiner Betrachtungen aufgenommen, und zwar in eigenthümlich wechselnder Anordnung. Zuerst wird die Coordinatenbestimmung eines Punktes, die Entfernung zweier Punkte, der Winkel zweier Geraden, die Umwandlung geradliniger Coordinaten durch Axendrehung in der Ebene, sowie im Raume verhältnissmässig ausführlich auf 10 Seiten besprochen; dann folgen 28 Seiten Geometrie der Ebene, hierauf 19 Seiten Geometrie des Raumes und endlich noch 19 Seiten Uebungsstoff zu sämmtlichen drei Abschnitten. Nicht minder auffallen mag es, dass, während von harmonischer Theilung, von Polaren u. s. w. nicht die Rede ist, der Krümmungskreis in der Ebene, das Krümmungsparaboloid im Raume zur Kenntniss des Lesers gelangt, indem der Krümmungsmittelpunkt in der Ebene zunächst als Durchschnittspunkt zweier consecutiver Normalen erklärt wird. Eigenthümlichkeiten zeigen ferner manche Einzelbetrachtungen, von welchen wir nur eine beispielsweise hervorzuheben beabsichtigen. Die Transformationsformeln $x = ax' + by'$, $y = cx' + dy'$ auf einen Ausdruck $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ angewandt lassen diesen in $A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2$ übergehen, wobei $B'^2 - A'C' = (ad - bc)^2(B^2 - AC)$ erscheint, und damit ist bewiesen, dass $B'^2 - A'C'$ gleiches Vorzeichen mit $B^2 - AC$ besitzt. Später wird nun die Gleichung zweiten Grades unter Anwendung orthogonaler Coordinaten discutirt, und nachdem dies geschehen, dient eine Berufung auf die obenerwähnte Invariabilität des Vorzeichens bei vorgenommener Axendrehung zum Beweise, dass die besondere Annahme orthogonaler Coordinaten fallen darf, ohne dass die Bedingungen sich ändern, unter welchen die Gleichung zweiten Grades die einer Ellipse, Hyperbel, Parabel ist. Diese und ähnliche Einzelheiten machen das Büchelchen zu einem recht lesenswerthen.

Cantor.

K. Rudel, **Die Verwertung der Symmetrie im Geometrieunterrichte.** Beilage zum Jahresbericht des Realgymnasiums in Nürnberg 1890.

Als ein Versuch, die neuere Geometrie dem Unterricht zugänglich zu machen, ist das Schriftchen mit Freuden zu begrüssen. Es bietet in einer wohlgeordneten Folge Sätze über die Geometrie in Bezug auf einen Punkt, eine Gerade und eine Ebene. Wenn aus dieser Folge auch meistens mit genügender Deutlichkeit die Art des Beweises hervorgeht, so könnte doch nur eine thatsächliche Ausführung zeigen, ob nicht irgendwo Sprünge vorhanden sind. Von den Lehrbüchern, welche derselben Richtung folgen, erwähnt der Verfasser die „Elemente“ von Hubert Müller, nicht aber dessen „Leitfaden“, dem gegenüber die Herausgabe der Elemente fast als ein Rückzug zu betrachten ist; er scheint also diesen Leitfaden ebenso wenig zu kennen, als das unter Betheiligung des Referenten verfertigte Lehrbuch, das die Symmetrie nicht blos als Beigabe zum geometrischen Lehrstoffe, sondern als Grundlage des geometrischen Beweises nimmt. Wie durch die systematische Einführung der Symmetrie die Beweise vereinfacht werden, zeigt das Lehrbuch noch in höherem Grade, als das Schriftchen, z. B. an dem Beweise von der zur Ebene normalen Geraden. Der zweite und dritte Theil geben in wirklich Genuss gewährender Klarheit und Uebersichtlichkeit die symmetrischen Eigenschaften des Kegels, der Kugel und der regelmässigen Körper; im Anschluss an diese dürfte die gleiche Behandlung des Rhomboeders für den mineralogischen und optischen Unterricht von Bedeutung sein.

J. Henrici.

Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variabeln von Leo Königsberger. Leipzig, Teubner. 1889. In 8°. 485 S.

Während an elementaren Lehrbüchern über die Integration der Differentialgleichungen, an Beispielsammlungen kein Mangel herrscht, besonders wenn man die englische und französische Literatur mit zu Rathe zieht, so konnte man doch die tiefergehenden functionentheoretischen Untersuchungen über diesen Gegenstand nirgends anders, als in den „Jacobi'schen Vorlesungen über Dynamik" und in etlichen zerstreuten Originalabhandlungen von Abel, Weierstrass, Briot und Bouquet, Fuchs, Frobenius, Thomé u. A. finden.

Auch Königsberger hat durch eine grosse Anzahl ausgezeichneter Arbeiten und besonders durch sein vor sieben Jahren erschienenes Buch „Allgemeine Untersuchungen aus der Theorie der Differentialgleichungen" namhafte Beiträge im erwähnten Gebiete geliefert.

In seinem neuesten Werke, welches uns eben vorliegt, finden wir eine methodische Darlegung der allgemeinee Theorie der Differentialgleichungssysteme, wie sie durch die obengenannten Forscher und den Herrn Verfasser selbst begründet worden ist.

Die Betrachtungen sind functionentheoretischer Natur, die Problemstellung möglichst allgemein; trotzdem hat der Verfasser sich so eingerichtet, dass er nur die Elemente der Differential- und Integralrechnung vorauszusetzen nöthig hatte.

Was den speciellen Inhalt des Buches anlangt, so wird im ersten Capitel gezeigt, wie ein beliebiges algebraisches Differentialgleichungssystem auf ein für alle Variabelen gleichmässiges erster Ordnung zurückgeführt werden kann. Letzteres heisst Jacobi'sche Form oder System m^{ter} Classe und wird dargestellt durch die m Gleichungen

$$f_i\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_m, \frac{dy_i}{dx}\right)=0, \qquad (i=1, 2, \ldots, m)$$

in welchen die f_i ganze Functionen der eingeschlossenen Grössen bedeuten, die in Bezug auf $\frac{dy_i}{dx}$ vom ν_i^{ten} Grade sind. Indem nun ein Satz von Abel benutzt wird, nach welchem beliebig viele algebraische Functionen durch eine einzige rational ausgedrückt werden können, gelingt es, die m Ableitungen $\frac{dy_i}{dx}$ explicite darzustellen, nämlich

$$\frac{dy_i}{dx} = \frac{G_i(x, t_\alpha, y_1, y_2, \ldots, y_m)}{\frac{\partial G(x, t_\alpha, y_1, y_2, \ldots, y_m)}{\partial t_\alpha}}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

wobei für t_α der Reihe nach die sämmtlichen Lösungen einer algebraischen Gleichung N^{ten} Grades

$$G(x, t, y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0, \quad N = \nu_1 . \nu_2 \ldots \nu_m$$

zu setzen sind. Die G_i sind in Bezug auf t_α vom $N-1^{\text{ten}}$ Grade. Das so erhaltene normale System, welches in den folgenden Untersuchungen eine fundamentale Rolle spielt, wird ein Jacobi-Weierstrass'sches Differentialgleichungssystem genannt.

Im Allgemeinen giebt es nun zu jedem willkürlich gewählten Werthe ξ von x eine nach positiven ganzen steigenden Potenzen von $x-\xi$ fortschreitende, in der Umgebung des Punktes ξ convergirende Reihe, welche dem letzten Systeme genügt und welche, wenn $x = \xi$ gesetzt wird, m beliebig vorgeschriebene Werthe η_1 bis η_m annimmt. Hiermit ist die Existenz eines Integralsystems erwiesen; nachträglich wird noch gezeigt, dass dieses System auch das einzige Functionalsystem ist, welches dem Differentialgleichungssystem genügt und für $x = \xi$ jene Werthe η_i annimmt. — Es folgen nun Bemerkungen über die Fortsetzung jener Integrale und die Definition der singulären Systeme.

Da eine Differentialgleichung n^{ter} Ordnung k^{ten} Grades durch k Systeme von je n Gleichungen erster Ordnung ersetzt werden kann, so lassen sich die erhaltenen Resultate sofort auf diese übertragen.

Die Umkehrungsfunctionen der Integrale, d. h. die η_i als Functionen von $x, y_1, \ldots, y_m$ werden Integralfunctionen genannt.

Der vierte Abschnitt dieses Capitels bringt die Jacobi'sche Theorie des Multiplicators. Jede Integralfunction kann durch den Quotienten zweier Multiplicatoren dargestellt werden, und umgekehrt ist jeder solcher Quotient eine Integralfunction des Systems von Differentialgleichungen. Vermittelst einer Integralfunction kann die Classe des Differentialgleichungssystems um eine Einheit erniedrigt werden. — Bedeutung des letzten Multiplicators.

Der nächste Abschnitt handelt von der Irreducibilität eines Systems algebraischer Differentialgleichungen. Dieser der Algebra entnommene Begriff wurde von Frobenius auf lineare homogene Differentialgleichungen übertragen; dann hat ihn Königsberger für allgemeine algebraische Differentialgleichungen definirt und bei der Untersuchung höherer Transcendenten benutzt. Unter einem irreducibeln Differentialgleichungssystem m^{ter} Classe und n^{ten} Grades versteht man ein solches, welches mit keinem andern niederer Classe irgend ein Integralsystem gemein hat. Ist dagegen das System reducibel, so zerfällt es in ein System ν^{ter} Classe ($\nu < m$) und in $m - \nu$ Differentialgleichungen, oder es besteht zwischen den Elementen eines Integralsystems ein algebraischer Zusammenhang. Hieraus folgt dann, dass für ein irreducibles Differentialgleichungssystem nie Elemente von Integralsystemen existiren dürfen, welche algebraische Functionen sind.

Für eine algebraische Differentialgleichung n^{ter} Ordnung ergiebt sich demgemäss, dass sie irreducibel ist, wenn sie in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten im algebraischen Sinne irreducibel ist und mit keiner algebraischen Differentialgleichung niederer Ordnung ein Integral gemein hat.

An die Irreducibilitätsuntersuchungen schliesst sich der „Satz von der Erhaltung der algebraischen Beziehungen" zwischen Integralen verschiedener Differentialgleichungssysteme an. Dieser Satz ist von fundamentaler Bedeutung, denn mittels desselben beherrscht man das Transformationsproblem der durch algebraische Differentialgleichungssysteme definirten Transcendenten, und man ist in der Lage, das Abel'sche Theorem in der allgemeinsten Weise definiren zu können. Der Verfasser beweist zunächst die Unveränderlichkeit der algebraischen Beziehungen zwischen Integralen verschiedener Differentialgleichungssysteme bei Substituirung beliebiger anderer Integralsysteme und macht sodann eine Anwendung, indem er zeigt, wie die algebraische Beziehung zwischen einem Integrale einer Differentialgleichung höherer Ordnung und Integralen von irreduciblen Differentialgleichungen erster Ordnung erhalten bleibt.

Das zweite Capitel handelt von den charakteristischen Eigenschaften specieller Arten von Differentialgleichungssystemen. Zuvörderst werden unter Jacobi'schen Gesichtspunkten gewisse Differentialgleichungen der Mechanik untersucht. Dann stellt der Verfasser alle algebraischen Differentialgleichungssysteme auf, für welche sich die Elemente des allgemeinen Integralsystems algebraisch durch diejenigen particulärer Integralsysteme und willkürliche Constanten ausdrücken lassen. Endlich zeigt er die Reduction homogener Differentialgleichungssysteme auf Systeme niederer Classe.

Das dritte Capitel wendet sich speciell den linearen Differentialgleichungssystemen zu. Es wird nach dem Vorgange von Fuchs ein simultanes, dem Punkte x_0 zugehöriges Fundamentalsystem von Integralen definirt, das ist eine Zusammenstellung von n einem nicht singulären Punkte x_0 zugehörigen Integralsystemen

$$y_{ik}, \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$$

deren Determinante D für $x = x_0$ nicht verschwindet. Da diese Determinante in den Coefficienten A_{ik} des Systems ausgedrückt den Werth

$$D = Ce^t, \quad C = const., \quad t = \int dx \, . \sum_1^n A_{kk}$$

besitzt, so kann man durch die Substitutionen

$$y_k = z_k e^{\frac{t}{n}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

erreichen, dass in dem transformirten System der z_k

$$D = C, \text{ d. h. } \sum_1^n A_{kk} = 0$$

wird.

Ein so beschaffenes System wird die Normalform eines linearen homogenen Differentialgleichungssystems genannt. — Als Normalform einer linearen homogenen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung wird nach diesen Festsetzungen eine solche zu gelten haben, in welcher der Coefficient der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ableitung verschwindet.

Die Integralsysteme der nicht homogenen linearen Differentialgleichungssysteme werden in bekannter Weise durch Substitutionen, sowie durch die Methode der Variation der Constanten aus den adjungirten homogenen Systemen hergeleitet.

Aus der nun folgenden Untersuchung über die symmetrischen Functionen simultaner Fundamentalsysteme von Integralen linearer Differentialgleichungen sei der Satz hervorgehoben: Die Coefficienten des Differentialgleichungssystems sind symmetrische Functionen der Elemente eines simultanen Fundamentalsystems von Integralen. Und: Jede ganze symmetrische Function der Elemente eines simultanen Fundamentalsystems von Integralen eines linearen homogenen Differentialgleichungssystems und deren Ableitungen ist gleich einer ganzen Function der Coefficienten der Differentialgleichungen und deren Ableitungen, multiplicirt mit einer positiven ganzzahligen Potenz von

$$e^t, \quad t = \int dx \, . \sum_1^n A_{kk}.$$

Es ist bekannt, dass zwischen algebraischen Gleichungen und linearen Differentialgleichungen eine solche Analogie besteht, dass man gewisse Probleme aus der Theorie linearer Differentialgleichungen ganz so formuliren kann, wie es in der Algebra geschieht. Dem Begriffe „Wurzel" dort entspricht hier „Integral". Der Verfasser hat dergleichen Sätze, die sich auf vielfache Lösungen, Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Differentialtheilers, auf gemeinsame Integrale zweier Gleichungen beziehen, mit aufgenommen. Hieran anknüpfend, erörtert er dann die Irreducibilität linearer Differentialgleichungssysteme.

Als bemerkenswerthes Resultat sei nur erwähnt, dass im Allgemeinen Integrale linearer Differentialgleichungssysteme immer nur wieder in irreducibler Weise linearen Differentialgleichungssystemen angehören können.

Dieser Satz wird speciell auf ein System von zwei homogenen linearen Differentialgleichungen angewendet und gezeigt, dass für ein solches, als irreducibel vorausgesetztes System eine algebraische Beziehung zwischen den

Elementen eines simultanen Fundamentalsystems von Integralen nicht existiren kann.

Es folgt nun die allgemeine Untersuchung über die Form der Beziehungen zwischen den Integralen linearer Differentialgleichungssysteme beliebiger Classe und Quadraturen algebraischer Functionen, durch welche sehr wichtige Eigenschaften dieser Gleichungen erkannt werden. So unter anderen diese: Wenn alle Integralelemente eines homogenen linearen Differentialgleichungssystems mit rationalen Coefficienten algebraische Functionen sind, so besitzen dieselben ein Integralelement, durch welches sich alle anderen rational ausdrücken lassen.

Das vierte Capitel handelt von den analytischen Ausdrücken für die Integrale algebraischer Differentialgleichungssysteme.

Wenn man den hohen Standpunkt, den man in der allgemeinen Theorie zuvor eingenommen hat, verlässt und die specielleren Untersuchungen in Angriff nimmt, die sich auf das eigentliche Integrationsproblem, d. h. die analytische Darstellung der Functionen beziehen, so beherrscht man sofort ein grosses Gebiet, welches auf anderem Wege zum Theil zwar auch erschlossen werden kann, bisweilen aber nur durch Winkelzüge, jedenfalls nie so umfassend und naturgemäss.

Es ist ein Verdienst des Herrn Verfassers, dass er auch die Anwendungen, die sich bis auf die Elemente erstrecken, in sein Buch aufgenommen hat. Letzteres wird daher schon dem Anfänger gute Dienste leisten, einen weiten Gesichtspunkt geben und vor Dilettantismus bewahren. Wir gehen auf dieses Capitel, welches der Natur der Sache nach auch viel Bekanntes bringt, nicht im Besondern ein und bemerken nur, dass es schon durch die consequente functionentheoretische Darstellung den Stempel der Originalität trägt.

Im fünften Capitel findet sich eine Untersuchung über die Eigenschaften der Integrale algebraischer Differentialgleichungssysteme in der Umgebung eines beliebigen Werthes der unabhängigen Veränderlichen. — Wenn die Integrale in der Umgebung singulärer Punkte, welche nicht zugleich Verzweigungspunkte sind, genommen werden, so kann man die Untersuchung eines allgemeinen Systems zurückführen auf diejenige eines Jacobi-Weierstrass'schen

$$\frac{\partial G(x, t_1, y_1, y_2, \ldots, y_m)}{\partial t_1} \frac{dy_\varrho}{dx} = G_\varrho(x, t_1, y_1, y_2, \ldots, y_m), \quad (\varrho = 1, 2, \ldots, m)$$

wobei die schon früher erwähnte algebraische Gleichung

$$G(x, t_1, y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0$$

mehrfache, jedoch nicht nach positiven ganzen Potenzen von $x - \xi$, $y_1 - \eta_1$, $\ldots$, $y_m - \eta_m$ entwickelbare Lösungen besitzt.

Wenn die Integrale in der Umgebung solcher Werthsysteme, für welche die Differentialquotienten eindeutig, aber unbestimmt sind, genommen werden, so kann man die Untersuchung des Differentialgleichungssystems

$$\frac{dx_\varrho}{dx} = \frac{\mathfrak{P}_\varrho(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\mathfrak{Q}_\varrho(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)} \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, n)$$

in der Umgebung von $x = 0$, wofür $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ sein soll, auf diejenige eines Systems von der Form

$$t\frac{d\zeta_\varrho}{dt} = a_{\varrho_1}\zeta_1 + a_{\varrho_2}\zeta_2 + \cdots + a_{\varrho n}\zeta_n + b_\varrho t + (t, \zeta_1, \ldots, \zeta_n)^2 + \cdots$$

zurückführen, worin $(t, \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)^\lambda$ eine ganze homogene Function λ^{ten} Grades von $t, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$ bedeutet.

Es folgt hierauf die Feststellung der Kriterien für die Eindeutigkeit der Integrale eines Differentialgleichungssystems der Form

$$x\frac{dy_\varrho}{dx} = (x, y_1, \ldots, y_n)^1 + (x, y_1, \ldots, y_n)^2 + \cdots \quad (\varrho = 1, 2, \ldots, n)$$

in der Umgebung des Werthes $x = 0$, dem die Nullwerthe der Integrale entsprechen, und eine Discussion der nicht eindeutigen Integrale dieses Systems.

Letzteres wird durch eine algebraische Transformation auf die Normalform

$$x\frac{dy_\varrho}{dx} = \lambda_\varrho y_\varrho + \alpha_1 x + (x, y_1, \ldots, y_n)^2 + (x, y_1, \ldots, y_n)^3 + \cdots \quad (\varrho = 1, 2, \ldots, n)$$

gebracht und gezeigt, dass die Existenz eines um $x = 0$ herum eindeutigen Integralsystems davon abhängt, ob die λ_ϱ, resp. deren reelle Theile ganze positive Zahlen sind oder nicht. Als Beispiel dient die Gleichung

$$x\frac{d^m y}{dx^m} = f(x, y, y', \ldots, y^{m-1}).$$

Der allgemeine Theil, welcher sich auf beliebige algebraische Differentialgleichungssysteme bezieht, kann auf die Betrachtung der vorher untersuchten normalen Systeme zurückgeführt werden.

Das sechste Capitel, mit welchem das Buch abschliesst, wendet sich wieder den linearen Differentialgleichungssystemen zu. Eine charakteristische Eigenschaft dieser Gleichungssysteme ist die, dass ihre Integrale nur Vieldeutigkeiten und Unstetigkeiten ganz scharf begrenzter und bestimmt angebbarer Art besitzen. Dies genauer zu untersuchen, d. h. das Verhalten der Integrale in der Umgebung eines beliebigen Werthes der unabhängigen Variabeln zu studiren, ist die nächste Aufgabe. Es wird der Begriff der regulären Integrale eingeführt, dann werden die verschiedenen Normalformen der entsprechenden regulären Differentialgleichungssysteme aufgestellt. — Von besonderer Wichtigkeit sind die Substitutionsgruppen linearer Differentialgleichungssysteme wegen ihrer Anwendung auf die Ermittelung algebraischer Integralsysteme.

Stellen die n^2 Integrale

$$y_{ik} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$$

ein simultanes Fundamentalsystem des Differentialgleichungssystems

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} y_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

dar, wobei die A_{ik} in der ganzen Ebene eindeutig sein mögen, so geht für beliebige Umläufe der Veränderlichen x jenes Fundamentalsystem stets in ein neues über. Diese Uebergänge vom ursprünglichen System zu einem beliebigen andern werden Substitutionen, und die Zusammenstellung aller Substitutionen wird die Gruppe des Differentialgleichungssystems genannt.

Weiss man von einem Differentialgleichungssystem, dass es nur reguläre Integralsysteme besitzt und dass dessen Gruppe nur eine endliche Anzahl von Substitutionen in sich schliesst, so ist damit auch das Vorhandensein von nur algebraischen Integralsystemen festgestellt und umgekehrt.

Ein sehr passendes Beispiel für die allgemeinen Untersuchungen des letzten Capitels liefert das hypergeometrische Differentialgleichungssystem zweiter Classe

$$\begin{cases} (x-a)(x-b)\dfrac{dy_1}{dx} = (k_{11} + l_{11}x)y_1 + (k_{12} + l_{12}x)y_2, \\ (x-a)(x-b)\dfrac{dy_2}{dx} = (k_{21} + l_{21}x)y_1 + (k_{22} + l_{22}x)y_2. \end{cases}$$

Dieses System besitzt nur reguläre Fundamentalsysteme von Integralen in der Umgebung der einzigen singulären Punkte a, b und ∞. Es lässt sich durch passende Substitutionen* auf eine solche Normalform bringen, dass man nach Elimination der einen oder andern abhängigen Veränderlichen unmittelbar auf die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe von Gauss geführt wird. Aus hypergeometrischen Reihen lässt sich daher auch das vollständige Integralsystem aufbauen, welches nun leicht discutirt werden kann.

Hiermit schliesst das Buch, dem in einem knapp gehaltenen Vorwort ein Verzeichniss der benutzten Originalabhandlungen beigegeben ist, ab.

Wir bemerken hierzu, dass wir bei dem Reichthum der Resultate, welche das grossartig angelegte Werk bringt, vieles Bemerkenswerthe unterdrücken mussten, wenn wir nicht die Grenzen eines Referates überschreiten wollten. Unser Bestreben ging darauf hinaus, zu zeigen, **wie** der Verfasser schreibt, und wodurch sich sein Buch von anderen ähnlichen Titels unterscheidet.

Das neue Werk von Königsberger kann sicher zu den besten literarischen Erscheinungen der letzten Zeit gezählt werden, denn es führt den Leser in eine grosse moderne klassische Theorie ein, die bisher nicht leicht zugänglich war. — Die Darstellung ist klar, durch Strenge ausgezeichnet

---

* Der Herr Verfasser sagt „algebraische Substitutionen". — Die betreffende Transformation dürfte sich wohl ohne die Substitution $y_i = x^{\lambda}(1-x)^{\mu} z_i$, welche im Allgemeinen transcendent sein wird, nicht ausführen lassen. Doch ist das für die weitere Darlegung unwesentlich.

und wirkt deshalb so unmittelbar, weil der Verfasser nicht blos reproducirt, sondern in seiner eigensten Sphäre arbeitet.

Wenn man das Buch studirt hat, hegt man den Wunsch, dass auch die partiellen Differentialgleichungen einer solchen Bearbeitung unterzogen würden. Bei dem innigen Zusammenhang, der zwischen diesen und den simultanen Systemen totaler Differentialgleichungen besteht, dürften sich manche Resultate unmittelbar übertragen lassen. — Vielleicht entschliesst sich der Herr Verfasser hierzu!

Plauen i. V. W. HEYMANN.

Abriss einer Theorie der Functionen einer complexen Veränderlichen und der Thetafunctionen von J. THOMAE in Jena. 3. Aufl. Halle 1890.

Die neue Auflage soll gleich den früheren eine kurze Uebersicht über die fundamentalen Eigenschaften der Thetafunctionen einer Veränderlichen bieten. Sie enthält einige Untersuchungen der früheren über ungleichmässige Convergenz und Gebietsstetigkeit nicht mehr, da man diese in den elementaren Lehrbüchern finden kann. Auch die Mannigfaltigkeit der Darstellungsformen ist etwas beschränkt worden. Dafür sind die doppeltperiodischen Functionen und elliptischen Integrale noch vollständiger als in der zweiten Auflage behandelt worden, und um das Buch praktisch brauchbarer zu machen, hat der Verfasser noch eine Sammlung von Formen und Formeln angehängt.

Eine Einleitung bringt die unentbehrlichen Sätze aus der allgemeinen Functionentheorie, und zwar nach einer Methode, die auf Riemann's Sätze und Gebilde leitet. Die Benutzung der Riemann'schen Flächen, welche doch der reinen Analyse fremd sind, rechtfertigt der Verfasser mit der Unmöglichkeit, bei dem heutigen Stande der Functionentheorie zu einer vollkommenen Einsicht über algebraische Functionen und deren Integrale zu gelangen, wenn das Auge der Intuition geschlossen ist, und hat hiermit seinen Standpunkt gegenüber der Weierstrass'schen Behandlungsweise der Functionentheorie gekennzeichnet. Der Verfasser ist bereit, die Consequenz derselben anzuerkennen, doch ermögliche sie seiner Meinung nach nicht eine wirkliche Einsicht in einen algebraischen Functionenbereich und dessen Integrale. Diesem Standpunkte zufolge muss der Verfasser die Bekanntschaft mit dem genauen Begriffe des Differentialquotienten, des gewöhnlichen Integrales und des Doppelintegrales, in welchem die Veränderlichen reell sind, voraussetzen. Im Uebrigen macht die functionentheoretische Einleitung nicht den Anspruch auf Vollständigkeit: es werden eben nur solche Functionen, Sätze und Methoden vorgebracht, deren Kenntniss für die Untersuchung der Thetafunctionen, der doppeltperiodischen Functionen und der elliptischen Integrale nöthig ist. Aber auch in Bezug auf diese Functionen legt sich das Buch noch die Beschränkung auf, dass es die allgemeine Transformationstheorie von der Behandlung ausschliesst.

Im folgenden Abschnitt behandelt der Verfasser die doppeltperiodischen Functionen, mit Ausschluss derer, die im Endlichen eine wesentlich singuläre Stelle besitzen, und die Thetafunctionen. Nach Ableitung der Liouville'schen Sätze wird die doppeltperiodische Grundfunction aufgestellt, wo der Verfasser an der Legendre-Jacobi'schen Tradition festhält. Die Weierstrass'sche p-Function, sowie die aus ihr folgenden und ihre Beziehungen zu den alten Formen sind an den entsprechenden Stellen unter dem Texte angegeben. Doch sieht sich Referent genöthigt zu betonen, dass vom functionentheoretischen Standpunkte aus die Weierstrass'sche p-Function als die einfachste, die Legendre-Jacobi'sche Grundfunction dagegen als eine ganz zufällige erscheint. Die Darstellung der letzteren durch unendliche Producte leitet zu den Thetafunctionen über, mit deren Hilfe sodann die elliptischen Functionen in der Bezeichnung sau, cau, dau eingeführt werden, einer Bezeichnung, die uns ebenso wenig geeignet als die Gudermann'sche scheinen will. Nach Aufstellung ihrer Additionstheoreme construirt der Verfasser die zu $sau = z$ gehörige Riemann'sche Fläche für den Fall eines positiven und negativen q, wobei als Beispiele die winkeltreue Abbildung des Rechtecks und speciell des Quadrats auf den Kreis, sowie Jacobi's Lösung des Poncelet-Steiner'schen Schliessungsproblems Erwähnung finden. Die Productentwickelung der Functionen sa^2u, ca^2u, da^2u führt zur linearen Transformation der Thetafunctionen, die unter dem Texte auch für die Weierstrass'sche Sigmafunction durchgeführt wird, wobei sich zeigt, dass dieselbe ebenso wie p der linearen Transformation gegenüber eine Invariante ist. Die Constante der linearen Transformation, welche nach einer vom Verfasser angegebenen Methode in den früheren Auflagen auch dem Vorzeichen nach bestimmt worden ist, wird hier nur bis auf eine unbestimmt bleibende Quadratwurzel der Einheit gefunden; doch bleibt der Zusammenhang zwischen den Thetafunctionen und Gauss'schen Summen nicht unerörtert. Am Schlusse dieses Abschnittes beschäftigt sich der Verfasser noch mit der numerischen Berechnung der elliptischen Functionen, sowie auch schon mit der näherungsweisen Auswerthung des Argumentes u aus den elliptischen Functionen in gewissen Fällen, wobei zwei Transformationen vierter Ordnung Erwähnung finden.

Zur genaueren Kenntniss der doppeltperiodischen Functionen ist die Untersuchung eines Bereiches vom Geschlecht Eins unerlässlich. Daher folgt im nächsten Abschnitte eine Betrachtung der zweiwerthigen Functionen vom Geschlecht Eins und ihrer Integrale, welche mit der vorhergehenden gewissermassen parallel läuft. Der Verfasser untersucht zunächst den Bereich (s, z), wo $s = \sqrt{(z-k_1)(z-k_2)(z-k_3)(z-k_4)}$, construirt die zu ihm gehörende Riemann'sche Fläche und zeigt, dass die rationalen Functionen dieses Bereichs einwerthige (analytische) Functionen in der Fläche T sind, ein Satz, dessen Umkehrung ebenfalls bewiesen wird. Nachdem sodann die den Liouville'schen Sätzen und dem Cauchy'schen Satze hier entsprechenden Sätze abgeleitet worden sind, folgt eine Reduction des allgemeinen elliptischen Integrals im Princip. Hieran schliesst sich die Aufstellung der bekannten Normalform für s nach Legendre's Vorgange, neben welcher noch eine andere $s=\sqrt{z(1-z)(1-kz)}$ als Normalform II eingeführt wird. Der Verfasser erörtert sodann die Bedeutung der Thetafunctionen für das Umkehrproblem, leitet die Differentialgleichung für die Periodicitätsmoduln her und schildert das Verhalten des Moduls τ als Function von k. Nach einem Capitel über das Additionstheorem, ein Theorem, das bekanntlich Herr Weierstrass an die Spitze der Theorie der doppeltperiodischen Functionen stellt, schliesst dieser Abschnitt mit einer Betrachtung des Geschlechtes algebraischer Gebilde.

Im letzten Abschnitte wird eine Darstellung der Integrale zweiter und dritter Gattung durch Thetafunctionen gegeben und in einem Anhange werden Formeln für die Rechnung mit Thetafunctionen und elliptischen Functionen zusammengestellt.

Dr. E. Jahnke.

Ueber die Teilbarkeit der Zahlen von P. Adam. Programmabhandlung des königl. Gymnasiums in Clausthal. 1889.

Der Verfasser behandelt die Theilbarkeit der Zahlen durch die Zahlen des ersten Hunderts unter Benutzung des einfachen Gedankens, dass der Divisor in der ganzen Zahl aufgeht, wenn er in dem Reste, d. h. in der Summe der bezw. mit den „Theilbarkeitscoefficienten" multiplicirten Ziffern der Zahl aufgeht. Aus der voraufgeschickten Tabelle der Theilbarkeitscoefficienten werden Regeln über die Theilbarkeit der Zahlen durch solche unter 100 hergeleitet. U. A. findet der Verfasser, dass

$$10^p \equiv -1, \quad mod(2p+1)$$

für $p=3, 5, 8, 9, 11, 14, 23, 24, 29, 30, 36, 44, 48$.

Dr. E. Jahnke.

Ueber die associirten Formen und deren Anwendung in der Theorie der Gleichungen von Dr. B. Igel. Wien 1889.

Der Verfasser stellt sich die Aufgabe, die invariantentheoretische Lösung der Gleichungen, wie sie zuerst von Cayley gegeben worden ist, so zu gestalten, dass sich ihre Unmöglichkeit bei Gleichungen höheren als vierten Grades nachweisen lässt. Er benutzt zu diesem Zwecke die Theorie der associirten Formen, welche, von der Theorie der typischen Darstellung der Formen losgelöst, für sich behandelt wird, eine Behandlungsweise, die sich noch in anderer Hinsicht als zweckmässig erweist insofern, als sich auf diesem Wege leicht bekannte Sätze und Relationen zwischen den In- und Covarianten ohne Benutzung der symbolischen Rechnungsweise und, ohne die Formen auf ihre canonische Gestalt zu bringen, ergeben.

Die §§ 1 und 2 sind einer älteren, vom Verfasser in den Denkschriften der kaiserl. Akademie der Wissenschaften veröffentlichten Arbeit „Ueber eine Classe von Abel'schen Gleichungen" entnommen und dienen zum Verständniss des Folgenden. Wenn nämlich $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ ganze rationale Functionen ohne gemeinsamen Theiler bedeuten, so lässt sich die Resultante von $f_1(x)=0$ und $f_2(x)+\lambda f_3(x)=0$ als Product von $f_1(x)$ und einer Covariante der drei fundamentalen binären Formen darstellen, einer Covariante, die ihrerseits wieder eine Resultante zweier Formen ist. Im Zusammenhange mit dieser Doppeleigenschaft der letztgenannten Covariante wird ein Princip zur Erzeugung von Covarianten eines Systems dreier Formen von derselben Ordnung angegeben. § 4 enthält nun die Definition der associirten Formen, aus welcher mit Zuhilfenahme eines in § 3 aufgestellten Princips eine bekannte Eigenschaft hergeleitet wird, welche alle associirten Formen der Form n^{ter} Ordnung mit Ausnahme der höchsten aus den höchsten associirten Formen der Formen niederer Ordnung finden lehrt. Dieser Satz, dass nämlich alle associirten Formen einer Grundform F diese selbst zum Factor haben, bleibt, wie des Verfassers Deduction unmittelbar erkennen lässt, auch für die associirten Formen von einer beliebigen Covariante der Form F bestehen. Im folgenden Paragraphen wird eine Recursionsformel zur Berechnung der associirten Formen gegeben, mit deren Hilfe man auch die höchste associirte Form $F(-f)$ finden kann. Aus ihr lässt sich, wie § 6 nachweist, eine independente Darstellung der associirten Formen der Form n^{ter} Ordnung ableiten in der Weise, dass sich alle höheren durch zwei aufeinander folgende niedere ausdrücken lassen. Zugleich weist der Verfasser darauf hin, dass aus diesem Satze der bekannte Satz folgt, wonach sich alle Covarianten der Form F rational durch die associirten Formen darstellen lassen. Hieran schliessen sich allgemeine Sätze, die den Zusammenhang der associirten Formen tiefer ergründen. Mit Benutzung der in § 4 gewonnenen Eigenschaft der associirten Formen wird der Satz: „Hat man irgend eine associirte Form aus der höchsten associirten Form einer niederen Form in der angegebenen Weise gebildet, so dass die sie zusammensetzenden Covarianten zu Coefficienten Aggregate von Producten aus den Differentialquotienten der Grundform haben, und setzt man in den Covarianten für die in ihnen explicite vorkommenden x, y: $\frac{x}{y}=-f(xy)$, so lässt sich dieselbe durch die höchste associirte Form der Form n^{ter} Ordnung rational ausdrücken" bewiesen und zugleich bedeutend verallgemeinert. Weiter ergeben sich dem in § 3 entwickelten Princip zufolge interessante Identitäten zwischen den Covarianten, deren eine sich als Satz so aussprechen lässt: Irgend eine Potenz der Functionaldeterminante kann durch diese selbst rational dargestellt werden. Es folgt nun eine Anwendung der allgemeinen Theorie auf die Theorie der cubischen Gleichungen. Nachdem der Verfasser gezeigt hat, dass sich die Wurzeln der Gleichungen $F=0$ und $Q=0$ gegenseitig durch dieselbe rationale Function ausdrücken lassen, legt er dar, wie man aus einer Identität *a priori* folgern könne, dass zwischen RF^2, H^3, Q^2 eine Beziehung bestehen müsse, als welche sich die bekannte Relation zwischen den In- und Covarianten der cubischen Form ergiebt, und mit Hilfe dieser bewerkstelligt der Verfasser die bekannte Zerlegung der Form. Hierauf werden in § 10 die associirten Formen der Form vierter Ordnung berechnet, und auch hier wird *a priori* das Vorhandensein einer Beziehung zwischen T^2, F^3, H^3 erschlossen. Hieran reiht sich die Zerlegung der Covariante T in drei conjugirte quadratische Formen auf invariantentheoretischem Wege. Dies geschieht dadurch, dass der Verfasser invariantentheoretisch $T=0$ als eine Abel'sche Gleichung und zwar von der Periode 2 nachweist. Ausserdem hat die Covariante T bekanntlich noch zwei charakteristische Eigenschaften; diese sind: die Darstellung des Quadrats derselben durch die In- und Covarianten der Grundform hat dieselbe Gestalt, wie die cubische Resolvente der Gleichung vierten Grades, auf welche die Lagrange'sche Methode führt; ferner, ihre vierte Ueberschiebung über sich selbst verschwindet identisch. Die Frage nach dem Zusammenhange zwischen denselben scheint noch nicht in dem Sinne gelöst zu sein, dass gezeigt worden wäre, wie eine Eigenschaft die beiden anderen nach sich zieht. Diese Lücke wird im Schlussparagraphen ausgefüllt.

Dr. E. Jahnke.

Bibliographie

vom 1. Juni bis 31. Juli 1890.

Periodische Schriften.

Sitzungsberichte der Wiener Akademie der Wissenschaften. Math.-naturw. Classe, Abth. IIa. 98. Bd. 10. Heft. Wien, Tempsky. 2 Mk.

Verhandlungen der vom 3.—12. Oct. 1889 in Paris abgehaltenen 9. allgemeinen Conferenz der internationalen Erdmessung etc. Redigirt v. A. Hirsch. Berlin, G. Reimer. 25 Mk.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft, herausgeg. v. E. Schoenfeld u. H. Seeliger. 25. Jahrg. 1890. 1. Heft. Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, herausgeg. v. M. Henoch u. E. Lampe. 19. Bd. Jahrg. 1887, 2. Heft. Berlin, G. Reimer. 8 Mk.

Fortschritte der Physik im Jahre 1884. Dargest. von d. physikal. Gesellschaft zu Berlin. 40. Jahrg., I. (Physik d. Materie.) Ebendas. 11 Mk.

Mémoires de l'Académie des sciences de St. Pétersbourg. Tome XXXVII, No. 6 et 7. Leipzig, Voss. 6 Mk. 75 Pf.

Observations de Poulkova, publiées par O. Struve. Vol. VIII. Ebendas. 26 Mk.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Groissl, J., Die Absolutorialaufgaben aus der Mathematik und Physik an den humanist. Gymnasien Bayerns von 1854—1888. Nebst Anleitung zur Lösung. München, Zipperer. 1 Mk. 20 Pf.

Gühne, B., Abriss der Geschichte der Elektricität. Dresden, v. Zahn & Jänsch. 1 Mk. 20 Pf.

Zum fünfzigjährigen Bestehen der Nicolai-Hauptsternwarte. Petersburg u. Leipzig, Voss. 20 Mk.

Reine Mathematik.

Schwarz, H., Gesammelte mathematische Abhandlungen. 2 Bände. Berlin, Springer. 28 Mk.

Penseler, G., Eine lineare Differentialgleichung fünfter Ordnung mit zwei endlichen singulären Stellen. (Inaug.-Dissert.) Kiel, Lipsius & Tischer. 1 Mk. 20 Pf.

Schröder, E., Vorlesungen über die Algebra der Logik. 1. Bd. Leipzig, Teubner. 16 Mk.

Lorberg, H., Lehrbuch der Elementarmathematik. Strassburg i. E., Schmidt. 1 Mk. 80 Pf.

Fuhrmann, W., Synthetische Beweise planimetrischer Sätze. Berlin, Simion. 6 Mk.

Simon, M., Die Elemente der Geometrie mit Rücksicht auf absolute Geometrie. Strassburger Druckerei u. Verlagsanst. (Elsass). 1 Mk. 50 Pf.

Lucke, F., Leitfaden der Stereometrie für den Schulunterricht. Leipzig, Teubner. 2 Mk. 80 Pf.

Angewandte Mathematik.

Foerster, W., Sammlung von Vorträgen und Abhandlungen. 3. Folge. Berlin, Dümmler. 4 Mk.

Selling, E., Formeln für die Gesetze der Lebensdauer und der Arbeitsfähigkeit. Würzburg, Stahel. 60 Pf.

Bernhard, W., Ueber die Erhaltung der Kraft. Popul. Vortr. Schwäbisch Hall, Staib. 50 Pf.

Voigt, W., Ueber die innere Reibung fester Körper, insbes. der Krystalle. (Götting. Ges.) Göttingen, Dieterich. 2 Mk. 80 Pf.

Zeuner, G., Technische Thermodynamik. 3. vollst. neu bearb. Aufl. 2. Bd. Leipzig, Felix. 14 Mk.

Veröffentlichung des preuss. geodätischen Instituts. Astron.-geodät. Arbeiten I. O. Telegraph. Längenbestimmungen etc. in d. Jahr. 1888 u. 1889. Berlin, Stankiewicz. 16 Mk.

Vogler, A., Geodät. Uebungen für Landmesser und Ingenieure. Berlin, Parey. 7 Mk.

Vodusek, M., Grundzüge der theoretischen Astronomie. Laibach, Kleinmayer & Bamberg. 8 Mk.

Döllen, W., Sternephemeriden f. 1890. Petersburg u. Leipzig, Voss. 4 Mk.

Struve, O., Tabulae quantitatum Besselianarum pro annis 1890 ad 1894 computatae. Petropoli; Leipzig, Voss. 2 Mk.

Physik und Meteorologie.

Winkelmann, A., Handbuch der Physik (aus d. Encyklop. d. Naturwiss.). 3. u. 4. Lief. Breslau, Trewendt. 7 Mk. 20 Pf.

Kayser, H., Lehrbuch der Physik für Studirende. Stuttgart, Enke. 10 Mk.

Busch, F., Beobachtungen über die atmosphärische Polarisation. Arnsberg, Ritter. 1 Mk. 60 Pf.

Lindemann, E., Photometrische Bestimmung der Grösenclassen der Bonner Durchmusterung. Leipzig, Voss. 8 Mk.

Plassmann, J., Beobachtungen veränderlicher Sterne. 2. Theil. Köln, Bachem. 2 Mk.

Kerz, F., Weitere Ausbildung der Laplace'schen Nebularhypothese. 2. Nachtrag. Leipzig, Spamer. 1 Mk. 60 Pf.

Eschenhagen, M., Bestimmung der erdmagnetischen Elemente an 40 Stationen in Nordwestdeutschland. Herausgeg. v. hydrogr. Amt d. Reichsmarine. Berlin, Mittler & S. 2 Mk. 50 Pf.

Hornberger, R., Graphische Darstellungen für den meteorolog. Unterricht. 3. Lief. (Schluss). Kassel, Fischer. 24 Mk.

Thomson W., Gesammelte Abhandlungen zur Lehre von der Elektricität und Magnetismus. Deutsch von L. Levy u. B. Weinstein. Berlin, Springer. 14 Mk.

Historisch-literarische Abtheilung.

Notiz über die ersten Kegelschnittzirkel.

Von

A. von Braunmühl.

Hierzu Taf. IV.

Man hat in unserer Zeit immer wieder Apparate construirt, die zur Zeichnung von Kegelschnitten dienen sollen, obwohl man wegen der nicht zu vermeidenden Ungenauigkeiten, die dem Gebrauche solcher Instrumente immer anhaften, in Fällen, wo es sich um eine wirklich brauchbare zeichnerische Leistung handelt, gewöhnlich gezwungen ist, seine Zuflucht zur Construction mittels Kreisbögen zu nehmen.

Die bis jetzt aufgetauchten Apparate kann man in zwei Gruppen eintheilen, nämlich in solche, die durch Verwerthung der Eigenschaften der Kegelschnitte selbst entstanden, und in solche, die auf der Erzeugung der Curven zweiter Ordnung als Schnitte einer Ebene mit einem Kreiskegel beruhen. Von der letzteren Gattung, die uns hier allein interessirt, giebt es eine ganze Reihe, von denen Rittershaus in seiner Abhandlung „Ueber Ellipsographen"* die wichtigsten anführt.

Die Idee, ein Instrument zu construiren, das den Kegelschnitt aus dem Kegel selbst erzeugt, gehört aber nicht etwa erst unserer Zeit an, sondern ist bereits über 300 Jahre alt, und da ich annehmen zu dürfen glaube, dass die ältesten Konographen oder, wie man sie richtiger noch nennt, Konotomographen nicht allgemeiner bekannt sein werden, so theile ich hier Abbildung und Beschreibung dieser Apparate mit.

Kästner bemerkt in seiner Geschichte der Mathematik, Bd. II S. 98, dass ein Patrizier aus Venedig Namens Franziscus Barocius** in einem

* Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleisses in Preussen, 54. Jahrg. 1875.

** Auf diese Stelle in Kästner wurde ich durch Herrn M. Cantor in Heidelberg aufmerksam gemacht. Das Buch des Barocius führt den Titel: Admiran-

1586 in seiner Vaterstadt erschienenen Buche über Asymptoten ein solches Instrument angiebt, fügt aber bei, dass Beschreibung und Figuren nicht vollständig genügend seien. Dieses seltene Buch konnte ich auf der Münchener Hof- und Staatsbibliothek erhalten und finde daselbst S. 30 und 31 zwei verschiedene Instrumente abgebildet, denen allerdings eine sehr lückenhafte Beschreibung beigegeben ist; aber Erklärung und Abbildung vereint lassen doch den Gebrauch der Instrumente erkennen.

Der eine Apparat (Fig. 1) ist von Barocius nach seiner Angabe 1566 erfunden. Er besteht aus einer Axe AB, die unter beliebigem Winkel gegen die Ebene, auf welcher das Instrument befestigt wird, eingestellt und mittels einer verschiebbaren Hülse BC bis zu einem gewissen Grade verlängert oder verkürzt werden kann. Letztere endet in einem gespaltenen Kopfe, in dem ein in einer Ebene bewegliches Röhrchen DE angebracht ist, das mittels der Hülse um die Axe gedreht und mittels einer Schraube unter einem bestimmten Winkel gegen dieselbe festgestellt werden kann. In dem Röhrchen steckt ein Stift, der so leicht verschiebbar sein muss, dass sich seine Spitze bei der Drehung des Röhrchens um die Axe stets mit dem Papier der Zeichnungsebene in Contact halten lässt. Um mit diesem Instrument einen Kegelschnitt zu zeichnen, stellt man nach Angabe des Barocius das Zeichnungsbrett wie das Röhrchen unter bestimmten Winkeln gegen die Axe fest und führt letzteres so um die Axe, dass der Stift stets die Ebene berührt, auf welcher er dann die Curve entwirft. Steht die Zeichnungsebene parallel zur Axe, so wird der Kegelschnitt eine Parabel, sonst Ellipse oder Hyperbel; wann dies eintritt, wird von Barocius nicht weiter discutirt.

Das zweite Instrument, das er angiebt, ist von dem Italiener Julius Tiene erfunden und dem Barocius von Jacobus Contarenus mitgetheilt, den er den Archimedes seines Jahrhunderts nennt. Dasselbe hat, wie Fig. 2 zeigt, die Gestalt eines Zirkels. Der Fuss AB (welcher an Stelle der Axe tritt) wird irgendwo festgesteckt, und die Zeichnungsebene gegen ihn unter einem Winkel geneigt. Die Verschiebung des Stiftes in dem ebenfalls aus einem Röhrchen bestehenden Schenkel BC wird mittels eines am Zirkelkopf angebrachten Zahnrädchens bewerkstelligt, welches in eine Zahnstange eingreift, die sich in dem Röhrchen auf und ab bewegt und an welcher der Stift befestigt ist. Die Schraube in Mitte des Rädchens scheint zur Feststellung des Winkels ABC der beiden Schenkel zu dienen, oder wird damit das Rädchen gedreht und befindet sich rückwärts eine Schraube, um das Röhrchen festzustellen? Ein klares Bild dieser Ein-

dum illud geometricum problema tredecim modis demonstratum, quod docet duas lineas in eodem plano designare, quae nunquam invicem coincidant, etiam si in infinitum protrahantur: et quanto longius producuntur, tanto sibi invicem propiores evadant. Venetiis 1586.

richtung giebt die schlechte Zeichnung allerdings nicht, doch kann man sich dieselbe wohl besser ausgeführt vorstellen.

Dies scheinen die ersten Instrumente zu sein, welche unter Benützung des erwähnten Gedankens entstanden. Nun fand ich kürzlich, dass auch der als Erfinder des Pantographen bekannte Mathematiker und Astronom Christoph Scheiner (1573—1650) im Jahre 1614, während er Professor in Ingolstadt war, ein ähnliches Instrument construirte und von einem Schüler Joh. Georg Schönberger in dessen Dissertation* zeichnen und beschreiben liess. Ob Scheiner von dem Instrumente des Barocius Kenntniss hatte, lässt sich wohl kaum mehr nachweisen; er selbst giebt darüber nichts an, nennt sich aber auch nicht den Erfinder des Instrumentes, das er einfach als geeignet zum Zeichnen der Kegelschnitte angiebt. Jedenfalls hat sein Zirkel vor den beiden oben beschriebenen Manches voraus und unterscheidet sich in der Construction doch so wesentlich von ihnen, dass nicht nothwendig anzunehmen ist, er habe dieselben schon gekannt. Ich führe die Beschreibung Schönberger's in der Hauptsache hier an und füge wieder die Originalabbildung aus der Dissertation (S. 64) in Fig. 3 an.

Das Instrument besteht im Wesentlichen aus drei Theilen: der Axe HB, die bei A mittels eines Stiftes auf der Zeichenebene $KLMN$ befestigt werden kann und die ganze Vorrichtung trägt, dem graduirten Halbkreise CDE und dem Schreibstifte FG.

Die Axe ist aus Eisen und besitzt bei H einen Zirkelkopf, mit dem sie in einer beliebigen Neigung gegen die Zeichenebene so fest eingestellt werden kann, dass sie nicht schwankt.

Der Halbkreis CDE, der aus Holz oder Metall besteht, muss in einer Hülse um die Axe leicht bewegbar sein; er kann mittels der beiden mit Schrauben versehenen Hohlkügelchen C und E, die auf der Axe verschiebbar sind, in beliebiger Lage festgestellt werden.

Der Stift FG, der aus festem, aber leichtem Material, etwa aus Holz oder Bein, und sehr gleichmässig gearbeitet sein muss, besitzt nach seiner ganzen Länge einen Schlitz, so dass er um die Schrauben C und D leicht aufwärts und abwärts verschoben werden kann. Ausserdem ist die Schraube D ein sogenannter Coulissenschieber, welcher, in dem Schlitze des Theilkreises verschiebbar, dem Stifte eine bestimmte Winkelrichtung gegen die Axe giebt, die während der Zeichnung erhalten bleiben muss. Bei G wird die Feder, die die Curve beschreibt, eingesetzt.

Mit diesem Instrumente, dessen Brauchbarkeit nach Schönberger's Versicherung ausgezeichnet ist, kann man gerade Linien, Kreise, Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln in einem Zuge beschreiben, indem man den Kreis mit dem Stifte um die feststehende Axe dreht und zugleich den Stift so

* Exegeses fundamentorum gnomonicorum. Ingolstadii 1614.

längs der Schrauben J und D verschiebt, dass die Feder beständig das Papier berührt.

Gerade Linien erhält man dann, wenn die Axe gegen die Ebene $KLMN$ geneigt ist und der Stift senkrecht zur Axe steht, und Kreise, wenn die Axe senkrecht steht, der Stift aber unter spitzem Winkel gegen dieselbe gerichtet ist. Neigt man ferner (im Speciellen) die Axe unter einem Winkel $QAJ = 45^0$ gegen die Ebene, so erhält man dann Ellipsen, wenn Winkel $AJD < 45^0$, eine Parabel, wenn er gleich 45^0, und Hyperbeln, wenn er $> 45^0$ und $\lesseqgtr 90^0$ ist; die beiden Schaaren von Hyperbeln, die durch die Gerade getrennt sind, welche sich für $\angle AJD = 90^0$ ergiebt, öffnen sich im ersten Falle ($\angle AJD < 90^0$) gegen A, im zweiten ($\angle AJD > 90^0$) nach entgegengesetzter Richtung.

Dass diese drei Instrumente für die Anforderungen, die wir heute an eine genaue Zeichnung stellen, in dieser Form nicht brauchbar sind, erkennt man auf den ersten Blick, aber gleichwohl wird man dem Gedanken, der zu ihrer Construction führte, Originalität nicht abstreiten können; auch zeigt namentlich der letztbeschriebene Zirkel die Entstehung der Kegelschnitte sehr schön, indem J die Spitze des Kegels, FG die bewegliche Erzeugende ist, die seinen Mantel beschreibt, und $KLMN$ die Schnittebene, die die Curve zweiter Ordnung ausschneidet. Für Scheiner's Zwecke, der den Apparat zur Construction der für Sonnenuhren nöthigen Curven verwendete, lieferte derselbe gewiss genügend exacte Zeichnungen, und es ist zu verwundern, dass er in den vielen späteren Arbeiten über denselben Gegenstand keine Erwähnung findet, so dass das Instrument mit dem des Barocius, wie es scheint, ganz der Vergessenheit anheimfiel, bis derselbe Gedanke in anderer, aber weit complicirterer Form von Benjamin Bramer* wiederum zur Ausführung gebracht wurde. Dieser weil. fürstl. hessische Rent- und Baumeister zu Ziegenhain beschreibt in seinem Apollonius Cattus oder Kern der ganzen Geometrie 1684 (die Vorrede ist 1646 datirt) zwei Instrumente zum Zeichnen von Kegelschnitten, die denselben Gedanken in verschiedener Form zum Ausdruck bringen.

Das erste (Fig. 4) auf S. 87 gleicht am meisten dem Instrumente des Barocius, indem der Stift CD, wie bei diesem, in einem Röhrchen CE läuft und die Zeichnungsebene AB gegen die Axe FGH nach Belieben geneigt werden kann. Die Drehung des Röhrchens geschieht mittels des Schlüssels J. Der Apparat mag wohl wegen der sichereren Führung exactere Curven liefern, ist aber, wie ein Blick auf die Zeichnung zeigt, auch weit weniger compendiös als die früher beschriebenen, indem er ein massives Stativ, sowie eine umständliche Vorrichtung zum Feststellen des Reissbrettes AB erfordert. Bemerkt mag noch werden, dass, wenn die Zeichnungsebene

* Vergl. Kästner, Gesch. d. Math. Bd. III S. 195—196. Kurze Lebensbeschreibung desselben: Allgem. deutsche Biographie III, S. 234 von M. Cantor.

die in der Figur angegebene Stellung hat, eine Parabel entsteht, während man Ellipsen enthält, wenn AB nach oben, und Hyperbeln, wenn es nach unten geneigt wird.

Noch weit complicirter ist aber das zweite Instrument, das Bramer das universal-konische Instrument nennt, weshalb wir von einer Zeichnung und Beschreibung hier absehen wollen, zumal da ein wesentlich neuer Gedanke bei seiner Construction nicht zu Tage tritt.

Auch Bramer's Apparate scheinen keinen rechten Anklang gefunden zu haben — was bei ihrer Schwerfälligkeit übrigens nicht Wunder nimmt —, denn erst in unserem Jahrhundert kam man, und, wie es scheint, ohne die früheren Instrumente zu kennen, von Neuem auf den Gedanken des Barocius zurück, wodurch die bekannten Instrumente von Meyer, Maertens, Drzewiecki u. a. ihre Entstehung fanden.

Recensionen.

Anwendung der Determinanten und Elemente der neuern Algebra auf dem Gebiete der niedern Mathematik von Prof. Dr. J. DIEKMANN. Leipzig 1889.

O. Hesse ist der Erste gewesen, welcher für die Einführung der Determinanten in den mathematischen Unterricht an unseren höheren Schulen eingetreten ist. Zweck seiner kleinen Schrift war, für unsere Schulen, die sich auf dem Gebiete der Algebra mehr oder weniger noch im Geleise von Diophant und Descartes bewegen, den Anschluss an den heutigen wissenschaftlichen Stand der Algebra möglich und erreichbar zu machen. Der Verfasser hat sich nun die Aufgabe gestellt, die Mannichfaltigkeit der Anwendung der Determinanten auf fast allen Gebieten der niederen Mathematik und die Bedeutung der dabei gewonnenen Resultate für die Algebra in Etwas darzulegen. Was den Hauptwerth der Determinanten für die Schulen ausmacht, liegt in dem durch sie ermöglichten Eliminationsverfahren und in der Durchsichtigkeit der Eliminationsresultate, die sich entweder als Resultanten oder Discriminanten darstellen.

Nachdem der Verfasser die Determinante definirt hat — wobei er sich auf den einfachsten Begriff derselben als abgekürzten Ausdruck zur Erleichterung der Operation beschränkt —, weist er auf ihre Anwendung in der Lehre von den Proportionen und bei der Elimination der Unbekannten aus einem Systeme linearer Gleichungen hin. Hieran schliesst sich die Erklärung des Begriffes Resultante an dem Beispiele der homogenen Gleichungen und des Begriffes Discriminante an dem Beispiele der Gleichungen zweiten Grades. Die Bedeutung des letzteren für die Kegelschnittsgleichung wird des Weiteren erörtert.

Es folgt ein Capitel über die irrationalen Gleichungen. Zunächst wird die zweigliedrig irrationale Gleichung zweiten Grades mit linearen Radicanden behandelt und ein bemerkenswerthes Verfahren angegeben, das an sich quadratische System von Gleichungen durch lineare Elimination zu lösen, sowie die Werthe der Wurzelgrössen aus den Coefficienten der Gleichung selbst zu berechnen. Sodann werden Gleichungen mit je zwei Irrationalitäten dritten, vierten, fünften Grades betrachtet, und es wird gezeigt, wie sich die Irrationalitäten rational durch die Radicanden ausdrücken lassen. Um dem Schüler einen klaren Einblick in das eigentliche Wesen der Lösung quadratischer Gleichungen und ihrer Schwierigkeit zu verschaffen, behandelt der Verfasser im nächsten Capitel die Auflösung quadratischer Gleichungen mit zwei Unbekannten. Die Lösung wird, wie bei den Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten, auf eine Eliminationsaufgabe zurückgeführt, deren Schwierigkeit einzig und allein in der Auffindung des Eliminationsfactors besteht. Diese Auffindung macht, wie des Weiteren nachgewiesen wird, keinerlei Schwierigkeit, sobald ein durch quadratische oder lineare Gleichungen lösbares System vorliegt. Zugleich lässt das Verfahren keinen Zweifel darüber, dass es das ganze Gebiet der quadratischen Gleichungen mit zwei Unbekannten umfasst. Im Gegensatz hierzu stehen diejenigen Methoden, welche das einzuschlagende Verfahren je nach Form der Gleichungen ändern, weshalb man sie als Kunstgriffe zu bezeichnen pflegt. Der Verfasser schliesst hieran eine treffliche Auseinandersetzung über die Berechtigung dieser Bezeichnung. Das Schlusscapitel des ersten Abschnittes ist den cubischen und biquadratischen Gleichungen gewidmet. Die Anwendung der Determinante bei der Auflösuug derselben knüpft sich an die Zerlegung der entsprechenden algebraischen Formen in lineare Factoren. Dabei tritt die Determinante auf, welche unter dem Namen der Cayley-Aronhold'schen bekannt, aber schon von Herrn Heilermann in einer Programmarbeit vom Jahre 1855 gegeben worden ist.

Im zweiten Abschnitte behandelt der Verfasser die constructive Planimetrie algebraisch. Er stellt zunächst den trigonometrischen Ausdruck für die Bedingung auf, die zwischen den Winkeln einerseits und den Seiten andererseits stattfinden muss, wenn überhaupt ein Dreieck möglich sein soll, und geht dann dazu über, die Congruenzsätze in ein trigonometrisches Gewand zu kleiden. Dabei gruppiren sich die Aufgaben um einen einheitlichen Gedanken, es handelt sich in allen Fällen um ein einfaches Eliminationsproblem. Nach Erledigung der Hauptaufgaben, soweit sie Winkel und Seiten betreffen, werden als hübsche Anwendung der Determinanten in der metrischen Geometrie noch einige Gleichungen abgeleitet, die für den Zusammenhang einiger hervorragender Linien von Wichtigkeit sind. Dabei wird überall ein Gleichungssystem benutzt, das auch für den rein analytischen Theil der Trigonometrie von Bedeutung ist, insofern, als es eine einfache Herleitung des Additionstheorems gestattet, eine Herleitung, die vom Dreieck ausgeht und die Kenntniss des Sinussatzes voraussetzt. Zum Schluss giebt der Verfasser eine analoge Behandlung für die sphärische Trigonometrie an; auch hier lassen sich die Hauptaufgaben als Eliminationsaufgaben behandeln.

Das Buch ist lesenswerth. Referent möchte es vor Allem den Mathematikern, die an Realgymnasien und Oberrealschulen thätig sind, dringend zur Beachtung empfohlen haben. Den jüngeren Amtsgenossen und angehenden Lehrern wird es als Bindemittel zwischen Universität und Schule nicht ohne Anregung und Interesse sein.

Dr. E. Jahnke.

Arithmetische Aufgaben von Dr. H. Fenkner. Braunschweig 1890.

Die Aufgaben, welche der Schüler unter Anwendung der erlernten Methoden zu lösen hat, sind zweckmässig auszuwählen. Der Verfasser verwirft daher alle Aufgaben, deren Lösung nicht bestimmten Regeln folgt, sondern besondere Kunstgriffe erfordert. Weiter ist der Verfasser der Ansicht, dass beim Unterricht in der Algebra hauptsächlich die Anwendung der Gleichungen zu berücksichtigen, die Auflösung von unbenannten Gleichungen nur Mittel zum Zwecke sei. Er verlangt demnach und mit Recht, dass man, sobald der Schüler eine gewisse Fertigkeit in der Auflösung von unbenannten Gleichungen erworben habe, zu Anwendungen übergehen solle. Bei der Wahl von Aufgaben hat der Verfasser, welcher seine Arbeit als einen Beitrag zur Concentration des Unterrichts betrachtet wissen will, die verschiedenen Gebiete des Unterrichts berücksichtigt, wobei neben Geometrie und Trigonometrie Physik und Chemie herangezogen worden sind. Das vorliegende Buch enthält Aufgaben für das Pensum von Tertia bis Secunda und zwar in einer Ausgabe für Gymnasien, Realgymnasien und Oberrealschulen einer- und Realschulen und höhere Bürgerschulen andererseits. Den Aufgabengruppen sind die zu benutzenden Lehrsätze vorangestellt, doch sind deren Beweise vielfach nur durch Anwendung auf Zahlenbeispiele erläutert. Für den Gebrauch in der Prima soll binnen Kurzem ein zweiter Theil folgen.

Das Buch verdient Beachtung.

Dr. E. Jahnke.

Die Arithmetik auf dem Gymnasium von Konrektor H. Raydt. Hannover-Linden 1890.

Im Gegensatz zu den Schulmathematikern, die ein arithmetisches Lehrbuch für entbehrlich halten, ist der Verfasser der Ansicht, dass ein solches neben einer Aufgabensammlung, wie etwa der Martus'schen, aus vielfachen Gründen ein Bedürfniss sei. Er giebt uns in seinem Buche eine Zusammenstellung kurzgefasster Regeln und Sätze, wobei sich das Bestreben geltend macht, auch dem beschränkten Schüler klar zu werden. Daher laufen Erklärungen und Beweise unter, die vom streng wissenschaftlichen Standpunkte aus unhaltbar sind. Der Verfasser will sein Regel- und Lehrbuch als einen kleinen Beitrag zur Lösung der vielbesprochenen Ueberbürdungsfrage betrachtet wissen. Dem Referenten will aber scheinen, als ob es den Regeln der Pädagogik mehr entspräche, den Schüler die betreffenden Regeln selbst aufstellen und niederschreiben zu lassen, so dass sich jeder sein Regelbuch selbst aufbaut; auf diese Weise wird nicht etwa werthvolle Zeit vergeudet, sondern das heisst eben Unterricht. Allerdings mag das Buch Schüler, welche aus irgendwelchen Gründen einen Theil des Cursus versäumt haben, in den Stand setzen, ohne Privatunterricht das Durchgenommene nachzuholen.

Dr. E. Jahnke.

La Coincidenza dei due metodi d'approssimazione di Newton e Lagrange nelle Radici quadrate ... per Bellino Carrara. Torino (Turin), *Stamperia reale*, G. B. Paravia 1889.

Der Verfasser, wie es scheint, eine jüngere strebsame Kraft, liefert hier die Resultate einer Studie über die beiden Annäherungsmethoden für die Berechnung von Quadratwurzeln. Die Veranlassung dazu bot ihm die regelmässige Uebereinstimmung der successiven Näherungswerthe, welche diese beiden Methoden lieferten. Die ganze Abhandlung von 30 Seiten zerfällt in fünf Theile. Die beiden ersten geben eine vollständige Erklärung der Methoden von Newton und Lagrange. Im dritten werden die Näherungswerthe der Lagrange'schen Methode einer Betrachtung unterzogen und hieraus dann im vierten und fünften Theile der Beweis geliefert, dass beide Methoden im Grunde identisch sind, und nicht blos im Endresultat, sondern auch in den einzelnen Näherungswerthen übereinstimmen müssen. Dies ist gewiss interessant, da beide Reihen von Werthen durch gänzlich verschiedene Rechnungsweisen gewonnen werden. Auch ist die Darstellungsweise recht klar und anziehend. Die Abhandlung ist deshalb namentlich denjenigen Mathematikern zu empfehlen, welche für tiefer liegende Beziehungen zwischen mathematischen Methoden und Wahrheiten — so zu sagen für die Metaphysik der Mathematik — sich interessiren.

Der Autor beschränkt die Untersuchung auf die Wurzeln ganzer Zahlen. Doch kann die ganze Betrachtung sofort auch auf alle gebrochenen Zahlen ausgedehnt werden.

C. Braun.

Elemente der Zahlentheorie von Gustav Wertheim. Leipzig 1887, bei B. G. Teubner. IX, 381 S.

Als Eigenthümlichkeit dieses Buches, dessen Anzeige durch einen Zufall unliebsam verspätet erscheint, aber deshalb doch nicht unterbleiben soll, können wir Zweierlei bezeichnen: erstens das Bestreben, überall leichtverständlich zu bleiben, ohne der Strenge irgendwie zu vergeben, zweitens die Unterstützung dieses Bestrebens durch zahlreiche vollständig durchgeführte Beispiele. Insbesondere das Letztere dürfte des Beifalls der Leser sich erfreuen, da bei der Zahlentheorie, ähnlich wie bei der Lehre von den numerischen Gleichungen, das Wissen nicht immer das Können einschliesst, und es doch schliesslich auf Letzteres ankommt. Aus gleichem Grunde kann es nur zweckmässig genannt werden, dass einer und derselben Aufgabe an den verschiedensten Stellen des Buches gedacht wird und dass ihre Auflösung als Anwendung bald einer Gruppe von Sätzen, bald einer andern erscheint. Der Inhalt der vorgetragenen Lehren lässt sich am kürzesten so bezeichnen, dass die Untersuchungen über Classenzahlen nicht aufgenommen sind, sonst aber so ziemlich Alles, was seit dem Vorgange Dirichlet's, der zuerst

Vorlesungen über Zahlentheorie an deutschen Universitäten einbürgerte, in einer solchen Vorlesung vorgetragen zu werden pflegt. Der Verfasser hat sich weder bei Anordnung des Stoffes, noch bei den Beweisführungen einem Muster streng angeschlossen. Berufungen auf Gauss, wie auf Legendre, die zahlreich abwechseln, geben zu erkennen, dass er der beiden Hauptquellen zahlentheoretischen Wissens sich ziemlich gleichmässig bediente. An nicht wenigen Stellen aber dürfte Herr Wertheim sich selbst als Quelle gedient haben und eigene Beweisführungen benutzen. Wir können nicht schliessen, ohne es ausdrücklich auszusprechen, dass wir das Buch mit grossem Vergnügen gelesen haben.

Cantor.

Einleitung in die Infinitesimalrechnung (Differential- und Integral-Rechnung) zum Selbstunterricht, mit Rücksicht auf das Nothwendigste und Wichtigste, von H. B. Lübsen. VII. Auflage, besorgt durch Richard Schurig. Leipzig 1889, bei Friedrich Brandstetter. 383 S.

Die Lehrbücher Lübsen's sind in zahlreichen Auflagen erschienen, und sie verdanken ihren starken Absatz ganz gewiss dem unleugbar grossen Geschicke des Verfassers, welches er in Ausdrucksweise und stylistischer Darstellung besass. Dabei wusste er mit einer Bekanntschaft mit Gauss gross zu thun, von dem er bald Dieses, bald Jenes bei dieser und jener Gelegenheit als Mittheilung empfangen habe, welche dem Leser Achtung und Verehrung einflössen musste; Gauss verkehrte doch sicherlich nur mit ebenbürtigen Gelehrten auf so vertrautem Fusse! Dazu kam nun noch Eines. Lübsen begnügte sich nicht mit der Veröffentlichung eines Lehrbuches, es sind deren sieben, welche ineinander greifen. Jedes folgende — man könnte fast sagen, jeder folgende Band — bezieht sich auf Vorhergehendes und ist ohne dasselbe nicht zu verstehen. Das geht so weit, dass z. B. Figuren zur Infinitesimalrechnung aus dem „Lehrbuche der analytischen oder höheren Geometrie" citirt sind, und wer diesen Band nicht besitzt, muss ohne Figur sich behelfen; ähnlich verhält es sich mit der Analysis, welche dem Leser unentbehrlich gemacht ist, wenn er die Infinitesimalrechnung benutzen will. Kurzum, der Leser soll den Vorschriften Mephistopheles' getreu studiren: „Am besten ist, wenn Ihr nur Einen hört und auf des Meisters Worte schwört." Herr Schurig, welcher die neue Auflage des uns vorliegenden Bandes zu besorgen hatte, ist dem Geiste des Verfassers treu geblieben. Beispielsweise veröffentlicht er S. 291 eine als sein Eigenthum in Anspruch genommene numerische Quadratur, deren Begründung er einzig in die Worte kleidet: „Eine vierte Methode — von Rich. Schurig — gründet sich auf § 178 der Analysis von Lübsen (8. Auflage S. 199)." Wer dort nicht nachschlägt, muss einfach nach dem gegebenen Recepte rechnen, ohne zu verstehen, warum er so rechnen soll. Ist es nun, kann man fragen, ein Unglück für den Studirenden, wenn er wirklich nur Lübsen'sche Mathematik, diese aber vollständig erlernt? Sind die gelehrten Differentiationen und Integrationen etwa falsch? In dieser Schroffheit ausgesprochen, allerdings nicht; der grosse Mangel der Lübsen'schen Lehrbücher ist aber der, dass, wer aus ihnen sich unterrichtet, von den eigentlichen Schwierigkeiten der Mathematik, von den Geboten der Strenge, von den Gefahren, die man bei deren Vernachlässigung läuft, keine Ahnung erhält. Man lernt ein Handwerk und bildet sich schliesslich ein, Künstler zu sein, weil der Unterschied zwischen Handwerk und Kunst nie hervorgehoben ist. Auch der gewissenhafteste Lehrer wird in einer Vorlesung über Differential- und Integralrechnung an manchen Feinheiten vorübergehen müssen, welche erst in höheren Vorlesungen zur Sprache zu bringen sind; aber er wird sich hüten, dem Zuhörer zu sagen, das sei die ganze Differential- und Integralrechnung, welche er nunmehr wisse, sei es auch unter dem scheinbar bescheidenen Namen einer Einleitung in die Infinitesimalrechnung!

CANTOR.

Abhandlungen über die algebraische Auflösung der Gleichungen von N. H. ABEL und E. GALOIS, deutsch herausgegeben von H. MASER. Berlin 1889, bei Julius Springer. VIII, 155 S.

Die Lehre von der algebraischen Auflösung der Gleichungen knüpft an den Namen Gauss die Thatsache, dass jede Gleichung n^{ten} Grades ebensoviele Wurzeln besitzen muss. Die Auffindung dieser Wurzeln in geschlossener Form war dadurch noch mehr als früher, bevor ihr Vorhandensein nachgewiesen war, zur dringlichen Aufgabe geworden. Da zeigte Ruffini und nach ihm in unanfechtbarer Begründung Abel die Unmöglichkeit, jene Aufgabe durch Wurzelgrössen zu lösen, sofern der Grad der Gleichung den vierten überstieg und die Coefficienten an keine besonderen Bedingungen gebunden waren. Dieser negative Satz wurde 1826 veröffentlicht. Drei Jahre später trat Abel mit einer positiven Leistung hervor: er kennzeichnete die sogenannten Abel'schen Gleichungen, welche, wenn auch nicht immer aufgelöst, doch auf Gleichungen niedrigeren Grades zurückgeführt werden können; er fand als Merkmal dafür, dass je zwei Wurzeln der Gleichung sich rational durch einander ausdrücken lassen. Mit diesem algebraischen Vermächtnisse schied Abel 1829 aus dem Leben. Der das Erbe antreten sollte, war erst $17\frac{1}{2}$ Jahre alt, Évariste Galois. Schon am 17. Januar 1831 reichte der frühreife junge Gelehrte eine Abhandlung über die Lehre von den Gleichungen der Pariser Akademie ein. Man verstand sie nicht! Im darauffolgenden Jahre, am 13. Mai 1832, fiel Galois im Duell. Ein Brief an einen Freund, am Vorabend des Zweikampfes geschrieben, wurde nach Galois' Wunsch in einer politischen Zeitung abgedruckt. Er sollte die wesentlichsten Ergebnisse seiner Forschungen dem Erfinder sichern.

Auch dieser Brief wurde so gut wie nicht verstanden. Erst 1846 erschienen die Galois'schen Arbeiten im Drucke, und allmälig verbreitete sich die Kenntniss des von ihm herrührenden Satzes, dass eine Gleichung, deren Grad eine Primzahl ist, jedesmal dann und nur dann durch Wurzelgrössen auflösbar ist, wenn sämmtliche Gleichungswurzeln rational von zweien derselben abhängen. Serret hat dadurch, dass er die Abel'schen, sowie die Galois'schen Untersuchungen in sein Handbuch der höheren Algebra hineinverarbeitete, wohl am meisten dazu beigetragen, ihnen Landläufigkeit zu verschaffen. Die Springer'sche Sammlung von Uebersetzungen mathematischer Klassiker bringt nunmehr in deutscher Sprache die genannten Abhandlungen von Abel und Galois, sowie einiges Andere von denselben Verfassern, welches durch seinen Inhalt sich anschliesst. Auch heute noch wird man es begreiflich finden, dass Galois' Darstellung zuerst auf aus mangelndem Verständniss stammendes Misstrauen stiess, wenn gleich an der Hand des Serret'schen Lehrbuches es möglich sein dürfte, in seinen Gedankengang einzudringen. Jedenfalls ist dieser Band in weit höherem Maassstabe als die früheren Bände der Sammlung ein Buch mehr zum gründlichen Studium, als zum genussreichen Lesen.

Cantor.

Ueber die Berücksichtigung des Historischen beim Unterricht in der Geometrie von Dr. H. Böklen, Reallehrer in Ludwigsburg. Tübingen 1889, bei Franz Fues. 23 S. [Besonderer Abdruck aus dem Correspondenzblatt für die Gel.- u. Realschulen Württemb. 1887, 7. u. 8. Heft.]

Herr Böklen empfiehlt in diesem Aufsatze den Lehrern der Geometrie, ihrem Unterrichte geschichtliche Bemerkungen einzuflechten. Statt diesen Wunsch näher zu begründen, begnügt er sich damit, 37 Sätze der Geometrie der Zeit ihrer Entdeckung nach, wie sie wesentlich von Bretschneider bestimmt worden sei, anzugeben. Die Ergebnisse voreuklidischer Wissenschaft allein scheinen dem Verfasser entweder hinreichend gesichert, oder hinreichend interessant, um ihre Benutzung im Schulunterrichte fordern zu lassen; wenigstens geht er nicht darüber hinaus. Für wen, möchten wir fragen, hat eigentlich Herr Böklen diesen Auszug aus Bretschneider's vortrefflichem Buche gemacht? Wenn für sich selbst und zur Benützung in seinen eigenen Unterrichtsstunden, dann haben wir nicht das Geringste einzuwenden. Wenn aber für andere Lehrer, so möchten wir doch gar sehr warnen, dass diese etwa den fremden Auszug als hinreichend betrachten, um ihren Schülern Mittheilungen daraus zu machen. Lieber sollen die Schüler gar nichts von Geschichte erfahren, als aus dem Munde von Lehrern, die nicht mehr davon wissen, als im Böklen'schen Notizbuche angemerkt ist! Für die vorgriechische, ägyptische Mathematik hat der Verfasser, wie er angiebt, sich vorzugsweise an die Arbeiten des Referenten angeschlossen; er muss indessen auch anderer Hilfsmittel sich bedient haben, denn von den Aufgaben 3, 4, 5 [Ein rechtwinkliges Dreieck im Felde abzustecken, dessen Katheten 11 und 4 Einheiten messen. Ein Trapez abzustecken, dessen parallele Seiten 6 und 4 Einheiten und dessen Schenkel jeder zu 20 Einheiten gegeben sind. Ein Dreieck durch Gerade zu theilen, die in gleich grossen Abständen von einander parallel zur Basis gezogen werden] ist Referent sich nicht bewusst, sie jemals in der Aufgabensammlung von Ahmes gelesen oder sie aus derselben irgendwo erwähnt zu haben.

CANTOR.

Das geschichtliche Element im mathematischen Unterrichte der höheren Lehranstalten von P. TREUTLEIN. Vortrag, gehalten bei der 62. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte in Heidelberg. Braunschweig 1890, bei Otto Salle. 32 S.

Wenn ein Mann, dessen wissenschaftliche Thätigkeit nahezu ausschliesslich einem Zweige der Wissenschaft gewidmet ist, für die Wichtigkeit eben dieses Zweiges in die Schranken tritt, so giebt es immer Leute, die ein solches Vorgehen als eine Oratio pro domo betrachten. Darum war es uns so sehr erwünscht, dass bei der Heidelberger Naturforscherversammlung Herr Treutlein für die Nothwendigkeit eintrat, im mathematischen Schulunterrichte das geschichtliche Element zu berücksichtigen. Herr Treutlein ist hinreichend Historiker, um mit unanfechtbarer Sachkenntniss seine Beispiele zu wählen; er ist auch hinreichend Schulmann — wie er noch neuerdings durch seine Preisschrift über den Zudrang zu den gelehrten Berufsarten bewiesen hat —, um bei Schulmännern zum Voraus die Ueberzeugung zu erwecken, dass seine Rathschläge auf tieferem Grunde, als auf dem einer persönlichen Liebhaberei beruhen. Dieses günstige Vorurtheil hat sich dann bei den Zuhörern des Treutlein'schen Vortrages von Minute zu Minute befestigt, und wir zweifeln kaum daran, dass auch die Leser des nunmehr gedruckten Vortrages den gleichen Eindruck empfangen werden. Herr Treutlein hat es verstanden, die Vortheile, welche der Berücksichtigung des Geschichtlichen beim Unterrichte in der Mathematik entspringen, in mustergiltiger Weise auseinanderzusetzen. Er hat sich aber damit nicht begnügt. Er hat eine ganze Reihe von Beispielen aus den verschiedensten Gebieten des mathematischen Schulunterrichtes angegeben, bei denen geschichtliche Ausblicke vortrefflich angebracht erscheinen, und auch für diesen Fingerzeig dürfte die Mehrzahl der heutigen Lehrer ihm nur dankbar sein.

CANTOR.

Der Mathematiker Johann Samuel König und das Princip der kleinsten Action. Ein akademischer Vortrag von Dr. phil. J. H. Graf, Conrector der Lerberschule und Privatdocent für Mathematik und Physik an der Universität Bern. Bern 1889. [Dem Gymnasium in Basel bei Anlass der Feier seines 300jährigen Bestandes freundlichst gewidmet von der Lerberschule in Bern.] 46 S.

Zwei Streitigkeiten haben die Gelehrten des XVII., des XVIII. Jahrhunderts in zwei feindliche Heerlager gespalten, die über das Erfinderrecht der Differentialrechnung und die über den Grundsatz der kleinsten Wirkung. Als gemeinsam kann man beiden Streitigkeiten nachsagen, dass sie von hoher Wichtigkeit für die Wissenschaft hätten sein können, wenn man wirklich auf den Kern der Fragen eingegangen wäre, dass sie aber, wie sie geführt wurden, nur Gehässigkeiten und Ungerechtigkeiten erzeugten. Am Anfange des XVIII. Jahrhunderts (1712) entschied die Londoner Akademie zu Gunsten ihres Mitgliedes Newton die erstere Frage gegen Leibniz. Genau 40 Jahre später beging die Berliner Akademie ein ähnliches Unrecht gegen Samuel König zu Gunsten ihres Vorsitzenden Maupertuis. So lautet wenigstens der Sinn der Behauptungen, welche Herr Graf in seinem höchst beachtenswerthen Vortrage ausgesprochen hat. Herr Graf hat keineswegs einen noch unberührten Gegenstand seiner Untersuchung unterworfen. Herr Rud. Wolf im II. Bande seiner Biographien zur Culturgeschichte der Schweiz (1859), Herr Adolf Mayer in seiner Geschichte des Princips der kleinsten Action (1877) mussten den gleichen Fragen näher treten, aber Herr Graf hat Quellen aufzuschliessen verstanden, aus welchen seine Vorgänger noch nicht so schöpften, insbesondere Berner Acten, welche wenigstens mittelbar dazu dienen, den Beweis zu liefern, dass der Leibniz'sche Brief, dessen Fälschung das Berliner Urtheil von 1752 behauptet, sehr wohl vorhanden gewesen und 1749 vernichtet worden sein kann, so dass 1751 von seiner Unauffindbarkeit gesprochen werden musste. Ob der 1749 vernichtete Brief ein Leibniz'sches Autogramm, ob eine Abschrift, vielleicht gar eine unrichtige Abschrift war, diese Frage lässt Herr Graf unentschieden. Ihm kommt es wesentlich darauf an, Samuel König von dem Vorwurfe zu reinigen, als ob er einer Fälschung fähig gewesen sei, und diese Aufgabe hat er in unseren Augen gelöst. Eine Schwierigkeit bleibt freilich immer noch bestehen: die genügende Erklärung dafür, dass Euler sich veranlasst sah, so heftig in den Streit einzutreten, wie er es gethan hat.

Cantor.

Robert Mayer, der Entdecker des Princips von der Erhaltung der Energie. Aus Anlass der Enthüllung seines Stuttgarter Denkmals von Dr. Jacob J. Weyrauch, Professor der mechanischen Wärmetheorie, Ingenieurmechanik etc. an der technischen Hochschule zu Stuttgart.

Mit dem Bildnisse Robert Mayer's. Stuttgart 1890, bei Konrad Wittwer. 75 S.

Die Photographie des spät zur Anerkennung gelangten genialen Mannes, welche an der Spitze des Büchleins vervielfältigt ist, stammt aus dem Jahre 1868. Es sind genau dieselben Züge, welche in der Erinnerung des Referenten fortleben, der 1864 auf der Naturforscherversammlung zu Giessen mit Robert Mayer persönlich bekannt wurde. Und neben diesem Bilde der Aussenseite hat in uns ein Bild des inneren Menschen, wenn dieser Ausdruck gestattet ist, sich erhalten. Robert Mayer's Name, seine Entdeckung, welche einen neuen Zeitabschnitt in der Geschichte der Naturkunde begründet hat, waren damals Gemeingut; man suchte seine Bekanntschaft, aber die Meisten zogen sich enttäuscht zurück. Robert Mayer's Klarheit war für ihn selbst vorhanden, im mündlichen Verkehre mit Anderen fehlte sie durchaus. Warum wir diese Erinnerung wachrufen? Weil sie zur Erklärung beiträgt, wie es kam, dass Robert Mayer für seine nächste Umgebung erst von Fernstehenden entdeckt werden musste. Jedermann, sagt ein Sprichwort, ist seines eigenen Glückes Schmied; auch für Robert Mayer ist Wahrheit in diesen Worten. Ein unseliges Geschick traf den unglücklichen Mann, aber man darf nicht Anderen die Schuld desselben aufbürden, ohne gegen sie ebenso ungerecht zu sein, wie das Schicksal gegen den Heilbronner Arzt es war. Auch Herr Weyrauch kommt in seiner ungemein anziehend geschriebenen, allgemeinverständlich gehaltenen Schilderung annähernd zu dem gleichen Ergebnisse. Aus reichlichen Lorbeerzweigen weiss er den Ruhmeskranz Mayer's zu flechten, ohne in den Fehler zu verfallen, auch eine Ruthe daraus binden zu wollen, welche Andere peitschen soll. Wir können die kleine Schrift recht sehr empfehlen.

CANTOR.

Geschichte der Atomistik vom Mittelalter bis Newton, von KURD LASSWITZ. I. Band: Die Erneuerung der Korpuskulartheorie. Hamburg und Leipzig 1890, Verlag von Leopold Voss. XII, 518 S.

Wir glauben unser Referat über das hochbedeutende Werk mit einem Satze beginnen zu sollen, der unsere Stellung zu demselben und zu dessen Verfasser einigermassen kennzeichnet. Herr Lasswitz hat, wie sowohl seine bisherigen kürzeren Abhandlungen, als besonders die jetzt vorliegende umfang- und inhaltreiche Schrift darthun, wesentlich philosophische Neigungen. Dem Referenten gehen dieselben nahezu vollständig ab. Es wird uns dadurch geradezu unmöglich, denjenigen Abschnitten gerecht zu werden, welche der Verfasser vielleicht für die wichtigsten hält, in welchen er nämlich eine erkenntnisstheoretische Kritik an den in den verschiedenen Zeiträumen gebräuchlichen Auffassungen übt. Zum Glück ist aber eine andere Geistesrichtung uns mit Herrn Lasswitz gemeinschaftlich: die Vorliebe für geschichtliche Forschung überhaupt und die Ueberzeugung, dass eine solche, um fruchtbar sein zu können, die verschiedensten Seiten des Geisteslebens der Völker zugleich berücksichtigen muss. Da überdies die meisten Persönlichkeiten, welche wenigstens in der älteren Geschichte der Atomistik eine Rolle spielen, auch in der Geschichte der Mathematik auftreten, da namentlich in der Zeit bis etwa zur Mitte des XVI. Jahrhunderts es die gleichen Schwierigkeiten waren, welche der menschliche Geist zu überwinden sich abmühte, mochte er auf physikalisch-chemischem oder auf mathematischem Rosse sich tummeln, so entnehmen wir daraus die Berechtigung, ein Urtheil zu fällen, welches schon in den Worten vorweg genommen ist, dass wir von einem „hochbedeutenden" Werke zu reden anfingen.

Unsere heutigen Wissenschaften Chemie und Physik bauen sich auf von einer einzigen Grundlage aus, von der Annahme, dass alles Körperliche aus kleinsten Theilen zusammengesetzt sei, welche aber selbst meistens, wenn nicht immer, der Einfachheit entbehren, d. h. selbst Verbindungen von Atomen sind. Wie hat diese Corpusculartheorie sich gebildet? Wieviel oder wie wenig davon ist Erbe altgriechischer Wissenschaft? Welche Wandlungen hat sie erlebt? Wie haben theologische, philosophische und eigentlich naturwissenschaftliche aus dem Anwachsen neuer Erfahrungsthatsachen stammende Streitfragen sich erheben und beantworten lassen? So etwa lautet die gewaltige Aufgabe, welche Herr Lasswitz sich stellte, und wenn er sie auch scheinbar einschränkt, insofern er dem Titel die Zeitbezeichnung „vom Mittelalter bis Newton" zufügte, so kann er doch naturgemäss nicht umhin, auf die atomistische Bewegung vor dem Mittelalter zurückzugreifen.

Eine kleine Abweichung von der Gedankenfolge, welche uns als die zweckmässigere erschienen wäre, ist allerdings durch fortwährendes Zurückgreifen entstanden. Gewiss hat Herr Lasswitz mit genau bedachter Absichtlichkeit gerade diesen Aufbau gewählt, denn näher lag es gewiss, und bequemer war es auch, einen Abschnitt über Aristoteles und die griechische Atomistik an die Spitze zu stellen, einen zweiten Abschnitt über das Continuitätsproblem, einen dritten über neuplatonische Speculationen u. s. w. folgen zu lassen, dann erst den so vorbereiteten Leser in das Mittelalter eintreten zu lassen, wobei die drei Kanäle, durch welche griechisches Wissen dem Mittelalter zugeführt wurde, der griechisch-römische, der ostarabische, der westarabische, unterschieden werden konnten. Herr Lasswitz, wie gesagt, hat diese Anordnung nicht beliebt. Man möge uns gestatten, sie gleichwohl in unserem Berichte festzuhalten.

Untheilbare, unter sich gleiche, einfache, unvergängliche Einzelwesen, denen wegen ihrer Untheilbarkeit der Name der Atome gegeben wird, bilden nach Demokrit und Epikur alle Körper. Sie bewegen sich nämlich durch den leeren Raum in Wirbeln, treffen dabei zusammen, und aus dem Zusammentreffen entsteht eine Vereinigung. Heraklides Ponticus hat die Auffassung etwas den Sinnen näher gerückt. Nicht untheilbar sind die im Raume sich bewegenden Einzelwesen, sie sind nur sehr klein. Beim Zusammentreffen zersplittern sie, und diese Körpersplitter, Korpuskeln, bilden sodann die vorhandenen Dinge. Aristoteles, der Zeit nach auf Demokrit folgend, bekämpfte die Atomistik auf's Lebhafteste. Es giebt keine Untheilbarkeit. Unter den vielen Beweisen wählen wir einen heraus. Untheilbares mit Untheilbarem sich begegnend könnte ein Stetiges nicht bilden, weil bei dem Stetigen die sich berührenden Stellen beiden Theilen angehören, ein Stetiges also voraussetzt, dass an den Theilen Stellen sich unterscheiden lassen, mit anderen Worten, dass die Theile neuerdings theilbar sind. Stetiges giebt es aber, mithin keine Atome. Das Gleiche gilt von der Zeit, deren Theilung kein Ende findet. Zweitens giebt es auch keinen leeren Raum, denn, um auch hier nur einen Beweis anzuführen, Raum ist die Grenze des Umschliessenden gegen das Umschlossene; wo also ein Umschlossenes nicht vorhanden ist, kann auch kein Raum sein. Die wirkliche Körperwelt ist folglich in anderer Weise als entstanden zu denken, als die Atomistiker wollen. Aristoteles nimmt einen Stoff an, welcher durch die Form zu dem wird, was thatsächlich ist; vorher besitzt er nur die Möglichkeit, eine Form anzunehmen. Der Stoff aber ist entweder kalt oder warm, trocken oder feucht; je zwei dieser Eigenschaften vereinigt geben, da das Kaltwarme und Trockenfeuchte unmöglich ist, vier Verbindungen: das warmtrockene Feuer, die warmfeuchte Luft, das kaltfeuchte Wasser, die kalttrockene Erde, und diese vier Elemente sind es wieder, aus welchen alle irdischen Körper bestehen, und zwar so, dass in jedem Körper alle vier Elemente vertreten sind, nur in anderem Maasse. Ganz anders war die Stellung, welche Plato, und insbesondere die, welche die späten sogenannten Neuplatoniker zur Entstehung der Körperwelt einnahmen. Ausgangspunkt ist nicht der Stoff, sondern die Idee, und diese wird im Laufe der Zeit zur Weltseele, welche eins ist mit dem beseelten Raume.

Die atomistische Lehre fand einen nicht so dialektisch ausgebildeten, aber fast noch heftigeren Widerspruch, als bei Aristoteles bei den Kirchenvätern. Wenn Atome wild im Raume umhergewirbelt zu Körpern sich ballen, dann giebt es keine göttliche Schöpfung mehr, und Epikuräer, Christ heissen unversöhnliche Gegnerschaft.

Merkwürdig genug, dass arabische Theologie zu der entgegengesetzten Folgerung gelangt. Gerade der Umstand, dass die Atome trotz wilden Umherwirbelns zweckgemäss zusammentreffen, beweist, dass Gott sie nicht blos erschafft, sondern auch ihre Bewegung regelt. Er regelt sie in der Zeit, und Zeit ist das Zusammensein zweier Erscheinungen. Als es noch keine Erscheinung gab, war eine Zeit nicht vorhanden; die Zeit fängt erst mit der Schöpfung an. Die Zeit, die Bewegung, die Körper sind nicht stetig zu denken. Ueberall sind Elementartheilchen, also Atome anzunehmen, freilich ihrer Natur nach verschieden. Eine Ebene hat überall Punkte, besteht aber nicht aus Punkten. Wäre dem so und ordnete man beispielsweise 25 Punkte zu einem Quadrate, so würden auf jede Seite des Quadrats fünf Punkte fallen, fünf Punkte aber auch auf die Diagonale, oder Diagonale und Seite müssten gleich sein. Es ist gewiss auffallend, dass genau der gleiche Trugschluss bei Roger Baco vorkommt, dass erst Giordano Bruno ihn als nicht stichhaltig erklärte, weil auf der Seite andere Zwischenräume zwischen den Punkten vorhanden seien, als auf der Diagonale.

Das europäische Mittelalter empfing seine Wissenschaft theils von den Kirchenvätern, theils von den arabischen Erklärern des Aristoteles, deren Schriften ins Lateinische übertragen wurden. Von beiden Seiten fand sich Anregung, auf die Atomistik einzugehen, mochte man für oder gegen sie Partei ergreifen. Wer selbst Mathematiker von Fach ist, wird es leicht begreiflich finden, dass die mathematisch angelegten Geister unter den Scholastikern vorzugsweise an die Fragen herantraten, mit welchen seit Aristoteles die Atomenlehre eng verquickt war: giebt es eine Stetigkeit oder nicht, und wenn es eine giebt, wie verhält sich das Stetige zum unstetigen Elemente? Bradwardin z. B. und sein durch Herrn Max Curtze uns bekannt gegebenes Werk zur Widerlegung der Atomistik erscheint in rechtem Lichte erst von diesem Gesichtspunkte aus, und die Lehre von den Latitudines formarum des Oresme und Anderer gewinnt einen richtigen Boden erst in der Intensio et remissio formarum, welche frühere Scholastiker ersonnen hatten, um die aristotelische Lehre von Stoff und Form sich mundgerecht zu machen. Jedenfalls kann man als Ergebniss dieser Entwickelung es betrachten, dass seit dem XII. bis etwa zum XV. Jahrhundert die Atomistik in Europa mehr und mehr an Boden verliert, dass zugleich die Unmöglichkeit eines leeren Raumes unanzuzweifelndes Gemeingut wird.

Das soweit von uns nothdürftig Geschilderte ist etwa der Inhalt des ersten Buches, welches unter der Ueberschrift: „Die Atomistik im Mittelalter“ die Hälfte des Bandes einnimmt. Die andere Hälfte ist dem zweiten Buche: „Die Erneuerung der Korpuskulartheorie“ gewidmet. Unsere Leser werden es uns nicht verübeln, wenn wir diesem zweiten Buche gegenüber die grösste Enthaltsamkeit üben. Handelt es sich doch in ihm um Dinge, welche wir vielfach aus ihm erst kennen gelernt haben, und wenn auch die umfassenden im ersten Buche, welches prüfen zu können wir uns getrauen, an den Tag gelegten Kenntnisse eine Bürgschaft gewähren, es werde auch das zweite Buch gleich zuverlässig sein, so dürfen wir uns doch kein Urtheil darüber gestatten. Dazu wäre vielmehr berufen, wer der Geschichte der Chemie ein eingehendes Studium gewidmet hat.

Wir begnügen uns damit, einige Namen hervorzuheben, deren Träger diesem zweiten Buche den Inhalt geben, nachdem wir vorausgeschickt, dass zeitlich der Anfang desselben mit dem Falle von Konstantinopel zusammentrifft, also mit jenem Zeitpunkte, von welchem an griechisch redende Flüchtlinge griechische Handschriften in grösserer Zahl nach Italien brachten und dadurch die allgemeinere, nicht mehr durch Doppelübersetzung ins Arabische und Lateinische verunstaltete Kenntniss des wahren Griechenthums ermöglichten.

Da tritt Paracelsus auf, in dessen Schule zum ersten Male das Dogma von der Einfachheit der vier aristotelischen Elemente verworfen wird. Da lehrt Telesius, die Grösse der Welt könne weder vermehrt, noch vermindert werden, oder mit anderen Worten die Erhaltung der Materie. Da ahnt Gilbert die Gravitation, wenn er sagt, die irdische Masse strebe dem zu, aus welchem sie entstand. Van Goorle erkennt die Unveränderlichkeit der Elemente, deren keines in das andere verwandelt werden kann. Van Helmont führt mit dem Worte Gas zugleich den Begriff des luftähnlichen Zustandes ein. Giordano Bruno nennt Monade, was als Kleinstes vorhanden ist; er ersetzt auch die mathematische Theilung ins Unendliche (in infinitum) durch eine solche ins Unbestimmte (in indefinitum). Sennert allerdings spricht sich in dieser Beziehung noch richtiger und zugleich vermittelnder aus. Die mathematische Theilbarkeit hat für ihn in der That kein Ende, aber die physikalische Theilung kommt bei einem Minimum an, dem höchsten natürlichen Grade der Theilung und zugleich dem Anfange aller Naturkörper. Auch in Frankreich, in Italien erwacht die Korpuskulartheorie.

Das sind wenige Züge, welche wir dem, wie man aus ihnen erkennen wird, ungemein reichhaltigen zweiten Buche entnommen haben.

Wir beschliessen mit ihnen unsern Bericht. Wollen unsere Leser demselben entnehmen, dass Herr Lasswitz keine Geschichte der Physik, der Chemie, der Philosophie, der Mathematik geschrieben hat, aber dass er in alle diese Gebiete hineinragende Ausläufer schicken musste und zu schicken wusste. Sein Werk gewinnt dadurch nur an Wichtigkeit, wie es zu gleicher Zeit der Vielseitigkeit des Verfassers ein beredtes Zeugniss ausstellt, welcher, um auch dieses Vorzugs zu gedenken, sich zudem als glänzender Stylist erweist.

Cantor.

Festschrift, herausgegeben von der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg anlässlich ihres 200jährigen Jubelfestes 1890. Erster Theil: Geschichte der Gesellschaft von 1690 bis 1890. Zweiter Theil: Wissenschaftliche Abhandlungen. Leipzig 1890, Commissionsverlag von B. G. Teubner. 104 u. 189 S.

An Fastnacht 1690 trat Heinrich Meissner mit Valentin Heins und anderen von ihm dazu aufgeforderten Fachgenossen zur Kunstrechnungsliebenden Societät von Hamburg zusammen. Sechs einheimische, neun auswärtige Mitglieder bildeten den Bestand der jungen Gesellschaft. Am 15. Februar 1890 beging die Mathematische Gesellschaft in Hamburg in feierlicher Festsitzung im Sitzungssaale der Bürgerschaft die 200. Wiederkehr ihres Stiftungstages, als gelehrte deutsche Gesellschaft die zweitälteste (die älteste ist die Leopoldino-Carolinische Akademie der Naturforscher), als mathematische Gesellschaft die älteste, von welcher man überhaupt weiss. Der Unterzeichnete, welcher selbst der Jubelfeier beiwohnte und die Erinnerung an dieselbe als unvergessliche festhält, verzichtet nur ungern darauf, hier einen Festbericht statt des Berichtes über die Jubiläumsschrift zu geben, wenn nicht die Natur unserer Zeitschrift dem Ersteren widerstrebte, das Letztere forderte.

Die Festschrift, von welcher wir also reden wollen, besteht aus drei Theilen. Der dritte Theil, nur für Einwohner Hamburgs von besonderem Interesse, ist ein Katalog der dort in öffentlichen, zum Theil auch in privaten Büchersammlungen vorhandenen mathematischen Werke. Der zweite Theil, wenn wir weiter nach rückwärts die Ordnung festhalten wollen, lässt als ein Band der Mittheilungen der mathematischen Gesellschaft, gewissermassen als ein Band einer mathematischen Zeitschrift sich bezeichnen. Er enthält 21 Abhandlungen, worunter die ersten 8 von Ehrenmitgliedern der Gesellschaft, die folgenden 13 von einheimischen Mitgliedern. Es will sich nicht eignen, diese oder jene Abhandlung besonders hervorzuheben, und ebenso wenig mag ein blosser Abdruck der Ueberschriften hier unsere Leser befriedigen. Wir haben dieselben überdies in unserem Mathematischen Abhandlungsregister (1889, erste Hälfte) veröffentlicht, wobei wir der Abkürzungen: Hamburg. Mitth. I und II uns bedienten. Der I. Band umfasst die neun Hefte, welche von März 1881 bis März 1889 im Gesammtumfang von 310 S. erschienen; der II. Band bedeutet eben den zweiten Theil der Festschrift.

Wir kommen endlich zum ersten Theil der Festschrift. Den Hauptinhalt bildet die Abhandlung: Geschichte der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg von Herrn J. F. Bubendey, ein ungemein schätzbarer Beitrag nicht nur zur Hamburger Lokalgeschichte, sondern zur Geschichte der Mathematik in Deutschland überhaupt. Herr Bubendey hat seinen Stoff sehr geschickt in vier Gruppen zu zerlegen gewusst, indem er 1. eine Gründungsperiode (1690—1720), 2. eine Kunstrechnungsperiode (1720—1790), 3. eine technische Periode (1790—1860), 4. eine wissenschaftliche Periode (seit 1860) unterschied. In der ersten Periode treten besonders die von uns als Gründer schon genannten Heinrich Meissner und Valentin Heins hervor, Letzterer bis auf den heutigen Tag in der Redensart „nach Valentin Heins“ fortlebend, welche in Hamburg die gleiche Dauerhaftigkeit bewies, wie in anderen Theilen Deutschlands die Berufung auf Adam Riese, Ersterer in weiteren Kreisen als dem der Mathematischen Gesellschaft lange Zeit nahezu vergessen und dennoch dem Mitgründer geistig überlegen. So hat Meissner z. B. eine Methode gelehrt, die ganzzahligen Wurzeln einer Gleichung $x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$ mit lauter selbst ganzzahligen Coefficienten leicht zu finden. Mittels $x+1 = x_1$, $x+2 = x_2$ u. s. w.

leitete er neue Gleichungen $x_1^n + b_1 x_1^{n-1} + \cdots + b_n = 0$, $x_2^n + c_1 x_2^{n-1} + \cdots + c_n = 0$ u. s. w. ab und bildete die einzelnen Theiler α_1, α_2, ... von a_n, β_1, β_2, ... von b_n, γ_1, γ_2, ... von c_n u. s. w. Ergab sich sodann ein $\alpha_h = \beta_i - 1 = \gamma_k - 2 = \cdots$, so war die Vermuthung, $x = \alpha_h$ sei Wurzel der gegebenen Gleichung, schon genügend gesichert, um den Versuch der wirklichen Einsetzung zu rechtfertigen. Diese Methode ist als solche gewiss interessant — wenn sie von Meissner herrührt. Genau der gleiche Vorschlag wurde nämlich von Jacob von Waessenaer von Utrecht gemacht und durch Franciscus van Schooten 1659 in der Amsterdamer Ausgabe der Descartes'schen Geometrie (I, S. 307) veröffentlicht. Sollte aber Meissner auch, was wir fast glauben möchten, die hier genannte Quelle benutzt haben, so ist eine Erweiterung der Methode jedenfalls sein Eigenthum. Sei nämlich eine Wurzel $x = y + \sqrt{z}$, so muss wegen der Ganzzahligkeit der Coefficienten $x = y - \sqrt{z}$ ebenso der Gleichung genügen, d. h. a_n muss durch $y^2 - z$ theilbar sein, b_n durch $(y+1)^2 - z = y^2 - z + 2y + 1$, c_n durch $(y+2)^2 - z = y^2 - z + 4y + 4$ u. s. w., oder es müssen unter den α, β, γ, ... sich solche finden, die eine arithmetische Progression zweiter Ordnung bilden, deren zweite Differenz $= 2$ ist. Davon finden wir bei Jacob von Waessenaer keine Spur. An der Grenze zwischen der ersten und zweiten Periode erschien Paul Halcke's Sinnenconfect, eine Aufgabensammlung, welche sich vielen Beifalls zu erfreuen hatte. — Die zweite Periode stand, möchten wir sagen, unter dem unmittelbaren Einflusse des Halcke'schen Buches. Irgend hervorragende Leistungen eines Einzelnen unter den Mitgliedern der Gesellschaft lassen sich so wenig nachweisen, als Leistungen der Gesellschaft selbst, welche aus dem Rahmen der mathematischen Spielereien herausgetreten wären. — In die dritte Periode, deren Charakter der Verfasser durch das Beiwort „technisch" trefflich gezeichnet hat, fällt die Mitgliedschaft von Männern, welche, wie der Mechaniker Repsold, der Astronom Rümker, der Wasserbaumeister Woltman, weit über Hamburgs Grenzen sich bekannt gemacht haben. Innerhalb dieser Periode traten Schumacher (1813), Gauss (1818), Tralles (1820), Brandes (1823), Spehr (1824), Encke (1828), Crelle (1832) und noch mancher Andere als Ehrenmitglied in den Verband der Mathematischen Gesellschaft. — Innerhalb der vierten Periode leben wir. Dass auch ihr ein richtiges Beiwort verliehen ist, wenn man sie die wissenschaftliche Periode genannt hat, darüber kann niemand in Zweifel sein, welcher die Namen Derer, welche seit 1860 der Gesellschaft beitraten, mit den Namensverzeichnissen der Mitarbeiter an den in Deutschland erscheinenden mathematischen Zeitschriften vergleicht. Möge diese wissenschaftliche Periode so lange andauern, als der Bestand der Gesellschaft selbst. — Nächst der Bubendey'schen Abhandlung enthält der erste Theil auch noch eine Notiz des Ehrenmitgliedes Herrn Bierens de Haan über diejenigen Holländer, welche Mitglieder der Hamburger Gesellschaft waren, und das vollständige

Verzeichniss aller Ehrenmitglieder, einheimischen Mitglieder und auswärtigen Mitglieder von 1690 bis 1890 mit 43, 182, 127 Namen. Die erste Liste hat bei der Jubelfeier selbst durch Neuernennungen einen Zuwachs von neun weiteren Namen erhalten.

Cantor.

Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte und Literatur von Dr. Rudolf Wolf, Professor in Zürich. Mit zahlreichen in den Text eingedruckten Holzstichen. In 2 Bänden. 1. Halbband. Zürich 1890, bei F. Schulthess. XVI, 384 S.

Der Verfasser schickt eine Inhaltsübersicht des ganzen Werkes voraus. Das erste Buch führt demnach den besonderen Titel: Aufgabe, Geschichte und Vorkenntnisse. Die drei folgenden Bücher werden betitelt sein: II. Einleitung in die Astronomie; III. Theorie der Instrumente und Messungen; IV. Mechanik und Physik des Himmels. Der erste Halbband enthält das erste Buch; jedem der drei folgenden Bücher scheint ein ähnlicher Halbband gewidmet werden zu sollen. Herr Wolf beabsichtigt ein Doppeltes: er will dem werdenden Astronomen einen Wegweiser liefern, der ihm zeige, was Alles an Kenntnissen für ihn nothwendig sei, wie und wo er diese Kenntnisse sich verschaffen könne; er will dem gewordenen Astronomen ein bequemes Nachschlagebuch in die Hand geben, welches in gedrängter Kürze eine Menge von theils sachlichen, theils geschichtlichen Angaben vereinige. Wie er diese Absicht zu erreichen sucht, mögen zunächst die Ueberschriften der sechs im ersten Buche enthaltenen Capitel veranschaulichen: I. Die Aufgabe der Astronomie (3 S.); II. Geschichte der Astronomie (45 S.); III. Einige Vorkenntnisse aus der Arithmetik (88 S.); IV. Einige Vorkenntnisse aus der Geometrie (121 S.); V. Einige Vorkenntnisse aus der Mechanik (24 S.); VI. Einige Vorkenntnisse aus der Physik (97 S.). Endlich folgen noch 4 S. Zusätze und Berichtigungen, so dass mit dem Titelblatte die 384 S. des Bandes herauskommen.

Und auf diesem, man wäre versucht, zu sagen, verschwindend kleinen Raume unternimmt es Herr Wolf, nicht nur die Gegenstände selbst zu behandeln, sondern auch ihre Geschichte, ihre Literatur bis zu den Erscheinungen der jüngsten Zeit? Es ist fast unglaublich, aber es ist so, und noch mehr: die Behandlung ist so, dass man mit bestem Gewissen das Buch empfehlen kann. Man ist unwillkürlich versucht, an jene Schreibkünstler zu denken, welche ganze Druckbogen auf den Raum einer Postkarte noch leserlich zusammenzudrängen wissen, nur dass bei ihnen blosse Handgeschicklichkeit erforderlich ist, während in der Wolf'schen Kunstleistung spielende Beherrschung des Stoffes, weise Auswahl, geschickte Anordnung, ohne dass die Verständlichkeit darunter litte, sich offenbaren.

Wir haben von der weisen Auswahl gesprochen. Das ist ja natürlich, dass auf 88 Seiten kein vollständiges Lehrbuch der Analysis, auf 121 Seiten kein solches der Geometrie, noch dazu in geschichtlicher Entwickelung gegeben werden konnte, aber es ist staunenswerth, was aus diesen Gebieten vereinigt ist. Nehmen wir das III. Capitel in Augenschein. Elementares Zahlenrechnen, Logarithmen in ihren Abarten von Bürgi und Neper bis zu Leonelli und Wittstein, Algebra der Buchstabengleichungen ersten bis vierten Grades, Auflösung numerischer Gleichungen nach Cardano, Bürgi, Newton, Binomialsatz, die wichtigsten Reihenentwickelungen, Differentiationen und Integrationen, Anwendung auf die Ermittelung grösster und kleinster Werthe, Wahrscheinlichkeitsrechnung bis zu und mit Einschluss der Methode der kleinsten Quadrate begegnen uns hier. Und üben wir eine gleiche Sichtung des IV. Capitels, so erscheinen: Elementare Planimetrie unter besonderer Berücksichtigung von regelmässigen Sehnenvielecken, Trigonometrie in ihren verschiedenen Entwickelungsgestalten, als griechische, als indisch-arabische, als Trigonometrie des XVI. und als solche des XVIII. Jahrhunderts, Coordinatengeometrie, Krümmung, Rectification, Quadratur, Kegelschnitte, höhere Curven, Raumtrigonometrie und analytische Geometrie des Raumes, Oberflächen zweiter und höherer Ordnung, Projectionslehre.

Aber nicht genug, dass die hier nicht einmal vollständig aufgezählten Dinge behandelt sind, sie sind jeweils entwickelt und abgeleitet, beziehungsweise bewiesen. Allerdings ist darin der lückenhafte Theil des ganzen Buches zu sehen. Die Beweise sind keineswegs sämmtlich so streng, als man heute es zu fordern gewöhnt ist; sie können es einfach nicht sein vermöge des ihnen zugemessenen Raumes, aber überall sind Verweisungen auf gründliche Werke gegeben, überall ist also, wie wir am Anfange sagten, dem Schüler der Astronomie gezeigt, wo er genaueren Rath sich holen soll, während der fertige Astronom Beweise überhaupt nicht hier nachschlagen wird, sondern nur die Erinnerung an die Sätze wird auffrischen wollen. Wir glauben daher, dass Herr Wolf den beiden Leserkreisen, für welche er geschrieben hat, Genüge leistete, und dass der erste Halbband des Handbuches der Astronomie wesentlich zur Empfehlung des ganzen Werkes dienen wird.

Cantor.

Martin Behaim von Siegmund Günther. Zeichnungen von Otto E. Lau. (13. Band der Bayerischen Bibliothek, begründet und herausgegeben von Karl v. Reinhardstättner & Karl Trautmann.) Bamberg 1890, Buchner'sche Verlagsbuchhandlung. 86 S.

Dass der Anfertiger des berühmten Behaim'schen Globus, seine Fahrten und Lebensschicksale, besonderes Interesse für den Geographen, aber nur ein sehr nebensächliches für den Mathematiker besitzen, ist in der Natur der Sache begründet. Ein kleiner Abschnitt des anziehend geschriebenen

Büchleins ist es, welcher uns veranlasst, dasselbe hier anzuzeigen. Herr Günther macht es nämlich wahrscheinlich, dass Martin Behaim dadurch so rasch eine höhere Stellung in der portugiesischen Entdeckungsschifffahrt gewann, dass er dort den Jacobsstab einführte, jenes leicht handliche Messinstrument, welches er selbst durch Regiomontanus kennen gelernt hatte und welches ein Aufnehmen der Sonnenhöhe aus freier Hand auf dem Schiffe selbst gestattete, während vordem diese zur Bestimmung der geographischen Breite unerlässliche Messung nur auf fester Grundlage, d. h. unter der Voraussetzung der Landung möglich war. Mit anderen Worten: eine Hochmeerschifffahrt konnte erst jetzt mit einiger Sicherheit an die Stelle der seitherigen Küstenschifffahrt treten. Herr Günther benutzt diese Gelegenheit, um über den Ursprung des Jacobsstabes Untersuchungen anzustellen. Mit Herrn Steinschneider ist er der Meinung, der Jacobsstab habe durch Verschiedenheit der Farben das Ablesen der an ihm angebrachten Theilung erleichtert und dem gesprenkelten Ansehen, welches an die Stäbe erinnerte, die der Erzvater Jacob den brünstigen Thieren vorwarf, seinen Namen zu verdanken. Er macht auch auf eine Schrift des spanischen Juden Levi ben Gerson († 1370) aufmerksam, in welcher der Jacobsstab vorkommt, dessen Erfindung mithin mindestens in die Mitte des XIV. Jahrhunderts zurückreicht. Wir bemerken beiläufig, dass die reichhaltige Sammlung der deutschen Seewarte in Hamburg einen sehr alten Jacobsstab besitzt.

CANTOR.

Karl Christian Friedrich Krause's Philosophische Abhandlungen. Aus dem handschriftlichen Nachlasse des Verfassers herausgegeben von Dr. PAUL HOHLFELD und Dr. AUGUST WÜNSCHE. VIII u. 402 S. gr. 8°. Leipzig 1889, bei Otto Schulze.

Krause gehört zu den wenigen Philosophen, welche im ersten Drittel unseres Jahrhunderts in der schwülen Atmosphäre der Romantik zielbewusst an der alten Platonischen Tradition festgehalten haben und stets der Ueberzeugung gewesen sind, dass eine Philosophie, welche der Mathematik feindlich oder auch nur gleichgiltig gegenübersteht, mit jener echten Philosophie, welche der griechische Geist uns geschenkt hat, kaum mehr gemein hat, als die Aeusserlichkeit des Namens. Bei aller Verwandtschaft mit Fichte's Arbeit und mit Schelling's Phantasmagorien ist Krause's System von vornherein mit dem Stempel der Selbständigkeit aufgetreten und dieser Stempel zeigt wohl seine schärfste Prägung in jenen tief angelegten Linien, durch welche die Stellung der Mathematik im Ganzen der Philosophie bestimmt werden soll.

Geboren (zu Eisenberg im Herzogthum Altenburg) in dem Jahre, in welchem Lessing starb, in dem Jahre, in welchem Schiller's Räuber erschienen und Kant's Kritik der reinen Vernunft an das Tageslicht trat, reifte Krause um die Wende des Jahrhunderts zur eigenen Thätigkeit heran: mit seiner Schrift „De Philosophiae et Matheseos notione et earum intima conjunctione“ habilitirte er sich, Vieles verheissend, 1802 in Jena und lehrte dort zwei Jahre lang mit grossem innerem und äusserem Erfolge.

Nur allzubald verblich der Stern, welcher Krause's Laufbahn vorzuleuchten schien. Die Anzahl der Studirenden in Jena sank plötzlich um mehr als die Hälfte und viele akademische Lehrer verliessen infolge dessen den alten Musensitz, unter ihnen auch Krause, dessen ganzes Leben von nun an, wenn auch frei von der äussersten Noth, ein hartes und unbelohntes Ringen ist um die Musse des Lernens und des Lehrens, welcher sich nur der Inhaber eines akademischen Stuhles erfreuen darf. Während Hegel, der sich fast gleichzeitig (1801) mit Krause in Jena habilitirt hatte, innerhalb der 30 Jahre seiner Wirksamkeit Schritt für Schritt die Stufenleiter äusserer Anerkennung emporklomm, um (1831) auf der Höhe seines Ruhmes als preussischer Staatsphilosoph ein jähes Opfer der Cholera zu werden, schleppte Krause innerhalb derselben Zeit sein arbeitsames und nur an Enttäuschungen reiches Leben unter äusseren Anfeindungen mannichfacher Art dahin, um endlich unter dem Drucke von ungerechtfertigten Polizeimassregeln in München (1832) einsam und verkannt zu sterben. Krause und Hegel, die beiden grossen Systematiker des Fichte-Schelling-schen Kreises, erscheinen der Nachwelt, in welcher der inductiv-deductive Geist der modernen Wissenschaft endlich auch für die Philosophie zum Siege gelangt ist, in anderem Lichte, als ihrer Mitwelt, für welche die Philosophie lediglich die Märchenerzählerin aus dem Traumlande des Absoluten war. Hegel hat seinen Ruhm dahin: in den Trümmern seines Systems, welches ohne Zweifel eine gewaltige Zeiterscheinung gewesen ist, aber auch nur als Zeiterscheinung seine Bedeutung gehabt hat, liest die Gegenwart nur noch die ewig berechtigte Aufforderung, „in der Zersplitterung der wissenschaftlichen Einzelarbeit niemals den systematischen Abschluss des Ganzen der Wissenschaft zu vergessen“. Anders steht es mit Krause: trotz aller Hinneigung zur Speculation tritt er dem inductiv-deductiven Geiste der modernen Wissenschaft oft so nahe, dass ein Theil seiner Arbeit überhaupt erst der Gegenwart verständlich werden kann.

Mit grosser Freude ist es daher zu begrüssen, dass von Dresden aus, wo unser Philosoph einen grossen Theil seines Lebens (mit Unterbrechung von 1805 bis 1823) zugebracht, durch die sorgsamen und sachkundigen Bemühungen der Herren Hohlfeld und Wünsche eine mehr und mehr an Vollständigkeit gewinnende Sammlung der Arbeiten Krause's (im Verlage von Otto Schulze, Leipzig) geschaffen wird, welche für die Folge die Grundlage aller an den Namen Krause anknüpfenden Bestrebungen bilden kann.

Was im Besondern die Stellung unserer Philosophie zur Mathematik anlangt, so sind dafür, ausser der bereits genannten Jenaer Habilitationsschrift (1802), in erster Linie folgende Arbeiten zu erwähnen:

1. Grundlage eines philosophischen Systems der Mathematik. (1804.) Theil I.
2. Factoren und Primzahltafeln. (1804.)
3. Entwurf des Systemes der Philosophie. (1804.) Abtheil. I.
4. Tagblatt des Menschheitslebens. (1811.)
5. Lehrbuch der Combinationslehre und der Arithmetik. (1812.)
6. Novae theoriae linearum curvarum specimina V. (1831/32.)
7. Ueber die Idee der Mathesis, über die organische Ausbildung und über das Verhältniss der Mathesis zu der Wissenschaft und zu dem Leben. (1832.)

Von diesen Arbeiten bringt der uns heute vorliegende Band die Jenaer Dissertation und zwar sowohl in ihrer ursprünglichen Gestalt (Nr. XIX), als auch in einer vom Verfasser selbst gefertigten Uebersetzung (Nr. I), eine Abhandlung aus dem „Tagblatte des Menschheitslebens" (Nr. XVI), ein Bruchstück über die Grundlegung der Mathematik (Nr. XVII) und die oben unter 7 bezeichnete Abhandlung (Nr. XVIII), während wir die oben unter 6 erwähnte Arbeit leider vermissen.

Während Hegel in seiner Jenaer Dissertation (1801) aus Platon's Timaeos beweist, dass es zwischen Mars und Jupiter keinen Planeten geben kann, und dieser Weisheit eine haarsträubende Deduction der Kepler'schen Gesetze hinzufügt, sucht Krause in seiner Jenaer Dissertation (1802) in begeisterter, aber durchaus nüchterner Weise festzustellen, woher uns das Bedürfniss nach Philosophie kommt, wie deren Ideal aussehen würde und wie weit dieses Ideal von vornherein erreichbar scheint, welche Eintheilung die Philosophie fordert und wie die Philosophie methodisch fortzuschreiten und dabei Schritt für Schritt ihre Beweise einzurichten hat. Diese Erstlingsphilosophie Krause's nun zerfällt in Mathematik (Arithmetik, Geometrie, Dynamik) und Vernunftsphilosophie oder, wenn man will, in die Philosophie des Gesetzmässigen (Wissenschaft der reinen Formen der Dinge) und in die Philosophie des Freien (praktische Philosophie) und steht von vornherein unter dem leitenden Gedanken, dass Alles, was ist, ein in sich harmonisch ausgestattetes Ganzes bildet und auch als ein solches erfasst werden muss.

Die Mathematik als einen einheitlich gebildeten Organismus darzustellen, der selbst in dem grösseren Organismus der Philosophie als Organ seine Stelle hat, das ist die Aufgabe, mit deren Lösung sich Krause des Weiteren zunächst in den, oben unter 1, 3 und 4 genannten Schriften in eingehender Weise beschäftigt hat. Für uns handelt es sich hier lediglich um die Abhandlung aus dem „Tagblatt etc.", welche den Titel trägt: „Ueber die wissenschaftliche Begründung, Berichtigung und Neugestaltung der Mathematik (Formwissenschaft)."

Dass die zur Zeit vorhandene Mathematik keinen Organismus bildet, das ist der Ausgangspunkt der Krause'schen Ueberlegungen: die Theilgebiete (z. B. Arithmetik, Geometrie, Chronologie etc.) sind gegeben, das Ganze ist aber noch nicht geschaffen. Was in unserer Zeit durch die tiefgehenden Arbeiten von G. Cantor, Dedekind, H. und R. Grassmann, Hanckel, von Helmholtz, Kronecker, Weierstrass u. A. begründet, mehr und mehr zur Anerkennung gelangt, dass nämlich die Arithmetik (im weitesten Sinne des Wortes) eine in sich geschlossene Wissenschaft ist, welche keiner geometrischen Krücke bedarf, welche gar nicht einmal neben (Zeit und Raum) der Geometrie steht, sondern vor oder über derselben, — das hat Krause bereits mit voller Klarheit gesehen. Es gewährt einen eigenthümlichen Genuss in seiner Abhandlung, welche überhaupt reich ist an treffenden historischen und sachlichen Bemerkungen, viele der Probleme, um welche sich die Arbeit der letzten Jahre bewegt hat, als Forderungen deutlich bezeichnet zu sehen, so z. B. die Frage nach den Beziehungen des Stetigen und Unstetigen, nach den Beziehungen des Endlichen und Unendlichen u. s. w., vor Allem aber die Aufgabe: „die Anfänge der Arithmetik und die der Geometrie in aller Strenge zu begründen". Namentlich im Hinblick auf die Arbeiten von Dedekind (Was sind und was sollen die Zahlen?), von H. und R. Grassmann und von Hanckel klingt es wie ein Prophetenwort, wenn wir bei Krause (S. 275) lesen: „Eine rein-formliche Wissenschaft vom Ganzen als Ganzen und vom Theile und von den Theilen als solchen, überhaupt und im Allgemeinen, muss jeder einzelnen mathematischen Wissenschaft vorausgehen." Dass Krause's der Mathematik oder der „Ganzheitslehre", wie er sich ausdrückt, gewidmete Arbeiten bei seinen Zeitgenossen keine Anerkennung fanden, scheint uns heute natürlich, und so darf es uns auch nicht Wunder nehmen, dass Krause selbst nach und nach müde wurde, auf diesem Gebiete tauben Ohren zu predigen.

Obwohl Krause auch nach den Jahren 1811/12 nicht blos gelegentlich auf die Mathematik zurückgekommen ist — wir finden z. B. in seinem System der Philosophie (1828) die Mathematik vollwichtig berücksichtigt, wie auch nicht anders zu erwarten —, so hat er sich doch dem Thema des „Tagblattes etc." im Besondern erst in seinem letzten Lebensjahre wieder zugewandt.

Im Februar 1832 reichte er der Akademie zu München die oben unter Nr. 7 genannte Arbeit (Nr. XVIII) ein: „Ueber die Idee der Mathesis etc.", nachdem er derselben Akademie bereits im November 1831 die oben unter Nr. 6 bezeichnete Abhandlung „Novae theoriae etc." vorgelegt hatte.

Die letzten Hoffnungen seines Lebens, auf Grund dieser Schriften in München wenigstens als Prof. honor. zugelassen zu werden, nachdem er zu Jena, Berlin und Göttingen mit grossem Eifer und bedeutendem Erfolge als Privatdozent gelehrt und 30 Jahre hindurch von diesen Städten aus und namentlich auch von Dresden aus eine fruchtbare schriftstellerische Thätigkeit entfaltet hatte, diese letzten Hoffnungen verwirklichten sich nicht: Schelling wies als Referent die Arbeit Krause's in verletzender Weise als „unbrauchbar" zurück, ein Urtheil, von dem die Geschichte der Philosophie in gebührender Weise Kenntniss zu nehmen hat.

Diese letzte Arbeit Krause's wiederholt im Wesentlichen den Gedankengang der Abhandlung vom Jahre 1811 und zeigt dieselbe Klarheit in der Beurtheilung der zeitgenössischen Mathematik, ihrer systematischen Mängel und ihrer systematischen Bedürfnisse. Im Gegensatze zu der früheren Darstellung, in welcher ein lebhafter Hauch des modernen inductiv-deductiven Geistes wehte, tritt nun aber eine gewisse speculative Begehrlichkeit zu Tage, welche mit einem Schlage „genial“ erledigen möchte, was nur in langsamem und vielseitigem Mühen verarbeitet werden kann: die Abhandlung steht allzusehr im Bannkreise des zweiten Theiles* seines „Systems der Philosophie“.

Dass die Mathematik als Organismus nur in dem Boden der Einzelforschung heranzuwachsen im Stande ist und dass dieser Process nur sehr allmälig fortschreiten kann, das hat Krause zwar niemals ganz übersehen, aber doch um so mehr vergessen, je mehr auch ihn der Zauber der Begriffsromantik umsponnen hat.

Ein vorurtheilsfreier Geschichtsschreiber der Philosophie wird die beiden grossen Systematiker Hegel und Krause in zweifacher Weise beurtheilen müssen, einerseits nämlich hinsichtlich ihrer befruchtenden Wirkung auf die Zeitgenossen, andererseits hinsichtlich des Verhältnisses, in welchem das Bleibende und das Vorübergehende in ihren Schöpfungen zu einander steht: so gewiss in erster Hinsicht Hegel den Preis verdient, so sicher ist es auch, dass Krause mehr von einem „monumentum, aere perennius“ geschaffen. Man wird bedauern, dass ein so reines Streben, wie es in Krause's ganzem Sein zur Geltung kommt, bei den Zeitgenossen keine genügende Anerkennung gefunden hat; man wird sich aber auch nicht der Thatsache verschliessen können, dass sein geradezu unheimlicher Verdeutschungstrieb und sein unseliger Hang, mit den unbrauchbaren Bezeichnungen auch die brauchbaren auszuscheiden, viel dazu beigetragen hat, seiner Arbeit manche Thür zu verschliessen: das Bruchstück aus der „Ganzheitslehre“, welches uns hier (Nr. XVII) vorliegt, kann dieses Urtheil bestätigen.

Das „Bleibende“ in den Leistungen Krause's dürfte, falls man nicht etwa geneigt ist, den Willen für die That zu nehmen, keineswegs auf dem Gebiete liegen, welches uns heute hier beschäftigt hat; denn zu wahrhaft grundlegenden Ausführungen der Mathesis ist unser Philosoph nicht gekommen, ja er hat zu solchen der ganzen Sachlage nach gar nicht kommen können, während seine fruchtbaren Anregungen, welche in seiner Zeit verloren blieben, für unser herangereiftes Geschlecht zu spät in weitere Kreise dringen, um noch originell wirken zu können.

---

* Dem ersten, dem intuitiv-analytischen Theile schreibe ich eine bleibende Bedeutung zu, dagegen bin ich der Ansicht, dass für solche Arbeiten, wie sie der zweite, der synthetisch-deductive Theil darstellt, die Zeit überhaupt ganz und gar vorbei ist.

Im ersten Drittel unseres Jahrhunderts galten auch für den Mathematiker und den Philosophen die Worte Schiller's:

Feindschaft sei zwischen Euch! Noch kommt das Bündniss zu frühe:
Wenn Ihr im Suchen Euch trennt, wird erst die Wahrheit erkannt.

Dass in unserer Zeit Mathematiker ersten Ranges die Berührung ihrer Wissenschaft mit der Erkenntnisstheorie nicht nur nicht ängstlich vermeiden, sondern dieselbe sogar geflissentlich hergestellt haben, und dass jetzt andererseits die namhaften Philosophen theils mit offener Hinneigung, theils mit verborgener Abneigung die Bedeutung der Mathematik für die Philosophie laut genug anerkennen, scheint ein Zeichen dafür zu sein, dass Krause's Forderung, welche im Geiste Plato's, Leibniz' und Kant's gestellt war in einer Zeit, wo die Philosophie vor lauter Poesie den Verstand verloren hatte, gegenwärtig nicht mehr unerfüllbar ist: die einzelnen mathematischen Wissenschaften beginnen bereits, sich zum Organismus der Mathesis* zu einen.

In einer solchen Periode ist es Ehrenpflicht, Krause's zu gedenken, dessen reines Wollen und dessen zielbewusstes Streben sich nicht ausleben konnte, weil seinen Zeitgenossen die Fähigkeit fehlte, ihn zu begreifen.

Dieser Ehrenpflicht soll unsere Anzeige nachkommen.

Braunschweig. Alex. Wernicke.

Die Grundlage der Euklidischen Geometrie des Maasses von Dr. Alex. Wernicke. Wissenschaftliche Beilage zu dem Programm des herzoglichen Neuen Gymnasiums in Braunschweig Ostern 1887. Braunschweig, Druck von Joh. Heinr. Meyer. 58 S. 4°.

Der vorliegende Versuch ist, wie die Vorrede sagt, gedacht als ein Repetitorium für obere Classen. Es will den Schüler entlasten und ihm trotzdem weitere Ausblicke verschaffen, indem es die Geometrie des Maasses nach Euklid als Ausfluss eines Principes kennen lehrt und dabei gleichzeitig ihre Stellung im Organismus unseres Wissens bestimmt. Der erste Theil ist daher mehr philosophischen Inhalts und beginnt mit dem merkwürdigen Satze: „Es ist ein Grundzug unseres Wissens, die thatsächlich gegebenen Widersprüche unseres Wissens als ein Etwas zu betrachten, welches eigentlich nicht vorhanden sein sollte, und zugleich die Hoffnung zu hegen, dass sich die Widersprüche aus unserem Wissen entfernen lassen.“ — „Um dem Ideale eines widerspruchslosen Wissens näher zu

* Wie ich mir selbst das „System der Mathematik“ vorstelle, kann man aus folgenden Arbeiten entnehmen: I. „Die asymptotische Function des Bewusstseins (Zählen und Messen)“ in der Vierteljahrsschrift für wissensch. Philosophie 1887/88; — II. „Die Grundlage der Euklidischen Geometrie des Maasses.“ Braunschweig 1887; — III. „Goniometrie und Trigonometrie etc.“ Braunschweig 1888; — IV. „Grundzüge der Elementarmechanik etc.“ Braunschweig 1883.

kommen, hat die Menschheit ihr Wissen in einzelne Gebiete zerlegt und ferner eine Wissenschaft auszubilden gesucht, welche die sämmtlichen Gebiete umfasst, die Philosophie; die Grundlage derselben ist die Erkenntnisstheorie.“ Es wird nun das Verhältniss der Erkenntnisstheorie zur Logik und das der Logik zur Mathematik eingehender erörtert. Die Mathematik wird eingetheilt in allgemeine und besondere; die besondere in Geometrie, Phoronomie und Dynamik. Dann wird das Object der Geometrie behandelt, der Raum und die Raumgebilde. „Alles, was wir mit unseren Sinnen wahrnehmen, pflegen wir unsere Aussenwelt zu nennen. Die Aussenwelt zerlegt sich uns in den leeren Raum und das raumerfüllte Etwas, welches gewöhnlich als Materie bezeichnet wird.“ Dieser Satz ist offenbar unrichtig, schon deswegen, weil der leere Raum eine physikalische Unmöglichkeit ist. Es folgen Betrachtungen über Inhalt und Form der Raumgebilde, der Körper, und ihre begrenzenden Elemente, von der Fläche zur Linie, zum Punkte übergehend, und synthetisch vom Punkte zur Linie, zum Körper übergehend, so dass der Punkt hier als das einzige erzeugende Element des Raumes angesehen wird. Es folgt dann die Definition der Geometrie als Lehre vom Raume und den Raumgebilden, und die verschiedenen Bedeutungen des Wortes „Geometrie“, die Arten der Definition, die Axiome, die Lehrsätze und die verschiedenen Arten des Beweises. — In das Wesen des indirecten Beweises scheint der Verfasser nicht eingedrungen zu sein. — Des Weiteren wird der Unterschied der Geometrie der Lage und der des Maasses gekennzeichnet. Dann wird zur Euklidischen Geometrie übergegangen, als derjenigen, welche für die Erkenntniss unserer Aussenwelt verwendet werden soll. Als allgemeine Axiome des Euklidischen Raumes findet der Verfasser zehn, dazu zwei besondere, die Existenz der Geraden und der Ebene. Diese grosse Zahl rührt daher, dass der Verfasser hier zwischen Axiom und Postulat nicht unterscheidet und der früher angegebene Unterschied sich mit der üblichen Auffassung nicht deckt. Darauf folgen die gegenseitigen Grundbeziehungen der Elementargebilde, Punkt, Gerade, Ebene, wonach der Verfasser zur Euklidischen Geometrie des Maasses übergeht und die beiden Maasse Strecke und Winkel einführt. Indem er auf die gegenseitigen Beziehungen zwischen Strecke und Winkel eingeht, gelangt er zu Sätzen und Aufgaben über das Dreieck; dabei führt die Aufgabe, ein Dreieck aus seinen Winkeln zu construiren, auf das berühmte Axiom 11 des Euklid. Es folgen die Fundamentalconstructionen, Strecken-Winkelhalbirung etc., dann die Verwerthung der beiden Maasse zur Messung der ebenen Felder, der Körper, der Curven und Flächen. Den Schluss bildet die Gliederung der Euklidischen Geometrie des Maasses und eine Rechtfertigung der gegebenen Eintheilung.

Wenngleich die Abhandlung für den Vorgeschrittenen vielfach interessant ist, für Schüler ist sie nicht geschrieben. Es ist nicht denkbar, dass sie von einem solchen, auch der oberen Classen, in allen ihren Theilen verstanden werden könnte, und so wird sie auch kaum nach der ausgesprochenen Absicht des Verfassers bei der Repetition dienen können. F. Schütte.

Materialien zu Dreieckskonstruktionen nebst Anwendung auf fast vierhundert Aufgaben. Zusammengestellt von F. J. Brockmann, vorm. Oberlehrer am Königl. Gymnasium zu Cleve. Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner. 1888. VI u. 88 S. gr. 8°. Preis 1 Mk. 20 Pf.

Das Buch will die Aufgabe erfüllen, den Leser — und als solchen hat der Verfasser zunächst den angehenden Lehrer im Auge — durch das Studium desselben zu befähigen, das Gebiet der Constructionsaufgaben möglichst weitgehend und vollkommen zu beherrschen und somit die Pflege der Constructionsaufgabe in den Schulen zu heben. Darum sind die Aufgaben zunächst auf Dreiecksconstructionen beschränkt, weil diese für die Schule zumeist in Betracht kommen. Die dazu nöthigen Materialien gehen den Aufgaben voraus: Geometrische Oerter, Data, Lehrsätze, Reductionsaufgaben, algebraische Analysis. Dann folgen 385 Aufgaben mit Hinweisen auf die Materialien. Dadurch werden etwaige Schwierigkeiten der Lösung gehoben, jedoch so, dass die eigene Thätigkeit des Lesers nicht überflüssig wird. Dass das Euklidische Schema der Lösung hier vermieden ist, bedarf keiner Entschuldigung. Die Lösungen sind durchweg elegant; besonders haben uns diejenigen Aufgaben gefallen, in welchen der eingeschriebene und die drei angeschriebenen Kreise vorkommen. — Das mit vielem Fleisse zusammengestellte Werkchen dürfte seinen Zweck wohl erfüllen, wenn es mit Ausdauer durchgearbeitet wird. F. Schütte.

Planimetrische Konstruktionsaufgaben. Eine Vorschule zu des Verfassers Materialien. Enthaltend 501 Aufgaben nebst deren Lösungen. Bearbeitet von F. J. Brockmann, vorm. Oberlehrer am Kgl. Gymnasium zu Cleve. Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner. 1889. 103 S. gr. 8°. Preis 1 Mk. 50 Pf.

Die vorliegende Aufgabensammlung soll, wenn auch in der Zeit nach den vorhin besprochenen „Materialien" erschienen, nach Form und Inhalt ein Praeambulum zu denselben sein. Daher sind die Aufgaben durchweg leichter als in jenen, und die Lösungen in grösserer Vollständigkeit gegeben, und zwar, was ja genügt, in der Analysis; zuweilen ist auch die Determination beigefügt, wenn dieselbe interessant ist. Die Lösungen sollen den Zweck verfolgen, dass der Leser durch aufmerksames Studium derselben eine allgemeine Methode abstrahire und sich die für das weitere Studium erforderliche, einigermassen ausgedehnte Kenntniss von Lösungen aneigne.

Leichter würde dieser Zweck erreicht, wenn die Aufgaben nicht, wie es geschehen ist, in „vermischte" und „Dreiecksconstructions-Aufgaben", sondern nach den Methoden in Gruppen getheilt wären, wie dieses in allen neueren und besseren Aufgabensammlungen, z. B. Petersen, zu geschehen pflegt. Dadurch würde nicht nur das Studium, sondern auch die Uebersicht wesentlich erleichtert. (Dasselbe gilt auch von den oben besprochenen „Materialien".) Wir wollen noch auf diejenigen Aufgaben aufmerksam machen, in denen die Bestimmungsstücke ihrer Lage nach gegeben sind — z. B. ein Dreieck zu construiren, wenn gegeben sind die Fusspunkte zweier Mittellinien und der einer zugehörigen Höhe —, weil solche gewöhnlich weniger Beachtung finden, obschon viele derselben sehr anregend und hübsch sind.

F. Schütte.

Methodische Untersuchungen aus dem Gebiete der elementaren Mathematik für Schul- und Selbst-Unterricht von Dr. Theodor Walter: Algebraische Aufgaben. 1. Band: *Bewegungsaufgaben.* I. Aufgaben über gleichförmige geradlinige Bewegung. Dazu gehören: *Spemann's Algebrahefte* Nr. 1. Bewegungsaufgaben I nach Theodor Walter's Methode. Berlin und Stuttgart, Verlag von W. Spemann. 1889.

Nach einem noch ungedruckten Manuscripte von Goethe führte auf dem Jahrmarkte zu Plundersweilen eine Seiltänzergesellschaft zum Schlusse ihrer Vorstellung folgende Pantomime auf: Die Scene ist gedacht als Barbierstube. Ein Kunde tritt herein und giebt zu verstehen, dass er rasirt sein will. Der Raseur empfängt ihn mit tausend Bücklingen und heisst ihn auf einem grossen Lehnstuhle Platz nehmen. Der Gehilfe schleppt eine mächtige Serviette herbei und bindet sie dem Kunden vor; sie ist von so riesigen Dimensionen, dass sie nicht nur den Kunden ganz einhüllt, sondern auch noch einen grossen Theil der Arena bedeckt. Dann wird ein grosser Waschzuber, bis an den Rand mit Seifenschaum gefüllt, herbeigebracht; in demselben liegen zwei mächtige Weissquaste mit baumlangen Stielen. Diese ergreifen der Raseur und sein Gehilfe und seifen damit den Kunden, zum grossen Gaudium des umstehenden Publicums, aus dem grossen Zuber gehörig ein. Dann wird ein Rasirmesser hereingetragen, armlang und handbreit, mit grosser Umständlichkeit gewetzt, und damit der Kunde rasirt, der, weil er sich heftig gegen dieses Rasirmesser sträubt, vom Gehilfen festgehalten wird. Um den Seifenschaum abzuwaschen, werden dem armen Kerl mehrere Eimer Wasser ins Gesicht geschleudert. Endlich wird er aus seiner Lage befreit: er bezahlt einen Thaler; der Raseur weigert sich, ihm Geld herauszugeben; es entsteht Streit, und wie der Kunde sein Missfallen an der mit ihm vorgenommenen Procedur lebhaft zum Ausdruck bringt, da ergreifen Raseur und Gehilfe den Zuber mit Seifenschaum und stülpen ihn dem Kunden über den Kopf. Das Publicum hat an der groben Komik dieser burlesken Pantomime grosse Freude, und sein Jubel will kein Ende nehmen, wie der arme Kerl über und über mit Seifenschaum bedeckt unter dem Kübel hervorkriecht.

An den auf solche Weise Rasirten werden wir lebhaft erinnert, wenn wir uns den Schüler vorstellen, der nach der Walter'schen Methode seine Algebra zu lernen verurtheilt ist.

Um Aufgaben über gleichförmige geradlinige Bewegung, und zwar nur solche, welche auf Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten führen lösen zu lehren, bedarf es eines Buches von 292 Seiten in Roth- und Schwarzdruck, grossartiger Hefte mit Tabellen, Logarithmentafeln etc. Wenn der Verfasser, wie es den Anschein hat, jeden Gegenstand aus dem so ungemein reichen Gebiete der elementaren Mathematik in ebensolcher, geradezu ermüdender Vollständigkeit bearbeiten will, dann muss dem Schüler die Mathematik in Bezug auf Zeit und Geld eine „theuere" Wissenschaft werden. — Nach einer Einleitung über die Fundamentalgleichungen der Bewegung folgt der eigentliche Stoff in Gruppen gegliedert: *A*. Die Bewegten legen gleiche Wege in ungleichen Zeiten zurück. 1. Gruppe: zwei Bewegte; 2. Gruppe: drei Bewegte. *B*. Die Bewegten legen ungleiche Wege in gleichen Zeiten hintereinander zurück. 3. Gruppe: Annähern; 4. Gruppe: Entfernen; 5. Gruppe: Einholen; 6. Gruppe: Ueberholen u. s. w. u. s. w., im Ganzen 18 Gruppen. Die Auflösung geschieht nun mit Hilfe von Tabellen auf alle möglichen Weisen, indem bald diese, bald jene Grösse als Unbekannte angesehen wird. So erhält man z. B. für die Gruppen *A*· 16 Tabellen. Hier ein Beispiel einer solchen Tabelle: „Zwei Bewegte L und R legen den Weg von A nach B mit den Geschwindigkeiten l und r zurück, ein dritter Bewegter M mit einer zwischen l und r liegenden mittleren Geschwindigkeit m bewegt sich unterdessen von B nach A und kommt in A an, wenn der Langsame in B eintrifft. Der Langsame habe bis zum Weggange des Mittleren M bereits $\varDelta$ Zeiteinheiten mehr gebraucht, als der Rasche R. Man soll die Entfernung AB berechnen. Die Aufgabe kann auf sechs Arten gelöst werden! Erste Tabelle. Zeitgleichung. Der Weg von A nach B betrage x Längeneinheiten.

	Der Langsame	Der Mittlere	Der Rasche
Weg	x	x	x
Geschwindigkeit	l	m	r
Zeit	$x:l$	$x:m$	$x:r$
Gleichung . . .	$x:l - x:r = \varDelta + x:m$		
Resultat	$x = lmr\varDelta : (-lm + mr - rl)$		

Den Rand der Tabelle zieren die vier Fundamentalgleichungen, die wir hier ebenso, wie verschiedene Pfeile und Striche zwischen den Fächern, weggelassen haben. S. 34 begegnen wir der Bemerkung, dass die gefundene Wegeformel auch als Quotient zweier Determinanten angeschrieben werden kann, nämlich:

$$x = \tfrac{1}{2}\Delta \begin{vmatrix} 0 & l & m \\ l & 0 & r \\ m & r & 0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} r & l & 0 \\ 1 & 1 & l \\ 0 & 1 & m \end{vmatrix}$$

und dass der Nenner auch als vierreihige Determinante geschrieben werden kann, als

$$\text{Nenner} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & l & 0 & 0 \\ 1 & 0 & m & 0 \\ l & 0 & 0 & r \end{vmatrix}.$$

Wir wollen hoffen, dass es dem Verf. gelingen werde, auch den Zähler als vierreihige Determinante darzustellen. Mit solchen vierreihigen Determinanten wird nun auch thatsächlich gerechnet, wie man sich in den Beispielen S. 182 flgg. überzeugen kann. Das heisst doch mit Kanonenkugeln nach Spatzen schiessen! Jede Aufgabe in sämmtlichen Gruppen wird nun so nach Tabellen aufgelöst; das ist die Haupteigenthümlichkeit des Werkes, die der Verfasser für einen besonderen Vorzug hält. Aber wird nicht der Schüler diesen Schematismus für wesentlich oder gar nothwendig halten? Warum soll man die Bewegungsaufgaben durch Anlegen dieser Fessel erschweren, wenn man ohne dieselbe mit nicht weniger Klarheit zum Ziele gelangt?

Im dritten Abschnitte werden nun zu allen Aufgaben Zahlenbeispiele ausgerechnet in weit über hundert Tabellen. Dass die beliebte Aufgabe von den Hunde-, Hasen- und Rehsprüngen nicht fehlt, ist selbstverständlich.

Den Schluss bildet eine Sammlung von 34 Eisenbahnaufgaben, sowie Hinweise auf weitere Aufgaben in bekannten Aufgabensammlungen. Eine Tafel vierstelliger Logarithmen ist dem Buche beigegeben, deren Gebrauch sehr empfohlen wird; aber auf der Stufe, wo die Bewegungsaufgaben vorgenommen werden, sind die Schüler mit den Logarithmen noch nicht bekannt. Dass für die Bewegungsaufgaben ein so grosser Apparat herangezogen wird, sucht Verf. mit dem vorangedruckten Ausspruche Goethe's zu entschuldigen: „dass, wer eine Sache mit Klarheit zu behandeln vermag, auch tauglich ist zu vielen anderen Dingen", ein Satz, der doch sehr anfechtbar ist.

F. Schütte.

Lehrbuch der Stereometrie. Auf Grund von Dr. Ferd. Kommerell's Lehrbuch neu bearbeitet und erweitert von Dr. Guido Hauck, geh. Regierungsrath und Professor an der Königl. Technischen Hochschule zu

Berlin. 6. Auflage. Mit 67 in den Text gedruckten Holzschnitten. Tübingen 1888, Verlag der H. Laupp'schen Buchhandlung. 226 S. 8°. Ladenpreis 2 Mk. 40 Pf.

Zunächst fällt die noble Ausstattung auf, das gute Papier, der correcte, saubere Druck und vor Allem die in den Text gedruckten klaren, anschaulichen Figuren. Solche oft unbeachtete Aeusserlichkeiten wolle man ja nicht unterschätzen. Sie tragen wesentlich dazu bei, dass der Schüler das Studium eines solchen Buches mit Vergnügen geniessen kann. In richtiger Würdigung der Wichtigkeit einer guten Figur und der Erleichterung, die sie bietet, ist eine Anweisung gegeben, wie der Schüler sich selbst solche schöne Figuren räumlicher Gebilde herstellen kann. — Das Buch enthält nun ein ungemein reiches Material an Lehrsätzen und viele Aufgaben meist constructiver Natur in wohlgeordneter planmässiger Zusammenstellung. Mag nun Einer die Aufgabe als das Ziel des mathematischen Unterrichts ansehen, so wird dieses Buch ihn sicherlich befriedigen; die Lehrsätze, welche zur Lösung von Aufgaben nothwendig sind, sind als solche gekennzeichnet; die so fruchtbare Methode der Zeichnung in einer Ebene ist ebenfalls hervorgehoben. Oder, mag Einer die Lehrsätze für den Unterricht bevorzugen, so kann man von keinem der hier gebotenen Sätze behaupten, dass er nicht wichtig oder nicht interessant sei. Ferner kann der gesammte Uebungsstoff auch für die descriptive Geometrie verwandt werden. Die Sphärik mit dem zugehörigen Uebungsmaterial bereitet auf's Schönste die sphärische Trigonometrie vor; die Lehre von den Polyedern, welcher in diesem Buche besondere Aufmerksamkeit gewidmet ist, bildet eine gute Grundlage für die Krystallographie. Interessant ist auch das Capitel über Umdrehungskörper. — Man sieht hieraus, dass das Buch so vielseitig ist, dass es für die Schule nur mit Auswahl benutzt werden kann; wie dies auch in der Vorrede hervorgehoben ist. — Bei einem so vorzüglichen Buche bleibt für den Kritiker kaum Etwas übrig; so sind S. 156 die Ausdrücke „Antiprisma, Ponton, Sphenisk, Walm“ etc. gebraucht, die nirgendwo erklärt werden. — Wir können unser Urtheil kurz dahin zusammenfassen: Das Buch gehört zu den besten seiner Art.

F. Schütte.

Anfangsgründe der Zahlen- und Raumgrössenlehre. Im Auftrage der Königl. preussischen General-Inspektionen der Artillerie zum Gebrauche als Leitfaden bei dem mathematischen Unterrichte in den Regimentsschulen der Artillerie, sowie zur Benutzung beim Selbstunterrichte bearbeitet von R. Foth, Feuerwerks-Hauptmann. Mit 135 in den Text gedruckten Holzschnitten. 3. Auflage. Hannover, Verlag von Carl Meyer (Gustav Prior). 1888. 284 S. 8°. Preis 2 Mk. 40 Pf.

Wir haben es hier mit einem Buche zu thun, welches mit grossem Fleisse bearbeitet und zusammengestellt ist. Die Darstellung ist klar und sehr allgemeinverständlich, die Herleitungen und Begründungen auf Anschauungen beruhend und nicht abstract wissenschaftlich. Diese Darstellungsweise, sowie die Art und der Inhalt der gut gewählten Aufgaben deuten darauf hin, dass der Zweck des Buches, für den praktischen Beruf vorzubereiten und der Benutzung beim Selbstunterrichte zu dienen, wohl erfüllt werden kann.

Einige Ungenauigkeiten haben wir im geometrischen Theile bemerkt. § 5 heisst es: „bei der krummen Fläche ist kein Theil gerade". Dies gilt offenbar nur von doppelt gekrümmten Flächen, welcher Begriff, trotzdem er nicht erklärt wird, doch § 174 gebraucht wird. Das Zeichen =|= für „parallel" ist wohl kaum üblich und daher nicht zu empfehlen. Ferner heisst es immer: von einem Punkte auf eine Gerade ein Loth fällen, in einem Punkte ein Loth errichten. Da es mehrere nicht giebt, würden wir das Loth für entschieden richtiger halten, wenn auch der Sprachgebrauch meistens mit dem unbestimmten ein sich begnügt. Linie und Strecke sind nicht immer unterschieden (z. B. § 54), wobei aber die vorige Entschuldigung durchaus nicht zutrifft. In Fig. 58 sind die Constructionskreise gar nicht erkennbar, wie wir überhaupt manchen der Figuren nicht viel Lob spenden können. Warum im § 128 die Ecken eines Polygons „Winkelspitzen" heissen und für die Kugel noch das Wort „Sphära" eingeführt ist, ist uns nicht klar, ebenso wozu die Haarspalterei im § 177. Dass solche Dinge dem Herrn Hauptmann Foth bekannt sind, glauben wir, auch ohne dass er es seinen Schülern versichert. — Der kurze Anhang über Vermessungslehre ist sehr hübsch und interessant.

F. Schütte.

Planimetrische Aufgaben für den Gebrauch im Schul-, Privat- und Selbstunterricht bearbeitet von Prof. Dr. F. Reidt, Oberlehrer am Gymnasium zu Hamm. Zweiter Theil. Aufgaben, geordnet nach Auflösungsmethoden und mit Anleitung zur Behandlung versehen. Zweite umgearbeitete Auflage. Breslau, Verlag von Eduard Trewendt. 1888. 127 S.

Was das Werkchen vor ähnlichen auszeichnet, ist die Hervorhebung der Methode und die Anordnung der Aufgaben nach diesen Methoden und dem Grade ihrer Schwierigkeit. Es werden herangezogen und an Beispielen erläutert: 1. Die Methode der Hilfsfiguren. Diese besteht darin, dass man aus den gegebenen Stücken oder aus solchen, die auf eine bekannte Weise — durch Data — aus den gegebenen gefunden werden können, ein Hilfsdreieck nach einer der Grundaufgaben construirt. 2. Die Methode der geometrischen Oerter. 3. Die der ähnlichen Figuren. 4. Die Methode der algebraischen Analysis. — Das Buch schliesst mit der Lösung des Apollonischen Problems. Schade ist, dass nicht auch die Methoden der Parallelverschiebung, der Inversion, der Drehung und Umlegung hervorgehoben sind. Darin steht das Reidt'sche Buch dem klassischen Werke von Petersen, „Methoden und Theorien" nach, übertrifft dasselbe jedoch an Zahl der Aufgaben, deren es über 1500 hat, während Petersen nur etwa 400 aufweist. Jedoch könnte diese grosse Zahl der oft einander sehr ähnlichen Aufgaben ohne Schaden auf die wichtigsten und interessantesten reducirt werden. Varianten kann Jeder sich selber leicht herstellen.

Druck, Papier, sowie die wenigen beigegebenen Figuren sind gut.

F. Schütte.

Vorschule der Mathematik für österr. Untergymnasien und verwandte Lehranstalten. Von Jos. Schram, Professor am Communal-Real- und Obergymnasium zu Mariahilf, und Rud. Schüssler, Doctor der Philosophie. Mit 384 Figuren in besonderem Heft. Preis des Textbandes geheftet: 1 fl. 30 kr. Wien 1889, Alfred Hölder, k. k. Hof- und Universitäts-Buchhändler. 320 S.

Der Inhalt des Lehrtextes ist: Besondere Arithmetik, Allgemeine Arithmetik, Planimetrie, Stereometrie (209 S.); dann folgen Uebersichtstafeln und reichlicher Uebungsstoff. Das Buch liefert dem Schüler den gesammten Lehrstoff wohlgegliedert und geordnet mit seinen Erklärungen und Lehrsätzen. Die Begründung ist kurz, bündig und klar. Den Umstand, dass das ganze für Untergymnasien erforderliche Material in einem Lehrbuche von mässigem Umfange in knapper Form dargestellt ist, können wir nicht umhin als einen grossen Vortheil für den Unterricht zu betrachten. Das ganze Gebäude gewinnt dadurch an Einheitlichkeit. Nirgends sind ferner die Grenzen des für den ins Auge gefassten Schülerkreis Erreichbaren überschritten.

Der musterhafte Druck erfreut das Auge und erhöht die Uebersichtlichkeit ungemein. — Was die Vorrede verspricht, das leistet das vorliegende Lehrbuch vollauf. Auch die in besonderem Hefte beigegebenen ausgezeichneten Figuren entsprechen dem Motto, das sie tragen: „*Figurae loquuntur.*"

F. Schütte.

Ueber begrenzte Ableitungen mit complexem Zeiger von P. Lindner, Gymnasial-Oberlehrer. Beilage zum Programm des königl. Gymnasiums zu Cöslin. 1890. [1890. Programm-Nr. 125.]

Seit Leibniz das Zeichen der Differentiation höherer Ordnung einführte, sind verschiedentlich Versuche gemacht worden, diesem Zeichen einen Sinn beizulegen, auch wo ihm dem Ursprunge nach ein solcher nicht innewohnen konnte. Hiess doch die n^{te} Ableitung, man solle eine Function n-mal nacheinander differentiiren, war also doch damit verbunden die Bedingung, dass n nur ganze positive Zahl sein dürfe, und nun fragte man nach der Bedeutung, wenn der „Zeiger“ n aufhörte, dieser Bedingung zu genügen. Eine solche Frage zu beantworten, war nur unter einer Voraussetzung möglich: wenn man nämlich die Definition der n^{ten} Ableitung anders fasste, so dass bei ganzem positivem n zwar der frühere Werth erschien, aber auch ein anders geartetes n ohne inneren Widerspruch sich denken liess. Solcher neuen Definitionen standen aber, wie die Erfahrung gezeigt hat, mehrere zu Gebote, und Herr Lindner hat, ausgehend von der Ableitung einer Potenzgrösse, die seinige gebildet. Er hat sie sogleich „begrenzt“ ausgesprochen mit Rücksicht darauf, dass eine Ableitung mit negativem Zeiger stets als Integration aufgefasst wurde, bei Integralen aber eine Bestimmtheit erst bei vorhandenen Grenzen sich ergiebt, während Nichts im Wege steht, auch eine andere Function als ein Integral zwischen gegebenen Grenzen zu betrachten, beziehungsweise die Werthe zu bilden, welche die Function durch Einsetzung der Grenzen erhält, und deren Differenz zu nehmen. Die Lindner'sche Definition nennt $[\partial_x^{\varrho}(x-a)^{\alpha} f(x)]_a^x$ die ϱ^{te} Ableitung von $(x-a)^{\alpha}.f(x)$, nach x zwischen a und x genommen, und setzt x als eine complexe Variable, a, α, ϱ als complexe Constanten; f ist eine in der Umgebung von a einändrige Function, die Functionalzeichen Π und F haben die von Gauss ihnen beigelegte Bedeutung. Alsdann soll sein:

$$[\partial_x^{\varrho}(x-a)^{\alpha} f(x)]_a^x = \frac{\Pi(\alpha)\,(x-a)^{\alpha-\varrho}}{2\pi i\,\Pi(\alpha-\varrho)} \int\limits_{(a)} \frac{f(z)}{z-a}\, F\left(\alpha+1,\, 1,\, \alpha+1-\varrho,\, \frac{x-a}{z-a}\right) dz$$

das Integral in positivem, einmaligem Umlauf auf einer die Punkte x und a umfassenden geschlossenen Curve innerhalb des Gebietes geführt, in dem die Functionen $f(z)$ und $F\left(\alpha+1,\, 1,\, \alpha+1-\varrho,\, \frac{x-a}{z-a}\right)$ eindeutig, endlich und stetig sind, die Function F selbstverständlich abgesehen vom Punkte $z=a$. Als Vorzug dieser Begriffsbestimmung erscheint, dass die von früheren Schriftstellern angestellten Versuche in ihr enthalten sind. Ob sie fruchtbarer als jene sich erweisen wird, muss die Zukunft zeigen.

Cantor.

Bibliographie

vom 1. August bis 30. September 1890.

Periodische Schriften.

Physikalische Abhandlungen der königl. preuss. Akademie d. Wissenschaften. Aus d. Jahre 1889. Berlin, G. Reimer. 22 Mk.

Berichte über die Verhandlungen der königl. sächs. Gesellsch. d. Wissensch. Mathem.-physikal. Classe. 1890, I. Leipzig, Hirzel. 1 Mk.

Sitzungsberichte der mathem.-physikal. Classe d. königl. bayer. Akademie d. Wissensch. 1890, Heft 1 u. 2. München, Franz. 2 Mk. 40 Pf.

Sitzungsberichte der Wiener Akademie der Wissenschaften. Math.-naturw. Classe, Abth. IIa. 99. Bd. 1.—3. Heft. Wien, Tempsky. 4 Mk. 50 Pf.

Abhandlungen d. mathem.-naturwissenschaftl. Classe d. böhm. Gesellschaft d. Wissensch. VII. Folge, 3. Bd. 1889—1890. Prag, Rivuac. 16 Mk.

Mémoires de l'Académie des sciences de St. Pétersbourg. VII. Série, tome 37, Nr. 8—13. Leipzig, Voss. 22 Mk. 40 Pf.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. Herausgegeben von E. Schoenfeld und H. Seeliger. 25. Jahrg. 1890, 2. Heft. Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, herausgeg. v. M. Henoch u. E. Lampe. 19. Bd. Jahrg. 1887, 3. Heft. Berlin, G. Reimer. 11 Mk.

Crelle's Journal f. reine u. angew. Mathematik, fortges. v. L. Kronecker. 107. Bd. 1. Heft. Berlin, G. Reimer. compl. 12 Mk.

Jahresbericht d. grossherzogl. bad. Centralbureau f. Meteorologie u. Hydrographie. Jahrg. 1889. Carlsruhe, Braun. 5 Mk. 40 Pf.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Fink, K., Kurzer Abriss einer Geschichte der Elementar-Mathematik, mit Hinweis auf die sich anschliessenden höheren Gebiete. Tübingen, Laupp. 4 Mk.

Ris, F., Zur Geschichte des internationalen Maass- und Gewichtsbureaus und der neuen Prototype des Meters und des Kilogramms. Bern, Wyss. 1 Mk.

Reine Mathematik.

GAUSS, C. F., Vier Beweise f. d. Zerlegung ganzer algebraischer Functionen in reelle Factoren ersten od. zweiten Grades. Herausgeg. v. E. NETTO. (Aus „Ostwald's Klassiker der exakten Wissensch.") Leipzig, Engelmann. 1 Mk. 50 Pf.

JOACHIMSTHAL, F., Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die Theorie der Flächen und Curven doppelter Krümmung. 3. verm. Aufl., bearb. v. L. NATANI. Leipzig, Teubner. 6 Mk.

REICHEL, O., Die Grundlagen der Arithmetik. 2. Theil, die irrationalen Zahlen. Berlin, Haude & Spener. 1 Mk.

DINGELDEY, F., Topologische Studien über die aus ringförmig geschlossenen Bändern durch gewisse Schnitte erzeugbaren Gebilde. Leipzig, Teubner. 2 Mk. 40 Pf.

REICH, A., Die Hauptlehren der Mathematik, mit Aufgaben. Heft 3, Stereometrie. Hanau, Reich. 1 Mk.

BUSOLT, M., Behandlung der conformen Abbildung der Oberflächen zweiter Ordnung. (Inaug.-Dissert.) Königsberg i. Pr., Koch. 1 Mk. 20 Pf.

SERVUS, H., Analytische Geometrie d. Ebene. Leipzig, Teubner. 1 Mk. 60 Pf.

Angewandte Mathematik.

Zeittafel der wichtigsten Orte. Tübingen, Fues. 15 Pf.

BAULE, A., Lehrbuch der Vermessungskunde. Leipzig, Teubner. 8 Mk.

JANUSCHKE, H., Die Gesetze des Oberflächendrucks und der Oberflächenspannung, elementar dargestellt. Troppau, Buchholz & Diebel. 2 Mk.

BREUER, A., Die mathematischen Theorien über die Dispersion des Lichts. 1. Theil: Normale Dispersion. Hannover, Bacmeister. 1 Mk.

Physik und Meteorologie.

EICHHORN, W., Ueber die Abhängigkeit der Wärmeleitung der Gase von der Temperatur. (Inaug.-Dissert.) Jena, Neuenhahn. 1 Mk. 20 Pf.

COULOMB, Vier Abhandlungen über Elektricität und Magnetismus, übersetzt von W. KÖNIG. (Aus „Ostwald's Klassiker der exakten Wissensch.") Leipzig, Engelmann. 1 Mk. 80 Pf.

SCHMITZ-DUMONT, Lichtäther u. elektr. Welle. Dresden, Höckner. 1 Mk. 50 Pf.

HILDEBRANDSSOHN, H., KÖPPEN u. NEUMAYER, Wolken-Atlas. Hamburg, Seitz' Nachf. Gebr. Besthorn. 12 Mk.

Historisch-literarische Abtheilung.

Recensionen.

Ueber Curven ohne Wendepunkte. Habilitationsschrift von Dr. HERMANN BRUNN. München 1889, bei Theodor Ackermann. 74 Seiten und 6 Tafeln.

Der Verfasser hat 1887 unter dem Titel „Ueber Ovale und Eiflächen" eine Inaugural-Dissertation dem Drucke übergeben, mit deren allgemeinstem Inhalte wir unsere Leser Bd. 33, hist.-lit. Abth. S. 216 bekannt gemacht haben. Die gegenwärtig uns vorliegende Habilitationsschrift knüpft an jene frühere Arbeit an, allerdings unter nicht vollständig beibehaltener Untersuchungsweise, indem die zweite Abhandlung weit mehr der Rechnung sich bedient, welche in der ersten in den Hintergrund trat. Andererseits bleibt Gegenstand und Methode so weit derselbe, dass Herr Brunn nicht seinen Ausgangspunkt von Curven nimmt, deren Gleichung diese oder jene Gestalt besitzt, sondern von solchen, welche gleich wie die Ovale seiner ersten Abhandlung ohne Wendungspunkt sind, und zu diesen gehören ausser den Ovalen noch Curven, welche beliebig viele Schleifen besitzen können. Wendepunkt ist aber (im Sinne, wenn auch nicht mit den Worten, des Verfassers ausgesprochen) ein Curvenpunkt, in welchem zwei zu einander parallele Berührungslinien zu einer einzigen zusammenfallen, so dass die Gesammtanzahl der unter einander parallelen reellen Curventangenten eine geringere wird, wenn mindestens ein Berührungspunkt Wendepunkt der Curve ist, als wenn Solches nicht der Fall ist. Als Gleichung geschrieben zeigt uns Herr Brunn, dass $G(\varphi) = 0$ eine Curve ohne Wendepunkt liefert, wenn

$$G(\varphi) = x \cdot cos\,\varphi + y \cdot sin\,\varphi + P(\varphi) \cdot cos\,\frac{\varphi}{\nu},$$

wobei erstlich angeommen ist, dass $P(\varphi)$ eine eindeutige, endliche, stetige und mit der Periode $\nu\pi$ periodische Function sei, zweitens, dass P und damit zugleich auch G zweimal differentiirbar sei. Die betreffende Curve ist nämlich die Enveloppe der Geraden $G = 0$ bei veränderlichem φ. Die Gesammtheit dieser Geraden nennt der Verfasser einen Strahlenbusch. Wenn Wendepunkte bei der genannten Erzeugungsart der Curven ausgeschlossen sind, so verhält es sich keineswegs so mit Spitzen, und gerade die Anzahl der Spitzen liefert den Stoff zu eingehender Untersuchung. Eine Spitze tritt auf, sofern $G(\varphi)=0$, $\frac{dG(\varphi)}{d\varphi}=0$, $\frac{d^2G(\varphi)}{d\varphi^2}=0$. Tritt keine Spitze, noch vielfacher Punkt auf, so findet das Ovalsein der Curve statt. In einem zweiten Capitel werden zwei Strahlenbüsche als vorhanden gedacht, deren Gerade eindeutig auf einander bezogen werden. Sind die beiden Büsche, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ genannt, congruent und nur durch ihre Lage in der Ebene verschieden, so giebt es in der Ebene einen Punkt p, um welchen gedreht $\mathfrak{B}'$ in $\mathfrak{B}$ übergeführt werden kann. Die von p aus unter einem constanten Winkel γ auf die Strahlen T des Busches $\mathfrak{B}$ gefällten Geraden treffen dieselben in Fusspunkten, deren Aufeinanderfolge die Curve F bildet. Die Untersuchung zeigt nun, wann F eine Ovale wird. Dieses tritt immer ein, wenn die Buschcurve B des Busches $\mathfrak{B}$ aus Punkten besteht, deren nächster an p von p um ε entfernt ist, während $\varkappa_0$ das kleinste Krümmungsmaass auf B und $\varkappa_0 > \frac{1}{2\varepsilon}$ ist. Das dritte Capitel führt wieder aus der Ebene in den Raum und fasst Sätze über Ovale und Eiflächen zusammen. Das vierte Capitel geht in ganz neuer Weise zu Speciellstem über. Die Ellipse ist ja das am genauesten bekannte Oval, das Ellipsoid die bekannteste Eifläche. Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit diese Sonderfälle erscheinen? Die Frage wird wie folgt beantwortet: Das Oval ist Ellipse, wenn es lauter geradlinige Durchmesser besitzt; die Eifläche ist Ellipsoid, wenn jeder ihrer ebenen Schnitte einen Mittelpunkt hat. Endlich ein fünftes Capitel setzt die geometrischen Untersuchungen des Herrn Brunn zu einem von Herrn Hölder (Göttinger Nachr. 1889, Nr. 2) herrührenden Mittelwerthsatze in Beziehung. So in grösster Kürze zusammengedrängt etwa der Inhalt einer Abhandlung, welche um so mehr verdient mit Aufmerksamkeit gelesen zu werden, je neuer und eigenartiger die Gegenstände derselben sind.

CANTOR.

The high school Algebra Part II by J. J. BIRCHARD and W. J. ROBERTSON. Toronto 1889, William Briggs. 358 pag.

Wir haben Bd. XXXIII, hist.-lit. Abth. S. 197—198 über eine in Neuseeland gedruckte Algebra berichtet. Der Druckort des uns heute vorliegenden Bandes bringt uns nach Canada, also gerade in das Vaterland jenes Seume'schen Canadiers, den wir damals redend einführten, und er wäre berechtigt, auch heute wieder mit dem Erzeugnisse seiner Heimath sich zu brüsten. Dasselbe stellt eine Arithmetik und Algebra für die höheren Classen von Mittelschulen dar, welche viele europäische Bücher gleicher Art übertrifft. Wir möchten zum Beweise einige Einzelheiten hervorheben. S. 21 sind homogene Functionen definirt und der Satz $F(xt, yt) = t^r F(x,y)$ ist ausgesprochen. Daran anknüpfend ist S. 38 die Proportion $F(a,b):f(a,b) = F(c,d):f(c,d)$ aus der gegebenen Proportion $a:b = c:d$ abgeleitet unter der Voraussetzung, dass F und f ganze homogene Functionen derselben Dimension seien. S. 70 ist darauf aufmerksam gemacht, dass bei Lösung der Aufgabe, die Gliederzahl n einer Progression aus anderen gegebenen Elementen zu finden, n auch negativ oder gebrochen ausfallen könne, und wie Solches zu verstehen sei. S. 86 wird bewiesen, dass $\lim n r^n = 0$ bei $r < 1$, $n = \infty$. Der Beweis ist etwa folgender. Wegen $r < 1$ ist $1 - r > 0$ und setzt man $x > \frac{r}{1-r}$, so ist $\frac{r}{x} < 1 - r$, $\left(1 + \frac{1}{x}\right) r = m < 1$. Aus $\left(1+\frac{1}{x}\right) r = m$ folgt aber $\left(1 + \frac{2}{x}\right) r^2 < m^2$, $\left(1 + \frac{3}{x}\right) r^3 < m^3, \ldots \left(1 + \frac{n}{x}\right) r^n < m^n$, $(x + n) r^n < x \,.\, m^n$, $n r^n < x \,.\, m^n$. Aber x ist eine bestimmte Grösse, m^n verschwindet (wie S. 14 allerdings ungenügend bewiesen ist) bei $m < 1$ und $n = \infty$, mithin convergirt $n r^n$ gegen 0. S. 138 ist unter ganzzahliger Annahme von n gezeigt, dass von den beiden Gleichungen $\sqrt[n]{a + \sqrt{b}} = x + \sqrt{y}$, $\sqrt[n]{a - \sqrt{b}} = x - \sqrt{y}$ die eine eine Folge der anderen ist. Im XI. Capitel (S. 144—163) sind die complexen Grössen geometrisch in bekannter Weise versinnlicht, und es werden dabei die wichtigsten Eigenschaften der dritten und vierten Einheitswurzeln abgeleitet und zur Lösung interessanter Aufgaben benutzt. S. 169 ist aus der Identität $(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c) \times (-a + b + c) = 2(a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)$ die Folgerung gezogen, es werde dieser Ausdruck rational sein müssen, auch wenn a, b, c sämmtlich Quadratwurzeln sind. Daraus wird dann S. 179—180 weiter gefolgert, das Product der vier Factoren verschwinde, wenn irgend einer zu Null werde, die Rationalisirung einer Quadratwurzeln enthaltenden Gleichung könne deshalb Wurzeln liefern, welche der ursprünglichen Gleichung nicht genügen; so folgt aus $\sqrt{2x + 3} - \sqrt{5x + 1} = 7$ zunächst $9x^2 - 698x + 2013 = 0$ und daraus $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{671}{9}$ und beide Werthe erfüllen nicht die anfängliche Gleichung. Das XV. Capitel (S. 213—217) ist den quadratischen Formen (Quadratics) gewidmet und bis zur Darstellung der Bedingung für das Zerfallen eines Kegelschnittes in zwei Gerade durchgeführt, natürlich ohne dass diese geometrische Bedeutung der Aufgabe ausgesprochen wäre. Wir denken, diese kleine Auswahl bemerkenswerther Dinge werde genügen, unsere Bezeichnung des vorliegenden Werkes als eines solchen, das viele ähnlichen Inhaltes übertrifft, wohl zu rechtfertigen.

Cantor.

Tafeln der Hyperbelfunctionen und der Kreisfunctionen nebst einem Anhange, enthaltend die Theorie der Hyperbelfunctionen, von Dr. W. Ligowski, Professor an der kaiserlichen Marine-Akademie und -Schule in Kiel. Berlin 1890, Verlag von Ernst & Korn (Wilhelm Ernst). XXIV, 104 S.

Die Tafeln, welche Herr W. Ligowski, theilweise auch Herr H. Zimmermann, berechnet hat, sind folgende: Zuerst sind zu den

Zahlen ψ die Logarithmen der Hyperbelfunctionen $\mathfrak{Sin}$, $\mathfrak{Cos}$, $\mathfrak{Tg}$ angegeben, und zwar in dem Bereiche $\psi = 0$ bis $\psi = 6$ unter gleichzeitiger Angabe des sogenannten transcendenten Winkels φ, welcher durch die Gleichungen

$$\mathfrak{Sin}\,\psi = tg\,\varphi,$$
$$\mathfrak{Cos}\,\psi = sec\,\varphi,$$
$$\mathfrak{Tg}\,\psi = sin\,\varphi$$

mit ψ in Verbindung steht. Dieser transcendente Winkel φ ist in Graden, Minuten und Secunden angegeben. Von $\psi = 6$ bis $\psi = 12$ fehlt die Angabe des transcendenten Winkels, dagegen ist im Anhange (S. 99) eine Formel nachgewiesen, welche bei $\psi > 6$ den Winkel φ in mehr als vier Decimalstellen einer Winkelsecunde genau berechnen lehrt. Eine auf S. 52 beginnende Tafel giebt von $n = 1$ bis $n = 100$ die n-fachen Werthe des briggischen Logarithmus von e und des natürlichen Logarithmus von 10 jeweils auf zehn Decimalstellen. Eine Umwandlungstafel der Zahlen ψ, sofern sie unterhalb 1 liegen, in Grade u. s. w. fehlt auch nicht. Endlich sind für $\psi = 0$ bis $\psi = 2$ die Werthe von $\mathfrak{Sin}\,\psi$, $\mathfrak{Cos}\,\psi$, $sin\,\psi$, $cos\,\psi$ gemeinschaftlich geordnet, und von $\psi = 2$ bis $\psi = 8$ die von $\mathfrak{Sin}\,\psi$ und $\mathfrak{Cos}\,\psi$ vorhanden. Bei grossem ψ hat man, wie schon bemerkt ist, das zugehörige φ zu berechnen und irgend eine Tafel der Kreisfunctionen von φ zu benutzen. Ein Hauptgewicht ist bei allen Tabellenwerken auf deren Interpolation zu legen; diese wird darum in der Einleitung schon S. XVII für $\mathfrak{Sin}$ und $\mathfrak{Cos}$, S. XIX für *sin* und *cos* gelehrt. Die umgekehrte Aufgabe, beim Aufsuchen des ψ aus gegebenen Hyperbelfunctionen von ψ die Tafel zu interpoliren, ist im Anhange (S. 91) behandelt. Leider sind sehr verschiedene Anweisungen erforderlich, je nachdem kleine oder grosse Werthe von ψ in Frage stehen.

Cantor.

Der Brocard'sche Winkel von Oberlehrer Professor Wilhelm Fuhrmann. Programmbeilage des königl. Realgymnasiums auf der Burg zu Königsberg in Pr. [1889. Progr. Nr. 19.] Königsberg in Pr. 1889, Hartung'sche Buchdruckerei. 28 S.

In diesem Bande, hist.-lit. Abth. S. 34 haben wir über ein Programm von Herrn Emmerich berichtet, welches vorwiegend mit der Geschichte der nunmehr 74 Jahre alten Untersuchungen über gewisse Punkte und Winkel im ebenen Dreiecke sich beschäftigt. Herrn Fuhrmann's Programmabhandlung widmet dieser Geschichte gleichfalls einige Aufmerksamkeit, aber ihr eigentlicher Zweck ist doch ein anderer, der der Veröffentlichung einer Anzahl neuer Sätze aus der neuesten Dreieckslehre, an deren Ausbau Herr Fuhrmann schon früher, wie übrigens Herr Emmerich und andere deutsche Geometer nicht minder, mitgearbeitet hat. Die nach kurzen Vorbemerkungen entwickelten Sätze gliedern sich in vier Gruppen: A. Die Grösse des Brocard'schen Winkels und einige sich daran schliessende Aufgaben; B. Der Brocard'sche Winkel in Bezug auf die Winkel, welche die Schwerlinien mit einander und mit den anstossenden Dreiecksseiten bilden; C. Eigenschaften einiger Winkel, die vom Brocard'schen Winkel abhängig sind; D. Zusammenhang von drei besonderen, einem Kreise eingezeichneten Dreiecken und die Bestimmung der Brennpunkte der Ellipse, welche die Seiten eines Dreieckes in den Mittelpunkten berührt. Es dürfte schwierig sein, aus den zahlreichen, im engsten Zusammenhange mit einander stehenden Lehrsätzen einzelne hervorzuheben. Der Zusammenhang ist eben ein so inniger, dass schon die Aussprache irgend eines Satzes die Kenntniss der ihm vorhergehenden voraussetzen muss. Die Beweismittel, deren Herr Fuhrmann sich bedient hat, sind wesentlich trigonometrischer Natur, wie ja auch die Grundgleichung für den Brocard'schen Winkel $sin(\alpha - \Theta) . sin(\beta - \Theta) . sin(\gamma - \Theta) = sin\,\Theta^3$ dieser Gattung angehört.

CANTOR.

Geschichte der Atomistik vom Mittelalter bis Newton, von KURD LASSWITZ. II. Band. Höhepunkt und Verfall der Korpuskulartheorie des siebzehnten Jahrhunderts. Hamburg und Leipzig 1890, Verlag von Leopold Voss. VIII, 609 S.

Die allgemeine Würdigung, welche wir bei Besprechung des I. Bandes der Geschichte der Atomistik (S. 175—179) geäussert haben, behält auch heute ihre volle Giltigkeit und enthebt uns der Pflicht, das dort Gesagte zu wiederholen. Wir können daher uns wesentlich kürzer fassen und uns darauf beschränken, über den Inhalt des II. Bandes, welcher dem I. ungemein rasch nachfolgte, auszugsweise zu berichten. Drei Bücher, je in 6, 6, 7 Abschnitte zerfallend, sind hier unterschieden. Das dritte Buch behandelt den philosophischen Ausbau der Korpuskulartheorie, das vierte die naturwissenschaftliche Vollendung der Korpuskulartheorie, das fünfte den Uebergang zur dynamischen Theorie der Materie.

Das dritte Buch ist hauptsächlich vier Männern gewidmet: Galilei, Descartes, Gassendi, Hobbes. Die Lehre von der Bewegung entsteht. Deren Gesetze vermögen aber in der Hand Galilei's einen Einblick in die Erscheinungen, welche man unter dem Namen der Flüssigkeit zusammenfasst, nicht zu gewähren. Descartes setzt auch den flüssigen Körper aus starren materiellen Theilchen zusammen, und einen ähnlichen Versuch macht Gassendi. Der wesentliche Unterschied beider Anschauungen beruht auf dem Vacuum, welches Descartes ausschliesst, Gassendi nicht entbehren kann. Hobbes sucht der Schwierigkeit dadurch Herr zu werden, dass er von flüssigen Theilchen ausgeht und aus ihnen das Starre ableitet. Neben diesen Entwickelungen, welche dem Verfasser mit Recht am wichtigsten erscheinen, sind aber in diesem Buche zahlreiche Dinge besprochen, welche dem Referenten fast interessanter waren; insbesondere meinen wir diejenigen Galilei'schen Stellen, welche zur Lehre von den Indivisibilien in unzweifelhaft naher Beziehung stehen. Ueber Descartes werden wir mit Herrn Lasswitz uns nicht leicht einigen, dazu geht unsere Auffassung der ganzen Persönlichkeit zu weit auseinander. Nicht als ob wir Descartes, den Mathematiker, gering schätzten, gewiss nicht. Unsere Bewunderung seiner Leistungen ist derjenigen, welche Herr Lasswitz für den Philosophen und Physiker Descartes hegt, mindestens gleich. Nur der Mensch Descartes erscheint uns in sehr anderem Lichte, und dem entsprechend hat seine Verschweigung gewisser Namen für uns auch eine ganz andere Bedeutung.

Im vierten Buche treten die Männer auf, welche theils durch Entdeckung neuer naturwissenschaftlicher Thatsachen, theils durch mehr oder weniger kühne, mehr oder weniger gelungene Erklärungsversuche ganz neue Gebiete, zuerst in der Chemie, dann in der Physik, erschlossen. Jungius, Boyle, von Guericke, Borelli, Hooke, Huygens sind die Namen, welche einzelne Abschnitte zu behandeln haben. Nicht Alle sind sie als eigentliche Korpuskulartheoretiker zu bezeichnen, insofern ihr Bestreben nicht gerade darauf gerichtet war, die innerste Struktur der Körperwelt zu enthüllen. Aber was ihnen nicht Zweck war, musste einfach Mittel sein. Es war, wenn wir nur die Bedeutung des letzten in diesem Buche geschilderten Gelehrten andeuten wollen, für Huygens ganz unmöglich, die Undulationslehre des Lichtes aufzustellen, ohne in Untersuchungen darüber einzutreten, wie der Aether, dessen Schwingungen in unserem Auge als Licht erscheinen, seine Verbreitung besitze, wie andererseits die Körper gebaut seien, durch welche hindurch jene Schwingungen sich fortsetzen. Ein lockeres Gefüge kleiner Korpuskeln, zwischen denen die beweglichen Theilchen des Lichtäthers zu kreisen vermögen, und die selbst zusammengehalten sind durch eine Materie, deren Feinheit zwischen der des Aethers und der eigentlichen Körpertheile liegt, das ist die Körperwelt, wie Huygens sie auffasste.

Das fünfte Buch endlich gehört Leibniz und Newton an, beide dadurch befähigt, weit über ihre Vorgänger hinauszueilen, dass sie die Mittel mathematischer Variabilitätsuntersuchung, welche das XVII. Jahrhundert in allmäliger Geistesarbeit geschaffen hatte, zu einheitlichen Werkzeugen umbildeten, mit denen auch der geringer Veranlagte Grosses zu leisten im Stande war. Inwieweit allerdings in dem Geistesleben der beiden Männer, und insbesondere Leibnizens, zuerst die mathematischen Vorstellungen oder vor ihnen die philosophisch-physikalischen sich bildeten, ob ein gegenseitiges Befruchten stattgefunden, darüber wird kaum volle Gewissheit zu erlangen sein. Auch wirft Herr Lasswitz diese Frage nicht auf, deren Beantwortung wir schon deshalb nicht von ihm erwarten dürfen. Das fünfte Buch entbehrt dadurch bis zu einem gewissen Grade für den Mathematiker des fesselnden Interesses, während es dem Philosophen leicht als Gipfelpunkt des ganzen Werkes erscheinen mag. CANTOR.

Die Geschichte der Physik in ihren Grundzügen, mit synchronistischen Tabellen der Mathematik, der Chemie und beschreibenden Naturwissenschaften, sowie der allgemeinen Geschichte, von Dr. FERD. ROSENBERGER. Dritter Theil. Geschichte der Physik in den letzten hundert Jahren. Braunschweig, Druck und Verlag von Friedrich Vieweg & Sohn. 1887—1890. XIII, 827 S.

Mit diesem an Stärke die beiden vorhergehenden überragenden Bande, der selbst wieder in zwei Unterabtheilungen zerfällt, ist das Werk zum Abschlusse gebracht, über welches wir schon zweimal in dieser Zeitschrift (hist.-lit. Abth., 28. Band S. 14 flg.; 31. Band S. 144 flg.) uns auszusprechen hatten. Was wir über den zweiten Theil im Verhältniss zum ersten sagten, das gilt jetzt noch mehr für den dritten gegenüber dem zweiten: je mehr sich die Darstellung der neueren und neuesten Zeit nähert, je mehr dem Verfasser Gelegenheit gegeben ist, aus dem eigenen Anschauungskreise heraus die Dinge zu beurtheilen, ohne sich in einen ihm wenigstens theilweise fremden versetzen zu müssen, desto höher steigt der Werth des Buches. Dieser Schlussband ist in der That eine höchst lesenswerthe, geschickte Zusammenfassung der Probleme, mit welchen sich die Physik im Verlaufe des letzten Jahrhunderts beschäftigt, durch deren Lösung oder wenigstens durch deren allseitige Behandlung sie den hohen Standpunkt erreicht hat, auf welchem sie sich gegenwärtig befindet. Wenn der Verfasser es in der Vorrede bedauert, dass ihm angesichts der ungeheuren Stofffülle und bei der begreiflichen Schwierigkeit, sich die nöthigen Nachweisungen zu verschaffen, die frühere Berücksichtigung des biographischen Elementes nicht mehr möglich gewesen sei, so erblicken wir darin eher einen Vor- als Nachtheil, denn so war von vornherein die Gefahr vermieden, dass aus der Geschichte der Physik eine Geschichte der Physiker wurde. Auch damit sind wir einverstanden, dass die synchronistischen Uebersichten in Wegfall kamen, denn der Band ist ohnehin schon stark und wäre im anderen Falle unübersehbar geworden.

Eine genaue Inhaltsangabe verbietet sich bei einem Werke von der Art des vorliegenden von selbst; es genüge zu sagen, dass den einzelnen Zweigen der Naturlehre eine gleichmässige Behandlung zu Theil wurde, und dass durch die steten Quellencitate das Buch auch als Repertorium und Nachschlagewerk brauchbar gemacht ist. Nicht minder wird man sich seiner als einer Einleitung in die moderne Physik überhaupt bedienen können, da viele Gegenstände, wie die mechanische Wärmetheorie, Elektromagnetismus und Induction, das Wesen der neueren Maasssysteme u. s. w. gewiss viel verständlicher und durchsichtiger werden, wenn man sieht, wie sich stufenweise Erkenntniss an Erkenntniss reiht, als wenn man blos eine dogmatische Begründung der betreffenden Lehren giebt. Dass der Verfasser die Geophysik, die Anwendung physikalischer Sätze auf das Studium terrestrischer Erscheinungen fast ganz vernachlässigen musste, war ihm laut Vorwort besonders schmerzlich, doch ist auch nach dieser Seite hin mancherlei aufgenommen, und zumal hinsichtlich der von der Erdumdrehung bewirkten Richtungsablenkungen bewegter Körper theilt der Verfasser zahlreiche Notizen aus der Fachliteratur mit, von denen einzelne dem Referenten, welcher gerade auf diesem Gebiete ziemlich orientirt zu sein glaubt, völlig neu gewesen sind. Ueber Mangel an Vollständigkeit, über Weglassung wichtiger Materien wird man also im Allgemeinen keine Klage führen können, obwohl es sich von selbst versteht, dass der einzelne Leser gelegentlich einmal eine Lücke empfindet. So ist z. B. zwar die neuere Atomistik, namentlich auch die Lehre vom Stosse des Aethers und die kriticistische Reform von Lasswitz mit inbegriffen, gebührend zur Geltung gekommen, aber die von Bravais angebahnte, von Sohncke so elegant begründete Theorie der Krystallstructur ist unerwähnt geblieben, und bei der Erörterung der photometrischen Methoden ist davon Nichts bemerkt, dass das ehemals für normativ gehaltene Lambert'sche Gesetz der Lichtstärkemessung, insonderheit auf die wohlbegründeten Einwürfe Seeliger's hin, so gut wie als aufgegeben zu betrachten ist. Dergleichen kleinere Wahrnehmungen wird jeder eine mehr specialistische Richtung verfolgende Leser des Bandes machen können, allein das kann der Thatsache keinen Eintrag thun, dass mit diesem das ganze, vielfach verdienstliche und äusserlich schön ausgestattete Geschichtswerk zu einem würdigen Ende gebracht ward.

München. Dr. S. Günther.

Ueber die geographisch wichtigsten Kartenprojectionen, insbesondere die zenitalen Entwürfe, nebst Tafeln zur Verwandlung von geographischen Coordinaten in azimutale. Von E. Hammer, Professor am königl. Polytechnikum in Stuttgart. Mit 8 Figuren im Text, 23 Seiten Zahlentafeln und 4 lithographirten Beilagen. Stuttgart, J. B. Metzler'scher Verlag. 1889. XII, 148 S.

Durch seine gelungene und in wesentlichen Punkten die Vorlage vervollkommnende Bearbeitung des Tissot'schen Fundamentalwerkes, sowie durch mehrere kleinere Specialarbeiten hat sich Herr Hammer auf dem Gebiete der theoretischen Kartographie einen guten Namen gemacht, und die gegenwärtige Schrift ist sehr dazu angethan, die Verdienste des Autors um dieses schwierige Grenzgebiet, das von Mathematikern und Geographen nur selten mit wirklicher Lust und Hingabe bebaut wird, noch zu erhöhen. Zwei Punkte sind es besonders, welche bei der Besprechung hervorgehoben zu werden verdienen. Nach der systematischen Seite hin wollte der Verfasser Kritik an der vielfach recht wenig geordneten Eintheilung und Terminologie der einzelnen Projectionsmethoden üben, und das ist ihm denn auch sehr gut gelungen. Wer, wie Referent, selbst mit diesen Dingen sich viel beschäftigt hat, ohne denselben jedoch ausschliesslich seine Aufmerksamkeit zuwenden zu können, der weiss nur zu gut, wie schwer es ist, sich in dem Wirrsale zurecht zu finden; weder die geometrischen Bedingungen jeder einzelnen Abbildung sind vollständig klar gestellt, noch hat auch in der Bezeichnung nach den Urhebern der einzelnen Methoden Uebereinstimmung geherrscht, so dass z. B. die Bonne'sche, die Sanson'sche, die Flamsteed'sche Manier immer wieder durcheinander gebracht wurden. In vielen früheren Darstellungen verschiedener Autoren, nicht zum Wenigsten auch in den vom Unterzeichneten für Herrn Wagner's „Geogr. Jahrbuch" gelieferten fortlaufenden Berichten, hat demgemäss der Verfasser derartige Missverständnisse und Unbestimmtheiten zahlreich aufgedeckt, die denn auch ehemals, wie die Dinge lagen, kaum zu vermeiden waren, und zu deren Abstellung es eben eines Mannes bedurfte, der sein ganzes Augenmerk auf eine solche Reformarbeit richtete. Nach der anderen Seite hin bringt der Verfasser consequent die Tissot'schen Kriterien zur Anwendung, welche bekanntlich zum ersten Male Dasjenige, was man „Verzerrung der Karte" nennt, und was bei dem Uebergange von einer nicht abwickelbaren Fläche zur Ebene nothwendig sich ergeben muss, durch scharfe, eindeutige, mathematische Ausdrücke darzustellen gestatten. So wird hauptsächlich die azimutale Abbildung in ihr Recht eingesetzt, bei welcher ein beliebiger Punkt der Erdoberfläche zum Kartenmittelpunkte genommen wird, während die in diesem und seinem Antipodenpunkte zusammenlaufenden Hauptkreise sich in ein Strahlenbüschel, die um den Punkt als Mittelpunkt beschriebenen kleinen Kugelkreise sich in eine Schaar ebener concentrischer Kreise verwandeln. Diese azimutalen Entwürfe begünstigt der Verfasser, wie dies eben durch die Tissot'schen Formeln vorgeschrieben ist, und theilt Tafeln mit, welche dem praktischen Kartenzeichner deren Anwendung wesentlich erleichtern; auch giebt er gleich die fertigen azimutalen Netze für Asien, sowie, unter der Voraussetzung, dass die azimutale Abbildung ihre als conisch und als cylindrisch bekannten Specialformen angenommen habe, für das englische Colonialreich auf der östlichen Halbkugel und für Südamerika.

Da der Unterzeichnete ein sehr ausführliches Referat über das Hammer'sche Buch in seinen oben erwähnten Jahresberichten gegeben hat, so glaubt er sich an diesem Orte kürzer fassen zu sollen. Von besonderen Eigenthümlichkeiten nennt er noch die stete Berücksichtigung des geschichtlichen Elementes, wie sie ja freilich durch den angestrebten Zweck gebieterisch gefordert wird; dabei ergab sich manche nicht oder doch so gut wie nicht bekannte Thatsache, wie z. B. die, dass die Ausdehnung der gewöhnlich nach Soldner benannten Manier auf schiefe Winkel (mit dem Aequator) ein gewisser von Textor schon im Jahre 1808 angegeben hat. Sehr einschneidend ist die Kritik der perspectivischen Abbildungen gehalten, von denen Hammer die sogenannten externen als wenig nützlich zurückweist, während er natürlich die stereographische wegen ihrer Winkeltreue und die gnomonische wegen ihrer Bedeutung für die orthodromischen Karten der Nautik anerkennt. Darin jedoch (S. 60), dass dem Lernenden das Wesen jeder einfachen azimutalen Abbildung ebenso leicht wie das einer perspectivischen Abbildung zum Verständniss gebracht werden könne, stimmen wir dem Verfasser nicht ganz bei, denn der nächstliegende Gedanke zumal für den aus dem geometrischen Unterrichte kommenden Schüler scheint uns doch der der optisch-geradlinigen Uebertragung des Originalpunktes auf die Bildebene zu sein. — Die Ausstattung des Buches ist, namentlich auch in Ansehung des klaren, angenehmen Druckes, eine sehr gute zu nennen.

München. Dr. S. Günther.

Die blaue Farbe des Himmels. Vortrag, gehalten den 15. Januar 1890 von Dr. J. M. Pernter. Wien, 1890. Commissionsverlag von Ed. Hölzel. 23 S.

Der vorliegende Vortrag bildet einen Bestandtheil jener langjährigen Reihe von Vorträgen, welche der Wiener „Verein zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse“ über wichtige Fragen aus allen Gebieten von berufenen Gelehrten halten lässt. Diesmal ist es ein altes, schwieriges Problem der meteorologischen Optik, um welches es sich handelt, und das wohl jeden denkenden Menschen, der nicht für die Natur und ihre Eindrücke gänzlich abgestumpft ist, interessiren muss. Geschrieben ist seit bald vierhundert Jahren schon viel über die Sache worden, allein vollständig geklärt ist noch heute dieselbe nicht, und erst in neuerer Zeit ist ein recht ernster Anfang zur wirklichen Erforschung des Grundes der gewöhnlichen Himmelsfärbung gemacht worden. Den Reigen eröffnete der geniale Lionardo da Vinci, dem zufolge überhaupt hell vor dunkel die Empfindung blau im Auge hervorrufen sollte — eine Auffassung, die später von Goethe wieder hervorgesucht wurde. Dieselbe hat in der That eine richtige Grundlage, allein der Irrthum ist ebenfalls insofern sehr mit im Spiele, als hier die Farbe des Himmels für eine rein subjective Erscheinung gehalten wird. Dieser Ansicht pflichteten freilich auch wirkliche Physiker bei; Muncke stellt das Himmelsblau in eine Linie mit den bekannten, zuerst von Zschokke näher untersuchten blauen Schattensäumen, und Nichols sucht auf Grund der physiologischen Optik den Seh- und Perceptionsvorgang dahin zu deuten, dass die für Roth und Grün empfindlichen Nervenfasern der Netzhaut von dem schwachen, diffusen Himmelslichte nicht berührt, dass vielmehr nur die auf Violett abgestimmten Organe durch jenes in Action versetzt werden. Mit dieser Lehre von der ausschliesslichen Thätigkeit des Auges muss, nachdem Pickering seinen entscheidenden Gegenversuch angestellt hat, ein- für allemal gebrochen werden; das Himmelsgewölbe wirft objectiv blaues Licht zurück, und es bleibt zu ermitteln, was aus den Strahlen von anderer Wellenlänge geworden ist. Dass die Luft oder einzelne ihrer Bestandtheile von Natur aus blau seien, ist nicht anzunehmen, und ebenso gebricht es an jedem Beweise für die erst jüngst wiederholt aufgetauchte Behauptung, dass unsere Atmosphäre blau fluorescire. Als eine Interferenzfarbe, als „Blau der ersten Ordnung“ dachte sich Newton die Farbe des Firmamentes, und seine Anschauung ist, allerdings in der ihr von Clausius ertheilten Vervollkommnung, heute noch die herrschende, von den Lehrbüchern — auch in verschiedenen Schriften des Berichterstatters — fast einhellig angenommene. Allein durch neuere Untersuchungen von Brücke und Lord Rayleigh, für deren weitere Verbreitung man dem Verfasser Dank schuldet, Untersuchungen, durch welche Goethe's unbestimmte Vorstellungen von der Wirkung sogenannter trüber Medien eine wirklich wissenschaftliche Gestaltung erfahren haben, ist constatirt, dass die in der Luft schwebenden Partikelchen zu klein sind, um auf sie die üblichen Begriffe von Lichtzerstreuung anwenden zu können; vielmehr werden nach Rayleigh die kurzwelligen Lichtstrahlen viel stärker als die langwelligen reflectirt. Dieser Umstand, der durch Experiment und Rechnung gleichmässig gewährleistet erscheint, erklärt einfach das völlige Zurücktreten von Roth und Gelb gegenüber dem Blau, welches ja auch nicht selten einen violetten Schimmer annimmt.

Der Verfasser hat sich sehr gut seiner Pflicht entledigt, einen gemeinverständlichen Ueberblick über die geschichtliche Entwickelung einer merkwürdigen geophysischen Aufgabe, sowie über den neuesten Stand unseres Wissens in dieser Angelegenheit zu geben. Nur hätten wir, um die Lücke des XVIII. Jahrhunderts auszufüllen, eine Berücksichtigung des originellen Werkes von Funck „Ueber die Himmelsfarben“ (Ulm, 1716) gewünscht, worin Hellmann eine wahre Fundgrube unerwarteter Gedanken aufgedeckt hat.

München. Dr. S. Günther.

Die Mathematik die Fackelträgerin einer neuen Zeit, von C. Dillmann. Stuttgart, 1889.

Am 6. März 1889 hielt der preussische Unterrichtsminister Dr. von Gossler im preussischen Landtage eine Rede, in welcher er eine so ablehnende Haltung gegenüber den Realgymnasien einnahm, dass Verfasser jener Schrift, der in dieser Schule die Schule der Zukunft erblickt, nicht schweigen zu dürfen meinte. Er versucht den Nachweis zu liefern, dass die Bildung, welche die Realgymnasien mittels der Mathematik und der Naturwissenschaften anstreben, zwar dem Grade nach dieselbe, aber der Richtung nach eine anders geartete ist, als die durch die Gymnasien vermittelte, dass ihnen Etwas innewohnt, was das Gymnasium nicht leisten kann; er nimmt hiernach für unser Volk und unsere Zeit das Recht in Anspruch, dass ihm dieser Sondervorzug nicht vorenthalten werde, und verlangt Bahn frei in dem Sinne, dass beiden Arten von Gymnasien im Wesentlichen die gleichen Bedingungen zugestanden würden.

Der Verfasser bleibt aber bei dieser Begründung seiner Forderung nicht stehen, sondern geht noch einen Schritt weiter, und darin liegt das Neue und Bedeutsame vorliegender Schrift. Um das brennende Bedürfniss der Zeit und die schlechthinnige Nothwendigkeit der Errichtung mathematischer Gymnasien — diesen Namen schlägt der Verfasser statt des gegenwärtig herrschenden vor — nachzuweisen, führt er aus, dass die Entwickelung der Philosophie dieselbe verlangt, dass das mathematische Gymnasium auch um der Pflege einer idealen Weltanschauung willen eine Nothwendigkeit sei. Noch weiter, er sucht zu zeigen, dass gerade diejenigen Wissenschaften, deren Pflege dem Realgymnasium anvertraut ist, die Mathematik und die Naturwissenschaften, im Stande seien, „der Philosophie eine Bahn aus der Sackgasse zu öffnen, in welche sie durch die kantische Verinnerlichung von Raum und Zeit gerathen sei". Und endlich, auch die Begriffe der Freiheit und des sittlichen Handelns erhalten, wie der Verfasser darzulegen bemüht ist, durch jene Wissenschaften eine ganz neue Beleuchtung und Begründung. Mit diesen Erörterungen hat der Verfasser zugleich dem vielfach ausgesprochenen Vorwurf die Spitze abgebrochen, als ob „Mathematik und Naturwissenschaften mehr zu kahler und kalter Berechnung des Nutzens, als zu der Höhe sinnigen und wonnigen Schauens führten". „Im Gegentheil, gerade sie sind durch die Fülle und den Reichthum ihres Inhalts, wie durch die Einfachheit und Klarheit ihrer Gesetze vor anderen geeignet, die Liebe zur Wahrheit, den Drang zur selbständigen Forschung in den weitesten Schichten des Volkes zu verbreiten. Und das Realgymnasium hat in ganz besonderem Sinne den Vorzug, in den Schülern das Bedürfniss zu wecken, sich in die ersten Grundlagen alles Seins und aller Erkenntniss zu vertiefen. Kann eine Schule, die darauf ausgeht, den inneren Zusammenhang zwischen Geist und Natur aufzudecken und das eine Gebiet für das andere fruchtbar zu machen, auf falscher Grundlage beruhen?"

Was die philosophischen Erörterungen des Verfassers anbelangt, so zeichnen sie sich durch Klarheit im Ausdruck aus; allerdings haben sie, wie Referent gestehen muss, ihn nicht überzeugen können, dass wir in der Erkenntniss der Aussenwelt weiter vorzudringen vermöchten, als Lotze und Helmholtz annehmen. Das Buch ist lesenswerth und, nach des Referenten Ansicht, als ein äusserst schätzenswerther Beitrag anzusehen, um den gegen das Realgymnasium vorgebrachten Bedenken den Boden zu entziehen.

E. Jahnke.

Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra, von H. Servus. Heft IV. Leipzig, 1889.

Das uns vorliegende Heft, welches sich auf die Gleichungen ersten Grades mit einer und mehreren Unbekannten, die Gleichungen zweiten

Grades mit einer und zwei Unbekannten, auf transcendente Gleichungen, arithmetische und geometrische Reihen, sowie auf diophantische Gleichungen bezieht, ist in den ersten Theilen ziemlich reichhaltig. An geeigneter Stelle findet der Schüler Winke für die Lösung der Aufgabe. Ob es auch nöthig war, in dieser Aufgabensammlung die verschiedenen Methoden zur Lösung von Aufgaben zu entwickeln und an Beispielen vollständig durchzuführen? Neben den unbenannten Gleichungen, deren Auflösung ja nur Mittel zum Zweck sein darf, finden sich zahlreiche Anwendungen; bei der Wahl der Aufgaben haben verschiedene Gebiete des Unterrichts Berücksichtigung gefunden. Das Heft erhebt wohl nur den Anspruch, zum Theil neue Aufgaben zu bieten.

E. Jahnke.

Uebungsbuch zur Algebra, von A. Sickenberger. München, 1890.

Diese Beispielsammlung soll des Verfassers „Leitfaden der elementaren Mathematik" ergänzen, dessen Lehrtext sie ganz genau angepasst ist. Sie ist in zwei Abtheilungen erschienen. Die erste umfasst die erste und zweite Stufe der Rechnungsarten einschliesslich der linearen Gleichungen mit mehreren Unbekannten; die zweite bezieht sich auf die dritte Stufe, auf die quadratischen Gleichungen mit mehreren Unbekannten, auf die Reihen und Combinatorik. Das Uebungsbuch ist recht brauchbar, einmal wegen seiner Reichhaltigkeit — wir zählen gegen 10000 Beispiele —, andererseits wegen der richtigen Auswahl, sowie wegen der passenden Anordnung der Aufgaben; auch sind an geeigneter Stelle verschiedene Gebiete des Unterrichts herangezogen worden. Da auch auf den Druck grosse Sorgfalt gelegt worden ist, so kann Referent die Sammlung zur Einführung selbst an Schulen empfehlen, deren Zöglinge jenen Leitfaden nicht in Händen haben sollten.

E. Jahnke.

Elliptische Functionen. Theorie und Geschichte von A. Enneper. 2. Auflage. Neu bearbeitet und herausgegeben von F. Müller. Halle, Nebert. 1890.

Das Enneper'sche Werk hat vornehmlich in einer Zeit, wo man geneigt ist, die Literatur zu vernachlässigen, seinen besonderen Werth; und wir müssen es dem Herausgeber Dank wissen, dass er sich der Arbeit unterzogen hat, eine zweite Auflage desselben zu besorgen. Diese Arbeit war keine leichte; denn es lag im Charakter des Buches, dass bei einer Neuherausgabe desselben Ergänzungen und Aenderungen aufgenommen werden mussten, um den Fortschritten, welche die Theorie der elliptischen Functionen in den letzten 14 Jahren gemacht hat, Rechnung zu tragen. Der Herausgeber hat sich aber damit nicht begnügt, und wohl mit Recht. Er hat das Buch, welches in seiner ersten Auflage mehr den Charakter eines Compendiums, als den eines Lehrbuches besass, in rein didaktischer Hinsicht umgearbeitet, so dass es nunmehr dem Studirenden auch zur Einführung in die Theorie der elliptischen Functionen dienen kann. Ausserdem ist dasselbe — und hiermit hat der Herausgeber eine fühlbare Lücke des Enneper'schen Werkes ausgefüllt — durch eine Einführung in die Weierstrass'sche Theorie der elliptischen Functionen wesentlich erweitert worden. Von sonstigen grösseren Ergänzungen und Aenderungen des Inhaltes sind anzuführen: Die Untersuchung des elliptischen Integrals zwischen complexen Grenzen nach der Darstellung des Herrn Schlömilch, die Schlömilch-sche Methode zur Entwickelung der elliptischen Functionen in unendliche Reihen und Producte, die Entwickelung der elliptischen Functionen in Reihen, die nach Potenzen des Arguments fortschreiten, die Reduction der hyperelliptischen Integrale, literarische Notizen über neuere geometrische Anwendungen der elliptischen Functionen und Historisch-literarisches über die Beziehungen der Theorie der elliptischen Functionen zur höheren Arithmetik und Algebra.

E. Jahnke.

Theorie des Potentials und ihre Anwendungen auf Elektrostatik und Magnetismus, von E. Mathieu. Autorisirte deutsche Ausgabe von H. Maser. Berlin, Springer. 1890.

Ueber die Theorie des Potentials und die Anwendungen derselben auf die verschiedensten Zweige der mathematischen Physik sind in neuerer Zeit eine Reihe von so vortrefflichen Lehrbüchern erschienen — es sei nur an die Namen Dirichlet, Clausius, C. Neumann, F. Neumann, Betti erinnert —, dass es für ein neu erscheinendes nicht leicht ist, denselben ebenbürtig an die Seite zu treten. Das vorliegende Lehrbuch besitzt nun in der That so wesentliche Vorzüge vor den erwähnten, dass es Referent für eine werthvolle Bereicherung der mathematischen Literatur hält.

Im ersten Theile ist der Verfasser bemüht, eine allgemeine Theorie des Potentials analytisch strengst-möglich und deshalb möglichst ohne Rücksicht auf physikalische Vorstellungen und besondere Anwendungen zu geben. Es werden hier gewisse Functionen, die in anderen Gebieten der mathematischen Physik eine dem Potential ähnliche Rolle spielen, so das calorische und das zweite Potential, behandelt und mehrere allgemeine Sätze über dieselben abgeleitet, die in anderen Lehrbüchern dieser Art nicht zu finden sind. Als einen Mangel des vorliegenden Lehrbuchs möchte sich Referent erlauben zu bezeichnen, dass die Ableitung der Laplace-Poisson-schen Differentialgleichung nur nach Gauss und Riemann gegeben wird, während doch die hierbei gemachte Voraussetzung einer stetigen Dichtigkeitsfunction vom physikalischen Standpunkte aus unhaltbar ist. Allerdings ist auch der Clausius'sche Beweis noch nicht einwandsfrei, immerhin enthält er eine Voraussetzung weniger als jene. Im Weiteren ist der Beweis, den der Verfasser unter Ausschluss physikalischer Vorstellungen für die Existenz gewisser Functionen unter bestimmten vorgeschriebenen Bedingungen giebt, nicht streng, wie ja auch ein solcher bei den heutigen analytischen Hilfsmitteln wohl noch nicht möglich ist. Dagegen sind hervorzuheben: das Capitel über die Niveauflächen, wo die bezüglichen Lamé'schen Untersuchungen ihre Darstellung finden, die Betrachtungen über das Potential in krystallisirten Körpern und der Abschnitt über die Anziehung verschiedener Körper, welche von Flächen zweiter Ordnung begrenzt sind.

Der zweite Theil giebt die Anwendungen der Potentialtheorie auf Probleme der Elektrostatik und des Magnetismus in einer Vollständigkeit, wie sie sich in keinem anderen Lehrbuche findet; doch sind nur solche Probleme ausgewählt, welche nicht blos in analytischer Beziehung Interesse haben. Besonders hervorheben möchte Referent des Verfassers Beweis für die Stabilität des Gleichgewichts der Elektricität auf Leitern, sowie die Betrachtungen über die Rolle, welche die dielektrischen Medien in der Elektrostatik spielen. Die physikalischen Vorstellungen, welche man zur Zeit Poisson's über die Wirkungsweise der isolirenden Körper hatte, haben in neuerer Zeit durch Maxwell eine wesentliche Aenderung erfahren, und der Verfasser führt uns die Ideen des schottischen Gelehrten kritisch vor. Ausführlich ist auch die Lehre vom Magnetismus behandelt worden. Gegen die von Poisson gegebene Theorie der magnetischen Induction sind begründete Zweifel erhoben worden. Der Verfasser giebt die neueren Theorien der Vertheilung des inducirten Magnetismus im weichen Eisen und der ihr analogen elektrischen Polarisation der dielektrischen Medien und schliesst deren Anwendung auf die Theorie der Condensatoren an, wie sie von Clausius gegeben worden ist.

In einem kurzen Anhange hat der Uebersetzer das Problem der Elektricitätsvertheilung auf zwei Kugeln noch auf eine andere Weise behandelt, als es vom Verfasser geschehen ist, nämlich nach C. Neumann's Methode, „und zwar einestheils, um diese auch bei vielen anderen Problemen der Elektrostatik und der Wärmelehre mit Vortheil benutzte Methode wenigstens an einem Beispiele zu zeigen, anderentheils, um den Studirenden auf die Thomson'schen oder bipolaren Coordinaten aufmerksam zu machen“.

Das Buch liest sich gut, da es mit dem Dirichlet'schen Werke den Vorzug gemein hat, gewisse mathematische Theorien, wie die Theorie der Kugelfunctionen, nicht vorauszusetzen, sondern an geeigneter Stelle, soweit sie nöthig, zu entwickeln.

E. Jahnke.

Zur Integration von Differentialgleichungen erster Ordnung, in welchen die unabhängige Veränderliche explicite nicht vorkommt, durch eindeutige doppeltperiodische Functionen. Inaugural-Dissertation von Eugen Jahnke. Halle a. S. 1889. Druck von Gebr. Unger in Berlin. 33 S.

Die bekannten drei functionentheoretischen Memoiren der Herren Briot und Bouquet in tome XXI cah. XXXVI des Journal polytechnique haben vermöge ihrer tiefgehenden Bedeutung Anlass zu einer grossen Anzahl von verwandten Abhandlungen gegeben. Zunächst sind genannte Herren selbst auf den Gegenstand zurückgekommen, andererseits haben auch deutsche Mathematiker, unter denen Herr Fuchs in erster Linie zu nennen ist, sehr wesentliche Beiträge auf diesem Gebiete geliefert.

Besonders die dritte Arbeit: „Mémoire sur l'intégration des équations différentielles au moyen des fonctions elliptiques" (pag. 199—254), welche ein so fundamentales Gebilde, wie die elliptischen Functionen, in die Theorie der Differentialgleichungen hineinzog, musste sich viele Freunde erwerben und sicher fruchtbar erweisen.

Auch die uns vorliegende Dissertation verdankt ihre Entstehung der letztgenannten Abhandlung. Während aber die oben erwähnten Autoren ihre Untersuchungen unter einem functionentheoretischen Gesichtspunkt führen, versucht Herr Dr. Jahnke die gleichen Resultate auf einem algebraischen Wege zu gewinnen.

Nun wird man nicht verkennen, dass die Darstellung der Herren Briot und Bouquet, namentlich wie sie sich auch in ihrer „Théorie des fonctions doublement périodiques" und „Théorie des fonctions elliptiques" findet, die eigentlich moderne ist. Indessen hat der Herr Verfasser gezeigt, dass die betreffenden Resultate auch durch seine Methode in übersichtlicher Weise erschlossen werden können, bisweilen in etwas veränderter Aufeinanderfolge. Der sehr interessante Gegenstand, sowie die gefällige Bearbeitung macht die Dissertation recht lesenswerth.

Das in Frage kommende Problem besteht bekanntlich darin, zu untersuchen, unter welchen Bedingungen der Differentialgleichung

$$f_0(u)\left(\frac{du}{dz}\right)^m + f_{\varrho_1}(u)\left(\frac{du}{dz}\right)^{m-\varrho_1} + \cdots f_{\varrho_i}(u)\left(\frac{du}{dz}\right)^{m-\varrho_i} + f_m(u) = 0,$$

in der die f ganze rationale Functionen von nur einer Veränderlichen bedeuten, eindeutige doppeltperiodische Functionen genügen. — Es werden zwei Systeme von Bedingungsgleichungen gefunden, welche die Coefficienten f in bestimmter Weise beschränken. Nachdem $f_0 = 1$ gesetzt, was statthaft ist, ergiebt sich insbesondere, dass die f_{ϱ_i} ganze rationale Functionen sein müssen, welche den $2\varrho_i^{\text{ten}}$ Grad nicht übersteigen.

Specielle Fälle, wie sie die Herren Briot und Bouquet und Herr Fuchs, resp. dessen Schüler Herr Raschke (vergl. Acta Mathematica, 14: 1, pag. 31) behandelten, besonders Fälle, in denen die vorgelegte Differentialgleichung trinomisch und binomisch ist, erledigt der Verfasser in sehr ansprechender Weise, und er findet durch seine Methode nicht minder leicht, welche besonderen Werthe den Zahlen m und ϱ_i zukommen, damit die Differentialgleichung überhaupt vorhanden ist.

Es dürfte nicht unangemessen sein, zu untersuchen, inwieweit man bei analoger Fragestellung auf dem algebraischen Wege vordringen kann, wenn man statt der elliptischen Transcendenten die Abel'schen zu Grunde legt. Für solche Zwecke sei die methodisch interessante Schrift bestens empfohlen.

W. HEYMANN.

Sulla risultanta di un' ennica e di una cubica. Memoira del Dr. ERNESTO PASCAL. Napoli, Benedetto Pellerano. 1887.

Clebsch gab im 58. Bande von Crelle's J. und später in seiner Theorie der binären Formen die symbolische Darstellung der Resultante einer binären Form n^{ter} Ordnung mit einer quadratischen. Auf Grund der dort befolgten Methode löst der Verfasser dieselbe Aufgabe für die Formen

$$\Phi = \alpha_x^3 = \beta_x^3 = \cdots = p_x \cdot q_x \cdot r_x \quad \text{und} \quad f = a_x^n = b_x^n = c_x^n = \cdots$$

Die Resultante erscheint zunächst als Product der Substitutionen von p_1, $-p_2$ etc. für die Unbekannte in f:

$$R = (ap)^n \cdot (bq)^n \cdot (cr)^n,$$

oder nach Vornahme aller möglichen Permutationen der a, b, c und darnach folgender Addition der Ausdrücke

$$6R = (ap)^n \cdot (bq)^n \cdot (cr)^n + (bp)^n (cq)^n (ar)^n + \cdots + (bp)^n (aq)^n (cr)^n$$
$$= \mu_1^n + \mu_3^n + \mu_5^n + \mu_2^n + \mu_4^n + \mu_6^n.$$

μ_{i+1} geht aus μ_i durch eine einfache Permutation hervor. Es handelt sich nun darum, statt der p, q, r symbolische Coefficienten von Φ einzuführen. Für die Bildungen S, K, Ω bei Clebsch treten ganz analoge auf, doch wachsen die Schwierigkeiten mit der grössern Anzahl von Permutationen, d. h. der μ_i erheblich, so dass die Arbeit einen bemerkenswerthen Fortschritt bezeichnet. Charakteristisch für das Endresultat ist es, dass in demselben nicht die Fälle eines geraden oder ungeraden unterschieden zu werden brauchen, wie es nothwendig ist, wenn Φ eine quadratische Form ist. Vollständig hingeschrieben werden die Resultanten für $n = 2, 3, 4$; für $n = 2$ natürlich übereinstimmend mit dem Resultate von Clebsch.

Hannover. C. RODENBERG.

Geometria projettiva. Lezioni di FERDINANDO ASCHIERI, Professore nella Università di Pavia. Seconda édizione con aggiunte e correzioni. 132 figure intercalate nel testo. Milano, Ulrico Hoepli. 1888.

Die baldige Nothwendigkeit einer zweiten Auflage zeugt von der guten Aufnahme, welche das Werk von Seiten des Publicums gefunden hat.

Als wesentlichste der vorgenommenen Erweiterungen seien vorweg genannt: die Erzeugung der Flächen zweiten Grades durch reciproke Strahlenbündel, — die Collinearität und Reciprocität der Räume, insbesondere hierbei die Betrachtung von zwei solchen collinearen Räumen, deren sich selbstentsprechendes Tetraeder mehrere unendlich nahe Ecken besitzt, sowie die hieraus entspringenden besonderen Constructionen, welche Bertini in den „Rendiconti dell' Istituto Lombardo (serie 2a, vol. 20, fasc. 14—15)" gegeben hat, — ferner die Erzeugung der Raumcurven dritter Ordnung durch zwei projective Bündel. Ein kurzer Abschnitt bringt das Wesentlichste aus der Theorie der quadratischen Verwandtschaften nebst einigen Anwendungen, z. B. die Construction des Krümmungskreises in einem Punkte einer Curve zweiter Ordnung. Ein Abriss der Theorie der Complexe und Congruenzen ersten Grades bildet den Schluss des Werkes.

Die Definition der sechs Grundgebilde und ihre Beziehung auf einander durch die „Fundamentaloperationen" des Projicirens und Schneidens bildet, wie im Reye'schen Buche, den Ausgangspunkt der Untersuchungen. Erfreulich ist die einheitliche Bezeichnung der Punkte durch grosse lateinische, der Geraden durch kleine lateinische, der Ebenen durch kleine griechische, der Räume durch grosse griechische Buchstaben. Sehr wünschenswerth wäre die Durchführung dieser zweckmässigen und schon vielfach benutzten Bezeichnungsweise in allen neu erscheinenden geometrischen Werken.

Das zweite Capitel trägt an der Spitze die folgende Definition der Projectivität: „Zwei Grundgebilde der ersten Stufe sind projectiv, wenn sie durch eine endliche Anzahl von Fundamentaloperationen in einander übergeführt werden können." Dann wird zur Construction harmonischer Gebilde geschritten und gezeigt, dass solche Gebilde stets projectiv sind. Der strenge Nachweis des Staudt'schen Fundamentalsatzes der Projectivität war bekanntlich vor einigen Jahren Gegenstand einer Reihe von Aufsätzen in Fachzeitschriften. Der Verfasser schliesst sich dem von R. de Paolis in seiner Arbeit: Sui fondamenti della Geometria projettiva (R. Acc. dei Lincei 1880/81) befolgten Gedankengange an: Unter der Annahme von drei Elementen eines Grundgebildes der ersten Stufe wird nachgewiesen, dass man durch successive Construction vierter harmonischer Elemente zu jedem vorgegebenen Element mit beliebiger Annäherung gelangen kann. Daraus folgt dann, dass zwei Grundgebilde identisch sind, wenn dieselben so auf einander bezogen sind, dass je vier harmonischen Elementen des einen Gebildes vier harmonische des anderen entsprechen und drei Elemente mit ihren entsprechenden zusammenfallen. Aber weiter folgt, dass zwei derartig auf einander bezogene Grundgebilde projectiv sind und endlich, dass zwei projective Grundgebilde durch Angabe von drei Paaren entsprechender Elemente bestimmt sind.

Die Construction der, zu gegebenen Elementen entsprechenden Elemente geht jetzt in üblicher, einfacher Weise vor sich. Durch specielle projective Gebilde werden Kreise erzeugt, welche sofort gelegentlich der Erörterung involutorischer Grundgebilde zur Bestimmung der Doppelelemente benutzt werden.

Bei der Besprechung metrischer Eigenschaften von projectiven Grundgebilden wird der Staudt'sche Fundamentalsatz noch einmal mit Hilfe von Doppelverhältnissen begründet, und eine solche Begründung darf auch in einem Lehrbuche nicht fehlen, möchte vielmehr an die Spitze gestellt werden, da die Schwierigkeiten, welche mit der strengen rein geometrischen Beweisführung verbunden sind, dem Anfänger kaum überwindbar sein dürften.

Das vierte Capitel bringt die centrische Collineation mit ihren Specialfällen: Affinität, Aehnlichkeit, die verschiedenen Symmetrien und Congruenz.

Im fünften Capitel werden dann die Erzeugnisse projectiver Grundgebilde, die Curven und Regelschaaren zweiter Ordnung untersucht, namentlich auch ihre Focaleigenschaften abgeleitet. Die projective Beziehung dieser „Elementargebilde" zweiter Ordnung führt darauf im sechsten Abschnitt zu den Curven und Regelschaaren dritter und vierter Ordnung. Alles geschieht natürlich unter Trennung des ganzen Gebietes in zwei Hälften nach dem Principe der Dualität.

Damit ist ein vorläufiger Abschluss erzielt und es werden nun im siebenten Capitel imaginäre Elemente eingeführt. Der Inhalt des Capitels ist im Wesentlichen eine Wiedergabe der schönen Untersuchungen Segre's in den beiden Arbeiten „Note sur les homographies binaires et leurs faisceaux", Kronecker's J. Bd. 100 S. 317 flg., und „Le coppie di elementi imaginari", Mem. dell' Acc. di Torino T. 38. Die Grundlage bildet der Begriff des Productes zweier Projectivitäten (Homographien). Ist eine Homographie P_1 gegeben durch die Elementenpaare AA_1, BB_1, CC_1; P_2 durch A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2; $\ldots P_r$ durch $A_{r-1}A_r$, $B_{r-1}B_r$, $C_{r-1}C_r$, so wird die durch die Paare AA_r, BB_r, CC_r gegebene Homographie P als Product

$$P = P_1P_2P_3\ldots P_r$$

bezeichnet. P^{-1} ist die zu P inverse Homographie. Zwei gegebene Homographien P, Q sind harmonisch, wenn die Gleichung $P^{-1}Q = Q^{-1}P$ besteht; jedes Product stellt dann eine Involution dar. Also mit anderen Worten: ist P gegeben durch die Paare $M_1M'_1$, $M_2M'_2$, $M_3M'_3$ und Q durch $M_1M''_1$, $M_2M''_2$, $M_3M''_3$, so sind $M'_1M''_1$, $M'_2M''_2$, $M'_3M''_3$ Paare einer Involution.

Zu einer gegebenen Homographie giebt es eine einzige Involution, die „Doppelinvolution" J, welche jene Homographie in sich selbst transformirt. Besitzt die Homographie Doppelelemente, so sind diese auch die Doppelelemente von J. Nun wird als Paar imaginärer Elemente eine elliptische Involution gesetzt und definirt: Zwei Paare von Elementen trennen sich harmonisch, wenn ihre Repräsentanten, die Involutionen, nach der oben ausgesprochenen Definition harmonisch sind. Dann folgt, dass eine Homographie imaginäre Doppelelemente hat, wenn ihre Doppelinvolution elliptisch ist; und man kann endlich allgemein sagen, dass vereinigte projective Grundgebilde entweder zwei reelle getrennte oder vereinigte oder zwei imaginäre Doppelelemente haben.

Auf Grund dieser Untersuchungen werden dann Constructionen der Kegelschnitte aus imaginären Elementen durchgeführt.

Es folgen die eingangs genannten Capitel über Flächen zweiter Ordnung und Raumcurven dritter Ordnung. Die beigegebenen Figuren 125 bis 129 sind leider stark verzeichnet.

Die Begründung der quadratischen Verwandtschaft mag hier kurz skizzirt werden. Zwei Ebenen σ, σ_1 werden zunächst reciprok aufeinander bezogen; dann wird in σ ein Strahlenbüschel S, in σ_1 ein zu S projectives Büschel S' angenommen. Einem Punkte X von σ entspricht dann vermöge der reciproken Beziehung eine Gerade x_1 in σ_1, andererseits entspricht dem Strahle SX in S ein Strahl $S'X'$ in S', wo X' der Schnittpunkt von x_1 und $S'X'$ sein soll. Damit ist jedem Punkte X oder einer Ebene ein Punkt X' der anderen zugeordnet, und, wie sofort erhellt, entspricht jeder Geraden ein Kegelschnitt, d. h. die begründete Verwandtschaft ist eine quadratische. S und S' sind Fundamentalpunkte, der Nachweis der beiden weiteren in jeder Ebene ist einfach. In analoger Weise wird auch die quadratische Verwandtschaft im Raume behandelt.

Die letzten Capitel, welche der Liniengeometrie angehören, gehen bis zu den Begriffen des Büschels und Netzes von Complexen erster Ordnung. Das Erzeugniss von zwei projectiven Büscheln oder zwei reciproken Netzen wird als Complex zweiter Ordnung erkannt, ohne weiter untersucht zu werden.

Das Werk reiht sich den vorhandenen guten Lehrbüchern in würdiger Weise an.

Hannover. C. Rodenberg.

Einleitung in die allgemeine Theorie der krummen Flächen. Von Dr. Johannes Knoblauch, Privatdocent a. d. Universität Berlin. Leipzig 1888, B. G. Teubner.

In der vorliegenden sehr werthvollen Schrift wird die Untersuchung der Flächen im Wesentlichen unter Anwendung der Gauss'schen krummlinigen Coordinaten durchgeführt, doch gelangen manche Resultate auch in cartesischen Coordinaten zum Ausdruck.

Der erste Abschnitt enthält Untersuchungen einer Fläche in der Nähe eines gegebenen Punktes, also die Bestimmung der Tangentialebene, der Krümmung ebener Schnitte und die Ableitung der hierauf bezüglichen Sätze von Meusnier und Euler. Als Beispiele zur allgemeinen Theorie werden hier sowohl wie später die Flächen zweiter Ordnung behandelt. Das Gauss'sche Krümmungsmaass wird in verschiedenen Formen dargestellt und seine Unveränderlichkeit bei einer blossen Biegung der Fläche auf zwei Weisen nachgewiesen.

Im zweiten Abschnitte werden besondere Curvensysteme, wie sie die Haupttangenten- oder Asymptotencurven und die Krümmungslinien bieten, betrachtet und die Vortheile, welche die Flächengleichung unter Benutzung jener Linien als Coordinatensysteme gewährt, ausgenutzt. Schliesslich gelangen die beiden orthogonalen Systeme, das Polar- und das Parallelcoordinatensystem geodätischer Linien zur Anwendung.

Der Umstand, dass die beiden wichtigen Grössen: 1. das Quadrat des Linienelementes ds^2, 2. der Quotient dieses Quadrats mit dem Krümmungshalbmesser eines Normalschnittes, nämlich $\frac{ds^2}{\varrho}$, durch Ausdrücke der Form

$$a_{11}\,du^2 + 2a_{12}\,du\,dv + a_{22}\,dv^2$$

gegeben sind, giebt Veranlassung zur eingehenden Untersuchung dieser binären Differentialformen, im Wesentlichen auf Grund der fundamentalen Arbeiten von Christoffel. Durch den Nachweis des Gauss'schen Krümmungsmaasses als absolute Invariante ergiebt sich ein weiterer Beweis für die Unveränderlichkeit dieser Grösse bei einer Biegung der Fläche. Es folgt die wichtige Anwendung der allgemeinen Theorie auf die „Weingarten-schen Flächen", bei welchen in jedem Punkte jede der beiden Invarianten $\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}$ und $\frac{1}{\varrho_1\varrho_2}$, mit ϱ_1 und ϱ_2 als Hauptkrümmungshalbmesser, eine Function der andern ist, — Flächen, von denen die Minimalflächen und Flächen constanter Krümmung specielle Arten sind. Anwendungen anderer Natur sind die Bestimmungen von Reihen solcher Curvenschaaren, aus denen, wie früher, durch jeden Flächenpunkt eine einzige Curve jeder Schaar geht, und zwar unter Erfüllung der Forderung, dass die Curventangenten in jedem Kreuzungspunkte eine gegebene invariante Eigenschaft besitzen. Krümmungslinien und Asymptotencurven z. B. sind vier Reihen oder besser zwei Reihenpaare, deren Tangenten in jedem Kreuzungspunkte sich harmonisch trennen und wo überdies die Tangenten des ersten Paares aufeinander senkrecht stehen. Zu drei Reihen kann, kurz ausgedrückt, die vierte harmonische gesucht werden; drei Reihenpaare können eine Involution bilden etc.

Im vierten Abschnitte wird eine Fläche in Verbindung mit anderen aus ihr ableitbaren untersucht; insbesondere in Verbindung mit ihrer Evolute, wie zweckmässig die zweimäntelige Fläche der Hauptkrümmungshalbmesser bezeichnet wird. Für die Weingarten'schen Flächen gilt insbesondere der von demselben Autor herrührende umkehrbare Satz: Die Evoluten aller Flächen, bei denen auf gleiche Weise in jedem Punkte der eine Hauptkrümmungsradius allein durch den andern bestimmt ist, sind aufeinander abwickelbar. Mit einer Evolute wird schliesslich das ganze System der zugehörigen Parallelflächen betrachtet.

Der fünfte und letzte Abschnitt enthält die allgemeine Theorie der Curven auf einer gegebenen Fläche. Vorbereitend für das Spätere werden die Frenet'schen Beziehungen zwischen den Richtungen der Tangente, der

Haupt- und Binormale entwickelt. Dann folgt die Einführung des Begriffes der geodätischen Krümmung einer Curve auf einer Fläche und der Nachweis der Unveränderlichkeit dieser Krümmung bei einer Biegung. Alle solche Biegungsinvarianten werden dann noch einmal zusammenfassend betrachtet. Von besonderer Bedeutung erweisen sich die Linien constanter geodätischer Krümmung. Sie begrenzen, wie die Kreise der Ebene bei gegebener Länge, ein grösstes Flächenstück. Zum Schlusse wird die Durchschnittscurve zweier Flächen untersucht und bewiesen, dass für den isogonalen Schnitt nach einer Krümmungslinie der einen Fläche diese Curve auch Krümmungslinie der andern Fläche ist.

Angenehm ist die Beigabe eines Sachregisters. Ein vollständiges Verzeichniss der einschlägigen Literatur will der Verfasser bei einer andern Gelegenheit geben.

Hannover. C. Rodenberg.

Bibliographie

vom 1. bis 31. October 1890.

Periodische Schriften.

Veröffentlichungen des königl. preuss. geodät. Instituts. Das Mittelwasser der Ostsee bei Swinemünde. 2. Mittheil. Berlin, Stankiewicz. 4 Mk.

Abhandlungen des königl. preuss. meteorologischen Instituts. 1. Bd. Nr. 2. Berlin, Asher & Comp. 2 Mk.

Neue Annalen der Sternwarte in Bogenhausen bei München, herausgeg. v. Seeliger. 1. Bd. München, Franz. 30 Mk.

Beobachtungen am astrophysikalischen Observatorium in O Gyalla, herausgegeben von N. v. Konkoly. 11. u. 12. Bd. aus d. J. 1888 u. 1889. Halle, Schmidt. 10 Mk.

Annalen des physikal. Centralobservatoriums in Russland, herausgeg. v. Wild. Jahrg. 1889, 1. Theil. Petersburg u. Leipzig, Voss. 10 Mk. 20 Pf.

Jahresbericht der physikal. Gesellschaft in Zürich für d. Jahr 1889. Zürich, Mayer & Zeller. 1 Mk. 20 Pf.

Mathematische Annalen von Klein, Dyck und Mayer. 37. Bd. Leipzig, Teubner. 20 Mk.

Reine Mathematik.

Diestel, F., Beiträge zur Interpolationsrechnung. (Inaug.-Dissert.) Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 1 Mk. 20 Pf.

Schröder, J., Ueber den Zusammenhang der hyperelliptischen σ- und ϑ-Functionen. (Inaug.-Dissert.) Ebendas. 1 Mk. 60 Pf.

Haskel, W., Ueber die zu der Curve $\lambda^3\mu + \mu^3\nu + \nu^3\lambda = 0$ im projectiven Sinne gehörende mehrfache Ueberdeckung der Ebene. (Inaug.-Dissert.) Ebendas. 2 Mk. 80 Pf.

Lietke, A., Ueber die Flächen, für welche eine Krümmungscentralfläche ein Kegel 2. Gr. ist. (Inaug.-Dissert.) Königsberg i. Pr., Koch. 1 Mk.

Martus, E., Raumlehre für höhere Schulen. 1. Theil: Ebene Figuren. Bielefeld, Velhagen & Klasing. 2 Mk.

Schottn, H., Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts. Eine vergleichende Planimetrie. Leipzig, Teubner. 6 Mk.

Hartl, H., Lehrbuch der ebenen Trigonometrie. Wien, Hölder. 1 Mk.

Angewandte Mathematik.

Bauernfeind, M. v., Das bayerische Präcisions-Nivellement. 8. Mittheil. München, Franz. 2 Mk.

Mathematisches Abhandlungsregister.

1889.

Zweite Hälfte: 1. Juli bis 31. December.

A.

Abel'sche Integrale.

347. Sur la réduction de certaines intégrales abéliennes à la forme normale. J. Ptaszycki. Mathem. Annal. XXXIII, 600.
348. Ueber die Reduction einer Gruppe Abel'scher Integrale auf elliptische Integrale. G. v. Alth. Wien. Akad.-Ber. XCV, 702.
Vergl. Elliptische Transcendenten 454.

Abbildung.

349. Ueber eine Classe von auf die einfache Ebene abbildbaren Doppelebenen. M. Nöther. Mathem. Annal. XXXIII, 525.
350. Sur les représentations géodésiques des surfaces. R. Liouville. Compt. rend. CVIII, 335.
Vergl. Cartographie.

Analytische Geometrie der Ebene.

351. Sur la transformation orthotangentielle. E. Cesaro. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 116.
352. Une application des coordonnées parallèles. M. d'Ocagne. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 568.
353. Sur une courbe anallagmatique. Lemaire. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 243.
354. Deux théorèmes généraux sur les trajectoires de points et les enveloppes de droites mobiles dans un plan. M. d'Ocagne. Compt. rend. CIX, 959.
355. Génération de la strophoïde au moyen d'un système de coniques homofocales. Barisien. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 586.
356. A property of bicircular quartics. C. M. Jessop. Quart. Journ. math. XXIII, 371.
Vergl. Ellipse. Hyperbel. Kegelschnitte. Kreis. Parabel.

Analytische Geometrie des Raumes.

357. Sur les cubiques gauches. Balitrand. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 520. [Vergl. Nr. 579.]
358. Étude d'un complexe. E. Marchand. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 122, 401.
359. On twisted cubics which fulfil certain given conditions. A. C. Dixon. Quart. Journ. math. XXIII, 343.
Vergl. Ellipsoid. Hyperboloid. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung. Singularitäten.

Astronomie.

360. Sur quelques points de la théorie du sextant. Gruey. Compt. rend. CVIII, 388.
361. Sur la rectification complète du sextant. Gruey. Compt. rend. CVIII, 443.
362. Sur la stabilité du système solaire. D. Eginitis. Compt. rend. CVIII, 1156.
363. Les lois électrodynamiques et le mouvement planétaire. Ch. V. Zenger. Compt. rend. CIX, 404.
364. Sur les termes élémentaires dans les coordonnées d'une planète. H. Gyldén. Compt. rend. CVIII, 79, 116.
365. Studien zur Störungstheorie. V. Láska. Wien. Akad.-Ber. XCVI, 337.
366. Zur Theorie der planetarischen Störungen. V. Láska. Wien. Akad.-Ber. XCVI, 952.
367. Allgemeine Methode zur Berechnung der speciellen Elementenstörungen in Bahnen von beliebiger Excentricität. J. Gerst. Wien. Akad.-Ber. XCVI, 699.

368. Sur la représentation analytique des perturbations des planètes. H. Gyldén. Compt. rend. CIX, 395.
369. Sur les calculs de Maxwell, relatifs au mouvement d'un anneau rigide autour de Saturne. O. Callandreau. Compt. rend. CIX, 467.
370. Sur les orbites des étoiles filantes et sur les points radiants stationnaires. F. Tisserand. Compt. rend. CIX, 341.
371. Sur la théorie de la capture des comètes périodiques. F. Tisserand. Compt. rend. CVIII, 827.

Vergl. Geschichte der Mathematik 516, 517.

B.

Bestimmte Integrale.

372. Einige Sätze über bestimmte Integrale. L. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. XCVII, 1053.
373. Sur l'intégrale $\int_0^\pi cotg(x-\alpha)\,dx$. F. Gomes Teixeira. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 120.
374. Beiträge zur Theorie des Cauchy'schen Integrales. A. Harnack. Mathem. Annal. XXXV, 1.
375. Ueber ein Integral mit doppeltem Umlauf. L. Pochhammer. Mathem. Annal. XXXV, 470.
376. Sur les intégrales multiples relatives à trois variables complexes. E. Picard. Compt. rend. CVIII, 132.

Vergl. Gammafunctionen.

C.

Cartographie.

377. Sur les cartes géographiques. A. Korkine. Mathem. Annal. XXXV, 588.

Combinatorik.

378. A theorem on trees. Cayley. Quart. Journ. math. XXIII, 376.

Vergl. Topologie.

Complanation.

379. Sur l'aire de certaines zones ellipsoïdales. G. Humbert. Compt. rend. CIX, 611.
380. Sur certaines aires ellipsoïdales. G. Humbert. Compt. rend. CIX, 734.

Vergl. Rectification.

Cylinderfunctionen.

381. Ueber die Nullstellen der Bessel'schen Function. A. Hurwitz. Mathem. Annal. XXXIII, 246.
382. Ueber die Functionen $T_n^m(x)$. L. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. XCV, 274
383. Ueber die Bessel'schen Functionen. L. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. XCV, 409.
384. On some expressions of a function of a single variable in terms of Bessel's functions. W. F. Sheppard. Quart. Journ. math. XXIII, 223.

Vergl. Reihen 684.

D.

Determinanten.

385. Zur Theorie der Determinanten. N. v. Szüts. Mathem. Annal. XXXIII, 477.
386. Ueber eine neue Darstellung der Resultante zweier Formen gleicher Ordnung. W. Stahl. Mathem. Annal. XXXV, 395.
387. Ueber windschiefe Determinanten. F. Mertens. Wien. Akad.-Ber. XCVI, 1245.
388. Note über Determinanten. L. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. XCVI, 5.
389. Ueber eine specielle Determinante. L. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. XCVI, 489.
390. Ueber Determinanten. L. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. XCVII, 154.
391. Sur deux déterminants numériques. G. Fouret. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 82.

Differentialgleichungen.

392. On binomial biordinals. J. Cockle. Phil. Mag. Ser. 5, XXIV, 249.
393. On the general quartine, or the incriticoid of the fourth degree. R. Harley. Phil. Mag. Ser. 5, XXVI, 456.

394. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen. L. Fuchs. Berl. Akad.-Ber. 1888, 1115, 1273; 1889, 713.
395. On synthetical solution and on deformation. J. Cockle. Quart. Journ. math. XXIII, 1.
396. Sur les invariants de certaines équations différentielles et sur leurs applications. R. Liouville. Compt. rend. CIX, 560.
397. Sur les invariants d'une équation différentielle linéaire et homogène. Mittag-Leffler. Compt. rend. CIX, 637.
398. Ueber den Multiplicator der allgemeinen elliptischen Differentialgleichung. A. Winckler. Wien. Akad.-Ber. XCV, 209.
399. Note sur l'équation d'Euler et de Poisson. L. Lévy. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 545.
400. Ueber die Integration der Lamé'schen Differentialgleichung. G. A. Pick. Wien. Akad.-Ber. XCVI, 872.
401. Sur l'intégration de $\frac{d^2\varrho}{dx^2}+n^2\varrho=\mu.\varphi(\varrho,x)$ par les séries de M. Lindstedt. H. Poincaré. Compt. rend. CVIII, 21.
402. Lineare Differentialgleichungen zwischen den Perioden der hyperelliptischen Integrale erster Gattung. Ed. Wiltheiss. Mathem. Annal. XXXIV, 150.
403. Ueber die Differentialgleichungen dritter Ordnung, welchen die Formen mit linearen Transformationen in sich genügen. A. Hurwitz. Mathem. Annal. XXXIII, 345.
404. Sur les solutions régulières d'un système d'équations différentielles linéaires. Sauvage. Compt. rend. CVIII, 174.
405. Ueber die singulären Stellen der Integrale einer linearen partiellen Differentialgleichung. J. Horn. Mathem. Annal. XXXIII, 310.
406. Sur la détermination des intégrales de certaines équations aux dérivées partielles par leur valeur sur un contour. E. Picard. Compt. rend. CIX, 499.
407. Ueber gewisse partielle Differentialgleichungen, denen hypergeometrische Integrale genügen. L. Pochhammer. Mathem. Annal. XXXIII, 353.

Vergl. Invariantentheorie 571. Substitutionen 698.

Differentialquotient.

408. Ueber eine durchaus differentiirbare, stetige Function mit Oscillationen in jedem Intervalle. Alfr. Köpcke. Mathem. Annal. XXXIV, 161; XXXV, 104. [Vergl. Nr. 77, 78 und Bd. XXXIII, Nr. 376.]
409. Sur les dérivées de *sec x*. Stieltjes. Compt. rend. CVIII, 605.

E.

Elasticität.

410. Further applications of a new solution of the equations of an isotropic elastic solid, mainly to various cases of rotating bodies. C. Chree. Quart. Journ. math. XXIII, 11. [Vergl. Bd. XXXIV, Nr. 39.]
411. On longitudinal vibrations. C. Chree. Quart. Journ. math. XXIII, 317.
412. Sur un problème de Clebsch. E. Fontaneau. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 478.
413. Sur un point de la question des plaques élastiques homogènes. Resal. Compt. rend. CVIII, 114.
414. Sur l'équilibre d'élasticité des voutes en arc de cercle. Ribière. Compt. rend. CVIII, 561.
415. Sur la détermination des forces élastiques et de leurs lignes d'influence dans les poutres assujetties à des liaisons surabondantes. B. de Fontviolant. Compt. rend. CVIII, 45.
416. Sur les déformations élastiques d'un corps solide, isotrope ou cristallisé, sous l'action d'une force d'intensité constante, pivotant autour de son point d'application. B. de Fontviolant. Compt. rend. CIX, 216.
417. On beams fixed at the ends. W. E. Ayrton. Phil. Mag. Ser. 5, XXIV, 245.

Vergl. Molekularphysik 628.

Elektricität.

418. Zur Theorie umkehrbarer galvanischer Elemente. W. Nernst. Berl. Akad.-Ber. 1889, 83.
419. Ueber das Verhältniss von Energie und Arbeitsleistung beim Condensator. G. Adler. Wien. Akad.-Ber. XCV, 50.

420. Ueber eine neue Berechnungsmethode der Anziehung, die ein Conductor in einem elektrostatischen Felde erfährt. G. Adler. Wien. Akad.-Ber. XCVI, 1036, 1305.
421. Ueber die elektrischen Gleichgewichtsverhältnisse von Conductoren und die Arbeitsverhältnisse elektrischer Systeme überhaupt. G. Adler. Wien. Akad.-Ber. XCVII, 90.
422. On the self-induction of wires. O. Heaviside. Phil. Mag. Ser. 5, XXIII, 10, 173; XXIV, 63. [Vergl. Bd. XXXIV, Nr. 352.]
423. On the conditions of selfexcitation in a dynamo machine. S. P. Thompson. Phil. Mag. Ser. 5, XXVI, 469.
424. Sur une loi générale de l'induction dans les circuits dénués de résistance. G. Lippmann. Compt. rend. CIX, 251.
425. On resistance and conductance operators, and their derivatives, inductance and permittance, especially in connexion with electric and magnetic energy. O. Heaviside. Phil. Mag. Ser. 5, XXIV, 478.
426. On electromagnetic waves and the forced vibrations of electromagnetic systems. O. Heaviside. Phil. Mag. Ser. 5, XXV, 130, 202, 379; XXVI, 360, 434, 488.
427. On a geometrical determination of the conditions of maximum efficiency in the case of the transmission of power by means of alternating electric currents. Th. H. Blakesley. Phil. Mag. Ser. 5, XXV, 30.
428. On continuous-current transformers. S. P. Thompson. Phil. Mag. Ser. 5, XXVI, 157.
429. Ueber eine Deformation elektrischer Oscillationen durch die Nähe geschlossener Leiter. R. Hiecke. Wien. Akad.-Ber. XCVI, 134.
430. On the electromotive force in moving conductors. H. W. Watson. Phil. Mag. Ser. 5, XXV, 271.
431. On comparing capacities. E. C. Rimington. Phil. Mag. Ser. 5, XXIV, 238.
432. On the potential of the electric field in the neighbourhood of a spherical bowl charched or under influence. J. N. Kruseman. Phil. Mag. Ser. 5, XXIV, 38.
433. On magnetic lag. Th. H. Blakesley. Phil. Mag. Ser. 5, XXVI, 34.
434. Calcul de la capacité électrostatique de deux fils télégraphiques parallèles. J. B. Pomey. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 564.
435. On the theory of unipolar induction. E. Edlund. Phil. Mag. Ser. 5, XXIV, 401.
436. Ueber unipolare Induction. E. Edlund. Wien. Akad.-Ber. XCV, 97.
437. On the theory of lightning-conductors. O. J. Lodge. Phil. Mag. Ser. 5, XXVI, 217.
438. Zur Theorie der thermoelektrischen Erscheinungen. L. Boltzmann. Wien. Akad.-Ber. XCVI, 1258.
439. On thermoelectric phenomena. J. Parker. Phil. Mag. Ser. 5, XXVI, 353.
440. Ueber thermomagnetische Motoren. J. Stefan. Wien. Akad.-Ber. XCVII, 70.
441. Ueber die Aenderung des Widerstandes galvanisch glühender Drähte mit der Stromstärke. O. Tumlirz & A. Krug. Wien. Akad.-Ber. XCV, 1014.
442. Ueber veränderliche elektrische Ströme in dicken Leitungsdrähten. J. Stefan. Wien. Akad.-Ber. XCV, 917.
443. Ueber die Energie und die Gleichgewichtsverhältnisse eines Systemes dielektrisch-polarisirter Körper. G. Adler. Wien. Akad.-Ber. XCV, 180.

Vergl. Astronomie 363.

Elementararithmetik.

444. Théorie élémentaire des fractions. Ch. Méray & Ch. Riquier. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 421.
445. Sur les approximations numériques. Guyou. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 165.
446. Nouveau théorème sur les progressions arithmétiques. Jos. Joffroy. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 85.
447. Sur une nouvelle machine à calculer. L. Bollée. Compt. rend. CIX, 737.

Vergl. Geschichte der Mathematik 518. Irrationalzahlen.

Ellipse.

448. Ueber einen neuen Ellipsenzirkel. K. Jost. Wien. Akad.-Ber. XCV, 251.
449. Construire les axes d'une ellipse dont on donne deux diamètres conjugués. A. Mannheim. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 329.
450. Zum Normalenproblem der Ellipse. C. Pelz. Wien. Akad.-Ber. XCV, 481.
451. Zum Normalenproblem einer vollständig gezeichneten Ellipse. C. Pelz. Wien. Akad.-Ber. XCVI, 387.

Vergl. Rectification.

Ellipsoid.

452. Sur les lignes de courbure de l'ellipsoide et les systèmes orthogonaux du second ordre. De Salvert. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 214.

Vergl. Complanation. Potential 677. Rectification.

Elliptische Transcendenten.

453. Zur Theorie der elliptischen Functionen. L. Kronecker. Berl. Akad.-Ber. 1889, 53, 123, 199, 255, 309. [Vergl. Bd. XXXII, Nr. 394.]
454. Zur Reduction elliptischer, hyperelliptischer und Abel'scher Integrale. Das Abel'sche Theorem für einfache und Doppelintegrale. W. Scheibner. Mathem. Annal. XXXIV, 473.
455. Sur l'analogie entre les fonctions elliptiques et trigonométriques. J. Dolbnia. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 459.
456. Ueber die zu einer ebenen Curve dritter Ordnung gehörigen elliptischen Transscendenten. G. Pick. Wien. Akad.-Ber. XCVII, 711.
457. Sur l'addition des intégrales elliptiques de première, deuxième et troisième espèce. J. Dolbnia. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 204.
458. Sur la résolvante de Gallois dans la division des périodes elliptiques par 7. G. Halphen. Compt. rend. CVIII, 476. — F. Brioschi ibid. CIX, 520.
459. Zur complexen Multiplication elliptischer Functionen. H. Weber. Mathem. Annal. XXXIII, 390.

Vergl. Abel'sche Integrale 348. Differentialgleichungen 398. Geometrie (höhere) 501.

F.

Factorenfolge.

460. Ueber die Convergenz unendlicher Producte. Alfr. Pringsheim. Mathem. Annal. XXXIII, 119.
461. Ueber die Darstellung der eindeutigen Functionen, die sich durch lineare Substitutionen reproduciren, durch unendliche Producte. Herm. Stahl. Mathem. Annal. XXXIII, 291, 604.
462. Ueber die Exponentialfunction. L. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. XCV, 846.

Vergl. Geschichte der Mathematik 519.

Formen.

463. Ueber eine fundamentale Eigenschaft des Ueberschiebungsprocesses und deren Verwerthung in der Theorie der binären Formen. E. Stroh. Mathem. Annal. XXXIII, 61.
464. Das erweiterte Formensystem. P. Gordan. Mathem. Annal. XXXIII, 372.
465. Sur la réduction biorthogonale d'une forme linéo-linéaire à sa forme canonique. Sylvester. Compt. rend. CVIII, 651.
466. Ueber das vollständige Combinantensystem zweier binärer Formen. E. Stroh. Mathem. Annal. XXXIV, 321.
467. Ueber Büschel von binären Formen mit vorgeschriebener Functionaldeterminante. D. Hilbert. Mathem. Annal. XXXIII, 227.
468. Ueber die binären quadratischen Formen. L. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. XCVI, 476.
469. Die Syzyganten zweier simultanen binären biquadratischen Formen. Von Gall. Mathem. Annal. XXXIII, 197; XXXIV, 332.
470. Entwickelung der Grundsyzyganten der binären Formen 5. Ordnung. E. Stroh. Mathem. Annal. XXXIV, 354.
471. Die fundamentalen Syzyganten der binären Formen 6. Ordnung. E. Stroh. Mathem. Annal. XXXIV, 306.
472. Die irreducibeln Syzyganten einer binären Form 6. Ordnung, die in den Coefficienten höher als vom 9. Grade sind. v. Gall. Math. Annal. XXXV, 63.
473. Systems of reduced simultaneous ternary forms equivalent to a given ternary form, which involves several sets of variables. A. R. Forsyth. Quart. Journ. math. XXIII, 102.

Vergl. Determinanten 386. Invariantentheorie.

Functionen.

474. Sur la recherche des discontinuités polaires. Hadamard. Compt. rend. CVIII, 722.
475. Formes principales sur les surfaces de Riemann. Fel. Klein. Compt. rend. CVIII, 134.

476. Des fonctions thêta sur la surface générale de Riemann. Fel. Klein. Compt. rend. CVIII, 277.
477. Zum Fundamentalsatz aus der Theorie der algebraischen Functionen. E. Bertini. Mathem. Annal. XXXIV, 447. — M. Nöther ebenda 450.
478. Sopra un teorema del sig. Netto. E. Bertini. Mathem. Annal. XXXV, 456.
479. Ueber das algebraische Gebilde n^{ter} Stufe im Gebiete von $n+1$ Grössen. O. Biermann. Wien. Akad.-Ber. XCV, 802.
480. La forme la plus générale d'un polynôme entier $F(x)$ satisfaisant aux relations $F(1-x)=F(x)$, $F\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{F(x)}{x^m}$. L. Lefèvre. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 158.
481. Ueber die Ermittelung der Theiler einer ganzen ganzzahligen Function einer Veränderlichen. F. Mertens. Wien. Akad.-Ber. XCVII, 618.
482. Ueber die Entwickelung der doppelt periodischen Functionen zweiter und dritter Art in trigonometrische Reihen. M. Krause. Mathem. Annal. XXXIII, 108; XXXV, 577. [Vergl. Bd. XXXIV, Nr. 381.]
483. Sur certaines expressions quadruplement périodiques dépendant de deux variables. E. Picard. Compt. rend. CVIII, 557, 659. — Appell ibid. 607.
484. Zur Theorie der Riemann'schen Functionen zweiter Ordnung mit vier Verzweigungspunkten. K. Heun. Mathem. Annal. XXXIII, 161.
485. Zur Bildung allgemeiner σ-Functionen. A. Krazer. Mathem. Annal. XXXIII, 591. [Vergl. Bd. XXXIV, Nr. 382.]
486. Aufstellung des vollen Formensystems einer quaternären Gruppe von 51840 linearen Substitutionen. H. Maschke. Mathem. Annal. XXXIII, 317.
487. Ueber die Darstellung der hypergeometrischen Transcendenten durch eindeutige Functionen. E. Papperitz. Mathem. Annal. XXXIV, 247.
488. Beiträge zur Theorie der Lamé'schen Functionen. K. Heun. Mathem. Annal. XXXIII, 180.
489. Ueber symmetrische Systeme. L. Kronecker. Berl. Akad.-Ber. 1889, 349.
490. Ueber die Functionen $C_n^\nu(x)$. L. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. XCVII, 259.

Vergl. Abel'sche Integrale. Abbildung. Bestimmte Integrale. Cylinderfunctionen. Determinanten. Differentialgleichungen. Differentialquotient. Elliptische Transcendenten. Factorenfolge. Formen. Gammafunctionen. Gleichungen. Hyperelliptische Transcendenten. Imaginäres. Invariantentheorie. Kettenbrüche. Mittelwerth. Partialbrüche. Potential. Reihen. Substitutionen. Thetafunctionen. Transformationsgruppen. Unbestimmte Form. Variationsrechnung.

G.

Gammafunctionen.

491. Zur Theorie der Euler'schen Integrale. L. Pochhammer. Mathem. Annal. XXXV, 495.

Geodäsie.

492. On the amount of the Elevations attributable to compression through the contraction during cooling of a solid Earth. O. Fisher. Phil. Mag. Ser. 5, XXIII, 145; XXIV, 391; XXV, 7.
493. On the relation between the size of a Planet and the rate of mountain-building on its surface. Ch. Davison. Phil. Mag. Ser. 5, XXIV, 391.
494. Sur le mode initial de déformation de la croûte terrestre ellipsoïdale. A. Romieux. Compt. rend. CVIII, 851.

Geometrie (descriptive).

495. Der Satz von Pohlke. C. Küpper. Mathem. Annal. XXXIII, 474.
496. Sur quelques problèmes de géométrie descriptive concernant les surfaces gauches du second degré. G. Fouret. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 34.
497. Intersection d'une droite et de la surface réglée définie par trois directrices rectiligne. L. Lefevre. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 389.

Geometrie (höhere).

498. Ueber einen Satz aus der Polarentheorie der algebraischen Curven. Ad. Schwarz. Wien. Akad.-Ber. XCV, 42.
499. Die Hesse'sche Curve in rein geometrischer Behandlung. E. Kötter. Mathem. Annal. XXXIV, 123.

500. Ueber conjugirte Curven. O. Schlesinger. Mathem. Annal. XXXIII, 315. [Vergl. Bd. XXXIII, Nr. 438.]
501. Ueber elliptische Curven in der Ebene. O. Schlesinger. Mathem. Annal. XXXIII, 444; XXXIV, 463. [Vergl. Bd. XXXIV, Nr. 401 u. 565.]
502. Ueber hyperelliptische Curven. K. Bobek. Wien. Akad.-Ber. XCV, 31. [Vergl. Bd. XXXIII, Nr. 674.]
503. Sur les cubiques nodales circulaires. Cl. Servais. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 197.
504. Zur Theorie der rationalen Curven 4. Ordnung. G. Kohn. Wien. Akad.-Ber. XCV, 318.
505. Ueber die Berührungskegelschnitte und Doppeltangenten der allgemeinen Curve 4. Ordnung. G. Kohn. Wien. Akad.-Ber. XCVII, 325, 1381.
506. Ueber die zu einer allgemeinen Curve 4. Ordnung adjungirten Curven 9. Classe. G. Kohn. Wien. Akad.-Ber. XCV, 338.
507. Ueber eine Gattung regelmässiger ebener Configurationen. J. de Vries Mathem. Annal. XXXV, 401.
508. Ueber die einem Vierseite harmonisch eingeschriebene Configuration 18_3. J. de Vries. Wien. Akad.-Ber. XCVII, 1307.
509. Ueber eine specielle Classe von Configurationen auf den elliptischen Normalcurven n^{ter} Ordnung. A. Schönflies. Mathem. Annal. XXXV, 527.
510. Ueber lineare Mannigfaltigkeiten projectiver Ebenenbüschel und collinearer Bündel oder Räume. Berl. Akad.-Ber. 1889, 833. [Vergl. Nr. 95.]
511. Ueber die linearen Transformationen des tetraedralen Complexes in sich. A. Ameseder. Wien. Akad.-Ber. XCVII, 627.
512. Ueber polyedrale Configurationen. J. de Vries. Mathem. Annal. XXXIV, 227.
513. Ueber projective Beziehungen, die durch vier Gerade im Raume gegeben sind. Fr. Krieg v. Hochfelden. Wien. Akad.-Ber. XCVII, 806.
514. Ueber Raumcurven m^{ter} Ordnung mit $(m-2)$-fachen Secanten. K. Bobek. Wien. Akad.-Ber. XCV, 349.
515. Ueber Raumcurven 5. Ordnung vom Geschlecht 1. Em. Weyr. Wien. Akad.-Ber. XCVII, 592. [Vergl. Bd. XXXIII, Nr. 449.]
Vergl. Elliptische Transcendenten 456. Invariantentheorie 570. Kegelschnitte. Kinematik. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung.

Geschichte der Mathematik.

516. Ueber den Stern mîšrî der Assyrer. E. Mahler. Wien. Akad.-Ber. XCV, 299.
517. Ueber eine in einer syrischen Grabinschrift erwähnte Sonnenfinsterniss von 1315. Ed. Mahler. Wien. Akad.-Ber. XCV, 359.
518. Duodecimalsystem und Decimalsystem in den Busszahlen der fränkischen Volksrechte. H. Brunner. Berl. Akad.-Ber. 1889, 1039.
519. The investigation by Wallis of his expression for π. Cayley. Quart. Journ. math. XXIII, 165.
520. Angelo Genocchi † 7. III. 1889. Hermite. Compt. rend. CVIII, 475.
521. P. du Bois Reymond † 7. IV. 1889. Hermite. Compt. rend. CVIII, 887.
522. Nekrolog von Paul du Bois-Reymond. H. Weber. Math. Annal. XXXV, 457.
523. G. Halphen † 23. V. 1889. Hermite. Compt. rend. CVIII, 1079; CIX, 934.
524. Gilberto Govi † VII. 1889. J. Bertrand. Compt. rend. CIX, 131.
525. Phillips † 14. XII. 1889. Hermite. Compt. rend. CIX, 927, 996.

Gleichungen.

526. Ueber den Gordan'schen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra. F. v. Dalwigk. Mathem. Annal. XXXIV, 158.
527. Ein Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra. F. Mertens. Wien. Akad.-Ber. XCVII, 1505.
528. Les discriminants des résolvantes de Galois. F. Brioschi. Compt. rend. CVIII, 878.
529. Zur Auflösung von Gleichungen. Fr. Meyer. Mathem. Annal. XXXIII, 511.
530. Sur les équations réciproques. Ch. de Comberousse. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 27.
531. Zurückführung einer beliebigen algebraischen Gleichung auf eine Kette von Gleichungen. Mathem. Annal. XXXIV, 26.
532. The eliminant of two binary quantics. P. A. Mac Mahon. Quart. Journ. math. XXIII, 139.
533. Sur le nombre des racines communes à plusieurs équations simultanées. E. Picard. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 5.
Vergl. Elliptische Transcendenten 458.

H.

Hydrodynamik.

534. On the critical mean curvature of liquid surfaces of revolution. A. W. Rücker. Phil. Mag. Ser. 5, XXIII, 35.
535. Ueber ein neues Ausflussproblem. E. Kobald. Wien. Akad.-Ber. XCVI, 592.
536. Ueber die Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit. H. Minkowski. Berl. Akad.-Ber. 1888, 1095.
537. Equations of the stream lines due to the motion of an ellipsoid in perfect and in viscous fluid. R. A. Hermann. Quart. Journ. math. XXIII, 378.
538. The oscillations of a mass of gravitating liquid in the form of an elliptic cylinder which rotates as if rigid about its axis. A. E. H. Love. Quart. Journ. math. XXIII, 158. [Vergl. Bd. XXXI, Nr. 518.]
539. On the motion of a liquid elliptic cylinder under its own attraction. A. E. H. Love. Quart. Journ. math. XXIII, 153.
540. On Dedekind's theorem concerning the motion of a liquid ellipsoid under its own attraction. A. E. H. Love. Phil. Mag. Ser. 5, XXV, 40.
541. On the maintenance of vibrations by forces of double frequency and on the propagation of waves through a medium endowed with a periodic structure. Rayleigh. Phil. Mag. Ser. 5, XXIV, 145.
542. On the motion of viscous incompressible fluids. A. N. Whitehead. Quart. Journ. math. XXIII, 78, 143.
543. On a law of distribution of molecular velocities amongst the molecules of a fluid. J. Buchanan. Phil. Mag. Ser. 5, XXV, 165.
544. Complément à la théorie des deversoirs en mince paroi, qui s'étendent à toute la largeur du lit d'un cours d'eau. J. Boussinesq. Compt. rend. CIX, 515, 541. [Vergl. Bd. XXXIII, Nr. 492.]
545. On stationary waves in flowing water. Will. Thomson. Phil. Mag. Ser. 5, XXIII, 52. [Vergl. Bd. XXXIV, Nr. 436.]
546. On the front and rear of a free procession of waves in deep water. Will. Thomson. Phil. Mag. Ser. 5, XXIII, 113.
547. On the waves produced by a single impulse in water of any depth, or in a dispersive medium. Will. Thomson. Phil. Mag. Ser. 5, XXIII, 252.
548. On the formation of coreless vortices by the motion of a solid through an inviscid incompressible fluid. Will. Thomson. Phil. Mag. Ser. 5, XXIII, 255.
549. On the stability of steady and of periodic fluid motion. Will. Thomson. Phil. Mag. Ser. 5, XXIII, 459, 529; XXIV, 188, 272.
550. On the propagation of laminar motion through a turbulently moving inviscid liquid. Will. Thomson. Phil. Mag. Ser. 5, XXIV, 342.
551. Démonstration d'une formule relative à la capillarité. L. Lévy. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 111.
552. Sur les propriétés physiques de la couche superficielle libre d'un liquide et de la couche de contact d'un solide et d'un liquide. Van der Mensbrugghe. Compt. rend. CIX, 295, 607.
553. On the theory of electric endosmose and other allied phenomena, and on the existence of a sliding coefficient for a fluid in contact with a solid. H. Lamb. Phil. Mag. Ser. 5, XXV, 52.
554. Ueber atmosphärische Bewegungen. H. v. Helmholtz. Berl. Akad.-Ber. 1889, 761. [Vergl. Nr. 5.]
555. Zur Wellentheorie gasartiger Mittel. A. V. Bäcklund. Mathem. Annal. XXXIV, 371.
556. On the equilibrium of a gas under its own gravitation only. Will. Thomson. Phil. Mag. Ser. 5, XXIII, 287.
557. Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen endlicher Schwingungsweite. O. Tumlirz. Wien. Akad.-Ber. XCV, 367.

Vergl. Geodäsie.

Hyperbel.

558. Propriétés de l'hyperbole équilatère, qui a pour sommets les points, dans lesquels deux cercles donnés se coupent. F. Farjon. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 187.

Hyperboloid.

559. Ueber eine Strahlencongruenz beim Hyperboloid. E. Waelsch. Wien. Akad.-Ber. XCV, 781.

Hyperelliptische Transcendenten.

560. Grundzüge einer allgemeinen Systematik der hyperelliptischen Functionen I. Ordnung. F. Klein & H. Burkhardt. Mathem. Annal. XXXV, 198.
Vergl. Differentialgleichungen 402. Elliptische Transcendenten 454. Geometrie (höhere) 502.

I.

Imaginäres.

561. Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Zahlen. Friedr. Schur. Mathem. Annal. XXXIII, 49.
Vergl. Bestimmte Integrale 374, 375. Zahlentheorie 746.

Invariantentheorie.

562. Ueber die Endlichkeit des Invariantensystems für binäre Grundformen. D. Hilbert. Mathem. Annal. XXXIII, 223. — A. Cayley ebenda XXXIV, 319. — Jul. Petersen ebenda XXXV, 110.
563. Eine besondere Art von Covarianten bildender Operation. Ed. Wiltheiss. Mathem. Annal. XXXV, 433.
564. Die geometrische Deutung von Invarianten räumlicher Colineationen und Reciprocitäten. P. Muth. Mathem. Annal. XXXIII, 493.
565. Die Decomposition der Systeme von n^2 Grössen und ihre Anwendung auf die Theorie der Invarianten. L. Kronecker. Berl. Akad.-Ber. 1889, 479, 603.
566. Ueber invariante Gebilde ternärer Formen. F. Mertens. Wien. Akad.-Ber. XCV, 942.
567. Ueber die invarianten Gebilde einer ternären cubischen Form. F. Mertens. Wien. Akad.-Ber. XCVII, 437.
568. Invariante Gebilde von Nullsystemen. F. Mertens. Wien. Akad.-Ber. XCVII, 519.
569. Simultaneous reciprocants. A. Berry. Quart. Journ. math. XXIII, 260.
570. Sur l'invariant différentiel des figures congruentes. J. Andrade. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 150.
571. On the theory of forms in the integration of linear differential equations of the second order. A. R. Forsyth. Quart. Journ. math. XXIII, 45.
Vergl. Differentialgleichungen 396, 397. Formen. Substitutionen 698.

Irrationalzahlen.

572. Zur Weierstrass-Cantor'schen Theorie der Irrationalzahlen. Eberh. Illigens. Math. Annal. XXXIII, 155; XXXV, 451. — G. Cantor ebenda XXXIII, 476.

K.

Kegelschnitte.

573. On the generalised problem of contacts. H. M. Jeffery. Quart. Journ. math. XXIII, 358.
574. Démonstration du théorème de Pascal. A. Renon. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 307.
575. Sur une généralisation du théorème de Pascal donnant 9 points en ligne droite. Aubert. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 529.
576. Ueber Quetelet's Focalcurven. C. Pelz. Wien. Akad.-Ber. XCVII, 1411.
577. Sur les coniques inscrites dans le quadrilatère formé par les tangentes communes à un cercle et une parabole. G. Leinekugel. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 288, 298. — E. Marchand ibid. 331.
578. Sur le lieu des foyers des coniques qui passent par quatre points d'un cercle. H. Faure. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 98.
579. Sur les points d'intersection d'une conique fixe avec une conique mobile passant par deux points fixes. P. Appell. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 48.
580. Sur deux coniques d'excentricité donnée et circonscrites à un triangle donné dont les axes homologes font un angle donné. E. Borel. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 495.
581. Étude géométrique d'une famille de coniques. Ch. Fabry. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 56.
582. Einen geraden Kreiskegel nach gegebenem Kegelschnitte zu schneiden. Fr. Ruth. Wien. Akad.-Ber. XCV, 240.

583. Recherches sur les surfaces qui sont au même temps lieux de coniques et enveloppes de cônes du second degré. Blutel. Compt. rend. CVIII, 496.
Vergl. Ellipse. Hyperbel. Kreis. Parabel.

Kettenbrüche.

584. Calcul direct des termes d'une réduite de rang quelconque d'une fraction continue périodique. M. d'Ocagne. Compt. rend. CVIII, 499.
585. Sur une application de la théorie des fractions continues algébriques. S. Pincherle. Compt. rend. CVIII, 888.
586. Sur les fractions continues qui expriment les deux racines d'une équation quadratique. Sylvester. Compt. rend. CVIII, 1037, 1084.
587. Sur la valeur d'une fraction continue finie et purement périodique. Sylvester. Compt. rend. CVIII, 1195.
588. Sur un développement en fraction continue. Stieltjes. Compt. rend. CVIII, 1297.

Kinematik.

589. Sur un déplacement particulier d'une figure de forme invariable. A. Mannheim. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 308.
590. Note sur un système de deux courbes planes. A. Mannheim. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 325.
591. Sur le déplacement d'une droite. Balitrand. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 526.
592. Ueber Gruppen von Transformationen des Raumes in sich. A. Schönflies. Mathem. Annal. XXXIV, 172. [Vergl. Bd. XXXIII, Nr. 529.]
Vergl. Ellipse 449.

Kreis.

593. Géométrie du compas. J. Colette. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 512.
594. On the circles, which are described about the four circles, escribed and inscribed in a given plane triangle, taken by triads. H. M. Jeffery. Quart. Journ. math. XXIII, 180.
595. Tangente commune à deux circonférences circonscrites à deux triangles passant chacun par deux points fixes et un point variable. Gambey. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 312.
Vergl. Sphärik.

M.

Magnetismus.

596. On the formulae of Bernoulli and of Haecker for the lifting-power of magnets. S. P. Thompson. Phil. Mag. Ser. 5, XXVI, 70.
597. Ueber die Herstellung intensiver magnetischer Felder. J. Stefan. Wien. Akad.-Ber. XCVII, 176.
598. Sur l'énergie potentielle magnétique et la mesure des coefficients d'aimantation. Gouy. Compt. rend. CIX, 935.
Vergl. Optik 679, 680.

Maxima und Minima.

599. Theorie der Maxima und Minima einer Function von zwei Variabeln. L. Scheeffer. Mathem. Annal. XXXV, 541.
600. On the division of space with minimum partitional area. Will. Thomson. Phil. Mag. Ser. 5, XXIV, 503.
Vergl. Oberflächen 634. Potential 676. Variationsrechnung.

Mechanik.

601. The laws of motion. R. F. Muirhead. Phil. Mag. Ser. 5, XXIII, 473.
602. On a theorem of Jacobi in dynamics. E. J. Routh. Quart. Journ. math. XXIII, 34. [Vergl. Bd. XXXIV, Nr. 182.]
603. Theorie der pendelartigen Schwingungen. M. Thiesen. Berl. Akad.-Ber. 1889, 277.
604. Les transformations isogonales en Mécanique. E. Goursat. Compt. rend. CVIII, 446. — G. Darboux ibid. 449.
605. De l'homographie en mécanique. Appell. Compt. rend. CVIII, 224.
606. Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation. J. v. Hepperger. Wien. Akad.-Ber. XCVII, 337.
607. Sur la théorie de la déformation infiniment petite d'un milieu. E. Beltrami. Compt. rend. CVIII, 502.

608. Sur une réduction du problème des n corps qui conserve $\frac{n}{2}$ ou $\frac{n-1}{2}$ distances mutuelles. Andrade. Compt. rend. CVIII, 226, 280.
609. Tangente en un point d'une courbe remarquable. J. Pomey. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 527.
610. Lieu des points d'un solide qui partagent avec le centre de gravité l'une de ses propriétés dynamiques. A. de Saint-Germain. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 138.
611. Description d'herpolhodies. A. de Saint-Germain. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 13.
612. Sur le mouvement d'un point matériel sur une sphère. G. Kobb. Compt. rend. CVIII, 559.
613. Sur les accélérations d'ordre quelconque de points d'un corps solide dont un point est fixe. Ph. Gilbert. Compt. rend. CVIII, 92.
614. Formules de la dissémination du mouvement transversal dans une plaque plane indéfinie. J. Boussinesq. Compt. rend. CVIII, 639.
615. Ueber Membrane, deren beide Hauptspannungen durchaus gleich sind. Ed. Aulinger. Wien. Akad.-Ber. XCV, 170.
616. Propositions du congrès international de Mécanique appliquée. Phillips. Compt. rend. CIX, 491. — H. Resal ibid. 523.
617. To what order of lever does the oar belong? T. K. Abbott. Phil. Mag. Ser. 5, XXIII, 58. — F. A. Tarleton ibid. 222.
618. Sur le mouvement d'un fil dans un plan fixe. G. Floquet. Compt. rend. CVIII, 661.
619. Sur deux appareils nouveaux de mécanique. G. Darboux & G. Koenigs. Compt. rend. CIX, 49.
620. De la marche chez les animaux quadrupèdes. C. Pagès. Compt. rend. CVIII, 194.
621. Des effets d'un vent intermittent dans le vol à voile. Marey. Compt. rend. CIX, 551.
622. Sur les transmissions à grande vitesse. H. Léauté. Compt. rend. CIX, 52.

Vergl. Astronomie. Elasticität. Elektricität. Geodäsie. Hydrodynamik. Kinematik. Magnetismus. Molekularphysik. Optik. Potential. Wärmelehre.

Mehrdimensionale Geometrie.

623. Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques. C. Segre. Mathem. Annal. XXXIV, 1. [Vergl. Bd. XXXIII, Nr. 568.]
624. Ueber die regelmässigen Punktgruppen in Räumen höherer Dimension und die zugehörigen linearen Substitutionen mehrerer Variabeln. O. Biermann. Wien. Akad.-Ber. XCV, 523.

Mittelwerth.

625. Sur certaines moyennes arithmétiques des fonctions d'une variable complexe. A. Gutzmer. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 101.

Molecularphysik.

626. On the law of molecular force. W. Sutherland. Phil. Mag. Ser. 5, XXIV, 113, 168. [Vergl. Bd. XXXIV, Nr. 579.]
627. Sur la tactique moléculaire de la macle artificielle du spath d'Islande produite par Baumhauer au moyen d'un conteau. Will. Thomson. Compt. rend. CIX, 333.
628. Sur l'équilibre des atomes et sur l'élasticité des solides, dans la théorie boscovichienne de la matière. Will. Thomson. Compt. rend. CIX, 337.
629. Sur une constitution gyrostatique adynamique pour l'éther. Will. Thomson. Compt. rend. CIX, 453.

O.

Oberflächen.

630. Beiträge zur Flächentheorie. E. Waelsch. Wien. Akad.-Ber. XCVII, 164.
631. Algebraische Untersuchungen über Flächen mit gemeinschaftlicher Curve. W. End. Mathem. Annal. XXXV, 82.
632. Sur les lignes asymptotiques et les systèmes conjugués tracés sur une surface. Lelieuvre. Compt. rend. CIX, 792. [Vergl. Bd. XXXIV, Nr. 513.]

633. Sur le plan asymptote et les cylindres asymptotes d'une surface. Ch. Biehler. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 536.
634. Sur la surface minima réelle qui admet pour ligne géodésique une cycloide donnée. Gambey. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 355.
635. Sur le caractère auquel se reconnait l'équation différentielle d'un système géodésique. R. Liouville. Compt. rend. CVIII, 495.
636. Sur les surfaces à double génération circulaire et sur les surfaces doublement enveloppées par des quadriques. G. Koenigs. Compt. rend. CIX, 364.
637. Zur Classification der Flächen 3. Ordnung. K. Bobek. Wien. Akad.-Ber. XCVI, 355.
638. Ueber Flächen 3. Ordnung mit Knotenpunkten. G. Kohn. Wien. Akad.-Ber. XCVI, 1298.
639. A symmetrical system of equations of the lines on a cubic surface which has a conical point. H. W. Richmond. Quart. Journ. math. XXIII, 170.
640. Ueber die rationalen Flächen 4. Ordnung. M. Nöther. Mathem. Annal. XXXIII, 546.
641. Ueber die Singularitäten einer Gattung von Rückungsflächen 4. Ordnung. A. Sucharda. Wien. Akad.-Ber. XCVII, 1083.
642. Équation générale des surfaces réglées dont la ligne de striction satisfait à certaines conditions. E. Amigues. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 77. — E. Cesaro ibid. 445.
643. Analytische Darstellung der kürzesten Linien auf allen abwickelbaren Flächen. A. Puchta. Wien. Akad.-Ber. XCVII, 1269.
644. Ueber das Maximalgeschlecht von windschiefen Flächen gegebener Ordnung. K. Bobek. Wien. Akad.-Ber. XCVI, 1024.
645. Extension du problème d'Euler sur l'équation $ds^2 = dx^2 + dy^2$ au cas d'une surface quelconque. G. Koenigs. Compt. rend. CVIII, 221.
646. Sur un problème de la théorie des surfaces. L. Raffy. Compt. rend. CVIII, 493; CIX, 609, 661. — G. Koenigs ibid. CIX, 565, 639.
647. Eine charakteristische Eigenschaft der Flächen, deren Linienelement ds durch $ds^2 = (\varkappa(q_1) + \lambda(q_2)) \cdot (dq_1^2 + dq_2^2)$ gegeben wird. P. Stäckel. Mathem. Annal. XXXV, 91.

Vergl. Abbildung. Kegelschnitte 583. Mehrdimensionale Geometrie. Optik 654.

Oberflächen zweiter Ordnung.

648. Ueber das Normalensystem und die Centrafläche der Flächen zweiter Ordnung. E. Waelsch. Wien. Akad.-Ber. XCV, 549; XCVII, 583.
649. Sur les plans diamétraux dans les surfaces du second ordre. Ch. Biehler. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 247.
650. Longueur des axes d'une section plane d'une quadrique, en coordonnées obliques. Et. Pomey. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 88.
651. Sur les surfaces du deuxième degré. Ch. Biehler. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 573.
652. Zur Gruppe der acht harmonisch zugeordneten Flächen zweiten Grades. G. Kober. Mathem. Annal. XXXIII, 470.
653. Quadrique passant par deux points d'un ellipsoïde et les deux ellipses suivant lesquelles l'ellipsoïde est coupé par les plans polaires des deux points. Gambey. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 345.

Vergl. Ellipsoid. Geometrie (descriptive) 496. Hyperboloid.

Optik.

654. Bestimmung der optischen Wellenfläche aus einem ebenen Centralschnitte derselben. A. Brill. Mathem. Annal. XXXIV, 297.
655. Theoretical essay on the distribution of energy in the spectra of solids. M. W. Michelson. Phil. Mag. Ser. 5, XXV, 425.
656. An account of Cauchy's theory of reflection and refraction of light. J. Walker. Phil. Mag. Ser. 5, XXIII, 151.
657. On Cauchy's and Green's doctrine of extraneous force to explain dynamically Fresnel's kinematics of double refraction. Will. Thomson. Phil. Mag. Ser. 5, XXV, 116.
658. On the reflexion and refraction of light. Will. Thomson. Phil. Mag. Ser. 5, XXVI, 414, 500.
659. On the application of Sir Will. Thomson's theory of a contractile aether to double refraction, dispersion, metallic reflexion, and other optical problems. R. T. Glazebrook. Phil. Mag. Ser. 5, XXVI, 521.

660. Sur la double réfraction elliptique du quartz. F. Beaulard. Compt. rend. CVIII, 671; CIX, 140.
661. On the numerical relation between the index of refraction and the wave-length within a refractive medium and on the limit of refraction. T. P. Dale. Phil Mag. Ser. 5, XXV, 325.
662. On the reflexion of light at a twin plane of a crystal. Rayleigh. Phil. Mag. Ser. 5, XXVI, 241.
663. Sur le principe d'Huygens et sur la théorie de l'arc-en-ciel. Mascart. Compt. rend. CVIII, 16.
664. On the general laws of brightness of images. J. D. Everett. Phil. Mag. Ser. 5, XXV, 216.
665. On the coincidence of ray-directions in a biaxis crystal which correspond to certain conjugate planes of polarization. W. Walton. Quart. Journ. math. XXIII, 7.
666. Sur la polarisation elliptique par reflexion vitreuse. A. Potier. Compt. rend. CVIII, 599.
667. Sur les franges d'interférence. J. Macé de Lépinay. Compt. rend. CIX, 137, 893.
668. Sur l'achromatisme des interférences. Mascart. Compt. rend. CVIII, 591.
669. Relation entre le pouvoir rotatoire magnétique et l'entraînement des ondes lumineuses par la matière pondérable. A. Potier. Compt. rend. CVIII, 510.
670. Sur la polarisation rotatoire magnétique. Vaschy. Compt. rend. CVIII, 848.
Vergl. Astronomie 360, 361.

P.

Parabel.

671. Sur deux séries de paraboles. Lemaire. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 391.
672. Sur les coniques passant par un point commun à deux paraboles, dont chacune appartient à une série de ces courbes. J. Lemaire. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 503.
673. Somme des angles que font avec l'axe des x les 3 tangentes communes à 2 paraboles, dont chacune appartient à une série de ces courbes. E. Borel. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 509.

Partialbrüche.

674. Sur la décomposition des fractions rationnelles en fractions simples. V. Jamet. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 228.

Potential.

675. Existenzbeweise zur Theorie des Potentiales in der Ebene und im Raume. A. Harnack. Mathem. Annal. XXXV, 19.
676. Sur deux théorèmes curieux signalés par M. Poincaré. Andradez. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 435.
677. Potentiel d'un ellipsoïde homogène ou composé de couches homogènes concentriques, dont la densité varie d'une couche à la suivante. A. Astor. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 232.
678. Electro-magnetic and other images in spheres and planes. J. Larmor. Quart. Journ. math. XXIII, 94.
Vergl. Elektricität. Magnetismus. Wärmelehre.

R.

Rectification.

679. Expressions approchées du contour de l'ellipse et de la surface de l'ellipsoïde en fonction des deux moyennes arithmétique et géométrique des démi-axes. J. Boussinesq. Compt. rend. CVIII, 695. — G. Peano ibid. CIX, 960.
Vergl. Geschichte der Mathematik 519. Oberflächen 645, 646, 647.

Reihen.

680. Allgemeine Theorie der Divergenz und Convergenz von Reihen mit positiven Gliedern. Alfr. Pringsheim. Mathem. Annal. XXXV, 297.
681. Ueber die Convergenz der hypergeometrischen Reihen zweier und dreier Veränderlichen. J. Horn. Mathem. Annal. XXXIV, 544.

682. Sur les termes complémentaires de la formule sommatoire d'Euler et de celle de Stirling. N. Sonin. Compt. rend. CVIII, 725.
683. Sur le développement de la série de Fourier. T. J. Stieltjes. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 472.
684. Ueber die Darstellung einer willkürlichen Function durch die Fourier-Bessel-schen Functionen. A. Harnack. Mathem. Annal. XXXV, 41.
685. Sur un point de la théorie des séries. A. Gutzmer. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 22.
686. Sur le développement en séries des fonctions implicites. Worontzoff. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 140.
687. Ueber eine summatorische Function. L. Kronecker. Berl. Akad.-Ber. 1889, 867. [Vergl. Bd. XXXII, Nr. 346.]
688. Zum Lagrange'schen Reversionstheorem. O. Stolz. Wien. Akad.-Ber. XCV, 199.
689. Ueber die Lambert'sche Reihe. O. Stolz. Wien. Akad.-Ber. XCV, 659.
690. Développement de y en série suivant les puissances croissantes de m, étant donnée la relation $\sin(x-y) = m \sin(x+y)$ et $m < 1$. Worontzoff. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 143. — Rouché ibid. 148.
691. Sur les séries $\Sigma \frac{1}{k^2}$, $\Sigma \frac{1}{k^3}$. A. Markoff. Compt. rend. CIX, 934.

Vergl. Cylinderfunctionen 384. Differentialgleichungen 401. Elementararithmetik 446. Functionen 482.

S.

Singularitäten.

692. Allgemeine Sätze über die scheinbaren Singularitäten beliebiger Raumcurven. Ad. Kneser. Mathem. Annal. XXXIV, 204. [Vergl. Bd. XXXIV, Nr. 448.]

Vergl. Oberflächen.

Sphärik.

693. On the circles, which may be described about the eight small circles of a sphere, taken by triads, which are inscribed in the triangles formed by three planes intersecting in the centre. H. M. Jeffery. Quart. Journ. math. XXIII, 1, 98.

Stereometrie.

694. Sur les polyèdres. C. Bourlet. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 366.

Substitutionen.

695. Ueber die Transitivitätsgrenze der Substitutionengruppen, welche die alternirende ihres Grades nicht enthalten. Alfr. Bochert. Mathem. Annal. XXXIII, 572. [Vergl. Bd. XXXIII, Nr. 655.]
696. Ueber die Zahl der verschiedenen Werthe, die eine Function gegebener Buchstaben durch Vertauschung derselben erlangen kann. Alfr. Bochert. Mathem. Annal. XXXIII, 584.
697. Ueber den Söderberg'schen Beweis des Galois'schen Fundamentalsatzes. O. Hölder. Mathem. Annal. XXXIV, 454.
698. The differential equation of the most general substitution of one variable. P. A. Mac Mahon. Phil. Mag. Ser. 5, XXIII, 542.

T.

Thetafunctionen.

699. Die partiellen Differentialgleichungen der hyperelliptischen Thetafunctionen. Ed. Wiltheiss. Mathem. Annal. XXXIII, 267.
700. Ueber Resultanten und Discriminanten von ϑ-Functionen höheren Grades. O. Schlesinger. Mathem. Annal. XXXIII, 411.
701. Die complexe Multiplication der Thetafunctionen. W. Scheibner. Mathem. Annal. XXXIV, 465.
702. Ueber den Zusammenhang der Thetafunctionen mit den elliptischen Integralen. W. Scheibner. Mathem. Annal. XXXIV, 494.

Vergl. Functionen 476.

Topologie.

703. Ueber den Zusammenhang gewisser topologischer Thatsachen mit neuen Sätzen der höheren Arithmetik und dessen theoretische Bedeutung. O. Simony. Wien. Akad.-Ber. XCVI, 191.
704. Ueber jene Gebilde, welche geschlossenen, aus drei tordirten Streifen hergestellten Flächen durch gewisse Schnitte entspringen. J. L. Schuster. Wien. Akad.-Ber. XCVII, 217.

Transformationsgruppen.

705. Neue Begründung der Theorie der endlichen Transformationsgruppen. Friedr. Schur. Mathem. Annal. XXXV, 161.
706. Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen. W. Killing. Mathem. Annal. XXXIII, 1; XXXIV, 57. [Vergl. Bd. XXXIV, Nr. 499.]
707. Erweiterung des Begriffes der Invarianten von Transformationsgruppen. W. Killing. Mathem. Annal. XXXV, 423.
708. Bestimmung der grössten Untergruppen derjenigen projectiven Gruppe, welche eine Gleichung zweiten Grades in n Veränderlichen invariant lässt. Herm. Werner. Mathem. Annal. XXXV, 113.

Trigonometrie.

709. Sur les équations auxquelles conduit le problème de la division des arcs en trigonometrie. Ch. Biehler. N. ann. math. Ser. 3, VIII, 552.

Vergl. Elliptische Transcendenten 455.

U.

Unbestimmte Formen.

710. Ueber Verallgemeinerung eines Satzes von Cauchy. O. Stolz. Math. Annal. XXXIII, 237.

V.

Variationsrechnung.

711. Ueber ein Kriterium des Grössten und Kleinsten in der Variationsrechnung. A. Winckler. Wien. Akad.-Ber. XCVII, 1065.
712. Zur Theorie der zweiten Variation. G. v. Escherich. Wien. Akad.-Ber. XCVII, 1416.
713. Rapport sur un Mémoire de Mr. E. Vicaire portant pour titre: Sur les propriétés communes à toutes les courbes qui remplissent une certaine condition de minimum ou de maximum. Jordan. Compt. rend. CVIII, 330.

W.

Wärmelehre.

714. On the foundations of the kinetic theory of gases. Tait. Phil. Mag. Ser. 5, XXIII, 141. [Vergl. Bd. XXXIV, Nr. 578.]
715. On an extension of Carnot's theorem. J. Parker. Phil. Mag. Ser. 5, XXV, 512.
716. Ueber das Gleichgewicht der lebendigen Kraft unter Gasmolekülen. A. Lorentz. Wien. Akad.-Ber. XCV, 115.
717. Sur les tentatives d'explication mécanique des principes de la Thermodynamique. H. Poincaré. Compt. rend. CVIII, 550.
718. Neuer Beweis zweier Sätze über das Wärmegleichgewicht unter mehratomigen Gasmolekülen. L. Boltzmann. Wien. Akad.-Ber. XCV, 153.
719. Ueber einige Fragen der kinetischen Gastheorie. L. Boltzmann. Wien. Akad.-Ber. XCVI, 891. [Vergl. Bd. XXXIII, Nr. 699.]
720. On the assumptions necessary for the theoretical proof of Avogadro's law. L. Boltzmann. Phil. Mag. Ser. 5, XXIII, 305; XXV, 81. — Tait ibid. XXIII, 433; XXV, 172.
721. On the diffusion of gases. S. H. Burbury. Phil. Mag. Ser. 5, XXIV, 471; XXV, 129. — Tait ibid. XXV, 38.
722. Ueber das Gleichgewicht der lebendigen Kraft zwischen progressiver und Rotations-Bewegung bei Gasmolekülen. L. Boltzmann. Berl. Akad.-Ber. 1888, 1395.
723. Ueber das Verhalten der Gase zu den Gesetzen von Mariotte und Gay-Lussac. C. Puschl. Wien. Akad.-Ber. XCVI, 54.

724. Ueber das Verhalten des Wasserstoffs zum Mariotte'schen Gesetze. C. Puschl. Wien. Akad.-Ber. XCVI, 313.
725. Ueber das Verhalten der Gase zum Mariotte'schen Gesetze bei sehr hohen Temperaturen. C. Puschl. Wien. Akad.-Ber. XCVII, 142.
726. Ueber den höchsten Siedepunkt der Flüssigkeiten. C. Puschl. Wien. Akad.-Ber. XCVI, 65.
727. Ueber die specifische Wärme und die inneren Kräfte des Wassers. C. Puschl. Wien. Akad.-Ber. XCVII, 1118.
728. Ueber die Zusammendrückbarkeit der Gase und der Flüssigkeiten. C. Puschl. Wien. Akad.-Ber. XCVI, 1028.
729. Ueber die Wärmeausdehnung der Flüssigkeiten. C. Puschl. Wien. Akad.-Ber. XCVI, 1131.
730. Image mécanique des phénomènes thermodynamiques. Chaperon. Compt. rend. CIX, 852.
731. Sur une loi générale relative aux effets des transformations réversibles. Gouy. Compt. rend. CVIII, 341.
732. Sur les transformations et l'équilibre en Thermodynamique. Gouy. Compt. rend. CVIII, 507.
733. Sur la transformation et l'équilibre en Thermodynamique. P. Duhem. Compt. rend. CVIII, 666.
734. Sur l'énergie utilisable et le potentiel thermodynamique. Gouy. Compt. rend. CVIII, 794.
735. Sur la correspondance des équations caractéristiques des gaz. Lad. Natanson. Compt. rend. CIX, 855.
736. Sur la loi de déformation par refroidissement d'une masse fluide homogène en rotation. A. Romieux. Compt. rend. CVIII, 337.

Vergl. Elektricität 438, 439, 440, 441. Geodäsie.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

737. L'art de faire parler les statistiques. Delauney. Compt. rend. CVIII, 909.
738. Sur une question du calcul des probabilités. E. Mayer. Compt. rend. CVIII, 391.
739. On discordant observations. F. Y. Edgeworth. Phil. Mag. Ser. 5, XXIII, 364.
740. A new method of reducing observations relating to several quantities. F. Y. Edgeworth. Phil. Mag. Ser. 5, XXIV, 222; XXV, 184.
741. On Mr. Edgeworth's method of reducing observations relating to several quantities. H. H. Turner. Phil. Mag. Ser. 5, XXIV, 466.
742. The empirical proof of the law of errors. F. Y. Edgeworth. Phil. Mag. Ser. 5, XXIV, 330.
743. The choice of means. F. Y. Edgeworth. Phil. Mag. Ser. 5, XXIV, 268.
744. Généralisation de la loi de Makeham. A. Quiquet. Compt. rend. CIX, 794.
745. On random scattering of points on a surface. J. Kleiber. Phil. Mag. Ser. 5, XXIV, 439.

Z.

Zahlentheorie.

746. Zur Theorie der allgemeinen complexen Zahlen und der Modulsysteme. L. Kronecker. Berl. Akad.-Ber. 1888, 983. [Vergl. Nr. 321.]
747. Die Bedingungen für die Existenz einer bestimmten Anzahl von Wurzeln einer Congruenz. L. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. XCV, 165.
748. Ueber Congruenzen. L. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. XCV, 610.
749. Ueber primitive Congruenzwurzeln. L. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. XCV, 843.
750. Ueber das quadratische Reciprocitätsgesetz. L. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. XCVII, 427.
751. Sur les caractères cubiques et biquadratiques. A. E. Pellet. Compt. rend. CVIII, 609.
752. Ueber einen Satz von Euler-Brioschi-Genocchi. A. Puchta. Wien. Akad.-Ber. XCVI, 110.
753. Ueber Zahlensysteme. L. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. XCV, 618.
754. Ueber die Anzahl der Primzahlen. L. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. XCV, 94; XCVII, 374.

755. Zwei Eigenschaften der Primzahl 3. L. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. XCVII, 271.
756. Ueber gewisse binäre Formen, durch welche sich keine Potenzen von Primzahlen darstellen lassen. L. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber XCVII, 368.
757. Ueber ein Theorem des Herrn Pépin. L. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. XCV, 838.
758. Ueber ein Theorem des Herrn Bugajeff. L. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. XCV, 219.
759. Arithmetische Notiz. L. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. XCV, 291.
760. Zahlentheoretische Notiz. L. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. XCVII, 420.
761. Ueber ein arithmetisches Theorem des Herrn J. Liouville. L. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. XCV, 606.
762. Ueber eine specielle zahlentheoretische Function. L. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. XCVI, 607.
763. Arithmetische Note. L. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. XCVI, 491.
764. Ueber ein Theorem des Herrn E. de Jonquières. L. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. XCVII, 82.
765. Sur le développement en série de certaines fonctions arithmétiques. Lerch. Compt. rend. CVIII, 171.
766. Sur un théorème arithmétique. R. Lipschitz. Compt. rend. CVIII, 489.

Vergl. Formen. Imaginäres. Topologie 703.

Zeitschrift

für

Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.

Fünfunddreissigster Jahrgang.

Supplement.

Mit in den Text gedruckten Figuren und vier lithographirten Tafeln.

Leipzig,
Verlag von B. G. Teubner.
1890.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

ÜBER DIE SYSTEME

DERJENIGEN KEGELSCHNITTE

DIE

EINE BICIRCULARE CURVE VIERTER ORDNUNG VIERMAL BERÜHREN.

VON

DR. PHIL. **OTTO RICHTER**

IN LEIPZIG.

Inhaltsverzeichniss.

Figuren:

Ueber die Systeme derjenigen Kegelschnitte, die eine bicirculare Curve vierter Ordnung viermal berühren.*

Von

Dr. phil. Otto Richter
in Leipzig.

Hierzu Taf. I—IV.

Vorbemerkungen.

In meiner Arbeit über die Kreisfusspunktcurven** ist unter anderen Sätzen auch der folgende enthalten:

„Es sei ein Kreis mit dem Mittelpunkte K gegeben, auf ihm zwei Gegenpunkte (Endpunkte eines Durchmessers) E und F. Eine Ellipse Q, für welche die Summe oder Differenz der Halbaxen gleich dem Durchmesser 2ϱ des Kreises ist, bewege sich so, dass ihre Axen beständig durch E bez. F gehen (so dass ihr Mittelpunkt den Kreis selbst durchläuft). Dann wird ihre Peripherie beständig durch einen festen Punkt D auf der Geraden EF gehen und eine Kreisfusspunktcurve einhüllen, deren Doppelpunkt D ist. Die Berührungspunkte werden von gleichseitigen Hyperbeln durch die Brennpunkte der Eingehüllten ausgeschnitten."

Der Beweis für diesen Satz ist leicht rein synthetisch zu führen. Nimmt man bei jener Bewegung der Ellipse als Veränderliche den Winkel φ, welchen die durch E gehende Ellipsenaxe mit EF bildet, so lässt sich der Beweis auch analytisch geben, indem man aus der Gleichung der Ellipse und ihres Differentialquotienten nach φ diese Veränderliche eliminirt. Bei dem Versuche, diese Rechnung wirklich durchzuführen, bemerkte ich, dass sich eine weit allgemeinere Bewegung mit denselben Mitteln ohne Schwierigkeit verfolgen lässt, wobei nicht mehr eine Kreisfusspunktcurve, sondern eine allgemeine bicirculare Curve vierter Ordnung eingehüllt wird. Jene Verallgemeinerung beruht erstens darauf, dass man auch die Hyperbeln in den Kreis der Betrachtungen zieht, sodann aber vor allen Dingen darin, dass man den Kegelschnitt Q nicht mehr constant lässt, son-

* S. die Berichte d. Königl. sächs. Gesellsch. d. Wissensch. 1890, Sitzung vom 13. Januar.

** Vergl. Zeitschr. f. Math. u. Phys., Bd. 34 S. 338 flgg.

dern festsetzt, seine Halbaxen a, b seien bei der Bewegung nach folgendem Gesetze veränderlich:

$$1)\quad a = \alpha\sqrt{1-\lambda\cos 2\varphi - \tau\sin 2\varphi},\quad b = \beta\sqrt{1-\lambda\cos 2\varphi - \tau\sin 2\varphi},$$

wobei unter α, β, λ, τ Constanten zu verstehen sind. Alle Kegelschnitte eines solchen Systemes sind einander ähnlich. Hierzu ist zu bemerken, dass ich dabei, wie es üblich ist, solche Kegelschnitte ähnlich nenne, deren Asymptotensysteme congruent sind, bei reellen Hyperbeln also ohne Rücksicht darauf, in welchen Asymptotenfeldern sie liegen.

Die Ergebnisse, die hier für die bicircularen Curven vierter Ordnung abgeleitet sind, übertragen sich mit Hilfe einer Collineation natürlich auf die allgemeinen Curven vierter Ordnung vom Geschlechte 1.

Von den 15 eigentlichen Systemen viermal berührender Kegelschnitte bei einer gegebenen Curve vierter Ordnung vom Geschlechte 1 sind hier nur zwölf behandelt, von denen jedes vier Doppeltangenten oder zwei Doppeltangentenpaare enthält, und die überdies paarweise so zusammengehören, dass je zwei dieselben vier Doppeltangenten enthalten. Aehnliche Sätze bestehen bekanntlich für die Curven vierter Ordnung vom Geschlechte 2 und 3.

In dem besondern Falle der Curven vom Geschlechte 1 ist es mir gelungen, diese „Systempaare" noch durch eine andere umkehrbare projectivische Beziehung zu kennzeichnen (s. unten), und ohne Zweifel werden ähnliche Beziehungen zwischen zusammengehörenden Systemen auch bei Curven höheren Ranges nachzuweisen sein.

Was die drei noch übrigen Systeme betrifft, so sind sie für den Fall, wo die Curve in zwei Kegelschnitte zerfällt, längst bekannt;* einige Sätze, die neu zu sein scheinen, sind darüber im Anschlusse an das Beispiel vom Kreispaare mitgetheilt. Aber auch bei einer beliebigen Curve vierter Ordnung vom Geschlechte 1 ist es leicht, sich eine genaue Vorstellung davon zu machen. Ich theile hier blos die Ergebnisse mit: Eines von diesen drei Systemen enthält fünf zerfallende Kegelschnitte, nämlich die vier Doppeltangentenpaare und die doppelt gezählte Verbindungslinie der Doppelpunkte. Die Mittelpunkte der Kegelschnitte dieses Systemes erfüllen eine Curve vierter Ordnung mit vier Doppelpunkten. Diese zerfällt in die Verbindungsgerade der Doppelpunkte der gegebenen Curve und eine Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt. Von den beiden anderen Systemen hat jedes vier zerfallende Kegelschnitte, nämlich zwei Paare von Doppeltangenten und zwei Paare von den Tangenten, die von den Doppelpunkten aus sich an die Curve ziehen lassen; in jedem bilden die Mittelpunkte der Kegelschnitte eine Curve vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten.

* Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie der Kegelschnitte, 4. Aufl. S. 423.

Was nun die im Folgenden behandelten oben genannten zwölf Berührkegelschnittssysteme betrifft, so mögen die Ergebnisse für eine bicirculare Curve vierter Ordnung $\mathfrak{C}$ vom Geschlechte 1 ausgesprochen, kurz zusammengestellt werden. Dabei ist die Gesammtheit der Kegelschnitte eines Systemes mit Σ, ein einzelner Kegelschnitt darin mit Q oder Q_1 bezeichnet.

Die Kegelschnitte Q des Systemes Σ haben folgende Eigenschaften:

1. Die Axen aller Kegelschnitte Q gehen durch zwei feste Punkte E, F.

2. Folglich erfüllen ihre Mittelpunkte denjenigen Kreis $\mathfrak{K}$, von dem EF ein Durchmesser ist, den „Mittelpunktskreis des Systemes Σ".

3. Der Mittelpunkt dieses Kreises $\mathfrak{K}$ ist die Mitte desjenigen Vierecks, das von den Doppelbrennpunkten der Curve $\mathfrak{C}$ gebildet wird.

4. Alle Kegelschnitte Q sind einander ähnlich.

Im Kreise $\mathfrak{K}$ lässt sich noch ein anderer Durchmesser $E'F'$ ziehen, mit Beziehung auf den das System Σ folgende Eigenschaft hat:

5. Je zwei Kegelschnitte Q, deren Mittelpunkte symmetrisch mit Beziehung auf $E'F'$ liegen, sind congruent.

Auch kann man Σ als aus Kegelschnittspaaren Q, Q_1 zusammengesetzt betrachten; es sollen nämlich zwei Kegelschnitte Q, Q_1 einander zugeordnet werden, deren Mittelpunkte Enden eines Durchmessers von $\mathfrak{K}$ sind. Je zwei solche Kegelschnitte sind parallelaxig, so dass ihre Schnittpunkte ein Kreisviereck bilden. Dann gilt:

6. Die allen diesen Kreisvierecken umgeschriebenen Kreise fallen mit einander zusammen. Der so bestimmte Kreis soll der Schnittpunktskreis des Systemes Σ heissen. Sein Mittelpunkt M liegt auf der Geraden EF.

7. Durch die acht Berührungspunkte eines Kegelschnittspaares Q, Q_1 kann eine gleichseitige Hyperbel $\mathfrak{H}$ gelegt werden. Alle diese Hyperbeln (entsprechend den verschiedenen Kegelschnittspaaren) sind concentrisch und bilden ein Büschel, dessen Grundpunkte **Brennpunkte** der Curve $\mathfrak{C}$ sind. Der gemeinsame Mittelpunkt der Hyperbeln $\mathfrak{H}$ mag G heissen; er liegt auf der Geraden EF.

8. E, F; G, M sind harmonische Punkte.

9. In dem Systeme Σ befinden sich auch zwei zerfallende, aus je zwei Doppeltangenten von $\mathfrak{C}$ zusammengesetzte Kegelschnitte, deren Mittelpunkte zufolge 5. symmetrisch zu einander mit Beziehung auf $E'F'$ liegen.

10. Ausserdem enthält das System Σ noch zwei andere zerfallende Kegelschnitte, die aber nicht aus eigentlichen Dop-

peltangenten, sondern aus Tangenten an die Curve von den Doppelpunkten aus bestehen. Die gegenseitigen Schnittpunkte dieser zwei zerfallenden Kegelschnitte sind die in 7. genannten Brennpunkte.

11. Die Frage nach dem Orte entsprechender Punkte der einander ähnlichen Kegelschnitte Q führt auf eine bicirculare Curve vierter Ordnung Π vom Geschlechte Null, die die gegebene Curve $\mathfrak{C}$ ebenfalls viermal berührt. Die Berührungspunkte der Curven Π werden auch durch ein Kegelschnittsbüschel bestimmt, und ihre Doppelpunkte erfüllen den Kreis $\mathfrak{K}$.

12. Andererseits erhält man als Antwort auf die Frage, welche Curve von entsprechenden Tangenten der Kegelschnitte Q eingehüllt wird: ein Kegelschnitt Q', der die Curve $\mathfrak{C}$ wiederum viermal berührt. Alle diese neuen Kegelschnitte Q' bilden ein System Σ' von derselben Art wie Σ, d. h. ihre Axen gehen durch zwei feste Punkte, und zwar durch E' und F', so dass ihr Mittelpunktskreis mit dem von Σ' zusammenfällt; und alle Kegelschnitte Q' sind einander ähnlich. Je zwei Kegelschnitte Q' sind congruent, deren Mittelpunkte symmetrisch in Beziehung auf EF liegen. Ein System entsprechender Tangenten der Kegelschnitte Q' hüllt einen Kegelschnitt Q ein. Die beiden zerfallenden Kegelschnitte des Systemes Σ' liefern dieselben Doppeltangenten wie die des Systemes Σ. Deshalb sind zwei solche Systeme Σ, Σ', die sich gegenseitig entsprechen, ein Systempaar oder zwei zu einander conjugirte Systeme genannt worden.

13. Die Polarencurve eines gegebenen Punktes Z in Beziehung auf das System Σ, d. h. der Ort der Polaren von Z mit Beziehung auf die Kegelschnitte Q, ist ein Kegelschnitt $\mathfrak{Z}$. Die Polcurve dagegen, d. h. der Ort der Pole einer gegebenen geraden Linie mit Beziehung auf die Kegelschnitte Q, ist eine circulare Curve vierter Ordnung mit einem Doppelpunkte.

Eine gegebene bicirculare Curve vierter Ordnung $\mathfrak{C}$ wird nun, entsprechend dem Umstande, dass ihre vier Paare Doppeltangenten sechs Combinationen zu je zweien zulassen, von sechs Paaren conjugirter Systeme oder also von zwölf einzelnen Systemen ähnlicher viermal berührender Kegelschnitte eingehüllt, deren Mittelpunkte auf concentrischen Kreisen liegen. Dabei ergeben sich mehrere Sätze über die Lage der gegenseitigen Schnittpunkte und der Berührungspunkte der Doppeltangenten.

Es sind auch Paare zusammenfallender conjugirter Systeme möglich (Doppelsysteme), d. h. Systeme, die sich selbst conjugirt sind, so dass entsprechende Tangenten der Kegelschnitte des Systemes einen Kegelschnitt desselben Systemes einhüllen. In dieser Hinsicht habe ich den folgenden Satz bewiesen:

Wird eine bicirculare Curve vierter Ordnung von einem Systeme Σ eingehüllt, das sich selbst conjugirt ist, so zerfällt sie nothwendig in zwei Kreise. Jedes Kreispaar aber wird von zwei solchen Doppelsystemen eingehüllt.

Schliesslich habe ich die Theorie noch auf die circularen Curven dritter Ordnung ausgedehnt. Jede solche Curve wird von sechs Paaren conjugirter Parabelsysteme eingehüllt, indem jede Parabel die Curve dreimal berührt. In jedem einzelnen Systeme laufen die Axen aller Parabeln durch einen Punkt; und in jedem Systeme kommt eine zerfallende Parabel vor, die aus zwei von den vier Tangenten besteht, welche an die Curve parallel ihrer reellen Asymptote gelegt werden können. Zwei conjugirte Parabelsysteme enthalten dieselbe zerfallende Parabel. Die sechs Systempaare entsprechen dann den Combinationen jener vier Tangenten zu Paaren. Ein Parabelsystem, das sich selbst conjugirt ist, hüllt eine in einen Kreis und eine Gerade zerfallende Curve ein, und jede derartige Curve wird von zwei solchen Parabelsystemen erzeugt.

Die einzelnen Ergebnisse für die allgemeinen Curven vierter Ordnung vom Geschlechte 1 auszusprechen, habe ich unterlassen; nur die hauptsächlichsten Ergebnisse, die sich auf die Doppeltangenten beziehen, sind nach jener Richtung hin verallgemeinert worden.

Im Anschlusse an die Theorie sind in dieser Abhandlung mehrere besonders ausgezeichnete Beispiele ausführlicher behandelt worden, nämlich die Cassini'sche Curve, die Mittelpunktsfusspunktcurve des Kegelschnittes, die Cartesische Curve, die aus zwei Kreisen bestehende Curve (das Kreispaar); ferner die verallgemeinerte Cissoide, sowie die in eine Gerade und einen Kreis zerfallende Curve. Diese Beispiele betreffen also die bekanntesten Curven höherer Ordnung. Einige von den hierbei sich ergebenden Sätzen sind bereits (wenn schon in anderem Zusammenhange) in der Arbeit über die Kreisfusspunktcurven enthalten. Auch für den besonderen Fall der Kegelschnitte selbst sind die entsprechenden Sätze angegeben. Dabei gelangt man z. B. zu dem folgenden Satze: Gegeben sei ein Kegelschnitt und ein ihm umgeschriebenes gleichschenkliges Dreieck. Dann wird die Spitze des letzteren und der Berührungspunkt seiner Grundlinie mit den vier Brennpunkten des Kegelschnittes auf einer (gleichseitigen) Hyperbel liegen. — Insbesondere werfen auch die Ergebnisse, die bei der Behandlung des Kreispaares gewonnen wurden, auf manche bekannte Elementarsätze neues Licht. — Die Behandlung der bicircularen Curven vierter Ordnung vom Geschlechte Null (d. h. der allgemeinen Fusspunktcurven der Kegelschnitte) muss einem besonderen Aufsatze vorbehalten bleiben. Bei diesen Curven reduciren sich die zwölf

Systeme auf nur drei; es scheiden nämlich acht Systeme aus, weil ihre Kegelschnitte durch den neugebildeten Doppelpunkt hindurchlaufen, und überdies geht ein System in das Büschel der doppeltgezählten Geraden durch jenen Doppelpunkt über.

Erster Abschnitt.

Die allgemeinen bicircularen Curven vierter Ordnung.

§ 1. Das Kegelschnittssystem Σ.

Ein der Grösse, aber nicht der Gestalt nach veränderlicher Mittelpunktskegelschnitt bewege sich so, dass die eine Axe durch den gegebenen Punkt E, die andere durch den gegebenen Punkt F läuft (Taf. I Fig. 1 u. 2a). Die Mitte von EF oder der Mittelpunkt des Kreises $\mathfrak{K}$, auf dem sich dann der Mittelpunkt Q des Kegelschnittes bewegt, heisse K. Diejenige Axe des Kegelschnittes, die (bez. deren Verlängerung) durch E geht, sei ihrer Länge nach mit $2a$ bezeichnet, die andere mit $2b$; der Winkel QEK sei $=\varphi$, mithin $\angle QKF = 2\varphi$. Den Halbmesser des Kreises nenne ich ϱ ($=KE=KF$). Dabei mögen folgende Abkürzungen festgehalten werden:

2) $$2\varphi = \Phi, \quad \cos\varphi = \varkappa, \quad \sin\varphi = \sigma;$$

3) $$\pm a^2 = A, \quad \pm b^2 = B;$$

und es sollen a, b dem Gesetze 1) unterworfen sein, welches sich zufolge 2) und 3) so schreiben lässt:

4) $$A = \mathsf{A}(1-\lambda\cos\Phi - \tau\sin\Phi), \quad B = \mathsf{B}(1-\lambda\cos\Phi-\tau\sin\Phi),$$

wenn

5) $$\pm\alpha^2 = \mathsf{A}, \quad \pm\beta^2 = \mathsf{B}; \quad \varrho^2 = \mathsf{P}$$

gesetzt wird. A und B, ebenso wie A und B, können hierbei bald positiv, bald negativ sein, und die Formeln 3) und 5) sind so zu verstehen, dass a^2 und b^2 die absoluten Werthe von A und B bedeuten sollen, ebenso α^2 und β^2 die absoluten Werthe von A und B.*

Es sei K (Taf. I Fig. 1) der Nullpunkt eines Coordinatensystemes, und zwar KF die x-Axe, der dazu senkrechte Strahl in demjenigen Halbkreise, in dem Φ zwischen 0 und π liegt, die y-Axe. In irgend einer Lage des Kegelschnittes sei Q der Anfang eines Coordinatensystemes x'', y'', und zwar sei EQ die Richtung der x''-Axe, FQ die der y''-Axe (Fig. 1).

Setzt man noch

6) $$x\varkappa + y\sigma = X, \quad x\sigma - y\varkappa = Y,$$

so hat man die Uebergangsgleichungen:

7) $$x'' = X - \varrho\varkappa, \quad y'' = -(Y+\varrho\sigma).$$

---

* Als die gegebenen Constanten betrachte ich hiernach bis auf Weiteres ϱ, A, B, λ, τ.

Im Coordinatensysteme (x'', y'') ist die Gleichung des Kegelschnittes nach den obigen Festsetzungen:

8) $$\frac{x''^2}{A} + \frac{y''^2}{B} = 1.$$

Die Bedeutung der Gleichungen 4) lässt sich leicht näher ermitteln. Setzt man nämlich fest, dass unter allen Umständen μ den absoluten Werth von $\sqrt{\lambda^2 + \tau^2}$ bedeuten soll, was durch einen Schlussstrich an dem Wurzelzeichen angedeutet werden mag:

9) $$\mu = \sqrt{\lambda^2 + \tau^2}|\,;$$

bestimmt man den Winkel Ψ oder 2ψ durch die Gleichungen:

10) $$\lambda = \mu\, cos\Psi, \quad \tau = \mu\, sin\Psi, \quad tg\Psi = \frac{\tau}{\lambda}, \quad \Psi = 2\psi,$$

und gebraucht eine Abkürzung für den Ausdruck $1 - \lambda\, cos\Phi - \tau\, sin\Phi$:

11) $$1 - \lambda\, cos\Phi - \tau\, sin\Phi = \Theta,$$

so erhält man

12) $$\Theta = 1 - \mu\, cos(\Phi - \Psi).$$

Die Punkte, auf welche E und F zu liegen kommen würden, falls man den Durchmesser EF um den Winkel Ψ in der positiven Drehungsrichtung* drehen würde, mögen E' und F' heissen. Alsdann sagt die Gleichung 12) aus:

Je zwei Kegelschnitte des Systemes Σ, deren Mittelpunkte gleichweit von E' (oder, was dasselbe ist, von F') abstehen, sind **congruent.** Der Mittelpunkt des kleinsten Kegelschnittes ist stets F', der des grössten E' (Taf. I Fig. 2a); für sie hat man

13) $$\begin{aligned} \Theta_k &= 1 - \mu, \quad \text{bez. } \Theta_g = 1 + \mu; \\ a_k &= \alpha(1 - \mu), \quad a_g = \alpha(1 + \mu); \\ b_k &= \beta(1 - \mu), \quad b_g = \beta(1 + \mu); \end{aligned}$$

insbesondere hat man für die beiden „mittleren" Kegelschnitte, deren Mittelpunkte E_0 $\left(\Phi = \Psi - \frac{\pi}{2}\right)$ und $F_0\left(\Phi = \Psi + \frac{\pi}{2}\right)$ von dem Lothe in K auf $E'F'$ ausgeschnitten werden,

14) $$\Theta_m = 1, \quad a_m = \alpha, \quad b_m = \beta.$$

Für zwei beliebige parallelaxige Kegelschnitte (deren Mittelpunkte Q, Q_1 also Gegenpunkte im Kreise $\mathfrak{K}$ sind) erhält man die Beziehung**

15) $\frac{1}{2}(\Theta + \Theta_1) = 1$, nämlich $\Theta = 1 - \mu\, cos(\Phi - \Psi)$, $\Theta_1 = 1 + \mu\, cos(\Phi - \Psi)$.

Die Formeln 14) und 15) geben über die geometrische Bedeutung von α und β Aufschluss:

---

* D. h. in der Richtung, in welcher man die positive x-Axe um den Winkel $\frac{\pi}{2}$ drehen müsste, damit sie mit der positiven y-Axe zusammenfiele.

** Die Asymptoten zweier solcher Kegelschnitte stehen paarweise auf einander senkrecht.

Unter den Paaren parallelaxiger Kegelschnitte, aus welchen man sich das System Σ zusammengesetzt denken kann, giebt es eines und nur eines, das „mittlere“, für welches die beiden Kegelschnitte congruent sind, nämlich dasjenige, dessen Mittelpunkte mit den Mittelpunkten des grössten und kleinsten Kegelschnittes (E', F') ein Quadrat bilden; die Halbaxen dieser mittleren Kegelschnitte sind α und β. Für sie ist

16) $$tg\,\Phi_m = -\frac{\lambda}{\tau}.$$

Zufolge 7) und 8) wird die Gleichung eines Kegelschnittes im Coordinatensysteme (x, y) sein:

$$B(X-\varrho\varkappa)^2 + A(Y+\varrho\sigma)^2 = AB$$

oder nach 4)

17) $$\mathsf{B}(X-\varrho\varkappa)^2 + \mathsf{A}(Y+\varrho\sigma)^2 = \mathsf{AB}(1-\lambda\cos\Phi - \tau\sin\Phi),$$

ausgerechnet:

18a) $$\begin{aligned} &x^2(\mathsf{A}\sigma^2+\mathsf{B}\varkappa^2) - 2xy\varkappa\sigma(\mathsf{A}-\mathsf{B}) + y^2(\mathsf{A}\varkappa^2+\mathsf{B}\sigma^2)\\ &+2x\varrho(\mathsf{A}\sigma^2-\mathsf{B}\varkappa^2) - 2y\varrho\varkappa\sigma(\mathsf{A}+\mathsf{B})\\ &+\mathsf{P}(\mathsf{A}\sigma^2+\mathsf{B}\varkappa^2) - \mathsf{AB}(1-\lambda\cos\Phi-\tau\sin\Phi) = 0\end{aligned}$$

oder:

18b) $$\begin{aligned} &x^2[(\mathsf{A}+\mathsf{B})-(\mathsf{A}-\mathsf{B})\cos\Phi]\\ &-2xy(\mathsf{A}-\mathsf{B})\sin\Phi\\ &+y^2[(\mathsf{A}+\mathsf{B})+(\mathsf{A}-\mathsf{B})\cos\Phi]\\ &+2x\varrho[(\mathsf{A}-\mathsf{B})-(\mathsf{A}+\mathsf{B})\cos\Phi] - 2y\varrho(\mathsf{A}+\mathsf{B})\sin\Phi\\ &+\mathsf{P}[(\mathsf{A}+\mathsf{B})-(\mathsf{A}-\mathsf{B})\cos\Phi] - 2\mathsf{AB}(1-\lambda\cos\Phi-\tau\sin\Phi) = 0.\end{aligned}$$

Die Differentiation von 17) nach φ ergiebt:

19) $$\mathsf{B}(X-\varrho\varkappa)(Y-\varrho\sigma) - \mathsf{A}(X+\varrho\varkappa)(Y+\varrho\sigma) = \mathsf{AB}(-\lambda\sin\Phi+\tau\cos\Phi).$$

Multiplicirt man die Gleichung 17) mit $(Y-\varrho\sigma)$, 19) mit $(X-\varrho\varkappa)$ und subtrahirt, dann 17) mit $(X+\varrho\varkappa)$, 19) mit $(Y+\varrho\sigma)$ und addirt, so erhält man folgende zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} &[(x+\varrho)\sigma - y\varkappa]\mathrm{k} - \mathsf{B}[(x-\varrho)\sigma - y\varkappa] + \mathsf{B}\tau[(x-\varrho)\varkappa - y\sigma] = 0,\\ &[(x-\varrho)\varkappa + y\sigma]\mathrm{k} - \mathsf{A}[(x+\varrho)\varkappa + y\sigma] + \mathsf{A}\tau[(x+\varrho)\sigma + y\varkappa] = 0,\end{aligned}$$

wo

$$\mathrm{k} = x^2+y^2-\varrho^2$$

ist. Diese beiden Gleichungen sind aber homogen und linear in $\varkappa$ und σ, so dass sich die Veränderliche φ ohne Weiteres eliminiren lässt. Man erhält als Gleichung der eingehüllten Curve $\mathfrak{C}$ (mit Weglassung des gemeinsamen Factors k):

20a) $$\begin{aligned} &(x^2+y^2-\varrho^2)^2\\ &-x^2[\mathsf{A}(1-\lambda)+\mathsf{B}(1+\lambda)]\\ &+2xy(\mathsf{A}-\mathsf{B})\tau\\ &-y^2[\mathsf{A}(1+\lambda)+\mathsf{B}(1-\lambda)]\\ &-2x\varrho[\mathsf{A}(1-\lambda)-\mathsf{B}(1+\lambda)] + 2y\varrho(\mathsf{A}+\mathsf{B})\tau\\ &+\mathsf{AB}(1-\mu^2) - \varrho^2[\mathsf{A}(1-\lambda)+\mathsf{B}(1+\lambda)] = 0\end{aligned}$$

oder auch

$$
20\text{b)}\quad
\begin{aligned}
&(x^2+y^2)^2\\
&-x^2[(\mathsf{A}+\mathsf{B})-(\mathsf{A}-\mathsf{B})\lambda+2\mathsf{P}]\\
&+2xy(\mathsf{A}-\mathsf{B})\tau\\
&-y^2[(\mathsf{A}+\mathsf{B})+(\mathsf{A}-\mathsf{B})\lambda+2\mathsf{P}]\\
&-2x\varrho[(\mathsf{A}-\mathsf{B})-(\mathsf{A}+\mathsf{B})\lambda]+2y\varrho(\mathsf{A}+\mathsf{B})\tau\\
&+\mathsf{AB}(1-\mu^2)-\mathsf{P}[(\mathsf{A}+\mathsf{B})-(\mathsf{A}-\mathsf{B})\lambda]+\mathsf{P}^2=0.
\end{aligned}
$$

Die Gleichung 19) stellt eine gleichseitige Hyperbel $\mathfrak{H}$ dar, welche die Berührpunkte des zum Winkel φ gehörigen Kegelschnittes ausschneidet. Sie schneidet aber offenbar auch die Berührpunkte des Kegelschnittes $\varphi-\frac{\pi}{2}$ aus, da ihre Gleichung ungeändert bleibt, wenn man darin φ mit $\varphi-\frac{\pi}{2}$ vertauscht. Die letztere kann man auch schreiben:

$$
21)\quad
\begin{aligned}
&(x^2-y^2)\sin\Phi-2xy\cos\Phi+2(x\sin\Phi-y\cos\Phi)\,.\,\varrho\frac{\mathsf{A}+\mathsf{B}}{\mathsf{A}-\mathsf{B}}\\
&\qquad+\mathsf{P}\sin\Phi-2\frac{\mathsf{AB}}{\mathsf{A}-\mathsf{B}}(\lambda\sin\Phi-\tau\cos\Phi)=0.
\end{aligned}
$$

(Vergl. Taf. I Fig. 2a.) Im Falle $\lambda=\tau=0$ (also $\mu=0$) und nur in diesem Falle enthält die Hyperbel zugleich die Mittelpunkte der beiden Kegelschnitte, deren Berührpunkte sie ausschneidet; dann ist die Eingehüllte eine Cartesische Curve, die später ausführlich behandelt wird (II. Abschnitt). Im Allgemeinen aber enthält nur diejenige Hyperbel $\mathfrak{H}_m$, für welche $tg\Phi=\frac{\tau}{\lambda}$ ist, die Mittelpunkte der Kegelschnitte, deren Berührpunkte sie ausschneidet. Zufolge 10) sind diese der grösste und kleinste Kegelschnitt (vergl. S. 7 u. Taf. I Fig. 2a). Ferner erkennt man aus Gl. 21), dass die Asymptoten der Hyperbel $\mathfrak{H}$ den Axen der beiden Kegelschnitte Φ und $\Phi-\pi$ (deren Berührpunkte sie ausschneidet) parallel sind; diese zwei Kegelschnitte selbst sind parallelaxig. Dazu kommt aber noch eine merkwürdige Eigenschaft. Die in Rede stehende gleichseitige Hyperbel $\mathfrak{H}$ läuft nämlich durch die vier Schnittpunkte je zweier Kegelschnitte, deren Mittelpunkte gleichweit von Q (oder von Q_1) entfernt sind. Um dies zu zeigen, seien Q_δ und $Q_{-\delta}$ zwei solche Punkte auf dem Kreise K, dass $\angle Q_\delta KQ=\angle Q_{-\delta}KQ=2\delta$, also $\angle Q_\delta EQ=\angle Q_{-\delta}EQ=\delta$ ist, so sind nach 18b) die Gleichungen der Kegelschnitte des Systemes Σ, deren Mittelpunkte Q_δ und $Q_{-\delta}$ sind:

$$
\begin{aligned}
&x^2[(\mathsf{A}+\mathsf{B})-(\mathsf{A}-\mathsf{B})\cos(\Phi\pm2\delta)]\\
&-2xy(\mathsf{A}-\mathsf{B})\sin(\Phi\pm2\delta)\\
&+y^2[(\mathsf{A}+\mathsf{B})+(\mathsf{A}-\mathsf{B})\cos(\Phi\pm2\delta)]\\
&+2x\varrho[(\mathsf{A}-\mathsf{B})-(\mathsf{A}+\mathsf{B})\cos(\Phi\pm2\delta)]-2y\varrho(\mathsf{A}+\mathsf{B})\sin(\Phi\pm2\delta)\\
&+\mathsf{P}[(\mathsf{A}+\mathsf{B})-(\mathsf{A}-\mathsf{B})\cos(\Phi\pm2\delta)]-2\mathsf{AB}[1-\lambda\cos(\Phi\pm2\delta)-\tau\sin(\Phi\pm2\delta)]=0.
\end{aligned}
$$

Subtrahirt man aber die hierdurch dargestellten zwei Gleichungen von einander, so erhält man in der That, abgesehen vom gemeinsamen Factor $(\mathsf{A}-\mathsf{B})\sin2\delta$, die Gleichung von $\mathfrak{H}$, 21).

Hiernach kann man den Satz aussprechen:

Die Berührpunkte zweier parallelaxiger Kegelschnitte Q, Q_1 des Systemes Σ werden von einer Hyperbel $\mathfrak{H}$ ausgeschnitten, deren Asymptoten den Axen der beiden Kegelschnitte parallel sind und welche der Ort der Schnittpunkte je zweier Kegelschnitte des Systemes Σ ist, deren Mittelpunkte symmetrisch zu einander in Beziehung auf QQ_1 liegen.

Insbesondere geht die Hyperbel $\mathfrak{H}$ durch die Schnittpunkte zweier unendlich wenig von dem Kegelschnitte Q oder Q_1 beiderseits abweichenden Kegelschnitte, d. h. eben durch die Berührpunkte dieser Kegelschnitte; andererseits aber durch die Schnittpunkte derjenigen Kegelschnitte, deren Mittelpunkte Q_2, Q_3 mit Q und Q_1 ein Quadrat bilden (Taf. I Fig. 1), deren Axen also um $\frac{\pi}{4}$ gegen die Axen der Kegelschnitte Q, Q_1 geneigt sind.

Durch alle diese Beziehungen wird man überhaupt darauf geführt, das System Σ nicht mehr als aus einzelnen Kegelschnitten Q, sondern als aus Kegelschnittspaaren Q, Q_1 zusammengesetzt zu betrachten. Dann liegt es z. B. sehr nahe, nach dem Orte der Schnittpunkte zu fragen, welche die Kegelschnitte dieser Paare gemein haben. Diese Schnittpunktsvierecke sind bekanntlich Kreisvierecke, weil die beiden Kegelschnitte eines jeden Paares parallelaxig sind; vergl. weiter S. 11.

Um die Hyperbeln $\mathfrak{H}$ zu untersuchen, führen wir ein neues Coordinatensystem (ξ, η) ein, dessen Anfang der Mittelpunkt G der Hyperbel $\mathfrak{H}$ [21)] ist. Die ξ-Axe habe dieselbe Richtung wie die x-Axe; setzt man dann

22) $$x = \xi + h, \quad y = \eta,$$

wobei h die Abscisse des Hyperbelmittelpunktes G im ursprünglichen Systeme (x, y) bedeutet, so muss man h durch die Gleichung

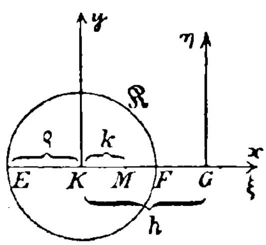
23) $$h = -\varrho\frac{\mathsf{A}+\mathsf{B}}{\mathsf{A}-\mathsf{B}}$$

bestimmen. Dann wird die Gleichung der Hyperbel $\mathfrak{H}$:

24a) $$(\xi^2-\eta^2)\sin\Phi - 2\xi\eta\cos\Phi - 2\frac{\mathsf{AB}}{\mathsf{A}-\mathsf{B}}\left[\left(\frac{2\mathsf{P}}{\mathsf{A}-\mathsf{B}}+\lambda\right)\sin\Phi - \tau\cos\Phi\right] = 0$$

oder

24b) $$\left[(\xi^2-\eta^2) - 2\frac{\mathsf{AB}}{\mathsf{A}-\mathsf{B}}\zeta\right]\sin\Phi - 2\left[\xi\eta - \frac{\mathsf{AB}}{\mathsf{A}-\mathsf{B}}\tau\right]\cos\Phi = 0,$$



wobei

25) $$\zeta = \frac{2\mathsf{P}}{\mathsf{A}-\mathsf{B}} + \lambda$$

gesetzt wurde.

Die Form 24b) der Hyperbelgleichung zeigt, dass die sämmtlichen Hyperbeln $\mathfrak{H}$ ein Hyperbelbüschel bilden; denn jede solche Hyperbel geht durch die vier Schnittpunkte der beiden besonderen Hyperbeln

26) $$\xi^2 - \eta^2 = 2\frac{\mathsf{AB}}{\mathsf{A}-\mathsf{B}}\zeta, \quad \xi\eta = \frac{\mathsf{AB}}{\mathsf{A}-\mathsf{B}}\tau.$$

Die vier Grundpunkte des Büschels bestimmen sich dann aus diesen Gleichungen folgendermassen:

$$27)\quad \begin{cases} \xi_1 = \sqrt{\frac{AB}{A-B}\left(\left|\sqrt{\zeta^2+\tau^2}\right|+\zeta\right)}, \\ \eta_1 = \pm\sqrt{\frac{AB}{A-B}\left(\left|\sqrt{\zeta^2+\tau^2}\right|-\zeta\right)}; \end{cases} \quad \begin{cases} \xi_3 = \sqrt{\frac{AB}{A-B}\left(-\left|\sqrt{\zeta^2+\tau^2}\right|+\zeta\right)}, \\ \eta_3 = \pm\sqrt{\frac{AB}{A-B}\left(-\left|\sqrt{\zeta^2+\tau^2}\right|-\zeta\right)}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi_2 = -\xi_1, \\ \eta_2 = -\eta_1; \end{cases} \qquad \begin{cases} \xi_4 = -\xi_3, \\ \eta_4 = -\eta_3. \end{cases}$$

Hierbei ist zufolge 26) das Vorzeichen von η so zu bestimmen, dass das Product $\xi\eta$ das Vorzeichen von $\frac{AB}{A-B}\tau$ hat; also z. B. bei η_1 ist das positive Vorzeichen zu nehmen, wenn $\frac{AB}{A-B}\tau$ eine positive Grösse ist. Die Wurzeln selbst bedeuten nur **absolute** Werthe, wie durch den Schlussstrich angedeutet ist. — Die beiden Grundpunkte 1 und 2 mögen mit H und J bezeichnet werden; sie sind reell, wenn $\frac{AB}{A-B} > 0$ ist. Die beiden anderen Grundpunkte seien H_1, J_1.

Die Gestalt der von den vier Punkten 27) gebildeten Figur erhält man, wenn man in einem rechtwinkligen Coordinatensysteme $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ vier Punkte durch die Gleichungen

$$\begin{cases} \mathfrak{x}_1 = -\mathfrak{x}_2 = d, \\ \mathfrak{y}_1 = \quad \mathfrak{y}_2 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathfrak{x}_3 = \quad \mathfrak{x}_4 = 0, \\ \mathfrak{y}_3 = -\mathfrak{y}_4 = id \end{cases}$$

bestimmt $\left(i = \sqrt{-1}\right)$. Diese Figur, welche in der Folge fortwährend vorkommt, nenne ich, um mich kurz ausdrücken zu können, ein **hyperbolisches Quadrat**, weil eben jeder ihr umgeschriebene Kegelschnitt eine (gleichseitige) **Hyperbel** ist. Man pflegt darin die beiden imaginären Punkte als „**Antipunkte**" der reellen Ecken oder umgekehrt zu bezeichnen. Für das hyperbolische Quadrat 27) ist

$$28)\quad d = \sqrt{abs.\left|\frac{2AB}{A-B}\left|\sqrt{\zeta^2+\tau^2}\right|\right|} = \left|\sqrt[4]{\zeta^2+\tau^2}\right| \cdot \sqrt{abs.\left|\frac{2AB}{A-B}\right|}.$$

Ehe wir diese Betrachtungen weiter verfolgen, möge erst die S. 10 angeregte Frage nach dem Orte der Kreisvierecke erledigt werden, welche die Schnittpunktssysteme parallelaxiger Kegelschnitte Q, Q_1 darstellen. Vertauscht man in 18) φ mit $\varphi - \frac{\pi}{2}$, so erhält man die Gleichung des Kegelschnittes Q_1:

$$\begin{aligned} &x^2(A\varkappa^2 + B\sigma^2) + 2xy\varkappa\sigma(A-B) + y^2(A\sigma^2 + B\varkappa^2) \\ &+ 2x\varrho(A\varkappa^2 - B\sigma^2) + 2y\varrho\varkappa\sigma(A+B) \\ &+ P(A\varkappa^2 + B\sigma^2) - AB(1 + \lambda\cos\Phi + \tau\sin\Phi) = 0. \end{aligned}$$

Durch Addition dieser Gleichung und 18) erhält man die **von φ ganz unabhängige Kreisgleichung**:

$$29)\qquad \left(x + \varrho\frac{A-B}{A+B}\right)^2 + y^2 + 4P\frac{AB}{(A+B)^2} - \frac{2AB}{A+B} = 0.$$

Der Mittelpunkt M dieses Kreises liegt auf der x-Axe und hat die Abscisse

30) $$k = -\varrho \frac{A-B}{A+B}.$$

Diesen Kreis bezeichne ich kurz als Schnittpunktskreis des Systemes Σ.* Sein Halbmesser ist nach 29) und 30)

31) $$s = \sqrt{\frac{2AB}{(A+B)^2}(A+B-2P)}.$$

Dabei ist auf Grund von 23) und 30)

$$hk = \varrho^2.$$

Man kann also den Satz aussprechen:

Die Kreisvierecke, in welchen sich je zwei parallelaxige Kegelschnitte Q, Q_1 des Systemes Σ schneiden, sind einem und demselben Kreise eingeschrieben. Der Mittelpunkt G des die Berührpunkte ausschneidenden Hyperbelbüschels, der Mittelpunkt M dieses Kreises und die Punkte E, F sind harmonische Punkte, und zwar E, F einerseits, G, M andererseits einander zugeordnet.

Für den Winkel χ, welchen die Hyperbel $\mathfrak{H}$ in einem der beiden reellen Grundpunkte 27) mit der x-Axe bildet, erhält man zufolge 24a)

$$tg\,\chi = \frac{\xi \sin\Phi - \eta \cos\Phi}{\xi \cos\Phi + \eta \sin\Phi},$$

wenn ξ, η die Coordinaten des genannten Punktes bedeuten. Nennt man daher den Winkel, den die Gerade von diesem nach G (etwa JG, wenn H und J reell sind, vergl. S. 11 u. Taf. I Fig. 3) mit der x-Axe bildet, ϑ, so hat man wegen $tg\,\vartheta = \frac{\eta}{\xi}$

32) $$tg\,\chi = tg(\Phi - \vartheta).$$

In den reellen Grundpunkten sind demnach zwei zu den Winkeln Φ_1, Φ_2 gehörende Hyperbeln unter dem Winkel $\Phi_1 - \Phi_2$ gegen einander geneigt, also unter demselben Winkel, welchen die Halbmesser Q_1K, Q_2K mit einander bilden, wenn Q_1, Q_2 die Mittelpunkte der zu Φ_1, Φ_2 gehörenden Kegelschnitte sind.

Die Gerade $EFGKM$ nenne ich die Axe des Systemes Σ.

Schliesslich mag noch die Frage beantwortet werden: Welche Curve wird von den Schnittpunktsvierecken je zweier congruenter Kegelschnitte Q gebildet? Setzt man zur Abkürzung

---

* Ebenso möge der Kreis $\mathfrak{K}$, weil er die Mittelpunkte der Kegelschnitte Q enthält, Mittelpunktskreis des Systemes Σ heissen (s. die Fig. S. 10). Ueber die geometrische Bedeutung von M s. § 6.

$$\text{33)} \qquad \frac{\mathsf{A}+\mathsf{B}}{2}=\Lambda, \quad \frac{\mathsf{A}-\mathsf{B}}{2}=\mathsf{M},$$

so lässt sich zufolge 18b) die Gleichung eines Kegelschnittes Q schreiben:

$$\text{34)} \qquad \left.\begin{array}{r} x^2(\Lambda-\mathsf{M}\cos\Phi)-2xy\mathsf{M}\sin\Phi+y^2(\Lambda+\mathsf{M}\cos\Phi) \\ +2x\varrho(\mathsf{M}-\Lambda\cos\Phi)-2y\varrho\Lambda\sin\Phi \\ +\mathsf{P}(\Lambda-\mathsf{M}\cos\Phi)-(\Lambda^2-\mathsf{M}^2)(1-\lambda\cos\Phi-\tau\sin\Phi) \end{array}\right\}=0.$$

Bildet man nun die Gleichung für den damit congruenten Kegelschnitt, indem man statt Φ als Variable den Winkel O von KQ gegen $E'F'$ einführt (so dass zwei congruente Kegelschnitte durch entgegengesetzt gleiche Werthe von O gekennzeichnet sind), und zieht beide Gleichungen von einander ab, so ergiebt sich nach Weglassung des gemeinsamen Factors $\sin\mathsf{O}$ als Gleichung der gesuchten Curve

$$\text{35)} \qquad (x^2-y^2)\tau-2xy\lambda+2\varrho\frac{\Lambda}{\mathsf{M}}(x\tau-y\lambda)+\mathsf{P}\tau=0;$$

das ist die Hyperbel $\mathfrak{H}_m$, von der damit bewiesen ist, dass sie die Schnittpunkte der „mittleren“ (zugleich parallelaxigen) congruenten Kegelschnitte [ebenso wie die Berührungspunkte der Kegelschnitte E', F' (d. h. die Schnittpunkte der zwei Paare zusammenfallender congruenter Kegelschnitte)] enthält. Also:

Je zwei congruente Kegelschnitte des Systemes Σ schneiden sich auf der gleichseitigen Hyperbel $\mathfrak{H}_m$.

Dass dieser Satz als besonderer Fall des Satzes S. 10 erscheint, ist selbstverständlich. Es mag aber hier noch auf einige Umstände hingewiesen werden. Z. B. ergiebt sich, dass die folgenden vier Kegelschnitte: die beiden „mittleren“ Kegelschnitte (E_0, F_0), der Schnittpunktskreis (M) und die gleichseitige Hyperbel $\mathfrak{H}_m$, ein Büschel bilden; denn die „mittleren“ Kegelschnitte sind zugleich congruent und parallelaxig. Ferner ist schon in den Vorbemerkungen erwähnt worden, dass sich unter den Kegelschnitten Q auch zwei Paare zerfallender Kegelschnitte befinden, die in den folgenden Paragraphen ausführlich behandelt sind; dass die Mittelpunkte des einen Paares die Kreispunkte im Unendlichen sind, und die des andern symmetrisch in Beziehung auf $E'F'$ liegen, d. h. dass dieses zweite (wirkliche Doppeltangenten liefernde) Paar zu den Paaren congruenter Kegelschnitte gehört. Hieraus folgt, dass die vier Schnittpunkte der Kegelschnitte dieses Paares (von denen zwei auf dem Kreise $\mathfrak{K}$ symmetrisch mit Beziehung auf EF liegen, während die beiden anderen die Mittelpunkte zweier Doppeltangentenpaare sind) ebenfalls auf der Hyperbel $\mathfrak{H}_m$ liegen. Was dagegen das erstgenannte Paar zerfallender Kegelschnitte betrifft, so ist bekanntlich der Winkel, den die Richtung nach einem Kreispunkte im Unendlichen mit einer reellen geraden Linie bildet, unendlich gross. Demgemäss können die unendlich fernen Kreispunkte als symmetrisch mit Beziehung auf einen beliebigen

Durchmesser QQ_1 liegend betrachtet werden, woraus sich dann auf Grund des Satzes S. 10 erklärt, dass *jede* der Hyperbeln $\mathfrak{H}$ durch die gegenseitigen vier Schnittpunkte der Kegelschnitte gehen muss, deren Mittelpunkte die Kreispunkte im Unendlichen sind.

§ 2. Allgemeines über die Brennpunkte der bicircularen Curven vierter Ordnung.

Die vier Doppelbrennpunkte einer bicircularen Curve vierter Ordnung sind die Schnittpunkte der vier Doppelpunktstangenten. Sind x_0, y_0 die Coordinaten eines Brennpunktes der Curve

$$36)\qquad (x^2+y^2)^2+\mathfrak{a}x^2+\mathfrak{b}y^2+2\mathfrak{c}xy+2\mathfrak{d}x+2\mathfrak{e}y+\mathfrak{f}=0,$$

so hat man für eine Gerade durch (x_0, y_0) und einen der unendlich fernen Kreispunkte

$$(y-y_0)\pm i(x-x_0)=0.$$

Durch Elimination von y ergiebt sich die Gleichung für x

$$37)\qquad \begin{aligned}&[2x(x_0\mp iy_0)-x_0^2+y_0^2\pm 2ix_0y_0]^2+\mathfrak{a}x^2\\ &+\mathfrak{b}[-x^2+2x(x_0\mp iy_0)-x_0^2+y_0^2\pm 2ix_0y_0]\\ &+2\mathfrak{c}(\mp ix^2\pm ixx_0+xy_0)+2\mathfrak{d}x+2\mathfrak{e}(\mp ix\pm ix_0+y_0)+\mathfrak{f}=0.\end{aligned}$$

Für einen Doppelbrennpunkt muss der eine Schnittpunkt der Geraden $y-y_0=\mp i(x-x_0)$ ebenfalls ins Unendliche fallen, also die vorliegende Gleichung für x *linear* sein. Demgemäss ergeben sich die Doppelbrennpunkte aus der Gleichung

$$4(x_0\mp iy_0)^2+\mathfrak{a}-\mathfrak{b}\mp 2i\mathfrak{c}=0,$$

oder durch Trennung des Reellen und Imaginären:

$$4(x_0^2-y_0^2)=-(\mathfrak{a}-\mathfrak{b}),\quad 4x_0y_0=-\mathfrak{c}.$$

Hieraus folgt:

$$38)\qquad \begin{aligned}x_0&=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}\left[-(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})\pm\sqrt{(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})^2+4\mathfrak{c}^2}\right]},\\ y_0&=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}\left[+\ \mathfrak{a}-\mathfrak{b}\ \pm\sqrt{(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})^2+4\mathfrak{c}^2}\right]},\end{aligned}$$

wobei die äusseren Vorzeichen derart zu wählen sind, dass x_0y_0 das Vorzeichen von $-\mathfrak{c}$ hat.

Daraus ergiebt sich die geometrische Bedeutung des bisher mit K bezeichneten Coordinatenanfanges für die eingehüllte Curve $\mathfrak{C}$: *K ist der Mittelpunkt des von ihren Doppelbrennpunkten gebildeten hyperbolischen Quadrates.*

Fehlt in der Gleichung 36) der bicircularen Curve das Glied mit xy $(\mathfrak{c}=0)$, so nenne ich sie die *Normalform der Gleichung der bicircularen Curve vierter Ordnung.*

Dann hat man zufolge 38) den Satz:

In der Normalform

$$39)\qquad (\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2)^2+\mathfrak{a}\mathfrak{x}^2+\mathfrak{b}\mathfrak{y}^2+2\mathfrak{d}\mathfrak{x}+2\mathfrak{e}\mathfrak{y}+\mathfrak{f}=0$$

der Gleichung einer bicircularen Curve vierter Ordnung sind die Coordinaten der Doppelbrennpunkte:

$$40)\qquad \begin{cases} \mathfrak{x} = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\mathfrak{b}-\mathfrak{a}}, \\ \mathfrak{y} = \quad 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathfrak{x} = \quad 0, \\ \mathfrak{y} = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}}. \end{cases}$$

Der Uebergang von der allgemeineren Form 36) zur Normalform 39) kann durch eine einfache Drehung bewerkstelligt werden. Für unsere Curve 20) bezeichnen wir das Normalcoordinatensystem mit $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$. Man findet dann, dass man das System (x, y) um den Winkel $\frac{\Psi}{2} = \psi$ drehen muss, damit aus ihrer Gleichung das Glied mit xy verschwindet (Taf. I Fig. 7a). Dadurch erhält man als Normalform der Gleichung der Curve $\mathfrak{C}$:

$$41a)\qquad \left.\begin{array}{l} (\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2-\varrho^2)^2 - \mathfrak{x}^2[\mathsf{A}+\mathsf{B}-(\mathsf{A}-\mathsf{B})\mu] - \mathfrak{y}^2[\mathsf{A}+\mathsf{B}+(\mathsf{A}-\mathsf{B})\mu] \\ -2\mathfrak{x}\varrho[\mathsf{A}-\mathsf{B}-(\mathsf{A}+\mathsf{B})\mu]\cos\psi + 2\mathfrak{y}\varrho[\mathsf{A}-\mathsf{B}+(\mathsf{A}+\mathsf{B})\mu]\sin\psi \\ +\mathsf{AB}(1-\mu^2) - \mathsf{P}[\mathsf{A}+\mathsf{B}-(\mathsf{A}-\mathsf{B})\lambda] \end{array}\right\} = 0,$$

oder auch:

$$41b)\qquad \left.\begin{array}{l} (\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2)^2 - \mathfrak{x}^2[\mathsf{A}+\mathsf{B}-(\mathsf{A}-\mathsf{B})\mu+2\mathsf{P}] - \mathfrak{y}^2[\mathsf{A}+\mathsf{B}+(\mathsf{A}-\mathsf{B})\mu+2\mathsf{P}] \\ -2\mathfrak{x}\varrho[\mathsf{A}-\mathsf{B}-(\mathsf{A}+\mathsf{B})\mu]\cos\psi + 2\mathfrak{y}\varrho[\mathsf{A}-\mathsf{B}+(\mathsf{A}+\mathsf{B})\mu]\sin\psi \\ +\mathsf{AB}(1-\mu^2) - \mathsf{P}[\mathsf{A}+\mathsf{B}-(\mathsf{A}-\mathsf{B})\lambda] + \mathsf{P}^2 \end{array}\right\} = 0.$$

Zufolge 40) sind demnach die Coordinaten der Doppelbrennpunkte, welche wir C, D, C_1, D_1 nennen:

$$42)\qquad \begin{cases} \mathfrak{x} = \pm\sqrt{\dfrac{\mathsf{B}-\mathsf{A}}{2}\mu}, \\ \mathfrak{y} = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathfrak{x} = 0, \\ \mathfrak{y} = \pm\sqrt{\dfrac{\mathsf{A}-\mathsf{B}}{2}\mu} \end{cases}$$

(vergl. Taf. I Fig. 7a); die $\mathfrak{x}$- und $\mathfrak{y}$-Axe sind die Halbirungslinien der Winkel, die von EF und $E'F'$ gebildet werden (s. S. 7).

Stellt man andererseits die Bedingung auf, dass Gl. 37) in x rein quadratisch wird, so erhält man zwei biquadratische Gleichungen für x_0, y_0, welche dann die 16 einfachen Brennpunkte der Curve ergeben. Diese zwei Gleichungen entstehen durch Trennung des Reellen und Imaginären aus der folgenden Gleichung:

$$43)\qquad \begin{array}{l} [4(x_0^2-y_0^2)+\mathfrak{a}-\mathfrak{b} \mp 2i(4x_0y_0+\mathfrak{c})] \\ \times[(x_0^2-y_0^2)^2 - 4x_0^2y_0^2 - \mathfrak{b}(x_0^2-y_0^2) + 2\mathfrak{e}y_0 + \mathfrak{f} \\ \quad \mp 2i(4x_0y_0(x_0^2-y_0^2) - \mathfrak{b}x_0y_0 - \mathfrak{e}x_0)] \\ -[2x_0(x_0^2-3y_0^2) - \mathfrak{b}x_0 - \mathfrak{c}y_0 - \mathfrak{d} \\ \quad \mp i(2y_0(3x_0^2-y_0^2) - \mathfrak{b}y_0 + \mathfrak{c}x_0 - \mathfrak{e})]^2 = 0. \end{array}$$

Von den 16 Brennpunkten weiss man, dass sie viermal zu je vieren auf Kreisen liegen, dass diese vier Kreise, welche ich kurz Brennpunktskreise nenne, nicht nur die Curve überall, wo sie sie treffen, sondern auch sich selbst unter einander sämmtlich rechtwinklig schneiden. Ihre vier Mittelpunkte bilden ein Viereck, in welchem jede Ecke der Höhenschnittpunkt des von den drei anderen Ecken gebildeten Dreieckes ist (s. auch einen Satz § 6).

§ 3. Zerfallende Kegelschnitte. Bestimmung eines Systemes Σ, wenn die bicirculare Curve vierter Ordnung gegeben ist.

Unter den Kegelschnitten des Systemes Σ giebt es auch vier zerfallende, d. h. solche, deren Axen Null sind. Man erhält zwei von ihnen zufolge 4) aus der Gleichung

$$\Theta = 1 - \lambda \cos\Phi - \tau \sin\Phi = 0$$

oder nach 12)

$$\text{44)} \qquad \cos(\Phi - \Psi) = \frac{1}{\mu}.$$

Setzt man den dieser Bedingung entsprechenden absoluten Werth von $\Phi - \Psi$ gleich H,

$$\text{45)} \qquad |\Phi - \Psi| = \mathsf{H}, \quad \cos \mathsf{H} = \frac{1}{\mu},$$

so hat man demnach für die zerfallenden Kegelschnitte:

$$\text{46)} \qquad \Phi = \Psi \pm \mathsf{H}.$$

Die Mittelpunkte dieser zwei zerfallenden Kegelschnitte des Systemes Σ liegen symmetrisch zur Geraden $E'F'$ (Taf. I Fig. 1 u. 6). Sie sind nur dann reell, wenn $\mu > 1$ ist [vergl. 45)]; ihre Asymptoten sind in diesem Falle reell oder imaginär, je nachdem das System Σ aus Ellipsen oder Hyperbeln besteht (je nachdem $\mathsf{AB} \gtrless 0$ ist). Jede dieser vier Asymptoten ist Doppeltangente der eingehüllten Curve $\mathfrak{C}$.

Das System Σ enthält also vier und nur vier Doppeltangenten. Nach Gl. 18) sind die Gleichungen der Geraden eines zerfallenden Kegelschnittes:

$$\text{47)} \quad \begin{aligned} x(\sigma\sqrt{\mathsf{A}} + \varkappa\sqrt{-\mathsf{B}}) - y(\varkappa\sqrt{\mathsf{A}} - \sigma\sqrt{-\mathsf{B}}) + \varrho(\sigma\sqrt{\mathsf{A}} - \varkappa\sqrt{-\mathsf{B}}) &= 0, \\ x(\sigma\sqrt{\mathsf{A}} - \varkappa\sqrt{-\mathsf{B}}) - y(\varkappa\sqrt{\mathsf{A}} + \sigma\sqrt{-\mathsf{B}}) + \varrho(\sigma\sqrt{\mathsf{A}} + \varkappa\sqrt{-\mathsf{B}}) &= 0, \end{aligned}$$

wobei $\varkappa$, σ gemäss 44) zu bestimmen sind. Da $\cos\Psi = \frac{\lambda}{\mu}$ ist, so folgt $\cos\psi = \sqrt{\frac{\lambda+\mu}{2\mu}}$, $\sin\psi = \sqrt{\frac{-\lambda+\mu}{2\mu}}$; ferner ist $\cos\frac{\mathsf{H}}{2} = \sqrt{\frac{1+\mu}{2\mu}}$, $\sin\frac{\mathsf{H}}{2} = \sqrt{\frac{-1+\mu}{2\mu}}$*; demnach ist in 47) für den ersten zerfallenden Kegelschnitt $(\Phi = \Psi + \mathsf{H})$

$$\text{48a)} \quad \begin{aligned} \varkappa &= \frac{\sqrt{(\mu+1)(\mu+\lambda)} - \sqrt{(\mu-1)(\mu-\lambda)}}{2\mu}, \\ \sigma &= \frac{\sqrt{(\mu+1)(\mu-\lambda)} + \sqrt{(\mu-1)(\mu+\lambda)}}{2\mu}, \end{aligned}$$

für den zweiten $(\Phi = \Psi - \mathsf{H})$

---

* Also $tg\frac{\mathsf{H}}{2} = \sqrt{\frac{\mu-1}{\mu+1}}$.

48b)
$$\varkappa = \frac{\sqrt{(\mu+1)(\mu+\lambda)} + \sqrt{(\mu-1)(\mu-\lambda)}}{2\mu},$$
$$\sigma = \frac{\sqrt{(\mu+1)(\mu-\lambda)} - \sqrt{(\mu-1)(\mu+\lambda)}}{2\mu}$$

zu setzen. Die Mittelpunkte dieser Kegelschnitte nenne ich L, N.*

Da jeder Punkt des Mittelpunktskreises $\mathfrak{K}$ Mittelpunkt eines Kegelschnittes Q ist, so drängt sich ferner die Frage auf: Wie sind diejenigen Kegelschnitte Q beschaffen, deren Mittelpunkte die Kreispunkte im Unendlichen sind? Es leuchtet von selbst ein, dass jeder dieser Kegelschnitte aus zwei Curventangenten bestehen muss. Um die Frage streng zu beantworten, wird man in der Gleichung von Q 34)

$$\sin\Phi = \infty, \quad \cos\Phi = \infty, \quad tg\,\Phi = \frac{\sin\Phi}{\cos\Phi} = \pm i \qquad (i = \sqrt{-1})$$

setzen müssen. Dadurch erhält man die Gleichungen der gesuchten Kegelschnitte in folgender Gestalt:

49) $$x^2 \pm 2xyi - y^2 + 2x\varrho\frac{\mathsf{\Lambda}}{\mathsf{M}} \pm 2y\varrho\frac{\mathsf{\Lambda}}{\mathsf{M}}i + \mathsf{P} - \frac{\mathsf{\Lambda}^2-\mathsf{M}^2}{\mathsf{M}}(\lambda \pm \tau i) = 0$$

oder

50) $$(x \pm iy)^2 + 2(x \pm iy)\varrho\frac{\mathsf{\Lambda}}{\mathsf{M}} + \mathsf{P} - \frac{\mathsf{\Lambda}^2-\mathsf{M}^2}{\mathsf{M}}(\lambda \pm \tau i) = 0.$$

Das sind in der That zerfallende Kegelschnitte, nämlich je zwei Gerade durch den einen und andern Kreispunkt im Unendlichen (und zwar Curventangenten, da jeder Kegelschnitt Q die Curve $\mathfrak{C}$ viermal berührt, und bei jeder der hier in Rede stehenden vier Geraden eine Berührung uneigentlich wird, nämlich in dem Hindurchgehen durch einen Doppelpunkt von $\mathfrak{C}$ besteht, so dass noch eine eigentliche Berührung für jede der vier Geraden übrig bleibt). Hiernach kann man sagen:

Das System Σ enthält im Ganzen vier **zerfallende** Kegelschnitte. Aber nur zwei von ihnen bestehen aus **eigentlichen** Doppeltangenten, während die beiden anderen aus Tangenten von dem einen und andern Doppelpunkte an die Curve $\mathfrak{C}$ zusammengesetzt sind.**

Ist nun eine bicirculare Curve vierter Ordnung vorgelegt, so kann man verlangen, ein Kegelschnittssystem Σ zu bestimmen, das sie einhüllt. Zu diesem Zwecke wird man ihre Gleichung zunächst auf die Normalform bringen, Gl. 39) (wo also $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}$ gegebene Grössen sind). Dann

* Für den Winkel Ξ, welchen die Geraden des Kegelschnittes L bez. N mit der Axe EL bez. EN bilden, hat man offenbar [vergl. 8) und 4)] $tg\,\Xi = \sqrt{-\frac{\mathsf{B}}{\mathsf{A}}}$ (vergl. Taf. I Fig. 6, und Weiteres über die Doppeltangenten §§ 5 und 6).

** In den Berichten der Königl. sächs. Gesellsch. d. Wissensch. habe ich nur die beiden ersten zerfallenden Kegelschnitte erwähnt. Auch im Folgenden sind stets diese gemeint, wenn schlechthin von „den beiden zerfallenden Kegelschnitten des Systemes Σ“ gesprochen wird.

hat man zufolge 41b) zur Bestimmung der fünf Unbekannten A, B, ϱ, μ, ψ die fünf Gleichungen:

$$51)\quad\begin{cases}(\mathsf{A}+\mathsf{B})-(\mathsf{A}-\mathsf{B})\mu+2\mathsf{P}=-\mathfrak{a}, \quad (\mathsf{A}+\mathsf{B})+(\mathsf{A}-\mathsf{B})\mu+2\mathsf{P}=-\mathfrak{b},\\ \varrho[(\mathsf{A}-\mathsf{B})-(\mathsf{A}+\mathsf{B})\mu]\cos\psi=-\mathfrak{d}, \quad \varrho[(\mathsf{A}-\mathsf{B})+(\mathsf{A}+\mathsf{B})\mu]\sin\psi=\mathfrak{e},\\ \mathsf{A}\mathsf{B}(1-\mu^2)-\mathsf{P}[(\mathsf{A}+\mathsf{B})-(\mathsf{A}-\mathsf{B})\lambda]+\mathsf{P}^2=\mathfrak{f},\\ \text{wobei } \mathsf{P}=\varrho^2 \text{ und } \lambda=\mu\cos\Psi=\mu(\cos^2\psi-\sin^2\psi) \text{ ist.}\end{cases}$$

Dass aber diese Gleichungen nicht blos ein System von der verlangten Art (System Σ), sondern mehrere liefern, ist klar. Man findet, dass sich aus ihnen durch Elimination von A, B, μ, ψ eine Gleichung sechsten Grades für P oder dritten Grades für $[\mathsf{P}+\frac{1}{8}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})]^2$ ergiebt, und jedem Werthe von P, der dieser Gleichung genügt, wiederum zwei verschiedene Werthe von A, B, μ, ψ entsprechen. Demnach kann man sagen:

Es giebt zwölf Systeme Σ, die eine gegebene Curve $\mathfrak{C}$ (bicirculare Curve vierter Ordnung) erzeugen, und zwar haben sie paarweise **denselben** Mittelpunktskreis.

Ein anderer Beweis für die letztere Behauptung ist im § 5 enthalten. Uebrigens wird auch die genannte Elimination und die Aufstellung der Gleichung sechsten Grades für P für den Fall, dass die Curve $\mathfrak{C}$ eine Symmetrieaxe besitzt, später wirklich bewerkstelligt werden (Abschnitt II).

Da jedoch in diesem Falle die Curve gleich in der Normalform gegeben und zur x-Axe symmetrisch ist, so werden wir, damit die Umrechnung von ψ und μ auf λ und τ vermieden werde, mehrmals gleich die ursprüngliche Form von 20b) benutzen. Ist die gegebene Curve

$$52)\qquad (x^2+y^2)^2+\mathfrak{a}x^2+\mathfrak{b}y^2+2\mathfrak{d}x+\mathfrak{f}=0,$$

so hat man für die fünf Unbekannten A, B, ϱ, λ, τ die sechs Gleichungen

$$53)\quad\begin{cases}(\mathsf{A}+\mathsf{B})-(\mathsf{A}-\mathsf{B})\lambda+2\mathsf{P}=-\mathfrak{a}, \quad (\mathsf{A}+\mathsf{B})+(\mathsf{A}-\mathsf{B})\lambda+2\mathsf{P}=-\mathfrak{b},\\ (\mathsf{A}-\mathsf{B})\tau=0;\\ \varrho[(\mathsf{A}-\mathsf{B})-(\mathsf{A}+\mathsf{B})\lambda]=-\mathfrak{d}, \quad \varrho(\mathsf{A}+\mathsf{B})\tau=0;\\ \mathsf{A}\mathsf{B}(1-\mu^2)-\mathsf{P}[(\mathsf{A}+\mathsf{B})-(\mathsf{A}-\mathsf{B})\lambda]+\mathsf{P}^2=\mathfrak{f}.\end{cases}$$

Es ist stets leicht, diese Bedingungen gleichzeitig zu erfüllen ($\tau=0$).

§ 4. Ort entsprechender Punkte der Kegelschnitte des Systemes Σ: die Curven Π.

Da alle Kegelschnitte des Systemes Σ einander ähnlich sind, so ist eine naheliegende Frage: Welches ist der Ort entsprechender Punkte P in ihnen? Dabei verstehe ich unter einem Systeme entsprechender Punkte nicht blos entsprechende Punkte der Peripherie, sondern ich betrachte allgemein die Bewegung eines beliebigen Punktes P_0, der zum Ausgangskegelschnitte E_0 (Taf. I Fig. 1 u. 3) eine gegebene Lage hat und bei der Bewegung dieses Kegelschnittes stets dieselbe relative Lage behält, so dass zu einer beliebigen Zeit die Figur, welche aus dem Kegelschnitte Q

und dem Punkte P besteht, der aus dem Kegelschnitte E_0 und dem Punkte P_0 zusammengesetzten Figur ähnlich ist.

Der Ort der Punkte P enthält selbstverständlich die Mittelpunkte der vier zerfallenden Kegelschnitte. Auch beschreiben je zwei Punkte P_0, welche mit E_0 in gerader Linie liegen und gleichweit von E_0 entfernt sind, dieselbe Curve.

Die Strecke $\overline{E_0 P_0}$ (Taf. I Fig. 4) ($= \overline{F_0 P'_0}$, wenn P'_0 der entsprechende Punkt im Kegelschnitte F_0 ist) sei mit v bezeichnet; dann ist allgemein

$$\overline{QP} = v\sqrt{1 - \lambda \cos\Phi - \tau \sin\Phi}.$$

Der Winkel von v gegen die durch E laufende Axe des Kegelschnittes sei ω, und es werde

$$2\omega = \Omega \tag{54}$$

gesetzt. Ist dann O der Punkt, in welchem die Verlängerung von PQ den Kreis $\mathfrak{K}$ schneidet, so muss auch $\angle EQO = \angle EE_0 O = \angle EF_0 O = \omega$ sein; PQ läuft also beständig durch O. Deshalb ist es zweckmässig, O zum Anfange eines Coordinatensystemes (x_0, y_0) zu machen, dessen Axen den Axen x, y parallel sind. Dabei hat man $\angle QOx_0 = \varphi + \omega$, $\angle EKO = 2\omega = \angle KOx_0$, also, wenn der Gegenpunkt von O im Kreise $\mathfrak{K}$ O' genannt wird, $\angle O'OQ = \omega - \varphi$. Da $\overline{OO'} = 2\varrho$, so ergiebt sich $\overline{OQ} = 2\varrho\cos(\omega - \varphi)$. Führt man Polarcoordinaten ein: $r = \overline{OP}$, $u = \angle POx_0$, so ist eine Darstellung des Ortes der Punkte P:

$$\begin{cases} r = 2\varrho\cos(\omega - \varphi) \pm v\sqrt{1 - \lambda\cos\Phi - \tau\sin\Phi}, \\ u = \omega + \varphi; \end{cases}$$

oder die Polarcoordinatengleichung ist:

$$r - 2\varrho\cos(u - \Omega) = \pm v\sqrt{1 - \lambda\cos(2u - \Omega) - \tau\sin(2u - \Omega)}.$$

Hieraus folgt im Coordinatensysteme (x_0, y_0):

$$\begin{aligned} &(x_0^2 + y_0^2)^2 - 4\varrho(x_0^2 + y_0^2)(x_0\cos\Omega + y_0\sin\Omega) + 4\varrho^2(x_0\cos\Omega + y_0\sin\Omega)^2 \\ &\quad - v^2[x_0^2 + y_0^2 - (\lambda\cos\Omega - \tau\sin\Omega)(x_0^2 - y_0^2) \\ &\quad\quad - (\lambda\sin\Omega + \tau\cos\Omega).2x_0 y_0] = 0. \end{aligned} \tag{55}$$

Das heisst:

D e r O r t e n t s p r e c h e n d e r P u n k t e d e r K e g e l s c h n i t t e d e s S y s t e m e s Σ i s t e i n e b i c i r c u l a r e C u r v e v i e r t e r O r d n u n g.

Im ursprünglichen Coordinatensysteme (x, y) erhält man als Gleichung dieser Curve:

$$\begin{aligned} &(x^2 + y^2 - \varrho^2)^2 - v^2[x_0^2 + y_0^2 - (\lambda\cos\Omega - \tau\sin\Omega)(x_0^2 - y_0^2) \\ &\quad - (\lambda\sin\Omega + \tau\cos\Omega).2x_0 y_0] = 0, \\ &x_0 = x + \varrho\cos\Omega, \quad y_0 = y + \varrho\sin\Omega. \end{aligned} \tag{56}$$

Um diese Gleichung auf die N o r m a l f o r m zu bringen, muss man das Coordinatensystem (x, y) um den Winkel

57) $$\vartheta = \omega + \psi$$

nach dem neuen Systeme (x', y') drehen. So ergiebt sich:

58) $$\begin{aligned}&(x'^2 + y'^2)^2 - x'^2(2\varrho^2 + v^2(1-\mu)) - y'^2(2\varrho^2 + v^2(1+\mu)) \\ &- 2v^2\varrho\,(x'(1-\mu)\cos(\omega-\psi) + y'(1+\mu)\sin(\omega-\psi)) \\ &+ \varrho^2[\varrho^2 - v^2(1-\mu\cos(\Omega-\Psi))] = 0\end{aligned}$$

als Gleichung in der Normalform.

Soll insbesondere P_0 ein Punkt des Kegelschnittes E_0 sein, fragt man also nach der Curve Π, die von entsprechenden Peripheriepunkten der Kegelschnitte Σ gebildet wird, so muss man

59) $$v^2 = \frac{AB}{A\sin^2\omega + B\cos^2\omega} = \frac{2AB}{(A+B) - (A-B)\cos\Omega}$$

setzen. Dann wird aus 56):

60) $$\begin{aligned}&[A+B-(A-B)\cos\Omega]\,(x^2+y^2-\varrho^2)^2 \\ &- 2AB\,[x^2+y^2-(x^2-y^2)(\lambda\cos\Omega - \tau\sin\Omega) - 2xy\,(\lambda\sin\Omega + \tau\cos\Omega) \\ &+ 2\varrho\,(x\cos\Omega + y\sin\Omega) - 2\varrho\,(\lambda x + \tau y) + \varrho^2 - \varrho^2(\lambda\cos\Omega + \tau\sin\Omega)] = 0.\end{aligned}$$

Man weist leicht nach, dass diese Curven Π dieselbe bicirculare Curve vierter Ordnung $\mathfrak{C}$ einhüllen, wie das Kegelschnittssystem Σ;* sie sind für die letztere viermal berührende bicirculare Curven vierter Ordnung, und zwar werden die Berührungspunkte ebenfalls von einem Kegelschnittsbüschel ausgeschnitten, das allerdings nur dann, wenn $A = B$ ist, aus gleichseitigen Hyperbeln besteht. (Vergl. § 6.) Aus der Normalform 58) erhält man weiter den Satz [vergl. 39), 40)]:

Die Doppelbrennpunkte des Curvensystemes Π erfüllen zwei confocale Kegelschnitte, die den Kegelschnitten Σ ähnlich sind.

Nimmt man nämlich das Coordinatensystem $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ (vergl. S. 15), so haben die vier Doppelbrennpunkte von 58) zufolge 39), 40), 57) die Coordinaten:

$$\mathfrak{x} = \pm v\sqrt{-\frac{\mu}{2}}\cos\omega, \quad \mathfrak{y} = \pm v\sqrt{-\frac{\mu}{2}}\sin\omega,$$

bez.

$$\mathfrak{x} = \mp v\sqrt{\frac{\mu}{2}}\sin\omega, \quad \mathfrak{y} = \pm v\sqrt{\frac{\mu}{2}}\cos\omega.$$

Die Gleichungen der beiden Kegelschnitte sind also nach 59):

61) $$B\mathfrak{x}^2 + A\mathfrak{y}^2 + \frac{AB}{2}\mu = 0, \quad A\mathfrak{x}^2 + B\mathfrak{y}^2 - \frac{AB}{2}\mu = 0.$$

Insbesondere sind in dem Systeme Π auch zwei zerfallende Curven enthalten, offenbar diejenigen, welche den unendlich fernen Punkten der Kegelschnitte Σ entsprechen ($A\sin^2\omega + B\cos^2\omega = 0$). Jede

* Dies folgt schon aus dem Burmester'schen Satze, dass bei der Bewegung eines ebenen Systemes die von einer Systemcurve erzeugte Hüllbahn auch von den Bahnen der einzelnen Punkte der Systemcurve eingehüllt wird.

dieser Curven zerfällt nämlich in die doppelt zu zählende unendlich ferne Gerade und je einen Bestandtheil der beiden zerfallenden Kegelschnitte des Systemes Σ. Dies ist schon geometrisch klar. In der That lässt unter der Bedingung $\mathsf{A}\,sin^2\omega + \mathsf{B}\,cos^2\omega = 0$ die linke Seite der dann quadratisch werdenden Gl. 60) sich in zwei lineare Factoren zerspalten, von welchen der eine eine Gerade des ersten, der andere eine Gerade des zweiten zerfallenden Kegelschnittes darstellt [vergl. 47), 48)] (beide zusammen aber einen zerfallenden Kegelschnitt des Systemes Σ', s. § 5).

Der Ort der Hauptscheitel der Kegelschnitte Σ wird sich aus 58) oder 60) ergeben, wenn man $\Omega = 0$ setzt:

$$62)\quad \begin{gathered}(x'^2+y'^2)^2 - x'^2(2\varrho^2+\mathsf{A}(1-\mu)) - y'^2(2\varrho^2+\mathsf{A}(1+\mu)) \\ -2\mathsf{A}\varrho(x'(1-\mu)\cos\psi - y'(1+\mu)\sin\psi) + \varrho^2(\varrho^2 - \mathsf{A}(1-\mu\cos\psi)) = 0, \\ \vartheta = \psi;\end{gathered}$$

$$63)\quad \begin{gathered}(x^2+y^2-\varrho^2)^2 \\ -\mathsf{A}[x^2(1-\lambda)+y^2(1+\lambda) - 2xy\tau + 2x\varrho(1-\lambda) - 2y\varrho\tau + \varrho^2(1-\lambda)] = 0;\end{gathered}$$

ebenso der Ort der Nebenscheitel ($\Omega = \pi$):

$$64)\quad \begin{gathered}(x'^2+y'^2)^2 - x'^2(2\varrho^2+\mathsf{B}(1-\mu)) - y'^2(2\varrho^2+\mathsf{B}(1+\mu)) \\ -2\mathsf{B}\varrho(x'(1-\mu)\sin\psi + y'(1+\mu)\cos\psi) + \varrho^2(\varrho^2 - \mathsf{B}(1+\mu\cos\psi)) = 0, \\ \vartheta = \psi + \frac{\pi}{2};\end{gathered}$$

$$65)\quad \begin{gathered}(x^2+y^2-\varrho^2)^2 \\ -\mathsf{B}[x^2(1+\lambda)+y^2(1-\lambda) + 2xy\tau - 2x\varrho(1+\lambda) - 2y\varrho\tau + \varrho^2(1+\lambda)] = 0.\end{gathered}$$

Die Doppelbrennpunkte der Hauptscheitelcurve sind die Hauptscheitel des ersten und die Nebenscheitel des zweiten, dagegen die Doppelbrennpunkte der Nebenscheitelcurve die Hauptscheitel des zweiten und die Nebenscheitel des ersten der beiden in 61) angegebenen Kegelschnitte.* Vergl. die Fortsetzung dieser Betrachtungen im § 6.

§ 5. Ort entsprechender Tangenten der Kegelschnitte eines Systemes Σ. Conjugirte Systeme Σ, Σ'.

Man kann andererseits auch entsprechende Geraden g betrachten und fragen: welche Curve wird von ihnen eingehüllt? Im Anschlusse an den vorigen Paragraphen darf man (vergl. Taf. I Fig. 4 u. 5) ohne Beschränkung der Allgemeinheit das Loth in P auf OP als beliebige Gerade g nehmen, demnach das Loth g_0 in P_0 auf OP_0 als entsprechende Ausgangsgerade. Es sei jetzt das Axensystem des Kegelschnittes Q Coordinatensystem (x'', y'') (s. S. 6 u. Taf. I Fig. 1); dann wird darin die Gleichung von g:

* Etwas abweichend von der gewöhnlichen Definition verstehe ich hier und im Folgenden unter Hauptscheiteln allgemein die in der $\mathfrak{x}$-Axe, ev. x-Axe, unter Nebenscheiteln die in der $\mathfrak{y}$-Axe, ev. y-Axe liegenden Scheitel.

66) $$x'' \cos\omega + y'' \sin\omega \mp v\sqrt{1-\lambda\cos\Phi - \tau\sin\Phi} = 0$$

oder nach 7) im Coordinatensysteme (x, y):

67) $$(X-\varrho\varkappa)^2\cos^2\omega - 2(X-\varrho\varkappa)(Y+\varrho\sigma)\cos\omega\sin\omega + (Y+\varrho\sigma)^2\sin^2\omega = v^2(1-\lambda\cos\Phi - \tau\sin\Phi).$$

Die Differentiation nach der Variablen φ liefert:

68) $$\begin{aligned}&-(X-\varrho\varkappa)(Y-\varrho\sigma)\cos^2\omega\\ &-[(X-\varrho\varkappa)(X+\varrho\varkappa)-(Y-\varrho\sigma)(Y+\varrho\sigma)]\cos\omega\sin\omega\\ &+(X+\varrho\varkappa)(Y+\varrho\sigma)\sin^2\omega = v^2(\lambda\sin\Phi - \tau\cos\Phi).\end{aligned}$$

Durch Multiplication von 67) mit $(Y-\varrho\sigma)$, von 68) mit $(X-\varrho\varkappa)$ und Addition ergiebt sich:

69) $$\begin{aligned}&-[(X-\varrho\varkappa)\cos\omega - (Y+\varrho\sigma)\sin\omega].\mathrm{k}\sin\omega\\ &= v^2[Y-\varrho\sigma + \lambda[(x-\varrho)\sigma + y\varkappa] - \tau[(x-\varrho)\varkappa - y\sigma]];\end{aligned}$$

dagegen, wenn man 67) mit $(X+\varrho\varkappa)$, 68) mit $(Y+\varrho\sigma)$ multiplicirt und dann subtrahirt:

70) $$\begin{aligned}&[(X-\varrho\varkappa)\cos\omega - (Y+\varrho\sigma)\sin\omega].\mathrm{k}\cos\omega\\ &= v^2[X+\varrho\varkappa - \lambda[(x+\varrho)\varkappa - y\sigma] - \tau[(x+\varrho)\sigma + y\varkappa)]].\end{aligned}$$

Die Gleichungen 69), 70) sind wiederum homogen und linear in $\varkappa$ und σ, so dass sich sofort φ eliminiren lässt. Was k betrifft, so ist diese Abkürzung S. 8 erklärt. Bei der Bildung der Gleichung der eingehüllten Curve fallen die Glieder sechsten Grades weg, die Glieder vierten Grades werden

$$\begin{aligned}&v^4\{[(x-\varrho)\tau + y(1-\lambda)][(x+\varrho)\tau - y(1+\lambda)] - [(x+\varrho)(1-\lambda) - y\tau][(x-\varrho)(1+\lambda) + y\tau]\}\\ &= -v^4\{x^2+y^2-\varrho^2\}(1-\lambda^2-\tau^2) = -v^4\mathrm{k}(1-\mu^2),\end{aligned}$$

so dass sich der Factor $v^2\mathrm{k}$ herausheben lässt. Dann bleibt die Gleichung zweiten Grades übrig:

71) $$\begin{aligned}&x^2(1+\lambda\cos\Omega - \tau\sin\Omega) + 2xy(\lambda\sin\Omega + \tau\cos\Omega) + y^2(1-\lambda\cos\Omega + \tau\sin\Omega)\\ &-2x\varrho(\lambda+\cos\Omega) - 2y\varrho(\tau+\sin\Omega) + \varrho^2(1+\lambda\cos\Omega + \tau\sin\Omega) - v^2(1-\mu^2) = 0.\end{aligned}$$

Also darf man den Satz aufstellen:

Der Ort entsprechender Geraden g des Kegelschnittssystemes Σ ist ein Kegelschnitt.

Weiter findet man: Dieser Kegelschnitt ist gänzlich unabhängig von ω eine

72) $$\left.\begin{array}{l}\text{Ellipse}\\ \text{Parabel}\\ \text{Hyperbel}\end{array}\right\}, \text{ je nachdem } \mu \lesseqgtr 1$$

ist. Verschiebt man das Coordinatensystem, dass O', der Gegenpunkt von O im Mittelpunktskreise $\mathfrak{K}$, sein Anfangspunkt wird, und dreht es dann um den Winkel

73) $$w = \psi + \omega,$$

so erhält man, wenn man es jetzt (x_1, y_1) nennt, die Gleichung des Kegelschnittes 71) in der Form:

74) $$x_1^2(1+\mu) + y_1^2(1-\mu) - v^2(1-\mu^2) = 0.$$

Alle diese von Systemen entsprechender Geraden g eingehüllten Kegelschnitte sind also einander ähnlich, und zwar ist das Axenverhältniss gleich $\sqrt{\pm\frac{1-\mu}{1+\mu}}$.

Wenn insbesondere die Geraden g ein System entsprechender **Tangenten** der Kegelschnitte Σ sind, so soll der eingehüllte Kegelschnitt Q' heissen. Die Bedingung dafür, nämlich dass g_0 den Kegelschnitt E_0 berührt, ist bekanntlich

$$75)\qquad v^2 = \mathsf{A}\cos^2\omega + \mathsf{B}\sin^2\omega.$$

Alsdann wird im Coordinatensysteme (x_1, y_1) (s. S. 22 u. Taf. I Fig. 5) die Gleichung von Q' mit Rücksicht auf 74):

$$76)\qquad \frac{x_1^2}{v^2(1-\mu)} + \frac{y_1^2}{v^2(1+\mu)} = 1, \quad v^2 = \mathsf{A}\cos^2\omega + \mathsf{B}\sin^2\omega.$$

Die Axen von Q' müssen den Mittelpunktskreis $\mathfrak{K}$ in zwei Gegenpunkten E'', F'' schneiden, da ja der Mittelpunkt O' von Q' auf diesem Kreise liegt; E'' liege auf dem Halbkreise $EE'F$, also F'' auf $EF'F$; so ist $\angle E''O'O = \Omega - (\psi + \omega) = \omega - \psi$ und $\angle O'E''K = \angle E''O'O$, $\angle EKE'' = w - \angle O'E''K$, mithin $\angle EKE'' = w - (\omega - \psi) = 2\psi = \Psi$. Hieraus folgt, weil demnach die Punkte E'', F'' mit E', F' (Taf. I Fig. 1 u. 5) identisch sind:

Die Axen aller (d. h. der den verschiedenen Werthen von ω entsprechenden) Kegelschnitte Q' laufen durch die festen Punkte E', F'.*

Die Gleichung von Q' im Coordinatensystem (x, y) wird nach 71) und 75):

$$77)\qquad \begin{aligned} &x^2(1+\lambda\cos\Omega - \tau\sin\Omega) + y^2(1-\lambda\cos\Omega + \tau\sin\Omega) + 2xy(\lambda\sin\Omega + \tau\cos\Omega) \\ &\quad - 2x\varrho(\lambda + \cos\Omega) - 2y\varrho(\tau + \sin\Omega) \\ &\quad + \mathsf{P}(1+\lambda\cos\Omega + \tau\sin\Omega) - (\mathsf{A}\cos^2\omega + \mathsf{B}\sin^2\omega)(1-\mu^2) = 0. \end{aligned}$$

Insbesondere hat man für die Curven der Haupt- und Nebenscheiteltangenten:

$$78)\qquad \begin{aligned} &x^2(1+\lambda) + y^2(1-\lambda) + 2xy\tau - 2x\varrho(1+\lambda) - 2y\varrho\tau + \varrho^2(1+\lambda) \\ &\qquad - \mathsf{A}(1-\mu^2) = 0 \qquad (\omega = 0), \end{aligned}$$

$$79)\qquad \begin{aligned} &x^2(1-\lambda) + y^2(1+\lambda) - 2xy\tau + 2x\varrho(1-\lambda) - 2y\varrho\tau + \varrho^2(1-\lambda) \\ &\qquad - \mathsf{B}(1-\mu^2) = 0 \qquad \left(\omega = \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Von der ersten ist F, von der zweiten E der Mittelpunkt.

Reducirt man die Gleichung 77) auf dasjenige Coordinatensystem (x', y'), dessen Anfangspunkt K, dessen x-Axe KF' ist, das also durch Drehung von (x, y) um den Winkel Ψ entsteht (vergl. Taf. I Fig. 5 und die Fig. auf S. 26), so ergiebt sich:

* Dies gilt übrigens selbstverständlich auch von den Kegelschnitten 74) überhaupt, gleichgiltig, ob v die Bedingung 75) erfüllt oder nicht.

$$80)\quad \begin{aligned} &x'^2(1+\lambda\cos\Omega+\tau\sin\Omega)+2x'y'(\lambda\sin\Omega-\tau\cos\Omega)+y'^2(1-\lambda\cos\Omega-\tau\sin\Omega)\\ &-2x'\varrho\left[\mu+\frac{1}{\mu}(\lambda\cos\Omega+\tau\sin\Omega)\right]-2y'\varrho\frac{1}{\mu}(\lambda\sin\Omega-\tau\cos\Omega)\\ &+\mathsf{P}(1+\lambda\cos\Omega+\tau\sin\Omega)-(\mathsf{A}\cos^2\omega+\mathsf{B}\sin^2\omega)(1-\mu^2)=0. \end{aligned}$$

Die Quadrate der Halbaxen haben dabei die Werthe [s. 75), 76)]:

$$81)\quad (\mathsf{A}\cos^2\omega+\mathsf{B}\sin^2\omega)(1\mp\mu).$$

Die extremen Werthe der Halbaxen (der grösste und kleinste Kegelschnitt $\mathfrak{Q}'$) ergeben sich durch Differentiation dieses Ausdruckes nach ω: $\sin\Omega=0$; die Mittelpunkte der extremen Kegelschnitte $\mathfrak{Q}'$ sind also E und F (ebenso, wie die Mittelpunkte der extremen Kegelschnitte $\mathfrak{Q}$ E' und F' sind).

Aus allen diesen Thatsachen wird man schon die Vermuthung gerechtfertigt finden, dass das System Σ' der Kegelschnitte $\mathfrak{Q}'$ ein ebensolches System sein möge, wie Σ selbst. Diese Vermuthung wird sich bestätigen. Wir fragen zunächst: Welche Curve wird von dem Systeme Σ' eingehüllt?

Die Differentiation von 77) nach ω giebt:

$$82)\quad \begin{aligned} &x^2(\lambda\sin\Omega+\tau\cos\Omega)-y^2(\lambda\sin\Omega+\tau\cos\Omega)-2xy(\lambda\cos\Omega-\tau\sin\Omega)\\ &-2x\varrho\sin\Omega+2y\varrho\cos\Omega+\mathsf{P}(\lambda\sin\Omega-\tau\cos\Omega)-\frac{\mathsf{A}-\mathsf{B}}{2}(1-\mu^2)\sin\Omega=0. \end{aligned}$$

D. h. (wie im Systeme Σ): Die Berührungspunkte je zweier parallelaxiger Kegelschnitte $\mathfrak{Q}'$ werden von einer gleichseitigen Hyperbel $\mathfrak{H}'$ ausgeschnitten, deren Asymptoten den Axen jener parallel sind; alle diese Hyperbeln bilden ein **Büschel**, u. s. w.

Um nun aus 77) und 82) ω auszustossen, multipliciren wir zum Ersten 77) mit $x\cos\omega+y\sin\omega$, 82) mit $x\sin\omega-y\cos\omega$, und addiren; zum Zweiten aber 77) mit $x\sin\omega-y\cos\omega$, 82) mit $x\cos\omega+y\sin\omega$, und subtrahiren. Auf diese Weise gehen zwei neue, in $\cos\omega$ und $\sin\omega$ lineare homogene Gleichungen hervor:

$$\begin{aligned} &[x(x^2+y^2)+(x^2+y^2)(\lambda x+\tau y)-2\varrho(x^2+y^2)-2\varrho x(\lambda x+\tau y)\\ &\qquad\qquad+(\mathsf{P}(1+\lambda)-\mathsf{A}(1-\mu^2))x+y\mathsf{P}\tau]\cos\omega\\ &+[y(x^2+y^2)-(x^2+y^2)(\tau x-\lambda y)-2\varrho y(\lambda x+\tau y)\\ &\qquad\qquad+(\mathsf{P}(1-\lambda)-\mathsf{B}(1-\mu^2))y+x\mathsf{P}\tau]\sin\omega=0,\\ &[y(x^2+y^2)+(x^2+y^2)(\tau x-\lambda y)-2\varrho y(\lambda x+\tau y)\\ &\qquad\qquad+(\mathsf{P}(1+\lambda)-\mathsf{A}(1-\mu^2))y-x\mathsf{P}\tau]\cos\omega\\ &-[x(x^2+y^2)-(x^2+y^2)(\lambda x+\tau y)+2\varrho(x^2+y^2)-2\varrho x(\lambda x+\tau y)\\ &\qquad\qquad+(\mathsf{P}(1-\lambda)-\mathsf{B}(1-\mu^2))x-y\mathsf{P}\tau]\sin\omega=0. \end{aligned}$$

Die Beseitigung von ω aus beiden Gleichungen liefert nach Weglassung des gemeinsamen Factors $(x^2+y^2)(1-\mu^2)$ genau die Gleichung 20b). Also folgt der Satz:

Das Kegelschnittssystem Σ' hüllt dieselbe bicirculare Curve vierter Ordnung $\mathfrak{C}$ ein, wie das System Σ.*

Es sollen zunächst erst die Grundpunkte des Büschels der die Berührungspunkte ausschneidenden Hyperbeln $\mathfrak{H}'$ 82) ermittelt werden.

Mit Hilfe des Winkels Ψ lässt sich Gl. 82) schreiben:

$$(x^2-y^2)\sin(\Omega+\Psi)-2xy\cos(\Omega+\Psi)-2x\frac{\varrho}{\mu}\sin\Omega+2y\frac{\varrho}{\mu}\cos\Omega$$
$$+\mathsf{P}\sin(\Omega-\Psi)-(\mathsf{A}-\mathsf{B})\frac{1-\mu^2}{2\mu}\sin\Omega=0.$$

Wir gehen jetzt zum Coordinatensysteme (x', y') über, indem wir das System x, y um den Winkel Ψ drehen:

$$(x'^2-y'^2)\sin(\Omega-\Psi)-2x'y'\cos(\Omega-\Psi)-2x'\frac{\varrho}{\mu}\sin(\Omega-\Psi)$$
$$+2y'\frac{\varrho}{\mu}\cos(\Omega-\Psi)+\mathsf{P}\sin(\Omega-\Psi)-(\mathsf{A}-\mathsf{B})\frac{1-\mu^2}{2\mu}\sin\Omega=0.$$

Den Mittelpunkt dieses Büschels nennen wir G' (ebenso wie G der Mittelpunkt des Hyperbelbüschels $\mathfrak{H}$ ist); seine Coordinaten sind

83) $$y'=0,\quad x'=\frac{\varrho}{\mu}\quad\text{oder}\quad x=\frac{\varrho\lambda}{\mu^2},\quad y=\frac{\varrho\tau}{\mu^2};$$

er liegt auf der Geraden KF' um $KG'=\frac{\varrho}{\mu}$ von K entfernt. Es sei (ξ', η') ein neues Coordinatensystem: sein Anfang sei G', seine ξ'-Axe falle mit der x'-Axe zusammen, seine η'-Axe sei der y'-Axe parallel. In diesem Systeme wird die Gleichung von $\mathfrak{H}'$:

84) $$(\xi'^2-\eta'^2)\sin(\Omega-\Psi)-2\xi'\eta'\cos(\Omega-\Psi)$$
$$-\mathsf{P}\frac{1-\mu^2}{\mu^2}\sin(\Omega-\Psi)-(\mathsf{A}-\mathsf{B})\frac{1-\mu^2}{2\mu}\sin\Omega=0.$$

Insbesondere für $\Omega=\Psi+\frac{\pi}{2}$ und $\Omega=\Psi$, also für die beiden Hyperbeln $\mathfrak{H}'$, welche die Berührungspunkte der zum System Σ' gehörenden Kegelschnitte E_0, F_0 bez. E', F' ausschneiden:

85) $$\xi'^2-\eta'^2=\frac{1-\mu^2}{\mu^2}\left[\mathsf{P}+\lambda\frac{\mathsf{A}-\mathsf{B}}{2}\right],\quad \xi'\eta'=-\frac{1-\mu^2}{\mu^2}\cdot\tau\frac{\mathsf{A}-\mathsf{B}}{4}.$$

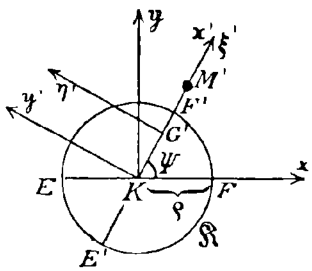
---

* Vergl. hierzu einen gewissen, in meiner Arbeit über die Kreisfusspunktcurven mit ($\mathfrak{A}$) bezeichneten Satz, aus dem der obige Satz sofort hervorgeht. Ich darf nicht unterlassen, darauf hinzuweisen, dass, wie Herr Prof. Burmester mir mitzutheilen die Güte hatte, viele der in jener Arbeit aufgestellten Sätze in naher Beziehung zu den kinematischen Untersuchungen stehen, die der Genannte bereits früher veröffentlicht hat. Da ich unmöglich hier näher darauf eingehen kann, so muss ich auf sein Lehrbuch der Kinematik und auf die Aufsätze in der Zeitschrift f. Mathem. u. Phys., Bd. 19 S. 154 flg., S. 465 flg.; Bd. 20 S. 381 flg. verweisen. Insbesondere der allgemeine Satz über die Fusspunktcurven in meiner Arbeit findet sich, wenn auch in anderer Form, vollständig in diesen Untersuchungen. Unter dem Gesichtspunkte der letzteren erscheint auch die vorliegende Abhandlung als ein Beitrag zur Kinematik ähnlich-veränderlicher Systeme. Doch habe ich die analytische Betrachtungsweise als die ursprüngliche beibehalten.

Aus diesen Gleichungen ergeben sich die vier Grundpunkte des Hyperbelbüschels $\mathfrak{H}'$ mit Beibehaltung der Abkürzung ζ [vergl. 25)]:

$$86)\quad \begin{cases} \xi'_1 = -\dfrac{\sqrt{(\mathsf{A}-\mathsf{B})(1-\mu^2)\left[\zeta+\sqrt{\zeta^2+\tau^2}\right]}}{2\mu}, \\ \eta'_1 = \mp\dfrac{\sqrt{(\mathsf{A}-\mathsf{B})(1-\mu^2)\left[-\zeta+\sqrt{\zeta^2+\tau^2}\right]}}{2\mu}; \end{cases} \qquad \begin{cases} \xi'_3 = -\dfrac{\sqrt{(\mathsf{A}-\mathsf{B})(1-\mu^2)\left[\zeta-\sqrt{\zeta^2+\tau^2}\right]}}{2\mu}, \\ \eta'_3 = \mp\dfrac{\sqrt{(\mathsf{A}-\mathsf{B})(1-\mu^2)\left[-\zeta-\sqrt{\zeta^2+\tau^2}\right]}}{2\mu}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi'_2 = -\xi'_1, \\ \eta'_2 = -\eta'_1; \end{cases} \qquad \begin{cases} \xi'_4 = -\xi'_3, \\ \eta'_4 = -\eta'_3. \end{cases}$$



Für jeden Index ist also nach 27) und 86)

$$87)\qquad \pm\frac{\xi'}{\eta'} = \pm\frac{\xi}{\eta}.$$

Dabei ist in 86) das Vorzeichen von η' so zu wählen (zufolge 85), dass $\xi'\eta'$ das Vorzeichen von $(\mu-1)\tau(\mathsf{A}-\mathsf{B})$ erhält. — Diese vier Grundpunkte 86) nennen wir H', J', H'_1, J'_1.

Im Coordinatensystem (x', y') (S. 22 und Taf. I Fig. 5) ist die Gleichung der eingehüllten Curve $\mathfrak{C}$ folgende [s. 20a)]:*

$$88)\quad \begin{aligned} &(x'^2+y'^2-\varrho^2)^2 \\ &-x'^2[(\mathsf{A}+\mathsf{B})-(\mathsf{A}-\mathsf{B})\lambda]-y'^2[(\mathsf{A}+\mathsf{B})+(\mathsf{A}-\mathsf{B})\lambda]-2x'y'(\mathsf{A}-\mathsf{B})\tau \\ &+2\varrho\left[(\mathsf{A}+\mathsf{B})\mu-(\mathsf{A}-\mathsf{B})\frac{\lambda}{\mu}\right]x'+2\varrho(\mathsf{A}-\mathsf{B})\frac{\tau}{\mu}y' \\ &+\mathsf{A}\mathsf{B}(1-\mu^2)-\varrho^2[(\mathsf{A}+\mathsf{B})-(\mathsf{A}-\mathsf{B})\lambda]=0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung spielt also** für das Kegelschnittssystem Σ' dieselbe Rolle wie die Gleichung 20a) für Σ; und man kann, indem man jetzt die den Grössen A, B, ϱ, λ, τ, entsprechenden Grössen im Systeme Σ' mit A', B', ϱ', λ', τ' bezeichnet und $\lambda'^2+\tau'^2=\mu'^2$ setzt, Gl. 88) analog 20a) zu schreiben versuchen:

$$89)\quad \begin{aligned} &(x'^2+y'^2-\varrho'^2)^2 \\ &-x'^2[(\mathsf{A}'+\mathsf{B}')-(\mathsf{A}'-\mathsf{B}')\lambda']-y'^2[(\mathsf{A}'+\mathsf{B}')+(\mathsf{A}'-\mathsf{B}')\lambda']+2x'y'(\mathsf{A}'-\mathsf{B}')\tau' \\ &+2\varrho'[(\mathsf{A}'+\mathsf{B}')\lambda'-(\mathsf{A}'-\mathsf{B}')]x'+2\varrho'(\mathsf{A}'+\mathsf{B}')\tau'y' \\ &+\mathsf{A}'\mathsf{B}'(1-\mu'^2)-\varrho'^2[(\mathsf{A}'+\mathsf{B}')-(\mathsf{A}'-\mathsf{B}')\lambda']=0. \end{aligned}$$

Durch Vergleichung mit 88) erhält man zunächst $\varrho'=\varrho$, wie ja nach dem Bisherigen klar ist, da, wie gezeigt wurde, das System Σ' genau denselben Mittelpunktskreis hat, wie das System Σ.

---

* Für den Uebergang hat man $x = x'\cos\Psi - y'\sin\Psi$, $y = x'\sin\Psi + y'\cos\Psi$ oder $x = \dfrac{\lambda x' - \tau y'}{\mu}$, $y = \dfrac{\tau x' + \lambda y'}{\mu}$.

** Allerdings abgesehen von der Richtung der Coordinatenaxen.

Weiter erhält man

$$90)\quad \begin{gathered} A'+B'=A+B,\quad (A'-B')\lambda'=(A-B)\lambda,\quad (A'-B')\tau'=-(A-B)\tau,\\ (A'+B')\tau'=(A-B)\frac{\tau}{\mu},\quad (A'+B')\lambda'-(A'-B')=(A+B)\mu-(A-B)\frac{\lambda}{\mu},\\ A'B'(1-\mu'^2)=AB(1-\mu^2). \end{gathered}$$

Die ersten vier dieser Gleichungen würden zur Bestimmung von A', B', λ', τ' ausreichen; sobald sich aber zeigt, dass dann die übrigen zwei Gleichungen ebenfalls mit erfüllt sind, so ist bewiesen, dass die Systeme Σ und Σ' gleichartig sind. Aus der zweiten und dritten Bedingung folgt:

$$91a)\quad \frac{\lambda'}{\tau'}=-\frac{\lambda}{\tau},$$

aus der ersten und vierten:

$$91b)\quad \tau'=\frac{A-B}{A+B}\cdot\frac{\tau}{\mu},$$

also nach 91a)

$$91c)\quad \lambda'=-\frac{A-B}{A+B}\cdot\frac{\lambda}{\mu}.$$

Hiernach geben die erste und zweite Gleichung 90):

$$91d)\quad A'+B'=A+B,\quad A'-B'=-(A+B)\mu,$$

woraus man zieht:

$$91e)\quad A'=\frac{A+B}{2}(1-\mu),\quad B'=\frac{A+B}{2}(1+\mu).$$

Sofort erkennt man, dass die fünfte und sechste Gleichung 90) identisch durch 91b, c, e) erfüllt werden. Da nun die Systeme Σ' und Σ gewissermassen als gleichwerthig erscheinen, so liegt es nahe, zu vermuthen, dass umgekehrt das System Σ dem Systeme Σ' in derselben Weise entsprechen möge, wie das System Σ' dem Systeme Σ, dass also analog 89) die Gleichungen bestehen:

$$92)\quad \begin{gathered} A+B=A'+B',\quad (A-B)\lambda=(A'-B')\lambda',\quad (A-B)\tau=-(A'-B')\tau',\\ (A+B)\tau=(A'-B')\frac{\tau'}{\mu'},\quad (A+B)\lambda-(A-B)=(A'+B')\mu'-(A'-B')\frac{\lambda'}{\mu'},\\ AB(1-\mu^2)=A'B'(1-\mu'^2). \end{gathered}$$

Die erste, zweite, dritte und sechste dieser Gleichungen sind mit den entsprechenden Gleichungen 90) geradezu identisch; die vierte und fünfte aber werden thatsächlich durch die Werthe 91b, c, e) erfüllt, wenn man

$$93)\quad \mu'=\frac{B-A}{B+A}$$

setzt.* Denn aus der Definition $\mu'^2=\lambda'^2+\tau'^2$ folgt auf Grund von 91b, c) nur $\mu'^2=\left(\frac{A-B}{A+B}\right)^2$, und für das Vorzeichen von μ' geben die Bedingungen

* Aus diesen Formeln weist man nach: die Kegelschnitte aus den Doppelbrennpunkten der Curven Π', die von entsprechenden Punkten der Kegelschnitte Σ' erfüllt werden, sind mit den entsprechenden zwei Kegelschnitten des Systemes Σ [61)] confocal, vergl. S. 19, 20.

90) gar keinen Anhalt. Dass sich für μ' nicht ebenso, wie μ den absoluten Werth von $\sqrt{\lambda^2+\tau^2}$ bedeutete, auch der absolute Werth von $\sqrt{\lambda'^2+\tau'^2}$ ergiebt, liegt an der Wahl des Coordinatensystemes; denn hätten wir auch noch diese Uebereinstimmung herbeiführen wollen, so hätten wir bei Bestimmung der positiven Richtung von x'- und y'-Axe unterscheiden müssen, ob E oder F der Mittelpunkt des grössten Kegelschnittes Σ' ist [ebenso wie im Coordinatensystem (x, y) feststeht, dass stets E' der Mittelpunkt des grössten, und F' der des kleinsten Kegelschnittes Σ ist, s. S. 7]; dies ist aber nicht geschehen, denn wenn $\frac{A-B}{A+B} > 0$ ist, ist F, wenn aber $\frac{A-B}{A+B} < 0$ ist, E der Mittelpunkt des grössten Kegelschnittes Σ'. — Da die Umkehrungen von 90) richtig sind, so werden natürlich auch die Gleichungen 91), insbesondere 91b, c, e) sich umkehren lassen:

$$94) \qquad \begin{gathered} \tau = \frac{A'-B'}{A'+B'} \cdot \frac{\tau'}{\mu'}, \qquad \lambda = -\frac{A'-B'}{A'+B'} \cdot \frac{\lambda'}{\mu'}, \\ A = \frac{A'+B'}{2}(1-\mu'), \quad B = \frac{A'+B'}{2}(1+\mu'). \end{gathered}$$

Die Reciprocität der Systeme Σ und Σ' ist also vollständig bewiesen. Aus 91a) würde für den dem Winkel Ψ entsprechenden Winkel Ψ' folgen: $\Psi = -\Psi'$ bez. $\Psi = \pi - \Psi'$, wie ja schon aus den Erörterungen S. 23 hervorging.

Entsprechend den Sätzen S. 22, 23 wird man also umgekehrt sagen dürfen:

Jedes System entsprechender Tangenten der Kegelschnitte Σ' hüllt einen Kegelschnitt des Systemes Σ ein.

Natürlich muss nun auch der Satz für das System Σ' gelten, dass alle Kreisvierecke, in welchen sich je zwei parallelaxige Kegelschnitte schneiden, einem und demselben Kreise eingeschrieben sind, dem „Schnittpunktskreise“ des Systemes Σ'; und dass der Mittelpunkt M' dieses Kreises und der Punkt G' zusammen mit E', F' harmonische Punkte sind (vergl. S. 12). Dies lässt sich leicht auch geradeswegs mit Hilfe der Gleichung 77) bestätigen. Im Coordinatensysteme (x', y') werden die Coordinaten des Punktes M' sein:

$$95) \qquad y' = 0, \quad x' = \varrho\mu.$$

Der Radius s' des Schnittpunktskreises wird [wie man z. B. dadurch findet, dass man in die nach Massgabe von 31) gebildete Formel $s' = \sqrt{\frac{2A'B'}{(A'+B')^2}(A'+B'-2P')}$ die Werthe 91e) einsetzt]

$$96) \qquad s' = \sqrt{\frac{1-\mu^2}{2}(A+B-2P)}.$$

Die Gerade $E'F'G'KM'$ ist als Axe von Σ' zu bezeichnen (s. S. 12).

Zwei solche vollständig zu einander reciproke Kegelschnittssysteme Σ, Σ' nenne ich fernerhin kurzweg „conjugirte Kegelschnittssysteme". Ihre Haupteigenschaften sind also:

Jedes System entsprechender Tangenten der Kegelschnitte des einen Systemes hüllt einen Kegelschnitt des andern Systemes ein. Beide Systeme haben den Mittelpunktskreis gemein. Die zwei Punktepaare dieses Kreises, durch welche die Axen aller Kegelschnitte der Systeme laufen, sind zugleich die Mittelpunkte der grössten und kleinsten Kegelschnitte, die in den Systemen enthalten sind, und liegen ebenso wie die Axen der beiden Systeme (die ja mit den Verbindungslinien jener Punkte zusammenfallen) symmetrisch zu den Doppelbrennpunkten derjenigen Curve $\mathfrak{C}$, die von dem einen, wie von dem andern Kegelschnittssysteme eingehüllt wird (vergl. S. 15).*

Als selbstverständlich kann auf Grund der bisherigen Untersuchungen hinzugefügt werden:

Es ist unmöglich, dass von zwei conjugirten Systemen Σ und Σ' das eine reell, das andere imaginär wäre, falls $\mathfrak{C}$ reell ist. Entweder sind sie beide reell, oder beide imaginär.

Die Mittelpunkte der beiden zerfallenden Kegelschnitte des Systemes Σ' mögen L', N' heissen (vergl. S. 17). Sie liegen symmetrisch zu der Geraden EF, ebenso wie L, N symmetrisch zu $E'F'$. Für sie ist nach 81) $tg\,\omega = \sqrt{\frac{-\mathsf{A}}{\mathsf{B}}}$ oder $\cos\Omega = \frac{\mathsf{B}+\mathsf{A}}{\mathsf{B}-\mathsf{A}}$ oder, wenn wir diesen Winkel Ω mit H' bezeichnen: $tg\frac{\mathsf{H}'}{2} = \sqrt{-\frac{\mathsf{A}}{\mathsf{B}}}$; und für die Winkel, welche von den zugehörigen Doppeltangenten mit den Axen $E'L'$ bez. $E'N'$ gebildet werden, hat man [vergl. 76)] $tg\,\Xi' = \sqrt{\frac{\mu+1}{\mu-1}}$, mithin für ihre Winkel mit der Axe $F'L'$ bez. $F'N'$ $tg\left(\frac{\pi}{2}-\Xi'\right) = \sqrt{\frac{\mu-1}{\mu+1}}$. Dagegen ist im Systeme Σ $tg\frac{\mathsf{H}}{2} = \sqrt{\frac{\mu-1}{\mu+1}}$, $tg\left(\frac{\pi}{2}-\Xi\right) = \sqrt{-\frac{\mathsf{A}}{\mathsf{B}}}$ (vergl. die 1. Anmerkung S. 17). Hieraus folgt aber nun (vergl. Taf. I Fig. 6): $\frac{\pi}{2}-\Xi' = \frac{\mathsf{H}}{2}$, $\frac{\pi}{2}-\Xi = \frac{\mathsf{H}'}{2}$. Hieraus wieder ergiebt sich der wichtige Satz: dass die Doppeltangenten von N' ebensowohl wie von L' durch L bez. N gehen, und umgekehrt die Doppeltangenten sowohl des Kegelschnittes L, als des Kegelschnittes N durch L' bez. N'. D. h.:

Die vier Doppeltangenten des Systemes Σ sind **dieselben**, welche im conjugirten Systeme Σ' vorkommen. Diejenigen vier

* Ueber das zu Σ, Taf. I Fig. 2a, conjugirte System Σ' vergl. Fig. 2b.

von ihren sechs Schnittpunkten, welche die Mittelpunkte der vier zerfallenden Kegelschnitte sind, bilden ein **Kreisviereck**, das dem Mittelpunktskreise der Systeme Σ, Σ' eingeschrieben ist.*

Auch erkennt man nun, in welchem Zusammenhange die Punkte G, G' mit L, N, L', N' stehen: denn es ist $\cos \mathsf{H}' = -\frac{\mathsf{A}+\mathsf{B}}{\mathsf{A}-\mathsf{B}}$, folglich die Projection von KL' oder KN' auf EF gleich $-\varrho\frac{\mathsf{A}+\mathsf{B}}{\mathsf{A}-\mathsf{B}}$, gleich h nach 23). Ebenso wird umgekehrt das Loth in G' auf $E'F'$ durch L und N gehen. Also:

Der Mittelpunkt G' des Hyperbelbüschels $\mathfrak{H}'$, das die Berührungspunkte im Systeme Σ' ausschneidet, ist die Mitte zwischen den Mittelpunkten der dem Systeme Σ angehörigen zerfallenden Kegelschnitte; und umgekehrt, der Mittelpunkt G des zu Σ gehörigen Hyperbelbüschels $\mathfrak{H}$ ist die Mitte der Linie, welche die Mittelpunkte der im Systeme Σ' vorkommenden zerfallenden Kegelschnitte verbindet (s. Taf. I Fig. 6).

Da die Bestandtheile eines zerfallenden Kegelschnittes zugleich seine Asymptoten sind, die Axen aller Kegelschnitte des Systemes Σ durch die Punkte E, F gehen, überdies alle Kegelschnitte einander ähnlich sind, so hat man weiterhin den Satz:

Die Asymptoten aller Kegelschnitte Σ gehen durch die Mittelpunkte der dem Systeme Σ' angehörenden zerfallenden Kegelschnitte, und umgekehrt.

Dies ist übrigens ein Specialfall des Reciprocitätsgesetzes S. 29.

Im Systeme Σ' erhält man die beiden anderen zerfallenden Kegelschnitte (deren Mittelpunkte die Kreispunkte im Unendlichen sind), indem man in der Gleichung von Q' [77)] $\sin\Omega = \infty$, $\cos\Omega = \infty$, $\frac{\sin\Omega}{\cos\Omega} = \pm i$ $(i = \sqrt{-1})$ setzt [s. 33)]:

$$97) \quad \begin{aligned} x^2(\lambda \mp \tau i) \pm 2xy(\lambda \mp \tau i)i - y^2(\lambda \mp \tau i) - 2x\varrho \mp 2y\varrho i \\ + \mathsf{P}(\lambda \pm \tau i) - (1-\mu^2)\mathsf{M} = 0 \end{aligned}$$

oder

$$98) \quad (x \pm iy)^2 - 2\varrho(x \pm iy)\left(\frac{\lambda \pm \tau i}{\mu}\right)^2 - \mathsf{M}(\lambda \pm \tau i)\frac{1-\mu^2}{\mu^2} = 0.$$

Man sieht, dass die hierdurch dargestellten vier Geraden von den entsprechenden im Systeme Σ [50)] verschieden sind. Es giebt aber im Ganzen von jedem Doppelpunkte aus nur vier Tangenten an die Curve $\mathfrak{C}$. Hieraus folgt:

Während die Geraden derjenigen zerfallenden Kegelschnitte des Systemes Σ', die aus wirklichen Doppeltangen-

* In Taf. I Fig. 2a und 2b sind die Doppeltangenten imaginär.

ten bestehen, mit denen von Σ verwechselt zusammenfallen, sind die beiden anderen zerfallenden Kegelschnitte von Σ, nämlich diejenigen, die von Tangenten aus den Doppelpunkten an die Curve gebildet werden, von denen des Systemes Σ verschieden, und zwar so, dass die beiden conjugirten Systeme Σ, Σ' zusammen alle acht derartigen Tangenten enthalten.

Weiter erkennt man, dass die zerfallenden Kegelschnitte L', N' eines reellen Systemes Σ' nur dann reell sind, wenn $abs. \left|\frac{\mathsf{B}+\mathsf{A}}{\mathsf{B}-\mathsf{A}}\right| < 1$ ist. Dazu ist nöthig, dass A und B entgegengesetztes Vorzeichen haben ($\mathsf{AB} < 0$), oder mit anderen Worten, dass das System Σ aus Hyperbeln besteht. Besteht dieses System aber aus Ellipsen ($\mathsf{AB} > 0$), so ist nothwendig $abs. \left|\frac{\mathsf{B}+\mathsf{A}}{\mathsf{B}-\mathsf{A}}\right| > 1$, und also sind L' und N' imaginär. Umgekehrt: Das System Σ' besteht aus Ellipsen oder Hyperbeln, je nachdem $\mu < 1$ oder $\mu > 1$ ist [vergl. 91 e)]; und die zerfallenden Kegelschnitte L, N des Systemes Σ sind reell im zweiten Falle (wenn $\mu > 1$ ist), imaginär im ersten ($\mu < 1$). Für reelle conjugirte Systeme Σ, Σ' hat man also folgende Tabellen, wenn man durch ein H oder E andeutet, dass ein System aus Hyperbeln bez. Ellipsen besteht, und durch ein r oder i, dass seine zerfallenden Kegelschnitte reell oder imaginär sind:

99) Σ:

	E	H
r	$\mathsf{AB} > 0$, $\mu > 1$	$\mathsf{AB} < 0$, $\mu > 1$
i	$\mathsf{AB} > 0$, $\mu < 1$	$\mathsf{AB} < 0$, $\mu < 1$

Σ':

	E	H
r	$\mu < 1$, $\mathsf{AB} < 0$	$\mu > 1$, $\mathsf{AB} < 0$
i	$\mu < 1$, $\mathsf{AB} > 0$	$\mu > 1$, $\mathsf{AB} > 0$

Hieraus erkennt man, dass bei **reellen** conjugirten Systemen Σ, Σ' nur folgende drei Möglichkeiten bleiben: Entweder **beide** bestehen aus **Ellipsen** mit **imaginären** zerfallenden Kegelschniten, oder **beide** aus **Hyperbeln** mit **reellen** zerfallenden Kegelschnitten; oder endlich das eine aus **Ellipsen** mit **reellen**, das andere aus **Hyperbeln** mit **imaginären** zerfallenden Kegelschnitten (dagegen sind die Combinationen Er, Er; Er, Ei; Er, Hr; Ei, Hr; Ei, Hi; Hr, Hi; Hi, Hi ausgeschlossen).

Beachtenswerth ist ferner, dass es auch Fälle giebt, wo die beiden conjugirten Systeme Σ, Σ' **zusammenfallen**, oder also **das System Σ sich selbst conjugirt ist.** Um dies zu beweisen, greifen wir auf die Kegelschnittsgleichungen Q und Q' selbst, nämlich 18) und 77) zurück. Damit für einen beliebigen Werth von Ω der Kegelschnitt 77) in dem Systeme Σ [18)] enthalten ist, müssen, wenn mit N ein unbekannter Factor bezeichnet wird, gleichzeitig folgende sechs Gleichungen für die sieben Grössen Φ, N, A, B, P, λ, τ ($\lambda^2 + \tau^2 = \mu^2$) erfüllt sein, und zwar unabhängig von Ω:

$$
100)\quad\left\{\begin{aligned}
&N(1+\lambda\cos\Omega-\tau\sin\Omega)=\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}\cos\Phi,\\
&N(\lambda\sin\Omega+\tau\cos\Omega)\qquad=-\frac{A-B}{2}\sin\Phi,\\
&N(1-\lambda\cos\Omega+\tau\sin\Omega)=\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}\cos\Phi,\\
&N(\lambda+\cos\Omega)\qquad=-\frac{A-B}{2}+\frac{A+B}{2}\cos\Phi,\\
&N(\tau+\sin\Omega)\qquad=\frac{A+B}{2}\sin\Phi,\\
&\left.\begin{array}{l} NP(1+\lambda\cos\Omega+\tau\sin\Omega)\\ -N\left(\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}\cos\Omega\right)(1-\mu^2)\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{l} P\left(\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}\cos\Phi\right)\\ -AB(1-\lambda\cos\Phi-\tau\sin\Phi).\end{array}\right.
\end{aligned}\right.
$$

Addirt man die erste und dritte dieser Gleichungen, so erhält man

$$N=\frac{A+B}{2}.$$

Alsdann giebt die Division der ersten und zweiten, nachdem man in der ersten beiderseits den Summanden $\frac{A+B}{2}$ weggelassen hat:

$$tg(\Omega+\Psi)=tg\Phi,$$

und die fünfte, nachdem man sie mit $\frac{A-B}{A+B}$ multiplicirt und rechts $\frac{A-B}{2}\sin\Phi$ nach Massgabe der zweiten durch $-\frac{A+B}{2}(\lambda\sin\Omega+\tau\cos\Omega)$ ersetzt hat, wodurch sie in die Gleichung $\frac{A-B}{2}(\tau+\sin\Omega)+\frac{A+B}{2}(\lambda\sin\Omega+\tau\cos\Omega)=0$ übergeht:

$$\tau=0,\quad \lambda=-\frac{A-B}{A+B};$$

denn diese Gleichung soll ja, wie die übrigen auch, nach Voraussetzung für jeden Werth von Ω erfüllt sein. Wegen $\tau=0$ wird aber nun $\Psi=0$ oder $=\pi$, je nachdem λ positiv oder negativ ist, folglich

$$\Phi=\Omega \text{ bez. } \Phi=\Omega+\pi.$$

Die erste, zweite und dritte Gleichung 100) liefern aber nun übereinstimmend

$$\Phi=\Omega,$$

so dass die Gleichung $\Phi=\Omega+\pi$ ausgeschlossen ist. Auch die vierte (ebenso wie die fünfte) der Gleichungen 100) stimmt mit den soeben abgeleiteten Gleichungen, nämlich

$$101)\qquad =\lambda-\frac{A-B}{A+B},\quad \tau=0\quad\left(\mu=abs.\left|\frac{A-B}{A+B}\right|\right),\quad \Phi=\Omega$$

vollständig überein. Die sechste aber wird zufolge dieser Bedingungen:

$$\mathsf{P}\left(\frac{\mathsf{A}+\mathsf{B}}{2}\lambda+\frac{\mathsf{A}-\mathsf{B}}{2}\right)+(1-\lambda\cos\Omega)\left[\mathsf{AB}-\left(\frac{\mathsf{A}+\mathsf{B}}{2}\right)^2(1-\lambda^2)\right]=0$$

oder

$$\left(\frac{\mathsf{A}+\mathsf{B}}{2}\lambda+\frac{\mathsf{A}-\mathsf{B}}{2}\right)\left[\mathsf{P}+(1-\lambda\cos\Omega)\left(\frac{\mathsf{A}+\mathsf{B}}{2}\lambda-\frac{\mathsf{A}-\mathsf{B}}{2}\right)\right]=0,$$

ist also ebenfalls erfüllt, weil der erste Factor nach 101) verschwindet. Hiermit ist die Behauptung erwiesen. Die eingehüllte Curve ist jedoch (wegen $\tau=0$) symmetrisch zur x-Axe [vergl. 20)]. Bei einer unsymmetrischen bicircularen Curve vierter Ordnung kann dagegen niemals ein System Σ vorkommen, das sich selbst conjugirt wäre.

Für ein solches System findet man weiter nach 23), 27), 83), 86):

$$102)\quad \begin{cases}\xi_1=\xi'_1=\sqrt{\left|\dfrac{2\mathsf{AB}}{\mathsf{A}-\mathsf{B}}\cdot\zeta\right|}, \\ \eta_1=\eta'_1=0,\end{cases}\qquad \begin{cases}\xi_2=\xi'_2=-\xi_1=-\xi'_1, \\ \eta_2=\eta'_2=0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\xi_3=\xi'_3=0, \\ \eta_3=\eta'_3=\pm\sqrt{\left|\dfrac{2\mathsf{AB}}{\mathsf{B}-\mathsf{A}}\cdot\zeta\right|},\end{cases}\qquad \begin{cases}\xi_4=\xi'_4=0, \\ \eta_4=\eta'_4=-\eta_3=-\eta'_3;\end{cases}$$

für G ist $h=-\varrho\dfrac{\mathsf{A}+\mathsf{B}}{\mathsf{A}-\mathsf{B}}$, dagegen sind die Coordinaten von G' $y'=0$, $x'=\varrho\,.\,abs.\dfrac{\mathsf{A}+\mathsf{B}}{\mathsf{A}-\mathsf{B}}\cdot$ Ist nun $\lambda>0$ (also $\Psi=0$, so dass F mit F', E mit E' zusammenfällt), so ist auch $h>0$: $h'=\varrho\,.\,abs\left|\dfrac{\mathsf{A}+\mathsf{B}}{\mathsf{A}-\mathsf{B}}\right|$; ist aber $\lambda<0$ ($\Psi=\pi$, so dass F' und E, E' und F zusammenfallen), so ist $h<0$, aber die x'-Axe fällt in die negative x-Axe. In jedem Falle also werden der Punkt G' mit G und nach 102) also auch die vier Punkte H', J', H'_1, J'_1 mit H, J, H_1, J_1 zusammenfallen. Die Coordinaten von G und M (das dann natürlich mit M' identisch ist) werden

$$103)\quad G\colon\ y=0,\ x=-\varrho\frac{\mathsf{A}+\mathsf{B}}{\mathsf{A}-\mathsf{B}};\qquad M\colon\ y=0,\ x=-\varrho\frac{\mathsf{A}-\mathsf{B}}{\mathsf{A}+\mathsf{B}}.$$

Aus der Gleichung der eingehüllten Curve 20) erkennt man dann weiter, dass sie in zwei Kreise zerfällt und zwei von den Punkten H, J, H_1, J_1 die Schnittpunkte dieser Kreise sind.* Dieser merkwürdige Fall wird später ausführlich behandelt werden (s. Beispiel 4). Jedenfalls hat man den Satz:

* Man findet aus 20b) [vergl. 101)] als Gleichung des obengenannten Kreispaares:

$$\left[x^2+y^2-(\mathsf{A}-\mathsf{B})\sqrt{\left|\frac{2}{\mathsf{A}+\mathsf{B}}\right|}\,x-\frac{2\mathsf{AB}}{\mathsf{A}+\mathsf{B}}-\varrho\sqrt{|2(\mathsf{A}+\mathsf{B})|}-\mathsf{P}\right]$$
$$\times\left[x^2+y^2+(\mathsf{A}-\mathsf{B})\sqrt{\left|\frac{2}{\mathsf{A}+\mathsf{B}}\right|}\,x-\frac{2\mathsf{AB}}{\mathsf{A}+\mathsf{B}}+\varrho\sqrt{|2(\mathsf{A}+\mathsf{B})|}-\mathsf{P}\right]=0.$$

Ueberdies kann wieder der eine Kreis zerfallen, nämlich in eine im Endlichen liegende und die unendlich ferne Gerade (s. IV. Abschn. § 3).

Eine bicirculare Curve vierter Ordnung, welche von einem Systeme Σ, **das sich selbst conjugirt ist**, eingehüllt wird, besteht nothwendig aus zwei Kreisen.*

Ueber die Systeme Σ, Σ' lässt sich weiter der folgende Satz ableiten:

Die Grundpunkte 27), 86) der Büschel gleichseitiger Hyperbeln $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}'$, die in den Systemen Σ und Σ' die Berührungspunkte der Kegelschnittspaare $Q\,Q_1$, $Q'\,Q'_1$ bestimmen, sind Brennpunkte der eingehüllten Curve $\mathfrak{C}$.

Und zwar lehrt eine einfache Rechnung (vergl. auch S. 37), dass die Punkte H, J, H', J' auf einem Kreise (Brennpunktskreis) liegen, ebenso H_1, J_1, H'_1, J'_1.

Der Beweis dieses Satzes für das System Σ folgt eigentlich schon aus einigen Bemerkungen in §§ 1 und 3 (vergl. den Schluss des § 1). Da nämlich die Geraden, aus denen diejenigen zerfallenden Kegelschnitte bestehen, deren Mittelpunkte die Doppelpunkte der Curve $\mathfrak{C}$ sind, Tangenten an $\mathfrak{C}$ von den Doppelpunkten aus sind, so sind ihre gegenseitigen vier Schnittpunkte, durch die jede Hyperbel $\mathfrak{H}$ hindurchgehen wird, eben Brennpunkte von $\mathfrak{C}$. Dass jede Hyperbel $\mathfrak{H}$ wirklich durch diese vier Brennpunkte hindurchläuft, lehrt, abgesehen von der Betrachtung am Schlusse des § 1, eine einfache Rechnung. Denn nach 49) sind diese vier Brennpunkte durch die folgenden Gleichungen bestimmt (die man durch Trennung des Reellen vom Imaginären erhält):

$$\left\{\begin{aligned} x^2-y^2+2x\varrho\frac{\mathsf{\Lambda}}{\mathsf{M}}+\mathsf{P}-\lambda\frac{\mathsf{\Lambda}^2-\mathsf{M}^2}{\mathsf{M}}&=0,\\ xy+y\varrho\frac{\mathsf{\Lambda}}{\mathsf{M}}-\tau\frac{\mathsf{\Lambda}^2-\mathsf{M}^2}{2\mathsf{M}}&=0\end{aligned}\right.$$

oder

$$\left\{\begin{aligned}\left(x+\varrho\frac{\mathsf{A}+\mathsf{B}}{\mathsf{A}-\mathsf{B}}\right)^2-y^2-2\frac{\mathsf{AB}}{\mathsf{A}-\mathsf{B}}\left(2\frac{\mathsf{P}}{\mathsf{A}-\mathsf{B}}+\lambda\right)&=0,\\ \left(x+\varrho\frac{\mathsf{A}+\mathsf{B}}{\mathsf{A}-\mathsf{B}}\right)y-\frac{\mathsf{AB}}{\mathsf{A}-\mathsf{B}}\tau&=0.\end{aligned}\right.$$

Diese Gleichungen stellen aber gerade diejenigen beiden gleichseitigen Hyperbeln dar, als deren Schnittpunkte S. 10 [vergl. 22), 23), 26)] die Grundpunkte 27) des Hyperbelbüschels $\mathfrak{H}$ berechnet wurden. Man kann also den obigen Satz wie folgt aussprechen:

Jeder der beiden Doppelpunkte ist Mittelpunkt eines zerfallenden Kegelschnittes im Systeme Σ; und zwar bestehen diese beiden Kegelschnitte aus denjenigen beiden Tangentenpaaren von den Doppelpunkten, deren Schnittpunkte die Grundpunkte des zu Σ gehörenden Hyperbelbüschels $\mathfrak{H}$ sind. Aehnliches gilt vom Systeme Σ'.

---

* Hierbei ist vom Falle $\mathsf{A}=\mathsf{B}=\mathsf{P}=\infty$, wobei die Curve in einen Kegelschnitt und die doppelt gezählte unendlich ferne Gerade zerfällt, abgesehen.

Es ist nun nicht schwer, von dem Systempaare Σ, Σ' aus den Uebergang zu den übrigen fünf Systempaaren zu machen, da sie genau dieselben Eigenschaften haben müssen, wie das Systempaar Σ, Σ', und dieselbe Curve $\mathfrak{C}$ erzeugen (s. S. 18), wie dieses.

Der Brennpunktskreis $HJH'J'$ möge $\mathfrak{B}$, $H_1 J_1 H'_1 J'_1$ aber $\mathfrak{B}_1$ heissen. Ferner mögen die Antipunkte von H, H'; J, J'; H, J'; H', J bez. H_2, J_2; H'_2, J'_2; H_3, J_3; H'_3, J'_3 heissen. Dann werden offenbar H, J, H', J', H_1, J_1, H'_1, ..., J'_3 die 16 Brennpunkte von $\mathfrak{C}$ sein, und sowohl $H_2 J_2 H'_2 J'_2$ als $H_3 J_3 H'_3 J'_3$ ein Kreisviereck bilden. Die hierdurch bestimmten übrigen zwei Brennpunktskreise sollen $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$ genannt werden; die Mittelpunkte der Brennpunktskreise $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$ aber $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$ heissen. Diese Punkte können auch so bestimmt werden: $\mathfrak{M}$ als Schnittpunkt von $H_1 J_1$ mit $H'_1 J'_1$, oder von $H_2 J_2$ mit $H'_2 J'_2$ u. s. f.; $\mathfrak{M}_1$ als Schnitt von HJ mit $H'J'$; $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$ als Schnittpunkte von HH' mit JJ' bez. von HJ' mit $H'J$.

Ebenso, wie die conjugirten Systeme Σ, Σ' zu den Brennpunktskreisen $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$ in Beziehung stehen, wird ein anderes Paar Σ_1, Σ'_1 zu $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_2$, ein drittes Σ_2, Σ'_2 zu $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_3$, ein viertes, fünftes, sechstes zu $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, bez. $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_3$, bez. $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$ in derselben Beziehung stehen.

Bekanntlich sind die Mittelpunkte $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$ der Brennpunktskreise mit den Mittelpunkten der vier Doppeltangentenpaare von $\mathfrak{C}$ identisch, wie sich auch leicht aus den abgeleiteten Formeln und mehreren im Folgenden auseinandergesetzten Beziehungen ergiebt (übrigens ist die Curve $\mathfrak{C}$ mit Beziehung auf jeden Brennpunktskreis zu sich selbst invers).* So fallen z. B. diejenigen beiden Schnittpunkte der vier im Systempaare $\Sigma\Sigma'$ vorkommenden Doppeltangenten, die nicht auf dessen Mittelpunktskreis liegen und die späterhin (§ 6) auch mit L_1, N_1 bezeichnet sind, mit den Punkten $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$ zusammen.

Was insbesondere die drei Systempaare $\Sigma\Sigma'$, $\Sigma_1\Sigma'_1$, $\Sigma_2\Sigma'_2$ betrifft, so lässt sich folgende Tabelle für sie aufstellen:

104)	$\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1$	Σ: H, J; H_1, J_1	Σ': H', J'; H'_1, J'_1	I.
	$\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_2$	Σ_1: H, H'; H_2, J_2	Σ'_1: J, J'; H'_2, J'_2	II.
	$\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_3$	Σ_2: H, J'; H_3, J_3	Σ'_2: H', J; H'_3, J'_3	III.

Hinter dem Zeichen eines jeden Systemes sind die vier Brennpunkte angegeben, die die Grundpunkte des zugehörigen Hyperbelbüschels sind; und zwar gehören die ersten beiden Brennpunkte jedesmal zum ersten, die letzten zwei zum zweiten der davor angegebenen Brennpunktskreise. Ebenso entsprechen den Combinationen $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$; $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_3$; $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$ die drei Systempaare Σ_3, Σ'_3; Σ_4, Σ'_4; Σ_5, Σ'_5. Bei den Beispielen, die im zweiten Abschnitte näher behandelt sind, beschränke ich mich auf die drei ersten Systempaare,

* Vergl. z. B. E. Czuber, Zeitschrift f. Mathem. u. Physik, Bd. 32 S. 257 flg., oder Salmon-Fiedler, Analyt. Geom. d. höh. eb. Curven, S. 331 (2. Aufl.).

weil im Allgemeinen die drei letzten imaginär sind, wenn jene reell sind. Nur im Falle des Kreispaares (Abschn. II § 5 und Abschn. IV § 3) sind alle sechs Paare berücksichtigt, von denen dann allerdings vier paarweise zusammenfallen.

Von jedem einzelnen Systempaare gelten dabei natürlich alle die Sätze, die für das erste Systempaar $\Sigma\Sigma'$ bewiesen worden sind. Ebenso z. B., wie die vier übrigen Schnittpunkte derjenigen Doppeltangentenpaare, deren Mittelpunkte $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$ sind, oder also derjenigen vier Doppeltangenten, die in dem Systempaare Σ, Σ' vorkommen, auf dem Mittelpunktskreise dieses Systempaares liegen, ebenso werden die vier Schnittpunkte der Doppeltangentenpaare $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_3$ oder der in Σ_1, Σ'_1 vorkommenden Doppeltangenten auf dem Mittelpunktskreise dieses Systempaares Σ_1, Σ'_1 liegen u. s. w.; und diese sechs Mittelpunktskreise müssen alle den Punkt K zum Mittelpunkte haben, den Schwerpunkt der vier Doppelbrennpunkte von $\mathfrak{C}$. Also hat man den Satz:

Je vier Schnittpunkte der sechs aus je zwei Paaren von Doppeltangenten gebildeten Quadrupel liegen auf einem Kreise; und diese sechs Kreise sind concentrisch. Ihr Mittelpunkt ist nämlich die Mitte des hyperbolischen Quadrates, dessen Ecken die Doppelbrennpunkte der Curve sind.

Geht man von einer reellen Curve $\mathfrak{C}$ aus, bei der die vier reellen Brennpunkte auf einem und demselben Brennpunktskreise liegen (Taf. I Fig. 7a), und bezeichnet man diese mit H, J, H', J', so dass der Brennpunktskreis selbst $\mathfrak{B}$ zu nennen ist, so werden dann offenbar die Systempaare Σ, Σ'; Σ_1, Σ'_1; Σ_2, Σ'_2 reell sein; sind aber z. B. H', J' imaginär und also ihre Antipunkte H'_1, J'_1 die beiden übrigen reellen Brennpunkte, so werden augenscheinlich auch die Systempaare Σ_1, Σ'_1; Σ_2, Σ'_2 imaginär sein, weil die gleichseitigen Hyperbeln, die die Berührungspunkte in ihnen bestimmen, dann imaginär sind:*

Falls die vier reellen Brennpunkte einer reellen bicircularen Curve vierter Ordnung $\mathfrak{C}$ auf ein und demselben Brennpunktskreise liegen, sind von den sechs Systempaaren drei reell. Wenn aber die vier reellen Brennpunkte zwei verschiedenen Brennpunktskreisen angehören, so ist nur ein Systempaar reell.

Versieht man die den Punkten G, G' und dem Winkel ψ des Systempaares Σ, Σ' in den Systempaaren Σ_1, Σ'_1, Σ_2, Σ'_2 entsprechenden Zeichen mit den Indices 1 bez. 2, so wird (vergl. Fig. 7a) G_1 die Mitte von HH', G'_1 die Mitte von JJ' sein (ebenso wie G die Mitte von HJ und G' die Mitte von $H'J'$ ist!), und G_2, G'_2 werden die Mitten der Strecken HJ' bez. $H'J$ sein. Ebenso wie GK und $G'K$ die Axen der Systeme Σ, Σ' sind, werden G_1K, G'_1K die Axen der Systeme Σ_1, Σ'_1 und G_2K, G'_2K die Axen der Systeme Σ_2, Σ'_2 sein. Ferner werden G_1K und G'_1K ent-

* Uebrigens kann auch von einem solchen imaginären Systempaare der Mittelpunktskreis oder der eine Bestandtheil der zerfallenden Kegelschnitte reell sein.

gegengesetzt gleich gegen die $\mathfrak{x}$- oder $\mathfrak{y}$-Axe (die Diagonalen CD und C_1D_1 des hyperbolischen Quadrates der Doppelbrennpunkte von $\mathfrak{C}$) geneigt sein, gleicherweise G_2K und G'_2K u. s. w., ebenso wie es bei den Axen GK, $G'K$ der Systeme Σ, Σ' der Fall ist. Also kann man sagen:

Die Axenpaare der sechs Systempaare haben gemeinsame Winkelhalbirungslinien. Diese sind nämlich die Diagonalen des hyperbolischen Quadrates der Doppelbrennpunkte.

Aus diesem Grunde werde ich, um einen kurzen Ausdruck gebrauchen zu können, diese Diagonalen kurz die Axen der Curve $\mathfrak{C}$ nennen. Bekanntlich sind sie auch die Axen der vier sogenannten Focalkegelschnitte, d. h. der Orte der Mittelpunkte derjenigen Kreise, die die Curve $\mathfrak{C}$ doppelt berühren.

Ueberdies ist zufolge 87) $\angle JGK = \angle H'G'K$, also hinsichtlich der Systempaare Σ_1, Σ'_1; Σ_2, Σ'_2 $\angle H'G_1K = \angle JG'_1K$, und $\angle HG_2K = \angle JG'_2K$. In diesen Winkelbeziehungen liegt übrigens ein Beweis dafür, dass $HJH'J'$ ein Kreisviereck ist.

Ausserdem aber erhält man aus allen den genannten Beziehungen eine grosse Menge anderer Sätze, von denen ich hier einige anführen will.

Zu jedem der zwölf Systeme Σ, Σ'; Σ_1, ..., Σ'_5 gehört ein Brennpunktsquadrupel; dies giebt im Ganzen zwölf Quadrupel. Da im Ganzen aber nur 16 Brennpunkte vorhanden sind, so wird jeder Brennpunkt drei solchen Quadrupeln angehören. In jedem Systempaare, z. B. im Systempaare Σ, Σ', kommen vier gleichseitige Hyperbeln vor (zwei Hyperbeln $\mathfrak{H}$ und zwei Hyperbeln $\mathfrak{H}'$), von denen jede durch die vier Berührungspunkte von zwei Doppeltangenten hindurchgeht; durch jeden Berührungspunkt der beiden zu Σ, Σ' gehörenden Doppeltangentenpaare gehen also zwei solcher Hyperbeln. Jedes Doppeltangentenpaar endlich gehört gleichzeitig drei Systempaaren an; demnach werden überhaupt durch jeden Berührungspunkt der acht Doppeltangenten $2.3 = 6$ gleichseitige Hyperbeln hindurchgehen. In jedem Systeme gehen durch das dazu gehörende Brennpunktsquadrupel zwei von diesen Hyperbeln (entsprechend den beiden zerfallenden Kegelschnitten), so dass, da jeder Brennpunkt drei Quadrupeln angehört, durch jeden einzelnen Brennpunkt ebenfalls $2.3 = 6$ von jenen gleichseitigen Hyperbeln laufen. Die Anzahl dieser Hyperbeln aber ist $2.12 = 24$. Dies kann man, falls man jede Combination von zwei Doppeltangentenpaaren ebenfalls ein Quadrupel nennt, wie folgt zusammenfassen:

Die Berührungspunkte eines jeden Quadrupels der Doppeltangenten werden von vier gleichseitigen Hyperbeln durch je ein Quadrupel der Brennpunkte bestimmt, was zusammen 24 solche gleichseitige Hyperbeln ergiebt. Durch jeden einzelnen Doppeltangentenberührungspunkt gehen sechs, durch jeden einzelnen Brennpunkt ebenfalls sechs von diesen Hyperbeln hindurch, und zwar so, dass je zwei Hyperbeln dasselbe

Brennpunktsquadrupel und je sechs die zwei Berührungspunkte einer und derselben Doppeltangente enthalten.*

Für das Doppeltangentenpaar L_1 (s. Taf. I Fig. 6), d. h. das Paar, das aus den Doppeltangenten LL' und NN' besteht, ist $\angle L'LN = \angle L'N'N$; dabei aber $LN \perp E'F'$, $L'N' \perp EF$, so dass LN, $L'N'$ entgegengesetzt gleich gegen die Curvenaxen geneigt sind (weil dies bei EF und $E'F'$ der Fall ist). Hieraus folgt sofort, dass auch LL' und NN' entgegengesetzt gleiche Winkel mit jeder Curvenaxe bilden. Dies gilt selbstverständlich auch für die anderen drei Doppeltangentenpaare (z. B. LN' und $L'N$). Also hat man den Satz:

Je zwei Doppeltangenten, die ein Paar bilden, sind **entgegengesetzt gleich gegen jede Curvenaxe** geneigt.

Endlich hebe ich noch die folgenden Sätze als besonders bemerkenswerth hervor:

I. Zieht man die Parallelen durch $\mathfrak{M}$ zu den Doppeltangenten, die sich in einem der übrigen Brennpunktskreiscentren schneiden ($\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$), so wird die Verbindungslinie der beiden sich ergebenden Schnittpunkte (die andere Diagonale des entstehenden Parallelogrammes) senkrecht auf $\mathfrak{M}K$ stehen. Aehnliches gilt von $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$.

II. Man fälle von K aus auf alle acht Doppeltangenten die Lothe, und verbinde jedesmal zwei Fusspunkte geradlinig mit einander, die zu einem Doppeltangentenpaare gehören. Die vier so entstehenden Verbindungslinien werden durch einen und denselben Punkt K_0 laufen und sich daselbst gegenseitig hälften.

III. Das Kegelschnittsbüschel, dessen Grundpunkte $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$ sind, besteht aus lauter gleichseitigen Hyperbeln. Unter diesen Hyperbeln befindet sich eine, die durch K hindurchgeht. Sie hat folgende Eigenschaften: Sie läuft durch die acht Fusspunkte der in II genannten Lothe; ihr Mittelpunkt ist der dort erwähnte Punkt K_0 (also hat sie die in II vorkommenden Verbindungslinien zu Durchmessern); ihre Asymptoten sind den Curvenaxen parallel; und endlich enthält sie die zwölf Punkte G, G'; G_1, ..., G'_5, d. h. die Mittelpunkte der zwölf hyperbolischen Brennpunktsquadrate, und zwar so, dass wiederum die sechs Verbindungslinien GG', $G_1G'_1$, ..., $G_5G'_5$ sich gegenseitig in K_0 hälften, mithin ebenfalls Durchmesser jener Hyperbel sind. Oder mit anderen Worten:

* Dass die acht Berührungspunkte eines jeden Doppeltangentenquadrupels auf einem Kegelschnitte liegen, wie sich leicht auch aus unseren Formeln ergiebt, hat Clebsch erwiesen; s. Crelle's Journ. Bd. 64, Ebene Curven, deren Coordinaten elliptische Functionen eines Parameters sind; das. S. 270.

Die Punkte $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$, GG', $G_1G'_1$, ..., $G_5G'_5$, K, sowie die acht Mitten derjenigen Sehnen, die von den Mittelpunktskreisen aus den Doppeltangenten ausgeschnitten werden, liegen auf einer gleichseitigen Hyperbel, deren Asymptoten den Curvenaxen parallel sind.

(Hat die Curve einen dritten Doppelpunkt, so wird er ebenfalls auf dieser Hyperbel liegen.)

Man kann noch hinzufügen:

Diese Hyperbel enthält auch die noch übrigen sechs Diagonalpunkte der sechs den Mittelpunktskreisen eingeschriebenen Vierecke, deren Ecken Doppeltangentenschnittpunkte sind; z. B. in dem Viereck $LNL'N'$ (Taf. I Fig. 6) die dritte Ecke des zugehörigen Diagonaldreieckes, nämlich den Schnittpunkt von LN mit $L'N'$ [die beiden anderen Diagonalecken sind L_1 und N_1 oder, was dasselbe ist, $\mathfrak{M}_2$ und $\mathfrak{M}_3$]. Da LN, $L'N'$ nichts Anderes als das dritte Seitenpaar des Viereckes $LNL'N'$ ist, und die Mitten dieser Seiten LN, $L'N'$ die Punkte G, G' sind, so kann man auch sagen:

Die in Rede stehende Hyperbel enthält ausser K die sämmtlichen Seitenmitten und Diagonalecken derjenigen den Mittelpunktskreisen eingeschriebenen sechs Vierecke, deren Ecken Doppeltangentenschnittpunkte sind.

IV. Die Punktepaare G liegen auf sechs Kreisen, deren Mittelpunkte die Mitten der sechs Seiten des Viereckes $\mathfrak{M}\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3$ und deren Potenzlinien diese Seiten selbst sind. Z. B.: Der Kreis über $\mathfrak{M}\mathfrak{M}_1$ als Durchmesser enthält die gegenseitigen Schnittpunkte der Brennpunktskreise $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$ (deren Mittelpunkte eben $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1$ sind), und geht durch die Punkte G, G', die zur Combination $\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3$ gehören. Ebenso geht der Kreis über $\mathfrak{M}\mathfrak{M}_2$ als Durchmesser durch die gegenseitigen Schnittpunkte der Brennpunktskreise $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_2$ und durch die Punkte G_1, G'_1, die der Combination $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_3$ der Doppeltangentenpaare entsprechen. Und diese beiden Kreise werden sich (ausser in $\mathfrak{M}$) noch in dem Schnittpunkte von $\mathfrak{M}\mathfrak{M}_3$ und $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2$ treffen.

V. Die zwölf Punkte M, M'; M_1, M'_1; ..., M_5, M'_5, d. h. die Mittelpunkte der zwölf Schnittpunktskreise, sind die Schnittpunkte der zwölf Systemaxen mit den bez. sechs Seiten des Viereckes $\mathfrak{M}\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3$ (vergl. dazu § 6), so dass auf jeder der sechs Seiten zwei von jenen Punkten liegen, und zwar zwei solche, die zu conjugirten Systemen gehören. Und zwar befinden sich die Mittelpunkte der Schnittpunktskreise irgend eines Systempaares auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte derjenigen Doppeltangentenpaare, die in dem Systempaare enthalten sind. So liegen z. B. M und M' auf $\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3$ (oder L_1N_1, vergl. Taf. I Fig. 6 und § 6). Ueberdies aber liegen die in Rede stehenden zwölf Punkte zu je dreien in 16 Geraden, so dass durch jeden Punkt vier von diesen geraden Linien hindurchgehen.

VI. Die zu den conjugirten Systemen Σ, Σ' gehörenden Schnittpunktskreise haben ihre Mittelpunkte M, M' auf der geraden Linie $\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3$ (s. Satz V) und schneiden die zwei Brennpunktskreise $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$, die die Grundpunkte der zu Σ, Σ' gehörenden Hyperbelbüschel $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}'$ enthalten, rechtwinklig, so dass die Centrale $\mathfrak{M}\mathfrak{M}_1$ von $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$ die gemeinsame Potenzlinie der vier Kreise M, M', $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$ ist. Aehnliches gilt von den fünf anderen Systempaaren Σ_1, Σ'_1; ...; Σ_5, Σ'_5.

VII. Solche **drei** Schnittpunktskreise, deren Mittelpunkte in gerader Linie liegen (s. Satz V), haben gemeinsame Potenzlinie. Und die so definirten 16 Potenzlinien laufen zu je vieren durch die Punkte $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$.

VIII. Die sechs Paare conjugirter Kegelschnittssysteme ordnen sich wieder zu je zweien (zu drei Doppelpaaren); es gehören nämlich immer zwei solche Paare zu einander, die zusammen alle acht Doppeltangenten enthalten. Bezeichnet man den Halbmesser des Mittelpunktskreises für ein Paar mit ϱ_{I}, für das dazu gehörende Paar mit ϱ_{II}, so hat $\varrho_{\mathrm{I}}^2 + \varrho_{\mathrm{II}}^2$, d. h. die Summe der Halbmesserquadrate, für alle drei Doppelpaare **denselben** Werth.

Endlich ist in Taf. I Fig. 7b die Configuration der Doppeltangenten dargestellt, jedoch ohne die Punkte G, G', ..., M, M', ..., K_0 u. s. w. In dieser Figur sind drei Doppeltangentenpaare reell; alle vier können nicht reell sein bei einer bicircularen Curve vierter Ordnung,* ausgenommen wenn sie in zwei ausserhalb einander liegende Kreise ausartet, da dann die Potenzlinie als reelle Doppeltangente vierfach zählt. Trotzdem können alle sechs Mittelpunktskreise reell sein. In Fig. 7b sind indessen drei davon imaginär, nämlich die den Combinationen $\mathfrak{M}\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}\mathfrak{M}_3$ entsprechen (wobei $\mathfrak{M}$ der Mittelpunkt des imaginären Doppeltangentenpaares ist). Auch der Brennpunktskreis $\mathfrak{M}_3$ ist imaginär (es können überhaupt höchstens drei Brennpunktskreise reell sein). Dazu sei noch Folgendes bemerkt: Der Kreis, der durch die gegenseitigen Schnittpunkte irgend zweier Doppeltangentenpaare geht, wird der Mittelpunktskreis eines Systempaares sein; und die Brennpunktsquadrupel, die zu diesem gehören, werden auf denjenigen Brennpunktskreisen liegen, deren Mittelpunkte die Mittelpunkte der beiden übrigen Doppeltangentenpaare sind.

* Vergl. P. Vogel, Ueber die Curven vierter Ordnung vom Geschlechte 1, Dissert., München 1880, S. 33.

§ 6. Weiterführung der Untersuchungen über die Curven Π.
(Vergl. S. 21.)

Nachdem nun die näheren Beziehungen zwischen zwei conjugirten Kegelschnittssystemen Σ, Σ' entwickelt worden sind, ist es an der Zeit, das Capitel über die viermal berührenden bicircularen Curven vierter Ordnung Π fortzusetzen.

Zunächst ist klar, dass eine solche Curve Π im Punkte O (s. S. 19) einen Doppelpunkt hat, was aus ihrer Gleichung 55) sofort hervorgeht (dort ist eben O Coordinatenanfang). Man findet leicht, dass bei vier von den Curven Π dieser Doppelpunkt eine Spitze ist; diese vier Spitzen sind nämlich (was auch die Anschauung an die Hand giebt) die Schnittpunkte des Mittelpunktskreises mit der eingehüllten Curve. Nur dann haben alle Curven Π Rückkehrpunkte, wenn Σ aus Doppellinien besteht [dazu ist nothwendig, dass die eingehüllte Curve $\mathfrak{C}$ einen dritten (im Endlichen liegenden) Doppelpunkt besitze]. Jedenfalls darf man den Satz aussprechen:

Die Doppelpunkte der Curven Π erfüllen den Mittelpunktskreis. Die vier Berührungspunkte einer jeden werden von einem Kegelschnitte $\mathfrak{G}$ ausgeschnitten, der zugleich ihren Doppelpunkt enthält.

Die letztere Behauptung ist selbstverständlich, da durch fünf Punkte ein Kegelschnitt bestimmt ist. Die Gleichung eines Kegelschnittes durch die Berührungspunkte von Π ergiebt sich offenbar durch Differentiation von 55) nach Ω und Ausstossung der biquadratischen Glieder aus beiden Gleichungen; die hervorgehende Gleichung enthält aber kein absolutes Glied mehr, stellt also gerade den durch den Doppelpunkt O laufenden, die Berührungspunkte von Π ausschneidenden Kegelschnitt dar. Hieraus folgt, dass man im Coordinatensysteme x, y) die Gleichung von $\mathfrak{G}$ erhält, indem man Gleichung 55) mit ihrem Differentialquotienten nach Ω zusammenstellt und aus beiden die Glieder vierter Ordnung entfernt. Man erkennt leicht, dass die so entstehende Gleichung von $\mathfrak{G}$ sich folgendermassen schreiben lässt:

$$105)\quad \begin{aligned} &[(\mathsf{A}+\mathsf{B})\cos\Omega-(\mathsf{A}-\mathsf{B})]\,\{(x^2-y^2)\tau-2xy\lambda+2\varrho y-\mathsf{P}\tau\} \\ &+\sin\Omega\,\{[(\mathsf{A}+\mathsf{B})\lambda-(\mathsf{A}-\mathsf{B})]x^2 \\ &-[(\mathsf{A}+\mathsf{B})\lambda+(\mathsf{A}-\mathsf{B})]y^2+2(\mathsf{A}+\mathsf{B})\tau xy-2\varrho[(\mathsf{A}+\mathsf{B})-(\mathsf{A}-\mathsf{B})\lambda]x \\ &+2\varrho(\mathsf{A}-\mathsf{B})\tau y+\mathsf{P}[(\mathsf{A}+\mathsf{B})\lambda-(\mathsf{A}-\mathsf{B})]\}=0, \end{aligned}$$

d. h.: Die Kegelschnitte $\mathfrak{G}$ bilden ein Büschel. Die in diesem Büschel vorkommende gleichseitige Hyperbel lässt sich unmittelbar aus 105) ablesen:

$$106)\qquad (x^2-y^2)\tau-2xy\lambda+2\varrho y-\varrho^2\tau=0.$$

Diesen Kegelschnitt bezeichnen wir mit $\mathfrak{G}_s$; er entspricht dem Werthe $\Omega=0$, schneidet also die Berührungspunkte des Ortes der Hauptscheitel von Σ aus.

Der andere, unmittelbar durch 105) gegebene Kegelschnitt $\mathfrak{G}$, der Bedingung $\cos\Omega = \frac{A-B}{A+B}$ entsprechend, möge $\mathfrak{G}_g$ heissen:

$$\begin{aligned}107)\qquad &[(A+B)\lambda-(A-B)]x^2-[(A+B)\lambda+(A-B)]y^2\\ &+2(A+B)\tau xy-2\varrho[(A+B)-(A-B)\lambda]x\\ &+2\varrho(A-B)\tau y+\varrho^2[(A+B)\lambda-(A-B)]=0.\end{aligned}$$

Er schneidet die Berührungspunkte derjenigen beiden Curven Π aus, die von den Endpunkten der gleichen conjugirten Durchmesser von Q beschrieben werden; denn für diese ist $tg\,\omega = \pm\sqrt{\frac{A}{B}}$, woraus $\cos\Omega = \frac{A-B}{A+B}$ sich ergiebt. Aus der Gleichung des Büschels $\mathfrak{G}$, 105) folgt aber überhaupt, dass je zwei Curven Π zusammen gehören, dergestalt, dass ihre Berührungspunkte und Doppelpunkte von **demselben** Kegelschnitte $\mathfrak{G}$ ausgeschnitten werden; und zwar entsprechen zwei solche Curven Π, die wir, um sie zu unterscheiden, Π, Π_1 nennen, zwei Werthen Ω, Ω_1, die offenbar der Gleichung

$$\frac{(A+B)\cos\Omega-(A-B)}{\sin\Omega}=\frac{(A+B)\cos\Omega_1-(A-B)}{\sin\Omega_1}$$

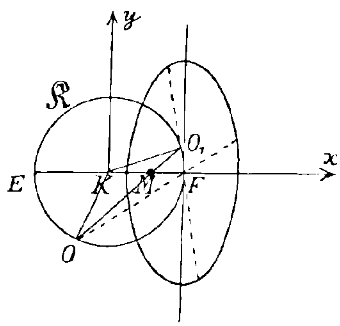
genügen. Daraus lässt sich folgern:

Die Berührungspunkte und Doppelpunkte zweier Curven Π, Π_1, die von den Endpunkten **conjugirter Durchmesser** von Q beschrieben werden, liegen auf **demselben** Kegelschnitte $\mathfrak{G}$.

Denn bekanntlich besteht zwischen den Winkeln ω, ω_1, die zwei conjugirte Durchmesser eines Kegelschnittes mit der positiven Halbaxe α bilden, die Beziehung $tg\,\omega . tg\,\omega_1 = -\frac{B}{A}$, woraus man auf ganz elementare Weise die oben hingestellte Gleichung zwischen 2ω und $2\omega_1$, d. i. zwischen Ω und Ω_1 herleitet. — So wird z. B. auf die erwähnte Thatsache, dass die Berührungspunkte der beiden Curven Π, die zu den gleichen conjugirten Durchmessern von Q gehören, von demselben Kegelschnitte $\mathfrak{G}_g$ ausgeschnitten werden, neues Licht geworfen; und zugleich ist dargethan, dass $\mathfrak{G}_s$ nicht nur von der Haupt-, sondern auch von der Nebenscheitelcurve die Berührungspunkte (und den Doppelpunkt) ausschneidet. Wie $\mathfrak{G}_g$ den gleichen, so entspricht $\mathfrak{G}_s$ den zu einander senkrechten conjugirten Durchmessern von Q.

Eine sehr einfach angebbare Lage haben nun die vier Grundpunkte des Büschels $\mathfrak{G}$. Sie gehören nämlich paarweise zusammen; zwei, die ich L_1, N_1 nenne, befinden sich auf der Geraden MM', die die Mittelpunkte der Schnittpunktskreise der conjugirten Systeme Σ, Σ' verbindet, und sind dadurch eindeutig bestimmt, dass sie sowohl zu M, M', als zu den Schnittpunkten von MM' mit dem Mittelpunktskreise $\mathfrak{K}$ harmonisch liegen, so dass der Kreis über $L_1 N_1$ als Durchmesser den Mittelpunktskreis rechtwinklig schneidet. Die beiden anderen Grundpunkte aber sind die Schnittpunkte des Lothes in G' auf $E'F'$ mit dem Mittelpunktskreise, d. h. (vergl. S. 30) die Mittelpunkte der zerfallenden Kegelschnitte des Systemes Σ, die mit L, N bezeichnet worden sind.

Aber auch über die beiden anderen Schnittpunkte eines Kegelschnittes $\mathfrak{S}$ mit dem Mittelpunktskreise $\mathfrak{K}$ lässt sich ein schöner Satz aufstellen. Man denke sich nämlich den Mittelpunktskreis $\mathfrak{K}$ den Kegelschnitt Q, dessen Mittelpunkt F ist, und in ihm zwei conjugirte Durchmesser, die den Kreis $\mathfrak{K}$ in O, O_1 schneiden mögen. Dann ist zunächst klar, dass alle entsprechenden Durchmesserpaare der übrigen Kegelschnitte des Systemes Σ durch dieselben beiden Punkte O, O_1 gehen müssen. Die Verbindungslinie OO_1 geht nun nach einem leicht zu beweisenden Elementarsatze für alle Paare conjugirter Durchmesser des Kegelschnittes F durch einen und denselben Punkt,* der selbstverständlich auf der x-Axe liegen wird. Für die Abscisse dieses Punktes aber findet man durch eine einfache Rechnung $x = -\varrho\frac{A-B}{A+B} = h$ [s. 23)], d. h. er fällt mit M zusammen. Also: OO_1 geht stets durch M, den Mittelpunkt des Schnittpunktskreises von Σ. Dadurch ist zugleich eine neue geometrische Bedeutung des Punktes M gewonnen, die sich nun so in Worte fassen lässt:



Der Mittelpunkt M des Schnittpunktskreises des Systemes Σ ist derjenige Punkt, durch welchen stets die Verbindungslinie der beiden Punkte hindurchgeht, in denen irgend ein Paar conjugirter Durchmesser eines beliebigen Kegelschnittes Q des Systemes Σ den **Mittelpunktskreis** dieses Systemes schneidet.

Zugleich sind O, O_1 (vergl. oben und S. 41) die Doppelpunkte der beiden Curven Π, die von den Endpunkten der Durchmesser OF, O_1F beschrieben werden, mithin auch zwei Schnittpunkte des dazu gehörenden Kegelschnittes $\mathfrak{S}$ mit dem Kreise. Also:

Die Doppelpunkte zweier Curven Π, die **conjugirten Durchmessern** von Q entsprechen, liegen in gerader Linie mit M. Oder:

Ein Kegelschnitt $\mathfrak{S}$ schneidet den Mittelpunktskreis in L, N, und überdies in zwei (für jedes $\mathfrak{S}$ anders liegenden) Punkten, deren Verbindungslinie durch M läuft.

Im Allgemeinen ist im Büschel $\mathfrak{S}$ kein Kreis enthalten; es besteht aber aus lauter Kreisen, wenn $\mu = 0$, also Σ aus congruenten Kegel-

* Dieser Satz würde auch noch gelten, wenn $\mathfrak{K}$ kein Kreis, dessen Mittelpunkt auf EF liegt, sondern ein beliebiger durch F gehender Kegelschnitt wäre.

schnitten zusammengesetzt ist; alsdann liegen seine beiden Grundpunkte L_1, N_1 symmetrisch zu G auf der x-Axe und haben die Abscissen $x = h \pm \sqrt{h^2 - \varrho^2}$, während L, N die beiden unendlich fernen Kreispunkte sind. Andererseits besteht $\mathfrak{G}$ aus lauter gleichseitigen Hyperbeln (die dann zugleich concentrisch sind), wenn $\mathsf{A} = \mathsf{B}$, also wenn Σ ein Kreissystem ist. Dann bilden in der That die vier Grundpunkte, wie sich aus ihrer vorhin angegebenen Lage sofort nachweisen lässt, ein hyperbolisches Quadrat — was man auch daraus erkennt, dass dann [vergl. 107)] $\mathfrak{G}_g$ eine mit $\mathfrak{G}_s$ concentrische gleichseitige Hyperbel wird. Beide Fälle treten bei den Cartesischen Curven ein (s. II. Abschn. 3. Beisp.). Endlich besteht $\mathfrak{G}$ überhaupt aus concentrischen Kegelschnitten, wenn $\mu = 1$ ist; dann fallen M' und G' nach F', ebenso alle vier Grundpunkte von $\mathfrak{G}$; d. h. das Büschel $\mathfrak{G}$ wird von lauter Geradenpaaren durch F' gebildet.

Betrachten wir insbesondere $\mathfrak{G}_s$ und $\mathfrak{G}_g$ etwas näher: Der Mittelpunkt von $\mathfrak{G}_s$ ist stets G'; $\mathfrak{G}_s$ geht durch E, F (die Doppelpunkte der Haupt- und Nebenscheitelcurve) und ist also eine Hyperbel des Büschels $\mathfrak{H}'$, nämlich diejenige $\mathfrak{H}'_m$, welche die Berührungspunkte des grössten und kleinsten Kegelschnittes des Systemes Σ' (E, F) ausschneidet. Die Doppelpunkte der beiden Curven Π, die den gleichen conjugirten Durchmessern zugehören, werden (ebenso wie die Berührungspunkte) von $\mathfrak{G}_g$ ausgeschnitten; ihre Verbindungslinie aber ist die durch M laufende Sehne des Kreises $\mathfrak{K}$, die auf EF senkrecht steht, wie man sogleich übersieht. Die Axen von $\mathfrak{G}_g$ halbiren die Winkel von $E'F'$ gegen EF, sind also den Normalcoordinatenaxen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und den Asymptoten von $\mathfrak{G}_s$ parallel; dagegen halbiren die Axen von $\mathfrak{G}_s$ die Winkel von EF gegen E_0F_0. Der Mittelpunkt von $\mathfrak{G}_g$ ist die Mitte der Strecke L_1N_1 (vergl. Taf. I Fig. 2c).

Es ist ferner klar, dass derjenige Kegelschnitt $\mathfrak{G}_z$ des Büschels $\mathfrak{G}$, der die Berührungspunkte und Doppelpunkte einer zerfallenden Curve Π ausschneidet, d. h. einer solchen, die zwei zusammenfallenden conjugirten Durchmessern oder einer Asymptote der Kegelschnitte Q entspricht, in dessen Berührungspunkten die eingehüllte Curve ebenfalls berühren muss, weil eben hier die beiden einander zugeordneten Curven Π zusammenfallen; d. h., da diese vier Punkte die Berührungspunkte der beiden Doppeltangenten sind, welche die endlichen Bestandtheile der in Rede stehenden Curve Π bilden (vergl. S. 21): $\mathfrak{G}_z$ besteht aus eben diesen beiden Doppeltangenten. Der Kegelschnitt $\mathfrak{G}$, der zu der andern Asymptote des Systemes Σ gehört, besteht natürlich aus den beiden anderen Doppeltangenten. Dies lässt sich so zusammenfassen:

Von den drei zerfallenden Kegelschnitten des Büschels $\mathfrak{G}$ fallen zwei mit den zerfallenden Kegelschnitten zusammen, die im Systeme Σ' vorkommen; der dritte wird von MM' und der Senkrechten auf $E'F'$ in G' gebildet.

Ehe wir diese Betrachtungen fortsetzen, gehen wir zu den beim conjugirten Systeme Σ' obwaltenden Verhältnissen über. Das System der

Curven, die aus entsprechenden Punkten der Kegelschnitte Σ' gebildet werden, mag mit Π' * bezeichnet werden; dann sind auch die Bezeichnungen $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{G}'_s$, $\mathfrak{G}'_g$, $\mathfrak{G}'_z$ verständlich. Zunächst leuchtet ein, dass die Grundpunkte des Büschels $\mathfrak{G}'$ erstens die beiden Punkte L_1, N_1 sein müssen, da deren Bestimmung weder das System Σ noch Σ' bevorzugt; und dass zweitens die beiden anderen mit den Mittelpunkten der zerfallenden Kegelschnitte Σ', nämlich mit L', N' zusammenfallen. Insbesondere wird $\mathfrak{G}'_s$ durch E' und F' laufen und G zum Mittelpunkte haben [also die Hyperbel $\mathfrak{H}_m$ sein, s. 35)], $\mathfrak{G}'_g$ aber die Schnittpunkte des in M' auf $E'F'$ errichteten Lothes mit dem Mittelpunktskreise enthalten, übrigens mit $\mathfrak{G}_g$ coaxial sein.

Aus dem oben Entwickelten geht weiter (auf Grund des Satzes S. 29, 30) hervor, dass zwei von den zerfallenden Kegelschnitten des Büschels $\mathfrak{G}'$ aus denselben Bestandtheilen zusammengesetzt sind, wie zwei des Büschels $\mathfrak{G}$, nämlich diejenigen, die aus den vier Doppeltangenten bestehen, und dazu auch noch der eine Bestandtheil des dritten, nämlich MM', mit einem Bestandtheile des dritten zerfallenden Kegelschnittes im Büschel $\mathfrak{G}$ zusammenfällt. Hieraus aber folgt für die Punkte L_1, N_1 (vergl. Taf. I Fig. 6):

Die vier Doppeltangenten schneiden sich zunächst in den Punkten $LNL'N'$ auf dem Mittelpunktskreise. Dann werden sich LL' und NN' in L_1, LN' und NL' in N_1 begegnen, diese Punkte aber die bisher ebenso bezeichneten beiden Grundpunkte sein, die den Büscheln $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ gemeinsam sind. Hieraus erkennt man auch die Richtigkeit des S. 42 über die Lage von L_1, N_1 angegebenen Satzes. — Wenn also die Schnitte von L_1N_1 mit LN und $L'N'$ R, R' genannt werden, so sind R, L', N' die Mittelpunkte der drei in $\mathfrak{G}$, dagegen R', L, N die Mittelpunkte der in $\mathfrak{G}'$ vorkommenden zerfallenden Kegelschnitte. Dass L_1, N_1 mit $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$ bez. zusammenfallen, ward schon erwähnt (s. S. 35).

Aus der grossen Menge von Sätzen, die sich über die Curven Π noch aufstellen lassen, hebe ich namentlich zwei, wegen ihrer Analogie mit dem für das Kegelschnittssystem Σ selber geltenden Satze S. 10 hervor:

Je zwei **Curvenpaare** Π gehören dergestalt zusammen, dass der Kegelschnitt $\mathfrak{G}$, der die Doppelpunkte und Berührungspunkte des einen ausschneidet, zugleich die Schnittpunkte der Curven des andern Paares enthält. Zwei derartige Curvenpaare entsprechen aber solchen Paaren conjugirter Durchmesser der Kegelschnitte Q, von denen das eine in den Diagonalen des umgeschriebenen Parallelogrammes liegt, das in den Endpunkten des andern berührt.

So enthält z. B. $\mathfrak{G}_s$ die gegenseitigen Schnittpunkte der beiden Curven Π, die von den Endpunkten gleicher conjugirter Durchmesser beschrieben wer-

* Vergl. dazu Taf. I Fig. 2d.

den, und $\mathfrak{G}_g$ geht durch die Schnittpunkte der Haupt- und Nebenscheitelcurve. Dieser Satz aber bildet nur einen besonderen Fall des folgenden:

Der Kegelschnitt $\mathfrak{G}$, der die Berührungspunkte eines Curvenpaares Π ausschneidet, ist zugleich der Ort der Schnittpunkte zweier Curven Π, die solchen Durchmessern der Kegelschnitte Q zugehören, deren Endpunktstangenten sich auf den beiden zu dem erstgenannten Curvenpaare Π gehörenden (conjugirten) Durchmessern schneiden.

Der Beweis dieser Sätze ist sehr leicht. — Endlich sei noch eines merkwürdigen Satzes gedacht. Bekanntlich sind die bicircularen Curven vierter Ordnung vom Geschlechte Null mit den Fusspunktcurven der Kegelschnitte identisch. Demnach müssen auch die Curven Π mit Beziehung auf ihre Doppelpunkte Fusspunktcurven bestimmter Kegelschnitte sein; und diese Kegelschnitte, die mit dem Buchstaben $\mathfrak{S}$ bezeichnet werden sollen, können folgendermassen ermittelt werden. Man übersieht sofort, dass sich die Gleichung von Π, 55) bedeutend vereinfacht, wenn man das Coordinatensystem (x_0, y_0) in positiver Richtung um den Winkel $(\omega+\psi)$ dreht, denn sie kann geschrieben werden:

$$(x_0^2+y_0^2)^2-4\varrho(x_0^2+y_0^2)(x_0\cos\Omega+y_0\sin\Omega)+4\varrho^2(x_0\cos\Omega+y_0\sin\Omega)^2$$
$$-v^2[x_0^2+y_0^2-\mu\{(x_0^2-y_0^2)\cos(\Omega+\Psi)+2x_0y_0\sin(\Omega+\Psi)\}]=0.$$

Setzt man also

$$x_0=x'_0\cos\tfrac{1}{2}(\Omega+\Psi)-y'_0\sin\tfrac{1}{2}(\Omega+\Psi),$$
$$y_0=x'_0\sin\tfrac{1}{2}(\Omega+\Psi)+y'_0\cos\tfrac{1}{2}(\Omega+\Psi),$$

wobei nun die x'_0-Axe durch F' und die y'_0-Axe durch E' geht, so wird die Gleichung von Π:

$$\begin{aligned}&(x_0'^2+y_0'^2)^2-2(x_0'^2+y_0'^2)[x'_0.2\varrho\cos(\omega-\psi)+y'_0.2\varrho\sin(\omega-\psi)]\\ 108)\quad&+x_0'^2[(2\varrho\cos(\omega-\psi))^2-v^2(1-\mu)]+y_0'^2[(2\varrho\sin(\omega-\psi))^2-v^2(1+\mu)]\\ &+2x'_0y'_0.2\varrho\cos(\omega-\psi).2\varrho\sin(\omega-\psi)=0.\end{aligned}$$

Hieraus erkennt man, dass der Mittelpunkt des Kegelschnittes $\mathfrak{S}$ die Coordinaten

$$x'_0=2\varrho\cos(\omega-\psi),\quad y'_0=2\varrho\sin(\omega-\psi)$$

hat; d. h. dieser Mittelpunkt ist der Punkt O', der Gegenpunkt von O im Kreise $\mathfrak{K}$. Weiter erkennt man: wenn $\frac{x^2}{\mathfrak{A}}+\frac{y^2}{\mathfrak{B}}=1$ die Gleichung von $\mathfrak{S}$ in seinem eigenen Axensysteme ist, so muss

$$109)\qquad \mathfrak{A}=v^2(1-\mu),\quad \mathfrak{B}=v^2(1+\mu)$$

sein, und die Axen von $\mathfrak{S}$ müssen durch E' bez. F' gehen. Durch Vergleichung mit 91e) erhält man daher den Satz:

Diejenigen Kegelschnitte $\mathfrak{S}$, deren Fusspunktcurven die Curven Π sind, sind alle einander und den Kegelschnitten des Systemes Σ' ähnlich, und ihre Axen laufen durch dieselben Punkte E', F', wie die Axen dieser.

Es ergiebt sich weiter, dass zwei Kegelschnitte $\mathfrak{S}$ sogar mit zwei Kegelschnitten Σ' zusammenfallen, nämlich diejenigen, deren Mittelpunkte E und F sind [vergl. 59), 91b), c)]. Weiter folgt aus dem Werthe von v^2, dass je zwei Kegelschnitte $\mathfrak{S}$ congruent sind, nämlich solche, deren Mittelpunkte symmetrisch zu einander mit Beziehung auf EF liegen. Endlich beweist man noch, dass die gegenseitigen Schnittpunkte zweier Kegelschnitte $\mathfrak{S}$, die zu einem Curvenpaare Π gehören (s. S. 42), auf demselben Kegelschnitte $\mathfrak{G}$ liegen, der die Doppelpunkte und Berührungspunkte des jenem Paare Π zugeordneten Curvenpaares bestimmt (vergl. den obigen Satz), u. s. w.

§ 7. Die Polarencurve.

Welches ist der Ort $\mathfrak{Z}$ der Polaren eines gegebenen Punktes Z mit Beziehung auf alle Kegelschnitte Q des Systemes Σ, oder die Polarencurve von Z im Systeme Σ?

Da eine vollständige Behandlung dieser Frage sehr umfänglich sein würde, so werden hier nur einige wenige Sätze über die Polarencurve angeführt werden.

Der Punkt Z habe im bisher gebrauchten Coordinatensysteme (x, y) die Coordinaten ξ, η. Auch sollen die Abkürzungen Λ, M [33)] wieder benutzt werden. Aus der Gleichung des Kegelschnittes Q [34)] erkennt man, dass es zwei und nur zwei Kegelschnitte Q giebt, die durch den Punkt Z hindurchgehen. Denn denkt man sich darin x, y durch ξ, η ersetzt, so erhält man für Φ eine Gleichung von der Form

$$\mathfrak{U}\cos\Phi + \mathfrak{V}\sin\Phi + \mathfrak{W} = 0,$$

die stets zwei und nur zwei Werthe von Φ liefert. Diese beiden Werthe fallen zusammen, wenn ξ, η der Bedingung $\mathfrak{U}^2 + \mathfrak{V}^2 = \mathfrak{W}^2$ genügen, und zwar ist dann $\cos\Phi = -\frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{W}}$, $\sin\Phi = -\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{W}}$ (daher ist auch $\mathfrak{U}^2 + \mathfrak{V}^2 - \mathfrak{W}^2 = 0$ die Gleichung der von Σ eingehüllten Curve $\mathfrak{C}$ 20), indem man sich wieder x, y an Stelle von ξ, η denkt]. Für einen durch Z hindurchgehenden Kegelschnitt Q ist aber die Polare von Z eine Gerade durch Z selbst. Daher lassen sich von Z aus zwei und nur zwei Tangenten an $\mathfrak{Z}$ legen, d. h. $\mathfrak{Z}$ ist ein Kegelschnitt:

Die Polaren eines Punktes Z mit Beziehung auf alle Kegelschnitte des Systemes Σ umhüllen einen Kegelschnitt $\mathfrak{Z}$. (Dagegen ist der Ort des Poles einer gegebenen Geraden eine Curve vierter Ordnung mit einem Doppelpunkte.)

Liegt Z auf der von Σ erzeugten bicircularen Curve vierter Ordnung, so wird $\mathfrak{Z}$ diese Curve in Z berühren. Liegt Z auf dem Mittelpunktskreise des Systemes Σ, so muss $\mathfrak{Z}$ eine Parabel sein; auf der einen Seite dieser Kreislinie werden dann alle die Punkte Z liegen, deren Polarencurve eine Hyperbel, auf der andern die, deren Polarencurve eine Ellipse ist. Liegt Z innerhalb des von den reellen Kegelschnitten Q überdeckten Raumes, so wird Z ausserhalb $\mathfrak{Z}$ liegen, und wenn Z ausserhalb jenes Raumes sich befindet, Z von $\mathfrak{Z}$ umschlossen werden.

Aus 34) ergiebt sich nun als Gleichung der Polare von Z mit Beziehung auf Q:

$$110)\quad \left.\begin{aligned} & x[(\Lambda - \mathrm{M}\cos\Phi)\xi - \mathrm{M}\sin\Phi.\eta + \varrho(\mathrm{M} - \Lambda\cos\Phi)] \\ & + y[-\mathrm{M}\sin\Phi.\xi + (\Lambda + \mathrm{M}\cos\Phi)\eta - \varrho\Lambda\sin\Phi] \\ & + [\varrho(\mathrm{M} - \Lambda\cos\Phi).\xi - \varrho\Lambda\sin\Phi.\eta + \mathrm{P}(\Lambda - \mathrm{M}\cos\Phi) \\ & \quad - (\Lambda^2 - \mathrm{M}^2)(1 - \lambda\cos\Phi - \tau\sin\Phi)] \end{aligned}\right\} = 0.$$

Durch Differentiation nach Φ erhält man hieraus eine zweite Gleichung. Multiplicirt man einmal die erste mit $\sin\Phi$, die zweite mit $\cos\Phi$, und addirt, dann die erste mit $\cos\Phi$, die zweite mit $\sin\Phi$ und subtrahirt, so ergeben sich zwei neue Gleichungen, von denen die eine nur $\sin\Phi$, die andere nur $\cos\Phi$ linear enthält. Durch Beseitigung von Φ aus beiden erhält man die Gleichung von $\mathfrak{Z}$ in folgender Gestalt:

$$111)\quad \begin{aligned} & [x\mathrm{M}\eta + y(\mathrm{M}\xi + \Lambda\varrho) + \Lambda\varrho\eta - (\Lambda^2 - \mathrm{M}^2)\tau]^2 \\ & + [x(\mathrm{M}\xi + \Lambda\varrho) - y\mathrm{M}\eta + \Lambda\varrho\xi + \mathrm{PM} - (\Lambda^2 - \mathrm{M}^2)\lambda]^2 \\ & - [x(\Lambda\xi + \mathrm{M}\varrho) + y\Lambda\eta + \mathrm{M}\varrho\xi + \mathrm{P}\Lambda - (\Lambda^2 - \mathrm{M}^2)]^2 = 0. \end{aligned}$$

Hieraus erkennt man sofort, dass **zwei** Punkten der Ebene **besondere** Polarencurven zukommen: den Punkten

$$M\left(\eta = 0,\ \xi = -\frac{\mathrm{M}}{\Lambda}\varrho\right) \text{ und } G\left(\eta = 0,\ \xi = -\frac{\Lambda}{\mathrm{M}}\varrho\right).$$

Der Punkt M ist der einzige, dessen Polarencurve ein **Kreis** ist, nämlich

$$112)\quad \left(x - \frac{\Lambda}{\varrho}\lambda\right)^2 + \left(y - \frac{\Lambda}{\varrho}\tau\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{P} - \Lambda}{\varrho}\right)^2.$$

Der Mittelpunkt dieses Kreises liegt also auf dem Strahle KF, und zwar um $\frac{\Lambda}{\varrho}\mu$ von K entfernt. Es sei beiläufig erwähnt, dass der entsprechende Kreis im conjugirten Systeme Σ', also die Polarencurve von M' mit Beziehung auf die Kegelschnitte Q', ebenso gross ist wie jener $\left(\text{sein Mittelpunkt ist } y = 0,\ x = \frac{\mathrm{M}}{\varrho}\right)$.

Andererseits zerfällt die Polarencurve des Punktes G in zwei zur y-Axe parallele Gerade, die selbst Polaren mit Beziehung auf zwei parallelaxige Kegelschnitte sind:

$$113\text{a})\quad (x\varrho + \mathrm{M})^2 = \mathrm{M}^2\mu^2 + 2\mathrm{PM}\lambda + \mathrm{P}^2.$$

Also sind die Polaren von G mit Beziehung auf alle Kegelschnitte Q zu einander parallel (und zwar senkrecht auf der Axe EF des Systemes Σ). Die Gleichung der Polare von G mit Beziehung auf einen beliebigen Kegelschnitt Q wird

$$113\text{b})\quad x = -\frac{\mathrm{M}}{\varrho} + \frac{\mathrm{P} + \lambda\mathrm{M}}{\varrho}\cos\Phi + \frac{\tau\mathrm{M}}{\varrho}\sin\Phi;$$

die beiden ebengenannten ausgezeichneten Polaren gehören demnach zu denjenigen Werthen von Φ, die aus der Gleichung $tg\,\Phi = \frac{\tau\mathrm{M}}{\mathrm{P} + \lambda\mathrm{M}}$ folgen.

Liegt Z auf dem Mittelpunktskreise $\mathfrak{K}$ $(\xi^2 + \eta^2 = \mathsf{P})$, so wird die Gleichung der Polarencurve $\mathfrak{Z}$ (Parabel), wenn wir nur die quadratischen Glieder hinschreiben,

$$[x \Lambda \eta - y(\mathsf{M}\varrho + \Lambda\xi)]^2 + \cdots = 0.$$

Also ist für die Punkte E, F die Axe der Parabel parallel zu EF. Die Gleichung der Parabel selbst ist für diese Punkte

$$114)\ \left(y - \frac{(\Lambda \pm \mathsf{M})}{\varrho}\tau\right)^2 \pm 2\frac{(\Lambda \pm \mathsf{M})}{\varrho}(1 \pm \lambda)\left[x \mp \varrho \pm \frac{(1 \mp \lambda)}{2} \cdot \frac{(\Lambda \pm \mathsf{M})}{\varrho}\right] = 0,$$

worin das obere Vorzeichen für E, das untere für F gilt. Für die Punkte, in denen das Loth in M auf EF den Kreis $\mathfrak{K}$ schneidet, ist dagegen die Parabelaxe senkrecht zu EF.

Was die Frage nach solchen Polaren von Z betrifft, die für parallelaxige Kegelschnitte Q, Q_1 gezeichnet sind, und nach dem Orte ihres Schnittpunktes, so bilden die drei Kegelschnitte 1. Schnittpunktskreis, 2. Q, 3. Q_1 ein Büschel, die Polaren von Z mit Beziehung auf sie schneiden sich also in einem Punkte. Daher kann man sagen:

Die Polaren von Z mit Beziehung auf zwei parallelaxige Kegelschnitte Q, Q_1 sind solche Tangenten von $\mathfrak{Z}$, die sich auf der Polare z von Z mit Beziehung auf den Schnittpunktskreis schneiden. Es giebt also zwei Paare (Q, Q_1), die so beschaffen sind, dass die Kegelschnitte jedes Paares dieselbe Polare haben; ihre Polarenschnitte sind die Schnittpunkte von $\mathfrak{Z}$ und z.

Für M als Pol sind Polaren mit Beziehung auf parallelaxige Kegelschnitte Q, Q_1 einander parallele und zwar zu QQ_1 senkrechte Tangenten an den Polarenkreis; für G als Pol sind es Gerade in gleichen Abständen von der Geraden $x = -\frac{\mathsf{M}}{\varrho}$. Die letztere ist gemeinsame Polare für diejenigen beiden Kegelschnitte, die sich aus der Gleichung $tg\,\Phi = -\frac{\mathsf{P} + \lambda\mathsf{M}}{\tau\mathsf{M}}$ bestimmen und deren Mittelpunkte demnach mit denen der vorhin genannten anderen beiden ausgezeichneten Kegelschnitte $\left(tg\,\Phi = +\frac{\tau\mathsf{M}}{\mathsf{P} + \lambda\mathsf{M}}\right)$ ein Quadrat bilden.

Auch mag erwähnt werden, dass das Büschel der Verbindungslinien BB_1 (wenn unter B, B_1 die Berührungspunkte mit $\mathfrak{Z}$ von solchen Polaren, die parallelaxigen Kegelschnitten Q, Q_1 entsprechen, verstanden werden) mit dem Büschel der Geraden QQ_1 **congruent und gleichlaufend** ist.

Analoge Sätze ergeben sich, wenn man nicht parallelaxige Kegelschnitte Q, Q_1, sondern congruente Kegelschnitte einander zuordnet. Insbesondere ist der Ort des Schnittpunktes solcher Polaren, die congruenten Kegelschnitten entsprechen, die Polare von Z mit Beziehung auf die gleichseitige Hyperbel $\mathfrak{H}_m$ (vergl. den Satz S. 13).

Zweiter Abschnitt.

Beispiele zu den bicircularen Curven vierter Ordnung.

§ 1. Aufstellung der Bestimmungsgleichungen für den Mittelpunktskreis, wenn die Curve zur x-Axe symmetrisch ist.

Wie schon bemerkt wurde (S. 36), können von den sechs Systempaaren im Allgemeinen nur die drei 104) reell sein. Ausgenommen ist ganz allein der Fall, dass die Curve in zwei Kreise zerfällt, und selbst dann sind nicht alle sechs Systempaare reell, sondern, wie auch die beiden Kreise liegen, immer nur fünf.

Die Gleichung sechsten Grades von P, die die Halbmesser der sechs Mittelpunktskreise liefert, lässt sich fast mühelos aufstellen in dem Falle, dass die gegebene Curve eine Symmetrieaxe besitzt; alsdann zerfällt sie nämlich ohne Weiteres in zwei Gleichungen dritten Grades. Die eine dieser entspricht den drei zu betrachtenden Systempaaren 104).

Wir nehmen die Gleichung einer zur x-Axe symmetrischen bicircularen Curve vierter Ordnung $\mathfrak{C}$ in der Form [vergl. 52)]

$$(x^2+y^2)^2+\mathfrak{a}x^2+\mathfrak{b}y^2+2\mathfrak{d}x+\mathfrak{f}=0.$$

Dies ist zugleich die Normalform 39), nur ist $\mathfrak{e}=0$. Demgemäss ergiebt die vierte Gleichung 51) entweder

115) $$\sin\psi=0, \text{ also nach 10) } \tau=0,$$

oder

116) $$(\mathsf{A}-\mathsf{B})-(\mathsf{A}+\mathsf{B})\mu=0, \quad \mu=\frac{\mathsf{B}-\mathsf{A}}{\mathsf{B}+\mathsf{A}}.$$

Im ersten Falle, welcher die drei besprochenen Systempaare I, II, III liefert [104)], erhält man aus den Gleichungen 53):

117) $$\begin{gathered}\mathsf{A}+\mathsf{B}+2\mathsf{P}=-\frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}{2}, \quad (\mathsf{A}-\mathsf{B})\lambda=\frac{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}}{2}, \quad (\mathsf{A}-\mathsf{B})-(\mathsf{A}+\mathsf{B})\lambda=-\frac{\mathfrak{d}}{\varrho}, \\ \mathsf{A}\mathsf{B}(1-\lambda^2)-\mathsf{P}\big((\mathsf{A}+\mathsf{B})-(\mathsf{A}-\mathsf{B})\lambda\big)+\mathsf{P}^2=\mathfrak{f}.\end{gathered}$$

Aus der dritten folgt durch Multiplication mit λ mit Rücksicht auf die erste und zweite:

118) $$\left(\frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}{2}+2\mathsf{P}\right)\lambda^2+\frac{\mathfrak{d}}{\varrho}\lambda+\frac{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}}{2}=0$$

als Gleichung für λ, wenn ϱ berechnet ist; die zwei Werthe von λ, welche ihr genügen, entsprechen den zwei conjugirten Systemen, die den gemeinsamen Mittelpunktskreis vom Radius ϱ haben. Zur Bestimmung von A, B hat man alsdann nach 117):

119) $$\mathsf{A}+\mathsf{B}=-\frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}{2}-2\mathsf{P}, \quad \mathsf{A}-\mathsf{B}=\frac{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}}{2\lambda}.$$

Aus diesen Gleichungen entnimmt man

$$4AB = (A+B)^2 - (A-B)^2 = \left(\frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}{2} + 2P\right)^2 - \left(\frac{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}}{2\lambda}\right)^2,$$

folglich

$$4AB(1-\lambda^2) = \left(\frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}{2} + 2P\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}{2} + 2P\right)^2 \lambda^2 - \left(\frac{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}}{2\lambda}\right)^2.$$

Durch Division von 118) durch λ und Quadrirung ergiebt sich aber andererseits:

$$\left(\frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}{2} + 2P\right)^2 \lambda^2 + \left(\frac{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}}{2\lambda}\right)^2 = \frac{\mathfrak{d}^2}{P} - (\mathfrak{a}-\mathfrak{b})\left(\frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}{2} + 2P\right).$$

Setzt man dies in die vorige Gleichung ein, so folgt:

$$4AB(1-\lambda^2) = \left(\frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}{2} + 2P\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}}{2}\right)^2 + (\mathfrak{a}-\mathfrak{b})\left(\frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}{2} + 2P\right) - \frac{\mathfrak{d}^2}{P}.$$

Somit ist das erste Glied der vierten Gleichung 117) blos durch P ausgedrückt.

Beim zweiten Gliede ist dies noch leichter. Aus 119) folgt:

$$(A+B) - (A-B)\lambda = -\mathfrak{a} - 2P.$$

Hieraus erhält man nach gehöriger Ordnung folgende Gleichung für P:

$$16P^3 + 8P^2\mathfrak{a} + P(\mathfrak{a}^2 - 4\mathfrak{f}) - \mathfrak{d}^2 = 0. \tag{120}$$

Diese Gleichung ist also merkwürdiger Weise gänzlich frei von $\mathfrak{b}$. — Es ist noch zu bemerken, dass die Gleichungen 118) und 119) hinfällig werden, sobald man $\varrho = 0$ findet, weil dann zur Erfüllung der vierten Gleichung 53) nicht $(A-B) - (A+B)\lambda$ zu verschwinden braucht. In diesem Falle hat man auf 53) selbst zurückzugehen.

In dem durch 116) dargestellten Falle wenden wir uns an die Gleichungen 51):

$$121) \quad \begin{cases} A+B+2P = -\dfrac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}{2}, \quad (A-B)\mu = \dfrac{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}}{2}, \quad \cos\psi = -\dfrac{\mathfrak{d}}{\varrho[(A-B)-(A+B)\mu]}, \\ AB(1-\mu^2) - P[(A+B)-(A-B)\mu] + 2P(A-B)\mu\cos^2\psi + P^2 = \mathfrak{f}. \end{cases}$$

Die Gleichung 116) selbst giebt

$$(A+B)\mu = -(A-B), \quad \text{also} \quad (A-B) - (A+B)\mu = 2(A-B);$$

ferner, wenn man sie mit $(A-B)$ multiplicirt und die zweite Gleichung 121) berücksichtigt:

$$(A-B)^2 = -(A+B)\cdot\frac{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}}{2}.$$

Hat man also P bestimmt, so erhält man A und B folgendermassen:

$$A+B = -\frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}{2} - 2P, \quad A-B = \pm\sqrt{\frac{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}}{2}\left(\frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}{2} + 2P\right)}. \tag{122}$$

Alsdann hat man

$$123) \quad \mu = \frac{B-A}{B+A}, \quad \cos\psi = -\frac{\mathfrak{d}}{2\varrho(A-B)};$$

$$\lambda = \mu(2\cos^2\psi - 1), \quad \tau = \pm 2\mu\cos\psi\sqrt{1-\cos^2\psi}.$$

Das Vorzeichen der Wurzel in 122) ist so zu bestimmen, dass $\mu > 0$ wird, d. h. es muss das entgegengesetzte Zeichen von $(A+B)$ sein. Aber das

Vorzeichen in 123) bei τ gilt doppelt, wie ja jedem Werthe von ϱ zwei Systeme zugehören.

Um nun auch hier die Gleichung für ϱ aufzustellen, so hat man aus den Gleichungen $(A+B)^2=(A+B)^2$, $(A-B)^2=-(A+B)\frac{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}}{2}$:

$$4AB=(A+B)\left[(A+B)+\frac{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}}{2}\right] \text{ oder } \frac{2AB}{A+B}=-\left(\frac{\mathfrak{b}}{2}+P\right).$$

und

$$1-\mu^2=1-\left(\frac{A-B}{A+B}\right)^2=\frac{4AB}{(A+B)^2}, \text{ also } AB(1-\mu^2)=\left(\frac{2AB}{A+B}\right)^2;$$

hiernach

$$AB(1-\mu^2)=\left(\frac{\mathfrak{b}}{2}+P\right)^2.$$

Dies ist das erste Glied der vierten Gleichung 121). Im zweiten Gliede hat man nach der zweiten Gleichung 121) und der ersten Gleichung 122):

$$-[(A+B)+(A-B)\mu]=\mathfrak{b}+2P.$$

Endlich ist im dritten Gliede

$$\cos^2\psi=\frac{\mathfrak{d}^2}{4(A-B)^2P}, \quad (A-B)\mu=\frac{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}}{2},$$

also

$$2(A-B)\mu\cos^2\psi=(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})\frac{\mathfrak{d}^2}{4(A-B)^2P},$$

aber

$$4(A-B)^2=-2(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})(A+B)=(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+4P).$$

Demgemäss ist

$$2(A-B)\mu\cos^2\psi=\frac{\mathfrak{d}^2}{P(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+4P)}.$$

Schliesslich erhält man durch Einsetzen der gefundenen Werthe in die vierte Gleichung 121):

124) $16P^3+4P^2(\mathfrak{a}+3\mathfrak{b})+P((2\mathfrak{a}+3\mathfrak{b})\mathfrak{b}-4\mathfrak{f})+(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\left(\frac{\mathfrak{b}^2}{4}-\mathfrak{f}\right)+\mathfrak{d}^2=0.$*

Diesen zweiten Fall werden wir nur beim vierten Beispiele in Betracht ziehen.

Ehe ich zu den einzelnen Beispielen übergehe, möchte ich bemerken, dass von den Curven, die hier betrachtet werden sollen, nur zwei eigentliche Curven vierter Ordnung vom Geschlechte 1 sind: die Cassini'sche Curve (1. Beispiel) und die Cartesische Curve (3. Beispiel). Bei den anderen Beispielen ergeben sich selbstverständlich neben eigentlichen Be-

* Bezeichnet man die Wurzeln der Gleichung 120) mit P^{I}, die der Gleichung 124) mit P^{II}, so ist nach einer Bemerkung S. 18 (die daselbst allerdings ohne Beweis angeführt worden ist)

$$P^{I}+P^{II}=-\tfrac{1}{4}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$$

oder

$$P^{II}=-P^{I}-\tfrac{1}{4}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}),$$

wie man augenblicklich bestätigen wird.

rührungskegelschnittssystemen auch uneigentliche (d. h. solche, deren Kegelschnitte alle durch den dritten Doppelpunkt hindurchgehen, vergl. den Schluss der Vorbemerkungen) aus den Gleichungen 120), 124).

§ 2. Erstes Beispiel: Die Cassini'schen Curven.

Bewegt sich ein Punkt so, dass das Rechteck aus seinen Abständen von zwei festen Punkten unveränderlich ist, so beschreibt er bekanntlich eine sogenannte Cassini'sche Curve. Die Entfernung der beiden festen Punkte sei $2e$, die unveränderliche Fläche p^2. Dann ist die Gleichung der Curve

125) $$(x^2+y^2)^2-2e^2(x^2-y^2)+e^4-p^4=0.$$

Die Doppelbrennpunkte haben zufolge 40) die Coordinaten

126) $$\begin{cases} x=\pm e, \\ y=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x=0, \\ y=\pm ie; \end{cases}$$

denn es ist jetzt

127) $$\mathfrak{a}=-2e^2, \quad \mathfrak{b}=+2e^2, \quad \mathfrak{d}=\mathfrak{e}=0, \quad \mathfrak{f}=e^4-p^4.$$

Nach 43) erhält man für die einfachen Brennpunkte, die auf der x-Axe liegen ($y_0=0$), bei einer zur x-Axe symmetrischen Curve ($\mathfrak{c}=\mathfrak{e}=0$):

$$(4x_0^2+\mathfrak{a}-\mathfrak{b})(x_0^4-\mathfrak{b}x_0^2+\mathfrak{f})-(2x_0^3-\mathfrak{b}x_0-\mathfrak{d})^2=0$$

oder

128) $$(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})x_0^4+4\mathfrak{d}x_0^3-(\mathfrak{a}\mathfrak{b}-4\mathfrak{f})x_0^2-2\mathfrak{b}\mathfrak{d}x_0+[(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})\mathfrak{f}-\mathfrak{d}^2]=0,$$

insbesondere, wenn die Curve auch zur y-Axe symmetrisch ist ($\mathfrak{d}=0$):

129) $$(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})x_0^4-(\mathfrak{a}\mathfrak{b}-4\mathfrak{f})x_0^2+(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})\mathfrak{f}=0.$$

Im vorliegenden Falle ergiebt sich demnach

$$e^2x_0^4-(2e^4-p^4)x_0^2+e^2(e^4-p^4)=0 \text{ oder } (x_0^2-e^2)(e^2x_0^2-(e^4-p^4))=0,$$

d. h. die Axenbrennpunkte liegen bei

130) $$x_0=\pm e, \quad x_0=\pm\frac{\sqrt{e^4-p^4}}{e}.$$

Die oben bei der Definition der Curven erwähnten Punkte sind also nicht nur zwei einfache, sondern überdies noch die beiden reellen Doppelbrennpunkte. Die beiden anderen Axenbrennpunkte sind reell oder imaginär, je nachdem $e^2>p^2$ oder $e^2<p^2$ ist; im letzteren Falle sind dann ihre (auf der y-Axe liegenden) Antipunkte $y=\pm\frac{\sqrt{p^4-e^4}}{e}$ reell. Bei der Lemniskate ($p^2=e^2$) fallen diese vier Brennpunkte in den Doppelpunkt. Die zwei anderen Brennpunkte der y-Axe ($y=\pm ie$) sind stets imaginär und fallen mit den imaginären Doppelbrennpunkten zusammen.

Die erste Gleichung für P, 120), wird jetzt (s. 127):

$$4\mathsf{P}^3-4\mathsf{P}^2e^2+\mathsf{P}p^4=0;$$

ihre Wurzeln sind $\mathsf{P}=0$, $\mathsf{P}=\frac{1}{2}\left(e^2\pm\sqrt{e^4-p^4}\right)$.

Die Halbmesser der Mittelpunktskreise für die zugehörigen drei Systempaare sind also:

131) $\varrho_1 = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left[e^2 + \sqrt{e^4 - p^4}\right]} = e\,\varepsilon_1, \quad \varrho_2 = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left[e^2 - \sqrt{e^4 - p^4}\right]} = e\,\varepsilon_2,$
$$\varrho_3 = 0,$$
wo

132) $\varepsilon_1 = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{p}{e}\right)^4}\right)}, \quad \varepsilon_2 = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{p}{e}\right)^4}\right)}$

gesetzt wurde. Dabei ist

133) $$\varepsilon_1{}^2 + \varepsilon_2{}^2 = 1, \quad 2\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2 = \frac{p^2}{e^2}.$$

Dagegen erhält die andere Gleichung für P, 124), die Gestalt:

$$4\mathsf{P}^3 + 4\mathsf{P}^2 e^2 + \mathsf{P} p^4 = 0;$$

ihre Wurzeln ϱ_4, ϱ_5, ϱ_6 gehen aus den Werthen 131) durch Vertauschung von e^2 mit $-e^2$ hervor. Die zugehörigen drei Systempaare sind imaginär. Den drei Radien ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 gehören die Systempaare I, II, III zu.

Wir beschäftigen uns im Folgenden nur mit den letzteren, betrachten aber zuerst das Systempaar III ($\varrho = 0$), für welches aus 119) folgt $\mathsf{B} = -\mathsf{A}$. Im Uebrigen indessen geben die Bestimmungsgleichungen 118), 119) gar keinen Anhalt, weil gleichzeitig $\mathsf{P} = 0$, $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = 0$ und $\mathfrak{d} = 0$ ist. Es ist daher nöthig, auf die Gl. 53) zurückzugehen. Sie geben wegen $\mathsf{A} + \mathsf{B} = 0$, $\tau = 0$, $\mathsf{P} = 0$:

$$2\mathsf{A}\lambda = \mathfrak{a} (= -\mathfrak{b}) = -2e^2, \quad \mathsf{A}^2(\lambda^2 - 1) = \mathfrak{f} = e^4 - p^4.$$

Demgemäss findet man

$$\mathsf{A}^2 = p^4, \quad \mathsf{A} = \pm p^2 \text{ und weiter } \lambda = -\frac{e^2}{\mathsf{A}} = \mp \frac{e^2}{p^2}.$$

Also:

134) $$\mathsf{A} = \pm p^2, \quad \mathsf{B} = \mp p^2, \quad \lambda = \mp \frac{e^2}{p^2}, \quad \tau = 0, \quad \varrho = 0.$$

Dies ist jedoch nur die eine Lösung der Gl. 53); in der That sieht man leicht, dass beide Vorzeichen nur ein und dasselbe Kegelschnittssystem ergeben, und zufolge eines Satzes S. 34 bleibt also die Aufgabe, das zu 134) conjugirte System zu suchen. Die Gleichungen 53) lassen sich nun allerdings noch durch die Annahme $\mathsf{A} = \mathsf{B} = 0$, $\lambda = \infty$ erfüllen, wenn nämlich $\mathsf{A}\lambda$ und $\mathsf{B}\lambda$ bestimmte Werthe haben. Für diese hat man aber nach 53)

$$\mathsf{A}\lambda - \mathsf{B}\lambda = \mathfrak{a} (= -\mathfrak{b}) = -2e^2, \quad -\mathsf{A}\lambda \cdot \mathsf{B}\lambda = f = e^4 - p^4.$$

Hieraus folgt

$$\mathsf{A}\lambda = -e^2 \pm p^2, \quad \mathsf{B}\lambda = e^2 \pm p^2.$$

Also:

135) $\mathsf{A} = \mathsf{B} = 0, \quad \lambda = \infty, \quad \tau = 0, \quad \varrho = 0, \quad \mathsf{A}\lambda = -e^2 \pm p^2, \quad \mathsf{B}\lambda = e^2 \pm p^2.$

Auch hier giebt das eine wie das andere Vorzeichen dasselbe Kegelschnittssystem. Nach 23) und 27) findet man, dass die zu 134) gehörigen Brennpunkte H, J' und deren Antipunkte, die zu 135) gehörigen aber J, H' und ihre Antipunkte sind. Für 134) hat man nach 4) die Quadrate der Halbaxen:

136) $$A = p^2 + e^2 \cos\Phi; \quad B = -(p^2 + e^2 \cos\Phi),$$

wobei das obere Vorzeichen in 134) genommen und also Φ von der positiven x-Axe aus gerechnet ist; für 135) aber:

137) $$A = (p^2 - e^2)\cos\Phi, \quad B = (p^2 + e^2)\cos\Phi.$$

Von jetzt ab sind die Fälle $p^2 > e^2$, $p^2 < e^2$ auseinanderzuhalten. Im Falle
$$p^2 > e^2 *$$
besteht das durch die Gleichungen 135), 137) bestimmte Kegelschnittssystem aus Ellipsen; das dazu conjugirte System 134), 136) besteht stets aus gleichseitigen Hyperbeln. Wir beginnen mit dem letzteren und nennen es Σ_3 (nach der im ersten Abschnitte durchgeführten Bezeichnungsweise, auf die es aber im Folgenden nicht mehr ankommt, müsste es Σ_2 heissen). Die Hyperbel $\Phi = 0$ berührt die Curve in den Hauptscheiteln, die Hyperbel $\Phi = \pi$ in den Nebenscheiteln (Taf. II Fig. 8a). Alle Hyperbeln sind concentrisch, weil $\varrho = 0$ ist. Aus dem Gesagten geht schon hervor, dass der Schnittpunktskreis ebenfalls mit der Curve concentrisch und sein Radius unendlich gross ist; denn die Hyperbeln $\Phi = 0$, $\Phi = \pi$ schneiden sich ja nur in ihren unendlich fernen Punkten. In der That giebt Gl. 31) $s = \infty$. Dieses System Σ_3 hat überdies die Besonderheit, dass jeder seiner Kegelschnitte von der Hyperbel $\mathfrak{H}$, die seine Berührungspunkte ausschneidet, rechtwinklig durchsetzt wird; denn man weist nach, dass für die letzteren Hyperbeln (also die Hyperbeln durch die Doppelbrennpunkte der Curve) die Curve eine Orthogonaltrajectorie ist.

Was das System Σ'_3, 135), 137) betrifft, so berührt die Ellipse $\Phi = 0$ die Curve in allen vier Scheiteln (Taf. II Fig. 8b); die Ellipsen $\Phi = \pm\frac{\pi}{2}$, deren Axen also unter dem Winkel $\frac{\pi}{4}$ gegen die Coordinatenaxen geneigt sind, verschwinden, und von da ab sind alle Ellipsen imaginär. Da die Hyperbeln $\mathfrak{H}$, welche die Berührungspunkte der Ellipsen ausschneiden, durch die ausserhalb der Curve (vergl. die Anmerkung unten) liegenden Punkte $y = \pm\frac{\sqrt{p^4 - e^4}}{e}$ geht, so muss es zwei Hyperbeln $\mathfrak{H}$ geben, welche die Curve berühren, deren zugehörige Ellipsen also in diesen Berührungspunkten die Curve hyperosculiren; von diesen Stellen ab sind nach der einen Seite die Berührungspunkte der Ellipsen imaginär, nach der andern reell. Ueberdies besteht ein merkwürdiger Satz für jene kritischen Stellen. Bezeichnen wir das Ellipsensystem jetzt der Bequemlichkeit halber mit Σ

* Die Brennpunkte $x = \pm\frac{\sqrt{e^4 - p^4}}{e}$ sind hier imaginär; ihre reellen (auf der y-Axe liegenden) Antipunkte $y = \pm\frac{\sqrt{p^4 - e^4}}{e}$ befinden sich dann ausserhalb der Curve, weil $\frac{\sqrt{p^4 - e^4}}{e} > \sqrt{p^2 - e^2}$ ist, wenn $p^2 > e^2$, s. Taf. II Fig. 8a, 8b.

(statt mit Σ'_3), so haben wir das conjugirte Hyperbelsystem 134), 136) Σ' zu nennen. Da dieses ebenso wie das Büschel der die Berührungspunkte von Σ bestimmenden Hyperbeln $\mathfrak{H}$ aus gleichseitigen Hyperbeln besteht, so ist klar, dass die beiden kritischen Hyperbeln $\mathfrak{H}$, die wir $\mathfrak{H}_0$ nennen wollen, in dem Systeme Σ' enthalten sein müssen; und zwar sind $\mathfrak{H}_0$ diejenigen Kegelschnitte Σ', welche durch die Punkte $x=0$, $y=\pm\frac{\sqrt{p^4-e^4}}{e}$ laufen.

Die Gleichung des Systemes Σ', 77), wird nach 135):

$$(x^2-y^2)\cos\Omega+2xy\sin\Omega-e^2\cos\Omega+p^2=0.$$

Der Winkel, den die Hauptaxe eines solchen Kegelschnittes mit der x-Axe bildet, ist offenbar gleich $\frac{\pi}{2}+\omega$. Setzt man daher $W=2w=\pi+\Omega$, so ist w jener Winkel, und die Gleichung von Σ' wird:

$$(x^2-y^2)\cos W+2xy\sin W-e^2\cos W-p^2=0.$$

Die Schnittpunkte dieser Hyperbel mit der y-Axe sind $y=\pm\sqrt{\frac{p^2+e^2\cos W}{-\cos W}}$; also hat man zur Bestimmung von $\mathfrak{H}_0$:

$$\frac{p^2+e^2\cos W}{-\cos W}=\frac{p^4-e^4}{e^2} \quad \text{oder} \quad \cos W=-\frac{e^2}{p^2},$$

so dass die Gleichung von $\mathfrak{H}_0$ wird:

$$e^2(x^2-y^2)\mp 2xy\sqrt{p^4-e^4}+p^4-e^4=0.$$

Den Asymptoten dieser zwei Hyperbeln sind die Axen der hyperosculirenden Ellipsen parallel. Um die Berührungsstellen selbst zu finden, suchen wir die Gleichung dieser Ellipsen auf. Der Winkel ihrer Hauptaxe gegen die x-Axe, φ, ist $w-\frac{\pi}{4}$, wenn wir uns auf den zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegenden Werth von w beschränken. Also ist

$$\cos\Phi=\cos\left(W-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{p^4-e^4}}{p^2}, \quad \sin\Phi=\pm\frac{e^2}{p^2};$$

die Gleichung des Systemes Σ ergiebt sich nach 18) und 135):

$$x^2(p^2-e^2\cos\Phi)+y^2(p^2+e^2\cos\Phi)-2xy\,e^2\sin\Phi-(p^4-e^4)\cos\Phi=0.$$

Demnach ist die Gleichung der hyperosculirenden Ellipsen:

$$x^2\left(p^2-\frac{e^2}{p^2}\sqrt{p^4-e^4}\right)+y^2\left(p^2+\frac{e^2}{p^2}\sqrt{p^4-e^4}\right)\mp 2xy\frac{e^4}{p^4}$$
$$-\frac{(p^4-e^4)\sqrt{p^4-e^4}}{p^2}=0.$$

Um die Berührungspunkte zu finden, braucht man nur diese Gleichung mit der von $\mathfrak{H}_0$ zu combiniren. Multiplicirt man aber diese mit $\frac{\sqrt{p^4-e^4}}{p^2}$ und addirt dann beide, so erhält man $x^2\mp 2xy+y^2=0$ oder

$$y=\pm x.$$

D. h.: Welchen Werth auch p habe, stets liegen die Hyperosculationsstellen auf den Geraden, welche die Winkel der Curvenaxen halbiren (s. Taf. II Fig. 8b). Der Winkel w der Hauptaxe der berührenden Hyperbeln $\mathfrak{H}_0$ gegen die x-Axe nähert sich mit wachsendem p dem Werthe $\frac{\pi}{4}$, mit abnehmendem p aber ($p^2 > e^2$) $\frac{\pi}{2}$; bei der Lemniskate ($p^2 = e^2$) fallen die Hyperosculationsstellen in den Doppelpunkt.

Die Systempaare I und II sind hier imaginär, wie die allgemeine Theorie lehrt (weil die reellen Brennpunkte kein Kreisviereck bilden) und durch die Formeln 131), 132) bestätigt wird. Dagegen sind im Falle $p^2 < e^2$ alle drei Systempaare I, II, III reell. Wenn

$$p^2 < e^2$$

ist, so sind die Schnittpunkte der Curve mit der y-Axe imaginär; sie hat dafür auf der x-Axe vier Scheitel, zwei äussere und zwei innere, denn sie besteht dann aus zwei Ovalen. Innerhalb jedes Ovals liegen zwei von den (reellen) Axenbrennpunkten 130). Wir betrachten wieder zuerst das System 134), 136), welches, wie vorhin, aus gleichseitigen Hyperbeln besteht. Jetzt sind aber die zerfallenden Hyperbeln reell: $\cos\Phi = -\frac{p^2}{e^2}$, also $\sin\varphi = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}(e^2+p^2)}}{e}$ [s. 136)]. Die zugehörigen Doppeltangenten sind die inneren gemeinsamen Tangenten der Ovale und die Lothe darauf im Mittelpunkte (s. Taf. II Fig. 9a).

Das System 135), 137) dagegen besteht jetzt aus ungleichseitigen concentrischen Hyperbeln. Die zerfallenden Kegelschnitte $\varphi = \pm\frac{\pi}{4}$ nach 137) liefern natürlich dieselben Doppeltangenten;* von den zerfallenden Kegelschnitten ab erfolgt dann der Uebertritt der Hyperbeln aus den spitzen in die stumpfen Asymptotenfelder.** Die spitzwinklige Hyperbel $\Phi = 0$ berührt die Ovale in den äusseren, die stumpfwinklige $\Phi = \pi$ in den inneren Scheiteln (s. Taf. II Fig. 9b). Der Schnittpunktskreis hat (ebenso wie im Falle $p^2 > e^2$) den Radius 0 und fällt mit dem Coordinatenanfange zusammen.

Die vier Systeme, welche zu ϱ_1, ϱ_2 gehören, unterscheiden wir durch die unteren Indices 1, 2 von einander und nennen sie also Σ_1, Σ'_1, Σ_2, Σ'_2. Nach 131), 132), 127), 118), 119), 25) ergiebt sich für die Systeme I:

$$\text{138)}\quad \begin{aligned} &\Sigma_1:\quad \varrho = e\varepsilon_1,\quad \lambda = -\frac{1}{\varepsilon_1},\quad \mathsf{A}_1 = +e^2\varepsilon_1(1-\varepsilon_1),\quad \mathsf{B}_1 = -e^2\varepsilon_1(1+\varepsilon_1),\\ &\qquad\qquad \zeta_1 = -\frac{1}{\varepsilon_1} + \varepsilon_1;\\ &\Sigma'_1:\quad \varrho' = e\varepsilon_1,\quad \lambda' = +\frac{1}{\varepsilon_1},\quad \mathsf{A}'_1 = -e^2\varepsilon_1(1+\varepsilon_1),\quad \mathsf{B}'_1 = +e^2\varepsilon_1(1-\varepsilon_1),\\ &\qquad\qquad \zeta'_1 = +\frac{1}{\varepsilon_1} - \varepsilon_1; \end{aligned}$$

---

* s. den Satz S. 29, 30.

** vergl. S. 2.

für die Systeme II (Σ_2, Σ'_2) erhält man dieselben Formeln, nur ist der untere Index 1 mit 2 vertauscht. Nach 27) sind die zugehörigen Axenbrennpunkte:

$$139)\quad \begin{aligned} &\Sigma_1:\ x=+e,\ x=+\frac{\sqrt{e^4-p^4}}{e};\quad \Sigma'_1:\ x=-e,\ x=-\frac{\sqrt{e^4-p^4}}{e};\\ &\Sigma_2:\ x=+e,\ x=-\frac{\sqrt{e^4-p^4}}{e};\quad \Sigma'_2:\ x=-e,\ x=+\frac{\sqrt{e^4-p^4}}{e}. \end{aligned}$$

Wir betrachten von beiden Paaren nur die Systeme Σ_1, Σ_2, weil die conjugirten Systeme Σ'_1, Σ'_2 zu ihnen symmetrisch sind. Bei Σ_1, Σ_2 erhält man nach 4) für die Quadrate der Halbaxen:

$$140)\quad \begin{aligned} &\Sigma_1:\ A=e^2(1-\varepsilon_1)(\varepsilon_1+\cos\Phi),\ B=-e^2(1+\varepsilon_1)(\varepsilon_1+\cos\Phi),\\ &\Sigma_2:\ A=e^2(1-\varepsilon_2)(\varepsilon_2+\cos\Phi),\ B=-e^2(1+\varepsilon_2)(\varepsilon_2+\cos\Phi). \end{aligned}$$

Beide Systeme bestehen aus Hyperbeln.

Im Systeme Σ' ist die Hyperbel $\Phi=0$, welche das auf der positiven Seite der x-Axe liegende Oval in seinen beiden Scheiteln berührt, stumpfwinklig; von den zerfallenden Hyperbeln an ($\cos\Phi=-\varepsilon_1$) aber sind alle Hyperbeln spitzwinklig. Die Hyperbel $\Phi=\pi$ berührt das auf der negativen x-Axe liegende Oval in den Scheiteln.* Die zerfallenden Hyperbeln bestehen aus den inneren und äusseren gemeinsamen Tangenten der Ovale (s. Taf. II Fig. 9c). Nach 30) und 31) wird $k=e$, also liegt der Mittelpunkt des Schnittpunktskreises in einem zum Systeme gehörigen Brennpunkte der Curve; sein Halbmesser ist $e\varepsilon_2\sqrt{2}=\sqrt{e^2-\sqrt{e^4-p^4}}$.

Im Systeme Σ_2 hat die Hyperbel $\Phi=0$ die Halbaxen $e\varepsilon_1$, $e(1+\varepsilon_2)$; sie berührt im äusseren Scheitel des positiven und im inneren des negativen Ovales; die Hyperbel $\Phi=\pi$ $(e(1-\varepsilon_2), e\varepsilon_1)$ berührt in den beiden anderen Scheiteln. Bei den zerfallenden Kegelschnitten ($\cos\Phi=-\varepsilon_2$) erfolgt wieder der Uebertritt aus den stumpfen in die spitzen Asymptotenfelder; die Bestandtheile der zerfallenden Hyperbeln sind aber die äusseren gemeinsamen Tangenten der beiden Ovale und die auf den inneren im Coordinatenanfange senkrecht stehenden Doppeltangenten (s. Taf. II Fig. 9d). Bezeichnet man also die ersteren durch (a), die letzteren durch (u) und die inneren gemeinsamen Tangenten selbst durch (i), so entsprechen den drei Systempaaren I, II, III gerade die drei möglichen Combinationen $(a)(i)$, $(a)(u)$, $(i)(u)$. Der Schnittpunktskreis des Systemes Σ_2 ist mit dem des Systemes Σ_1 concentrisch, sein Halbmesser ist $e\varepsilon_1\sqrt{2}=\sqrt{e^2+\sqrt{e^4-p^4}}$.

Ausserdem ist noch folgende Besonderheit bei den Systempaaren I, II vorhanden: Bezeichnet man im Systeme Σ'_1 oder Σ'_2 die Mittelpunkte der zerfallenden Kegelschnitte mit L', N', so ist $L'N'$ die eine Asymptote derjenigen Kegelschnitte, die mit den zerfallenden Kegelschnitten im Systeme Σ_1 bez. Σ_2 parallelaxig sind; die anderen Asymptoten dieser Kegelschnitte

---

* Die Halbaxen der Hyperbeln $\Phi=0$, $\Phi=\pi$ sind $e\varepsilon_2$, $e(1+\varepsilon_1)$ bez. $e(1-\varepsilon_1)$, $e\varepsilon_2$.

aber sind die Tangenten vom Mittelpunkte des Schnittpunktskreises an den Mittelpunktskreis des Systemes Σ_1 bez. Σ_2.

Bei der Lemniskate ($p^2 = e^2$) besteht das System Σ_3 natürlich wieder aus gleichseitigen Hyperbeln, nur dass die zerfallenden Hyperbeln zusammenfallen und die Doppelpunktstangenten bilden; dabei ist $A = -B = e^2(1 + \cos\Phi)$.* Das System Σ'_3 aber besteht aus den Geraden durch den Doppelpunkt: $A = 2e^2\cos\Phi$, $B = 0$** (s. Taf. II Fig. 10a). Endlich fallen die Systempaare I und II zusammen, nämlich Σ_1 mit Σ_2, Σ'_1 mit Σ'_2. Wir bezeichnen die so entstehenden Hyperbelsysteme kurz als Σ, Σ' und betrachten weiter Σ. Die Quadrate der Halbaxen sind $\frac{e^2}{2}(\sqrt{2}-1)(1+\sqrt{2}\cos\Phi)$, $-\frac{e^2}{2}(\sqrt{2}+1)(1+\sqrt{2}\cos\Phi)$, das Axenverhältniss also $\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}$. Der Radius des Mittelpunktskreises ist $\frac{e}{\sqrt{2}}$, des Schnittpunktskreises e, so dass dieser Kreis, da sein Mittelpunkt im Brennpunkte $x = e$ liegt, durch den Doppelpunkt geht. Von allen Kegelschnitten des Systemes gilt dasselbe (s. Taf. II Fig. 10b).

§ 3. Zweites Beispiel: Die Mittelpunktsfusspunktcurven der Ellipse und Hyperbel.

Die Gleichung des Grundkegelschnittes sei $\frac{x^2}{U} + \frac{y^2}{V} = 1$; je nachdem er Ellipse oder Hyperbel ist, ist V positiv oder negativ. Im ersteren Falle nehmen wir an, es sei $U > V$. Wir setzen $U = u^2$ und $abs.\, V = v^2$, so dass stets u, v die Halbaxen des Kegelschnittes bedeuten. Dann ist die Gleichung der Curve (die den Coordinatenanfang oder Mittelpunkt zum Doppelpunkte hat):

141) $$(x^2+y^2)^2 - Ux^2 - Vy^2 = 0,$$

142) $$\mathfrak{a} = -U, \quad \mathfrak{b} = -V, \quad \mathfrak{c} = \mathfrak{d} = \mathfrak{e} = \mathfrak{f} = 0.$$

Die beiden Gleichungen für P, 120), 124), werden

143) $$\mathsf{P}(4\mathsf{P} - U)^2 = 0, \quad \left(\mathsf{P} - \frac{V}{4}\right)(16\mathsf{P}^2 - 4\mathsf{P}(U + 2V) + (U + V)V) = 0.$$

Gl. 129) lehrt, dass die Axenbrennpunkte durch

144) $$x = 0, \quad x = 0, \quad x = \pm\sqrt{\frac{UV}{V-U}}$$

gegeben sind. Im Mittelpunkte liegen demnach stets zwei reelle Axenbrennpunkte; die beiden anderen sind für die Fusspunktcurve der Ellipse imaginär, für die der Hyperbel reell; im ersten Falle sind ihre Antipunkte reell:

145) $$y = 0, \quad y = 0, \quad y = \pm\sqrt{\frac{UV}{U-V}}.$$

* Ein hierauf bezüglicher Satz ist schon in meiner Arbeit über die Kreisfusspunktcurven enthalten, l. c. S. 343.

** Die Sätze über die Beziehungen dieser conjugirten Systeme Σ_3, Σ'_3 zu einander sind hier besonders interessant.

Die vier in 144) angegebenen Axenbrennpunkte ($V < 0$) bezeichnen wir in der Reihenfolge $-\sqrt{\frac{UV}{V-U}}$, 0, 0, $+\sqrt{\frac{UV}{V-U}}$ mit H, J, H', J'; im Falle $V > 0$ nennen wir ebenso die Brennpunkte $y = -\sqrt{\frac{UV}{U-V}}$, $y = 0$, $y = 0$, $y = +\sqrt{\frac{UV}{U-V}}$. [Die Doppelbrennpunkte liegen nach 40) bei $y = 0$, $x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{U-V}$; $x = 0$, $y = \pm \frac{1}{2}\sqrt{V-U}$.] Da diese vier reellen Brennpunkte auf einem Kreise liegen (bei $V > 0$ auf der x-Axe, bei $V < 0$ auf der y-Axe), so werden drei Systempaare reell sein.

1. Fusspunktcurve der Ellipse ($V > 0$).

Hier nehmen wir die bisherige y-Axe zur x-Axe und umgekehrt, weil es bei Anwendung der Gleichungen S. 50 u. 51 bequemer ist, die reellen Brennpunkte auf der x-Axe zu haben. Die Gleichung der Curve ist dann: $(x^2+y^2)^2 - v^2x^2 - u^2y^2 = 0$, wo u die grosse, v die kleine Halbaxe der Grundellipse bedeutet. Die Relationen 139) sind:

$$\mathfrak{a} = -v^2, \quad \mathfrak{b} = -u^2, \quad \mathfrak{c} = \mathfrak{d} = \mathfrak{e} = \mathfrak{f} = 0;$$

die Gleichungen 143) werden

$$\mathsf{P}(4\mathsf{P}-v^2)^2 = 0, \quad \left(\mathsf{P}-\frac{u^2}{4}\right)\left(16\mathsf{P}^2 - 4\mathsf{P}(2u^2+v^2) + u^2(u^2+v^2)\right) = 0$$

und haben als Wurzeln:

146) $$\varrho_1 = 0, \quad \varrho_2 = \varrho_3 = \frac{v}{2}; \quad \varrho_4 = \varrho_5 = \frac{u}{2}, \quad \varrho_6 = \frac{\sqrt{u^2+v^2}}{2}.$$

ϱ_1 entspricht dem Systempaare I; die Systempaare II, III aber fallen zusammen (ϱ_2, ϱ_3). Mit den übrigen drei Systempaaren beschäftige ich mich hier nicht weiter; sie sind imaginär.*

I. $\varrho_1 = 0$. Die Gleichungen 53) werden:

$$\mathsf{A}+\mathsf{B} = \frac{u^2+v^2}{2}, \quad \mathsf{A}-\mathsf{B} = \frac{u^2-v^2}{2\lambda}, \quad \mathsf{AB}(1-\lambda^2) = 0,$$

und liefern die beiden Systeme:

147) $$\begin{aligned} &\Sigma: \quad \mathsf{A} = \frac{u^2+v^2}{2}, \quad \mathsf{B} = 0, \quad \lambda = \frac{u^2-v^2}{u^2+v^2},^{**} \\ &\Sigma': \quad \mathsf{A}' = \frac{u^2}{2}, \quad \mathsf{B}' = \frac{v^2}{2}, \quad \lambda = 1.^{**} \end{aligned}$$

Σ besteht demnach aus den Geraden durch den Mittelpunkt (Doppelpunkt) der Curve, das System Σ' aber aus Ellipsen, die der Grundellipse ähnlich sind. Die Quadrate der Halbaxen sind bei Σ offenbar [vergl. 4)]:

---

* Ueberhaupt ist die ganze vorliegende Abhandlung nur als eine vorläufige (durchaus unvollständige) Darlegung meiner Untersuchungen über diesen Gegenstand zu betrachten.

** oder, was aber genau auf dasselbe hinauskommt:

$$\mathsf{A} = 0, \quad \mathsf{B} = \frac{u^2+v^2}{2}, \quad \lambda = -\frac{u^2-v^2}{u^2+v^2}$$

bei Σ, bez.

$$\mathsf{A}' = \frac{v^2}{2}, \quad \mathsf{B}' = \frac{u^2}{2}, \quad \lambda = -1$$

bei Σ'.

$$\tfrac{1}{2}[u^2+v^2-(u^2-v^2)\cos\Phi]=u^2\sin^2\varphi+v^2\cos^2\Phi \text{ und } 0,$$

bei Σ':

$$(u\sin\varphi)^2 \text{ und } (v\sin\varphi)^2;$$

dabei bedeutet immer φ den Winkel der Hauptaxe des Kegelschnittes gegen die x-Axe (d. i. jetzt die Nebenaxe der Grundellipse). Die Hauptscheitel der Ellipsen Σ' liegen also auf den beiden Kreisen, deren Durchmesser die Halbaxen u der Grundellipse sind, und ihre Nebenscheitel auf den Kreisen, die über den kleinen Halbaxen v der Grundellipse als Durchmessern beschrieben werden können. Die Brennpunkte zu Σ sind $x=0$, $x=0$, also J, H', die zu Σ' $x=\mp\frac{uv}{\sqrt{u^2-v^2}}$, also H, J', nebst ihren Antipunkten. Die Hyperbeln $\mathfrak{H}$, die zum Systeme Σ gehören, bestehen demnach aus je zwei zu einander senkrechten Geraden durch den Coordinatenanfang. Der Schnittpunktskreis von Σ ist ebenfalls ein Nullkreis. Dagegen hat man für das System Σ':

$$k=0, \quad s=\frac{uv}{\sqrt{u^2+v^2}}.$$

Der Schnittpunktskreis von Σ' liegt demnach stets gänzlich innerhalb der Curve. Fasst man daher die verschiedenen Paare parallelaxiger Ellipsen ins Auge, so bemerkt man, dass es darunter solche giebt, deren Schnittpunkte imaginär, und solche, deren Schnittpunkte reell sind; dazwischen aber zwei, bei welchen die Schnittpunkte paarweise zusammenfallen, also die beiden Ellipsen sich berühren. Dies geschieht aber, wenn die kleine Axe der grösseren Ellipse, $v\sin\varphi$, gleich der grossen Axe der kleineren Ellipse, $u\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=u\cos\varphi$, und also beide gleich $\frac{uv}{\sqrt{u^2+v^2}}$ sind. Das giebt, wenn dieser Winkel φ mit ϑ_0 bezeichnet wird, $\sin\vartheta_0=\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}$, $\cos\vartheta_0=\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}$. Demnach sind bei zwei solchen Ellipsen die kleine Axe der grösseren oder die grosse der kleineren denjenigen Linien parallel, welche die Scheitel der Grundellipse mit einander verbinden (s. Taf. II Fig. 11a). — Auch ergiebt sich von selbst, dass unter den Ellipsen Σ' zwei sein müssen, deren Berührungspunkte mit der Curve paarweise zusammenfallen, die also die Curve zweimal hyperosculiren. Um sie kennen zu lernen, führen wir Polarcoordinaten r, ϑ ein ($x=r\cos\vartheta$, $y=r\sin\vartheta$). Die Gleichung einer der Ellipsen ist

$$v^2(x\cos\varphi+y\sin\varphi)^2+u^2(x\sin\varphi-y\cos\varphi)^2=u^2v^2\sin^2\varphi.$$

Diese Gleichung und die der Curve sind in Polarcoordinaten:

$$r^2[\cos^2\vartheta(u^2\sin^2\varphi+v^2\cos^2\varphi)+\sin^2\vartheta(u^2\cos^2\varphi+v^2\sin^2\varphi)-u^2v^2\sin^2\varphi]$$
$$=2r^2(u^2-v^2)\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi\cos\varphi;$$
$$r^2-v^2\cos^2\vartheta-u^2\sin^2\vartheta=0.$$

Aus der zweiten folgt $\sin^2\vartheta = \frac{r^2 - v^2}{u^2 - v^2}$, $\cos^2\vartheta = \frac{u^2 - r^2}{u^2 - v^2}$. Setzt man dies in die erste ein, so erhält man für den Berührungsvector r die Gleichung:

$$[(r^2)^2 - (r^2)(u^2 + v^2)\sin^2\varphi + u^2 v^2 \sin^2\varphi]^2 = 0.$$

Wir haben die Bedingung aufzusuchen, unter der diese Gleichung nur einen Werth für (r^2) giebt. Diese Bedingung ist:

$$(u^2 + v^2)^2 \sin^2\varphi = 4u^2 v^2,$$

und demgemäss ist für die eine hyperosculirende Ellipse, wenn wir ihr φ mit φ_0 bezeichnen: $\cos\varphi_0 = \frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2}$, $\sin\varphi_0 = \frac{2uv}{u^2 + v^2}$. Der zum Berührungsvector gehörige Winkel ϑ ist also gleich dem Complemente des obigen Winkels ϑ_0, so dass die Berührungsvectoren selbst auf den Verbindungslinien der Scheitel der Grundellipse senkrecht stehen (s. Taf. II Fig. 11a).

Was die zerfallenden Kegelschnitte betrifft, so sind sie nur im Systeme Σ' reell; nämlich hier fallen sie zusammen und sind mit der Nullellipse $u^2x^2 + v^2y^2 = 0$ identisch, während sie im Systeme Σ durch die doppelt gezählten Geraden $\frac{y}{x} = \pm i \frac{u}{v}$ dargestellt werden.

Ueber die beiden Sätze endlich, die das Reciprocitätsgesetz S. 29 für das gegenwärtige Beispiel mit sich bringt, vergl. S. 64.

Wir kommen nun zu dem Systempaare Σ_1, Σ'_1 (mit welchem das Systempaar Σ_2, Σ'_2 zusammenfällt): $\varrho = \frac{v}{2}$ (s. S. 60). Die Gleichungen 118), 119) werden:

$$\lambda = \mp \frac{\sqrt{u^2 - v^2}}{u}, \quad \mathsf{A} + \mathsf{B} = \frac{u^2}{2}, \quad \mathsf{A} - \mathsf{B} = \frac{u^2 - v^2}{2\lambda}.$$

Hieraus folgt für

$$\begin{aligned} &\Sigma_1: \quad \mathsf{A} = \frac{u}{4}\left(u - \sqrt{u^2 - v^2}\right), \quad \mathsf{B} = \frac{u}{4}\left(u + \sqrt{u^2 - v^2}\right), \quad \lambda = -\frac{\sqrt{u^2 - v^2}}{u}, \\ 148) \quad &\Sigma'_1: \quad \mathsf{A} = \frac{u}{4}\left(u + \sqrt{u^2 - v^2}\right), \quad \mathsf{B} = \frac{u}{4}\left(u - \sqrt{u^2 - v^2}\right), \quad \lambda = +\frac{\sqrt{u^2 - v^2}}{u}. \end{aligned}$$

Demnach sind, wie es zu erwarten war, die Systeme Σ_1, Σ'_1 congruent, und zwar zu einander symmetrisch mit Beziehung auf die Hauptaxe der Grundellipse. Zu Σ_1 gehören die Brennpunkte $x = 0$, $x = \frac{uv}{\sqrt{u^2 - v^2}}$, also H', J' (oder J, J'), zu Σ'_1 $x = 0$, $x = -\frac{uv}{\sqrt{u^2 - v^2}}$, d. h. H, J (oder H, H'). Beide Systeme bestehen offenbar aus Ellipsen, deren Axenverhältniss $\sqrt{\frac{u - \sqrt{u^2 - v^2}}{u + \sqrt{u^2 - v^2}}}$ ist. Wir betrachten nur das System Σ_1 weiter. Alle Ellipsen gehen durch den Doppelpunkt hindurch, weil die Hyperbeln, welche die Berührungspunkte ausschneiden, diesen enthalten. Für den Schnittpunktskreis hat man

$$k=\frac{v\sqrt{u^2-v^2}}{2u},\quad s=\frac{v\sqrt{u^2-v^2}}{2u};$$

er geht also, wie vorauszusehen war, durch den Doppelpunkt und liegt gänzlich innerhalb der Curve. Die zerfallenden Kegelschnitte bestehen, wie die Gleichungen 47), 48) zeigen, der eine aus den Geraden $y=i\frac{v^2}{2\sqrt{u^2-v^2}}$ und $\frac{y}{x}=-i\frac{v}{u}$, der andere aus $\frac{y}{x}=+i\frac{v}{u}$ und $y=-i\frac{v^2}{2\sqrt{u^2-v^2}}$. Der Kegelschnitt $\varphi=0$ hat die Halbaxen $a=\frac{1}{2}\left(u+\sqrt{u^2-v^2}\right)$, $b=\frac{v}{2}$, dagegen $\varphi=\frac{\pi}{2}$: $a=\frac{v}{2}$, $b=\frac{1}{2}\left(u-\sqrt{u^2-v^2}\right)$ (vergl. Taf. II Fig. 11 b).

2. Fusspunktcurve der Hyperbel ($V=-v^2$).

Die Brennpunkte H, J, H', J' sind dann $x=-\frac{uv}{\sqrt{u^2+v^2}}$, $x=0$, $x=0$, $x=+\frac{uv}{\sqrt{u^2+v^2}}$, wenn die Hauptaxe der Grundhyperbel x-Axe ist; sie liegen also stets innerhalb der von der Curve gebildeten Schleifen. Man hat jetzt

$$\mathfrak{a}=-u^2,\quad \mathfrak{b}=v^2,\quad \mathfrak{c}=\mathfrak{d}=\mathfrak{e}=\mathfrak{f}=0,$$

und die Gl. 120), 124) werden $\mathsf{P}(4\mathsf{P}-u^2)^2=0$, $\left(\mathsf{P}+\frac{v^2}{4}\right)^2\left(\mathsf{P}-\frac{(u^2-v^2)}{4}\right)=0$. Die erste, auf die es uns hier allein ankommt, hat die Wurzeln:

$$\varrho_1=0,\quad \varrho_2=\varrho_3=\frac{u}{2}. \tag{149}$$

I. (Σ, Σ'): $\varrho=0$. Die Gleichungen 53) geben

$$\mathsf{A}+\mathsf{B}=\frac{u^2-v^2}{2},\quad \mathsf{A}-\mathsf{B}=-\frac{u^2+v^2}{2\lambda},\quad \mathsf{AB}(1-\lambda^2)=0,$$

mithin für

$$\begin{aligned}\Sigma:&\quad \mathsf{A}=\frac{u^2-v^2}{2},\quad \mathsf{B}=0,\quad \lambda=-\frac{u^2+v^2}{u^2-v^2};\\ \Sigma':&\quad \mathsf{A}'=\frac{u^2}{2},\quad \mathsf{B}'=-\frac{v^2}{2},\quad \lambda'=-1.\end{aligned} \tag{150}$$

Σ besteht wiederum aus den Geraden durch den Doppelpunkt, Σ' ist stets ein Hyperbelsystem. Die Quadrate der Halbaxen sind bei Σ $u^2\cos^2\varphi-v^2\sin^2\varphi$ und 0, bei Σ' aber $(u\cos\varphi)^2$ und $(v\cos\varphi)^2$. Bei Σ' liegen die Scheitel der Hyperbeln auf den beiden Kreisen, die über den Halbaxen der Curve als Durchmessern beschrieben werden können.* Die zu Σ gehörenden Axenbrennpunkte sind $x=0$, $x=0$, bei Σ': $x=\mp\frac{uv}{\sqrt{u^2+v^2}}$. Die

* Ueberhaupt aber bildet ebenso, wie beim Systeme Σ', S. 60, irgend ein System entsprechender Punkte zwei Kreise; vergl. die angeführte Arbeit über die Kreisfusspunktcurven [man findet das auch durch die Gl. 60) bestätigt].

zerfallenden Kegelschnitte des Systemes Σ sind die doppelt zu zählenden Geraden $\frac{y}{x} = \pm \frac{u}{v}$; die von Σ' aber fallen zusammen $\left(\varphi = \pm \frac{\pi}{2}\right)$ und bestehen aus den beiden (eben genannten) Doppelpunktstangenten. — Der Schnittpunktskreis von Σ' ist imaginär oder reell, je nachdem die Grundhyperbel spitz- oder stumpfwinklig ($v \lesseqgtr u$) ist; denn für seinen Halbmesser ergiebt sich aus 31) $\frac{uv}{\sqrt{v^2 - u^2}}$; wenn er reell ist, umschliesst er die Curve.

Das Reciprocitätsgesetz lautet hier folgendermassen (ebenso für Σ, Σ' S. 60): Irgend ein System entsprechender Tangenten der Kegelschnitte Σ' bildet ein Geradenbüschel, dessen Mittelpunkt ein Punkt der Curve ist; und umgekehrt: zieht man in den Endpunkten aller vom Doppelpunkte ausgehenden Radienvectoren der Curve unter einem constanten Winkel Geraden gegen die Vectoren, so hüllen sie einen Kegelschnitt des Systemes Σ' ein.*

II. (Σ_1, Σ'_1, mit denen Σ_2, Σ'_2 zusammenfallen): $\varrho = \frac{u}{2}$. Aus 118), 119) erhält man:

$$151) \quad \lambda = \mp \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{v}, \quad \mathrm{A} + \mathrm{B} = -\frac{v^2}{2}, \quad \mathrm{A} - \mathrm{B} = -\frac{u^2 + v^2}{2\lambda}.$$

Die beiden Systeme, die sich hieraus ergeben, haben das eine die Punkte $x = 0$, $x = \frac{uv}{\sqrt{u^2 + v^2}}$, das andere $x = -\frac{uv}{\sqrt{u^2 + v^2}}$, $x = 0$ als zugehörige reelle Brennpunkte. Wir betrachten nur das erstere, Σ_1, weiter, da das andere mit ihm congruent (mit Beziehung auf die y-Axe symmetrisch zu ihm) ist. Für den Schnittpunktskreis hat man nach 30), 31)

$$k = \frac{u\sqrt{u^2 + v^2}}{2v}, \quad s = \frac{u\sqrt{u^2 + v^2}}{2v};$$

er geht also durch den Doppelpunkt, ebenso wie alle Hyperbeln Σ_1 (denn Σ_1 besteht aus Hyperbeln, weil man aus den Gl. 151) die Werthe

$$152) \quad \mathrm{A} = \frac{v}{4}\left(\sqrt{u^2 + v^2} - v\right), \quad \mathrm{B} = -\frac{v}{4}\left(\sqrt{u^2 + v^2} + v\right), \quad \lambda = -\frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{v}$$

entnimmt); er umschliesst stets die eine Schleife der Curve. Die beiden zerfallenden Hyperbeln $\left(\cos\Phi = -\frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}\right)$, von denen jede aus einer Doppelpunktstangente $\frac{y}{x} = \pm \frac{u}{v}$ und einer der zur x-Axe parallelen Doppeltangenten $y = \pm \frac{u^2}{2\sqrt{u^2 + v^2}}$ besteht (s. Taf. II Fig. 11c), trennen wieder die spitzen von den stumpfen.

* l. c., wo die Verallgemeinerung dieses Satzes für alle Fusspunktcurven sich findet.

Zu den Fusspunktcurven der Hyperbel gehört auch die Lemniskate (Fusspunktcurve der gleichseitigen Hyperbel). Man erkennt leicht, dass die hier entwickelten Formeln für diesen Fall in die S. 59 abgeleiteten übergehen $\left(u = v = e\sqrt{2}\right)$.

§ 4. Drittes Beispiel: Die Cartesischen Curven („aplanetischen Linien“).

Es ist bekannt, dass von den vier Axenbrennpunkten einer Cartesischen Curve einer im Unendlichen liegt. Die drei anderen unterscheide ich, wenn sie alle drei reell sind, als äusseren, mittleren und inneren;* es liegt nämlich der „äussere“ ausserhalb der beiden Ovale, aus denen dann die Curve besteht, der „innere“ innerhalb des inneren Ovales, der mittlere ebenfalls, aber zwischen diesem und jenem. Den Namen „Cartesische Curve“ fassen wir im weiteren Sinne,** d. h. wir lassen zu, dass zwei dieser Brennpunkte (nämlich der äussere und mittlere, oder dieser und der innere) conjugirt imaginär sind, wobei dann ihre Antipunkte reell werden. Jede Cartesische Curve wird ferner von drei Kreissystemen eingehüllt,*** von denen allerdings zwei imaginär sind, sobald nur ein endlicher Axenbrennpunkt reell ist. Da es sich zeigen wird, dass diese Kreissysteme drei von den zu betrachtenden sechs Kegelschnittssystemen sind,† so nehmen wir zunächst die Reduction der Gleichungen 22), 23), 27) vor, welche im Falle $\mathsf{A}=\mathsf{B}$ nöthig wird. Man hat nämlich dann, wenn man gleich $\tau = 0$ einführt, als Coordinaten der zugehörigen Brennpunkte im Coordinatensysteme (ξ, η):

$$\begin{cases} \xi_1 = 2\varrho\dfrac{\sqrt{\mathsf{AB}}}{\mathsf{A}-\mathsf{B}}\sqrt{1+\lambda\dfrac{\mathsf{A}-\mathsf{B}}{2\varrho^2}}, \\ \eta_1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \xi_2 = -\xi_1, \\ \eta_2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \xi_3 = 0, \\ \eta_3 = i\xi_1, \end{cases} \quad \begin{cases} \xi_4 = 0, \\ \eta_4 = -i\xi_1, \end{cases}$$

also im ursprünglichen Coordinatensysteme (x, y):

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\varrho}{\mathsf{A}-\mathsf{B}}\left[2\sqrt{\mathsf{AB}}\sqrt{1+\lambda\dfrac{\mathsf{A}-\mathsf{B}}{2\varrho^2}} - (\mathsf{A}+\mathsf{B})\right], \\ y_1 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{-\varrho}{\mathsf{A}-\mathsf{B}}\left[2\sqrt{\mathsf{AB}}\sqrt{1+\lambda\dfrac{\mathsf{A}-\mathsf{B}}{2\varrho^2}} + (\mathsf{A}+\mathsf{B})\right], \\ y_2 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = x_4 = -\varrho\dfrac{\mathsf{A}+\mathsf{B}}{\mathsf{A}-\mathsf{B}}, \\ y_3 = -y_4 = i\dfrac{2\varrho\sqrt{\mathsf{AB}}}{\mathsf{A}-\mathsf{B}}\cdot\sqrt{1+\lambda\dfrac{\mathsf{A}-\mathsf{B}}{2\varrho^2}}. \end{cases}$$

* l. c. (Ueber die Kreisfusspunktcurven) S. 354.

** vergl. Salmon-Fiedler, Höhere ebene Curven, S. 331 (2. Aufl.).

*** Wenn von dem Systeme der Kreise, deren Mittelpunkte auf der Axe liegen, abgesehen wird.

† Dass ein Kreis für eine bicirculare Curve vierter Ordnung ein viermal berührender Kegelschnitt sein kann, ist selbstverständlich, nur sind zwei Berührungspunkte uneigentliche Berührungspunkte.

Da nun

$$\sqrt{1+\lambda\frac{\mathsf{A}-\mathsf{B}}{2\varrho^2}}=1+\lambda\frac{\mathsf{A}-\mathsf{B}}{4\varrho^2}+\cdots \quad \text{und} \quad \lim_{\mathsf{B}=\mathsf{A}}\frac{(\mathsf{A}+\mathsf{B}-2\sqrt{\mathsf{AB}})}{(\mathsf{A}-\mathsf{B})}=0$$

ist, so erhält man in der Grenze für $\mathsf{B}=\mathsf{A}$:

153) $$\begin{cases} x_1=\dfrac{\lambda\mathsf{A}}{2\varrho}, \\ y_1=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=\infty, & x_3=x_4=\infty, \\ y_2=0, & y_3=-y_4=i\,\infty. \end{cases}$$

Die Combinationen jedes der endlichen Brennpunkte mit dem unendlich entfernten werden demnach die drei Kreissysteme liefern, die Combinationen der endlichen Brennpunkte unter einander aber die drei anderen Systeme, von denen, wenn zwei dieser Brennpunkte imaginär sind, eines aus Hyperbeln besteht, die beiden anderen aber imaginär sind, die dagegen alle drei aus reellen Ellipsen bestehen, falls alle drei endlichen Brennpunkte reell sind.

Wir schreiben zunächst die Gleichung der Cartesischen Curve in der Form

154) $$(x^2+y^2)^2-4l(x^2+y^2)-8nx-4m=0,$$

haben also

155) $$\mathfrak{a}=-4l=\mathfrak{b}, \quad \mathfrak{d}=-4n, \quad \mathfrak{f}=-4m, \quad \mathfrak{c}=\mathfrak{e}=0.$$

Demnach wird Gleichung 120):

156) $$\mathsf{P}^3-2l\mathsf{P}^2+(l^2+m)\mathsf{P}-n^2=0,$$

und Gleichung 118) hat die Wurzeln:

157) $$\lambda=-\frac{2n}{\varrho(2l-\mathsf{P})}, \quad \lambda'=0,$$

die nun für die erste Wurzel der Gl. 156) die Systeme Σ, Σ', für die zweite Σ_1, Σ'_1, für die dritte Σ_2, Σ'_2 liefern. Für jedes dieser Systempaare hat man folgende Tabelle, in der x_1, x_2 die Abscissen der zu einem Systeme gehörenden Axenbrennpunkte sind:

158)

$\mathsf{A}=\mathsf{B}=2l-\mathsf{P}$,	$\mathsf{A}'=2l-\mathsf{P}+\dfrac{2n}{\varrho}$, $\mathsf{B}'=2l-\mathsf{P}-\dfrac{2n}{\varrho}$,
$\lambda=-\dfrac{2n}{\varrho(2l-\mathsf{P})}$;	$\lambda'=0$;
$h=\infty$, $k=0$,	$h'=\dfrac{\mathsf{P}(\mathsf{P}-2l)}{2n}$, $k'=\dfrac{2n}{\mathsf{P}-2l}$,
$s=\sqrt{2(\lambda-\mathsf{P})}$;	$s'=\sqrt{\dfrac{2(l-\mathsf{P})(4l\mathsf{P}-3\mathsf{P}^2-4m)}{(2l-\mathsf{P})^2}}$;
$x_1=-\dfrac{n}{\mathsf{P}}$, $x_2=\infty$;	$\left.\begin{matrix}x'_1\\x'_2\end{matrix}\right\}=\dfrac{\mathsf{P}}{2n}(\mathsf{P}-2l\pm\sqrt{4l\mathsf{P}-3\mathsf{P}^2-4m})$.

Die Werthe von x_1, x_2 ergeben sich aus 153), die von x'_1, x'_2 aus 22), 23), 27). Da τ von Anfang an Null ist, und jetzt für drei Systeme (Σ', Σ'_1, Σ'_2) auch λ verschwindet, so ist A und B für diese constant [s. 4)], und also folgt:

Jede Cartesische Curve wird von drei Systemen congruenter viermal berührender Kegelschnitte eingehüllt.*

Die Hyperbeln $\mathfrak{H}$, welche die Berührungspunkte eines Kreissystemes (Σ, Σ_1, Σ_2) ausschneiden, werden, weil drei von den Büschelpunkten im Unendlichen liegen, zu den Geraden durch den zugehörigen endlichen Axenbrennpunkt $x = -\frac{n}{\mathsf{P}}$. Diese Geraden sind überdies parallel den bez. Verbindungslinien der Kreismittelpunkte mit dem Coordinatenanfange K; denn aus 32) folgt, da gegenwärtig $\vartheta = 0$ ist, $\chi = \Phi$. Diese beiden Sätze sind wohlbekannt.

Um die Betrachtungen weiter ins Einzelne zu führen, ist es zweckmässig, statt der Constanten l, m, n drei neue, die ich e, I, K nenne, einzuführen, und zwar so, dass die Wurzeln der Gleichung 156) rational werden. Dies gelingt, wenn man folgende Beziehungen festsetzt:

$$159)\qquad \begin{gathered} 2l = e^2(\mathsf{I} + \mathsf{IK} + \mathsf{K}), \quad n = e^3\mathsf{IK}, \\ 4m = -e^4[(\mathsf{I} + \mathsf{IK} + \mathsf{K})^2 - 4\mathsf{IK}(\mathsf{I} + \mathsf{K} + 1)]. \end{gathered}$$

Es soll also e eine Strecke, dagegen I ebenso wie K eine reine Zahl sein. Man kann nachweisen, dass die geometrische Bedeutung dieser Constanten folgende ist: Es sei P einer der im Endlichen liegenden Axenbrennpunkte H, J, H' (der im Unendlichen liegende sei also J'), so ist I das Quadrat des Verhältnisses des Mittelpunktskreishalbmessers zu der Entfernung des Mittelpunktes K dieses Kreises von P, K aber das Quadrat des Verhältnisses des Halbmessers eines beliebigen Berührungskreises zum Abstande seines Mittelpunktes von P (dieses Verhältniss ist bekanntlich unveränderlich); oder umgekehrt. Vergl. die weiteren Entwickelungen [Gl. 164), 165) und die zweite Anmerkung S. 68].

Die Gleichung für P, 156), wird nun

$$\mathsf{P}^3 - \mathsf{P}^2e^2(\mathsf{I} + \mathsf{IK} + \mathsf{K}) + \mathsf{P}e^4\mathsf{IK}(\mathsf{I} + \mathsf{K} + 1) - e^4\mathsf{I}^2\mathsf{K}^2 = 0,$$

hat also offenbar die Wurzeln

$$160)\qquad \mathsf{P}_1 = e^2\mathsf{IK}, \quad \mathsf{P}_2 = e^2\mathsf{I}, \quad \mathsf{P}_3 = e^2\mathsf{K}.$$

Nach 158) und 159) sind die endlichen Brennpunkte, welche für die Kreissysteme diesen drei Wurzeln entsprechen, gegeben durch

$$161)\qquad x = -e, \quad x = -e\mathsf{K}, \quad x = -e\mathsf{I}.\text{**}$$

---

* Ein specieller Fall dieses Satzes, nämlich für die Kreisfusspunktcurve, ist in der Arbeit über die Kreisfusspunktcurven enthalten und hat den Ausgangspunkt für die gegenwärtige Abhandlung gebildet. l. c. S. 350, vergl. auch die Vorbemerkungen S. 1.

** Der vierte Brennpunkt ist dann nach 129) $x = \infty$. Die Gl. 128) wird in unserem Falle, wo

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} = -2e^2(\mathsf{I} + \mathsf{IK} + \mathsf{K}), \quad \mathfrak{d} = -4e^3\mathsf{IK}, \quad \mathfrak{f} = e^4[(\mathsf{I} + \mathsf{IK} + \mathsf{K})^2 - 4\mathsf{IK}(\mathsf{I} + \mathsf{K} + 1)]$$

ist:

$$0 . x_0^4 - 16e^3\mathsf{IK}[x_0^3 + x_0^2e(\mathsf{I} + \mathsf{K} + 1) + x_0^2e(\mathsf{I} + \mathsf{IK} + \mathsf{K}) + e^3\mathsf{IK}] = 0$$

und giebt also genau die vier Brennpunkte, wie sie auf anderem Wege gefunden wurden.

Bezeichnet man also die drei Systempaare, die aus den Wurzelwerthen P_1, P_2, P_3 hervorgehen, der Reihe nach wieder mit Σ, Σ'; Σ_1, Σ'_1; Σ_2, Σ'_2, wo Σ, Σ_1, Σ_2 die drei Kreissysteme, Σ', Σ'_1, Σ'_2 die drei Systeme congruenter Kegelschnitte sind (s. S. 66), so zieht man folgende Tabelle für die sechs Systeme aus den Gleichungen 158) und 159), wobei noch zur Abkürzung die positiven Quadratwurzeln

162) $$\sqrt{\mathsf{I}} = \iota, \quad \sqrt{\mathsf{K}} = \varkappa$$

gesetzt worden sind.*

1. $\varrho = e\iota\varkappa$.

	Σ:	Σ':
163)	$\mathsf{A} = \mathsf{B} = e^2(\mathsf{I}+\mathsf{K})$, $\lambda = -\frac{2\iota\varkappa}{\mathsf{I}+\mathsf{K}}$; $h = \infty, \quad \begin{cases} x = -e, \\ x = \infty; \end{cases}$ $k = 0$, $s = e\sqrt{\mathsf{I}-\mathsf{IK}+\mathsf{K}}$.	$\mathsf{A} = [e(\iota+\varkappa)]^2, \quad \mathsf{B} = [e(\iota-\varkappa)]^2$, $\lambda = 0$; $h = -\frac{e}{2}(\mathsf{I}+\mathsf{K}), \quad \begin{cases} x = -e\mathsf{K}, \\ x = -e\mathsf{I}; \end{cases}$ $k = -\frac{2e\mathsf{IK}}{\mathsf{I}+\mathsf{K}}$, $s = e\sqrt{\left(\frac{\mathsf{I}-\mathsf{K}}{\mathsf{I}+\mathsf{K}}\right)^2(\mathsf{I}-\mathsf{IK}+\mathsf{K})}$.

2. $\varrho = e\iota$.

	Σ_1:	Σ'_1:
164)	$\mathsf{A} = \mathsf{B} = e^2(\mathsf{I}+1)\mathsf{K}$, $\lambda = -\frac{2\iota}{\mathsf{I}+1}$;** $h = \infty, \quad \begin{cases} x = -e\mathsf{K}, \\ x = \infty; \end{cases}$ $k = 0$, $s = e\sqrt{-\mathsf{I}+\mathsf{IK}+\mathsf{K}}$.	$\mathsf{A} = [e(\iota+1)\varkappa]^2, \quad \mathsf{B} = [e(\iota-1)\varkappa]^2$, $\lambda = 0$; $h = -\frac{e}{2}(\mathsf{I}+1), \quad \begin{cases} x = -e, \\ x = -e\mathsf{I}; \end{cases}$ $k = -2e\frac{\mathsf{I}}{\mathsf{I}+1}$, $s = e\sqrt{\left(\frac{\mathsf{I}-1}{\mathsf{I}+1}\right)^2(-\mathsf{I}+\mathsf{IK}+\mathsf{K})}$.

3. $\varrho = e\varkappa$.

	Σ_2:	Σ'_2:
165)	$\mathsf{A} = \mathsf{B} = e^2\mathsf{I}(\mathsf{K}+1)$, $\lambda = -\frac{2\varkappa}{\mathsf{K}+1}$;** $h = \infty, \quad \begin{cases} x = -e\mathsf{I}, \\ x = \infty; \end{cases}$ $k = 0$, $s = e\sqrt{\mathsf{I}+\mathsf{IK}-\mathsf{K}}$.	$\mathsf{A} = [e\iota(\varkappa+1)]^2, \quad \mathsf{B} = [e\iota(\varkappa-1)]^2$, $\lambda = 0$; $h = -\frac{e}{2}(\mathsf{K}+1), \quad \begin{cases} x = -e, \\ x = -e\mathsf{K}; \end{cases}$ $k = -2e\frac{\mathsf{K}}{\mathsf{K}+1}$, $s = e\sqrt{\left(\frac{\mathsf{K}-1}{\mathsf{K}+1}\right)^2(\mathsf{I}+\mathsf{IK}-\mathsf{K})}$.

* ι und $\varkappa$ sind also die obengenannten zwei Verhältnisse selbst.

** Bezeichnet man die Entfernung eines beliebigen Berührungskreises Φ vom Brennpunkte $x = -e\mathsf{K}$ im Systeme Σ_1, bez. $x = -e\mathsf{I}$ im Systeme Σ_2 mit d, den Radius des Kreises mit a, so erhält man im ersten Falle

So lange gleichzeitig $\mathsf{I} > 0$, $\mathsf{K} > 0$ ist, sind alle sechs Systeme reell, und zwar offenbar Σ', Σ'_1, Σ'_2 Ellipsen.* Sobald diese Bedingungen nicht erfüllt sind, sind alle sechs Systeme 163), 164), 165) und demnach auch die Curve selbst imaginär — einen einzigen Fall ausgenommen, für welchen die Beziehungen 159) einen Anhalt gewähren: denn sie zeigen, dass die Curve reell sein kann, wenn ι und $\varkappa$ conjugirt imaginär sind, weil dann sowohl $\mathsf{I}+\mathsf{K}$, als auch IK reelle Grössen sind. Demgemäss setze ich für diesen Fall:

166) $$\iota = \nu_1 + i\nu_2, \quad \varkappa = \nu_1 - i\nu_2$$
$$(\iota\varkappa = \nu_1^2 + \nu_2^2, \quad \mathsf{I}+\mathsf{K} = 2(\nu_1^2 - \nu_2^2), \quad \mathsf{I}-\mathsf{K} = 4i\nu_1\nu_2),$$

wobei ich unter ν_1, ν_2 reelle Grössen verstehe. Der Fall $\mathsf{I} > 0$, $\mathsf{K} > 0$ stellt die eigentlichen aplanetischen Linien dar, der in 166) aber diejenigen Curven, für welche zwei der Axenbrennpunkte conjugirt imaginär sind. Denn jetzt sind die vier Brennpunkte:

167) $$x = -e, \quad x = -e(\nu_1^2 - \nu_2^2 \mp 2i\nu_1\nu_2), \quad x = \infty.$$

Die vier Systeme 164), 165) sind dann imaginär, aber die beiden ersten, 163), sind reell. Für sie erhält man folgende Beziehungen:

$$\varrho = e(\nu_1^2 + \nu_2^2).^{**}$$

	Σ:	Σ':
168)	$\mathsf{A} = \mathsf{B} = 2e^2(\nu_1^2 - \nu_2^2)$,	$\mathsf{A} = (2e\nu_1)^2, \quad \mathsf{B} = -(2e\nu_2)^2$,
	$\lambda = -\dfrac{\nu_1^2 + \nu_2^2}{\nu_1^2 - \nu_2^2}$;	$\lambda = 0$;
	$h = \infty$,	$h = -e(\nu_1^2 - \nu_2^2)$,
	$\left\{\begin{array}{l} x = -e \\ x = \infty \end{array}\right. \quad (y = 0)$;	$x = -e(\nu_1^2 - \nu_2^2), \quad y = \pm 2e\nu_1\nu_2$;
	$k = 0$,	$k = -e\dfrac{(\nu_1^2 + \nu_2^2)^2}{\nu_1^2 - \nu_2^2}$,
	$s = e\sqrt{2(\nu_1^2 - \nu_2^2) - (\nu_1^2 + \nu_2^2)^2}$.	$s = 2e\sqrt{\left(\dfrac{\nu_1\nu_2}{\nu_1^2 - \nu_2^2}\right)^2\left((\nu_1^2 + \nu_2^2)^2 - 2(\nu_1^2 - \nu_2^2)\right)}$.

$$a = \sqrt{A} = \sqrt{\mathsf{A}(1 - \lambda\cos\Phi)} = e\varkappa\sqrt{(\mathsf{I}+1) + 2\iota\cos\Phi}$$

und

$$d = \sqrt{e^2 + \varrho^2 + 2e\varrho\cos\Phi} = e\sqrt{(\mathsf{I}+1) + 2\iota\cos\Phi}.$$

Demnach hat man

$$\frac{\varrho}{e} = \iota, \quad \frac{a}{d} = \varkappa,$$

im Systeme Σ_2 aber umgekehrt

$$\frac{\varrho}{e} = \varkappa, \quad \frac{a}{d} = \iota \quad \text{(s. S. 67).}$$

* Man erkennt aus 163), 164), 165), dass stets die Schnittpunktskreise wenigstens zweier Kreissysteme reell sind; dass aber alle drei reell sind, wenn *abs.* $(\mathsf{I}-\mathsf{K}) < \mathsf{IK} < \mathsf{I}+\mathsf{K}$ ist. Auch folgt, dass die Schnittpunktskreise zweier conjugirter Systeme stets gleichzeitig reell oder imaginär sind.

** Die Gleichung der Curve ist dann:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2)e^2[(\nu_1^2 + \nu_2^2)^2 + 2(\nu_1^2 - \nu_2^2)] - 8xe^3(\nu_1^2 + \nu_2^2)^2$$
$$+ e^4\{[(\nu_1^2 + \nu_2^2)^2 + 2(\nu_1^2 - \nu_2^2)]^2 - 4(\nu_1^2 + \nu_2^2)^2[2(\nu_1^2 - \nu_2^2) + 1]\} = 0.$$

Die Formeln rechts für die Coordinaten x, y der zugehörigen reellen Brennpunkte ergeben sich aus der zweiten Gleichung 167). Die Antipunkte der beiden durch sie dargestellten Axenbrennpunkte

$$\begin{cases} \bar{x} = -e(\nu_1^2 - \nu_2^2 - 2i\nu_1\nu_2), \\ \bar{y} = 0 \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} \bar{\bar{x}} = -e(\nu_1^2 - \nu_2^2 + 2i\nu_1\nu_2), \\ \bar{\bar{y}} = 0 \end{cases}$$

haben nämlich gerade die jetzt hingestellten Coordinaten $x = \frac{1}{2}(\bar{x} + \bar{\bar{x}})$, $\pm\, y = \frac{i}{2}(\bar{x} - \bar{\bar{x}})$. Man sieht, dass jetzt das System Σ' aus (congruenten) Hyperbeln besteht, so dass also seine zerfallenden Kegelschnitte imaginär sind (ebenso wie die der Systeme Σ', Σ'_1, Σ'_2 S. 68). Während aber die zerfallenden Kegelschnitte des Kreissystemes Σ (ebenso wie der Kreissysteme Σ_1, Σ_2) im Falle $\mathsf{I} > 0$, $\mathsf{K} > 0$ imaginär sind [dies folgt sofort aus den Gleichungen für λ und aus 45), da jetzt $\mu = abs.\,\lambda$ ist], sind sie jetzt reell und fallen mit den reellen zu Σ' gehörenden Brennpunkten zusammen, wie man leicht auf Grund der Gl. 168) nachweist, und wie auch von selbst einleuchtet, da diese Brennpunkte die einzigen ausserhalb der Axe liegenden reellen Nullkreise sind, die die Curve doppelt berühren (zufolge der Definition der Brennpunkte). In der That, für die genannten Nullkreise hat man $1 - \lambda\cos\Phi = 0$, d. h. $\cos\Phi = -\frac{\nu_1^2 - \nu_2^2}{\nu_1^2 + \nu_2^2}$, und weil sie auf dem Mittelpunktskreise $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2} = e(\nu_1^2 + \nu_2^2)$ liegen, die rechts unter Σ' in 168) angegebenen Coordinaten. — Weiter bemerkt man, dass stets einer von den beiden Schnittpunktskreisen imaginär ist, der andere aber reell. — Die Hyperbeln Σ' sind spitzwinklig oder stumpfwinklig, je nachdem $\nu_2^2 \lessgtr \nu_1^2$ ist. Für den mittleren Fall $\nu_2 = \nu_1 \equiv \nu$ erweisen sich die Gl. 168) als unzureichend. Im Kreissysteme Σ hat man für die Quadrate der Halbmesser

$$B = A = \mathsf{A}(1 - \lambda\cos\Phi) = 2e^2(\nu_1^2 - \nu_2^2 + (\nu_1^2 + \nu_2^2)\cos\Phi),$$

daher bei $\nu_1 = \nu_2 = \nu$: $A = B = 4e^2\nu^2\cos\Phi$. Im Systeme Σ wird s imaginär, aber für Σ', das nun aus gleichseitigen Hyperbeln besteht, sowohl s als k unendlich gross; d. h.: der Schnittpunktskreis zerfällt hier in die unendlich ferne und eine auf der x-Axe senkrecht stehende Gerade. Die Gleichung der letzteren sei $x = x_s$. Dabei ist, indem man von der Annahme $\nu_1 > \nu_2$ ausgeht,

$$x_s = \lim_{\nu_2 = \nu_1 = \nu}\left[-e\frac{(\nu_1^2 + \nu_2^2)^2}{\nu_1^2 - \nu_2^2} + 2e\frac{\nu_1\nu_2}{\nu_1^2 - \nu_2^2}\sqrt{(\nu_1^2 + \nu_2^2)^2 - 2(\nu_1^2 - \nu_2^2)}\right].$$

Für die Wurzel kann man setzen $\nu_1^2 + \nu_2^2 - \frac{\nu_1^2 - \nu_2^2}{\nu_1^2 + \nu_2^2}$, und dann erhält man

$$x_s = \lim\left[-e(\nu_1^2 + \nu_2^2)\frac{(\nu_1 - \nu_2)^2}{\nu_1^2 - \nu_2^2} - 2e\frac{\nu_1\nu_2}{\nu_1^2 + \nu_2^2}\right] = -e.$$

Die Schnittpunktsgerade geht demnach durch den im Endlichen liegenden reellen Axenbrennpunkt. Die ausserhalb der x-Axe liegenden reellen Brennpunkte rücken zufolge 168) auf die y-Axe, und man erhält also im Falle

$$\nu_2 = \nu_1 \equiv \nu,$$

wo

169) $$(x^2+y^2)^2 - 8(x^2+y^2)e^2\nu^4 - 32xe^3\nu^4 + 16e^4\nu^4(\nu^4-1) = 0$$

die Gleichung der Curve ist, folgende Uebersicht:

$\varrho = 2e\nu^2$.

170)

Σ:	Σ':
$A = B = 4e^2\nu^2 \cos\Phi$;	$A = (2e\nu)^2, \quad B = -(2e\nu)^2$;
$h = \infty, \quad \left\{\begin{array}{l} x = -e, \\ x = \infty, \end{array}\right. \quad y = 0$;	$h = 0, \quad \{x = 0, \quad y = \pm 2e\nu^2$;
$k = 0, \quad s = i.2e\nu^2$.	$k = s = \infty, \quad x_s = -e$.

Je zwei parallelaxige Hyperbeln Σ' haben nur zwei endliche Schnittpunkte, die eben auf der Geraden $x = -e$ liegen; in der That, da sie gleichseitig sind, so sind dann ihre Asymptoten parallel, so dass zwei Schnittpunkte ins Unendliche fallen.

Die Gleichung der Cartesischen Curve lässt sich in den zwei hier betrachteten Fällen schreiben

171a) $$[x^2+y^2-e^2(\mathsf{I}+\mathsf{IK}+\mathsf{K})]^2 - 8e^3\mathsf{IK}\left[x+\frac{e}{2}(\mathsf{I}+\mathsf{K}+1)\right] = 0,$$

171b) $$\begin{aligned}&[x^2+y^2-e^2((\nu_1^2+\nu_2^2)^2+2(\nu_1^2-\nu_2^2))]^2 \\ &- 8e^3(\nu_1^2+\nu_2^2)[x+e(\nu_1^2-\nu_2^2+\tfrac{1}{2})] = 0,\end{aligned}$$

woraus man ersicht, dass die Gerade

$$x = -\frac{e}{2}(\mathsf{I}+\mathsf{K}+1) \text{ bez. } x = -e(\nu_1^2-\nu_2^2+\tfrac{1}{2})]$$

Doppeltangente ist $\left(\text{bei } \nu_2 = \nu_1 = \nu: \; x = -\frac{e}{2}\right)$. Was die Schnittpunkte mit der x-Axe betrifft, so sind sie identisch mit den Schnittpunkten der Berührungskreise $\Phi = 0$ und $\Phi = \pi$, also wenn man die Systeme Σ, Σ' nimmt:

$$x = -e(\iota\varkappa + \iota - \varkappa), \quad x = -e(\iota\varkappa - \iota + \varkappa),$$
$$x = e(\iota\varkappa - \iota - \varkappa), \quad x = e(\iota\varkappa + \iota + \varkappa),$$

bez.

$$x = e(\nu_1^2 + \nu_2^2 \mp 2\nu_1),$$

wenn im letzteren Falle nur die reellen Schnittpunkte ($\Phi = 0$) berücksichtigt werden. Hier ($\iota = \nu_1 + i\nu_2$, $\varkappa = \nu_1 - i\nu_2$) nun sind drei Formen zu unterscheiden: die Curve kann ganz convex sein, oder einen Flachpunkt oder eine Einbiegung haben. Der mittlere Fall erfordert nach dem Obigen

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 \pm 2\nu_1 = -\nu_1^2 + \nu_2^2 - \tfrac{1}{2},$$

also unabhängig von ν_2: $\nu_1^2 = \frac{1}{4}$. Sobald $\nu_1^2 < \frac{1}{4}$ ist, ist die Curve ganz convex. Falls die Curve aus zwei Ovalen besteht ($\mathsf{I} > 0$, $\mathsf{K} > 0$), so hat das äussere einen Flachpunkt, wenn $(\iota + \varkappa)^2 = 1$ oder $\iota + \varkappa = 1$ ist u. s. w.

Entsprechende Tangenten der Kreise eines Kreissystemes hüllen einen Kegelschnitt des conjugirten Systemes congruenter Kegelschnitte ein. Der Begriff „entsprechender Tangenten" der Kreise ergiebt sich aus dem Begriffe der Axen der Kreise; und als Axen eines Kreises sind dabei die Linien zu betrachten, welche seinen Mittelpunkt mit den Schnittpunkten des zugehörigen Mittelpunktskreises und der x-Axe verbinden. Umgekehrt hüllen entsprechende Tangenten in einem Kegelschnittssysteme einen Kreis ein. Bemerkenswerth ist noch, dass die Schnittpunktskreise zweier solcher conjugirter Systeme sich auf derjenigen Geraden schneiden, die in dem zum Kreissysteme gehörigen endlichen Brennpunkte auf der x-Axe senkrecht steht. So hat man z. B. für die Schnittpunktskreise der Systeme Σ, Σ', 163):

$$x^2+y^2-e^2(\mathsf{I}-\mathsf{IK}+\mathsf{K})=0,$$

$$\left(x+2e\frac{\mathsf{IK}}{\mathsf{I}+\mathsf{K}}\right)^2+y^2-e^2\left(\frac{\mathsf{I}-\mathsf{K}}{\mathsf{I}+\mathsf{K}}\right)^2(\mathsf{I}-\mathsf{IK}+\mathsf{K})=0,$$

mithin für ihre Schnittpunkte:

$$x=-e.$$

U. s. w. — Es ist ferner leicht, diejenigen Kreise oder Kegelschnitte der verschiedenen Systeme zu ermitteln, welche die Curve hyperosculiren, insbesondere bei den Kreissystemen. Alle Kreise des Systemes Σ z. B., wenn wir die Gl. 168) nehmen, werden bekanntlich von einem Kreise um den zugehörigen Brennpunkt $x=-e$ rechtwinklig geschnitten. Der Halbmesser dieses Kreises ist offenbar [nach 168)] $e\sqrt{(\nu_1^2+\nu_2^2)^2-2(\nu_1^2-\nu_2^2)+1}$; der Kreis muss natürlich auch durch die Nullkreise gehen, wie durch die Gl. 168) (rechts) bestätigt wird, und überdies müssen auf ihm die Hyperosculationspunkte der beiden Hyperosculationskreise liegen, nämlich an den Berührungsstellen der Tangenten, die sich von seinem Mittelpunkte aus ($x=-e$) an die Curve legen lassen. Da aber die Gerade, welche die Berührungspunkte eines Kreises ausschneidet, dem betreffenden Halbmesser des Mittelpunktskreises parallel ist, so hat man folgende Construction: man ziehe die gemeinsamen Tangenten des Mittelpunkts- und des Orthogonalkreises; der Berührungspunkt einer solchen Tangente am ersteren Kreise ist der Mittelpunkt, der am letzteren der Berührungspunkt eines Hyperosculationskreises. In jedem Kreissysteme giebt es also vier hyperosculirende Kreise.*

Aehnliches gilt im Falle $\mathsf{I}>0$, $\mathsf{K}>0$, nur dass hier mit Beziehung auf den mittleren Brennpunkt an Stelle des Orthogonalkreises ein Kreis tritt, der von jedem Kreise des zugehörenden Kreissystemes unter einem Durchmesser geschnitten wird. Die Gleichungen der drei Kreise sind [163), 164), 165)]:

* Dies giebt zusammen 12; rechnet man noch dazu die vier Scheitelkreise (deren Mittelpunkte auf der Curvenaxe liegen), so hat man die 16 hyperosculirenden Kreise (vergl. Clebsch, Ebene Curven u. s. w., Crelle's J. Bd. 64 S. 257 flg.).

$$
172)\qquad
\begin{aligned}
(x+e)^2+y^2-e^2(1-\mathsf{I})(1-\mathsf{K})&=0,\\
(x+e\mathsf{K})^2+y^2-e^2(\mathsf{I}-\mathsf{K})(1-\mathsf{K})&=0,\\
(x+e\mathsf{I})^2+y^2+e^2(\mathsf{I}-\mathsf{K})(1-\mathsf{I})&=0.
\end{aligned}
$$

Diese drei Orthogonalkreise sind mit den drei übrigen Brennpunktskreisen (s. S. 15) identisch;* denn jeder enthält die Antipunkte zweier endlichen Axenbrennpunkte und die Antipunkte des dritten endlichen und des unendlich fernen Axenbrennpunktes, die ja mit den unendlich fernen Kreispunkten jetzt zusammenfallen. Daher muss nach einem früheren Satze (S. 40) der erste die Schnittpunktskreise von Σ und Σ', der zweite die von Σ_1 und Σ'_1, der dritte die von Σ_2 und Σ'_2 rechtwinklig schneiden, was man leicht bestätigt. Je zwei schneiden sich mit zwei Schnittpunktskreisen in denselben beiden Punkten, nämlich der erste und zweite in den gemeinsamen Punkten der zu Σ_2 und Σ'_2 gehörenden Schnittpunktskreise, der erste und dritte in denen der zum zweiten Systempaare Σ_1, Σ'_1 gehörenden Schnittpunktskreise u. s. f., alles in Uebereinstimmung mit früheren Sätzen im I. Abschnitte. Einer von ihnen ist stets imaginär; wenn z. B. $\mathsf{I}<1$, $\mathsf{K}<1$, $\mathsf{K}<\mathsf{I}$ vorausgesetzt wird (und das ist, wie eine einfache Ueberlegung einleuchtend macht, keine Beschränkung der Allgemeinheit im Falle $\mathsf{I}>0$, $\mathsf{K}>0$), so ist $x=-e$ der äussere, $x=-e\mathsf{I}$ der mittlere, $x=-e\mathsf{K}$ der innere Brennpunkt; dann ist nach den obenstehenden Gleichungen der dritte, zu $x=-e\mathsf{I}$, also zum mittleren Brennpunkte gehörende Orthogonalkreis imaginär. Dafür ist aber dann der Kreis

$$(x+e\mathsf{I})^2+y^2-e^2(\mathsf{I}-\mathsf{K})(1-\mathsf{I})=0,$$

der nun von den Kreisen des entsprechenden Kreissystemes Σ_2 nicht mehr rechtwinklig, sondern unter lauter Durchmessern geschnitten wird, reell. Dieser Kreis und die beiden reellen Orthogonalkreise schneiden sich nun in nur zwei Punkten, die auf der zur y-Axe parallelen Geraden durch den mittleren Brennpunkt liegen, was man sofort bestätigt. Die Coordinaten dieser Punkte findet man $x=-e\mathsf{I}$, $y=\pm e\sqrt{(1-\mathsf{I})(\mathsf{I}-\mathsf{K})}$.

Endlich möge noch daran erinnert werden, dass hier, nämlich bei den Systemen Σ', Σ'_1, Σ'_2, der einzige mögliche Fall vorliegt, in dem die Hyperbel $\mathfrak{H}$, welche die Berührungspunkte zweier beliebiger parallelaxiger Kegelschnitte ausschneidet, zugleich ihre Mittelpunkte enthält (vergl. S. 9).

Wenn im Falle $\mathsf{I}>0$, $\mathsf{K}>0$ $\mathsf{K}=\mathsf{I}$ ist (oder im Falle $\iota=\nu_1+i\nu_2$, $\varkappa=\nu_1-i\nu_2$ $\nu_2=0$), so ergeben sich nur zwei verschiedene Systempaare, indem die Paare Σ_1, Σ'_1 und Σ_2, Σ'_2 zusammenfallen:

* Der erste Brennpunktskreis fällt mit der x-Axe zusammen.

$\varrho = e\mathsf{l}$.

	Σ:	Σ':
173)	$\mathsf{A} = \mathsf{B} = 2e^2\mathsf{l}, \quad \lambda = -1;$	$\mathsf{A} = 4e^2\mathsf{l}, \quad \mathsf{B} = 0, \quad \lambda = 0;$
	$h = \infty, \quad \begin{cases} x = -e, \\ x = 0, \end{cases} \quad y = 0;$	$h = -e\mathsf{l}, \quad \begin{cases} x = -e\mathsf{l}, \\ x = -e\mathsf{l}, \end{cases} \quad y = 0;$
	$k = 0, \quad s = e\iota\sqrt{2-\mathsf{l}}.$	$k = -e\mathsf{l}, \quad s = 0.$

$\varrho = e\iota$.

	$\Sigma_1 = \Sigma_2$:	$\Sigma'_1 = \Sigma'_2$:
174)	$\mathsf{A} = \mathsf{B} = e^2\mathsf{l}(\mathsf{l}+1), \quad \lambda = -\frac{2\iota}{\mathsf{l}+1};$	$\mathsf{A} = [e\iota(\iota+1)]^2, \quad \mathsf{B} = [e\iota(\iota-1)]^2, \quad \lambda = 0.$
	$h = \infty, \quad \begin{cases} x = -e\mathsf{l}, \\ x = \infty, \end{cases} \quad y = 0;$	$h = -\frac{e}{2}(\mathsf{l}+1), \quad \begin{cases} x = -e, \\ x = -e\mathsf{l}, \end{cases} \quad y = 0;$
	$k = 0, \quad s = e\mathsf{l}.$	$k = -2e\frac{\mathsf{l}}{\mathsf{l}+1}, \quad s = e\mathsf{l}\cdot\left\lvert\frac{\mathsf{l}-1}{\mathsf{l}+1}\right\rvert.$

Die Gleichung der Curve ist dann

$$175)\qquad [x^2+y^2-e^2\mathsf{l}(\mathsf{l}+2)]^2 - 8e^3\mathsf{l}^2[x+e(\mathsf{l}+\tfrac{1}{2})] = 0,$$

die Kreisfusspunktcurve. Und zwar ist sie von der ersten (mit isolirtem Doppelpunkte), zweiten (Kardioide), dritten Art (mit Schleife), je nachdem

$$\mathsf{l} \lesseqgtr 1$$

ist. Das System Σ besteht aus den doppelt berührenden Kreisen, Σ_1 aber aus den Berührungskreisen durch den Doppelpunkt; Σ' stellt eine bekannte Construction der Curve dar, Σ'_1 besteht aus congruenten Ellipsen,* die aber bei der Kardioide ebenfalls ausarten.

Zu den gewöhnlichen aplanetischen Linien ($\mathsf{l} > 0$, $\mathsf{K} > 0$) vergl. Taf. III Fig. 12a, b, c, wo $\iota = \frac{9}{10}$, $\varkappa = \frac{3}{7}$ gewählt ist; was den Fall $\iota = \nu_1 + i\nu_2$, $\varkappa = \nu_1 - i\nu_2$ betrifft, Taf. III Fig. 13a, b, wo $\nu_1 = \frac{1}{2}$, $\nu_2 = 1$, bez. $\nu_1 = \nu_2 = \frac{3}{2}$ (gleichseitige Hyperbeln!); endlich zu den Kreisfusspunktcurven in der oft citirten Arbeit Fig. 5c.

Lässt man den inneren Brennpunkt einer aplanetischen Linie ins Unendliche rücken, so geht sie in eine Hyperbel über; wenn man den äusseren ins Unendliche wirft, dagegen in eine Ellipse. Von den sechs Systemen, die wir betrachtet haben, bleiben dann nur zwei verschiedene übrig: das eine, bestehend aus den einzelnen Tangenten, jede mit der unendlich fernen Geraden zusammen genommen, das andere aus den Paaren paralleler Tangenten gebildet. In Beziehung auf das Letztere ergiebt sich dann folgender Satz (vergl. S. 10):

---

* Vergl. die Arbeit über die Kreisfusspunktcurven, S. 350. Die Curven Π für dieses Ellipsensystem sind Kreisfusspunktcurven, wie auch aus der dort (S. 350 1. Absatz) für sie angegebenen Construction hervorgeht. Irrthümlich ist dort gesagt, es wären Curven anderer Art.

Gegeben sei ein Kegelschnitt mit einer beliebigen festen Tangente. Bewegen sich dann zwei andere Tangenten so, dass sie gegen die feste beständig entgegengesetzt gleich geneigt sind, so beschreibt ihr Schnittpunkt die (gleichseitige) Hyperbel durch die vier Brennpunkte des Kegelschnittes und den Berührungspunkt der festen Tangente.

Dies ist die Verallgemeinerung eines bekannten Parabelsatzes.*

Der Satz vom Schnittpunktskreise wird zu dem bekannten Lehrsatze, dass alle Tangentenrechtecke eines Kegelschnittes einem und demselben Kreise eingeschrieben sind u. s. w. Für die Ellipse vergl. Taf. III Fig. 14. Da hier (wie überhaupt bei den Cartesischen Curven) $\vartheta = 0$ ist, so hat man $\chi = \Phi$ [s. 32)]; dabei ist offenbar jetzt $\frac{1}{2}\Phi = \varphi$ der Winkel eines Tangentenpaares gegen die Hauptaxe, χ der Winkel der Hyperbel, welche die Berührungspunkte ausschneidet, in den reellen Brennpunkten gegen dieselbe Axe. Jener ist demnach die Hälfte von diesem. Vergl. das Nähere Ende des III. Abschnittes.

§ 5. Viertes Beispiel: Das Kreispaar.

Eine besondere Beachtung verdient die in zwei Kreise zerfallende bicirculare Curve vierter Ordnung. Einen Satz, der sich auf sie bezieht, habe ich schon aufgestellt (S. 34); es wird sich zeigen, dass jede solche Curve von zwei Systemen eingehüllt wird, von denen jedes sich selbst conjugirt ist; alle Kegelschnitte dieser Systeme laufen durch die Schnittpunkte der gegebenen Kreise; sie bestehen aus Ellipsen, wenn der eine Kreis innerhalb des anderen liegt, aus Hyperbeln, wenn die Kreise ausserhalb einander liegen, und das eine aus Ellipsen, das andere aus Hyperbeln, wenn die Kreise sich in reellen Punkten schneiden. Die in Rede stehenden Doppelsysteme gehören also zu den uneigentlichen Berührungskegelschnittssystemen (s. S. 53). — Dies nur vorläufig.

---

* Bei der Parabel also: Der Schnittpunkt zweier Tangenten, die gegen eine gegebene Tangente der Parabel entgegengesetzt gleich geneigt sind, liegt auf dem Brennstrahle durch den Berührungspunkt der festen Tangente. Vergl. z. B. Steiner, Vorlesungen üb. synthet. Geom., I. Theil (herausgeg. v. Geiser), S. 117. — Die Asymptoten der Hyperbel sind der Basis und Höhe des umgeschriebenen Dreieckes parallel. Die Berührungssehnen der verschiedenen Schenkelpaare, die zu derselben Basistangente gehören, hüllen ebenfalls eine Hyperbel ein; diese berührt nämlich die vier Tangenten, die an den gegebenen Kegelschnitt parallel den Asymptoten der gleichseitigen Hyperbel gezogen werden können, und ihre Asymptoten sind die Durchmesser des gegebenen Kegelschnittes, die zu den Asymptoten der gleichseitigen Hyperbel conjugirt sind. Ist der gegebene Kegelschnitt eine Parabel, so gehen jene Berührungssehnen alle durch einen Punkt, nämlich den Pol der Ortsgeraden, die dann an Stelle der gleichseitigen Hyperbel tritt, mit Beziehung auf die Parabel.

Die Doppelbrennpunkte der Curve sind offenbar die Mittelpunkte der Kreise und ihre Antipunkte. Was die sonstigen Brennpunkte betrifft, so liegen nach ihrer Definition vier in jedem Schnittpunkte der Kreise, ebenso wie die Antipunkte auf der Centrale vierfach zählen. Von den sechs Kegelschnittssytemen müssten demnach, wie man wohl erwarten könnte, vier zusammenfallen zu einem, das sich selbst conjugirt ist und dessen Berührungspunkte von den Hyperbeln durch die Schnittpunkte der Kreise und ihre Antipunkte ausgeschnitten werden; indessen zeigt sich, dass sie blos paarweise zusammenfallen, dass also dasselbe Hyperbelbüschel die Berührungspunkte zweier verschiedener Kegelschnittssysteme bestimmt. Alsdann bleiben in dem gegenwärtigen Falle aber immer noch vier hyperbolische Quadrate und also vier Hyperbelbüschel übrig: nämlich die aus je zwei zu einander senkrechten Geraden bestehenden Hyperbeln durch jeden Schnittpunkt der Kreise, sowie jeden ihrer Antipunkte. In der That werden wir uns deshalb hier nicht vorläufig mit den Gl. 118), 119), 120) begnügen, sondern die Gl. 122), 123), 124) mit berücksichtigen und dabei zugleich erkennen, dass jedes der zuerst genannten beiden Doppelsysteme (Systeme, die sich selbst conjugirt sind) wiederum doppelt zu zählen ist.

Sind die Schnittpunkte der Kreise imaginär, so sind die auf der Centrale liegenden Brennpunkte reell. Ist d die Entfernung des Mittelpunktes eines Kreises von einer Geraden, ist der Endpunkt von d Coordinatenanfang (die Gerade y-Axe, die Richtung nach dem Kreismittelpunkte x-Axe), r der Radius des Kreises, und $r < d$, so sind die Schnittpunkte des Kreises und der Geraden $x = 0$, $y = \pm \sqrt{r^2 - d^2}$, demnach ihre reellen Antipunkte $y = 0$, $x = \pm \sqrt{d^2 - r^2}$. Liegt auf der negativen Seite der x-Axe ein anderer Kreis, der dieselben Schnittpunkte mit der Geraden hat, wie der erste, so ist also $\sqrt{r'^2 - d'^2} = \sqrt{r^2 - d^2}$, mithin auch $\sqrt{d'^2 - r'^2} = \sqrt{d^2 - r^2}$. D. h.: Die Tangenten vom Coordinatenanfange an beide Kreise sind gleich. Dabei ist die y-Axe die Potenzlinie (Radicalaxe) der beiden Kreise. Also:

Die Axenbrennpunkte einer aus zwei Kreisen bestehenden Curve werden von dem gemeinsamen Orthogonalkreise der beiden Kreise ausgeschnitten; sie liegen symmetrisch zur Potenzlinie. Sie sind zwei Ecken des den gegebenen Kreisen gemeinsamen Polardreiecks.

Durch ebenso einfache Betrachtungen weist man nach:

Liegen die Kreise ausserhalb einander, so werden die Axenbrennpunkte von den zur Centrale senkrechten Verbindungslinien der Schnittpunkte der gemeinsamen Tangenten ausgeschnitten. Und:

Die Axenbrennpunkte werden von den Geraden bestimmt, welche die zu einem und demselben Kreise gehörenden Berührungspunkte je einer inneren und einer äusseren gemeinsamen

Tangente verbinden; oder von einem Kreise, der durch die Berührungspunkte einer gemeinsamen Tangente geht und seinen Mittelpunkt auf dieser (oder, was auf dasselbe hinauskommt, auf der Potenzlinie) hat. Diese Kreise schneiden sich bekanntlich paarweise rechtwinklig, desgleichen die soeben genannten Verbindungsgeraden.* — Die Potenzlinie ist als Doppeltangente vierfach zu zählen.

Unter Zugrundelegung des oben näher bezeichneten Coordinatensystemes (x, y) nehmen wir an, dass der Mittelpunkt des grösseren Kreises auf der positiven x-Axe liege. Die Länge der Centrale sei $2e$, so dass $x = \pm e$ die Mittelpunkte (Doppelbrennpunkte) der Kreise sind. Die Halbmesser der Kreise seien r_1, r_2:

$$r_1 > r_2 .$$

Zur Abkürzung möge

176) $$\frac{r_1 + r_2}{2} = \mathfrak{r}_1, \quad \frac{r_1 - r_2}{2} = \mathfrak{r}_2 \quad (r_1 = \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2, \; r_2 = \mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2)$$

gesetzt werden; dabei ist

177) $$\mathfrak{r}_1 > \mathfrak{r}_2 > 0, \quad \mathfrak{r}_1^2 + \mathfrak{r}_2^2 = \tfrac{1}{2}(r_1^2 + r_2^2), \quad 4\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 = r_1^2 - r_2^2.$$

Die Gleichungen der gegebenen Kreise sind

178) $$\begin{cases} (x-e)^2 + y^2 - r_1^2 = 0, \\ (x+e)^2 + y^2 - r_2^2 = 0, \end{cases}$$

und demnach findet man die Gleichung der Curve durch Multiplication:

179) $$\begin{aligned} (x^2+y^2)^2 - x^2(2e^2 + r_1^2 + r_2^2) + y^2(2e^2 - (r_1^2 + r_2^2)) \\ - 2xe(r_1^2 - r_2^2) + (e^2 - r_1^2)(e^2 - r_2^2) = 0 \end{aligned}$$

oder nach 176), 177)

180) $$\begin{aligned} (x^2+y^2)^2 - 2x^2(e^2 + \mathfrak{r}_1^2 + \mathfrak{r}_2^2) + 2y^2(e^2 - (\mathfrak{r}_1^2 + \mathfrak{r}_2^2)) \\ - 8xe\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 + e^4 - 2e^2(\mathfrak{r}_1^2 + \mathfrak{r}_2^2) + (\mathfrak{r}_1^2 - \mathfrak{r}_2^2)^2 = 0. \end{aligned}$$

Hieraus bestätigt sich nach 39), 40), 41) alles, was S. 76 über die Brennpunkte gesagt wurde. Die Coefficienten sind:

181) $$\begin{gathered} \mathfrak{a} = -2e^2 - (r_1^2 + r_2^2) = -2e^2 - 2(\mathfrak{r}_1^2 + \mathfrak{r}_2^2), \\ \mathfrak{b} = 2e^2 - (r_1^2 + r_2^2) = 2e^2 - 2(\mathfrak{r}_1^2 + \mathfrak{r}_2^2), \quad \mathfrak{c} = 0; \\ \mathfrak{d} = -e(r_1^2 - r_2^2) = -4e\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2, \quad \mathfrak{e} = 0, \\ \mathfrak{f} = (e^2 - r_1^2)(e^2 - r_2^2) = e^4 - 2e^2(\mathfrak{r}_1^2 + \mathfrak{r}_2^2) + (\mathfrak{r}_1^2 - \mathfrak{r}_2^2)^2. \end{gathered}$$

Nennt man die Abscisse der Potenzlinie oder der Schnittpunkte beider Kreise x_0, so ist für die Schnittpunkte selbst nach 178)

182a) $$x = x_0 = -\frac{r_1^2 - r_2^2}{4e}, \quad y_0 = \pm \frac{\sqrt{(4e^2 - (r_1 - r_2)^2)((r_1 + r_2)^2 - 4e^2)}}{4e}$$

oder

182b) $$x_0 = -\frac{\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2}{e}, \quad y_0 = \pm \frac{\sqrt{-(e^2 - \mathfrak{r}_1^2)(e^2 - \mathfrak{r}_2^2)}}{e}.$$

---

* Ueber die im Folgenden zu Tage tretenden Sätze von den gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise vergl. auch Reinhardt, Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. 32 S. 183flg.

Die Kreise schneiden sich (die Schnittpunkte sind reell), wenn

$$\mathfrak{r}_1 > e > \mathfrak{r}_2$$

ist [die Möglichkeit $\mathfrak{r}_2 > e > \mathfrak{r}_1$ ist ausgeschlossen nach 177)]. Es findet äussere oder innere Berührung statt bei

$$e = \mathfrak{r}_1 \text{ bez. } e = \mathfrak{r}_2;$$

die Kreise liegen ausserhalb einander oder der kleinere befindet sich innerhalb des grösseren, je nachdem

$$e > \mathfrak{r}_1 \text{ oder } e < \mathfrak{r}_2$$

ist. Dann hat man für die reellen Brennpunkte:

$$y = 0,$$

183) $$x = x_0 \mp \frac{\sqrt{(e^2 - \mathfrak{r}_1^2)(e^2 - \mathfrak{r}_2^2)}}{e} = \frac{1}{e} \cdot \left[-\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 \mp \sqrt{(e^2 - \mathfrak{r}_1^2)(e^2 - \mathfrak{r}_2^2)} \right].$$

Das eine von diesen zwei Brennpunktsquadrupeln fällt mit dem Coordinatenanfange zusammen, wenn

$$\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 = \sqrt{(e^2 - \mathfrak{r}_1^2)(e^2 - \mathfrak{r}_2^2)}$$

ist, oder (abgesehen von $e = 0$, wobei die Kreise concentrisch wären und das eine Quadrupel in den gemeinsamen Mittelpunkt, das andere ins Unendliche rücken würde)

$$e^2 = \mathfrak{r}_1^2 + \mathfrak{r}_2^2;$$

dann liegt das andere bei $x = -2\frac{\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2}{e} = 2x_0$. Es lässt sich nachweisen, dass hierbei die inneren gemeinschaftlichen Tangenten auf den äusseren **senkrecht** stehen (s. unten).

Die Gleichungen 120) und 124) werden zufolge 161):

$$16\mathsf{P}^3 - 16\mathsf{P}^2(e^2 + \mathfrak{r}_1^2 + \mathfrak{r}_1^2) + 16\mathsf{P}\left(e^2(\mathfrak{r}_1^2 + \mathfrak{r}_2^2) + \mathfrak{r}_1^2\mathfrak{r}_2^2\right) - 16e^2\mathfrak{r}_1^2\mathfrak{r}_2^2 = 0,$$

$$\begin{aligned} 16\mathsf{P}^3 - 16\mathsf{P}^2\left(2(\mathfrak{r}_1^2 + \mathfrak{r}_2^2) - e^2\right) + 16\mathsf{P}\left((\mathfrak{r}_1^2 + \mathfrak{r}_2^2 - e^2)(\mathfrak{r}_1^2 + \mathfrak{r}_2^2) + \mathfrak{r}_1^2\mathfrak{r}_2^2\right) \\ - 16(\mathfrak{r}_1^2 + \mathfrak{r}_2^2 - e^2)\mathfrak{r}_1^2\mathfrak{r}_2^2 = 0. \end{aligned}$$

Beiden Gleichungen sieht man unmittelbar an, welche Wurzeln sie haben: die erste $\mathsf{P} = e^2$, $\mathsf{P} = \mathfrak{r}_1^2$, $\mathsf{P} = \mathfrak{r}_2^2$; die zweite $\mathsf{P} = \mathfrak{r}_1^2 + \mathfrak{r}_2^2 - e^2$, $\mathsf{P} = \mathfrak{r}_1^2$, $\mathsf{P} = \mathfrak{r}_2^2$ oder, wenn man auf ϱ selbst zurückgeht:

184) $$\varrho = \mathfrak{r}_1, \quad \varrho = \mathfrak{r}_2, \quad \varrho = e;$$

185) $$\varrho = \mathfrak{r}_1, \quad \varrho = \mathfrak{r}_2, \quad \varrho = \sqrt{\mathfrak{r}_1^2 + \mathfrak{r}_2^2 - e^2}.$$

Die Bestimmungsgleichungen für λ (bez. μ, ψ), A, B sind bei 184) nach 107), 108):

186) $$[\mathsf{P} - (\mathfrak{r}_1^2 + \mathfrak{r}_2^2)]\lambda^2 - \frac{2e\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2}{\varrho}\lambda = e^2, \quad \frac{\mathsf{A}+\mathsf{B}}{2} = \mathfrak{r}_1^2 + \mathfrak{r}_2^2 - \mathsf{P}, \quad \frac{\mathsf{A}-\mathsf{B}}{2} = -\frac{e^2}{\lambda},$$

bei 185) aber, s. 122), 123):

187) $$\frac{\mathsf{A}+\mathsf{B}}{2} = \mathfrak{r}_1^2 + \mathfrak{r}_2^2 - \mathsf{P}, \quad \frac{\mathsf{A}-\mathsf{B}}{2} = \pm e\sqrt{\mathfrak{r}_1^2 + \mathfrak{r}_2^2 - \mathsf{P}}, \quad \mu = \frac{\mathsf{B}-\mathsf{A}}{\mathsf{B}+\mathsf{A}}, \quad \cos\psi = \frac{2e\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2}{\varrho(\mathsf{A}-\mathsf{B})}.$$

I. $\varrho = \mathfrak{r}_1$, $\Sigma \equiv \Sigma'$. Aus 186) folgt $(\lambda \mathfrak{r}_2 + e)^2 = 0$, also

188a) $$\lambda = -\frac{e}{\mathfrak{r}_2}$$

als Doppelwurzel, was eben bedeutet, dass die conjugirten Systeme Σ, Σ' zusammenfallen. Weiter: $\frac{\mathsf{A}+\mathsf{B}}{2} = \mathfrak{r}_2^2$, $\frac{\mathsf{A}-\mathsf{B}}{2} = e\mathfrak{r}_2$, also

$$\mathsf{A} = \mathfrak{r}_2(\mathfrak{r}_2 + e), \quad \mathsf{B} = \mathfrak{r}_2(\mathfrak{r}_2 - e).$$

Endlich erhält man mit Hilfe von 23) und 27) die zugehörenden Brennpunkte, nach 30), 31) den Schnittpunktskreis:

188b) $$h = -\frac{\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2}{e} = x_0$$

(die beiden Schnittpunkte der Kreise und ihre Antipunkte sind die Grundpunkte des die Berührungspunkte ausschneidenden Hyperbelbüschels),

188c) $$k = -e\frac{\mathfrak{r}_1}{\mathfrak{r}_2}, \quad s = \frac{\sqrt{(e^2 - \mathfrak{r}_2^2)(\mathfrak{r}_1^2 - \mathfrak{r}_2^2)}}{\mathfrak{r}_2}.$$

Uebrigens sind die Quadrate der Halbaxen der Kegelschnitte:

188d) $$A = (\mathfrak{r}_2 + e)(\mathfrak{r}_2 + e\cos\Phi), \quad B = (\mathfrak{r}_2 - e)(\mathfrak{r}_2 + e\cos\Phi).$$

Das so bestimmte Kegelschnittssystem besteht, wenn $e < \mathfrak{r}_2$, also der kleinere Kreis innerhalb des grösseren liegt, aus Ellipsen mit imaginären Nullellipsen; wenn $e > \mathfrak{r}_2$, also entweder die Kreise sich schneiden, oder aber ganz ausserhalb einander liegen, aus Hyperbeln mit reellen zerfallenden Kegelschnitten $\left(\cos\Phi = -\frac{\mathfrak{r}_2}{e}\right)$. Da die Hyperbeln, welche die Berührungspunkte bestimmen, durch zwei Punkte der Curve selbst hindurchgehen, so liegen in diesen (nämlich den Schnittpunkten der beiden Kreise) stets zwei (uneigentliche) Berührungspunkte, d. h.: alle Kegelschnitte des Systemes Σ gehen durch die Schnittpunkte der beiden Kreise, so dass für jeden nur zwei eigentliche Berührungspunkte übrig bleiben. Hieraus folgt sofort, dass die Potenzlinie der eine Bestandtheil jedes der beiden zerfallenden Kegelschnitte ist; der andere ist, wie sowohl die blosse Anschauung, als die abgeleiteten Gleichungen lehren, eine äussere gemeinsame Tangente der beiden Kreise. Besteht das System aus Ellipsen, so ist der Schnittpunktskreis* imaginär, im anderen Falle reell; sein Mittelpunkt ist stets der äussere Aehnlichkeitspunkt der beiden Kreise. Der Mittelpunktskreis wird von den beiden äusseren Tangenten berührt, selbstverständlich in den Punkten, wo sie von der Potenzlinie geschnitten werden, da diese Punkte als Mittelpunkte der zerfallenden Kegelschnitte auf ihm liegen müssen. — Vergl. Taf. III Fig. 15a, Taf. IV Fig. 16a, 17a.

---

* der durch die Schnittpunkte der Kreise laufen muss, weil alle Kegelschnitte des Systemes dies thun.

II. $\varrho = \mathfrak{r}_2$, $\Sigma_1 \equiv \Sigma'_1$. Man findet genau wie vorhin als Doppelwurzel

189a) $$\lambda = -\frac{e}{\mathfrak{r}_1},$$

ferner $\frac{\mathsf{A}+\mathsf{B}}{2} = \mathfrak{r}_1^2$, $\frac{\mathsf{A}-\mathsf{B}}{2} = e\mathfrak{r}_1$, also

$$\mathsf{A} = \mathfrak{r}_1(\mathfrak{r}_1 + e), \quad \mathsf{B} = \mathfrak{r}_1(\mathfrak{r}_1 - e),$$

189b) $$A = (\mathfrak{r}_1 + e)(\mathfrak{r}_1 + e\cos\Phi), \quad B = (\mathfrak{r}_1 - e)(\mathfrak{r}_1 + e\cos\Phi);$$

189c) $$h = -\frac{\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2}{e} = x_0$$

(die Brennpunkte sind dieselben wie bei Σ);

189d) $$k = -e\frac{\mathfrak{r}_2}{\mathfrak{r}_1}, \quad s = \frac{\sqrt{(\mathfrak{r}_1^2 - e^2)(\mathfrak{r}_1^2 - \mathfrak{r}_2^2)}}{\mathfrak{r}_1}.$$

Der Mittelpunktskreis wird von den beiden inneren gemeinschaftlichen Tangenten der Kreise berührt (wiederum in ihren Schnittpunkten mit der Potenzlinie). Σ_1 besteht aus Ellipsen mit imaginären Nullellipsen, wenn $e < \mathfrak{r}_1$ ist, also die Kreise sich schneiden oder der eine den anderen umschliesst; aus Hyperbeln, wenn $e > \mathfrak{r}_1$ ist, also die Kreise ausserhalb einander liegen, wobei die zerfallenden Hyperbeln reell sind $\left(\cos\Phi = -\frac{\mathfrak{r}_1}{e}\right)$. Alle Kegelschnitte des Systemes gehen wiederum durch die Schnittpunkte der Kreise, jeder zerfallende Kegelschnitt besteht aus der Potenzlinie und einer inneren Tangente der Kreise. Der Schnittpunktskreis ist reell oder imaginär, je nachdem das System aus Ellipsen oder Hyperbeln besteht. Er geht durch die Schnittpunkte der Kreise und sein Mittelpunkt ist der innere Aehnlichkeitspunkt der letzteren. Vergl. Taf. III Fig. 15b, Taf. IV Fig. 16b, 17b.

Die Gleichungen 187) ergeben für $\varrho = \mathfrak{r}_1$ bez. $\varrho = \mathfrak{r}_2$ [185)]:

$\frac{\mathsf{A}+\mathsf{B}}{2} = \mathfrak{r}_2^2$, $\frac{\mathsf{A}-\mathsf{B}}{2} = -e\mathfrak{r}_2$, $\mu = \frac{e}{\mathfrak{r}_2}$, $\cos\psi = -1$;	$\frac{\mathsf{A}+\mathsf{B}}{2} = \mathfrak{r}_1^2$, $\frac{\mathsf{A}-\mathsf{B}}{2} = -e\mathfrak{r}_1$, $\mu = \frac{e}{\mathfrak{r}_1}$, $\cos\psi = -1$,

folglich weiter [vergl. 123)]:

$\lambda = \frac{e}{\mathfrak{r}_2}$, $\tau = 0$;	$\lambda = \frac{e}{\mathfrak{r}_1}$, $\tau = 0$.

Somit werden für diese Systeme die Quadrate der Halbaxen

$A = (\mathfrak{r}_2 - e)(\mathfrak{r}_2 - e\cos\Phi')$, $B = (\mathfrak{r}_2 + e)(\mathfrak{r}_2 - e\cos\Phi')$;	$A = (\mathfrak{r}_1 - e)(\mathfrak{r}_1 - e\cos\Phi')$, $B = (\mathfrak{r}_1 + e)(\mathfrak{r}_1 - e\cos\Phi')$.

Setzt man $\Phi' = \pi - \Phi$, so gehen diese Gleichungen in die vorigen über, die bereits für Σ und Σ_1 gefunden wurden, abgesehen von der Vertauschung von A und B. Jedes dieser Doppelsysteme ist also wieder doppelt zu zählen. Die Vertauschung von A und B, sowie die Beziehung $\Phi' = \pi - \Phi$ erklärt sich sehr einfach aus den Festsetzungen S. 3 flg.; da nämlich in 188a), 189a) λ negativ gefunden wurde, und $\tau = 0$ ist, so war dort $\Psi = \pi$

($\cos\Psi = \frac{\lambda}{\mu} = -1$), und also hätte nach jenen Festsetzungen Φ eigentlich von der negativen x-Axe aus gerechnet werden müssen, jetzt aber, wo $\lambda > 0$ ist, von der positiven aus. Auch die Vertauschung von A und B, A und B wird durch diese Ueberlegung verständlich.

Nach dem Satze S. 30 über die Asymptoten müssen bei jedem Systeme Σ, Σ_1 die Asymptoten aller Kegelschnitte durch die Mittelpunkte der beiden zerfallenden Kegelschnitte laufen. Ausserdem giebt es noch eine Menge von Einzelheiten, die nimmermehr alle aufgezählt werden können. Blos eine sei noch erwähnt: Fasst man die vier wirklichen Berührungspunkte von zwei parallelaxigen Kegelschnitten ins Auge, so können diese durch sechs gerade Linien mit einander verbunden werden. Je zwei davon laufen stets durch den inneren und den äusseren Aehnlichkeitspunkt der gegebenen Kreise, so dass die beiden übrigen parallele Durchmesser der Kreise sind.

Merkwürdig ist nun die Configuration, die die Systeme Σ, Σ_1 darbieten: Irgend ein System entsprechender Tangenten hüllt einen Kegelschnitt desselben Systemes ein; und zwar die Tangenten, die unter einem gegebenen Winkel $\frac{\pi}{2} + \omega$ gegen die Hauptaxen der Kegelschnitte gezogen sind, erzeugen denjenigen Kegelschnitt, dessen Hauptaxe unter ω gegen die Centrale der Kreise geneigt ist, wie aus 73) (und der Definition von ω S. 19) hervorgeht.

Endlich sei noch bemerkt, dass Σ und Σ_1 zu Kreissystemen werden, wenn $e = 0$, also die gegebenen Kreise concentrisch sind; und zwar besteht dann Σ aus den Kreisen, welche den inneren Kreis von aussen, Σ_1 aus denen, die ihn einschliessend berühren.

Wir haben nunmehr noch zwei Wurzeln der Gl. 120), 124) weiter zu verfolgen, nämlich $\varrho = e$ und $\varrho = \sqrt{\mathfrak{r}_1^2 + \mathfrak{r}_2^2 - e^2}$, die je zwei verschiedene conjugirte Systeme liefern, s. 184), 185).

III. $\varrho = e$: Der Mittelpunktskreis geht durch die Mittelpunkte der gegebenen Kreise. Aus 186) erhält man:

$$\lambda = \frac{-\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 \pm \sqrt{(e^2 - \mathfrak{r}_1^2)(e^2 - \mathfrak{r}_2^2)}}{\mathfrak{r}_1^2 + \mathfrak{r}_2^2 - e^2},$$

$$\text{190a)} \qquad \frac{\mathsf{A}+\mathsf{B}}{2} = \mathfrak{r}_1^2 + \mathfrak{r}_2^2 - e^2,$$

$$\frac{\mathsf{A}-\mathsf{B}}{2} = \mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 \pm \sqrt{(e^2 - \mathfrak{r}_1^2)(e^2 - \mathfrak{r}_2^2)},$$

demnach

$$\text{190b)} \qquad \begin{aligned} \mathsf{A} &= \mathfrak{r}_1^2 + \mathfrak{r}_2^2 - e^2 + \mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 \pm \sqrt{(e^2 - \mathfrak{r}_1^2)(e^2 - \mathfrak{r}_2^2)}, \\ \mathsf{B} &= \mathfrak{r}_1^2 + \mathfrak{r}_2^2 - e^2 - \mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2^2 \mp \sqrt{(e^2 - \mathfrak{r}_1^2)(e^2 - \mathfrak{r}_2^2)}. \end{aligned}$$

Die Quadrate der Halbaxen sind folglich:

$$\text{190c)}\quad \begin{aligned} A &= \frac{\mathfrak{r}_1^2+\mathfrak{r}_2^2-e^2+\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 \pm \sqrt{(e^2-\mathfrak{r}_1^2)(e^2-\mathfrak{r}_2^2)}}{\mathfrak{r}_1^2+\mathfrak{r}_2^2-e^2} \\ &\times\left[\mathfrak{r}_1^2+\mathfrak{r}_2^2-e^2+\left(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 \mp \sqrt{(e^2-\mathfrak{r}_1^2)(e^2-\mathfrak{r}_2^2)}\right)\cos\Phi\right], \\ B &= \frac{\mathfrak{r}_1^2+\mathfrak{r}_2^2-e^2-\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 \mp \sqrt{(e^2-\mathfrak{r}_1^2)(e^2-\mathfrak{r}_2^2)}}{\mathfrak{r}_1^2+\mathfrak{r}_2^2-e^2} \\ &\times\left[\mathfrak{r}_1^2+\mathfrak{r}_2^2-e^2+\left(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 \mp \sqrt{(e^2-\mathfrak{r}_1^2)(e^2-\mathfrak{r}_2^2)}\right)\cos\Phi\right], \end{aligned}$$

oder auch:

$$\text{190d)}\quad \begin{aligned} A &= \mathsf{A}+\left(e^2+\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 \mp \sqrt{(e^2-\mathfrak{r}_1^2)(e^2-\mathfrak{r}_2^2)}\right)\cos\Phi, \\ B &= \mathsf{B}-\left(e^2-\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 \pm \sqrt{(e^2-\mathfrak{r}_1^2)(e^2-\mathfrak{r}_2^2)}\right)\cos\Phi. \end{aligned}$$

Das obere Vorzeichen liefert das System Σ_2, das untere Σ'_2.

Aus 23) und 27) folgt:

$$h = \frac{-\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 \pm \sqrt{(e^2-\mathfrak{r}_1^2)(e^2-\mathfrak{r}_2^2)}}{e}$$

(vergl. 183), und dass die Brennpunkte des Systemes in dem Punkte $x=h$, $y=0$ alle vier vereinigt liegen, so dass die Hyperbeln, welche die Berührungspunkte ausschneiden, aus je zwei zu einander senkrechten Geraden durch den genannten Punkt bestehen. Uebrigens sind offenbar beide Systeme **imaginär**, wenn $\mathfrak{r}_1 > e > \mathfrak{r}_2$, also die beiden Kreise sich schneiden.

Für den Schnittpunktskreis hat man nach 30), 31):

$$k = -e\,\frac{\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 \pm \sqrt{(e^2-\mathfrak{r}_1^2)(e^2-\mathfrak{r}_2^2)}}{\mathfrak{r}_1^2+\mathfrak{r}_2^2-e^2},$$

$$\text{190e)}\quad \begin{aligned} s &= \sqrt{\frac{\mathsf{A}\mathsf{B}\,(\mathfrak{r}_1^2+\mathfrak{r}_2^2-2e^2)}{(\mathfrak{r}_1^2+\mathfrak{r}_2^2-e^2)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{\left[\mathfrak{r}_1^4+\mathfrak{r}_2^4-e^2(\mathfrak{r}_1^2+\mathfrak{r}_2^2) \mp 2\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\sqrt{(e^2-\mathfrak{r}_1^2)(e^2-\mathfrak{r}_2^2)}\right](\mathfrak{r}_1^2+\mathfrak{r}_2^2-2e^2)}{(\mathfrak{r}_1^2+\mathfrak{r}_2^2-e^2)^2}}: \end{aligned}$$

Der Schnittpunktskreis geht wieder durch die Schnittpunkte der gegebenen Kreise; denn man übersieht leicht, dass

$$s^2-(k-x_0)^2 = y_0^2$$

ist (s. 182b).

Im Systeme Σ'_2 kann man A und B folgendermassen schreiben:

$$\begin{aligned} \mathsf{A}' &= (\mathfrak{r}_1^2+\mathfrak{r}_2^2-e^2)+\left(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2-\sqrt{(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)^2-e^2(\mathfrak{r}_1^2+\mathfrak{r}_2^2-e^2)}\right), \\ \mathsf{B}' &= (\mathfrak{r}_1^2+\mathfrak{r}_2^2-e^2)-\left(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2-\sqrt{(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)^2-e^2(\mathfrak{r}_1^2+\mathfrak{r}_2^2-e^2)}\right);* \end{aligned}$$

woraus man erkennt, dass A' und B' gleichzeitig für

$$e^2 = \mathfrak{r}_1^2+\mathfrak{r}_2^2$$

verschwinden. Dann werden also die dem unteren Vorzeichen entsprechenden Gl. 190) abzuändern sein, ebenso aber auch die Gleichungen mit dem oberen Vorzeichen. Durch Umformung bez. Differentiation nach e^2 findet

* Es mögen die zu Σ'_2 gehörenden Grössen durch obere Striche von den Grössen des Systemes Σ_2 unterschieden werden.

man leicht die wirklichen Werthe. Dabei erhält man insbesondere beim Systeme Σ_2 $k=\infty$, $s=\infty$; der Schnittpunktskreis wird hier also unendlich gross, muss aber dabei die **Potenzlinie** der gegebenen Kreise zur Grenze haben, weil er unter allen Umständen durch die Schnittpunkte dieser geht (s. oben).* Man kommt zu folgender Uebersicht:

$$e^2=\mathfrak{r}_1^2+\mathfrak{r}_2^2, \quad \varrho=e=\sqrt{\mathfrak{r}_1^2+\mathfrak{r}_2^2}.$$

191)

Σ_2:	Σ'_2:
$A=2\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2+(\mathfrak{r}_1^2+\mathfrak{r}_2^2)\cos\Phi,$ $B=-A;$	$A=(\mathfrak{r}_1+\mathfrak{r}_2)^2\cos\Phi,$ $B=-(\mathfrak{r}_1-\mathfrak{r}_2)^2\cos\Phi;$
$h=0;$	$h=2x_0=-\dfrac{2\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2}{\sqrt{\mathfrak{r}_1^2+\mathfrak{r}_2^2}};$
$k=s=\infty,$	$k=-\dfrac{\sqrt{\mathfrak{r}_1^2+\mathfrak{r}_2^2}^3}{2\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2},$
$x_s=\lim(k-s)=x_0=-\dfrac{\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2}{\sqrt{\mathfrak{r}_1^2+\mathfrak{r}_2^2}}.$	$s=\dfrac{\mathfrak{r}_1^2-\mathfrak{r}_2^2}{2\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2}\sqrt{\mathfrak{r}_1^2+\mathfrak{r}_2^2}.$

Die beiden **zerfallenden Kegelschnitte**

$$\left(\cos\Phi=-\frac{\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\pm\sqrt{(e^2-\mathfrak{r}_1^2)(e^2-\mathfrak{r}_2^2)}}{e^2}\right)$$

bestehen, wie eine einfache Rechnung lehrt, **aus je einer inneren und einer äusseren gemeinsamen Tangente** der Kreise, und zwar im Falle $e>\mathfrak{r}_1$ (wo jeder Kreis ausserhalb des anderen liegt) im Systeme Σ_2 aus zwei solchen Tangenten, deren Schnittpunkt von der Potenzlinie aus auf Seiten des kleineren Kreises, bei Σ'_2 aus zwei solchen, deren Schnittpunkt auf Seiten des grösseren Kreises liegt. Hieraus folgt weiter, dass das System Σ'_2 niemals aus gleichseitigen Hyperbeln bestehen kann, ausser im Grenzfalle $e=\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2=0$, wo die beiden Kreise gleich gross sind und sich von aussen berühren; dass es vielmehr stets sonst aus spitz- und stumpfwinkligen Hyperbeln zusammengesetzt sein muss. Dagegen wird Σ_2 allemal aus gleichseitigen Hyperbeln bestehen, wenn die inneren gemeinsamen Tangenten auf den äusseren senkrecht stehen; dies wird also durch die Gleichung $e^2=\mathfrak{r}_1^2+\mathfrak{r}_2^2$ ausgedrückt, und dann gelten die Formeln 191) (vergl. S. 78).

Betrachtet man A und B [190b)] als Functionen von e^2 und stellt sie graphisch dar mittels einer (e^2)-Axe und einer A- oder B-Axe, die auf

---

* Direct findet man, wenn man von der Annahme $e^2>\mathfrak{r}_1^2+\mathfrak{r}_2^2$ ausgeht und $\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2+\sqrt{(e^2-\mathfrak{r}_1^2)(e^2-\mathfrak{r}_2^2)}=\mathfrak{E}$, $e^2-\mathfrak{r}_1^2-\mathfrak{r}_2^2=\mathfrak{N}$ setzt,

$$k=e\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{N}},$$

$$s=\frac{\sqrt{\mathfrak{E}^2-\mathfrak{N}^2}\cdot\sqrt{e^2+\mathfrak{N}}}{\mathfrak{N}}=\sqrt{\left(\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{N}}\right)^2-1}\cdot\sqrt{e^2+\mathfrak{N}}=\left(\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{N}}-\frac{\mathfrak{N}}{2\mathfrak{E}}\right)\left(e+\frac{\mathfrak{N}}{2e}\right)$$
$$=e\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{N}}+\frac{\mathfrak{E}}{2e}+\cdots,$$

$$\lim_{\mathfrak{N}=0}(k-s)=-\frac{\mathfrak{E}}{2e}=-\frac{\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2}{e}=-\frac{\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2}{\sqrt{\mathfrak{r}_1^2+\mathfrak{r}_2^2}}.$$

einander senkrecht stehen mögen, so erhält man zwei congruente Hyperbeln (s. Taf. IV Fig. 18a); für $e^2=\infty$ wird $\sqrt{(e^2-\mathfrak{r}_1^2)(e^2-\mathfrak{r}_2^2)}=e^2-\frac{\mathfrak{r}_1^2+\mathfrak{r}_2^2}{2}$, also $\mathsf{A}'=\infty$, $\mathsf{B}'=\infty$ bei Σ'_2, dagegen $\mathsf{A}=\frac{(\mathfrak{r}_1+\mathfrak{r}_2)^2}{2}$, $\mathsf{B}=\frac{(\mathfrak{r}_1-\mathfrak{r}_2)^2}{2}$ in Σ_2, wobei im ersten Falle $lim\,\frac{\mathsf{A}}{e^2}=lim\,\frac{\mathsf{B}}{e^2}=-2$ ist. A und B sind beide im Intervalle $\mathfrak{r}_1^2>e^2>\mathfrak{r}_2^2$ imaginär, ausserhalb desselben reell, jedesmal mit zwei Zweigen, von denen der eine Σ_2, der andere Σ'_2 entspricht;* die Vereinigung beider Zweige findet auf der Grenze $e^2=\mathfrak{r}_2^2$ bei $\mathsf{A}=\mathfrak{r}_1(\mathfrak{r}_1+\mathfrak{r}_2)$, bez. $\mathsf{B}=\mathfrak{r}_1(\mathfrak{r}_1-\mathfrak{r}_2)$ statt, auf der Grenze $e^2=\mathfrak{r}_1^2$ aber bei $\mathsf{A}=\mathfrak{r}_2(\mathfrak{r}_1+\mathfrak{r}_2)$, bez. $\mathsf{B}=-\mathfrak{r}_2(\mathfrak{r}_1-\mathfrak{r}_2)$. Für $e^2=0$ ist $\mathsf{A}=(\mathfrak{r}_1+\mathfrak{r}_2)^2$, $\mathsf{B}=(\mathfrak{r}_1-\mathfrak{r}_2)^2$, bez. $\mathsf{A}'=\mathsf{B}'=\mathfrak{r}_1^2+\mathfrak{r}_2^2$. Die Verschiebung der beiden Hyperbeln (A, A') und (B, B') gegen einander beträgt $2\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2$. Bei $e^2=\mathfrak{r}_1^2+\mathfrak{r}_2^2$ verschwinden, wie oben schon auseinandergesetzt wurde, gleichzeitig A' und B'. Aus Alledem nun erkennt man:

Im Intervalle $0<e<\mathfrak{r}_2$ ist $\mathsf{A}>0$, $\mathsf{B}>0$, ebenso $\mathsf{A}'>0$, $\mathsf{B}'>0$; im Intervalle $\mathfrak{r}_1<e<\infty$ $\mathsf{A}>0$, $\mathsf{B}<0$; im Intervalle $\mathfrak{r}_1<e<\sqrt{\mathfrak{r}_1^2+\mathfrak{r}_2^2}$ $\mathsf{A}'>0$, $\mathsf{B}'<0$, im Intervalle $\sqrt{\mathfrak{r}_1^2+\mathfrak{r}_2^2}<e<\infty$ $\mathsf{A}'<0$, $\mathsf{B}'>0$.

Auf alle Fälle besteht im Intervalle $0<e<\mathfrak{r}_2$ Σ_2 ebenso wie Σ'_2 aus Ellipsen, im Intervalle $\mathfrak{r}_1<e<\infty$ aus Hyperbeln. Dass im ersten Falle die Nullellipsen imaginär sind, erhellt schon aus dem allgemeinen Satze S. 31.

Für $e^2=0$ geht Σ_2 in das System von congruenten Ellipsen über, die den äusseren Kreis von aussen, den inneren einschliessend berühren, Σ'_2 aber in das System von Kreisen, die mit den gegebenen concentrisch sind und zwischen beiden liegen.

Durch weitere Betrachtung von Taf. IV Fig. 18a mit Zugrundelegung der Gl. 190d) erhält man folgende Uebersicht, welche zeigt, wann die Hyperbel $\Phi=0$ (falls die beiden Systeme überhaupt aus Hyperbeln bestehen) spitzwinklig ($abs.B<abs.A$, $B<0$) und also die Hyperbel $\Phi=\pi$ stumpfwinklig ist:

Σ_2:				Σ'_2:			
$0<e<\mathfrak{r}_2$	$\Phi=0$ $\Phi=\pi$	$A>0, B>0$ $A>0, B>0$	$A>B$	$A>B$	$A>0, B>0$ $A>0, B>0$	$\Phi=0$ $\Phi=\pi$	$0<e<\mathfrak{r}_2$
$\mathfrak{r}_1<e<\sqrt{\mathfrak{r}_1^2+\mathfrak{r}_2^2}$	$\Phi=0$ $\Phi=\pi$	$A>0, B<0$ $A<0, B>0$	$abs.A>abs.B$	$abs.A>abs.B$	$A>0, B<0$ $A<0, B>0$	$\Phi=0$ $\Phi=\pi$	$\mathfrak{r}_1<e<\sqrt{\mathfrak{r}_1^2+\mathfrak{r}_2^2}$
$\sqrt{\mathfrak{r}_1^2+\mathfrak{r}_2^2}<e<\infty$	$\Phi=0$ $\Phi=\pi$	$A>0, B<0$ $A<0, B>0$	$abs.A<abs.B$	$abs.A>abs.B$	$A>0, B<0$ $A<0, B>0$	$\Phi=0$ $\Phi=\pi$	$\sqrt{\mathfrak{r}_1^2+\mathfrak{r}_2^2}<e<\infty$

Der Schnittpunktskreis des Systemes Σ'_2 umschliesst, wenn er sammt Σ'_2 selbst reell ist, stets den kleineren Kreis ($e>\mathfrak{r}_1$); der des Systemes Σ_2

* In Taf. IV Fig. 18a sind die zu Σ_2 gehörenden Zweige ausgezogen, die zu Σ'_2 gehörenden punktirt.

dagegen umschliesst den grösseren im Falle $\sqrt{\mathfrak{r}_1^2+\mathfrak{r}_2^2} < e$, den kleineren im Falle $\mathfrak{r}_1 < e < \sqrt{\mathfrak{r}_1^2+\mathfrak{r}_2^2}$. Der erstere ist nur im Ausnahmefalle $\mathfrak{r}_2=\mathfrak{r}_1$ $(r_2=0)$ mit dem kleineren Kreise selbst identisch, und andererseits im Falle $\mathfrak{r}_2=0$, $e=\mathfrak{r}_1$ mit der Potenzlinie und der unendlich fernen Geraden.

In jedem der conjugirten Systeme Σ_2, Σ'_2 giebt es vier Kegelschnitte, die den einen oder anderen Kreis hyperosculiren (d. h. bei denen zwei Berührungspunkte zusammenfallen); dies kann natürlich nur in einem Scheitel des Kegelschnittes stattfinden. Man findet diese vier Berührungspunkte, indem man von dem Mittelpunkte des Geradenbüschels, das die Berührungspunkte ausschneidet, die vier Tangenten an die Kreise zieht. Da die Axen des Kegelschnittes den Asymptoten der ausschneidenden Hyperbel parallel sind, so sieht man wieder, dass die Hyperosculation in einem Scheitel stattfindet, und zwar in dem Falle, wo alle vier Hyperosculationsstellen reell sind [nämlich im Systeme Σ'_2, falls es aus Ellipsen besteht $(e<\mathfrak{r}_2)$], bei zwei Kegelschnitten in den Hauptscheiteln, bei zweien in den Nebenscheiteln. Im Systeme Σ_2 sind, falls $e<\mathfrak{r}_2$ ist, alle vier Hyperosculationsstellen imaginär; falls $e>\mathfrak{r}_1$, sind in jedem Systeme zwei reell. — Die Systeme Σ_2, Σ'_2 sind bei $e>\mathfrak{r}_1$ in Taf. IV Fig. 16c, 16d, bei $e<\mathfrak{r}_2$ in Taf. III Fig. 15c, 15d dargestellt.

IV. $\varrho=\sqrt{\mathfrak{r}_1^2+\mathfrak{r}_2^2-e^2}$. Aus 187) folgt:

192) $$\frac{\mathsf{A}+\mathsf{B}}{2}=e^2,\quad \frac{\mathsf{A}-\mathsf{B}}{2}=-e^2,\quad \mu=1,\quad \cos\psi=-\frac{\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2}{e\sqrt{\mathfrak{r}_1^2+\mathfrak{r}_2^2-e^2}},$$

weiter nach 123)

$$\lambda=\frac{\mathfrak{r}_1^2\mathfrak{r}_2^2+(e^2-\mathfrak{r}_1^2)(e^2-\mathfrak{r}_2^2)}{e^2(\mathfrak{r}_1^2+\mathfrak{r}_2^2-e^2)},$$

$$\tau=\pm\sin\Psi=\frac{2\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2}{e^2(\mathfrak{r}_1^2+\mathfrak{r}_2^2-e^2)}\sqrt{-(e^2-\mathfrak{r}_1^2)(e^2-\mathfrak{r}_2^2)};$$

$$\mathsf{A}=0,\quad \mathsf{B}=2e^2.$$

Beide Systeme bestehen also aus Doppellinien und sind nur reell, wenn sich die Kreise schneiden $(\mathfrak{r}_1>e>\mathfrak{r}_2)$. Da jetzt

$$\varrho^2=x_0^2+y_0^2$$

nach 182b) ist, so geht der Mittelpunktskreis der Systeme durch die Schnittpunkte der Kreise selbst hindurch. Die Axe des einen Systemes ist um den positiven, die des anderen um den negativen Winkel ψ gegen die x-Axe geneigt; und nach 192) gehen diese Systemaxen gerade durch die Schnittpunkte der Kreise, da $\cos\psi=\frac{x_0}{\varrho}$ ist. Die beiden anderen Punkte des Mittelpunktskreises, durch die sie laufen, findet man hiernach, wenn man durch die Schnittpunkte die Parallelen zur Centrale zieht. Wir betrachten nur das System weiter, das dem positiven Winkel ψ entspricht (s. Taf. IV Fig. 17c), da beide Systeme offenbar zu einander mit Beziehung auf die Centrale symmetrisch sind. — Dann ist der nach der positiven y-Axe zu liegende Schnittpunkt der Kreise als $\underline{F}$, sein Gegenpunkt im

Mittelpunktskreise als E, der andere Schnittpunkt als F', dessen Gegenpunkt als E' zu bezeichnen. Das Kegelschnittssystem besteht dann aus den durch F laufenden Sehnen der beiden Kreise. Dabei ist $\angle FKF' = \Psi$. Rechnet man gemäss dieser Bezeichnungsweise den Winkel Φ von der positiven Systemaxe KF aus in der Richtung FF', so hat man für die Quadrate der Halbaxen

$$193)\quad \begin{aligned} A &= 0, \\ B &= 2e^2 - 2\frac{\mathfrak{r}_1^2\mathfrak{r}_2^2 + (e^2-\mathfrak{r}_1^2)(e^2-\mathfrak{r}_2^2)}{\mathfrak{r}_1^2+\mathfrak{r}_2^2-e^2}\cos\Phi - 4\frac{\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\sqrt{-(e^2-\mathfrak{r}_1^2)(e^2-\mathfrak{r}_2^2)}}{\mathfrak{r}_1^2+\mathfrak{r}_2^2-e^2}\sin\Phi. \end{aligned}$$

Weiter erhält man nach 23) $h = \varrho$, und also ist F zugleich der Punkt $\underline{G}$; nach 27) sind die Grundpunkte der ausschneidenden Hyperbeln ebenfalls dort vereinigt, die Hyperbeln bestehen also, wie es ja selbstverständlich ist, aus je zwei zu einander senkrechten Geraden durch F.

Nach 30) und 31) endlich wird $k = \varrho$, $s = 0$, wie es sich ebenfalls von selbst versteht. Für die zerfallenden Kegelschnitte erhält man nach 45), 46), da $\mu = 1$ ist, $\Phi = \Psi$; sie fallen zusammen (F'), und jeder besteht aus der doppelt zu zählenden Potenzlinie. Dass die grösste Sehne der beiden Kreise der Centrale parallel ist, ist ein bekannter Satz der Elementargeometrie (s. S. 7); aus dem Satze S. 7 folgt noch, dass zwei Sehnen, die entgegengesetzt gleich gegen die Centrale geneigt sind, einander gleich sind u. s. w. — Vergl. Taf. IV Fig. 17c.

Endlich bemerke ich noch, dass sich auch aus den Entwicklungen S. 18—21 u. 41 flgg. für jedes einzelne Beispiel eine Menge von Sätzen ergiebt, die aber immerhin, so merkwürdig sie zum Theile sind, nicht soviel Theilnahme beanspruchen, als die hier hervorgehobenen.

Im Anschlusse hieran möge noch Einiges Erwähnung finden betreffs eines anderen Systemes von viermal berührenden Kegelschnitten, das ein gegebenes Kreispaar einhüllt. Dabei mag gleich ein Kegelschnittspaar $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ an Stelle des Kreispaares treten (s. Taf. IV Fig. 18b).

Es sei D_1 eine Ecke des den gegebenen Kegelschnitten $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ gemeinsamen Polardreieckes, D_2, D_3 die anderen Ecken, S, T die auf D_2D_3 liegenden Schnittpunkte der gemeinsamen Tangenten von $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$; P, Q die Schnittpunkte der sich in D_1 kreuzenden gemeinschaftlichen Sehnen von $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ mit D_2D_3. Die Sehnen selbst mögen p, q heissen. Die Schnittpunkte der Tangenten an $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ in den gemeinsamen Schnitten von $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ mit p seien P_1, P_2; ebensolche Bedeutung sollen Q_1, Q_2 mit Beziehung auf q haben. Dann werden P_1, P_2 (die Pole von p mit Beziehung auf $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$), Q_1, Q_2 (die Pole von q in Beziehung auf $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$) ebenfalls auf D_2D_3 liegen. Der vierte harmonische Punkt zu Q, Q_1Q_2 sei C, der zu P, P_1P_2 sei E. Zunächst gilt folgender Satz:

Es seien m, n; m', n' zwei Paare harmonischer Strahlen zu p, q. Fasst man in jedem Paare die Punkte ins Auge, die sein erster Strahl mit dem einen, sein zweiter mit dem anderen Kegelschnitte gemeinsam hat, so kann durch diese acht Punkte ein Kegelschnitt $\mathfrak{T}$ gelegt werden. Da jeder Strahl aber jeden der beiden gegebenen Kegelschnitte in zwei Punkten schneidet, so werden durch zwei gegebene Strahlenpaare m, n; m', n' jedesmal vier Kegelschnitte $\mathfrak{T}$ einander zugeordnet. Irgend zwei von diesen (zweifach unendlich vielen) Kegelschnitten $\mathfrak{T}$ haben zwei gemeinschaftliche Sehnen, die sich in D_1 schneiden und wiederum zu p, q harmonisch sind.

Fällt m' mit m und n' mit n zusammen, so werden aus jenen vier Kegelschnitten $\mathfrak{T}$, die durch m, n; m', n' bestimmt sind, zwei Berührungskegelschnitte $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$, deren Berührungspunkte mit $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ auf m, n liegen (s. Taf. IV Fig. 18b). Alle diese Kegelschnittspaare $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ bilden für die aus $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ zusammengesetzte Curve ein System viermal berührender Kegelschnitte. Zwei ebensolche Systeme ergeben sich mit Beziehung auf D_2 und D_3. In dem Falle aber, dass $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ zwei Kreise sind, ist nur das eine stets reell, und dann liegen die Mittelpunkte der dieses bildenden Kegelschnitte auf der Centrale der Kreise. — Es soll weiterhin von dem zu D_1 gehörenden Systeme der Kegelschnitte $\mathfrak{S}$ die Rede sein. Je zwei von diesen Kegelschnitten sind, wie bemerkt wurde, einander zugeordnet ($\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$). Für diese Zuordnung gelten nun folgende Sätze:

1. Die Schnittpunktsvierecke der Kegelschnittspaare ($\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$) sind alle demselben Kegelschnitte $\mathfrak{S}_0$ eingeschrieben. Dieser gehört dem durch $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ gegebenen Büschel an; die Pole von p bez. q mit Beziehung auf ihn sind E, C, seine Schnittpunkte mit D_2D_3 sind diejenigen Punkte, die zugleich zu CQ und EP harmonisch liegen.

2. Zwei einander zugeordnete Berührungskegelschnitte $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ sind so beschaffen, dass die Pole von p mit Beziehung auf sie harmonisch zu EQ liegen, und gleichzeitig die Pole von q mit Beziehung auf sie harmonisch zu CP (diejenigen gemeinschaftlichen Sehnen von $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$, die durch D_1 laufen, sind harmonisch zu p, q).

Das System der Kegelschnitte $\mathfrak{S}$ enthält vier zerfallende Kegelschnitte, nämlich die Geraden p, q (jede doppelt gezählt) und die beiden Paare gemeinschaftlicher Tangenten von $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$. Der vierte harmonische Punkt zu ST, Q sei O, der zu ST, P sei R. Dann gelten weiter die Sätze:

3. An irgend einen Kegelschnitt $\mathfrak{S}$ des betrachteten Systemes lege man von jedem der auf q sich befindenden Schnittpunkte von $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ die Tangenten. Diese vier Tangenten haben vier neue gegenseitige Schnittpunkte. Diejenigen von den letzteren, die nicht auf D_2D_3 liegen, bilden für die verschiedenen Kegelschnitte $\mathfrak{S}$ einen neuen Kegelschnitt $\mathfrak{S}_q$, der dem Büschel ($\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$) angehört und mit Beziehung auf den der Pol von q O ist. — Einen entsprechenden Satz erhält man hieraus durch Vertauschung von q, O, $\mathfrak{S}_q$ mit bez. p, R, $\mathfrak{S}_p$.

4. Sämmtliche Tangenten der Kegelschnitte $\mathfrak{S}$ in ihren Schnittpunkten mit q hüllen den Kegelschnitt $\mathfrak{B}$ ein, welcher der durch $(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2)$ bestimmten Kegelschnittsschaar angehört und überdies die Geraden p, q (in P, Q) berührt. Dasselbe gilt von den Tangenten an die Kegelschnitte $\mathfrak{S}$ in ihren Schnittpunkten mit p. Oder: Diejenigen Tangentenvierecke der Kegelschnitte $\mathfrak{S}$, die in den Schnittpunkten der letzteren mit p, q berühren, sind alle demselben Kegelschnitte $\mathfrak{B}$ umgeschrieben.

Dabei ist noch folgende Beziehung zwischen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{S}_0$ bemerkenswerth: Die gemeinschaftlichen Tangenten von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{S}_0$ schneiden sich in C und E und berühren also $\mathfrak{S}_0$ gerade in den Grundpunkten des Büschels $(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_0)$.

Alle diese Sätze sind leicht zu beweisen und ebenso leicht auf das Kreispaar zu übertragen.

5. Der Ort der Polaren eines gegebenen Punktes Z mit Beziehung auf alle Kegelschnitte $\mathfrak{S}$ ist wiederum ein Kegelschnitt $\mathfrak{Z}$, der selbstverständlich die Geraden p und q berühren muss. Sein Berührungspunkt B_p mit p wird gefunden, indem man p mit EZ zum Schnitte bringt, Z_p, und den vierten harmonischen Punkt zu Z_p; P', P'' sucht (dabei bedeuten P', P'' die gemeinsamen Punkte von $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ auf p). Analoges gilt für den Berührungspunkt B_q von $\mathfrak{Z}$ mit q. Der Kegelschnitt $\mathfrak{Z}$ artet in eine Doppelgerade aus, sobald Z auf p oder q liegt. Ist z. B. Z ein Punkt auf p, und Z' der vierte harmonische Punkt zu Z; P', P''; schneidet ferner ZC die Gerade q in Z_q, und ist Z'' der vierte harmonische Punkt zu Z_q; Q', Q'' (unter Q', Q'' die gemeinsamen Punkte von $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ auf q verstanden), so geht $Z'Z''$ durch E, und $EZ'Z''$ ist die Polare von Z mit Beziehung auf p selbst, während die Polaren von Z mit Beziehung auf alle übrigen Kegelschnitte $\mathfrak{S}$ die Geraden durch Z'' sind. Oder: Die Polaren eines Punktes Z auf p mit Beziehung auf die Kegelschnitte $\mathfrak{S}$ schneiden sich in einem Punkte Z'' auf q. Dabei sind die Polaren mit Beziehung auf einander zugeordnete Kegelschnitte $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}'$ solche Geraden durch Z'', die harmonisch zu q und $Z'Z''$ liegen. Analoges gilt, wenn Z auf q liegt. Im Allgemeinen aber (wenn Z beliebig gewählt ist) sind die Polaren mit Beziehung auf einander zugeordnete Kegelschnitte $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}'$ solche Tangenten von $\mathfrak{Z}$, die sich auf der Geraden B_pB_q schneiden; diese Gerade ist zugleich die Polare von Z mit Beziehung auf $\mathfrak{S}_0$.

Nachträgliche Anmerkung. Ich habe leider erst während des Druckes der vorliegenden Abhandlung entdeckt, dass die speciellen Systeme Σ, Σ_1, S. 79, 80 (sowie das damit im Zusammenhange stehende System $\mathfrak{S}$, S. 87) bereits von Steiner behandelt und die Steiner'schen Sätze von Fiedler bewiesen worden sind (Steiner's gesammelte Werke, Bd. II S. 463 flgg.; Fiedler, Ueber die Durchdringung gleichseitiger Rotationshyperboloide mit parallelen Axen, Acta mathem., Bd. V). Aber abgesehen davon, dass diese Systeme in dem Zusammenhange, worin sie in der vorliegenden Abhandlung vorkommen, in anderem Lichte erscheinen, ergeben sich auch durch Specialisirung der allgemeinen Sätze des I. Abschnittes für sie viele neue Sätze, die ich aber nicht besonders ausgesprochen habe. Ich gedenke die in Rede stehenden höchst interessanten Systeme in einem besonderen Aufsatze, und zwar synthetisch, ausführlich zu behandeln.

Dritter Abschnitt.

Uebertragung der Theorie auf die circularen Curven dritter Ordnung.

Eine bicirculare Curve vierter Ordnung kann insbesondere auch aus einer circularen Curve dritter Ordnung und der unendlich fernen Geraden zusammengesetzt sein. Es ist also klar, dass auch für die circularen Curven dritter Ordnung ähnliche Sätze gelten müssen, wie die für die bicircularen Curven vierter Ordnung im ersten Theile dieser Abhandlung entwickelten. Da aber die acht Berührungspunkte je zweier parallelaxiger Kegelschnitte eines Systemes Σ von einer gleichseitigen Hyperbel ausgeschnitten werden, so sieht man, dass bei einer circularen Curve dritter Ordnung allemal ein derartiges Kegelschnittssystem aus **Parabeln** bestehen muss; denn zwei von den acht erwähnten Berührungspunkten kommen jetzt auf die unendlich ferne Gerade: und diese können nicht einem der beiden Kegelschnitte allein angehören, weil sonst der andere acht Punkte mit der Curve gemeinsam hätte; jeder von beiden muss demnach die unendlich ferne Gerade, und zwar an einer Stelle, berühren.

Man kann also von vornherein den Satz aufstellen:

Jede circulare Curve dritter Ordnung wird von sechs Systemen dreimal berührender Parabeln eingehüllt; die Berührungspunkte je zweier auf einander senkrechter Parabeln eines solchen Systemes sammt ihren unendlich fernen Punkten werden von einer gleichseitigen Hyperbel ausgeschnitten, deren Asymptoten also den Axen der Parabeln parallel sind, und die zu jedem Systeme gehörenden Hyperbeln bilden ein Büschel, dessen Grundpunkte vier **Brennpunkte** der Curve sind. Je zwei Systeme sind conjugirt, d. h. entsprechende Tangenten der Parabeln des einen Systemes hüllen eine Parabel des anderen ein.

Da der Mittelpunkt einer Parabel im Unendlichen liegt, so folgt sofort weiter, dass der Mittelpunktskreis unendlich gross ist: $\varrho = \infty$, und also im Allgemeinen in die unendlich ferne und eine im Endlichen liegende Gerade zerfällt. Dies folgt auch daraus, dass gegenwärtig der Mittelpunkt K des von den Doppelbrennpunkten gebildeten hyperbolischen Quadrates im Unendlichen liegen muss; denn zwei von den Doppelpunktszweigen (in den unendlich fernen Kreispunkten) fallen in die unendlich ferne Gerade hinein, so dass auch drei von den Doppelbrennpunkten auf dieser liegen und nur ein endlicher Doppelbrennpunkt übrig bleibt, nämlich der Schnittpunkt der Tangenten in den Zweigen der Curve dritter Ordnung, die durch die unendlich fernen Kreispunkte gehen. Da zwei von den Doppelbrennpunkten in diesen Punkten selbst liegen, so müssen die beiden anderen, insbesondere der eben erwähnte Schnittpunkt, nothwendig reell sein, wenn die Curve selbst reell ist. Diesen Punkt bezeichne ich mit C.

Eine reelle circulare Curve dritter Ordnung hat nothwendig einen und nur einen reellen unendlich fernen Punkt, und demgemäss auch unter allen Umständen eine reelle Asymptote. Die Beziehung zwischen der Geraden von dem reellen Doppelbrennpunkte C nach dem Punkte K (oder dem anderen unendlich fernen reellen Doppelbrennpunkte) und dieser Asymptote wird sogleich abgeleitet werden. — Im Uebrigen sei noch daran erinnert, dass die Mittelpunkte der vier Brennpunktskreise (s. S. 35), $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$, Punkte der circularen Curve dritter Ordnung selbst sind, und zwar die Berührungspunkte der vier Tangenten, die an die Curve parallel ihrer reellen Asymptote gelegt werden können.*

Wir schreiben zunächst die Gleichung der allgemeinen circularen Curve dritter Ordnung mit Zugrundelegung eines Coordinatensystemes (x_1, y_1) in der Form:

$$(x_1^2 + y_1^2)(\vartheta x_1 - y_1) + \mathfrak{a} x_1^2 + 2\mathfrak{b} x_1 y_1 + \mathfrak{c} y_1^2 + 2\mathfrak{d} x_1 + 2\mathfrak{e} y_1 + \mathfrak{f} = 0.$$

Um die Asymptote zu finden, setzen wir $y_1 = \delta x_1 + \varepsilon$, und erhalten für δ und ε die Gleichung

$$x_1^3 (1 + \delta^2)(\vartheta - \delta) - x_1^2 [(1 + \delta^2)\varepsilon - 2\delta(\vartheta - \delta)\varepsilon - \mathfrak{a} - 2\mathfrak{b}\delta - \mathfrak{c}\delta^2] \equiv 0,$$

also $$\delta = \vartheta, \quad \varepsilon = \frac{\mathfrak{a} + 2\mathfrak{b}\vartheta + \mathfrak{c}\vartheta^2}{1 + \vartheta^2},$$

so dass die Gleichung der reellen Asymptote ist:

$$y_1 = \vartheta x_1 + \frac{\mathfrak{a} + 2\mathfrak{b}\vartheta + \mathfrak{c}\vartheta^2}{1 + \vartheta^2}.$$

Ist also $\vartheta = tg\,\Theta$, und dreht man das Coordinatensystem um den Winkel $\frac{\pi}{2} + \Theta$ nach (x', y'): $x_1 = -x' \sin\Theta - y' \cos\Theta$, $y_1 = x' \cos\Theta - y' \sin\Theta$, so wird die Asymptote der y'-Axe parallel, oder steht senkrecht auf der x'-Axe. Alsdann gewinnt die Gleichung der Curve folgendes Aussehen:

194) $$(x'^2 + y'^2)x' - \mathfrak{a}' x'^2 - 2\mathfrak{b}' x' y' - \mathfrak{c}' y'^2 + 2\mathfrak{d}' x' + 2\mathfrak{e}' y' + \mathfrak{f}' = 0,$$

wobei $\mathfrak{c}' = [\mathfrak{a} \cos^2\Theta + 2\mathfrak{b} \sin\Theta \cos\Theta + \mathfrak{c} \sin^2\Theta] . \cos\Theta$ ist, also

$$\varepsilon = \mathfrak{a} \cos^2\Theta + 2\mathfrak{b} \cos\Theta \sin\Theta + \mathfrak{c} \sin^2\Theta = \frac{\mathfrak{c}'}{\cos\Theta},$$

* Salmon-Fiedler, Höhere ebene Curven, S. 309.

so dass $\varepsilon \cos\Theta = \mathfrak{c}'$ das Stück ist, das jetzt von der Asymptote auf der (positiven) x'-Axe abgeschnitten wird. Demnach ist in der Gleichungsform 194)

195) $$x' = \mathfrak{c}'$$

die Gleichung der reellen Asymptote.

Mit anderen Worten: ist die $\mathfrak{y}$-Axe mit der reellen Asymptote identisch, so ist die Gleichung der Curve von der Form

196) $$2\mathfrak{x}(\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2) + \mathfrak{A}\mathfrak{x}^2 + 2\mathfrak{B}\mathfrak{x}\mathfrak{y} + 2\mathfrak{C}\mathfrak{x} + 2\mathfrak{D}\mathfrak{y} + \mathfrak{E} = 0.$$

Mit Hilfe des S. 14 angegebenen Verfahrens erhält man bei der Gleichungsform 194) für den im Endlichen liegenden Doppelbrennpunkt C

197) $$y' = \mathfrak{b}', \quad x' = \frac{\mathfrak{a}' - \mathfrak{c}'}{2}.$$

Wenn man nun die Gleichungen, die für die Parabelsysteme bei einer circularen Curve dritter Ordnung gelten, aus den für die bicircularen Curven vierter Ordnung giltigen Entwickelungen S. 6 flg. ableiten will, so ist es zunächst nöthig, eine Coordinatentransformation vorzunehmen, weil der dort gewählte Coordinatenanfang K jetzt im Unendlichen liegt. Wir wählen den Punkt $\underline{E}$ als Anfangspunkt eines Coordinatensystemes (x', y'), setzen also

$$x = x' - \varrho, \quad y = y'$$

(s. Taf. I Fig. 1). Dann geht die Gleichung eines Kegelschnittes des Systemes Σ, 18), in die folgende über:

198) $$\begin{aligned} & x'^2(\mathsf{A}\sigma^2 + \mathsf{B}\varkappa^2) - 2x'y'(\mathsf{A} - \mathsf{B})\varkappa\sigma + y'^2(\mathsf{A}\varkappa^2 + \mathsf{B}\sigma^2) - 4x'\varrho\mathsf{B}\varkappa^2 \\ & - 4y'\varrho\mathsf{B}\varkappa\sigma + 4\mathsf{P}\mathsf{B}\varkappa^2 - \mathsf{A}\mathsf{B}(1 - \lambda\cos\Phi - \tau\sin\Phi) = 0. \end{aligned}$$

Dabei gehen die Axen aller Kegelschnitte durch den Coordinatenanfang E; und zwar ist die Axe des vorliegenden Kegelschnittes unter dem Winkel φ gegen die x'-Axe geneigt. Da nun, wie gezeigt wurde, jetzt alle Kegelschnitte Parabeln sind, so müssen gleichzeitig A und B unendlich gross gesetzt werden, aber so, dass B nur in demselben Grade unendlich wird, wie die Quadratwurzel aus A. Denn $\alpha = \sqrt{\pm\mathsf{A}}$ und $\beta = \sqrt{\pm\mathsf{B}}$ sind die Halbaxen der beiden congruenten oder „mittleren" parallelaxigen Kegelschnitte [s. 14) S. 7]; die halbe zur Axe senkrechte Brennpunktssehne oder der halbe Parameter ist bei diesen Kegelschnitten aber bekanntlich $\frac{\beta^2}{\alpha}$, also das Quadrat des halben Parameters $\frac{\mathsf{B}^2}{\mathsf{A}}$; der Parameter aber wird beim Uebergange wieder zum Parameter der Parabel. Da ϱ von derselben Ordnung unendlich gross wird wie α (dies ist augenscheinlich), so werden demnach B und ϱ von gleicher Ordnung sein. Alles das erkennt man übrigens auch sofort aus 198). Vernachlässigt man demgemäss B gegen A, so lässt sich in 198) aus den quadratischen Gliedern A herausheben, und wenn man jetzt die Gleichung durch A dividirt, so steht im Coefficienten von x' und y' die Grösse $\frac{\varrho\mathsf{B}}{\mathsf{A}}$, deren Grenzwerth wir, weil er eine Strecke bedeutet, mit $\frac{1}{2}q$ bezeichnen:

199a) $$\lim 2\varrho\frac{\mathsf{B}}{\mathsf{A}} = q.$$

Die Gleichung erhält dann die Form:

$$x'^2\sigma^2 - 2x'y'\varkappa\sigma + y'^2\varkappa^2 - 2x'q\varkappa^2 - 2y'q\varkappa\sigma + \Gamma\varkappa^2 + 2\Delta\varkappa\sigma + \mathsf{E}\sigma^2 = 0.$$

Dabei ist Γ für den Grenzwerth von $4\mathsf{P}\frac{\mathsf{B}}{\mathsf{A}} - \mathsf{B}(1-\lambda)$, Δ, E für den von $\mathsf{B}\tau$ bez. $-\mathsf{B}(1+\lambda)$ gesetzt worden, da $\cos\Phi$ in $\cos^2\varphi - \sin^2\varphi$, $\sin\Phi$ in $2\sin\varphi\cos\varphi$ aufgelöst werden muss. Daraus erkennt man, dass der Grenzübergang die Bedingungen

199b) $$\lambda = -1, \quad \tau = 0, \; \lim 2\frac{\mathsf{P}}{\mathsf{A}} = 1$$

stellt, weshalb sich die Grössen Γ, Δ, E auch so definiren lassen:

199c) $$\lim 2\mathsf{B}\left(2\frac{\mathsf{P}}{\mathsf{A}} - 1\right) = \Gamma, \quad \lim \mathsf{B}\tau = \Delta, \quad \lim \mathsf{B}(-\lambda - 1) = \mathsf{E}.$$

Der Punkt K (ebenso der reelle unendlich ferne Doppelbrennpunkt, mit dem er zusammenfällt) liegt jetzt auf der x'-Axe im Unendlichen. Die Gleichung der Parabel aber lässt sich schreiben, wenn wir das bisher gebrauchte Coordinatensystem (x', y') einfach (x, y) nennen:

200) $$(x\sigma - y\varkappa)^2 - 2q\varkappa(x\varkappa + y\sigma) + \Gamma\varkappa^2 + 2\Delta\varkappa\sigma + \mathsf{E}\sigma^2 = 0.$$

Es könnten nun alle weiteren Ergebnisse aus den für die bicircularen Curven vierter Ordnung im ersten Theile abgeleiteten Gleichungen mit Hilfe von 199a), b), c) gewonnen werden; indessen ist es fast einfacher, gleich alle Rechnungen von Frischem durchzuführen.

Die Differentiation von 200) nach φ liefert die gleichseitige Hyperbel, die die Berührungspunkte der Parabeln φ und $\varphi + \frac{\pi}{2}$ ausschneidet:

201) $$\begin{aligned}(x\sigma - y\varkappa)(x\varkappa + y\sigma) + q\,(2x\varkappa\sigma - y(\varkappa^2 - \sigma^2)) - \Gamma\varkappa\sigma \\ + \Delta(\varkappa^2 - \sigma^2) + \mathsf{E}\varkappa\sigma = 0.\end{aligned}$$

Um aus 200) und 201) φ zu beseitigen, multipliciren wir die erstere Gleichung mit $\varkappa$, die letztere mit $-\sigma$, darnach jene mit σ, diese mit $\varkappa$, und addiren jedesmal. So ergeben sich die in $\varkappa$ und σ linearen und homogenen Gleichungen

$$\begin{aligned} y(x\sigma - y\varkappa) + q(2x\varkappa + y\sigma) - \Gamma\varkappa - \Delta\sigma &= 0, \\ x(x\sigma - y\varkappa) - qy\varkappa + \Delta\varkappa + \mathsf{E}\sigma &= 0,\end{aligned}$$

oder auch

$$\begin{aligned}(xy + qy - \Delta)\,\sigma &= (y^2 - 2qx + \Gamma)\,\varkappa, \\ (xy + qy - \Delta)\,\varkappa &= (x^2 + \mathsf{E})\,\sigma.\end{aligned}$$

Die Ausstossung von $\varkappa$ und σ liefert die gewünschte Gleichung der von den Parabeln 200) eingehüllten circularen Curve dritter Ordnung:

202) $$x(x^2 + y^2) - \frac{\Gamma}{2q}x^2 - \frac{\Delta}{q}xy - \frac{\mathsf{E} - q^2}{2q}y^2 + x\mathsf{E} - y\Delta + \frac{\Delta^2 - \Gamma\mathsf{E}}{2q} = 0.$$

Zufolge 194) und 195) ist die Gleichung ihrer reellen Asymptote:

203) $$x = \frac{\mathsf{E} - q^2}{2q},$$

nach 194) und 197) ihr endlicher Doppelbrennpunkt C:

204) $$x = \frac{\mathsf{Z}}{4q}, \quad y = \frac{\Delta}{2q},$$
wobei
205) $$\mathsf{Z} = q^2 + \Gamma - \mathsf{E}$$
gesetzt wurde.

Der endliche Schnittpunkt der Curve mit ihrer Asymptote 203) liegt bei

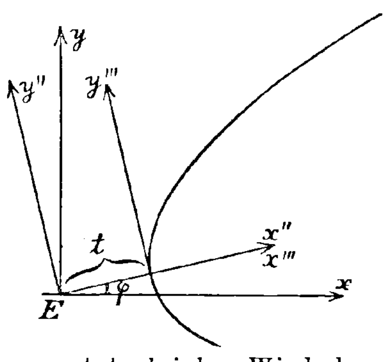
206) $$y = \frac{q\Delta}{\mathsf{E} + q^2} - \frac{\mathsf{Z}(\mathsf{E} + q^2)}{4q\Delta} = \frac{(2q\Delta)^2 - \mathsf{Z}(\mathsf{E} + q^2)^2}{4q\Delta(\mathsf{E} + q^2)}.$$

Zugleich hat man den Satz: Die Richtung, in welcher bei einer circularen Curve dritter Ordnung der Punkt K oder der unendlich ferne reelle Doppelbrennpunkt liegt, steht auf ihrer reellen Asymptote senkrecht.

Die Schnittpunkte der Curve mit der y-Axe sind $(x = 0)$

$$y = \frac{q\Delta \pm \sqrt{\mathsf{E}(\Delta^2 + \Gamma(q^2 - \mathsf{E}))}}{q^2 - \mathsf{E}}.$$

Sie fallen zusammen, wenn $\mathsf{E} = 0$ oder $\Delta^2 - \Gamma(\mathsf{E} - q^2) = 0$ ist; im ersten Falle ist dann $y = \frac{\Delta}{q}$, im zweiten $y = -\frac{\Gamma}{\Delta} q$, und hier findet eine Berührung statt. Im ersten Falle dagegen ist der Punkt $x = 0$, $y = \frac{\Delta}{q}$ ein Doppelpunkt der Curve, denn für ihn verschwinden die ersten Differentialquotienten der linken Seite von 202); auf diesen Punkt als Coordinatenanfang reducirt ist die Gleichung der Curve $2qx(x^2 + y^2) - \Gamma x^2 + 2\Delta xy + q^2y^2 = 0$. Der Doppelpunkt ist ein gewöhnlicher, eine Spitze oder ein isolirter, je nachdem $\Gamma \gtreqless -\left(\frac{\Delta}{q}\right)^2$ ist. Im Falle der Spitze ist die eben erwähnte Gleichung der Curve $2q^3x(x^2 + y^2) + \Delta^2x^2 + 2\Delta q^2xy + q^4y^2 = 0$. Führt man hier Polarcoordinaten ein, und nennt den Winkel, den die Spitzentangente mit der x-Axe bildet, v, so findet man $tg\, v = -\frac{\Delta}{q^2} = \frac{\Gamma}{\Delta}$ (vergl. S. 94 und 98).



Dreht man das Coordinatensystem (x, y) um den Winkel φ nach (x'', y''): $x = x''\varkappa - y''\sigma$, $y = x''\sigma + y''\varkappa$, so wird die Gleichung der Parabel 202):

$$y''^2 - 2q\varkappa\left(x'' - \frac{\Gamma\varkappa^2 + 2\Delta\varkappa\sigma + \mathsf{E}\sigma^2}{2q\varkappa}\right) = 0 *$$

oder

207) $$y''^2 - 2q\varkappa x'' + \Gamma\varkappa^2 + 2\Delta\varkappa\sigma + \mathsf{E}\sigma^2 = 0.$$

Mithin ist der Parameter

208) $$2p = 2q\varkappa.$$

Je zwei Parabeln, die entgegengesetzt gleichen Winkeln φ entsprechen, sind congruent [vergl. den Satz S. 7; jetzt ist $\tau = 0$,

* In dem Coordinatensystem, dessen x'''-Axe mit der x''-Axe zusammenfällt, dessen y'''-Axe der y''-Axe parallel ist, ist die Gleichung der Parabel
$$y'''^2 = 2q\varkappa x'''.$$

s. 199b), und also fällt $E'KF'$ mit EKF zusammen]. Die grösste Parabel ist die, deren Axe mit der x-Axe zusammenfällt ($\varphi = 0$), die kleinste, zugleich die ausartende (zerfallende) die, deren Axe der y-Axe parallel ist. Die Entfernung des Scheitels der Parabel von E, sie möge t heissen, hat die Grösse

209) $$t = \frac{\Gamma \varkappa^2 + 2 \Delta \varkappa \sigma + \mathsf{E} \sigma^2}{2 q \varkappa},$$

insbesondere

210) $$(\varphi = 0) \quad t_0 = \frac{\Gamma}{2q}.$$

t ist unendlich gross für die zerfallende Parabel, so lange $\mathsf{E} \neq 0$ ist; alsdann zerfällt diese in die beiden zur reellen Asymptote parallelen Geraden

211a) $$x = \pm \sqrt{-\mathsf{E}},$$

ist also nur reell, wenn $\mathsf{E} < 0$ ist. In Taf. IV Fig. 19a ist ein Parabelsystem mit reeller, in Taf. IV Fig. 19b eines mit imaginärer zerfallender Parabel dargestellt. — Ist aber $\mathsf{E} = 0$, so ist t für die zerfallende Parabel gleich $\frac{\Delta}{q}$, und diese selbst besteht aus der doppelt gerechneten y-Axe. Dann hat die Curve in diesem Punkte $\left(x = 0,\ y = \frac{\Delta}{q}\right)$ einen Doppelpunkt, wie S. 93 näher erörtert wurde.

Im Allgemeinen ($\mathsf{E} \neq 0$) sind die Berührungspunkte der beiden Geraden 211a), aus denen die zerfallende Parabel besteht, gegeben durch

211b) $$y = \frac{\Delta}{q \pm \sqrt{-\mathsf{E}}}.$$

Die beiden übrigen zerfallenden Kegelschnitte erhält man auf dieselbe Weise, wie bei den bicircularen Curven vierter Ordnung, nämlich, indem man $\cos\varphi = \infty$, $\sin\varphi = \infty$, $tg\,\varphi = \pm i$ setzt. Man findet so aus 200) ihre Gleichungen:

212) $$(x \pm iy)^2 + 2q(x \pm iy) - \Gamma \mp 2\Delta i + \mathsf{E} = 0$$

oder

213) $$x^2 - y^2 \pm 2ixy + 2qx \pm 2iqy - (\Gamma - \mathsf{E}) \mp 2\Delta i = 0.$$

Jeder besteht aus zweien der Tangenten, die sich von einem der beiden Kreispunkte im Unendlichen an die Curve legen lassen. Die durch Trennung des Reellen vom Imaginären aus 213) hervorgehenden Gleichungen $x^2 - y^2 + 2qx - (\Gamma - \mathsf{E}) = 0$, $xy + qy - \Delta = 0$ müssen demnach die zum Systeme Σ gehörenden Brennpunkte ergeben [vergl. 217), 218)].

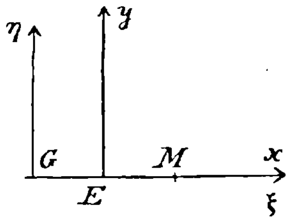
Für zwei zu einander senkrechte Parabeln hat man nach 202):

$$(x\sigma - y\varkappa)^2 - 2q\varkappa(x\varkappa + y\sigma) + \Gamma\varkappa^2 + 2\Delta\varkappa\sigma + \mathsf{E}\sigma^2 = 0,$$
$$(x\varkappa + y\sigma)^2 - 2q\sigma(x\sigma - y\varkappa) + \Gamma\sigma^2 - 2\Delta\varkappa\sigma + \mathsf{E}\varkappa^2 = 0;$$

durch die Schnittpunkte beider geht also der von φ unabhängige Schnittpunktskreis: $x^2 + y^2 - 2qx + \Gamma + \mathsf{E} = 0$ oder

$$(x - q)^2 + y^2 = q^2 - \Gamma - \mathsf{E};$$

die Entfernung seines Mittelpunktes M von E auf der positiven x-Axe ist also



214) $$k = q,$$

sein Halbmesser

215) $$s = \sqrt{q^2 - \Gamma - E}.$$

Der Mittelpunkt G des Hyperbelbüschels 201) hat dagegen die Abscisse

216) $$h = -q;$$

die Beziehung $k = -h$ ist eine Folge des ersten Satzes S. 12, weil jetzt F im Unendlichen liegt. Besondere Hyperbeln sind $\left(\varphi = \frac{\pi}{4},\ \varphi = 0\right)$

$$x^2 - y^2 + 2qx - \Gamma + E = 0, \quad xy + qy - \Delta = 0,$$

oder, wenn man auf den Punkt G als Anfang eines Coordinatensystemes (ξ, η) zurückgeht:

217) $$\xi^2 - \eta^2 = Z, \quad \xi\eta = \Delta;$$

Z ist in 205) angegeben. Aus diesen beiden Gleichungen berechnen sich die Grundpunkte des Büschels, die, wie schon gesagt wurde, Brennpunkte der Curve sind, wie folgt:

218) $$\begin{cases} \xi_{1,2} = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}\left[\sqrt{Z^2 + 4\Delta^2} + Z\right]}, \\ \xi_{3,4} = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}\left[-\sqrt{Z^2 + 4\Delta^2} + Z\right]}, \end{cases} \quad \begin{cases} \eta_{1,2} = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}\left[\sqrt{Z^2 + 4\Delta^2} - Z\right]}, \\ \eta_{3,4} = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}\left[-\sqrt{Z^2 + 4\Delta^2} - Z\right]}. \end{cases}$$

Dabei sind die Vorzeichen derart zu wählen, dass $\xi\eta$ das Vorzeichen von Δ bekommt. Im Coordinatensysteme (ξ, η) ist die Gleichung des Hyperbelbüschels 201):

219) $$(\xi^2 - \eta^2)\,\varkappa\sigma - \xi\eta\,(\varkappa^2 - \sigma^2) - Z\varkappa\sigma + \Delta\,(\varkappa^2 - \sigma^2) = 0.$$

Die Gl. 32) S. 12 und das dort Gesagte gilt unverändert auch hier.

Wir gehen nun über zu dem conjugirten Systeme Σ'. Seine Systemaxe muss nothwendig der Axe von Σ (der x-Axe) parallel sein, denn beide gehen durch K. Ferner waren im allgemeinen Falle beide entgegengesetzt gleich gegen die Verbindungslinie der reellen Doppelbrennpunkte [d. i. jetzt die Parallele zur x-Axe durch C, 204)] geneigt [s. S. 29]; jetzt also müssen die beiden Systemaxen gleich weit von C abstehen.

Man kann demgemäss voraussagen, dass die Axe des conjugirten Systemes Σ' die Gleichung $y = \frac{\Delta}{q}$ haben wird [vergl. 204)]; der Punkt F', durch den alle Axen der Parabeln Σ' laufen, muss überdies auf dem gemeinsamen Mittelpunktskreise des Systempaares Σ, Σ', also auf der y-Axe liegen, mithin die Coordinaten

220) $$x = 0, \quad y = \frac{\Delta}{q}$$

haben. Wir bezeichnen diesen Punkt mit F' und nicht mit E', weil beim Grenzübergange S. 92 $\tau = 0$, $\lambda = -1$ gefunden wurde, demgemäss $\Psi = \pi$ $(\cos\Psi = -1)$ ist, d. h. E und F' einerseits, E' und F andererseits an einander rücken (s. Taf. I Fig. 1 oder 2).

Die unter dem Winkel ω gegen die x'''-Axe geneigte Tangente der Parabel (s. Fig. und Anm. S. 93) hat die Gleichung

$$y''' \, cotg\, \omega - \left(x''' + \frac{q\varkappa}{2} cotg^2 \omega\right) = 0,$$

oder im Coordinatensysteme (x'', y''):

$$y'' \, cotg\, \omega - x'' + \frac{\Gamma\varkappa^2 + 2\Delta\varkappa\sigma + \mathrm{E}\sigma^2}{2q\varkappa} - \frac{q\varkappa}{2} cotg^2 \omega = 0,$$

oder endlich im Coordinatensysteme (x, y) $(x'' = x\varkappa + y\sigma,\ y'' = -x\sigma + y\varkappa)$:

$$x(\varkappa\sigma\, cotg\, \omega + \varkappa^2) - y(\varkappa^2 cotg\, \omega - \varkappa\sigma) - \frac{\Gamma x^2 + 2\Delta\varkappa\sigma + \mathrm{E}\sigma^2}{2q} + \frac{q\varkappa^2}{2} cotg^2 \omega = 0;$$

durch die Differentiation nach φ erhält man:

$$x[(\varkappa^2 - \sigma^2)\, cotg\, \omega - 2\varkappa\sigma] + y[2\varkappa\sigma\, cotg\, \omega + \varkappa^2 - \sigma^2]$$
$$- \frac{-2\Gamma\varkappa\sigma + 2\Delta(\varkappa^2 - \sigma^2) + 2\mathrm{E}\varkappa\sigma}{2q} - \frac{2q\varkappa\sigma}{2} cotg^2 \omega = 0.$$

Um aus beiden Gleichungen φ auszustossen, multipliciren wir einmal die erste mit 2σ, die zweite mit $\varkappa$; darauf die erste mit $2\varkappa$, die zweite mit $-\sigma$ und addiren das eine wie das andere Mal. So ergeben sich die einfacheren Gleichungen:

$$x\varkappa\, cotg\, \omega + y\varkappa - \frac{\varkappa\Delta + \sigma\mathrm{E}}{q} = 0,$$

$$x(\sigma\, cotg\, \omega + 2\varkappa) - y(2\varkappa\, cotg\, \omega - \sigma) - \frac{\varkappa\Gamma + \sigma\Delta}{q} + q\varkappa\, cotg^2 \omega = 0$$

oder

$$\left(x\, cotg\, \omega + y - \frac{\Delta}{q}\right)\varkappa = \frac{\mathrm{E}}{q}\sigma,$$

$$\left(x\, cotg\, \omega + y - \frac{\Delta}{q}\right)\sigma = \left[-2x + 2y\, cotg\, \omega + \frac{\Gamma - q^2 cotg^2 \omega}{q}\right]\varkappa = 0.$$

Auf diese Weise wird die Endgleichung, welche, wie es vorauszusehen war, eine **Parabel** darstellt:

221) $$\left(x\cos\omega + \left(y - \frac{\Delta}{q}\right)\sin\omega\right)^2 - \frac{\mathrm{E}}{q}\left[-2x\sin^2\omega + 2y\sin\omega\cos\omega + \frac{\Gamma\sin^2\omega - q^2\cos^2\omega}{q}\right] = 0.$$

Ihre Axe ist unter dem Winkel $\frac{\pi}{2} + \omega$ gegen die x-Axe geneigt:

222) $$\varphi' = \frac{\pi}{2} + \omega \qquad (\cos\varphi' = \varkappa',\ \sin\varphi' = \sigma').$$

Die Gleichung der Parabel 221) im Coordinatensysteme (x, y) lässt sich nun auch schreiben $(\sin\omega = -\varkappa',\ \cos\omega = \sigma')$:

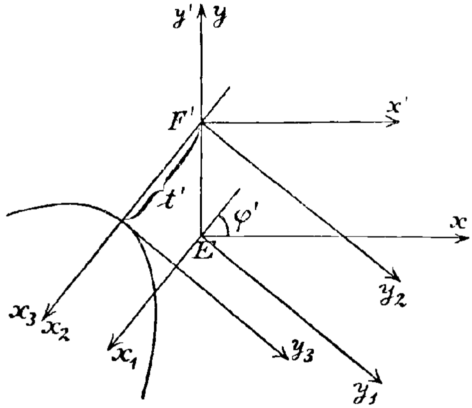
223) $$(x\sigma' - y\varkappa')^2 + \frac{2\varkappa'}{q}\left[x(\Delta\sigma' + \mathrm{E}\varkappa') - y(\Delta\varkappa' - \mathrm{E}\sigma')\right] + \frac{(\Delta^2 - \Gamma\mathrm{E})\varkappa'^2 + \mathrm{E}q^2\sigma'^2}{q^2} = 0.$$

Die **zerfallende Parabel des Systemes** Σ' $\left(\varphi' = \frac{\pi}{2}\right)$ hat demnach die Gleichung

$$x = \pm\sqrt{-\mathrm{E}},$$

d. h. [vergl. 211a)] sie fällt mit der ausartenden Parabel des Systemes Σ zusammen (s. den Satz S. 29, 30). Die Geraden, aus denen sie besteht, sind natürlich nicht mehr, wie bei der bicircularen Curve vierter Ordnung, eigentliche Doppeltangenten, sondern (wie im Systeme Σ) zwei von den vier Curventangenten, die der reellen Asymptote parallel sind.

Um die Gleichung der Parabel auf die Axe zurückzuführen, drehen wir das Coordinatensystem (x, y) um den Winkel $\varphi' + \pi$ nach (x_1, y_1): $x = -x_1\varkappa' + y_1\sigma'$, $y = -x_1\sigma' - y_1\varkappa'$.



Dann erhält sie die Gestalt:

$$y_1^2 - \frac{2\varkappa'}{q}(x_1 \mathsf{E} - y_1 \Delta) + \frac{(\Delta^2 - \Gamma \mathsf{E})\varkappa'^2 + \mathsf{E} q^2 \sigma'^2}{q^2} = 0.$$

Setzt man daher $x_1 = x_2 - \frac{\Delta}{q}\sigma'$, $y_1 = y_2 - \frac{\Delta}{q}\varkappa'$, so folgt:

$$224)\qquad y_2^2 - 2x_2 \frac{\mathsf{E}}{q}\varkappa' + \frac{\mathsf{E}}{q^2}(q^2\sigma'^2 - \Gamma\varkappa'^2 + 2\Delta\varkappa'\sigma') = 0$$

als Gleichung einer Parabel im Systeme Σ'.

Der Punkt F', durch den alle Axen der Parabeln Σ' gehen, hat also thatsächlich die Coordinaten $x = 0$, $y = \frac{\Delta}{q}$ [s. 220)].

Aus der letzten Gleichung folgt noch

$$225)\qquad t' = \frac{q^2\sigma'^2 - \Gamma\varkappa'^2 + 2\Delta\varkappa'\sigma'}{2q\varkappa'} \qquad \left(t'_0 = -\frac{\Gamma}{2q}\right),$$

wobei hier t' in der Richtung der positiven x_2-Axe, also z. B. t'_0 in der Richtung der negativen x-Axe gerechnet ist. Der Parameter ist

$$226)\qquad 2p' = 2\frac{\mathsf{E}}{q}\varkappa'.$$

Dabei ist zu bemerken, dass die hohle Seite der Parabel der positiven oder negativen x_2-Axe zugekehrt ist, je nachdem $p' \gtrless 0$ ist [eine ähnliche Bemerkung wäre zu 208) zu machen]. Die Gleichung der Parabel im Coordinatensysteme (x_2, y_2) lässt sich auch schreiben:

$$227)\qquad y_2^2 - 2\frac{\mathsf{E}}{q}\varkappa' x_2 - \frac{\Gamma\mathsf{E}}{q^2}\varkappa'^2 + 2\frac{\Delta\mathsf{E}}{q^2}\varkappa'\sigma' + \mathsf{E}\sigma'^2 = 0.$$

Nennt man die Grössen, welche im Parabelsysteme Σ' den Grössen q, Γ, Δ, E entsprechen, bez. q', Γ', Δ', E', so wird man die Gl. 227), entsprechend 207), schreiben können:

$$y_2^2 - 2q'\varkappa' x_2 + \Gamma'\varkappa'^2 + 2\Delta'\varkappa'\sigma' + \mathsf{E}'\sigma'^2 = 0.$$

Die Vergleichung mit 227) giebt folgende Beziehungen an die Hand:

228) $$q' = \frac{\mathsf{E}}{q}, \quad \Gamma' = -\frac{\Gamma \mathsf{E}}{q^2}, \quad \Delta' = \frac{\Delta \mathsf{E}}{q^2}, \quad \mathsf{E}' = \mathsf{E},$$

und umgekehrt (woraus schon die Reciprocität folgt) genau so:

229) $$q = \frac{\mathsf{E}'}{q'}, \quad \Gamma = -\frac{\Gamma' \mathsf{E}'}{q'^2}, \quad \Delta = \frac{\Delta' \mathsf{E}'}{q'^2}, \quad \mathsf{E} = \mathsf{E}'.$$

Wir legen den weiteren Betrachtungen des Parabelsystemes Σ' das Coordinatensystem (x', y') zu Grunde, dessen Axen der x- und y-Axe parallel sind, und dessen Anfang F' ist (s. die Fig. S. 97): $x = x'$, $y = y' + \frac{\Delta}{q}$. Die Gleichung der Parabel Σ' in 221) wird dann:

$$(x' \cos\omega + y' \sin\omega)^2 + 2\frac{\mathsf{E}}{q}(x' \sin^2\omega - y' \sin\omega\cos\omega)$$
$$- \frac{\mathsf{E}}{q^2}(\Gamma \sin^2\omega + 2\Delta \sin\omega\cos\omega - q^2\cos^2\omega) = 0.$$

Durch Differentiation nach ω erhält man die Hyperbeln, die die Berührungspunkte bestimmen:

$$-2(x'\cos\omega + y'\sin\omega)(x'\sin\omega - y'\cos\omega)$$
$$+ 2\frac{\mathsf{E}}{q}(2x'\sin\omega\cos\omega - y'(\cos^2\omega - \sin^2\omega))$$
$$- \frac{\mathsf{E}}{q^2}[2\Delta(\cos^2\omega - \sin^2\omega) + 2(\Gamma + q^2)\sin\omega\cos\omega] = 0.$$

Besondere Hyperbeln sind $\left(\omega = 0, \quad \omega = \frac{\pi}{4}\right)$

$$x'y' - y'\frac{\mathsf{E}}{q} - \frac{\Delta\mathsf{E}}{q^2} = 0, \quad x'^2 - y'^2 - 2x'\frac{\mathsf{E}}{q} + \frac{\mathsf{E}}{q^2}(\Gamma + q^2) = 0.$$

Der Mittelpunkt G' des Büschels liegt bei $y' = 0$, $x' = \frac{\mathsf{E}}{q}$. Nennt man also die Abscisse von G', aber in der Richtung der negativen x'-Axe gerechnet, h', so hat man

230) $$h' = -\frac{\mathsf{E}}{q}.$$

Geht man auf ihn zurück: $y' = \eta'$, $x' = \xi' + \frac{\mathsf{E}}{q}$, so werden jene beiden Hyperbeln:

$$\xi'^2 - \eta'^2 = -\frac{\mathsf{E}Z}{q^2}, \quad \xi'\eta' = \frac{\Delta\mathsf{E}}{q^2},$$

so dass die Grundpunkte des Büschels durch die folgenden Formeln gegeben sind:

231) $$\begin{cases} \xi'_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{\mathsf{E}}{2q^2}\left(-\sqrt{Z^2+4\Delta^2}-Z\right)}, \\ \xi'_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{\mathsf{E}}{2q^2}\left(\sqrt{Z^2+4\Delta^2}-Z\right)}, \end{cases} \quad \begin{cases} \eta'_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{\mathsf{E}}{2q^2}\left(-\sqrt{Z^2+4\Delta^2}+Z\right)}, \\ \eta'_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{\mathsf{E}}{2q^2}\left(\sqrt{Z^2+4\Delta^2}+Z\right)}. \end{cases}$$

Die Vorzeichen sind so zu wählen, dass $\xi\eta$ das Vorzeichen von $\frac{\Delta\mathsf{E}}{q^2}$ erhält.*

---

* Es liegen wieder die vier von den acht Brennpunkten 218), 231), die die unteren Zeiger 1 und 2 haben, auf einem Kreise, ebenso die mit den Zeigern 3, 4.

Der Mittelpunkt des Schnittpunktskreises M' ist gegeben durch

232) $$k'(=-x') = \frac{\mathsf{E}}{q},$$

und sein Halbmesser wird gefunden

233) $$s' = \sqrt{q'^2 - \Gamma' - \mathsf{E}'} = \sqrt{-\frac{\mathsf{E}}{q^2}(q^2 - \Gamma - \mathsf{E})}$$

[vergl. 214), 215), 228)]. Hieraus folgert man:

Die Schnittpunktskreise zweier reeller conjugirter Parabelsysteme sind nur dann gleichzeitig reell oder gleichzeitig imaginär, wenn $\mathsf{E} < 0$, d. h.: wenn die zerfallende Parabel reell ist.

Im Falle $\mathsf{E} = 0$ werden nach 228) alle Constanten des conjugirten Systemes Σ' Null; die Gleichung einer Parabel Σ', auf die Axe und Scheiteltangente zurückgeführt [(x_3, y_3), s. die Fig. S. 97], wird aber (s. die Anm. S. 93) $y_3{}^2 = 2q'\varkappa' x_3$ sein, so dass in diesem Falle das System Σ' aus den doppelt gezählten Geraden durch den Doppelpunkt der Curve besteht ($y_3{}^2 = 0$) (vergl. S. 93).*

Differenzirt man 221) nach ω, multiplicirt die entstehende Gleichung das erste Mal mit $-\sin\omega$, das zweite Mal mit $\cos\omega$, 221) selbst aber mit $\cos\omega$ bez. $\sin\omega$, und addirt beide Male, so gehen die neuen Gleichungen hervor:

$$\left(-xy + \frac{\Delta}{q}x + \frac{\mathsf{E}}{q}y\right)\sin\omega = (x^2 + \mathsf{E})\cos\omega,$$

$$\left(-xy + \frac{\Delta}{q}x + \frac{\mathsf{E}}{q}y\right)\cos\omega = \left[\left(y - \frac{\Delta}{q}\right)^2 + 2\frac{\mathsf{E}}{q}x - \frac{\Gamma\mathsf{E}}{q^2}\right]\sin\omega.$$

Beseitigt man ω, indem man diese Gleichungen mit einander multiplicirt, so ergiebt sich genau wieder die Gleichung der von Σ eingehüllten Curve, nämlich 202).

Die Zuordnung der Brennpunkte zu den verschiedenen Systempaaren ist dieselbe, wie bei den bicircularen Curven vierter Ordnung. Insbesondere erkennt man noch, dass mit Beibehaltung der Bezeichnungsweise S. 35 z. B. die Berührungspunkte der zerfallenden Parabel des Systempaares I mit den Mittelpunkten $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$ der Brennpunktskreise $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$ zusammenfallen (vergl. eine Bemerkung S. 90) u. s. w.

Um 202) auf einen beliebigen Punkt der reellen Asymptote als Coordinatenanfang zu reduciren, muss man zufolge 203)

---

* Das Reciprocitätsgesetz giebt dann sofort den folgenden Satz:

Hat eine circulare Curve dritter Ordnung einen Doppelpunkt, und zieht man von diesem die Radienvectoren nach der Curve, so werden die in ihren Endpunkten unter einem gegebenen Winkel gegen sie gezogenen Geraden eine Parabel einhüllen; alle diese Parabeln bilden ein System Σ (z. B. ihre Axen schneiden sich in einem Punkte).

$$x = \mathfrak{x} + \frac{\mathsf{E} - q^2}{2q}, \quad y = \mathfrak{y} + u$$

setzen. Alsdann wird die Curvengleichung:

$$\left.\begin{aligned} &2\mathfrak{x}(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2)+\mathfrak{x}^2\frac{3(\mathsf{E}-q^2)-\Gamma}{q}+2\mathfrak{x}\mathfrak{y}\left(2u-\frac{\Delta}{q}\right)\\ &+\mathfrak{x}\left[\frac{3(\mathsf{E}-q^2)^2}{2q^2}-\frac{\Gamma(\mathsf{E}-q^2)}{q^2}+2\mathsf{E}-2\frac{\Delta}{q}u+2u^2\right]-\mathfrak{y}\frac{\Delta(\mathsf{E}+q^2)}{q^2}\\ &+\frac{(\mathsf{E}-q^2)^3}{4q^3}-\frac{\Gamma(\mathsf{E}-q^2)^2}{4q^3}+\frac{\mathsf{E}(\mathsf{E}-q^2)}{q}+\frac{\Delta^2-\Gamma\mathsf{E}}{q}-\frac{\mathsf{E}+q^2}{q^2}\Delta u \end{aligned}\right\} = 0. \tag{234}$$

Ist nun eine allgemeine circulare Curve dritter Ordnung vorgelegt, so kann sie zunächst auf ihre reelle Asymptote als $\mathfrak{y}$-Axe reducirt werden, so dass die Gleichungsform 196) entsteht. Durch Vergleichung findet man auf diesem Wege gerade fünf Bedingungen für die fünf Unbekannten q, u, Γ, Δ, E. Die Abscisse des Punktes E ist dann $\mathfrak{x}_E = \frac{q^2-\mathsf{E}}{2q}$, mithin die von G und M nach 216) und 214):

$$\mathfrak{x}_G = -\frac{q^2+\mathsf{E}}{2q}, \quad \mathfrak{x}_M = \frac{3q^2-\mathsf{E}}{2q}, \quad \mathfrak{x}_E = \frac{q^2-\mathsf{E}}{2q}. \tag{235}$$

Eine circulare Curve dritter Ordnung kann insbesondere aus einem **Kegelschnitte** und der **unendlich fernen Geraden** bestehen;* und dieser Fall muss selbstverständlich in den abgeleiteten Gleichungen mit enthalten sein. In der That, man sieht sofort, dass 202) eine Kegelschnittsgleichung wird, wenn man $q = 0$ macht:

$$\Gamma x^2 + 2\Delta xy + \mathsf{E}y^2 + \Gamma\mathsf{E} - \Delta^2 = 0.$$

Dabei ist $h = 0$, $Z = \Gamma - \mathsf{E}$, G fällt mit E zusammen, die Punkte 194) werden zu den Brennpunkten des Kegelschnittes; wie denn E, der Coordinatenanfang, wirklich der Mittelpunkt des Kegelschnittes ist. Auch k ist $= 0$, und $s = \sqrt{-(\Gamma+\mathsf{E})}$ der bekannte Kreis, von dessen Peripheriepunkten auf einander rechtwinklig stehende Tangenten an jenen gezogen werden können. Die einhüllenden Parabeln 200) bestehen, wie schon früher (S. 74) gezeigt wurde, aus den Paaren paralleler Tangenten des Kegelschnittes:

$$x\sigma - y\varkappa = \pm\sqrt{-(\Gamma\varkappa^2 + 2\Delta\varkappa\sigma + \mathsf{E}\sigma^2)}.$$

Das conjugirte System besteht, wie die Gleichung 221) lehrt, aus lauter mit der unendlich fernen Geraden zusammenfallenden Kegelschnitten, wie denn auch die zugehörenden Brennpunkte 231) alle im Unendlichen liegen, und zwar in denselben Richtungen, in welchen die endlichen Brennpunkte 218) liegen, d. h. in den Richtungen der Axen des zu Grunde gelegten Kegelschnittes. Auch die acht noch übrigen Brennpunkte liegen deshalb im Unendlichen. Aber durch die Combination der unendlich fernen Brennpunkte mit den vier endlichen ergeben sich vier andere einhüllende

* Auch aus einem Kreise und einer beliebigen im Endlichen liegenden Geraden; vergl. Beispiel 2, S. 108.

Systeme, nämlich jedem entspricht ein endlicher und drei unendlich ferne Brennpunkte; die beiden Systeme, die so den reellen endlichen Brennpunkten entsprechen, müssen dabei conjugirt sein, ebenso die den imaginären Brennpunkten entsprechenden (vergl. den 2. Satz S. 29). Einem solchen Systeme gehören als ausschneidende Hyperbeln offenbar die Geraden durch den betreffenden endlichen Brennpunkt zu, als einhüllende Kegelschnitte aber die einfachen Tangenten des gegebenen Kegelschnittes (jede combinirt mit der unendlich fernen Geraden). Je zwei Tangenten, deren Berührungspunkte auf demselben Brennpunktsstrahle liegen, müssen demnach als parallelaxige Kegelschnitte gelten, die Curve ihres Schnittpunktes aber als Schnittpunktskreis; d. h. der Schnittpunktskreis eines solchen Systemes ist die Leitlinie des Grundkegelschnittes, die zu dem betreffenden endlichen Brennpunkte gehört (zusammen mit der unendlich fernen Geraden). Alles das lässt sich auch aus der Gl. 234) ableiten.

Im Allgemeinen gelten dann auch alle übrigen Sätze vom Systeme Σ, die im 1. Theile enthalten sind. So z. B. (vergl. S. 19, 20 und Anm. S. 27):

Irgend ein System entsprechender Punkte der Parabeln Σ hüllt eine circulare Curve dritter Ordnung Π ein, deren reelle Asymptote derjenigen der von Σ eingehüllten Curve parallel ist; und alle diese Curven hüllen die eben genannte ein, indem jede sie dreimal berührt. Ihre endlichen Doppelbrennpunkte erfüllen eine Parabel, deren Axe auf den erwähnten Asymptoten senkrecht steht, nämlich in der Mitte zwischen der Systemaxe von Σ und der des conjugirten Systemes Σ' liegt, also durch den endlichen Doppelbrennpunkt der eingehüllten Curve geht. Die auf dieselbe Weise dem Systeme Σ' zukommende Parabel ist mit jener confocal.

Um diese Verhältnisse näher zu untersuchen, so ist zunächst klar, dass sich entsprechende Durchmesser der Parabeln Σ in einem Punkte O der y-Axe (die jetzt der endliche Bestandtheil des Mittelpunktskreises ist) schneiden. Diesen Punkt nehmen wir wieder als Anfang eines Coordinatensystemes (x_0, y_0): Die y_0-Axe falle mit der y-Axe zusammen, die x_0-Axe sei parallel der x-Axe. Der Punkt O habe die Coordinaten $x=0$, $y=d$. Die Gleichung des durch O laufenden Durchmessers der Parabel 200) ist dann $x_0\sigma = y_0\varkappa$, während diese Parabel selbst jetzt

$$\begin{aligned}(x_0\sigma - y_0\varkappa)^2 - 2x_0(d\sigma + q\varkappa)\varkappa + 2y_0(d\varkappa - q\sigma)\varkappa + (\Gamma + d^2)\varkappa^2 \\ + 2(\Delta - qd)\varkappa\sigma + \mathrm{E}\sigma^2 = 0\end{aligned}$$

wird. Für den Schnittpunkt (Endpunkt des Durchmessers) erhält man demgemäss

$$\left(y_0 = \frac{\sigma}{\varkappa} x_0\right) \quad x_0 = \frac{(\Gamma + d^2)\varkappa^2 + 2(\Delta - qd)\varkappa\sigma + \mathrm{E}\sigma^2}{2q},$$

und also ist der Ort dieser Punkte, die Curve Π:

$$2qx_0(x_0^2 + y_0^2) - (\Gamma + d^2)x_0^2 - 2(\Delta - qd)x_0y_0 - \mathrm{E}y_0^2 = 0,$$

woraus man erkennt, dass O ein **Doppelpunkt** ist. Im ursprünglichen Coordinatensysteme x, y wird Π dargestellt durch:

$$236)\qquad \begin{gathered} 2qx(x^2+y^2)-(\Gamma+d^2)x^2-2(\Delta+qd)xy-\mathsf{E}y^2+2\Delta dx \\ +2\mathsf{E}dy-\mathsf{E}d^2=0. \end{gathered}$$

Ihr Doppelbrennpunkt ist $x=\frac{\Gamma-\mathsf{E}+d^2}{4q}$, $y=\frac{\Delta+qd}{2q}$; der Ort der Doppelbrennpunkte also $\left(y-\frac{\Delta}{2q}\right)^2=q\left(x-\frac{\Gamma-\mathsf{E}}{4q}\right)$, eine **Parabel**, deren Scheitel der Doppelbrennpunkt der **Scheitelcurve** [$d=0$, also der Curve $2qx(x^2+y^2)-\Gamma x^2-2\Delta xy-\mathsf{E}y^2=0$] ist, deren Axe mit der Mittelsenkrechten von EF' zusammenfällt, und deren Parameter gleich q (also halb so gross als der Parameter der Parabel $\varphi=0$) ist.

Die reelle Asymptote ist allen Curven Π gemeinsam: $x=\frac{\mathsf{E}}{2q}$, also die Gerade, die in der Mitte zwischen der y-Axe und der Parallele dazu durch G' liegt.

Den Kegelschnitt $\mathfrak{G}$, der die Berührungspunkte einer Curve Π ausschneidet, erhält man, wenn man die Gleichung von Π 236) nach d differenzirt:

$$237)\qquad dx^2+qxy-\Delta x-\mathsf{E}y+\mathsf{E}d=0.$$

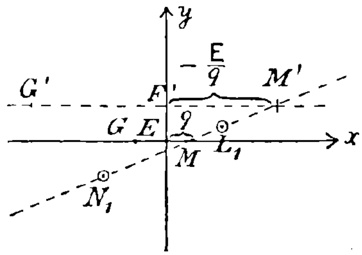
Dies ist stets eine **Hyperbel** durch O. Die beiden Asymptoten sind $x=\frac{\mathsf{E}}{q}$ (diese ist also **allen** Kegelschnitten des Büschels $\mathfrak{G}$ gemein: die Parallele durch G' zur y-Axe), und $dx+qy-\frac{\Delta q-\mathsf{E}d}{q}=0$ (diese geht stets durch M'). Die beiden aus der Gleichung des Büschels $\mathfrak{G}$ abzulesenden besonderen Hyperbeln sind für $d=0$: $\underline{qxy-\Delta x-\mathsf{E}y=0}$, eine gleichseitige Hyperbel; für $d=\infty$: $x=\pm\sqrt{-\mathsf{E}}$, d. i. die zerfallende Parabel des Systemes Σ. Zwei von den Grundpunkten fallen also ins Unendliche; die beiden anderen, L_1, N_1, sind

$$238)\qquad x=\pm\sqrt{-\mathsf{E}},\quad y=\frac{\Delta}{q\pm\sqrt{-\mathsf{E}}},$$

d. h. [s. 211)] die **Berührungspunkte** der beiden eben erwähnten Curventangenten $x=\pm\sqrt{-\mathsf{E}}$.

Man übersieht sofort, dass diese Punkte harmonisch zu M, M' und symmetrisch zum Schnitte von MM' mit der y-Axe liegen. Alles das stimmt mit den früheren Entwickelungen betreffs der allgemeinen bicircularen **Curven vierter Ordnung** überein. Die zu irgend einer Curve Π zugeordnete (d. h. dem conjugirten Durchmesser der Parabeln Σ entsprechende) Curve Π_1 muss jetzt stets die unendlich ferne Gerade enthalten; ihre endlichen Bestandtheile sind, wie man nun erkennt, eben die Tangenten $x=\pm\sqrt{-\mathsf{E}}$. So bleiben von den sechs Schnittpunkten von $\mathfrak{G}$ mit der eingehüllten Curve nur noch drei übrig (nachdem nämlich L_1, N_1 und der ins Unendliche fallende Schnittpunkt, die für Π_1 gelten, abgesondert sind), das sind die Berührungspunkte von Π mit der eingehüllten Curve. — Uebrigens gilt der letzte Satz S. 45 und der erste S. 46 unverändert auch hier.

Bei dem conjugirten Curvensysteme Π′ wird selbstverständlich das Mittelloth von EG als gemeinsame Asymptote erscheinen; ferner werden wieder L_1, N_1 Büschelpunkte von 𝔖′ sein, die gemeinsame Asymptote aller 𝔖′ mit der Parallele durch G zur y-Axe zusammenfallen und die andere stets durch M laufen.



Die Hauptsätze über die Systeme Σ lassen sich offenbar, da die Curve vier zur Asymptote parallele Tangenten hat, die sich demnach zu sechs Paaren anordnen, so ausdrücken:

Eine circulare Curve dritter Ordnung wird von zwölf Systemen dreimal berührender Parabeln eingehüllt; je zwei Systeme sind zu einander conjugirt, d. h. sie gehören so zusammen, dass ihnen die zerfallende, nämlich aus zwei zur reellen Asymptote der Curve parallelen Tangenten bestehende Parabel gemeinsam ist und entsprechende Tangenten der Parabeln des einen Systemes eine Parabel des anderen einhüllen. In jedem Systeme gehen die Axen aller Parabeln durch **einen** Punkt, die Berührungspunkte der Parabeln aber werden von einem Büschel gleichseitiger Hyperbeln bestimmt, dessen Grundpunkte **Brennpunkte** der eingehüllten Curve sind. Insbesondere werden in jedem Systempaare die Berührungspunkte der beiden genannten Tangenten von zwei Hyperbeln durch je vier Brennpunkte der Curve bestimmt; im Ganzen giebt es also zwölf solche gleichseitige Hyperbeln, von denen je sechs durch einen der vier Berührungspunkte der vier Tangenten laufen.

Eine circulare Curve dritter Ordnung, die von einem Parabelsysteme, das sich selbst conjugirt ist, eingehüllt wird, zerfällt nothwendig in einen Kreis und eine Gerade.

Vierter Abschnitt.

Beispiele von circularen Curven dritter Ordnung.

§ 1. Aufstellung der Bestimmungsgleichungen, wenn die Curve symmetrisch ist.

Ist die gegebene circulare Curve dritter Ordnung zur $\mathfrak{x}$-Axe symmetrisch, so erhält man aus 234) für die Unbekannten zunächst folgende zwei Gleichungen:

239) $$2u - \frac{\Delta}{q} = 0, \quad \frac{\Delta(E + q^2)}{q^2} = 0.$$

Die zweite ist erfüllt, wenn $\Delta = 0$, oder $\mathsf{E} = -q^2$, woraus dann auf Grund der ersten folgt: $u = 0$, bez. $u = \frac{\Delta}{2q}$.

Die Gleichung der Curve sei

240) $$2\mathfrak{x}(\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2) + \mathfrak{A}\mathfrak{x}^2 + 2\mathfrak{C}\mathfrak{x} + \mathfrak{E} = 0;$$

und man beachte, dass die übrigen Coefficienten in 234) sich wie folgt schreiben lassen:

$$\mathfrak{A} = \frac{2(\mathsf{E} - q^2) + (\mathsf{E} - \Gamma - q^2)}{q},$$

241) $$2\mathfrak{C} = \frac{2(\mathsf{E} - q^2)(\mathsf{E} - \Gamma - q^2) + (\mathsf{E} + q^2)^2}{2q^2} + 2u\left(u - \frac{\Delta}{q}\right),$$

$$\mathfrak{E} = \frac{(\mathsf{E} + q^2)^2(\mathsf{E} - \Gamma - q^2)}{4q^3} + \frac{\Delta}{q}\left(\Delta - \frac{\mathsf{E} + q^2}{q}u\right).$$

Im ersten Falle nun ($\Delta = 0$, $u = 0$) führe man statt q, Γ, E die neuen Unbekannten ε, γ, v ein vermöge der Gleichungen:

242) $$\frac{\mathsf{E} - q^2}{\mathsf{E} + q^2} = \varepsilon, \quad \frac{\mathsf{E} - \Gamma - q^2}{\mathsf{E} + q^2} = \gamma, \quad \frac{\mathsf{E} + q^2}{2q} = v,$$

so dass rückwärts die Beziehungen

243) $$q = v(1 - \varepsilon), \quad \mathsf{E} = v^2(1 - \varepsilon^2), \quad \Gamma = 2v^2(1 - \varepsilon)(\varepsilon - \gamma)$$

stattfinden. Dann gestalten sich die Bedingungen 241) folgendermassen:

244) $$\begin{aligned} v(2\varepsilon + \gamma) &= \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}, \\ v^2(2\varepsilon\gamma + 1) &= \mathfrak{C}, \\ v^3\gamma &= \tfrac{1}{2}\mathfrak{E}. \end{aligned}$$

Setzt man aus der dritten dieser Gleichungen den Werth von γ in die beiden ersten und entfernt darauf aus diesen ε, so bleibt folgende Gleichung für $v^2 = \Upsilon$:

245) $$4\Upsilon^3 - 4\Upsilon^2\mathfrak{C} + \Upsilon\mathfrak{A}\mathfrak{E} - \mathfrak{E}^2 = 0;$$

das Weitere wird bestimmt durch die Gleichungen

246) $$v = \pm\sqrt{\Upsilon}, \quad \gamma = \frac{\mathfrak{E}}{2v^3}, \quad \varepsilon = \frac{v}{\mathfrak{E}}(\mathfrak{C} - \Upsilon) = \frac{1}{4v}\left(\mathfrak{A} - \frac{\mathfrak{E}}{\Upsilon}\right);$$

oder nach 243):

247) $$\begin{aligned} \mathsf{E} &= \Upsilon - \left(\frac{\Upsilon(\Upsilon - \mathfrak{C})}{\mathfrak{E}}\right)^2 = \Upsilon - \left[\tfrac{1}{4}\left(\mathfrak{A} - \frac{\mathfrak{E}}{\Upsilon}\right)\right]^2, \\ q &= v + \frac{\Upsilon(\Upsilon - \mathfrak{C})}{\mathfrak{E}} = v - \tfrac{1}{4}\left(\mathfrak{A} - \frac{\mathfrak{E}}{\Upsilon}\right), \\ \Gamma &= \frac{q}{2}\left(\mathfrak{A} - \frac{3\mathfrak{E}}{\Upsilon}\right), \quad v = \pm\sqrt{\Upsilon}; \quad \Delta = 0, \ u = 0. \end{aligned}$$

Zwei conjugirte Systeme sind dabei solche, die den Werth von Υ gemeinsam haben, die sich also nur durch das Vorzeichen von v unterscheiden.

Im zweiten Falle $\left(\mathsf{E} + q^2 = 0, \ u = \frac{\Delta}{2q}\right)$ setze man

248) $$2q + \frac{\Gamma}{q} = l;$$

dann werden die Bestimmungsgleichungen

249) $$-4q - l = \mathfrak{A}, \quad ql - u^2 = \mathfrak{C}, \quad 4qu^2 = \mathfrak{E}.$$

Aus ihnen ergiebt sich die Gleichung für l:

250) $$l^3 + 2l^2\mathfrak{A} + (\mathfrak{A}^2 + 4\mathfrak{C})l + 4(\mathfrak{A}\mathfrak{E} - \mathfrak{G}) = 0.$$

Dabei ist nach 248), 249):

251) $$q = -\frac{(l+\mathfrak{A})}{4},\quad \Gamma = q(l-2q),$$
$$u = \pm\sqrt{ql - \mathfrak{E}} = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\mathfrak{G}}{q}};\quad \Delta = 2qu,\quad \mathrm{E} = -q^2.$$

§ 2. Erstes Beispiel: Die verallgemeinerte Kissoide.

Auf der $\mathfrak{x}$-Axe liege der Mittelpunkt eines Kreises (Halbmesser r) im Abstande e vom Coordinatenanfange. Vom Punkte $\mathfrak{x} = e + r$, $\mathfrak{y} = 0$ mögen die Radienvectoren nach dem Kreise und der Geraden gezogen und auf jedem das Stück von jenem bis zu dieser mit Berücksichtigung der Richtung vom genannten Polpunkte aus abgetragen werden. Die so bestimmten Endpunkte bilden eine circulare Curve dritter Ordnung, die den Pol zum Doppelpunkte hat und im Falle $e = r$ in die gewöhnliche Kissoide übergeht, im Falle $e = -r$ aber aus der $\mathfrak{y}$-Axe und dem Spiegelbilde des Kreises mit Beziehung auf sie besteht. Sobald $e < -r$ ist, kommt die Construction offenbar darauf hinaus, die Kreissehne jedes Vectors auf diesem von seinem Schnittpunkte mit der $\mathfrak{y}$-Axe aus nach der Seite der positiven $\mathfrak{x}$-Axe abzutragen.

Es sind also die Fälle $e > r$, $e = r$, $r > e > -r$, $e = -r$, $e < -r$ zu unterscheiden. Im ersten und letzten ist der Doppelpunkt isolirt, im dritten hat die Curve eine Schleife; vergl. Taf. IV Fig. 20.

Mit Hilfe des Verfahrens S. 15 findet man für die Axenbrennpunkte der Curve, deren Gleichung

252) $$\mathfrak{x}(\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2) - 2\mathfrak{x}^2(e+2r) + \mathfrak{x}(e+r)(e+5r) - 2r(e+r)^2 = 0$$

ist, folgende Abscissen:

253) $$\mathfrak{x}_{1,2} = -(e+r) \pm 2\sqrt{2r(e+r)},\quad \mathfrak{x}_3 = \mathfrak{x}_4 = e + r,$$

so dass also, wie es selbstverständlich ist, vier Brennpunkte im Doppelpunkte liegen. Die $\mathfrak{y}$-Axe ist zugleich die reelle Asymptote der Curve, da in der Gl. 252) das Glied mit $\mathfrak{y}^2$ fehlt [s. 196)].* Der endliche Doppelbrennpunkt hat [s. 194), 197)] die Coordinaten

254) $$\mathfrak{x} = e + 2r,\quad \mathfrak{y} = 0.$$

Die Axenbrennpunkte, die nicht im Doppelpunkte liegen, sind nach 253) nur so lange reell, als $e > -r$, ist; wenn $e = -r$, fallen sie mit jenem zusammen, wenn $e < -r$, sind sie imaginär, dafür aber dann ihre Antipunkte

255) $$\mathfrak{x} = -(e+r),\quad \mathfrak{y} = \pm 2\sqrt{2r(-e-r)}$$

reell.

* Unter den drei Brennpunktskreisen (von der $\mathfrak{x}$-Axe abgesehen) sind zwei zusammenfallende, also Nullkreise, nämlich im Doppelpunkte der Curve; der dritte ist der Kreis durch den Doppelpunkt, dessen Mittelpunkt der Scheitel der Curve $\mathfrak{x} = 2r$ ist; er schneidet sie selbstverständlich in den Berührungspunkten der Tangenten, die von dem Scheitel an die Curve gehen.

Jedenfalls müssen unter den zwei Systempaaren, die von den Gleichungen 245), 246), 247) geliefert werden, zwei zusammenfallen, und dieses Doppelpaar wird nur, so lange $e > -r$ ist, reell sein, wogegen das dritte Systempaar stets reell ist. Dieses bezeichnen wir durch Σ, Σ', jenes durch Σ_1 Σ'_1 $(\equiv \Sigma_2, \Sigma'_2)$.

Es ist jetzt (s. S. 104) nach 252)

$$\mathfrak{A} = -4(e+2r), \quad \mathfrak{C} = (e+r)(e+5r), \quad \mathfrak{E} = -4r(e+r)^2.$$

Also folgt für Υ nach Massgabe von 245):

$$\Upsilon^3 - \Upsilon^2(e+r)(e+5r) + 4\Upsilon r(e+r)^2(e+2r) - 4r^2(e+r)^4 = 0$$

oder

$$(\Upsilon - (e+r)^2)(\Upsilon - 2r(e+r))^2 = 0,$$

d. h.

$$\Upsilon = (e+r)^2, \quad \Upsilon_1 (\equiv \Upsilon_2) = 2r(e+r).$$

Für das Systempaar Σ, Σ' erhält man demgemäss nach 246), 247) folgende Constanten:

Σ:	Σ':
$v = -(e+r)$,	$v' = (e+r)$,
$\gamma = \frac{2r}{e+r}$, $\varepsilon = 1$,	$\gamma' = -\frac{2r}{e+r}$, $\varepsilon' = -1$,
$q = 0$,	$q' = 2(e+r)$,
$\Gamma = 0$, $\mathsf{E} = 0$;	$\Gamma' = 4(r^2 - e^2)$, $\mathsf{E}' = 0$,

so dass beide Systeme [vergl. 235), 215), 208), 209), 218)] durch folgende Uebersicht vollständig dargestellt werden:*

256)

Σ:	Σ':
$q = 0$, $\Gamma = \Delta = \mathsf{E} = 0$,	$q' = 2(e+r)$, $\Gamma' = 4(r^2 - e^2)$, $\Delta' = \mathsf{E}' = 0$,
$\mathfrak{x}_E = e+r$, $\mathfrak{x}_M = \mathfrak{x}_G = e+r$;	$\mathfrak{x}_E' = e+r$, $\mathfrak{x}_M' = 3(e+r)$, $\mathfrak{x}_G' = -(e+r)$;
$s = 0$, $t = (r-e)\varkappa - (r+e)\frac{\sigma^2}{\varkappa}$, $p = 0$;	$s' = 2\sqrt{2e(e+r)}$, $t' = (r-e)\varkappa$ (nur für $\varkappa = 0$ unbestimmt), $p' = 2(e+r)\varkappa$;
Axenbrennpunkte: $\begin{cases} \mathfrak{x} = e+r, \\ \mathfrak{x} = e+r. \end{cases}$	$\{\mathfrak{x} = -(e+r) \mp 2\sqrt{2r(e+r)}$.

Der zerfallende Kegelschnitt ist in beiden Systemen die doppelt gezählte zur $\mathfrak{y}$-Axe parallele Gerade durch den Doppelpunkt. Σ besteht aus den doppelt gezählten Geraden durch diesen; die Scheitel der Parabeln Σ' liegen auf dem Kreise, der die Strecke vom Doppelpunkte bis zum Schnitte der Curve mit der $\mathfrak{x}$-Axe (d. h. bis zu ihrem Scheitel) zum Durchmesser hat.

* Man muss hierbei beachten, dass zufolge 243) $\frac{\mathsf{E}}{q} = v(1+\varepsilon)$, $\frac{\Gamma}{q} = 2v(\varepsilon - \gamma)$ ist.

Genau ebenso ergiebt sich für das Doppelpaar Σ_1, Σ'_1:*

	Σ_1:	Σ'_1:
	$v = -\sqrt{2r(e+r)}$,	$v' = +\sqrt{2r(e+r)}$,
	$\gamma = \frac{e+r}{\sqrt{2r(e+r)}}$, $\varepsilon = \frac{e+3r}{2\sqrt{2r(e+r)}}$;	$\gamma' = -\frac{e+r}{\sqrt{2r(e+r)}}$, $\varepsilon' = -\frac{e+3r}{2\sqrt{2r(e+r)}}$;
	$q = \frac{e+3r}{2} - \sqrt{2r(e+r)}$;	$q' = \frac{e+3r}{2} + \sqrt{2r(e+r)}$;
	$\Gamma = (e-r)\left(\frac{e+3r}{2} - \sqrt{2r(e+r)}\right)$,	$\Gamma' = (e-r)\left(\frac{e+3r}{2} + \sqrt{2r(e+r)}\right)$,
257)	$\Delta = 0$, $\mathrm{E} = -\left(\frac{e-r}{2}\right)^2$;	$\Delta' = 0$, $\mathrm{E}' = -\left(\frac{e-r}{2}\right)^2$,
	$\mathfrak{x}_E = \frac{e+3r}{2}$,	$\mathfrak{x}_{E'} = \frac{e+3r}{2}$,
	$\mathfrak{x}_M = e+3r-\sqrt{2r(e+r)}$,	$\mathfrak{x}_{M'} = e+3r+\sqrt{2r(e+r)}$,
	$\mathfrak{x}_G = \sqrt{2r(e+r)}$;	$\mathfrak{x}_{G'} = -\sqrt{2r(e+r)}$;
	$s = \sqrt{2rq}$, $t = \frac{e-r}{2}\varkappa - \frac{q'}{2}\cdot\frac{\sigma^2}{\varkappa}$,	$s' = \sqrt{2rq'}$, $t' = \frac{e-r}{2}\varkappa - \frac{q}{2}\cdot\frac{\sigma^2}{\varkappa}$,
	$p = q\varkappa$;	$p' = q'\varkappa$,
	$\begin{cases}\mathfrak{x} = e+r,\\ \mathfrak{x} = -(e+r)+2\sqrt{2r(e+r)}.\end{cases}$	$\begin{cases}\mathfrak{x} = e+r,\\ \mathfrak{x} = -(e+r)-2\sqrt{2r(e+r)}.\end{cases}$

Der zerfallende Kegelschnitt besteht aus den beiden der $\mathfrak{y}$-Axe parallelen Geraden durch den Doppelpunkt und den Scheitel der Curve. Alle Parabeln (und mithin auch der Schnittpunktskreis) sowohl bei Σ_1 als bei Σ'_1 laufen durch den Doppelpunkt, so dass nur zwei eigentliche Berührungspunkte für jede übrig bleiben. Beide Systeme sind imaginär, sobald $e < -r$ ist, wie zu erwarten war (nur die zerfallende Parabel ist alsdann reell).

Für die bekannteste dieser Curven, nämlich die Kissoide, ist $e = r$, so dass hier Σ_1 mit Σ zusammenfällt (Geradenbüschel durch die Spitze!), ebenso Σ'_1 mit Σ'. Drei Axenbrennpunkte liegen in der Spitze, der vierte bei $\mathfrak{x} = -6r$. Die Systeme Σ und Σ' sind dann wie folgt bestimmt:

	Σ:	Σ':
	$q = 0$, $\Gamma = \Delta = \mathrm{E} = 0$,	$q' = 4r$, $\Gamma' = \Delta' = \mathrm{E}' = 0$,
	$\mathfrak{x}_E = \mathfrak{x}_M = \mathfrak{x}_G = 2r$,	$\mathfrak{x}_{E'} = 2r$, $\mathfrak{x}_{M'} = 6r$, $\mathfrak{x}_{G'} = -2r$,
258)	$s = 0$, $t = -2r\frac{\sigma^2}{\varkappa}$, $p = 0$,	$s' = 4r$, $t' = 0$, $p' = 4r\varkappa$,
	$\begin{cases}\mathfrak{x} = 2r,\\ \mathfrak{x} = 2r.\end{cases}$	$\begin{cases}\mathfrak{x} = 2r,\\ \mathfrak{x} = -6r.\end{cases}$

* Die Werthe von s, s', t, t' ergeben sich leicht aus den Beziehungen $\mathrm{E} = \mathrm{E}' = -qq'$, $\Gamma = (e-r)q$, $\Gamma' = (e-r)q'$.

Σ besteht also aus Parabeln mit gemeinsamem Scheitel. Die Gleichung der Curve ist dabei

259) $$\mathfrak{x}(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2)-6r\mathfrak{x}^2+12r^2\mathfrak{x}-8r^3=0.$$

Im allgemeinen Falle ist die Gleichung (s. das System Σ) $t=(r-e)\varkappa-(r+e)\frac{\sigma^2}{\varkappa}$ nichts Anderes, als die Gleichung der Curve in Polarcoordinaten.

§ 3. Zweites Beispiel: Kreis und Gerade.

Die Gleichungen, die dieses Beispiel betreffen, können zwar auch durch Grenzübergang aus denen des vierten Beispieles S. 75 flg. abgeleitet werden, doch ist gegenwärtig die Anwendung der Gl. 245) bis 251) vorzuziehen. Die Schnittpunkte der Geraden — die wir zur $\mathfrak{y}$-Axe nehmen — mit dem Kreise, dessen Mittelpunkt auf der positiven $\mathfrak{x}$-Axe liege, sind wieder vierfache Brennpunkte, ebenso ihre Antipunkte. Der Halbmesser des Kreises sei r, die Abscisse seines Mittelpunktes $e(\geqq 0)$. Ist $e>r$, so sind die reellen Brennpunkte $\mathfrak{y}=0$, $\mathfrak{x}=\pm\sqrt{e^2-r^2}$, wenn $e<r$ ist: $\mathfrak{x}=0$, $\mathfrak{y}=\pm\sqrt{r^2-e^2}$. Der endliche Doppelbrennpunkt ist der Mittelpunkt des Kreises.

Die Gleichung der Curve ist

260) $$\mathfrak{x}(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2)-2e\mathfrak{x}^2+(e^2-r^2)\mathfrak{x}=0,$$

so dass
$$\mathfrak{A}=-4e,\quad \mathfrak{C}=e^2-r^2,\quad \mathfrak{E}=0$$
gesetzt werden muss. Hiernach werden Gl. 245) und Gl. 250):
$$\Upsilon^3-\Upsilon^2(e^2-r^2)=0,\quad l^3-8l^2e+4l(5e^2-r^2)-16e(e^2-r^2)=0$$
oder
$$\Upsilon^2(\Upsilon-(e^2-r^2))=0,\quad (l-4e)((l-2e)^2-4r^2)=0,$$
und haben die Wurzeln
$$\Upsilon^2=0,\quad \Upsilon=e^2-r^2;\qquad l=2(e\mp r),\quad l=4e.$$

Die ersten beiden Wurzeln hier und dort geben die beiden Systeme, die sich selbst conjugirt sind; die dritte giebt links ein Systempaar, das den Axenbrennpunkten, rechts eines, das den Schnittpunkten des Kreises mit der Geraden als Brennpunkten entspricht. Wir bezeichnen wieder das erste mit Σ $(\equiv\Sigma')$, das zweite mit Σ_1 $(\equiv\Sigma'_1)$, das dritte links mit Σ_2, Σ'_2. Für Σ und Σ_1 erhält man links nach 246) $\varepsilon=\infty$, $\gamma=\infty$, also wenn man $\lim\varepsilon v=f$, $\lim\gamma v=g$ setzt, aus 244): $2f+g=-2e$, $2fg=e^2-r^2$, und dabei $q=-f$, $\Gamma=2f(g-f)$, $\mathrm{E}=-f^2$ nach 243). Zunächst berechnet man f, g: $f=-\frac{r+e}{2}$, $g=r-e$ für Σ, $f=\frac{r-e}{2}$, $g=-(r+e)$ für Σ_1. Auf diese Weise gewinnt man für Σ und Σ_1 folgende Werthe der Constanten:

$$\Sigma:\quad q=\frac{e+r}{2},\quad \Gamma=\frac{e+r}{2}(e-3r),\quad \Delta=0,\quad \mathrm{E}=-\left(\frac{r+e}{2}\right)^2,$$

261) $$\mathfrak{x}_E=\frac{e+r}{2},\quad \mathfrak{x}_M=e+r,\quad \mathfrak{x}_G=0;$$

$$s=\sqrt{2r(r+e)},\quad t=\frac{e-3r}{2}\varkappa-\frac{e+r}{4}\cdot\frac{\sigma^2}{\varkappa},\quad p=\frac{e+r}{2}\varkappa.$$

Axenbrennpunkte: $\mathfrak{x}=\pm\sqrt{e^2-r^2}$;

$$\Sigma_1:\quad q=\frac{e-r}{2},\ \Gamma=\frac{e-r}{2}(e+3r),\quad \Delta=0,\quad \mathsf{E}=-\left(\frac{r-e}{2}\right)^2,$$

262)
$$\mathfrak{x}_E=\frac{e-r}{2},\ \mathfrak{x}_M=e-r,\quad \mathfrak{x}_G=0;$$
$$s=\sqrt{2r(r-e)},\quad t=\frac{e+3r}{2}\varkappa-\frac{e-r}{4}\cdot\frac{\sigma^2}{\varkappa},\quad p=\frac{e-r}{2}\varkappa.$$

Axenbrennpunkte: $\mathfrak{x}=\pm\sqrt{e^2-r^2}$.

Alle Parabeln von Σ und Σ_1 gehen durch die Schnittpunkte des Kreises und der Geraden. Bei Σ_1 wird der Kreis durch alle Parabeln von aussen berührt, bei Σ einschliessend, vorausgesetzt, dass $e>r$. Die zerfallende Parabel besteht aus der $\mathfrak{y}$-Axe und der dazu parallelen Kreistangente im Punkte $\mathfrak{x}=e+r$ bei Σ, bez. $\mathfrak{x}=e-r$ bei Σ_1. Der Schnittpunktskreis von Σ ist stets reell, der von Σ_1 nur dann, wenn $r>e$. — Genau dieselben Formeln 261), 262) folgen auch aus 251) vermittelst $l=2(e\mp r)$. — Im Uebrigen lässt sich Alles hierher übertragen, was S. 79—81 gesagt wurde.

Wir kommen nun zum Systempaare Σ_2, Σ'_2: $\Upsilon=e^2-r^2$, $v=\mp\sqrt{e^2-r^2}$. Aus 246) zieht man $\gamma=0$, $\varepsilon=\pm\frac{e}{\sqrt{e^2-r^2}}$, also nach 247), 235) u. s. w.:

	Σ_2:	Σ'_2:
263)	$q=e-\sqrt{e^2-r^2}$,	$q'=e+\sqrt{e^2-r^2}$,
	$\Gamma=-2e\left(e-\sqrt{e^2-r^2}\right)$,	$\Gamma'=-2e\left(e+\sqrt{e^2-r^2}\right)$,
	$\Delta=0,\quad \mathsf{E}=-r^2$,	$\Delta'=0,\quad \mathsf{E}'=-r^2$,
	$\mathfrak{x}_E=e,\quad \mathfrak{x}_M=2e-\sqrt{e^2-r^2}$,	$\mathfrak{x}_E'=e,\quad \mathfrak{x}_M'=2e+\sqrt{e^2-r^2}$,
	$\mathfrak{x}_G=\sqrt{e^2-r^2}$,	$\mathfrak{x}_G'=-\sqrt{e^2-r^2}$,
	$s=2\sqrt{e\left(e-\sqrt{e^2-r^2}\right)}$,	$s'=2\sqrt{e\left(e+\sqrt{e^2-r^2}\right)}$,
	$t=-e\varkappa-\frac{q'}{2}\cdot\frac{\sigma^2}{\varkappa},\quad p=q\varkappa.$	$t'=-e\varkappa-\frac{q}{2}\cdot\frac{\sigma^2}{\varkappa},\quad p'=q'\varkappa.$
	Brennpunkte: $\begin{cases}\mathfrak{x}=\sqrt{e^2-r^2}\\ \mathfrak{x}=\sqrt{e^2-r^2}\end{cases},\ \mathfrak{y}=0.$	$\begin{cases}\mathfrak{x}=-\sqrt{e^2-r^2}\\ \mathfrak{x}=-\sqrt{e^2-r^2}\end{cases},\quad \mathfrak{y}=0.$

Während jede Parabel der Systeme Σ und Σ_1 die Gerade gar nicht und den Kreis an einer Stelle berührt, berühren die Parabeln von Σ_2, Σ'_2 die Gerade an einer, den Kreis an zwei Stellen. Die Hyperbeln, die die Berührungspunkte ausschneiden, zerfallen. Die Schnittpunktskreise gehen durch die Schnittpunkte der Geraden und des Kreises. Die zerfallende Parabel besteht aus den beiden zur Geraden parallelen Kreistangenten. Die Parabeln Σ_2 haben ausnahmslos reelle, die Σ'_2 aber zum Theile imaginäre Berührungspunkte mit dem Kreise, wenn $e>r$. Im letzteren Systeme giebt es daher zwei reelle hyperosculirende Parabeln; ihre Berührungspunkte (Scheitel) ergeben sich als Berührungspunkte der Tangenten, die vom Brennpunkte $\mathfrak{x}=-\sqrt{e^2-r^2}$ an den Kreis gezogen werden können.

Wenn $e < r$ ist, sind beide Systeme imaginär.

Zum Schlusse möge noch gezeigt werden, wie sich die beiden Systeme von Parabeln ergeben, die aus den Geraden durch den einen oder anderen Schnittpunkt des Kreises mit der Geraden bestehen. Nimmt man nämlich die Wurzel $l = 4e$ (S. 108), so erhält man unmittelbar aus 251) $q = 0$, $u = \pm\sqrt{r^2 - e^2}$, denn es ist $\mathfrak{A} = -4e$, $\mathfrak{C} = -(r^2 - e^2)$. Die beiden Systeme sind symmetrisch zu einander mit Beziehung auf die $\mathfrak{x}$-Axe, weshalb wir nur das eine, das dem auf der positiven $\mathfrak{y}$-Axe liegenden Schnittpunkte entspricht $\left(u = +\sqrt{r^2 - e^2}\right)$, weiter verfolgen. Man erhält zwar $\Gamma = \Delta = 0$, aber $\frac{\Gamma}{q} = l = 4e$, $\frac{\Delta}{q} = 2u = 2\sqrt{r^2 - e^2}$; demnach ist das System folgendermassen analytisch ausgedrückt:

$$264)\quad \begin{cases} q = 0, \quad \Gamma = \Delta = \mathrm{E} = 0; \\ \mathfrak{x}_E = \mathfrak{x}_M = \mathfrak{x}_G = 0, \quad \mathfrak{y}_E = \mathfrak{y}_M = \mathfrak{y}_G = \sqrt{r^2 - e^2}; \\ s = 0, \; t = 2\left(e\varkappa + \sqrt{r^2 - e^2}\,\sigma\right) \text{ (nur für } \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ unbestimmt)}, \; p = 0; \\ \text{Brennpunkte: } \mathfrak{x} = 0, \quad \mathfrak{y} = \sqrt{r^2 - e^2}. \end{cases}$$

Dabei ist φ von der geraden Linie durch den Schnittpunkt $\mathfrak{y} = \sqrt{r^2 - e^2}$, die der negativen $\mathfrak{x}$-Axe parallel ist, aus gerechnet.

Alles, was über das Beispiel S. 75 flgg. und hier über das Beispiel 2 entwickelt worden ist, lässt sich hinterher ohne Mühe auch rein synthetisch beweisen.

Schlussbemerkung.

Von den Sätzen, die sich durch Uebertragung des ersten Abschnittes dieser Abhandlung auf die allgemeinen Curven vierter Ordnung vom Geschlechte 1 ergeben, sind namentlich die über die Doppeltangenten von Interesse.

Gegeben sei eine Curve vierter Ordnung $\mathfrak{C}$ vom Geschlechte 1. Dann giebt es vier Kegelschnitte, die durch die beiden Doppelpunkte und je vier von den 16 gegenseitigen Schnittpunkten S der Tangenten laufen, die sich von den Doppelpunkten an die Curve legen lassen. Die Pole der Verbindungsgeraden d der Doppelpunkte mit Beziehung auf diese vier Kegelschnitte seien P_1, P_2, P_3, P_4. Die je zwei Tangenten an die Curve in den Doppelpunkten selbst haben vier gegenseitige Schnittpunkte; verbindet man diese kreuzweise mit einander durch gerade Linien, so ergiebt sich als Schnitt beider ein neuer Punkt D. Dann gelten folgende Sätze für die Doppeltangenten der Curve $\mathfrak{C}$:

I. Von den 28 gegenseitigen Schnittpunkten der acht Doppeltangenten fallen vier mit P_1, P_2, P_3, P_4 zusammen; die übrigen 24 liegen zu je vier auf sechs Kegelschnitten, die sich gegenseitig in den Doppelpunkten berühren. Der gemeinsame Pol der Verbindungsgeraden d der Doppelpunkte mit Beziehung auf diese sechs Kegelschnitte fällt mit D zusammen. (Die Schnittpunkte irgend eines Doppeltangentenpaares mit d liegen harmonisch zu den Punkten, in welchen die Geraden, deren Schnittpunkt D ist, d treffen.)

II. Es giebt 24 Kegelschnitte, von denen jeder durch die Berührungspunkte eines Doppeltangentenpaares und noch durch vier von den Schnittpunkten S hindurchgeht. Jeder Punkt S liegt auf sechs, jeder Doppeltangentenberührungspunkt ebenfalls auf sechs von diesen 24 Kegelschnitten.

Leipzig, im September 1889.

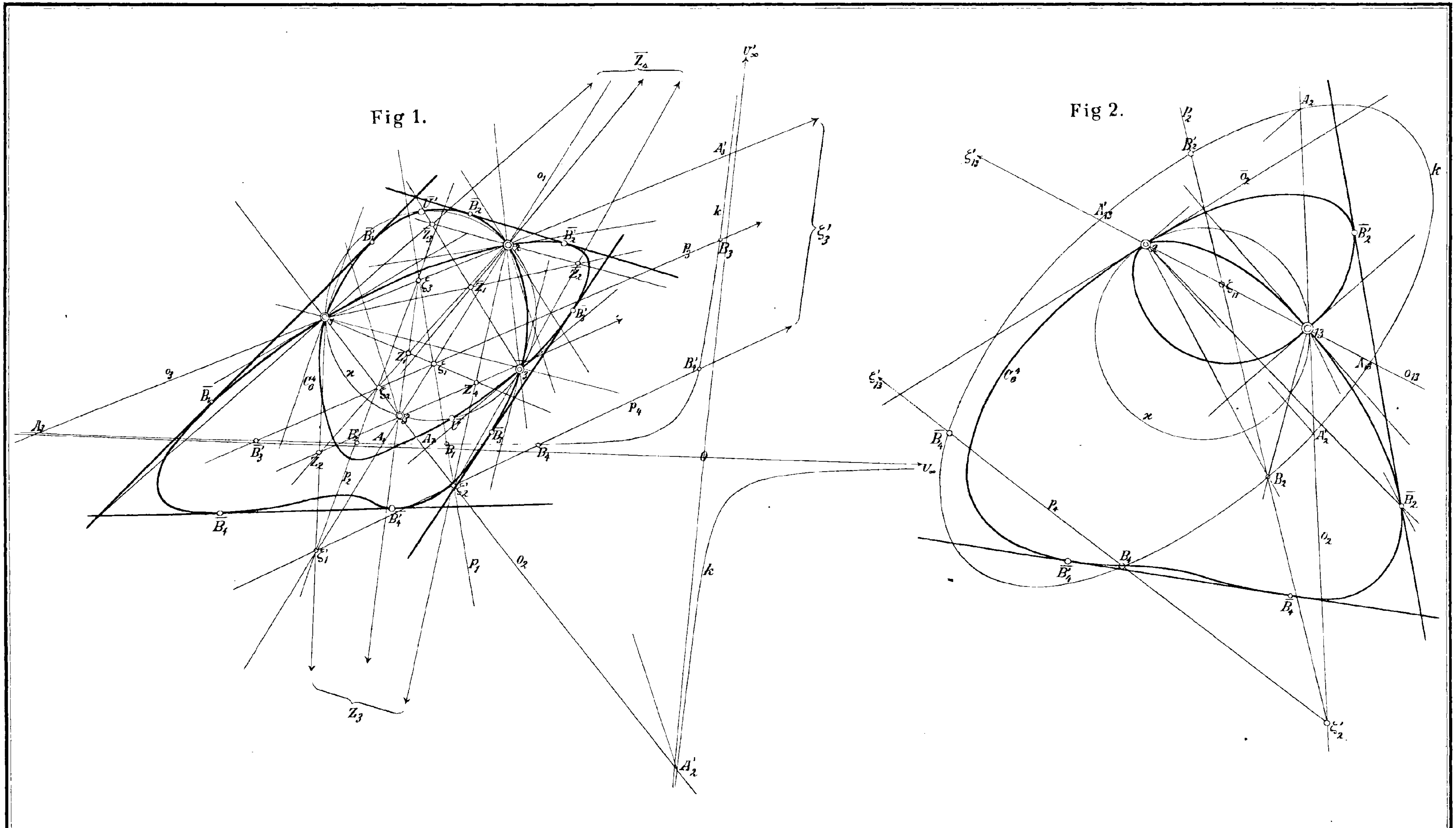


Fig 1. Fig 2.

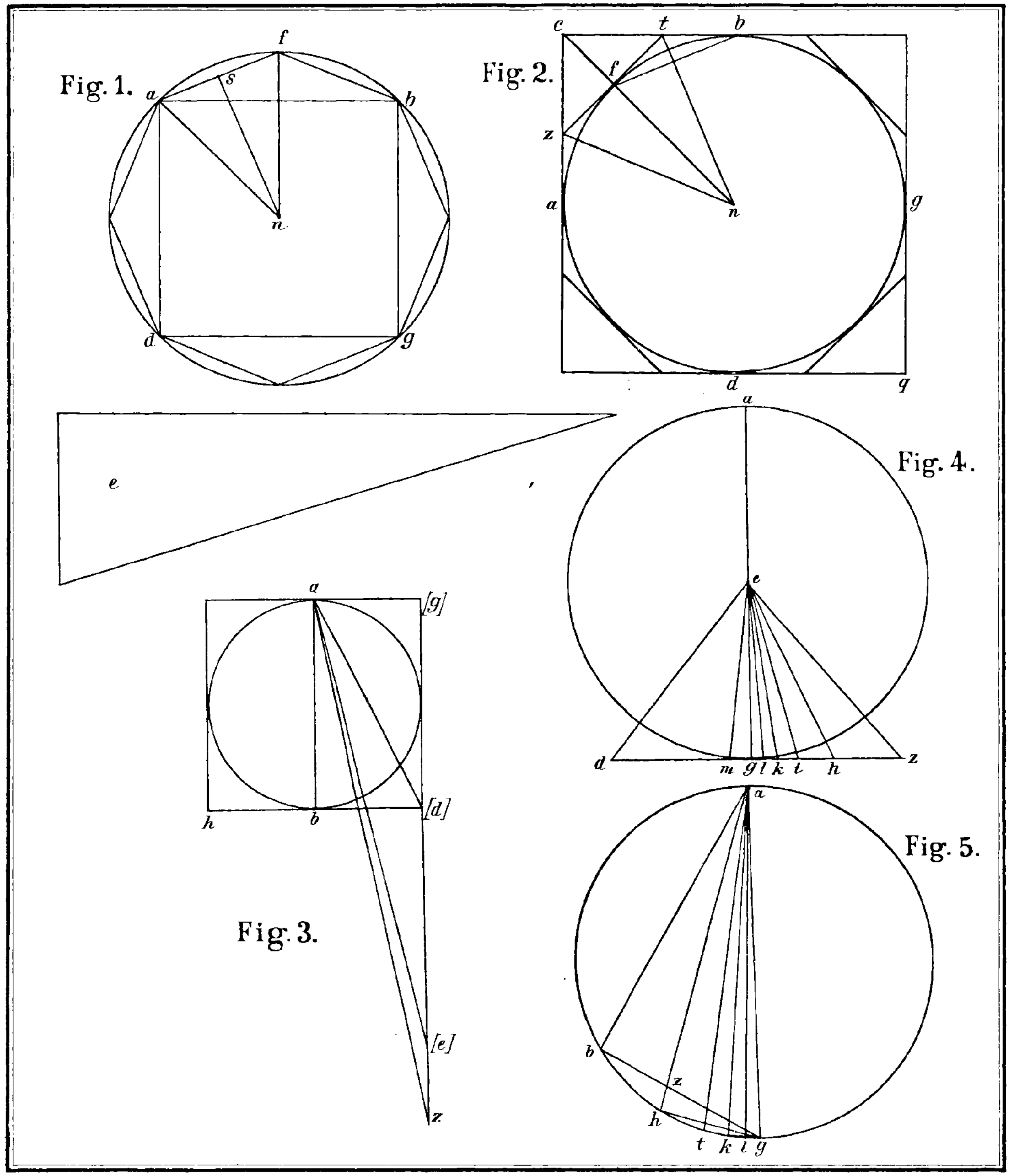


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.

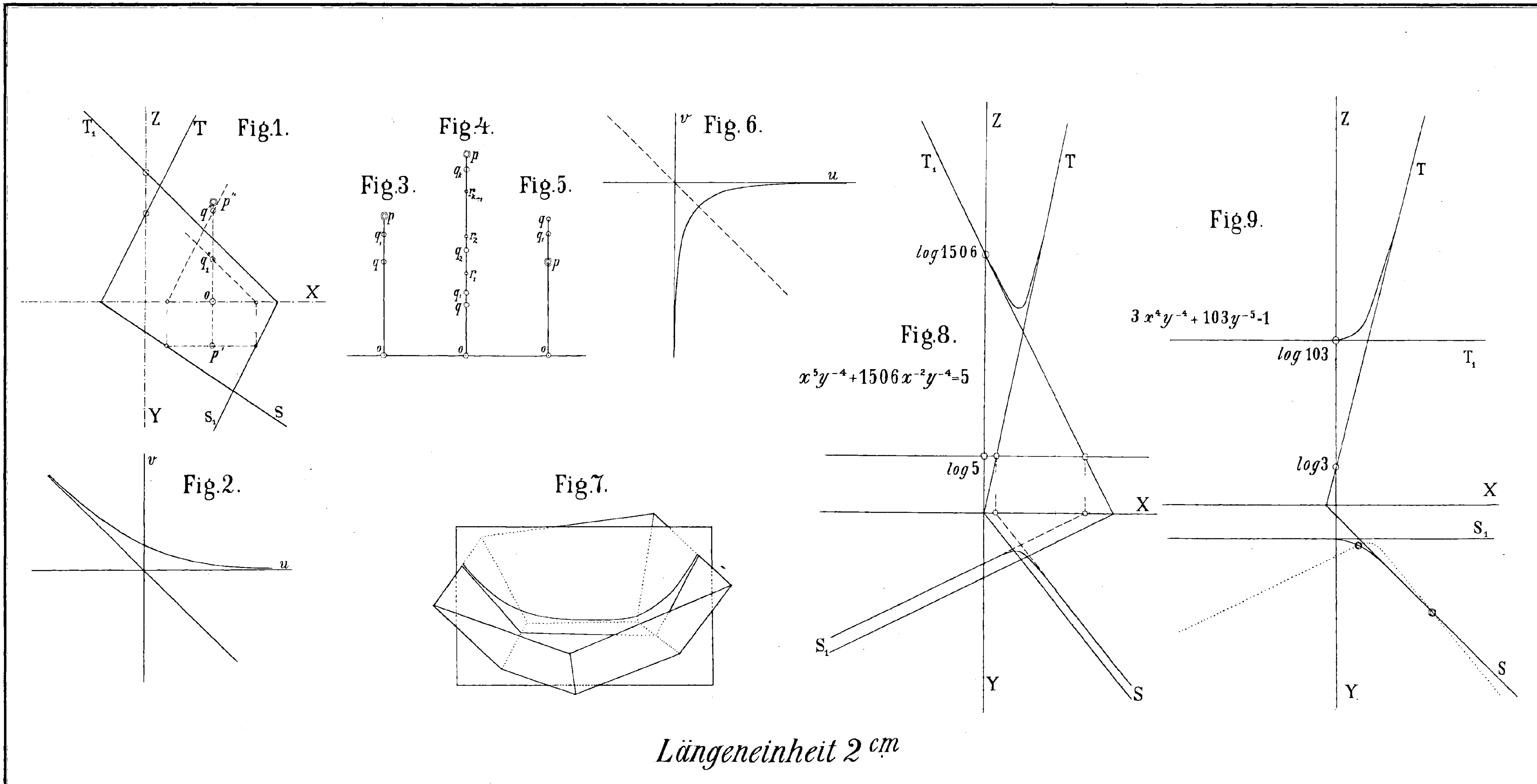


Fig.1.
T_1 Z T X Y S_1 S
p'' q q_1 o p'
Fig.2.
v u
Fig.3.
p q_1 q o
Fig.4.
p q_k r_{k-1} r_2 q_2 r_1 q_1 q o
Fig.5.
q q_1 p o
Fig. 6.
v u
Fig.7.
Fig.8.
$x^5y^{-4}+1506x^{-2}y^{-4}=5$
log 1506
log 5
Z T_1 T X Y S_1 S
Fig.9.
$3x^4y^{-4}+103y^{-5}=1$
log 103
log 3
Z T T_1 X S_1 Y S
Längeneinheit 2 cm.

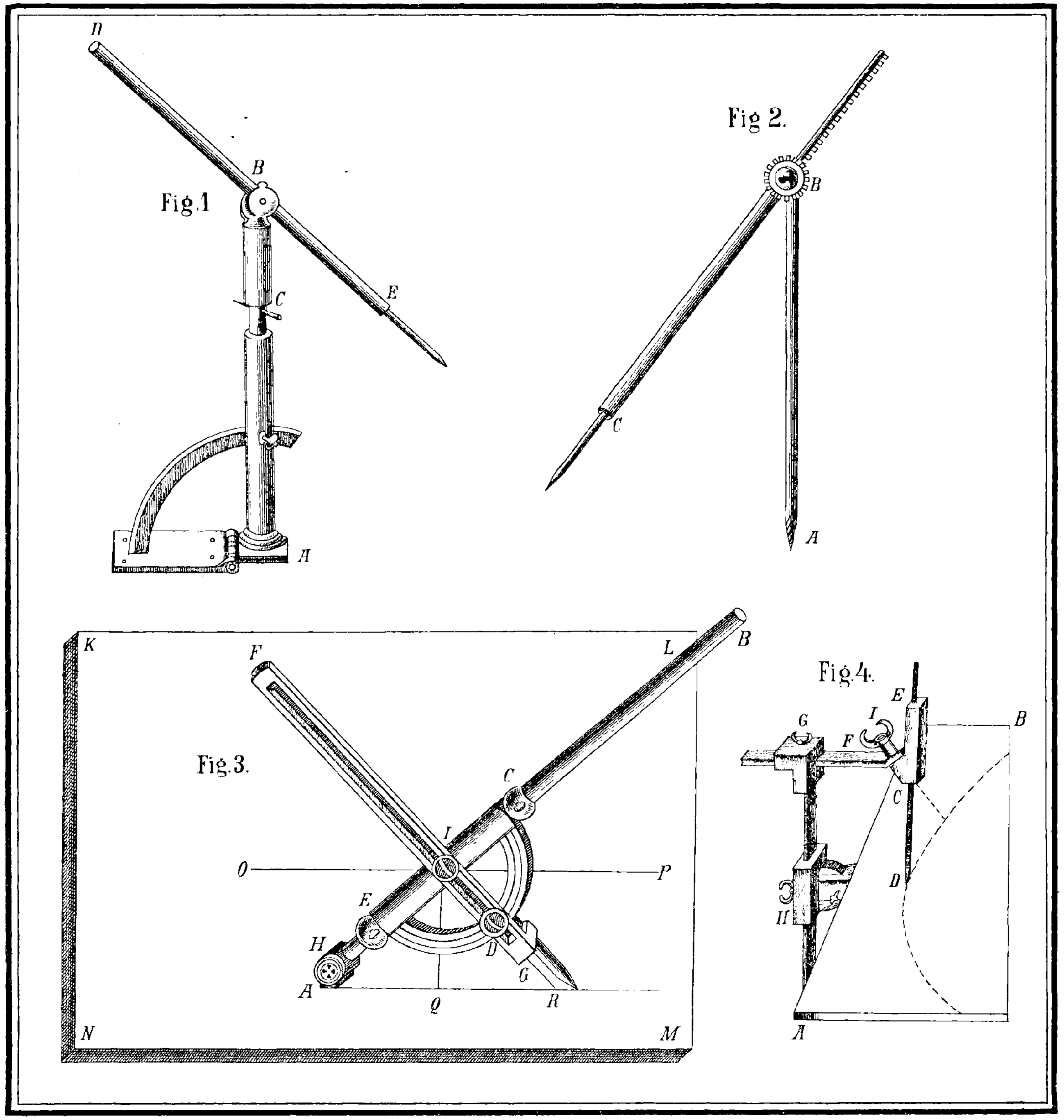


Fig.1
Fig 2.
Fig.3.
Fig.4.

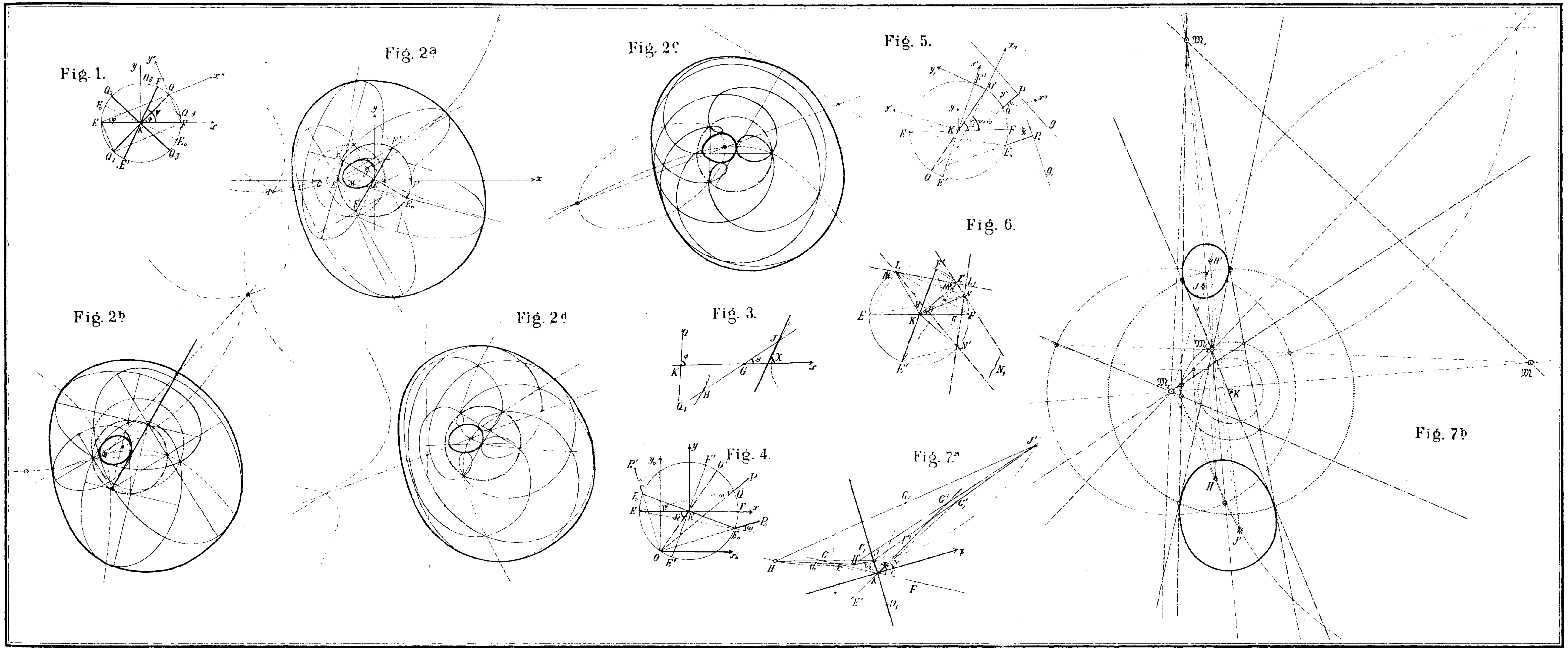


Fig. 1.
Fig. 2a
Fig. 2c
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 2b
Fig. 2d
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 7a
Fig. 7b

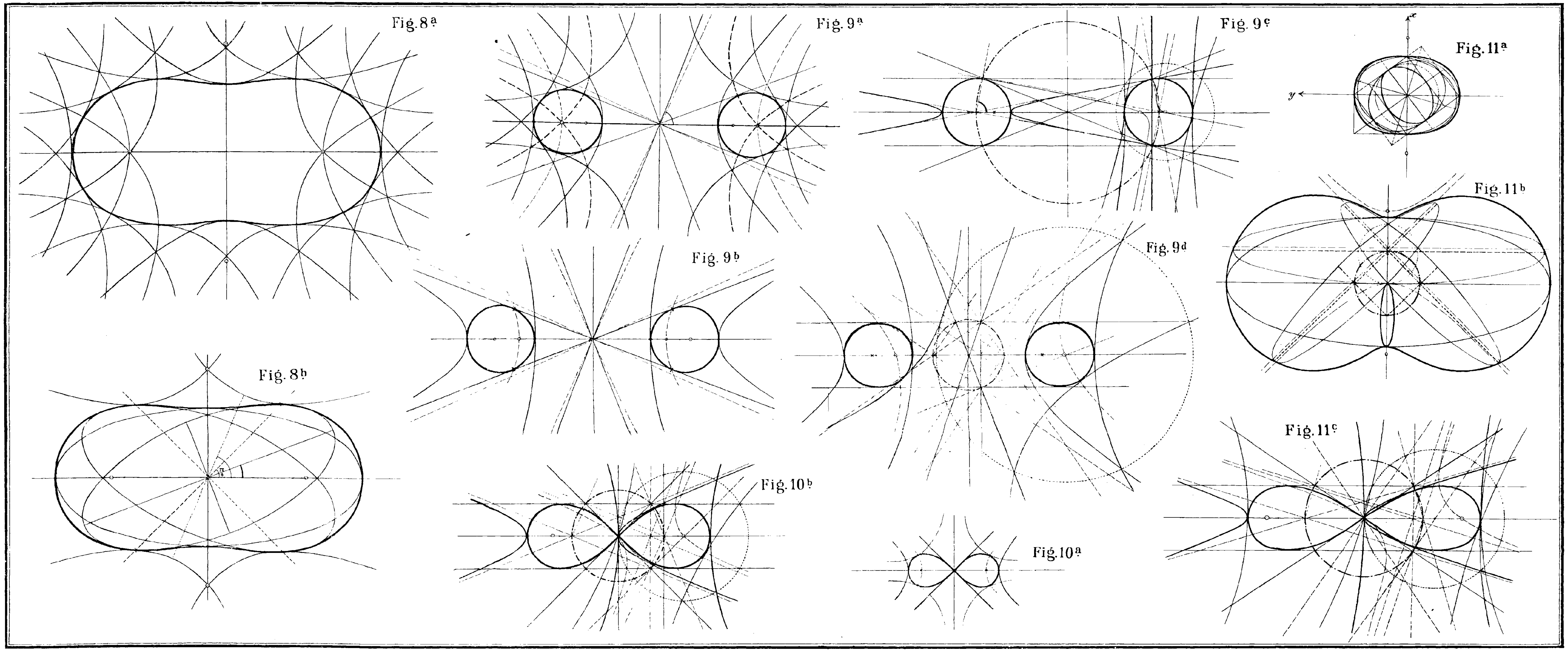


Fig. 8a
Fig. 9a
Fig. 9c
Fig. 11a
x
y
Fig. 11b
Fig. 9b
Fig. 9d
Fig. 8b
Fig. 10b
Fig. 10a
Fig. 11c

Fig. 12a

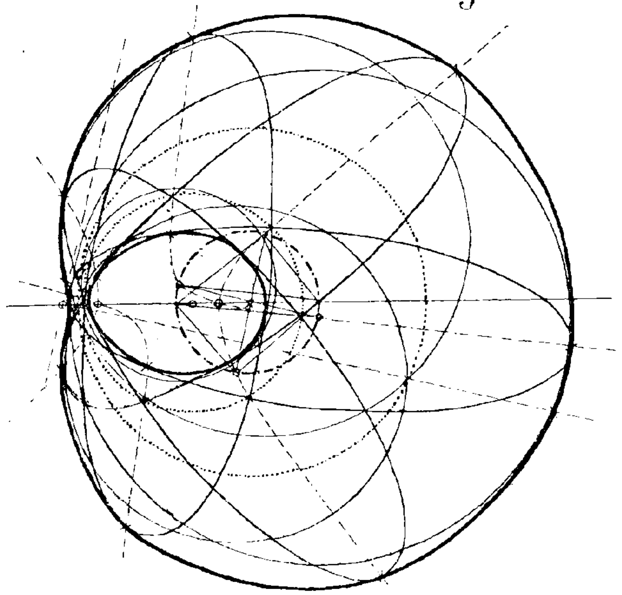


Fig. 12c

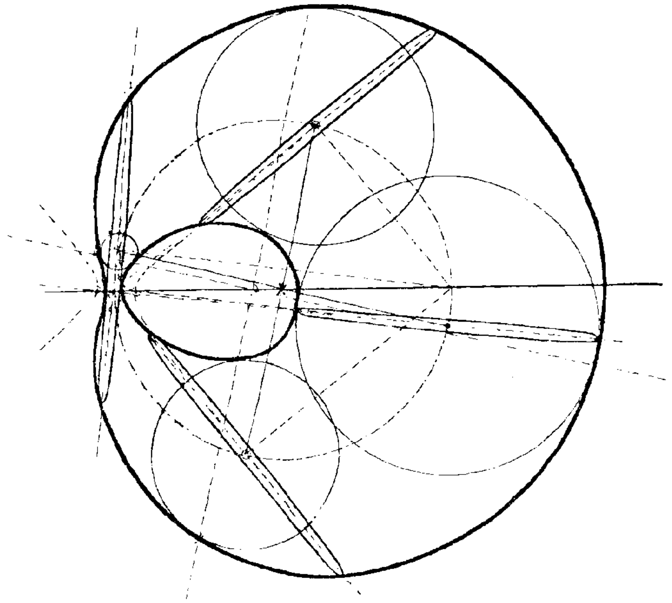


Fig. 13b

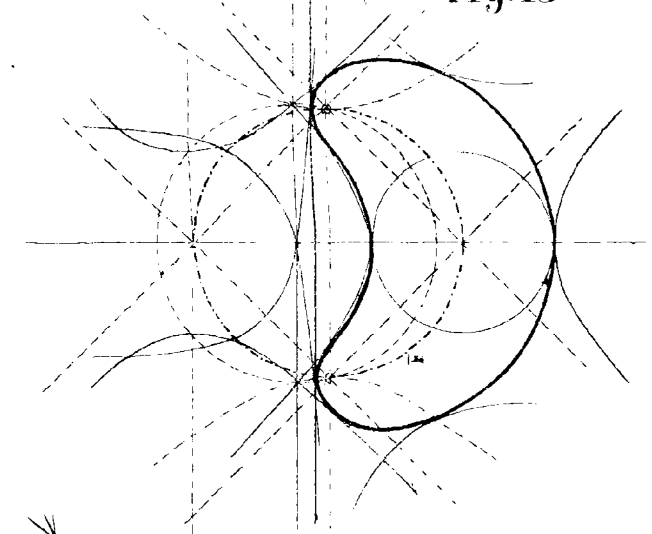


Fig. 15a

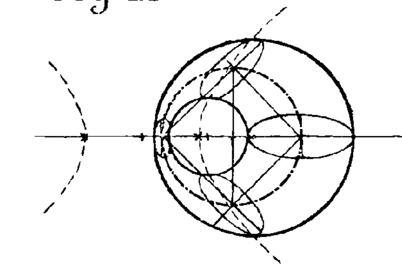


Fig. 15b

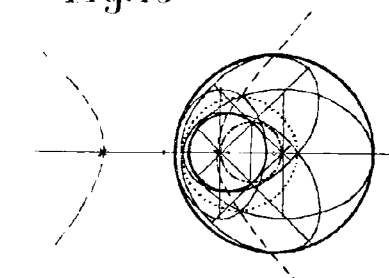


Fig. 15c

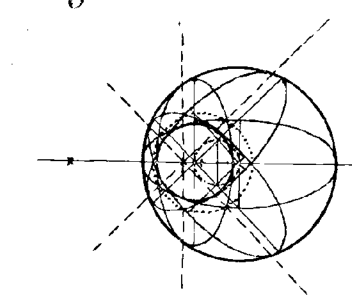


Fig. 15d

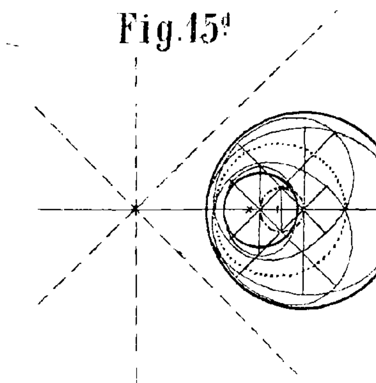


Fig. 12b

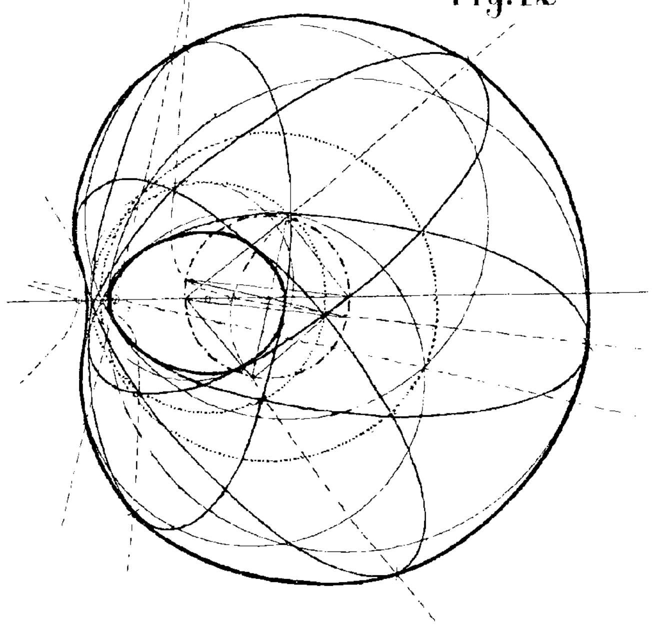


Fig. 13a

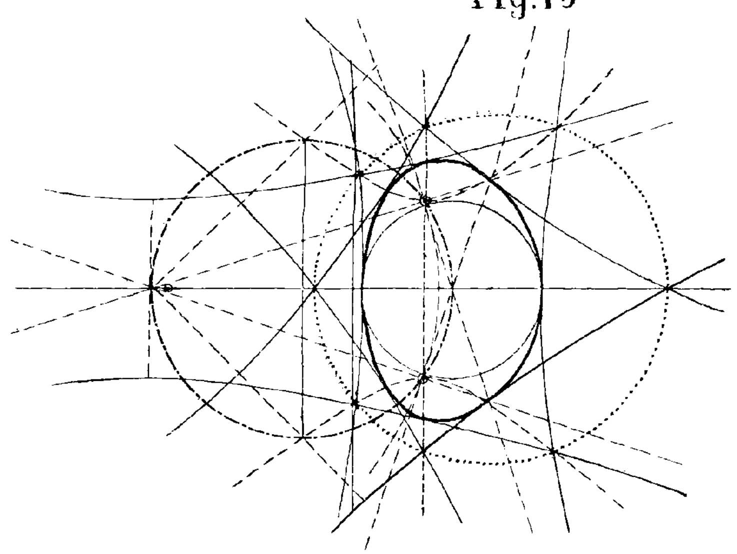
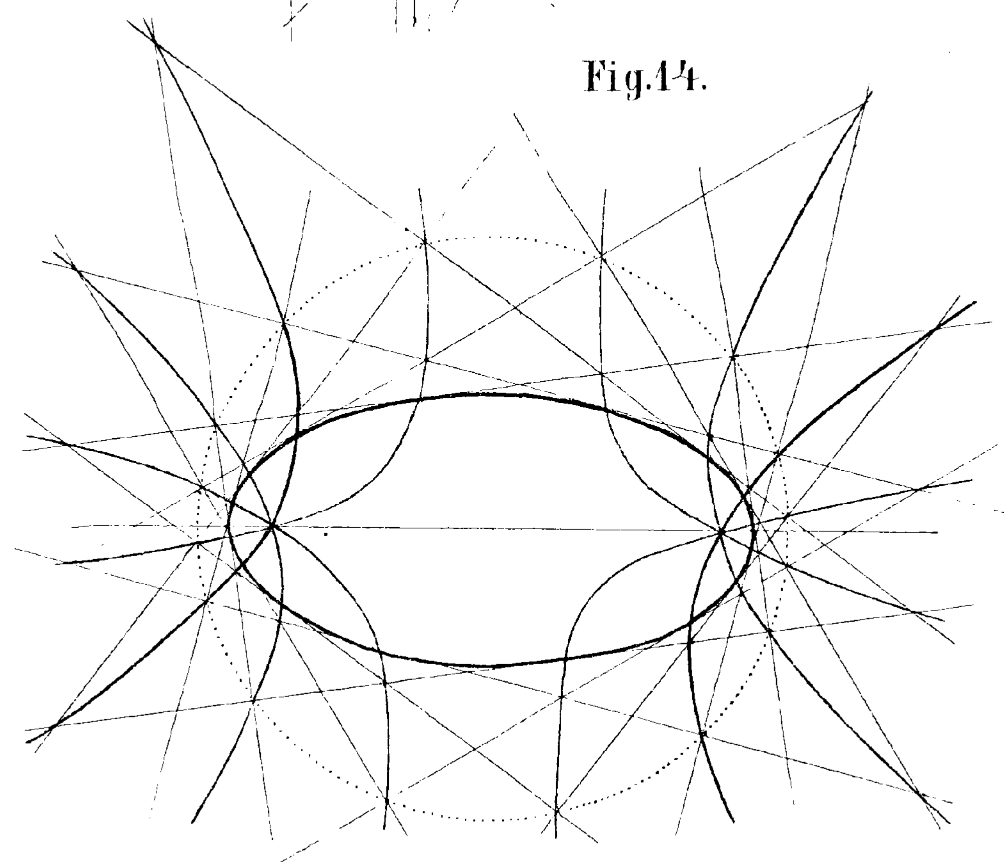


Fig. 14.



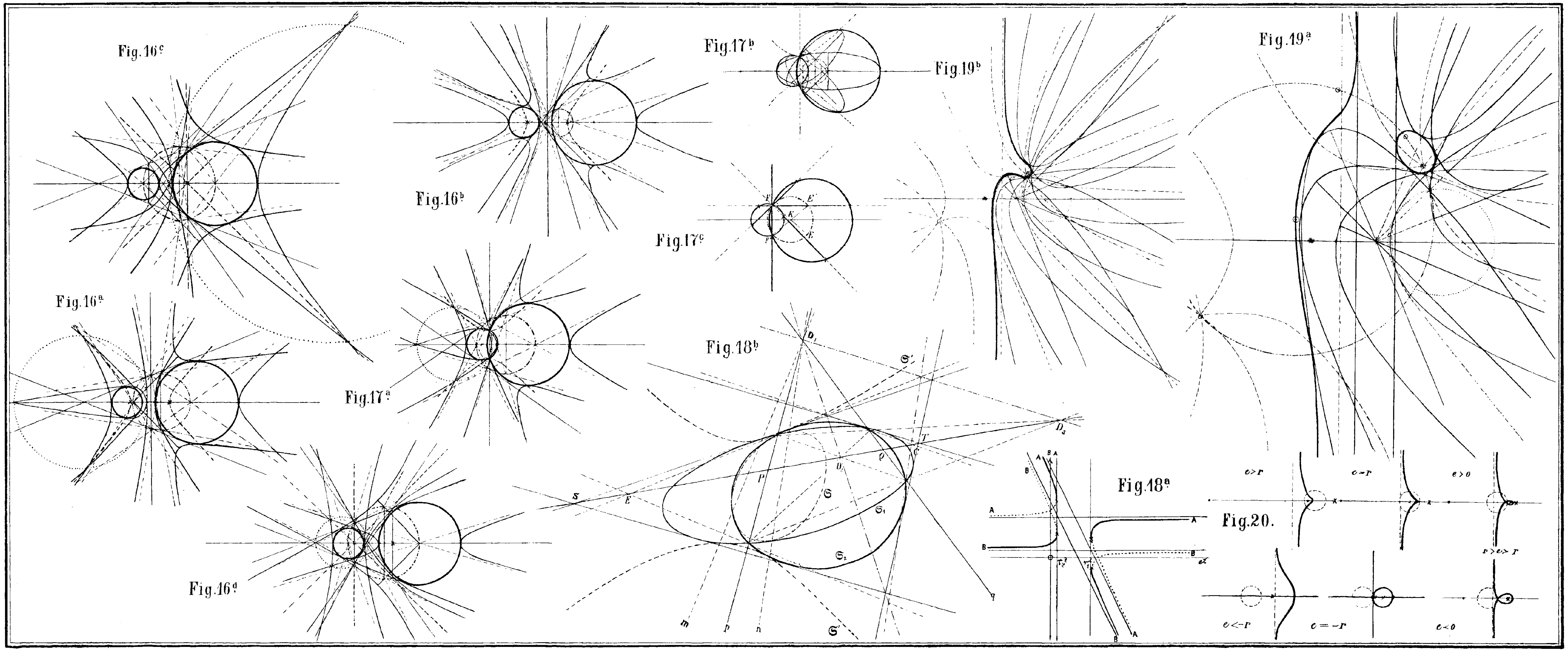


Fig. 16c
Fig. 16b
Fig. 17b
Fig. 19b
Fig. 19a
Fig. 17c
Fig. 16a
Fig. 17a
Fig. 18b
Fig. 16d
Fig. 18a
Fig. 20.