

COURS
DE
PHYSIQUE

COURS
DE
PHYSIQUE

CONFORME AUX PROGRAMMES
DES CERTIFICATS ET DE L'AGRÉGATION DE PHYSIQUE

PAR
H. BOUASSE
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

QUATRIÈME PARTIE
OPTIQUE
ÉTUDE DES INSTRUMENTS



PARIS
LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE
15, RUE SOUFFLOT

AVANT-PROPOS

Ce livre résume les connaissances nécessaires à l'étude des instruments d'Optique.

Il est divisé en deux parties : Optique géométrique, Optique ondulatoire. Quelques lecteurs trouveront cette division archaïque : il importe de calmer leurs méfiances.

On appelle Optique géométrique l'ensemble des propositions qu'on peut tirer sans autre hypothèse de la loi de Descartes. On sait, depuis 1637, qu'en appelant chemin optique le produit du chemin géométrique par l'indice de réfraction, la loi de Descartes se ramène à cette proposition de Fermat, que la trajectoire de la lumière d'un point à un autre est le chemin optique maximum ou minimum joignant ces points : les trajectoires s'appellent rayons. D'où la conséquence immédiate et fondamentale (condition du stigmatisme) que les chemins optiques qui vont d'un point à son image sont égaux.

Il va de soi qu'en 1637, Fermat n'énonça pas son principe avec cette généralité : je rappelle seulement l'identité foncière des deux propositions.

On a peut-être en France une idée fautive du rôle et de l'étendue de l'Optique géométrique ; pour fixer tout d'abord les idées, voici quelques propositions élémentaires.

La surface d'onde est définie par le principe de Fermat, indépendamment de toute hypothèse sur le mode de propagation de la lumière. La construction d'Huyghens et la génération des surfaces d'onde comme enveloppes d'ondes élémentaires font partie de l'Optique géométrique : j'entends par là qu'elles sont contenues dans la loi de Descartes ou dans le principe de Fermat. Il ne faut pas confondre la construction d'Huyghens avec le principe d'Huyghens. L'Optique ondulatoire n'intervient qu'au moment où s'introduit le principe des interférences.

On sait que, dans la Théorie de l'émission, le principe de Fermat se confond avec le principe de la moindre action sur lequel Hamilton a construit sa Théorie des systèmes de rayons. Est-il nécessaire de dire que cette dernière théorie est parfaitement correcte ? il n'y a donc là rien de propre à la Théorie des ondulations.

Si ces propositions, que personne n'aura l'idée de contester, étaient plus présentes à l'esprit, on ne proposerait pas comme particulières à la Théorie des ondulacions des constructions qui dérivent immédiatement de la loi de Descartes¹.

Assurément, l'Optique géométrique étant un cas particulier de l'Optique ondulatoire, celle-ci ayant dû, pour être admise, montrer qu'elle était parfaitement compatible avec celle-là, on peut ne jamais parler des rayons : on supprime alors l'Optique dite géométrique. La question est donc de savoir s'il est commode d'accueillir une première approximation dont on sait qu'elle n'est vraie que si les rayons utilisés remplissent un cône d'angle solide suffisant, mais dont tout le monde apprécie la commodité et la clarté.

Posée comme il précède, la question n'a qu'une réponse. Je m'étonne donc du mépris qu'en France on semble avoir pour l'Optique géométrique. Je m'en afflige en pensant au merveilleux développement qu'Abbe et son école lui ont donné, et aux importants résultats pratiques qu'ils en ont tirés. Notre mépris ne serait-il pas un signe ajouté à tant d'autres de cette étrange indifférence qui nous envahit pour tout ce qu'on peut appeler la Science classique? On croirait que la Physique n'existe que depuis vingt ans, à en juger par les préoccupations de plusieurs de nos professeurs.

Il y a de cela; mais il existe une raison plus grave qui explique à la fois l'indifférence du passé et l'ignorance des théories modernes, malgré l'affectation de les avoir toujours à la bouche.

On reproche à mes livres d'être trop mathématiques; assurément, cela ne veut pas dire que les mathématiques que j'emploie sont d'un caractère bien relevé; un cours de licence moyen les contient. Au fond, ce qu'on leur reproche, c'est leur esprit géométrique. Je déränge les gens qui aiment les faits en vrac; je chagrine ceux qui se contenteraient d'énoncés et de résultats, ne pouvant assujettir leur paresse à suivre le raisonnement qui va de l'énoncé au résultat. A juger par le nombre des gens que je trouble, il faut croire que les Français sont fatigués de tout travail intellectuel. C'est tant pis : j'estime que les faits ne sont matière à enseignement que s'ils sont liés; une jolie expérience qui n'est que cela, qui ne prouve pas quelque chose de précis, qui ne retranche rien d'une théorie ou n'y ajoute rien, me plaît assurément : je la néglige comme professeur.

Quand on envisage de ce biais l'écriture d'un Cours de physique, il

¹ Je lis dans un journal scientifique « qu'il existe à la Sorbonne un cours d'Optique géométrique dans lequel on ne parle pas des rayons lumineux ». Si cette information concernait toute autre Université, elle me paraîtrait invraisemblable, puisqu'il y a contradiction dans les termes. Mais quand il s'agit de la Sorbonne, je me suis fait lentement une habitude de ne m'étonner de rien : elle ne s'embarrasse pas pour si peu.

Dire tout le mal que la Sorbonne fait depuis trente ans à la Physique française par son enseignement public est chose impossible.

va de soi qu'on tisse sur une trame serrée un dessin dont on ne peut pas dire « qu'il se lit comme un roman ». Mais l'enseignement de la Physique, comme tout autre, ne connaît pas de routes royales.

L'Optique géométrique a évidemment le grand tort d'être géométrique; elle est trop bien liée; elle n'a pas cette superbe incohérence qui s'étale avec tant d'impudeur dans certains ouvrages importés d'Orient. Enfin, elle exige des connaissances proprement géométriques, ce qui n'est pas pour augmenter son attrait auprès de quelques-uns.

C'est fâcheux; car outre qu'elle regorge de belles expériences, qu'elle est indispensable pour bien comprendre l'Optique ondulatoire, elle a son rôle propre sur lequel il convient d'insister. La caustique n'est pas seulement un outil mathématique, c'est une surface d'importance physique essentielle: c'est un lieu de concentration de l'énergie. Dans la Théorie ondulatoire, elle joue encore ce rôle. Elle n'offre plus, il est vrai, une limite infranchissable à l'énergie; mais elle est toujours un lieu de densité maxima. La caustique est au premier chef déterminable par l'expérience; elle a donc sur la surface d'onde un inappréciable avantage; c'est elle qu'on rencontre d'abord tout naturellement.

... La meilleure preuve que je ne fais de mathématiques que le strict nécessaire, est de ne pas céder à la tentation d'introduire des méthodes élégantes mais trop générales, dont l'eikonal fournit un exemple. Il est évidemment intéressant de savoir que les fonctions S_1, \dots, S_6 , successivement égalées à zéro, expriment que les corrections sont obtenues. Je préfère cent fois une généralité, moindre et des calculs poussés à bout. Par contre, je trouverais honteux de raccrocher des lecteurs en leur promettant des démonstrations toutes élémentaires, comme s'il dépendait de nous de changer la nature des choses et de mettre un sinus quand une fonction de Bessel est nécessaire, comme si la suppression d'un signe somme et son remplacement par un sigma rendait plus simple un raisonnement, comme si.....

On finira par comprendre que c'est l'enseignement des mathématiques qu'il faut modifier. On finira par comprendre, au grand scandale de certains mathématiciens, qu'il n'est pas nécessaire de posséder la Théorie des fonctions elliptiques pour se servir des intégrales elliptiques, qu'il n'est pas indispensable de connaître les relations entre les fonctions de Bessel des divers ordres ou leurs développements en série pour utiliser les tables numériques des fonctions \mathcal{J}_0 et \mathcal{J}_1 . En un mot, on finira par comprendre que le physicien et l'ingénieur ont besoin de connaissances mathématiques étendues, mais qui ne sont pas celles dont on les gave généreusement aujourd'hui. Elles ne sont ni supérieures ni inférieures; elles sont d'un autre ordre.

Je perds mon temps: les mathématiciens sont pleins de bonne volonté pour satisfaire nos désirs, mais ils ne les comprennent pas.

Par exemple, comment imaginer qu'un homme, chargé par l'État de former des professeurs de mathématiques, qui a passé toute sa vie à couper élégamment des cheveux en quatre, et qui, sous la poussée de l'opinion, change habilement son fusil d'épaule, fasse autre chose que la caricature des méthodes qu'il prétend appliquer?...

Il faudra nous résoudre à écrire nous-mêmes nos traités de mathématiques à l'usage de nos étudiants, et fermer nos oreilles aux cris d'horreur intéressés dont nous serions d'abord assourdis. On finira bien par nous donner raison.

... J'insiste sur les caustiques; mais je ne veux pas qu'on se méprenne sur mes idées ni qu'elles soient causes innocentes qu'on assomme un peu davantage les élèves de Spéciales par des calculs algébriques. J'estime qu'en Spéciales ce qu'on a de mieux à faire est d'apprendre la théorie des lentilles minces et la manière de s'en servir, ce que les candidats à l'École normale ignorent avec candeur, je peux l'affirmer sans crainte de démenti. Je déplore que certains professeurs jonglent avec des calculs inutiles « comme ces gens qui portent des cannes très lourdes pour montrer leur force ».

... Si je maintiens l'Optique géométrique, avec ses méthodes propres, en tête de l'étude de l'Optique, ce n'est évidemment pas pour compliquer les débuts de l'Optique ondulatoire par l'introduction de la Théorie électromagnétique. Il est bon d'échelonner les difficultés : le lecteur trouvera satisfaction dans le tome V.

... Un mot sur la méthode dans l'étude de la diffraction. Babinet y introduisit des procédés de raisonnement rapides, corrects et qu'il serait mauvais de négliger. Mais ils sont souvent inapplicables, même dans des cas simples, par exemple pour déterminer l'image d'une étoile dans le plan focal principal d'une lunette. La méthode générale de Fresnel implique, il est vrai, l'emploi d'une intégrale, mais si facile à poser et le plus souvent à discuter, qu'en définitive son maniement est aussi simple que celui d'une somme de termes finis. Les deux méthodes se complètent : je les emploie concurremment.

MM. Camilong et Turrière, infatigables, m'ont continué leur aimable collaboration; le lecteur leur doit de ne pas rencontrer ces fautes typographiques qui exaspèrent.

OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

CHAPITRE I SYSTÈMES CENTRÉS¹

Première approximation, dite de Gauss.

1. **Stigmatisme, aplanétisme.** — Le problème des instruments d'optique peut s'énoncer de la manière suivante : *Des rayons lumineux émanent d'un point, sont isogènes; s'arranger de manière qu'après la traversée de l'appareil, ils viennent passer par un point dit conjugué ou image du premier.* Le point lumineux est dit placé dans *l'espace objet*; l'image est dite placée dans *l'espace image*; mais il est entendu que ces espaces ne sont différents qu'analytiquement; ils peuvent être et sont généralement physiquement identiques, et même l'un et l'autre indéfinis.

Quand on obtient la correspondance point par point d'une surface S de l'espace objet et d'une surface S' de l'espace image, on dit que l'appareil est *stigmatique* (στιγμα, point) *pour la surface* S . La condition réalisée pour la surface S peut fort bien ne plus l'être pour une surface voisine S_1 : c'est même le cas général, comme nous le verrons. *Même elle peut n'être réalisée que pour un point.* D'ailleurs l'existence de la correspondance point par point de deux surfaces S et S' est pratiquement insuffisante; la *nature* de cette correspondance importe, comme nous allons le préciser.

Pour ne pas nous lancer dans des développements purement mathématiques, nous nous restreindrons dès maintenant aux *systèmes centrés*, c'est-à-dire *composés de surfaces de révolution autour du même axe, séparant des milieux d'indices différents.* Pour des raisons pratiques, ces surfaces sont généralement des sphères. Dans le cas des miroirs (qui rentre dans le cas général sous la condition de

¹ Pour les expériences élémentaires, le lecteur voudra bien se reporter aux Cours de Première C et D et de Mathématiques A, par Bouasse et Brizard (Delagrave, éditeur).

poser le rapport des indices égal à -1), ce sont quelquefois des paraboloides ; on doit alors les obtenir, non par des procédés mécaniques, mais par des retouches locales effectuées à la main.

Par raison de symétrie, si l'appareil centré est stigmatique pour un point A de l'espace objet, à ce point correspond un point A' de l'espace image qui se trouve dans le même plan passant par l'axe de révolution ; ce plan, que nous appellerons *méridien*, est en effet de symétrie par rapport à l'appareil. Les rayons qui sont originaires dans ce plan, n'en sortent pas ; deux rayons originaires symétriques par rapport à ce plan conservent cette propriété dans les milieux successifs.

Ceci posé, soit un plan P de l'espace objet, normal à l'axe de révolution ; nous dirons que c'est un plan de front. Ses points A sont définis par les coordonnées polaires θ, ρ , en prenant pour pôle la trace de l'axe de révolution.

Au plan P de front correspond, à travers l'appareil centré stigmatique pour ce plan, une surface image P' qui, par raison de symétrie, est de révolution autour de l'axe général de l'appareil.

Quand cette surface est plane, c'est-à-dire quand non seulement à tout point A du plan P de front correspond un point A' (propriété en laquelle consiste le *stigmatisme* pour le plan P), mais quand de plus à un plan P normal à l'axe correspond un autre plan P' normal à l'axe, on dit que le système est *aplanétique* pour le plan P et que le champ est sans courbure.

Au sujet du mot *aplanétique*, il est bon de remarquer que, si sa forme rappelle la définition précédente, son étymologie lui donne un sens très différent et bien plus général. Il vient des deux mots grecs $\alpha \pi \lambda \alpha \nu \eta \tau \eta \varsigma$, et signifie *qui n'est pas errant, qui n'a pas d'aberration*.

Si la surface P' qui correspond au plan P de front n'est pas un plan, on dit que le champ est courbe ; cette courbure peut donc se concilier avec un stigmatisme parfait pour le plan P.

2. Distorsion du champ. — Supposons l'appareil stigmatique et aplanétique pour un plan P normal à l'axe de révolution, c'est-à-dire pour un plan frontal P. Nous n'avons pas encore défini complètement la correspondance du point A objet et du point A' image.

Au point A (θ, ρ) du plan P correspond bien par raison de symétrie un point A' (θ, ρ') du plan P', la coordonnée azimutale θ étant la même d'après ce qui précède. Mais il peut exister une relation quelconque, $\rho' = f(\rho)$, entre les rayons vecteurs.

Développons la fonction f en série et limitons le développement aux deux premiers termes, nous avons :

$$\rho' = a^2 \rho \pm b^2 \rho^2. \quad (1)$$

Si b^2 est nul, on dit que l'appareil est *stigmatique, aplanétique* (c'est-à-dire sans courbure) et sans distorsion pour le plan frontal P (fig. I).

Si b^2 n'est pas nul, il y a *distorsion du champ*.

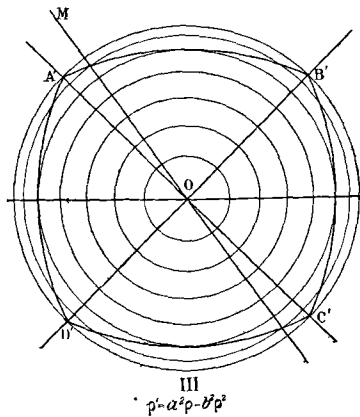
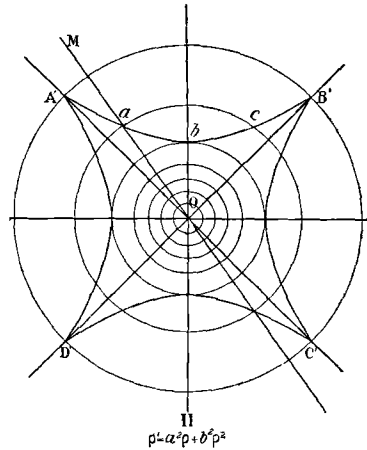
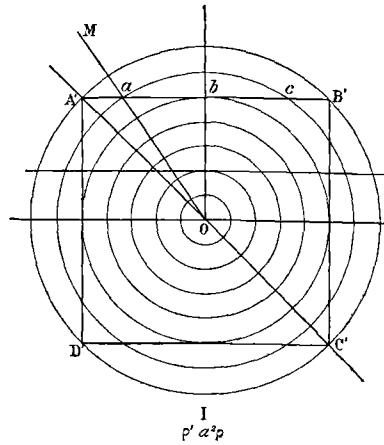
Nous distinguerons deux cas, suivant qu'il faut prendre l'un ou l'autre signe dans l'équation (4).

Considérons une ligne droite AB servant d'objet, située dans le plan frontal P et ne passant pas par l'origine. Elle n'a pour image une ligne droite que si $b^2 = 0$. Dans le cas contraire, elle est transformée en une courbe C présentant vers l'axe de révolution : sa convexité, si le signe est + (fig. II) ; sa concavité, si le signe est - (fig. III).

3. Distorsion en coussinet, distorsion en barillet. — Pour construire la courbe C, traçons des cercles $\rho' = \text{Constante}$, correspondant à des valeurs de ρ croissant en progression arithmétique. A mesure que ρ croît, deux cercles consécutifs seront de plus en plus distants, si on a le signe + (fig. II), de moins en moins distants, si on a le signe - (fig. III).

Dans le plan objet (et aussi à une échelle différente dans le plan image quand $b^2 = 0$) nous obtenons la figure (I).

Traçons ensuite dans les plans objet et image des droites OA', OM, Ob, faisant avec la droite de référence les mêmes angles. Les points conjugués se trouvent à l'intersection des cercles de même cote (ρ ou ρ') et des droites de même azimuth. La droite AB, ou si l'on veut (puisque la figure (I) peut également servir comme plan objet) la droite A'ab de la figure (I) se transforme donc en une courbe



A'B' tournant sa convexité ou sa concavité vers l'axe de révolution du système.

On dit que la distorsion de la figure II est en *coussinet* et que la distorsion de la figure III est en *barillet*.

On cherche à réaliser le mieux possible des instruments centrés *stigmatiques, aplanétiques et sans distorsion pour un certain plan frontal P, présentant simultanément un champ et une ouverture les plus grands possibles.*

On entend par là qu'il doit être possible d'utiliser :

1° des rayons faisant avec l'axe de révolution des angles u assez grands ; l'angle u mesure l'*inclinaison* du rayon ;

2° des rayons traversant l'appareil à des distances assez grandes de l'axe de révolution ; ces distances mesurent l'*ouverture*, nous préciserons plus loin comment.

4. Première approximation de Gauss. — Nous commencerons par faire la théorie des instruments d'optique centrés en admettant que la correspondance point par point de l'espace objet et de l'espace image a lieu, non seulement pour un seul point A ou pour une surface S de l'espace objet, mais bien pour tous les points de cet espace. Nous supposerons de plus qu'une droite objet est transformée en une droite image, un plan objet par conséquent transformé en un plan image. Le système étant centré, un plan frontal P a pour conjugué un autre plan frontal P'.

Les résultats qui découlent de cette hypothèse, constituent ce qu'on appelle la *première approximation de Gauss* ; ils sont essentiels et forment la base des études plus générales. Ils doivent leur importance au fait qu'*une lentille mince est stigmatique, aplanétique et sans distorsion pour tout l'espace objet voisin de l'axe de révolution, pourvu qu'on limite suffisamment par un diaphragme l'ouverture utile de cette lentille.*

Une lentille serait donc un appareil centré parfait pour un champ et une ouverture nulles, si les phénomènes de diffraction n'intervenaient pas. Il est facile de voir que cette conclusion s'étend immédiatement à un appareil centré quelconque, quel que soit le nombre des milieux qui le constituent.

A mesure que le champ et l'ouverture croissent, l'approximation de Gauss devient de plus en plus insuffisante.

Approximation dite de Gauss.

5. Notations et formules générales. — Prenons (fig. 4) l'axe de révolution pour axe des x dans l'espace objet. Puisque le système est centré, il servira aussi d'axe des x' dans l'espace image. Les x et x' sont comptés à partir de deux origines O et O' que nous préci-

serons ultérieurement. *Leurs directions positives sont choisies pour l'un et l'autre milieu dans le sens de propagation de la lumière*; il peut donc arriver que les x et les x' soient comptés positivement en sens inverses¹.

Prenons comme axes des y et des z dans l'espace objet, deux droites rectangulaires quelconques: il est naturel de prendre pour axes des y' et des z' dans l'espace image deux droites respectivement parallèles aux axes des y et des z . Aux points du plan xOy (ou xOz) correspondent par raison de symétrie les points du plan $x'O'y'$ (ou $x'O'z'$).

La correspondance point par point des deux espaces s'exprime généralement par les équations :

$$\begin{aligned} x' &= \frac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{Ax + By + Cz + D}, \\ y' &= \frac{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}{Ax + By + Cz + D}, \\ z' &= \frac{A_3x + B_3y + C_3z + D_3}{Ax + By + Cz + D}, \end{aligned}$$

quand une droite doit correspondre à une droite.

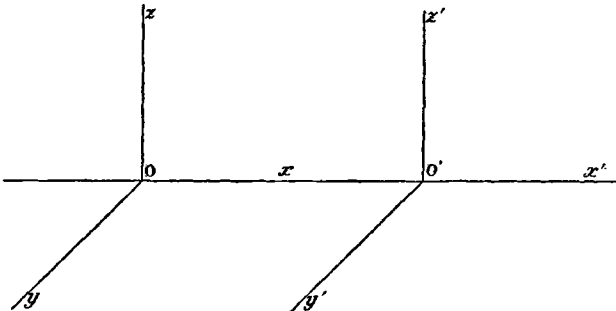


Fig. 4.

En vertu de la symétrie particulière que nous avons admise (systèmes de révolution autour d'un axe commun aux deux espaces), les équations (1) se réduisent à la forme :

$$x' = \frac{a_1x + d_1}{ax + d}, \quad y' = \frac{by}{ax + d}, \quad z' = \frac{bz}{ax + d}. \quad (2)$$

La première, indépendante de y et de z , exprime qu'un plan de

¹ Les conventions ici adoptées ne sont pas celles du Cours de Première; dans l'Enseignement secondaire, il est préférable d'obtenir des formules symétriques et de choisir des conventions où les signes aient une *interprétation physique*. C'est une gêne pour une théorie générale. Les conventions et notations ici adoptées sont celles de l'Université d'Iéna, dont nous ne saurions trop recommander les travaux. Ceux d'Abbe sont classiques à l'étranger.

front P correspond à un plan de front P'. L'existence de l'axe de révolution exige que y' et z' soient traités symétriquement.

Les points conjugués A et A' étant dans un même plan méridien, y' ne peut dépendre que de y et de x, z' ne peut dépendre que de z et de x.

Résolues par rapport à x, y, z, les équations (1) fournissent des équations de même forme; le système (2) donne :

$$x = \frac{-dx' + d_1}{ax' - a_1}, \quad (y, z) = \frac{(y', z')}{ax' - a_1} \frac{ad_1 - a_1d}{b}. \quad (3)$$

Nous appellerons *plans focaux* les plans de front :

F = ax + d = 0, de l'espace objet,

F' = ax' - a_1 = 0, de l'espace image.

Les points de l'espace objet qui correspondent à F', sont à l'infini; les points de l'espace image qui correspondent à F, sont également à l'infini.

Les plans focaux s'appellent aussi *plans de discontinuité*.

Voici pourquoi. Imaginons un plan de front P de l'espace objet qui se déplace. Il est d'abord au delà du plan F, il coïncide ensuite avec le plan F et passe en deçà. Le plan P' correspondant s'éloigne jusqu'à l'infini, *passé brusquement de $\pm\infty$ à $\mp\infty$* , puis revient à distance finie. Il y a *discontinuité* dans le déplacement.

6. Choix des origines des coordonnées O et O'. Distances focales principales. — Il y a deux manières particulièrement importantes de choisir les origines O et O' des deux systèmes de coordonnées.

1° On peut les faire coïncider avec deux points conjugués quelconques. Alors on a simultanément $x = x' = 0$; d'où la condition $d_1 = 0$.

$$x' = \frac{a_1x}{ax + d}, \quad y' = \frac{by}{ax + d}, \quad z' = \frac{bz}{ax + d}.$$

Comme cas particulier intéressant, a peut être nul. La correspondance stigmatique s'exprime alors par les relations :

$$x' = a_1x, \quad y' = by, \quad z' = bz.$$

On dit que l'appareil est *télescopique* ou *afocal*; les plans focaux F et F' sont à l'infini.

2° On peut prendre pour origines O et O' les traces de l'axe de révolution sur les plans focaux, points nommés *foyers principaux*. On a :

$$a_1 = d = 0, \quad x' = \frac{d_1}{ax}, \quad (y', z') = (y, z) \frac{b}{ax}.$$

Posons : $d_1 : a = ff'$, $b : a = f$; les équations deviennent :

$$xx' = ff', \quad y' = f \frac{y}{x} = \frac{x'y}{f'}, \quad z' = f \frac{z}{x} = \frac{x'z}{f'}$$

$$y = f' \frac{y'}{x'} = \frac{xy'}{f}, \quad z = f' \frac{z'}{x'} = \frac{xz'}{f}$$

Les longueurs f et f' sont appelées *distances focales principales*.

7. Grossissements. Classification des systèmes centrés. — A moins d'indications contraires, nous utiliserons les formules rapportées aux foyers principaux.

GROSSISSEMENT LONGITUDINAL (AXIAL OU EN PROFONDEUR). — Soit une petite droite couchée sur l'axe de révolution et de longueur dx . On appelle *grossissement longitudinal* le rapport :

$$\alpha = \frac{dx'}{dx} = -\frac{x'}{x} = -\frac{ff'}{x^2} = -\frac{x'^2}{ff'}$$

Le grossissement moyen est :

$$\frac{x'_2 - x'_1}{x_2 - x_1} = -\frac{ff'}{x_1 x_2} = -\frac{x'_1 x'_2}{ff'}$$

On peut classer les systèmes centrés d'après le signe de α ; si α est positif, un déplacement de l'objet dans le sens de propagation de la lumière dans l'espace objet ($dx > 0$) correspond à un déplacement de l'image dans le sens de propagation de la lumière dans l'espace image ($dx' > 0$).

Le contraire arrive quand α est négatif.

Dans les cas *dioptriques* ou *catoptriques* que nous aurons à considérer, α est positif, $ff' < 0$; f et f' sont toujours de signes contraires.

Nous savons en effet que, pour les lentilles, l'image se déplace toujours dans le même sens *absolu* que l'objet (sauf, bien entendu, aux discontinuités pour lesquelles il y a saut brusque de l'image de $+\infty$ à $-\infty$); corrélativement les axes des x et des x' sont comptés dans le même sens.

Nous savons d'ailleurs que, pour les miroirs, l'image et l'objet se déplacent dans des sens *absolus* différents; mais les x et les x' sont alors comptés en sens inverses, le sens de propagation étant renversé par la réflexion.

GROSSISSEMENT LATÉRAL OU GROSSISSEMENT PROPREMENT DIT. — Le grossissement latéral β est défini par la relation :

$$\beta = \frac{dy'}{dy} = \frac{dz'}{dz} = \frac{f}{x} = \frac{x'}{f'}$$

$$\frac{\beta^2}{\alpha} = -\frac{f}{f'}$$

Le grossissement longitudinal est donc proportionnel au carré du grossissement latéral.

Nous n'insisterons pas sur la représentation du grossissement en fonction de x et de x' ; il est clair qu'une hyperbole équilatère et une droite y suffisent.

8. Inclinaisons. — On appelle *inclinaison* l'angle qu'un rayon fait avec l'axe de révolution ou *axe principal* du système centré. Il s'agit de déterminer les inclinaisons d'un rayon dans l'espace objet et dans l'espace image.

Donnons-nous le rayon par ses projections sur les plans xFy , xFz (fig. 5).

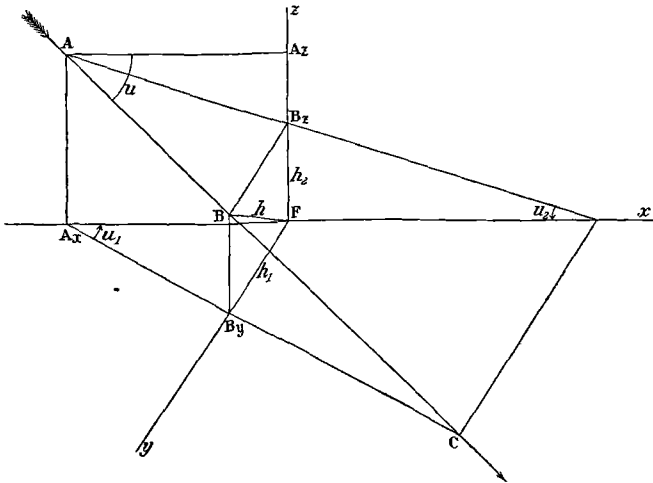


Fig. 5.

$$\begin{aligned} z &= h_2 - x \operatorname{tg} u_2, \\ y &= h_1 - x \operatorname{tg} u_1. \end{aligned} \quad (1)$$

Pour que ces formules soient exactes, il faut faire des conventions sur la manière de compter les angles u_1 et u_2 .

Nous poserons que les angles u_1 et u_2 sont en valeur absolue inférieurs à $\pi : 2$.

L'angle u_1 est positif quand la rotation nécessaire pour amener la projection $A_x C$, prise dans le sens de propagation de la lumière, à coïncider avec la direction positive de l'axe des x , est de même sens que la rotation qui amène Fx sur Fy .

Dans la figure, l'angle u_1 est donc négatif.

Définition analogue pour u_2 ; dans la figure, u_2 est positif.

L'angle u est complètement défini par ses projections u_1 et u_2 .

Dans l'espace image, le rayon est défini par deux équations analogues :

$$\begin{aligned} z' &= h'_2 - x' \operatorname{tg} u'_2, \\ y' &= h'_1 - x' \operatorname{tg} u'_1. \end{aligned} \quad (2)$$

Mais nous pouvons passer directement de l'espace objet à l'espace image par les formules de transformation du § 5. Nous trouvons donc une autre forme des équations (2) :

$$z' = \frac{f}{x} (h_2 - x \operatorname{tg} u_2) = -f \operatorname{tg} u_2 + \frac{x'}{f'} h_2, \quad (2')$$

et de même pour y' .

La comparaison de (2) et de (2') donne :

$$\begin{aligned} h'_1 &= -f \operatorname{tg} u_1, & h'_2 &= -f \operatorname{tg} u_2. \\ h_1 &= -f' \operatorname{tg} u'_1, & h_2 &= -f' \operatorname{tg} u'_2. \end{aligned}$$

Il reste à calculer h et h' en fonction de u et de u' . On a les relations :

$$\begin{aligned} h^2 &= h_1^2 + h_2^2, & \operatorname{tg}^2 u &= \operatorname{tg}^2 u_1 + \operatorname{tg}^2 u_2; \\ h'^2 &= h_1'^2 + h_2'^2, & \operatorname{tg}^2 u' &= \operatorname{tg}^2 u'_1 + \operatorname{tg}^2 u'_2. \end{aligned}$$

D'où immédiatement :

$$h = -f' \operatorname{tg} u', \quad h' = -f \operatorname{tg} u. \quad (3)$$

Rappelons que h est la distance à l'axe principal de la trace du rayon sur le plan focal dans l'espace objet ; u' est l'inclinaison du rayon conjugué dans l'espace image ; f' est la distance focale principale dans l'espace image.

Les formules fondamentales (3) relient donc les distances à l'axe principal des traces des rayons sur le plan focal dans un espace aux inclinaisons de leurs conjugués dans l'autre espace.

Il était sûr *a priori* que nous trouverions des relations telles que (3) entre la distance h et l'inclinaison u' d'une part, la distance h' et l'inclinaison u de l'autre, puisque :

1° à tout point du plan focal de l'espace objet correspond un point à l'infini, c'est-à-dire une direction, dans l'espace image, et inversement ;

2° le phénomène étant de révolution, à tous les points du plan focal également distants de l'axe dans un des espaces, correspond la même inclinaison dans l'autre.

9. Rapport de convergence. — Considérons deux points A et A' conjugués pris sur l'axe principal. Soient u et u' les angles que font deux rayons conjugués passant par ces points ; soient h et h' les distances à l'axe principal des traces de ces rayons sur les plans focaux.

On a :

$$h = x \operatorname{tg} u, \quad h' = x' \operatorname{tg} u'.$$

En vertu du paragraphe précédent, on a de plus :

$$h = -f' \operatorname{tg} u', \quad h' = -f \operatorname{tg} u.$$

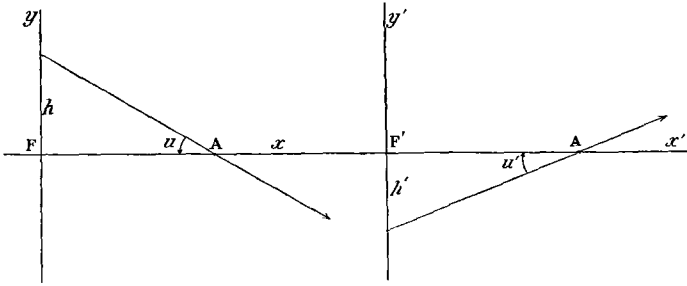


Fig. 6.

D'où :

$$\gamma = \frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} = -\frac{x}{f'} = -\frac{f}{x'};$$

γ s'appelle *rapport de convergence*. On vérifie immédiatement les relations :

$$\beta\gamma = -\frac{f}{f'}, \quad \frac{\alpha\gamma}{\beta} = 1.$$

10. Points cardinaux d'un système optique. — Le tableau suivant résume une discussion facile.

	α	β	γ	x	x'
	+1	$\pm\sqrt{-f:f'}$	$\pm\sqrt{-f':f}$	$\pm\sqrt{-ff'}$	$\mp\sqrt{-ff'}$
Plans principaux.	$-f':f$	+1	$-f:f'$	+f	+f'
P. princ. négatifs.	$-f':f$	-1	+f:f'	-f	-f'
Points nodaux.	$-f:f'$	$-f:f'$	+1	-f'	-f
P. nod. négatifs.	$-f:f'$	+f:f'	-1	+f'	+f

Les *plans principaux* sont caractérisés par un grossissement latéral positif et égal à l'unité; à un point A du plan principal objet correspond un point A' du plan principal image qui se trouve, dans les systèmes dioptriques que nous aurons à étudier, dans le même plan méridien, du même côté de l'axe et à égale distance. Dans une lentille infiniment mince, par exemple, les plans principaux coïncident l'un avec l'autre et avec le plan de cette lentille.

Les *plans principaux négatifs* sont caractérisés par un grossissement latéral négatif et égal à l'unité; à un point A du plan principal négatif objet correspond un point A' du plan principal négatif image qui se trouve, dans les systèmes dioptriques que nous aurons à considé-

rer, dans le même plan méridien, de côtés différents de l'axe et à la même distance.

Les *points nodaux* (ou de Listing) sont des points conjugués A et A' , tels que tout rayon qui passe par le point A sous une certaine inclinaison passe par le point A' sous la même inclinaison. Les rayons conjugués sont donc parallèles.

Même définition pour les *points nodaux négatifs*, à la différence près que les rayons conjugués ne sont pas parallèles, mais symétriques par rapport à l'axe principal.

Un système est complètement défini si l'on se donne les plans focaux et les plans principaux, puisque cela revient à se donner les plans focaux et les distances focales principales en grandeurs et en signes.

10. Points nodaux. — Il est facile de démontrer l'existence des points nodaux à partir des foyers et des plans principaux (fig. 7).

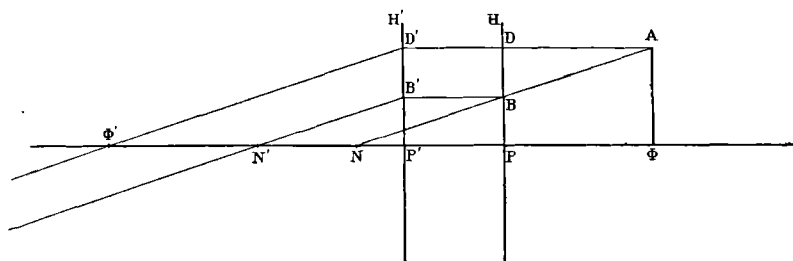


Fig. 7.

Soit les espaces objet et image définis par les foyers Φ et Φ' et les plans principaux H et H' . La lumière est censée se propager dans le sens $\Phi\Phi'$. On a donc en grandeurs et en signes :

$$f = \overline{\Phi P}, \quad f' = -\overline{\Phi' P'}.$$

Considérons le point A du plan focal de l'espace objet comme un point lumineux; il lui correspond dans l'espace image un point à l'infini.

Le cône de rayons émis par le point A se transforme donc dans l'espace image en un faisceau parallèle.

Le rayon AD parallèle à l'axe doit passer par le foyer Φ' de l'espace image; car on peut le considérer comme faisant partie d'un faisceau émis par un point de l'axe principal situé à l'infini dans l'espace objet.

D'ailleurs, en vertu des propriétés des plans principaux, au point D correspond le point D' tel que $\overline{DP} = \overline{D'P'}$. En définitive, le conjugué de AD est $D'\Phi'$.

Menons ABN parallèle à $D'\Phi'$. Traçons BB' parallèle à l'axe et

enfin $B'N'$ parallèle à BN : je dis que N et N' sont les points nodaux.

Ils correspondent bien aux conditions analytiques; on a en tenant compte des signes :

$$\overline{\Phi N} = \overline{P'\Phi} = -f', \quad \overline{\Phi N'} = \overline{AD} = \overline{P\Phi} = -f.$$

En effet, N est par rapport à Φ dans le sens de propagation de la lumière; donc $\overline{\Phi N}$ est positif. Mais P' est par rapport à Φ' en sens inverse de la propagation de la lumière; donc f' est négatif. D'où la relation : $\overline{\Phi N} = -f'$.

Même raisonnement pour la seconde relation.

Les points N et N' sont donc fixes et tels qu'un rayon ABN de l'espace objet ait pour conjugué un rayon $B'N'$ parallèle dans l'espace image.

11. Construction des images.

CONSTRUCTION AU MOYEN DES FOYERS ET DES PLANS PRINCIPAUX (fig. 8).

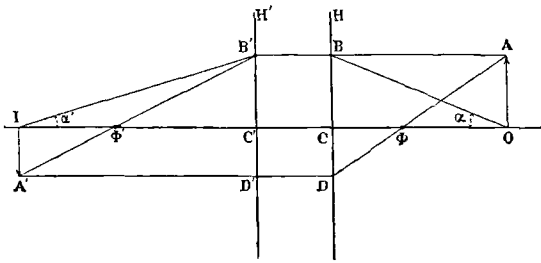


Fig. 8.

Soit AO l'objet, Φ et Φ' les foyers principaux, H et H' les plans principaux.

1° Menons le rayon $A\Phi D$.

En vertu de la propriété des plans principaux, tout rayon qui passe par D passe par D' tel que

$$\overline{CD'} = \overline{CD}.$$

En vertu de la propriété des foyers, tout rayon qui passe par Φ sort parallèlement à l'axe principal, car le conjugué de Φ est à l'infini sur cet axe.

Donc le conjugué de $A\Phi D$ est $D'A'$.

2° Menons le rayon AB parallèle à l'axe principal. Un raisonnement analogue nous montre que le conjugué est $B'\Phi'A'$.

Le conjugué A' de A est donné par l'intersection de deux droites connues.

CONSTRUCTION AU MOYEN DES FOYERS ET DES POINTS NODAUX. — Elle se ramène immédiatement à la précédente, puisque des points nodaux se déduisent immédiatement les plans principaux. On peut d'ailleurs utiliser une construction analogue à celle employée pour les lentilles infiniment minces.

12. Formules rapportées aux points principaux. — Les plans principaux étant définis par :

$$x = +f, \quad x' = +f',$$

il suffit de remplacer partout dans les formules,

$$x \text{ par } \xi + f, \quad x' \text{ par } \xi' + f',$$

pour que les origines des coordonnées se trouvent transportées aux traces de l'axe principal sur les plans principaux, traces que nous désignerons sous le nom de *points principaux*.

$$\begin{aligned} (\xi + f)(\xi' + f') &= ff', & \xi f' + \xi' f + \xi \xi' &= 0, \\ \frac{f}{\xi} + \frac{f'}{\xi'} + 1 &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Les grossissements ont pour expressions :

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{f}{\xi + f} = \frac{\xi' + f'}{f'}, \\ \gamma &= \frac{\text{tg } u'}{\text{tg } u} = -\frac{\xi + f}{f'} = -\xi \frac{f}{f'}. \end{aligned}$$

En prenant pour origines des coordonnées les *points principaux négatifs*, on obtient deux formules analogues.

Quand $f = -f'$, les expressions précédentes deviennent :

$$\beta = \frac{\xi'}{\xi}, \quad \gamma = \frac{\xi}{\xi'}.$$

13. Appareils télescopiques ou afocaux. — Nous avons vu que la correspondance des points conjugués est alors définie par les relations :

$$x' = a_1 x, \quad y' = b y, \quad z' = b z. \tag{1}$$

On a donc :

$$\alpha = \frac{dx'}{dx} = a_1 = \text{Constante}, \quad \beta = \frac{dy'}{dy} = b = \text{Constante}.$$

De tels systèmes sont complètement définis par les origines conjuguées O et O' des coordonnées x et x' , et par les deux grossissements α et β qui sont constants.

Faisons passer des plans de front par les origines O et O'.

Tout le début du calcul du § 7 subsiste. Nous avons par exemple :

$$y = h_1 - x \text{tg } u_1, \quad y' = h_1' - x' \text{tg } u_1'.$$

Mais les équations (1) du présent paragraphe donnent :

$$\frac{y'}{b} = h_1 - \frac{x'}{a_1} \text{tg } u_1.$$

$$\text{D'où : } h_1' = b h_1, \quad \gamma = \frac{\text{tg } u_1'}{\text{tg } u_1} = \frac{\text{tg } u'}{\text{tg } u} = \frac{b}{a_1} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Le *grossissement angulaire* γ est constant; on a comme précédemment :

$$\alpha \gamma = \beta.$$

14. Deux systèmes centrés coaxiaux placés l'un après l'autre. — Il s'agit de déterminer les positions des nouveaux plans focaux F et F' et les nouvelles distances focales (fig. 9).

Le plan focal F est défini par sa distance σ au plan focal de l'espace objet du premier système (espace objet I). Le plan focal F' est défini par sa distance σ' au plan focal de l'espace image du dernier système (espace image II). Nous désignons par Δ la distance du plan focal image du premier système au plan focal objet du second.

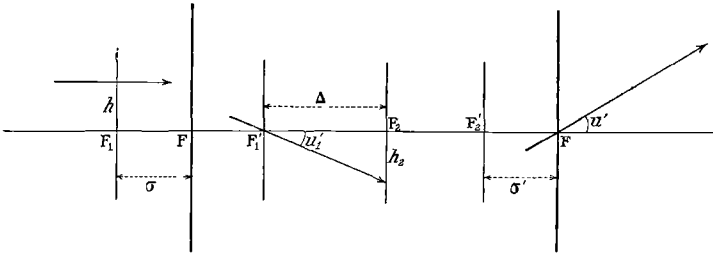


Fig. 9.

Écrivons que le foyer principal F de l'espace objet I est conjugué du point F_2 qui appartient à l'espace objet II, mais que nous pouvons considérer comme faisant partie de l'espace image I. Les rayons émis par F passeront par F_2 et formeront leur image à l'infini dans l'espace image II. La condition est (§ 6, 2^o) :

$$\sigma = \frac{f_1 f'_1}{\Delta}.$$

Écrivons que le foyer principal F' dans l'espace image II est conjugué du point F'_1 considéré comme faisant partie de l'espace objet II. Les rayons qui passent par F'_1 considéré comme faisant partie de l'espace image I, proviennent d'un point à l'infini situé dans l'espace objet I.

La condition est :
$$\sigma' = -\frac{f_2 f'_2}{\Delta}.$$

Les distances focales principales f et f' sont définies par les relations :

$$f = -\frac{h'}{\operatorname{tg} u}, \quad f' = -\frac{h}{\operatorname{tg} u'}.$$

Considérons un rayon parallèle à l'axe, à la distance h de l'axe dans l'espace objet I. Il coupe le plan F à cette distance même de l'axe. Il passe par le point F'_1 , et son inclinaison est alors :

$$\operatorname{tg} u'_1 = -\frac{h}{f'_1}.$$

Il coupe le plan F_2 à une hauteur :

$$-h_2 = \Delta \operatorname{tg} u'_1 = -\frac{h\Delta}{f'_1}.$$

Donc son inclinaison dans l'espace image II est :

$$\operatorname{tg} u' = -\frac{h_2}{f_2'} = -\frac{\Delta h}{f_1 f_2'}, \quad -\frac{h}{\operatorname{tg} u'} = \frac{f_1 f_2'}{\Delta}.$$

D'où :

$$f' = +\frac{f_1 f_2'}{\Delta}.$$

Considérons un rayon parallèle à l'axe, à la distance h' de l'axe dans l'espace image II. Le même raisonnement que ci-dessus donne :

$$f = -\frac{f_1 f_2}{\Delta}.$$

15. Un nombre quelconque de systèmes centrés coaxiaux placés l'un après l'autre. — Les systèmes sont définis par la position de leurs plans focaux et par leurs distances focales principales :

$$f_1, f_1'; \quad f_2, f_2'; \quad \dots f_q, f_q'.$$

Leurs positions relatives sont définies par les distances :

$$F_1'F_2 = \Delta_1, \quad F_2'F_3 = \Delta_2, \quad \dots F_{q-1}'F_q = \Delta_{q-1}.$$

Nous voulons déterminer la position des plans focaux F et F' du système entier. Nous représentons par σ la distance F_1F dans l'espace objet 1, par σ' la distance $F_q'F'$ dans l'espace image q .

Un point à l'infini de l'espace objet 1 fait son image en F_1' dans l'espace image 1. Il fait son image à une distance σ_2' de F_2' dans l'espace image 2 :

$$\sigma_2' = -\frac{f_2 f_2'}{\Delta_1}.$$

Le signe — provient de ce que F_1' est par rapport à F_1 du côté d'où vient la lumière, si Δ_1 est positif.

Le point que nous venons de déterminer est à une distance absolue $\Delta_2 - \sigma_2'$ du plan F_2 ; mais cette distance doit être comptée négativement. L'image de ce point dans l'espace image 3 est définie par la distance σ_3' au plan F_3 :

$$\sigma_3' = -\frac{f_3 f_3'}{\Delta_2 - \sigma_2'}.$$

On a généralement :

$$\sigma_p' = -\frac{f_p f_p'}{\Delta_{p-1} - \sigma_{p-1}'}.$$

En définitive, σ' est donnée par une fraction continue qu'il est fort inutile d'écrire. Il importe seulement de remarquer que le calcul se fait de proche en proche sans aucune difficulté.

On procède de même pour calculer σ .

Un point à l'infini de l'espace image q fait son image au foyer F_q de l'espace objet q .

Il s'agit de trouver d'abord où est le conjugué de ce point dans l'espace objet $q-1$. On trouve :

$$\sigma_{q-1} = \frac{f_{q-1} f'_{q-1}}{\Delta_{q-1}}.$$

Le point ainsi trouvé, considéré comme étant dans l'espace image $q-2$, est à la distance $\Delta_{q-2} - \sigma_{q-1}$ du plan focal. Cherchons la position du conjugué dans l'espace objet $q-2$.

$$\sigma_{q-2} = \frac{f_{q-2} f'_{q-2}}{\Delta_{q-2} - \sigma_{q-1}};$$

et ainsi de proche en proche. On peut écrire σ sous forme de fraction continue, mais cela n'a pas d'intérêt.

16. Distances focales principales. — Le calcul des distances focales principales du système se fait de proche en proche sans difficulté.

Dans l'espace objet 1, on considère un rayon parallèle à l'axe et à la distance h de l'axe. On peut calculer (§ 14) son inclinaison dans l'espace image 1. Connaissant Δ_1 , on peut calculer à quelle distance de l'axe il rencontre le plan focal F_2 dans l'espace objet 2. On connaît donc son inclinaison dans l'espace image 2. Le calcul précédent nous dit en quel lieu il coupe l'axe principal dans l'espace image 2. Connaissant Δ_2 , on sait à quelle distance de l'axe il rencontre le plan focal F_3 dans l'espace objet 3. On connaît donc son inclinaison dans l'espace image 3. Et ainsi de suite. Connaissant h et l'inclinaison dans l'espace image q , on a immédiatement f' .

Pour calculer f , on procède de même, mais en sens inverse.

Il est aussi facile de démontrer une proposition générale très importante.

Nous avons trouvé pour deux systèmes :

$$f' = \frac{f_1 f'_2}{\Delta}, \quad f = -\frac{f_1 f_2}{\Delta}; \quad \frac{f}{f'} = -\frac{f_1 f_2}{f'_1 f'_2}.$$

S'il y a trois systèmes, on peut remplacer les deux premiers par celui qu'on vient de calculer et appliquer les formules précédentes. Puis ainsi de proche en proche. On trouve en définitive :

$$\frac{f}{f'} = (-1)^{q-1} \frac{f_1 f'_2 \cdots f_q}{f'_1 f'_2 \cdots f'_q}.$$

Le rapport $f : f'$ dépend donc des distances focales principales et non des positions relatives des systèmes.

On remarquera qu'il est toujours négatif dans tous les cas que nous aurons à considérer.

Application aux instruments dioptriques.

Nous venons de discuter un problème de Mathématiques pures; il s'agit maintenant de voir dans quelle mesure il s'applique aux instruments d'optique. Nous démontrerons à nouveau la plupart des propositions déjà rencontrées par des considérations géométriques qui rendent plus concrète l'analyse des pages précédentes.

17. Propriétés du dioptré. — On appelle *dioptré* le système formé par une surface sphérique limitant deux milieux d'indices différents. Cherchons à quelles conditions un tel système est stigmatique, aplanétique et sans distorsion pour tout l'espace.

Nous emploierons les symboles et conventions de signes proposés par les collaborateurs de Carl Zeiss et usités en Allemagne : ce choix, qui est un hommage aux travaux éminents de l'Université d'Iéna, en facilitera au lecteur une étude plus approfondie.

Il est entendu que *l'espace objet réel* est situé à gauche de la surface du dioptré, en supposant la lumière se propageant de gauche à droite; *l'espace objet virtuel* est situé à droite du dioptré et se confond avec *l'espace image réel*; enfin *l'espace image virtuel* est à gauche du dioptré. Analytiquement les espaces objet et image sont indéfinis. Il est fort inutile d'insister sur la définition des objets ou images réels ou virtuels, avec laquelle le lecteur doit être familiarisé (voir Cours de Première, Optique).

Nous pouvons intervertir l'espace objet et l'espace image : c'est en cela que consiste le principe du retour des rayons. Analytiquement la proposition est évidente.

Nous poserons (fig. 10) :

$$\begin{aligned} \overline{OA} &= p, & \overline{OA'} &= p'; \\ \overline{BA} &= s, & \overline{BA'} &= s'; \\ \overline{CA} &= c, & \overline{CA'} &= c'; \\ \overline{OC} &= R, & \overline{HB} &= h. \end{aligned}$$

Les longueurs s, s', p, p', c, c' , sont comptées à partir des points O, B, C, dans le sens de propagation de la lumière; R est compté positivement quand la surface présente sa convexité à la lumière. Les inclinaisons u et u' et l'angle φ ont respectivement les mêmes signes que $h : p, h : p', h : R$.

On vérifiera que dans la figure 10 toutes les quantités sont positives.

On a :

$$s^2 = (p - R)^2 + R^2 + 2R(p - R) \cos \varphi,$$

$$s'^2 = (p' - R)^2 + R^2 + 2R(p' - R) \cos \varphi.$$

$$c = p - R, \quad c' = p' - R,$$

$$\frac{c}{R} = \frac{\sin i}{\sin u}, \quad \frac{c'}{R} = \frac{\sin i'}{\sin u'}, \quad \frac{c}{c'} = \frac{p - R}{p' - R} = \frac{\sin i}{\sin i'} \frac{\sin u'}{\sin u}.$$

$$\frac{\sin i}{\sin i'} = \frac{n'}{n}, \quad \frac{s}{s'} = \frac{\sin u'}{\sin u}.$$

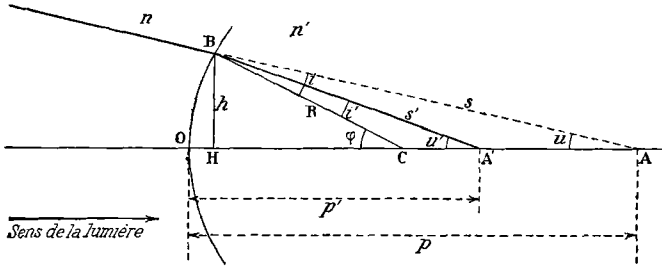


Fig. 10.

D'où enfin :

$$\frac{sn'}{s'n} = \frac{p - R}{p' - R}, \quad n' \frac{p' - R}{s'} = n \frac{p - R}{s}.$$

18. Approximation dite de Gauss. — Elle consiste à négliger les termes en φ^2 et par conséquent à poser :

$$p = s, \quad p' = s'.$$

L'équation ci-dessus trouvée devient, en divisant les deux membre

par R :

$$Q_0 = n \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{p} \right) = n' \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{p'} \right).$$

On peut encore écrire cette équation sous la forme :

$$-\frac{n}{p} + \frac{n'}{p'} - \frac{n' - n}{R} = 0. \quad (1)$$

Il est clair que les plans principaux sont ici confondus avec le plan tangent au dioptre au point O. Il faut donc comparer la formule (1) avec la formule (1) du § 12 :

$$\frac{f}{p} + \frac{f'}{p'} + 1 = 0.$$

D'où : $f = \frac{nR}{n' - n}$, $f' = -\frac{n'R}{n' - n}$, $f : f' = -n : n'$,

f et f' sont toujours de signes contraires (§ 7).

Il ne faut pas oublier en effet, pour comprendre cette question de signe, que f et f' mesurent les distances des foyers aux plans principaux (§ 10) et non les distances des plans principaux aux foyers

Supposons pour préciser $n' > n$. Les rayons parallèles dans l'espace objet viendront converger en un foyer réel, qui est par rapport au point O dans le sens de la propagation de la lumière. Donc f' est négatif; car, du foyer F' vers le point O, on se déplace en sens inverse de la propagation de la lumière.

Pour que les rayons soient parallèles dans l'espace image, il faut qu'ils divergent d'un foyer F réel qui se trouve à gauche du point O. Donc f est positif, car du foyer F au point O on se déplace dans le sens de propagation de la lumière.

On vérifiera facilement que les foyers principaux sont réels, si le dioptré tourne sa convexité vers le milieu le moins réfringent; les foyers sont virtuels, si le dioptré tourne sa concavité vers le milieu le moins réfringent.

Les foyers réels correspondent aux conditions : $f > 0, f' < 0$.

Les foyers virtuels correspondent aux conditions : $f < 0, f' > 0$.

Il est clair qu'un dioptré n'est pas aplanétique, sauf pour les points d'un plan de front très voisins de l'axe considéré.

D'ailleurs, la direction de l'axe principal est arbitraire dans le cas d'une surface réfringente unique. Toute droite passant par le centre de courbure du dioptré est un axe principal.

Plaçons un diaphragme au centre C du dioptré D, de manière à limiter les faisceaux envoyés aux rayons presque normaux au dioptré. Il est clair qu'à une surface sphérique S de centre C dans l'espace objet correspond une surface sphérique S' concentrique dans l'espace image. Les deux surfaces se correspondent stigmatiquement, pourvu que le diaphragme soit de faible ouverture (fig. 11).

Il résulte de la formule (1) que si nous remplaçons la surface S par un plan P, la surface correspondante P' est une surface de révolution intérieure à la surface S'.

Cette remarque suffit pour montrer à quel point l'aplanétisme est loin d'être réalisé pour un plan de front par rapport à un axe principal arbitrairement choisi.

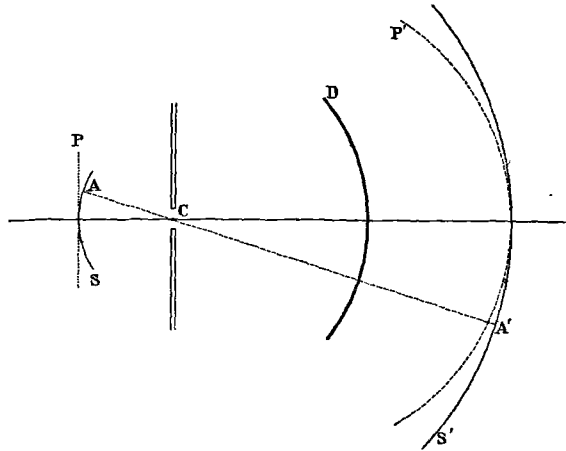


Fig. 11.

19. Lentilles épaisses, existence des plans principaux. — Considérons un système centré formé de deux surfaces sphériques limitant trois milieux 1, 2, 3. Je vais démontrer directement qu'il existe dans les milieux extrêmes 1 et 3 (espace objet du système I et espace image du système II) deux plans appelés plans principaux, conjugués, et tels qu'à un point du premier corresponde un point du second à la même distance de l'axe. Les points conjugués sont par raison de symétrie dans le même méridien.

Nous remplaçons dans nos constructions les sphères par des plans; chaque dioptré est défini par son plan et ses foyers principaux.

Soient donc (fig. 12) trois milieux 1, 2, 3, séparés par les surfaces C

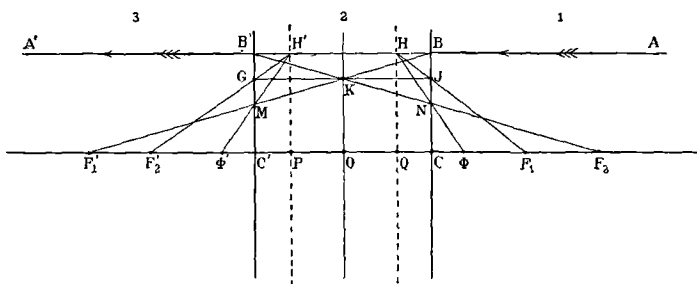


Fig. 12.

et C' ; F_1 et F_1' sont les foyers du premier système (milieux 1 et 2); F_2 et F_2' sont les foyers du second (milieux 2 et 3).

Soient H et H' deux points correspondants des plans principaux P et Q dont nous voulons prouver l'existence. Le rayon AH parallèle à l'axe est un des rayons incidents; le rayon $H'A'$, dans le prolongement du premier, est un des rayons émergents.

AH se réfracte au point B et passe (réellement ou virtuellement) par le foyer F_1' de l'espace image du premier dioptré; $H'A'$ provient d'un rayon qui se réfracte au point B' après avoir passé (réellement ou virtuellement) par le foyer F_2 de l'espace objet du second dioptré. Les rayons conjugués de AH et $H'A'$ se coupent en K .

Si les points H et H' sont censés appartenir aux milieux 1 et 3 (c'est-à-dire réellement ou virtuellement faire partie l'un de l'espace objet du premier dioptré, l'autre de l'espace image du second) et sont conjugués l'un de l'autre, ils admettent pour conjugué intermédiaire le point K dans le milieu 2, qui est simultanément espace image du dioptré 1 et espace objet du dioptré 2.

En d'autres termes, le faisceau conique qui (réellement ou virtuellement) se concentre en H dans le milieu 1 a son sommet en K après réfraction sur la surface C , et a son sommet en H' après une nouvelle réfraction sur la surface C' .

Nous pouvons maintenant construire aisément les points H et H'.

Menons KJ, joignons JF_1 et prolongeons; nous déterminons le point H. Considérons en effet les deux rayons ABH et F_1JH aboutissant en H; après réfraction sur le premier dioptré, ils deviennent BF_1' et JK. Donc K est bien l'image de H.

Menons KG, joignons GF_2' , prolongeons; nous déterminerons le point H'. Considérons en effet les deux rayons KG et F_2KB' passant en K; ils deviennent, après réfraction sur le dioptré C', $H'B'A'$ et $H'GF_2'$. Donc H' est bien l'image de K et par conséquent de H.

Il ne nous reste plus qu'à montrer que la position des plans P et Q est indépendante de la droite AA' choisie. Or il est évident que, les points F_1' et F_2 étant fixes, quand on déplace AA' parallèlement à elle-même, le point K décrit une droite KO normale à l'axe. D'autre part, les points K sont conjugués des points H et H'; donc les points H et H' décrivent eux-mêmes des droites normales à l'axe. En définitive, il existe deux plans P et Q images l'un de l'autre dans les milieux 1 et 3, et tels que les points conjugués H et H' contenus dans ces plans sont à la même distance de l'axe.

20. Foyers principaux. — Considérons le rayon AB passant en H; il passe après réfraction en F_1' . Il rencontre le second dioptré en M. Mais H' est l'image de H. Donc il émerge suivant $H'M\Phi'$. Le point Φ' est l'un des foyers principaux.

Considérons le rayon A'B' passant par H'. Il passe après réfraction par F_2 . Il touche le premier dioptré en N. Mais H est l'image de H'. Donc il émerge suivant $HN\Phi$. Le point Φ est l'autre foyer principal.

En définitive, une lentille épaisse possède deux plans principaux et deux foyers principaux qui suffisent entièrement à la définir. Nous montrerons tout à l'heure comment, ces éléments une fois connus, les constructions s'exécutent.

Le cas d'un dioptré se ramène au cas d'une lentille épaisse; il suffit de supposer que les plans principaux coïncident tous deux avec la surface du dioptré.

21. Cas général; système centré quelconque. — Pour étendre la proposition précédente à un nombre quelconque de surfaces, il suffit de la démontrer pour deux systèmes I et II définis par leurs plans principaux et leurs foyers. La généralisation pour un nombre quelconque de systèmes est alors évidente.

Refaisons la construction de la figure 12 à la différence près que les surfaces C et C' se dédoubleront et seront remplacées par les plans principaux correspondants (fig. 13).

Soit AA' un rayon parallèle à l'axe; le rayon incident AB rencontre en B le plan principal de l'espace objet du système I. D'après la propriété des plans principaux, il émerge en B' dans l'espace image du système I qui est l'espace objet du système II; il passe ensuite réel-

lement ou virtuellement en F'_1 foyer de l'espace image du système I.

Un raisonnement identique montre que le rayon $A'D'$ de l'espace image du système II a pour conjugué la droite DF_2 dans l'espace objet de ce système. Les deux rayons $DF_2, B'F'_1$ se coupent en K. Cherchons le conjugué de ce point dans l'espace objet du système I et dans l'espace image du système II.

Menons KJ' ; à ce rayon correspond dans l'espace objet I un rayon passant par J' . D'ailleurs KJ' est parallèle à l'axe, donc le rayon conjugué dans l'espace objet I passe par F_1 . Prolongeons, nous déterminons le point H.

Menons KG ; à ce rayon correspond dans l'espace image II un rayon passant par G' . D'ailleurs KG est parallèle à l'axe, donc le rayon

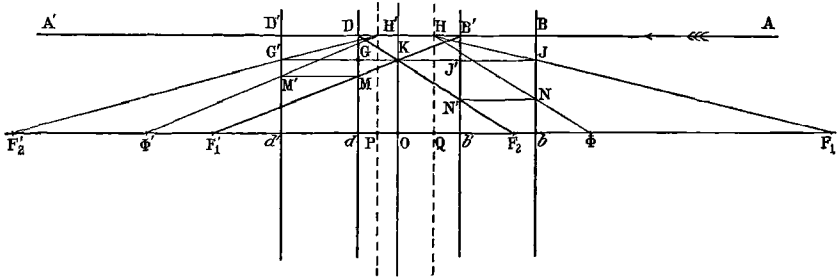


Fig. 13.

conjugué dans l'espace image II passe par F'_2 . Prolongeons, nous déterminons le point H' .

Quand la droite AA' se déplace parallèlement à elle-même, K décrit un plan. Donc H et H' décrivent deux plans, puisque KO est le plan conjugué de HQ et admet comme conjugué $H'P$ dans l'espace image II.

CONSTRUCTION DES FOYERS PRINCIPAUX. — $ABB'H$ donne $B'KM$ qui donne $H'M'$. Prolongeons, nous déterminons le foyer Φ' de l'espace image du système tout entier.

$A'D'DH'$ a pour conjugué DKN' qui provient de HN . Prolongeons, nous déterminons le foyer Φ de l'espace objet du système tout entier.

En définitive, tout système de révolution, limité par un nombre quelconque de surfaces séparant des milieux d'indices différents, est défini, pour un champ et une ouverture très petits, par deux plans principaux et deux foyers principaux.

Nous savons que la connaissance de ces éléments suffit pour résoudre tous les problèmes numériques ou graphiques de correspondance point par point des espaces objet et image.

En particulier nous savons en déduire (§ 11) l'existence et la position des points nodaux, et construire (§ 11) grâce à eux l'image d'un point.

22. Distance focale principale d'une lentille épaisse. — Nous appellerons d l'épaisseur de la lentille, c'est-à-dire la distance des surfaces des deux dioptries qui la limitent. Nous sommes ramenés au problème plus général du § 14, où l'on suppose deux systèmes coaxiaux quelconques placés l'un après l'autre.

Soit n l'indice de la lentille, R_1 et R_2 les rayons de courbure de ses faces pris avec leurs signes. Nous avons (§ 18) :

$$f_1 = + \frac{R_1}{n-1}, \quad f'_1 = - \frac{nR_1}{n-1};$$

$$f_2 = - \frac{nR_2}{n-1}, \quad f'_2 = + \frac{R_2}{n-1}.$$

D'ailleurs (fig. 14) :

$$\overline{O_1O_2} = d, \quad \overline{O_1F'_1} = -f'_1, \quad \overline{F_2O_2} = +f_2;$$

$$d = \Delta + f_2 - f'_1, \quad \Delta = d - f_2 + f'_1.$$

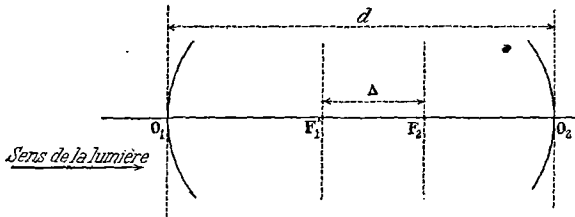


Fig. 14.

Nous pouvons écrire :

$$\Delta = \frac{R}{n-1}, \quad \text{en posant : } R = n(R_2 - R_1) + d(n-1).$$

Appliquons les formules du § 14; il vient :

$$f = \frac{nR_1R_2}{(n-1)R}, \quad f' = - \frac{nR_1R_2}{(n-1)R} = -f.$$

Les distances σ du foyer F_1 au foyer F , et σ' du foyer F'_2 au foyer F' , sont :

$$\sigma = \overline{F_1F} = - \frac{nR_1^2}{(n-1)R}, \quad \sigma' = \overline{F'_2F'} = \frac{nR_2^2}{(n-1)R}.$$

Il est commode de rapporter les foyers F et F' aux surfaces terminales de la lentille épaisse. Nous avons :

$$s_F = \overline{O_1F} = \overline{O_1F_1} + \overline{F_1F} = -f_1 + \sigma = - \frac{R_1(nR_1 + R)}{(n-1)R},$$

$$s_{F'} = \overline{O_2F'} = \overline{O_2F'_2} + \overline{F'_2F'} = -f'_2 + \sigma' = \frac{R_2(nR_2 - R)}{(n-1)R}.$$

Les points principaux et les points nodaux coïncident puisque $f' = -f$ (voir fig. 7).

D'après le tableau du § 9, leurs distances aux foyers sont respectivement f et f' ; leurs distances aux surfaces qui limitent les lentilles

$$\text{sont : } s_H = \overline{O_1H} = \overline{O_1F} + \overline{FH} = \overline{O_1F} + f = -\frac{R_1 d}{R},$$

$$s_{H'} = \overline{O_2H'} = \overline{O_2F'} + \overline{F'H'} = \overline{O_2F'} + f' = -\frac{R_2 d}{R}.$$

LENTILLES INFINIMENT MINCES. — Les formules pour les lentilles infiniment minces se déduisent des précédentes en faisant :

$$d = 0, \quad R = n(R_2 - R_1);$$

$$-f' = f = \frac{1}{n-1} \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}, \quad \frac{1}{f} = -\frac{1}{f'} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right),$$

$$s_F = -f, \quad s_{F'} = -f'; \quad s_H = s_{H'} = 0.$$

La relation qui relie p et p' est :

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Par exemple, pour une lentille convergente et un objet réel : $f > 0$, $p < 0$. Si $(-p) > f$, $(-1 : p) < 1 : f$, nous savons que l'image est réelle; conformément à nos conventions, nous trouvons :

$$\frac{1}{p'} = \frac{1}{f} - \left(-\frac{1}{p} \right), \quad p' > 0.$$

Si la lentille est biconvexe, il faut poser : $R_1 > 0$, $R_2 < 0$.

23. Positions des plans principaux ou des points nodaux dans les lentilles épaisses. — Cherchons la distance des plans principaux (ou des points nodaux qui sont dans les plans principaux).

On a : $\overline{HH'} = \overline{HO_1} + \overline{O_1O_2} + \overline{O_2H'} = -s_H + d + s_{H'}$,

$$\overline{HH'} = (n-1)d \frac{R_2 - R_1 + d}{R}.$$

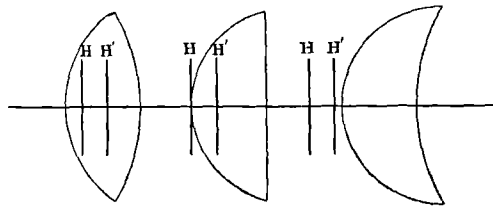


Fig. 15.

Quand l'épaisseur est négligeable devant $R_2 - R_1$, l'expression précédente se réduit à :

$$\overline{HH'} = \frac{n-1}{n} d.$$

Les points principaux se présentent toujours dans le même ordre, le point qui appartient à l'espace objet est du côté de cet espace (fig. 15 et 16).

Dans le cas d'une lentille biconvexe ou biconcave, ils sont tous deux à l'intérieur de la lentille, plus près de la face la plus courbe.

Si la lentille devient plan courbe, l'un des points est sur la face

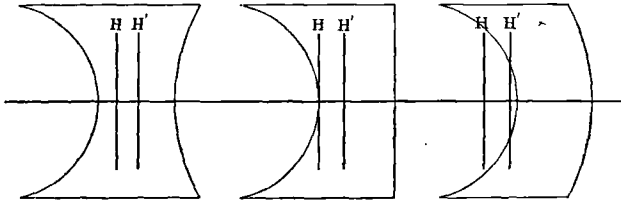


Fig. 16.

courbe, l'autre à l'intérieur. Dans le cas des ménisques, l'un au moins des points est à l'extérieur, du côté de la face la plus courbe.

On vérifie aisément ces résultats soit en appliquant la construction du § 19 à deux dioptries (on a le soin de se donner les distances focales de chaque dioptre dans le rapport 1 : n), soit à partir des formules du paragraphe précédent.

24. Cas général : rapport des distances focales principales.

— Au § 16, nous avons démontré d'une manière générale la formule :

$$\frac{f}{f'} = (-1)^{q-1} \frac{f_1 f_2 \dots f_q}{f'_1 f'_2 \dots f'_q}.$$

Elle est naturellement applicable à un système formé d'un nombre quelconque de dioptries.

Nous savons que pour chaque dioptre les distances focales sont de signes contraires et proportionnelles aux indices des milieux correspondants. Pour former q dioptries, il faut q + 1 milieux dont nous représentons les indices par n₀, n₁, ... n_q. On a :

$$\frac{f_1}{f'_1} = -\frac{n_0}{n_1}, \quad \frac{f_2}{f'_2} = -\frac{n_1}{n_2}, \quad \dots \quad \frac{f_q}{f'_q} = -\frac{n_{q-1}}{n_q}.$$

$$\frac{f}{f'} = (-1)^{q-1} (-1)^q \frac{n_0}{n_1} \frac{n_1}{n_2} \dots \frac{n_{q-1}}{n_q} = -\frac{n_0}{n_q}.$$

Quel que soit le système, les distances focales sont proportionnelles aux indices des milieux extrêmes correspondants. En particulier si les milieux extrêmes sont identiques, les distances focales sont égales en valeur absolue. Elles sont toujours de signes contraires.

Ces propositions sont vraies quels que soient le nombre et les courbures des surfaces, quels que soient les indices des milieux intermédiaires.

Dire que les distances focales f et f' sont de signes contraires, signifie que si le plan principal objet est à droite du foyer de l'espace objet, le plan principal image est à gauche du foyer de l'espace image; ou inversement. Les plans principaux peuvent être d'ailleurs placés n'importe comment l'un par rapport à l'autre; celui qui correspond au milieu extrême de droite n'est pas nécessairement à droite de celui qui correspond au milieu extrême de gauche.

Rappelons (§ 18) que le système est dit :

convergent, si $f > 0, \quad f' < 0;$
divergent, si $f < 0, \quad f' > 0.$

25. Théorème de Lagrange. — Il est clair que le grossissement latéral β dû à un nombre quelconque de systèmes est le produit des grossissements latéraux dus à chacun d'eux :

$$\beta = \beta_1 \beta_2 \dots \beta_q.$$

De même le rapport de convergence γ dû à un nombre quelconque de systèmes est le produit des rapports dus à chacun d'eux :

$$\gamma = \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_q.$$

On tire de là :

$$\beta\gamma = \beta_1 \gamma_1 \cdot \beta_2 \gamma_2 \dots \beta_q \gamma_q.$$

D'après les formules démontrées au § 8, on peut écrire :

$$\beta\gamma = (-1)^q \frac{f_1}{f'_1} \frac{f_2}{f'_2} \dots \frac{f_q}{f'_q} = \frac{n_0}{n_q}. \quad (1)$$

Soit O une dimension de l'objet, I la dimension homologue de l'image; soit u_0 et u_q les inclinaisons dans les milieux extrêmes.

$$\text{On a :} \quad \beta = \frac{I}{O}, \quad \gamma = \frac{\text{tg } u_q}{\text{tg } u_0};$$

$$\text{d'où :} \quad On_0 \text{tg } u_0 = In_q \text{tg } u_q.$$

Comme le système n'est aplanétique que pour de petits angles, la formule n'est applicable que pour de petites valeurs de u_0 et de u_q ; elle se réduit à :

$$On_0 u_0 = In_q u_q.$$

Sous cette forme, elle a été donnée par Lagrange.

26. Détermination expérimentale des caractéristiques d'un système : les milieux extrêmes ne sont pas identiques. — On rapporte toutes les distances à une origine prise sur l'axe du système. Pratiquement on prend comme origines les faces terminales du système; connaissant son épaisseur, on ramène ces origines l'une à l'autre.

1° On détermine la position des foyers principaux.

On éclaire, avec un collimateur réglé sur l'infini, l'appareil disposé

sur un banc d'optique. Avec un viseur dont on peut mesurer les déplacements, on vise successivement un repère tracé à l'encre sur une des surfaces terminales, et l'image de l'infini. Le déplacement du viseur donne la distance du foyer à la face terminale.

On recommence après avoir retourné l'appareil. On a ainsi la position des deux foyers.

Il faut se garder de considérer les distances ainsi trouvées comme les distances focales principales; elles peuvent en différer considérablement. Les distances focales principales sont les distances des foyers aux plans principaux qui ne coïncident généralement pas avec les faces terminales.

2° On détermine la position des plans principaux, ce qui revient à trouver f et f' .

a) On mesure le produit ff' en déterminant les distances x et x' d'un point et de son image aux foyers correspondants. On a :

$$xx' = ff'.$$

L'emploi de plusieurs groupes de points conjugués peut donner des vérifications de la valeur du produit ff' , mais ne permet pas la mesure séparée de f et de f' .

b) On prend pour objet un micromètre et on mesure le grossissement latéral β (§ 6).

$$\beta = \frac{f}{x} = \frac{x'}{f'}.$$

Connaissant β , x et x' , on calcule f et f' .

On sait d'après le 1° si le système est convergent ou divergent; il n'y a aucune ambiguïté pour placer convenablement les plans principaux par rapport aux foyers.

27. Cas particulier : les milieux extrêmes sont identiques.

I. La mesure d'un grossissement devient inutile, puisqu'on sait que les distances focales principales sont égales en valeur absolue. On détermine donc la position des foyers par rapport aux faces terminales, et les distances x et x' d'un point et de son image aux foyers correspondants.

Il est généralement avantageux de prendre pour objet un repère tracé à l'encre sur la face terminale même de l'appareil. On détermine, par le moyen d'un viseur, la position de son image quand on le regarde à travers le système. On trouve une vérification en retournant le système et prenant comme second objet un repère tracé à l'encre sur l'autre face terminale.

Voici la raison de ce choix.

Admettons deux erreurs absolues dx et dx' dans la mesure de x et de x' ; on a généralement :

$$xx' = -f^2, \quad 2 \frac{df}{f} = \frac{dx}{x} + \frac{dx'}{x'}.$$

Pour que l'erreur relative dans le calcul de f ne soit pas trop grande, il faut que ni x ni x' ne soient trop petits. Il est avantageux de les prendre à peu près égaux. Le système des plans principaux négatifs :

$$x = -f, \quad x' = -f' = +f,$$

risque de donner une trop grande longueur à l'appareil. On choisit donc le système des plans principaux positifs :

$$x = f, \quad x' = f' = -f,$$

ou plus exactement des points voisins de ce système. Comme, à moins d'une longueur peu ordinaire du système optique étudié, les surfaces terminales sont peu distantes des points nodaux ou principaux, on est conduit à choisir pour objet un repère tracé à l'encre sur une de ces surfaces.

La méthode précédente est la plus précise, pourvu qu'on ait une installation appropriée.

II. On peut opérer différemment.

Après avoir déterminé la position des foyers par rapport aux surfaces terminales, on détermine la position d'un objet et de son image de manière que le grossissement latéral β soit égal à -1 . Il faut prendre (§ 9) :

$$x = -f, \quad x' = -f' = f.$$

On utilise donc les plans principaux ou points nodaux négatifs.

On emploie comme objet et écran des verres dépolis sur lesquels on a tracé à l'encre le même système de circonférences concentriques : on déplace ces verres jusqu'à obtenir la superposition des images des cercles de l'un avec les cercles de l'autre servant d'écran. La distance de l'écran au foyer correspondant mesure la distance focale principale.

III. On peut déterminer directement la position des points nodaux et par conséquent des plans principaux, en faisant tourner l'objectif à étudier autour d'un axe Λ normal à son axe optique. L'axe Λ passe par le point nodal de l'espace image, quand l'image d'un objet éloigné reste immobile malgré les petites rotations de l'objectif autour de l'axe Λ .

En effet, quelle que soit la position du point nodal de l'espace objet, les rayons issus de l'objet (par hypothèse très éloigné) et qui passent par ce point, conservent pendant la rotation une direction quasiment invariable. Donc les rayons conjugués qui passent par le point nodal de l'espace image, conservent aussi une direction invariable. Comme ce point reste fixe par hypothèse, puisqu'il est amené sur l'axe Λ , l'image est immobile.

Certains appareils photographiques panoramiques utilisent cette propriété.

28. Diaphragmes et pupilles. Anneau oculaire. — Les faisceaux de rayons utilisés pour la formation des images sont généralement limités par un diaphragme (écran) disposé normalement à l'axe et percé d'un orifice circulaire dont le centre est sur l'axe.

Soit P un tel diaphragme situé dans un des milieux en nombre quelconque formant l'appareil. Considérons les images du trou P construites de proche en proche à travers tous les dioptries ; nous aurons autant de trous (trou réel et images) qu'il y a de milieux. On donne à ces trous le nom de *pupilles*. Celle qui appartient à l'espace objet s'appelle *pupille d'entrée* ; celle qui appartient à l'espace image est la *pupille de sortie*. Il peut se faire que ce soit l'une de ces deux pupilles qui soit matériellement réalisée, mais ce n'est pas nécessaire ; il arrive au contraire souvent qu'elles sont virtuelles.

Tous les points de ces pupilles forment des groupes conjugués de proche en proche. Donc tous les rayons qui passent par l'une d'entre elles passent par toutes les autres, à la condition bien entendu de ne pas être arrêtés en chemin.

Parmi les rayons qui émanent de l'objet, seuls sont utiles ceux qui pénètrent à travers la pupille d'entrée, pupille qui peut ne pas être matériellement réalisée, qui peut même être virtuelle (c'est-à-dire qui, tout en appartenant analytiquement à l'espace objet, peut ne pas se trouver effectivement dans le premier milieu).

En fait dans un appareil il y a toujours une infinité de diaphragmes dont les trous sont constitués par la section du tube qui contient l'appareil, et par les lentilles qui le constituent. Celui qui joue réellement le rôle de diaphragme est celui dont les images ont des grandeurs et des situations telles que les rayons qui le traversent puissent *effectivement* traverser toutes ses images, sans être arrêtés par un autre diaphragme.

Nous reviendrons là-dessus au sujet de l'ouverture des objectifs (§ 99).

Aux pupilles d'entrée et de sortie se rattache la question de l'*anneau oculaire*.

Prenons pour pupille d'entrée l'objectif d'une lunette ; ce qui revient à dire : admettons que tous les rayons qui passent par l'objectif sortent de l'appareil, qu'aucun n'est arrêté dans la traversée de l'instrument. Il résulte de la construction de la lunette que la pupille de sortie, *image de l'objectif à travers l'oculaire*, est réelle ; elle s'appelle *anneau oculaire*.

Pour recevoir le plus de lumière possible, il faut évidemment que l'observateur fasse coïncider sa pupille avec l'anneau oculaire ; c'est dans le plan de cet anneau qu'on dispose l'*œilleton*.

Nous reviendrons sur cette question quand nous reparlerons de la théorie générale des instruments d'optique.

29. **Profondeur du champ. Tolérance de mise au point.** — Soit un appareil dioptrique aplanétique dont la pupille d'entrée est représentée par π . Plaçons en P' un écran ou une plaque photographique; au plan P de l'espace image correspond *rigoureusement par hypothèse* un plan P de l'espace objet. Cherchons à définir la précision avec laquelle est obtenue l'image du point B placé à la distance positive $\Delta\xi$ du plan P (fig. 17).

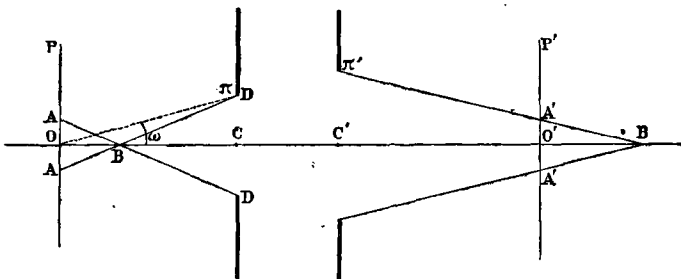


Fig. 17.

Les rayons qui émanent du point B et qui pénètrent dans la pupille d'entrée appartiennent, si l'on veut, à un cercle de diamètre \overline{AA} situé dans le plan P .

Au cercle correspond dans le plan P' un cercle de diamètre :

$$\overline{A'A'} = \beta \cdot \overline{AA}.$$

Nous donner une limite ε pour le diamètre $\overline{A'A'}$ revient à nous donner une limite : $\varepsilon ; \beta$ pour le diamètre \overline{AA} .

Pour aller plus loin, supposons que la pupille d'entrée coïncide avec le plan principal pour l'espace objet. Nous aurons donc entre les distances CO et $C'O'$ la relation (§ 12) :

$$-\frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi'} = \frac{1}{f}.$$

Le point O étant par rapport au point C du côté d'où vient la lumière, ξ est négatif.

$$\text{Posons : } O = \overline{DD}, \quad \text{tg } \omega = \overline{DC} : \overline{OC} = -O : 2\xi.$$

On a :

$$\frac{\overline{AA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{DD}}{\overline{BC}}, \quad \frac{\varepsilon}{\beta} = \Delta\xi \frac{O}{\xi + \Delta\xi} = -2\Delta\xi \frac{\xi}{\xi + \Delta\xi} \text{tg } \omega.$$

Négligeant $\Delta\xi$ devant ξ et remplaçant β par sa valeur, il vient :

$$\beta = \frac{f}{\xi + f}, \quad \Delta\xi = \frac{\varepsilon\xi}{\beta O} = \varepsilon\xi \frac{\xi + f}{fO} = \varepsilon n\xi \frac{\xi + f}{f^2},$$

en posant comme on a coutume de le faire $O = f : n$; n est un nombre entier ou fractionnaire caractéristique de l'appareil.

La tolérance $\Delta\xi$ augmente quand l'ouverture de la pupille d'entrée diminue (n augmente), quand la distance ξ augmente, enfin quand f diminue.

Elle est nulle quand l'objet coïncide avec le foyer principal de l'espace objet : $\xi + f = 0$.

30. Distance hyperfocale. — On demande à quelle distance $-\xi$ de l'objectif se trouve un plan de front tel que tous les objets placés au delà fassent leur image sur le plan conjugué de l'infini avec un cercle de diffusion de diamètre inférieur à ε . La distance $-\xi$ est appelée *distance hyperfocale*.

La formule précédente ne peut pas servir, car les quantités qui y entrent ne sont plus très petites. Voici comment se fait le calcul.

L'angle sous lequel est vue la pupille d'entrée du point où le plan cherché est coupé par l'axe principal, est : $\omega = -O : \xi$.

D'après la valeur du rapport de convergence, l'angle des mêmes rayons dans l'espace image est (au signe près) :

$$\gamma\omega = (O : \xi)(\xi : f) = O : f.$$

Au plan cherché correspond dans l'espace image un plan dont la distance au plan focal principal est très sensiblement :

$$\xi' - f = \frac{f\xi}{\xi + f} - f = \frac{-f^2}{\xi + f}.$$

Si l'image est réelle, l'objet est à une distance de la lentille plus grande que f du côté d'où vient la lumière : $\xi + f < 0$. Donc $\xi' - f > 0$, ce qui veut dire que l'image est au delà du foyer de l'espace image dans le sens où va la lumière.

Les rayons dont l'angle est $O : f$ et qui convergent à la distance précédente du plan focal principal de l'espace image, découpent sur celui-ci un cercle de diamètre :

$$\frac{-f^2}{\xi + f} \frac{O}{f} = -\frac{Of}{\xi + f}.$$

Écrivons que ce diamètre est égal à ε ; nous trouvons pour la valeur correspondante de $-\xi$:

$$-\xi = \left(\frac{O}{\varepsilon} + 1\right)f = \frac{Of}{\varepsilon} = \frac{f^2}{n\varepsilon}, \quad N = -\frac{\xi}{f} = \frac{O}{\varepsilon}.$$

Cette distance $-\xi$ est naturellement d'autant plus petite que le diamètre toléré ε est plus grand, que l'ouverture est plus petite, ou, ce qui revient au même, que le nombre n est plus grand, enfin que la distance focale principale est plus petite.

Considérons comme réduite à un point toute tache d'un diamètre ε inférieur à un dixième de millimètre. Évaluons $-\xi$ par le nombre N

de fois qu'il contient la distance focale principale. Évaluons O en centimètres. On a : $N = 100 \cdot O$.

Si O vaut 4 centimètres, la distance hyperfocale vaut 400 fois la distance focale.

Système de deux lentilles minces.

31. **Éléments cardinaux du système de deux lentilles minces.** — Rapportons les points conjugués par rapport à une lentille mince 1 aux plans principaux de celle-ci ; la formule est

$$(\S 12) : \quad \frac{f_1}{\xi_1} + \frac{f'_1}{\xi'_1} + 1 = 0.$$

Comme $f'_1 = -f_1$, on peut écrire :

$$-\frac{1}{\xi_1} + \frac{1}{\xi'_1} = \frac{1}{f_1}. \quad (1)$$

Si la lentille est convergente, f_1 est positif ; f_1 est négatif, si la lentille est divergente.

Pour déterminer les éléments cardinaux d'un système de deux lentilles minces 1 et 2, placées à la distance d , nous pourrions appliquer les formules générales ; il est préférable pour le lecteur d'utiliser la construction graphique.

Les milieux extrêmes étant identiques, les points nodaux sont dans les plans principaux, et l'on a : $f = -f'$. Nous avons donc à calculer la position des points nodaux et la nouvelle distance focale f . La lumière va de gauche à droite.

Pour préciser, supposons (fig. 18) les deux lentilles convergentes.

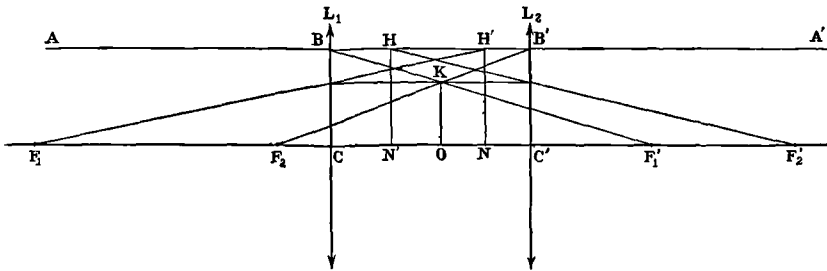


Fig. 18.

Déterminons le point K (§ 19) et calculons sa position. Prenons $\overline{CO} = t$, comme inconnue. On a :

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{KO}} = \frac{f_1}{f_1 - t} = \frac{f_2}{f_2 - d + t}, \quad t = \frac{df_1}{f_1 + f_2}.$$

Cherchons l'image du point O dans le premier milieu (à gauche); appelons \overline{CN} la distance de cette image (qui est le point nodal de la surface objet du système) à la surface C correspondante. Appliquons donc la formule (4).

$$\overline{CN} = d \frac{f_1}{f_1 + f_2 - d};$$

si $\overline{CN} > 0$, le point N est par rapport à L_1 dans le sens de propagation de la lumière (à droite de L_1 dans la figure).

De même, cherchons la position de l'image du point O dans le troisième milieu. Appelons $\overline{C'N'}$ la position de cette image qui est le point nodal dans l'espace image du système. La distance $\overline{C'N'}$ est :

$$\overline{C'N'} = -d \frac{f_2}{f_1 + f_2 - d}.$$

Si $\overline{C'N'} > 0$, le point nodal N' est par rapport à L_2 dans le sens de propagation de la lumière (à droite de L_2 dans la figure).

Calculons la position du foyer Φ' dans l'espace image. C'est le conjugué de F'_1 par rapport à L_2 ; sa distance $\overline{C'\Phi'}$ est donnée par l'équation :

$$-\frac{1}{\overline{C'F'_1}} + \frac{1}{\overline{C'\Phi'}} = \frac{1}{f_2}, \quad \overline{C'F'_1} = f_1 - d;$$

$$\overline{C'\Phi'} = \frac{f_2(f_1 - d)}{f_2 + f_1 - d}.$$

Calculons la position du foyer Φ dans l'espace objet. C'est le conjugué de F_2 ;

$$-\frac{1}{\overline{C\Phi}} - \frac{1}{\overline{CF_2}} = \frac{1}{f_1}, \quad \overline{CF_2} = f_2 - d;$$

$$\overline{C\Phi} = -\frac{f_1(f_2 - d)}{f_2 + f_1 - d}.$$

Calculons enfin la distance focale; elle a deux expressions (faire attention aux signes) :

$$\Phi N = \Phi C + CN, \quad \Phi N' = \Phi' C' + C'N'.$$

Elles donnent :

$$f = -f' = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - d}.$$

Si l'une des lentilles ou les deux sont *divergentes*, il suffit dans les formules de changer les signes des distances focales correspondantes.

32. Grossissement. Systèmes afocaux. — Calculons directement le grossissement latéral β .

Les formules à employer successivement sont :

$$-\frac{1}{\xi_1} + \frac{1}{\xi'_1} = \frac{1}{f_1}, \quad -\frac{1}{\xi_2} + \frac{1}{\xi'_2} = \frac{1}{f_2}.$$

Le grossissement définitif est le produit des grossissements partiels ; on a (§ 12) :

$$\beta = \frac{\xi'_1}{\xi_1} \frac{\xi'_2}{\xi_2}, \quad \xi_2 = \xi'_1 - d;$$

$$\beta = \frac{f_2}{f_1} \frac{\xi'_1 - f_1}{d - \xi'_1 - f_2}.$$

Le grossissement est *constant* (indépendant de la position de l'objet) et égal à $-f_2 : f_1$, si l'on a :

$$-\xi'_1 + f_1 = d - \xi'_1 - f_2, \quad f_1 + f_2 = d.$$

Nous retombons sur les appareils dits *télescopiques* : leurs distances focales principales sont infinies (§ 13) : Un faisceau de rayons parallèles est transformé en un faisceau de rayons parallèles de section différente : le grossissement est égal au rapport des dimensions transversales des faisceaux. On déduit de là une méthode pour la mesure du grossissement d'un pareil système.

33. Discussion.

1° Si les lentilles sont au contact, $d=0$, on a :

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2}, \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2};$$

la puissance (ou numéro dioptrique ; Cours de Première, § 239) d'un système de lentilles accolées est égale à la somme des puissances (ou des numéros) de chacune des lentilles.

2° Si les deux lentilles sont convergentes, ($f_1 > 0$, $f_2 > 0$), f est le plus petit possible en valeur absolue, le système est le plus convergent possible pour $d=0$; il devient télescopique ou afocal ($f=\infty$) pour $d=f_1+f_2$, et divergent ($f < 0$) pour un écartement plus grand.

3° Si les deux lentilles sont divergentes, le système reste toujours divergent. La distance focale (négative) diminue en valeur absolue à mesure que d augmente.

4° Si les deux lentilles ont leurs distances focales de signes contraires et sont au contact, le système est convergent ou divergent suivant que la lentille convergente ou divergente a le plus court foyer.

34. Oculaires usuels.

OCULAIRE DE RAMSDEN (fig. 19). — Il est constitué par deux lentilles plans convexes de distances focales f_1 égales et placées à la distance :

$$d = 2f_1 : 3.$$

Calculons la position des points nodaux ou des plans principaux en considérant les lentilles comme infiniment minces.

$$f = \frac{3f_1}{4}, \quad \overline{C_1F} = -\overline{C_2F'} = -\frac{f_1}{4}, \quad \overline{C_1N} = -\overline{C_2N'} = \frac{f_1}{2}.$$

Les plans principaux sont intervertis comme l'indique la figure. Le système est convergent; il peut servir de loupe. La distance frontale $\overline{C_1F}$ ou $\overline{C_2F'}$ est généralement d'un petit nombre de millimètres :

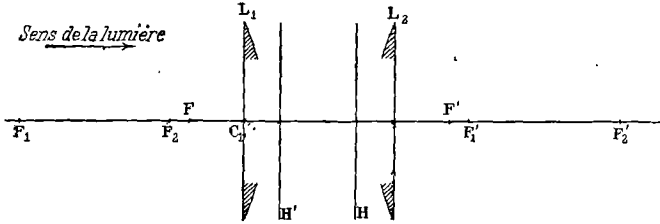


Fig. 19.

pour utiliser le système comme loupe, il faut que l'objet soit dans l'espace FC_1 . On emploie l'oculaire de Ramsden pour viser les réticules.

Symbole. — On prend pour symbole le système de rapports :

$$f_1 : d : f_2,$$

f_1 désignant la distance focale de la lentille de front, f_2 celle de la lentille de l'œil. Le symbole de l'oculaire précédent est donc :

$$f_1 : d : f_2 = 3 : 2 : 3.$$

AUTRE OCULAIRE DE RAMSDEN (fig. 20). — Le plus souvent on construit l'oculaire de Ramsden de symbole :

$$f_1 : d : f_2 = 1 : 4 : 4.$$

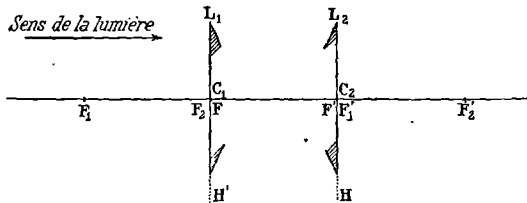


Fig. 20.

Il satisfait alors à la condition d'achromatisme démontrée § 40.

On trouve aisément :

$$f = f_1; \quad \overline{C_1F} = 0, \quad \overline{C_2F'} = 0; \quad \overline{C_1N} = f_1, \quad \overline{C_2N'} = -f_1.$$

Les foyers principaux sont donc dans les lentilles, les plans principaux aussi; ils sont intervertis. Dans la pratique on rapproche un peu les lentilles, de manière à reporter le foyer en avant de la lentille de front.

OCULAIRE D'HUYGHENS (fig. 21). — L'oculaire d'Huyghens a généralement pour symbole :

$$f_1 : d : f_2 = 4 : 3 : 2.$$

$$f = \frac{2}{3} f_1; \quad \overline{C_1 F} = \frac{f_1}{3}, \quad \overline{C_2 F'} = \frac{f_1}{6}; \quad \overline{C_1 N} = f_1; \quad \overline{C_2 N'} = -\frac{f_1}{2}.$$

Pourvu que l'objet soit suffisamment éloigné, il se fait entre les

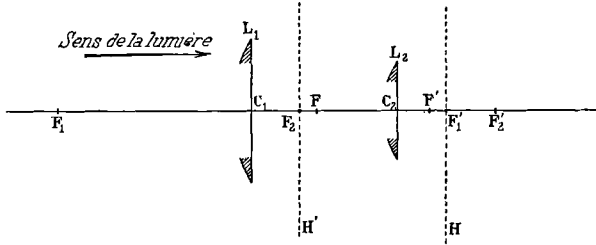


Fig. 21.

deux verres une image réelle qu'on observe avec la lentille L_2 servant de loupe. C'est entre les deux verres que doivent être placés les réticules ou les micromètres oculaires.

AUTRE OCULAIRE D'HUYGHENS (fig. 22). — On construit quelquefois l'oculaire d'Huyghens suivant le symbole :

$$f_1 : d : f_2 = 3 : 2 : 1.$$

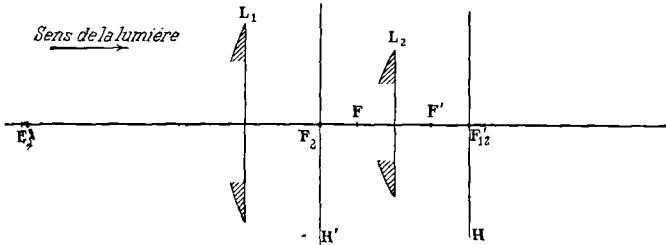


Fig. 22.

Il satisfait encore à la condition d'achromatisme (§ 40). Les seconds foyers des deux lentilles sont confondus.

$$f = \frac{f_1}{2}; \quad \overline{C_1 F} = \frac{f_1}{2}, \quad \overline{C_2 F'} = \frac{f_1}{6};$$

$$\overline{C_1 N} = f_1, \quad \overline{C_2 N'} = -\frac{f_1}{3} = -\frac{d}{2}.$$

Le plan principal H qui appartient à l'espace objet (milieu de gauche, d'où vient la lumière), et le plan H' qui appartient à l'espace image, sont intervertis.

Le système admet un foyer réel F' pour les rayons parallèles à l'axe allant de gauche à droite; il admet un foyer virtuel F pour les rayons parallèles à l'axe allant de droite à gauche.

L'oculaire d'Huyghens peut servir de loupe pour des cônes de rayons *déjà convergents* et allant de gauche à droite. Ils sont rabattus davantage par la lentille L_1 , viennent faire une image réelle entre F_2 et L_2 , et donnent enfin une image virtuelle à travers L_2 .

35. Objectifs téléphotographiques. — Un exemple intéressant de substitution à un système formé de plusieurs lentilles, d'un système fictif défini par ses plans principaux et ses points nodaux, se rencontre dans l'étude de la combinaison connue sous le nom d'*objectif téléphotographique*.

On se propose d'obtenir une image *réelle* la plus grande possible d'objets éloignés.

Si on utilise une lentille, on est conduit à augmenter sa distance focale principale, et par conséquent, ce qui est incommode, la longueur de la chambre noire (ou du tube portant l'oculaire dans le cas où on observe l'image réelle avec un appareil grossissant). Est-il possible par une combinaison de verres d'obtenir, avec une distance donnée entre les verres et l'écran, une image plus grande que celle fournie par une lentille unique?

Les rayons issus de deux points de l'objet, faisant un angle α et passant par le point nodal de l'espace objet du système cherché, passent à l'émergence par le point nodal de l'espace image en faisant le même angle. Soit d la distance de ce point à l'écran, αd est la longueur de l'image: le problème revient donc à augmenter d .

Dans le cas d'une lentille unique, les points nodaux sont presque confondus et se trouvent au voisinage de la lentille; il faut donc, pour gagner quelque chose sur l'effet produit par une lentille, rejeter le second point nodal *en avant de l'appareil*.

Nous allons montrer que ce résultat est possible par l'emploi de deux verres (fig. 23): l'un convergent L_1 de distance focale f_1 , l'autre divergent L_2 de distance focale f_2 , *suffisamment éloignés l'un de l'autre*. Nous savons qu' accolés ils jouent le rôle d'un verre de puissance égale à la différence des puissances des deux lentilles.

Pour que N' soit placé loin en avant de l'appareil, c'est-à-dire du côté d'où vient la lumière, il faut que $\overline{CN'}$ (§ 31) soit négatif et grand. Comme f_2 est négatif, il suffit que $f_1 + f_2 - d$ soit négatif et petit.

Faisons par exemple :

$$f_1 = 60^{\text{cm}}, \quad -f_2 = 20^{\text{cm}}, \quad d = 41^{\text{cm}}, \quad f_1 + f_2 - d = -1^{\text{cm}}.$$

On tire de là :

$$-\overline{CN'} = 820^{\text{cm}}, \quad f = 1200^{\text{cm}}.$$

Le point nodal relatif à l'espace objet est à 820^{cm} de la lentille L_2 ; l'image se fait à une distance de 1200^{cm} de ce point nodal, soit à une distance de $1200 - 820 = 380^{\text{cm}} = 3^{\text{m}},80$ de la lentille L_2 . Tout se passe donc pour le grossissement comme si on utilisait une lentille simple de 12 mètres de distance focale principale, et pourtant l'encombrement n'est que $0,41 + 3,80 = 4^{\text{m}},21$, c'est-à-dire la distance du premier verre à l'image.

Avec un tel appareil on a pu photographier à 25 kilomètres de distance; un édifice de 25 mètres occupe 12^{mm} sur le cliché.

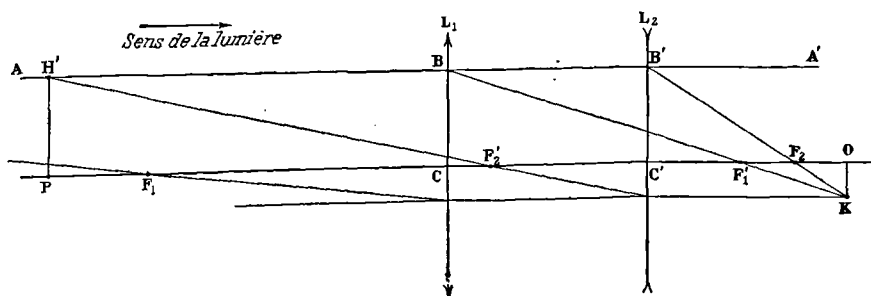


Fig. 23.

On peut naturellement construire des téléobjectifs avec deux lentilles *convergentes* : l'*intervalle optique* $f_1 + f_2 - d$ (distance des foyers) doit alors être positif. On obtient une telle combinaison quand on utilise l'oculaire d'une lunette ou d'un viseur pour projeter l'image réelle fournie par l'objectif.

On emploie ces combinaisons de grossissement colossal pour l'espionnage des ouvrages avancés par-dessus les frontières.

On construit des téléobjectifs portatifs sur le même principe. Voici une combinaison réduite :

$$f_1 = 110^{\text{mm}}, \quad -f_2 = 30^{\text{mm}}, \quad d = 85^{\text{mm}}, \quad f_1 + f_2 - d = -5^{\text{mm}}, \\ -\overline{CN'} = 510^{\text{mm}}, \quad f = 660^{\text{mm}}.$$

La distance du second verre à la plaque sensible n'est que :

$$66 - 51 = 15^{\text{cm}},$$

pour une longueur totale d'appareil de $8,5 + 15 = 23^{\text{cm}},5$, et une longueur focale de 66^{cm} . Le grossissement est trois fois plus grand que pour un appareil de même encombrement et monté avec un objectif ordinaire.

Achromatisme.

36. Indices et dispersions. — L'indice des verres n'est pas le même pour toutes les longueurs d'onde; on appelle *dispersion* la variation Δn de l'indice quand on passe d'une radiation de longueur d'onde λ_1 à une radiation de longueur d'onde λ_2 . On appelle *dispersion moyenne* le Δn qui correspond au passage de la raie C (656 $\mu\mu$) à la raie F (486 $\mu\mu$); C est dans l'orangé, F entre le vert et le bleu.

On appelle *pouvoir dispersif* le quotient :

$$\frac{1}{v} = \frac{\Delta n}{n-1},$$

de la dispersion par l'excès de l'indice sur unité. Pour indice du dénominateur on prend généralement celui qui correspond à la raie D (589 $\mu\mu$). Nous utiliserons l'inverse de ce quotient que nous désignerons par la lettre v :

$$v = \frac{n-1}{\Delta n}.$$

Pour deux verres différents, on obtient des valeurs de Δn qui ne sont généralement pas dans le même rapport suivant qu'on s'adresse à des groupes différents de deux raies pour préciser les indices comparés. Nous reviendrons là-dessus plus loin.

37. Anciens verres et verres nouveaux. — Les verres d'emploi usuel *avaient* comme types le *crown* et le *flint*.

Le *flint* est un verre à base de plomb d'indice et de dispersion considérables. Voici la composition d'un flint :

Sable, 100; minium, 106; carbonate de potassium, 43.

C'est donc un *crystal* dont la teneur en plomb est exagérée.

Voici la composition d'un cristal moyen :

Sable, 100; minium, 67; carbonate de potassium, 30.

La densité du flint varie de 3,6 à 4,0.

Le *crown* est un verre à base de chaux; il se rapproche comme composition du verre à glaces ou du verre de Bohême :

Sable, 100; chaux, 22; carbonate de potassium, 47.

Représentons sur un plan (fig. 24) en abscisses les indices moyens, en ordonnées les dispersions entre les raies C et F. L'expérience montre que *les points figuratifs des crowns et flints usuels se placent, non pas dans une région du plan, mais très approximativement sur une droite OA*. Par exemple, un flint d'indice moyen 1,60 a pour les raies C et F des indices qui diffèrent l'un de l'autre d'environ 0,020 (point B de la droite).

Un des plus grands progrès de la technique moderne a été l'obten-

tion à Iéna de verres à la baryte, au zinc, aux acides borique et phosphorique, ... dont les points figuratifs s'écartent notablement de la droite OA et occupent toute une région OAE à droite de OA.

Par exemple, on possède actuellement, d'une part, une série de verres dont l'indice varie de 1,55 à 1,63 et dont cependant la dispersion moyenne est sensiblement invariable et voisine de 0,015; d'autre part, une série de verres dont l'indice est sensiblement constant et voisin de 1,63 et dont pourtant la dispersion varie de 0,015 à 0,023. Nous verrons plus loin l'importance de ces résultats.

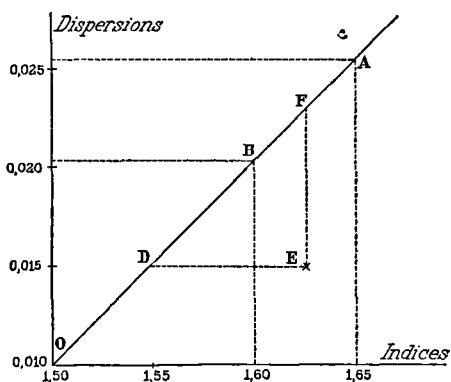


Fig. 24.

Sur la droite OA les valeurs de ν décroissent régulièrement de 50 à 25 à mesure que l'indice moyen croît de

1,50 à 1,65. Avec les nouveaux verres, les variations de ν sont bien plus grandes. Pour certains verres, ν croît jusqu'au voisinage de 70.

38. Achromatisme d'un système de lentilles minces accolées. — Nous désignerons généralement par la lettre k_1 la différence des courbures des surfaces qui limitent la lentille mince 1. La formule démontrée au § 22 peut s'écrire :

$$\frac{1}{f_1} = (n_1 - 1) k_1.$$

Appliquons cette formule à deux longueurs d'onde; nous distinguerons les quantités correspondantes par les signes *prime* et *seconde* en exposant :

$$\frac{1}{f_1'} = (n_1' - 1) k_1, \quad \frac{1}{f_1''} = (n_1'' - 1) k_1. \quad (1)$$

Pour une seconde lentille accolée, nous avons :

$$\frac{1}{f_2'} = (n_2' - 1) k_2, \quad \frac{1}{f_2''} = (n_2'' - 1) k_2. \quad (1')$$

Le système a pour distances focales f' et f'' :

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'} = (n_1' - 1) k_1 + (n_2' - 1) k_2,$$

$$\frac{1}{f''} = \frac{1}{f_1''} + \frac{1}{f_2''} = (n_1'' - 1) k_1 + (n_2'' - 1) k_2.$$

Écrivons la condition d'achromatisme : $f' = f'' = f$.

$$\begin{aligned} (n'_1 - n''_1) k_1 + (n'_2 - n''_2) k_2 &= 0, \\ \Delta n_1 \cdot k_1 + \Delta n_2 \cdot k_2 &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Nous pouvons éliminer k_1 et k_2 au moyen des équations (1) et (1'). Il vient :

$$\frac{1}{f_1 v_1} + \frac{1}{f_2 v_2} = 0. \quad (2')$$

Il faut d'après cette dernière équation que f_1 et f_2 soient de signes contraires, puisque v_1 et v_2 sont des quantités essentiellement positives. *Donc une des lentilles est convergente, l'autre divergente.*

Supposons la lentille 1 convergente et écrivons que le système tout entier est convergent.

$$(n_1 - 1) k_1 > - (n_2 - 1) k_2. \quad (3)$$

En vertu de (2), on a :

$$\Delta n_1 \cdot k_1 = - \Delta n_2 \cdot k_2, \quad (4)$$

et nous savons que les deux membres sont positifs.

Divisons membre à membre (3) et (4) :

$$\frac{n_1 - 1}{\Delta n_1} > \frac{n_2 - 1}{\Delta n_2}, \quad v_1 > v_2.$$

Le verre formant la lentille convergente doit posséder un coefficient v plus grand que le verre dont est formée la lentille divergente.

39. Anciens et nouveaux achromats. — On appelle *achromat* un système convergent formé de deux lentilles accolées, corrigé à la fois de l'aberration chromatique et de l'aberration sphérique pour un certain plan P de front de l'espace objet. Nous verrons, au chapitre IV, comment on procède; nous montrerons qu'il existe une infinité de solutions.

Le champ d'un achromat corrigé pour le plan P est généralement courbe (§ 4). Nous montrerons que pour aplanir le champ, il faut satisfaire à la condition nécessaire non suffisante (§ 110) de Petzval :

$$\sum \frac{1}{nf} = 0,$$

où f est la distance focale de chaque lentille, n son indice. Dans le cas de deux lentilles, la condition se réduit à :

$$\frac{1}{n_1 f_1} + \frac{1}{n_2 f_2} = 0,$$

qui, jointe à l'équation (2') du paragraphe précédent, donne :

$$\frac{v_1}{n_1} = \frac{v_2}{n_2}. \quad (1)$$

Cette équation ne peut être satisfaite avec les crowns et les flints

anciens, puisque les paramètres ν y varient toujours en sens inverse des indices. Elle peut l'être avec les nouveaux verres d'Iéna, par le moyen desquels (§ 37) une variété considérable d'indices et de dispersions est réalisée.

On appelle *achromats anciens* les systèmes pour lesquels le paramètre ν le plus grand correspond à l'indice moyen n le plus petit; on appelle *achromats nouveaux* les systèmes pour lesquels le paramètre ν le plus grand correspond à l'indice moyen n le plus grand.

40. Achromatisme d'un système de deux lentilles non accolées. — D'après la formule démontrée au § 31, la condition d'achromatisme est l'égalité des expressions :

$$\frac{f_1 f_2}{f_2 + f_1 - d},$$

pour les radiations désignées par ' et '' , ou l'égalité de leurs inverses. On trouve immédiatement :

$$\frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'} - \frac{d}{f_1' f_2'} = \frac{1}{f_1''} + \frac{1}{f_2''} - \frac{d}{f_1'' f_2''}.$$

Mais on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{f_1'} - \frac{1}{f_1''} &= k_1 \Delta n_1 = \frac{1}{f_1} \frac{\Delta n_1}{n_1 - 1} = \frac{1}{f_1 \nu_1}, \\ \frac{1}{f_1' f_2'} &= (n_1' - 1)(n_2' - 1) k_1 k_2. \end{aligned}$$

La condition devient :

$$\frac{1}{f_1 \nu_1} + \frac{1}{f_2 \nu_2} = d k_1 k_2 [(n_1' - 1)(n_2' - 1) - (n_1'' - 1)(n_2'' - 1)]. \quad (1)$$

On vérifiera aisément que le double de la parenthèse peut s'écrire :

$$\begin{aligned} (n_1' - n_1'')(n_2' + n_2'' - 2) + (n_2' - n_2'')(n_1' + n_1'' - 2) \\ = 2[\Delta n_1 (n_2 - 1) + \Delta n_2 (n_1 - 1)]. \end{aligned}$$

Substituant dans (1), remplaçant $k_1 k_2$ par sa valeur, il vient aisément :

$$d = \frac{\nu_2 f_2 + \nu_1 f_1}{\nu_2 + \nu_1}.$$

Telle est la condition pour que les distances focales principales soient les mêmes pour les radiations auxquelles se rapportent les paramètres ν_1 et ν_2 dans les deux lentilles.

OCULAIRES USUELS. — Supposons les deux lentilles formées du même verre. On a :

$$\nu_1 = \nu_2, \quad d = \frac{f_1 + f_2}{2}.$$

Cette condition est précisément réalisée dans les oculaires les plus fréquemment employés (§ 34).

41. **Spectre secondaire. Foyer chimique.** — Représentons sur un plan : en ordonnées les longueurs d'onde, en abscisses les distances focales principales d'un objectif réduit à une seule lentille. Nous obtenons une courbe Φ ne présentant ni maximum ni minimum, indiquant une distance focale plus grande pour le rouge que pour le violet. A l'échelle de la figure, elle devrait être plus horizontale et montrer une variation encore plus grande de la distance focale; bien entendu, celle-ci est comptée à partir d'un point fort à gauche de l'origine O des coordonnées.

Faisons la même opération avec un objectif achromatique; nous

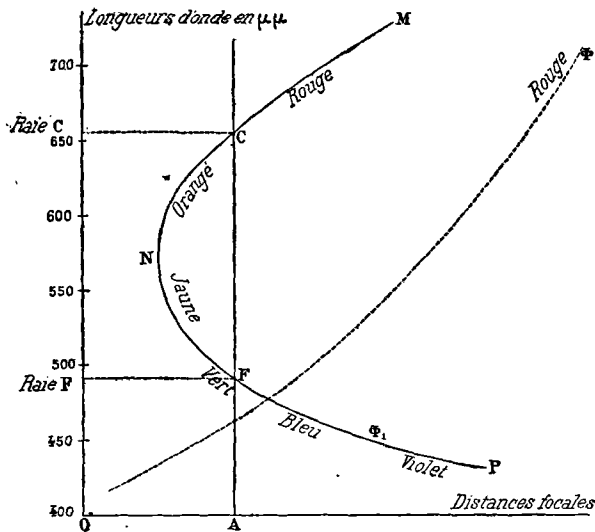


Fig. 25.

obtenons généralement une courbe Φ_1 telle que MNP. On a fait en sorte que les distances focales soient identiques pour deux radiations, les raies F et C par exemple : *ipso facto*, on a replié le spectre : les distances focales sont maintenant identiques pour une infinité de couples de radiations. La courbe Φ_1 est généralement coupée par une verticale en deux points et en deux points seulement.

Il est clair que l'achromatisme parfait consisterait à faire coïncider toutes les distances focales, et par conséquent à réduire la courbe Φ_1 à une droite verticale. Cette condition n'est pas réalisée; d'où une irisation des images qu'on appelle spectre secondaire.

Les verres d'Iéna permettent d'obtenir une courbe Φ_1 presque rigoureusement rectiligne et verticale dans tout le spectre visible.

Quoi qu'il en soit, quand on veut l'achromatisme principalement pour une région du spectre, on le replie de manière que le minimum

des distances focales (représentées par les abscisses de la courbe Φ_1) soit au milieu de cette région.

Par exemple, pour le spectre visible, le minimum des distances focales doit tomber au voisinage de la radiation la plus lumineuse : $\lambda = 550 \mu\mu$. C'est ce qui est réalisé dans la figure 25.

Les plaques photographiques étant particulièrement sensibles dans l'indigo, le minimum des abscisses de la courbe des objectifs photographiques doit correspondre à la radiation : $\lambda = 450 \mu\mu$.

On se sert souvent pour la photographie d'objectifs achromatisés pour les rayons visibles. C'est le plus souvent sans inconvénient ; les plaques ordinaires ont un champ d'action restreint : conséquemment la lumière blanche se trouve automatiquement sélectionnée et pratiquement réduite à un faisceau sensiblement monochromatique.

Par des tâtonnements systématiques, il est facile de déterminer avec une grande précision la position du *foyer chimique* d'un appareil (tel qu'une lunette astronomique) achromatisé pour les rayons visibles et qu'on veut utiliser pour la photographie. Pour faciliter le réglage, rappelons que *le foyer correct des rayons indigo d'un objectif achromatisé pour les rayons visibles, est ordinairement un peu plus éloigné des lentilles que le foyer correct des radiations moyennes du spectre*, disposition inverse de celle observée avec une lentille unique et dont la figure 25 montre immédiatement la raison d'être.

Il existe d'ailleurs un procédé très élégant d'achromatisation pour les rayons chimiques d'un objectif achromatisé pour les rayons visibles. Il suffit d'écarter les deux verres, ce qui ne présente aucune difficulté pour les grandes lunettes.

On vérifiera en effet que si la formule (§§ 39 et 40) :

$$\frac{1}{f_2 v_2} + \frac{1}{f_1 v_1} = 0, \quad v_2 f_2 + v_1 f_1 = 0,$$

est satisfaite pour $d = 0$ et les raies F et C, la formule :

$$v_2 f_2 + v_1 f_1 = (v_2 + v_1) d,$$

le sera pour les mêmes lentilles et des radiations plus rapprochées du violet.

Le seul inconvénient d'écarter les lentilles est de *diminuer* notablement la distance focale principale, ainsi que l'indique la formule :

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - d},$$

avec les conditions :

$$f_1 > 0, \quad f_2 < 0, \quad f_1 < (-f_2), \quad d > 0.$$

OBJECTIFS APOCHROMATIQUES. — Grâce aux nouveaux verres d'Iéna,

on peut supprimer le spectre secondaire; la courbe Φ_1 est rectiligne et verticale dans le spectre visible. Non seulement les objectifs dits *apochromatiques* réalisent cette condition, mais encore ils sont corrigés de l'aberration de sphéricité (§ 90) pour deux rayons de couleurs différentes. Les images sont à peu près aussi nettes pour toutes les couleurs.

CHAPITRE II

OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE. THÉORIE GÉNÉRALE

42. Position de la question. Chemin optique. — On entend par *Optique géométrique dans les milieux isotropes* l'ensemble des propositions qui se déduisent de l'hypothèse de rayons rectilignes se réfractant suivant les lois de Descartes.

Nous supposerons dans ce Chapitre que tous les rayons sont *isogènes*, c'est-à-dire issus d'un point lumineux source unique; le terme *homocentriques* est quelquefois employé dans le même sens. Nous supposerons tous les milieux séparément homogènes, isotropes et limités par des surfaces continues, sans points singuliers.

La trajectoire lumineuse se compose donc d'une ligne brisée; nous allons définir sa *longueur optique*.

Soit un rayon traversant successivement les milieux 0, 1, 2, ... d'indices n_0, n_1, n_2, \dots ; soit r_0, r_1, r_2, \dots les chemins géométriques parcourus dans chacun de ces milieux. On appelle chemin optique la quantité :

$$\Psi = \sum nr = n_0 r_0 + n_1 r_1 + \dots$$

Dans la *Théorie des ondes*, le chemin Ψ a une interprétation simple. L'indice de réfraction est le quotient de la vitesse V de propagation dans le vide par la vitesse V_1 de propagation dans le milieu considéré. On a donc :

$$\frac{\Psi}{V} = \frac{r_0}{V_0} + \frac{r_1}{V_1} + \dots = t_0 + t_1 + \dots = t,$$

t_0, t_1, \dots désignant les durées de propagation dans les milieux successifs, t le temps que met l'ébranlement à se faire sentir en un point de la trajectoire. D'après la relation :

$$\Psi = Vt,$$

le chemin optique est l'espace que la lumière parcourt dans le vide pendant le temps qu'elle met à parcourir le rayon.

Pour simple que soit cette interprétation, nous prions pour l'instant le lecteur de la laisser de côté. Nous croyons utile de ne pas mélan-

ger des ordres différents de raisonnements ; nous faisons pour l'instant de la Géométrie. Il est essentiel de comprendre que toutes les propriétés démontrées sont contenues dans les lois de Descartes ; la définition même des surfaces d'onde que nous trouverons plus loin, n'implique en rien la réalité de la Théorie des ondes.

Que le lecteur se rassure ; cette Géométrie a une importance souveraine. Les phénomènes qu'elle explique sont parmi les plus admirables. Elle n'a jamais été méprisée que par ceux qui l'ignoraient.

43. Principe de Fermat. — *En vertu des lois de Descartes, le chemin optique qui conduit du point A du milieu 0, au point B du milieu 1, à travers une surface réfringente quelconque est un maximum ou un minimum.*

Prenons comme plan des xy le plan tangent à la surface réfringente au point P, où le rayon se réfracte effectivement ; l'axe des z est la normale à la surface au point P.

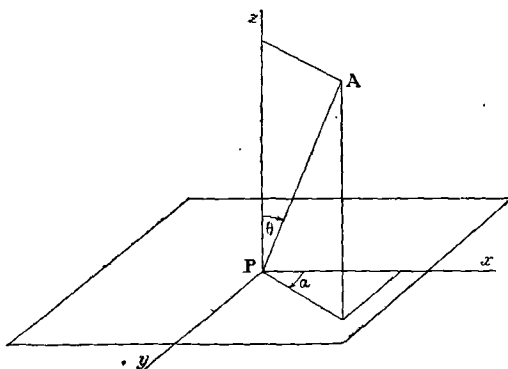


Fig. 26.

Soit $z = f(x, y)$, l'équation de la surface réfringente ; au voisinage de l'origine on a, en vertu du choix des axes :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \quad (1)$$

Soit $X_0, Y_0, Z_0; X_1, Y_1, Z_1$, les coordonnées des points A et B ; soit généralement r_0 et r_1 leurs distances à un point M de la surface voisin de l'origine. On a :

$$\begin{aligned} \Psi &= n_0 r_0 + n_1 r_1, & (2) \\ r_0^2 &= (X_0 - x)^2 + (Y_0 - y)^2 + (Z_0 - z)^2, \\ r_1^2 &= (X_1 - x)^2 + (Y_1 - y)^2 + (Z_1 - z)^2. \end{aligned}$$

Écrivons que Ψ est maximum ou minimum lorsque M coïncide avec l'origine P. Les variables x et y étant indépendantes, il faut

écrire :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

Le point M étant voisin de l'origine, on peut le considérer comme

dans le plan tangent, ce qui revient à faire z constant en vertu des équations (1). Les équations (3) deviennent :

$$\begin{aligned} n_0 \frac{X_0 - x}{r_0} + n_1 \frac{X_1 - x}{r_1} &= 0, \\ n_0 \frac{Y_0 - y}{r_0} + n_1 \frac{Y_1 - y}{r_1} &= 0; \end{aligned}$$

et par conséquent à l'origine :

$$\begin{aligned} \frac{n_0 X_0}{r_0} + \frac{n_1 X_1}{r_1} &= 0, \\ \frac{n_0 Y_0}{r_0} + \frac{n_1 Y_1}{r_1} &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Transformons en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} X &= r \sin \theta \cos \alpha, & Y &= r \sin \theta \sin \alpha. \\ n_0 \sin \theta_0 \cos \alpha_0 + n_1 \sin \theta_1 \cos \alpha_1 &= 0, \\ n_0 \sin \theta_0 \sin \alpha_0 + n_1 \sin \theta_1 \sin \alpha_1 &= 0. \end{aligned} \tag{4'}$$

D'où : $\operatorname{tg} \alpha_0 = \operatorname{tg} \alpha_1$, $n_0 \sin \theta_0 = \pm n_1 \sin \theta_1$.

Nous devons prendre la solution :

$$\alpha_1 = \alpha_0 + \pi, \quad n_0 \sin \theta_0 = n_1 \sin \theta_1;$$

ces équations expriment les lois de Descartes.

Écrire le principe de Fermat revient donc à appliquer ces lois.

La réflexion rentre dans le cas de la réfraction en posant :

$$n_1 = -n_0.$$

44. Généralisation. — La proposition est démontrée pour une surface séparant deux milieux; généralisons-la pour un nombre quelconque de surfaces.

Soit m surfaces numérotées 1, 2, ... m , séparant $m + 1$ milieux. Traçons la trajectoire *réelle* reliant les points A (milieu 0) et B (milieu m). Prenons sur chaque surface un système de coordonnées ayant pour origine le point d'incidence du rayon réel et pour axe des z la normale à la surface en ce point. Les systèmes d'axes de coordonnées sont numérotés de 1 à m ; les surfaces sont respectivement rapportées aux axes correspondants.

Traçons une trajectoire quelconque allant de A à B. Sa longueur optique est une fonction des coordonnées $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_m, y_m$, des points où elle rencontre les surfaces successives.

Écrivons que le chemin optique est maximum ou minimum. Nous avons comme conditions :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} = 0, & \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y_1} = 0; \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} = 0, & \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y_2} = 0; \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x_m} = 0, & \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y_m} = 0. \end{aligned}$$

Or chacun de ces groupes exprime précisément que la loi de Descartes est satisfaite pour la surface correspondante.

45. Définition de la surface d'onde : théorème de Malus et Dupin. — On appelle *surface d'onde* une surface définie par la condition :

$$\Psi = \text{Constante},$$

les chemins étant comptés à partir du point source. A chaque point source correspond évidemment une infinité de surfaces d'onde obtenues en faisant varier la constante de 0 à ∞ . Nous verrons même que la définition se généralise : on utilise avantageusement des surfaces d'onde virtuelles correspondant aux prolongements des rayons en deçà du point source et pour lesquelles la constante varie de 0 à $-\infty$.

Le théorème de Malus et Dupin a pour énoncé : *Les rayons isogènes sont, après réflexion ou réfraction sur un nombre quelconque de surfaces, normaux à toutes les surfaces d'onde.*

Considérons la surface d'onde définie par la condition :

$$\Psi = \text{Constante},$$

et appartenant au dernier milieu. Traçons les divers systèmes d'axes définis au paragraphe précédent; soit X, Y, Z, les coordonnées d'un point de la surface Ψ par rapport aux axes tracés sur la $m^{\text{ième}}$ et dernière surface réfringente ou réfléchissante.

Traçons le rayon réel qui passe par les origines de tous les systèmes de coordonnées et qui aboutit au point X, Y, Z, de la surface d'onde. Soit une trajectoire quelconque voisine définie par les couples de valeurs $x_1, y_1; x_2, y_2; \dots$ et aboutissant au point voisin $X + dX, Y + dY, Z + dZ$, de la surface d'onde.

Écrivons que le chemin optique est constant : $d\Psi = 0$.

Cette condition devient, en explicitant la différentielle totale :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \Psi}{\partial y_2} dy_2 + \dots \\ & + \left[\frac{\partial \Psi}{\partial X} + \frac{\partial \Psi}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial X} \right] dX + \left[\frac{\partial \Psi}{\partial Y} + \frac{\partial \Psi}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial Y} \right] dY = 0. \end{aligned}$$

Si les trajectoires voisines sont des rayons réels, nous avons, d'après le principe de Fermat ou les lois de Descartes (§ 44) :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y_1} = 0, \dots$$

La condition précédente se réduit à :

$$\left[\frac{\partial \Psi}{\partial X} + \frac{\partial \Psi}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial X} \right] dX + \left[\frac{\partial \Psi}{\partial Y} + \frac{\partial \Psi}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial Y} \right] dY = 0,$$

qui doit être satisfaite quels que soient dX et dY . Il en résulte :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial X} + \frac{\partial \Psi}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial X} &= 0, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial Y} + \frac{\partial \Psi}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial Y} &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Transformons ces dernières conditions.

Elles expriment que le chemin Ψ est maximum ou minimum, en le considérant seulement comme fonction de X et de Y . Ψ a pour expression :

$$\Psi = n_0 r_0 + \dots + n_m r_m;$$

X et Y n'entrent que dans r_m .

Les conditions (1) expriment donc que la distance r_m de la dernière origine à la surface Ψ est minimum ou maximum, et par conséquent que la droite r_m est normale à la surface Ψ . CQFD.

Au surplus, voici la démonstration analytique de cette dernière proposition.

D'après l'expression de r_m , on a comme au § 43 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial X} &= \frac{\partial \Psi}{\partial r_m} \frac{\partial r_m}{\partial X} = n_m \frac{X}{r_m}, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial Y} &= n_m \frac{Y}{r_m}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial Z} = n_m \frac{Z}{r_m}. \end{aligned}$$

Les conditions (1) deviennent :

$$X + Z \frac{\partial Z}{\partial X} = 0, \quad Y + Z \frac{\partial Z}{\partial Y} = 0,$$

équations qui signifient que le rayon faisant partie du faisceau émis par la source A et passant par l'origine des axes de coordonnées auxquels la surface Ψ est rapportée, est normal à cette surface.

Le rayon sur lequel nous avons raisonné étant quelconque, la proposition est générale : *tous les rayons isogènes sont normaux aux surfaces définies par la condition :*

$$\Psi = \text{Constante.}$$

Il résulte de cette proposition fondamentale que *la théorie des rayons isogènes se ramène à la théorie des normales à une surface.*

46. Construction des surfaces d'onde successives. — Du théorème précédent résulte une construction des surfaces d'onde successives S' , S'' , ... dans un milieu isotrope indéfini, à partir de l'une de ces surfaces S (fig. 27).

Pour avoir la surface S' , prolongeons d'une même quantité toutes les normales à la surface S :

$$\overline{OP} = \overline{O_1P_1} = \overline{O_2P_2} = \dots = R.$$

Il revient au même de prendre les points O , O_1 , O_2 , ..., comme centres de sphères de même rayon R et de tracer l'enveloppe de ces sphères. Le point P de tangence avec l'enveloppe de la sphère de centre O détermine la direction OP du rayon passant par le point O .

De cette construction, résultent quelques corollaires évidents.

1° Si l'une des surfaces d'onde est un morceau de sphère, il en existe une autre (réelle ou virtuelle) évanouissante qui est le centre de cette sphère. Il existe un foyer ; le système optique est *stigmatique* pour le point source considéré.

2° Si l'une des surfaces d'onde est un morceau de cylindre circulaire, il en existe une autre évanouissante qui est un morceau de l'axe du cylindre.

3° Si l'une des surfaces d'onde est un morceau de tore circulaire, il en existe une autre qui est un morceau de la circonférence lieu du centre du cercle qui donne le tore par rotation autour de l'axe.

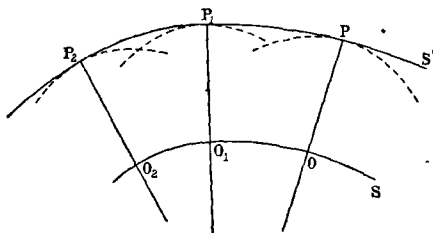


Fig. 27.

47. Construction d'Huyghens. — On peut généraliser la construction précédente. Supposons connus les chemins optiques ψ_1 , ψ_2 , ... qui vont du point source aux différents points O_1 , O_2 , ... d'une surface σ ; pour trouver une surface d'onde, il suffit de prolonger les rayons aboutissant en ces points de quantités optiques ψ'_1 , ψ'_2 , ..., telles que :

$$\psi_1 + \psi'_1 = \psi_2 + \psi'_2 = \dots = \text{Constante.}$$

Si l'on ne connaît pas la direction des rayons, il suffit de décrire des points O_1 , O_2 , ... de la surface σ comme centres, des sphères de rayons ψ'_1 , ψ'_2 , ..., et de déterminer l'enveloppe de ces sphères. Le rayon qui passe par O_1 est la droite qui joint le point O_1 au point P_1 de tangence de la sphère correspondante avec l'enveloppe.

En particulier, la surface σ peut être une des surfaces réfléchissantes

ou réfringentes ; d'où la construction dite d'Huyghens, dont voici deux exemples.

RÉFLEXION SUR UNE SURFACE PLANE (fig. 28).

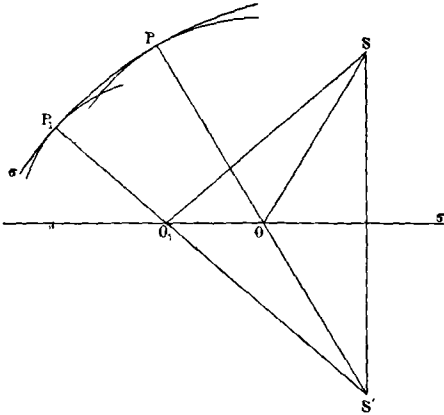


Fig. 28.

ayant pour centre le symétrique S' de S par rapport au plan σ .

RÉFRACTION D'UNE ONDE PLANE (fig. 29).

Soit, dans un milieu d'indice n_1 , une onde plane. Menons les rayons $SC, S'F, S'A, \dots$. Il s'agit de trouver la forme des ondes dans un second milieu d'indice n_2 séparé du premier par une surface plane σ . Cherchons, par exemple, celle qui passe par le point C .

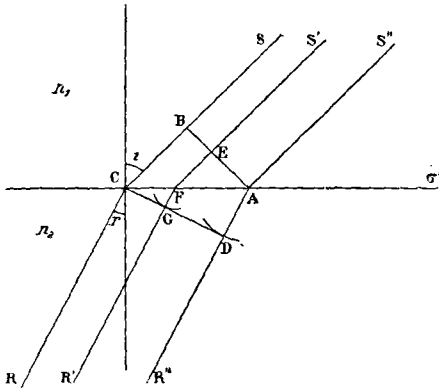


Fig. 29.

Au point C le chemin optique du rayon SBC , chemin compté à partir de la surface d'onde AB , est $n_1 \overline{BC}$. Au point F le chemin optique du rayon $S'F$ est $n_1 \overline{EF}$, et ainsi de suite.

Du point F comme centre, décrivons une sphère de rayon \overline{FG} tel que l'on ait :

$$n_2 \overline{FG} + n_1 \overline{EF} = n_1 \overline{BC}.$$

Du point A comme centre, décrivons une sphère de rayon \overline{AD} tel que l'on ait :

$$n_2 \overline{AD} = n_1 \overline{BC}. \quad (1)$$

Et ainsi pour tous les points. Il est clair que toutes ces sphères sont tangentes à un plan coupant le plan σ' suivant une parallèle à la trace du plan \overline{AB} ; on déduit, en effet, des équations précédentes :

$$\frac{\overline{FG}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC} - \overline{EF}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{CA}}.$$

La surface d'onde dans le second milieu est plane, et la première loi de Descartes est satisfaite : le plan d'incidence et le plan de réfraction coïncident.

La condition (1) peut s'écrire :

$$n_2 \sin r = n_1 \sin i;$$

c'est précisément la seconde loi de Descartes.

REMARQUE. — Ces constructions n'impliquent aucunement, comme tant de physiciens l'imaginent, la réalité de la Théorie ondulatoire. Newton et Poisson, qui n'ont jamais admis cette théorie, ne leur ont fait aucune objection. Elles s'appuient uniquement sur le principe de Fermat ou sur la loi de Descartes. Elles doivent être soigneusement distinguées du principe d'Huyghens (§§ 283 et 300).

Caustiques.

La théorie des rayons se trouve donc ramenée à la théorie des normales à une surface courbe. Nous allons rappeler l'ensemble des résultats les plus essentiels de cette théorie.

48. Normales, sections principales, lignes de courbure. — Soit O un point d'une surface d'onde S ; soit ON le rayon passant par ce point, c'est-à-dire la normale à la surface S élevée en ce point. Menons un plan par ce rayon : il coupe la surface S suivant une courbe (fig. 30).

Quand le plan P tourne autour de ON , la courbure au point O de la courbe d'intersection varie entre un maximum et un minimum qui correspondent à deux positions rectangulaires P_1 et P_2 du plan P . Les plans P_1 et P_2 sont les *plans principaux*.

On appelle *centres de courbure principaux* de la surface au point O , les centres de courbure C_1 et C_2 des courbes d'intersection de la surface par les plans principaux, courbes appelées *sections principales*.

Supposons connues les sections principales en tous les points de la surface S . A partir du point O traçons de proche en proche une courbe qui soit en tous ses points O , ω_1 , ω'_1 , ... tangente à l'une des sections principales correspondantes à ces points. Nous obtenons ainsi les *lignes de courbure* de la surface.

Par chaque point de la surface passent évidemment deux lignes de

courbure; le système des lignes de courbure forme deux faisceaux se coupant à angle droit, divisant la surface en rectangles infiniment petits.

Menons les normales en tous les points d'une ligne de courbure : on démontre qu'elles sont toutes tangentes à une courbe gauche $C_1 \gamma_1 \gamma'_1 \dots$. Les points de tangence $\gamma_1, \gamma'_1, \dots$ sont l'un des centres de courbure principaux de la surface S aux points $\omega_1, \omega'_1, \dots$.

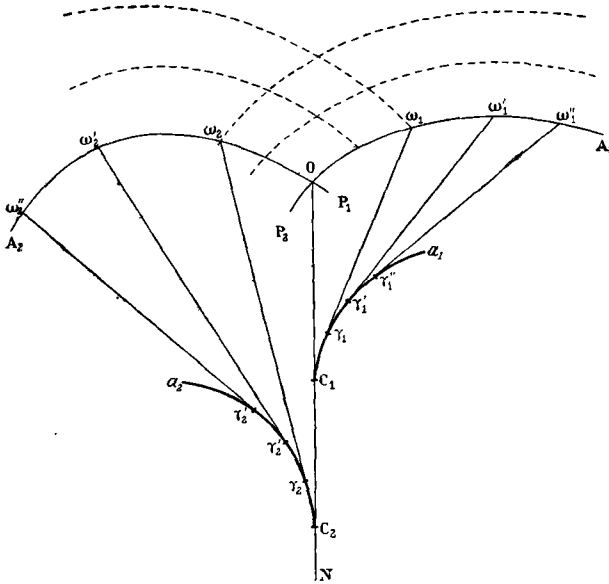


Fig. 30.

Les normales aux différents points d'une ligne de courbure forment donc une surface réglée *développable*, puisque les génératrices sont toutes tangentes à une courbe a qui est l'*arête de rebroussement* de la surface développable.

Rappelons que la projection de l'*arête de rebroussement* forme le contour apparent de la surface développable qui est constituée par deux nappes tangentes entre elles le long de l'*arête*. Chacune des nappes est engendrée par les portions de tangentes à l'*arête* partant de cette arête et se dirigeant dans le même sens.

La dénomination *arête de rebroussement* vient de ce que la section de la surface développable par un plan quelconque est une courbe possédant comme *point de rebroussement* la trace de l'*arête* sur le plan d'intersection¹.

¹ Je prendrai par la suite le terme *arête de rebroussement* dans le sens général de ligne suivant laquelle deux nappes d'une surface d'ailleurs quelconque sont tangentes

A chacun des systèmes de lignes de courbure A_1 ou A_2 correspond un faisceau d'arêtes de rebroussement de notations a_1 ou a_2 .

49. Caustiques. — On appelle *caustique* Σ d'une surface d'onde la surface à deux nappes Σ_1 et Σ_2 , lieu des centres de courbure C_1 et C_2 .

On peut encore définir chacune de ces nappes comme le lieu des arêtes de rebroussement a_1 ou a_2 , qui correspondent à l'un des systèmes de lignes de courbure.

Voici les propriétés fondamentales des caustiques.

1° Tout rayon est tangent à l'une et l'autre nappes de la caustique, puisqu'il est tangent à une arête de rebroussement de chaque système, et que ces arêtes engendrent la caustique.

2° Le plan principal P_1 au point O est le plan osculateur de l'arête a_1 au point correspondant C_1 . En effet, par construction, P_1 contient à la

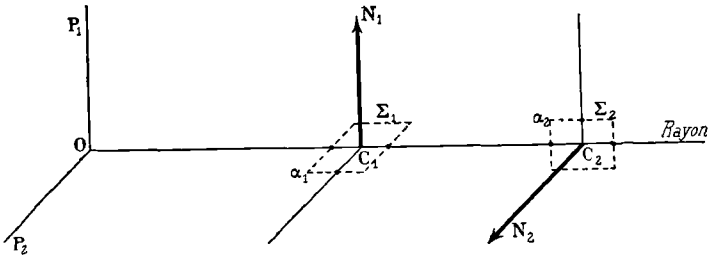


Fig. 31.

fois les deux tangentes OC_1 et $\omega_1\gamma_1$ en deux points voisins C_1 et γ_1 de l'arête a_1 .

De même le plan principal P_2 au point O est le plan osculateur de l'arête a_2 au point correspondant C_2 .

3° Le plan P_1 , osculateur de l'arête a_1 en C_1 , est normal au point C_1 à la nappe correspondante Σ_1 de la caustique.

Le plan P_2 , osculateur de l'arête a_2 en C_2 , est normal au point C_2 à la nappe correspondante Σ_2 de la caustique.

4° Le plan P_1 est tangent en C_2 à la nappe Σ_2 de la caustique.

Le plan P_2 est tangent en C_1 à la nappe Σ_1 de la caustique.

5° Si on place l'œil en un point de la normale (c'est-à-dire du rayon), on voit les contours apparents des deux nappes Σ_1 et Σ_2 se couper à angle droit sur cette normale.

La figure 31 représente deux éléments de ces nappes et leurs normales N_1 et N_2 .

entre elles. Toute section de la surface par un plan est une courbe possédant un point de rebroussement qui coïncide avec la trace de l'arête sur le plan.

La surface considérée n'est plus nécessairement une surface réglée.

Dans le cas de la surface réglée, les génératrices sont toutes tangentes à l'arête de rebroussement, ce que nous admettons dans le texte.

REMARQUE ESSENTIELLE. — La caustique est la même, dans chaque milieu homogène, quelle que soit la surface d'onde choisie pour effectuer les constructions; en effet, toutes les surfaces d'onde qui correspondent dans un milieu à des rayons initialement isogènes, mais ayant subi un nombre quelconque de réflexions et de réfractions, admettent les mêmes normales, et par conséquent les mêmes centres de courbure.

50. Surfaces d'onde sphérique et de révolution. — Quand la surface d'onde est sphérique, la caustique se réduit à un point; le système est *stigmatique*.

Quand la surface d'onde est de révolution, les deux nappes de la caustique, elle-même évidemment de révolution, se séparent. L'une Σ_2

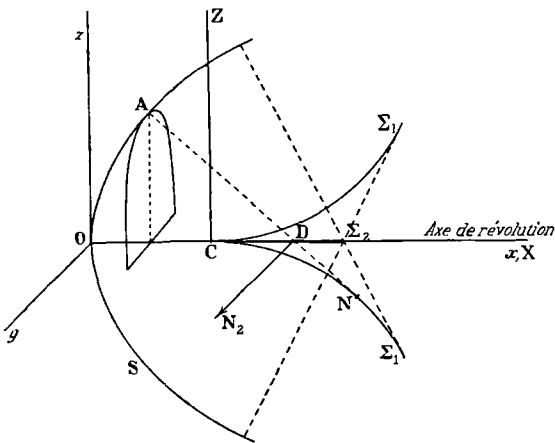


Fig. 32.

évanouissante se réduit à un morceau de l'axe. L'autre Σ_1 s'obtient en faisant tourner autour de l'axe la développée de la méridienne de la surface d'onde. Cette développée (fig. 32) présente nécessairement un point de rebroussement au point C de l'axe de révolution, puisque la courbure en O de la méridienne est certainement maxima ou minima.

La figure suppose un minimum du rayon de courbure.

On démontre aisément que la méridienne de la caustique près du point de rebroussement est une parabole semicubique :

$$Z^2 = aX^3,$$

le point C servant d'origine aux axes de coordonnées.

En un point quelconque A de la surface d'onde S, les sections principales sont le méridien P_1 et un plan P_2 tangent au parallèle et passant par la normale AN.

Le plan P_1 passe par l'axe et est par conséquent tangent à Σ_2 ; il est normal à Σ_1 qui est de révolution.

Le plan P_2 est tangent à Σ_1 au point N; il n'est pas normal à l'axe. Il semble donc qu'il ne soit pas normal à Σ_2 . Mais si nous remplaçons l'axe par un cylindre de rayon infiniment petit, il devient évident qu'un plan peut être incliné sur les génératrices et passer par une

normale DN_2 à cette surface. Les surfaces d'onde de révolution rentrent donc dans la règle générale.

On peut encore dire que les lignes de courbure sur la surface d'onde sont des cercles ω_2 traces des plans normaux à l'axe, et des courbes planes méridiennes ω_1 .

Les normales correspondantes (surfaces lieu des normales) sont des cônes circulaires et des plans. Les arêtes de rebroussement a de ces normales sont : pour les cônes circulaires, le point sommet ; pour les plans, la développée de la méridienne de la surface d'onde. L'ensemble des points sommets donne la nappe Σ_2 de la caustique, nappe réduite à un morceau de l'axe de révolution ; l'ensemble des développées donne la nappe Σ_1 de la caustique, surface de révolution.

Les cônes sont tangents à la nappe Σ_1 suivant des cercles ; les plans passent par la nappe Σ_2 .

SURFACE D'ONDE EN FORME DE TORE. — Faisons tourner une ellipse autour d'un axe passant par un foyer A et normal au grand axe AA' . Nous obtenons un miroir de révolution dont la figure 33 montre la méridienne. Nous avons supprimé les portions qui se gêneraient réciproquement.

Plaçons au foyer A un point lumineux. Tous les rayons issus de A et situés dans un plan méridien, viennent passer par A' après réflexion. Donc la section méridienne de l'onde se compose de deux portions de circonférences. La surface d'onde est donc la figure engendrée par une circonférence qui tourne autour d'un axe : c'est un tore. Il est facile de voir que la caustique a pour nappe Σ_2 une portion de l'axe de révolution et pour nappe Σ_1 le cercle passant par $A'A'$ et normal à l'axe de révolution. Il est donc possible de réaliser une surface d'onde de révolution dont l'une et l'autre nappes de la caustique se réduisent à des courbes.

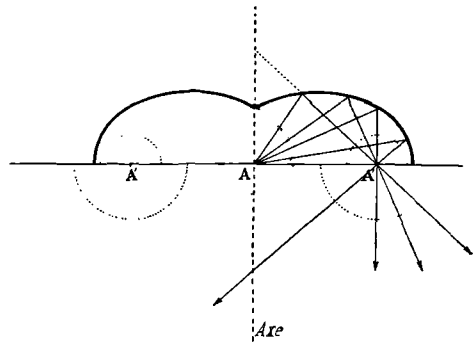


Fig. 33.

51. Surfaces d'onde possédant un plan de symétrie. — 1° Supposons que la surface d'onde possède un plan de symétrie que nous prendrons pour plan des zOx (fig. 34). L'intersection de ce plan P_1 de symétrie avec la surface est nécessairement une ligne de courbure A_1 . Le faisceau des lignes de courbure A_2 , qui coupe normalement la ligne A_1 , est naturellement symétrique par rapport au plan P_1 .

Par raison de symétrie, les courbures de la surface qui correspondent sur la ligne A_1 au faisceau des lignes A_2 y passent par un maximum ou un minimum. Les arêtes de rebroussement a_2 possèdent donc un rebroussement dans le plan de symétrie. Donc la nappe Σ_2 de la caustique se divise elle-même en deux nappes Σ_2' et Σ_2'' qui admettent le plan de symétrie comme plan tangent commun, le long d'une arête σ_2 de rebroussement lieu des centres C_2 de courbure de la surface d'onde dans le plan de symétrie.

La courbe σ_2 doit être considérée comme contour apparent de la caustique Σ_2 pour tous les points qui sont dans le plan de symétrie. D'un point M , on aperçoit bien les contours apparents des deux nappes Σ_1 et Σ_2 normaux entre eux.

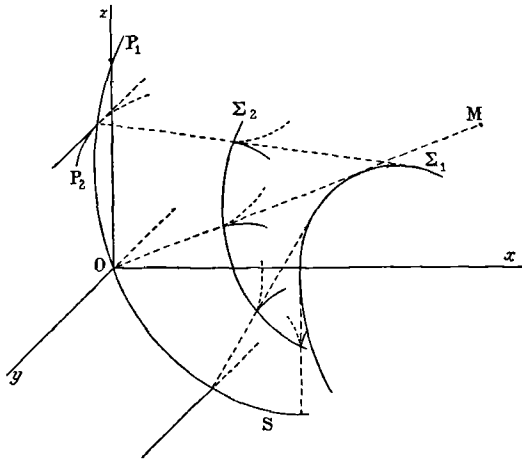


Fig. 34.

Le contour de Σ_2 est dans le plan P_1 de symétrie et se projette suivant Oz ; le contour de Σ_1 est parallèle à Oy , au voisinage du plan zOx . Le plan P_1 tangent à Σ_2 est normal à Σ_1 ; le plan P_2 est tangent à Σ_1 .

Quand la surface d'onde S devient un cylindre, il existe un nombre infini de plans de symétrie parallèles au plan zOx . La nappe Σ_2 passe à l'infini; la nappe Σ_1 devient un cylindre de génératrice parallèles à Oy . Suivant la forme de la courbe section droite du cylindre S , la section droite du cylindre Σ_1 prend des formes diverses; le cylindre Σ_1 peut posséder une génératrice de rebroussement.

2° Si la surface d'onde possède deux plans de symétrie P_1 et P_2 , naturellement rectangulaires, ce que nous avons dit de la nappe Σ_2 est vrai de la nappe Σ_1 . L'une et l'autre possèdent une arête plane de rebroussement; les plans de tangence correspondants sont les plans de symétrie P_1 et P_2 .

Sur la caustique, il y a toujours accumulation de lumière; cette accumulation est naturellement encore plus grande sur l'arête de rebroussement de notation σ , quand elle existe.

Comme première approximation, on peut remplacer la caustique d'un système de rayons admettant deux plans de symétrie par les arêtes de rebroussement σ_1 , σ_2 , dont nous venons de parler. Nous verrons (§ 81), en parlant de l'astigmatisme, des applications de cette

proposition. On n'oubliera pas que l'arête σ_2 , qui est dans le plan de symétrie P_1 , correspond aux courbures perpendiculaires à ce plan et *comme première approximation* aux courbures des sections faites par des plans parallèles au plan de symétrie P_2 . La courbe σ_1 , qui est dans le plan de symétrie P_2 , correspond aux courbures perpendiculaires à ce plan et *comme première approximation* aux courbures des sections faites par des plans parallèles au plan de symétrie P_1 .

52. Forme de la surface d'onde au voisinage de la caustique. — *La surface d'onde est repliée sur elle-même, de manière à présenter deux nappes S'_1 et S'_2 tangentes entre elles le long d'une arête de rebroussement φ qui est sur la caustique.*

On peut dire que la caustique est le lieu de ces arêtes de rebroussement φ .

Soit S une des positions de la surface d'onde, c'est-à-dire une des surfaces $\Psi = \text{constante}$, où l'on donne à la constante différentes valeurs; soit M un de ses points. Prenons pour plan du tableau l'un des plans principaux P_1 correspondant à ce point (fig. 35). La normale en M touche la caustique au point C_1 , centre de courbure de la section QMR pour le point M . Soit OC_1N la normale à la caustique au point C_1 , nous savons qu'elle est dans le plan P_1 (plan du tableau), puisque le plan P_1 est normal à la caustique au point C_1 .

La forme de la surface d'onde S' au voisinage de C_1 se déduit immédiatement du fait qu'elle doit être normale aux rayons. D'où ses deux nappes.

La nappe dont la trace sur le plan du tableau est S'_1 , correspond aux rayons qui touchent la caustique suivant C_1F ; la nappe dont la trace est S'_2 , correspond aux rayons qui touchent la caustique suivant C_1E ; la tangente de rebroussement est la normale OC_1N à la trace de la caustique sur le plan principal P_1 . Nous verrons plus loin que l'arête de

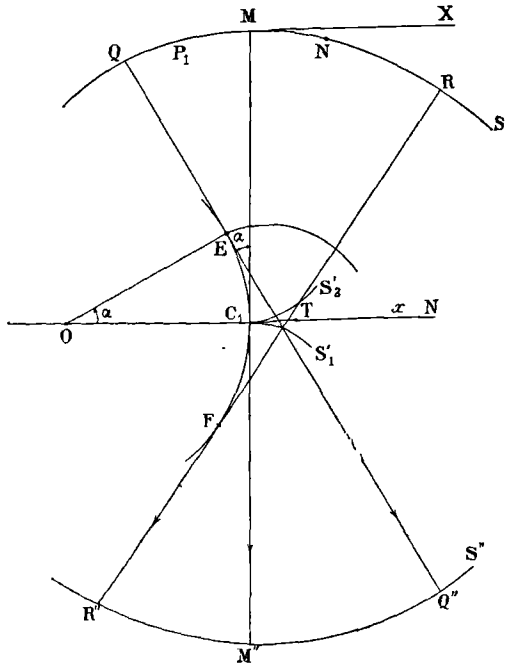


Fig. 35.

rebroussement φ_1 , passant par C_1 où elle est normale au plan du tableau, est le lieu de *l'une des focales de Sturm*. C'est au choix une courbe tracée sur la caustique ou une courbe tracée sur la surface d'onde.

On voit immédiatement comment on passe de la forme S de la surface d'onde à la forme S'' de courbure inverse.

Si la surface S considérée est prise assez loin, elle ne rencontre généralement pas la caustique, au moins effectivement. La rencontre a lieu effectivement pour une certaine surface pour laquelle la nappe S'_1 est réduite à rien.

Cette nappe augmente d'importance pour les surfaces d'onde suivantes, tandis que l'importance de S'_1 diminue.

On arrive enfin à une certaine surface pour laquelle il n'y a plus rencontre effective avec la caustique; c'est la nappe S'_1 de la surface d'onde qui est réduite à rien.

Ainsi par un point quelconque C_1 de la caustique passe une courbe φ_1 qui est arête de rebroussement pour l'une des surfaces d'onde. C'est dire qu'au voisinage de C_1 , la surface d'onde qui passe par C_1 se replie suivant deux nappes admettant comme plan tangent commun le plan normal au plan P_1 qui passe par C_1 et par la normale à la caustique.

En Optique proprement géométrique, la caustique est une limite infranchissable à l'énergie, puisque c'est l'enveloppe des rayons et que l'énergie est censée se propager le long des rayons; la caustique est aussi une surface de concentration de l'énergie. *Elle n'est évidemment jamais coupée par la surface d'onde*, qui se replie sur elle le long d'une arête de rebroussement φ . On peut dire que la caustique est le lieu de ces arêtes de rebroussement; si l'on imagine que la surface d'onde se déplace, elle se déforme en entraînant cette arête qui décrit la caustique.

Le lecteur ne confondra pas ces arêtes de rebroussement de notations φ_1 et φ_2 , qui appartiennent aux surfaces d'onde, avec les arêtes de rebroussement de notations a_1 et a_2 des surfaces développables contenant tous les rayons qui correspondent à chacune des lignes de courbures d'une quelconque des surfaces d'onde (§ 48).

On peut considérer les caustiques comme engendrées par l'un ou l'autre de ces groupes d'arêtes.

Nous reviendrons au § 337 sur les atténuations que la Théorie des ondes apporte à ces propositions.

Nous montrerons d'une manière générale :

1° que l'énergie ne s'annule plus subitement sur la caustique, mais diminue graduellement à l'intérieur de celle-ci;

2° qu'à l'extérieur de la caustique existent toujours des franges dont l'écartement peut servir de définition à la caustique au voisinage du point considéré.

53. **Équation de la surface d'onde au voisinage de la caustique.** — Comme origine des coordonnées, prenons le point C_1 ; prenons comme plan du tableau le plan P_1 qui est une des sections principales de l'onde S au point M où passe la normale MC_1 tangente à la caustique en C_1 . L'arête de rebroussement φ en C_1 sur la surface d'onde S' est normale au plan du tableau. Soit ρ le rayon de courbure OC_1 de la trace de la caustique sur le plan P_1 qui lui est normal.

Le rayon tangent au point E très voisin de C_1 , rayon normal à OE , touche l'axe C_1x en un point dont l'abscisse, comptée à partir de C_1 ,

$$\text{est : } x = \rho \left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1 \right) = \rho \frac{\alpha^2}{2}.$$

La tangente à la courbe que nous cherchons et qui diffère fort peu de C_1x (puisque'elle admet C_1x comme tangente) a pour coefficient angulaire au point d'intersection avec le rayon QE :

$$\frac{dy}{dx} = \alpha;$$

en effet cette tangente, normale à QE , est parallèle à OE .

On a donc :

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2x}{\rho}}, \quad y = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{\rho}} x^{\frac{3}{2}}, \quad x = \sqrt[3]{\frac{9}{8} \rho y^2}.$$

Telle est l'équation de la trace de la surface d'onde S' sur le plan principal P_1 en fonction du rayon de courbure de la caustique; l'équation est rapportée à la tangente de rebroussement et au rayon lumineux correspondant.

Soit R le rayon de courbure $\overline{MC_1}$ de la surface d'onde S dans le plan P_1 . On a, d'après la propriété des développées :

$$dR = \overline{EC_1} = \alpha \rho, \quad \overline{QM} = ds = Rx, \quad \rho = R \frac{dR}{ds}.$$

Le rayon de courbure ρ de la caustique dépend du rayon de courbure R de la surface d'onde et de sa variation quand on se déplace sur la ligne de courbure passant par M .

On trouve naturellement le même ρ sur quelque surface d'onde que l'on opère. En effet, changeons de surface d'onde. Quand on passe du rayon QQ'' au rayon MM'' , dR reste le même (égal à EC_1); R et ds varient proportionnellement.

EXEMPLE. — Supposons que la surface d'onde soit un cylindre. Rapportons-le au point M comme origine et aux axes MX et MM'' jouant le rôle d'axe des Y . On peut mettre la courbe QMS sous la forme :

$$Y = aX^2 + bX^3 + cX^4 + \dots$$

On a comme première approximation :

$$R = \frac{1}{2a} \left(1 - \frac{3b}{a} X \right), \quad -\rho = \frac{6b}{(2a)^3}.$$

La caustique se présente comme l'indique la figure, et la surface d'onde S' correspond aux x positifs, si l'on a :

$$a > 0, \quad b < 0.$$

54. Formes successives des surfaces d'onde de révolution.

— Il est très important de fixer l'attention sur les formes singulières que prennent les surfaces d'onde. Pour simplifier, nous étudierons seulement les surfaces d'onde de révolution à leur passage sur la

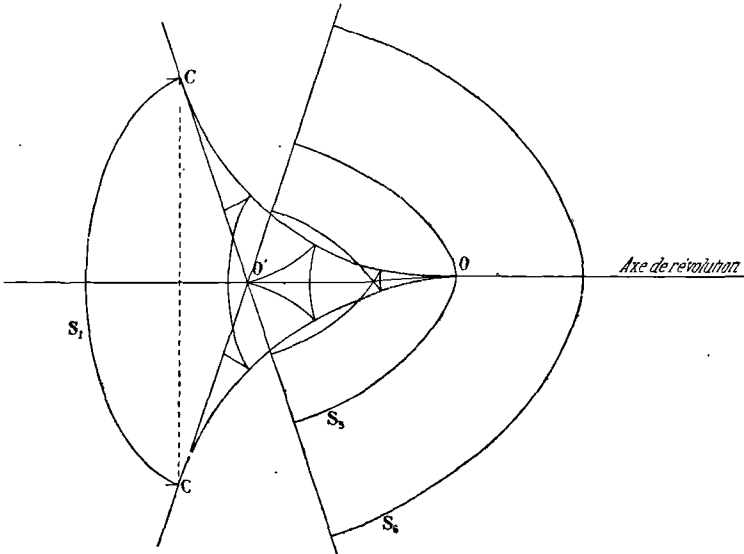


Fig. 36.

caustique (fig. 32). L'arête de rebroussement φ_1 sur la nappe Σ_1 de la caustique est, dans chaque position de la surface d'onde, un cercle dont le plan est normal à l'axe de révolution. L'arête de rebroussement sur la nappe évanouissante Σ_2 de la caustique (droite OO') disparaît ; la surface d'onde y possède un point conique.

La figure 36 représente les aspects successifs de la méridienne de la surface d'onde.

S_1 est la première position de la surface d'onde correspondant au temps t_1 . Les rayons extrêmes sont seuls tracés ; ils sont naturellement tangents à la méridienne COC de la nappe Σ_1 de la caustique. La droite CC est la projection du cercle de rebroussement φ_1 de la surface d'onde S_1 .

A mesure qu'on envisage des surfaces d'onde correspondant à des temps $t_2, t_3, \dots t_6$, de plus en plus grands, la seconde nappe de la surface d'onde augmente d'importance. Évanouissante pour S_1 , elle est ouverte pour S_2 ; elle se ferme par un point conique pour S_3 . Elle s'ouvre de nouveau pour S_4 . Le point conique disparaît à partir de S_5 .

Il est évident que les surfaces $S_{-\infty}$ et S_{∞} , correspondant à des temps très grands dans le passé et dans le futur, sont des sphères ayant un point quelconque de la figure comme centre, le point O par exemple. Leurs méridiennes sont donc des cercles.

Nous retrouverons plus loin les arêtes de rebroussement de notations φ_1 ; nous verrons que les éléments de ces arêtes ne sont pas autre chose que les *focales de Sturm*.

55. Maximum d'inclinaison sur une direction de référence.

— Pour ne pas compliquer inutilement la question, supposons le phénomène cylindrique et raisonnons sur une section droite (fig. 37) que nous prenons pour plan du tableau. Tous les rayons sont tangents à une courbe située dans ce plan. Considérons l'inclinaison des rayons sur une droite de référence; *cherchons les formes de la caustique et de la surface d'onde quand cette inclinaison passe par un maximum ou un minimum* OY .

On vérifie immédiatement que la trace de la surface d'onde, normale aux rayons, a une tangente d'inflexion OX normale à ce rayon OY . Donc le centre de courbure correspondant est à l'infini, et la trace de la caustique sur le plan du tableau admet pour asymptote le rayon OY le plus incliné (ou le moins incliné, peu importe).

Au voisinage du point O , la section droite de la surface d'onde a pour équation :

$$Y = bX^3.$$

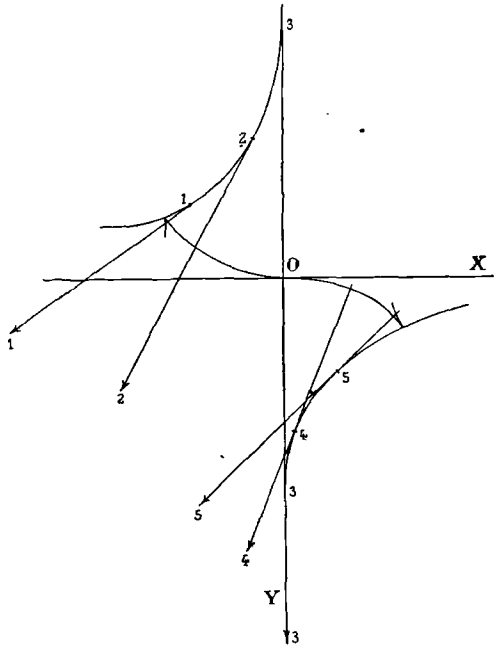


Fig. 37.

L'équation de la caustique, lieu des centres de courbure de la surface d'onde, a pour équation :

$$xy = \frac{1}{12b}.$$

Nous trouverons un problème analogue au § 134 à propos de l'arc-en-ciel. Les rayons qui tombent parallèlement entre eux sur une sphère (fig. 83) émergent tangentiellement à une caustique de révolution qui est asymptote à un cône. La surface d'onde est donc de révolution ; sa méridienne possède deux points d'inflexion dont les tangentes sont normales aux génératrices d'intersection du cône asymptotique par le plan méridien considéré.

REMARQUE. — On pourrait s'imaginer que le prisme rentre dans le cas ici traité. *Mais il peut exister un minimum de déviation par rapport à une direction variable, sans qu'il existe un minimum d'inclinaison par rapport à une direction fixe.* En fait, la caustique du prisme dont la figure 76 représente la section par le plan de symétrie, ne possède aucune asymptote.

Pinceaux, focales.

56. **Pinceau, aires d'amincissement, focales.** — Dans l'ensemble des rayons isogènes issus d'un point A, considérons un cône d'angle solide très petit : c'est un *pinceau*. Étudions ses transformations dans le *p*^{ième} milieu, c'est-à-dire après un nombre quelconque de réflexions et de réfractions.

Les droites de ce pinceau sont alors normales à la surface d'onde S choisie arbitrairement dans le *p*^{ième} milieu. Pour préciser, admettons qu'elles remplissent un élément d'aire de la surface S de forme circulaire ou elliptique. Nous appellerons *rayon moyen* celui qui passe par le centre de l'ellipse.

On obtient effectivement le pinceau en limitant la surface d'onde utilisée S par un écran percé d'un trou circulaire ou elliptique.

A cause de la continuité, les rayons d'un pinceau sont tangents à chacune des nappes de la caustique en des points voisins. Ils touchent donc tous une petite aire découpée sur chaque nappe, aire assimilable à un fragment de plan. *Chaque pinceau a donc dans chaque milieu isotrope deux aires d'amincissement α_1 et α_2 , qui sont les régions où les rayons du pinceau touchent les deux nappes de la caustique (fig. 31).*

Le pinceau s'y aplatit alors, en formant approximativement deux petits morceaux de plans.

Ces petits plans passent par le rayon moyen ; il est clair qu'ils font partie des plans principaux P_1 et P_2 correspondant à ce rayon moyen. *Ils sont donc normaux l'un sur l'autre.*

Considérons des droites *quelconques*, en nombre par conséquent *infini*, tracées dans ces aires d'amincissement et passant par le point de tangence du rayon moyen : ce sont les *focales*. On peut dire que *les rayons du pinceau s'appuient tous sur deux focales, l'une arbitrairement prise dans l'aire α_1 , l'autre arbitrairement prise dans l'aire α_2 .*

57. Expériences. — Faisons tomber sur une lentille inclinée un faisceau *isogène* de rayons. Limitons le faisceau émergent par un écran *fixe*, percé d'un petit trou de forme quelconque et placé normalement au rayon moyen M du pinceau ainsi défini. Coupons ce pinceau par un écran *mobile* que nous déplaçons le long du pinceau. Nous déterminons deux positions pour lesquelles l'intersection du pinceau et de l'écran mobile est une droite, *quelle que soit l'inclinaison de l'écran sur le pinceau*. Quand il en est ainsi, l'écran passe par un des centres de courbure principaux C_1 et C_2 , relatifs au rayon M , d'une quelconque des surfaces d'onde qui correspondent au milieu homogène dans lequel se déplace l'écran.

L'intersection est encore une petite droite si l'écran coupe le rayon moyen, non plus strictement aux points C_1 et C_2 , mais au voisinage.

La droite d'intersection de l'écran et du pinceau est une des focales définies au paragraphe précédent.

L'expérience réussit tout aussi bien avec un miroir sur lequel on envoie un faisceau incliné, limité, avant ou après réflexion, par un écran percé d'un petit trou de forme quelconque. Elle réussit quelle que soit la combinaison de lentilles, de prismes et de miroirs utilisée.

Avec une lentille ou un miroir, on vérifiera que les centres de courbure C_1 et C_2 sont d'autant plus écartés que le faisceau est plus incliné sur l'appareil, toutes choses égales d'ailleurs.

58. Focales de Sturm. — Parmi toutes les focales, il en est deux particulièrement importantes et que nous désignerons sous le nom de *focales de Sturm*.

Elles sont normales au rayon moyen du pinceau; elles sont par conséquent normales entre elles, puisqu'elles appartiennent aux plans principaux passant par le rayon moyen.

L'importance des focales de Sturm ne tient pas à ce que les rayons du pinceau s'appuient dessus d'une manière plus stricte que sur une quelconque des autres focales; *mais ce sont des éléments des arêtes de rebroussement φ des ondes au voisinage de la caustique (§ 51)*. Elles font donc partie à la fois des surfaces d'onde et de la caustique.

Traçons sur la surface d'onde S le lieu des points où l'un des rayons de courbure a une valeur constante R_1 . Nous obtenons ainsi une courbe B_1 .

La surface d'onde S' déduite de S , en prenant cette longueur constante R_1 sur toutes les normales à S , possède une arête de rebrous-

sement φ_1 sur la nappe Σ_1 de la caustique; les éléments de cette arête sont les focales de Sturm des éléments d'aire de la surface d'onde S qui sont traversés par la courbe B_1 .

Nous pouvons *en général* tracer sur la surface d'onde S deux faisceaux de courbes B_1 et B_2 , telles que le long d'une de ces courbes l'un ou l'autre rayon de courbure ait une longueur constante. A ces deux faisceaux correspondent deux autres faisceaux φ_1 et φ_2 , tracés sur la caustique, qui sont les arêtes de rebroussement des surfaces d'onde.

Ainsi nous pouvons tracer, sur une surface d'onde quelconque, soit le système des deux faisceaux de lignes de courbure A_1, A_2 , soit le système des deux faisceaux à rayon de courbure constant B_1, B_2 .

Au premier système correspond le système des arêtes de rebroussement a_1, a_2 , des surfaces développables dont les normales sont les génératrices. Au second système correspond le système des arêtes de rebroussement φ_1, φ_2 , communes à la caustique et aux surfaces d'onde successives (voir § 52).

La nappe Σ_1 de la caustique peut être considérée comme engendrée par les courbes a_1 ou φ_1 ; la nappe Σ_2 de la caustique peut être considérée comme engendrée par les courbes a_2 ou φ_2 .

59. Section droite d'un pinceau; variation de forme. — Reprenons l'expérience du § 57, mais supposons l'écran *mobile* normal au rayon moyen du pinceau.

Prenons pour axe des z le rayon moyen et pour axes des x et des y des parallèles aux focales de Sturm. Limitons le faisceau par un écran *fixe*, disposé dans le plan xOy , normal par conséquent au rayon moyen et percé d'un trou circulaire de rayon ρ . La section droite du pinceau, à une distance z du trou, est représentée par l'équation :

$$\frac{X^2}{\left(1 - \frac{z}{Z_1}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(1 - \frac{z}{Z_2}\right)^2} = \rho^2, \quad (1)$$

où Z_1 et Z_2 sont les z des points de tangence du rayon moyen et de la caustique.

Pour $z=0$, on a le cercle : $X^2 + Y^2 = \rho^2$.

Pour $z=Z_1$, on a la droite : $X=0$.

Pour $z=Z_2$, on a la droite : $Y=0$.

Enfin on a un cercle C pour une valeur Z' de z donnée par la relation :

$$\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} = \frac{2}{Z'}. \quad (2)$$

Z' est compris entre Z_1 et Z_2 . Le rayon du cercle correspondant est :

$$\rho' = \rho \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}. \quad (3)$$

La section droite du pinceau est donc toujours une ellipse qui se réduit à deux droites pour deux positions particulières de l'écran.

L'*astigmatisme* du faisceau est mesuré par la distance des focales de Sturm $Z_2 - Z_1$. Voici pourquoi.

A travers le système optique considéré, le pinceau isogène issu d'un point A n'en peut donner rigoureusement une image A'. Mais les rayons forment entre les deux focales une *pseudo-image* qu'on appelle quelquefois *cercle de moindre diffusion*, bien qu'elle n'ait la

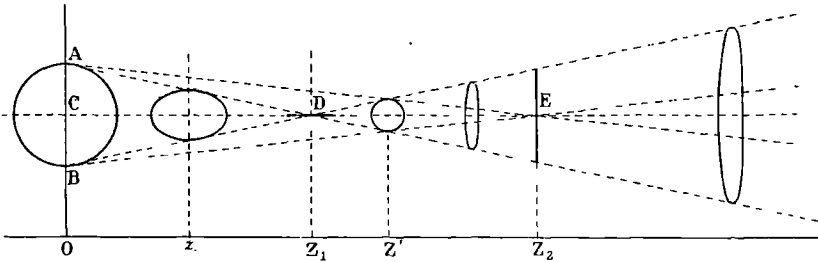


Fig. 38.

forme circulaire qu'en limitant par un écran de section convenable le pinceau utilisé. D'ailleurs, la position de cette pseudo-image entre les focales dépend de la position de l'écran limitant le faisceau, ainsi qu'il résulte de l'équation (2); car, si $Z_2 - Z_1$ est indépendant de cette position, Z_1 et Z_2 en dépendent séparément.

Quoi qu'il en soit, les dimensions de la pseudo-image diminuent et s'annulent en même temps que la distance $Z_2 - Z_1$ des focales : il est donc rationnel de prendre cette distance pour mesure de l'*astigmatisme*.

La figure 38 représente les sections définies par l'équation (1).

Pour la construire, prenons deux points A et B tels que :

$$\overline{AC} = \overline{CB} = \rho.$$

Traçons deux droites AD et BD passant par le point D tel que $\overline{CD} = Z_1$; traçons deux autres droites AE et BE passant par le point E tel que $\overline{CE} = Z_2$.

Pour une distance z quelconque, les axes de l'ellipse d'intersection sont donnés d'une part par la distance verticale des droites AD et BD, de l'autre par la distance verticale des droites AE et BE. Les positions de l'ellipse évanouissante sont en D et en E.

Pour représenter les sections, on les a rabattues sur le plan du tableau par une rotation de 90° .

60. Surfaces d'onde de révolution. — Nous savons (§ 50) que la nappe Σ_2 de la caustique se réduit à une portion de l'axe de révolution.

Considérons un pinceau de rayons. L'aire d'amincissement α_2 s'appuie nécessairement sur l'axe de révolution qui constitue l'une des focales correspondant à cette aire. La focale de Sturm ne coïncide généralement pas avec l'axe de révolution ; elle a seulement un point commun avec lui.

Coupons le pinceau par un plan passant par cette focale. L'intersection est une droite *comme première approximation*. Elle se réduit *rigoureusement* à un point sur l'axe de révolution ; elle s'élargit légèrement de part et d'autre de ce point : d'où l'aspect d'un 8 allongé qu'elle présente toujours, si le faisceau n'est pas très délié.

On comprendra mieux ce qui précède en se rapportant au § 50 et aux figures 32 et 36.

Les focales de Sturm sont généralement des fragments des arêtes de rebroussement d'une des surfaces d'onde. Il en est ainsi pour la nappe Σ_1 de la caustique, même quand les surfaces d'onde sont de révolution.

Pour la nappe Σ_2 , il n'y a plus à proprement parler d'arêtes de rebroussement. La focale de Sturm est simplement l'élément de la ligne d'intersection de la surface d'onde par le plan passant par le rayon et l'axe de révolution.

61. Œil placé dans un faisceau de rayons isogènes. — Plaçons l'œil dans un faisceau de rayons isogènes. Un mince pinceau pénètre à travers la pupille, qui joue le rôle de l'écran fixe des paragraphes précédents. Sur quel point l'œil doit-il s'accommoder pour voir l'image la plus nette du point source ?

La question ne comporte évidemment pas de réponse précise. On admet généralement que l'œil doit s'accommoder sur le cercle de moindre diffusion du pinceau, considéré dans l'air (ou généralement dans le milieu qui précède immédiatement l'œil), cercle dont la position entre les focales dépend de la position de l'œil par rapport à celles-ci.

Soit Z_1 et Z_2 les distances des focales à l'œil ; la distance Z' du cercle de moindre diffusion est donnée par la relation :

$$\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} = \frac{2}{Z'}, \quad Z' = \frac{2Z_1Z_2}{Z_1 + Z_2}.$$

Certains auteurs admettent que l'œil s'accommode sur l'une ou l'autre focale ; par exemple, sur la focale normale à l'axe de révolution : cette hypothèse est absolument arbitraire.

Du reste, il ne faut pas oublier que l'œil est généralement astigmatique (§ 84) ; il ne voit nettement que les droites qui sont dans deux certains plans rectangulaires. Il peut être conduit à s'accommoder sur l'une ou l'autre des focales comme conséquence de cet astigmatisme.

62. Intersection par un écran des rayons isogènes après leur sortie d'un système optique quelconque. — Pour préciser les idées, faisons tomber un faisceau isogène sur une lentille positive de grande ouverture inclinée par rapport au faisceau. Coupons le faisceau émergent par un écran incliné comme on voudra et déplaçons-le parallèlement à lui-même.

S'il est très voisin de la lentille, il ne coupe généralement pas la caustique.

Éloignons-le peu à peu. Pour une certaine position, il commence à la couper; nous en sommes avertis parce que la trace de la caustique sur l'écran est une ligne particulièrement brillante (§ 52).

Pour toute position de l'écran, l'intensité de la lumière croît quand on s'approche de la trace de la caustique; elle devient brusquement nulle quand on traverse la trace en entrant dans la caustique (comparer au § 51).

Comme la caustique est à deux nappes et que chaque nappe peut avoir des replis, on constate, au milieu de plages éclairées, des lignes brillantes qui sont les traces sur l'écran des diverses portions de la caustique. Quand on traverse normalement ces lignes, l'éclairement augmente lentement d'un côté (extérieur de la caustique) et diminue brusquement de l'autre côté (intérieur de la caustique) sans devenir nul si l'on se trouve alors dans la partie extérieure de l'autre nappe de la caustique.

Considérons un mince pinceau dont le rayon moyen aboutit en un point de la trace de la caustique sur l'écran; l'élément voisin de la trace est une des focales qui correspondent à ce pinceau. La trace de la caustique est constituée, si l'on veut, par les focales de tous les pinceaux qui admettent leurs focales dans le plan de l'écran, ou dont les rayons moyens passent par cette trace.

Cette proposition n'a évidemment de sens qu'en prenant le mot *focale*, non pas dans le sens restreint de Sturm, mais dans le sens général de droite tracée dans l'une ou l'autre des aires d'amincissement d'un pinceau.

REMARQUE. — Les géomètres appellent quelquefois *focale* la surface que nous désignons ici par *caustique*, et *anticaustique* ce que nous appelons *surface d'onde*. Le mot *caustique* est employé depuis de fort longues années; le terme *focale* est nécessaire au physicien pour désigner les droites focales par analogie avec les foyers.

Les physiciens réservent généralement le terme de focales aux focales de Sturm. Si celles-ci jouent un rôle physique éminent (puisque ce sont deux positions particulières des surfaces d'onde qui correspondent à un pinceau), il y a cependant avantage à généraliser le sens du mot. Une infinité d'erreurs, et parmi les plus grossières, sont évitées par les définitions précédentes.

CHAPITRE III

ÉTUDE GÉNÉRALE DES CAUSTIQUES¹

Dans ce Chapitre nous appliquerons les théorèmes généraux précédents à une série de cas particuliers, miroirs, plans, prismes, systèmes astigmatés.

Nous renverrons au Chapitre IV *la théorie des aberrations dans les systèmes centrés*, que son importance pratique amène à traiter avec plus de développements.

Nous ferons au Chapitre V la théorie des rayons courbes.

Caustique des miroirs.

63. **Caustique d'un miroir sphérique.** — Soit un miroir sphérique de centre de courbure C et un point lumineux A placé sur le diamètre OCA (fig. 39).

Une construction simple montre que la caustique se compose :

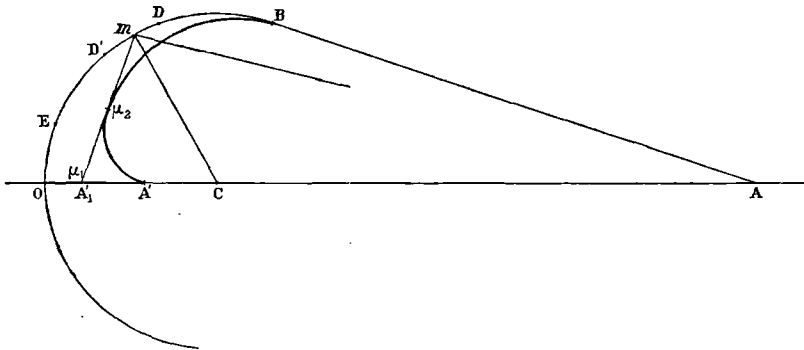


Fig. 39.

1° de la nappe évanouissante Σ_1 , formée d'une portion de l'axe de révolution prise à partir de A' foyer des rayons centraux (c'est-à-dire

¹ Ce Chapitre, comme le précédent, doit être lu en répétant à mesure les expériences. Il n'y a pas laboratoire si pauvre qu'il n'offre les appareils indispensables. C'est un exercice du plus haut intérêt que de voir *se réaliser* les propositions géométriques.

des rayons voisins de ACO et tombant presque normalement sur le miroir); 2° d'une nappe Σ_2 de révolution dont la méridienne se raccorde tangentiellement d'une part à l'axe de révolution au foyer A' des rayons centraux, d'autre part au miroir sphérique lui-même sur le cercle où les rayons issus de A sont tangents au miroir.

Dans le cas particulier où le point A est à l'infini, la méridienne de la nappe Σ_2 de la caustique est une épicycloïde engendrée par un cercle C dont le rayon est le quart du rayon du miroir et qui roule sur un cercle C' concentrique à la méridienne du miroir et de rayon moitié moindre (fig. 40).

Quelle que soit la position d'un point lumineux A par rapport à un miroir sphérique de centre C, il se trouve toujours sur un diamètre de ce miroir. Considérons deux portions BD et ED' du miroir; les caustiques correspondantes sont des morceaux de la

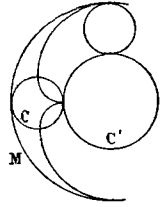


Fig. 40.

même caustique. En d'autres termes, pour un point A donné, pour un miroir de centre C et de rayon donnés, il n'existe qu'une caustique; mais on peut l'obtenir par morceaux à l'aide d'un miroir de faible ouverture qui occupe successivement toutes les positions sur la sphère géométrique de centre invariable C et de rayon $R = \overline{OC}$.

CAUSTIQUE D'UN MIROIR INCLINÉ. — Les remarques précédentes montrent que *la caustique d'un miroir incliné sur la direction moyenne du faisceau incident, n'est qu'un morceau de la caustique d'un miroir plus étendu dont le centre de figure serait sur la droite joignant le point lumineux au centre de courbure*. Les remarques du § 51 ne s'appliquent donc pas ici; le phénomène restreint a lieu si l'on veut un plan de symétrie, mais c'est en réalité un morceau du phénomène admettant un axe de révolution (§ 50).

En particulier, l'une des nappes Σ_1 de la caustique reste rigoureusement un morceau de droite (droite AC passant par le point lumineux et le centre de courbure du miroir); si le phénomène rentrait dans la catégorie du § 51, cette nappe aurait une arête de rebroussement (voir un exemple de ce cas au § 106). L'autre nappe Σ_2 de la caustique est un morceau de surface de révolution autour de la droite AC. Ces deux morceaux ne se raccordent qu'analytiquement et n'ont effectivement aucun point commun.

Suivant l'inclinaison, on réalisera un morceau plus ou moins grand du phénomène de révolution.

64. Pinceaux tombant sur le miroir. — Traçons sur le miroir un cercle dont le plan est normal à l'axe OA et qui passe par le point m, et un cercle infiniment voisin. Nous limitons ainsi une zone étroite. Aux rayons qui tombent sur cette bande circulaire correspon-

dent deux bandes sur la caustique. L'une est un cercle d'axe OA et passant par μ_2 , l'autre s'évanouit en un point μ_1 .

Les aires d'amincissement du pinceau qui est réfléchi par une petite aire prise autour du point m et qui admet la droite $m\mu_2\mu_1$ comme rayon moyen, sont deux petits plans, rectangulaires entre eux et passant par la droite $m\mu_1$. L'un, au voisinage de μ_1 , est dans le plan de la figure; l'autre, au voisinage de μ_2 , est normal au plan de la figure.

Les focales de Sturm sont : l'une, dite *tangentielle*, normale au plan de la figure et passant par μ_2 ; l'autre *radiale ou sagittale* dans le plan de la figure et passant par μ_1 . Le lecteur comprendra la raison de ces noms en regardant les focales du point A se projetant sur le plan normal à AO.

Nous décrivons au § 237 du Cours de Première une expérience dont on comprendra mieux le sens après les explications précédentes. Supposons la figure 39 représentant une section *horizontale* de l'appareil. Soit DD' le miroir utilisé. Le diamètre moyen mC horizontal de ce miroir est incliné sur le faisceau incident. Le pinceau ADD' a sa première focale *verticale* en μ_2 ; c'est la focale F_1 de la figure 207 du Cours de Première. Il a sa seconde focale *horizontale* en μ_1 ; c'est la focale F_2 de la même figure.

65. Miroir de petite ouverture placé à peu près normalement aux rayons incidents. Aberrations. — Un miroir de *grande* ouverture n'est pas stigmatique, son emploi est impossible comme instrument d'optique. Cherchons dans quelles limites un miroir de faible ouverture est utilisable.

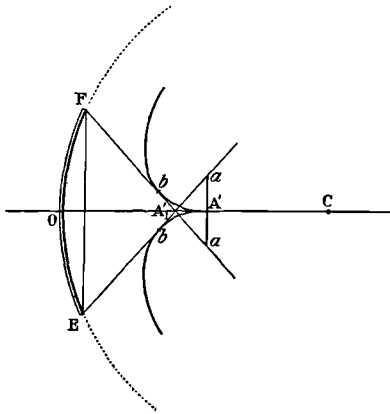


Fig. 41.

Il faut d'abord le placer à peu près normalement aux rayons incidents, ce qui revient à n'utiliser que les rayons qui touchent la caustique près du point A' (fig. 41), foyer des rayons centraux et conjugué de A dans la théorie élémentaire.

La valeur du miroir du point de vue pratique est définie par les *aberrations*.

Un écran est supposé placé au foyer A' des rayons centraux normalement à l'axe ACO. Le diamètre $aa = \xi$ du cercle éclairé est l'*aberration latérale*; la distance $A'A'$ du foyer A' des rayons cen-

traux au point A' , où les rayons marginaux coupent l'axe, est l'*aberration longitudinale*.

Nous montrerons (§ 91) que l'aberration longitudinale est, toutes choses égales d'ailleurs, proportionnelle au carré de l'ouverture : elle est pratiquement nulle si l'ouverture est petite. Il ne faut pas oublier du reste que, pour une ouverture trop petite, la diffraction intervient d'une manière désastreuse.

L'aberration latérale est donc proportionnelle au cube de l'ouverture $O = \overline{EF}$, puisqu'elle est égale à l'aberration longitudinale multipliée par un facteur qui contient cette ouverture au numérateur.

En particulier, pour le point de l'infini l'aberration longitudinale est $O^2 : 16 R$; l'aberration latérale est $O^3 : 8 R^2$.

Le cercle d'aberration aa n'est pas uniformément éclairé. L'illumination, maxima au point A' , diminue rapidement, de sorte que les effets d'un miroir sphérique sont moins mauvais qu'il ne semble d'abord. Seules les parties centrales du cercle aa sont visibles.

Nous retrouverons plus tard les aberrations de diffraction.

66. Rôle des diaphragmes. Vérification de la sphéricité ou de l'ellipticité d'un miroir. — Un système optique n'est généralement pas stigmatique. Si on limite le faisceau isogène à un cône de petit angle solide, les rayons s'appuient sur les focales de Sturm entre lesquelles se trouve la section de moindre aire. Si les focales sont assez rapprochées, cette section joue le rôle d'image.

Un système peut donc devenir *pratiquement* stigmatique grâce à une limitation convenable des faisceaux utilisés, limitation obtenue par un diaphragme percé d'un trou de diamètre assez petit.

Quand un diaphragme limite l'angle solide des faisceaux et quand cependant l'ouverture utile de l'appareil reste grande, il faut que chaque faisceau iso-

gène n'en utilise pour son compte qu'une très petite partie. On peut dire que chaque faisceau isogène est traité par un appareil différent dont il peut déceler les propriétés.

Voici un exemple simple du rôle du diaphragme (fig. 42).

Un objet AB est placé devant un miroir M dont l'ouverture est trop grande pour qu'il soit stigmatique. Disposons un écran E percé

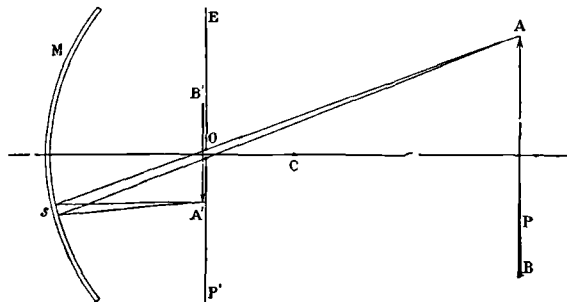


Fig. 42.

d'un petit trou devant l'objet. On trouve pour cet écran une position telle que l'image $A'B'$ est la plus nette possible.

Quand ce résultat est obtenu, chaque faisceau isogène n'utilise plus qu'une très petite surface du miroir. Ainsi le point A n'émet de rayons utiles à la formation de l'image A' que ceux compris dans le cône qui s'appuie sur l'aire s .

Généralement l'image $A'B'$ ainsi obtenue est déformée. L'appareil est rendu stigmatique, au moins au sens imparfait défini ci-dessus. Mais : 1° le champ est courbe ; 2° il y a généralement distorsion (§ 2).

On conçoit que de l'étude de l'image on puisse déduire les propriétés des différents points du miroir, en particulier vérifier sa définition géométrique d'après la façon dont chaque élément d'aire se conduit dans la formation des images.

67. Procédé de Foucault pour l'étude des surfaces.

Il s'agit de reconnaître si un miroir est sphérique, elliptique et à la limite parabolique de révolution. De telles surfaces sont sans aberrations pour les foyers géométriques (confondus dans le premier cas au centre de courbure, dont l'un va à l'infini dans le troisième). Les points voisins des foyers jouissent à peu près rigoureusement de la même propriété.

1° Pour démontrer qu'un miroir est de révolution, voici une méthode générale.

On prend comme objet un point voisin d'un des foyers géométriques, l'image se fait près de l'autre foyer. Si le miroir n'est pas rigoureusement elliptique, l'image ne se réduit pas à un point. Si la surface est de révolution, elle reste circulaire. Déplaçons un écran normal à l'axe principal à partir de cette pseudo-image ; nous coupons la caustique. Si la surface est de révolution, les traces restent circulaires.

L'étude de ces traces supposées circulaires permet des conclusions plus précises. Les traces successives proviennent de bandes circulaires qu'on peut supposer découpées sur la surface du miroir (§ 64). En déplaçant l'écran, l'éclairement des traces et des portions voisines s'altère plus ou moins. Il est facile d'en déduire dans quel sens la surface diffère d'un ellipsoïde de révolution, de savoir si la courbure des bords est trop ou pas assez prononcée, et de corriger ces imperfections.

2° Voici une seconde méthode qui met en jeu les principes du § 66 (fig. 43).

Plaçons en l'un des foyers, normalement à l'axe de révolution, un petit réseau formé de deux systèmes de lignes équidistantes très rapprochées et tracées à angle droit sur une lame de verre. Il est convenablement éclairé par un miroir.

L'image se forme à l'autre foyer : si elle est nette et non déformée,

on conclut que la forme elliptique cherchée est réalisée. Si elle ne l'est pas, la question est de savoir où se trouvent les défauts.

Utilisons un diaphragme grâce auquel la formation des divers points de l'image est due à des parties distinctes de la surface réfléchissante.

Foucault regarde l'image dans une sorte de microscope-lunette fortement diaphragmé (trou de 1^{mm},5). La figure fait comprendre la marche des rayons.

F'' est l'image réelle (donnée par l'objectif du microscope) de l'image réelle F' (donnée par le miroir) de l'objet F (ici le réseau,

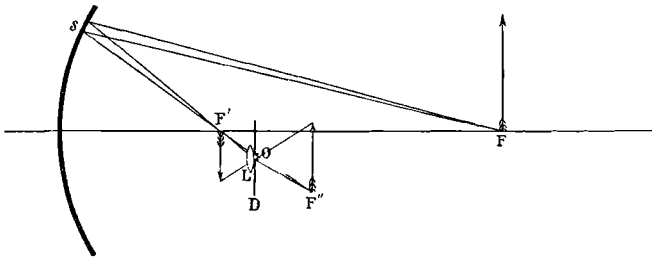


Fig. 43.

supposé de petites dimensions). Grâce au diaphragme, la majeure partie des rayons formant F' est éliminée dans F'' . La distance OF' doit être assez petite pour que, malgré les dimensions restreintes de l'image F' , les pinceaux qui la forment se réfléchissent en tous les points du miroir.

En étudiant la distribution et la courbure des traits de l'image F'' du réseau, on sait d'un seul coup en quels points le miroir est défectueux.

Si le miroir est correct, le réseau image est à mailles carrées.

Si, tout en restant de révolution, le miroir n'est pas elliptique, ou si l'un des foyers n'est pas en F , le réseau image cesse d'être à mailles carrées. On voit aisément qu'il subit la distorsion *en coussinet* (§ 3), si la courbure est insuffisante sur les bords ; *en barillet*, si elle est trop forte.

Généralement ces apparences se présentent si le miroir est mécaniquement taillé par un ouvrier habile. Sinon l'image est irrégulière. On corrige les défauts mis en évidence par des retouches *locales* effectuées à la main avec un polissoir.

Pour comprendre la possibilité de ces techniques, il ne faut pas oublier qu'il s'agit de miroirs ayant une distance focale considérable, de l'ordre de plusieurs mètres. L'ouverture, bien que très grande, n'est qu'une fraction assez petite de la distance focale.

La même méthode, complétée par la photographie, est industriellement utilisée pour l'étude des projecteurs.

Caustiques des plans et des prismes.

68. Surface d'onde des rayons isogènes après réfraction sur un plan.

I. Les rayons émis par une source S située dans le milieu le plus réfringent ($n_0 > n_1$) admettent comme méridienne de l'une de leurs surfaces d'onde dans le milieu le moins réfringent, une ellipse dont les foyers sont en S et en S' symétrique de S par rapport à la surface réfringente, et dont le grand axe est :

$$2a = \overline{SS'} (n_0 : n_1).$$

Soit (fig. 44) SA un rayon incident, $CDAB$ le rayon réfracté cor-

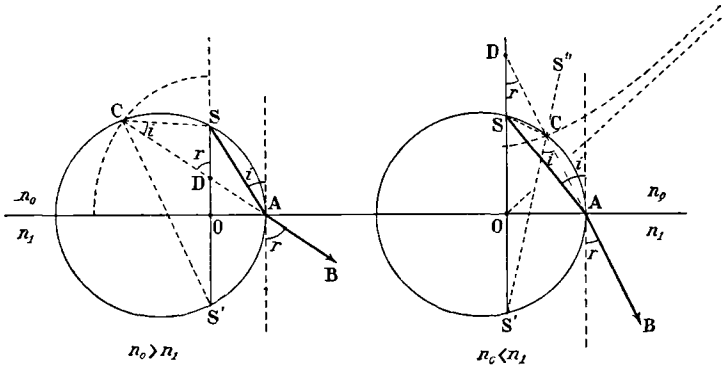


Fig. 44.

respondant. Menons la circonférence SAS' ; construisons le triangle SCS' : la droite CA est bissectrice de l'angle SCS' .

On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{\overline{DS}}{\overline{DS'}} &= \frac{\overline{CS}}{\overline{CS'}}, & \frac{\overline{DS}}{\overline{DS} + \overline{DS'}} &= \frac{\overline{CS}}{\overline{CS} + \overline{CS'}}. \\ \frac{\overline{CS} + \overline{CS'}}{\overline{SS'}} &= \frac{\overline{CS}}{\overline{DS}} = \frac{\sin r}{\sin i} = \frac{n_0}{n_1}. \end{aligned}$$

Donc $\overline{CS} + \overline{CS'}$ est une quantité constante. Le lieu du point C est une ellipse qui admet S et S' comme foyers; CB , bissectrice de l'angle SCS' , est la normale à l'ellipse.

Appelons p la distance de la source au plan; le grand axe de l'ellipse est donc :

$$2a = 2p(n_0 : n_1).$$

II. Les rayons émis par une source S située dans le milieu le moins réfringent ($n_0 < n_1$) admettent comme méridienne de l'une de leurs

surfaces d'onde dans le milieu le plus réfringent, une hyperbole dont les foyers sont en S et S' symétrique de S par rapport à la surface réfringente, et dont l'axe réel est :

$$2a = SS' (n_0 : n_1).$$

Faisons la même construction que ci-dessus.

Le rayon réfracté DCAB bissecte l'angle extérieur SCS''. On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{\overline{DS}}{\overline{DS'}} &= \frac{\overline{CS}}{\overline{CS'}}, & \frac{\overline{DS}}{\overline{SS'}} &= \frac{\overline{CS}}{\overline{CS'} - \overline{CS}}. \\ \frac{\overline{CS'} - \overline{CS}}{\overline{SS'}} &= \frac{\overline{CS}}{\overline{DS}} = \frac{\sin r}{\sin i} = \frac{n_0}{n_1}. \end{aligned}$$

Donc $\overline{CS'} - \overline{CS}$ est une quantité constante. Le lieu du point C est une hyperbole qui admet S et S' comme foyers; CB, bissectrice de l'angle SCS'', est la normale à l'hyperbole.

69. **Surfaces d'onde virtuelles.** — Le problème précédent illustre la notion de surface d'onde virtuelle (§ 45).

La surface d'onde est définie par la constance du chemin optique à partir du point source.

Soit plusieurs milieux isotropes consécutifs; traçons l'une des surfaces d'onde dans le milieu q d'indice n_q , celle qui correspond au chemin Ψ_1 . Menons les normales à cette surface, et, sans sortir du milieu, prenons sur toutes une longueur L constante dans le sens de la propagation. Nous obtenons la surface d'onde correspondant au chemin $\Psi_1 + n_q L$.

Il peut arriver, pour une longueur L suffisante, qu'une partie de cette surface soit, non plus dans le milieu q , mais bien dans le milieu $q + 1$: cette partie est dite virtuelle. Elle existerait comme réelle si le milieu q était indéfini; elle n'est virtuelle que parce que le milieu q est limité.

Prenons la longueur L constante sur les normales en sens inverse du sens de propagation. Nous obtenons une surface d'onde correspondant au chemin $\Psi_1 - n_q L$.

Il peut encore arriver que, pour une longueur L suffisante, une partie de cette surface soit dans le milieu $q - 1$: elle est dite virtuelle.

C'est précisément ce qui arrive pour les surfaces d'onde, ellipsoïde et hyperboloïde de révolution, déterminées au § précédent.

Elles sont virtuelles et correspondent à un chemin optique nul.

Cela veut dire que le chemin optique est le même sur une surface d'onde réelle du milieu 1, soit qu'on le mesure à partir du point source sur une trajectoire réelle, soit qu'on le mesure à partir des

surfaces ci-dessus déterminées, le milieu noté 1 étant supposé indéfini.

Il suffit de prouver que les chemins optiques $n_0 \cdot \overline{SA}$ et $n_1 \cdot \overline{CA}$ sont égaux. Or dans la figure de gauche l'angle CSA est le supplément de l'angle r ; on a donc :

$$\frac{\overline{SA}}{\overline{CA}} = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_1}{n_0}, \quad n_0 \cdot \overline{SA} = n_1 \cdot \overline{CA}.$$

Dans la figure de droite, CSA est égal à r comme ayant même mesure $\overline{CA} : 2$; l'angle SCA est le supplément de l'angle i . On retrouve les mêmes équations.

Dans l'étude de la diffraction, nous utiliserons fréquemment les surfaces d'onde virtuelles.

70. Caustique des rayons isogènes après réfraction sur un plan.

I. Quand le point source A est dans le milieu le plus réfringent ($n_0 > n_1$), la caustique est une surface de révolution autour de la normale AO au plan réfringent abaissée du point source A; sa méridienne

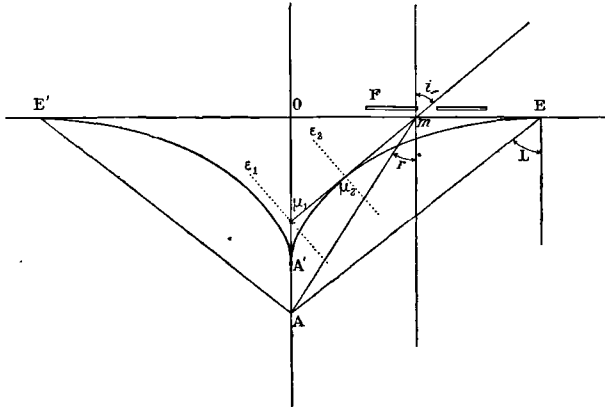


Fig. 45.

diennne est la développée de l'ellipse ci-dessus déterminée dont les demi-axes sont :

$$a = p \frac{n_0}{n_1}, \quad b = p \frac{\sqrt{n_0^2 - n_1^2}}{n_1}.$$

L'équation de cette développée est :

$$\left(\frac{n_0}{n_1 p} \xi \right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\sqrt{n_0^2 - n_1^2}}{n_1 p} \eta \right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

en prenant pour axe des ξ la droite AO (fig. 45) et pour axe des η la droite OE sur la surface réfringente.

Pour $\eta = 0$:
$$\frac{\xi}{p} = \frac{\overline{AO}}{AO} = \frac{n_1}{n_0} < 1.$$

Pour $\xi = 0$:
$$\eta = \overline{AE} = \frac{n_1 p}{\sqrt{n_0^2 - n_1^2}}.$$

On trouve immédiatement cette condition, en écrivant que le rayon AE fait avec le plan réfringent l'angle limite L tel que $\overline{OE} = p \operatorname{tg} L$.

II. Quand le point source A est dans le milieu le moins réfringent ($n_0 < n_1$), la caustique est une surface de révolution autour de la normale AO au plan réfringent abaissée du point source A; sa méridienne est la développée de l'hyperbole ci-dessus déterminée dont les demi-axes sont :

$$a = p \frac{n_0}{n_1}, \quad b = p \frac{\sqrt{n_1^2 - n_0^2}}{n_1}.$$

L'équation de la développée est (fig. 46) :

$$\left(\frac{n_0}{n_1 p} \xi \right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{\sqrt{n_1^2 - n_0^2}}{n_1 p} \eta \right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Pour $\eta = 0$:
$$\frac{\xi}{p} = \frac{\overline{A'O}}{AO} = \frac{n_1}{n_0} > 1.$$

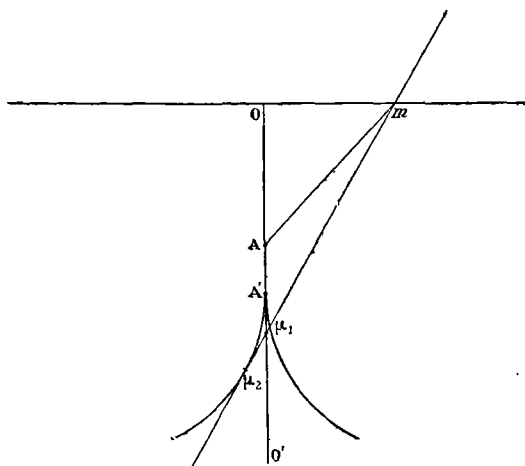


Fig. 46.

Pour comparer les figures 45 et 46 aux figures 44, le lecteur remarquera que dans la figure 44 le point source S est au-dessus du plan réfringent; dans les figures 45 et 46, le point source A est au-dessous du plan réfringent. Il placera sans difficulté l'ellipse et l'hyperbole dans les figures 45 et 46, ou encore les développées de ces courbes dans la figure 44.

71. Pinceaux de rayons. — Reprenons le même problème, mais en nous attachant à préciser la marche des pinceaux élémentaires.

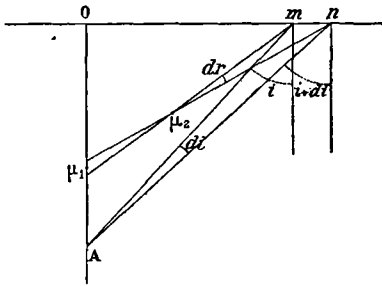


Fig. 47.

Soit A la source (fig. 47); posons :

$\overline{Am} = s$ ou t suivant qu'il s'agit des focales sagittales ou des focales tangentielles (§ 64) ;

$$\overline{\mu_1 m} = s', \quad \overline{\mu_2 m} = t';$$

$$\overline{OA} = p, \quad \overline{O\mu_1} = p'.$$

FOCALE RADIALE OU SAGITTALE. —

Elle passe par le point μ_1 ; elle est dirigée dans le plan du tableau, c'est-à-dire radialement par rapport

à l'axe de révolution AO. On a immédiatement, en modifiant légèrement les notations des indices en vue des applications ultérieures :

$$s \sin i = s' \sin r; \quad \frac{s'}{s} = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n'}{n}, \quad s' = \frac{n'}{n} s.$$

On peut encore définir le point μ_1 par sa distance $\overline{O\mu_1} = p'$.

$$Om = p \operatorname{tg} i = p' \operatorname{tg} r, \quad \frac{p'}{p} = \frac{\sin i \cos r}{\sin r \cos i} = \frac{n' \cos r}{n \cos i}.$$

FOCALE TANGENTIELLE. — Elle passe par le point μ_2 et est normale au plan du tableau; elle est tangente au cercle normal à l'axe de révolution AO et passant par elle. On a :

$$\frac{mn}{\cos i} = \frac{tdi}{\cos i} = \frac{t dr}{\cos r}; \quad n \sin i = n' \sin r, \quad n \cos i di = n' \cos r dr.$$

$$\frac{t'}{t} = \frac{di}{dr} \frac{\cos r}{\cos i} = \frac{n' \cos^2 r}{n \cos^2 i}, \quad t' = \frac{n' \cos^2 r}{n \cos^2 i} t.$$

L'*astigmatisme* du pinceau est défini par la distance des focales :

$$t' - s' = \frac{n'}{n} \left(\frac{\cos^2 r}{\cos^2 i} - 1 \right) t.$$

72. Expérience de vérification. — Le phénomène vaut la peine d'être vérifié; voici comment on procède (fig. 48).

On remplit jusqu'au bord un grand cristalliseur, de manière à avoir une couche d'eau d'une dizaine de centimètres d'épaisseur. On recourbe une lame de clinquant ABC comme l'indique la figure; on y perce avec une aiguille très fine un trou A qu'on éclaire à l'aide d'un papier blanc P.

Enfin on observe sous l'incidence la plus grande possible, avec un petit viseur d'ouverture aussi grande que possible, regardant par

exemple de 50^{cm} à 1^m, et dont l'oculaire se meut à frottement très doux ou à l'aide d'un pignon et d'une crémaillère.

On vérifie immédiatement :

1° qu'il est impossible d'obtenir une image nette du trou A ;

2° que, pour un certain tirage, on obtient comme image une petite droite située dans un plan vertical ; .

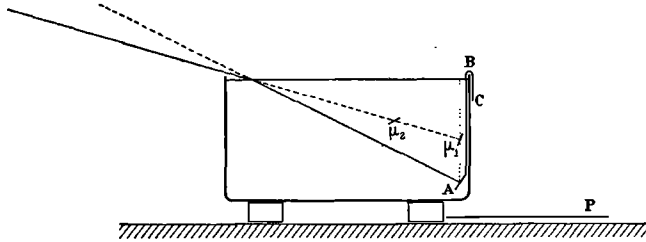


Fig. 48.

3° que, pour un tirage correspondant à une distance moindre de l'objet, on obtient comme image une petite droite horizontale.

Les longueurs des droites dépendent de l'ouverture du viseur.

On voit dans le plan du réticule, à travers l'objectif stigmatique de la lunette, les images : dans le premier cas de la focale de Sturm virtuelle μ_1 , dans le second cas de la focale de Sturm virtuelle μ_2 .

Si le viseur est convenablement gradué, on peut mesurer la distance $\mu_1\mu_2$ des focales et vérifier, au moins qualitativement, la formule du paragraphe précédent.

73. Vision d'un objet par réfraction à travers une surface plane indéfinie. — Nous étudierons seulement le cas le plus

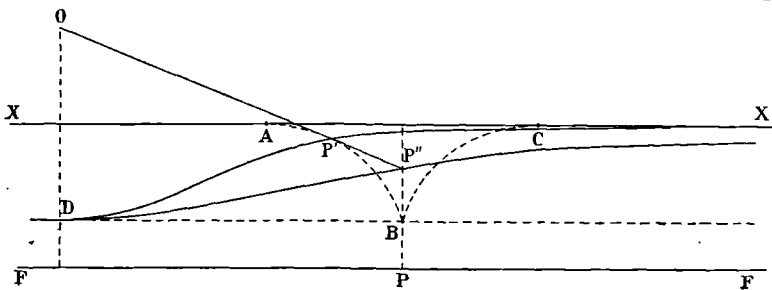


Fig. 49.

simple : fond plat et horizontal FF' d'un bassin peu profond rempli d'eau (fig. 49).

Construisons les caustiques identiques entre elles des points du fond. Par exemple, ABC est la méridienne de la caustique du point P.

Parmi les rayons qui émanent du point P, l'œil O reçoit un pinceau

dont l'axe est la tangente $OP'P''$ menée du point O à la caustique du point P . Ce pinceau admet une focale de Sturm horizontale passant par P' , une focale de Sturm passant par P'' et située dans le plan vertical.

Le lieu des focales horizontales des points de la droite FF est la courbe $DP'X$, asymptote à la droite XX ; le lieu des autres focales est la courbe $DP''X$, asymptote à la même droite. Le lieu des cercles de moindre diffusion est une courbe comprise entre les précédentes.

L'œil vise quelque part entre les focales (§ 61). Pour l'œil placé au-dessus du centre du bassin, le fond plat paraît donc remonter vers les bords et se confondre asymptotiquement avec la surface du liquide.

La construction est la même pour une droite *inclinée*, par exemple pour un bâton plongé dans l'eau; mais les caustiques des divers points ne sont plus identiques. Suivant la position de l'œil par rapport au bâton, il paraîtra convexe vers le haut ou convexe vers le bas, tout comme le fond du bassin qui est convexe vers le bas dans la verticale de l'œil, et convexe vers le haut pour des directions de visée assez inclinées.

74. Remarques sur l'obtention des focales. — Quel que soit le nombre des surfaces de forme quelconque à travers lesquelles un pinceau se réfracte, à l'émergence il ne possède toujours que deux focales de Sturm. Ce serait donc une lourde faute que de considérer les focales obtenues dans le second milieu comme des points lumineux donnant de nouvelles focales dans le troisième, et ainsi de suite.

Pour déterminer les focales dans le second milieu, nous avons dû grouper convenablement les rayons formant le pinceau dans le premier milieu. Ne se coupent que les rayons voisins appartenant aux lignes de courbure de la surface d'onde. Dans le cas de la réfraction sur une surface plane, les raisons de symétrie nous disent immédiatement quels rayons il faut associer. Les rayons qui par leur intersection donnent la position de la focale *tangentielle* μ_2 (normale au plan méridien) sont dans le plan AOm , méridien du phénomène (fig. 47); les rayons qui par leur intersection donnent la position de la focale *radiale ou sagittale* μ_1 (située dans le méridien) sont dans un plan perpendiculaire au méridien.

S'il existe une seconde réfraction sur un plan *disposé n'importe comment par rapport au premier*, il faut grouper à nouveau les rayons pour déterminer les focales dans le troisième milieu, ce qui rend le problème très compliqué.

Mais cette opération est inutile dans le cas où tous les plans sont parallèles à une droite D , et où l'on considère seulement les pinceaux qui sont voisins d'un plan perpendiculaire à cette droite. Dans ce cas plus général rentre celui d'un système de prismes à arêtes D parallèles

entre elles, quand on ne considère que les rayons qui sont voisins de la section principale commune.

75. Système de prismes. Prisme unique. — Si les conditions précisées au § précédent sont satisfaites, il suffit de suivre les deux mêmes rayons; ils se couperont dans tous les milieux consécutifs; car, par raison de symétrie, ils appartiendront successivement à une ligne de courbure des surfaces d'onde dans les milieux consécutifs.

Conséquemment nous pourrons calculer très facilement la position des focales dans les différents milieux (fig. 50).

Soit 1, 2, 3, ... les plans réfringents séparant les milieux 0, 1, 2, ...

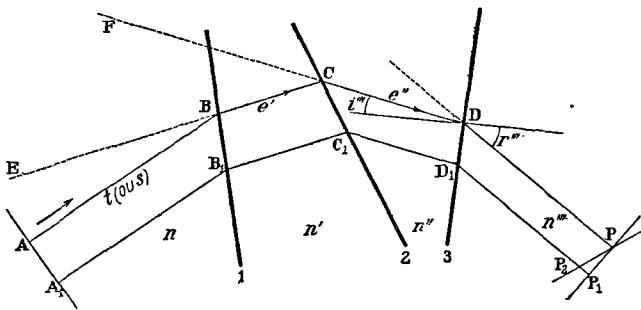


Fig. 50.

d'indices n, n', n'', \dots Traçons le rayon moyen du pinceau dont nous voulons déterminer les focales.

Appelons i_q, r_q , les angles d'incidence et de réfraction sur la surface q .

Soit enfin e', e'', \dots les longueurs du rayon à travers les milieux 1, 2, ... (épaisseurs des milieux 1, 2, ... pour le pinceau considéré).

FOCALES RADIALES.

Ces focales sont dans la section principale, c'est-à-dire normales à la droite D. La focale radiale dans le milieu 1 est sur la droite EB à une distance du point B (§ 71) :

$$s' = s \frac{n'}{n}.$$

Elle est donc à une distance du point C égale à :

$$s' + e' = s \frac{n'}{n} + e'.$$

La focale radiale dans le milieu 2 est sur la droite FC à une distance du point C :

$$s'' = (s' + e') \frac{n''}{n'}.$$

Elle est donc à une distance du point D égale à :

$$s'' + e'' = (s' + e') \frac{n''}{n'} + e''.$$

Et ainsi de suite. En particulier pour un simple prisme d'indice n placé dans l'air, la focale radiale est normale à l'arête. Il faut poser dans les formules : $n = n'' = 1$, $n' = n$, $e' = e$.

$$s' = ns, \quad s'' = \frac{ns + e}{n} = s + \frac{e}{n}.$$

On a simplement $s'' = s$, quand on peut négliger l'épaisseur e du prisme.

La distance de la focale radiale à l'arête est alors égale à la distance de la source à l'arête, quel que soit l'angle d'incidence du pinceau.

FOCALES TANGENTIELLES.

Les focales sont normales à la section principale, ou, si l'on veut, parallèles à la droite D.

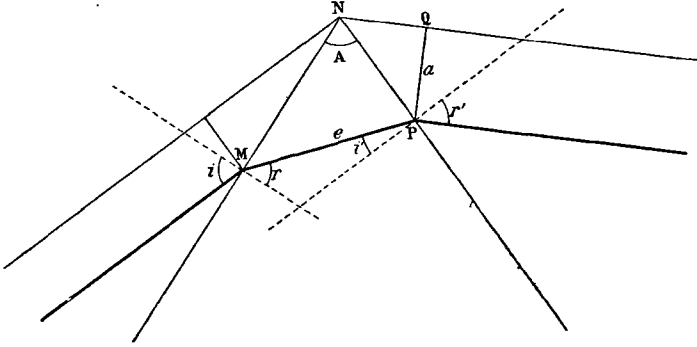


Fig. 51.

Le mode de calcul est identique; nous avons :

$$t' = \frac{n'}{n} \frac{\cos^2 r}{\cos^2 i} t.$$

La distance de la focale au point C est $t' + e'$; d'où :

$$t'' = \frac{n''}{n'} \frac{\cos^2 r'}{\cos^2 i'} (t' + e');$$

et ainsi de suite. Le calcul ne présente aucune difficulté.

Dans le cas d'un simple prisme, il faut poser :

$$n = n'' = 1, \quad n' = n, \quad e' = e :$$

$$t'' = \frac{\cos^2 r'}{\cos^2 i'} \left(\frac{\cos^2 r}{\cos^2 i} t + \frac{e}{n} \right),$$

et si l'épaisseur est négligeable :

$$t'' = \frac{\cos^2 r \cos^2 r'}{\cos^2 i \cos^2 i'} t.$$

76. Forme de la caustique. — A est le point lumineux (fig. 52). Il existe un plan de symétrie passant par A et que nous prenons pour plan du tableau (section principale); nous savons (§ 51) qu'une des nappes Σ_2 de la caustique se divise elle-même en deux nappes symétriques par rapport au plan du tableau et admettant dans ce plan une arête de rebroussement. Cette arête est le lieu des focales radiales qui sont dans le plan du tableau (focales notées μ_1 au § 71).

L'autre nappe Σ_1 de la caustique admet comme trace sur le plan

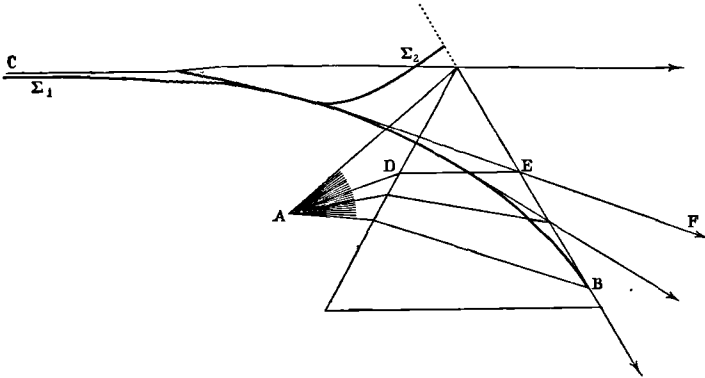


Fig. 52.

du tableau le lieu des focales tangentielles qui sont perpendiculaires à ce plan (focales notées μ_2 au § 71).

La trace Σ_1 est tangente à la trace de la face de sortie au point B où le rayon émis par A émerge en rasant. Elle est tangente au rayon qui passe par l'arête du prisme en un point C qui est à distance finie, mais hors de la figure. Elle a la forme générale représentée.

Les deux traces Σ_1 et Σ_2 se confondent auprès du point de tangence du rayon EF qui correspond au minimum de déviation.

Conformément à ce que nous avons dit au § 55, le minimum de déviation ne correspond pas à un minimum d'inclinaison du rayon émergent par rapport à une droite de référence fixe. La trace de la caustique n'a pas de branches infinies tangentes au rayon le moins dévié.

77. Expérience de vérification. — Prenons comme source un point lumineux de très petit diamètre A (fig. 53). A quelque distance disposons une lentille, et contre la lentille un prisme à arête verticale que nous pouvons faire tourner autour de cette arête comme axe vertical. Utilisons de la lumière monochromatique, ou plus simplement couvrons le trou A d'un verre rouge. Limitons le faisceau par un diaphragme percé d'un trou et collé sur une des faces du prisme.

Pour chaque azimut du prisme, nous ne réalisons pas la caustique

entière, puisque nous limitons le phénomène à un pinceau; même en joignant tous les phénomènes obtenus pour la série des azimuts, nous n'obtenons pas ce que représente la figure 52 et ce que nous étudions au paragraphe précédent. En effet, au paragraphe précédent,

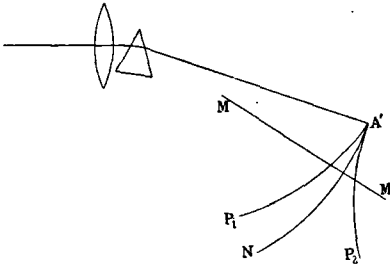


Fig. 53.

quand change l'angle d'incidence du pinceau, la distance s ou t du point A au point d'incidence varie. Au contraire, quand nous faisons tourner le prisme, la distance s ou t reste constante.

La lentille donne une image réelle des focales; si l'on veut, elle fournit un objet virtuel image du point A dont le prisme donne les focales réelles. La théorie précédente s'applique en vertu du principe du retour des rayons.

Déterminons la distance des focales pour chaque azimut du prisme et le lieu des focales pour la série des azimuts.

FOCALES RADIALES.

Elles sont dans la section principale, par conséquent normales à l'arête, horizontales dans la disposition adoptée.

L'épaisseur du prisme étant négligeable devant les distances s et s'' , le lieu de ces focales est un cercle $A'N$ ayant pour centre la trace de l'arête.

N'oublions pas que pendant la rotation du prisme, on passe par un minimum de déviation.

La courbe NA' est donc parcourue deux fois: dans le sens NA' d'abord, puis dans le sens $A'N$ quand on a dépassé le minimum.

FOCALES TANGENTIELLES. — Elles sont parallèles à l'arête, verticales dans la disposition adoptée. Leur lieu se compose de deux courbes P_1A' et $A'P_2$, se raccordant tangentiellement au point A' entre elles et avec le cercle précédemment déterminé. La courbe P_1A' correspond aux incidences sur le prisme plus voisines de la normale que celle qui correspond au minimum de déviation. La courbe $A'P_2$ correspond aux incidences plus éloignées de la normale que celle qui correspond au minimum de déviation.

Bien entendu, les dimensions des focales (toutes choses égales d'ailleurs) augmentent à mesure qu'on s'écarte du point A' , pour lequel elles se confondent en un point. Nous savons qu'alors le prisme joue le rôle d'appareil stigmatique.

Nous ne saurions trop conseiller au lecteur de répéter ces remarquables expériences; il emploiera avantageusement un prisme d'angle très aigu.

REMARQUES SUR LA MISE AU POINT DES SPECTROSCOPES. — Quand on

met au point la lunette d'un spectroscopie sur les poussières ou les irrégularités de la fente, on aperçoit des raies normales à l'arête du prisme. Si on les amène au maximum de netteté, on ne distingue pas toujours les raies de Fraunhofer parallèles à l'arête. Cela arrive si le collimateur n'est pas exactement réglé pour l'infini, le prisme n'étant pas au minimum de déviation; les focales parallèles et normales à l'arête du prisme ne coïncident pas.

Cela arrive encore si les faces du prisme sont non pas des plans parfaits, mais des cylindres dont les génératrices sont parallèles à l'arête. Que le collimateur soit ou non exactement réglé pour l'infini, l'appareil est astigmatique (§ 81).

78. Largeur apparente des images prismatiques. — Considérons deux rayons de même réfrangibilité faisant à l'entrée dans le prisme (fig. 51) des angles d'incidence i et $i + di$. Calculons la divergence dr' de ces rayons à la sortie. On a :

$$\begin{aligned} \sin i &= n \sin r, & \cos i \, di &= n \cos r \, dr, \\ \sin r' &= n \sin i', & \cos r' \, dr' &= n \cos i' \, di', \\ r + i' &= A, & dr + di' &= 0. \end{aligned}$$

D'où :

$$dr' = -di \frac{\cos i \cos i'}{\cos r \cos r'},$$

$$\frac{di}{\sqrt{\frac{n^2-1}{\cos^2 i} + 1}} = -\frac{dr'}{\sqrt{\frac{n^2-1}{\cos^2 r'} + 1}}.$$

Grâce à la formule qui termine le § 75, cette relation s'écrit :

$$di\sqrt{t} + dr'\sqrt{t''} = 0,$$

quand il est possible de négliger l'épaisseur du prisme. Rappelons que t et t'' sont les distances conjuguées au sommet du prisme, des focales parallèles à son arête, les seules qui interviennent quand on prend comme source une fente elle-même parallèle à l'arête.

di et dr' sont les angles sous lesquels on voit de l'arête du prisme l'objet et l'image correspondante (largeur de la fente et de son image).

La largeur apparente de la fente reste inaltérée pour le minimum de déviation.

L'image de la fente est infiniment mince quand l'incidence est rasante. On a alors $i = 90^\circ$, $\cos i = 0$, les autres cosinus ne s'annulant pas.

L'image de la fente devient infiniment large quand on tourne le prisme jusqu'à ce que la lumière sorte en le rasant :

$$\cos r' = 0, \quad dr' : di = \infty.$$

D'une manière générale, les largeurs absolues l de la fente objet et l'' de la fente image satisfont aux relations :

$$l = tdi, \quad l'' = -t'dr'; \quad \frac{l}{\sqrt{t}} = \frac{l''}{\sqrt{t''}}.$$

Elles sont entre elles comme les racines carrées de leurs distances à l'arête du prisme.

79. Pureté du spectre. — Nous donnons ici la théorie géométrique de la *pureté* du spectre; elle doit être complétée par l'étude de la diffraction (§ 288).

Supposons que les rayons de réfrangibilités différentes tombent sous la même incidence; calculons la *dispersion* dr' . On a les équations :

$$\begin{aligned} \sin r \, dn + n \cos r \, dr &= 0, \\ \sin i' \, dn + n \cos i' \, di' &= \cos r' \, dr', \end{aligned}$$

qui, jointes à la condition : $dr + di' = 0$, donnent :

$$dr' = dn \frac{\sin A}{\cos r \cos r'}.$$

$dr' : dn = \infty$ pour $r' = 90^\circ$ (émergence rasante). Ce quotient envisagé comme fonction de r ou de r' , pour un indice constant, est minimum quand :

$$\sin r \cos^2 r' = n \cos r \sin r' \cos i'. \quad (4)$$

L'équation (4) se transforme aisément en la suivante :

$$\operatorname{tg} r = \frac{n^2 \operatorname{tg} i'}{1 - (n^2 - 1) \operatorname{tg}^2 i'}. \quad (5)$$

On peut poser approximativement :

$$\frac{n^2 \operatorname{tg} i'}{1 - (n^2 - 1) \operatorname{tg}^2 i'} = \operatorname{tg} (n^2 i'), \quad (6)$$

pour toutes les valeurs expérimentales de n^2 . Le verre, par exemple, admet les valeurs $n = 1,5$, $n^2 = 2,25$. Or la relation (6) est rigoureuse pour $n^2 = 1$ et $n^2 = 2$; du reste, puisqu'il s'agit d'un maximum, il n'est pas nécessaire d'une grande précision. L'équation (5) admet en définitive la solution approchée :

$$r = n^2 i'.$$

La pureté du spectre est alors minimum. Elle est au contraire maximum quand pour un dn donné, dr' a la valeur la plus grande possible, c'est-à-dire pour $r' = 90^\circ$. Mais pour une direction aussi oblique l'intensité lumineuse devient quasiment nulle; ce qui est beaucoup plus important, *il en est de même de la largeur du faisceau utilisé.*

Du reste, il ne faut pas oublier que ce calcul suppose une incidence unique; la pureté du spectre dépend non seulement de la dispersion calculée dans cette hypothèse, mais encore de la largeur de la fente.

On est donc conduit à prendre pour mesure de la pureté l'expression :

$$P = \frac{dr'}{d\lambda} \frac{\delta i}{\delta r'} = \frac{dr'}{dn} \frac{\delta i}{\delta r'} \frac{dn}{d\lambda}.$$

L'existence du premier facteur signifie que pour *une incidence donnée* le spectre est d'autant plus pur que la dispersion est plus grande. L'existence du second facteur signifie que pour *une dispersion donnée* le spectre est d'autant plus pur qu'à une divergence à l'incidence δi donnée correspond une divergence à l'émergence $\delta r'$ plus petite. On trouve :

$$P = - \frac{\sin A}{\cos i \cos i'} \frac{dn}{d\lambda}.$$

Remarquons que les deux facteurs de la pureté entrent également dans l'expression de la luminosité L, mais l'un passe en dénominateur. Plus le premier est grand, plus le spectre devient obscur; plus le second est grand, plus il est lumineux. On trouve donc :

$$PL = (\delta i : \delta r')^2.$$

Au minimum de déviation, il vient :

$$-\delta i = \delta r', \quad PL = 1.$$

La luminosité est en raison inverse de la pureté.

80. Largeur du faisceau; autre expression de la dispersion; pouvoir séparateur. — Il est impossible de traiter complètement la question du *pouvoir séparateur* d'un spectroscopie à prisme sans faire intervenir la diffraction; nous verrons que la largeur du faisceau émergent $\overline{PQ} = a$ (fig. 51) intervient au premier chef. Or il est facile de donner une expression générale de la dispersion qui contienne cette largeur et l'épaisseur $\overline{MP} = e$ traversée. On a :

$$a = \overline{NP} \cos r', \quad \frac{e}{NP} = \frac{\sin A}{\sin NMP} = \frac{\sin A}{\cos r'};$$

$$dr' = dn \frac{\sin A}{\cos r \cos r'} = dn \frac{e}{a}, \quad a = e \frac{dn}{dr'}.$$

En s'appuyant sur le principe de Fermat, on peut démontrer (fig. 50) que cette formule s'applique à un système quelconque de prismes dont les arêtes sont parallèles (Rayleigh).

Soit AA_1 une onde plane dans le premier milieu, c'est-à-dire le lieu des points (supposé plan) pour lesquels la distance optique comptée à partir du point source est la même. Soit PP_1 l'onde plane correspondante dans le dernier milieu pour une certaine radiation dont l'indice, variable d'un milieu à l'autre, sera uniformément désigné par la lettre n . L'onde PP_1 satisfait à la condition :

$$\int_{\lambda}^P n de = \int_{\lambda_1}^{P_1} n de = \dots;$$

chacune des intégrales représente le chemin optique d'un point de l'onde AA_1 au point correspondant de l'onde PP_1 . *Ce chemin est un minimum*, de sorte qu'il reste le même pour des directions peu différentes, l'indice dans chaque milieu étant supposé invariable.

Modifions la radiation; désignons par $n + dn$ ses indices dans les milieux successifs. Évaluons la variation des chemins. La différence des chemins $A \dots P_1$ et $A_1 \dots P_1$, est :

$$\Delta = \int_{A_1}^{P_1} (n + dn) de - \int_A^P (n + dn) de = \int_{A_1}^{P_1} dn de - \int_A^P dn de.$$

Les points correspondants à A et A_1 ne sont plus P et P_1 , mais des points voisins. L'expression de la différence Δ reste cependant correcte en vertu de la propriété des maximums.

Donc PP_1 n'est pas l'onde plane correspondante à AA_1 pour la radiation d'indice $n + dn$. C'est PP_2 , telle que :

$$\overline{P_1 P_2} = \Delta.$$

La *dispersion angulaire* δ , c'est-à-dire l'angle $P_1 P P_2$, a pour valeur :

$$\delta = \frac{\Delta}{PP_1}, \quad \delta = \frac{\Delta}{a}.$$

S'il s'agit d'un système de prismes de même matière, plongés dans l'air (dont la dispersion est ici négligeable), Δ a simplement pour expression :

$$\Delta = dn(e_2 - e_1),$$

en appelant e_1 et e_2 les épaisseurs traversées par les rayons extrêmes. Si l'un des rayons extrêmes passe par les arêtes, $e_1 = 0$; on retombe sur la formule précédemment démontrée.

Nous appliquerons (§ 288) ce résultat au calcul du pouvoir séparateur d'un spectroscopie à prismes.

Systèmes optiques astigmatés.

81. Définition des systèmes astigmatés. — *Pour une première approximation*, les rayons isogènes issus d'un point A de l'axe d'une lentille ordinaire admettent après réfraction un point A' comme caustique; ce qui revient à dire qu'une lentille ordinaire est approximativement *stigmatique* pour les points de son axe.

Avec la même approximation, la caustique des rayons issus d'un point A qui ont traversé une lentille dont une des faces est cylindrique et l'autre sphérique, se réduit à deux droites rectangulaires entre elles et normales à l'axe de l'appareil, pourvu que le point A soit sur cet axe; l'une de ces droites est à l'infini si la lentille est simplement cylindrique.

Il faut se garder d'assimiler ces droites aux focales de Sturm, avec

lesquelles elles n'ont aucune analogie. Les focales de Sturm sont des droites tracées sur la caustique; les droites dont nous parlons sont la caustique elle-même. Les focales de Sturm se rapportent à un faisceau de petit angle solide; les droites actuelles correspondent à un faisceau d'ouverture quelconque.

Nous avons déjà dit au § 51 à quelle condition la caustique se réduit à deux droites comme première approximation, circonstance qui constitue l'*astigmatisme d'un système optique*.

Si le système formé par l'appareil et le point lumineux présente un plan de symétrie, la caustique possède une arête de rebroussement dans ce plan de symétrie. Si le système constitué par l'appareil et le point lumineux présente deux plans de symétrie, la caustique possède deux arêtes de rebroussement respectivement dans ces plans. Quand l'ouverture de l'appareil n'est pas trop grande, ces arêtes généralement courbes peuvent être assimilées à deux droites rectangulaires entre elles et normales à l'intersection des plans de symétrie. Ce sont précisément les droites sur lesquelles s'appuient approximativement tous les rayons.

Insistons sur les conditions à remplir pour que le système soit *astigmaté* au sens qui vient d'être défini. Il faut que dans le dernier milieu la surface d'onde possède deux plans de symétrie. Pour cela il ne suffit pas que l'appareil les possède; il faut encore que les rayons émanent d'un point qui *par sa position* ne détruise pas cette symétrie: il faut donc le situer sur la droite d'intersection des plans de symétrie, droite qui est l'axe de l'appareil.

Il n'existe donc pas d'*appareils* astigmatés, mais des *systèmes optiques* astigmatés.

La caustique se réduit pratiquement à deux droites quand on utilise un système quelconque de lentilles sphériques et de lentilles cylindriques dont les axes principaux coïncident et dont les génératrices sont rectangulaires ou parallèles; le point lumineux est placé sur l'axe commun. On appelle axe d'une lentille cylindrique une droite perpendiculaire aux génératrices parallèles des deux cylindres formant les faces et passant par les centres de courbure d'une section droite.

82. Propriétés des rayons issus d'un système optique astigmaté. — Du fait que les rayons s'appuient sur deux droites, résultent des propriétés curieuses faciles à vérifier expérimentalement (fig. 54).

1° Diaphragmons le système par une fente fine de direction quelconque. Les rayons forment une surface réglée s'appuyant sur trois droites; c'est un morceau d'hyperboloïde.

Prenons les axes des x et des y parallèles aux droites caustiques; l'axe des z coïncide avec l'axe de l'appareil. Soit Z_1 et Z_2 les z des

droites caustiques. Soit OM la fente mince définie par l'angle α avec l'axe des x .

La surface engendrée par une droite qui s'appuie sur OM et sur les caustiques a pour équation :

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \alpha \frac{Z_2}{Z_1} \frac{z - Z_1}{z - Z_2}.$$

2° Déplaçons un écran parallèle au plan yOx . La trace de l'hyper-

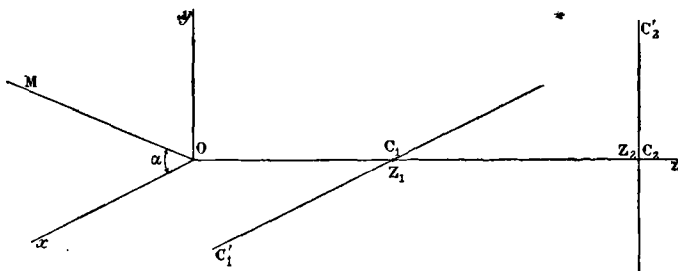


Fig. 54.

boloïde sur l'écran est une droite qui fait avec le plan xOz un angle β variable avec le z de l'écran :

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \frac{Z_2}{Z_1} \frac{z - Z_1}{z - Z_2}.$$

L'expérience est fort intéressante.

3° Plaçons la fente parallèle à l'un des plans de symétrie, $\operatorname{tg} \alpha = 0$ ou $\operatorname{tg} \alpha = \infty$. L'hyperboloïde se réduit à un plan.

Les rayons qui correspondent à une fente verticale se coupent en un point de la droite caustique horizontale. Les rayons qui correspondent à une fente horizontale se coupent en un point de la droite caustique verticale.

83. Image d'une droite à travers un appareil ayant deux plans de symétrie. — A. On peut obtenir une image nette d'une droite lumineuse normale à l'axe pourvu : qu'elle soit dans un des plans de symétrie; que l'écran soit placé là où sont les droites caustiques parallèles à la droite et correspondant à chacun de ses points.

Grâce à la première condition, les droites caustiques de tous les points sont superposées et l'image de la droite est une droite.

Il faut observer : 1° que si un point de l'axe a très approximativement une caustique réduite à deux droites, c'est de moins en moins exact à mesure que le point s'éloigne de l'axe; 2° que toutefois par rapport à ce point hors de l'axe le système possède encore un plan de symétrie : par conséquent, la droite caustique qui est dans ce plan subsiste très approximativement, ce qui légitime notre raisonnement.

A un point de la droite objet ne correspond plus un point de la

droite caustique parallèle, mais une portion plus ou moins étendue de cette droite caustique.

Une droite objet d'éclat uniforme semble avoir une image correcte; si son éclat présente des discontinuités, on s'aperçoit immédiatement de l'incorrection de l'image.

B. On ne peut pas obtenir sur un même écran les images nettes de deux droites rectangulaires qui sont dans les plans de symétrie et dans un même plan normal à l'axe. Car les droites caustiques parallèles à l'une et à l'autre droites ne sont pas à la même distance de l'appareil.

On peut au contraire obtenir sur un même écran les images nettes de ces droites, pourvu qu'elles soient à des distances différentes de l'appareil. En choisissant convenablement ces distances, on amène sur l'écran les caustiques verticales de tous les points de la droite verticale, les caustiques horizontales de tous les points de la droite horizontale.

84. Astigmatisme de l'œil. — L'œil est assez exactement assimilable aux systèmes que nous venons d'étudier. Il n'est pas de révolution autour d'un axe; il admet comme première approximation deux plans de symétrie (généralement l'un est vertical, l'autre par conséquent horizontal), se coupant suivant une droite qu'on peut appeler l'axe de l'œil.

1° Traçons (fig. 55) des droites passant par un point et aussi identiques que possible. Regardons cette étoile. Avec une accommodation convenable, on peut voir nettement une de ces droites. Avec une autre accommodation convenable, on peut voir la droite normale à la première. Cette expérience fixe les azimuts des plans de symétrie. Les droites non situées dans ces plans ne nous paraissent jamais parfaitement nettes, *quelle que soit l'accommodation*. Les droites rectangulaires dont nous pouvons amener les images nettes sur la rétine sont généralement l'une verticale, l'autre horizontale.

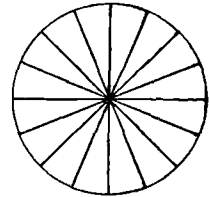


Fig. 55.

Bien entendu, la grandeur de cet astigmatisme (mesuré par la distance des droites caustiques) dépend des yeux; il est rare qu'il soit nul.

2° Nous pouvons voir simultanément avec netteté deux droites rectangulaires, pourvu qu'elles soient à des distances différentes de l'œil.

Ainsi Helmholtz voyait nettement et simultanément deux aiguilles situées, l'une verticale à 60° de l'œil, l'autre horizontale à 54°. Cela prouve que la caustique verticale d'un point était pour son œil plus éloignée que la caustique horizontale, puisque pour les amener à la

même distance (sur la rétine) il devait éloigner l'objet vertical. Comme la caustique verticale est le lieu des intersections des rayons limités par une fente horizontale (§ 82, 3°), l'expérience prouve que l'œil d'Helmholtz était plus courbe dans le plan de symétrie vertical que dans le plan horizontal.

3° On peut disposer l'expérience autrement.

A l'aide d'un écran percé d'une fente mince, Young ne laissait parvenir à son œil que les rayons émis par un point lumineux soit dans le plan vertical, soit dans le plan horizontal (plans de symétrie). Pour une accommodation bien déterminée, il voyait distinctement le point lumineux distant de 30° pour la fente verticale, de 21° pour la fente horizontale. La première expérience amène sur la rétine la caustique horizontale (réduite à un point) d'une source située à 30° de l'œil; la seconde amène sur la rétine la caustique verticale (réduite à un point) d'une source située à 21° de l'œil. Éloignons cette dernière source jusqu'à 30°, la caustique verticale correspondante se rapproche. Donc les rayons émis par un point forment à travers l'œil d'Young deux droites caustiques, la verticale plus rapprochée de l'objet que l'horizontale. Donc les sections horizontales de l'œil d'Young étaient plus courbes que les sections verticales.

On remarquera que nous parlons des *droites caustiques* de l'œil et non de ses *focales*. Les faisceaux qui pénètrent dans l'œil non diaphragmé ne peuvent pas être assimilés à des pinceaux infiniment minces. Car les dimensions de la pupille ne sont pas petites par rapport à sa distance à la rétine, et c'est par ce rapport qu'il faut évaluer l'ouverture pour les phénomènes qui nous occupent. Il est curieux que la théorie des pinceaux et des focales ait été faite par Sturm pour expliquer les phénomènes dans l'œil et que précisément elle s'applique non pas au faisceau lumineux considéré dans son ensemble, mais seulement aux éléments de ce faisceau.

85. Cause de l'astigmatisme de l'œil. — L'astigmatisme de l'œil est principalement dû aux courbures inégales de la cornée.

Peignons en blanc un disque métallique percé d'un trou central. Traçons concentriquement au trou des circonférences noires se détachant bien sur le fond blanc. Fixons normalement au disque un petit viseur passant dans le trou central. Enfin établissons le disque verticalement, le viseur horizontalement par conséquent.

L'œil de l'observé, dont la tête est maintenue immobile, est placé dans le prolongement de l'axe de la lunette et doit regarder le centre de l'objectif. Les circonférences verticales donnent sur la cornée des images virtuelles que l'observateur voit dans le viseur. En faisant la figure, on vérifiera que tout se passe comme dans les méthodes d'essai de Foucault (§ 67); chaque portion de la cornée ne sert à réfléchir qu'une très petite portion du disque.

On vérifie immédiatement si la cornée est de révolution : les cercles ont des cercles pour image. Généralement ce sont des ellipses dont les axes sont l'un vertical, l'autre horizontal.

On corrige l'astigmatisme de l'œil à l'aide de verres cylindriques de puissances convenables et convenablement orientés.



CHAPITRE IV

ABERRATIONS DANS LES SYSTÈMES CENTRES

86. Position de la question. — Dans les deux Chapitres précédents, nous avons étudié en général la marche des rayons issus d'un point lumineux ; dans chaque milieu ils sont tangents à une surface à deux nappes, la caustique, dont nous avons démontré quelques propriétés.

Le problème qui se pose maintenant est tout différent : *nous nous restreindrons au cas des systèmes centrés* (c'est-à-dire des systèmes limités par un nombre quelconque de surfaces sphériques dont les centres sont sur une droite, appelée axe du système), *et nous chercherons à réduire au minimum les aberrations et autres défauts.*

Il s'agit en définitive d'obtenir de points lumineux placés sur un plan perpendiculaire à l'axe, des images punctiformes, placées elles-mêmes sur un plan et formant une figure semblable à la première. Évidemment les défauts constituent deux groupes :

1° L'appareil étant stigmatique (c'est-à-dire faisant correspondre un point à un point), les images ne sont pas sur un plan ; ou encore la figure supposée plane n'est pas semblable à la première. On dit dans le premier cas que le champ est courbe, dans le second qu'il y a distorsion (§§ 1 et 2).

2° L'appareil n'est pas stigmatique : les rayons émergents ne passent pas par un point, mais sont tangents aux deux nappes d'une caustique.

Du point de vue général qui est celui du Chapitre précédent, cette phrase dit tout. Mais on conçoit que, dans le sujet *technique* qui nous occupe, on ait trouvé nécessaire d'établir une sorte de hiérarchie entre les défauts qui proviennent du non évanouissement de la caustique, hiérarchie dont nous allons expliquer la nature. Nous démontrerons ensuite les propositions fondamentales.

87. Classification des aberrations. Aberrations sphérique et chromatique.

ABERRATION SPHÉRIQUE. CONDITION D'EULER.

Prenons le point lumineux P sur l'axe du système centré ; nous savons (§ 50) que la caustique se compose généralement d'un morceau de l'axe et d'une surface de révolution dont tous les méridiens admettent cet axe comme tangente de rebroussement. Tous les rayons ne coupent donc pas l'axe au même point ; en particulier il existe un foyer P' des rayons centraux et un foyer P'' des rayons marginaux, en appelant foyer le point où les rayons, faisant au départ le même angle avec l'axe, viennent le recouper après la traversée du système.

Le problème consiste à faire coïncider les deux foyers P' et P'' . Cette condition réalisée, on peut admettre que les foyers intermédiaires coïncident eux aussi. Le système est alors dit corrigé pour l'aberration sphérique relativement au point P . Ce résultat obtenu, on dit que la condition d'Euler est satisfaite.

CONDITION D'HERSCHEL.

Le système corrigé pour le point P placé sur l'axe ne l'est généralement pas pour un point P_1 voisin, également placé sur l'axe. Quand la condition dite d'Herschell est satisfaite, il y a correction simultanément pour P et pour les points de l'axe voisins de P .

CONDITION DES SINUS OU CONDITION D'ABBE.

Le système corrigé pour le point P ne l'est généralement pas pour un point P_2 voisin, situé dans un plan perpendiculaire à l'axe passant par P (plan de front). Quand la condition dite d'Abbe ou des sinus est satisfaite, il y a correction simultanée pour un élément plan normal à l'axe, qui est transformé point par point en un autre élément plan également normal à l'axe.

On dit que le point P de l'axe est aplanétique.

Nous verrons que les conditions d'Herschell et d'Abbe sont contradictoires, d'où cette proposition fondamentale : *Il est impossible, en utilisant des faisceaux d'ouverture finie, d'obtenir simultanément des images stigmatiques des points d'un élément de l'axe et d'un élément de plan normal à l'axe ; autrement dit, de reproduire rigoureusement un petit élément de volume.*

ABERRATION CHROMATIQUE.

Imaginons le système corrigé de l'aberration sphérique relativement au point P pour une radiation donnée ; il ne l'est pas *ipso facto* pour une radiation quelconque, car la condition à satisfaire dépend de l'indice. A la vérité, il s'en faut de peu. Mais serait-il corrigé, les foyers conjugués de P pour les diverses radiations ne coïncident pas : c'est l'*aberration chromatique*. Dans la pratique, les corrections des aberrations sphérique et chromatique ne vont pas l'une sans l'autre, d'autant qu'il est impossible de corriger rigoureusement la première sans utiliser deux verres d'indices différents, ce qui permet de corriger la seconde.

REMARQUE SUR L'ABERRATION SPHÉRIQUE.

Pour les lunettes astronomiques, l'aberration sphérique intervient

seule, car on se propose d'observer des objets qu'on peut toujours ramener très approximativement sur l'axe. D'une manière générale, les rayons utilisés font toujours avec l'axe un petit angle. Le point P observé étant très éloigné, les rayons incidents sont presque parallèles entre eux ; on dit que *l'aberration sphérique est principale*.

Les objectifs photographiques doivent avoir un champ plus ou moins étendu, qui atteint parfois 120° ; l'objectif est corrigé de l'aberration sphérique quand *le centre de l'image*, qui entoure la trace de l'axe, est d'une netteté suffisante. Si l'objectif n'est pas corrigé, on améliore le centre de l'image en diminuant l'ouverture par l'emploi d'un diaphragme ; on supprime ainsi les rayons marginaux et on se rapproche autant qu'on veut des conditions d'application de l'approximation de Gauss (bien entendu, tant que la diffraction n'intervient pas).

88. Astigmatisme, coma, courbure du champ, distorsion.

ASTIGMATISME.

Alors même que le système est corrigé pour un point de l'axe et que la condition des sinus est satisfaite, la correction n'est pas *ipso facto* obtenue pour un point P_3 pris hors de l'axe et envoyant sur l'appareil des rayons très inclinés sur l'axe. Il est entendu que la distance d'un point à l'axe dont il est ici parlé, n'est pas prise en valeur absolue ; elle a pour mesure le quotient de cette distance par la distance à l'appareil.

On démontre qu'il existe alors un *pur astigmatisme*, c'est-à-dire que les rayons, après la traversée du système, s'appuient très sensiblement sur deux petites droites normales entre elles et perpendiculaires à la direction moyenne du faisceau. Nous avons démontré qu'il en est toujours ainsi pour un faisceau infiniment petit ; mais il s'agit ici d'un faisceau fini ; si les conditions énoncées sont satisfaites, la caustique entière se réduit à ces morceaux de droites que nous appellerons droites caustiques pour abrégé.

Le plan passant par P_3 et par l'axe étant de symétrie, les caustiques sont l'une dans ce plan, l'autre normale. La première, dont le prolongement passe par l'axe, est dite *radiale ou sagittale* ; la seconde est dite *tangentielle* : elle est tangente au cercle perpendiculaire à l'axe et dont le centre est sur l'axe.

L'astigmatisme, tenant à l'angle que fait avec l'axe le rayon moyen du faisceau, ne peut évidemment pas être corrigé par l'emploi d'un diaphragme. En diminuant l'ouverture de l'appareil, on diminue seulement la longueur des caustiques (tant que la diffraction n'intervient pas) ; on ne les rapproche pas l'une de l'autre.

COMA.

En définitive, on a affaire à une caustique qui ne se réduit pas nécessairement à deux fragments de plans (§ 111). Si on augmente

l'angle du faisceau avec l'axe et si l'ouverture reste grande, la trace du faisceau émergent qui provient originairement d'un point, prend sur un écran quelconque des aspects compliqués, des formes ovales, en aigrettes, en comètes. On dit qu'il y a *coma*. Bien entendu, même pour une inclinaison extrême, *si l'ouverture est assez petite*, le théorème de Sturm nous apprend que le coma se réduit à un simple astigmatisme, pourvu que la diminution d'ouverture ne fasse pas intervenir les phénomènes de diffraction.

COURBURE DU CHAMP, CONDITION DE PETZVAL.

Pour corriger l'astigmatisme, on est conduit à annuler deux certaines fonctions des puissances des lentilles et des indices dont l'une est connue sous le nom de Petzval. Quand ces conditions sont satisfaites, la courbure du champ devient nulle en même temps que l'astigmatisme. Les corrections des deux défauts sont donc connexes et simultanées.

Quand seule la condition de Petzval est satisfaite, ni l'un ni l'autre des défauts n'est complètement éliminé; il est évident cependant que l'appareil est amélioré.

DISTORSION.

Enfin même quand l'astigmatisme est corrigé pour un certain plan de front, même quand l'image est elle-même un plan de front, nous savons (§ 3) que tout n'est pas dit. Il faut encore faire correspondre une droite à une droite, c'est-à-dire supprimer la distorsion.

Après ce tableau d'ensemble des conditions à satisfaire, le lecteur ne sera plus étonné qu'un objectif photographique ne puisse être parfait pour tous les usages : il est construit en vue d'un travail déterminé pour lequel certaines qualités ont une importance prédominante. On retrouvera plus loin ces considérations (§ 113) dans la classification des objectifs.

Aberrations pour les rayons émis par les points voisins de l'axe.

89. Aberration sphérique, invariant de réfraction d'Abbe.
Au § 17 nous avons démontré la formule relative au dioptré (fig. 10):

$$n' \frac{p' - R}{s'} = n \frac{p - R}{s}.$$

Nous poserons :

$$Q = \frac{np}{s} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{p} \right) = \frac{n'p'}{s'} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{p'} \right). \quad (1)$$

Q est l'invariant de réfraction d'Abbe; pour $\varphi = 0$, on a :

$$p = s = s_0, \quad p' = s' = s'_0.$$

$$Q_0 = n \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{p_0} \right) = n' \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{p'_0} \right).$$

Q_0 est le *nulinvariant* d'Abbe. Le mot *invariant* rappelle que la quantité considérée conserve la même valeur dans les deux milieux; le mot *nulinvariant* rappelle qu'il s'agit du rayon ayant une inclinaison nulle (§ 8). Les distances p_0, p'_0 , sont celles qui conviennent à la théorie élémentaire (§ 18).

Posons : $p = p_0 + au^2, \quad p' = p'_0 + a'u'^2$,
en nous limitant aux carrés des inclinaisons.

S'il s'agissait seulement d'étudier un dioptré, nous poserions $a = 0$, la position du point lumineux étant indépendante de l'inclinaison u du rayon émis. Nous généralisons les formules pour les applications ultérieures à plusieurs dioptrés consécutifs. Nous avons exactement :

$$\sin u = \frac{R}{s} \sin \varphi.$$

A l'approximation à laquelle nous nous limitons, nous pouvons poser :

$$u^2 = \left(\frac{R}{p_0} \right)^2 \varphi^2, \quad u'^2 = \left(\frac{R}{p'_0} \right)^2 \varphi^2.$$

$$p = p_0 + a \left(\frac{R}{p_0} \right)^2 \varphi^2, \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{p_0} - a \frac{R^2}{p_0^4} \varphi^2,$$

$$p' = p'_0 + a' \left(\frac{R}{p'_0} \right)^2 \varphi^2, \quad \frac{1}{p'} = \frac{1}{p'_0} - a' \frac{R^2}{p_0'^4} \varphi^2. \quad (2)$$

Les coefficients a et a' définissent complètement les aberrations; il s'agit donc de les relier l'un à l'autre en utilisant l'invariant de réfraction (1).

On a :

$$s^2 = (p - R)^2 + R^2 + 2R(p - R) \cos \varphi = p^2 - R(p - R) \varphi^2,$$

$$s = p \left[1 - \frac{R^2}{2p} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{p} \right) \varphi^2 \right] = p \left[1 - \frac{R^2}{2np_0} Q_0 \varphi^2 \right],$$

car dans le terme qui contient φ^2 on peut remplacer p par p_0 . On peut écrire :

$$\frac{p}{s} = 1 + \frac{R^2}{2np_0} Q_0 \varphi^2, \quad \frac{p'}{s'} = 1 + \frac{R^2}{2n'p'_0} Q_0 \varphi^2. \quad (3)$$

Transportons les relations (2) et (3) dans (1), il vient :

$$Q = n \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{p_0} \right) + \left[\frac{Q_0^2 R^2}{2np_0} + \frac{naR^2}{p_0^4} \right] \varphi^2,$$

$$Q = n' \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{p'_0} \right) + \left[\frac{Q_0^2 R^2}{2n'p'_0} + \frac{n'a'R^2}{p_0'^4} \right] \varphi^2.$$

Or Q est un invariant, d'où la relation :

$$\frac{2na}{p_0^4} + \frac{Q_0^2}{np_0} = \frac{2n'a'}{p_0'^4} + \frac{Q_0'^2}{n'p_0'}, \quad (4)$$

qui résout complètement le problème.

Cette remarquable méthode de calcul est due à l'illustre Abbe, qui avec Zeiss d'Iéna a transformé la technique de l'étude et de la construction des instruments d'optique.

90. Aberrations. — Reportons-nous aux figures 41 et 57. Soit u et u' les inclinaisons maxima des rayons du faisceau.

L'*aberration longitudinale* est mesurée dans les faisceaux incident et transmis par :

$$p - p_0 = au^2, \quad p' - p_0' = a'u'^2.$$

L'*aberration transversale ou latérale* est mesurée par le diamètre ζ du cercle d'aberration.

$$\zeta = 2(p - p_0)u = 2au^3, \quad \zeta' = 2(p' - p_0')u' = 2a'u'^3.$$

Nous pouvons introduire ces diamètres dans la formule (4), ainsi que la demi-ouverture h (fig. 10) de l'appareil. On a :

$$h = up, \quad \frac{2na}{p^4} = \frac{n\zeta}{u^3p^4} = \frac{nu\zeta}{h^4}.$$

$$nu\zeta + \frac{h^4Q_0^2}{np_0} = n'u'\zeta' + \frac{h^4Q_0'^2}{n'p_0'}. \quad (5)$$

u et u' sont les inclinaisons limites, ζ et ζ' sont les cercles d'aberration dans les deux milieux.

91. Miroir sphérique. — Pour appliquer la théorie précédente à un miroir sphérique (§ 65), il faut faire $n' = -n$. Comme les rayons émanent d'un point du premier milieu, nous devons poser : $a = 0$. Les formules deviennent :

$$-2a'n^2 = Q_0^2 \left(\frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_0'} \right) p_0'^4 = \frac{2Q_0^2 p_0'^4}{R},$$

$$p' - p_0' = a'u'^2 = \frac{a'h^2}{p_0'^2} = -\frac{Q_0^2 p_0'^2 h^2}{Rn^2} = -\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{p_0} \right)^2 \frac{p_0' h^2}{R}.$$

Telle est l'expression générale de l'aberration longitudinale.

On appelle *aberrations principales* celles qui correspondent au point de l'infini, $p_0 = \infty$, $p_0' = R : 2$.

L'*aberration longitudinale principale* est donc :

$$\frac{h^2}{4R} = \frac{O^2}{16R}.$$

L'aberration latérale principale, mesurée par le diamètre ζ du cercle d'aberration, est alors :

$$2 \frac{h^2}{4R} u' = 2 \frac{h^2}{4R} \frac{2h}{R} = \frac{h^3}{R^2} = \frac{O^3}{8R^2},$$

où $O = 2h$ mesure ce qu'on appelle ordinairement l'ouverture du miroir (§ 65).

92. Dioptré, points aplanétiques. — La formule (5) donne :

$$n'u'\zeta = n^2 h^4 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{p_0} \right)^2 \left(\frac{1}{np_0} - \frac{1}{n'p'_0} \right).$$

L'aberration s'annule pour $R = p_0$; et par conséquent $R = p'_0$: l'objet et l'image sont confondus au centre du dioptré.

Elle s'annule encore pour la condition :

$$np_0 = n'p'_0; \quad p_0 = R \left(1 + \frac{n'}{n} \right), \quad p'_0 = R \left(1 + \frac{n}{n'} \right).$$

Une construction simple, due à Weierstrass, prouve que pour ces points l'aberration de sphéricité est rigoureusement nulle (fig. 56).

Décrivons trois circonférences de rayons :

$$\overline{CO} = R,$$

$$\overline{CA} = Rn' : n,$$

$$\overline{CA'} = Rn : n';$$

la figure est construite dans l'hypothèse $n' > n$. Montrons que deux points A et A', qui sont sur les circonférences extrêmes et sur une

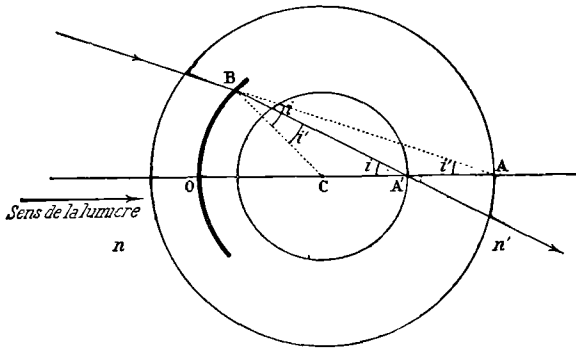


Fig. 56.

droite passant par le centre commun, sont conjugués par rapport à un rayon réfracté quelconque.

On a, en vertu des valeurs des rayons des circonférences :

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CA'}}.$$

Donc les triangles BCA' et ACB sont semblables, et l'on a :

$$\begin{aligned} \text{BAC} &= i', & \text{BA'C} &= i. \\ \frac{\sin i}{\sin i'} &= \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{n'R}{nR} = \frac{n'}{n}. \end{aligned}$$

Donc le rayon BA' est conjugué de BA, quel que soit le point d'incidence B.

Les points A et A' que nous venons de définir sont appelés *points aplanétiques*. Nous avons dit (§ 87) *qu'un point aplanétique est tel que l'aberration sphérique soit corrigée pour lui et aussi pour les points voisins sur un plan perpendiculaire à l'axe du système centré (plan de front) dont par hypothèse le point aplanétique fait partie.*

Nous le prouverons plus loin (§ 96) : pour qu'il en soit ainsi, il faut satisfaire à la condition des sinus qui s'exprime par la relation :

$$\beta = \frac{n \sin u}{n' \sin u'}$$

Montrons que les points A et A' n'ont pas usurpé leur titre. On doit avoir pour eux :

$$u = i', \quad u' = i, \quad \beta = \frac{n}{n'} \frac{\sin i'}{\sin i} = \frac{n^2}{n'^2}$$

Or le grossissement latéral β a évidemment pour expression :

$$\beta = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}$$

On a d'ailleurs :

$$\overline{CA'} = \frac{\sin i'}{\sin i} R, \quad \overline{CA} = \frac{\sin i}{\sin i'} R$$

D'où :
$$\beta = \frac{\sin^2 i'}{\sin^2 i} = \frac{n^2}{n'^2} \quad \text{CQFD.}$$

93. Lentille mince. Rayons parallèles. Condition d'Euler.

— Nous ne ferons pas le calcul pour une lentille, calcul dont le § 89 fournit tous les éléments; nous nous contenterons de donner le résultat.

La figure 57 représente la caustique obtenue, prolongée pour qu'on en voie mieux la forme.

f désigne la distance focale principale de la lentille; R_1 et R_2 sont les rayons de courbure de ses faces, n est l'indice de la matière qui la compose. On a (§ 22) :

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Le diamètre du cercle d'aberration aa pour le point à l'infini est donné par la formule :

$$\frac{\xi}{f} = h^3 \left[\frac{n+2}{n} \frac{1}{fR_1^2} - \frac{2n+1}{n-1} \frac{1}{f^2R_1} + \left(\frac{n}{n-1} \right)^2 \frac{1}{f^3} \right]$$

R_1 désigne le rayon de la face qui est tournée vers la source lumineuse. Il faut remarquer que la formule n'est pas symétrique en R_1 et R_2 : l'aberration change quand on retourne la lentille.

Pour une distance focale donnée f , on peut chercher quelle forme doit avoir la lentille pour que l'aberration soit minima. On trouve :

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{2} \frac{2n+1}{n-1} \frac{n}{n+2} \frac{1}{f}, \quad \frac{R_1}{R_2} = -\frac{4+n-2n^2}{n(2n+1)}.$$

Donc la lentille d'aberration minima pour les rayons parallèles tourne vers la lumière sa face la plus courbe.

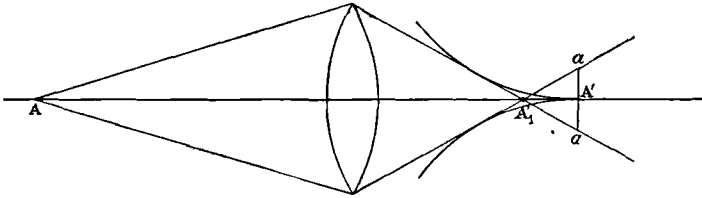


Fig. 57.

En particulier, elle est biconvexe pour :

$$n = 1,5; \quad R_1 : R_2 = -1 : 6;$$

c'est un ménisque convergent pour :

$$n = 2 : \quad R_1 : R_2 = +1 : 5.$$

Enfin elle est planconvexe, cas intermédiaire entre la lentille biconvexe et le ménisque convergent, pour :

$$n = 1,686.$$

Le diamètre du cercle d'aberration est pour la lentille d'aberration minima :

$$\zeta = \frac{h^3}{f^2} \frac{n(4n-1)}{4(n-1)^2(n+2)} = \frac{1}{32} \frac{O^3}{f^2} \frac{n(4n-1)}{(n-1)^2(n+2)}.$$

Pour $n = 1,5$, on trouve :

$$\frac{\zeta}{f} = \left(\frac{h}{f}\right)^3 \frac{15}{7} = \left(\frac{O}{f}\right)^3 \frac{15}{56}.$$

Pour fixer les idées, supposons une lentille de 2 mètres de distance focale principale et d'ouverture (diamètre de la lentille) :

$$O = f : 15 = 13^{\text{cm}}, 3.$$

Le cercle d'aberration a un diamètre égal à $0^{\text{mm}}, 16$.

L'aberration longitudinale vaut :

$$0,16(f : O) = 2^{\text{mm}}, 4.$$

94. Aberration chromatique. — Pour une distance finie de l'objet, on a des résultats analogues, avec des formules plus compliquées. Profitant de l'indétermination des rayons de courbure R_1 et R_2 , on peut déterminer une lentille d'aberration minima et de distance focale principale donnée.

Mais le problème pratique ne se pose pas ainsi.

En effet, il est facile de voir qu'il ne sert à rien de corriger l'aberration sphérique, si l'on ne corrige pas simultanément l'aberration chromatique *qui est beaucoup plus importante*. On a (§ 38) :

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{1}{v}.$$

Pour une lentille de crown, v est de l'ordre de 50 :

$$\Delta f = f : 50 = 4^{\text{cm}},$$

dans l'exemple du paragraphe précédent; pour une lentille de flint, v est de l'ordre de 25 :

$$\Delta f = 8^{\text{cm}}.$$

On est donc amené à accoler deux lentilles, ce qui fournit comme arbitraires les quatre rayons de courbure, la nature des verres étant par hypothèse imposée.

1° On donne la distance focale principale f :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}.$$

2° On corrige l'aberration chromatique :

$$\frac{1}{f_1 v_2} + \frac{1}{f_2 v_1} = 0.$$

3° On corrige l'aberration sphérique pour un point donné sur l'axe principal.

Il reste donc une arbitraire.

On en profite pour donner au système des deux lentilles une nouvelle qualité, s'exprimant par une quatrième condition. Quand les verres sont de petites dimensions, on impose le plus souvent aux surfaces en regard des deux lentilles d'avoir la même courbure, ce qui permet de les coller et facilite leur mise en place.

Il ne faut pas oublier d'ailleurs qu'en réalité la nature des verres est dans une large mesure arbitraire et permet de réaliser des conditions en nombre supérieur à quatre.

95. Condition d'Herschel. — Supposons l'aberration sphérique corrigée pour un point A de l'axe d'un appareil centré. Le point A possède donc un foyer parfait A' pour des rayons incidents ayant sur l'axe des inclinaisons u variant de 0 à une limite qui a pour l'appareil considéré une certaine valeur, mais que rien *a priori* n'empêche d'être pratiquement voisine de 90°.

D'après la loi de Descartes ou le principe de Fermat, tous les chemins optiques qui vont de A à A' sont égaux.

Proposons-nous de déterminer à quelle condition l'aberration, corrigée pour le point A, est ipso facto corrigée pour le point B voisin

du point A et situé sur l'axe de l'appareil. Il faut que tous les chemins optiques qui vont de B à B' soient égaux.

Considérons un mince faisceau parallèle incident dont deux rayons passent en A et en B; il a son foyer en S'. Sont donc égaux le chemin optique Ψ_1 qui va de C à S', et le chemin optique qui va de A à S'.

Posons: $\overline{AB} = dx$, $\overline{A'B'} = dx'$; chemin optique $\overline{AB'} = \Psi_2$.

Menons AC perpendiculairement au faisceau incident, B'D perpendiculairement au rayon moyen du faisceau émergent.

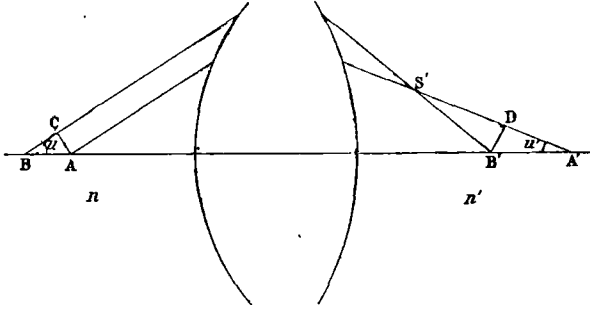


Fig. 58.

L'égalité des chemins allant de A à A' fournit l'équation :

$$\Psi_1 + n' \cdot \overline{S'D} + n' \cdot \overline{DA'} = \Psi_2 + n' dx'.$$

L'égalité des chemins allant de B à B' fournit l'équation :

$$n \cdot \overline{BC} + \Psi_1 + n' \cdot \overline{S'B'} = n dx + \Psi_2.$$

Retranchons ces équations membre à membre et remarquons que $\overline{S'B'} = \overline{S'D}$:

$$\begin{aligned} n(dx - \overline{BC}) &= n'(dx' - \overline{DA'}), \\ n dx(1 - \cos u) &= n' dx'(1 - \cos u'), \\ n dx \sin^2 \frac{u}{2} &= n' dx' \sin^2 \frac{u'}{2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Pour des rayons parallèles à l'axe, la théorie des §§ 7 et 24 s'applique :

$$\frac{dx'}{dx} = \alpha = -\beta^2 \frac{f'}{f} = \beta^2 \frac{n'}{n}.$$

La condition (1) devient :

$$\left(n \sin \frac{u}{2} \right) : \left(n' \sin \frac{u'}{2} \right) = \beta = \text{Constante}. \quad (2)$$

Ainsi l'aberration corrigée pour A l'est aussi pour B, si la relation (2) existe entre les inclinaisons des rayons incidents issus de A

et les inclinaisons des rayons émergents conjugués, quelle que soit la grandeur de ces inclinaisons.

Telle est la relation connue sous le nom d'Herschel.

96. Condition d'aplanétisme (des sinus ou d'Abbe). — Supposons l'aberration sphérique corrigée pour le point A situé sur l'axe d'un appareil centré.

Proposons-nous de déterminer à quelle condition l'aberration est ipso facto corrigée pour le point B voisin de A et appartenant au plan de front passant par A.

Quand cette condition est satisfaite, l'appareil est, par définition, aplanétique pour le point A (§ 87).

Soit (fig. 59) $\overline{AB} = dy$ l'objet, $\overline{A'B'} = dy'$ l'image correspondante.

Considérons un point S quelconque et son image. Les rayons émis

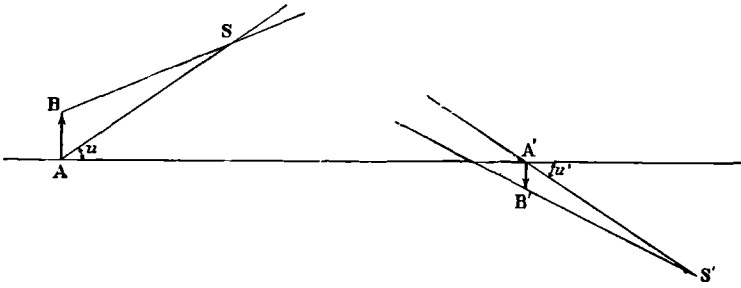


Fig. 59.

par S et venant passer par S' ont même chemin optique (SS'). Écrivons les chemins optiques (AA'), (BB').

$$\begin{aligned} (AA') &= n \cdot \overline{AS} + (SS') - n' \overline{A'S'}, \\ (BB') &= n \cdot \overline{BS} + (SS') - n' \overline{B'S'}; \\ (AA') - (BB') &= n \cdot (\overline{AS} - \overline{BS}) - n' (\overline{A'S'} - \overline{B'S'}) \\ &= n \sin u \cdot dy - n' \sin u' \cdot dy'. \end{aligned}$$

Cette relation est exacte quel que soit le système SS' choisi, et par conséquent quelles que soient les inclinaisons u et u' . Comme u et u' s'annulent simultanément, il faut que la constante $(AA') - (BB')$ soit nulle : les chemins optiques entre l'objet et l'image sont les mêmes pour tous les points d'un plan de front voisins de l'axe.

En définitive, on a :

$$\begin{aligned} n \sin u \, dy &= n' \sin u' \, dy', \\ (n \sin u) : (n' \sin u') &= \beta = \text{Constante.} \end{aligned} \quad (1)$$

Telle est la condition des sinus, fondamentale dans l'étude des ins-

truments d'optique. *L'aberration corrigée pour le point A de l'axe l'est aussi pour l'élément du plan de front voisin de l'axe et passant par A, si la relation (1) existe entre les inclinaisons des rayons incidents issus de A et les inclinaisons des rayons émergents conjugués, quelle que soit la grandeur de ces inclinaisons.*

97. Incompatibilité des relations d'Herschel, d'Abbe et de Lagrange. — Il est clair que les relations d'Herschel et d'Abbe sont incompatibles. Cela signifie que, l'aberration une fois corrigée pour le point A, il est impossible de la corriger simultanément pour les points voisins de l'axe et pour les plans voisins du plan de front. Nous aboutissons donc à cette proposition fondamentale : *Quel que soit l'appareil centré utilisé, le nombre et la forme de ses surfaces, les indices des milieux qu'elles séparent, il est impossible d'obtenir simultanément les images stigmatiques nettes des points d'un petit volume. Même conclusion a fortiori pour un système non centré.*

Aux deux relations :

$$\left(n \sin \frac{u}{2} \right) : \left(n' \sin \frac{u'}{2} \right) = \beta, \quad (\text{Herschel})$$

$$(n \sin u) : (n' \sin u') = \beta, \quad (\text{Abbe})$$

nous pouvons comparer celle qui exprime le théorème de Lagrange (§ 25) :

$$(n \operatorname{tg} u) : (n' \operatorname{tg} u') = \beta. \quad (\text{Lagrange})$$

Elle est incompatible avec les deux autres, puisqu'elle résulte de l'hypothèse d'une aberration nulle pour tous les points de l'espace : ce que nous venons de montrer impossible.

Il est clair que ces trois relations se confondent dans la suivante :

$$nu : n'u' = \beta,$$

quand les angles u et u' deviennent infiniment petits.

98. Critérium d'Abbe pour la condition des sinus. — Après avoir montré la nécessité théorique de la condition des sinus, Abbe prouva que les microscopes les meilleurs y satisfont à l'insu même de leurs constructeurs. Avant Abbe, Zeiss et les travaux d'Iéna, on réalisait en effet les objectifs de microscope par tâtonnements, sans guide scientifique. Nous verrons plus loin qu'on ne peut obtenir un fort grossissement qu'avec des inclinaisons considérables des rayons incidents, pouvant s'approcher de 90° ; on se trouvait donc dans la nécessité d'appliquer la règle des sinus *consciemment ou inconsciemment*.

LEMME I.

Étudions la correspondance de deux figures situées dans des plans

de front B et B' à des distances d et d' de deux points *aplanétiques* A et A'; les seuls rayons admis sont ceux qui passent par A et par son conjugué A'. Les points correspondants C et C' sont dans le même méridien, défini par le même angle θ (§ 2), et à des distances

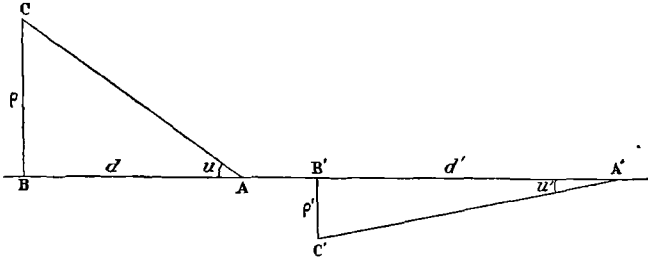


Fig. 60.

ρ et ρ' de l'axe. On a, les milieux extrêmes étant supposés identiques :

$$\frac{\sin u}{\sin u'} = \frac{\operatorname{tg} u}{\operatorname{tg} u'} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 u'}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 u}}; \quad \frac{\rho}{\rho'} \frac{\sqrt{d'^2 + \rho'^2}}{\sqrt{d^2 + \rho^2}} = \beta = \text{Constante.}$$

$$\frac{d'^2}{\rho'^2} - \frac{\beta^2 d^2}{\rho^2} = \beta^2 - 1. \tag{1}$$

Telle est la loi de correspondance cherchée.

LEMME II.

Déterminons la courbe qui, transformée par la relation (1), donne une droite.

Il est facile de voir que c'est une hyperbole PSQ (fig. 61).

Soit en effet :

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\cos^2 \theta}{a^2} - \frac{\sin^2 \theta}{b^2},$$

ses équations équivalentes.

L'équation d'une droite MRN est :

$$y' = \alpha, \quad \frac{1}{\rho'^2} = \frac{\cos^2 \theta}{a^2}.$$

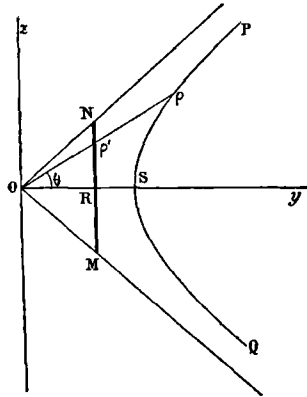


Fig. 61.

Appliquons l'équation (1) :

$$\cos^2 \theta \left(\frac{d'^2}{\alpha^2} - \frac{\beta^2 d^2}{a^2} \right) + \sin^2 \theta \frac{\beta^2 d^2}{b^2} = \beta^2 - 1.$$

Pour que cette relation soit identiquement satisfaite, il faut :

$$\frac{d'^2}{\alpha^2} - \frac{\beta^2 d^2}{a^2} = \frac{\beta^2 d^2}{b^2} = \beta^2 - 1.$$

Or β est grand vis-à-vis de l'unité, il faut donc poser : $b = d$. L'axe imaginaire de l'hyperbole est égal à la distance du plan de front qui la contient, au premier point aplanétique. Il reste comme condition :

$$a = \frac{d}{\sqrt{\frac{d^2}{d^2} - \beta^2}} = \frac{\beta d}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (2)$$

car en faisant l'expérience, on réalise très sensiblement la condition $d' = d$. On peut donc tracer à l'avance un système d'hyperboles ayant même centre, mêmes directions d'axes, même axe imaginaire $b = d$, et des axes réels a tels qu'elles donnent après la transformation des fragments de droites équidistantes. Il suffit, dans la formule (2), de remplacer α par des valeurs numériques croissant en progression arithmétique.

En traçant deux tels systèmes d'hyperboles avec leurs axes à angle droit, la transformée est un quadrillage parfait.

99. Expérience. — L'expérience consiste à observer à travers l'objectif d'un microscope la figure dont nous venons d'étudier la construction. Elle est tracée (fig. 62) pour une distance connue d : on la

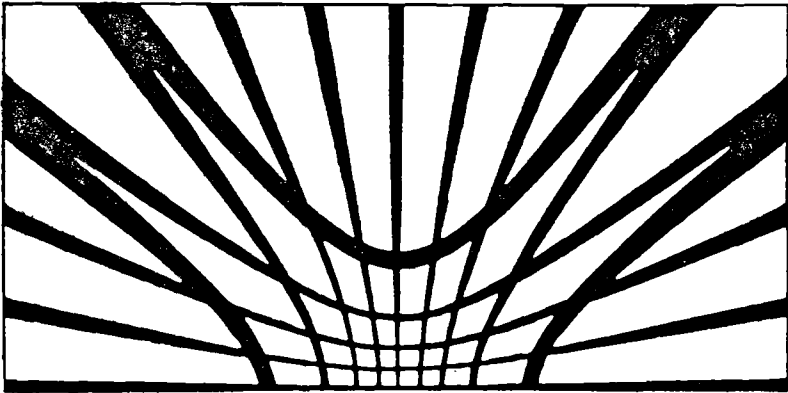


Fig. 62.

supposera doublée. Les traits n'ont pas partout la même épaisseur, précisément pour qu'ils aient la même épaisseur dans la transformée. La figure est disposée dans un plan de front de l'objectif à la distance d du point aplanétique de l'espace objet, et de manière que le centre des hyperboles soit sur l'axe de l'appareil.

Il faut que tous les rayons utilisés croisent l'axe au point A. Mais comme il serait difficile de placer un diaphragme en A (vu sa proximité de la lentille frontale) et comme tous les rayons qui passent en A passent aussi au conjugué A', point aplanétique de l'espace image, c'est en

A' qu'on diaphragme, c'est-à-dire autour de la trace de l'axe sur le plan même où sont censées devoir se former les images des objets vus *au mieux* à travers l'appareil.

La distance d est ordinairement choisie égale à un grand nombre de fois la distance focale principale de l'objectif, de sorte que l'image du dessin se fait très près de l'objectif. Nous pouvons faire en sorte que d soit égal à d' , ce qui simplifie la formule du paragraphe précédent.

On observe soit à l'œil nu, soit à l'aide d'un appareil grossissant.

Si l'objectif satisfait à la condition des sinus, la figure transformée est un quadrillage régulier.

Aberrations pour les rayons émis par les points éloignés de l'axe.

100. Choix du pinceau utilisé pour chaque point. — Lorsque l'objet est suffisamment étendu par rapport à sa distance à l'objectif pour qu'il devienne nécessaire d'utiliser des rayons très inclinés sur l'axe, nous savons qu'aucun appareil n'en peut donner une image stigmatique.

Mais il faut bien comprendre le sens du mot *appareil*. Si nous nous arrangeons, par des diaphragmes appropriés, de manière à n'utiliser pour l'obtention de l'image de chaque point A qu'un fragment du système optique (ainsi que nous l'avons déjà expliqué au § 66), il est clair que nous avons réellement affaire non plus à un seul appareil, mais bien à une infinité d'appareils. La seule différence avec des appareils effectivement distincts est que nous passons de l'un à l'autre d'une manière continue.

Ce qui domine donc la question ici traitée, c'est dans le faisceau provenant de chaque point A, le choix du pinceau que nous utiliserons (fig. 63).

Le point A nous étant donné ainsi qu'un plan de front quelconque π de l'objectif (par exemple, le plan tangent à la surface d'entrée), nous pouvons définir un pinceau issu du point A par les coordonnées de la trace du rayon moyen sur le plan π .

Pour rendre la discussion possible, nous restreindrons immédiatement la généralité du problème en posant que le rayon moyen du pinceau conservé rencontre l'axe

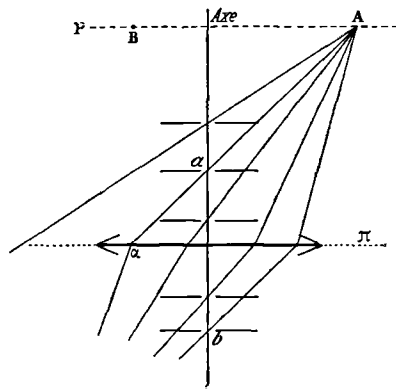


Fig. 63.

du système, se trouve par conséquent dans le plan de symétrie défini par le point A et cet axe. Cela revient à dire que le centre du trou de l'écran qui limite le faisceau peut être supposé sur l'axe du système.

Nous obtiendrons donc successivement tous les pinceaux émis par A et admissibles par hypothèse, en déplaçant l'écran parallèlement à lui-même, son centre restant sur l'axe. La figure 63 montre immédiatement qu'il est nécessaire que l'écran puisse être mis de l'un ou de l'autre côté du système optique.

101. Reproduction d'un plan de front. — Nous ne sommes pas maîtres de disposer une pupille spéciale pour chaque point d'un plan de front P; nous admettrons même que la pupille est unique et sensiblement de même ouverture *utile* pour tous les pinceaux respectivement émis par chaque point du plan P.

Nous imposons donc une relation entre la position du point sur le plan P et la position de la trace du rayon moyen du pinceau sur le plan π .

Par exemple, considérons la droite du plan P normale au plan du tableau et passant par le point A. Si le diaphragme est en a , les pinceaux utilisés émis par la droite à reproduire sont tous dans un plan normal au plan du tableau et passant par la droite Aax.

Si le diaphragme est en b , les pinceaux utilisés sont dans l'espace objet *sur un cône qui n'est généralement pas un plan*, dont les génératrices satisfont à la condition qu'après réfraction elles viennent passer par le point b .

Il faut mettre en garde le lecteur contre une erreur grossière. Il pourrait dire sans réflexion que tous les rayons qui dans l'espace image passent par b passent par son image virtuelle b' dans l'espace objet. Ce serait oublier que b n'a pas d'image, d'après l'hypothèse même que l'appareil n'est pas stigmatique pour les rayons très inclinés. Il ne revient donc pas du tout au même d'imposer aux rayons de passer *réellement* par un point de l'espace objet (ou image), ou de leur imposer de passer *virtuellement* par un point de l'espace image (ou objet).

Nous vérifierons l'importance de cette remarque en parlant de la distorsion (§ 103).

102. Objectif photographique simple. — Plaçons donc dans le plan de front d'une lentille L un diaphragme percé d'un trou O et dont le centre est sur l'axe (fig. 64). Considérons un plan de front P dans l'espace objet et dans ce plan un point A appartenant au plan de la figure. En l'absence du diaphragme, à ce point A correspond une caustique dans l'espace image. Grâce au diaphragme, le point A n'émet plus qu'un pinceau utile touchant la lentille en s . Si le trou O est assez petit, la caustique se réduit à deux éléments de surface a ,

et a_2 passant par le rayon moyen et qui sont les aires d'amincissement du pinceau (§ 56).

D'une part en vertu de la symétrie, d'autre part en vertu de ce que nous avons démontré au § 75 touchant le prisme (l'élément de lentille peut être assimilé à un élément de prisme), l'aire d'amincissement a_1 , la plus rapprochée de la lentille, est normale au plan de la figure; l'aire d'amincissement a_2 , la plus éloignée de la lentille, est dans le plan de la figure.

Coupons le pinceau par un écran normal à l'axe et déplaçons

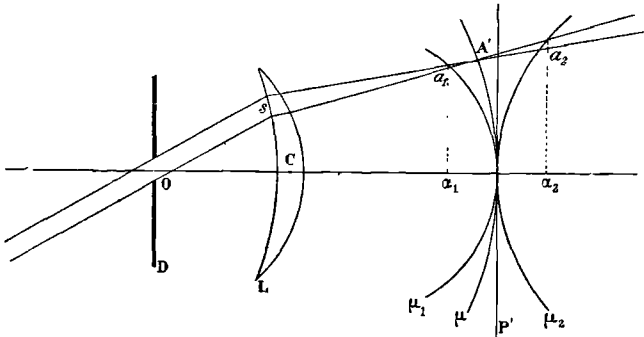


Fig. 64.

l'écran; au point A de l'espace objet correspond dans l'espace image :

1° une petite droite tangente au cercle de centre α_1 , quand l'écran est en $\alpha_1 a_1$: c'est la focale tangentielle.

2° une petite droite dirigée suivant $\alpha_2 a_2$, quand l'écran est en $\alpha_2 a_2$: c'est la focale radiale ou sagittale.

C'est à ce phénomène qu'on donne *improprement* le nom d'*astigmatisme pur*, puisqu'il ne s'agit ici que d'un pinceau infiniment mince.

Le même raisonnement vaut pour tous les points du plan P. A chacun correspond dans l'espace image une caustique sans diaphragme, deux focales avec le diaphragme. Au plan P correspondent donc deux surfaces μ_1 et μ_2 , de révolution autour de l'axe de la lentille et tangentes entre elles sur cet axe. La surface μ_1 est le lieu des focales tangentielles; la surface μ_2 est le lieu des focales radiales.

Nous pouvons enfin considérer une troisième surface, lieu des sections normales de moindre aire des pinceaux qui dans l'espace image correspondent aux pinceaux de l'espace objet émis par les points du plan P et délimités par le trou O du diaphragme. On peut dire que cette surface contient tous les conjugués A' des points A du plan P; c'est le lieu des images les plus distinctes, c'est pratiquement l'image du plan P.

L'appareil est donc rendu *stigmatique*, en un sens évidemment

imparfait, mais pratiquement suffisant. Toutefois son champ reste courbe; d'ailleurs, nous l'avons dit (§ 94), l'aberration chromatique est tellement gênante, qu'il est inutile de considérer une lentille simple. Supposons donc un système achromatique.

Pour une distance focale donnée et des verres de nature déterminée, il nous reste trois arbitraires : l'achromatisme en supprime une; la condition d'égale courbure des faces en contact en supprime une autre. Il en reste donc une. Est aussi arbitraire la distance de l'écran à la lentille.

On comprend qu'en disposant de ces deux arbitraires, on puisse, au moins approximativement, réduire à une seule les deux surfaces μ_1 et μ_2 (supprimer l'astigmatisme par conséquent) et les faire coïncider avec le plan de front P' . Nous aurons construit un appareil approximativement *stigmatique et sans courbure*.

À la vérité, le champ sera *tordu*. *L'objectif simple* que nous venons de décrire ne pourra donc servir que pour photographier les objets qui peuvent être déformés sans inconvénient. La nécessité d'un diaphragme diminue leur *clarté*; ils sont destinés à photographier les paysages (landscapes). Ils sont particulièrement inutilisables pour la reproduction des monuments et des dessins. Leur champ ne dépasse guère 20° (§ 120).

103. Observation des phénomènes : courbure du champ, distorsion. — L'observation des phénomènes de courbure du champ et de distorsion aide à comprendre les principes posés aux §§ 100 et

101 : nous en recommandons l'étude qu'il est aisé de faire comme suit.

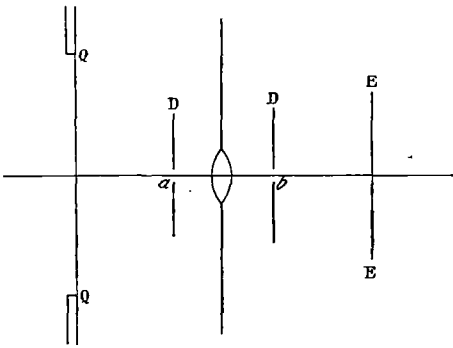


Fig. 65.

On trace sur la face lisse d'un verre dépoli carré, et d'environ 50cm de côté, un quadrillage en gros traits espacés de 5cm . On applique le verre QQ contre une fenêtre (fig. 65) dont on bouche les autres ouvertures avec du papier noir. On possède ainsi un objet de grande étendue, relativement très lumineux et diffusant dans toutes les directions.

À quelque distance (30cm par exemple) on dispose un écran percé d'un trou dans lequel se loge une lentille de 15cm de distance focale et d'ouverture aussi grande que possible. On observe l'image sur le verre dépoli EE.

Si la lentille est d'ouverture assez grande, on ne trouve aucune position de l'écran EE pour laquelle l'image soit nette. On place alors en D un diaphragme percé d'un trou qu'on centre par rapport à la lentille.

Il est alors possible d'obtenir des images à peu près nettes du quadrillage; mais, pour une position du diaphragme, la position de l'écran varie suivant la distance du trait considéré à l'axe de l'appareil. C'est précisément en cela que consiste la courbure du champ.

1° Si le diaphragme est en a , entre l'objet et la lentille, un carré du quadrillage QQ, qui a son centre sur l'axe, est transformé en une figure limitée par quatre courbes tournant *leur concavité vers l'axe* : *il y a (§ 3) distorsion en barillet.*

2° Si le diaphragme est en b , entre l'image et la lentille, un carré du quadrillage QQ, qui a son centre sur l'axe, est transformé en une figure limitée par quatre courbes tournant *leur convexité vers l'axe* : *il y a (§ 3) distorsion en coussinet.*

La courbure de la courbe en laquelle est transformée une droite de l'objet dépend, pour une distance donnée du quadrillage à la lentille :

1° de la distance de la droite objet à l'axe;

2° de la position du diaphragme : elle augmente quand celui-ci s'éloigne de la lentille.

Il est bien clair que si nous obtenons ainsi, suivant la position du diaphragme, une infinité d'images de formes différentes pour un même objet, c'est qu'il n'existe pas d'image proprement dite quand le diaphragme est enlevé; si l'on veut, *il existe alors une infinité d'images superposées, de formes différentes, parmi lesquelles le diaphragme choisit.*

On rencontre même ce paradoxe, que sans diaphragme il existe une image à *peu près nette en barillet*; on installe le diaphragme en b : on voit apparaître une image *beaucoup plus sombre en coussinet*. Voici l'explication très simple.

Parmi l'infinité d'images superposées, il en existe de beaucoup plus lumineuses les unes que les autres. Si certaines d'entre elles sont assez voisines et assez lumineuses, on a sans diaphragme une image acceptable. Mais il n'en existe pas moins d'autres images de formes très différentes que le diaphragme fait apparaître, en supprimant celles qui les noyaient de leur éclat.

Il résulte immédiatement du rôle inverse des diaphragmes placés en avant et en arrière de la lentille, un moyen d'obtenir un appareil sans distorsion. Il est constitué par deux systèmes convergents symétriques entre lesquels, et symétriquement, se trouve le diaphragme. Tel est le principe des *objectifs rectilinéaires symétriques* (§ 124).

104. Autres expériences de distorsion. — Regardons du papier quadrillé à travers une lentille convergente de 3 ou 4^{cm} de distance focale principale.

1° Si la lentille est suffisamment rapprochée du papier, elle sert de loupe et donne une image *virtuelle*; la distorsion est en coussinet. Le phénomène est particulièrement net quand on amène le foyer tout près du papier et qu'on regarde d'assez loin.

2° Si la lentille est assez éloignée du papier, elle donne une image *réelle* sur laquelle on s'accommode aisément en plaçant l'œil à 20^{cm} environ de la lentille. La distorsion est en barillet.

Le diaphragme qui limite les pinceaux dans cette expérience est la pupille elle-même de l'observateur.

On serait tenté de ramener la deuxième expérience à la première du paragraphe précédent, en remplaçant l'œil par son image à travers la lentille. On se trouverait ainsi avoir un trou entre l'objet et la lentille et par conséquent une distorsion en barillet. J'ai déjà dit que ce serait fort mal raisonné (§ 101), car la pupille n'a pas une image à travers la lentille; elle en a une infinité.

3° Si on regarde un quadrillage à travers une lentille divergente, en mettant l'œil assez loin de la lentille, la distorsion est en barillet. Les phénomènes sont d'ailleurs généralement inverses de ceux présentés par une lentille convergente.

105. Calcul de l'astigmatisme dans le cas du dioptré. — Posons (fig. 66) $BA = s$ ou t , suivant que nous considérons le point A comme lié au point A_s , position de la focale *sagittale*, ou lié au point A_t , position de la focale *tangentielle*.

$$\text{Posons :} \quad \overline{BA_s} = s', \quad \overline{BA_t} = t'.$$

Ce sont les mêmes notations qu'au § 17 et au § 89; en ce dernier paragraphe nous avons précisément déterminé la position du point A, en fonction de l'angle d'incidence.

FOCALE SAGITTALE OU RADIALE. — Le point A_s est immédiatement connu, puisqu'il se trouve à l'intersection de l'axe et du rayon réfracté. On a :

$$\text{dans le triangle } A_sBC, \quad \frac{R}{s'} = \frac{\sin(\varphi - i')}{\sin \varphi} = \cos i' - \sin i' \cotg \varphi;$$

$$\text{dans le triangle } ABC, \quad \frac{R}{s} = \frac{\sin(\varphi - i)}{\sin \varphi} = \cos i - \sin i \cotg \varphi.$$

Multipliant ces équations respectivement par n et n' , retranchant membre à membre, on a en vertu de la relation $n \sin i = n' \sin i'$:

$$\frac{n}{s} - \frac{n \cos i}{R} = \frac{n'}{s'} - \frac{n' \cos i'}{R}. \quad (1)$$

Il est clair que la formule (1) n'est pas distincte de la formule (§ 17) :

$$n \frac{p - R}{s} = n' \frac{p' - R}{s'} . \quad (1')$$

Pour s'en convaincre, qu'on exprime p et p' en fonction de s et de s' . On a immédiatement :

$$(p - R)^2 = s^2 + R^2 - 2sR \cos i, \quad (p' - R)^2 = s'^2 + R^2 - 2s'R \cos i'.$$

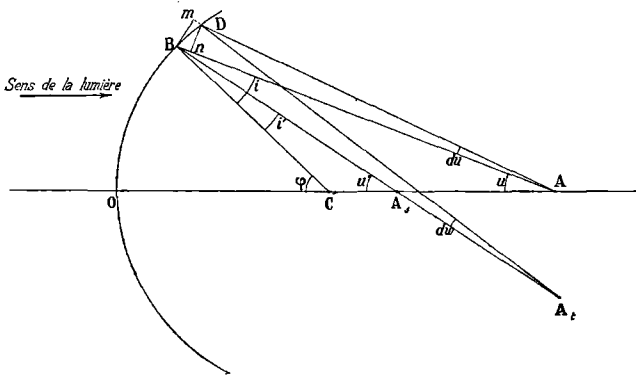


Fig. 66.

L'équation (1') devient en élevant au carré et substituant les valeurs de $p - R$, $p' - R$:

$$n^2 + \frac{n^2}{s^2} - \frac{2n^2 \cos i}{Rs} = \frac{n'^2}{R^2} + \frac{n'^2}{s'^2} - \frac{2n'^2 \cos i'}{Rs'}.$$

Retranchons des deux membres les quantités égales :

$$\frac{n^2 \sin^2 i}{R^2} = \frac{n'^2 \sin^2 i'}{R^2},$$

il vient précisément ce qu'on obtient en élevant au carré les deux membres de l'équation (1).

FOCALES TANGENTIELLES. — Il s'agit de trouver le point A_t d'intersection de deux rayons voisins AB et AD .

$$\begin{aligned} \text{On a :} \quad & -di = du - d\varphi, \quad -di' = dw - d\varphi, \\ & -di = \frac{\overline{BD} \cos i}{t} - \frac{\overline{BD}}{R}, \quad -di' = \frac{\overline{BD} \cos i'}{t'} - \frac{\overline{BD}}{R}. \end{aligned}$$

Or on a :

$$n \sin i = n' \sin i', \quad n \cos i \cdot di = n' \cos i' \cdot di'.$$

$$\text{D'où :} \quad \frac{n \cos^2 i}{t} - \frac{n \cos i}{R} = \frac{n' \cos^2 i'}{t'} - \frac{n' \cos i'}{R}. \quad (2)$$

REMARQUE. — On retrouve les formules du § 71 pour une surface plane en faisant $R = \infty$, dans les formules (1) et (2).

106. Courbure d'une courbe en coordonnées polaires. — Soit le rayon vecteur s exprimé en fonction de l'angle i , $s = f(i)$. Développons en série au voisinage de $i = 0$, c'est-à-dire pour les portions de courbe voisines de la droite OM. Si la courbe est symétrique par rapport à OM, le développement de s ne contient que des puissances paires de i . Nous le limiterons au terme en i^2 . Posons $OM = s_0$.

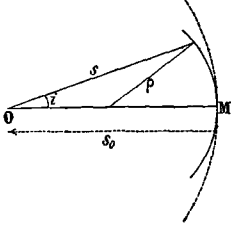


Fig. 67.

Soit ρ le rayon de courbure au sommet M de la courbe : je dis qu'on a :

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{s_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{s_0} \right) i^2.$$

En effet : $\rho^2 = s^2 + (s_0 - \rho)^2 - 2s(s_0 - \rho \cos i).$

$$\rho^2 = (s - s_0 + \rho)^2 + s(s_0 - \rho) i^2,$$

$$\rho = s - s_0 + \rho + \frac{s(s_0 - \rho)}{2(s - s_0 + \rho)} i^2 = s - s_0 + \rho + \frac{s(s_0 - \rho)}{2\rho} i^2,$$

en extrayant la racine par approximation et en négligeant $s - s_0$ devant ρ . D'où immédiatement la formule à démontrer.

La formule vaut pour calculer le rayon de courbure d'une surface de révolution au voisinage de l'axe.

107. Courbure du champ d'un dioptré. — On suppose les points lumineux de l'espace objet d'un dioptré sur une surface de révolution dont le rayon de courbure au voisinage de l'axe est ρ ; on demande le rayon de courbure ρ' au sommet de la surface qui lui correspond dans l'espace image, la transformation étant effectuée par les formules du § 105.

COURBURE DU LIEU DES FOCALES SAGITTALES. — Dans la formule (1) du § 105, substituons à $1 : s$ et à $1 : s'$ leurs valeurs en fonction des rayons de courbure :

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{s_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{s_0} \right) i^2,$$

$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{s'_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{s'_0} \right) i'^2.$$

Développons en série. Remarquons qu'on a :

$$\frac{n}{s_0} - \frac{n}{R} = \frac{n'}{s'_0} - \frac{n'}{R}, \quad ni = n'i'.$$

Il reste :

$$\frac{1}{n\rho} - \frac{1}{ns_0} + \frac{1}{nR} = \frac{1}{n'\rho'} - \frac{1}{n's'_0} + \frac{1}{n'R}. \quad (1)$$

La courbure $1 : \rho'$ dépend non seulement de la courbure $1 : \rho$, mais encore de la distance au dioptré s_0 de la surface lumineuse.

COURBURE DU LIEU DES FOCALES TANGENTIELLES. — Dans la formule (2) du § 105, substituons à $1 : t$ et à $1 : t'$ leurs valeurs en fonction des rayons de courbure :

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{t_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{t_0} \right) i^2,$$

$$\frac{1}{t'} = \frac{1}{t'_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{t'_0} \right) i'^2.$$

Développons en série. Remarquons qu'on a :

$$\frac{n}{t_0} - \frac{n}{R} = \frac{n'}{t'_0} - \frac{n'}{R}, \quad ni = n'i'.$$

Il reste :

$$\frac{1}{n\rho} - \frac{3}{nt_0} + \frac{1}{nR} = \frac{1}{n'\rho'} - \frac{3}{n't'_0} + \frac{1}{n'R}.$$

En appliquant les formules précédentes successivement à deux dioptries consécutifs, infiniment voisins et diaphragmés tout près de leur axe commun, on trouve les formules du § 109 donnant la courbure du champ d'une lentille mince, formules que nous établirons directement.

108. Cas d'une lentille infiniment mince traversée par les pinceaux au voisinage de l'axe. — Le calcul de l'astigmatisme pour une lentille est généralement très compliqué; nous ne traiterons que le cas où la lentille, supposée infiniment mince, est traversée par tous les pinceaux au voisinage de l'axe.

La simplification provient de ce que nous sommes alors dans les circonstances expliquées au § 74. Nous pouvons déduire les positions des focales sagittales les unes des autres sans avoir égard aux focales tangentielles; de même nous pouvons déduire les focales tangentielles les unes des autres sans nous occuper des focales sagittales. Naturellement le point source de lumière peut être considéré comme une focale évanouissante soit radiale, soit tangentielle.

Au voisinage de la trace de l'axe sur la lentille, celle-ci peut être assimilée à une lame plan parallèle. L'angle i' est donc le même pour les deux dioptries; l'angle d'émergence est égal à l'angle d'incidence.

FOCALE SAGITTALE. — Soit R_1 et R_2 les rayons de courbure des deux faces; on a, en appliquant successivement aux deux dioptries la formule

du § 105 :

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n' \cos i'}{R_1} = \frac{n}{s} - \frac{n \cos i}{R_1},$$

$$\frac{n}{s''} - \frac{n \cos i}{R_2} = \frac{n'}{s'} - \frac{n' \cos i'}{R_2}.$$

Ajoutons membre à membre :

$$\frac{n}{s''} - \frac{n}{s} = (n' \cos i' - n \cos i) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Appelons n l'indice de la lentille par rapport au milieu extérieur; il faut remplacer dans la formule n par 1, n' par n , s'' par s'

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = (n \cos i' - \cos i) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \quad (1)$$

formule qui redonne bien la formule élémentaire (§ 22) quand on fait $i = i' = 0$.

FOCALE TANGENTIELLE. — Opérons de même pour la focale tangentielle :

$$\frac{n' \cos^2 i'}{t'} - \frac{n' \cos i'}{R_1} = \frac{n \cos^2 i}{t} - \frac{n \cos i}{R_1},$$

$$\frac{n \cos^2 i}{t''} - \frac{n \cos i}{R_2} = \frac{n' \cos^2 i'}{t'} - \frac{n' \cos i'}{R_2}.$$

Ajoutons membre à membre :

$$\frac{n \cos^2 i}{t''} - \frac{n \cos^2 i}{t} = (n' \cos i' - n \cos i) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Avec les notations ordinaires, il reste :

$$\frac{1}{t'} - \frac{1}{t} = \frac{n \cos i' - \cos i}{\cos^2 i} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (2)$$

109. Courbure du champ d'une lentille infiniment mince.

COURBURE DU LIEU DE LA FOCALE SAGITTALE. — Cherchons la courbure du lieu de la focale sagittale au point où elle est coupée par l'axe. Rappelons que l'angle d'émergence est égal à l'angle d'incidence.

Dans la formule (1) du paragraphe précédent, substituons à $1 : s$ et à $1 : s'$ leurs valeurs en fonction des rayons de courbure :

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{s_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{s_0} \right) i^2,$$

$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{s'_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{s'_0} \right) i^2.$$

Développons les cosinus en série; remarquons qu'on a :

$$\frac{1}{s'_0} - \frac{1}{s_0} = \frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \quad ni' = i.$$

Il reste :

$$\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho} = \frac{n + 1}{n} \frac{1}{f}. \quad (1')$$

COURBURE DU LIEU DE LA FOCALE TANGENTIELLE. — Substituons dans la formule (2) du paragraphe précédent à $1 : t$ et $1 : t'$ leurs valeurs en fonction des rayons de courbure :

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{t_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{t_0} \right) i^2,$$

$$\frac{1}{t'} = \frac{1}{t'_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{t'_0} \right) i^2.$$

Il vient comme plus haut :

$$\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho} = \frac{3n+1}{n} \frac{1}{f}.$$

La différence des courbures des surfaces correspondantes dans l'espace image et dans l'espace objet est indépendante de la position de l'objet.

IMAGE D'UN PLAN DE FRONT. — Supposons que l'objet soit un plan de front P (fig. 68), $\rho = \infty$; on a pour le rayon de courbure au sommet du lieu

des focales sagittales : $\rho'_s = \frac{nf}{n+1}$;

des focales tangentielles : $\rho'_t = \frac{nf}{3n+1}$.

Pour les lentilles convergentes, les surfaces présentent leur concavité à la lumière (fig. 68).

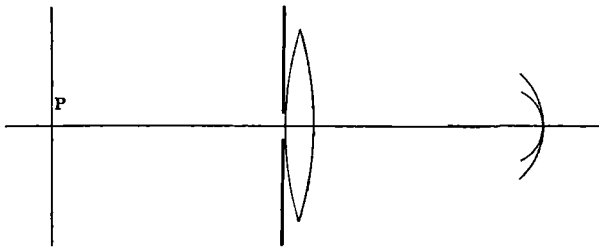


Fig. 68.

Pour les lentilles divergentes, les surfaces présentent leur convexité à la lumière.

110. Suppression simultanée de la courbure du champ et de l'astigmatisme. Condition de Petzval. — Accolons une série de lentilles d'indices n_1, n_2, \dots et de distances focales f_1, f_2, \dots . Limitons les pinceaux utilisés par un diaphragme placé au milieu des lentilles, de manière que les pinceaux se coupent sur l'axe aussi près que possible des centres des lentilles, ce que supposent les calculs précédents.

Un plan de front est transformé par ce système en deux surfaces de révolution dont les courbures sur l'axe sont :

pour le lieu des focales sagittales :

$$\frac{1}{\rho'_s} = \left(1 + \frac{1}{n_1}\right) \frac{1}{f_1} + \left(1 + \frac{1}{n_2}\right) \frac{1}{f_2} + \dots \quad (1)$$

pour le lieu des focales tangentielles :

$$\frac{1}{\rho'_t} = \left(3 + \frac{1}{n_1}\right) \frac{1}{f_1} + \left(3 + \frac{1}{n_2}\right) \frac{1}{f_2} + \dots \quad (2)$$

Pour supprimer l'astigmatisme, il faut faire en sorte que les courbures ρ'_s et ρ'_i soient égales. Retranchons membre à membre les équations (1) et (2), il reste comme condition :

$$\sum \frac{1}{f_1} = 0. \quad (3)$$

On a alors :
$$\frac{1}{\rho'_s} = \frac{1}{\rho'_i} = \sum \frac{1}{n_1 f_1}.$$

Pour supprimer la courbure, il faut donc écrire :

$$\rho'_s = \rho'_i = \infty, \quad \sum \frac{1}{n_1 f_1} = 0. \quad (4)$$

Ainsi la correction de l'astigmatisme ne peut avoir lieu que pour un système assimilable à une lame à faces parallèles (éq. 3). Il revient au même de dire qu'elle n'est jamais possible théoriquement.

Petzval avait cru démontrer que la courbure est supprimée quand la condition (4) (dite *condition de Petzval*) est satisfaite. Nous voyons qu'il n'en est rien.

Remarquons du reste que le calcul précédent convient seulement aux pinceaux coupant l'axe au voisinage des lentilles. Il n'est pas impossible de corriger l'astigmatisme et la distorsion, mais les lentilles ne doivent pas être accolées.

111. Coma. Caustique d'une lentille inclinée. — Lorsque l'ouverture de l'appareil et l'inclinaison du faisceau sont trop grandes, il n'est plus permis de parler d'*astigmatisme* dans l'espace image ; c'est dire que le faisceau issu d'un point et transformé par l'appareil ne s'appuie plus, même approximativement, sur deux droites de cet espace. On dit alors qu'il y a *coma*. Pour nous rendre compte des effets du coma, le mieux est d'étudier la caustique après passage dans une lentille convergente inclinée. Le lecteur y trouvera l'occasion de vérifier expérimentalement les théorèmes des §§ 50 et 51.

Plaçons la lentille verticalement et disposons un point source dans le plan horizontal passant par le centre optique. Ce plan P_1 est de symétrie par rapport aux phénomènes (fig. 69). Nous savons (§ 51) que la nappe Σ_2 de la caustique se sépare en deux nappes Σ'_2 et Σ''_2 tangentes entre elles le long d'une courbe $a_2 b_2 c_2$ de ce plan P_1 ; elles sont d'ailleurs évidemment symétriques par rapport à lui.

Quant à l'autre nappe Σ_1 de la caustique, elle coupe normalement le plan P_1 .

Pour aller plus loin, déterminons l'intersection du volume lumineux par des plans verticaux, normaux à la droite LM qui passe par le point lumineux et le centre optique de la lentille. La figure 70 représente les intersections obtenues par les plans A, B, C, D.

La répartition de la lumière nous montre immédiatement quelles sont, parmi les courbes limitant le volume lumineux, les traces de

la caustique. Les traces de la nappe Σ_2 apparaissent avec leur tangente horizontale de rebroussement ; les traces de la nappe Σ_1 coupent normalement les traces du plan de symétrie.

Il est maintenant facile de nous représenter la continuité des phénomènes.

Supposons la lentille normale à la droite LM : le phénomène est

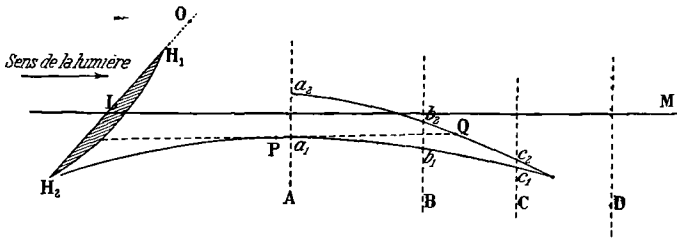


Fig. 69.

de révolution. La caustique Σ_2 s'évanouit en un morceau de l'axe de révolution. La caustique Σ_1 est elle-même une surface de révolution.

Les traces de ces nappes, sur des plans normaux à la droite LM, sont : un point pour la caustique Σ_2 , un cercle pour la caustique Σ_1 .

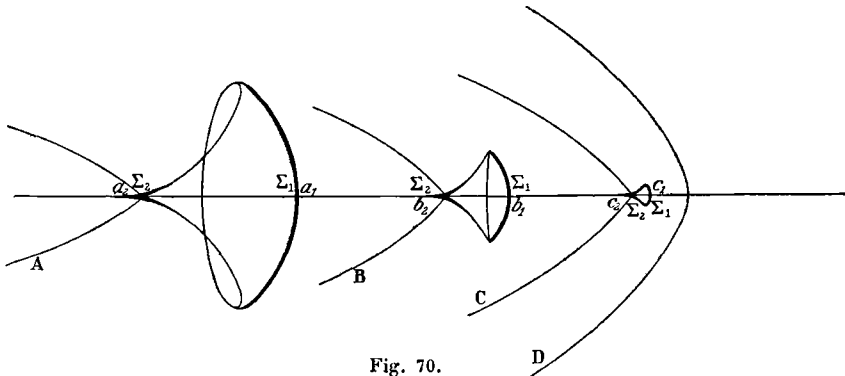


Fig. 70.

Quand on incline la lentille, Σ_2 acquiert une arête de rebroussement ; Σ_1 se réduit à une portion de courbe, qui est d'ailleurs à peu près exactement une portion de cercle dont le centre est au point de rebroussement de la trace de Σ_2 .

Tels sont les phénomènes pour un faisceau étendu.

Si nous diaphragmons la lentille, nous réduisons l'étendue des caustiques jusqu'à parvenir aux focales de Sturm. Par exemple, soit PQ le rayon moyen du pinceau conservé ; nous aurons en P une focale (de Sturm) verticale sur la nappe Σ_1 , en Q une focale (de Sturm) horizontale dans le plan de rebroussement de la nappe Σ_2 (fig. 69).

Quand on ne va pas jusqu'au *pinceau*, les intersections de la caustique par des plans conservent les apparences de la figure 70. D'où les noms d'*aigrettes* et de *comètes* qui leur sont donnés. Ces défauts sont réunis sous le nom de *coma*.

Remarque. — Les figures 69 et 70 ne valent que si la lentille est planconvexe et si la face plane est tournée vers le point lumineux *supposé éloigné*. Si c'est la face courbe, les figures se simplifient, les caustiques ont une importance moindre et peuvent être entièrement séparées; on se rapproche de l'astigmatisme proprement dit (comparer au § 93).

Naturellement les propositions générales se vérifient avec une égale facilité.

112. Méthode rationnelle pour étudier les caustiques. — Nous avons étudié au paragraphe précédent le volume lumineux et déterminé les traces de la caustique par leurs deux caractères : elles limitent des espaces d'intensités moyennes différentes; elles sont elles-mêmes particulièrement lumineuses.

On peut se proposer d'étudier le mode de formation des caustiques, de rechercher à quelles parties des lentilles est dû tel ou tel pinceau. Le problème a tenté bien des expérimentateurs; il ne semble pas qu'ils aient suivi la marche la plus rationnelle.

La technique consiste toujours à diaphragmer l'appareil (lentille, miroir,...) de manière à ne laisser passer que les rayons qui s'appuient sur une courbe; *mais quelle courbe choisir?*

Utiliser pour les lentilles des écrans circulaires et diamétraux est un procédé qui semble naturel et qui est parfaitement illogique.

En effet, il existe sur l'une quelconque des surfaces d'onde deux systèmes de courbes particulièrement importantes qui sont les lignes de courbure : ces lignes se correspondent d'une surface d'onde à l'autre. *Il faut donc diaphragmer la lentille ou le miroir en ne laissant découverte qu'une courbe correspondant à l'une des lignes de courbure d'une quelconque des surfaces d'onde.*

Quand l'inclinaison moyenne de la lentille est nulle, ces courbes sont, par raison de symétrie, des cercles et des diamètres. Il est naturel de penser que pour la lentille inclinée, les lignes qui correspondent aux lignes de cour-

bure des surfaces d'onde sont *approximativement* des droites passant par un certain point excentré O , dont la position dépend de l'incli-

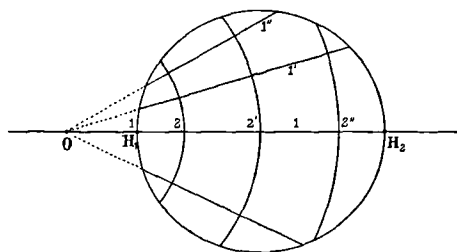


Fig. 71.

bure des surfaces d'onde sont *approximativement* des droites passant par un certain point excentré O , dont la position dépend de l'incli-

raison, et des cercles de centre O. On vérifie immédiatement que les surfaces de rayons qui dans l'espace image correspondent au premier faisceau sont des plans, et que pour le second faisceau on obtient des traces de formes le plus simples possible (fig. 71).

Nous n'insisterons que sur le principe : *il faut que les diaphragmes soient percés de fentes qui laissent passer les rayons correspondant à l'une des lignes de courbure des surfaces d'onde.*

Objectifs photographiques.

Il est impossible de pousser la théorie de la lunette astronomique et celle du microscope sans faire intervenir les phénomènes de diffraction. Nous devons donc les renvoyer après cette étude (voir Optique ondulatoire, chapitre XIII, passim). Au contraire, la théorie des objectifs photographiques ne met en œuvre que l'optique proprement géométrique ; nous en donnons ici un aperçu rapide.

113. Classification. — Les noms que portent les objectifs, noms choisis pour leur sonorité dans un but commercial, ne peuvent qu'embrouiller la classification. Il est clair que tous les objectifs doivent être plus ou moins *aplanétiques*, c'est-à-dire privés d'aberrations (α , *πλανητης*), plus ou moins *stigmatiques*, c'est-à-dire aptes à transformer un cône de rayons dont le sommet est un point de l'espace objet, en un autre cône dont le sommet est un point de l'espace image. Ces deux mots ont d'ailleurs commercialement le même sens, non identique avec les sens stricts définis antérieurement. Le mot stigmatique n'étant pas assez pompeux, on lui substitue le terme *anastigmatique* (α , α , *στιγμα*), qui signifie la même chose, mais qui est évidemment supérieur pour le vulgaire.

La classification logique repose simplement sur ce fait qu'un objectif ne pouvant être parfait, il faut passer sur certains défauts pour obtenir certaines qualités à un degré éminent.

Si l'on photographie un paysage, on ne tient pas à ce que les courbures des rochers ou des arbres soient fidèlement reproduites : peu importe la distorsion. La netteté est même une qualité secondaire. Mais il faut un grand champ avec une netteté partout suffisante pour obtenir des effets panoramiques.

On demandera donc un *grand angulaire*.

Si l'on photographie des monuments ou si l'on reproduit des dessins, on tient à ce que les murs ne soient pas cintrés et à ce que les courbes ne soient pas déformées.

La distorsion doit être particulièrement évitée, et la netteté est une qualité essentielle. On aura donc des *anastigmates rectilignes*. On peut poser aussi longtemps qu'on veut, peu importe l'ouverture.

Pour le portrait dans l'atelier, avec une lumière généralement mauvaise, la question d'ouverture prend une importance capitale. Le champ peut être faible. On aura donc des objectifs *rectilignes rapides*.

Nous sommes donc ramenés à définir certaines propriétés générales, ouverture, champ, ... Nous dirons d'abord quelques mots de l'obturateur.

114. Obturateurs. — L'obturateur est l'appareil qui permet de régler le temps pendant lequel la lumière peut traverser l'objectif. Si ce temps se chiffre par secondes ou dizaines de secondes, aucun dispositif spécial n'est nécessaire ; l'obturateur est un simple bouchon feutré. Mais si ce temps est inférieur à une seconde, et surtout à une petite fraction de seconde (centième, millième), il faut qu'un mécanisme ouvre et ferme le passage des rayons en réalisant les deux conditions suivantes :

1° que l'objectif travaille le plus longtemps possible à pleine ouverture ;

2° que toutes les parties de l'objet soient photographiées simultanément.

1° L'obturateur est généralement constitué par un écran percé d'un trou rectangulaire ABCD, de côtés $AB=L$, $\overline{AD}=l$, qui se

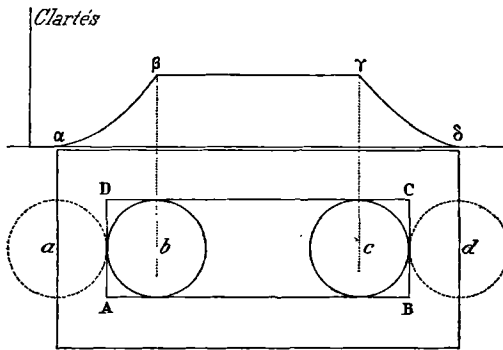


Fig. 72.

déplace dans un plan de front de l'objectif (fig. 72). Pour faciliter la représentation, supposons l'obturateur immobile et déplaçons l'objectif : il sera figuré successivement par les cercles de diamètre D et de centres a, b, c, d .

Les ordonnées de la courbe $\alpha\beta\gamma\delta$ représentent les surfaces découvertes. L'objectif travaille à pleine ouverture pendant

une fraction du temps de pose total égale à :

$$\frac{\overline{bc}}{\overline{ad}} = \frac{L - D}{L + D}.$$

Il est donc avantageux que L vaille plusieurs fois D . Il suffit évidemment d'avoir $l = D$.

Corrélativement l'écran servant d'obturateur doit se déplacer avec

une vitesse V d'autant plus grande que L est plus grand. Si τ est le temps de pose, on a : $V = L : \tau$.

Pour réduire autant que possible la masse de l'obturateur, on le fait souvent avec une étoffe découpée, d'abord enroulée sur un cylindre C placé d'un côté de l'objectif. Elle s'enroule sur un second cylindre C' placé de l'autre côté, à mesure qu'elle se déroule d'autour du premier. Un ressort à boudin fait tourner C' et produit l'enroulement et le déroulement corrélatif quand le système est déclenché.

2° Pour réaliser la seconde condition, il faut que l'obturateur soit dans le plan du diaphragme. Nous avons expliqué au § 28 qu'il existe théoriquement une série de pupilles équivalentes, images les unes des autres par rapport aux différentes lentilles de l'objectif. Mais parmi ces pupilles, il n'en existe généralement qu'une seule qui soit réelle : c'est dans son plan qu'il faut mettre l'obturateur.

S'il en est ainsi, il est évident que les images de tous les points de l'objet se font simultanément ; on démontre aisément que, pour toute autre position, les images des diverses parties de l'objet se font les unes après les autres.

Voyons le résultat sur la reproduction d'un objet *mobile*. L'obturateur étant dans le plan du diaphragme, l'image sera floue si le temps de pose est trop grand. Réduisons-le jusqu'à obtenir la netteté désirable.

Supposons maintenant l'obturateur hors du plan du diaphragme et conservons le même temps de pose. L'image conserve la même netteté ; mais les images des divers points ne se faisant pas simultanément, l'image de l'objet est déformée.

115. Étude d'un obturateur. — Pour déterminer le temps de pose qui correspond à un obturateur *dans un état donné*, on photographie une bille brillante (grosse bille pour automobile) tombant en avant d'une graduation en centimètres.

Sur une bande de papier noir mat de 20 centimètres de largeur, on trace à la craie ou à la gouache une graduation en centimètres sur une longueur par exemple de 2 mètres. On fixe cette graduation verticalement, et on l'éclaire fortement. C'est tout près en avant d'elle que tombe la bille lâchée sans vitesse du zéro de la graduation. Le temps qu'elle met à aller du trait n_1 au trait n_2 est :

$$t = \sqrt{\frac{2}{g}} (\sqrt{n_2} - \sqrt{n_1}), \quad g = 981,$$

formule dans laquelle n_1 et n_2 sont exprimés en centimètres.

L'expérience consiste à relever sur le cliché la position de la trace lumineuse de la bille par rapport aux divisions de la graduation. La seule difficulté de l'expérience consiste à faire fonctionner l'obturateur ni trop tôt ni trop tard.

116. Netteté absolue, netteté apparente. Observation orthoscopique d'un cliché. — Quand on exécute un cliché dans un but scientifique (par exemple, des détails de la Lune ou d'une portion de la voûte céleste), on demande toute la *netteté absolue* compatible avec la grosseur des grains de l'émulsion qui constitue la plaque. On sait qu'ils sont d'autant plus volumineux qu'elle est plus sensible. Dans la majorité des cas, le micron est purement illusoire. Le centième de millimètre est une limite qu'imposent non seulement le grain de la plaque, mais l'irradiation (§ 182) et les variations de forme qui résultent de ce que la plaque a été mouillée et séchée.

Au contraire, quand on exécute un cliché dans un but artistique, la *netteté absolue* n'a qu'une importance secondaire; c'est la *netteté apparente* qui joue le rôle principal.

Pour la définir, il faut chercher la distance à laquelle un cliché doit être regardé pour que la perspective ne soit pas altérée. Que l'on observe l'objet photographié en plaçant l'œil au point nodal de l'espace objet, ou qu'on observe l'image en le plaçant au point nodal de l'espace image, les apparences seront les mêmes. Conséquemment, l'observation *orthoscopique* du cliché doit être faite environ à la distance p' du cliché à ce point nodal.

Nous savons (Cours de Première, § 247) que l'*acuité visuelle* unité est celle de l'œil qui *distingue entre eux* des caractères ayant un diamètre apparent de 5 minutes. Cet angle sous-tend $1^{\text{mm}},4$ à un mètre, soit $0^{\text{mm}},5$ à 30 centimètres. Mais pour distinguer des caractères, il faut en apprécier certains détails.

On admet qu'un œil moyen *sépare* l'un de l'autre à 30 centimètres deux points distants de $0^{\text{mm}},1$. Cette limite, qu'on désigne sous le nom de *netteté 1/10*, doit être rarement dépassée. On peut le plus souvent se borner à la *netteté 1/4*, pour laquelle l'œil est censé ne séparer à 30 centimètres que deux points distants de $0^{\text{mm}},25$.

Il résulte de là que si le cliché doit être observé à 30 centimètres, l'image d'un point doit avoir un diamètre inférieur à $0^{\text{mm}},1$ pour la *netteté 1/10*, inférieur à $0^{\text{mm}},25$ pour la *netteté 1/4*.

Nous avons montré ci-dessus que ce n'est pas à 30 centimètres qu'un cliché doit être regardé, mais à la distance p' . Conséquemment, pour la *netteté 1/10*, le diamètre de l'image d'un point doit être inférieur à :

$$0^{\text{mm}},1 \cdot p' : 30 = p' : 3\,000,$$

où p' est exprimé en centimètres. Pour la *netteté 1/4*, le diamètre de l'image d'un point doit être inférieure à :

$$0^{\text{mm}},25 \cdot p' : 30 = p' : 1\,200.$$

TEMPS DE POSE POUR UN OBJET EN MOUVEMENT. — Comme application cherchons le temps de pose τ qu'il ne faut pas dépasser en photographiant un corps animé d'une vitesse V normalement à l'axe de

l'appareil pour que la netteté soit $1/10$ ou $1/4$. (V est exprimé en centimètres par seconde.)

Netteté absolue. — Le chemin parcouru par l'image dans le temps τ est :

$$V\tau p' : p ;$$

il doit être $< 0^{\text{mm}},1$ ou $0^{\text{mm}},25$ suivant les cas ($< 0^{\text{cm}},01$ ou $0^{\text{cm}},025$).

Netteté apparente. — Le chemin reste le même, mais il faut écrire qu'il est plus petit que $p' : 3000$, dans le cas de la netteté $1/10$. D'où la condition :

$$V\tau p' : p = p' : 3000, \quad \tau = p : (3000 V).$$

On trouve pour la netteté $1/4$:

$$\tau = p : (1200 V).$$

Par exemple, un train passe à 100 mètres de l'appareil ($p = 10\,000$), avec une vitesse de 20 mètres par seconde ($V = 2000$). Déterminons le temps de pose pour la netteté $1/10$.

On trouve : $\tau = 0^{\circ},0017$.

117. Ouverture utile. — On appelle *ouverture utile* O le diamètre du faisceau incident parallèle à l'axe qui peut traverser l'appareil, sans être partiellement arrêté par les diaphragmes intérieurs ou les bords des lentilles. On appelle *ouverture de l'objectif* O' le diamètre du diaphragme qu'il contient.

Le *coefficient d'ouverture utile* est le rapport $O : O'$. Il est égal à l'unité pour les objectifs simples ; il est supérieur à l'unité pour les objectifs composés (§ 28).

Pour déterminer l'ouverture utile, il est commode d'opérer comme suit.

On met au point sur l'infini ; on remplace la glace dépolie par une feuille métallique percée d'un petit trou qu'on éclaire fortement à l'aide d'un faisceau assez divergent pour couvrir tout l'objectif. On mesure le diamètre du faisceau émergent ; plus commodément on le reçoit sur une plaque sensible où sa section droite s'imprime.

L'ouverture s'exprime par la fraction :

$$O = f : n ;$$

f est la distance focale principale. Par exemple, un objectif travaille à $f : 5$, si le diamètre de l'ouverture utile est le cinquième de la distance focale principale. Le nombre n , qui peut diminuer jusqu'à l'unité dans des cas très particuliers, n'a évidemment d'autre limite supérieure que celle imposée par les phénomènes de diffraction (§ 323).

118. Diaphragmes, clarté, coefficient de clarté. Profondeur du champ. — Un objectif de construction déterminée a une ouver-

ture maxima ; mais un diaphragme d'ouverture variable O' (généralement à iris) permet de diminuer l'ouverture. La quantité de lumière reçue est, toutes choses égales d'ailleurs, proportionnelle au carré O^2 de l'ouverture actuelle, carré qui mesure la surface libre.

On appelle *clarté normale d'un objectif* celle qui correspond à une ouverture : $n = 10, \quad O = f : 10.$

Si $n = 5$, l'ouverture est double de celle qui correspond à la clarté normale ; la clarté est 4.

Quand on ne tient pas compte des pertes de lumière par absorption dans la traversée des lentilles et par réflexion sur leurs faces, l'éclairement du cliché est le même à clarté égale, quelle que soit la constitution de l'objectif.

La proposition, rigoureuse pour les objets voisins de l'axe et suffisamment éloignés, ne l'est pas nécessairement pour les faisceaux inclinés : leur section droite, pour la même inclinaison et la même ouverture, dépend généralement de la constitution de l'objectif.

On appelle *coefficient de clarté* γ l'inverse de la clarté : il est donc égal à l'unité pour $n = 10$; il vaut 0,25 pour $n = 5$. On a généralement : $\gamma = 0,01 \cdot n^2.$

Le coefficient de clarté mesure le temps de pose. Soit t_0 ce temps pour la clarté 1, ou pour le coefficient de clarté 1 ; le temps de pose pour le coefficient de clarté γ est :

$$\gamma t_0 = 0,01 \cdot n^2 t_0.$$

On convient d'employer une série de diaphragmes correspondant aux temps de pose 1, 2, 4, 8, ... Ils sont donc percés de trous dont les diamètres correspondent aux nombres n :

$$\begin{array}{cccccc} n = & 1 & \sqrt{2} & \sqrt{4} & \sqrt{8} & \sqrt{16} & \sqrt{32} & \dots \\ \text{soit :} & 1 & 1,41 & 2 & 2,8 & 4 & 5,6 & \end{array}$$

La graduation d'un diaphragme à iris indique, outre l'ouverture maxima, les ouvertures qui rentrent dans la série précédente. Par exemple, sur la monture d'un diaphragme dont l'ouverture maxima correspond à $n = 3$, on trouve marquées, outre la position qui convient à l'ouverture maxima, les positions qui correspondent à :

$$n = 4 \quad 5,6 \quad 8 \dots$$

Les objectifs courants possèdent une ouverture maxima égale environ au huitième de la distance focale principale : $n = 8, \quad \gamma = 0,64.$

Nous avons montré au § 29 que la *profondeur du champ* est sous la dépendance étroite de l'ouverture.

149. Champ angulaire. — La grandeur de l'ouverture (ou ce qui revient au même la rapidité) et la grandeur du champ angulaire sont des qualités contradictoires.

Nous avons déjà dit au § 87 que les parties centrales du champ d'un objectif sont améliorées quand on diminue l'ouverture. Nous avons ajouté au § 88 que cette diminution n'améliore pas *ipso facto* les parties latérales. Mais on conçoit que la correction du coma et de l'astigmatisme ne soit obtenue qu'au détriment de l'ouverture, le nombre de conditions qu'il est possible de réaliser simultanément étant nécessairement limité.

Les objectifs panoramiques dont le champ peut embrasser 120° et même aller jusqu'à 140°, ont généralement une ouverture inférieure à $f : 20$; le nombre n peut même croître jusqu'à 30, ce qui signifie que pour une distance focale de 30 centimètres, le diamètre du faisceau parallèle à l'axe admis ne dépasse pas 1 centimètre dans l'espace objet.

Au contraire, les objectifs pour portraits dans l'atelier qui doivent être rapides, ont un champ angulaire ordinairement inférieur à 40°. Le nombre n est généralement compris entre 5 et 10.

Pour déterminer l'angle α du champ, on met au point sur les objets éloignés en projetant l'image sur un verre dépoli de dimen-

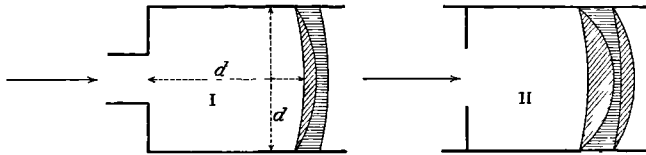


Fig. 73.

sions suffisantes. On détermine avec une règle divisée la plus grande dimension d de l'image vue avec netteté. On a :

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{d}{2f}, \quad \text{soit} \quad \alpha = \frac{d}{f},$$

si α n'est pas trop grand.

On peut encore viser un objet peu étendu éloigné et faire tourner la chambre d'angles connus, mesurés avec un rapporteur. On détermine l'angle des positions extrêmes pour lesquelles l'image de l'objet conserve une suffisante netteté.

Pour qu'un objectif soit *grand angulaire*, il ne suffit pas qu'il soit stigmatique ; la courbure du champ importe particulièrement.

120. Objectifs simples. — Les objectifs *simples* se composent d'un système *unique* formé de deux, trois et même quatre lentilles.

Les formes sont choisies de manière à réduire autant que possible l'astigmatisme et à réaliser l'achromatisme.

Le diaphragme est placé en avant de l'objectif ; les surfaces limitant les lentilles présentent leurs concavités vers le trou du diaphragme.

L'objectif simple à deux verres est représenté en I (fig. 73). Le ménisque convergent de crown (hachures inclinées) est en avant; le ménisque divergent de flint (hachures horizontales) en arrière. Le diamètre d des lentilles et la distance de la pupille d'entrée au premier verre sont égaux à $f : 5$ environ.

L'ouverture est de l'ordre de $f : 25$. Le champ est de l'ordre de 40° . La plus grande dimension de la plaque couverte avec une netteté suffisante est égale à $0,73 . f$.

La distorsion (en barillet, § 103) n'est pas corrigée.

Un tel objectif est peu rapide, mais convient très bien au paysage.

L'objectif simple a été perfectionné par Dallmeyer, qui a ajouté un troisième verre : deux ménisques convergents en crown comprennent un ménisque divergent en flint. L'angle du champ peut atteindre 90° , la plus grande dimension de la plaque couverte est deux fois la distance focale principale. Mais l'ouverture est alors une très petite fraction de la distance focale, $f : 60$ par exemple.

121. Doublets symétriques. — Pour supprimer la distorsion, on est conduit à associer deux objectifs simples à deux verres (voir § 103); on obtient ainsi le *doublet symétrique*. Le diaphragme

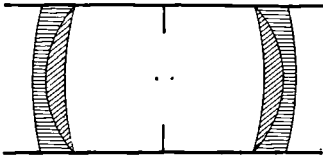


Fig. 74.

est entre les deux systèmes. On y gagne encore d'utiliser, pour une distance focale donnée, des verres plus plans, puisque la déviation des rayons est obtenue en deux fois. C'est à ce groupe qu'appartiennent la plupart des objectifs de qualités moyennes, c'est-à-dire pouvant réaliser convenablement tous les genres de travaux.

Dans le type courant, les surfaces de séparation des lentilles font partie d'une même sphère. Les points nodaux de l'espace objet et de l'espace image sont confondus au centre de l'appareil.

Si on rapproche les lentilles et si on force les courbures, on obtient les objectifs symétriques *grands angulaires*. On réalise par exemple des champs de 90° avec une ouverture $f : 60$. Ces objectifs sont naturellement lents.

Si on éloigne les lentilles, on diminue le champ au bénéfice de la clarté. On obtient les *rectilignes rapides*. Le champ est par exemple de 30° avec une ouverture $f : 8$. Ces objectifs sont très employés pour portraits et travaux dans l'atelier.

122. Doublets non symétriques, triplets. — Il n'entre pas dans le cadre de cet ouvrage de décrire toutes les combinaisons usitées. Disons seulement que les deux systèmes des appareils précédents peuvent être différents, d'où les *doublets non symétriques*;

que les lentilles de l'un des systèmes peuvent être séparées par un intervalle plus ou moins grand d'air, d'où les objectifs dits à *trois lentilles*; qu'il peut exister trois systèmes achromatiques, d'où les *triplets*.

Enfin on trouve sous le nom de *trousses* des collections de lentilles qui par leurs combinaisons fournissent des objectifs de distances focales variées.

CHAPITRE V

QUESTIONS DIVERSES D'OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

Halos et phénomènes analogues.

Nous exposons brièvement la théorie des halos, parhélies et phénomènes analogues, d'abord parce que ce sont de beaux phénomènes fréquents aux latitudes élevées et qui ne sont pas rares même à nos latitudes, ensuite parce que nous aurons ainsi l'occasion de démontrer quelques propositions intéressantes sur la réflexion et la réfraction.

123. Réflexions intérieures sur les faces d'un prisme à base polygonale. — Supposons d'abord le rayon incident dans une section droite. Numérotions les faces 0, 1, 2, ... et soit A_1, A_2, A_3, \dots les angles qu'elles font entre elles.

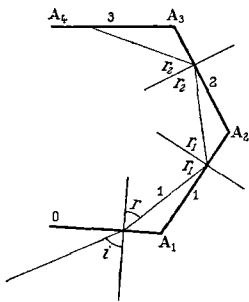


Fig. 75.

Le rayon tombe sous l'angle i ; il est dévié par réfraction à l'entrée de $i - r$.

Les réflexions intérieures successives le dévient de :

$$\pi - 2r_1, \quad \pi - 2r_2, \dots;$$

Enfin la réfraction d'émergence le dévie de $i' - r'$. Somme toute, après p réflexions intérieures, la déviation à l'émergence est :

$$D = i + i' + p\pi - (r + r' + \sum 2r_1) = i + i' + p\pi - \sum A_1.$$

Comme cas particulier intéressant, on vérifiera qu'avec une section droite rectangulaire, un rayon deux fois réfléchi et émergent par la face d'entrée revient parallèlement à lui-même, quel que soit l'angle d'incidence (fig. 76). On a en effet :

$$A_1 = A_2 = \pi : 2, \quad A_3 = 0.$$

D'où aisément :

$$r + r' = 0, \quad i + i' = 0, \quad D = \pi.$$

BASE POLYGONALE RÉGULIÈRE; NOMBRE IMPAIR DE RÉFLEXIONS INTÉRIEURES.
 — Ce cas est pratiquement important; la figure 75 montre immédiatement qu'on a :

$$i = i', \quad D = 2i + p\pi - (p + 1)A.$$

La déviation est indépendante de l'indice.

S'il y a p (nombre impair) réflexions intérieures, nous faisons intervenir les $p + 2$ faces numérotées : 0, 1, 2, ..., $p + 1$.

Je dis que la direction d'émergence est celle qui résulterait d'une réflexion sur la face moyenne F numérotée $(p + 1) : 2$.

En effet, cette face fait avec la face 0 un angle :

$$\frac{p + 1}{2} (\pi - A).$$

Le rayon qui tombe sur la face 0 sous l'angle i , tombe sur la face F sous l'angle :

$$I = i + \frac{p + 1}{2} (\pi - A).$$

La déviation par réflexion sur la face F est donc (au signe près) :

$$2I - \pi = 2i + p\pi - (p + 1)A,$$

qui est précisément la déviation calculée ci-dessus.

La proposition était d'ailleurs évidente : il est clair que toutes les directions sont symétriques par rapport à la face moyenne.

La conséquence de ce théorème est qu'on peut utiliser un prisme à base polygonale régulière comme miroir; il n'y a pas dispersion. De plus, on peut faire en sorte que l'angle r soit supérieur à l'angle limite; il y a réflexion totale : le miroir est le plus réfléchissant possible.

Remarquons que le miroir équivalent ne coïncide pas avec la face moyenne, il lui est seulement parallèle. Sa distance à la face moyenne dépend de l'angle d'incidence.

INCIDENCE OBLIQUE SUR LA SECTION PRINCIPALE. — Ce qui précède subsiste. Prenons les directions des rayons deux à deux à partir du point d'incidence sur la face moyenne. Nous trouvons exactement d'un côté ce que nous trouvons de l'autre. Les rayons ont deux à deux les mêmes inclinaisons sur la section principale; en particulier, il en est ainsi pour le rayon incident et le rayon émergent. Les angles d'incidence et d'émergence sont nécessairement égaux; il n'y a pas dispersion.

Les rayons incident et émergent forment un plan qui, par raison de symétrie, contient la normale à la face moyenne; ils font des

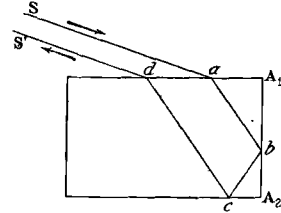


Fig. 76.

angles égaux avec cette normale. Tout se passe donc comme s'il existait, au lieu du prisme, un miroir unique *parallèle* à la face moyenne. Sa distance à cette face dépend de l'angle d'incidence.

124. Réfraction à travers un prisme sous une incidence oblique (Bravais). — Il s'agit d'étudier la loi de la réfraction à travers un prisme quand le rayon n'est plus dans la section principale.

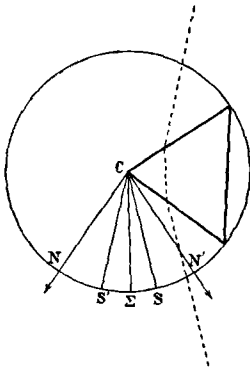


Fig. 77.

Pour bien comprendre le mode de figuration, on se reportera d'abord à la figure 77, où le rayon est censé dans la section principale.

CN', CN sont les normales aux faces du prisme, SC est le rayon incident, ΣC le rayon réfracté, S'C le rayon émergent. Mesurons les angles par les arcs pris sur la circonférence NN'. La loi de la réfraction donne :

$$\begin{aligned} \sin SN &= n \sin \Sigma N, \\ \sin S'N' &= n \sin \Sigma N'. \end{aligned} \quad (1)$$

Ceci posé, passons au cas d'une incidence oblique : figurons les traces des rayons sur une sphère de rayon 1. La droite CI est l'arête du prisme, le plan CNN' est la section principale. Les rayons sont encore SC, ΣC, S'C; les équations écrites ci-dessus sont encore valables.

Menons les grands cercles passant par CI et par les rayons lumineux.

Les triangles sphériques rectangles SsN et ΣσN, ayant l'angle N commun, donnent :

$$\frac{\sin Ss}{\sin SN} = \frac{\sin \Sigma\sigma}{\sin \Sigma N} = \sin N, \quad (2)$$

$$\frac{\operatorname{tg} Ss}{\sin Ns} = \frac{\operatorname{tg} \Sigma\sigma}{\sin N\sigma} = \operatorname{tg} N. \quad (3)$$

Des équations (1) et (2) on déduit :

$$\sin Ss = \sin \Sigma\sigma \frac{\sin SN}{\sin \Sigma N} = n \sin \Sigma\sigma; \quad (4)$$

d'où une loi applicable à la réfraction sur une surface unique :

I. *Faisons passer un plan quelconque NN' par la normale CN au plan réfringent. Les angles que font les rayons incident et émergent, avec leurs projections sur ce plan, satisfont à la loi de Descartes :*

$$\frac{\sin Ss}{\sin \Sigma\sigma} = \frac{\sin SN}{\sin \Sigma N} = n.$$

On trouverait en utilisant les triangles $S's'N'$ et $\Sigma\sigma N'$:

$$\sin S's' = n \sin \Sigma\sigma; \quad \text{d'où :} \quad Ss = S's'.$$

II. *Le rayon qui tombe sur un prisme et le rayon qui en sort sont également inclinés sur la section principale.*

Posons :

$$\frac{\sin Ns}{\sin N\sigma} = \frac{\text{tg } Ss}{\text{tg } \Sigma\sigma} = \frac{\text{tg } S's'}{\text{tg } \Sigma\sigma} = \frac{\sin N's'}{\sin N'\sigma} = n';$$

n' est un indice destiné à régler la réfraction des projections des rayons sur la section principale.

Calculons-le :

$$n' = \frac{\text{tg } Ss}{\text{tg } \Sigma\sigma} = \frac{\sin Ss}{\sin \Sigma\sigma} \frac{\cos \Sigma\sigma}{\cos Ss} = n \frac{\cos \Sigma\sigma}{\cos Ss}.$$

Remplaçons Ss par H , qui désignera la *hauteur* de la source au-dessus de la section principale; il vient en vertu de l'équation (4) :

$$n' = \frac{n}{\cos H} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 H}{n^2}} = \sqrt{n^2 + (n^2 - 1) \text{tg}^2 H}.$$

III. *La projection du rayon sur la section principale traverse le prisme en suivant la loi de Descartes, mais avec un indice n' plus grand que n et dont la valeur dépend de l'obliquité d'incidence.*

Les règles II et III déterminent complètement la direction du rayon émergent correspondant à un rayon incident donné.

125. Minimum de déviation dans la réfraction oblique. —

Quand le rayon est dans la section principale, le minimum D de déviation est donné par la formule :

$$\sin \frac{A + D}{2} = n \sin \frac{A}{2}.$$

Dans le cas d'une incidence oblique, il existe un minimum D de déviation de la projection du rayon sur la section principale. L'angle de la projection du rayon incident avec celle du rayon émergent est alors donné par la formule :

$$\sin \frac{A + D}{2} = \sqrt{n^2 + (n^2 - 1) \text{tg}^2 H} \sin \frac{A}{2}.$$

Supposons un faisceau incident de rayons parallèles provenant du Soleil et tombant obliquement sur un prisme dont l'arête est verticale et par conséquent dont la section principale est horizontale; faisons tourner le prisme jusqu'à obtenir le minimum de déviation. Nous obtiendrons sur un écran éloigné une image colorée que nous appellerons *parhélie*.

Il résulte des propositions précédentes :

1° que le parhélie est au-dessous de la section principale du prisme

à la même *hauteur* que le Soleil; il se dessine donc comme un spectre horizontal ;

2° que la distance D du parhélie au Soleil comptée sur la section principale (distance azimutale par rapport à la section principale considérée comme plan horizontal) est fournie par la relation :

$$\sin \frac{D+A}{2} = \sqrt{n^2 + (n^2-1) \operatorname{tg}^2 H} \sin \frac{A}{2},$$

où A est l'angle du prisme et H la hauteur du Soleil au-dessus de la section principale du prisme.

126. Réflexion et réfraction d'un faisceau parallèle sur un prisme triangulaire tournant autour d'un axe vertical. — Montons un prisme triangulaire équilatère P sur un axe vertical et

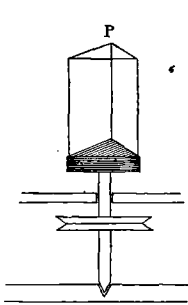


Fig. 79.

envoyons dessus un faisceau de lumière horizontal intense, issu d'un petit trou T . Plaçons le prisme au centre d'une salle obscure et projetons l'image du trou sur les murs à l'aide d'une lentille L (fig. 79).

1° Une partie du faisceau se réfléchit extérieurement sur les faces verticales du prisme : si nous le faisons tourner autour d'un axe,

l'image décrit un grand cercle horizontal. Si la rotation est assez rapide, la persistance des impressions visuelles nous le montre continu. Ce cercle est appelé *cercle parhélique*; on indique par là qu'il passe par la source lumineuse qu'on suppose être le Soleil.

2° Une partie du faisceau se réfracte, se réfléchit une fois, et se réfracte une seconde fois. Nous avons démontré que tout se passe comme s'il y avait une seule réflexion sur une face parallèle à l'une des faces verticales du prisme. Donc les rayons donneront le même cercle parhélique à travers le prisme tournant.

3° Enfin une partie du faisceau se réfracte sans réflexion intérieure sur un prisme de 60° . Il subit une déviation variable avec l'incidence et dont le minimum, pour une matière d'indice $1,34$, est égal à 22° environ. Nous verrons plus loin pour quelle raison nous supposons cet indice.

Quand nous faisons tourner le prisme, la déviation reste comprise entre deux limites : l'une de 22° est la déviation minima; l'autre de $43^\circ 27'$ est la déviation maxima; elle correspond au rayon entrant parallèlement à la face d'entrée, ou sortant parallèlement à la face de sortie.

La déviation 22° , étant un minimum, correspond à une grande intensité : pendant que le prisme tourne d'un angle notable, les rayons émergent suivant une direction invariable. Rien de semblable au voisinage de l'autre limite. D'ailleurs, la déviation minima est plus petite pour le rouge. Si nous faisons tourner le prisme (supposé d'indice 1,31), nous observerons donc sur le cercle parhélique, de part et d'autre de la direction du faisceau incident, deux traînées lumineuses colorées en rouge du côté le moins dévié. Leur intensité décroît à mesure que la déviation augmente. La partie brillante, la plus voisine du point opposé à la source (anthélie), à 22° de cette source dans l'hypothèse d'un indice 1,31, est le *parhélie proprement dit*; le prolongement lumineux (superposé au cercle parhélique) qui s'étend jusqu'à 43° , mais dont l'intensité diminue très vite, est la *queue du parhélie*.

Bien entendu, un prisme de verre fournit les mêmes phénomènes, mais avec des données numériques différentes : les deux limites sont $33^\circ 30'$ et 58° pour l'indice 1,52.

127. Phénomènes naturels : cercle parhélique, parhélies, colonne. — Supposons qu'il existe en suspension dans l'atmosphère de petits prismes triangulaires de glace dont les arêtes sont verticales et qui sont orientés dans tous les azimuts. C'est exactement comme si nous faisons tourner uniformément l'un d'eux autour d'une génératrice.

Si le Soleil est voisin de l'horizon, les phénomènes précédemment étudiés se réaliseront, à la différence près que nous rapporterons les éclaircissements sur la sphère céleste aux points d'où semblent émaner les rayons, au lieu de les projeter aux points diamétralement opposés. Comme l'indice moyen de la glace est 1,31, nous verrons donc, outre un cercle parhélique qui peut faire le tour de l'horizon, des parhélies à 22° du Soleil. Ce sont des images diffuses colorées, avec le rouge en dedans (vers le Soleil); les autres couleurs spectrales sont assez indistinctes; la queue blanche peut être visible sur un arc de 10 à 20° (fig. 80).

Quand le Soleil est au-dessus de l'horizon, il suffit d'un mot pour parfaire la théorie. Les rayons tombent *obliquement* sur les prismes dont les arêtes sont verticales. On vérifie immédiatement que les rayons réfléchis extérieurement ou une fois intérieurement semblent venir d'un petit cercle passant par le Soleil et admettant le zénith comme pôle. Le cercle parhélique est donc horizontal et passe par le Soleil.

Quant aux parhélies, ils sont encore sur le cercle parhélique, mais à une distance du Soleil supérieure à 22° . Nous avons démontré que tout se passe comme si l'indice était plus grand qu'il n'est en réalité. Par exemple, pour des hauteurs solaires de 30° et de 60° , on trouve pour déviation minima comptée sur l'horizon : $24^\circ 48'$ et $44^\circ 37'$.

Enfin on explique par la réflexion des rayons solaires sur des facettes planes, perpendiculaires aux arêtes du prisme, ce qu'on appelle la *colonne verticale*, traînée lumineuse blanchâtre, s'étendant au-dessus et au-dessous de l'astre et formant une croix avec le cercle parhé-

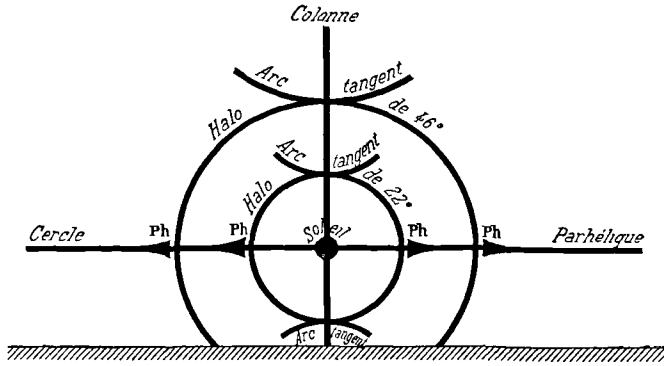


Fig. 80.

lique. On imagine que les prismes subissent, sous l'action du vent, une sorte de balancement, de manière à s'incliner légèrement sur l'horizon, alternativement dans un sens et dans l'autre. Les facettes planes ont pour direction moyenne un plan horizontal, mais elles oscillent autour de cette direction. L'image du Soleil semble donc décrire un plan vertical passant par l'œil.

128. Explication des halos. — On comprendra maintenant sans peine l'explication des halos. Considérons un plan passant par l'œil de l'observateur et le Soleil. Plaçons normalement à ce plan, et de manière à être coupé par lui, une infinité de petits prismes triangulaires. Pour chaque portion du plan, aucun azimut n'est privilégié. Nous demandons dans quelle direction il faut regarder pour voir une accumulation de lumière. Il résulte immédiatement de l'expérience du § 126, qu'il faut regarder à 22° du Soleil.

Comme le raisonnement vaut pour un plan quelconque passant par le Soleil et l'œil de l'observateur, on apercevra autour du Soleil un cercle concentrique, ayant un rayon de 22° indépendant de la hauteur du Soleil, rouge en dedans, bleuâtre en dehors. C'est le halo de 22° .

La déviation de 22° étant minima, l'intérieur du halo est particulièrement sombre.

On explique exactement de même le halo de 46° . En effet, dans les prismes hexagonaux à bases planes, il existe des angles réfringents de 90° compris entre les bases et les faces latérales, pour lesquels la déviation minima est voisine de 46° .

On peut imiter les halos en regardant un point lumineux à travers une lame de verre recouverte de petits cristaux d'alun précipités pour lesquels prédominent les faces du cube, de l'octaèdre et du dodécaèdre rhomboïdal. Les halos observés sont conformes à la théorie.

Il existe un très grand nombre d'autres phénomènes qu'on explique par des considérations analogues, hypothèses sur la forme des cristaux (toujours dérivée du système hexagonal suivant les lois de la Cristallographie), hypothèses sur leurs orientations. Nous en avons assez dit pour permettre au lecteur de s'orienter dans les mémoires de Bravais.

Arc-en-ciel.

129. Faisceau parallèle tombant sur un cylindre circulaire normalement aux génératrices. — Soit SO la direction du faisceau incident (fig. 81); représentons les phénomènes dans la section droite du cylindre de rayon a . Déterminons la marche du rayon S_1A .

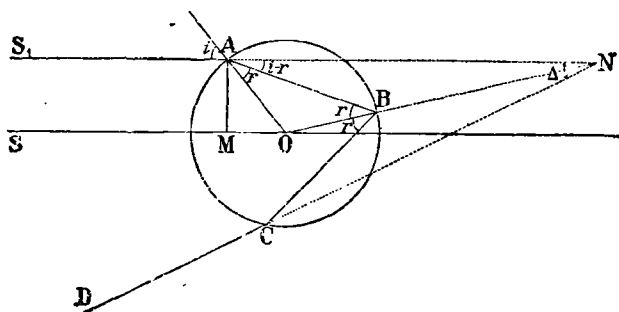


Fig. 81.

Il subit à l'entrée une première réfraction qui le dévie de $i - r$; il se réfléchit ensuite p fois à l'intérieur du cylindre et éprouve chaque fois, dans le même sens, une déviation $\pi - 2r$. Il sort enfin en subissant une déviation égale à celle d'entrée et de même sens, $i - r$. Au total, sa déviation est :

$$D = 2(i - r) + p(\pi - 2r) = p\pi + 2i - 2qr,$$

en posant :

$$p + 1 = q.$$

Il existe un minimum de déviation. En effet, on a :

$$dD = 2(di - q dr) = 2 \left(1 - \frac{q \cos i}{n \cos r} \right) di.$$

La déviation est minima pour l'angle d'incidence I satisfaisant aux conditions :

$$q \cos I = n \cos R, \quad \sin^2 I = \frac{q^2 - n^2}{q^2 - 1}.$$

La valeur de la dérivée seconde est généralement :

$$\frac{d^2D}{di^2} = -2q \frac{d^2r}{di^2} = 2q \frac{n^2 - 1}{n^3 \cos^3 r} \sin i,$$

quantité toujours positive. Pour $i = I$, elle a la valeur :

$$\left(\frac{d^2D}{di^2}\right)_I = 2 \frac{n^2 - 1}{q^2 \cos^3 I} \sin I = 2 \frac{q^2 - 1}{q^2} \sqrt{\frac{q^2 - n^2}{n^2 - 1}}.$$

Pour $i = 0$, c'est-à-dire pour le rayon qui passe par l'axe du cylindre, $r = 0$; la déviation est $(q - 1)\pi$. Le rayon émergent est dans la direction du rayon incident; il est de même sens ou de sens contraire suivant la valeur de q .

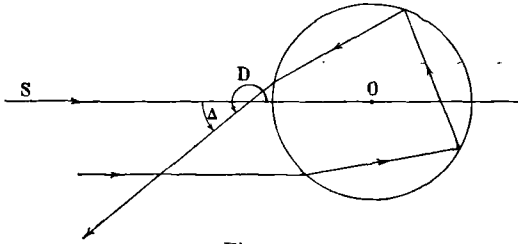


Fig. 82.

Pour $i = \pi : 2$, qui est la seconde limite acceptable, le rayon

incident est rasant; r prend la valeur limite L . La déviation est :

$$D = q(\pi - 2L).$$

Le rayon sort tangentiellement, mais en un point qui n'est pas nécessairement symétrique du point d'entrée.

Il est facile de calculer la marche des rayons, connaissant la distance $\delta = a \sin i$, du centre O au rayon incident. On remarquera, et nous utiliserons plus loin ce résultat, que la distance au point O d'un rayon émergent est égale à la distance à ce point du rayon incident correspondant.

En particulier, considérons un rayon voisin du rayon le moins dévié; la variation de distance $d\delta$ est reliée à la variation di de l'angle d'incidence par la relation :

$$d\delta = a \cos I di, \quad d\delta = a \sqrt{\frac{n^2 - 1}{q^2 - 1}} di.$$

La figure 81 suppose une seule réflexion intérieure ($q = 2$); la figure 82 en suppose deux ($q = 3$).

130. Forme de la caustique. — La caustique est évidemment un cylindre dont il suffit d'étudier la section droite. Puisqu'il existe un *minimum de déviation à partir d'une droite de référence fixe*, nous rentrons dans le cas traité au § 55; la trace de la caustique admet pour asymptote le rayon le moins dévié. Comme tout est symétrique par rapport à la direction SO , elle a donc deux asymptotes dans le plan du tableau.

La forme générale de la section droite de la caustique est représentée figure 83.

Calculons d'abord la position du point A foyer des rayons centraux. Un procédé élégant consiste à appliquer la formule des dioptries et des miroirs. Nous arriverons plus vite au but et obtiendrons une expression générale en procédant comme suit.

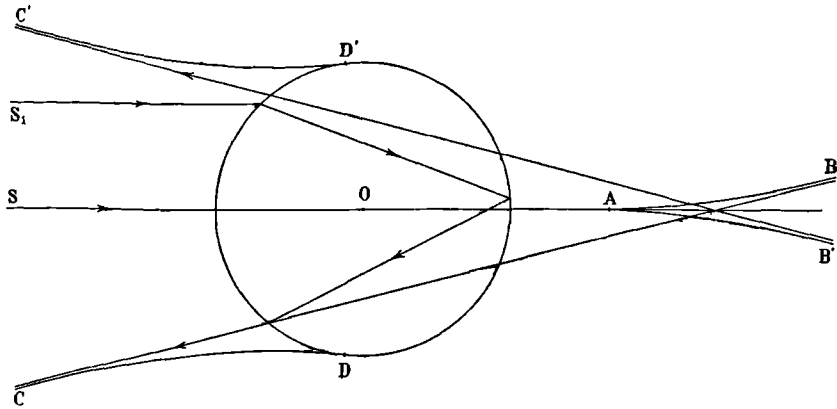


Fig. 83.

La distance au centre O d'un rayon émergent conjugué d'un rayon incident très voisin de SO est ce que devient $d\delta$ quand on fait $i = 0$, soit :

$$d\delta = a di.$$

Les deux rayons émergents font un angle qui est :

$$dD = 2 \left(1 - \frac{q \cos i}{n \cos r} \right) di = 2 \frac{n - q}{n} di.$$

Le point A est l'intersection de deux rayons dont nous connaissons l'angle dD et la distance $d\delta$ au niveau du point O ; nous avons immédiatement (au signe près) :

$$OA \cdot dD = d\delta, \quad \overline{OA} = \frac{-an}{2(q-n)}.$$

On vérifiera que le point A est à droite ou à gauche du point O suivant que q est pair ou impair.

Les asymptotes nous sont complètement connues. Elles font en effet l'angle D avec le rayon SO, et elles sont à une distance du centre : $\delta = a \sin I$. On vérifie aisément que leur point d'intersection avec le rayon SO est à une distance du centre O :

$$a \sin I ; \sin D.$$

Enfin les points de tangence D et D' sont faciles à construire,

puisqu'il suffit de prendre, à partir du point le plus haut ou le plus bas du cercle, un angle égal à :

$$q(\pi - 2L),$$

où L est l'angle limite. Les rayons émergeant tangentiellement correspondent en effet aux rayons qui entrent en rasant le cylindre et qui y pénètrent par conséquent en faisant avec son rayon l'angle limite L .

La figure 83 représente la caustique des rayons émergents après une seule réflexion intérieure.

La branche ABCD correspond aux rayons qui tombent au-dessus de SO; la branche AB'C'D' aux rayons qui tombent au-dessous de SO. On a dessiné la marche du rayon S_1 qui correspond au minimum de déviation.

131. Rayons efficaces, dispersion. — On appelle *rayons efficaces* ceux qui correspondent au minimum de déviation. L'observateur qui les reçoit, reçoit en même temps la caustique dont ils font asymptotiquement partie. Ce qui est vrai d'une manière générale des caustiques, comme lieu d'accumulation de la lumière, l'est aussi dans le cas particulier de leurs asymptotes. Aussi tandis que la lumière reçue sur la presque totalité du cylindre est étalée à la sortie de manière à devenir inefficace, les rayons qui avoisinent le minimum de déviation conservent approximativement leur parallélisme; ils restent *efficaces*.

Déterminons la relation entre leur direction et la dispersion du milieu : considérons donc D comme une fonction de n . On a :

$$dD = 2(dI - qdR), \quad q \cos I = n \cos R, \quad \sin I = n \sin R.$$

D'où le système :

$$q \sin I dI = n \sin R dR - \cos R dn,$$

$$\cos I dI = n \cos R dR + \sin R dn,$$

$$\frac{dD}{dn} = \frac{2}{n} \sqrt{\frac{q^2 - n^2}{n^2 - 1}}.$$

La déviation minimum croît avec l'indice de réfraction; elle est plus grande pour le violet que pour le rouge.

132. Surface d'onde au voisinage du minimum de déviation. — Nous nous proposons de déterminer, *au voisinage du rayon le moins dévié*, l'équation de la section droite de la surface d'onde dont la tangente passe par le centre de la section droite du cylindre réfringent. Prenons comme axe des x cette tangente et comme axe des y le rayon le moins dévié. Nous savons déjà que l'équation cherchée est de la forme (§ 55) :

$$y = bx^3.$$

Il s'agit de déterminer la constante b . On le peut presque sans calcul en s'appuyant sur les considérations suivantes. On se reportera au § 129.

1° Au voisinage du minimum on a, d'après la formule de Taylor :

$$D = D_m + \frac{1}{2} \frac{d^2 D}{di^2} di^2 = D_m + \frac{q^2 - 1}{q^2} \sqrt{\frac{q^2 - n^2}{n^2 - 1}} di^2.$$

2° Le rayon le moins dévié est perpendiculaire à l'axe des x ; sa distance au centre O de la section droite est : $\delta = a \sin I$. Le rayon voisin n'est pas tout à fait perpendiculaire à l'axe des x ; mais il fait avec cet axe un angle petit dont le cosinus est égal à l'unité. Donc il coupe l'axe des x à une distance de la trace du premier égale à :

$$x = d\delta = a \sqrt{\frac{n^2 - 1}{q^2 - 1}} di.$$

3° Voici donc deux rayons faisant un angle $D - D_m$. Ils sont tous deux normaux à une courbe dont l'équation est : $y = bx^3$. L'un rencontre cette courbe à l'origine, l'autre à une distance x connue de cette origine. Il est aisé de calculer la constante b . On a :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \operatorname{tg} (D - D_m) = D - D_m = 3bx^2. \\ 3b &= \frac{D - D_m}{x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{q^2 - 1}{q^2} \sqrt{\frac{q^2 - n^2}{n^2 - 1}} \frac{q^2 - 1}{n^2 - 1}. \\ 3b &= \frac{1}{a^2} \frac{(q^2 - 1)^2}{q^2} \sqrt{\frac{q^2 - n^2}{(n^2 - 1)^3}}. \end{aligned}$$

Nous trouverons au § 340 une intéressante application de cette formule.

133. Applications. — On peut vérifier les phénomènes précédents en faisant tomber un faisceau de rayons parallèles sur une baguette cylindrique de verre convenablement travaillée ou sur un filet d'eau tranquille. On détermine ainsi les azimuts des maximums ou, si l'on veut, des plans asymptotiques de la caustique.

Calculons les phénomènes pour l'eau dont les indices sont :

1,3317 pour la raie B, 1,3448 pour la raie H.

PREMIER MAXIMUM DE LUMIÈRE. — Faisons $q = 2$. Les déviations minima D sont (fig. 81) :

137° 44' pour la raie B, 139° 37' pour la raie H.

Les inclinaisons $\Delta = \pi - D$ sont :

42° 16' pour la raie B, 40° 23' pour la raie H.

SECOND MAXIMUM. — Faisons $q = 3$. Les déviations minima sont :

230° 33' pour la raie B, 233° 56' pour la raie H.

Les inclinaisons $\Delta = D - \pi$ sont :

$50^{\circ}33'$ pour la raie B, $53^{\circ}56'$ pour la raie H.

On a pu mesurer sur un filet d'eau les déviations des dix-neuf premiers maximums, c'est-à-dire déterminer les azimuts d'émergence efficace du faisceau après 1, 2, ..., 17 réflexions intérieures. Naturellement il faut une intensité lumineuse incidente énorme.

134. Application à la sphère; arcs-en-ciel. — Tout ce que nous avons dit subsiste entièrement pour une sphère et un faisceau parallèle de rayons : les phénomènes dans un grand cercle parallèle au faisceau sont identiques aux phénomènes dans la section droite du cylindre. La figure 83 représente donc la section du phénomène par un plan méridien. Pour obtenir la caustique et la surface d'onde, il faut la faire tourner autour de SO comme axe de révolution.

La caustique possède donc un cône asymptotique tangent aux rayons qui ont subi le minimum de déviation, rayons dont les directions sont indépendantes du rayon de la sphère.

Montrons que l'existence d'un rideau de pluie *opposé* au Soleil par rapport à l'observateur suffit à expliquer les deux arcs-en-ciel ordinairement observés (fig. 84).

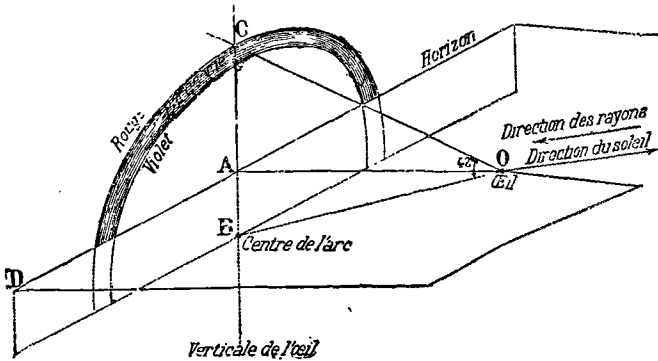


Fig. 84.

Les gouttes de pluie sont sphériques en vertu de la tension superficielle qui amène la surface au minimum d'aire.

Soit DAC le plan vertical sur lequel sont irrégulièrement distribuées de nombreuses sphères de rayons quelconques (gouttes de pluie), et soit O l'œil de l'observateur à quelques kilomètres du plan. A cause de son éloignement, nous pouvons admettre que le Soleil envoie sur toutes ces sphères des rayons parallèles entre eux et à la droite OB.

Cherchons le lieu des sphères telles que le cône des rayons les

moins déviés correspondant à une réflexion intérieure passe par le point O. Il est clair que c'est la trace sur le plan vertical DAC d'un cône circulaire ayant OB comme axe, et Δ comme demi-angle au sommet BOC. Nous voyons donc se dessiner en clair un arc coloré qui nous apparaît circulaire et dont l'angle au sommet est :

42° 16' pour la raie B, 40° 23' pour la raie H.

Le violet est à l'intérieur, le rouge à l'extérieur. Nous verrons d'autant plus de cet arc que le Soleil est plus près de l'horizon. Il importe peu que la pluie soit distribuée sur un plan ou dans un volume : cela résulte du raisonnement même.

Ce que nous avons dit du premier arc s'applique au second, à la différence près que les rayons efficaces qui arrivent à l'œil entrent par le haut de la goutte pour le premier arc, par le bas pour le second (fig. 81 et 82). Nous verrons donc se dessiner un second arc coloré circulaire, extérieur au premier et sous-tendant des angles de

50° 33' pour la raie B, 53° 56' pour la raie H.

Les couleurs sont disposées dans les deux arcs suivant des ordres inverses : les rouges sont tournés l'un vers l'autre.

L'extérieur de la caustique des rayons une fois réfléchis (espace où se trouvent les rayons) correspond à des directions situées entre l'arc et la droite BO ; l'extérieur de la caustique des rayons deux fois réfléchis correspond à des directions extérieures au second arc. Donc, entre les deux arcs, le ciel est particulièrement sombre.

135. Comparaison des théories de l'arc-en-ciel et des halos.

— Les théories de l'arc-en-ciel et des halos (ou des phénomènes analogues) sont *très* différentes. A un faisceau incident de rayons parallèles tombant sur un polyèdre correspond un nombre *fini* de faisceaux parallèles émergents ; il n'y a pas à parler de caustique. A un tel faisceau incident sur une sphère correspond une *infinité* de rayons émergents tangents à une caustique. Pour expliquer les halos et les phénomènes analogues, nous devons donc supposer l'existence d'une infinité de polyèdres semblables (du moins ayant les mêmes angles dièdres) occupant toutes les positions définies par les valeurs continues d'une variable convenablement choisie. Par exemple, nous admettons l'existence d'une infinité de prismes triangulaires d'axes verticaux, mais dont les azimuts sont quelconques.

Les minimums de déviation sont définis tout différemment dans les deux cas. Dans le cas d'une sphère, le minimum de déviation existe indépendamment des autres sphères. Dans le cas des prismes, le minimum a une définition *statistique* : il existe seulement si nous supposons une infinité de prismes dont les azimuts sont quelconques, aucun azimut n'étant privilégié. C'est par rapport à l'ensemble des prismes que le minimum est défini.

Rayons courbes. Mirage. Scintillation.

136. **Indice variable d'une manière continue.** — Soit un milieu dont l'indice n varie d'une manière continue. Les surfaces équiindices sont par hypothèse des plans horizontaux (fig. 85) :

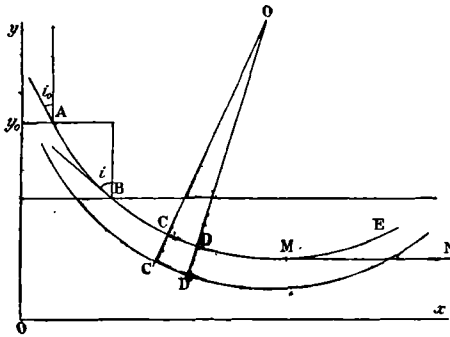


Fig. 85.

$$n = \varphi(y);$$

y mesure la distance au-dessus d'un plan de référence. Pour fixer les idées, nous supposons que n croît quand y croît.

Cherchons la trajectoire d'un rayon dans le plan du tableau.

La loi de Descartes donne la condition :

$$n \sin i = \text{Constante} = \gamma, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\operatorname{tg} i} = \frac{\sqrt{n^2 - \gamma^2}}{\gamma},$$

équation qui résout le problème.

Par exemple, soit :

$$n^2 = n_0^2 \left(1 + \frac{2y}{a}\right),$$

où a est une constante. Prenons le point A comme origine des coordonnées. Nous avons $n = n_0$ pour $y = 0$; soit i_0 l'angle correspondant :

$$n^2 = \frac{\gamma^2}{\sin^2 i_0} \left(1 + \frac{2y}{a}\right), \quad dx = \frac{\sin i_0 dy}{\sqrt{\cos^2 i_0 + \frac{2y}{a}}}.$$

La trajectoire est la parabole à axe vertical :

$$x^2 - ay = a(x \sin 2i_0 - y \cos 2i_0).$$

Pour les applications ultérieures, calculons l'expression générale du rayon de courbure ρ du rayon lumineux :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}} = \frac{\gamma}{n^2} \frac{dn}{dy} = \frac{1}{n} \frac{dn}{dy} : \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

PROBLÈME DE LA BRACHISTOCHRONE.

D'après le principe de Fermat, le problème que nous venons de

résoudre a pour énoncé : Chercher une courbe allant d'un point A à un point A', telle que l'intégrale :

$$\int_A^{A'} n ds,$$

soit minima; n est une certaine fonction $\varphi(y)$ de la distance y à un plan de référence. La solution est renfermée dans les lois de Descartes : $n \sin i = \text{constante} = \gamma$.

Le problème de la brachistochrone est un cas particulier du précédent. On demande quelle courbe doit suivre un mobile partant sans vitesse du point A pour aboutir au point A' dans le moindre temps.

Il faut rendre minima l'intégrale :

$$\int_A^{A'} \frac{ds}{v},$$

où v , vitesse en chaque point de la trajectoire, est une fonction de y déterminée par le théorème des forces vives. On a à un facteur près :

$$v = \sqrt{y_0 - y}, \quad n = 1 : \sqrt{y_0 - y},$$

où y_0 est l'ordonnée du point A. La solution du problème est donc fournie par l'équation :

$$\sin i = \gamma \sqrt{y_0 - y}.$$

Elle définit une cycloïde commençant verticalement au point A, et décrite par un point d'un cercle de rayon convenable roulant sur une droite horizontale passant par le point A.

137. Application du principe de Fermat et de la construction d'Huyghens. — Puisque l'indice croît à mesure que y croît, la direction du rayon s'éloigne de la verticale quand on descend : il devient donc horizontal. Pour trouver à quelle hauteur y ce résultat est obtenu, il faut écrire que $dy : dx$ est nul.

Par exemple, avec la fonction $n = \varphi(y)$, choisie, on trouve pour sommet de la parabole :

$$y = -\frac{a}{2} \cos^2 i_0, \quad x = \frac{a}{2} \sin 2i_0.$$

Pour savoir ce qui se passe au delà du sommet, il faut appliquer non pas la loi de Descartes (qui serait aussi bien satisfaite pour des rayons rectilignes horizontaux se propageant dans les couches d'indices constants), mais le principe de Fermat et la construction d'Huyghens qui en découle (§ 47).

Soit CC' le front de l'onde dans une de ses positions; le front

infiniment voisin DD' s'obtient en prenant l'enveloppe des sphères ayant pour centres les points compris entre C et C' , et pour rayons des longueurs en raison inverse des indices aux points centres. La construction étant générale, il est clair que le rayon parvenu à l'horizontalité se recourbe vers le haut.

138. Équation générale de la trajectoire. — Pour préciser les idées du lecteur, nous avons fait aux paragraphes précédents une hypothèse particulière sur la forme des surfaces équindices; reprenons

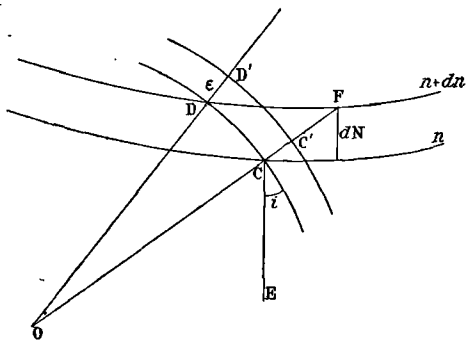


Fig. 86.

la question d'une manière générale en utilisant le principe de Fermat (fig. 86).

Traçons les surfaces équindices d'indices n et $n + dn$; considérons un point C de l'une d'elles traversée par un rayon. Menons la normale CE en ce point.

D'après la loi de Descartes, le plan qui passe par le rayon au point C et la normale CE est le plan osculateur du rayon courbe au point C , puisqu'il contient

deux tangentes successives de ce rayon (rayon incident et rayon réfracté).

Prenons ce plan comme plan du tableau et calculons le rayon de courbure ρ de la trajectoire (fig. 86).

Posons :

$$\overline{CC'} = \overline{DD'} = \varepsilon, \quad \overline{CD} = ds, \quad C'D' = ds + \delta ds.$$

On a dans les triangles semblables OCD et $OC'D'$:

$$\frac{\rho}{ds} = \frac{\varepsilon}{\delta ds}, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\delta ds}{ds}.$$

Pour appliquer le principe de Fermat, il faut prendre \overline{CD} et $\overline{C'D'}$ en raison inverse des indices aux points C et C' . D'où :

$$\frac{\overline{CD}}{C'D'} = \frac{n + \delta n}{n} = \frac{ds}{ds + \delta ds}, \quad -\frac{1}{\rho} = \frac{1}{n} \frac{\delta n}{\varepsilon}.$$

La courbure d'un rayon lumineux en un point, est proportionnelle au taux d'accroissement de l'indice dans le plan osculateur normalement à la direction du rayon. Le centre de courbure est du côté des indices croissants.

Menons la normale CE à la surface équindice au point C . Soit dN

la distance des deux surfaces n et $n + dn$ comptée suivant leur normale commune. Soit enfin i l'angle d'incidence. On a :

$$\frac{\partial n}{\varepsilon} = \frac{dn}{CF} = \frac{\partial n}{\partial N} \sin i.$$

D'où l'expression du rayon de courbure :

$$-\frac{1}{\rho} = \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial N} \sin i = \frac{\partial \log n}{\partial N} \sin i, \quad (1)$$

formule qui donne la courbure d'un rayon lumineux quand on connaît les surfaces équiindices et l'angle que fait ce rayon avec la normale à la surface équiindice au point considéré.

On peut donner à la formule (1) une autre expression dans le cas où la trajectoire est plane.

Appelons X et Y les coordonnées courantes de la droite CC' . Puisque l'indice n est une fonction de x et de y , on a :

$$\frac{\partial n}{\varepsilon} = \frac{\partial n}{\partial X} \frac{dX}{\varepsilon} + \frac{\partial n}{\partial Y} \frac{dY}{\varepsilon}.$$

Écrivons que CC' est normale à CD ; nous avons les relations :

$$dX^2 + dY^2 = \varepsilon^2, \quad dx^2 + dy^2 = ds^2; \quad dX = \varepsilon \frac{dy}{ds}, \quad dY = -\varepsilon \frac{dx}{ds}.$$

Remarquant qu'il revient au même d'écrire :

$$\frac{\partial n}{\partial x} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial n}{\partial X}, \quad \frac{\partial n}{\partial y} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial n}{\partial Y},$$

puisqu'il s'agit des taux de variation d'une fonction, évidemment les mêmes quand nous nous déplaçons de la même quantité sur la droite CC' ou dans l'espace qui la contient, il vient en définitive :

$$-\frac{n}{\rho} = \frac{\partial n}{\partial x} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial n}{\partial y} \frac{dx}{ds}.$$

139. Cas particuliers.

1° *Les surfaces équiindices sont des plans parallèles.*

Posons $n = \varphi(y)$; il vient immédiatement :

$$\frac{n}{\rho} = \frac{dn}{dy} \frac{dx}{ds} = \frac{dn}{dy} : \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

C'est la formule du § 136.

2° *Les surfaces équiindices sont des sphères.*

Considérons un élément du rayon lumineux ; par cet élément et par le centre M des sphères équiindices, menons un plan. Il résulte de la symétrie du milieu, que le rayon ne sortira pas de ce plan. Donc la trajectoire est plane : prenons son plan pour plan du tableau (fig. 87).

Du centre M abaissons les perpendiculaires sur les tangentes successives au rayon lumineux CD ; le lieu des traces est la *podaire* du rayon. On a pour la tangente CC_1 :

$$p = r \sin i, \quad (1)$$

où r est le rayon MC de la sphère équiindice correspondant au point C . Comparant les triangles rectangles CC_1M et DD_1M , il vient :

$$\begin{aligned} i + \beta &= i + di + \alpha, \\ \alpha &= \beta - di. \end{aligned}$$

Soit O le centre de courbure de l'élément CD du rayon lumineux. Posons :

$$\begin{aligned} \overline{CD} &= \rho \alpha = ds, \\ r\beta &= \sin i ds, \\ -dr &= \cos i ds; \end{aligned}$$

$$\frac{ds}{\rho} = \frac{\sin i}{r} ds - di, \quad \frac{dr}{\rho \cos i} = \frac{dr}{r} \frac{\sin i}{\cos i} + di. \quad (2)$$

Différentions la condition (1) :

$$dp = \sin i dr + r \cos i di. \quad (3)$$

Comparons les équations (2) et (3), il vient :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r} \frac{dp}{dr}. \quad (4)$$

Les équations (1) et (4) sont générales et définissent les podaires en coordonnées polaires.

Introduisons la condition (1) du paragraphe précédent; elle devient, grâce aux conditions (1) et (4) :

$$-\frac{1}{\rho} = \frac{1}{n} \frac{dn}{dr} \sin i = \frac{p}{r} \frac{1}{n} \frac{dn}{dr} = -\frac{1}{r} \frac{dp}{dr}.$$

Il faut prendre le signe $-$, car la figure 87 suppose que l'indice croît quand r diminue. D'où :

$$\frac{dn}{n} + \frac{dp}{p} = 0, \quad pn = nr \sin i = \text{Constante} = C. \quad (5)$$

Cette formule célèbre, due à Bouguer, est à la base de la théorie des réfractions astronomiques, § 141.

En coordonnées polaires r, θ , on trouve immédiatement :

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{\operatorname{tg} i}{r} = \frac{1}{r} \frac{\sin i}{\sqrt{1 - \sin^2 i}}, \quad \frac{d\theta}{dr} = \frac{C}{r \sqrt{n^2 r^2 - C^2}}. \quad (6)$$

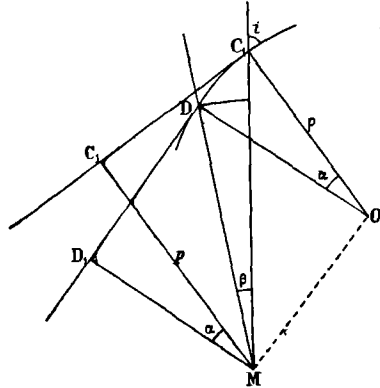


Fig. 87.

EXEMPLES.

Si $n = 1 : r$, la trajectoire est une spirale logarithmique.

Si $n = 1 : \sqrt{r}$, la trajectoire est une parabole admettant le centre des sphères comme foyer.

Si $n = 1 : \sqrt{r^2 - r_0^2}$, où r_0 est une constante, la trajectoire est une épicycloïde.

140. **Mirage.** — Au-dessus d'un sol à peu près horizontal fortement chauffé, la température de l'air diminue à mesure qu'on s'élève. Pour les gaz, l'excès $n - 1$ est sensiblement proportionnel à la masse spécifique, soit, pour une pression constante, en raison inverse du binôme de dilatation. L'indice croît donc d'abord quand on s'élève, suivant une loi généralement inconnue et complexe.

De là résulte le mirage qui consiste en une double image des objets, l'une droite, l'autre renversée, comme s'il existait un lac dans lequel l'objet serait vu par réflexion.

Nous donnerons du mirage une idée suffisante en admettant pour les indices au voisinage du sol la loi simple de variation étudiée au § 136.

Le rayon est alors une parabole à axe vertical ABC qui dépend de la direction de visée AR. L'ensemble des paraboles, correspondant à toutes les visées comprises entre AR₁ et AR₂, forme un faisceau qui admet pour enveloppe la parabole OC'C (fig. 88) :

$$x^2 = a(a + 2y);$$

c'est la méridienne de la caustique qui est de révolution autour de AO. Cette méridienne part d'un point O d'ordonnée $y = -a : 2$. En se reportant à l'équation (§ 136) qui donne l'indice en fonction de l'ordonnée, on voit que pour cette valeur de y , l'indice est nul.

Il est clair que le point O se trouverait très au-dessous du sol, l'indice demeurant plus grand que l'unité dans l'atmosphère entière.

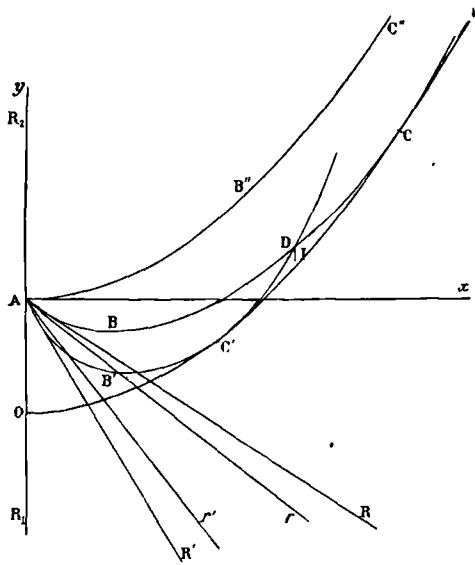


Fig. 88.

Tous les points d'une parabole ABC sont vus du point A dans la même direction AR. Réciproquement on ne peut voir que les points situés sur une parabole du faisceau; *tout l'espace au-dessous de la caustique est invisible*. C'est la généralisation pour les rayons courbes des propositions démontrées pour les rayons rectilignes.

Un point D se trouve généralement sur deux paraboles. L'une touche la caustique en C' avant d'arriver au point D, l'autre la touche en C après son passage au point D. Ce point est vu dans deux directions différentes AR, AR'; il y a deux images.

Considérons l'objet DI. Partons de la parabole ADC dont la direction de visée est AR et faisons tourner la visée vers Ar. Nous obtenons des paraboles successives dont les points de contact avec la caustique s'avancent de C en C'; elles passent par les différents points de l'objet DI. Celle qui passe par I correspond à la visée Ar. Donc nous verrons une première image *droite* de l'objet DI.

Partons de la parabole AB'C' de visée AR' et faisons tourner la visée vers Ar'. Les paraboles successivement obtenues touchent la caustique en des points qui s'avancent de C' vers C; elles balayent l'objet DI. Celle qui passe par I correspond à la visée Ar'. Donc nous verrons de l'objet DI une seconde image, *renversée et placée sous la première*.

Tel est bien le *mirage* tel qu'on l'observe au-dessus des plaines sahariennes ou des schotts algériens desséchés.

Si l'objet est coupé par la caustique, la partie inférieure est invisible. On voit alors de la partie supérieure deux images *au contact*, l'une droite, l'autre renversée. Elles sont au contact parce que les deux images d'un point de la caustique sont confondues. L'image droite est seule facilement reconnaissable: *l'objet paraît suspendu dans l'air*.

Tout ce que nous avons dit ne suppose en rien que les rayons lumineux seront paraboliques ainsi que leur caustique. Les résultats subsistent donc tant que les allures des courbes restent les mêmes et que deux trajectoires seulement passent par chaque point.

Du reste, la loi que nous avons admise n'est pas la seule qui ait été quantitativement étudiée. Les formes :

$$\begin{aligned} n^2 &= n_0^2 + Ay, & n &= n_0 + By, \\ n^2 &= n_0^2 \pm Cy^2, & n^2 &= n_0^2 + D \cos ey, \end{aligned}$$

ont été essayées. La discussion est une pure question de géométrie : il suffit que le lecteur comprenne la nature du problème.

141. Phénomènes analogues au mirage. Réfractions atmosphériques. — On obtient des phénomènes analogues au mirage quand la lumière traverse une longue cuve contenant une dissolution dont la concentration décroît à mesure qu'on s'éloigne du fond.

L'atmosphère, envisagée dans son ensemble, est constituée par des couches sphériques dont les indices *décroissent* quand on s'élève, de 1,000·294 environ près du sol, jusqu'à l'unité aux confins de l'atmosphère où le vide est absolu.

La lumière envoyée par un astre qui n'est pas au zénith, traverse donc obliquement les couches d'indice variable; la trajectoire du rayon est courbe. La visée ne passe pas par l'astre; d'où une différence entre la position apparente et la position réelle: les astres paraissent plus élevés au-dessus de l'horizon qu'ils ne le sont réellement. L'erreur, nulle quand la distance zénithale z est nulle, atteint une demi-minute pour $z = 30^\circ$, près de 2' pour $z = 60^\circ$, plus de 30' pour $z = 90^\circ$. Et encore, dans ce dernier cas, suppose-t-on l'atmosphère dans un état d'équilibre qui n'est jamais réalisé: il est clair que si l'on se trouve dans les conditions du mirage, toute évaluation devient fantaisiste.

SURFACES ÉQUIINDICES PLANES. — Si les surfaces équindices pouvaient être considérées comme planes, la déviation du rayon lumineux se calculerait *sans connaître la loi de variation des indices*.

Soit n_0 , i_0 , l'indice et l'angle d'incidence là où se trouve l'observateur; on a (fig. 89):

$$n_0 \sin i_0 = n \sin i = \gamma.$$

Aux confins de l'atmosphère:

$$n = 1, \quad i = i_1, \quad \gamma = \sin i_1.$$

Posons: $i_1 = i_0 + \Delta$; Δ est la réfraction atmosphérique. On a, quelle que soit la loi de variation des indices et en vertu de la petitesse de Δ :

$$n_0 \sin i_0 = \sin(i_0 + \Delta), \quad \Delta = (n_0 - 1) \operatorname{tg} i_0.$$

Réduisant les radians en secondes et introduisant l'indice moyen de l'air, il vient:

$$\Delta = 60'',6 \cdot \operatorname{tg} i_0.$$

SURFACES ÉQUIINDICES SPHÉRIQUES. — Supposons les couches sphériques; un rayon lumineux tombe sous l'angle d'incidence i dans la couche d'indice n , et se réfracte sous l'incidence $i - d\Delta$ dans la couche d'indice $n + dn$. On a pour déterminer $d\Delta$ l'équation:

$$n \sin i = (n + dn) \sin(i - d\Delta),$$

$$d\Delta = \operatorname{tg} i \frac{dn}{n}.$$

D'où, en vertu de l'équation (6) du § 139:

$$d\Delta = \frac{dn}{n} \frac{C}{\sqrt{n^2 r^2 - C^2}}.$$

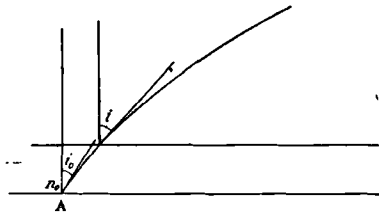


Fig. 89.

La constante C se détermine par l'équation (5) du même paragraphe.

$$C = n_0 r_0 \sin i_0, \quad d\Delta = \frac{dn}{n} \frac{n_0 r_0 \sin i_0}{\sqrt{n^2 r^2 - n_0^2 r_0^2 \sin^2 i_0}}.$$

Telle est l'équation différentielle qui est à la base de la théorie des réfractions atmosphériques. On peut l'intégrer *sans connaître la loi qui relie n et r* , grâce à la circonstance que n et r ne varient que fort peu. Nous ne ferons pas cette discussion, parce qu'elle n'a aucun intérêt pratique. On aboutit à la formule :

$$\Delta = 60'',61 \operatorname{tg} i_0 - 0'',057 \operatorname{tg}^3 i_0,$$

quasiment identique à celle qui correspond aux surfaces équiiindices planes. Dans tous les cas où le second terme prend une valeur notable, les deux formules représentent le phénomène aussi mal l'une que l'autre, tant sont illusoire les hypothèses.

142. Dispersion atmosphérique. — Nous montrerons par des mesures directes que la dispersion de l'air n'est pas nulle (§ 255).

Pour la raie D , dans les conditions normales, l'indice de l'air est :

$$n = 1,000 \cdot 2945.$$

La quantité que nous avons désignée par ν au § 36, a pour valeur entre les raies B et H :

$$\nu = \frac{n-1}{\Delta n} = 41,$$

tandis qu'entre les mêmes raies on trouve 25 pour le crown léger. La dispersion de l'air, tout en étant plus faible que celle du verre, est donc du même ordre.

Il résulte de cette dispersion une séparation des trajectoires courbes des rayons issus d'un astre, qui correspondent aux diverses radiations et par suite aux divers indices. La conséquence de cette séparation est bien connue : les images des étoiles *voisines de l'horizon*, vues dans les lunettes *achromatiques*, sont constituées par de véritables spectres, avec le rouge en haut et le violet en bas. La figure schématique 90 explique immédiatement cette apparence ; L est l'objectif de la lunette, F son plan focal principal.

La longueur du spectre peut dépasser 20'' pour les étoiles voisines de l'horizon ; elle diminue quand les étoiles se rapprochent du zénith. La valeur de ν calculée par ce phénomène est du même ordre que celle trouvée directement.

Il est aisé de calculer l'ordre de grandeur de la distance maxima des trajectoires qui correspondent aux radiations extrêmes du spectre visible. Prenons comme axe des abscisses s la droite qui joint l'œil T de l'observateur à l'étoile E ; prenons un axe des y normal au précédent dans le grand cercle terrestre passant par ces points. Comme

les trajectoires ne sont jamais très courbes (c'est-à-dire différent peu de l'axe des abscisses), les formules se simplifient : $dy : ds$ est négligeable devant l'unité. Nous avons, par un choix convenable du sens de l'axe des y (§ 139) :

$$-\frac{1}{\rho} = \frac{1}{n} \frac{dn}{dr} \sin i = \frac{1}{n} \frac{dn}{ds} \operatorname{tg} i = \frac{d^2y}{ds^2}.$$

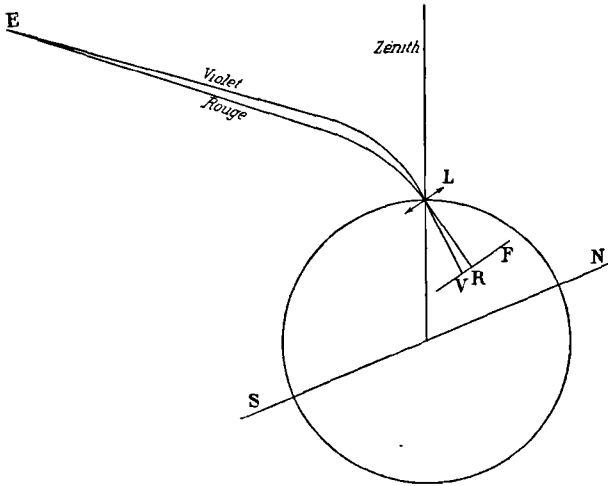


Fig. 90.

L'intégration se fait aisément en remarquant que n et i sont peu variables et que n est très voisin de l'unité :

$$\frac{dy}{ds} = \frac{\operatorname{tg} i}{n} \int dn = \operatorname{tg} i (n - 1) + A,$$

$$y = \operatorname{tg} i \int_0^s (n - 1) ds + As + B;$$

A et B sont deux constantes d'intégration. La distance de deux trajectoires, correspondant à deux radiations différentes, est donnée par la relation :

$$\partial y = \operatorname{tg} i \int_0^s \partial n ds + \partial A \cdot s + \partial B.$$

Écrivons que cette distance est nulle pour $s = 0$ (œil de l'observateur); il vient $\partial B = 0$. Écrivons que les rayons proviennent de la même étoile (distance quasiment infinie); il faut poser $\partial A = 0$. En définitive, la distance des trajectoires est :

$$\partial y = \operatorname{tg} i \int_0^s \partial n ds = \frac{\sin i}{\cos^2 i} \int_0^r \partial n dr.$$

Cette formule, due à L. Rayleigh, indique une séparation le plus grande possible aux confins de l'atmosphère. En admettant que les indices sont proportionnels aux densités, on peut supposer que l'atmosphère a un indice constant et une hauteur de 8000 mètres (I, § 33). Posons $\delta n = 0,000\cdot007$ entre les raies B et H; il vient :

$$\delta y = 5,6 \frac{\sin i}{\cos^2 i} \text{ centimètres.}$$

Tel est l'ordre de grandeur de la distance des trajectoires lumineuses extrêmes. Pour $i = 80^\circ$, on trouve $\delta y = 183$ centimètres.

143. Scintillation. — 1° Considérons un rayon lumineux qui passe en un point très éloigné S et qui participe à la formation d'une image S' dans le plan focal principal F de l'objectif L d'une lunette

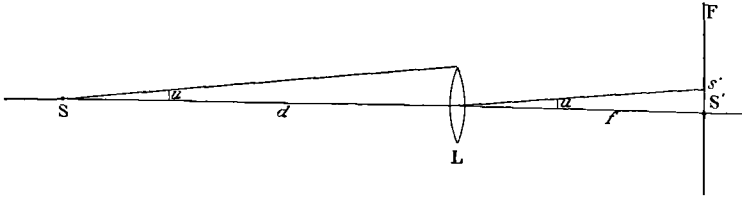


Fig. 91.

d'ouverture O (fig. 91). Il importe de remarquer que S' n'est pas l'image de S.

Donnons à ce rayon une très petite déviation u . Le déplacement de la trace du rayon conjugué dans le plan focal est :

$$s'S' = uf.$$

Si la distance d est grande, la déviation u peut être suffisante pour que le rayon ne rencontre plus l'objectif, sans pourtant que l'image (trace du rayon conjugué dans le plan focal) se soit déplacée d'une quantité sensible. On a alors :

$$ud = \frac{O}{2}, \quad s'S' = f \frac{O}{2d}.$$

Opérons avec une lunette de 2^m de distance focale et de 20^{cm} d'ouverture; soit $d = 50$ kilomètres. Le déplacement focal de l'image au moment où le rayon cesse de rencontrer l'objectif, est :

$$\frac{2 \times 0,2}{2 \times 5 \times 10^4} = 4^m \cdot 10^{-6} = 4 \text{ microns.}$$

Il suffit que la déviation u soit de 0,4 seconde.

2° Considérons un faisceau monochromatique émis par une étoile et reçu dans une lunette.

Sa trajectoire est plus ou moins courbe en vertu des réfractions

atmosphériques. L'atmosphère étant tranquille, supposons qu'elle passe par le point S.

Imaginons qu'il se produise en S une très petite réfraction sur une masse d'air *non homogène*; le rayon est légèrement dévié. Mais si petite que soit cette déviation, elle peut suffire pour que l'objectif ne reçoive plus rien, ou ne reçoive qu'une partie du faisceau, *sans pourtant que l'image se déplace d'une manière sensible*.

La radiation monochromatique considérée disparaît de la lumière de l'étoile.

3° Puisqu'en vertu de la dispersion atmosphérique les trajectoires des diverses radiations sont distinctes (leur écart maximum est de l'ordre du mètre), *elles sont modifiées indépendamment les unes des autres par les perturbations atmosphériques locales*. Donc les radiations de divers indices ne disparaissent pas simultanément dans la lumière de l'étoile, ou dans son spectre, si on l'étudie au spectroscopie. L'étoile image paraîtra colorée d'une manière variable.

C'est aux rapides changements de teinte des étoiles qu'on donne le nom de *scintillation*.

144. Preuves à l'appui de la théorie. — La théorie précédente de la scintillation a mis de longues années à triompher. On contestait la dispersion de l'air comme cause suffisante, *parce qu'on imaginait faussement son rôle*. La dispersion n'intervient pas pour dévier d'une manière différente les trajectoires *qui passent en un certain point de l'atmosphère*; elle intervient seulement pour *séparer* ces trajectoires : elle agit donc sur un grand nombre de kilomètres. Ce sont ensuite des réfractions accidentelles et essentiellement locales où la dispersion joue un rôle *négligeable*, qui rejettent certaines trajectoires hors de la lunette.

Voici de nombreuses preuves à l'appui de la théorie ici admise.

1° Tout ce qui augmente la courbure des rayons augmente leur écart mutuel maximum et l'indépendance des effets perturbateurs. Donc les étoiles scintillent d'autant plus qu'elles sont plus voisines de l'horizon, qu'elles traversent une couche plus épaisse et moins homogène, que l'atmosphère est plus troublée.

2° Dans le spectre d'une étoile, on voit un *voile* sombre courir d'une extrémité à l'autre, indiquant que les trajectoires qui correspondent aux diverses radiations sont atteintes *successivement* par la perturbation locale.

3° Dans les conditions atmosphériques ordinaires, le mouvement du *voile* se fait régulièrement du rouge au violet pour les étoiles situées à l'ouest (qui s'abaissent sur l'horizon), du violet au rouge pour les étoiles situées à l'est (qui s'élèvent au-dessus de l'horizon). Dans le voisinage du méridien, le mouvement est oscillatoire et souvent borné à une partie du spectre.

Pour rendre compte de la régularité de ces mouvements et par conséquent de la régularité du déplacement des perturbations atmosphériques locales, on fait intervenir le mouvement de la Terre. D'après le déplacement du voile, les couches hétérogènes doivent aller, par rapport aux rayons lumineux, de bas en haut du côté de l'ouest (le mouvement relatif abaisse l'étoile), de haut en bas du côté de l'est (l'étoile monte apparemment). C'est précisément ce qui résulte du mouvement de rotation de la Terre qui entraîne la surface de l'astre de l'ouest à l'est et avec elle l'atmosphère entière.

4° On voit souvent les raies du spectre augmenter *successivement* d'intensité. C'est conforme à l'explication adoptée. En effet, si des perturbations peuvent envoyer hors de la lunette des faisceaux qui y parviennent ordinairement, elles peuvent aussi envoyer dans la lunette des faisceaux qui ordinairement passent à côté : d'où un accroissement de l'intensité de certaines radiations, accroissement qui se déplace d'un bout à l'autre du spectre, dans le même sens que la diminution dont nous avons parlé ci-dessus.

5° Les grandes planètes ne scintillent pas à cause de leur plus grand angle apparent. Vénus scintille quand elle est réduite à un mince croissant. Chaque partie de la planète scintille comme une étoile, mais l'œil ne perçoit qu'un effet moyen ; les variations de teinte sont inappréciables.

6° Les *petites* étoiles ne scintillent pas, même près de l'horizon ; cela tient à ce que l'œil ne peut apprécier les teintes quand la lumière est trop faible.

145. Généralisation de la théorie précédente. — La théorie précédente explique comment les rayons peuvent ne plus rencontrer la lunette. Cette élimination correspond, si l'on veut, à un changement de direction de l'onde *plane* correspondante. Mais il peut exister un simple changement de courbure de l'onde (les rayons conservant la même direction moyenne), et par suite un changement dans la position de l'image du faisceau par rapport à l'objectif de la lunette. Il nous est impossible de dire ici comment on vérifie qu'il en est souvent ainsi, la preuve expérimentale étant basée sur les phénomènes de diffraction au voisinage d'un foyer (§ 322).

146. Scintillomètre. — Les variations de couleur des étoiles scintillantes s'observent à l'œil nu. Mais les changements sont plus fréquents et plus marqués si on regarde dans une lunette à laquelle on imprime un mouvement oscillatoire par de petits chocs. L'image forme une courbe ondulée diversement colorée.

On peut régulariser le phénomène en plaçant une lentille très légèrement concave ou convexe entre l'œil et l'oculaire, et en lui imprimant une rotation (quelques tours par seconde) autour d'un axe parallèle à l'axe de la lunette, mais excentré par rapport à la lentille.

Cette disposition a l'inconvénient d'éloigner l'œil de l'ocillon et par conséquent de l'anneau oculaire. On peut encore faire tourner excentriquement le verre de l'oculaire qui est près de l'œil.

Enfin on peut installer en avant de l'oculaire une glace épaisse à faces parallèles, inclinée sur l'axe de la lentille et montée dans un support qui tourne autour de cet axe. La lame produit une déviation latérale qui varie avec son épaisseur et son inclinaison.

La mesure de *l'intensité de la scintillation* consiste à déterminer approximativement le nombre des colorations nettes (rouge, jaune, vert, bleu) vues simultanément sur un cercle. Si on connaît la vitesse de rotation de la lame épaisse, on calcule aisément le nombre de variations nettes de teinte par seconde. Ce nombre peut varier de 0 à 150.

147. Lentilles non homogènes. Théorème de Malus. Cristallin. — Il résulte immédiatement du principe de Fermat, et par conséquent des lois de Descartes, que *tous les chemins optiques qui vont d'un point A à son image A' sont égaux*. Ce théorème est connu sous le nom de Malus; nous reviendrons, aux §§ 217 et 218, sur ses démonstrations expérimentale et théorique dans le cas des systèmes centrés.

Du reste, on voit immédiatement sa raison d'être. Si le point A a une image ponctuelle A', si par conséquent le système optique est *stigmatique* pour le point A, c'est que les surfaces d'onde dans l'espace image sont des sphères admettant A' comme centre. L'une d'elles se réduit au point A'. Or, tous les rayons qui vont du point A à une surface d'onde quelconque sont égaux par définition (§ 45); donc, tous les rayons qui vont de A à A' sont égaux.

Montrons qu'une lentille conserve ses propriétés si l'indice *supposé variable* dépend de la distance h à l'axe principal suivant la relation :

$$n = n_0 + n_1 h^2;$$

n_1 est une constante positive ou négative. Supposons la lentille biconvexe : on a $R_1 > 0$ $R_2 < 0$, (§ 22).

Soit e_0 l'épaisseur de la lentille pour $h = 0$. On vérifie immédiatement qu'à une distance h de l'axe, l'épaisseur est :

$$e = e_0 - \frac{h^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

L'épaisseur *optique* est donc, aux termes en h^2 près :

$$en = e_0 n_0 - \frac{h^2}{2} \left[n_0 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) - 2e_0 n_1 \right]$$

Tout se passe donc comme si l'indice de la lentille était constant, mais comme si on avait modifié les courbures des faces.

Pour trouver la formule des lentilles non homogènes, il faut écrire que *tous les chemins qui vont de l'objet à l'image sont égaux*. On vérifiera facilement que cette condition s'exprime, en tenant compte des signes, par les équations :

$$-p + p' + \frac{h^2}{2} \left(-\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \right) + e(n-1) = \text{Constante.}$$

$$\frac{h^2}{2} \left[-\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} - (n_0 - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + 2e_0 n^2 \right] = \text{Constante.}$$

Le terme entre crochets est donc nul; d'où la condition (§ 22) :

$$-\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f} = (n_0 - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) - 2e_0 n_1.$$

En particulier, on peut obtenir une lentille dont les faces sont planes et parallèles; l'inverse de sa distance focale principale est :

$$\frac{1}{f} = -2e_0 n_1.$$

Pour la réaliser, on prépare un épais sirop avec de la gélatine fondue dans très peu d'eau, filtrée et concentrée doucement au bain-marie. On la coule dans un tube à essai, où elle se solidifie. On enlève le cylindre ainsi formé en cassant le bout du tube; on en coupe une rondelle de 1 à 2 centimètres d'épaisseur, dont on recouvre les faces planes par deux morceaux de glace planparallèles pour empêcher l'évaporation de l'eau.

Cette évaporation se produit au contraire librement à travers la surface latérale. On obtient ainsi, après 24 heures, une lame de gélatine dont l'indice croît du centre à la périphérie ($n_1 > 0$): c'est une lentille non homogène divergente, avec laquelle on répète les expériences ordinaires.

On peut préparer des lentilles non homogènes en coulant du verre dans un tube de fer : les variations d'indice sont dues à la trempe.

Le *crystallin* est une lentille non homogène stratifiée : son indice augmente à mesure qu'on s'approche du centre appelé *noyau*. Il se compose donc du noyau, lentille biconvexe presque sphérique, puis de couches enveloppantes successives d'indices décroissants. Il résulte immédiatement de ce qui précède, que le *crystallin* est *plus convergent* que si son indice était partout le même. Tout se passe approximativement comme si on avait la distribution d'indices précédemment étudiée avec la condition $n_1 < 0$.

OPTIQUE ONDULATOIRE

CHAPITRE I

ÉMISSION. — PHOTOMÉTRIE. — PHOTOCHEMIE

148. Dans les Chapitres précédents, nous avons déterminé la marche des rayons comme conséquence d'une hypothèse purement géométrique. *Elle n'est strictement pas exacte* : nous aurons à reprendre la question en nous appuyant sur l'hypothèse des ondulations; nous retrouverons les résultats précédemment obtenus, dans le cas où les faisceaux remplissent des angles solides qui ne sont pas très petits; nous obtiendrons au contraire des résultats très différents, quand cette condition ne sera pas satisfaite.

Jusqu'à présent nous ne nous sommes pas occupés du plus ou moins d'éclat des objets et des images. Nous devons, pour comprendre la suite de ce Cours, acquérir dès maintenant les idées fondamentales sur l'émission et la propagation de la lumière. A la vérité, ce n'est qu'au Chapitre II que nous développerons comme elle le mérite la Théorie de l'émission; les phénomènes d'interférence (Chap. IV) sont nécessaires pour préciser la nature de la propagation. Mais il nous est indispensable de posséder certaines définitions. Comme elles ne deviennent claires que par des exemples empruntés à la pratique, nous serons conduits à dire de la Photométrie, des phares et des projecteurs, ce qui est fondamental : il n'entre pas dans le plan de ce Cours d'insister sur les techniques et les descriptions d'appareils.

149. **Idée de l'émission et de la propagation de la lumière.**
— S'il est facile d'imaginer, *sous la forme d'une sphère pulsante*, une source ponctuelle et symétrique d'ondes sphériques dans le cas des vibrations longitudinales, il est beaucoup plus difficile de se représenter une source de vibrations transversales émettant dans un milieu indéfini.

La Théorie électromagnétique de la lumière assimile les sources élémentaires à des oscillateurs de Hertz infiniment petits; ce qui revient au même, elle les assimile soit à un élément de courant alternatif, soit à une particule électrisée oscillante, soit enfin à un doublet

périodique, c'est-à-dire à l'ensemble de deux petites sphères dont les charges, toujours égales et de signes contraires, varient périodiquement entre deux valeurs elles-mêmes égales et de signes contraires.

Appelons *ligne des pôles* l'axe de l'oscillateur; nous démontrerons dans le Cours d'Électroptique (Tome V) que la *force électrique* (et par conséquent le *déplacement qui lui est proportionnel*) a une expression simple à grande distance de l'oscillateur. Elle est normale au rayon vecteur, c'est-à-dire *transversale*, et dirigée dans les méridiens. Elle est nulle aux pôles, maximum à l'équateur et, dans l'intervalle, proportionnelle au cosinus de la latitude. Enfin elle varie en raison inverse de la distance.

Comme les ondes sont sensiblement planes, la *force magnétique* est elle aussi transversale; elle est dirigée suivant les parallèles; elle est enfin proportionnelle à la force électrique.

L'énergie contenue dans l'unité de volume est proportionnelle à la somme des carrés des amplitudes des deux vecteurs; elle est donc, toutes choses égales d'ailleurs, en raison inverse du carré de la distance à l'oscillateur.

Son flux est conservatif.

Éclairement et éclat des objets et des images.

150. Définitions pour une lumière monochromatique ou de composition invariable. — Les définitions sont basées sur l'hypothèse de la conservation du *flux lumineux* Q . Nous supposons d'abord ce flux conservatif, quitte à introduire ensuite l'absorption par le milieu qui le propage.

INTENSITÉ DANS UNE DIRECTION DONNÉE D'UNE SOURCE INFINIMENT PETITE; ÉCLAT DANS UNE DIRECTION DONNÉE. — Soit d'abord une source émettant par une surface de très petites dimensions que nous traiterons comme un point. Dans un cône d'angle solide $d\omega$ donné, elle envoie un *flux* ou une *quantité de lumière* :

$$d^4Q = dId\omega;$$

dI est l'intensité de la source dans la direction moyenne du cône considéré. Nous employons le symbole d^4Q pour indiquer qu'il faut faire deux intégrations doubles avant d'avoir une quantité finie, ainsi qu'on le verra plus loin.

Nous pouvons expliciter l'aire de la source qui émet. L'aire $d\sigma$ envoie dans le cône $d\omega$ décrit à partir de chacun de ses points dans la même direction moyenne, un flux :

$$d^4Q = dId\omega = \epsilon d\sigma d\omega, \quad dI = \epsilon d\sigma;$$

ϵ est l'éclat de la source pour l'élément considéré $d\sigma$, dans la direction moyenne du cône infiniment petit considéré.

Portons dans chaque direction un vecteur proportionnel à l'éclat ; nous décrivons ainsi une surface qu'on appelle *indicatrice d'émission*.

INTENSITÉ DANS UNE DIRECTION DONNÉE D'UNE SOURCE ÉMETTANT PAR UNE SURFACE FINIE ; ÉCLAT MOYEN DANS UNE DIRECTION DONNÉE. — *A la condition de placer l'élément dS qui reçoit le flux, assez loin de la source pour que les droites qui vont de l'élément dS aux divers points de la surface lumineuse, supposée de dimensions finies, puissent être considérées comme parallèles, on peut intégrer par rapport à l'aire de la surface qui émet. Nous avons alors :*

$$d^2Q = d\omega \iint dI = d\omega \iint \varepsilon d\sigma = Id\omega = \varepsilon\sigma d\omega.$$

I est l'intensité de la source finie dans la direction considérée ; ε est l'éclat moyen de la source dans cette direction.

Ce sont ces quantités qui interviennent ordinairement.

Dans l'expression précédente, ε est une quantité éminemment variable. En effet, l'angle sous lequel les éléments $d\sigma$ de la surface σ émettent, peut avoir pour limites 0 et $\pi : 2$, les rayons émis traversant toujours le même élément dS . Dans ces conditions, nous verrons que l'éclat vrai ε passe généralement d'un maximum à une valeur nulle.

FLUX TOTAL ENVOYÉ PAR UNE SOURCE FINIE ; INTENSITÉ MOYENNE SPHÉRIQUE. — D'un point O quelconque pris comme centre à l'intérieur de la surface σ qui émet, traçons une

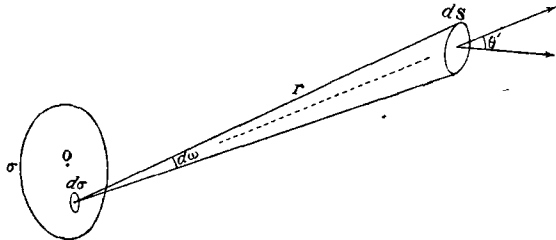


Fig. 92.

rayon r sur laquelle sera l'élément dS ($\theta' = 0$, fig. 92).

La quantité de lumière reçue par cet élément est :

$$d^2Q = Id\omega = \frac{IdS}{r^2}.$$

La quantité totale reçue par la sphère entière est :

$$Q = \frac{1}{r^2} \iint IdS.$$

Si la surface qui émet est une sphère identique dans toutes les directions, on a évidemment :

$$Q = 4\pi I.$$

Par analogie, quand la surface qui émet le flux total Q n'est pas identique dans toutes les directions, on appelle *intensité moyenne*

sphérique le quotient :

$$I_s = \frac{Q}{4\pi}.$$

L'éclat moyen sphérique est le quotient $\varepsilon_s = I_s : \sigma$, de l'intensité moyenne sphérique par la surface totale de la source. Ici la moyenne est prise et par rapport à la surface qui émet, et par rapport aux angles solides; quand on définit les quantités I et ε pour une source finie, la moyenne n'est prise que par rapport à la surface qui émet.

ÉCLAIREMENT. — On appelle *éclairement* E d'une surface matérielle ou géométrique le quotient du flux total qu'elle reçoit ou qui la traverse, par son aire. L'éclairement a les dimensions de l'éclat; il y a cependant une différence essentielle de fonctions entre les deux quantités. La notion d'éclairement correspond au flux total; l'éclat d'une surface éclairée correspond au flux qui arrive dans un angle solide de direction moyenne déterminée¹. L'éclairement est donc l'intégrale de l'éclat par rapport à l'angle solide :

$$d^2Q = E dS = dS \int \varepsilon d\omega.$$

Soit un élément dS éclairé par une seule source d'intensité I pour la direction du faisceau utilisé, placée à une distance r suffisante. La normale à l'élément dS fait avec les rayons un angle θ' . L'éclairement est défini par les équations :

$$d^2Q = I d\omega = I \frac{dS \cos \theta'}{r^2}, \quad E = \frac{d^2Q}{dS} = \frac{I \cos \theta'}{r^2}.$$

Nous allons d'abord expliquer par des exemples le sens et l'intérêt de ces définitions.

151. Comparaison des intensités de deux sources finies. Photomètre usuel. — Il résulte immédiatement des hypothèses fondamentales que pour comparer les intensités de deux sources I_1 et I_2 , il faut les mettre à des distances d_1 et d_2 de deux parties voisines d'un écran, et faire varier les distances jusqu'à ce que les éclairagements respectivement dus à chacune d'elles, soient égaux. On a alors :

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2}.$$

Nous avons expliqué dans le Cours de Première, §§ 184 et 195, comment on peut réaliser l'expérience.

Dans les laboratoires de photométrie, on emploie des procédés plus précis dont il faut dire quelques mots.

Les sources à comparer S_1 et S_2 sont toujours placées sur un même banc d'optique, de 3 à 4 mètres, c'est-à-dire un chemin de fer raboté, sur lequel glissent ou roulent des supports. Une graduation en millimètres permet de repérer leurs positions.

¹ L'éclairement d'une surface qui reçoit a les plus grandes analogies avec le pouvoir émissif d'une surface qui émet. Nous insisterons plus loin sur les analogies de définition entre l'éclat et le pouvoir absorbant. Toute cette nomenclature est incohérente, mais l'usage nous empêche d'y rien changer.

Dans le dispositif le plus commun, elles éclairent un écran E, normal à la droite qui les joint et *diffusant* par ses deux faces (§ 164) aussi également que possible. L'expérience consiste à déplacer les sources jusqu'à ce que les faces soient également éclairées. Pour vérifier s'il en est ainsi, on s'arrange de manière que les deux faces éclairent respectivement deux parties contiguës du champ observé par l'œil O à travers la loupe L.

En M_1 et M_2 sont des miroirs. Le prisme rectangle P_2 et le parallépipède P_1 du même verre sont *en contact optique* sur une petite partie de leur surface : il suffit de les coller avec une couche très mince de baume de même indice. Dans ces conditions, la partie en

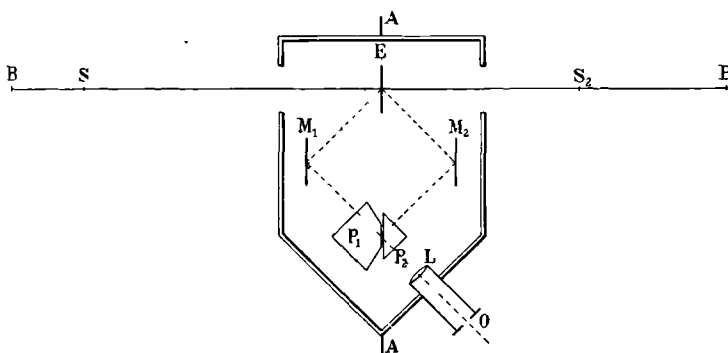


Fig. 93.

contact optique laisse passer, sans en réfléchir, la lumière qui vient de M_2 ; elle n'est éclairée que par M_1 et par la face correspondante de l'écran E.

Sur le reste du champ, la lumière issue de M_2 se réfléchit totalement; la lumière issue de M_1 est éliminée par réflexion : on ne reçoit que le faisceau envoyé par M_2 et par la face correspondante de l'écran E.

Si les deux parties du champ, dont la ligne de démarcation est parfaitement nette, sont également éclairées, on cesse de les distinguer. L'expérience consiste donc à déplacer les sources jusqu'à ce que le champ paraisse uniforme.

Comme il pourrait exister une petite différence entre les deux faces de l'écran E ou entre les absorptions dans les deux moitiés de l'appareil, on recommence l'expérience après avoir fait tourner celui-ci de 180° autour de l'axe AA normal au banc d'optique ; on prend la moyenne des résultats. On parvient ainsi à comparer les intensités de deux sources de même composition à 0,5 % près.

152. Éclairement des images. Premier cas : appareil photographique, œil. — Soit ϵ l'éclat moyen de l'objet dans la direction utilisée, σ sa surface; soit p la distance de l'objet à l'objectif, p' la

distance de l'image à l'objectif, σ la surface de l'image, f la distance focale principale de l'objectif, dont la surface utile (proportionnelle au carré de l'ouverture, dans le cas d'une pupille circulaire) est S .

Le flux lumineux est :

$$Q = \varepsilon \sigma \omega = \varepsilon \sigma \frac{S}{p^2}.$$

Cette formule n'est évidemment exacte que si les dimensions de σ et de S sont assez petites devant p et devant f .

Si l'objet est à une distance p de l'objectif suffisamment grande

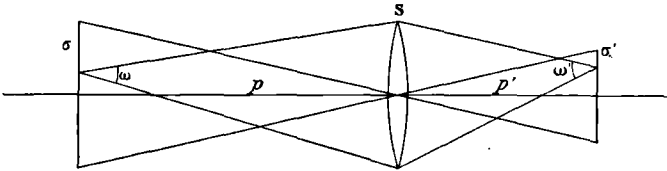


Fig. 94.

par rapport à f , on peut poser sans erreur sensible : $p' = f$. L'éclairement de l'image, c'est-à-dire le quotient du flux total par la surface, est donné par les formules :

$$\frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{p^2}{f^2}, \quad E = \frac{Q}{\sigma'} = \varepsilon \cdot \frac{S}{p^2} \frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{\varepsilon S}{f^2}. \quad (1)$$

L'éclairement est donc indépendant de la distance ; ce résultat paradoxal s'explique aisément, si l'on remarque que le flux Q est bien en raison inverse du carré de la distance de l'objet à l'objectif, mais que l'aire de l'image qui reçoit ce flux est aussi en raison inverse du carré de cette même distance.

APPAREILS PHOTOGRAPHIQUES. — La formule (1) est journallement utilisée en Photographie. En effet, l'action de la lumière sur le cliché ne dépend pas de l'obliquité des faisceaux lumineux, autant du moins qu'elle n'est pas très grande. Elle ne dépend que du flux total par unité de surface, c'est-à-dire précisément de l'éclairement tel que nous l'avons défini. Elle est donc proportionnelle au carré de l'ouverture de l'objectif et à l'éclat de l'objet dans la direction utilisée, ce qui est évident. Elle est en raison inverse du carré de la distance focale principale, autant du moins que l'objet photographié est suffisamment éloigné pour qu'on puisse poser : $p' = f$, ce qui est le cas général.

OEIL. — La théorie précédente s'applique sans modification à l'œil, si nous admettons que la sensation rétinienne est indépendante de la convergence des faisceaux qui aboutissent en chaque point. La distance focale f peut être considérée comme caractéristique de l'œil étudié. L'éclairement de la rétine est, toutes choses égales d'ailleurs, proportionnel au carré de l'ouverture de la pupille.

Il ne résulte pas de là que la *sensation* soit proportionnelle au carré de cette ouverture, parce qu'il n'y a généralement pas proportionnalité entre la sensation et l'excitation; mais dans une large mesure, tant qu'il n'y a pas éblouissement, la sensation varie dans le même sens que l'ouverture de la pupille.

Nous négligeons bien entendu l'absorption par le milieu interposé, absorption sur laquelle nous reviendrons. Il faut multiplier le flux, et par conséquent l'éclairement, par une certaine exponentielle.

153. Éclairement des images. Second cas : phares à éclairs et à feu fixe, projecteurs. — Reprenons les raisonnements précédents, mais supposons l'objet lumineux approximativement au foyer d'un appareil dioptrique ou catoptrique qui en donne une image très éloignée. C'est exactement ce qui se passe pour les phares à éclairs.

PHARES A ÉCLAIRS. — S représente la surface utile du projecteur. Les formules deviennent :

$$Q = \varepsilon\sigma\omega = \frac{\varepsilon\sigma S}{f^2}, \quad \frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{f^2}{p'^2}, \quad E = \frac{Q}{\sigma'} = \varepsilon S \frac{\sigma}{\sigma' f^2} = \frac{\varepsilon S}{p'^2}.$$

Supprimons le phare et remplaçons-le par une source nue d'intensité I; elle donnera à la distance p' un éclairement :

$$E = \frac{I}{p'^2}.$$

On peut dire par conséquent que l'effet du phare est identique à l'effet d'une source nue dont l'intensité horizontale est :

$$I = \varepsilon S.$$

Nous verrons plus loin (§ 166) que l'éclat du cratère du charbon positif de l'arc est de 15000 bougies décimales par centimètre carré, soit 750 fois plus grand que l'éclat du platine à son point de fusion. Utilisons un projecteur d'un mètre carré de surface (10^4 centimètres carrés), et soit 0,80 la fraction de lumière utilisée :

$$I = 15000 \times 0,8 \times 10^4 = 120 \text{ millions de bougies décimales.}$$

L'intensité est beaucoup moindre avec des lampes à huile pour lesquelles l'éclat est très inférieur. Un carcel a un éclat horizontal environ 400 fois plus petit que le cratère de l'arc. Le même projecteur éclairé par un carcel serait équivalent à un feu nu de 300000 bougies; l'angle solide éclairé serait, il est vrai, plus grand, la flamme étant plus étendue; mais l'éclairement au milieu du champ serait 400 fois plus petit.

PHARES A FEU FIXE. — Les phares à feu fixe possèdent un système dioptrique de révolution autour d'un axe vertical. Plaçons concentriquement un cylindre lumineux de rayon r et de hauteur h ; il se trouve automatiquement au foyer du système dioptrique et fournit à la grande distance p' une image cylindrique de hauteur h' .

Soit toujours S la surface utile de l'appareil dioptrique. On a des formules analogues aux précédentes :

$$Q = 2\pi r h \varepsilon \omega = 2\pi r h \varepsilon \frac{S}{f^2}, \quad \frac{h}{h'} = \frac{f}{p'}, \quad \sigma' = 2\pi p' \cdot \frac{h p'}{f},$$

$$E = \frac{Q}{\sigma'} = \frac{r}{f} \cdot \frac{\varepsilon S}{p'^2}, \quad I' = \frac{r}{f} \varepsilon S.$$

L'éclairement est identique à celui que produit à la même distance une source dont l'intensité horizontale est I'_0 ; cette intensité est notablement plus petite que l'intensité obtenue avec un feu à éclairs. A la vérité, la surface de l'appareil dioptrique est au moins quatre fois plus petite pour le feu à éclairs que pour le feu fixe; mais, à égalité d'éclat, la fraction $r : f$ est généralement très inférieure à $1 : 4$.

On comprendra mieux ce point quand nous décrirons le fonctionnement des deux espèces de phares (§ 172 et 173).

154. Application à la photométrie : emploi des lentilles pour graduer la lumière. — L'œil ne peut comparer deux éclairagements que si on les ramène à l'égalité (Cours de Première, § 184). C'est quelquefois difficile à obtenir en s'appuyant sur la loi de l'inverse du carré de la distance; on serait forcé de placer la source la plus faible trop près, ou la source la plus intense trop loin de l'écran. Dans le premier cas, tous les points de la source ne peuvent plus être approximativement considérés comme à égale distance de l'écran; dans le second, on peut être empêché par les dimensions de la salle où l'on opère.

On tourne la difficulté par l'emploi de lentilles de *dispersion*; les

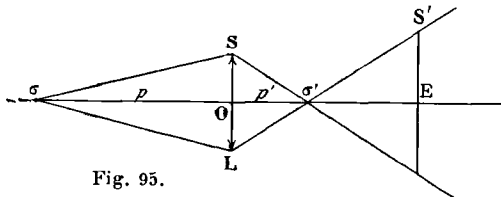


Fig. 95.

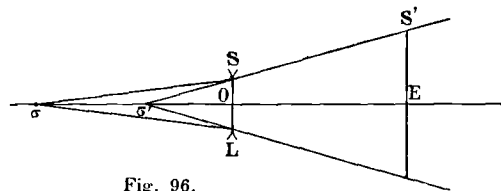


Fig. 96.

figures 95 et 96 montrent la disposition de l'expérience avec des lentilles convergentes et divergentes. La source σ donne une image réelle ou virtuelle en σ' ; on s'arrange de manière que la divergence des rayons émis par l'image soit plus grande que celle des rayons émis par la source. Calculons l'éclairement E sur l'écran placé à une

distance $\overline{OE} = R$ de la lentille. Soit S l'ouverture de la lentille, S' la surface correspondante de l'écran. On a :

$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{p'}{R + p'} \right)^2, \quad Q = \varepsilon \sigma \frac{S}{p^2}, \quad E = \frac{Q}{S'} = \frac{\varepsilon \sigma}{p^2} \left(\frac{p'}{R + p'} \right)^2.$$

p' étant pris en valeur absolue, le signe — convient à la lentille convergente, le signe + à la lentille divergente. On calcule p' connaissant la distance focale principale de la lentille et la distance p de la source à celle-ci.

155. **Éclat des images.** — Le problème est tout différent de celui que nous avons traité dans les paragraphes précédents : il ne s'agit plus d'évaluer le flux total reçu par l'unité de surface de l'image, mais le flux reçu ou émis par l'unité de surface de l'image dans des cônes d'inclinaison moyenne donnée.

Considérons un élément σ de l'objet et l'élément σ' correspondant de l'image. Les rayons qui émanent de $d\sigma$ forment un cône d'angle solide ω qui découpe dans le premier plan principal P une aire S ; on a : $\omega = S : p^2$, où p est la distance de l'objet au plan P. Les rayons qui dans l'espace objet sont dans le cône ω , forment dans l'espace image un cône d'angle ω' . Soit p' la distance de l'image au second plan principal P' ; on a, d'après les propriétés des plans principaux : $\omega' = S : p'^2$. D'où la relation :

$$\omega p^2 = \omega' p'^2.$$

Ceci posé, le flux Q est émis par l'objet dans l'angle solide ω ; d'où la relation :

$$Q = \sigma \varepsilon \omega.$$

Ce flux arrive sur l'image d'aire σ' dans l'angle ω' ; on peut dire qu'il émane ensuite de l'image dans ce même angle. *Tout se passe comme si l'image avait un éclat ε' défini par la relation :*

$$Q = \sigma' \varepsilon' \omega'.$$

D'où l'on tire :

$$\sigma \varepsilon \omega = \sigma' \varepsilon' \omega', \quad \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = \frac{\sigma \omega}{\sigma' \omega'} = \frac{\sigma}{\sigma'} \cdot \frac{p'^2}{p^2}.$$

Or nous savons, d'après la théorie générale des instruments d'optique, qu'en appelant f et f' les distances focales principales, n et n' les indices dans les milieux extrêmes (§ 12 et 24), on a :

$$\frac{\sigma}{\sigma'} = \left(\frac{p}{p'} \cdot \frac{f'}{f} \right)^2, \quad \frac{\sigma p'^2}{\sigma p^2} = \frac{f'^2}{f^2} = \frac{n'^2}{n^2}.$$

D'où enfin :

$$\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = \left(\frac{n'}{n} \right)^2.$$

Ainsi le rapport des éclats de l'image et de l'objet est indépendant du système optique employé et de l'ouverture utile. Il ne dépend que du rapport des indices des milieux extrêmes. En particulier quand les milieux extrêmes sont identiques (l'air dans le cas général) $\varepsilon = \varepsilon'$: les éclats sont les mêmes.

Le théorème précédent dérive immédiatement du théorème de Lagrange (§ 25), en remarquant que l'on a :

$$\left(\frac{O}{I}\right)^2 = \frac{\sigma}{\sigma'}, \quad \left(\frac{u}{u'}\right)^2 = \frac{\omega}{\omega'};$$

$$\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = \frac{\sigma\omega}{\sigma'\omega'} = \left(\frac{O}{I} \frac{u}{u'}\right)^2 = \left(\frac{n'}{n}\right)^2.$$

Ce résultat mérite d'être rapproché de ceux des paragraphes précédents. La quantité de lumière totale envoyée par l'aire σ sur l'aire conjuguée σ' , quantité qui mesure l'éclairement de l'image, est proportionnelle à l'aire de la pupille d'entrée (§ 152) ou, si l'on veut, à l'aire S découpée sur le plan P par le cône émis. Mais quand nous augmentons S , nous augmentons dans le même rapport ω et ω' ; nous n'augmentons donc pas la quantité de lumière contenue dans chaque cône élémentaire, ce en quoi consiste l'éclat de l'image; nous augmentons seulement le nombre des cônes qui contiennent de la lumière.

Nous allons préciser ces considérations en les reprenant sous une autre forme.

156. Vision directe et à travers un appareil d'optique. Premier cas : la pupille est entièrement couverte par le cône émis par l'élément d'objet ou d'image considéré.

Regardons successivement avec la même ouverture S de pupille un objet, puis son image à travers un instrument; négligeons les pertes par absorption et réflexion et supposons que le cône émis recouvre entièrement la pupille.

C'est précisément dans cette hypothèse que nous avons raisonné au § 152. L'éclairement de la rétine, duquel dépend la sensation

lumineuse, est :

$$E = \frac{\varepsilon S}{f^2}.$$

Il résulte d'abord de cette formule et nous savons déjà que, sans appareil, E est indépendant de la distance de l'objet à l'œil. D'après le paragraphe précédent, ε représente aussi bien l'éclat de l'objet que l'éclat de son image : E est donc encore le même si nous regardons l'image donnée par un appareil quelconque, dans l'hypothèse bien entendu où la pupille est encore complètement recouverte par les cônes émis par chacun des points de la portion d'image considérée.

LOUPE. — C'est précisément ce qui arrive pour la loupe. Pour simplifier, supposons l'œil au contact du verre. Soit p' la distance à laquelle il s'accommode, p la distance de l'objet au verre, S la surface utile de la pupille.

Sans loupe chaque point de l'objet (qui par hypothèse est alors à la distance p' de l'œil) émet un flux utile dans un cône d'angle solide $\omega = S : p'^2$. Quand on utilise la loupe, l'objet se trouve à une dis-

tance p du verre et, par hypothèse, de l'œil; chacun de ses points émet un flux *utile* dans un cône d'angle solide $\omega' = S; p^2$. Les flux sont donc dans le rapport $p'^2 : p^2$; les surfaces éclairées de la rétine sans la loupe ou avec la loupe sont dans le même rapport: donc l'éclairement de la rétine n'a pas changé. Ce raisonnement, nécessaire pour convaincre, était inutile en toute rigueur: il nous suffisait de remarquer que le cône émis par chaque point de l'image est toujours suffisant pour couvrir complètement la pupille, à la condition évidente que l'ouverture de la loupe soit supérieure à celle de la pupille.

Voici une conséquence importante de cette théorie: *les lunettes ne peuvent en aucun cas augmenter l'éclairement de la rétine dû aux objets terrestres, au Soleil, à la Lune, aux planètes, c'est-à-dire à tous les corps dont les dimensions sont finies*; en effet, ce qui peut arriver de mieux est que la pupille soit complètement recouverte par les cônes émis par chacun des points des images, et nous venons de voir que dans ce cas l'éclat apparent est le même que sans instrument.

Tant s'en faut d'ailleurs que cette circonstance *la plus favorable* soit toujours réalisée.

157. Vision avec un appareil d'optique. Second cas: la pupille n'est pas entièrement recouverte par le cône émis par l'élément d'image considéré. — Généralement un objet, lumineux par lui-même ou diffusant, émet de la lumière dans un angle solide notable; il n'en est pas de même pour les images. Le plus souvent l'éclat de celles-ci décroît très rapidement à partir d'une direction optima. Il peut donc arriver que le cône émis par l'élément d'image considéré ait un angle solide beaucoup trop petit pour recouvrir la pupille entière.

Il résulte de là que l'éclairement produit sur la rétine par l'image est plus petit que sans instrument. La pupille n'étant pas entièrement recouverte par les cônes lumineux qui subsistent, *tout se passe comme si elle était diaphragmée*. Il en est généralement ainsi pour le microscope et la lunette astronomique. Ces instruments fournissent sur la rétine une image de l'objet considérablement grossie, mais qui est beaucoup moins lumineuse que ne le serait l'image sur la rétine de l'objet vu directement.

On est donc conduit à augmenter par un éclairage spécial l'éclat de l'objet regardé au microscope. Ne pouvant augmenter l'éclat des astres, on augmente l'ouverture de l'objectif des lunettes: d'après ce que nous avons montré, *on n'augmente pas ainsi l'éclat* de l'image pour les cônes déjà éclairés quand l'objectif a une ouverture moindre; mais on augmente le nombre de cônes éclairés et par conséquent l'angle solide dans lequel l'image envoie de la lumière. Chacun des points de celle-ci émet un cône qui recouvre une portion de plus en

plus grande de pupille, à mesure que l'ouverture de l'objectif croît.

On appelle *anneau oculaire* l'image du trou circulaire couvert par l'objectif à travers l'appareil tout entier. Considérons cette surface comme pupille d'entrée, l'anneau oculaire est par définition la pupille de sortie. Quand il est réel, c'est évidemment là qu'il faut placer l'œil, pour recevoir le mieux possible les rayons émergents.

Nous négligeons dans ce qui précède les pertes de lumière par réflexion sur les surfaces et par absorption dans les milieux. Elles sont fort loin d'être insignifiantes. Elles peuvent atteindre 20 % dans un objectif photographique double.

158. Application à la photométrie : emploi d'un diaphragme percé d'une ouverture d'aire variable pour graduer la lumière.

— Pour graduer la lumière, on se sert parfois d'un diaphragme percé d'une ouverture d'aire variable et placé contre la lentille de projection. Les considérations précédentes permettent de discuter à quelle condition un pareil artifice est admissible.

Soit E l'écran diffusant servant de source lumineuse; la lentille L

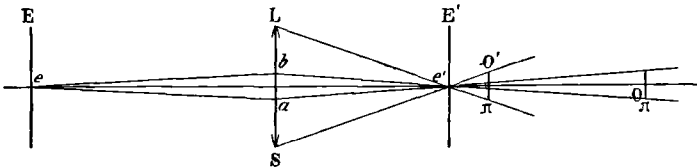


Fig. 97.

diaphragmée en donne une image E' . Regardons le point e' de l'image avec l'œil nu ; il faudra donc le placer assez loin, en O par exemple. Soit π la pupille.

Or la pupille est complètement couverte par le flux émis par le point e à travers la lentille et par conséquent par le flux émis par e' , dès que le diamètre du trou du diaphragme est supérieur à ab . L'accroissement de l'ouverture à partir de ce diamètre augmente bien l'angle solide du cône lumineux émis par e' , mais non pas le flux qui tombe sur l'œil et par conséquent l'éclairement de la rétine.

Pour que l'emploi du diaphragme soit légitime, il faut donc placer l'œil à une distance O' telle que l'angle solide sous lequel est vue la pupille du point e' soit au moins égal à l'angle solide sous lequel est vue du même point la plus grande ouverture de la lentille. Comme la distance $O'e'$ est petite, il faut observer l'image E' avec une loupe.

159. Définitions générales pour un système de radiations complexes.

— Nous supposons dans les pages précédentes qu'il s'agit d'un flux monochromatique ou d'un flux de composition invariable, c'est-à-dire dans lequel les énergies transportées par les diverses

radiations sont dans un rapport constant. Par exemple, le flux est composé de lumière blanche dont nous donnerons la définition au Chapitre III, § 203.

Il s'agit maintenant de généraliser nos définitions dans l'hypothèse que les spectres des sources sont continus, c'est-à-dire qu'il y a une infinité de radiations ne transportant chacune qu'une quantité infiniment petite d'énergie.

Nous définirons l'intensité et l'éclat intrinsèque pour la partie du faisceau dont les radiations sont comprises entre les longueurs d'onde λ et $\lambda + d\lambda$. Le flux correspondant émis dans l'angle solide $d\omega$ aura dès lors pour expression :

$$d^3Q = Id\lambda \cdot d\omega.$$

Le flux total, le seul que nous avons considéré jusqu'à présent, sera l'intégrale :

$$d^2Q = d\omega \int Id\lambda,$$

étendue à toutes les radiations utiles. Nous pouvons prendre conventionnellement comme limites 0 et ∞ , puisque I est identiquement nul pour les radiations qui n'existent pas.

Les quantités que nous avons appelées jusqu'à présent *intensité* I et *éclat* ϵ sont donc les intégrales :

$$\int_0^\infty Id\lambda, \quad \int_0^\infty \epsilon d\lambda,$$

pour les faisceaux de composition invariable considérés. Il n'est d'ailleurs pas nécessaire de récrire les formules ni d'introduire de nouvelles notations, toute ambiguïté étant impossible.

Émission.

160. **Émission suivant la loi de Lambert. Indicatrice d'émission.** — Jusqu'à présent nous n'avons fait aucune hypothèse particulière sur la loi de variation de l'intensité I ou de l'éclat intrinsèque ϵ , en fonction de l'angle que fait la normale à l'élément de surface lumineuse considéré, avec la direction moyenne du cône dans lequel se fait l'émission.

Nous avons même implicitement supposé dans la plupart des raisonnements précédents que I et ϵ sont constants, c'est-à-dire indépendants de la direction d'émission, à l'intérieur du petit cône utilisé.

Nous allons étudier une loi particulière, dite de Lambert.

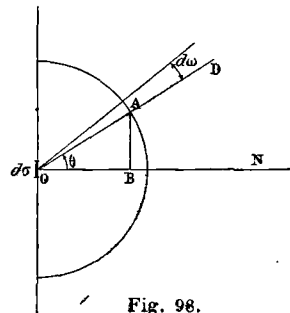


Fig. 96.

L'éclat pour la direction normale étant représenté par ε_0 , l'éclat dans une direction faisant avec la normale l'angle θ est $\varepsilon_0 \cos \theta$; ε_0 est une fonction de λ caractéristique du corps considéré.

Le flux dans le cône $d\omega$ et pour les radiations dont les longueurs d'onde sont comprises entre λ et $\lambda + d\lambda$ est :

$$dQ = I_0 d\lambda \cdot \cos \theta d\omega = \varepsilon_0 d\lambda \cdot \cos \theta d\omega d\sigma,$$

où ε_0 est l'éclat qui correspond à l'intensité I_0 et $d\sigma$ l'aire de l'élément qui émet.

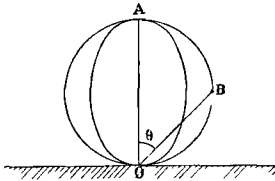


Fig. 99.

Construisons l'indicatrice d'émission, c'est-à-dire portons dans la direction OB, faisant un angle θ avec la normale OA, un rayon vecteur proportionnel à l'éclat $\varepsilon_0 \cos \theta$, ou si l'on veut à l'énergie émise dans cette direction par l'unité d'aire; le lieu des points B est une sphère de diamètre ε_0 tangente à la surface qui émet.

161. **Conséquences de la loi de Lambert.** — Calculons le flux envoyé par l'élément $d\sigma$ sur l'élément $d\sigma'$ situé à la distance r dans la direction θ et dont la normale fait avec OO' l'angle θ' . L'angle solide $d\omega$ sous lequel est vu l'élément $d\sigma'$ d'un point quelconque de l'élément $d\sigma$, et le flux dQ ont pour expressions :

$$d\omega = \frac{d\sigma' \cos \theta'}{r^2},$$

$$dQ = \varepsilon_0 d\lambda \cos \theta \frac{d\sigma' \cos \theta'}{r^2} d\sigma = \varepsilon_0 d\lambda \cdot \cos \theta \cos \theta' \frac{d\sigma d\sigma'}{r^2}.$$

Les éléments $d\sigma$, $d\sigma'$, et les angles θ , θ' , entrent symétriquement dans cette expression.

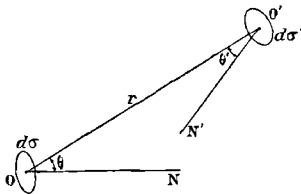


Fig. 100.

Soit $d\omega'$ l'angle solide sous lequel est vu l'élément $d\sigma$ d'un point quelconque de l'élément $d\sigma'$; on a les expressions symétriques :

$$dQ = \varepsilon_0 d\lambda \cos \theta d\omega d\sigma = \varepsilon_0 d\lambda \cos \theta' d\omega' d\sigma'.$$

Il résulte de la loi de Lambert des conséquences importantes.

Recevons sur un appareil d'ouverture σ' les radiations émanées d'un corps assez éloigné pour que tous les rayons tombent approximativement suivant la normale à la face σ' ; on a :

$$\cos \theta' = 1, \quad dQ = \varepsilon_0 d\lambda \cdot \omega' \sigma'.$$

La quantité d'énergie est proportionnelle à l'angle solide ω' sous lequel on voit le corps lumineux d'un point quelconque de la surface σ' ; la forme du corps et sa distance ont complètement disparu de l'ex-

pression de l'énergie. En particulier, une sphère qui émet comme le veut la loi de Lambert est vue comme un disque plat.

C'est ce que nous supposons implicitement pour le Soleil au § 194 du Cours de Première ; nous verrons plus loin que ce n'est pas absolument exact. L'angle ω' sous lequel nous voyons le Soleil est :

$$\omega' = \pi D^2 : 4d^2;$$

où D est son diamètre et d sa distance à la Terre. L'éclairement

$$\text{total est : } E = \int \frac{dQ}{\sigma'} = \omega' \int \varepsilon_0 d\lambda = \frac{\pi}{4} \left(\frac{D}{d} \right)^2 \int \varepsilon_0 d\lambda;$$

c'est la formule du § 194 du Cours de Première, puisque l'éclat dont il est alors parlé correspond à l'ensemble du spectre.

Une pile thermoélectrique de section droite σ' reçoit la même énergie d'un corps C (un cube rempli d'eau bouillante

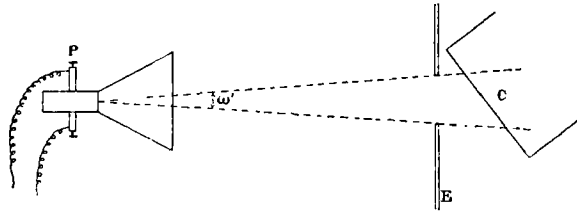


Fig. 101.

par exemple), quelles que soient la forme, la distance et l'orientation de celui-ci, pourvu qu'il soit toujours rencontré par le cône d'angle solide ω' dont les génératrices s'appuient sur les bords du trou percé dans l'écran E .

Bien entendu, on suppose que l'atmosphère n'est pas absorbante.

162. Pouvoir émissif. Son expression dans l'hypothèse de Lambert. — On appelle *pouvoir émissif*, la quantité totale d'énergie émise par l'unité d'aire de la source¹.

L'élément $d\sigma$ émet dans un angle solide total 2π que nous pouvons décomposer en éléments $d\omega$.

Par définition, le *pouvoir émissif pour les radiations comprises entre λ et $\lambda + d\lambda$* est : $s d\lambda = d\lambda \int \varepsilon d\omega$,

l'intégrale étant étendue à l'angle solide 2π .

Le pouvoir émissif total est :

$$S = \int_0^{\infty} s d\lambda.$$

¹ Au § 190 du Cours de Mathématiques, on trouve une définition différente du *pouvoir émissif* qui est pris, comme le faisait Kirchhoff lui-même, dans un sens voisin de celui d'*éclat*. Dans l'Enseignement Secondaire, où la question ne vient qu'incidemment, il est difficile d'être précis. Mais le sens le plus naturel et le plus avantageux pour la démonstration est celui que donne le texte qu'on a sous les yeux.

Il n'y a d'ailleurs pas contradiction : c'est une affaire de *définition de mot*.

Calculons s dans le cas de la loi de Lambert en fonction de l'éclat ε_0 dans la direction normale. De l'élément O comme centre (fig. 98) menons une sphère de rayon 1. L'angle solide compris entre deux cônes d'axe ON et d'angles au sommet θ et $\theta + d\theta$ est :

$$2\pi \overline{AB} \cdot d\theta = 2\pi \sin \theta d\theta.$$

$$s = \varepsilon_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi \cos \theta \sin \theta d\theta = \pi \varepsilon_0, \quad S = \pi \int_0^{\infty} \varepsilon_0 d\lambda.$$

Quand la loi de Lambert s'applique, on peut donc utiliser s au lieu de ε_0 . Ainsi le flux émis par la surface $d\sigma$ dans le cône d'angle solide $d\omega$ et dont la direction moyenne fait avec la normale l'angle θ ,

est :

$$\frac{s}{\pi} \cos \theta d\omega d\lambda d\sigma.$$

Dans les mêmes conditions, le flux total pour l'ensemble des radiations est :

$$\frac{S}{\pi} \cos \theta d\omega d\sigma.$$

163. Émission des corps lumineux par eux-mêmes. — La loi de Lambert s'applique aux corps mats, non polis, lumineux par eux-mêmes, en particulier aux corps *parfaitement noirs* ; nous avons déjà expliqué (Cours de Mathématiques, § 190) qu'un corps noir est le plus lumineux de tous les corps à la température de l'expérience, pourvu qu'on prenne le mot lumière dans le sens général de radiation. *L'indicatrice d'émission* est alors une sphère.

La loi de Lambert n'est pourtant pas générale. Par exemple, le Soleil n'apparaît pas comme un disque plat ; il est plus éclatant au centre qu'aux bords. L'éclat pour un angle θ avec la normale à la surface d'émission peut être représenté par une expression de la forme $\varepsilon_0 \cos^n \theta$, où ε_0 est l'éclat suivant la normale et n un paramètre supérieur à l'unité ; l'indicatrice d'émission est une sorte d'ovale.

L'expérience décrite au § 161 (fig. 101) permet des vérifications précises pour les radiations calorifiques à la température ordinaire. Généralement la *quantité d'énergie reçue par la pile, au lieu de rester constante, diminue quand l'inclinaison θ augmente*. Pour la cêruse par exemple, elle passe de 100 pour $\theta = 0$, à 84 pour $\theta = 70^\circ$, à 66 pour $\theta = 80^\circ$. L'émission peut être représentée par l'expression $\varepsilon_0 \cos^n \theta$; le pouvoir émissif est :

$$s = \varepsilon_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi \cos^n \theta \sin \theta d\theta = \frac{2\pi \varepsilon_0}{n+1}.$$

Pour le noir de fumée, la loi de Lambert s'applique très exactement.

164. Émission par diffusion (réflexion ou transmission). —

Les corps diffusants ne sont pas lumineux par eux-mêmes; ils n'émettent que lorsqu'ils reçoivent un faisceau lumineux. Les lois étant les mêmes pour la diffusion par réflexion et la diffusion par transmission, nous ne séparerons pas les deux cas.

Voici comment se pose le problème.

Soit ABC le plan diffusant, NON' la normale. On envoie dans la direction IO (diffusion par réflexion), ou I'O (diffusion par transmission) un faisceau de rayons

parallèles faisant avec la normale l'angle i . Prenons comme plan de référence le plan d'incidence; observons dans la direction OD définie par l'angle α du plan NOD avec le plan d'incidence, et par l'angle θ avec la normale. L'é-

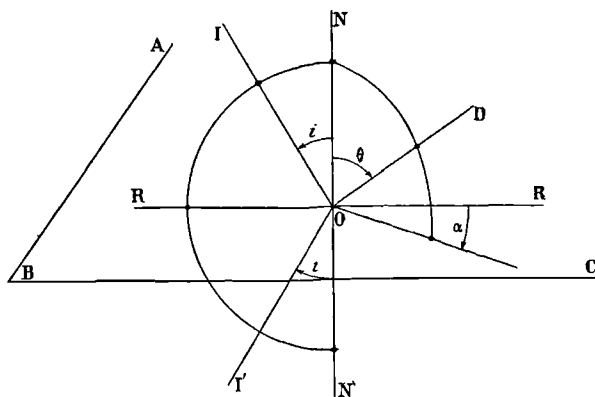


Fig. 102.

clat dans la direction OD est une certaine fonction : $\varepsilon = If(i, \alpha, \theta)$; par raison de symétrie, elle ne change pas quand on change le signe de α ; on peut admettre que l'éclat diffusé est proportionnel à l'intensité I du faisceau incident. Il existe généralement deux fonctions différentes f , l'une pour la réflexion, l'autre pour la transmission.

DIFFUSEURS ORTHOTROPES. — Dans un cas particulier très remarquable, le seul que nous étudierons, la fonction f est indépendante de l'angle d'incidence i . Comme, par raison évidente de symétrie, elle est toujours indépendante de l'azimut α quand l'incidence est normale, elle doit être simultanément indépendante de i et de α . Dans le cas particulier qui nous occupe, l'indicatrice d'émission est donc de révolution autour de la normale; son rayon vecteur ε est représenté par une simple fonction de θ , $\varepsilon = If(\theta)$.

On dit alors que le diffuseur est *orthotrope* : ce sont les véritables diffuseurs.

Parmi les diffuseurs orthotropes, les uns obéissent à la loi de Lambert : $\varepsilon = I\varepsilon_0 \cos \theta$.

D'une manière générale, l'expérience montre que l'indicatrice d'émission est représentée très approximativement par l'équation : $\varepsilon = I\varepsilon_0 \cos^n \theta$, où n est compris entre 1 et 2.

Quelle que soit la matière employée, il faut toujours que l'épais-

seur de la couche diffusante soit assez grande pour que le diffuseur soit orthotrope. Par exemple, le verre opale est un diffuseur orthotrope par transmission quand l'épaisseur est supérieure à 2 millimètres; pour des épaisseurs moindres, l'influence de l'incidence du faisceau éclaireur intervient.

De même une couche de céruse diffusant de la lumière par réflexion obéit à la loi de Lambert sous une épaisseur de $0^{\text{mm}},4$; elle n'y obéit plus sous une épaisseur moindre. Cela prouve que les couches profondes interviennent dans le phénomène par réflexion. L'épaisseur limite à partir de laquelle les diffuseurs deviennent orthotropes, diminue à mesure que les corps sont plus opaques.

On peut citer comme diffuseurs orthotropes dont l'indicatrice s'éloigne peu des cercles :

par transmission : le verre dépoli, les verres opales, le papier ordinaire,...

par réflexion : le marbre mat, le biscuit de porcelaine, l'émail dépoli, la céruse,...

165. Intensité moyenne sphérique d'une source de révolution autour d'un axe. Application à l'arc électrique. — La détermination de l'intensité moyenne sphérique revient à déterminer le flux total (§ 150).

Considérons une sphère de rayon R au centre de laquelle se trouve la source étudiée.

Décomposons-la en petites aires S_1, S_2, \dots telles que l'éclairement soit peu différent en tous les points de chacune d'elles : déterminons ces éclairements E_1, E_2, \dots . Le flux total Q reçu par la sphère, l'éclairement moyen E et l'intensité moyenne sphérique I_s de la source sont (Cours de Première, § 190 et 191) :

$$Q = \sum ES, \quad E = \frac{Q}{\sum S} = \frac{\sum ES}{4\pi R^2}, \quad I_s = \frac{Q}{4\pi} = \frac{\sum ES}{4\pi} = ER^2.$$

Cette expérience est généralement impraticable; considérons seulement le cas où la source est de révolution autour d'un axe, où par exemple il s'agit d'un arc électrique bien réglé. Les charbons sont supposés verticaux, le positif en haut, de manière que la lumière émise soit plus intense vers le bas. Déterminons la courbe des intensités dans un plan vertical, en fonction de l'angle θ avec la verticale; portons dans la direction correspondante Oa un vecteur \overline{OA} proportionnel à l'intensité. *L'indicatrice d'émission* est la surface de révolution dont la courbe $OABCD$ est la méridienne. Il s'agit maintenant de calculer l'intensité moyenne sphérique.

L'intensité \overline{OA} est constante dans l'angle solide compris entre les deux cônes circulaires qui ont OV comme axe, θ et $\theta + d\theta$ comme angles

au sommet. Cet angle solide valant $2\pi \sin \theta d\theta$, le flux envoyé est :

$$2\pi I \sin \theta \cdot d\theta = -2\pi I \cdot d \cos \theta.$$

Traçons donc une courbe $O'A'B'C'D'O''$ telle que :

- 1° ses abscisses $\overline{O'A} = x$ soient proportionnelles à $1 - \cos \theta$;
- 2° ses ordonnées $\overline{\alpha A'} = y$ soient proportionnelles au vecteur \overline{OA} qui correspond à θ .

L'aire $\alpha A'B'\beta$ est, à un facteur constant près :

$$\int_{x_1}^{x_2} y dx = \int_{\theta_1}^{\theta_2} I \sin \theta d\theta ;$$

elle représente donc le flux envoyé dans l'angle solide compris entre les deux cônes d'angles au sommet θ_1 et θ_2 . Le flux total, et par conséquent l'intensité moyenne sphérique, sont donc représentés à un facteur constant près par l'aire comprise entre la courbe $O'A'B'C'D'O''$ et la droite $O'O''$.

Il ne faut pas exagérer le rôle de l'intensité moyenne sphérique : sauf quand il s'agit de déterminer le rendement de la source, c'est-à-dire le quotient du flux lumineux total par le travail dépensé, les éléments les plus importants d'une lampe à arc sont l'intensité maxima I_m et l'intensité horizontale I_h . L'expérience montre d'ailleurs qu'avec une approximation très suffisante pour les besoins de la pratique, on a :

$$I_h = 0,20 I_m, \quad I_s = 0,35 I_m.$$

En fonction du courant continu en ampères, l'intensité maxima en bougies décimales est :

$$I_m = 200 i + 4 i^2.$$

Ces formules donnent :

	I_m	I_h	I_s
10 ampères	2 400	480	840
20 »	5 600	1 120	1 960
30 »	9 600	1 920	3 360.

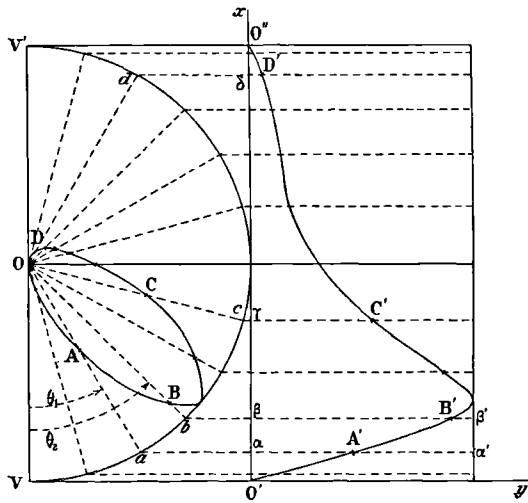


Fig. 103.

Dans les projecteurs horizontaux (lanterne de projection, ...), l'arc doit être incliné de manière à utiliser l'intensité maxima.

166. Données numériques. Intensité et éclat des principales sources.

VIOLLE. — L'étalon pour toutes les grandeurs photométriques est le *violle* : la source est constituée par un centimètre carré de la surface d'un bain de platine liquide à sa température de fusion (1775°), émettant dans la direction normale (Cours de Première, § 193). On obtient ainsi l'unité d'intensité et, puisque la surface est d'un centimètre carré, l'unité d'éclat.

Cet étalon parfait en théorie est d'un emploi minutieux. Outre qu'il faut posséder une masse suffisante de platine (quelques centaines de grammes), il faut que le métal soit parfaitement pur, que le creuset qui le contient soit en chaux pure, qu'on emploie pour le chauffage de l'hydrogène ne contenant pas d'hydrocarbures; enfin que les gaz oxygène et hydrogène soient dans la proportion de 4 volumes d'hydrogène pour 3 volumes d'oxygène.

BOUGIE DÉCIMALE. — On appelle *bougie décimale* le vingtième du violle. Il est important de remarquer que la *bougie décimale* est une unité de compte. Les bougies ordinaires ont bien une intensité voisine du vingtième de violle (0,06 environ); mais comme leur surface est environ de trois centimètres carrés, leur éclat est beaucoup moindre que le vingtième de l'éclat du platine à son point de fusion; l'éclat moyen horizontal d'une bougie réelle n'est guère que de 0,02, soit $1/50$ de violle.

ARC. — Les expériences les plus précises prouvent que l'éclat du charbon positif de l'arc est constant; quand on modifie l'ampérage, on modifie seulement l'aire du cratère, d'où la variation de l'intensité étudiée au paragraphe précédent. Pour expliquer la constance de l'éclat, on peut admettre que la température constante et voisine de 4000° du charbon positif est celle de la sublimation du carbone. L'éclat est environ de 15 000 bougies décimales, soit 750 violles par centimètre carré. On a cherché à faire du cratère positif un étalon secondaire; mais la mobilité de la région brillante quand l'arc siffle, et même quand il est silencieux, a jusqu'à présent fait échouer les tentatives.

CARCEL. — Le véritable étalon secondaire est le *carcel*, alimenté à l'huile de colza dans des conditions particulières. Son intensité est 0,48 violle; son aire apparente étant voisine de $5\text{cm}^2,25$, l'éclat moyen est $0,48 : 5,25 = 0,091$, soit environ 0,1 de l'éclat du platine à son point de fusion. Son éclat intrinsèque est donc $0,091 \times 20 = 1,82$ bougies décimales.

LAMPES A HUILE MINÉRALE. — Leur éclat est faible; comme c'est lui qui intervient dans la puissance des appareils de projection (§ 171),

dans les phares par exemple, on a cherché à l'augmenter en multipliant le nombre des mèches concentriques. L'expérience prouve que la flamme est transparente; la lumière ne vient pas seulement des parties superficielles; il y a donc avantage à augmenter son épaisseur par l'emploi de deux à cinq mèches concentriques. Mais cette transparence est loin d'être parfaite; l'avantage qu'on retire des mèches multiples ne croît pas proportionnellement au nombre des mèches. Toutefois, outre l'accroissement d'épaisseur, il résulte d'un plus grand volume de flamme une élévation de la température, et corrélativement une augmentation de l'émission de lumière visible (§ 193).

Ainsi le carcel, dont la surface est $5^{\text{cm}^2},25$, possède un éclat moyen horizontal égal à $1 : 5,25 = 0,19$ carcel par centimètre carré; l'éclat d'une lampe à pétrole à une mèche est du même ordre (0,20 carcel par centimètre carré environ); l'éclat d'une lampe à cinq mèches est 0,50, c'est-à-dire seulement 2,5 fois plus grand.

On s'explique de même, par la transparence imparfaite de la flamme, qu'une lampe à mèche plate (Cours de Première, § 192) ait une intensité horizontale plus grande quand on l'observe normalement à la mèche que quand elle est vue de champ; mais elle possède un éclat horizontal plus grand dans le second cas.

LAMPE HEFNER. — C'est l'étalon secondaire pratique. Cette lampe sans cheminée brûle de l'acétate d'amyle avec une flamme de 4 centimètres de hauteur et de $0^{\text{cm}},8$ de diamètre; la mèche est pleine et en coton tressé. L'intensité horizontale est voisine d'une bougie décimale.

SOLEIL. — Les estimations sont divergentes, à cause de la manière de tenir compte de l'absorption atmosphérique; suivant les auteurs, l'éclairement dû au soleil varie de 60 000 à 80 000 bougies à un mètre. Le cône sous lequel est vu le soleil, découpant $0^{\text{cm}^2},68$ sur la sphère d'un mètre de rayon, l'éclat du soleil est donc estimé entre :

$$\frac{60000}{0,68} = 88000 \quad \text{et} \quad \frac{80000}{0,68} = 118000 \quad \text{bougies par centimètre carré.}$$

En unités absolues (violles par centimètre carré), les nombres sont 20 fois moins grands, soit :

$$4400 \quad \text{et} \quad 5900 \quad \text{violles par centimètre carré.}$$

Éclairage des objets vus à travers un instrument.

Lorsque les objets sont lumineux par eux-mêmes, les images sont naturellement éclairées. Lorsque les objets ne sont pas lumineux par eux-mêmes, et qu'on doit les regarder à travers un instrument d'optique, il faut les éclairer. Les considérations suivantes facilitent sin-

gulièrement la solution des problèmes particuliers : elles sont dues principalement à Helmholtz, qui les a développées à propos de la théorie de l'*ophthalmoscope*, appareil dont nous dirons quelques mots.

167. Éclairage d'une échelle transparente. — Soit à éclairer une échelle transparente E dont l'image doit être réfléchiée par un très petit miroir M : le problème se présente dans l'application de la méthode de Poggendorff.

Si l'on place derrière l'échelle une source S, seuls les points de l'échelle situés entre la source et le miroir sont éclairés. Il faut, ou bien remplacer la source S par une rampe lumineuse étendue dans

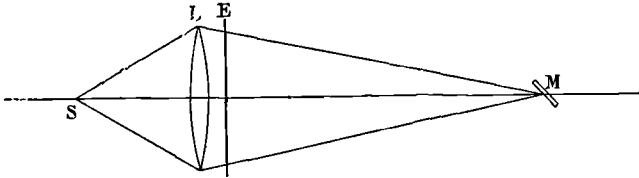


Fig. 104.

le sens de l'échelle, ou bien placer derrière l'échelle une substance diffusante (papier à calquer, porcelaine,...), ou enfin, ce qui est préférable, associer les deux solutions.

On peut encore placer derrière l'échelle une lentille de grandes dimensions, mais qui peut être optiquement assez imparfaite. On dispose la source, *qui peut être ponctuelle*, au foyer conjugué du miroir par rapport à la lentille. Tous les points de l'échelle sont éclairés et d'une manière très sensiblement uniforme.

168. Éclairage d'un objet à travers l'instrument même qui sert à l'observer. — *Pour que l'objet paraisse lumineux, il faut que les images, sur cet objet, de la rétine de l'œil de l'observateur et de la source lumineuse coïncident au moins en partie.* L'image de la rétine doit évidemment être nette sur l'objet ; il n'est pas nécessaire au contraire que l'image de la source le soit. Quand cette dernière condition est remplie, on dit que l'objet est observé dans la source.

L'objet diffusant par hypothèse, la condition précédente est suffisante. La proposition précédente explique une série de phénomènes vulgaires.

L'objectif d'une chambre photographique paraît noir, lorsqu'il n'existe qu'une source lumineuse dans la pièce dans laquelle il se trouve, et qu'il en donne une image nette, l'image de la source se ferait-elle sur du papier blanc. En effet, l'image de la source émet bien de la lumière par diffusion ; mais, en vertu du principe du retour des rayons, cette lumière vient précisément passer par la

source qui l'a émise. Pour que l'œil en reçoive une partie, et par conséquent que l'objectif paraisse éclairé, il faudrait donc placer l'œil entre l'objectif et la source; ce qui est impossible sans intercepter la lumière, si l'on n'emploie pas de procédés spéciaux.

Pour voir l'objectif éclairé, il faut que l'image sur le papier ne soit pas nette; autrement dit, que l'écran sur lequel se forme l'image ne soit pas *au point*. Cet écran joue le rôle d'objet lumineux, mais les rayons émis ne viennent plus nécessairement passer par la source.

Naturellement il est d'autant moins nécessaire de s'écarter de la mise au point parfaite, que l'œil de l'observateur et la source sont plus près d'être dans la même direction par rapport à l'objectif; autrement dit, que les rayons incidents sont plus près de raser la tête de l'observateur.

169. Lueur oculaire. — A la question précédente se rattache le problème de la *lueur oculaire*. On sait que les chats, les chiens, les tigres, ... paraissent avoir des yeux lumineux dans l'obscurité. L'expérience montre que le phénomène ne se produit *jamaï*s dans une obscurité complète; il est toujours dû à la réflexion d'une lumière extérieure sur le fond *très réfléchissant* de l'œil de ces animaux. Il faut, d'après le paragraphe précédent, que les rayons émis par la source lumineuse rasant la tête de l'observateur. La lueur apparaît même dans les yeux d'animaux morts.

La pupille est éclairée si les enveloppes latérales de l'œil laissent passer la lumière; c'est le cas des albinos, chez qui la pupille est rouge vif.

170. Vision du fond de l'œil; ophtalmoscopes. — Pour qu'un observateur A voie distinctement la rétine de l'œil B, il faut que les deux rétines soient accommodées l'une sur l'autre à travers les deux systèmes optiques formés par les yeux. Il faut, par exemple, qu'elles soient l'une et l'autre accommodées pour l'infini.

Imaginons que l'œil B regarde dans un plan situé à 30 ou 40 centimètres; l'image de la rétine B s'y forme considérablement grandie. Si l'œil A regarde dans ce plan, il ne verra donc simultanément qu'une portion infime de la rétine de l'œil B, puisque le champ est limité par la pupille de cet œil.

Dans la pratique, voici comment on dispose l'expérience.

PRODUCTION D'UNE IMAGE VIRTUELLE ET DROITE DE LA RÉTINE. — On place devant l'œil B un verre divergent qui, associé au système optique de l'œil B, forme une sorte de loupe à travers laquelle l'œil A regarde la rétine de l'œil B. Le verre doit être assez divergent pour reporter le foyer du système complexe notablement au delà de la rétine; il donne donc une image virtuelle et droite.

L'éclairage peut se faire par une glace à 45° interposée quelque part avant ou après le verre divergent.

PRODUCTION D'UNE IMAGE RÉELLE ET RENVERSÉE. — On place devant l'œil B un verre convergent; l'image de la rétine se fait donc réellement en avant de ce verre. L'observateur la regarde soit directement, soit avec une loupe.

La lentille convergente diminue les dimensions de l'image et augmente le champ. Celui-ci est encore limité par la pupille de l'œil observé B si le verre est voisin de cet œil; mais quand on éloigne la lentille, le champ augmente. Si la lentille est placée de telle sorte que son foyer soit sur la pupille de l'œil B, le champ est limité par l'ouverture de la lentille et non plus par celle de la pupille.

Phares et projecteurs.

171. Rôle des phares et des projecteurs. — Le navigateur veut, au moyen des phares, reconnaître à grande distance la côte au voisinage de laquelle il se trouve; au moyen des fanaux et feux de port, il veut à moindre distance repérer sa direction par des alignements. On se propose, dans les deux cas, de répartir convenablement la lumière. Les projecteurs servent à envoyer dans une direction donnée un faisceau intense; ils sont utilisés, par exemple, dans la télégraphie optique.

Les feux devant toujours être vus à grande distance par rapport à leur élévation au-dessus du sol ou de la mer, l'observateur se trouve sensiblement dans le plan horizontal passant par le feu : le flux lumineux doit par conséquent être concentré au voisinage du plan horizontal.

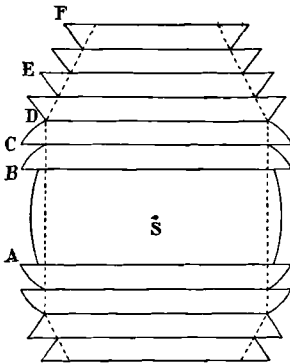


Fig. 105.

172. Feux fixes, fanaux de port. — On peut d'abord se proposer d'éclairer uniformément tout le plan horizontal. On a ce qu'on appelle *des feux fixes* et *des fanaux de port*. Le système catadioptrique est nécessairement de révolution. Il serait impossible de l'obtenir d'un seul morceau; il est donc fait de secteurs groupés de manière à former un certain nombre de tores de profils convenables. La figure 105 donne une coupe d'un feu de port.

Le système dioptrique se compose :

1° d'une sorte de lentille convexe de révolution AB embrassant une zone assez petite pour que les rayons issus du point

S sortent à peu près sans aberrations dans le plan horizontal;

2^o d'échelons prismatiques de révolution BCD rabattant par réfraction les rayons dans le plan horizontal : ce sont des fragments de lentilles convergentes de révolution, admettant encore S comme foyer et le plan horizontal comme lieu des axes optiques principaux ;

3^o d'échelons analogues DEF, mais produisant le même effet par réflexion totale.

Les échelons, de même que la lentille équatoriale, sont formés de secteurs fondus et travaillés à part, puis solidement assujettis. On conçoit que leurs profils soient séparément étudiés de manière à ramener les rayons issus du point S dans le plan horizontal.

Pour montrer la marche des rayons, on a représenté (fig. 106) une

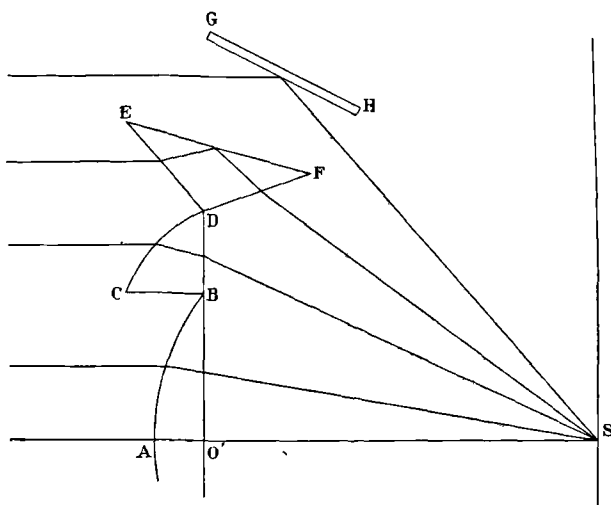


Fig. 106.

coupe de l'appareil en ne conservant qu'un élément de chaque espèce. Dans les anciens phares, on trouvait aussi des miroirs GH ramenant sur l'horizon les rayons peu inclinés sur la verticale.

La source lumineuse ne se réduit pas à un point; on doit la considérer comme un cylindre de rayon r et de hauteur h . On obtient ainsi à une distance suffisante une image cylindrique dont nous avons calculé l'éclairement au § 153.

Pour fixer les idées sur les ordres de grandeur, soit un tambour de 0^m,60 de rayon et d'un mètre de hauteur; sa surface $S = 37700$ centimètres carrés. Utilisons une lampe à 5 mèches dont le rayon $r = 6$ centimètres environ; l'éclat de la surface est de 5 bougies par centimètre carré (§ 166). L'appareil donne à distance le même éclairement qu'une source (§ 153) d'intensité :

$$I' = \frac{r}{f} \varepsilon S = \frac{6}{60} \cdot 5 \cdot 37\,700 = 18850 \text{ bougies.}$$

Comme nous ne faisons qu'un calcul approché, nous ne tenons pas compte de la lumière perdue par réflexion sur les lentilles et absorption à travers elles, lumière qui peut atteindre 20 % de la quantité reçue.

Les feux de port sont souvent colorés; la cheminée de la lampe à pétrole est en verre rouge ou vert. On perd 30 % environ de la lumière, si le verre est rouge; davantage, s'il est vert. L'inconvénient est petit, les feux ne servant qu'à faible distance.

173. Feux éclairs, phares à longue portée. Projecteurs pour télégraphie optique. — Le feu fixe satisfait très incomplètement aux deux conditions : d'être visible à grande distance, d'être facilement distingué d'un autre feu. Aussi les phares à longue portée sont-ils construits sur un principe différent.

Ce sont *en théorie des lentilles de projection*, mais qui, vu leurs dimensions, sont formées de morceaux travaillés séparément. Le système optique se compose d'une lentille centrale, d'échelons agissant par réfraction et d'échelons agissant par réflexion totale. Mais il n'est plus de révolution autour d'un axe vertical; il est comparable à une lentille ordinaire, il admet un axe optique unique horizontal autour duquel il est sensiblement de révolution.

Le cône des rayons émis par un point situé au foyer est transformé en un cylindre horizontal dont les génératrices sont parallèles à l'axe optique du système.

Quatre ou six systèmes optiques sont généralement groupés en panneaux verticaux à égale distance de la source; si la source était ponctuelle, elle fournirait quatre ou six cylindres horizontaux de lumière.

Tout l'horizon n'est donc pas simultanément éclairé, même quand la source a des dimensions notables. Pour fixer les idées, employons une lampe à 5 becs (dont la surface apparente est une bande verticale d'environ 12 centimètres de largeur) et un panneau projecteur de 60 centimètres de distance focale. L'image de la flamme sur l'horizon occupe un angle de 0,2 radian environ, soit 12°.

Calculons l'éclairement de cette image; il est le même que l'éclairement donné à la même distance par une source dont l'intensité horizontale vaut εS (§ 153). Soit $S =$ un mètre carré, $\varepsilon = 5$ bougies par centimètre carré; $\varepsilon S = 50000$ bougies. Dans les mêmes conditions, la puissance de l'appareil est donc notablement supérieure à la puissance d'un feu fixe de dimensions analogues.

Mais l'horizon n'est pas éclairé en totalité; on supprime cet inconvénient par un artifice qui le transforme en un avantage. Faisons tourner le système des projecteurs dioptriques d'un mouvement uniforme autour d'un axe vertical, avec la vitesse d'un tour en 10 ou 20 secondes : nous obtenons des éclairs répartis dans le temps d'une

manière qui dépend de la répartition des projecteurs autour de l'axe de rotation. La loi de distribution des éclairs permettra de reconnaître le feu : on ne perdra rien en portée, pourvu que leur durée soit de l'ordre d'un dixième de seconde, l'expérience prouvant qu'ils produisent alors sur la rétine un effet qui n'est pas augmenté par une durée plus grande.

Si le tambour tourne en 20 secondes, l'éclair a une durée de $(20^{\circ} \times 12) : 360 = 0,66$, dans l'hypothèse précédente où le faisceau occupe 12° sur l'horizon. Mais quand on emploie l'arc électrique, le diamètre horizontal de la source est compris entre 1 et 2 centimètres : la durée de l'éclair est comprise entre un demi-dixième et un dixième de seconde.

Pour produire une rotation relativement rapide du tambour optique dont le poids peut atteindre plusieurs tonnes, on le supporte par un axe qui repose sur une crapaudine.

Pour soulager cet axe et diminuer les frottements, le tambour flotte sur une cuve à mercure. En faisant la base du flotteur presque identique à la cuve à mercure, on peut réduire le volume du liquide à un petit nombre de litres. L'énergie est fournie par la chute d'un poids; le mouvement est régularisé par un volant à ailettes.

On s'arrange de manière que les éclairs se fassent à intervalles égaux; ou bien on les groupe en séries de 2 ou 3 très rapprochés, les séries étant séparées par des intervalles plus longs, etc...; les combinaisons sont très variées. Comme sur les côtes fréquentées le navigateur aperçoit au moins deux phares à la fois, le nombre des combinaisons n'a pas besoin d'être très grand.

On peut présenter sur les projecteurs catoptriques des considérations analogues; généralement ils sont fixes, la direction dans laquelle on veut envoyer le faisceau restant invariable. Ils sont constitués par des miroirs paraboliques, utilisant les rayons émis par la source dans un angle solide correspondant à un angle plan de près de 120° de part et d'autre de l'axe optique.

Au miroir sont parfois jointes des lentilles; les projecteurs sont catadioptriques. Les fanaux des voitures automobiles donnent une idée très complète de leur construction.

174. Portée géographique des phares. — Quelle que soit l'intensité lumineuse, la portée d'un phare est limitée par la rotondité de la Terre. Soit D la distance à laquelle le rayon touche la sphère terrestre, H la hauteur du point lumineux au-dessus de la mer, R le rayon terrestre; on a très sensiblement : $D = \sqrt{2RH}$, où D , R et H sont évalués avec les mêmes unités. Dans la pratique, on compte D en milles marins (1852 mètres, valeur à la surface de la Terre de la minute d'angle au centre), H en mètres. Substituant la valeur de R , on trouve la formule approchée, $D = 1,93 \sqrt{H}$. Ainsi la portée théo-

rique maxima d'un phare dont la lanterne est à 100 mètres au-dessus du niveau de la mer est 19,3 milles marins. La formule précédente n'est qu'approchée, parce qu'il faudrait tenir compte de la réfraction atmosphérique; mais elle est pratiquement très suffisante. Pour connaître la distance à laquelle un phare peut être vu d'un observateur placé à une hauteur H' au-dessus du niveau de la mer, il faut ajouter $1,93 \sqrt{H'}$ à la hauteur précédemment calculée.

175. Portée optique des phares. — Nous avons défini (§ 186 du Cours de Mathématiques) l'*absorption* par un milieu qui n'est pas absolument transparent, au moyen d'un nombre m qu'on appelle *coefficient de transparence*. Soit I l'intensité d'une source; à une distance x , elle produit un éclaircissement :

$$E = \frac{Im^x}{x^2}.$$

Si le milieu est absolument transparent, $m = 1$; s'il est absolument opaque, $m = 0$. Par les temps les plus clairs, m diffère peu de 1 : en prenant pour unité le kilomètre, on trouve par exemple $m = 0,98$. Mais tant s'en faut qu'il en soit moyennement ainsi au-dessus de la mer. Par exemple, au-dessus de la Manche, m vaut ordinairement 0,9.

D'autre part, pour que le feu soit visible, il ne faut pas que l'éclaircissement sur la pupille tombe au-dessous d'une limite qu'on peut évaluer, pour de bons yeux, à un dixième de bougie kilomètre, soit à l'éclaircissement fourni par une bougie placée à 3300 mètres dans une atmosphère parfaitement transparente.

Comparons, pour diverses valeurs de m , les portées optiques x_1 et x_2 de deux phares dont les intensités sont 60 000 et 1 200 000 bougies. Pour $m = 1$ on obtient des portées optiques très supérieures aux portées géographiques, le calcul n'a pas d'intérêt.

Pour $m = 0,9$, les formules sont :

$$\frac{60\,000}{x_1^2} 0,9^{x_1} = 0,1, \quad x_1 = 51 \text{ kilomètres;}$$

$$\frac{1\,200\,000}{x_2^2} 0,9^{x_2} = 0,1, \quad x_2 = 75 \text{ kilomètres.}$$

Le rapport des intensités est 20; le rapport des portées, qui serait $\sqrt{20} = 4,5$ pour $m = 1$, n'est plus que 1,5 pour $m = 0,9$. Pour $m = 0,75$, qui correspond à l'état de l'atmosphère un jour sur douze dans la Manche ($x_1 = 24$, $x_2 = 32$), le rapport tombe à 1,35. La conclusion est évidente : à mesure que la transparence de l'atmosphère diminue, on gagne de moins en moins à employer des feux intenses. Ces résultats incontestables expliquent la déception éprouvée lors de l'introduction des feux électriques; ils tiennent non pas à la nature

de la lumière électrique, mais simplement à la nature du phénomène de l'absorption. On avait aussi incriminé la petitesse de la source lumineuse quand il s'agit de l'arc; mais l'objection n'a pas de sens :

1° parce que l'angle sous lequel on voit la lumière est déterminé par la grandeur de l'optique du phare et non par la grandeur de la source;

2° parce que l'angle sous lequel on voit la source n'a pas d'importance *si l'éclairement est suffisant*, comme le démontre sans conteste le fait que nous voyons les étoiles.

Propriétés diverses de la lumière applicables à la photométrie.

Nous allons passer rapidement en revue quelques propriétés de la lumière, les unes fondamentales, les autres de moindre importance, qui peuvent être appliquées à la mesure de l'intensité des radiations. Nous profiterons de cette étude pour donner sur la photographie des renseignements d'un emploi journalier.

176. Photographie. Plaques au gélatino-bromure. — Voici d'abord en quoi consiste une plaque au gélatino-bromure d'argent.

On prépare deux solutions contenant (les nombres ne sont que pour fixer les idées, chaque fabricant a ses recettes) :

A. Bromure d'ammonium	20 gr.	B. Nitrate d'argent	30 gr.
Gélatine	30 gr.	Eau	250 gr.
Eau	250 gr.		

On verse la solution B chauffée à 20° dans la solution A chauffée à 50°. Il se forme un précipité de bromure d'argent assez fin pour rester en suspension; c'est l'*émulsion*.

Pour transformer l'état physique de l'émulsion, on la fait bouillir 20 ou 30 minutes au bain-marie (*maturation*); puis on la laisse refroidir; elle se prend en masse.

On la divise alors en petits fragments par tamisage à travers des mailles convenables et on la lave à grande eau. On l'essore et on la fond au bain-marie. Elle est prête à être coulée sur les glaces. En la maintenant plus ou moins longtemps en fusion, on modifie son état physique et on augmente sa sensibilité.

Il résulte immédiatement de ce mode de fabrication que la matière sensible (le bromure d'argent) se trouve à l'état de grains. C'est ce qu'on vérifie aisément en regardant au microscope une plaque développée.

L'émulsion est d'autant plus sensible que les grains sont plus gros. Pour les plaques extrarapides, le grain peut atteindre 25 μ de dia-

mètre. L'enregistrement des détails de diamètres inférieurs à une vingtaine de microns est par conséquent impossible.

On peut obtenir une définition bien meilleure avec des plaques dont les grains sont plus petits; mais la sensibilité diminue considérablement.

177. Définition du noir. — Un cliché développé se présente donc comme une série de petits écrans opaques disséminés dans une couche qui n'est pas absolument transparente. Faisons tomber sur le cliché un faisceau monochromatique : l'opacité du cliché pour cette radiation est le rapport des intensités du faisceau avant et après son passage à travers lui. Mais le cliché développé est absorbant même aux points où il n'a pas posé. Soit I_0 l'intensité du faisceau transmis aux points de pose nulle, I l'intensité transmise en un autre point : on appelle *noir du cliché* la quantité :

$$N = \frac{I_0}{I} - 1.$$

Le noir s'annule quand $I = I_0$. Cette définition du noir est évidemment arbitraire; elle n'a de sens que si I_0 est à peu près constant pour toute la plaque et pour une intensité invariable du faisceau incident.

Voilà pour un faisceau monochromatique; il n'est pas évident qu'on obtiendra le même noir en utilisant pour sa mesure des radiations diverses. En particulier, l'absorption par le verre du cliché dont l'épaisseur n'est pas nécessairement constante d'un bout à l'autre de la plaque, ne doit pas fausser les mesures.

L'expérience montre qu'il est préférable d'utiliser des radiations visibles; le noir se détermine soit avec un photomètre ordinaire, soit plus exactement avec une pile thermoélectrique sensible. Le faisceau incident traverse alors une épaisse glace de verre ou encore une couche d'eau qui élimine les radiations calorifiques pour lesquelles le noir de la plaque pourrait être transparent, et supprime l'influence des inégalités d'épaisseur du verre du cliché. La partie du cliché dont on veut étudier le noir est limitée par un diaphragme percé d'un trou d'un centimètre carré, par exemple. On détermine donc le noir moyen qui correspond à cette aire.

Exposons un cliché à une lumière bien uniforme, étudions son noir en tous les points : il s'en faut de beaucoup que la couche sensible le soit également d'un bout à l'autre de la plaque. Nous verrons l'importance de ce résultat dans l'application de la photographie à la photométrie (Bouasse).

178. Plaques ortho et panchromatiques. Sensibilisateurs optiques. — On sait que la sensibilité des plaques est très variable avec la longueur d'onde des radiations employées. Photographions

un spectre pur; nous pouvons construire une courbe en portant en abscisses les longueurs d'onde et en ordonnées les noirs correspondants. Avec le gélatino-bromure pur, la courbe se détache de l'axe des abscisses pour les radiations dont les λ sont inférieurs à $0^{\mu},55$, s'élève rapidement quand λ décroît, présente un maximum au voisinage de $\lambda = 0^{\mu},45$, et se rapproche ensuite lentement de l'axe des abscisses. La forme varie d'ailleurs beaucoup suivant les procédés de fabrication. Les rouges ne produisent donc aucun effet.

On modifie aisément la forme de cette courbe. Il suffit de plonger la plaque dans des dissolutions de matières colorantes qu'on appelle *sensibilisateurs*. Ce sont le *chlorure de cyanine* pour les rayons rouges et orangés, l'*érythrosine* pour les jaunes, l'*éosine* pour les jaunes et les verts... Les plaques deviennent un peu moins sensibles aux radiations de petites longueurs d'onde, mais la sensibilité pour les grandes longueurs d'onde est très augmentée. Le jaune du sodium se photographie aisément.

On a même été plus loin, et, avec des solutions de dérivés de l'alizarine, on a rendu les plaques sensibles jusqu'à $\lambda = 0^{\mu},840$, c'est-à-dire dans l'infrarouge.

Les plaques orthochromatiques n'acquièrent cependant pas, pour les grandes longueurs d'onde, une sensibilité comparable à celles qu'elles possèdent *encore* pour les petites. On doit photographier les objets à travers des verres colorés bien travaillés, placés en arrière de l'objectif, qui atténuent ou suppriment le spectre violet et ultra violet. Pour la photographie des paysages, on emploie généralement un verre jaune. Dans ces conditions, les plaques ordinaires ne donneraient rien.

On a prétendu que les solutions colorées agissent parce qu'elles ont des bandes d'absorption pour les radiations par rapport auxquelles elles sensibilisent. Pour tentante que soit cette théorie, il ne semble pas qu'elle soit conforme au détail des phénomènes. La même solution peut modifier très différemment la courbe des noirs, suivant la nature des plaques sur lesquelles on la fait agir.

Selon que la plaque est sensibilisée jusqu'aux jaunes seulement ou jusqu'aux rouges, elle est dite orthochromatique ou panchromatique.

179. Noir en fonction de l'intensité et du temps de pose. — Soit I l'intensité de la lumière agissante que nous supposons monochromatique; soit t le temps. *Le noir n'est pas seulement une fonction de la quantité totale d'énergie déversée; on ne peut pas poser :*

$$N = \phi \left(\int_0^t I dt \right).$$

Pour simplifier, supposons I constant; soit t le temps de pose.

L'expérience montre que, *la quantité totale d'énergie déversée It restant constante, le noir est de plus en plus intense à mesure que t diminue et par conséquent que I augmente.* On ne compense pas la faiblesse du faisceau par une augmentation du temps de pose; à *énergie constante*, il y a toujours avantage à diminuer celui-ci.

Ce serait donc une grave erreur de fonder un procédé de comparaison photométrique entre deux faisceaux d'intensités I_1 et I_2 , sur l'égalité des noirs obtenus avec les faisceaux et des poses convenables t_1 et t_2 . Si les noirs sont égaux pour $t_1 > t_2$, le rapport $I_1 : I_2$ est certainement supérieur au rapport $t_2 : t_1$.

180. Influence des interruptions de la pose. — En envoyant la lumière sur la plaque à travers une roue présentant alternativement des secteurs pleins et vides, et tournant avec une vitesse variable d'une expérience à l'autre, on peut disposer de la même énergie totale et la répartir dans le temps de manières différentes; on peut produire soit des poses courtes et nombreuses, soit des poses longues et peu nombreuses. *Le noir dépend de la loi de répartition* (Bouasse).

Nous n'insisterons pas sur ces phénomènes, qu'il nous suffit d'avoir signalés.

181. Application de la photographie à la photométrie. — De ce qui précède il résulte les conditions d'une application légitime de la photographie à la photométrie. Soit F_1 le faisceau à étudier, F_2 le faisceau étalon *que nous devons supposer de même composition.* Par un procédé quelconque (œil-de-chat, nicols, lentilles,...), mais *qui ne doit pas être une roue dentée*, on réduit l'un des faisceaux de manière que *les noirs soient identiques pour le même temps de pose.* Connaissant le facteur de réduction, on connaît immédiatement le rapport des intensités des deux faisceaux. La photographie ne sert donc qu'à vérifier l'égalité de deux actions : c'est une méthode de zéro.

Même limitée à ce rôle, la méthode est sujette à une critique grave qui repose sur la non-uniformité des plaques sensibles. Pour éviter cette difficulté, on fait sur la même plaque n clichés distribués parallèlement à égale distance les uns des autres. Les clichés pairs sont obtenus avec le faisceau I, les clichés impairs avec le faisceau II. On trace ainsi, en fonction de la distance à un point origine, deux courbes des noirs I et II. Si ces deux courbes coïncident, les faisceaux ont même intensité.

Voici dès lors comment s'effectue la comparaison. On décompose le cliché (13×18 par exemple) en cinq ou six bandes. Chaque bande sert pour une série d'expériences et correspond à un certain facteur de réduction. Pour deux bandes consécutives les courbes I et II sont disposées dans des ordres inverses; le facteur de réduction qui

rendrait les faisceaux égaux peut dès lors se calculer par interpolation.

Une expérience avec le facteur ainsi calculé permet une vérification ou une approximation plus grande.

182. Halo photographique. Irradiation. — Quand on photographie un point lumineux brillant, la plaque est impressionnée non seulement là où se produit l'image, mais encore à des distances considérables de celle-ci.

Le voile, *peu intense au voisinage de l'image*, passe par un brusque maximum sur une couronne dont le diamètre est environ quatre fois l'épaisseur de la plaque, puis décroît ensuite lentement. On observe donc comme une sorte de *halo*. La forme circulaire et le diamètre du halo sont indépendants de l'obliquité de la plaque relativement à l'axe du faisceau incident. La gélatine peut être tournée vers la source ou dans le sens opposé sans que le phénomène soit modifié.

L'explication du halo est très simple. La couche d'émulsion est un diffuseur *orthotrope* (§ 164), ce qui explique immédiatement que le phénomène soit indépendant de l'obliquité. La lumière que la couche diffuse par transmission ou réflexion (suivant que la couche est en avant ou en arrière), se réfléchit sur la seconde face et revient sur la couche qu'elle impressionne.

Le rayon diffusé sous l'angle α la touche à une distance : $r = 2e \operatorname{tg} \alpha$, du point éclairé. Tant que α est assez petit, la réflexion sur la seconde face n'est pas totale. Quand la condition :

$$n \sin \alpha = 1, \quad r = \frac{2e}{\sqrt{n^2 - 1}}, \quad (1)$$

est satisfaite, il y a réflexion totale. Les rayons réfléchis augmentent brusquement d'intensité et produisent le halo. Quand α croît ensuite jusqu'à 90° , la diffusion étant de plus en plus oblique, l'action décroît.

Soit $n = 1,5$; la condition (1) donne $2r = 3,56 \cdot e$. Le diamètre du halo est donc bien voisin de quatre fois l'épaisseur de la plaque.

Pour supprimer le halo, il faut supprimer : soit la diffusion en rendant la couche sensible opaque au moyen d'un corps soluble qui disparaîtra lors du développement; soit la réflexion sur la seconde face de la plaque par un enduit absorbant et sensiblement de même indice que le verre.

Il ne faut pas confondre le *halo* avec l'*irradiation*, phénomène par suite duquel une action intense en un point entraîne une action sur les points immédiatement voisins.

183. Actions chimiques en général. Induction photochimique. — Le noir d'une plaque ne peut donc en aucune manière

servir de mesure à l'intensité d'un faisceau, serait-il monochromatique. Est-il possible d'obtenir un photomètre chimique en s'adressant à une réaction plus simple, par exemple à l'action du chlore sur l'hydrogène? Faisons tomber un faisceau monochromatique sur une ampoule contenant ce mélange; déterminons le changement de volume sous pression constante, l'acide chlorhydrique se dissolvant dans de l'eau à mesure qu'il se forme.

On trouve que la quantité d'acide formée en l'unité de temps dépend suivant une loi complexe de l'épaisseur du mélange traversé; elle varie considérablement avec des traces de certains corps étrangers. Enfin elle n'est pas proportionnelle au temps; sous l'influence d'un faisceau d'intensité constante, la vitesse de combinaison, d'abord nulle, croît et n'atteint une valeur constante qu'après un temps parfois considérable, de l'ordre de la minute quand la lumière est faible. C'est ce phénomène qu'on appelle *induction chimique*.

Il n'est pas facile, même avec une réaction d'apparence si simple, de réaliser une méthode photométrique.

Si la lumière est très vive, on sait qu'il y a explosion. Là encore le phénomène n'est pas instantané: l'explosion ne se produit qu'après un temps d'autant plus long que le mélange est plus éloigné des proportions moléculaires.

184. Piles photochimiques. Actinomètres. — La lumière produisant des actions chimiques, il est naturel qu'on puisse obtenir des piles photochimiques. Deux lames métalliques identiques sont placées dans un liquide; l'une est éclairée, l'autre maintenue dans l'obscurité. On observe une différence de potentiel entre les lames, et un courant traverse le circuit qui les relie.

L'expérience réussit avec des lames de cuivre recouvertes d'oxyde, de sulfure, de fluorure, d'iodure du même métal, avec des lames d'étain oxydé ou sulfuré, avec des lames d'argent sulfuré. Les surfaces des électrodes qui ne sont pas sensibilisées, sont recouvertes d'un vernis isolant; on limite par du vernis l'aire de l'électrode qui doit être soumise au faisceau lumineux. Les lames, sont plongées dans une solution étendue d'un sel alcalin.

Les forces électromotrices sont de l'ordre du millième de volt, généralement inférieures à un millivolt. Chaque actinomètre présente un maximum de sensibilité pour une certaine longueur d'onde qui varie d'ailleurs d'un bout à l'autre du spectre avec la nature de la lame et son mode de préparation.

La force électromotrice diminue toujours quand la température s'élève.

On augmente la force électromotrice en plongeant les lames dans les dissolutions colorées qu'on emploie pour orthochromatiser les plaques au gélatino-bromure. La force électromotrice est maxima pour

une radiation qui dépend de la matière colorante; sa longueur d'onde est toujours plus grande que celle qui correspond au maximum d'absorption par transmission à travers la dissolution colorée utilisée.

Dans tous les cas, la force électromotrice cesse en même temps que l'éclairement et sans aucun retard.

185. Propriétés du sélénium. Variations de résistance. — La conductibilité électrique du sélénium *crystallisé* diminue lorsqu'on l'expose à la lumière. L'effet varie beaucoup suivant l'état physique. En portant le sélénium amorphe vers 210° et en prolongeant l'action de cette température, on obtient une variété cristalline à grains grossiers dont la résistance dans l'obscurité est assez faible (de l'ordre de celle des métaux mauvais conducteurs) et devient jusqu'à dix fois moindre sous l'influence des rayons solaires. La lumière diffuse la diminue de moitié. Ces nombres ne sont que pour fixer les idées.

La variation croît moins vite que proportionnellement à l'intensité de la lumière. La partie violette du spectre semble avoir un effet prépondérant. Les rayons calorifiques obscurs n'ont d'autre action qu'un échauffement, et *tout échauffement augmente la résistance*.

Quand on supprime la lumière, la conductibilité reprend assez lentement sa valeur première. Par exemple, une surface de sélénium dont la résistance dans l'obscurité était de 258 mille ohms et était devenue 200 mille sous l'influence de la lumière, présentait les résistances suivantes pour des temps t en secondes après la suppression de la lumière :

$t =$	1 ^s	2 ^s	3 ^s	4 ^s	5 ^s	6 ^s
	222	232	239	244	248	252

CHAPITRE II

ÉQUILIBRE DE TEMPÉRATURE. LOI DE KIRCHHOFF

186. **Émission. Absorption.** — Nous avons défini au Chapitre I l'éclat et le pouvoir émissif. La quantité d'énergie émise par l'aire $d\sigma$ et transportée par les radiations de longueurs d'onde comprises entre λ et $\lambda + d\lambda$, dans un angle solide $d\omega$ faisant avec la normale un angle θ , s'exprime en fonction de l'éclat par l'expression (§ 159) :

$$dQ = \varepsilon d\lambda d\omega d\sigma.$$

La quantité totale d'énergie émise par l'élément $d\sigma$ et transportée par les mêmes radiations est l'intégrale prise par rapport à l'angle solide :

$$s d\lambda d\sigma = d\lambda d\sigma \int \varepsilon d\omega,$$

étendue à l'hémisphère entier d'émission : s est le *pouvoir émissif*.

Naturellement le pouvoir émissif dépend de la loi de variation de l'éclat en fonction de l'angle θ avec la normale. Dans le cas particulier de la loi de Lambert, le pouvoir émissif s s'exprime en fonction de l'éclat suivant la normale, par la formule simple : $s = \pi \varepsilon_0$.

Nous allons définir pour l'absorption une quantité, le *pouvoir absorbant* α , qui, malgré son nom, doit être rapprochée de l'éclat et non du pouvoir émissif.

Considérons un faisceau de rayons dont les directions sont contenues dans l'angle solide $d\omega$, qui recouvre l'élément $d\sigma$ et qui est formé des radiations dont les longueurs d'onde sont comprises entre λ et $\lambda + d\lambda$. De l'énergie transportée une partie est diffusée, une partie réfléchie, une partie transmise; en définitive, *il en reste dans le corps une fraction qui est, par définition, le pouvoir absorbant* α .

De même que l'éclat ε , le *pouvoir absorbant* α dépend de l'angle avec la normale, de la nature et de la forme du corps au voisinage du point d'incidence : il n'est en aucune manière une constante caractéristique. *Il n'a d'ailleurs aucune analogie avec le pouvoir émissif*; son nom, déplorablement choisi, est cause d'une ambiguïté perpétuelle.

Ses dimensions sont nulles : c'est un nombre dont la valeur est comprise entre 0 et 1.

187. Cas particuliers. Corps noirs. Pouvoir émissif des corps noirs. Équilibre de température. — Parmi les corps, il en est de particulièrement importants pour lesquels le pouvoir absorbant *en chaque point de la surface* est constant, indépendamment par conséquent de la direction d'incidence. Il peut varier d'un point à l'autre et ne pas avoir la même valeur en chaque point pour toutes les radiations. *Ce cas correspond à la loi de Lambert pour l'émission*; nous admettons d'ailleurs que la loi de Lambert s'applique à tous les corps pour lesquels α n'est en chaque point de la surface qu'une fonction de λ ; on peut alors parler sans ambiguïté d'un pouvoir émissif.

Parmi ces corps, on appelle *corps noirs* ceux pour lesquels $\alpha = 1$; ils jouent un rôle prééminent.

Admettons d'abord que, pour les corps noirs, le pouvoir émissif ne dépend pas de la forme du corps : il est le même en tous les points de la surface. Les corps noirs sont donc caractérisés, à chaque température et pour chaque radiation, par une constante d'émission. Nous allons montrer que *cette constante est la même pour tous*, comme conséquence de ce fait absolument général que *les corps enfermés dans une enceinte imperméable à la chaleur se mettent en équilibre de température et se maintiennent dans cet état*.

Soient en effet deux corps noirs A et B dont les surfaces en regard sont σ et σ' ; A est tout entier dans une cavité creusée dans B. Les corps A et B sont protégés contre le refroidissement extérieur par une surface parfaitement réfléchissante C, qui renvoie à B toute la chaleur émise par celui-ci vers l'extérieur; nous supposons de plus que C n'émet rien.

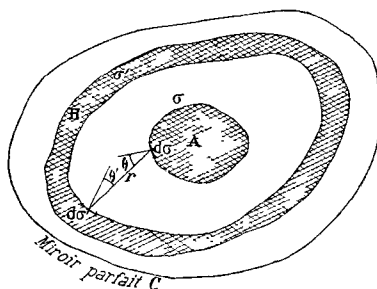


Fig. 107.

Chaque élément $d\sigma'$ de la surface intérieure de B émet de la chaleur qui tombe en partie sur d'autres éléments de la même surface σ' , en partie sur σ . Puisque par hypothèse la loi de Lambert s'applique aux corps noirs, on peut parler d'un pouvoir émissif. Puisque les corps noirs émettent au maximum, le pouvoir émissif est certainement le même en tous les points de leur surface. La quantité totale dQ' envoyée sur A par B, et par conséquent absorbée par A, est (§ 161) :

$$dQ' = \frac{s'd\lambda}{\pi} \iint \frac{d\sigma' \cos \theta' d\sigma \cos \theta}{r^2};$$

s' est le pouvoir émissif qui caractérise B à la température de l'expérience et pour la radiation considérée. Dans l'intégration, on doit

prendre un élément $d\sigma'$ et tous les éléments $d\sigma$ de A qui sont vus par l'élément $d\sigma'$, puis recommencer pour tous les autres éléments de B. Cela revient à prendre deux à deux tous les éléments $d\sigma$ de A et $d\sigma'$ de B pour lesquels la ligne de jonction ($d\sigma'$, $d\sigma$) est libre.

Chaque élément $d\sigma$ de la surface A émet de la chaleur qui tombe sur les éléments de B et est absorbée par eux. La quantité totale envoyée par A sur B est :

$$dQ = \frac{s d\lambda}{\pi} \iint \frac{d\sigma \cos \theta \cdot d\sigma' \cos \theta'}{r^2}.$$

Pour former cette intégrale, tous les éléments $d\sigma'$ et $d\sigma$ pour lesquels la ligne de jonction est libre, doivent encore être pris une fois par paire : donc les deux intégrales sont égales.

Pour que l'équilibre se conserve, on doit avoir :

$$dQ = dQ'; \quad \text{d'où :} \quad s = s'. \quad \text{CQFD.}$$

Le résultat auquel nous parvenons légitime *a posteriori* l'hypothèse que le pouvoir émissif d'un corps noir déterminé est le même en tous ses points. On peut supprimer cette hypothèse dans la démonstration, comme nous le verrons plus loin.

188. Corps pour lesquels α est constant en chaque point de la surface, mais différent de l'unité. — Nous allons maintenant supposer que le pouvoir émissif du corps A qui obéit encore à la loi de Lambert, mais qui n'absorbe pas complètement, est variable d'un point à l'autre de la surface. Chaque élément $d\sigma$ est donc caractérisé par un pouvoir émissif s et par un pouvoir absorbant α , par hypothèse indépendant de la direction d'incidence. Reprenons les raisonnements précédents en supposant que B est encore parfaitement noir.

L'élément $d\sigma'$ de B envoie sur l'élément $d\sigma$ de A la quantité :

$$d^2Q' = s' \frac{d\lambda}{\pi} \cdot \frac{d\sigma' \cos \theta' d\sigma \cos \theta}{r^2}.$$

L'élément $d\sigma$ absorbe de d^2Q' une fraction :

$$\alpha d^2Q' = s' \frac{d\lambda}{\pi} \alpha \cdot \frac{d\sigma' \cos \theta' d\sigma \cos \theta}{r^2}.$$

Pendant le même temps, l'élément $d\sigma$ envoie sur $d\sigma'$, par émission proprement dite, une quantité :

$$d^2Q = \frac{d\lambda}{\pi} \cdot s \frac{d\sigma' \cos \theta' d\sigma \cos \theta}{r^2}.$$

En définitive, A absorbe et émet dans le même temps les quantités totales :

$$\frac{s' d\lambda}{\pi} \iint \alpha \frac{d\sigma' \cos \theta' d\sigma \cos \theta}{r^2}, \quad \frac{d\lambda}{\pi} \iint s \frac{d\sigma' \cos \theta' d\sigma \cos \theta}{r^2},$$

où α et s sont des fonctions de l'élément $d\sigma$ considéré. Pour que l'équilibre de température se maintienne, il faut que ces deux intégrales soient toujours égales, quelles que soient les formes des corps A et B ; il faut donc que l'on ait¹ :

$$s = \alpha s'.$$

s peut être variable d'un point à l'autre du corps A, mais α doit varier proportionnellement. Il résulte de plus de la formule que l'émission par un corps incomplètement noir est toujours plus petite que l'émission par un corps noir à la même température.

On peut simplifier le raisonnement en supposant sphériques et concentriques les surfaces en regard des corps A et B. Par raison de symétrie, s et α sont alors les mêmes pour tous les points du corps A. Soient R et R' les rayons des sphères : les quantités émises par les deux corps sont :

$$dQ = s d\lambda \cdot 4\pi R^2, \quad dQ' = s' d\lambda \cdot 4\pi R'^2.$$

On arrive à ce résultat sans calcul en remarquant que les intégrales explicitées au paragraphe précédent sont égales, et que le flux dQ envoyé par la sphère intérieure a évidemment l'expression ci-dessus écrite. On a dès lors immédiatement comme condition d'équilibre des températures :

$$\alpha dQ' = dQ, \quad \alpha s' = s.$$

Cette forme particulière des corps A et B permet une remarque intéressante. Admettons que le corps A diffuse et réfléchisse très peu ; sa noirceur imparfaite provient uniquement de ce qu'il est plus ou moins transparent. Le pouvoir absorbant α dépendra donc du rayon et tendra vers 0 quand le rayon tendra vers 0. La formule $\alpha s' = s$ montre que le pouvoir émissif s tendra simultanément vers 0.

189. Cas général. On ne suppose rien sur la loi de variation de l'éclat ϵ du corps imparfaitement noir. Faisceau monochromatique. — Les paragraphes précédents sont indispensables pour se familiariser avec la question difficile que nous traitons ; mais on voit immédiatement le peu de généralité des raisonnements. En effet, ils ne valent que pour un faisceau monochromatique ou un faisceau complexe de composition invariable, et, même dans ce cas, ils ne valent que pour une hypothèse sur la forme de la loi d'émission. Il

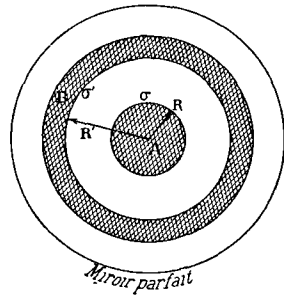


Fig. 108.

¹ Nous n'avons pas à tenir compte de l'énergie réfléchie, diffusée et transmise par A, car elle ne modifie pas la température de A.

faut reprendre la question de plus près sans faire aucune hypothèse; la méthode la meilleure est encore celle de l'inventeur Kirchhoff, convenablement simplifiée.

I. Soit d'abord les corps A et B parfaitement noirs, et supposons les faisceaux qu'ils émettent *monochromatiques*. Le corps B a la forme particulière représentée; la paroi S_1 qui en fait partie, est percée d'un petit trou. Le corps B est protégé contre le refroidissement extérieur par une surface parfaitement réfléchissante et qui n'émet rien. Les deux corps sont en équilibre de température.

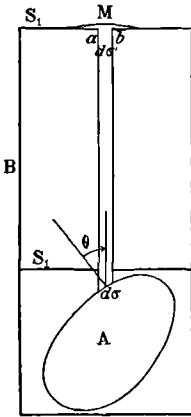


Fig. 109.

Considérons sur le corps B un élément $d\sigma'$. Le raisonnement repose sur l'artifice suivant : si nous supprimons l'élément $d\sigma'$ du corps B et si nous le remplaçons par un miroir parfaitement réfléchissant et n'émettant rien, ayant pour centre de courbure le centre du trou (de même aire $d\sigma'$), percé dans l'écran S_1 et très rapproché de A, l'équilibre de température subsiste.

Appelons $d\omega$ l'angle solide sous lequel est vu l'élément $d\sigma$ ou le trou percé dans S_1 d'un point quelconque de l'élément $d\sigma'$; $d\omega$ est aussi l'angle solide sous lequel est vu $d\sigma'$ d'un point quelconque de $d\sigma$.

1° L'élément $d\sigma'$ est en place; il envoie sur $d\sigma$ la quantité :

$$\varepsilon' d\lambda d\omega d\sigma'$$

qui est complètement absorbée.

2° L'élément $d\sigma'$ est supprimé et le miroir installé. Tout ce qu'émet $d\sigma$, c'est-à-dire :

$$\varepsilon d\lambda d\omega d\sigma,$$

lui est renvoyé par le miroir dont il occupe le centre de courbure.

Par contre, il ne reçoit rien de l'élément $d\sigma'$ qui n'existe plus.

Or rien n'est modifié; donc on a :

$$\varepsilon' d\sigma' = \varepsilon d\sigma, \quad \varepsilon = \varepsilon' \cos \theta.$$

COROLLAIRES. — 1° Changeons l'angle θ ; ε' reste constant; donc la loi de Lambert s'applique au corps noir A, et par conséquent à tous les corps noirs.

2° Remplaçons le corps B par un autre corps; la même relation devant subsister et ε restant constant, ε' doit être le même pour tous les corps noirs.

II. Supposons maintenant que B restant noir, A ne le soit plus. Reprenons le raisonnement.

1° L'élément $d\sigma'$ étant en place absorbe tout ce que lui envoie $d\sigma$; il renvoie sur $d\sigma$ la quantité :

$$\varepsilon_0 d\lambda d\omega d\sigma',$$

dont la fraction α est absorbée; ε_0 désigne l'éclat qui caractérise tous les corps noirs dans la direction normale, à la température de l'expérience et pour la radiation λ . Le corps A qui n'est pas noir, absorbe la fraction :

$$\alpha \varepsilon_0 d\lambda d\omega d\sigma'.$$

2° L'élément $d\sigma'$ est supprimé et le miroir installé. Tout ce qu'émet $d\sigma$, c'est-à-dire :

$$\varepsilon d\lambda d\omega d\sigma,$$

lui est renvoyé par le miroir. Or rien n'est modifié dans les températures; donc on a :

$$\alpha \varepsilon_0 d\sigma' = \varepsilon d\sigma, \quad \varepsilon = \alpha(\varepsilon_0 \cos \theta).$$

La démonstration est donc complète pour un faisceau monochromatique. On peut énoncer le théorème sous la forme suivante.

Traçons les indicatrices d'émission à la température de l'expérience pour un corps noir et L'ÉLÉMENT CONSIDÉRÉ d'un corps quelconque; prenons POUR CHAQUE DIRECTION le rapport des rayons vecteurs des indicatrices pour le corps quelconque et pour le corps noir : ce rapport mesure le pouvoir absorbant α DE L'ÉLÉMENT CONSIDÉRÉ DANS LA DIRECTION CONSIDÉRÉE.

190. Cas général. Faisceau quelconque, polarisation quelconque. — Il s'agit maintenant d'étendre les résultats à chaque radiation formant un faisceau complexe quelconque. La marche du raisonnement est la suivante : *Envoyons dans une direction donnée une fraction variable à l'infini des diverses radiations qui forment le faisceau; l'équilibre de température devant subsister, nous concluons que les relations précédemment démontrées doivent exister séparément pour chaque radiation du faisceau.* L'artifice expérimental consiste à utiliser une lame mince servant à sélectionner par réflexion les radiations; en modifiant l'épaisseur de la lame, on modifie à l'infini les proportions des diverses radiations dans le faisceau réfléchi (§ 240, 274 et sq.).

Soit d'abord A et B parfaitement noirs. La lame mince est en L; l'élément $d\sigma'$ peut être remplacé par un miroir parfaitement réfléchissant et n'émettant rien. Son centre de courbure est au point O conjugué par rapport à la lame L (servant de miroir) du trou percé dans S_1 , ou de l'élément $d\sigma$ qui en est infiniment rapproché.

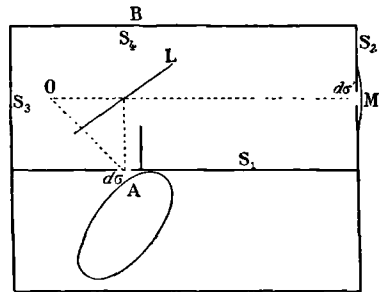


Fig. 110.

1° L'élément $d\sigma'$ est en place; il envoie des rayons qui se réfléchissent sur L, passent dans le trou percé dans S_1 et tombent sur l'élément $d\sigma$. Soit Q l'énergie totale du faisceau.

2° L'élément $d\sigma'$ est supprimé, on installe le miroir M. L'élément $d\sigma$ reçoit alors deux faisceaux. Le premier :

$$d\omega d\sigma \int_0^\infty \varepsilon f^2 \cdot d\lambda,$$

est celui qu'il émet et qui lui est renvoyé après deux réflexions sur la lame et une réflexion sur le miroir. Les deux réflexions sur la lame interviennent pour diminuer l'énergie dans un certain rapport f^2 fonction de la longueur d'onde et de l'épaisseur (§ 240). Ce qui n'est pas restitué à $d\sigma$ est absorbé, soit par la paroi S_1 , soit par la paroi S_3 .

Le second faisceau est composé des rayons émis par la surface S_3 du corps B; ils traversent L, sont réfléchis sur le miroir, puis sur L et aboutissent enfin à l'élément $d\sigma$. Soit R l'énergie ainsi reçue. Les énergies Q et R ne dépendent pas du corps A.

L'équilibre de température exige que l'on ait :

$$Q = R + d\omega d\sigma \int_0^\infty \varepsilon f^2 d\lambda.$$

Remplaçons A par un autre corps noir A_1 ; nous devons avoir :

$$Q = R + d\omega d\sigma \int_0^\infty \varepsilon_1 f^2 d\lambda.$$

D'où :

$$\int_0^\infty (\varepsilon - \varepsilon_1) f^2 d\lambda = 0.$$

Comme cette relation doit être vérifiée quelle que soit l'épaisseur de la lame et par conséquent malgré les variations du paramètre que contient la fonction f de la longueur d'onde, il faut que l'on ait $\varepsilon = \varepsilon_1$, identiquement.

L'émission des corps noirs est donc représentée pour tous par la même fonction de la longueur d'onde et de la température.

Nous avons abrégé le raisonnement, qui mériterait d'être serré encore de plus près; ce qui précède suffit à comprendre la marche.

On peut démontrer par des artifices tout semblables que *la lumière émise par les corps noirs ne peut être polarisée ni rectilignement ni circulairement.*

On peut enfin reprendre le raisonnement pour des corps imparfaitement noirs. On arrive à démontrer la proposition générale suivante.

Traçons les indicatrices d'émission à la température de l'expérience, pour les radiations comprises entre λ et $\lambda + d\lambda$, pour un corps noir et pour un élément d'un corps quelconque, enfin pour les vibrations polarisées parallèlement à une direction donnée; prenons pour chaque direction le rapport des rayons vecteurs des indicatrices: ce rapport mesure le pouvoir absorbant de l'élément considéré dans la direction et pour les vibrations considérées.

On peut encore dire avec Kirchhoff :

Considérons un élément $d\sigma$ d'un corps quelconque et une direction faisant avec la normale un angle θ . Considérons les vibrations comprises entre les longueurs d'onde λ et $\lambda + d\lambda$. Décomposons-les en deux composantes rectilignes rectangulaires et ne retenons qu'une des composantes. La quantité émise dans l'angle solide $d\omega$ est $\varepsilon d\lambda d\omega d\sigma$.

Considérons en second lieu un faisceau incident formé des mêmes radiations, dont la direction moyenne est la même et dont les vibrations sont parallèles à la direction précédemment choisie. Une fraction α est absorbée; le reste est réfléchi, diffusé ou transmis.

$$\text{On a :} \quad \varepsilon = \alpha \varepsilon_0 \cos \theta.$$

ε_0 est une fonction de la température et de la longueur d'onde, indépendante de la nature du corps¹.

191. Conséquences générales de la loi de Kirchhoff. — COROLLAIRE I. — La relation : $\varepsilon = \alpha \varepsilon_0 \cos \theta$, est satisfaite pour $\varepsilon = \varepsilon_0 = 0$, quel que soit α . Donc un corps peut absorber une radiation sans l'émettre, pourvu qu'à la même température le corps parfaitement noir n'émette pas cette radiation. Pour se convaincre qu'il en est bien ainsi, il suffit de reprendre le raisonnement; peu importe que le corps A imparfaitement noir absorbe ou non une radiation que le corps B jouant le rôle d'enceinte parfaitement noire ne lui envoie pas.

COROLLAIRE II. — Un corps *parfaitement réflecteur* ne doit rien émettre quelle que soit la température; car α étant identiquement nul, ε est nul quel que soit ε_0 . Ainsi se trouve légitimé l'artifice d'une enceinte parfaitement réfléchissante et n'émettant pas, que nous avons employé dans le raisonnement.

COROLLAIRE III. — Un corps parfaitement transparent (réflecteur ou non) ne doit rien émettre quelle que soit la température; car α est encore identiquement nul. Les flammes sont plus ou moins opaques pour les radiations qu'elles émettent; mais elles sont transparentes pour les radiations qu'elles n'émettent pas. Il faut se garder dans ces expériences d'une cause d'erreur grave : les flammes sont généralement entourées d'une enveloppe gazeuse *beaucoup plus froide et qui, à cause même de la basse température, peut absorber sans émettre* (Corollaire I).

Le procédé correct d'étude de l'absorption par les flammes consiste à faire varier l'épaisseur de la flamme elle-même, et à chercher si l'absorption varie, la couche froide restant autant que possible identique dans les diverses expériences (Gouy).

C'est à la couche froide dont nous venons de parler qu'il faut attribuer le *renversement spontané des raies* (voir Électroptique), et d'après

¹ Si le lecteur se reporte au mémoire classique de Kirchhoff, il n'oubliera pas que nos notations ne sont pas les mêmes. Nous l'avons déjà prévenu dans la note du § 162.

la théorie jusqu'à présent admise, les raies noires du spectre solaire. Disposons deux brûleurs A et B chargés de sodium l'un devant l'autre; regardons la flamme A en nous servant de B comme fond lumineux.

Les bords de A *apparaissent noirs*, parce que la couche froide qui entoure A absorbe les rayons émis par B, sans rien émettre elle-même.

COROLLAIRE IV. — Si un corps émet dans une direction des vibrations polarisées, réciproquement il doit absorber les vibrations de même polarisation qui tombent sur lui dans la même direction. Nous aurons l'occasion de montrer une application de ce corollaire en étudiant le phénomène de Zeemann (Électroptique, Tome V).

En voici une autre : la tourmaline absorbe particulièrement à froid les vibrations dites *ordinaires*, qui sont par conséquent normales à son axe cristallographique. Si la lame conserve cette propriété au rouge, il faut alors qu'elle émette de la lumière partiellement polarisée; la composante la plus intense doit être perpendiculaire à l'axe cristallographique. Or la tourmaline conserve au rouge son pléochroïsme et polarise par transmission : corrélativement, regardée à travers un analyseur biréfringent convenablement orienté, elle donne deux images inégalement lumineuses et disposées comme le veut la théorie.

COROLLAIRE V. — *Réalisation pratique des corps parfaitement noirs.* — Creusons dans une enceinte isotherme quelconque une petite ouverture de forme quelconque. Il en sort le rayonnement noir correspondant à la température T de l'enceinte; en d'autres termes, l'ouverture se comporte comme un corps parfaitement noir. En effet, il règne dans la cavité le rayonnement noir parfaitement diffusé¹ caractéristique de la température T, puisque nous pourrions remplacer une partie quelconque de la surface intérieure par un corps parfaitement noir sans rien changer à l'équilibre de température actuellement existant.

L'énergie sortant par l'ouverture est perdue : donc le rayonnement à travers elle est d'autant plus rigoureusement celui du corps noir que son aire est plus petite, et évidemment aussi que les corps formant l'enceinte sont plus près d'être parfaitement noirs.

Pratiquement le corps noir est réalisé par des sphères métalliques creuses dont la paroi est percée d'un trou, et qu'on chauffe dans un four; ou par des cylindres creux de platine, fermés à leurs extrémités, parcourus dans le sens de leur longueur par un courant électrique et dont la paroi latérale est percée d'un trou.

¹ Les termes que nous employons ici se rapportent à un ordre de considérations qui sera développé dans le Chapitre du Tome V 'Électroptique *sur la Thermodynamique du vide*.

Étude expérimentale des corps parfaitement et imparfaitement noirs.

192. Pouvoir émissif total des corps parfaitement noirs. —

Il est naturellement du plus haut intérêt de déterminer la quantité totale d'énergie S envoyée par l'unité de surface d'un corps noir à chaque température, et la répartition de cette énergie entre les diverses radiations, c'est-à-dire la fonction :

$$S = f(T, \lambda).$$

Le principe de la détermination se déduit immédiatement du § 191. Le trou, percé dans l'enceinte ou plus exactement dans un écran D disposé en avant, est d'aire σ . Il émet comme un corps noir. L'énergie tombe sur une surface noire d'aire σ' placée à la distance r . La quantité totale d'énergie reçue par σ' est (§ 162) :

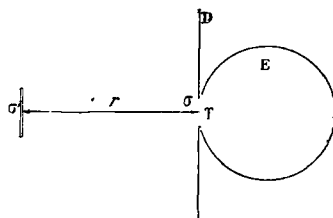


Fig. 111.

$$Q = \frac{S}{\pi} \frac{\sigma\sigma'}{r^2}; \quad S = \frac{\pi Q r^2}{\sigma\sigma'}.$$

Si les surfaces σ et σ' sont grandes par rapport à la distance r , on applique la formule générale; d'où une petite correction à l'expression précédente.

L'expérience peut donner des nombres absolus. La surface σ' est celle d'un bolomètre (Tome III, § 168) : on le soumet à la radiation, puis on supprime cette radiation et l'on envoie dans le bolomètre un courant tel que l'appareil revienne à la même indication. Connaissant l'intensité du courant et la résistance, on a ce qu'il faut pour déterminer Q en valeur absolue.

Tant par des expériences relatives que par des expériences absolues, on a trouvé que l'énergie totale S émise par le corps noir est proportionnelle à la quatrième puissance de la température absolue :

$$S = S_0 T^4.$$

La valeur S_0 en petites calories est $1,28 \cdot 10^{-12}$. Cela veut dire qu'une surface d'un centimètre carré parfaitement noire, à la température absolue T , émet dans toutes les directions, pendant chaque seconde, une quantité totale d'énergie équivalente à $1,28 \cdot 10^{-12} T^4$ petites calories. La petite calorie valant 4,17 joules, on peut dire que S_0 exprimé en watts vaut :

$$1,28 \times 4,17 \times 10^{-12} = 5,33 \cdot 10^{-12} \text{ watts.}$$

Remarque. — Dans l'expérience précédente, il faut tenir compte

de la quantité de chaleur émise par la surface σ' du bolomètre. Si par des écrans réfléchissants on limite son émission aux directions inverses de celles dans lesquelles elle reçoit de la chaleur, la différence entre la quantité reçue et la quantité émise a pour expression :

$$Q = \frac{S_0}{\pi} \frac{\sigma\sigma'}{r^2} (T^4 - T_0^4),$$

où T_0 est la température absolue de la surface σ' .

193. Distribution de l'énergie du rayonnement noir entre les diverses radiations. — L'énergie qui correspond dans l'énergie totale aux radiations comprises entre λ et $\lambda + d\lambda$, est $s d\lambda$; l'expérience montre que s est donné par la formule générale :

$$s = T^5 \varphi(\lambda T).$$

En fonction de s , l'énergie totale S a pour expression à la température T :

$$S = \int_0^\infty s d\lambda = \int_0^\infty T^5 \varphi(\lambda T) d\lambda = T^4 \int_0^\infty \varphi(\lambda T) d(\lambda T),$$

expression conforme à la loi expérimentale du paragraphe précédent.

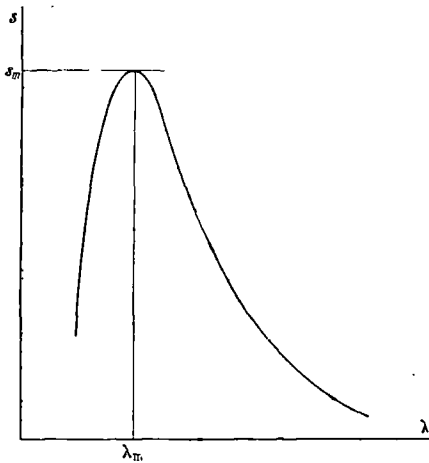


Fig. 112.

D'après la seconde loi expérimentale, on a la même énergie pour des λ et des T qui satisfont à la relation :

$$\lambda T = \text{Constante}.$$

La répartition de l'énergie entre les radiations est complètement connue pour toutes les températures et toutes les longueurs d'onde, dès qu'elle est connue pour *une* température et toutes les longueurs d'onde, ou pour *une* longueur d'onde et toutes les températures.

On a proposé pour la fonction $\varphi(\lambda T)$ la forme :

$$s = s_0 T^5 (\lambda T)^{-5} e^{-\frac{c}{\lambda T}} = s_0 \lambda^{-5} e^{-\frac{c}{\lambda T}},$$

qui satisfait aux conditions évidentes : $s = 0$ pour $\lambda = 0$ et $\lambda = \infty$. À chaque température T , s passe par un maximum pour une longueur d'onde λ_m donnée par la formule :

$$\lambda_m T = c ; 5 = \text{Constante} = A.$$

Si λ_m est exprimé en microns, la valeur expérimentale de la constante A est 2940.

La valeur correspondante de s est :

$$s_m T^{-5} = \text{Constante} = B, \quad s_m = BT^5.$$

La formule précédente de répartition conduit à une conséquence singulière : s reste fini pour toutes les radiations, quand $T = \infty$. D'ailleurs elle ne représente pas très bien les résultats expérimentaux pour les grandes longueurs d'onde. On préfère la formule :

$$s = s_0 \lambda^{-5} (\lambda T)^\mu e^{-\frac{c}{\lambda T}}, \quad (\mu > 0)$$

qui donne $s = \infty$ pour $T = \infty$, et conséquemment une croissance plus rapide de s pour les grandes longueurs d'onde.

194. Variation du pouvoir émissif des corps noirs avec le milieu environnant. — Le principe de Carnot Clausius implique que de la chaleur ne puisse pas passer d'un corps froid sur un corps chaud, sans qu'il se produise quelque autre opération compensatrice. Ce principe serait violé, si l'on pouvait concentrer par réflexion ou réfraction les rayons de chaleur ; car le corps qui se trouve au foyer de l'appareil dioptrique ou catoptrique considéré, pourrait acquérir une température plus élevée que celle du corps qui émet les rayons et qui se trouve au foyer conjugué.

A quelle condition le principe de Carnot Clausius reste-t-il satisfait ? Nous avons démontré (§ 155) que les éclats intrinsèques ε et ε' de deux figures conjuguées sont entre eux comme les carrés n^2 et n'^2 des indices des milieux dans lesquels elles se forment. Il résulte immédiatement de là que le pouvoir émissif des corps parfaitement noirs varie avec le milieu ambiant ; il est proportionnel au carré de l'indice de réfraction du milieu.

Comme cette proposition est importante, nous allons l'expliquer sur un cas particulier (fig. 113).

Considérons deux petites surfaces parfaitement noires σ et σ' dans des milieux d'indices n et n' et aux centres de sphères parfaitement réfléchissantes M et M'. Les milieux n et n' sont séparés par une surface sphérique DD' ; σ et σ' sont conjuguées par rapport au dioptré ainsi formé. Les sphères M et M' sont percées de deux trous égaux, sur le contour commun desquels s'appuie la surface du dioptré. Les surfaces σ , σ' et l'aire a du dioptré sont supposées très petites.

Toute l'énergie émise par σ qui n'arrive pas à σ' retourne sur σ , réfléchi par la sphère M ; de même pour σ' par rapport à la sphère M'. L'équilibre de température, une fois atteint, devant se maintenir, il faut écrire qu'à chaque instant l'énergie dQ envoyée par σ sur σ'

est égale à l'énergie dQ' envoyée par σ' sur σ . D'ailleurs dQ et dQ' ont pour expressions (§ 162) :

$$dQ = \frac{S}{\pi} \omega \sigma, \quad dQ' = \frac{S'}{\pi} \omega' \sigma'.$$

D'où la condition : $S\omega\sigma = S'\omega'\sigma'$; ω et ω' sont les angles solides

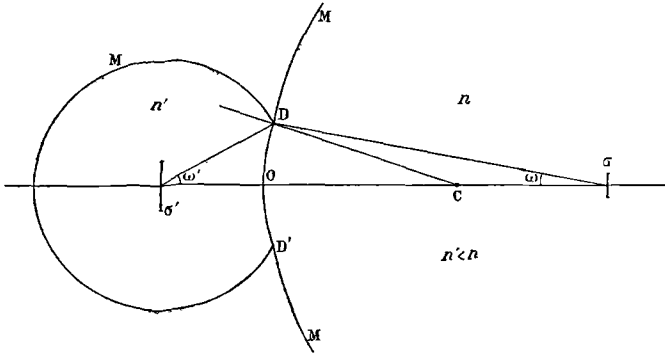


Fig. 113.

sous lesquels l'aire a du trou DD' est vue d'un point de σ et de σ' . Reprenons les notations habituelles :

$$\omega = a : p^2, \quad \omega' = a : p'^2.$$

Les propriétés du dioptré fournissent la condition connue (§ 155) :

$$\frac{\sigma}{\sigma'} = \left(\frac{n'}{n}\right)^2 \left(\frac{p}{p'}\right)^2.$$

$$\text{D'où : } \frac{S}{S'} = \frac{\omega'}{\omega} \cdot \frac{\sigma'}{\sigma} = \left(\frac{p}{p'}\right)^2 \left(\frac{p'}{p}\right)^2 \left(\frac{n}{n'}\right)^2 = \left(\frac{n}{n'}\right)^2.$$

On s'explique parfaitement ce résultat en regardant la figure; elle correspond à la condition $n' < n$; on a $\sigma < \sigma'$, puisque les rayons non déviés passent par le point C; d'ailleurs $\omega < \omega'$. Il faut bien pour la compensation que par unité de surface σ émette plus que σ' .

195. Démonstration plus générale. — Étendons le théorème à une divergence finie des rayons.

Supposons donc que la condition des sinus s'applique (§ 96); on a :

$$\sigma (n \sin u)^2 = \sigma' (n' \sin u')^2. \quad (1)$$

La surface σ émet suivant la loi de Lambert. Dans le cône de demi-angle au sommet u , elle envoie une énergie (§ 162) :

$$Q = \sigma \varepsilon_0 \int_0^u 2\pi \cos u \sin u \, du = \sigma \pi \varepsilon_0 \sin^2 u. \quad (2)$$

La surface image σ' émet suivant la même loi; en négligeant les absorptions et écrivant l'équilibre des températures, on a :

$$Q = \sigma' \pi \varepsilon'_0 \sin^2 u'. \quad (3)$$

$$\text{D'où :} \quad \sigma \varepsilon_0 \sin^2 u = \sigma' \varepsilon'_0 \sin^2 u', \quad \frac{\varepsilon'_0}{\varepsilon_0} = \left(\frac{n'}{n}\right)^2.$$

196. **Étude de la radiation d'un corps imparfaitement noir.** — Considérons d'abord les corps *qui ne possèdent aucune transparence appréciable en aucune région du spectre* et dont on sait que l'allure du rayonnement se rapproche de celle du rayonnement noir, *le platine, l'oxyde de cuivre, les diverses sortes de charbon.*

Pour faciliter les comparaisons, on représente leur rayonnement par la formule :

$$s = s_0 \lambda^{-\alpha} e^{-\frac{c}{\lambda T}}.$$

Si cette formule est applicable, à chaque température le rayonnement sera maximum et égal à s_m pour une longueur d'onde λ_m satisfaisant encore à la condition :

$$\lambda_m T = \text{Constante} = A, \quad s_m = B T^\alpha.$$

Enfin le rayonnement total est :

$$S = \int_0^\infty s d\lambda = T^{\alpha-1} \int_0^\infty s_0 (\lambda T)^{-\alpha} e^{-\frac{c}{\lambda T}} d(\lambda T) = S_0 T^{\alpha-1}.$$

Cette formule fournit donc des lois analogues à celles du rayonnement noir; mais s_0 , α , c , sont des constantes particulières à chaque corps et que l'expérience doit déterminer.

Le produit $\lambda_m T$ est *pour les corps spécifiés* à peu près constant, mais inférieur à 2940. Pour le platine, il est 2340 environ; il est 2620 pour le noir de fumée, 2560 pour l'oxyde de cuivre, 2600 pour l'oxyde de fer. A chaque température, le maximum d'émission a lieu pour une longueur d'onde plus courte que pour les corps noirs.

L'exposant α est supérieur à 5; il est 5,5 pour le noir de fumée, voisin de 6 pour le platine.

Enfin la puissance totale du rayonnement est, pour l'oxyde de fer et surtout pour le platine, très inférieure à ce qu'elle est pour les corps noirs. Aux températures voisines du point de fusion, le rayonnement total du platine est environ les 18 centièmes de celui du corps noir; aux basses températures, il est les 4 centièmes. L'allure de ce résultat est bien conforme au fait que $\alpha > 5$. Posons :

$S' = S'_0 T^{\alpha'}$ pour le corps noir, $S = S_0 T^\alpha$ pour le platine ($\alpha = 6$); il vient :

$$\frac{S}{S'} = \frac{S_0}{S'_0} T, \quad \text{et généralement :} \quad \frac{S}{S'} = \frac{S_0}{S'_0} T^{\alpha-5};$$

le rapport $S : S'$ doit croître avec la température.

De ce qu'un corps émet plus que le platine ou l'oxyde de fer à la même température, il ne faudra donc pas conclure immédiatement qu'il émet plus que le corps noir.

197. Manchons incandescents. — L'étude des manchons incandescents (genre Auer) permet de préciser certains points de la Théorie de l'émission.

Frappé de l'éclat de ces manchons, on avait conclu qu'il ne s'agissait pas d'une véritable incandescence, fonction seulement de la température, que les manchons émettaient plus qu'un corps noir à la même température, que par conséquent le phénomène devait être comparé à une phosphorescence (voir Électroptique).

Une première objection à cette manière de voir est qu'il est difficile d'admettre une émission supérieure à celle du corps noir *indéfiniment continuée*. Il peut exister à une température donnée *surproduction de radiation*, pourvu qu'il existe une modification de la matière ; aussi la phosphorescence tend généralement vers zéro, pendant que la matière qui émet tend vers un état limite.

Quoi qu'il en soit, on a cherché directement quel est, *par rapport à celle du corps noir*, l'émission des oxydes (magnésie, zircone, lanthane, ...) qui entrent dans le tissu des manchons. Dans une enceinte isotherme percée d'une ouverture, on place une lame de platine portant une tache d'oxyde : on trouve que dans ces conditions, conformément aux raisonnements du § 191, le rayonnement des oxydes est exactement celui du platine. Tous les corps sont en équilibre de rayonnement comme le veut le principe de Kirchhoff : donc les oxydes sont *incandescents* à la manière ordinaire.

On introduit alors dans l'ouverture de l'enceinte isotherme un tube de porcelaine chauffé seulement au rouge et isolant le platine et sa tache d'oxyde. Comme ceux-ci ne reçoivent plus rien de l'enceinte, on observe alors dans le tube leur *rayonnement propre*. On trouve que pour le spectre visible le rayonnement des oxydes est 2 à 4 fois celui du platine, ce qui donne encore un rayonnement inférieur à celui du corps noir (§ 196).

Ceci posé, comment expliquer l'éclat des manchons? Évidemment par l'élévation de la température. *Mais cette élévation elle-même est due à ce que le pouvoir émissif du manchon est extrêmement variable suivant la longueur d'onde; en particulier, il est sensiblement nul dans le domaine spectral compris entre $\lambda = 1^{\mu}$ et $\lambda = 5^{\mu}$* . Le manchon émettant fort peu ces radiations *calorifiques*, la flamme qui l'échauffe est relativement peu refroidie; la température peut s'y maintenir au voisinage de 1600°. Comme d'ailleurs le pouvoir émissif du manchon est relativement grand dans le spectre visible, surtout pour les petites longueurs d'onde (0,86 de celui du corps noir pour $\lambda = 0^{\mu},45$; 0,72 pour $\lambda = 0^{\mu},50$; 0,49 pour $\lambda = 0^{\mu},55$),

il résulte un éclat qui, tout en étant inférieur à celui du *corps noir* à la même température, est cependant considérable.

Mais rien n'empêche le bec Auer de posséder un pouvoir émissif très grand pour quelques radiations particulières. Ainsi c'est en l'employant comme source qu'on obtient les rayons *restants* de grande longueur d'onde (Électroptique). Il n'y a rien là de contradictoire. Cela prouve seulement que la courbe des pouvoirs émissifs, après avoir baissé jusqu'à 0 dans l'infrarouge compris entre 1^{μ} et 5^{μ} , se relève au delà. Mais comme le corps noir lui-même émet peu de ces grandes longueurs d'onde, il ne résulte de cette émission *relativement* grande aucun refroidissement notable.

Il est clair que pour des corps présentant une distribution de l'énergie aussi complexe, il serait vain de chercher une loi théorique de répartition.

198. Luminescence. — Quand il se produit des phénomènes chimiques ou mécaniques permanents ou passagers, l'émission peut être supérieure à l'émission *purement calorifique* régie par la loi de Kirchhoff. On sait que le sucre émet de la lumière visible quand on le casse; certains animaux sont des sources de lumière qui ne doivent évidemment pas leur éclat à leur température. On dit alors qu'il y a *luminescence*; c'est un phénomène qui paraît général quand interviennent des réactions chimiques.

Par exemple, la raie du sodium a un éclat bien moindre quand on chauffe la vapeur en vase clos, que quand on se sert d'un brûleur à la manière ordinaire. Dans le premier cas, on supprime toute réaction chimique; l'expérience prouve que dans le second cas l'émission est très supérieure à l'émission du corps noir à la même température. Il semble démontré qu'on a affaire dans l'expérience ordinaire à un phénomène de luminescence; il est amusant que l'expérience avec le sodium serve ordinairement à illustrer la loi de Kirchhoff.

De même certaines bandes ultraviolettes de l'arc ont un éclat supérieur à celui des mêmes radiations émises par le cratère positif dont la température est bien plus élevée.

Nous traiterons la *Phosphorescence* et la *Fluorescence* dans l'*Électroptique*, au Tome V de ce Cours.

199. Constante solaire. Calcul de la température de la Terre. — Les expériences directes les plus sûres apprennent que le Soleil nous envoie environ 2,54 petites calories par minute sur chaque centimètre carré de surface normale au rayon (Cours de Mathématiques, § 180). Calculons en CGS la constante solaire Σ , c'est-à-dire le nombre d'ergs envoyés par seconde et par centimètre carré :

$$\Sigma = 0,175 \cdot 10^7 \text{ ergs/cm}^2, \text{ sec.}$$

Pour calculer la température de la Terre h , nous ferons des hypothèses simplificatrices :

1° la Terre se meut autour d'un axe perpendiculaire à son orbite qui est circulaire ;

2° l'effet de l'atmosphère est de conserver la même température nuit et jour : hypothèse très approchée, car il s'agit de températures absolues ;

3° la surface terrestre et les nuages se conduisent comme un corps noir ; nous appliquerons à leur radiation la formule du § 65. On ne sait ce que vaut l'hypothèse ; elle est d'ailleurs contradictoire avec la suivante ;

4° la Terre réfléchit 1/10 de la chaleur reçue.

Négligeons l'effet des étoiles ; écrivons qu'il y a égalité entre la chaleur envoyée par le Soleil (moins le dixième réfléchi) et la chaleur émise. Soit r le rayon terrestre.

Considérons une bande comprise entre les latitudes λ et $\lambda + d\lambda$. Son aire est :

$$2\pi r \cos \lambda \cdot r d\lambda = 2\pi r^2 \cos \lambda d\lambda.$$

Tout se passe comme si les rayons solaires tombaient sur la projection de cette aire sur un plan normal à ces rayons mêmes. La chaleur reçue par seconde est donc :

$$2r^2 \cos^2 \lambda d\lambda \cdot 0,9\Sigma.$$

Écrivons qu'il y a égalité entre ce que la bande reçoit et ce qu'elle émet :

$$0,9\Sigma \cdot 2r^2 \cos^2 \lambda d\lambda = S \cdot 2\pi r^2 \cos \lambda d\lambda, \quad S = 0,9\Sigma \cos \lambda : \pi.$$

Remplaçons S par sa valeur : $S = 5,32 \cdot 10^{-5} T^4$ ergs sec, il vient :

$$T = \left(\frac{0,9 \cdot 10^5 \Sigma}{5,32\pi} \cos \lambda \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Température équatoriale : 312° absolus = 39° centigrades,

à 45° de latitude : 286° absolus = 13° centigrades.

Nous supposons dans ce qui précède qu'il n'y a pas de convection. Prenons l'hypothèse inverse : une convection assez intense pour obtenir une température moyenne. Le Soleil envoie sur une aire πr^2 , la Terre émet par son aire $4\pi r^2$.

$$0,9\Sigma \cdot \pi r^2 = S \cdot 4\pi r^2.$$

Remplaçons les paramètres par leurs valeurs ; il vient :

$$T = 293 \text{ absolus} = 20 \text{ centigrades.}$$

Il est remarquable qu'on parvienne à des nombres aussi approchés de la réalité.

200. **Température du Soleil.** — Soit S_s la constante d'émission du Soleil et R son rayon. L'énergie émise est par seconde :

$$4\pi R^2 S_s.$$

Cette énergie à la distance l du Soleil à la Terre se répartit sur une sphère de surface $4\pi l^2$ et la valeur de l'énergie reçue par centimètre carré et par seconde est alors Σ . On a la relation :

$$4\pi R^2 S_s = 4\pi l^2 \Sigma, \quad S_s = \Sigma l^2 : R^2.$$

Or $R : l$ est la moitié du diamètre apparent, soit $16'$ évaluées en radians, soit 0,00465. On tire de là :

$$l : R = 215, \quad S_s = 46\,000 \Sigma.$$

$$S_s = 0,809 \cdot 10^{11} \text{ ergs/cm}^2, \text{ sec.}$$

Telle est la quantité d'énergie émise par seconde par un centimètre carré de la surface solaire.

On se reportera au Tome III, § 75, pour des calculs analogues.

Calculons à partir de ce nombre la température du Soleil.

$$0,809 \cdot 10^{11} = 5,32 \cdot 10^{-5} T^4.$$

$$T = 6\,250^\circ \text{ absolus} = 5\,977 \text{ centigrades.}$$

CHAPITRE III

VISION COLORÉE

Dans les Chapitres suivants, nous aurons à chaque instant l'occasion de regarder des phénomènes dus à la superposition de couleurs simples en quantités relatives connues. Il est donc nécessaire de savoir de quoi dépend la teinte résultante et comment on peut la calculer.

201. Fonctionnement de l'œil. — Le fonctionnement de l'œil est absolument différent de celui de l'oreille. L'oreille a la faculté d'analyser les sons, de les décomposer en sons simples qu'avec de l'habitude elle perçoit isolément. Les couleurs simples, caractérisées par une certaine longueur d'onde, sont absolument comparables aux sons simples; mais l'œil ne peut pas les isoler. On est conduit à admettre, *indépendamment de toute étude physiologique*, qu'il existe dans l'oreille des organes en nombre considérable, *de nature quelconque mais spécifiquement différents*, sortes de résonateurs pour les différents sons. Au contraire, dans l'œil le nombre des organes de perception *spécifiquement différents* est très restreint; l'expérience montre qu'on peut les réduire à trois, au moins comme première approximation¹.

Présentons ces considérations d'une manière différente.

Quelle que soit la nature de la sensation colorée, on peut supposer, au moins comme première approximation, qu'il existe un nombre fini de *sensations élémentaires* excitées par les radiations et que la sensation complexe est la *somme symbolique* de ces diverses sensations.

Soit S_1, S_2, \dots, S_n , des quantités qui mesurent les sensations élémentaires au nombre de n ; soit I_1, I_2, \dots , les intensités des radiations $\lambda_1, \lambda_2, \dots$. D'après l'hypothèse précédente, on peut poser :

$$S_1 = f_{11}(I_1, \lambda_1) + f_{12}(I_2, \lambda_2) + \dots = \Sigma f_1(I, \lambda), \\ S_2 = \Sigma f_2(I, \lambda), \dots S_n = \Sigma f_n(I, \lambda).$$

¹ Cette opposition de fonctionnement entre l'œil et l'oreille suffit pour rendre vains tous les rapprochements pseudoscientifiques entre la peinture et la musique.

Cela revient à dire que l'action d'une radiation est indépendante de l'existence simultanée d'autres radiations.

Si nous admettons que les sensations élémentaires S_1, S_2, \dots, S_n sont en nombre inférieur aux causes d'excitation (qui sont les radiations de longueurs d'onde diverses), il est clair qu'une même sensation complexe, définie par un système de valeurs S_1, S_2, \dots, S_n , peut correspondre à une infinité de compositions différentes de la radiation : *par conséquent, l'œil est incapable d'analyser la lumière.*

Sans spécifier encore le nombre n des sensations élémentaires, nous entendons par couleur C un système défini de valeurs S_1, S_2, \dots, S_n .

L'hypothèse précédente conduit immédiatement à une conséquence vérifiée par l'expérience : *Soit C_1, C_2, \dots , des couleurs de même aspect, c'est-à-dire produisant la même impression qualitative et quantitative sur la rétine : soit C'_1, C'_2, \dots , d'autres couleurs de même aspect. Superposons sur la rétine une couleur quelconque du premier groupe à une couleur quelconque du second ; quelles que soient les couleurs choisies, nous obtiendrons une couleur C de même aspect.*

202. Mélange ou superposition des couleurs. Obtention d'un mélange déterminé. — Avant d'aller plus loin, il faut dire comment s'obtient expérimentalement la superposition des couleurs en proportions déterminées, et mettre en garde le lecteur contre un faux sens qu'il pourrait attribuer au mot mélange.

Nous disons que deux radiations se superposent ou se mélangent en un point de la rétine, lorsqu'elles y parviennent simultanément. Par exemple, soient deux sources lumineuses situées dans la même direction, ce qu'il est facile d'obtenir à l'aide d'une glace sans tain. Nous disons que les couleurs de ces sources se superposent ou se mélangent quand nous les regardons simultanément, c'est-à-dire quand leurs images se projettent simultanément en un point de la rétine.

Ce serait une erreur grossière de croire que l'on *mélange au sens qui vient d'être défini* les couleurs de deux poudres, quand on mélange ces poudres; nous reviendrons d'ailleurs là-dessus (Électroptique) en parlant de la couleur des corps.

Pour obtenir un mélange de couleurs spectrales, on peut utiliser deux techniques. La première est incommode pour des recherches précises, mais donne lieu à une expérience de cours classique. On dispose une fente F , un prisme P et une lentille L (fig. 114) comme pour obtenir un spectre pur, avec cette différence que la lentille est assez éloignée du prisme. Tout près du prisme est un écran percé d'un trou rectangulaire AB . En F' est le plan conjugué de la fente F par rapport au prisme et à la lentille; en $A'B'$ est le plan conjugué de AB par rapport à la lentille.

Le trou AB est assez petit pour que la lumière n'y soit pas encore

dispersée, *même sur les bords* : l'image $A'B'$ est *blanche*, ou plus exactement de la couleur du faisceau qui éclaire la fente F . En RV se forme un spectre pur.

L'expérience est extrêmement intéressante, comme montrant la possibilité de groupements différents des faisceaux lumineux. La lumière d'un certain λ , émise par un point de la fente F , éclaire à peu près uniformément la plage AB ; elle converge ensuite en un point

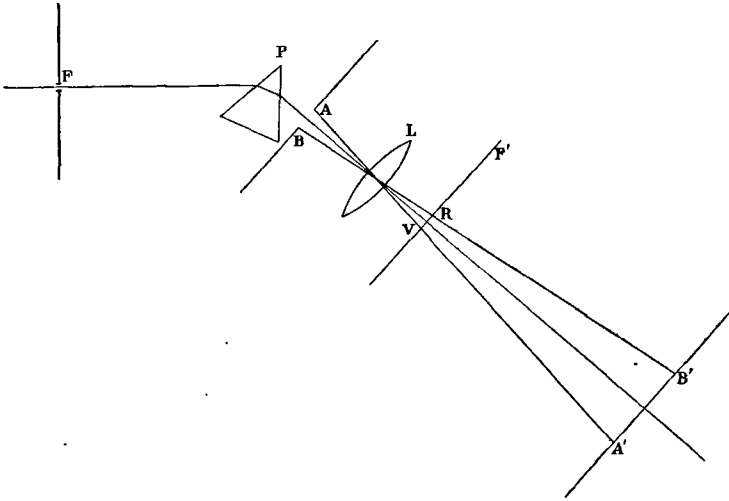


Fig. 114.

du plan F' (spectre pur) et éclaire enfin à peu près uniformément la plage $A'B'$. Réciproquement la lumière émise par un point de AB jouant le rôle d'objet lumineux (principe d'Huyghens), se répartit à peu près uniformément sur RV et converge en un point de $A'B'$.

Supprimons, à l'aide de petites baguettes servant d'écrans, les radiations de certains λ dans le spectre; l'image $A'B'$ est uniformément privée de ces rayons, elle apparaît colorée d'une certaine teinte plate.

203. Appareil de Maxwell. — Voici la seconde disposition beaucoup plus commode.

Une fente F , une lentille L , un prisme P donnent un spectre pur RV ; les plans P et P' sont conjugués par rapport au prisme et à la lentille.

Réciproquement, si on place en R une fente éclairée par de la lumière blanche, il se produit dans le plan conjugué P un spectre pur *dont le rouge est en F* . Plus généralement, si on place une fente là où dans le spectre pur RV sont les radiations de longueur d'onde λ , il se forme dans le plan conjugué P un spectre pur dont les radiations λ

coïncident avec la fente F. On a donc un moyen commode de recomposer la lumière blanche. On éclaire uniformément avec de la lumière blanche le plan P' formé d'une substance translucide et parfaitement diffusante; en F on reçoit *simultanément* : la radiation λ_1 , d'un spectre que donnerait une fente placée sur RV aux points correspondant à λ_1 ; la radiation λ_2 d'un spectre que donnerait une fente placée sur RV aux points correspondant à λ_2 ; ... La superposition de toutes ces radiations constitue la lumière blanche.

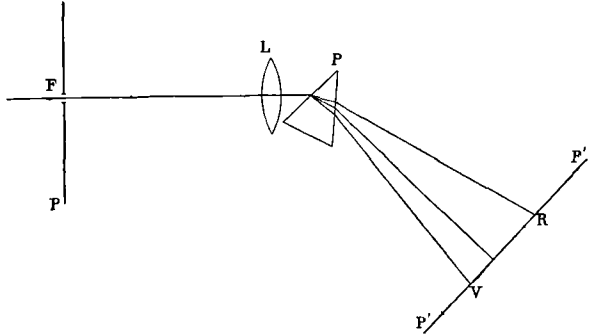


Fig. 115.

Il faut que les différents points du plan P jouent le rôle de sources identiques; d'où la nécessité d'un éclairage uniforme et d'une égale diffusion par transmission.

On peut évidemment obtenir un mélange quelconque : il suffit de disposer sur le plan P', *uniformément éclairé avec de la lumière blanche*, des écrans convenables. Un miroir convenablement placé permet de comparer avec du blanc la teinte obtenue.

On prend comme unités d'intensités relatives pour les différents λ leurs intensités dans la lumière blanche, c'est-à-dire dans la lumière envoyée par le Soleil, à midi, un beau jour d'été.

On cherche à se rapprocher le plus possible de cette lumière.

Ceci posé, soit à mélanger n radiations $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$, ayant des intensités I_1, I_2, \dots, I_n . On dispose dans le plan P' des fentes de largeur I_1, I_2, \dots, I_n , dont les milieux coïncident avec les radiations $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, dans le spectre RV. On s'appuie donc sur ce principe que, *les radiations voisines produisant le même effet sur l'œil, on peut remplacer un changement d'intensité d'une radiation par l'adjonction de radiations voisines*. Ce principe est d'autant plus exact que les fentes restent toujours plus étroites.

Nous verrons plus loin comment on tient compte de la dispersion.

204. Nombre de sensations élémentaires. Représentation dans un plan. — L'expérience montre qu'on peut représenter les phénomènes avec une bonne approximation, en limitant à *trois* le nombre des sensations élémentaires, S_1, S_2, S_3 . Il résulte immédiatement de cette hypothèse une représentation commode dans un plan.

Prenons trois points $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$, et convenons de représenter une sensation complexe C, résultant de trois sensations élémentaires de grandeurs S_1, S_2, S_3 , par le point obtenu en plaçant en Σ_1 la masse S_1 , en Σ_2 la masse S_2 , en Σ_3 la masse S_3 , et en prenant le centre de gravité C de ces masses. Nous donnons au point C la cote :

$$(S_1 + S_2 + S_3).$$

Nous représenterons la couleur C par le symbole :

$$(S_1 + S_2 + S_3)C = S_1\Sigma_1 + S_2\Sigma_2 + S_3\Sigma_3.$$

Il résulte immédiatement de cette représentation que toutes les couleurs observables sont à l'intérieur du triangle $\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3$.

Superposons deux couleurs :

$$(S_1 + S_2 + S_3)C, (S'_1 + S'_2 + S'_3)C'.$$

Nous obtiendrons évidemment une couleur C_1 , dont le symbole est :

$$\begin{aligned} & (S_1 + S'_1 + S_2 + S'_2 + S_3 + S'_3)C_1 \\ & = (S_1 + S'_1)\Sigma_1 + (S_2 + S'_2)\Sigma_2 + (S_3 + S'_3)\Sigma_3. \end{aligned}$$

Nous ne faisons qu'exprimer que l'ordre dans lequel nous prenons les sensations est indifférent, qu'il revient au même de mélanger les quantités $S_1 + S'_1, S_2 + S'_2, S_3 + S'_3$, des sensations fondamentales, ou d'obtenir deux couleurs C et C', que nous mélangeons ensuite et qui donnent, somme toute, les mêmes quantités de sensations élémentaires.

Ces corollaires résultent immédiatement de l'hypothèse que les sensations fondamentales se superposent sans modifier réciproquement leur grandeur.

205. Couleurs principales. — Malheureusement, la mesure des sensations fondamentales $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$, n'est pas directement accessible. Toute radiation *simple* produit simultanément les trois sensations, en proportions très différentes, il est vrai. Autrement dit, toute radiation *simple* doit être représentée par un point à l'intérieur du triangle $\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3$. Mais on peut se demander si trois radiations simples ne seraient pas représentées par des points P, Q, R, très rapprochés des points $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$. Celles qui semblent satisfaire le mieux à ces conditions, et qu'on nomme *couleurs principales*, ont les longueurs d'onde :

$$\lambda_P = 0^{\mu},630 \text{ (Écarlate)}, \lambda_Q = 0^{\mu},528 \text{ (Vert)}, \lambda_R = 0^{\mu},457 \text{ (Bleu)}.$$

Comme nous ne savons rien pour l'instant sur les *sensations élémentaires*, comme d'ailleurs le triangle $\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3$ est *a priori* quelconque, nous ferons partir l'étude expérimentale de la considération des couleurs principales P, Q, R, que nous placerons aux sommets d'un triangle équilatéral. Ce n'est qu'après coup que nous chercherons à situer dans le plan les sensations fondamentales $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$.

Il est bon de remarquer que toutes les couleurs observables ne sont plus nécessairement à l'intérieur du triangle PQR qu'on appelle triangle des couleurs.

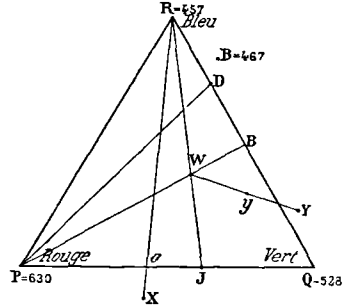


Fig. 117.

206. Position des couleurs simples par rapport au triangle PQR des couleurs. — Le premier soin est de déterminer dans quelles proportions il faut mélanger les couleurs principales pour avoir du blanc. Cela revient à déterminer dans le plan PQR la position du point W qui correspond au blanc (*white*, en anglais). Les unités sont définies et la technique exposée au § 203. On a trouvé :

$$W = 3,97 \cdot P + 6,52 Q + 6,46 \cdot R.$$

Pour voir du blanc sur la fente F (fig. 115), il faut disposer trois fentes dans le plan P'.

L'une de largeur 3,97	dont le centre coïncide avec	$\lambda = 0^{\mu},630$	P
La seconde — 6,52	— — —	$\lambda = 0^{\mu},528$	Q
La troisième — 6,46	— — —	$\lambda = 0^{\mu},457$	R

Le point W est donc à peu près sur la bissectrice de l'angle QPR. et notablement plus rapproché de la droite QR que du point P.

A la vérité, ce qui précède suppose que la dispersion est régulière, c'est-à-dire que la distance x d'une radiation de longueur d'onde λ à un point du plan P' pris pour origine, varie proportionnellement à λ . En fait, il n'en est pas ainsi. On étudiera donc la loi de dispersion : $x = f(\lambda)$. Pour avoir du blanc, l'expérience montre qu'il faut donner aux trois fentes correspondant aux radiations P, Q, R, des largeurs $\Delta_1x, \Delta_2x, \Delta_3x$, telles que :

$$\frac{\Delta_1x}{397} \left(\frac{d\lambda}{dx} \right)_P = \frac{\Delta_2x}{652} \left(\frac{d\lambda}{dx} \right)_Q = \frac{\Delta_3x}{646} \left(\frac{d\lambda}{dx} \right)_R.$$

Cette équation signifie que la fente doit être d'autant plus étroite que le spectre est plus tassé là où elle se trouve.

Cherchons à situer dans le plan PQR une couleur *simple* quel-

conque X, autre que P, Q, R. L'expérience montrant qu'elles sont toutes en dehors du triangle PQR, il faut obtenir la même teinte a, soit par un mélange convenable des radiations P et Q, soit par un mélange convenable des radiations R et X.

Nous pouvons écrire symboliquement :

$$X + rR = pP + qQ, \quad X = pP + qQ - rR.$$

On conçoit la nécessité de *masses symboliques négatives*; car avec des masses positives, on ne peut retrouver que les points à l'intérieur du triangle PQR.

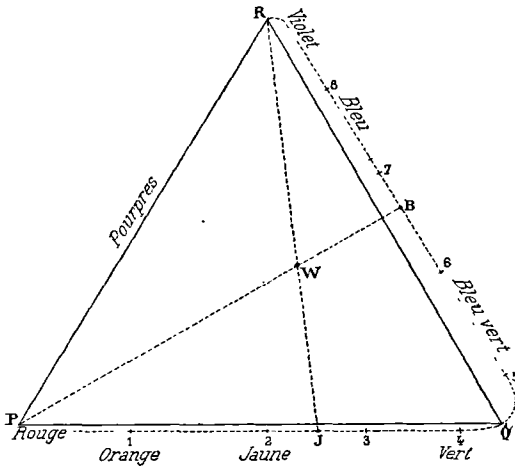


Fig. 118.

Par exemple, dire que le bleu $B' = 0^u,467$ est représenté par le symbole :

$-33P + 33Q + 905R$, signifie que le point B' est au delà de la droite QR par rapport au point P, et très rapproché du point R.

C'est par de telles expériences qu'on est parvenu à construire la table des couleurs (fig. 118). Réciproquement, cette table permet de déterminer la teinte résultant d'un mélange

d'un nombre quelconque de radiations simples dont les intensités sont données.

207. Couleurs complémentaires. Ton, saturation. Pourpres. — Joignons le blanc W à une couleur simple quelconque Y (fig. 117). Quand le point figuratif passe de W à Y, on part du blanc pur pour aller à une radiation simple. Les couleurs intermédiaires sont caractérisées par le même *ton* plus ou moins dilué.

Le *degré de saturation* est mesuré par le rapport $\overline{Wy} : y\overline{Y}$.

Aucune couleur simple *saturée* ne peut s'obtenir par le mélange d'une ou plusieurs autres, puisque le contour PJQBR des couleurs simples est convexe.

On appelle complémentaires deux couleurs simples ou complexes qui, prises en quantités convenables, fournissent du blanc. Il suffit que leurs points figuratifs soient sur une droite passant par le point W, et de part et d'autre de ce point.

En particulier, on peut obtenir du blanc par le mélange dans un rapport convenable de deux radiations simples. Ce n'est possible évidemment que si elles ne sont pas comprises sur la portion de courbe J ($\lambda = 0^{\mu},570$) Q B ($\lambda = 0^{\mu},492$). Les radiations JQB n'ont pas de complémentaires.

Si l'on porte en abscisses le λ d'une couleur simple et en ordonnées le λ de la complémentaire, on obtient deux morceaux de courbes hyperboliques, symétriques par rapport à la bissectrice des axes. La figure montre la remarquable *irrégularité* des couleurs complémentaires dans le spectre. Quand on avance de R en B sur l'axe des abscisses, le λ de la couleur complémentaire change d'abord avec une extrême lenteur, puis avec une extrême rapidité.

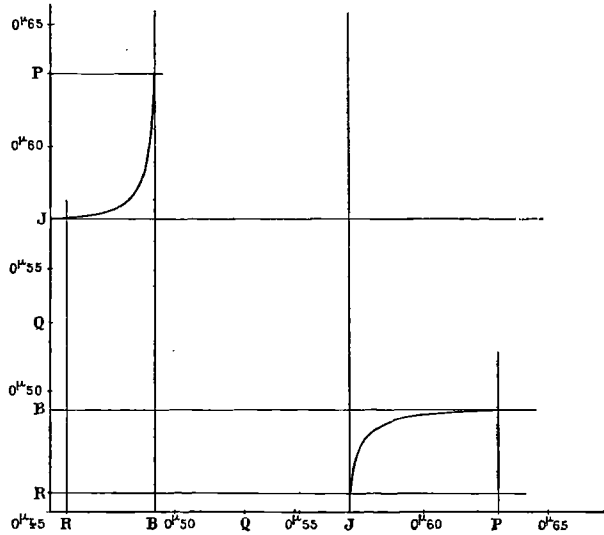


Fig. 119.

Ce fait est d'accord avec cet autre qu'aux extrémités du spectre, le ton des couleurs varie très lentement par rapport à la longueur d'onde, tandis qu'au milieu il varie très rapidement.

Aucune radiation simple ne se trouve entre les couleurs principales P et R (fig. 118).

La droite PR caractérise les *pourpres* qu'on obtient par des mélanges dans un rapport convenable de rouge et de violet. D'où la réponse à la question vulgaire : *existe-t-il d'autres sensations que celles éprouvées en regardant un spectre pur plus ou moins lavé de blanc?* Il en existe une infinité qui correspondent à la région PWR du plan : elles peuvent être considérées comme des mélanges des couleurs simples P et R plus ou moins lavées de blanc.

Toute la série des roses fait partie de ce groupe.

208. Blanc d'ordre supérieur. Spectres cannelés. — Toutes les couleurs simples visibles sont représentées sur la courbe $PJQBR$.

Comptons les distances s sur cette courbe à partir du point P : $\lambda = f(s)$. D'après l'unité choisie pour comparer les diverses couleurs, nous pouvons dire que le point W est le centre de gravité d'un fil de matière homogène, ayant la forme PJQBR et dont la section droite S est en chaque point s proportionnelle à $d\lambda : ds$.

Amincissons ce fil suivant une loi périodique quelconque, mais de manière que *somme toute* la perte de matière pour chaque élément fini soit sensiblement la même fraction de la matière initiale. Le centre de gravité reste au point W; nous obtenons encore du blanc que nous appelons *blanc d'ordre supérieur*. Analysé au spectroscope, il donne un *spectre cannelé* : les intensités varient périodiquement en fonction de la longueur d'onde. Comme cas particulier, il arrive que les minimums sont nuls; le spectre est traversé par des bandes au centre desquelles la lumière fait complètement défaut.

Les spectres cannelés ont une importance capitale; nous les retrouverons souvent.

209. Position dans le plan des sensations fondamentales. Images accidentelles. — La seule condition théorique à laquelle doivent satisfaire les points $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$, est que le triangle $\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3$ contienne la courbe précédemment obtenue pour les couleurs simples, *puisque'il doit contenir toute sensation possible*. Cela ne suffit pas pour situer les points. De ce que la courbe des couleurs simples ne se confond pas avec deux droites, il résulte que, où qu'on place les points $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$, *certaines sensations sont possibles qui ne peuvent être obtenues par aucun mélange de couleurs*, puisque leurs points figuratifs sont en dehors de tout polygone ayant des couleurs simples à ses sommets.

Toutefois, comme l'expérience prouve que les sensations colorées *possibles* ne diffèrent qu'exceptionnellement des sensations obtenues avec des mélanges de couleurs simples ou complexes, nous pouvons conclure que le triangle $\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3$ ne diffère pas beaucoup du triangle PQR, ou plus exactement du triangle le plus petit possible contenant la droite PR et la courbe PJQBR.

Les couleurs *qu'on ne peut produire immédiatement par la lumière extérieure*, étant toutes plus éloignées du blanc que les couleurs spectrales, doivent être plus saturées : les couleurs spectrales sont pourtant les couleurs *objectives* les plus saturées que nous connaissons.

Si l'on découvre un instant les yeux accommodés sur un objet lumineux et qu'on les referme, on continue à percevoir une image dite *accidentelle*. Elle peut être de grande intensité et durée, si l'objet est très lumineux. Il nous est impossible d'insister sur les circonstances de ces phénomènes. Nous les signalons seulement parce qu'ils permettent d'obtenir des couleurs plus saturées que les couleurs spectrales pures observées directement. L'expérience consiste à

fatiguer l'œil par la vision prolongée d'une couleur spectrale pure intense; on projette alors l'image accidentelle sur la couleur complémentaire spectrale pure; c'est-à-dire que, tenant l'œil ouvert, on regarde un fond uniformément éclairé par la complémentaire.

Aux points fatigués de la rétine, on perçoit une couleur plus saturée qu'aux points de la rétine environnants. Donc les couleurs objectives les plus saturées (couleurs spectrales pures) ne produisent pas, dans l'œil non fatigué, la sensation la plus saturée possible. Nous ne pouvons l'obtenir qu'en rendant préalablement l'œil insensible pour la couleur complémentaire.

210. Dyschromatopsie. — On appelle ainsi les maladies de la vision colorée.

Prenons un cas extrême. Supposons qu'une des sensations élémentaires $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$, soit abolie dans l'œil; comme les points correspondant à ces sensations diffèrent peu des points P, Q, R, raisonnons comme s'ils coïncidaient.

Si l'œil est insensible à la couleur principale P (daltonisme), toutes les couleurs situées sur une droite PD quelconque passant par P paraissent identiques (fig. 117); car elles ne diffèrent les unes des autres que par la masse relative de la couleur principale P.

Elles ont même intensité, pourvu que les masses des couleurs Q et R restent les mêmes.

Toutes les sensations colorées sont dès lors représentées sur la droite RQ. La sensation de blanc correspond à la droite entière PB.

Pour un œil sain, les couleurs PW et WB sont complémentaires: pour l'œil où la sensation P est abolie, ces couleurs se confondent. Ainsi on peut trouver une série de couleurs complémentaires qui paraissent blanches au daltonien.

Par une absorption de 0^{sr},60 de santonate de soude, on obtient le daltonisme du violet; la sensation R est abolie. Toutes les teintes peuvent s'obtenir pour ce malade par des mélanges de rouge P et de vert Q. Il confond avec du blanc les teintes de la droite RWJ; il voit donc blancs des jaunes et des violets.

Bien entendu, ce sont là des cas extrêmes; ils suffisent à faire comprendre les intermédiaires.

La cécité pour l'une des sensations fondamentales peut n'être que partielle.

211. Photographie des couleurs, méthode pigmentaire. — Voici le procédé imaginé par Ducos de Hauran en 1869, tel qu'il vient d'être réalisé par MM. Lumière.

La première opération consiste à obtenir des grains de fécule de pomme de terre ayant de 15 à 20 microns de diamètre, à les diviser en trois lots qu'on teint respectivement *en rouge orangé, en vert et en violet*. Nous reviendrons plus loin sur ce qu'il faut entendre par

là. Toujours est-il que les grains *rouge orangé* laissent *principalement* passer les rouges et les orangés, et absorbent notablement ou complètement les autres couleurs; de même *mutatis mutandis* pour les grains verts et violets.

Une fois les poudres colorées et desséchées, on les mélange en proportion telle que la poudre obtenue soit incolore par transmission. On étend cette poudre sur une lame de verre recouverte d'un enduit poisseux : *on arrive à obtenir une couche de grains se touchant tous, sans vide ni superposition*. On constitue ainsi un écran dans lequel chaque millimètre carré contient 8 à 9000 petits écrans élémentaires.

On l'isole par un vernis et on superpose une couche d'émulsion panchromatique au gélatino-bromure.

On expose dans la chambre noire, en tournant le verre au devant de la lumière et en plaçant un écran de verre jaune devant l'objectif, afin de compenser la sensibilité toujours plus grande de l'émulsion pour les violets (§ 178).

Les rouges et couleurs voisines impressionnent la plaque sous les écrans rouges; les verts l'impressionnent sous les écrans verts, les violets sous les écrans violets.

1° Développons et fixons à la manière ordinaire : *nous aurons comme négatif une image colorée complémentaire*, puisque l'argent réduit obstruera les écrans qui auront laissé passer de la lumière.

2° Mais, après développement, détruisons l'argent réduit par un bain de permanganate de potasse :

(eau = 1000 gr., permanganate = 2 gr., acide sulfurique = 10 cm³).

Nous rétablissons la transparence là où se trouvent les écrans qui ont joué un rôle.

3° Exposons ensuite à la lumière, développons et fixons. Nous rendons opaque la couche sous les écrans qui n'ont joué aucun rôle : nous réalisons ainsi un *positif*, l'image est inversée.

212. Remarques sur le procédé précédent. — Le procédé précédent donne des résultats merveilleux; mais ce serait une erreur de croire que la reproduction des teintes soit fidèle. On peut poser en principe *qu'elle est d'autant plus inexacte que la couleur est plus simple*.

Photographions un spectre pur; nous obtenons le plus souvent trois bandes *monochromes* séparées par des intervalles obscurs. Cela signifie que les écrans orangés ne laissent passer que les radiations de longueurs d'onde comprises entre λ_1 et λ_2 ; les écrans verts que les radiations allant de λ_3 à λ_4 , les écrans violets que les radiations allant de λ_5 à λ_6 , les longueurs d'onde se rangeant dans l'ordre inverse des indices. De sorte qu'il existe deux bandes sombres allant de λ_2 à λ_3 et de λ_4 à λ_5 . Dans les premières plaques mises dans le commerce, la

première bande (dans le jaune) avait même une épaisseur énorme. Les plaques sont parfaitement opaques pour ces bandes; si l'on photographie des teintes voisines de ces bandes, elles sont entièrement dénaturées. C'est, par exemple, ce qui arrivait avec les premières plaques vendues pour les fleurs *jaunes d'or*.

Il est clair que suivant la teinture des grains de fécule, on obtiendra des résultats les plus divers. On doit tenir compte à la fois des trois teintes des grains et de la sensibilité des plaques, qui est loin d'être uniforme, même pour les plaques panchromatiques: on doit donc faire intervenir, comme nouvelle arbitraire, un écran atténuant certaines couleurs. Bref, on obtient des résultats attrayants, mais qui ne peuvent avoir aucune prétention à l'exactitude.

Plaçons dans le plan représentatif des couleurs les trois points qui représentent les teintes des trois espèces de grains: il est clair qu'on n'obtiendra jamais de teintes *plus saturées* que celles qui se trouvent dans le triangle obtenu en joignant ces points. Or généralement ces teintes sont loin d'être *saturées*.

Voici un singulier paradoxe: par des mélanges convenables de ces trois couleurs on obtient *tous* les points à l'intérieur du triangle, *et par conséquent ceux qui correspondent aux bandes noires dont il est parlé plus haut*. Supposons, pour préciser, qu'une de ces bandes comprenne la raie D. Si on photographie la lumière du sodium, on n'obtient rien; mais si on photographie une lumière *complexe* ayant même teinte que la raie D, on obtient une reproduction assez exacte.

Deux couleurs de même teinte et de compositions différentes seront généralement traitées de manières très différentes par le procédé photographique que nous venons de décrire.

CHAPITRE IV

INTERFÉRENCES DE LA LUMIÈRE NATURELLE

213. Représentation et composition des vibrations. — Dans ce Chapitre, nous étudions les phénomènes d'interférence *en lumière naturelle*. Il nous est impossible, dès maintenant, de préciser la constitution d'une telle lumière : *nous n'y tâcherons même qu'en Électroptique.*

Bien que les phénomènes de ce Chapitre s'expliquent aussi bien par des vibrations longitudinales que par des vibrations transversales, *le lecteur doit se représenter des vibrations transversales, c'est-à-dire normales à la direction de propagation.*

Bien que dans les expériences nous utilisions de la lumière *naturelle*, nous raisonnons toujours *comme si l'azimut de vibration était invariable*, c'est-à-dire comme si la lumière était *rectilignement polarisée*.

Nous pouvons donc à chaque instant représenter la vitesse ou le déplacement du mobile fictif vibrant par un vecteur normal à la direction de propagation, d'azimut invariable et de grandeur variable. Nous admettrons que sa variation d'amplitude est sinusoidale par rapport au temps; la vibration monochromatique que nous envisagerons tout d'abord, a donc pour expression générale :

$$a = A \sin (\omega t - \alpha) = A \sin \left(\frac{2\pi t}{T} - \alpha \right);$$

A est l'amplitude, T la période; α est la phase parfaitement déterminée quand l'origine des temps est choisie.

Le long d'un rayon, la phase varie; *c'est en cela même que consiste la propagation d'un mouvement permanent.* Si z mesure le déplacement compté le long du rayon, le vecteur a pour expression :

$$a = A \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right) - \alpha \right].$$

λ est la longueur d'onde; l'équation : $\lambda = VT$, définit la vitesse de propagation.

On dit qu'il y a *interférence* chaque fois que deux ou plusieurs

mouvements se composent en un seul. Nous sommes donc ramenés à composer des vecteurs parallèles, problème déjà rencontré et résolu au § 260 du Tome III : nous y renvoyons le lecteur. Nous reviendrons d'ailleurs sur la *règle de Fresnel* au § 272.

214. Expérience fondamentale d'interférence. — Nous avons longuement expliqué dans le Cours de Mathématiques (§ 165 et sq.) l'expérience fondamentale dite *des trous d'Young*. Nous résumerons les résultats.

Deux faisceaux monochromatiques sont issus *par diffraction* de deux trous a et b , éclairés par un point lumineux A. Ils sont à peu

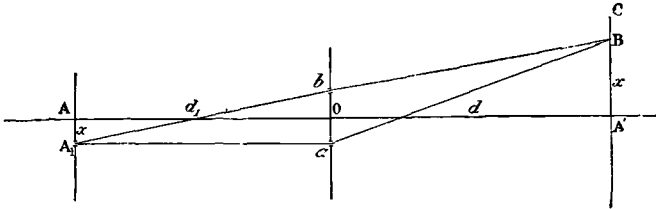


Fig. 120.

près parallèles et se rencontrent au point B, après avoir parcouru des chemins géométriquement ou optiquement inégaux.

Les vibrations qui constituent la lumière, ont pour les deux faisceaux une différence de phase, fonction de la position du point B dans le plan d'observation. Elles se composent en un mouvement vibratoire dont l'amplitude dépend de la différence de phase. L'intensité de la lumière, proportionnelle au carré de l'amplitude, est donc elle-même fonction de la position du point de rencontre. Il résulte de là une distribution périodique de l'intensité, des alternatives de lumière et d'ombre, qu'on appelle des *franges*.

Posons : $\overline{ab} = l$, $\overline{OA'} = d$, $\overline{A'B} = x$.

La différence de marche \overline{ac} est donnée par la formule :

$$\overline{ac} = \frac{lx}{d} = k \frac{\lambda}{2}.$$

Les maximums sont définis par la condition que k soit un entier pair, les minimums par la condition que k soit un entier impair.

A la vérité, le phénomène est plus complexe. On distingue :

1° des franges dites de *diffraction*, circulaires et entourant la trace des droites qui joignent le centre du trou A au centre de chacun des trous a et b ; 2° des franges rectilignes perpendiculaires à la droite qui joint les centres des trous et qui sont les franges dites d'*interfé-*

rence. Les deux systèmes se coupent et donnent un ensemble fort beau et d'une observation très facile¹.

Cette distinction entre franges de diffraction et franges d'interférence est d'ailleurs arbitraire, comme nous aurons l'occasion de le montrer (§ 290).

Ne considérons que les franges d'interférence. On peut représenter l'amplitude de la vibration résultante par l'expression :

$$A \sin(\omega t - \alpha) \cos \pi \frac{x}{e}, \quad \text{en posant : } e = \frac{d\lambda}{l}. \quad (1)$$

e est la largeur d'une frange. L'intensité, proportionnelle au carré de l'amplitude, est donc :

$$I = A^2 \cos^2 \pi \frac{x}{e},$$

expression indépendante de la phase arbitraire α .

Les figures 121 et 122 sont des photographies de franges d'inter-

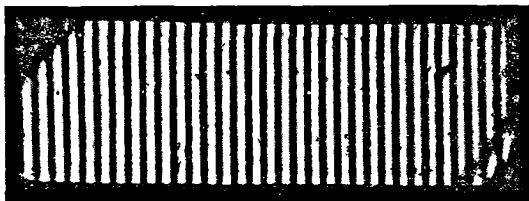


Fig. 121.

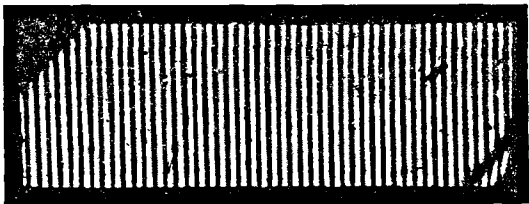


Fig. 122.

férence : la figure 121 en lumière monochromatique rouge, la figure 122 en lumière monochromatique violette. Les longueurs d'onde des radiations utilisées sont à peu près dans le rapport 3 : 2.

Considérons les phénomènes non plus sur la droite $A'BC$, mais dans l'espace.

La condition d'un maximum d'intensité est que la différence des distances aux points a et b soit égale à un nombre entier de longueurs d'onde. Nous définissons ainsi dans

le plan de la figure une hyperbole, et dans l'espace un hyperboloïde de révolution autour de AA' comme axe. Il existe donc dans l'espace des surfaces alternativement sombres et brillantes : les franges d'interférence sont les intersections de ces surfaces par le plan de l'écran.

¹ Pour être exact, ajoutons qu'il existe, en plus des anneaux et des franges normales à la droite passant par le centre des trous, deux systèmes de franges rectilignes et parallèles qui se coupent en forme de croix de Saint-André et qui sont également inclinées par rapport aux franges rectilignes dont il est parlé dans le texte.

On peut, *tout en conservant le point lumineux éclairant A*, remplacer les trous *a* et *b* par des fentes parallèles. Nous en comprenons immédiatement la raison. On peut en effet décomposer les deux fentes en une série de trous a_1b_1, a_2b_2, \dots , respectivement placés sur une perpendiculaire aux deux fentes. Séparément ces systèmes donnent, *pour le même point lumineux A*, le même système de franges d'interférence *au voisinage de la direction OA'*. Car les hyperboloïdes dont nous avons parlé plus haut peuvent être, sans erreur sensible, remplacés par des cylindres hyperboliques qui sont superposés pour les divers systèmes de trous.

Bien entendu, les franges dites de diffraction sont complètement modifiées.

On peut enfin remplacer le point *A* par une fente parallèle aux fentes *a* et *b*. Mais ceci demande quelques explications.

215. Éclairage par deux sources de dimensions infiniment petites. — Pour qu'une interférence *stationnaire* puisse avoir lieu entre deux faisceaux émis par les points *a* et *b* *considérés comme sources secondaires*, il faut qu'il existe entre les vibrations de ces points une différence de phase invariable. Cela n'implique pas que la source ponctuelle *A* soit unique, pourvu que les vibrations des sources ponctuelles formant une source finie soient *liées, cohérentes*, c'est-à-dire pourvu que les différences de leurs phases soient invariables.

Considérons, par exemple, deux sources ponctuelles *A* et A_1 *monochromatiques et de mêmes longueurs d'onde*. Appelons x_1 la distance AA_1 , et soit α_1 la phase caractéristique de la vibration émise par la source A_1 . Si elle existait seule, elle produirait sur la droite *A'BC*, par l'intermédiaire des trous *a* et *b* servant de sources secondaires, une amplitude (Cours de Mathématiques, § 171) :

$$A_1 \sin(\omega t - \alpha_1) \cos \pi \left(\frac{x}{e} + \frac{x_1}{e_1} \right), \quad \text{en posant : } e_1 = \frac{d_1 \lambda}{l}. \quad (2)$$

Mais les mouvements (1) et (2) peuvent interférer; ils donnent une amplitude variant suivant une loi analogue. Nous avons encore un système de franges parfaitement net.

Calculons l'intensité en un point *B*; il vient aisément :

$$A^2 \cos^2 \pi \frac{x}{e} + A_1^2 \cos^2 \pi \left(\frac{x}{e} + \frac{x_1}{e_1} \right) + 2AA_1 \cos(x - \alpha_1) \cos \pi \frac{x}{e} \cos \pi \left(\frac{x}{e} + \frac{x_1}{e_1} \right), \quad (3)$$

expression bien déterminée tant que $x - \alpha_1$ est bien déterminé.

Nous aurions obtenu évidemment le même résultat en déterminant d'abord les mouvements totaux des sources *secondaires a* et *b*, puis en faisant interférer les mouvements qu'elles envoient au point *B*.

La résultante de plusieurs vecteurs (ici quatre) ne dépend pas de l'ordre dans lequel on les compose.

Mais on doit considérer comme absolument indépendantes les vibrations émises par des points lumineux *monochromatiques* différents et *suffisamment éloignés* A et A₁. Il existe à chaque instant entre ces vibrations une différence de phase $\alpha - \alpha_1$, parfaitement déterminée, qui se maintient invariable pendant un grand nombre de *millions* d'oscillations, puis qui varie plus ou moins brusquement. Le nombre d'oscillations par seconde se chiffrant par *milliards*, la différence de phase en une seconde prend, au point de rencontre des faisceaux émis par les sources A et A₁, et par conséquent au point B, toutes les valeurs possibles; il faut donc additionner non pas les amplitudes, mais les intensités : l'*intensité moyenne* est la somme des intensités.

En effet, supposons qu'en une seconde $\alpha - \alpha_1$ prenne *également* toutes les valeurs possibles; la somme des valeurs de $\cos(\alpha - \alpha_1)$ est nulle. La valeur moyenne de l'intensité se réduit aux deux premiers termes de l'expression (3), c'est-à-dire *que tout se passe comme si nous superposions les deux systèmes de franges qui résultent séparément des sources A et A₁*.

Il y a bien une interférence à chaque instant; mais en moyenne tout se passe comme si elle ne se produisait pas.

Dans le cas de deux sources ponctuelles, il est facile de prévoir les phénomènes à mesure qu'on augmente la distance AA₁. Les franges passent périodiquement par des nettetés maxima (les maximums de l'un des systèmes coïncident avec les maximums de l'autre) et minima (les maximums de l'un des systèmes coïncident avec les minimums de l'autre).

216. Éclairage par une source monochromatique de dimensions finies. — Montrons que la possibilité d'obtenir des interférences régulières au moyen des faisceaux émis par les points a et b (fig. 120) dépend de l'angle sous lequel on voit de ces points la source lumineuse finie.

Nous pouvons ramener le problème à un autre plus général : *A quelle condition une source finie A monochromatique, dont les points ont des vibrations incohérentes, donne-t-elle lieu à un élément d'onde, c'est-à-dire à une surface sur laquelle nous pouvons admettre que les phases de tous les points sont identiques à chaque instant ?*

Il en serait évidemment ainsi, si tous les points de la source finie A étaient à la même distance de tous les points de la surface E (fig. 123). Car le mouvement résultant en chaque point de E se trouverait de la même manière, quel que soit ce point, par la composition des mouvements issus de tous les points de A.

Nous sommes donc conduits à chercher quand la condition précédente est satisfaite, au moins approximativement.

Soit A (fig. 123) une source lumineuse formant un disque de rayon r ; déterminons à la distance d le rayon x d'un disque E par la condition que la différence des chemins $\overline{MP} - \overline{NP}$ de deux points quelconques M et N à un point P quelconque de la source, soit inférieure à une fraction donnée $m\lambda$ de la longueur d'onde.

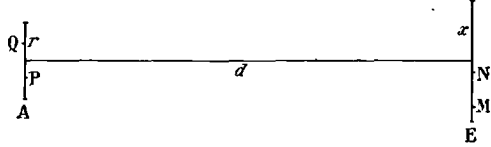


Fig. 123.

Un calcul très simple, identique à celui qui fournit la formule du § 214, donne la condition :

$$\frac{2rx}{d} = m\lambda, \quad x = \frac{d}{r} \frac{m\lambda}{2} .$$

Vu la symétrie de la formule en r et en x , elle exprime aussi la condition pour que la différence $\overline{QM} - \overline{PM}$ des chemins de deux points quelconques de la source à un point du disque E soit inférieure à la même fraction $m\lambda$ de la longueur d'onde.

En supposant que la source soit réduite à un point, il y aurait une petite différence de phase entre les vibrations aux points M et N. Mais la source est étendue, et les mouvements de ses points sont indépendants les uns des autres. Si l'on veut que malgré cela les mouvements de tous les points du disque restent pratiquement de même phase, il faut que x soit déterminé de manière que m soit très petit. *Le rayon du disque qui satisfait à cette condition est en raison inverse de l'angle $r : d$ sous lequel on voit la source d'un point quelconque de sa surface.*

Par exemple, est-il possible d'éclairer les fentes a et b (fig. 120) avec la lumière directe du Soleil et d'obtenir des franges nettes ?

Pour répondre à la question, cherchons quel rayon x doit avoir le disque E pour que m soit suffisamment petit, égal à $1/4$ par exemple ; c'est-à-dire pour que les différences des chemins entre un point quelconque de la source A et un point quelconque du disque E soient inférieures à un quart de longueur d'onde. Il semble qu'on ne puisse pas espérer des mouvements liés si m dépasse de beaucoup cette limite.

Pour le Soleil : $r : d = \text{tg } 16' = 5 \cdot 10^{-3}$.

Soit $\lambda = 5 \cdot 10^{-4}$ millimètres; $x = 1/80$ millimètre. Les trous a et b (fig. 120) dans l'expérience d'Young, qui sont généralement à 1 ou 2 millimètres de distance, se trouvent dans des régions où les vibrations sont indépendantes. *Il ne peut y avoir interférence régulière dans le plan d'observation A'B.*

Mais prenons comme source un trou d'un quart de millimètre de

diamètre et placé à deux mètres. L'angle $r : d$ est 80 fois plus petit que dans l'expérience précédente. On peut espérer des mouvements *dépendant les uns des autres, ayant les uns par rapport aux autres des différences déterminées de phase*, sur un disque de rayon 80 fois plus grand.

Nous admettons dans ce qui précède la complète indépendance des mouvements émis par deux points voisins. Il faut préciser les conditions de ce voisinage.

Il existe assurément une dépendance entre les vibrations de sources *très rapprochées*. Par exemple (§ 349), deux particules ultramicroscopiques voisines assez brillantes (distantes de 1 à 2^µ, par exemple) donnent le système complexe des franges d'Young. Bien que relativement éloignées et indépendantes en apparence, les deux particules ont donc leurs mouvements vibratoires *liés*; il existe entre eux une différence de phase parfaitement déterminée.

Cette expérience n'infirme en rien ce qui précède. En parlant de l'indépendance des sources, on veut dire qu'il existe pour des variations de position de l'ordre du millimètre, par exemple, une variation rapide de phase dont le sens n'est pas déterminé et varie d'un instant à l'autre. Pour deux points à des distances de l'ordre du micron, l'incohérence peut devenir un simple balancement autour d'une différence invariable de phase.

Pour obtenir un système de franges nettes avec une source étendue, il faut donc :

1^o ou bien que chaque point de la source donne le même système, de manière que la superposition des effets des divers points soit identique au phénomène pour une source ponctuelle : c'est ce qu'on obtient *pour les franges d'interférence* quand on remplace le point A dans l'expérience d'Young par une fente parallèle aux fentes a et b (fig. 120) ;

2^o ou bien que malgré l'étendue de la source, les faisceaux utilisés en chaque point du plan d'observation ne proviennent effectivement que d'un point de la source : nous trouverons de nombreux exemples de ce cas.

217. Projection d'un systèmes de frange. Théorème de Malus. — On entend par *chemin optique* le produit du chemin géométrique par l'indice de réfraction.

Toute l'Optique géométrique est basée sur ce postulat (§ 43) que *pour aller d'un point B à un point B', le chemin réel est, parmi tous les chemins possibles, le chemin maximum ou minimum* (Principe de Fermat).

La Théorie des ondes l'interprète en disant que le chemin réel correspond au parcours le plus rapide ou le plus lent : pour elle, en

effet, l'indice n d'un milieu est le rapport de la vitesse de propagation dans le vide à la vitesse de propagation dans le milieu.

S'il existe une infinité de chemins pour aller d'un point B à un autre point B', ils sont nécessairement égaux. D'où le théorème fondamental : *Tous les chemins optiques qui vont d'un point à son image sont égaux.*

La Théorie des ondes nous permet de dire que la différence de phase entre la vibration au point objet B et la vibration au point image B' est la même à chaque instant, sur quelque rayon qu'on la calcule.

En effet, soit V et V_1 les vitesses dans le vide et dans le milieu d'indice n ; soit λ et λ_1 les longueurs d'onde correspondantes. On a :

$$\lambda = VT, \quad \lambda_1 = V_1T, \quad \frac{\lambda_1}{\lambda} = \frac{V_1}{V} = \frac{1}{n}, \quad \lambda_1 = \frac{\lambda}{n}.$$

Dans le chemin géométrique e , il y a donc :

$$\frac{e}{\lambda_1} = \frac{en}{\lambda},$$

longueurs d'onde. Il revient au même de calculer le nombre de longueurs d'onde λ_1 dans le chemin e , ou le nombre de longueurs d'onde λ dans le chemin en .

La variation de phase due au chemin e est :

$$2\pi \frac{e}{\lambda_1} = 2\pi \frac{en}{\lambda}.$$

Puisque λ est une caractéristique de la radiation indépendante du milieu considéré, écrire que Σen est le même pour tous les rayons allant de B à son image B', revient à écrire que la différence de phase entre la vibration au point B et la vibration au point B' est la même, sur quelque trajectoire réelle qu'on la calcule.

Voici comment l'expérience donne immédiatement la preuve de cette proposition.

Il est clair que si nous recevons un système de franges sur un verre dépoli, nous pouvons le regarder soit à l'œil nu, soit avec un instrument d'optique quelconque : au grossissement près, le phénomène ne sera pas modifié. Observons-le avec un viseur, puis supprimons le verre dépoli : *nous voyons le système de franges sans aucune modification.* D'où la proposition suivante : *l'image d'un système de franges s'obtient absolument comme si c'était un objet réel.*

Cherchons à quelles conditions ce résultat est possible. Au point B du système se coupent deux faisceaux interférents qui ont une certaine différence de phase; puisqu'en B', conjugué de B à travers l'instrument d'optique, les deux faisceaux sont encore dans le même état d'interférence, ont encore la même différence de phase, *bien qu'ils aient traversé l'instrument suivant des trajectoires différentes,*

il faut que tous les chemins qui vont à travers l'instrument du point B au point conjugué B' soient optiquement équivalents : c'est en cela que consiste le théorème de Malus, corollaire du principe de Fermat.

218. Démonstration directe du théorème de Malus. — Nous avons donné de ce théorème une démonstration absolument générale; mais il n'est pas inutile de prouver directement un cas particulier (fig. 124).

Nous allons donc le démontrer pour un dioptré; il le sera du coup

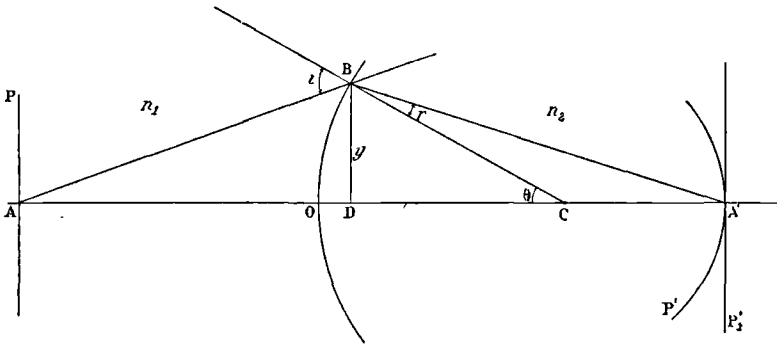


Fig. 124.

pour un instrument centré quelconque. Reprenons les notations et les conventions de signes du § 17. Dans la figure 124, p est négatif et p' positif, puisque ces quantités sont prises positivement dans le sens de propagation de la lumière; R est positif.

Évaluons la quantité :

$$\begin{aligned}
 & n_1 \overline{AB} + n_2 \overline{A'B}, \\
 -\overline{AB} &= p \sqrt{1 + \frac{y^2}{p^2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{R} \right)^2} = p + \frac{y^2}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{R} \right), \\
 \overline{A'B} &= p' + \frac{y^2}{2} \left(\frac{1}{p'} - \frac{1}{R} \right); \\
 [n_1 \overline{AB} + n_2 \overline{A'B}] - (-n_1 p + n_2 p') &= \\
 & \frac{y^2}{2} \left[-n_1 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{R} \right) + n_2 \left(\frac{1}{p'} - \frac{1}{R} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Pour que cette quantité soit nulle, il faut que :

$$-\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{p'} = \frac{n_2 - n_1}{R},$$

équation qui exprime que A' est l'image de A à travers le dioptré (§ 18).

Le théorème est donc démontré pour un instrument centré si complexe qu'il soit. Nous le retrouverons plus loin sous une forme différente.

En particulier considérons un faisceau cylindrique et son foyer conjugué F' dans le plan focal principal d'une lentille. Il est censé provenir d'un point F situé à l'infini dans la direction $F'O$. La distance de ce point F à tous les points d'un plan P normal au faisceau est évidemment la même. Il résulte donc du théorème de Malus que les distances optiques $ACDF'$, $A'OF'$, $A''C'D'F'$, ..., comptées d'un point quelconque du plan P_1 normal au faisceau jusqu'au foyer F' , sont égales.

Pour savoir quelles sont les différences de phases entre les rayons qui se composent en F' , il suffit de calculer les différences de phase entre les cylindres élémentaires constituant le faisceau cylindrique,

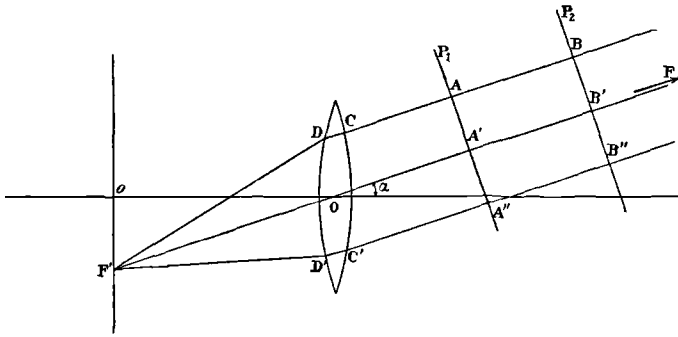


Fig. 125.

sur un plan P quelconque normal au faisceau. C'est là une proposition dont nous ferons le plus fréquent emploi.

Tous les rayons qui se croisent en un point A dans un certain état de vibration, se croisent au même instant au conjugué A' , *non pas dans le même état de vibration*, mais dans un état qui diffère du premier par un retard constant et indépendant de la trajectoire à travers l'instrument. L'amplitude du mouvement résultant, *qui est fonction non des phases absolues, mais des différences de phase*, n'est modifiée que par un facteur qui dépend des pertes de lumière par réflexion et absorption, et du grossissement. Nous négligeons tous les changements de phase qui proviennent de la réfraction sous des incidences différentes : nous aurons l'occasion plus tard de chercher à quelles conditions elles sont effectivement négligeables (voir Électroptique).

Le théorème s'applique évidemment aux miroirs, car la théorie du dioptré leur convient pourvu qu'on pose : $n_1 = -n_2$.

En particulier il suffit d'une figure pour se convaincre que les rayons émanent *avec la même phase* du conjugué A' d'un point A

par rapport à un miroir *plan*, et de ce point A lui-même. On peut dire que le chemin optique qui sépare le point A et son image est nul. Nous allons trouver une application intéressante de cette remarque (§ 220), qui rentre comme cas particulier dans les considérations du § 69.

219. Modification de l'expérience d'Young. — Dans l'expérience d'Young, les faisceaux issus de A et de B n'ont pas de parties géométriquement communes; les franges ne sont dues qu'à la lumière *diffractée*. Aussi manquent-elles d'éclat, même avec les sources lumineuses les plus intenses. Heureusement, il est possible de modifier la technique en s'appuyant sur les résultats du paragraphe précédent. Une lentille L (fig. 126) donne en A' l'image de la source A. Nous

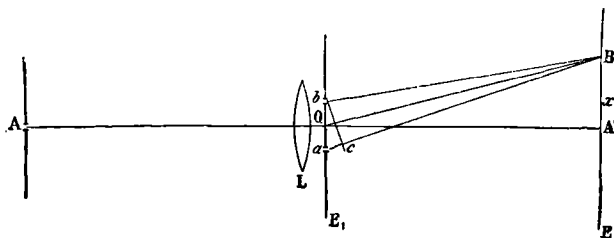


Fig. 126.

installons contre cette lentille l'écran portant les trous ou les fentes parallèles. Nous observons autour de A' un système de franges de diffraction et d'interférence plus lumineux et aussi plus simple que sans l'emploi de la lentille.

Le gain de lumière vient de ce que les faisceaux issus de a et de b convergent maintenant au lieu de diverger. Les phénomènes sont bien encore dus à la diffraction (sauf au point A' lui-même), mais celle-ci s'exerce plus près des parties géométriquement éclairées. D'autre part, le phénomène est simplifié en ce sens que les franges dites de diffraction forment maintenant un système unique, le même pour l'une et l'autre ouverture; on le démontre en les recouvrant successivement par un écran.

La théorie des franges dites d'interférence est immédiate.

Puisque A' est l'image de A, les chemins optiques $A b A'$ et $A a A'$ sont égaux; la différence de phase entre les faisceaux interférents est nulle, quelle que soit alors la différence des chemins $\overline{aA'} - \overline{bA'}$.

En un point B, à une distance x du point A', la différence des chemins a varié de lx/d . Nous aurons donc un système dont la frange centrale est en A' et dont l'écartement est complètement déterminé par la distance $OA' = d$, et la distance $ab = l$. Il est

remarquable que nous puissions déplacer le portetrous E_i dans son plan, sans modifier la position des franges ni leur écartement.

On trouvera au § 166 du Cours de Mathématiques une figure schématique donnant l'aspect des franges pour deux fentes, la source lumineuse étant elle-même une fente parallèle.

Quand on emploie comme source et comme ouvertures de petits trous, on aperçoit un système d'anneaux barré par des franges rectilignes et parallèles. Les dimensions des anneaux dépendent du diamètre des trous a et b et croissent quand celui-ci diminue; l'écartement des franges rectilignes dépend de la distance des trous. Si donc on emploie deux très petits trous d'aiguille distants l'un de l'autre de quelques millimètres, les franges circulaires sont relativement larges; les franges rectilignes *visibles en lumière blanche* (une dizaine) sont toutes comprises dans le centre lumineux du phénomène.

En définitive, pour observer commodément les apparences, on emploie comme source un trou ou une fente, éclairés par l'arc, et qu'on vise avec une lunette. On installe contre l'objectif de la lunette une feuille de clinquant dans laquelle on a percé deux petits trous, ou tracé deux fentes parallèles.

Nous ne saurions trop engager le lecteur à répéter cette expérience en en variant le plus possible les conditions.

220. Miroirs de Fresnel. — Soit M_1 et M_2 deux miroirs plans en verre noir, réfléchissant par conséquent sur leur surface antérieure. Ils font un très petit angle mesuré sur la circonférence OA par l'arc m_1m_2 . Leur intersection, normale au plan de la figure, se projette en O . Soit A un point lumineux. Après réflexion sur les miroirs, tout se passe comme s'il existait deux sources A_1 et A_2 , *dans le même état vibratoire que la source A* . Nous obtenons un système de franges comme dans l'expérience d'Young. Le phénomène est naturellement très lumineux, puisque les faisceaux réfléchis ont une partie géométriquement commune. Le centre des franges (frange brillante, différence de marche nulle) est en O' , sur la perpendiculaire élevée au milieu de A_1A_2 , ou, ce qui revient au même, sur la bissectrice de l'angle A_1OA_2 .

On obtient le même système en remplaçant le point A par une fente parallèle à l'intersection des miroirs. Chaque point de cette fente fournit en effet très approximativement le même système de franges.

Quand nous donnons la source A et les plans *géométriques* $m_1m'_1$, $m_2m'_2$, des surfaces des miroirs (par conséquent le point O), nous définissons complètement le lieu O' des centres des franges. Mais suivant la position occupée sur le plan $m_1m'_1$ par la surface réfléchissante réelle du miroir M_1 , et sur le plan $m_2m'_2$ par la surface

réelle du miroir M_2 , la partie commune des faisceaux réfléchis contient ou ne contient pas le point O' .

Si l'on veut observer les franges avec de faibles différences de phase, c'est-à-dire les franges voisines de la frange centrale, il faut s'arranger de manière que l'intersection O des plans m_1m_1' et m_2m_2' limite effectivement les surfaces réelles réfléchissantes. Si on déplace un des miroirs M_2 , par exemple, parallèlement à lui-même, on déplace

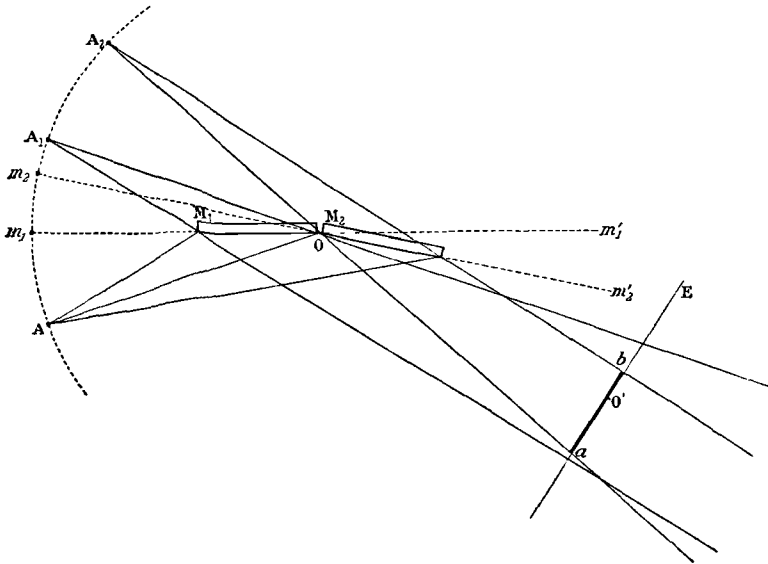


Fig. 127.

le point O et par conséquent le point O' ; on peut renvoyer le lieu de la frange centrale hors de l'espace ab commun aux faisceaux.

Le réglage des miroirs consiste à réaliser les conditions suivantes.

La distance $\overline{A_1A_2} = 2\overline{m_1m_2}$ dépend de l'angle des miroirs, et pas du tout de la position du point A sur le cercle de rayon donné OA . Il est toutefois plus aisé de prendre petit l'angle AOm_1 .

Il faut pouvoir modifier l'angle des miroirs et amener leur intersection à être : 1° parallèle à la fente A ; 2° dans les surfaces réfléchissantes réelles.

Pour réaliser la première condition, l'un des miroirs peut tourner autour d'une charnière; pour réaliser les deux autres, le second miroir est monté sur trois vis qui permettent de le faire avancer et pivoter. On facilite l'opération en commençant par amener les miroirs tenus à la main, autant que possible dans le prolongement l'un de l'autre; les miroirs une fois montés sur le banc d'optique, on rend parallèles l'objet A et les images A_1 et A_2 .

221. Dispositions équivalentes. Biprisme. Bilentille. Bilame.

— On peut par bien des procédés obtenir que deux faisceaux émanés d'un point A semblent venir de deux foyers virtuels ou viennent converger en deux foyers réels distincts A_1 et A_2 .

BIPRISME. — On peut utiliser d'abord deux prismes P_1P_2 taillés

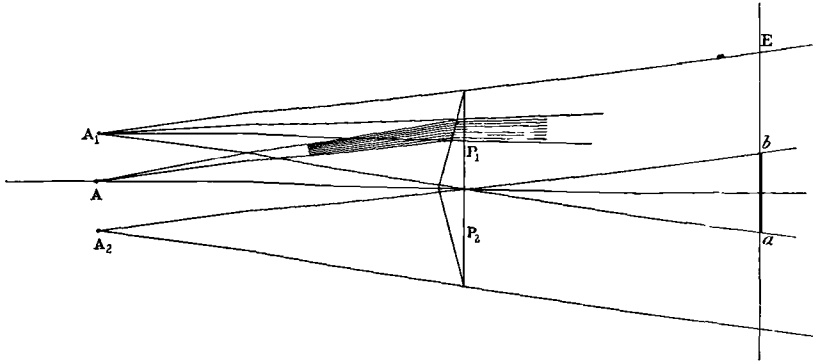


Fig. 128.

dans un même morceau de verre. Le biprisme donne deux foyers virtuels A_1, A_2 ; le seul réglage consiste à amener les arêtes du biprisme parallèlement à la fente A : par construction, elles doivent être parallèles entre elles. Les faisceaux issus de A_1 et A_2 ont une partie commune dans laquelle se voient les franges d'interférence. L'angle au sommet des deux prismes est très petit.

BILENTILLE. — Une combinaison plus intéressante est représentée fig. 129. On scie une lentille en deux morceaux par un trait passant à peu près au centre optique; on les écarte l'un de l'autre de manière que le plan, passant par les bords des lentilles, reste commun aux deux

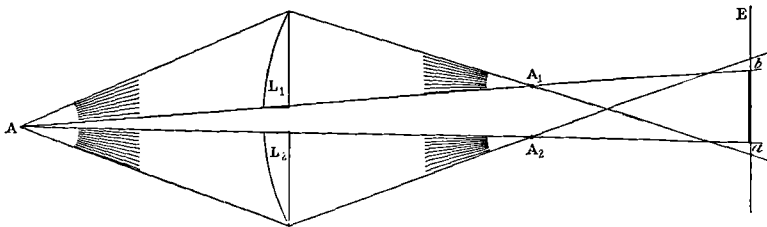


Fig. 129.

moitiés. Un point réel A donne, pour une distance convenable, deux images réelles A_1 et A_2 dont on peut faire varier la distance en modifiant la distance des moitiés de la lentille. Les faisceaux ont une partie commune au delà des foyers A_1 et A_2 . Dans bien des expériences il est indispensable d'avoir réellement et non plus virtuellement les sources isogènes.

BILAME. — On peut encore obtenir deux sources réelles isogènes avec une bilame et une lentille. La bilame, formée de deux lames L_1 et L_2 de même épaisseur et également inclinées sur les faisceaux issus de A , donne deux images virtuelles A_1 et A_2 . On reçoit les faisceaux qui proviennent de ces points et qui n'ont pas de partie

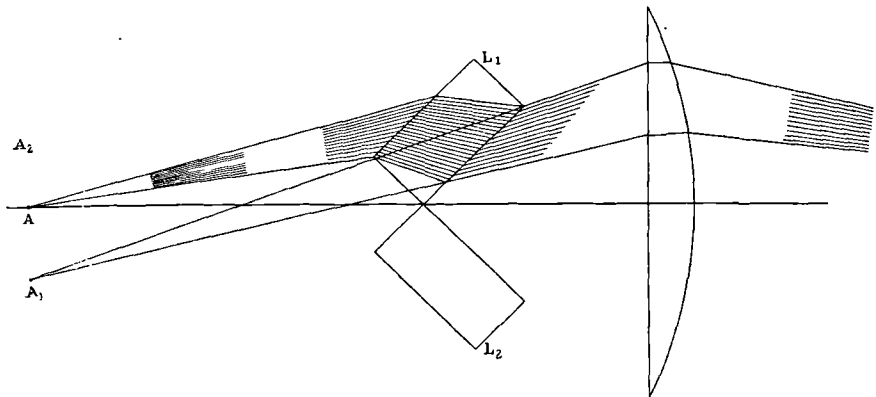


Fig. 130.

commune, sur une lentille qui en donne des images réelles. Au delà de ces images les faisceaux se coupent : c'est là que se trouvent les franges d'interférence.

MIROIRS A 90°. — Voici une expérience très simple.

Disposons deux miroirs 1 et 2, argentés sur leur face antérieure, de manière que leur intersection L soit parallèle à une fente fine F , et que l'angle plan de leur dièdre soit un peu inférieur à un droit. Si l'angle vaut juste un droit, les images virtuelles de la fente après deux réflexions successives (en commençant soit par 1, soit par 2), coïncident dans le plan passant par F et par L : les faisceaux n'ont pas de partie commune. Si l'angle vaut un peu moins d'un droit, il y a une partie commune qui comprend la fente elle-même ; les images virtuelles ne coïncident pas absolument.

Inclinons légèrement la ligne d'intersection L dans le plan passant par la fente. Nous verrons des franges d'interférence dans la partie commune. Il est commode d'observer le phénomène dans le plan et un peu au-dessus de la fente. Les réglages sont réduits au minimum.

222. Phénomènes en lumière non homogène. — La constitution de la lumière blanche est un problème difficile que nous n'aborderons avec détail qu'en Électroptique. Nous discuterons alors si les radiations de couleurs différentes y préexistent ou si elles sont en

quelque sorte fabriquées par les appareils dispersifs. Ces considérations seraient ici tout à fait prématurées.

Comme en définitive tout se passe comme si les radiations préexistaient dans la lumière blanche, nous conserverons cette hypothèse dans notre langage.

Il est impossible d'obtenir en Optique de véritables battements, c'est-à-dire de faire interférer des faisceaux de longueurs d'onde différentes.

Voici quels seraient les phénomènes. Supposons en A (fig. 120) une source de période T et de longueur d'onde dans le vide $\lambda = VT$, en A₁ une source de période T + dT et de longueur d'onde $\lambda + d\lambda = V(T + dT)$. Si les sources étaient parfaitement régulières, nous verrions dans le plan A'B des franges à chaque instant parfaitement déterminées, mais qui se déplaceraient, dans le sens BA' et par seconde, d'un nombre N de fois l'écartement de deux franges égal à la différence des fréquences des sources :

$$N = \frac{1}{T} - \frac{1}{T + dT} = \frac{V}{\lambda} \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

Cette formule montre d'abord à quel point les radiations devraient être voisines pour que la vitesse des franges ne soit pas quasiment infinie. Mais le raisonnement suppose une stabilité des sources qui n'existe pas, de sorte qu'un grand nombre de fois par seconde le phénomène serait brusquement modifié.

Quant à partir d'une source de longueur d'onde unique et à changer *en cours de route* la période de l'un des faisceaux, c'est parfaitement impossible et contraire aux conditions de continuité. Le phénomène de Zeemann nous permet bien de modifier la période d'une source, mais dans le problème actuel il n'est d'aucun secours.

Bref, quand il s'agit d'une source complexe, nous devons calculer séparément les intensités pour les diverses radiations et *additionner* les couleurs comme il est dit au Chapitre III.

En lumière blanche, nous avons comme centre du phénomène une frange blanche, puisque le retard géométrique est nul aux mêmes points pour toutes les longueurs d'onde. Les franges sont irisées de part et d'autre du centre blanc, puisque les franges qui correspondent aux diverses couleurs ne sont pas de même largeur (fig. 131). Assez loin du centre, on trouve le blanc d'ordre supérieur (§ 208).



Fig. 131.

Nous n'insistons pas pour l'instant. Nous étudierons, au § 248, la nature des teintes successives de part et d'autre de la frange blanche; au § 242, les spectres obtenus quand on analyse le blanc d'ordre supérieur, à quelque phénomène d'interférence qu'il soit dû; au § 278, la visibilité des franges, quand la lumière utilisée est composée d'un petit nombre de radiations simples. Enfin nous allons montrer qu'il est possible d'obtenir comme centre du phénomène une frange noire.

223. Expérience des trois miroirs. — On doit à Fresnel une expérience célèbre avec trois miroirs M_1 , M_1 , M_2 . La source est en A;

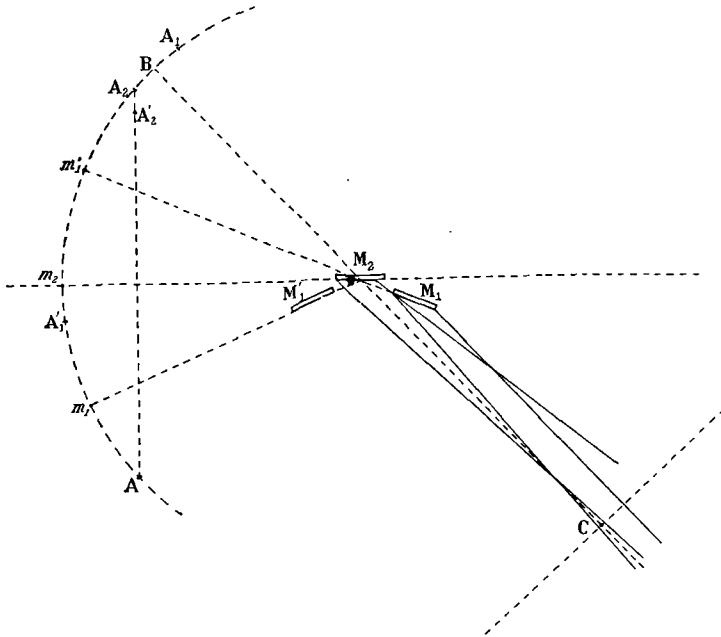


Fig. 132.

elle donne par rapport à M_1 , puis à M_1 , des images virtuelles A_1' , puis A_1 ; elle donne par rapport à M_2 l'image virtuelle A_2 . On fait interférer les faisceaux qui émanent des sources A_1 et A_2 , c'est-à-dire le faisceau successivement réfléchi par M_1' et M_1 avec le faisceau réfléchi par M_2 .

Si les plans des trois miroirs ont une intersection commune, il est facile de voir que le centre des franges (qui est sur la droite BC passant par le milieu de la distance A_1A_2 et par l'intersection commune) se trouve au bord de la partie commune des faisceaux réfléchis interférents. Pour la ramener au centre de la partie commune, il faut déplacer A_2 vers A_2' , c'est-à-dire avancer le miroir M_2

parallèlement à lui-même ; aussi est-il monté sur une vis micrométrique.

Le système de franges obtenu possède en lumière blanche une frange noire centrale ; c'est dire que les irisations sont symétriques, non plus par rapport à une frange blanche, mais par rapport à une frange noire.

L'expérience des trois miroirs ne diffère de l'expérience ordinaire avec deux miroirs que parce que l'un des faisceaux a été réfléchi deux fois. Il faut donc conclure que le fait même de la réflexion produit sur la phase un retard ou une avance de π .

Avec deux miroirs, ce décalage se produisant sur les deux faisceaux, tout se passe comme s'il n'existait pas ; avec trois miroirs, la compensation n'a plus lieu, d'où la frange noire centrale. Il est clair qu'aucune expérience ne peut décider s'il s'agit d'une avance ou d'un retard.

224. Passage des ondes par un foyer ou une ligne focale.

— En étudiant (Mécanique physique, § 80) le mouvement vibratoire composé d'ondes sphériques divergentes, entretenu dans un gaz par une sphère pulsante, nous avons montré qu'à grande distance le mouvement est en avance d'un quart de longueur d'onde sur celui qui résulterait de l'hypothèse d'une vitesse de propagation V constante.

Supposons maintenant une onde sphérique convergente ; les surfaces d'ondes successives sont des sphères de rayon d'abord décroissant jusqu'à zéro (ondes convergentes), puis croissant indéfiniment (ondes divergentes) : l'onde est dite passer par un foyer. Un calcul analogue à celui du § 80 de la Première partie de ce Cours, montre que le mouvement sur la sphère divergente de rayon R_1 est en retard sur le mouvement de la sphère convergente de rayon R_0 , non pas du nombre de longueurs d'onde $(R_1 - R_0) : \lambda$ qui résulterait de l'hypothèse d'une vitesse constante, mais de ce nombre diminué d'une demi-unité. En d'autres termes, l'avance d'un quart de longueur d'onde constaté quand l'onde divergente émane d'un point, existe aussi quand l'onde convergente se concentre en ce point : d'où l'avance d'une demi-longueur d'onde prévue.

Nous pouvons, au lieu d'une sphère pulsante, imaginer un tube pulsant, c'est-à-dire un tube dont le rayon varie sinusoidalement en fonction du temps. Les ondes sont cylindriques ; et à grande distance le mouvement sur l'une d'elles est en avance d'un huitième de longueur d'onde par rapport au mouvement qui résulte de l'hypothèse d'une vitesse de propagation V constante.

Supposons maintenant une onde cylindrique convergente qui s'évanouit pour une de ses positions en une droite focale. Le mouvement sur l'onde cylindrique de rayon R_1 divergente et par conséquent pos-

térieure à la ligne focale, est en retard sur le mouvement sur l'onde cylindrique convergente et par conséquent antérieure à la ligne focale, non pas du nombre $(R_1 - R_0) : \lambda$ de longueurs d'onde qui résulte de l'hypothèse d'une vitesse de propagation constante V , mais de ce nombre diminué d'un quart d'unité.

Nous admettons, sans démonstration, que les mêmes phénomènes se produisent en Optique.

225. Vérification de l'analogie admise au paragraphe précédent (Gouy). — Les franges d'interférence obtenues avec la plupart des appareils précédents *présentent une frange centrale blanche* ; cette particularité tient uniquement à ce qu'il existe sur l'écran un lieu pour lequel le retard est le même sur les faisceaux interférents, quelle que soit la longueur d'onde considérée. La différence de phase y étant nulle pour toutes les longueurs d'onde, la composition de la lumière n'est pas altérée : la frange est blanche.

De part et d'autre de cette frange, le retard *géométrique* entre les faisceaux est bien encore indépendant de la longueur d'onde, mais la phase qui est (au facteur 2π près) le quotient de ce retard par la longueur d'onde, varie avec la couleur. En particulier la première frange noire, de part et d'autre de la frange blanche centrale, frange qui correspond à une différence de phase égale à π , n'a pas la même position pour toutes les couleurs ; donc la frange noire résultante est différemment irisée sur son bord intérieur et sur son bord extérieur. Il importe peu d'ailleurs que les franges soient rectilignes et équidistantes comme celles de Fresnel : *toutes les fois que le lieu de différence de phase nulle pour les faisceaux interférents est indépendant de la longueur d'onde, la frange également irisée sur ses deux bords (frange centrale) est blanche.*

Admettons maintenant que, par un procédé quelconque, nous ajoutions un retard optique d'une demi-longueur d'onde à toutes les radiations d'un des faisceaux interférents. Là où se formait la frange blanche centrale, se forme maintenant pour toutes les radiations une frange noire ; donc la frange noire résultante est également irisée sur ses bords : elle constitue le centre du phénomène.

C'est précisément ce que nous avons obtenu dans l'expérience des trois miroirs.

Le passage d'un des faisceaux interférents par un foyer permet d'ajouter à tous les faisceaux élémentaires de radiations diverses qui le composent, une même avance de phase égale à π . On obtient un système de franges admettant une frange noire centrale, ce qui prouve l'exactitude de l'analogie admise entre les ondes transversales de l'Optique et les ondes longitudinales de l'Acoustique.

Voici comment on réalise l'expérience :

Une source ponctuelle S émet un faisceau conique transformé :

partiellement en un cône de sommet S' par le miroir plan M' ,
partiellement en un cône de sommet S'' par le miroir concave M'' de
centre de courbure C .

D'après le théorème de Malus (§ 69), les rayons du premier groupe
sont concordants en S' , les rayons du second groupe sont concor-
dants en S'' ; les premiers ont sur les seconds un retard *géométrique* :

$$\Delta = -(\overline{Ss''} + \overline{s''S'}) ,$$

puisque le § 218 nous apprend que le chemin optique qui sépare le
point S de son image S' , est nul.

On observe donc dans le plan E le système de franges que donne-
raient deux sources placées en S' et S'' et ayant l'une par rapport à

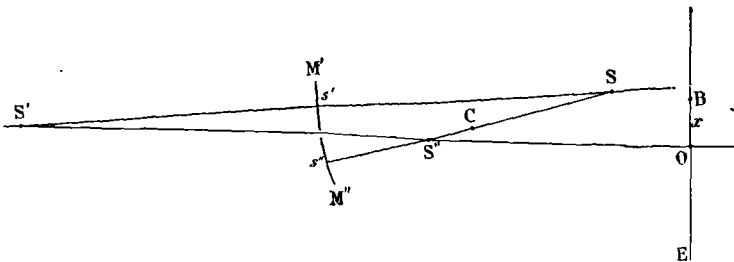


Fig. 133.

l'autre la différence de phase $2\pi\Delta : \lambda$. Le lieu des points B pour
lesquels la différence de phase est constante, est évidemment un
cercle ayant pour centre la trace O de la droite $S'S''$ sur l'écran : les
franges sont donc certainement circulaires et de centre O .

Posons : $d' = \overline{S'O}$, $d'' = \overline{S''O}$.

Le retard géométrique au point O est $\Delta_1 = \Delta + d' - d''$. En
déplaçant l'un des miroirs parallèlement à lui-même, on peut évi-
demment rendre Δ_1 positif et assez petit ; la source S' envoie alors
en O des rayons qui sont un peu *en retard* sur les rayons envoyés
par S'' .

Calculons maintenant le retard en un point B situé à une dis-
tance $\overline{OB} = x$ du centre des franges. Il est clair que la dis-
tance $\overline{S''B}$ croît plus vite que $\overline{S'B}$ en fonction de x : le retard des
rayons issus de S' décroît par rapport au retard des rayons issus
de S'' . On trouve facilement pour expression de la diminution de la
différence des chemins géométriques :

$$\frac{x^2}{2} \left(\frac{1}{d''} - \frac{1}{d'} \right).$$

Le retard *géométrique* du faisceau réfléchi sur le miroir plan par rapport au faisceau réfléchi sur le miroir concave est :

$$\Delta_1 = \frac{x^2}{2} \left(\frac{1}{d''} - \frac{1}{d'} \right).$$

Il résulte de cette forme (nous retrouverons la même discussion à propos des anneaux de Newton, § 246) qu'en lumière monochromatique les anneaux sont circulaires, larges au voisinage du point O, se resserrant à mesure qu'on s'en éloigne. Les franges ont l'aspect des anneaux de Newton obtenus avec des lentilles qui ne sont pas au contact.

Pour une certaine distance x_0 , le retard géométrique s'annule simultanément pour toutes les radiations. Si le passage par un foyer ne produisait aucun phénomène particulier, on observerait là une frange blanche (dite centrale) symétriquement irisée sur ses deux bords. *L'expérience décèle une frange noire symétriquement irisée sur ses bords; donc le passage par le foyer introduit pour le faisceau correspondant une avance* (ou un retard, l'expérience ne peut décider) *d'une demi-longueur d'onde pour toutes les radiations.*

Répétons l'expérience en inclinant plus ou moins les deux miroirs. Rien n'est modifié pour le miroir plan; le miroir sphérique devient astigmatique et donne deux lignes focales. En observant les franges *au delà des deux lignes focales*, on trouve une frange noire symétriquement irisée, comme si les rayons avaient passé par un foyer. *Donc le passage par deux lignes focales produit un changement de signe dans les vitesses, introduit une avance* (ou un retard) *d'une demi-longueur d'onde.*

L'étude plus approfondie de ce cas permet de prouver qu'il s'agit d'une avance et non d'un retard. On observe les franges *entre les lignes focales*; il y a une *avance* d'un quart de longueur d'onde qu'on met aisément en évidence. La description du procédé nous entraînerait trop loin et exige des connaissances que nous acquerrons seulement plus tard. Ce que nous avons dit suffit amplement à faire comprendre la marche de la démonstration expérimentale.

CHAPITRE V

INTERFÉRENCES DES VIBRATIONS ELLIPTIQUES¹

226. **Interférences de deux faisceaux polarisés.** — Des expériences d'interférence que nous avons exposées, il est impossible de conclure si la lumière est constituée par des vibrations longitudinales ou par des vibrations transversales. L'expérience célèbre de Fresnel et Arago éclaircit ce point. Mais avant de la décrire, nous devons préciser ce qu'on appelle *intensité*.

Nous avons montré, au § 140 du Tome I, que l'énergie W totale envoyée par une onde plane pendant une période sur un centimètre carré d'un corps absorbant, ou contenue dans un cylindre d'un centimètre carré de base et d'une hauteur égale à λ , se compose de deux parties égales, l'une cinétique C et l'autre potentielle P ; on a :

$$W = P + C = 2C = \frac{2\rho\pi^2 a^2 \lambda}{T^2}.$$

L'énergie contenue dans l'unité de volume est : $2\rho\pi^2 a^2 : T^2$.

Quand deux faisceaux interfèrent, le principe de la conservation de l'énergie nous apprend la constance de l'énergie totale. Mais rien n'empêche que l'énergie cinétique ne se localise dans certaines régions, l'énergie potentielle dans d'autres : c'est ce qui arrive dans certaines *ondes stationnaires* (voir Électroptique); rien n'empêche que l'énergie potentielle et l'énergie cinétique, tout en restant égales entre elles en chaque point, ne se répartissent inégalement dans l'espace.

227. **Loi de distribution des énergies dans le système de franges des trous d'Young.** — Considérons les deux ondes qui émanent des deux trous d'Young et qui donnent sur un plan P un système de franges d'interférence. Calculons les énergies dans une couche très mince de part et d'autre de ce plan.

¹ Nous prions le lecteur qui ne sait rien des phénomènes de polarisation, de lire comme introduction le Chapitre X du Cours de Mathématiques, où sont définis expérimentalement le plan de polarisation, le nicol, ...

1° Les déplacements qui correspondent aux deux ondes et que je suppose parallèles (§ 213), sont :

$$x_1 = a_1 \sin \omega t, \quad x_2 = a_2 \sin (\omega t - \alpha).$$

Ils se composent en un mouvement résultant :

$$x = A \sin (\omega t - \beta), \quad A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos \alpha.$$

L'énergie cinétique en chaque point est proportionnelle à A^2 . Elle varie, en fonction de α , d'un minimum $(a_1 - a_2)^2$ à un maximum $(a_1 + a_2)^2$.

Repérons la position des franges dans le plan P par leur distance s à un point O. La différence de phase α variant linéairement en fonction de s , on peut poser :

$$\alpha = \alpha_0 + 2\pi \frac{s}{e}.$$

La valeur moyenne de l'énergie cinétique est *proportionnelle* à :

$$\frac{1}{e} \int_0^e A^2 ds = a_1^2 + a_2^2 + \frac{2a_1 a_2}{e} \int_0^e \cos \left(\alpha_0 + \frac{2\pi s}{e} \right) ds = a_1^2 + a_2^2.$$

L'énergie cinétique moyenne est donc la même que s'il n'y avait pas de franges. La distribution de cette énergie est représentée par une sinusoïde. Si les faisceaux interférents ont même amplitude, les minimums sont nuls et les maximums égaux à quatre fois l'énergie constante de l'un des faisceaux.

2° Considérons maintenant l'énergie potentielle.

Nous savons (Tome I, § 140) que la *déformation* peut être représentée par un vecteur normal et proportionnel au vecteur *vitesse* et ayant par rapport à ce dernier une différence de phase nulle. Comme l'énergie potentielle est proportionnelle au carré de l'amplitude du vecteur *déformation* qui se propage exactement comme le vecteur *vitesse*, nous pouvons appliquer tout ce qui précède à l'énergie potentielle. Par conséquent, les franges sont les lieux des maximums à la fois des deux espèces d'énergie.

Il est donc impossible de discerner à quelle forme d'énergie sont sensibles les appareils que nous employons pour mesurer les intensités. En particulier, nous ne savons pas si l'œil et l'action photographique mesurent l'énergie potentielle ou l'énergie cinétique.

228. Répartition de l'énergie dans l'interférence de deux faisceaux polarisés à angle droit. — Supposons que les faisceaux qui interfèrent sont polarisés à angle droit, c'est-à-dire supposons à angle droit les vecteurs *déplacements* définis au § 213. L'extrémité du vecteur résultant décrit une ellipse. Suivant la différence de phase des vecteurs composants, la forme de l'ellipse varie.

Soit les équations de l'ellipse :

$$x = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right), \quad y = b \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} - \delta \right).$$

L'énergie cinétique contenue dans un cylindre ayant un centimètre carré de base et une hauteur λ est :

$$C = \frac{\rho}{2} \int_0^\lambda \left[\left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \right] dz = \frac{\rho \pi^2 \lambda}{T^2} (a^2 + b^2).$$

Elle est constante, indépendante de la différence de phase. On trouverait de même, et il résulte immédiatement du principe de la conservation de l'énergie, que l'énergie potentielle est constante. Ainsi, dans l'interférence de deux faisceaux polarisés à angle droit, la distribution dans l'espace de l'une et l'autre énergies reste absolument uniforme.

Deux vibrations rectangulaires peuvent interférer, en ce sens qu'elles se composent et donnent une vibration elliptique dont la forme dépend de leur différence de phase. Elles ne peuvent pas interférer, en ce sens que la localisation de l'énergie est indépendante de cette différence de phase.

Ce résultat est propre aux vibrations transversales ; on ne peut rien trouver d'analogue pour les vibrations longitudinales. D'où l'expérience cruciale qui permet de décider à quelle sorte de vibrations correspondent les phénomènes lumineux.

229. Expérience de Fresnel et Arago. — Admettons, comme d'autres expériences nous y autorisent, qu'une lame de tourmaline convenablement taillée est un polariseur rectiligne ; c'est-à-dire que traversée normalement par la lumière, elle ne laisse passer que les composantes des vibrations, *supposées transversales*, parallèles à une certaine direction que nous pourrions supposer tracée sur la lame et que nous appellerons *direction principale*.

Coupons en deux morceaux une telle lame *plan parallèle* travaillée : les deux tourmalines ainsi obtenues sont rigoureusement de même épaisseur et de même indice. Plaçons-les normalement à la lumière et de manière qu'elles recouvrent les deux trous d'Young, ou reçoivent les deux images réelles d'une bilentille. Elles peuvent tourner dans leur plan et prendre toutes les orientations. Il est donc loisible de faire interférer deux faisceaux *isogènes* dont les plans de vibration font l'un par rapport à l'autre un angle arbitrairement choisi.

L'expérience montre :

1° que les franges ont leur netteté coutumière si les plans de vibration sont parallèles ;

2° qu'elles disparaissent, si les plans sont normaux ;

3° que les maximums diffèrent d'autant plus des minimums que les plans sont plus près d'être parallèles.

Pour comprendre ces résultats, il est indispensable de faire une hypothèse *au moins provisoire* sur la constitution de la lumière naturelle. Tout se passe comme si le point lumineux source oscillait régulièrement dans un certain plan pendant quelques centaines de mille oscillations; brusquement alors sa phase et l'azimut d'oscillation varient pour se maintenir de nouveau constants pendant quelques centaines de mille oscillations; et ainsi de suite.

Supposons que les plans de vibration imposés par les tourmalines soient parallèles et verticaux, et que la direction de vibration du point lumineux fasse actuellement un angle θ_1 avec la verticale; prenons pour unité l'amplitude de cette vibration. Les vibrations qui sortent des tourmalines sont égales, parallèles et d'amplitude $\cos \theta_1$. Les minimums des franges sont donc nuls; les maximums ont une

intensité égale à : $(2 \cos \theta_1)^2 = 4 \cos^2 \theta_1$.

L'angle θ_1 se maintient pendant quelques centaines de mille oscillations, puis brusquement l'azimut de vibration du point lumineux devient θ_2 . L'intensité moyenne du maximum est : $\Sigma 4 \cos^2 \theta$, où θ prend toutes les valeurs possibles pendant l'unité de temps. Il est clair que la moyenne des valeurs de $\cos^2 \theta$ est 1 : 2. L'intensité moyenne du maximum est 2. Cela revient à dire, qu'*abstraction faite de l'absorption par les tourmalines, et en ne tenant compte que de la sélection qu'elles exercent sur les composantes des vibrations qu'elles reçoivent*, les maximums sont moitié moins éclairés que si elles n'existaient pas.

En conséquence de leur rôle de polariseur, elles absorbent la moitié de l'énergie, ce qui est évident *a priori*.

Si les tourmalines sont croisées, nous avons montré au paragraphe précédent qu'il n'y a pas production de franges visibles à l'œil nu; l'intensité de la lumière est égale en tous les points à la somme des intensités des faisceaux : $\cos^2 \theta + \cos^2 \theta = 2 \cos^2 \theta$. La valeur moyenne de l'intensité est l'unité. Résultat bien d'accord avec le précédent et avec le principe de la conservation de l'énergie.

Enfin si l'une des tourmalines est verticale et si l'autre fait avec la verticale un angle ψ , il passe deux faisceaux dont les amplitudes sont : $\cos \theta$ et $\cos(\theta - \psi)$. Il est bien évident que les minimums ne sont plus nuls : une partie seulement des deux composantes peut interférer. Projetons par exemple la vibration qui fait avec la verticale l'angle ψ , sur la verticale et sur l'horizontale. La composante verticale $\cos(\theta - \psi) \cos \psi$ n'est plus égale à $\cos \theta$, première raison pour que les minimums ne soient pas nuls; la composante horizontale $\cos(\theta - \psi) \sin \psi$ ne peut interférer avec aucune vibration, seconde raison pour que les minimums ne soient pas nuls. Corrèla-

tivement le principe de la conservation de l'énergie veut que les maximums soient moins lumineux.

230. Obtention de vibrations elliptiques bien déterminées.

— Il est possible d'obtenir dans cette expérience des vibrations elliptiques bien déterminées et de formes stables, à la condition que les faisceaux interférents proviennent d'une source vibrant dans un plan bien déterminé. Il suffit pour cela de placer devant la fente servant de source de lumière soit une tourmaline, soit un nicol.

Pour ne pas compliquer inutilement les calculs, nous traiterons le cas où la vibration initiale est à 45° de la verticale, et où les tourmalines égales qui recouvrent les fentes sont, l'une verticale, l'autre horizontale. Les vibrations qu'elles transmettent sont rectangulaires. Au point A' où se ferait la frange centrale (fig. 120), si les tourmalines étaient parallèles, où par conséquent la différence de phase est nulle, elles ont pour équations :

$$x = a \sin \omega t, \quad y = a \sin \omega t,$$

les axes des x et des y étant pris l'un horizontal, l'autre vertical. Soit e la distance de deux maximums dans le système ordinaire de franges (tourmalines parallèles) et s la distance du point considéré au point A', distance comptée sur une perpendiculaire aux franges. En choisissant convenablement l'origine des temps, on peut poser :

$$x = a \sin \omega t, \quad y = a \sin \left(\omega t - 2\pi \frac{s}{e} \right).$$

Ces équations représentent une ellipse dont la forme dépend du point considéré, c'est-à-dire de s . La figure représente le faisceau de ces ellipses quand s varie de ke à $(k+1)e$.

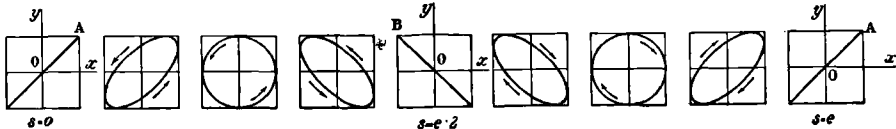


Fig. 134.

Pour $s=0$, l'ellipse se réduit à une des bissectrices des axes.

Quand $0 < s < e/4$, le mobile tourne sur l'ellipse dans le sens de la flèche.

L'ellipse devient un cercle pour $s=e/4$.

Elle redevient une ellipse quand $e/4 < s < e/2$.

Elle se réduit à un morceau de l'autre bissectrice pour $s=e/2$.

Pour $s > e/2$, le mobile tourne en sens inverse., ...

Enfin pour $s=e$, elle se réduit à nouveau à un morceau de la première bissectrice.

Le phénomène est évidemment périodique.

Toutes ces ellipses sont inscrites dans un carré de côté a .

Si l'azimut de la vibration initiale est non plus 45° , mais θ , les directions principales des tourmalines égales restant toujours normales entre elles, le système des ellipses est inscrit dans un rectangle dont le rapport des côtés est $\operatorname{tg} \theta$.

Il y a toujours pour $s = 0, e/2, e, \dots$, des ellipses évanouissantes réduites aux diagonales du rectangle.

Pour $s = e/4$ et $3e/4$, les cercles du système précédent sont remplacés par des ellipses dont les axes coïncident avec les axes de coordonnées; enfin, le mobile se déplace sur l'ellipse dans un sens ou dans l'autre suivant que s est compris entre 0 et $e/2$, ou $e/2$ et e .

Nous avons vu plus haut que l'énergie représentée par la vibration est indépendante de la différence de phase et par conséquent de s .

En plaçant les directions principales des tourmalines égales non plus normalement entre elles, mais à une distance angulaire quelconque ψ , on pourrait obtenir des systèmes plus complexes d'elliptiques par la composition de deux vibrations non normales l'une sur l'autre. Cela n'a pas grand intérêt. Ce qui constitue l'importance du système d'ellipses obtenues avec les tourmalines croisées (c'est-à-dire avec des composantes normales entre elles dont la différence de phase varie), c'est qu'on reproduit aisément le même résultat par l'emploi de lames biréfringentes dont on fait varier l'épaisseur.

Dans ce qui suit, nous supposons toujours les tourmalines croisées; la direction principale de l'une est verticale, la direction principale de l'autre est horizontale.

231. Franges avec les tourmalines croisées. Analyse d'un système d'elliptiques. — Reprenons les tourmalines croisées et la vibration initiale à 45° des sections principales de ces tourmalines. Nous obtenons donc, dans le plan où s'observent les franges quand les tourmalines sont parallèles, un système périodique d'ellipses, dont la période est égale à la distance de deux maximums du système ordinaire de franges. A l'œil nu, rien n'apparaît de particulier, l'intensité est constante.

Mais observons à travers un nicol ou une quatrième tourmaline : un système de franges apparaît dont voici les propriétés :

- 1° elles ont la même largeur que les franges ordinaires;
- 2° les maximums et minimums sont particulièrement tranchés, si la section principale de cette quatrième tourmaline est dirigée suivant l'une des bissectrices des axes Ox et Oy ;
- 3° les franges disparaissent si la section de la tourmaline est parallèle à l'un des axes.

Ces résultats se déduisent immédiatement de nos hypothèses.

Quand nous recevons une vibration elliptique sur une tourmaline ou sur un appareil analyseur quelconque, il ne passe à travers l'appa-

reil que la composante de la vibration dirigée parallèlement à une certaine direction; dans le cas de la tourmaline convenablement taillée, nous l'avons désignée sous le nom de *direction principale*. La composante perpendiculaire est supprimée.

Soit (fig. 135) une ellipse que nous recevons sur une tourmaline dont $O\xi$ est la direction principale; menons $O\eta$ perpendiculaire. Nous pouvons considérer l'ellipse comme résultant des deux composantes normales entre elles, obtenues en menant la tangente Mm parallèle à $O\eta$ et la tangente Nn parallèle à $O\xi$; OM et ON sont leurs amplitudes. La tourmaline ne laisse passer que la composante OM .

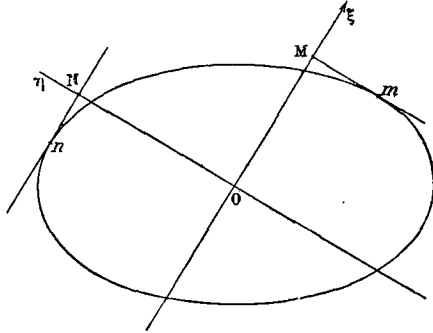


Fig. 135.

232. Système d'elliptiques. — Si la direction principale de l'analyseur est parallèle à OA (fig. 134), les vibrations rectilignes OA passent en entier : les vibrations OB sont supprimées. Nous avons donc des franges dont la largeur e est celle des franges ordinaires.

Tournons l'analyseur de 90° , nous obtenons un nouveau système de franges complémentaire du premier; les minimums actuels coïncident avec les maximums antérieurs; la frange centrale est noire.

Mettons l'analyseur parallèlement à l'un des axes; seule passe la lumière qui a traversé l'une des tourmalines égales; il n'y a plus qu'un des faisceaux interférents, il n'y a plus d'interférences, les franges disparaissent.

Pour des azimuts intermédiaires, il est facile de voir que l'on obtient l'un ou l'autre des deux systèmes complémentaires signalés; nous allons revenir là-dessus plus loin.

Si l'azimut de la vibration initiale (antérieure aux trous) est différent de 45° , nous savons que le système d'ellipses est inscrit non plus dans un carré, mais dans un rectangle : la *restitution rectiligne* se fait parallèlement aux diagonales de ce rectangle. Regardons ce système à travers un analyseur, nous trouvons encore, suivant l'azimut de l'analyseur, deux systèmes de franges de même largeur que les franges ordinaires; les maximums de l'un coïncident avec les minimums de l'autre; ils disparaissent quand la *direction principale* de l'analyseur coïncide avec la direction principale de l'une des tourmalines égales. Comme on ne peut pas mettre à la fois une droite parallèlement à une diagonale et perpendiculairement à l'autre dia-

gonale d'un rectangle qui n'est pas un carré, on ne peut obtenir à la fois les maximums les plus intenses et les minimums nuls.

Voici d'ailleurs la discussion analytique.

Soit les équations du mouvement :

$$x = a \sin \omega t, \quad y = b \sin (\omega t - \delta).$$

Soit φ l'angle que fait la direction principale de l'analyseur avec l'axe des x . La vibration qui passe à travers l'analyseur est :

$$\xi = a \cos \varphi \sin \omega t + b \sin \varphi \sin (\omega t - \delta).$$

Son intensité est :

$$a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi + 2ab \cos \varphi \sin \varphi \cos \delta.$$

Pour un angle φ donné compris entre 0 et $\pi : 2$, cette intensité est maximum si $\cos \delta = 1$, c'est-à-dire si $\delta = \frac{2\pi s}{e}$ est un nombre entier de circonférences. Elle est minimum pour $\cos \delta = -1$.

C'est le premier système de franges.

Pour φ compris entre $\pi : 2$ et π , les mêmes conditions donnent évidemment le second système de franges.

Regardons un maximum ; l'intensité est alors :

$$a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi + 2ab \cos \varphi \sin \varphi.$$

Faisons tourner l'analyseur de manière qu'il soit le plus grand possible ; la condition est : $\operatorname{tg} \varphi = b : a$, l'analyseur est parallèle à l'une des diagonales du rectangle. Regardons un minimum et écrivons qu'il est nul ; nous trouvons que l'analyseur est perpendiculaire à l'une des diagonales du rectangle.

Nous rencontrerons bien souvent ce système d'elliptiques ; il est fondamental. C'est pour cela que nous le traitons pour la première fois dans des conditions où les composantes appartiennent à des faisceaux distincts, où l'on peut agir directement sur chacun d'eux, où les différences de phase proviennent uniquement des différences de chemins géométriques.

En particulier, nous retrouverons ce même système d'elliptiques et les deux systèmes de franges complémentaires qui en résultent, dans les spectres cannelés de Fizeau et dans le compensateur de Babinet. Dans ces deux cas, les deux composantes rectangulaires sont obtenues par le passage à travers une lame biréfringente ; leur différence de marche provient de la différence des indices des sections principales de cette lame. On n'est plus maître de faire varier la différence de marche autrement qu'en modifiant la couleur (et par conséquent la longueur d'onde) ou l'épaisseur.

233. Constitution de la lumière naturelle monochromatique.

— L'hypothèse provisoire du § 229, sur la constitution de la lumière naturelle monochromatique, n'est pas la plus générale. Nous devons

supposer que les points fictifs vibrants décrivent des ellipses de forme et de grandeur stables pendant un grand nombre d'oscillations, mais dont les caractéristiques se modifient brusquement après un temps *très court par rapport à la seconde, très long par rapport à la période.*

Pour bien comprendre l'hypothèse, imaginons une tige métallique cylindrique, prise dans un étau; elle vibre, et nous la relançons de temps en temps par des coups de marteau. Son extrémité décrit une ellipse de forme stable, mais dont la grandeur décroît du fait des frottements intérieurs. Admettons que le nombre d'oscillations par seconde soit 500 et que la vibration persiste sans s'annuler pendant deux minutes. Il nous suffit de relancer après un temps qui contient 60 000 périodes.

Passons aux vibrations lumineuses et calculons-en le nombre N par seconde pour la longueur d'onde $0^{\mu},6$. Nous avons :

$$\lambda = VT; \quad \lambda = 6 \cdot 10^{-5}, \quad V = 3 \cdot 10^{10}, \quad 1 : T = N = 0,5 \cdot 10^{15};$$

un million = 10^6 , un milliard = 10^9 , un million de milliards = 10^{15} .

Il y a donc un demi-million de milliards de vibrations par seconde. En admettant même qu'il s'écoule un million de périodes avant qu'un mécanisme quelconque ne doive rétablir les vibrations dans leur amplitude initiale, toujours est-il que les changements brusques sont très nombreux à la seconde.

L'hypothèse précédente se concilie avec les phénomènes du Chapitre IV.

Nous y employons la lumière naturelle, mais nous raisonnons comme si elle était rectilignement polarisée. *Nous en avons le droit, du seul fait que l'azimut de polarisation n'intervient pas dans les résultats.*

En effet, nous pouvons toujours remplacer une ellipse par deux composantes rectangulaires. Si chacune de ces composantes donne le même système de franges; en d'autres termes, si leur azimut n'intervient pas dans le résultat, nous pouvons les étudier séparément, *quittes ensuite à additionner les intensités* (§ 228), ce qui ne change pas les apparences.

On vérifiera que les résultats du § 229 s'expliquent tout aussi bien dans l'hypothèse plus générale de ce paragraphe. Il suffit de considérer la composante de l'ellipse parallèle aux directions principales des tourmalines, supposées elles-mêmes parallèles. Son amplitude varie brusquement de temps en temps : le raisonnement subsiste mot pour mot, en appelant $\cos \theta$ cette amplitude.

Peu importe l'hypothèse faite sur la lumière naturelle, si nous l'utilisons après passage dans un analyseur; nous obtenons par définition de la lumière polarisée, mais dont l'amplitude varie brusquement de temps à autre.

Nous réservons complètement la question difficile de la constitution de la lumière blanche, ou plus généralement de la lumière non homogène. On admettra comme fait d'expérience que tout se passe comme si elle était constituée par une infinité de sources monochromatiques jouissant des propriétés ci-dessus admises. Nous reviendrons sur la question en Électroptique.

234. Propriétés générales des lames cristallines. Sections principales. Lames quart d'onde. — Nous venons d'étudier comment interfèrent des vibrations rectilignes rectangulaires. Nous devons nous familiariser immédiatement avec une autre sorte de vibrations, les vibrations circulaires. Pour les obtenir commodément, il faut utiliser des lames cristallines : voici les propriétés générales très simples sur lesquelles nous nous appuyerons¹.

L'expérience montre que quand un faisceau rectilignement polarisé traverse normalement une lame *plan parallèle* (plane et à faces parallèles) cristalline quelconque, tout se passe comme si la vibration rectiligne incidente, parallèle à la surface, était décomposée en deux vibrations rectangulaires suivant deux *directions* qu'on appelle *sections principales* et qui sont caractéristiques de la lame et de la longueur d'onde de la lumière utilisée.

Ces composantes rectangulaires se propagent dans la lame avec des indices différents n_1 et n_2 , caractéristiques du cristal employé, de la manière dont la lame a été prise dans ce cristal et de la longueur d'onde.

Soit E l'épaisseur de la lame, les chemins optiques des deux composantes sont : En_1, En_2 .

La différence de marche à l'émergence est : $E(n_2 - n_1)$.

La différence de phase est : $\delta = 2\pi E \frac{n_2 - n_1}{\lambda}$.

Autrement dit, les longueurs d'onde dans la lame deviennent :

$$\lambda : n_1 \quad \text{et} \quad \lambda : n_2;$$

le nombre des longueurs d'onde pour chaque faisceau est :

$$E : (\lambda : n_1) = En_1 : \lambda, \quad En_2 : \lambda;$$

la différence des nombres de longueurs d'onde est : $E \frac{n_2 - n_1}{\lambda}$,

et la différence de phase : $\delta = 2\pi E \frac{n_2 - n_1}{\lambda}$.

On dit que la lame est quart d'onde, demi-onde,, pour un λ déterminé, quand son épaisseur E est telle que le produit $E(n_2 - n_1)$ vaut $\lambda : 4, \lambda : 2, \dots$

¹ Nous étudierons en Électroptique (Tome V) les propriétés optiques des milieux anisotropes.

Le mica se clive aisément en lames minces à faces rigoureusement parallèles : on peut, par des procédés sur lesquels nous reviendrons, choisir parmi des lames de clivage celles dont l'épaisseur (voisine de 30 microns) est telle que la lame soit quart d'onde pour le jaune moyen ($\lambda = 0^{\mu},550$), c'est-à-dire pour la partie la plus lumineuse du spectre : nous allons utiliser ces lames pour obtenir une vibration polarisée circulairement.

Nous appellerons *axe du mica* celle des sections principales pour laquelle l'indice est le plus grand; la composante parallèle à cette direction est donc retardée d'un quart d'onde par rapport à la composante qui lui est normale. On peut tracer matériellement sur la lame la direction de l'axe; bien entendu, il ne s'agit que d'une direction : toutes les droites parallèles tracées dans un cristal ont exactement les mêmes propriétés.

235. Obtention de lumière polarisée circulairement. Analyse des rayons circulaires. — Pour obtenir un rayon polarisé circulairement, il faut donner à deux composantes égales rectangulaires une différence de phase $\pi : 2$. Nous emploierons pour cela une tourmaline ou un nicol servant de polariseur rectiligne, et un mica quart d'onde lui faisant suite.

Nous appelons *section principale du polariseur rectiligne*, le plan, passant par le rayon, dans lequel s'exécute la vibration. La vibra-

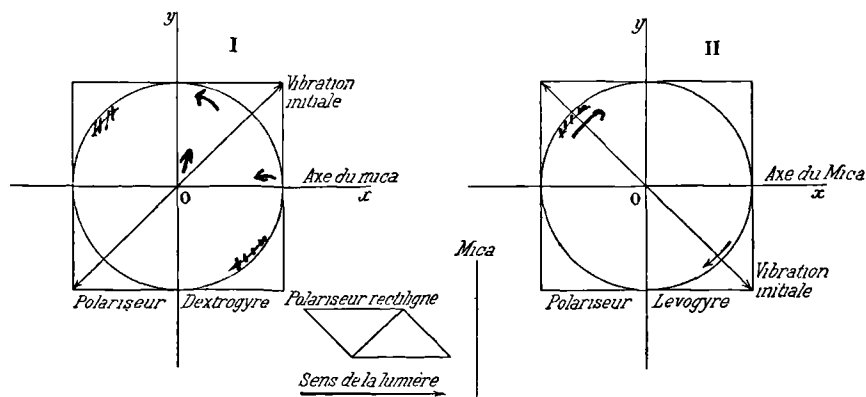


Fig. 136.

tion circulaire est dextrogyre ou lévogyre suivant que le mobile hypothétique tourne dans le sens des aiguilles d'une montre ou en sens contraire, pour l'observateur qui reçoit la lumière.

Les figures 136 montrent la disposition du polariseur et du mica, quand leur ensemble joue le rôle de polariseur circulaire.

La vibration initiale doit tomber à 45° de l'axe du mica : suivant

qu'elle fait cet angle dans un sens ou dans l'autre, la vibration circulaire obtenue est dextrogyre ou lévogyre.

En effet, dans la figure I, on a, à l'entrée dans le mica :

$$x = \sin \omega t, \quad y = \sin \omega t.$$

A la sortie du mica :

$$x = \sin \left(\omega t - 2\pi \frac{En_2}{\lambda} \right), \quad y = \sin \left(\omega t - 2\pi \frac{En_1}{\lambda} \right).$$

En choisissant convenablement l'origine des temps, on peut écrire :

$$x = \sin \left[\omega t - \frac{2\pi E}{\lambda} (n_2 - n_1) \right], \quad y = \sin \omega t;$$

et puisque la lame est quart d'onde :

$$x = \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = -\cos \omega t, \quad y = \sin \omega t.$$

La vibration est dextrogyre.

Dans la figure II, on a à l'entrée dans le mica :

$$x = \sin \omega t, \quad y = -\sin \omega t.$$

A la sortie et par un choix convenable de l'origine des temps :

$$x = \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right), \quad y = -\sin \omega t;$$

ou ce qui revient au même :

$$x = -\cos \omega t, \quad y = -\sin \omega t.$$

La vibration est lévogyre.

Nous sommes donc en possession de *polariseurs circulaires dextrogyre et lévogyre*, c'est-à-dire d'appareils capables de transformer une vibration rectiligne en une vibration circulaire d'un sens ou de l'autre.

Je vais montrer que par le retournement de ces polariseurs, on obtient des *analyseurs circulaires dextrogyre et lévogyre*, c'est-à-dire des appareils qui ne laissent passer que les vibrations circulaires d'un certain sens (fig. 137) et les transforment en vibrations rectilignes, *les restituent rectilignement*, suivant le langage usuel.

Supposons (I) qu'il tombe sur le mica une vibration circulaire *dextrogyre* d'équation :

$$x = \sin \omega t, \quad y = \cos \omega t.$$

A la sortie du mica elle devient :

$$x = \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = -\cos \omega t, \quad y = \cos \omega t.$$

C'est une vibration rectiligne parallèle à la bissectrice ON des axes, qui passera à travers l'analyseur rectiligne, à la condition que sa direction principale lui soit parallèle.

Si on reçoit sur l'appareil une vibration circulaire *lévogyre*,

$$x = -\sin \omega t, \quad y = \cos \omega t,$$

elle est restituée rectilignement à angle droit de la précédente; elle est donc arrêtée par l'analyseur rectiligne dont la direction principale est dirigée suivant ON.

Le système formé par un mica quart d'onde et un analyseur rec-

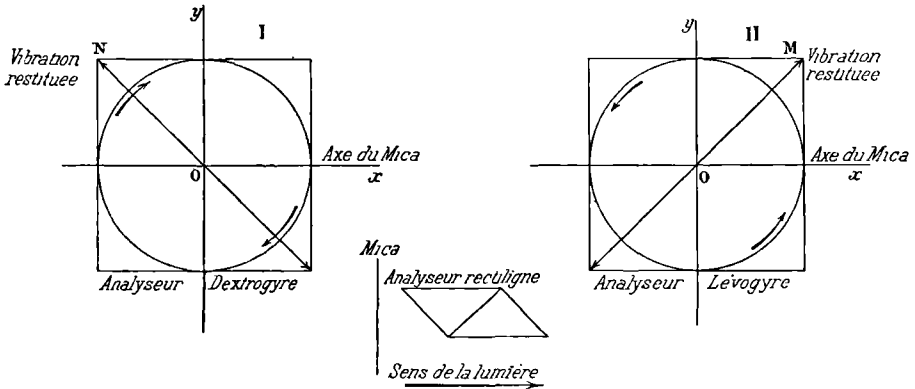


Fig. 137.

tiligne placé suivant ON constitue donc un analyseur circulaire dextrogyre, en ce sens qu'il arrête tous les circulaires lévogyres et laisse passer les dextrogyres après les avoir restitués rectilignement.

On montrerait de même que le système II est un analyseur circulaire lévogyre.

236. Interférences des circulaires. Circulaires de même sens. — Recevons en un point deux faisceaux polarisés circulairement, isogènes, mais ayant effectué des chemins différents.

Dire que ces faisceaux ont même période ou, ce qui est équivalent, même longueur d'onde dans le vide, revient à dire que les mobiles fictifs ont même vitesse angulaire : $\omega = 2\pi : T$.

Il existe entre eux une différence de phase; cela revient à dire que les mobiles qui sont censés tourner du même mouvement uniforme sur leurs trajectoires circulaires (que pour simplifier les calculs nous supposons d'abord de même rayon), ne passent plus simultanément dans un azimut pris pour origine.

Les résultats de l'interférence sont très différents suivant que les circulaires tournent dans le même sens ou tournent en sens contraires.

CIRCULAIRES DE MÊME SENS. — Il faut composer les mouvements de deux mobiles A et B qui se déplacent avec la même vitesse angulaire sur deux cercles de même rayon. Menons du centre les rayons vecteurs OA et OB; ils font l'angle δ . Une différence de marche de p

longueurs d'onde entre les deux circulaires se traduit par une différence de phase ou une distance angulaire : $\delta = 2\pi p$.

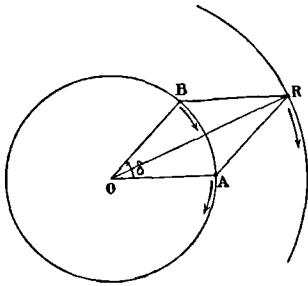


Fig. 138.

Si les faisceaux ont une différence de phase nulle ou égale à un nombre entier de longueurs d'onde, les mobiles coïncident indéfiniment.

Si le faisceau B *retarde* sur le faisceau A, s'il a dû accomplir un trajet *plus long*, le mobile B est *en retard* sur le mobile A de la différence de phase δ : il se trouve à une distance angulaire δ du mobile A, distance comptée en sens inverse du mouvement commun.

Le mobile résultant est en R à une distance constante \overline{OR} du point O, égale

à $2 \cos \frac{\delta}{2}$; elle mesure le rayon de la vibration circulaire résultante.

Si δ varie, l'intensité (§ 228) :

$$I = 8 \cos^2 \frac{\delta}{2},$$

de la vibration circulaire résultante varie :

elle est maxima pour $\delta = 0, 2\pi, 4\pi \dots$;

elle est nulle pour $\delta = \pi, 3\pi, 5\pi \dots$

Nous verrons plus loin comment se vérifient aisément ces résultats.

237. Interférences des circulaires. Circulaires de sens contraires. — Les résultats sont tout différents. Désignons par I le point où les mobiles, animés de mouvements de sens contraires, mais

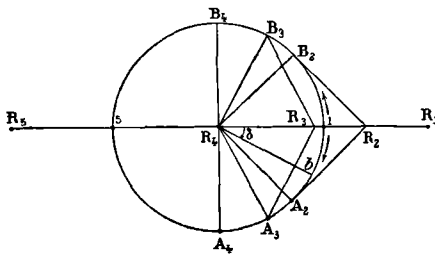


Fig. 139.

de même vitesse angulaire, se rencontrent. Ils seront ensuite simultanément aux points A_2, B_2 , puis A_3, B_3, \dots . Composons les vecteurs A_2, B_2, \dots . Nous obtenons une vibration rectiligne, dont l'amplitude est deux fois le rayon du cercle. Ainsi deux mouvements circulaires de sens contraires et de même rayon équivalent à une vibration rectiligne dont la direction est la bissectrice des vecteurs allant du centre commun à deux positions simultanées des mobiles.

Si le rayon $\overline{OA} = \overline{OB}$ est l'unité, l'intensité de chaque mouvement circulaire est 2 (somme des carrés des amplitudes de deux compo-

santes rectangulaires) et celle du mouvement rectiligne résultant est 4, conformément au principe de la conservation de l'énergie, puisqu'ici l'intensité ne dépend plus de la différence de phase.

La différence de phase entre les faisceaux interférents intervient seulement pour changer l'azimut du mouvement rectiligne résultant.

Considérons le moment où le point A est en 1 : Si le faisceau B subit un retard δ évalué en radians, le mobile B est, au moment considéré, non plus au point 1, mais en un point b situé à une distance angulaire δ comptée, à partir du point 1, en sens inverse du mouvement du point B. La vibration résultante aura donc tourné d'un angle $\delta : 2$ en sens inverse du mouvement de rotation de la vibration retardée.

D'où la règle : si le lévogyre est retardé de la phase δ , le rectiligne résultant est déplacé dans le sens dextrogyre de l'angle $\delta : 2$.

Et inversement pour un retard du dextrogyre ou pour une avance du lévogyre.

Si le retard de l'un des faisceaux varie de 0 à 2π , l'azimut du rectiligne résultant varie de 0 à π , et proportionnellement au retard.

238. Expériences avec des faisceaux polarisés circulairement. — Il suffit d'éclairer la fente source avec de la lumière polarisée rectilignement, puis de placer sur les fentes délimitant les faisceaux (dispositif d'Young) deux micas dont les axes sont parallèles ou croisés, et dirigés à 45° du rectiligne utilisé : on obtient ainsi deux faisceaux interférents de même rotation ou de rotations contraires. On peut aussi recevoir sur les micas les images réelles dues à la bilentille.

CIRCULAIRES DE MÊME SENS.

Les micas ont leurs axes parallèles : les circulaires sont de même sens. On observe des franges identiques à celles qu'on obtient en lumière naturelle : le centre du phénomène est toujours une frange brillante. Le système des circulaires résultants est représenté fig. 140 : la distance \overline{PQ} est la largeur d'une frange.

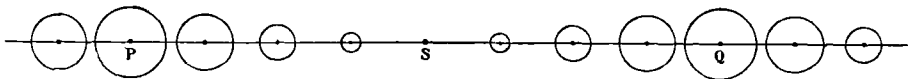


Fig. 140.

Observons les franges à travers un nicol ou une tourmaline ; elles subsistent identiquement les mêmes *quel que soit l'azimut du nicol*, l'intensité des maximums est seulement diminuée de moitié. C'est évident puisque nous avons affaire à des vibrations circulaires : le nicol ne laisse passer qu'une composante rectangulaire sur deux.

Observons-les à travers un analyseur circulaire. Si l'analyseur est de même sens que les circulaires, rien n'est modifié : *l'intensité n'est*

pas diminuée par l'interposition de l'analyseur, abstraction faite des absorptions par réflexion et transmission. Si l'analyseur est de sens contraire, il ne passe plus de lumière.

CIRCULAIRES DE SENS CONTRAIRES.

Les micas ont leurs axes croisés. A l'œil nu les franges ont disparu : nous avons vu plus haut qu'en effet les circulaires donnent, quelle que soit la différence de phase, un rectiligne d'amplitude invariable; l'azimut seul est variable (fig. 141).

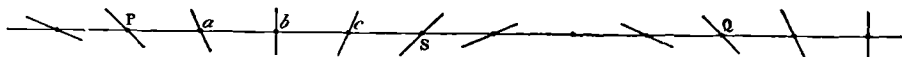


Fig. 141.

Observons avec un nicol; les franges apparaissent avec l'épaisseur qu'elles avaient en lumière naturelle. Les phénomènes sont cependant bien différents.

Si nous imprimons à l'analyseur une rotation uniforme, nous voyons les franges se déplacer d'un mouvement uniforme; leur déplacement linéaire est égal à la distance de deux maximums, quand la rotation de l'analyseur est égale à π . Leur netteté est d'ailleurs toujours la même et indépendante de l'azimut de l'analyseur.

Ces résultats sont évidents. Considérons le système de rectilignes de la figure 141. Plaçons la direction principale de l'analyseur normalement à la vibration P; elle est aussi normale à la vibration Q qui a tourné à partir de la première de l'angle π , qui par conséquent est à la distance PQ correspondant à une variation λ de la différence de marche géométrique. Nous avons un minimum nul en P et en Q, c'est-à-dire un système de franges ayant précisément le même écartement qu'en lumière naturelle. En S, à moitié de l'intervalle PQ, la vibration a tourné seulement de 90° ; elle est parallèle à la direction principale de l'analyseur, elle passe tout entière : c'est un maximum du système de franges.

Faisons tourner l'analyseur dans le sens dextrogyre; il se met successivement en croix avec les vibrations a, b, c, \dots : le minimum nul se déplace, les franges conservant toujours le même aspect.

Il serait facile de montrer qu'au point où la différence de marche entre les faisceaux interférents est nulle, le rectiligne est restitué parallèlement à la vibration initiale. Il y a donc une frange brillante en ce point, si la direction principale de l'analyseur est parallèle à la vibration rectiligne initiale.

Nous aurons l'occasion de retrouver ces phénomènes qui résultent de l'interférence de deux circulaires inverses, quand nous parlerons du spectre cannelé obtenu à l'aide d'une lame de quartz plan parallèle taillée perpendiculairement à l'axe (voir Tome VI).

239. Interférences de circulaires inégaux.

CIRCULAIRES DE MÊME SENS.

Si les rayons a et b des circulaires composants de même sens ne sont pas égaux, la vibration résultante est encore circulaire, puisque les mobiles composants ont la même vitesse angulaire. Le rayon du cercle résultant est :

$$\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \delta},$$

et l'intensité du mouvement qu'il transporte proportionnelle à :

$$2(a^2 + b^2 + 2ab \cos \delta).$$

L'intensité est maxima et minima pour les mêmes valeurs de δ que précédemment.

Le système des circulaires résultants pour des valeurs croissantes de δ est représenté par une figure analogue à la figure 140. Mais les minimums ne sont plus nuls. Le rayon du cercle résultant varie de

$$a - b \text{ à } a + b.$$

CIRCULAIRES DE SENS CONTRAIRES.

La vibration résultant des deux circulaires :

$$\text{dextrogyre : } x = a \cos \omega t, \quad y = -a \sin \omega t;$$

$$\text{lévogyre : } x = b \cos(\omega t - \delta), \quad y = b \sin(\omega t - \delta),$$

est une vibration elliptique dont les axes *indépendants* de δ sont $a + b$ et $-a + b$, et dont le grand axe fait un angle $\delta : 2$ avec la droite de référence OR_1 . Comme le retard δ porte sur le lévogyre, l'angle $\delta : 2$ doit être pris dans le sens dextrogyre.

Cette proposition est géométriquement évidente. Nous en donnons la démonstration analytique pour habituer le lecteur à cette Cinématique spéciale.

Un changement de l'origine des temps permet d'écrire :

$$\text{dextrogyre : } x = a \cos\left(\omega t + \frac{\delta}{2}\right), \quad y = -a \sin\left(\omega t + \frac{\delta}{2}\right),$$

$$\text{lévogyre : } x = b \cos\left(\omega t - \frac{\delta}{2}\right), \quad y = b \sin\left(\omega t - \frac{\delta}{2}\right).$$

La vibration résultante a pour composantes :

$$X = \Sigma x = (a + b) \cos \omega t \cos \frac{\delta}{2} + (-a + b) \sin \omega t \sin \frac{\delta}{2},$$

$$Y = \Sigma y = -(a + b) \cos \omega t \sin \frac{\delta}{2} + (-a + b) \sin \omega t \cos \frac{\delta}{2}.$$

Cette vibration elliptique a donc pour vibrations *axiales* :

$$X' = (a + b) \cos \omega t, \quad Y' = (-a + b) \sin \omega t;$$

mais ses axes font l'angle $\delta : 2$ avec la droite de référence dans le sens dextrogyre.

Le système des elliptiques résultants pour des valeurs croissantes de δ est représenté par une figure analogue à la figure 141. Mais il faut y remplacer le rectiligne par un elliptique invariable, d'autant plus voisin du rectiligne que les rayons des circulaires sont plus voisins. Les phénomènes sont en gros les mêmes que précédemment, mais les minimums ne sont plus nuls.



CHAPITRE VI

INTERFÉRENCES. LAMES ISOTROPES

La caractéristique des phénomènes d'interférence étudiés dans ce Chapitre, est l'obtention de la différence de marche entre les faisceaux interférents à l'aide de lames minces isotropes.

240. Anneaux par réflexion sur les deux faces d'une lame mince plan parallèle. — Soient deux rayons parallèles MC et NA; on peut les considérer comme issus d'un point très éloigné. Les vibrations sont concordantes sur

un plan AD mené normalement aux deux rayons. L'un se réfléchit suivant CF sur la face antérieure d'une lame plan parallèle; l'autre pénètre dans cette lame, se réfléchit sur la face postérieure, se réfracte en C et sort suivant la direction CF. Soit n l'indice de réfraction de la lame : les chemins

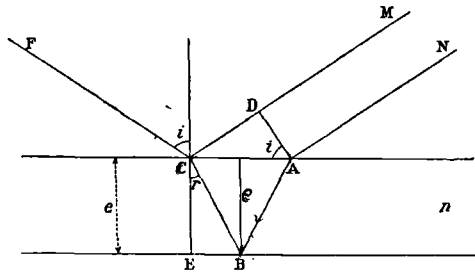


Fig. 142.

optiques, comptés à partir du plan AD où les vibrations sont concordantes, jusqu'au point C où les rayons recommencent à avoir même trajectoire, sont :

$$\begin{array}{ll} \text{pour le premier} & \overline{CD} \\ \text{pour le second} & 2n \cdot \overline{AB}. \end{array}$$

La différence de marche est :

$$2n \overline{AB} - \overline{CD} ..$$

On a :

$$\overline{AC} = 2 \overline{EB} = 2e \operatorname{tgr}, \quad \overline{CD} = \overline{AC} \sin i = 2e \operatorname{tgr} \sin i.$$

Le retard est donc :

$$\frac{2ne}{\cos r} - 2e \operatorname{tgr} \sin i = 2ne \cos r.$$

Toutefois l'expérience montre que dans les réflexions s'introduisent des retards qui ne se compensent pas, les deux rayons ne se réfléchissant pas dans les mêmes conditions. L'un se réfléchit dans un milieu d'indice 1 sur un milieu d'indice n ; l'autre dans un milieu d'indice n sur un milieu d'indice 1. L'expérience prouve qu'il faut ajouter un retard $\lambda : 2$ au retard que nous venons de calculer (§ 223).

Le retard total est en définitive : $\Delta = 2ne \cos r + \frac{\lambda}{2} = m\lambda$.

Pour les rayons normaux, on a :

$$\Delta_0 = 2ne + \frac{\lambda}{2} = m_0\lambda, \quad \Delta_0 - \Delta = 2ne(1 - \cos r) = (m_0 - m)\lambda.$$

Si les angles sont petits, si l'on observe le phénomène près de l'incidence normale :

$$i = nr, \quad 1 - \cos r = \frac{i^2}{2n^2}, \quad i^2 = \frac{n}{e}(m_0 - m)\lambda.$$

Pour observer les phénomènes, on regarde avec une lunette *pointée sur l'infini* normalement à la lame mince L, en verre par exemple. Une autre lame l d'épaisseur quelconque est disposée à 45° et sert de glace sans tain pour renvoyer les rayons émis par la source *monochromatique* S. On voit apparaître, *dans le plan focal principal* de la lunette, des franges circulaires qui se resserrent à mesure que leur rayon grandit.

A chaque point du plan focal principal correspond, en avant de la lentille, une direction pour les rayons, et par conséquent un angle i

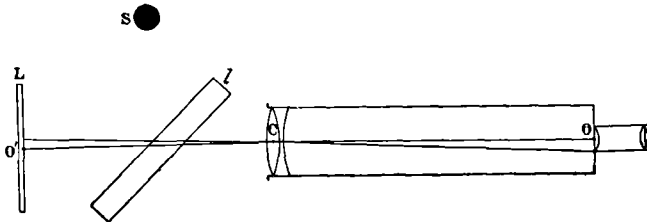


Fig. 143.

d'incidence sur la lame L. Soit R la distance d'un point du plan focal à la trace O de la perpendiculaire OO' abaissée sur la lame L du centre optique C de l'objectif; soit f la distance focale principale.

On a : $R = fi$.

A chaque distance R correspond par conséquent pour les faisceaux interférents un angle i et une certaine phase :

$$\frac{2\pi\Delta}{\lambda} = 2\pi m.$$

L'état d'interférence sur un cercle de rayon R est le même qu'au

centre O du phénomène, à la condition que $m_0 - m$ soit un nombre entier.

Pour préciser, admettons que le centre est un minimum d'intensité; nous aurons une série de minimums pour les rayons R donnés par l'équation :

$$R^2 = \frac{f^2 n}{e} (m_0 - m)\lambda,$$

où $m_0 - m$ est égal à la suite des nombres entiers. Les rayons successifs des anneaux noirs varient donc comme 0, 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ...; les franges en lumière monochromatique sont circulaires et se resserrent à mesure que leur rayon croît.

On dit qu'elles sont *localisées à l'infini*. La source S et l'ouverture de l'objectif peuvent être aussi étendues qu'on voudra; ce qui revient au même, chaque double faisceau qui a une origine commune peut ne pas avoir la même origine que le double faisceau voisin.

Cela tient à ce que la différence de marche des rayons constituant un double faisceau dépend de l'incidence, et pas du tout de la phase antérieure. Considérons deux groupes interférents qui correspondent à deux points différents de la lame L : pourvu qu'ils aient la même incidence, ils iront converger au même point du plan focal, auront la même différence de marche et donneront par conséquent le même phénomène d'interférence.

Le système de franges est donc parfaitement déterminé.

Les rayons interférents ne sont pas de même amplitude; nous verrons que les diminutions d'amplitude dues aux deux réflexions sont les mêmes, bien qu'elles ne se produisent pas dans les mêmes conditions; mais l'un des rayons est deux fois réfracté. Donc les minimums du système de franges ne sont pas nuls.

L'expérience est facile, pourvu qu'on dispose d'une lame plan parallèle bien travaillée.

241. Observations en lumière blanche. — Quand on modifie la longueur d'onde de la lumière utilisée, le système de franges se modifie. D'abord le centre du phénomène ne correspond plus au même état d'interférence : on peut avoir des anneaux à centres plus ou moins voisins d'un maximum ou d'un minimum. Ensuite, le rayon des anneaux de même ordre ($m - m_0 = C^{\text{te}}$) varie à peu près comme $\sqrt{\lambda}$; il croît quand on passe du violet au rouge. Je dis à peu près : il varie rigoureusement comme $\sqrt{n\lambda}$; l'indice décroissant quand on va du violet au rouge, le rayon varie un peu moins vite que $\sqrt{\lambda}$.

Si on utilise de la lumière blanche, les franges disparaissent.

Cela tient à ce que l'épaisseur e n'étant pas très faible, m_0 est loin d'être nul. Utilisons par exemple une lame de 20^u d'épaisseur, soit

$n = 1,5$; $m_0 = 100,5$ pour $\lambda = 0^{\mu},600$; $m_0 = 101,5$ pour une longueur d'onde très voisine de la première, $\lambda = 0^{\mu},594$.

Nous aurons donc la superposition d'une infinité de systèmes de franges d'épaisseurs différentes et dont les centres ont tous les états possibles d'interférence; il résulte naturellement de là une teinte uniforme blanche. Pour obtenir un phénomène *coloré* avec de la lumière blanche, il faut utiliser des lames dont l'épaisseur soit de l'ordre du millième de millimètre : ce n'est pas pratique sans un artifice.

Le blanc qu'on obtient ici (dit blanc d'ordre supérieur) n'est pas équivalent au blanc ordinaire : c'est ce que nous allons montrer par l'analyse spectroscopique (§ 208).

242. Spectre cannelé par réflexion. — Faisons tomber de la lumière blanche sur une lame plan parallèle d'épaisseur e , et recevons le faisceau, réfléchi sous une incidence i , sur la fente d'un spectroscopie. Pour que l'incidence i soit bien déterminée, on peut éclairer la lame à l'aide d'un collimateur, ou simplement employer une lame de petites dimensions en plaçant le spectroscopie assez loin de la lame.

La différence de marche entre les faisceaux est :

$$\Delta = 2ne \cos r + \frac{\lambda}{2} = 2ne \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{n^2}} + \frac{\lambda}{2}.$$

Δ ne dépend plus que de n , c'est-à-dire de λ . Nous aurons donc un spectre où l'intensité varie en fonction de la longueur d'onde, spectre traversé par des minimums, ce qu'on appelle un *spectre cannelé*. Les minimums sont d'autant plus rapprochés, les franges d'autant plus fines que e est plus grand. Si nous doublons l'épaisseur, nous intercalons très sensiblement un minimum entre deux minimums du spectre précédent.

Cette expérience permet de montrer l'existence d'un retard qui dépend des conditions de la réflexion. Éclairons la lame avec un collimateur pour que l'incidence soit bien déterminée; rapprochons de la lame la fente du spectroscopie. *Argentons la moitié de la face postérieure de la lame*, et disposons-la de manière que les moitiés de la fente du spectroscopie soient éclairées par les moitiés de la lame. Nous obtenons simultanément deux spectres cannelés dont les franges, dues cependant à des lames de même épaisseur et de même indice, ne sont plus dans le prolongement les unes des autres. Donc le retard Δ dépend non seulement de la longueur d'onde et de l'incidence, mais encore des conditions de la réflexion.

Ces expériences sont faciles à réaliser, même avec des lames médiocres. Nous engageons le lecteur à les répéter.

243. Anneaux par réflexion sur les faces d'une lame d'air.

— Supposons que le rayon AB se réfracte en B sur une lame plan parallèle d'épaisseur e' et d'indice n' quelconques. Au point C il se sépare en deux parties : l'une revient suivant CDE; l'autre passe dans la lame d'indice n et d'épaisseur e : sa trajectoire est CFGHI.

On sait que l'inclinaison des rayons dans le milieu n est indépendante de l'existence de la lame n' . La différence des chemins optiques parcourus par les rayons, mesurés du point B jusqu'au plan HM qui leur est normal, est :

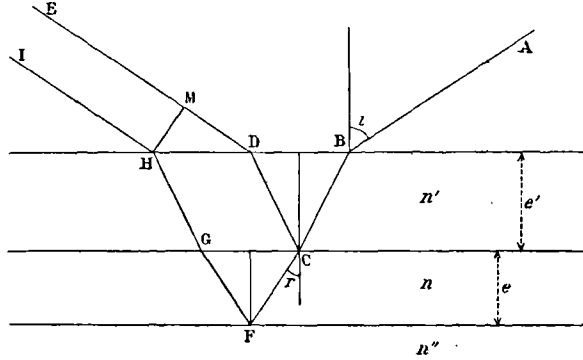


Fig. 144.

$$2n \cdot \overline{CF} - \overline{DM},$$

puisque les chemins $2n' BC$ sont communs. Donc elle est indépendante de l'existence de la lame e' : son expression est encore $2ne \cos r$.

En particulier, si la lame mince est en air, $n=1$, $r=i$; la différence des chemins est $2e \cos i$.

Nous avons dit que la réflexion intervient pour produire un retard. Dans le cas où les corps sont tous transparents et où l'indice de la lame est plus grand que les indices des milieux limitrophes, nous avons dû ajouter $\lambda : 2$ à la différence des chemins, ou retrancher $\lambda : 2$, ce qui revient évidemment au même. Il en est de même si l'indice de la lame est plus petit que ceux des milieux limitrophes. L'expérience actuelle nous permet d'obtenir une lame dont l'indice n soit compris entre les indices n' et n'' des milieux limitrophes : on fait par exemple la lame n' en verre d'indice 1,5, la lame n'' en verre d'indice 1,6, et on choisit comme milieu intermédiaire une lame mince d'un liquide d'indice 1,55 par exemple. L'expérience montre alors qu'il ne faut pas ajouter $\lambda : 2$.

Nous trouverons plus loin une expérience qui utilise ces propositions dont nous montrerons les raisons théoriques en Électroptique.

244. Franges obtenues avec une lame d'épaisseur variable et localisées à distance finie. — Éclairons un couvre-objet de microscope, c'est-à-dire une lame à *peu près mais non rigoureusement* plan parallèle, avec une lumière monochromatique; nous verrons se dessiner *sur* la lame un système de franges. Si nous regardons avec un viseur dont l'objectif n'est pas diaphragmé, les franges

perdent de leur netteté et d'autant plus que l'ouverture du viseur est plus grande, c'est-à-dire que l'on utilise des faisceaux contenus dans un plus grand angle solide. Le caractère de ces franges est par conséquent d'être localisées sur la lame, au moins très approximativement, et d'être nettes seulement si on utilise un faisceau de petit angle solide.

En étudiant la distribution des franges (nous insisterons plus loin sur un procédé commode), on trouve que le retard en chaque point entre les faisceaux interférents est calculable par les formules précédentes, à la condition de remplacer chaque élément de lame mince, toujours assimilable à un élément prismatique, par une petite lame plan parallèle de même épaisseur moyenne, et d'introduire dans la formule l'incidence moyenne *du faisceau à peu près cylindrique* utilisé.

Nous allons comprendre du même coup la nécessité des conditions que nous avons énoncées pour que les franges soient nettes, et les raisons générales de la localisation d'un système de franges dans un lieu déterminé.

Soit L une lame prismatique; observons le plan P' conjugué du plan P à travers la lentille de centre optique C . Les rayons qui se coupent en A' proviennent du point A , dans le milieu antérieur à la

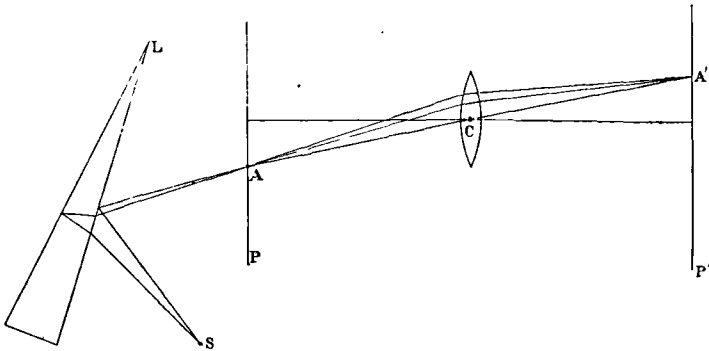


Fig. 145.

lentille; nous savons que tous les chemins qui vont de A à A' sont optiquement égaux. Les états d'interférence en A' et en A sont donc les mêmes. On peut faire abstraction de la lentille et considérer ce qui se passe dans le plan P au point A . Il est seulement entendu que seuls seront utiles les rayons passant par le point A et rencontrant l'objectif du viseur. *La source est supposée étendue.*

Pour que les rayons interfèrent, il faut qu'ils émanent d'un même point S de la source. On se convaincra facilement qu'il est possible de grouper les rayons deux par deux avec les conditions :

1° que les rayons d'un groupe émanent d'un même point S ;

2° qu'après avoir été inégalement retardés par le prisme, ils viennent passer par le point A et par conséquent par A'.

Peu importe d'ailleurs les différences de phase entre les points sources S, la différence de marche entre les rayons de chaque groupe intervenant seule. Peu importe aussi (c'est une application du principe d'Huyghens, que nous étudierons plus loin) que les points S soient réellement ou non des points lumineux : tout point de croisement des rayons peut être considéré comme source.

Tout d'abord si la lunette est étroitement diaphragmée, les seuls rayons utilisables qui passent par le point A ne touchent qu'une partie très petite de la lame; ils correspondent donc à une épaisseur et une incidence uniques. Donc en tout point A, et par conséquent en tout point A', il y a un état d'interférence parfaitement déterminé : d'où un système de franges parfaitement net. Dans ce cas, la lunette peut viser un plan quelconque sans que le système de franges disparaisse. Il revient au même de diaphragmer la source.

Supposons donc que l'ouverture ne soit pas infiniment petite : cherchons à quelle condition il existe un système de franges net.

Pour voir en A, et par conséquent en A', autre chose qu'un éclaircissement moyen, il est nécessaire que les deux rayons formant chacun des groupes en nombre infini qui passent par A aient à *peu près* la même différence de marche, et par conséquent donnent par leur interférence en A une intensité qui soit à *peu près* la même fraction de la somme de leurs intensités respectives.

C'est généralement impossible, parce que les différents groupes passant par A correspondent à des épaisseurs et des incidences inégales, qu'il n'y a pas compensation entre l'effet de la variation d'épaisseur et l'effet de la variation d'incidence, et que par conséquent les deux rayons constituant chaque groupe ont une différence de marche variable d'un groupe à l'autre.

A mesure que le point A se rapproche de la lame qui est supposée très mince, la surface utilisée par les rayons qui se croisent en A diminue : évidemment cette surface est minima si le point A est sur la lame. Tous les groupes qui passent en A correspondent bien alors à la même épaisseur; mais ils correspondent à des incidences différentes : il subsiste donc une cause de moindre netteté pour les franges. D'où la nécessité de diminuer l'ouverture de l'appareil d'observation.

Nous retrouvons ainsi les conditions énoncées : accommodation sur la lame, appareil d'observation considérablement diaphragmé.

Nous reviendrons plus loin sur le problème général de la localisation des franges (§ 258 et sq.).

245. Étude des épaisseurs d'une lame mince. Anneaux de Newton. — Nous avons dit que le calcul de la différence de phase se fait pour une lame d'épaisseur lentement variable comme pour

une lame à faces parallèles. Le retard est donné par la formule :

$$\Delta = 2ne \cos r + \frac{\lambda}{2} = m\lambda;$$

m est ce qu'on appelle le *numéro d'ordre* ou l'*ordre* de la frange.

Plaçons l'œil assez loin de la lame pour que $\cos r$ soit le même en tous les points; cette condition est, pour une distance et une aire données, d'autant mieux réalisée que r et par conséquent i sont plus voisins de 0. Opérons en lumière monochromatique.

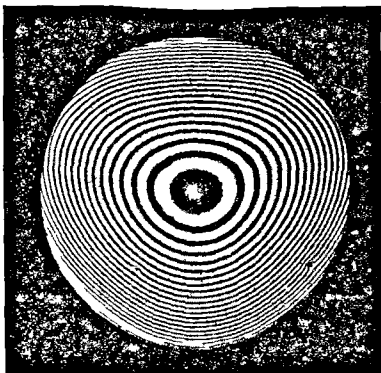


Fig. 146.

Une frange, c'est-à-dire le lieu des points où m a une valeur invariable, correspond donc à une épaisseur invariable. Si l'on prend une des faces de la lame comme surface de référence, une frange est donc une courbe de niveau de l'autre face. Pour la facilité des observations, on vise généralement le lieu des points où l'intensité est minima, c'est-à-dire une frange pour laquelle m est un nombre de la forme :

$$\frac{2k+1}{2}.$$

Deux franges consécutives, dont les numéros sont par conséquent m et $m+1$, correspondent à des épaisseurs différant de la quantité constante : $\delta e = \frac{\lambda}{2n \cos r}$. Leur écartement δs mesuré sur la lame est donc en raison inverse de la pente. Soit α l'angle extrêmement petit du prisme auquel la lame est assimilable au voisinage des points considérés; on a : $\delta s = \delta e : \alpha$. Les lignes de plus grande pente correspondent donc aux lignes pour lesquelles la distance des franges consécutives est un minimum.

L'étude de la forme des franges permet donc de reconnaître le relief d'une des faces de la lame par rapport à l'autre prise pour surface de référence, absolument comme les lignes de niveau d'une carte topographique permettent d'étudier le relief du terrain à partir de la sphère terrestre moyenne prise comme surface de référence.

Si on substitue à la lumière λ une lumière λ' , les franges conservent la même forme; c'est absolument comme si l'on changeait la distance verticale des courbes de niveau d'une carte, comme si au lieu de les prendre tous les 50 mètres, on les prenait tous les 100 mètres, par exemple. Les écartements des franges consécutives m , $m+1$,

$m + 2, \dots$, sont, toutes choses égales d'ailleurs, proportionnels aux longueurs d'onde. Elles sont plus écartées avec le rouge qu'avec le violet.

S'il est facile de déterminer la variation du numéro d'ordre m , il est très difficile de déterminer la valeur absolue de ce numéro, à moins de dispositions particulières. Quand la lumière est parfaitement monochromatique, on ne peut généralement déterminer m qu'à un nombre entier près. Nous verrons plus loin comment l'étude simultanée des franges de deux lumières simples lève la difficulté.

246. Anneaux de Newton. — Parmi les formes de lames minces qu'on peut rencontrer, il en est une très simple et que les expériences de Newton ont rendue célèbre; elle est formée par deux lentilles sphériques posées l'une sur l'autre.

Soit R_1 et R_2 les rayons de courbure des deux faces qui limitent la lame.

On trouve facilement que

l'épaisseur $\overline{AB} = e$, à une distance s du point de contact O , est :

$$e = \frac{s^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

La formule n'est qu'approchée, mais il faut remarquer que les longueurs s utilisées sont de l'ordre de 5 centimètres et les rayons de l'ordre de 50 mètres. Posons :

$$s = 5, \quad R_1 = R_2 = 50^m = 5 \cdot 10^3 \text{ centimètres};$$

$$e = \frac{25^c}{5 \cdot 10^3} = \frac{5^c}{10^3} = 50^\mu,$$

épaisseur déjà considérable pour ce que nous ferons de cet appareil.

Les franges sont des cercles. Ici nous connaissons les numéros d'ordre en valeurs absolues : il y a contact au point O , par conséquent épaisseur nulle. La différence de marche y est $\lambda : 2$, si la lame est en air : *les franges sont à centre noir*. Les rayons s des minimums consécutifs, c'est-à-dire des parties les plus obscures des franges noires, correspondent à des valeurs de e variant en progression arithmétique à partir de zéro : les rayons sont entre eux comme les racines carrées de la suite des nombres entiers. Les anneaux se resserrent de plus en plus à mesure que s croît.

Comme au centre O du phénomène la différence de marche géométrique est nulle, on voit des franges en lumière blanche. Le premier minimum est au point O , quel que soit λ .

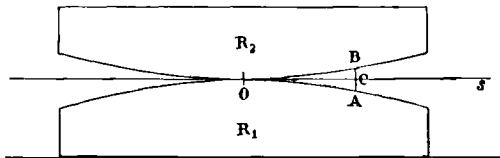


Fig. 147.

Comme la largeur des franges n'est pas la même pour les différentes couleurs, la superposition des systèmes de franges dès que s devient un peu grand, finit par produire un blanc d'ordre supérieur. Nous avons rencontré ces mêmes résultats pour les franges d'interférence ordinaires : il est inutile d'insister.

Si les deux lentilles ont des indices différents n' et n'' et si nous remplissons l'intervalle avec un liquide d'indice intermédiaire n , les anneaux sont à centre blanc. C'est la démonstration la plus simple de ce que nous avons dit des retards produits par la réflexion sur les corps transparents (§ 243).

247. Application des franges des lames minces. — L'étude du déplacement des franges permet de déterminer les variations d'épaisseur d'une lame. Observons les franges sous une incidence invariable et la même pour toute la lame. Une frange de numéro m donné correspond à une épaisseur invariable e . Si l'épaisseur de la lame varie, la frange se déplace en changeant de forme, de manière à passer toujours par les points où l'épaisseur est e .

En particulier si l'épaisseur varie de la même quantité en tous les points, les franges se déplacent sans changer de forme. Quand l'épaisseur diminue, le déplacement se fait vers les numéros d'ordre élevés, c'est-à-dire vers les grandes épaisseurs; quand l'épaisseur augmente, le déplacement se fait vers les petites épaisseurs. Le déplacement d'une largeur de frange correspond à une variation d'épaisseur :

$$\delta e = \frac{\lambda}{2n \cos r}.$$

En particulier s'il s'agit d'une lame d'air et d'une incidence presque normale, $\delta e = \lambda : 2$.

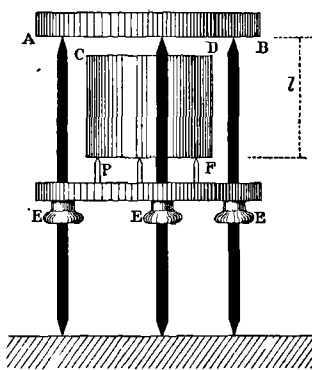


Fig. 148.

On applique cette méthode à l'étude des petits mouvements, de la dilatation thermique des cristaux ou des corps qu'on ne peut obtenir sous forme de barres allongées, des déformations élastiques des solides,...

On limite une des faces de la lame mince d'air par une surface de référence, fixe par convention, à laquelle on rapporte les déplacements de l'autre surface, liée au corps à étudier.

Voici, par exemple, comment on détermine les dilatations des cristaux. Un petit trépied en platine porte la lame AB transparente dont la face inférieure sert de surface de référence. Une petite plateforme, dont on peut régler la hauteur et l'inclinaison par trois écrous E, porte le cristal sur

trois pointes P. On détermine avec un cathétomètre et à une température déterminée, 0° par exemple, la distance l_0 des pointes P aux pointes qui supportent la lame AB. On détermine aussi l'épaisseur h_0 du cristal.

A 0° la lame prismatique d'air AB, CD, a l'épaisseur moyenne : $e_0 = l_0 - h_0$. On en règle l'angle α (§ 245) de manière que les franges en lumière jaune soient suffisamment écartées.

Chauffons le tout : à la température t , l'épaisseur devient : $e = l - h$; la variation d'épaisseur est :

$$e - e_0 = (l - l_0) - (h - h_0).$$

Le déplacement des franges d'interférence permet de déterminer $e - e_0$. On peut calculer $l - l_0$, si l'on connaît le coefficient de dilatation du platine qui a servi à faire le trépied. On déduit de là la variation $h - h_0$, de l'épaisseur du cristal, et par conséquent son coefficient de dilatation pour la direction DF parallèlement à laquelle se fait la dilatation.

248. Échelles des teintes. — Considérons deux faisceaux interférents de même amplitude :

$$x_1 = I_1 \sin 2\pi \frac{t}{T}, \quad x'_1 = I_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\Delta_1}{\lambda_1} \right).$$

L'intensité résultante est :

$$4I_1^2 \cos^2 \pi \frac{\Delta_1}{\lambda_1}.$$

Utilisons, non plus de la lumière simple de longueur d'onde λ_1 , mais de la lumière blanche. Nous savons que des couleurs différentes n'interfèrent pas. Nous obtiendrons, par la superposition de toutes les intensités résultantes, une teinte que nous pouvons représenter *symboliquement* par l'expression :

$$\sum I_1^2 \cos^2 \frac{\pi \Delta_1}{\lambda_1}.$$

Dans la lumière blanche normale, les intensités I qui correspondent à chaque λ , évaluées en watts par exemple, ont des valeurs relatives parfaitement déterminées. D'une manière générale, Δ_1 est une fonction de λ_1 . La teinte résultante s'obtient donc par la superposition de radiations de longueur d'onde λ , dont on prend une fraction : $\cos^2 \pi \frac{\Delta}{\lambda}$, de la quantité qui se trouve dans la lumière blanche normale.

Considérons le cas particulier où la différence de marche Δ est indépendante de λ .

La teinte a pour expression symbolique :

$$\sum I_1^2 \cos^2 \frac{\pi \Delta}{\lambda_1}.$$

A chaque valeur de Δ correspond une teinte parfaitement déterminée. L'échelle des teintes s'obtient en faisant varier Δ de 0 à une valeur suffisamment grande. Il est clair que pour Δ grand, on obtient du blanc d'ordre supérieur. La lumière analysée au spectroscopie donne un spectre cannelé à franges d'autant plus serrées que Δ est plus grand.

Considérons les deux teintes :

$$\sum I_1^2 \cos^2 \frac{\pi \Delta}{\lambda_1}, \quad \sum I_1^2 \sin^2 \frac{\pi \Delta}{\lambda_1}.$$

Superposons-les; nous obtenons la teinte :

$$\sum I_1^2 \left(\cos^2 \frac{\pi \Delta}{\lambda_1} + \sin^2 \frac{\pi \Delta}{\lambda_1} \right) = \sum I_1^2.$$

C'est du blanc, puisque nous devons superposer les couleurs dans la proportion même où elles se trouvent dans le blanc normal.

Les deux échelles représentées par :

$$(I) \quad \sum I_1^2 \cos^2 \frac{\pi \Delta}{\lambda_1}, \quad (II) \quad \sum I_1^2 \sin^2 \frac{\pi \Delta}{\lambda_1},$$

sont donc complémentaires.

Les teintes de l'échelle II seraient rigoureusement celles qu'on obtient en lumière blanche dans les anneaux de Newton à centre noir, si les faisceaux interférents avaient même intensité. On obtient effectivement ces teintes mais lavées de blanc, puisque la différence de marche : $\Delta = 2ne \cos r + \frac{\lambda}{2}$, est quasiment indépendante de la longueur d'onde.

Pour l'air, l'indice ne varie d'un bout à l'autre du spectre visible que de 1 : 70 de sa valeur; la variation est du même ordre pour toutes les substances transparentes.

On obtient l'échelle I lavée de blanc dans les anneaux à centre blanc.

Ces mêmes séries de teintes se retrouvent dans les franges d'interférence des miroirs de Fresnel et dans bien d'autres phénomènes où le retard est quasiment indépendant de la longueur d'onde, où, par conséquent, la différence de phase est en raison inverse de cette longueur : elles ont une importance pratique considérable, aussi nous en donnerons le tableau.

Dans la première colonne, est inscrit le retard Δ en millièmes de millimètre, en millièmes de micron. L'épaisseur e de la lame d'air aux points correspondants et pour l'incidence normale, est donc :

$$e = \Delta : 2,$$

	Δ .	Échelle I, retards Δ .	Échelle II, retards $\Delta + \frac{\lambda}{2}$.
Premier ordre.	0	Blanc.	Noir.
	97	Blanc jaunâtre.	Gris lavande.
	218	Jaune brun.	Gris clair.
	259	Rouge clair.	Blanc verdâtre.
	267	Rouge carmin.	Blanc jaunâtre.
	275	Rouge brun presque noir.	Jaune paille.
	281	Violet foncé.	Jaune paille.
	306	Indigo.	Jaune clair.
	332	Bleu.	Jaune brillant.
	505	Vert pâle.	Rouge.
551	Vert jaunâtre.	Rouge foncé.	
Second ordre.	565	Vert clair.	Pourpre.
	575	Jaune verdâtre.	Violet.
	589	Jaune vif.	Indigo.
	664	Orangé.	Bleu.
	747	Rouge carmin.	Vert.
	826	Pourpre.	Vert clair.
	843	Pourpre violacé.	Vert jaunâtre.
	866	Violet.	Jaune verdâtre.
	910	Indigo.	Jaune.
	948	Bleu foncé.	Orangé.
1101	Vert.	Rouge violacé.	
Troisième ordre.	1128	Vert jaunâtre.	Violet.
	1151	Jaune.	Indigo.
	1258	Chair.	Bleu.
	1334	Rouge.	Vert bleuâtre.
	1376	Violet.	Vert d'eau.
	1426	Bleu violacé.	Jaune verdâtre.
	1495	Bleu verdâtre.	Rose.
	1628	Vert.	Carmin.
	1652	Vert jaunâtre.	Gris violacé.

249. **Teintes sensibles.** — Parmi ces teintes, il en est de particulièrement remarquables qu'on appelle *teintes de passage* ou *teintes sensibles*. Elles correspondent à l'extinction du jaune moyen :

$$\lambda = 0^{\text{u}},550,$$

et sont formées par les couleurs extrêmes du spectre; elles sont par conséquent pourpres, lie de vin. Elles correspondent dans l'une ou l'autre échelle aux retards : $\Delta = k \cdot 275$, où k est un nombre entier : elles séparent ce qu'on appelle les *demi-ordres de teintes*. Naturellement si Δ est un peu inférieur à la valeur qui les caractérise, c'est le violet (dont le λ est le plus petit) qui est particulièrement éteint : la teinte est rouge. Si Δ est un peu supérieur, c'est le rouge qui est particulièrement éteint : la teinte est violette. On passe donc du rouge au violet à travers les teintes sensibles, quand le retard croît d'une manière continue. On les appelle teintes sensibles, parce que la

moindre variation de Δ au voisinage des valeurs : $\Delta = k \cdot 275$, fait varier considérablement la couleur.

Quand Δ croît au delà de 2000, les teintes sont de plus en plus lavées de blanc et par conséquent indistinctes.

Les teintes permettent de déterminer immédiatement ; et avec une approximation déjà grande, l'épaisseur d'une lame mince dont on connaît l'indice et qu'on regarde sous une incidence connue, par exemple normale. Les teintes des bulles de savon nous donnent leur épaisseur. Il est intéressant de suivre sur une bulle (dont on sait que l'épaisseur décroît lentement) l'apparition des teintes successives ; le phénomène est très beau et particulièrement instructif.

250. Anneaux de diffusion de Newton. — Nous faisons la théorie d'ailleurs très simple de cette expérience, parce que c'est une des plus belles de l'Optique et qu'on est exposé à la voir se réaliser à tout instant.

L'interférence se produit entre deux rayons qui sont réfractés sur la face antérieure d'une lame plan parallèle, réfléchis sur la seconde face, réfractés à nouveau sur la première.

Les rayons sont, l'un diffusé avant les réfractions, l'autre diffusé après les réfractions. Il est entendu qu'on ne peut combiner que les

rayons diffusés au même point A, parce que la diffusion introduit une différence de marche variable d'un point à l'autre.

Considérons un faisceau étroit de rayons parallèles BAB'A' ; il tombe sur une glace de verre dont la surface supérieure est recouverte d'une

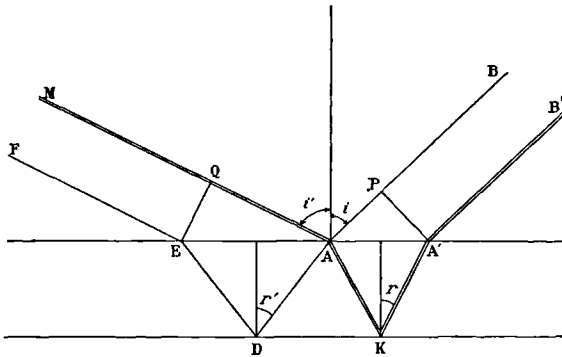


Fig. 149.

couche de buée (il suffit de respirer dessus) ; l'angle d'incidence est i . Les rayons sont concordants sur le plan A'P.

Le rayon B'A' se réfracte régulièrement en A', parcourt le chemin A'KA. Arrivé en A, il est diffusé suivant AM dans la direction i' .

Le rayon PA est diffusé en A dans une direction AD, telle qu'après le parcours ADE et une réfraction régulière en E, il sorte suivant la direction EF parallèle à AM.

Recevons les rayons sur une lentille et observons au foyer principal ; d'après le théorème de Malus, l'état d'interférence est le même

par un miroir concave ordinaire étamé sur sa face postérieure; l'écran E est disposé dans le plan focal principal du miroir.

On peut encore placer une bougie près de l'œil et regarder son image dans une glace ordinaire couverte d'une couche de buée. Ce sont des conditions qui se trouvent très souvent réalisées; aussi est-il fréquent d'observer le phénomène sur les glaces des cafés, par exemple.

251. Anneaux par transmission. — Les phénomènes obtenus par transmission sont complémentaires des phénomènes par réflexion;

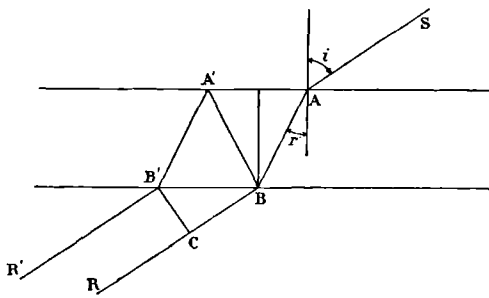


Fig. 151.

c'est une conséquence immédiate du principe de la conservation de l'énergie et de l'hypothèse que les milieux sont parfaitement transparents. Nous pouvons d'ailleurs prouver le fait par un raisonnement calqué sur les précédents. La différence de marche entre le faisceau SABR et le faisceau SABA'B'R' est :

$$\Delta = 2n \cdot \overline{AB} - \overline{BC} = 2ne \cos r.$$

On ne doit pas ajouter $\lambda : 2$, si les deux réflexions du faisceau SABA'B'R' se font dans les mêmes conditions; précisément alors il faut ajouter $\lambda : 2$ dans le cas des interférences par réflexion. C'est pourquoi les phénomènes sont complémentaires.

Les franges par transmission sont toujours difficiles à distinguer, parce que les faisceaux interférents sont d'intensités très différentes. Le phénomène est comme noyé dans une lumière uniforme.

Par transmission, on obtient avec l'appareil de Newton et une lame d'air des anneaux à centre blanc.

252. Retard produit par une lame plan parallèle d'indice n interposée sur un faisceau et plus ou moins inclinée. Compensateurs isotropes. — L'un des rayons suit dans l'air le chemin direct SABC; l'autre rencontre la lame et a pour trajectoire SAA'B'C'. La différence de marche est :

$$n \cdot \overline{AA'} + \overline{A'B'} - \overline{AB}.$$

On trouve aisément :

$$\Delta = e(n \cos r - \cos i).$$

Si la lame est normale, on a bien évidemment : $\Delta = e(n - 1)$, for-

mule que nous avons souvent employée (Cours de Mathématiques, § 171).

COMPENSATEUR INTERFÉRENTIEL. — Supposons que deux faisceaux voisins isogènes traversent respectivement deux lames d'épaisseur e , faisant entre elles un angle α , et pouvant tourner simultanément autour d'un axe OO normal aux faisceaux. Étudions la différence de marche introduite entre les faisceaux.

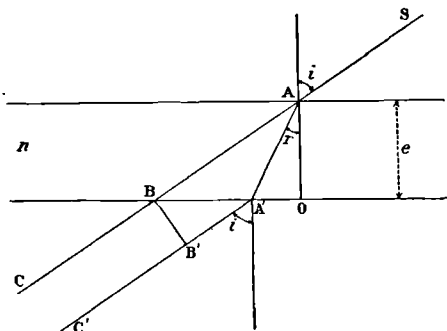


Fig. 152.

Les lames L_1 et L_2 d'épaisseur e (fig. 153) sont montées sur deux bagues B_1B_2 , de manière qu'on puisse modifier l'angle α . L'ensemble est

porté par l'axe OO . On détermine l'angle de rotation de cet axe à l'aide du cercle gradué C .

Pour $\alpha = 0$, les lames sont traversées sous le même angle, la différence de marche est nulle, quelle que soit l'incidence. Il en est de même si le plan bissecteur des lames est perpendiculaire aux faisceaux, quel que soit α . Supposons le système d'abord dans une telle position : les angles d'incidence sur les lames sont tous deux égaux à $\alpha : 2$. Tournons d'un angle ε et cherchons la différence de marche introduite. Les incidences deviennent :

$$\frac{\alpha}{2} + \varepsilon \quad \text{et} \quad \frac{\alpha}{2} - \varepsilon.$$

Pour calculer le retard, nous pouvons appliquer la formule précédente : la différence de marche entre l'un des rayons et un rayon qui n'a traversé aucune lame et que nous prenons comme terme de comparaison, est :

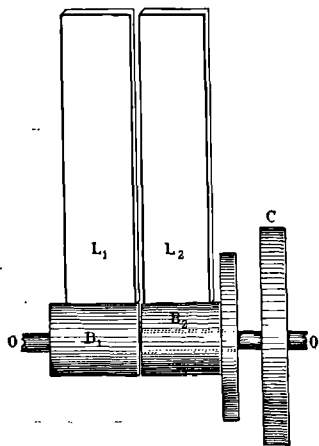


Fig. 153.

$$\Delta = e(n \cos r - \cos i) = e(n - 1) + e \frac{n - 1}{2n} i^2;$$

si i est petit :
$$\Delta = e(n - 1) + e \frac{n - 1}{2n} \left(\frac{\alpha}{2} + \varepsilon \right)^2.$$

Pour l'autre faisceau, on a de même :

$$\Delta' = e(n - 1) + e \frac{n - 1}{2n} \left(\frac{\alpha}{2} - \varepsilon \right)^2.$$

La différence de marche entre les deux faisceaux est :

$$\Delta - \Delta' = e \frac{n-1}{n} \alpha \varepsilon.$$

Soit par exemple : $\alpha = 1^\circ = 0,0175$, $e = 1 \text{ mm} = 1000^\mu$, $n = 1,5$;

$\Delta - \Delta' = 5^\mu, 8 \cdot \varepsilon$, où ε doit être exprimé en radians.

On voit qu'avec des lames relativement épaisses, on arrive à produire des retards très petits, par exemple de l'ordre de 0,1 micron par degré de rotation à partir de la position moyenne.

253. Spectre cannelé par transmission : lames mixtes. — Entre deux collimateurs C et C' dont les axes coïncident, existe un faisceau à peu près cylindrique. Couvrons la moitié de ce faisceau

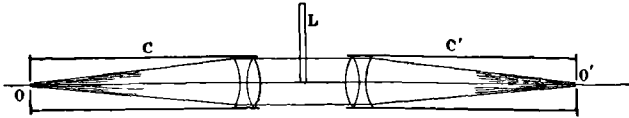


Fig. 154.

par une lame mince d'épaisseur e placée normalement ; nous établissons entre les moitiés du faisceau une différence de marche :

$$\Delta = e(n-1) = m\lambda.$$

Recevons la lumière qui émerge en O' , sur un spectroscopie. Comme : $m = e \frac{n-1}{\lambda}$, est une fonction de λ , tant par le dénominateur λ qu'à cause de la dispersion, il se produit un spectre cannelé. Les maximums correspondent aux longueurs d'onde qui fournissent des valeurs entières de m .

Soit λ_1 et λ_2 les longueurs d'onde qui correspondent à deux minimums séparés par $p-1$ minimums, on a :

$$m = e \frac{n_1-1}{\lambda_1}, \quad m+p = e \frac{n_2-1}{\lambda_2};$$

$$p = e \left[\frac{n_2-1}{\lambda_2} - \frac{n_1-1}{\lambda_1} \right] = e(n-1) \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right),$$

si on néglige la dispersion.

Avec un spectroscopie étalonné en longueurs d'onde, on peut donc déterminer rapidement l'indice moyen n de la lame, si l'on connaît son épaisseur e . En opérant avec une approximation plus grande, on peut déterminer sa dispersion. Il suffit d'admettre une formule empirique, telle que :

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2},$$

et d'utiliser trois minimums séparés par p_1-1 et p_2-1 minimums

intermédiaires et correspondant aux trois longueurs d'onde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. On a deux équations qui permettent de calculer les constantes A et B :

$$p_1 = e \left[(A - 1) \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) + B \left(\frac{1}{\lambda_2^3} - \frac{1}{\lambda_1^3} \right) \right],$$

$$p_2 = e \left[(A - 1) \left(\frac{1}{\lambda_3} - \frac{1}{\lambda_2} \right) + B \left(\frac{1}{\lambda_3^3} - \frac{1}{\lambda_2^3} \right) \right].$$

On peut de la même manière comparer les indices de deux lames. Nous reviendrons là-dessus au § 254.

On obtient des franges dites de Talbot, par un procédé qui semble identique au précédent et qui cependant en diffère théoriquement beaucoup.

Regardons à travers un spectroscope à prisme un spectre pur, en recouvrant la moitié de la pupille avec une lame mince de verre ou de mica. Le

spectre est cannelé, *pourvu que la lame soit en L₃*.

On peut encore l'interposer en L₁ ou en L₂ sur la moitié du faisceau, son bord étant toujours parallèle à l'arête du prisme.

Le fait que pour

obtenir des franges, on doit nécessairement retarder la partie du faisceau qui a traversé le prisme dans le voisinage de l'arête, prouve que la théorie donnée ci-dessus ne s'applique pas.

Nous reviendrons sur le phénomène au § 292.

Quand au contraire on emploie deux collimateurs (fig. 154), la situation de la lame par rapport à l'arête du prisme n'a pas d'importance.

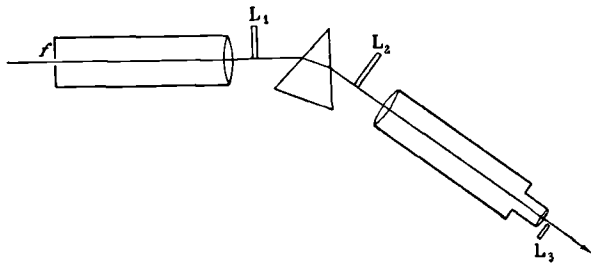


Fig. 155.

Méthodes interférentielles : applications.

Les appareils interférentiels ont pour but de séparer sur une partie de leurs trajectoires les rayons qui doivent interférer, de manière à leur imposer commodément des retards dont la différence mesure le phénomène étudié.

Il n'entre pas dans le plan de cet ouvrage de décrire tous les dispositifs connus : je citerai seulement les meilleurs et j'insisterai sur le plus parfait, celui de Michelson.

254. **Dispositifs de Fizeau, de Mascart et de Jamin.** —
 1° Le dispositif de Fizeau est représenté fig. 156. Un collimateur formé d'une fente F et d'une lentille achromatique L envoie sur une bilame B_1 un faisceau cylindrique qui est ainsi séparé en deux faisceaux cheminant parallèlement. On utilise la propriété d'une glace à faces parallèles inclinée de transporter latéralement un faisceau de rayons parallèles. La translation est :

$$e(\sin i - \cos i \operatorname{tg} r);$$

e est l'épaisseur de la lame.

Pour que les deux lames B_1 produisent le même retard sur les deux faisceaux, il faut qu'elles soient aussi identiques que possible

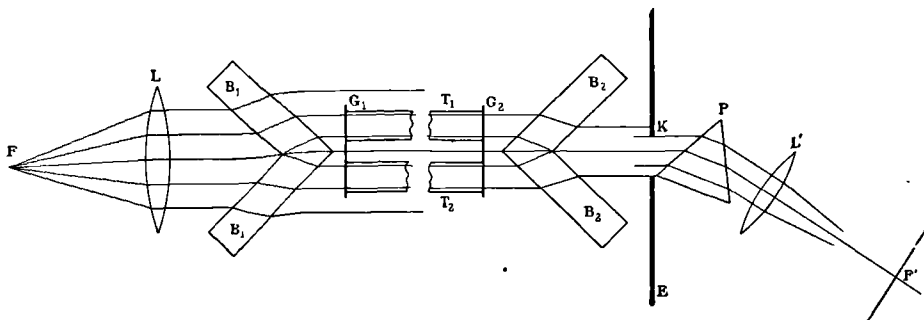


Fig. 156.

(on choisit les moitiés d'une même lame) et également inclinées (§ 252). D'ailleurs on peut compenser une différence d'épaisseur par une rotation convenable de la bilame autour de l'arête d'intersection.

Au sortir de la bilame, les faisceaux traversent les milieux à étudier, par exemple deux tubes T_1 , T_2 , remplis de gaz différents, à différentes températures ou à différentes pressions.

Ils rencontrent ensuite une seconde bilame B_2 identique à la première, qui les ramène au contact. Ils peuvent être enfin repris par une seconde lentille (non représentée) qui les concentre en une image de la fente F .

Cette image est étudiée avec un spectroscopie. On obtient un spectre cannelé. L'ensemble de l'appareil est alors très analogue à celui du paragraphe précédent.

On peut aussi supprimer la seconde lentille et recevoir le faisceau directement sur un prisme (franges dites de Talbot, §§ 253 et 292).

2° Le dispositif de Mascart utilise les réflexions totales à l'intérieur de deux parallélépipèdes P_1 et P_2 . On peut sans exagérer les dimensions de ces parallélépipèdes obtenir une séparation aussi grande

qu'on veut, ce qui est essentiel si par exemple il s'agit de comparer des gaz à des températures différentes (fig. 157).

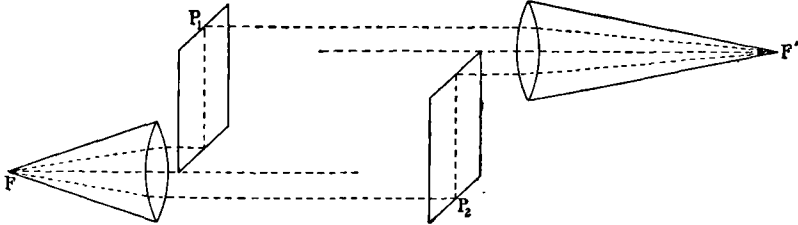


Fig. 157.

3° Le dispositif de Jamin est représenté fig. 158. Si les blocs de glace sont parfaitement identiques et parallèles, les faisceaux éprouvent dans la traversée de l'appareil exactement le même retard. On a donc *pour chaque direction* une teinte plate tout comme dans l'expérience du § 240. Si on incline l'un sur l'autre les blocs,

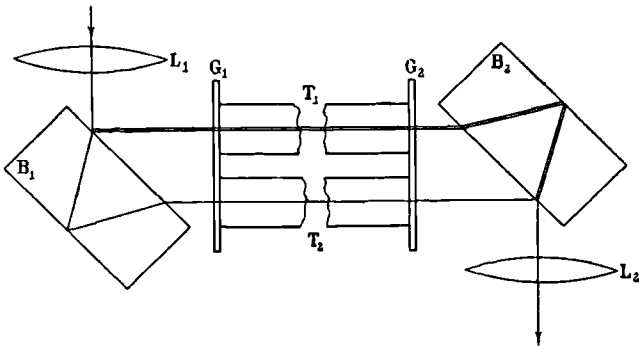


Fig. 158.

tout se passe comme si on avait affaire à une lame prismatique; les franges à peu près rectilignes sont localisées à distance finie et d'autant plus fines que les blocs sont plus inclinés.

On peut obtenir des franges en lumière blanche.

La théorie complète de l'appareil ne présente ni difficulté ni intérêt.

Dans l'appareil de Jamin on observe simultanément les franges dues à l'interférence de faisceaux une fois et plusieurs fois réfléchis. On diaphragme convenablement pour isoler un des systèmes.

255. Indices de réfraction des gaz. — Comme application des méthodes interférentielles, je citerai la mesure de l'indice de réfraction des gaz et de leur dispersion.

L'indice du vide est l'unité par définition : soit n l'indice du gaz. Comme première approximation, la différence $n - 1$ est proportion-

nelle à la quantité de matière contenue dans l'unité de volume, c'est-à-dire à la densité. Soit n_0 l'indice à la pression de 760 millimètres de mercure et à la température 0° ; l'indice à la pression H et à la température t est donné, dans cette hypothèse, par la relation :

$$n - 1 = (n_0 - 1) \frac{H}{760} \frac{1}{1 + \alpha t}. \quad (1)$$

Il y a grand intérêt à mesurer n_0 et à vérifier cette loi.

Je rappelle en quelques mots les expériences célèbres de Biot et Arago par la méthode du prisme.

Le prisme était fait d'un tube de verre taillé en biseau et fermé par deux glaces plan parallèles. Il communiquait avec un baromètre et une machine pneumatique; on pouvait, par des tubulures convenables, y introduire un gaz quelconque. Aujourd'hui on sait faire le vide quasiment parfait et dessécher complètement; des corrections nécessaires pour Biot et Arago sont inutiles. On vise à travers le prisme une mire éloignée ou la fente d'un collimateur. On fait le vide; on remplit d'un gaz à une pression et une température connues; on détermine la déviation au moyen du déplacement de l'image de la mire, par exemple avec un réticule à micromètre placé au foyer principal de la lunette d'observation et qu'on a préalablement étalonné en angles.

La formule du prisme au minimum de déviation est, si la déviation est petite :

$$n = \frac{\sin \frac{A + D}{2}}{\sin \frac{A}{2}}, \quad D = 2(n - 1) \operatorname{tg} \frac{A}{2}.$$

Calculons l'ordre de grandeur des phénomènes. Pour l'air :

$$1\,000(n_0 - 1) = 0,294.$$

On avait :

$$A = 140^\circ, \quad \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 2,75, \quad D = 1,617 \cdot 10^{-3} = 330'',$$

soit un déplacement de $1^{\text{mm}},617$ à un mètre, quand on remplissait d'air à 0° , et sous la pression ordinaire, le prisme préalablement vidé.

Supposons la lunette d'observation d'un mètre de distance focale principale et mesurons le déplacement de l'image à $1/100$ de millimètre près : c'est tout au plus une approximation de $1/200$ pour la quantité $n - 1$, et encore les suppositions sont favorables. Il est clair que cette méthode ne pouvait infirmer ni confirmer la formule (1).

La méthode interférentielle est tout indiquée. Voici en quoi elle consiste. Raisonons sur le dispositif de Jamin (fig. 458).

La lumière émise par une fente F est rendue parallèle par une lentille L_1 servant de collimateur : les faisceaux séparés traversent

les tubes T_1 et T_2 fermés par les glaces G_1 et G_2 ; la lumière est reprise par la lentille L_2 qui donne une image F' de F sur la fente d'un spectroscopie. Les blocs B_1 , B_2 , n'étant jamais parallèles, on observe un spectre cannelé. On donne aux cannelures des épaisseurs convenables en modifiant l'inclinaison respective des blocs (voir § 253, franges des lames mixtes).

Quand on modifie la pression dans un des tubes, on modifie le retard d'un des faisceaux; les cannelures se déplacent.

Faisons le vide dans un des tubes, puis introduisons lentement un gaz pur et desséché. Comptons le nombre p (entier et fractionnaire) de cannelures qui passent sur le réticule de la lunette du spectroscopie, préalablement placé de manière à recouvrir la radiation de longueur d'onde λ ; ce que nous exprimons en disant : qui passent sur λ . Soit e la longueur du tube, n l'indice du gaz quand p cannelures ont passé :

$$e(n - 1) = p\lambda;$$

d'où $n - 1$. Pour une autre radiation λ' , on a :

$$e(n' - 1) = p'\lambda';$$

d'où la mesure de la dispersion.

Il n'est même pas nécessaire de recommencer l'expérience pour les divers λ . Soit q le nombre de cannelures qui existent dans le spectre, au début de l'expérience, entre les radiations λ et λ' ; soit q' ce nombre à la fin. On a :

$$q' - q = p' - p,$$

équation qui exprime la conservation des cannelures. Les cannelures qui ont passé sur λ' et qui n'ont pas passé sur λ doivent se retrouver dans l'intervalle.

RÉSULTATS. — A la pression de 760 millimètres et à 0° , on a trouvé pour les valeurs de la quantité 1 000 ($n_0 - 1$) :

Air	H	CO ²	AzH ³	HCl	CO
0,293	0,139	0,450	0,381	0,464	0,334.

Pour une même température, $n - 1$ n'est pas proportionnel à la pression; on trouve :

$$n - 1 = aH(1 + bH).$$

Mais, d'après les expériences de Regnault, on a pour la densité :

$$d = a'H(1 + b'H).$$

On peut admettre l'identité des coefficients b et b' pour chaque gaz; de sorte que la formule (1) n'est pas admissible, précisément parce que la proportionnalité de $n - 1$ à la masse spécifique existe.

Ainsi l'hydrogène est moins compressible que ne le veut la loi de Mariotte ($b' < 0$); corrélativement $n - 1$ croît moins vite que pro-

proportionnellement à la pression ($b < 0$). C'est l'inverse pour CO_2 : b et b' sont positifs et égaux, à l'approximation des expériences.

Il semble que $n-1$ varie en raison inverse de la température absolue, d'accord avec l'hypothèse admise.

La dispersion n'est pas nulle : elle peut être représentée par la formule :

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2}.$$

D'un bout à l'autre du spectre visible ($0^{\mu},686$ à $0^{\mu},396$) la dispersion pour l'air est :

$$(n - n') : (n - 1) = 0,0241, \quad \nu = 42 \text{ (§ 36)}.$$

256. Dispositif de Michelson. — On se reportera à la figure 159. Les deux blocs de verre B_1 et B_2 sont identiques, parallèles et pla-

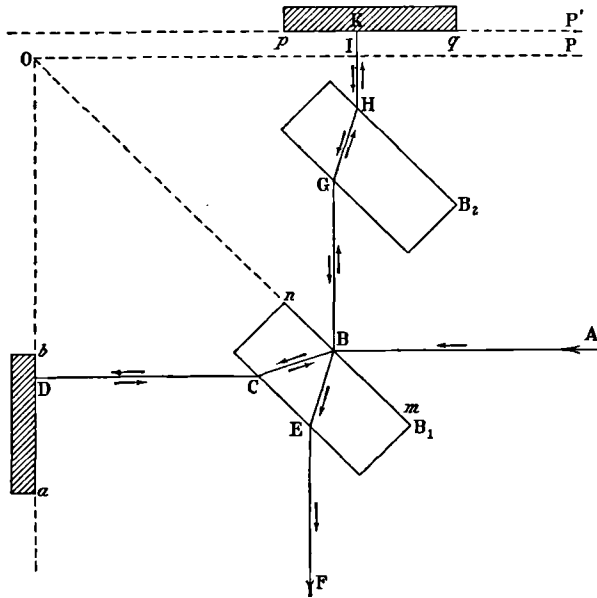


Fig. 159.

cés à 45° du faisceau cylindrique incident AB . Les surfaces ab et pq sont réfléchissantes ; l'une est parallèle, l'autre normale à AB . Soit n l'indice du verre en lequel les blocs sont faits. Voici la marche et les chemins optiques des faisceaux interférents :

$$\overline{AB} + n\overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DC} + n\overline{CB} + n\overline{BE} + \overline{EF}.$$

$$\overline{AB} + \overline{BG} + n\overline{GH} + \overline{HK} + \overline{KH} + n\overline{HG} + \overline{GB} + n\overline{BE} + \overline{EF}.$$

On a : $\overline{BC} = \overline{BE} = \overline{HG}$. Retranchant les quantités égales, il vient pour la différence des chemins :

$$2\overline{CD} - 2(\overline{BG} + \overline{KH}).$$

Prolongeons mn et ab ; nous déterminons le point O . Menons par ce point la droite OP parallèle à AB . Si la face pq coïncidait avec OP , la différence des chemins serait nulle. Le plan OP s'appelle *plan de référence*. En définitive, la différence des chemins est $2\overline{KI}$.

Les avantages de ce dispositif sont évidents.

1° On peut éloigner autant qu'on veut les plans réfléchissants ab et pq sans augmenter les difficultés de réglage.

2° Les rayons interférents sont totalement séparés; on ne risque pas d'agir sur l'un en agissant sur l'autre.

3° La différence des chemins peut être nulle, positive ou négative, suivant que pq coïncide avec OP , est en avant de OP ou en arrière.

On s'arrange ordinairement de manière que les blocs B_1 et B_2 soient rigoureusement parallèles. Quand on vise dans la direction FE , on observe des franges *localisées à l'infini*: les franges sont circulaires et centrées sur la direction EF (§ 240).

Pour les réglages, il faut pouvoir faire pivoter les blocs ou miroirs de très petites quantités. Ils sont montés sur des pièces métalliques *robustes* que l'on déforme en tendant plus ou moins des ressorts (fig. 160).

Amener la surface pq en contact optique avec la surface ab , c'est rendre nul le retard entre les faisceaux. Il suffit d'amener la surface pq à coïncider avec le plan OP . On est averti qu'il en est ainsi quand les franges sont *visibles en lumière blanche*. Comme l'un des faisceaux subit une réflexion dans l'air sur le verre, et l'autre une réflexion dans le verre sur l'air, les anneaux sont à centre noir quand le contact optique est établi.

257. Mesure du mètre en longueurs d'onde ou mesure des longueurs d'onde en valeurs absolues. — Le dispositif de Michelson a de nombreuses applications; nous dirons quelques mots de la mesure du mètre en longueurs d'onde, opération pour laquelle il a été imaginé.

ÉTALONS. — Les étalons consistent en deux miroirs de verre argenté dont les surfaces antérieures réfléchissantes sont rigoureusement planes et parallèles. Leur distance est l'*étalon*. Un ressort à boudin les maintient appliqués contre trois pointes mousses dont l'une est invariablement fixée au bâti (fig. 160); les deux autres sont portées par des bras déformables réglés chacun par un ressort R qu'on bande plus ou moins à l'aide d'une vis V .

Le plus court des étalons employés (étalon I) a environ 0,39 millimètre; le plus long (étalon IX) a environ 10 centimètres. Au nombre de neuf, ils forment très approximativement une progression géométrique dont la raison est 2.

MESURE EN LONGUEURS D'ONDE DE L'ÉTALON I. — Disposons l'étalon sur un chariot mobile au moyen de vis micrométriques; plaçons-le

de manière que ses surfaces soient parallèles à la surface pq dont elles joueront le rôle. En lumière monochromatique, nous verrons

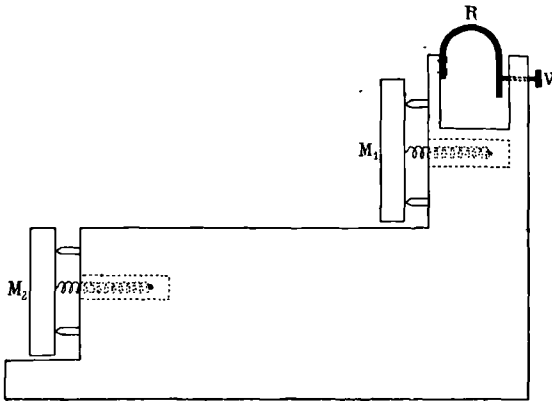


Fig. 160.

simultanément dans le champ de la lunette d'observation les deux systèmes de franges dues à l'interférence des rayons réfléchis d'une part sur ab , de l'autre sur le miroir M_1 ou sur le miroir M_2 .

Déterminons en lumière blanche le *contact optique* entre M_1 et ab . Réinstallons la lumière monochromatique; déplaçons l'étalon à l'aide de la

vis micrométrique jusqu'à ce que le contact optique soit réalisé entre M_2 et ab . Si nous comptons le nombre de franges qui passent sur le réticule (ou qui disparaissent au centre des anneaux) dans le système dû au miroir M_1 , quand nous allons de l'un à l'autre contact optique, nous connaissons la distance des miroirs M_1 et M_2 et par conséquent la longueur de l'étalon.

On n'oubliera pas que les contacts optiques se déterminent en lumière blanche; il faut donc rétablir de temps à autre cette lumière pour vérifier si le contact entre M_2 et ab est réalisé.

Pour le plus petit étalon, $0^{\text{mm}},39$ environ, il passait $N=1212$ franges rouges du cadmium.

On peut se tromper même en comptant un millier de franges. Nous verrons plus loin (§ 282) que, *le nombre N étant connu à quelques unités près*, il suffit de regarder les anneaux avec plusieurs radiations de longueurs d'onde différentes pour déterminer immédiatement le nombre N exact. Le contact optique étant réalisé entre M_1 et ab , on mesure donc le nombre N (partie entière et partie fractionnaire) par la seule observation des franges obtenues entre M_2 et ab pour diverses longueurs d'onde, pourvu qu'on connaisse N approximativement.

COMPARAISON DE DEUX ÉTALONS CONSÉCUTIFS. — Il s'agit de savoir de combien deux étalons consécutifs, I et II par exemple, diffèrent d'être le double l'un de l'autre. On les place l'un à côté de l'autre; l'étalon II est fixe, l'étalon I est mobile parallèlement à lui-même grâce à une vis micrométrique. Le miroir ab est aussi monté sur une vis micrométrique.

La méthode se comprend immédiatement à l'inspection de la figure 161.

1° On amène en contact optique le plan ab et les miroirs antérieurs des étalons. On est sûr que ces miroirs sont alors dans le même plan.

2° Par déplacement de ab , on amène en contact optique le plan ab et le miroir postérieur de l'étalon I;

3° On déplace l'étalon I et on amène son miroir antérieur en con-

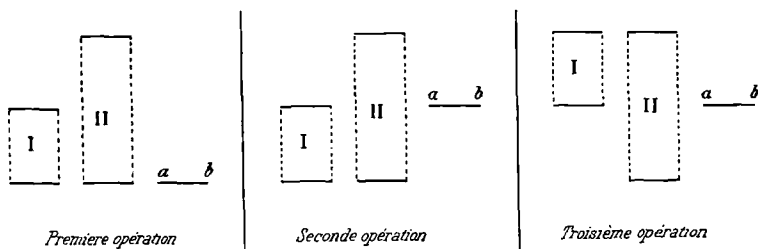


Fig. 161.

tact optique avec ab . On est sûr d'avoir déplacé I exactement de sa longueur.

4° On détermine la distance optique des faces postérieures des étalons. S'ils sont exactement dans le rapport 1 : 2, les miroirs postérieurs sont dans le même plan à la fin de la troisième opération : ce qu'on vérifie immédiatement en lumière blanche. Sinon on emploie pour déterminer leur distance la méthode exposée pour la mesure du plus petit étalon. On vérifie la longueur trouvée pour l'étalon II par la méthode *des excédents fractionnaires* décrite au § 282, méthode qui exige seulement qu'on connaisse la longueur à quelques longueurs d'onde près.

On procède de même pour la série complète des étalons.

COMPARAISON DE L'ÉTALON DE 10 CENTIMÈTRES AU MÈTRE. — L'étalon de 10 centimètres étant déterminé par rapport à celui de $0^{\text{mm}},39$ et par rapport à la longueur d'onde choisie avec une erreur que rien n'empêche d'être une fraction de longueur d'onde, reste à déterminer à l'aide de *microscopes* le rapport du mètre à cet étalon.

L'étalon est muni d'un index latéral faisant corps avec lui, auquel est fixé un bouton de nickel poli. Sur la surface de ce bouton est tracé un trait de repère T parallèle à la surface des miroirs.

Amenons le trait T à proximité d'un des traits tracés à l'une des extrémités d'un mètre étalon : déterminons leur distance perpendiculairement à leur direction au moyen de *microscopes*. Déplaçons l'étalon de 10 fois sa longueur : nous y parviendrons par une méthode analogue à celle exposée ci-dessus ; la seule différence consiste dans l'emploi de *microscopes* pour repérer les positions successives. Nous recommencerons dix fois de suite l'opération décrite pour l'étalon I.

Le trait T vient se placer en définitive près d'un des traits tracés à l'autre extrémité du mètre étalon. On détermine directement leur distance en se servant de microscopes.

LONGUEURS D'ONDE EMPLOYÉES. RÉSULTATS. — Les radiations employées doivent être particulièrement monochromatiques; on trouvera précisé le sens de ce mot au § 279. On a choisi trois radiations particulièrement brillantes du cadmium; leurs longueurs d'onde résultent *en valeurs absolues* des expériences. Le tableau contient ces longueurs λ en unités d'Armströng (c'est-à-dire en dix millièmes de millimètre, en dixièmes de micron), et aussi les nombres N de λ contenus dans un mètre :

λ	6438,472	5085,824	4799,911.
N	1553 163	1966 250	2083 372.

Toutes les déterminations de longueur d'onde n'exigeront donc plus que des mesures relatives grâce aux données précédentes.



CHAPITRE VII

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES FRANGES D'INTERFERENCE

Localisation des franges (lumière monochromatique).

258. **Surfaces équiphasés; leur numérotage.** — Quel que soit l'appareil interférentiel employé, lorsqu'on prend pour source *monochromatique un point lumineux* S, on obtient sur un plan quelconque un système de franges parfaitement nettes : en chaque point d'un plan quelconque, la différence de phase entre les deux rayons qui interfèrent est parfaitement déterminée; d'où un état bien déterminé d'interférence.

On dit que *les franges ne sont pas localisées*. L'espace contient alors des surfaces que nous appellerons *équiphasés* et désignerons par les lettres Φ ou φ ; elles sont caractérisées par une différence de phase constante entre les faisceaux interférents. Soit $2\pi m$ la différence de phase constante : le nombre m entier ou fractionnaire, positif ou négatif, sera la cote, le numéro d'ordre de la surface équiphasé considérée.

Représentons les faisceaux interférents par :

$$\sin \omega t, \quad \sin (\omega t - 2\pi m).$$

L'intensité résultante est :

$$2(1 + \cos 2\pi m) = 4 \cos^2 \pi m.$$

Les surfaces équiphasés Φ , pour lesquelles m est un nombre entier, correspondent donc aux maximums de lumière; l'intersection de leur faisceau par un plan quelconque dessine les franges brillantes dans ce plan.

Les surfaces équiphasés Φ , pour lesquelles m est un nombre entier plus 0,5, correspondent à des minimums nuls; l'intersection de leur faisceau par un plan quelconque dessine les minimums nuls du système de franges dans ce plan.

Le faisceau des surfaces équiphasés a généralement pour équation :

$$m = \varphi(x, y, z, \lambda).$$

Il est évident que deux surfaces Φ de cotes différentes ne peuvent se couper.

Exemple. — Les surfaces équiphases dans l'expérience des trous d'Young sont des hyperboloïdes de révolution dont l'axe passe par les trous et qui ont ces trous comme foyers.

259. Application du principe du retour des rayons. — Soit S un point lumineux; soit s le point où on observe, et soit φ la trace sur le plan p de la surface équiphase Φ de cote m passant par le point s .

Réciproquement, supposons que s devienne lumineux : à travers l'appareil interférentiel il produira des surfaces équiphases. En vertu

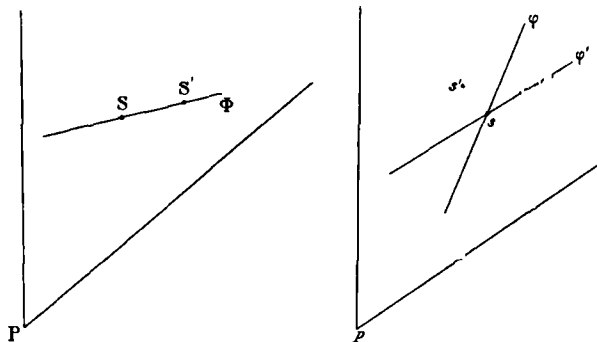


Fig. 162.

du principe du retour des rayons, à savoir que les trajectoires sont les mêmes dans les deux sens et par conséquent ont même longueur optique, la surface équiphase Φ due à s et qui passe par S , a la même cote m que la surface φ due à S et qui passe par s .

Tous les points de la surface Φ produisent des surfaces équiphases de cote m passant par s . Par exemple, S' produira une surface φ' de cote m . Si S et S' sont assez voisins, les deux surfaces φ et φ' seront presque confondues au voisinage de s .

D'où la conséquence fondamentale : si au lieu d'éclairer avec le seul point S , nous éclairons avec un nombre quelconque de points situés sur la surface équiphase Φ , nous ne modifierons en rien l'état d'interférence au point s , puisque tous les couples de rayons envoyés ont respectivement même différence de phase. Nous modifierons peu l'état d'interférence des points voisins de s .

En particulier, nous pouvons limiter les sources lumineuses par une fente située dans le plan P et coïncidant avec la trace sur ce plan de la surface équiphase Φ .

L'état d'interférence au point s reste *rigoureusement* déterminé; il en est *approximativement* de même pour les points voisins de s : on apercevra dans le plan p et au voisinage de s un système de franges parfaitement net.

Ainsi, quel que soit l'appareil interférentiel utilisé, on obtient géné-

ralement des franges nettes localisées dans une portion plus ou moins étendue du plan p , pourvu qu'on limite le faisceau utilisé au moyen d'une fente convenablement orientée (Macé de Lépinay et Fabry).

L'orientation de la fente dépend du plan P dans lequel elle se trouve, et du plan p dans lequel on observe.

260. Franges localisées nettes avec une source étendue dans tous les sens. — Il peut arriver comme cas particulier que les surfaces équiphasés de même cote m , correspondant à tous les points lumineux d'une aire finie du plan P , se coupent soit rigoureusement, soit approximativement, suivant une même courbe ϕ du plan p .

Il en est encore approximativement de même pour les points voisins s' et les surfaces équiphasés de cotes peu différentes de m .

On voit donc dans le plan p des franges nettes avec une source étendue dans tous les sens.

S'il en est ainsi, il est facile de voir qu'on obtiendra des franges non localisées en employant comme source une fente lumineuse convenablement orientée.

En effet, avec une fente convenablement orientée, on peut à coup sûr obtenir des franges nettes dans un plan p' différent de p ; le fait de limiter la source ne peut qu'augmenter la netteté des franges dans le plan p . On a donc des franges nettes dans deux plans distincts; on aura, au moins approximativement, des franges nettes dans les plans intermédiaires; *les franges ne sont donc plus localisées.*

La possibilité d'observer des franges nettes sans fente (franges toujours localisées), et celle de réaliser des franges non localisées par l'emploi d'une fente convenablement orientée, sont deux faits connexes et inséparables (Macé de Lépinay et Fabry).

261. Appareils interférentiels présentant un plan de symétrie. — L'appareil tout entier possède un plan de symétrie. Il faut y comprendre la source et l'écran: si la source est étendue, le plan de symétrie doit contenir son milieu; il contient de même le milieu de la portion du plan p où l'on observe les franges.

Par raison de symétrie, les traces des surfaces équiphasés qui correspondent aux points sources situés dans le plan de symétrie, sont toutes normales à ce plan. Il en est approximativement de même pour les points sources voisins. Si donc on limite la source par une fente normale au plan de symétrie, elle donne des franges non localisées: réciproquement, on est certain d'obtenir avec une source étendue des franges nettes localisées.

C'est ce qui se passe avec les anneaux de Newton quand on observe dans un plan passant par le centre des anneaux et par la normale au plan sur lequel repose la lentille. En lumière étendue, il existe des franges localisées dans la lame mince elle-même; on a des franges

non localisées en limitant le faisceau par une fente normale au plan de symétrie.

Si le plan d'incidence ne passe pas par le centre des anneaux, les franges sont invisibles avec une source étendue, où que l'on vise. Elles redeviennent visibles dans un plan déterminé, si on utilise une fente lumineuse convenablement orientée. Bien entendu, il faut que la lumière tombe sur la fente au sortir d'une lentille servant de condenseur, de manière qu'elle soit assez divergente pour éclairer une partie finie de l'appareil. On peut encore diaphragmer l'objectif au moyen d'une fente fine.

262. Franges localisées à l'infini. — Nous n'insisterons pas, ayant déjà plusieurs fois étudié ce cas. Les franges sont localisées à l'infini quand la différence de phase ne dépend que de la direction. On observe dans le plan focal principal d'une lentille; les franges sont visibles avec une source étendue : plus exactement il faut une source étendue pour qu'une portion finie du plan focal principal soit couverte de franges (§ 240).

263. Variation de visibilité des franges quand on augmente la largeur de la source. — Nous étudierons le cas le plus simple, l'expérience d'Young effectuée avec des fentes; la fente source est éclairée par de la lumière monochromatique.

Décomposons la fente qui sert de source, en éléments infiniment minces de largeur dx_1 et de distance x_1 au point A (§ 215, fig. 120).

Nous supposons leurs phases *incohérentes*; nous additionnerons par conséquent les *intensités* des phénomènes qu'ils produisent respectivement dans le plan d'observation.

Les deux faisceaux envoyés au point B ont pour différence de phase :

$$2\pi m = \frac{2\pi l}{\lambda} \left(\frac{x_1}{d_1} + \frac{x}{d} \right),$$

où l est la distance des fentes a et b . L'intensité qui, au point B, correspond aux faisceaux émis par la fente élémentaire d'épaisseur dx_1 est, à un facteur constant près :

$$(1 + \cos 2\pi m) dx_1.$$

Soit $2e$ la largeur de la fente source; l'intensité dans le plan A'C a pour expression :

$$I = \int_{-e}^{+e} (1 + \cos 2\pi m) dx_1 = 2e \left[1 + \frac{\lambda}{2\pi l} \frac{d_1}{e} \sin 2\pi \frac{le}{\lambda d_1} \cos 2\pi \frac{lx}{\lambda d} \right].$$

Introduisons l'angle $\varepsilon = 2e : d_1$, sous lequel est vue la fente source du point O; il vient :

$$I = 2e \left[1 + \frac{\lambda}{\pi l \varepsilon} \sin \frac{\pi l \varepsilon}{\lambda} \cos \frac{2\pi l x}{\lambda d} \right]. \quad (1)$$

Si l'angle ε est très petit, on retrouve la formule ordinaire :

$$I = 2e \left[1 + \cos \frac{2\pi lx}{\lambda d} \right].$$

La formule (1) permet d'étudier la *visibilité* des franges obtenues dans le plan A'C, en fonction de la largeur $2e$ de la source, ou de son angle apparent ε . Soit I_1 l'intensité maxima, c'est-à-dire celle qui correspond au centre des franges brillantes; soit I_2 l'intensité minima. Nous prendrons comme définition de la visibilité le rapport :

$$V = \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2} = \sin \frac{\pi l \varepsilon}{\lambda} : \frac{\pi l \varepsilon}{\lambda}.$$

Les franges disparaissent donc complètement pour $\varepsilon = k \frac{\lambda}{l}$. Les maximums de visibilité correspondent à la condition :

$$\frac{\pi l \varepsilon}{\lambda} = \text{tg} \frac{\pi l \varepsilon}{\lambda}.$$

Nous aurons l'occasion de discuter cette condition (§ 284); le tableau suivant donne approximativement les angles apparents ε pour lesquels ont lieu les maximums, et les visibilités correspondantes :

ε	0	$3(\lambda : 2l)$	$5(\lambda : 2l)$	$7(\lambda : 2l)$
V	+1	-0,212	+0,127	-0,091

Ainsi, en augmentant la largeur de la fente ou son angle apparent, on commence par faire disparaître les franges; *mais on les fait ensuite reparaitre périodiquement*. Elles sont de moins en moins nettes pour les maximums successifs de visibilité. Le signe — qui affecte V signifie que d'une période à l'autre elles sont renversées; en un lieu donné du plan d'observation, les franges sombres sont substituées aux franges brillantes.

On obtient une périodicité analogue en modifiant l'écartement l des fentes a et b .

264. Application de ces phénomènes à la mesure du diamètre apparent des astres. — Des phénomènes analogues sont obtenus avec un appareil interférentiel quelconque, à la condition évidente que s'il donne des franges localisées visibles avec une source étendue, on observera loin du plan de localisation.

On a appliqué cette méthode à la détermination des diamètres apparents des astres. L'objectif de la lunette est alors recouvert de deux fentes dont la distance l est variable à volonté; on observe dans le plan focal principal. Si l'astre est un cercle, la condition de première disparition n'est pas celle que nous avons calculée au paragraphe précédent; mais la théorie est en principe absolument la même. La première disparition a lieu pour :

$$\varepsilon = 1,22 \frac{\lambda}{l}.$$

Nous retrouverons plus loin ce coefficient 1,22 (§ 323). Évaluons ε en secondes d'arc, l en millimètres; la formule devient, pour la partie la plus lumineuse du spectre, $\lambda = 0^{\mu},55$:

$$\varepsilon = 134 : l.$$

Ici ε est donné; la variable est la distance l des fentes.

Franges achromatiques (lumière blanche).

265. **Franges rectilignes; frange achromatique.** — Raisonnons d'abord sur des franges rectilignes; la généralisation se fait ensuite aisément pour des franges courbes.

Supposons les franges parallèles à l'axe des ordonnées Oy : leur numéro d'ordre (§ 258) est défini par la relation :

$$m = \varphi(x, \lambda). \quad (1)$$

Cherchons à quelle condition on aperçoit des franges au voisinage de l'abscisse x_0 quand on observe *en lumière blanche*, c'est-à-dire quand se superposent une infinité de systèmes monochromatiques. Elle est évidemment que les maximums et les minimums des différents systèmes coïncident respectivement pour $x = x_0$.

Pour une lumière discontinue, composée d'un nombre *fini* de longueurs d'onde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$, il suffit que les numéros d'ordre des franges diffèrent les uns des autres de *nombre entiers* pour les diverses radiations utilisées et pour l'abscisse x_0 . Les intensités de toutes les radiations sont alors diminuées dans le même rapport; nous avons strictement au point $x = x_0$ une frange sans couleur prédominante, *achromatique* par définition.

Pour une lumière continue, cette condition est impossible à réaliser pour l'abscisse $x = x_0$ sans que le numéro d'ordre soit le même pour toutes les longueurs d'onde.

La condition d'existence d'une frange achromatique est donc :

$$\left(\frac{\partial m}{\partial \lambda} \right)_{x_0} = 0. \quad (2)$$

D'une manière générale, elle ne peut pas être satisfaite identiquement, c'est-à-dire pour toutes les longueurs d'onde. Suivant celle que nous choisissons, le calcul donne une valeur différente de x_0 . Si nous opérons avec de la lumière blanche, il faut considérer naturellement la radiation la plus lumineuse :

$$\lambda_0 = 0^{\mu},550.$$

La condition (2) indique donc le lieu de la frange non pas rigoureusement achromatique, mais qui *paraît* la plus blanche. Des conditions simultanées (1) et (2), nous déduirons une valeur m_0 de m qui

ne correspond nécessairement ni à un maximum ni à un minimum de l'intensité. La frange achromatique n'est donc nécessairement ni parfaitement noire, ni la plus brillante. Mais comme au voisinage d'une radiation les franges ne varient de largeur que lentement, du fait que nous avons pour une abscisse $x = x_0$ à peu près le même m pour une série de longueurs d'onde, nous trouverons au voisinage de $x = x_0$ une frange à peu près noire et un maximum à peu près blanc.

Donc les franges seront visibles en lumière blanche au voisinage de $x = x_0$.

Afin qu'un certain nombre de franges soit visible, il faut que la condition (2) soit réalisée non seulement pour $x = x_0$, mais pour les x voisins. La condition à satisfaire est :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial m}{\partial \lambda} \right) = \left(\frac{\partial^2 m}{\partial x \partial \lambda} \right)_{x_0} = 0. \tag{3}$$

En définitive, la définition des intensités pour les diverses radiations est exprimée par les relations :

$$m = \varphi(x, \lambda), \quad I = I_0 \cos^2 m\pi.$$

La condition d'existence d'une frange achromatique, qui se confond avec la condition de visibilité des franges en lumière blanche au voisinage de $x = x_0$, est :

$$\left(\frac{\partial m}{\partial \lambda} \right)_{x_0} = 0.$$

La condition d'existence d'un système de franges achromatiques est :

$$\left(\frac{\partial^2 m}{\partial x \partial \lambda} \right)_{x_0} = 0.$$

Cela revient à dire qu'il ne peut exister un système de franges achromatiques que si les divers systèmes monochromatiques sont superposables au voisinage de $x = x_0$ et pour des radiations peu différentes de $\lambda = \lambda_0$.

Ces conditions doivent être calculées pour la radiation la plus lumineuse. S'il s'agit de lumière blanche, on choisit $\lambda_0 = 5500$ (unités d'Armströng).

266. Achromatisme des franges ordinaires d'interférence.

— 1° Considérons les franges de Fresnel ou des fentes d'Young sur le plan xOy ; supposons-les parallèles à l'axe Oy ; repérons-les par leur abscisse x . Le retard en un point du tableau est généralement de la forme (§ 214) $kx + k'$, le numéro d'ordre est :

$$m = \frac{kx + k'}{\lambda}.$$

La condition d'achromatisme est :

$$\left(\frac{\partial m}{\partial \lambda} \right)_{x_0} = - \frac{kx_0 + k'}{\lambda^2} = 0.$$

Elle ne peut être satisfaite que pour $kx_0 + k' = 0$; elle l'est alors pour toutes les radiations. Le retard géométrique est nul au point x_0 pour toutes les radiations, nous définissons ainsi la frange centrale. Nous savons effectivement qu'il existe dans ces systèmes une frange rigoureusement achromatique *brillante*.

2° Le retard pourrait être de la forme : $kx + k' + k''\lambda$; d'où les conditions :

$$m = \frac{kx + k'}{\lambda} + k'', \quad \left(\frac{\partial m}{\partial \lambda} \right)_{x_0} = -\frac{kx_0 + k'}{\lambda^2} = 0.$$

Il existe encore une frange centrale rigoureusement achromatique, mais qui n'est pas nécessairement brillante. Ce cas se trouve réalisé pour les franges obtenues avec trois miroirs (§ 223) ou avec un seul; on a $k'' = 0,5$; la frange achromatique est noire.

3° Soit un système de franges dans le plan P (fig. 163). Projetons-le sur le plan π à travers une lentille et un prisme dont l'arête

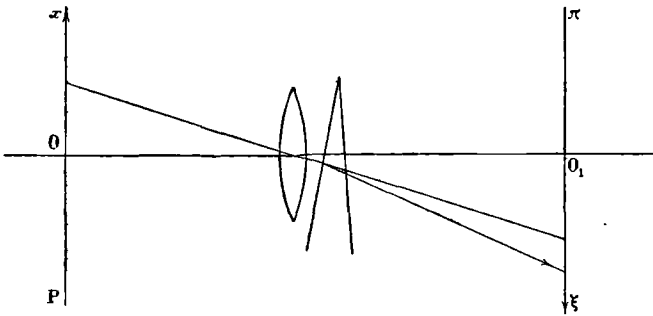


Fig. 163.

est parallèle aux franges et qui fait glisser les uns par rapport aux autres les divers systèmes monochromatiques.

Supposons que dans le plan P la frange centrale du système à projeter soit à l'origine des coordonnées. Le numéro d'ordre et son abscisse sont reliés par la relation :

$$x = m\lambda : k.$$

Si l'appareil disperser (prisme de petit angle A, par exemple) n'est pas en place, si donc la lentille existe seule, le numéro et l'abscisse ξ dans le plan π sont reliés par la relation :

$$\xi = m\lambda : k_1.$$

Mais, comme première approximation, le prisme déplace les franges d'une quantité égale à :

$$A(p - q\lambda).$$

L'abscisse de la frange de numéro d'ordre m est donc :

$$\xi = \frac{m\lambda}{k_1} + A(p - q\lambda), \quad \frac{m}{k_1} = \frac{\xi - Ap}{\lambda} + Aq.$$

Nous retrouvons la forme du 2°; il existe donc une frange rigoureusement achromatique pour $\xi = Ap$. Elle occupe exactement la même position que si le prisme n'était pas dispersif. Nous obtenons donc une reproduction pure et simple du système primitif, bien que les franges aient glissé les unes par rapport aux autres.

4° Avec un réseau mis à la place du prisme, le déplacement est de la forme $q\lambda$; nous retrouvons le cas traité ci-dessus : il suffit de faire $p = 0$ et de changer le signe de q . La frange achromatique correspond à $x = 0$; tout se passe comme si le réseau n'existait pas.

267. Franges de Herschel (Mascart). — Un prisme P est placé sur un plan de verre de manière qu'il reste entre les surfaces une lame d'air d'épaisseur constante e . La différence des chemins (§ 243) entre deux faisceaux réfléchis sur les surfaces limites de cette lame est :

$$m\lambda = 2e \cos i. \quad (4)$$

Soit μ l'indice. Écrivons qu'à l'émergence dans une direction invariable i' ($di' = 0$), m est invariable ($dm = 0$) : nous aurons la condition d'achromatisme :

$$\begin{aligned} \sin i &= \mu \sin r, & r + r' &= A, & \sin i' &= \mu \sin r'. \\ \cos i \, di &= \mu \cos r \, dr + \sin r \, d\mu, & dr + dr' &= 0, \\ \mu \cos r' \, dr' + \sin r' \, d\mu &= 0. \\ \lambda \sin i \, di + \cos i \, d\lambda &= 0. \end{aligned}$$

On tire de là sans difficulté :

$$\frac{\cos^2 i}{\sin i} = -\lambda \frac{d\mu}{d\lambda} \frac{\sin A}{\cos r'}, \quad \cot^2 i = -\frac{\lambda}{\mu} \frac{d\mu}{d\lambda} \frac{\sin A}{\sin r \cos r'}.$$

Admettons la formule de dispersion de Cauchy :

$$\mu = A_0 + \frac{B}{\lambda^2}, \quad -\lambda \frac{d\mu}{d\lambda} = \frac{2B}{\lambda^2}.$$

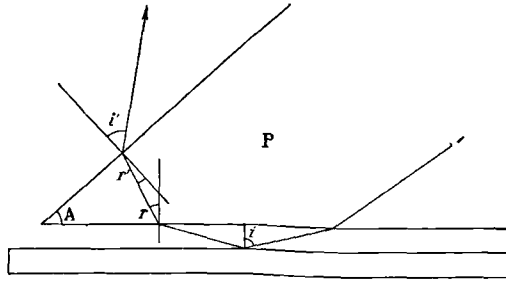


Fig. 164.

Dans le cas particulier, où l'on imposerait que la direction de la frange achromatique soit normale à la face de sortie, on aurait :

$$i = r' = 0, \quad r = A, \quad \cot^2 i = -\frac{\lambda}{\mu} \frac{d\mu}{d\lambda},$$

avec la condition : $\sin i = \mu \sin A$, qui détermine l'angle du prisme.
Soit :

$$B = 0,984 \cdot 10^{-10}, \quad \mu = 1,65, \quad \lambda = 5,89 \cdot 10^{-5} \quad (\text{flint dense}).$$

$$\text{Il vient :} \quad i = 79^\circ 30', \quad r = A = 36^\circ 30'.$$

Il existe donc une frange achromatique projetée dans une direction normale à la face de sortie. On est toujours près de la réflexion totale, la quantité $\lambda d\mu; \mu d\lambda$ étant très petite.

Puisque la lame mince est d'épaisseur constante par hypothèse, les franges sont localisées à l'infini et s'observent dans le plan focal principal d'une lentille; nous venons de définir la direction dans laquelle la frange achromatique est vue. Le système de franges n'est pas achromatique, car la largeur des franges n'est pas indépendante de la longueur d'onde au voisinage de la frange achromatique.

On obtient des phénomènes analogues avec une lame mince d'épaisseur variable; les franges sont alors localisées dans la lame.

268. Franges courbes (Rayleigh). — On doit remplacer la condition : $m = \varphi(x, \lambda)$, par la condition plus générale :

$$m = \varphi(x, y, \lambda). \quad (1)$$

$$\text{L'équation :} \quad \frac{\partial m}{\partial \lambda} = 0, \quad (2)$$

pour $\lambda = \lambda_0$, définit le lieu des points pour lequel le numéro d'ordre est indépendant de la longueur d'onde. C'est l'équation de la *courbe achromatique*. Il n'existe généralement plus de frange qui soit achromatique tout de son long; il faudrait en effet pour cela que la courbe (2) coïncidât avec l'une des courbes (1). Pratiquement les franges sont visibles dans une étroite bande de part et d'autre de la courbe achromatique, qu'elles coupent sous des angles qui dépendent du phénomène étudié.

269. Application aux anneaux de Newton. — Prenons le centre des anneaux, localisés dans le plan P, pour origine des coordonnées (fig. 165). Le retard est proportionnel à l'épaisseur de la lame et sensiblement indépendant de la longueur d'onde. Le numéro d'ordre des franges a pour expression dans le plan P :

$$m = \frac{a}{\lambda} + \frac{b(x^2 + y^2)}{\lambda},$$

car la variation de l'épaisseur à partir du point O est proportionnelle (§ 246) au carré de la distance au centre des anneaux.

Projetons dans le plan II à travers un prisme dont l'arête est parallèle à l'axe des y . Il y a : par l'effet de la lentille de projection, dilatation des franges dans tous les sens proportionnellement au rapport des distances des plans II et P à la lentille; par l'effet du prisme, glissement inégal parallèlement à l'axe des x des systèmes correspondant aux diverses longueurs d'onde. Le numéro d'ordre est relié aux coordonnées ξ, η , dans le plan II par la relation :

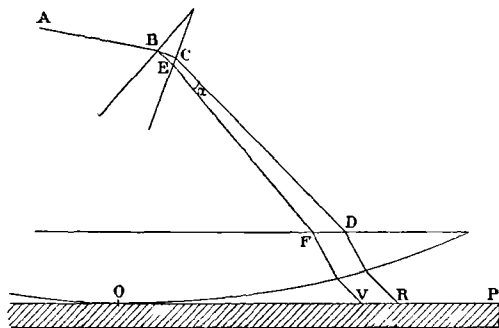


Fig. 165.

$$m\lambda = a + b_1[\xi + f(\lambda)]^2 + b_2\eta^2.$$

La courbe achromatique a pour équation :

$$\frac{\partial m}{\partial \lambda} = 0, \quad a + b_1[\xi + f(\lambda)]^2 + b_2\eta^2 = 2b_1\lambda[\xi + f(\lambda)]f'(\lambda).$$

C'est un cercle. En particulier si $a = 0$, si la lentille et le plan P se touchent au point O, le cercle passe par le point de coordonnées :

$$\xi + f(\lambda) = 0, \quad \eta = 0.$$

Il correspond pour la radiation λ choisie ($0^{\mu},550$ généralement) à l'image du centre du phénomène. On aperçoit les franges au voisinage du cercle achromatique. Comme elles le coupent sous des angles qui varient de 90° à 0° , les portions de franges visibles seront courtes près du centre; elles n'atteindront un grand développement que vers le point P, là où elles sont parallèles à la courbe achromatique (fig. 166).

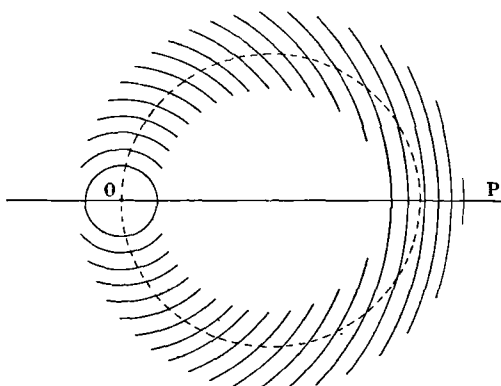


Fig. 166.

Si a croît à partir de 0, c'est-à-dire si on écarte la lentille du plan P, le rayon du cercle achromatique décroît, son centre conservant la même position : ce qu'on vérifie aisément d'après son équation.

Si a dépasse une certaine valeur, le cercle devient imaginaire.

Indépendamment de tout calcul, il est facile de comprendre le mécanisme du phénomène.

Le prisme étant placé comme l'indique la figure, regardons suivant la direction émergente AB ; il lui correspond, à l'incidence, des directions DC pour le rouge λ_1 , FE pour le violet λ_2 , et des directions intermédiaires pour tous les λ compris entre λ_1 et λ_2 . Il peut arriver que l'écartement des rayons rouge CD et violet FE corresponde précisément à la distance RV des $m^{\text{ièmes}}$ anneaux rouge et violet. Approximativement la condition sera réalisée pour les λ intermédiaires; on voit donc, dans la direction *unique* AB , les $m^{\text{ièmes}}$ anneaux correspondant à toutes les couleurs comprises entre λ_1 et λ_2 .

Le prisme ne produit un glissement de sens convenable que pour les franges qui sont à droite du centre O . Son effet sur les franges qui sont à gauche, exagère la distance des $m^{\text{ièmes}}$ anneaux.

270. Changement du numéro d'ordre par interposition sur l'un des faisceaux interférents d'une lame plan parallèle. — 1° Reprenons des franges rectilignes, celles des fentes d'Young ou de la bilentille par exemple, et interposons sur l'un des faisceaux une lame d'épaisseur e produisant un retard ne , où n est l'indice de réfraction. Admettons comme loi de dispersion :

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2}.$$

Le numéro d'ordre est :

$$m = \frac{kx}{\lambda} + \frac{e}{\lambda} \left(A + \frac{B}{\lambda^2} \right).$$

La frange achromatique est donnée par la condition :

$$kx = -e \left(A + \frac{3B}{\lambda_0^2} \right), \quad \text{où } \lambda_0 = 0^{\mu}, 550.$$

Le terme qui contient λ_0 est très petit vis-à-vis du premier terme du second membre. Supposons qu'on définisse la frange achromatique comme le lieu de retard nul pour la longueur d'onde λ_0 . C'est précisément ce qu'on fait dans un exposé élémentaire. Sa position sera définie par la condition :

$$kx' = -e \left(A + \frac{B}{\lambda_0^2} \right); \quad \text{d'où : } k(x' - x) = \frac{2eB}{\lambda_0^2}.$$

La différence est extrêmement petite, ce qui légitime la seconde définition.

2° Mais il n'en serait pas de même avec d'autres lois de dispersion. Dans l'étude de la polarisation rotatoire, nous trouverons une

loi de dispersion de la forme $D : \lambda$. Le numéro d'ordre est alors :

$$m = \frac{kx}{\lambda} + \frac{eD}{\lambda^2}.$$

La frange achromatique est donnée par la relation :

$$kx = -\frac{2eD}{\lambda_0}.$$

Si on la définissait comme le lieu de retard nul pour la radiation de longueur d'onde λ_0 , on trouverait :

$$kx' = -\frac{eD}{\lambda_0}. \quad \text{D'où : } x = 2x'.$$

On se tromperait de moitié.

Nous reviendrons, dans le Tome VI, sur l'expérience qu'éclaire ce calcul; nous retrouverons d'autres phénomènes de théorie identique.

271. Franges rigoureusement achromatiques. — Des franges dont la largeur serait rigoureusement la même pour toutes les radiations seraient par le fait rigoureusement achromatiques. Il n'est pas impossible de réaliser une telle condition.

EMPLOI DE LA BILENTILLE. — Employons la bilentille de Billet. Les deux demi-lentilles qui la constituent, ne sont pas achromatiques : elles donneront donc deux images violettes plus rapprochées *l'une de l'autre et de la lentille* que ne le sont les images rouges.

Or, dans le plan d'observation, les franges sont d'autant plus larges que l'écartement des sources est plus petit, et que leur distance à ce

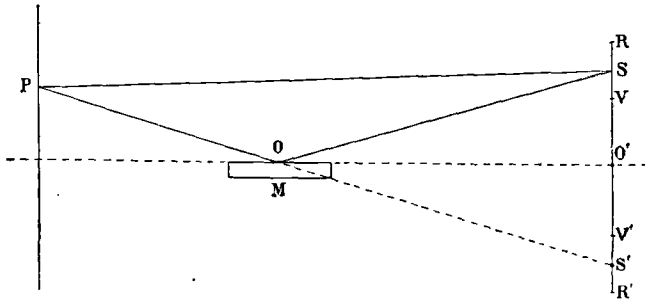


Fig. 167.

plan est plus grande. Les deux sources violettes sont plus rapprochées l'une de l'autre et plus éloignées du plan d'observation que les sources rouges : donc le rapport de largeur entre les franges violettes et les franges rouges est toujours plus grand avec la bilentille qu'avec les fentes d'Young et les miroirs de Fresnel pour lesquels les sources sont blanches.

On conçoit la possibilité de rendre ce rapport égal à l'unité.

Il est clair qu'il faut employer une bidentille en verre très dispersif, éloigner des demi-lentilles les images réelles de la source (car l'effet de la dispersion augmente), enfin placer le plan d'observation assez près des images pour que la différence de leur distance à ce plan ne soit pas négligeable par rapport à leur distance moyenne.

EXPÉRIENCE DE LLOYD (fig. 167).

On a indiqué plusieurs autres procédés pour obtenir des franges rigoureusement achromatiques.

En voici un qui nous permettra de décrire l'expérience de Lloyd.

Une source S donne par rapport au miroir M une image S'. On fait interférer les rayons directs SP et les rayons réfléchis SOP. La théorie des franges obtenues est identique à celle des franges de Fresnel; tout se passe comme si on avait deux fentes SS'. Le réglage de l'appareil est simple; mais on n'aperçoit qu'une moitié du système : la frange centrale est invisible.

On pourrait, il est vrai, faire apparaître cette frange centrale avec un prisme, ainsi qu'il est indiqué au 3° du § 266.

Prenons comme source S un petit spectre VR formé par un réseau; soit O'O la direction du rayon incolore qui, tombant sur le réseau, a servi à obtenir le spectre. Nous verrons (§ 293 et Cours de Première, § 261) que la distance O'V est proportionnelle à la longueur d'onde de la radiation V. De même pour les autres radiations. Donc l'écartement VV' des sources qui interfèrent est proportionnel à leur longueur d'onde. La largeur des franges est donc indépendante de la longueur d'onde : elles sont rigoureusement achromatiques.

Franges obtenues par l'interférence d'un grand nombre de faisceaux.

272. Règle de Fresnel. — Nous avons démontré (III, § 260) la règle de Fresnel : nous devons rappeler ici son énoncé pour les lecteurs qui ne posséderaient pas ce volume.

Soit à composer un nombre quelconque de vibrations représentées par les expressions :

$$A_1 \cos(\omega t - \alpha_1), \quad A_2 \cos(\omega t - \alpha_2), \dots$$

dirigées suivant la même droite.

Choisissons une droite de référence, une origine O sur cette droite et un sens de rotation positif autour du point O. A partir de la droite menons dans les directions $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ des vecteurs de longueur, A_1, A_2, \dots . Composons-les : nous obtenons un vecteur de longueur A, faisant avec la droite de référence un angle α . La vibration cherchée a pour expression :

$$A \cos(\omega t - \alpha).$$

Remarques. — 1° La même règle s'applique si, au lieu de cosinus, nous avons des sinus.

2° Les amplitudes A_i négatives doivent être portées dans la direction $\alpha_i + \pi$, ou $\alpha_i - \pi$, car on a :

$$A_i \cos(\omega t - \alpha_i) = -A_i \cos(\omega t - \alpha_i + \pi).$$

3° Si la phase α_i est négative, il faut prendre la direction du vecteur correspondant dans le sens négatif par rapport à la droite de référence.

273. Composition d'un nombre quelconque de vibrations de même amplitude et dont les phases varient en progression arithmétique. — Soit n le nombre des vecteurs ; nous avons à sommer la série :

$$\cos \omega t + \cos(\omega t - \delta) + \dots + \cos[\omega t - (n - 1)\delta].$$

On trouve la solution dans les traités de Trigonométrie. (Voir un calcul analogue, § 274.) La vibration résultante a pour amplitude :

$$A = \sin \frac{n\delta}{2} : \sin \frac{\delta}{2}. \tag{1}$$

Il résulte immédiatement de la règle de Fresnel que sa phase est $(n - 1)\delta : 2$. En effet, nous avons à composer n vecteurs de même longueur qui sont régulièrement étalés dans un angle $(n - 1)\delta$. La résultante est bissectrice des composantes extrêmes ; elle fait donc l'angle $(n - 1)\delta : 2$ avec le premier vecteur pris pour droite de référence.

Variation de l'intensité A^2 en fonction de $n\delta$. — Faisons varier l'angle $(n - 1)\delta$ de l'éventail dans lequel sont étalés les vecteurs.

Si $\delta = 0$, ils sont tous couchés sur la même direction ; l'expression (1) prend la forme $0 : 0$; on sait qu'elle est égale à n . D'où :

$$A^2 = n^2.$$

Si les vecteurs sont *régulièrement distribués* sur un nombre entier de circonférences ($n\delta = 2k\pi$), la résultante est évidemment nulle.

Les maximums de A^2 sont fournis par la condition :

$$\operatorname{tg} \frac{n\delta}{2} = n \operatorname{tg} \frac{\delta}{2},$$

qu'on trouve immédiatement et que nous discuterons plus loin. Qu'il suffise de savoir pour l'instant que pour de grandes valeurs de n , les premières solutions sont les racines de l'équation :

$$\operatorname{tg} \frac{n\delta}{2} = \frac{n\delta}{2}.$$

Elles sont très voisines de :

$$\frac{n\delta}{2} = \frac{3\pi}{2}, \quad \frac{5\pi}{2}, \quad \frac{7\pi}{2}, \dots$$

Il est d'ailleurs à peu près évident que les maximums sont approximativement obtenus pour des étalements des vecteurs dans 3, 5, 7, ... demi-circonférences. L'étalement dans une demi-circonférence ne donne pas de maximum.

Nous pouvons construire le tableau suivant des intensités. Nous les divisons toutes par n^2 ; la première ligne donne les multiples impairs de π , $[(n-1)\delta]$ dans lesquels les vecteurs sont étalés, c'est-à-dire les différences de phase entre les vecteurs extrêmes.

0	π	2π	3π	4π	5π	6π	7π
1	$\frac{4}{\pi^2}$	0	$\frac{4}{9\pi^2}$	0	$\frac{4}{25\pi^2}$	0	$\frac{4}{49\pi^2}$

Ainsi l'étalement sur 3π (second maximum) donne une intensité égale aux $\frac{4}{9}$ millièmes de l'intensité qui correspond à la superposition (premier maximum). Les intensités forment ensuite une série dont les termes sont en raison inverse de :

$$3^2, 5^2, 7^2, \dots$$

274. Interférences entre un nombre fini ou indéfini de faisceaux dont les différences de marche croissent en progression arithmétique et dont les amplitudes varient en progression géométrique. — Les calculs auxquels donne lieu ce problème se font aisément à l'aide des imaginaires.

On a :

$$e^{ix} = \text{exponentielle}(ix) = \exp(ix) = \cos x + i \sin x.$$

Nous emploierons la notation $\exp(\quad)$ pour éviter l'emploi de symboles compliqués à écrire.

Remplacer $\cos x$ par $\exp(ix)$ revient à ajouter une quantité purement imaginaire. Toutes les sommations que nous ferons sur de pareilles quantités multipliées par des facteurs *quelconques mais réels*, laisseront *distinctes* les quantités réelles et les quantités imaginaires. Les calculs effectués, nous conserverons la partie réelle du résultat; elle est égale à la quantité que nous aurions directement obtenue sans le recours aux imaginaires.

Ceci posé, soit à sommer la série :

$$\cos \omega t + \beta \cos(\omega t - \delta) + \beta^2 \cos(\omega t - 2\delta) + \dots,$$

β est toujours plus petit que l'unité; la série indéfiniment continuée est convergente.

Considérons à la place la série :

$$\exp(i\omega t) [1 + \beta \exp(-i\delta) + \beta^2 \exp(-2i\delta) + \dots].$$

D'après un théorème élémentaire, la somme en est :

$$\frac{\exp(i\omega t)}{1 - \beta \exp(-i\delta)}.$$

La partie réelle est :

$$S = \frac{(1 - \beta \cos \delta) \cos \omega t + \beta \sin \delta \sin \omega t}{1 - 2\beta \cos \delta + \beta^2}. \quad (1)$$

En vue d'applications ultérieures, nous chercherons l'intensité résultant de la somme précédente de vibrations et d'une vibration supplémentaire :

$$\alpha \cos (\omega t + \delta + \varepsilon),$$

ne rentrant pas dans la série précédente, tant à cause du coefficient α que de la phase ε .

Développons l'expression :

$$S + \alpha \cos (\omega t + \delta + \varepsilon), \text{ en posant : } B = 1 - 2\beta \cos \delta + \beta^2.$$

Additionnons les carrés des coefficients de $\sin \omega t$ et de $\cos \omega t$. Il vient pour l'intensité résultante :

$$I^2 = \alpha^2 + \frac{1}{B} + \frac{2\alpha}{B} [\cos (\delta + \varepsilon) - \beta \cos \varepsilon].$$

275. Franges par transmission à travers une lame mince d'air limitée par deux surfaces de verre argentées (Perot et Fabry).

L'argenture est assez légère pour laisser passer de la lumière.

Le pouvoir réfléchissant des surfaces limitant la lame mince étant considérablement augmenté, il faut tenir compte des rayons qui sont réfléchis 4, 6, 8, ... fois avant d'émerger (fig. 168).

Leurs amplitudes varient en progression géométrique, leurs phases en progression arithmétique.

En effet, le chemin optique du rayon B'R' est plus grand que le chemin optique du rayon BR, de :

$$\delta = 2n \overline{AB} - \overline{BC}.$$

Le chemin optique du rayon B''R'' est plus grand que le chemin optique du rayon B'R' de la même quantité; ... et ainsi de suite.

Donc les phases varient en progression arithmétique.

Quand on passe d'un rayon au suivant, l'amplitude est diminuée par le fait de deux réflexions supplémentaires. Chacune d'elles multipliant l'amplitude par $\sqrt{\beta}$, l'ensemble la multiplie par β .

Les amplitudes varient donc en progression géométrique.

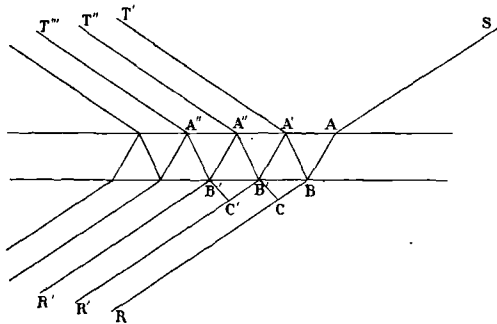


Fig. 168.

Nous retombons dans l'énoncé du problème précédent, à la condition de ne pas ajouter la vibration supplémentaire; il faut poser dans la solution : $\alpha = 0$.

Lorsque la lame n'est pas argentée, β est voisin de 0. Sous l'incidence normale, pour du verre d'indice 1,5, $\beta = 0,04$. Il suffit alors, comme nous l'avons fait précédemment, de tenir compte des deux premiers rayons dont les amplitudes relatives sont 1 et β . Il résulte de l'interférence, des franges normalement auxquelles la répartition de la lumière est sinusoïdale; les minimums ne sont pas nuls.

Le phénomène n'est plus le même avec des surfaces suffisamment argentées : les amplitudes 1, β , β^2 ,... sont du même ordre de grandeur : il y a naturellement une grande absorption de lumière lors des deux passages à travers les surfaces argentées; mais ils agissent de même sur tous les faisceaux. Strictement nous devons tenir compte d'un nombre plus ou moins grand de rayons suivant la valeur de β ; mais la série 1, β , β^2 ,... étant assez rapidement décroissante, nous pouvons la prendre indéfinie.

Faisons $\alpha = 0$ dans la solution; il reste :

$$I^2 = \frac{1}{B} = \frac{1}{1 + \beta^2 - 2\beta \cos \delta} = \frac{1}{(1 - \beta)^2} : \left[1 + \frac{4\beta}{(1 - \beta)^2} \sin^2 \frac{\delta}{2} \right].$$

Supposons β voisin de 1 et cherchons la forme de la courbe qui représente I^2 en fonction de δ . Tant que $\sin^2 \frac{\delta}{2}$ n'est pas très voisin de 0 (c'est-à-dire tant que δ n'est pas très voisin de $2k\pi$, où k est un nombre entier), I^2 est quasiment nulle. Elle est au contraire relativement grande, quand la condition $\delta = 2k\pi$ est satisfaite. La forme de la courbe est représentée fig. 169; pour faciliter les comparaisons, on a tracé une sinusoïde ayant les mêmes maximums et minimums.

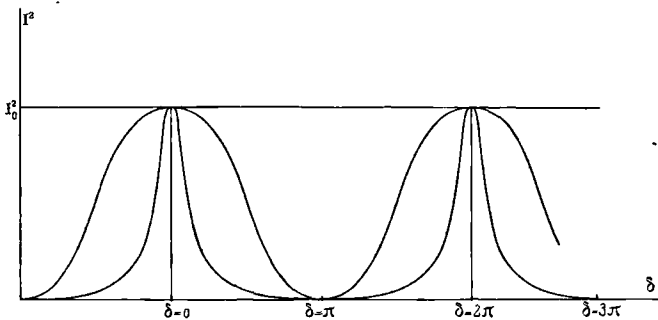


Fig. 169.

Ainsi les maximums de lumière sont *localisés* aux mêmes points de la lame que s'il n'y avait pas argenture. Il faut remarquer à ce sujet que la lame est toujours mince et que les faisceaux utilisés sont

toujours très rapprochés. La figure 169 pourrait à cet égard donner des idées fausses.

La loi de distribution de la lumière en dehors des maximums est complètement modifiée. L'intensité diminue brusquement; on voit de véritables raies lumineuses, d'autant plus fines que l'argenteure est plus épaisse, c'est-à-dire que β est plus voisin de l'unité.

276. Franges par réflexion entre les faces d'une lame d'air, l'une argentée à fond, l'autre légèrement argentée (Hamy). — On se sert de l'appareil de la figure 172 (§ 278); la face supérieure de la lentille L est convenablement argentée, la face supérieure du bloc L_1 est argentée à fond. On doit employer la formule générale. En effet, le premier faisceau est réfléchi à l'intérieur du verre sur la face inférieure de la lentille L; il ne fait pas partie de la série; nous le représentons par l'expression :

$$\alpha \cos(\omega t + \delta + \varepsilon).$$

Son amplitude et le retard subi du fait de la réflexion dépendent du degré de l'argenteure.

Nous avons ensuite à considérer les faisceaux qui passent à l'aller et au retour à travers la face L et qui sont respectivement réfléchis dans l'air :

- le premier : une fois sur L_1 ;
- le second : deux fois sur L_1 , une fois sur L;
- le troisième : trois fois sur L_1 , deux fois sur L;

et ainsi de suite.

Leurs amplitudes sont en progression géométrique, leurs phases en progression arithmétique. Nous sommes donc bien dans l'énoncé général du problème du § 274.

On démontre que les maximums et les minimums correspondent encore à des épaisseurs qui croissent en progression arithmétique, mais les maximums ne sont plus symétriquement placés par rapport aux minimums. En donnant à l'argenteure de la face L un pouvoir réflecteur voisin de 0,5, les maximums sont très déliés, apparaissent comme de véritables raies brillantes, tout comme dans les franges étudiées au paragraphe précédent.

Si l'argenteure est encore plus épaisse, si son pouvoir réflecteur est voisin de 0,9, ce sont les minimums qui sont particulièrement déliés; ils se présentent comme les raies noires solaires dans un spectre très étalé.

Détermination d'un ordre d'interférence et étude des sources pseudo-monochromatiques.

277. **Franges obtenues avec deux sources monochromatiques distinctes.** — Photographions les franges par réflexion entre les faces d'une lame d'air mince prismatique (§ 245), en l'éclairant d'abord avec une radiation de longueur d'onde λ_1 , ensuite avec une radiation de longueur d'onde λ inférieure à λ_1 . Si les opérations sont faites séparément dans les mêmes conditions, nous obtenons deux clichés qui ne diffèrent que par l'écartement des franges; les franges 1 sont plus larges que les franges 2 (fig. 121 et 122).

Photographions maintenant les deux systèmes *sur le même cliché*; nous obtenons les apparences représentées fig. 170 et 171. Il y a coïncidence des maximums ou des minimums des deux systèmes aux points où l'épaisseur de la lame d'air est à la fois un multiple impair ou pair de $\lambda_1 : 2$ et de $\lambda_2 : 2$; les maximums des deux systèmes alternent, la *visibilité* devient nulle, quand l'épaisseur est un multiple

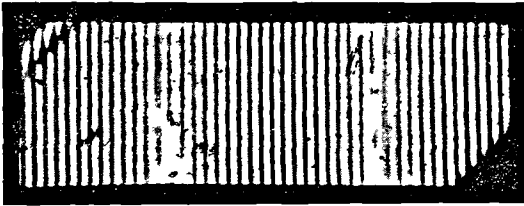


Fig. 170.

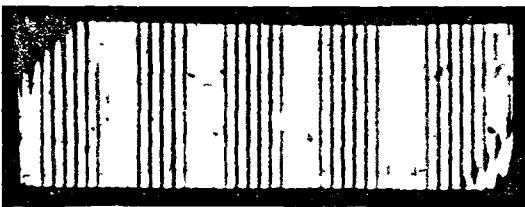


Fig. 171.

pair de $\lambda_1 : 2$ et impair de $\lambda_2 : 2$.

Si $\lambda_1 = \lambda_2$, la période du phénomène, mesurée par la distance sur la lame prismatique de deux coïncidences successives, est infinie: les apparences sont identiques tout le long de la lame, pour longue qu'elle soit.

A mesure que λ_1 devient plus différent de λ_2 , la période décroît: c'est ce que montrent les figures 170 et 171.

Le phénomène serait donc inobservable par cette méthode pour des

radiations λ_1 et λ_2 très voisines. On tourne la difficulté en remplaçant la périodicité mesurée sur la lame, par une périodicité en fonction de la distance moyenne des deux lames.

278. **Lumière pseudo-monochromatique; lumière du sodium.** — Supposons fixe l'une des lentilles de l'appareil de Newton; l'autre est montée sur une glissière et mobile parallèlement à

elle-même à l'aide d'une vis micrométrique. On peut ainsi faire varier l'épaisseur de la lame d'air d'une quantité connue et la même en tous les points.

Fizeau a constaté que les franges de la lumière du sodium, nettes quand les lentilles se touchent, changent périodiquement de *visibilité* quand la distance des lentilles croît. Les franges disparaissent complètement pour une distance moyenne l entre les lentilles, redeviennent nettes pour la distance $2l, \dots$ et ainsi de suite.

D'autre part, si on analyse la lumière du sodium avec un spectroscope très dispersif, on trouve qu'elle est formée par deux radiations simples, d'égales intensités et dont les longueurs d'onde sont en dix millièmes de μ (unités d'Armströng) :

$$\lambda_1 = 5894, \quad \lambda_2 = 5889, \quad \lambda_1 - \lambda_2 = 5 \cdot 10^{-4} \mu.$$

Montrons que ces faits sont connexes.

Nous avons affaire à deux systèmes de franges séparément presque parfaits. Pour que les franges soient nettes, il faut que les minimums et maximums soient respectivement superposés. Il faut donc que, pour la même épaisseur e , la différence de marche soit simultanément un nombre entier de λ_1 et un autre nombre entier de λ_2 . On a, pour l'incidence normale, la condition :

$$2e = m\lambda_1 = (m + p)\lambda_2, \quad m = p \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = 1178 p.$$

Si deux minimums des deux systèmes coïncident, les minimums voisins ne coïncident pas *rigoureusement*; les λ étant différents, les franges n'ont pas rigoureusement la même largeur. Mais la différence est si petite, que la superposition est pratiquement parfaite pour un très grand nombre de franges, pour toutes les franges simultanément visibles par conséquent.

Donc si $m = 0$, les lentilles se touchent, les franges sont parfaitement nettes. Pour $e = 1178 \cdot \lambda : 2 = 589 \cdot \lambda$, un minimum de l'un des systèmes coïncide avec un maximum de l'autre; comme les sources sont d'égales intensités, tout disparaît. Les intensités sont en effet représentées dans le plan de visée par les expressions :

$$I_1 = I_0 \cos^2 \frac{\pi x}{\Delta}, \quad I_2 = I_0 \sin^2 \frac{\pi x}{\Delta}, \quad I_1 + I_2 = I_0,$$

où x est la distance à une origine convenable et où Δ est la largeur des franges. La somme des intensités est indépendante de x .

Pour $e = 1178 \cdot \lambda$, les franges redeviennent parfaitement nettes.

En écartant progressivement les lentilles, Fizeau observa 52 périodes de visibilité; faisons $p = 52$ dans la formule, il vient :

$$m = 61256.$$

Deux faisceaux monochromatiques peuvent donc encore interférer

régulièrement avec des différences de marche de l'ordre de cent mille longueurs d'onde; on est même allé beaucoup plus loin. Ainsi est légitimée l'affirmation du § 215 qu'un point d'une source lumineuse monochromatique oscille *régulièrement*, sans changement brusque de phase, pendant *au moins* quelques centaines de mille oscillations, puisque des mouvements émis en des temps séparés par un nombre de périodes de cet ordre interfèrent régulièrement, *constatation qui ne préjuge rien sur la nature de la lumière blanche*.

60000 longueurs d'onde de la raie D correspondent à une distance des lentilles voisine de 18 millimètres.

Fizeau a indiqué un dispositif excellent qui permet de voir simultanément un grand nombre de franges, tout en n'utilisant en chaque point qu'un faisceau très étroit, ce qui est une condition de netteté (§ 258).

Il prend pour limiter la lame mince une lentille fixe plan convexe,

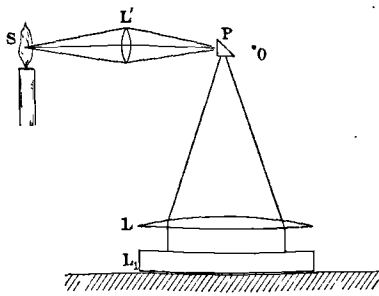


Fig. 172.

dont le foyer coïncide avec un petit prisme à réflexion totale P. La lumière d'une source S est concentrée par une lentille L' sur ce prisme. Elle forme donc un faisceau cylindrique dans la lame mince. C'est à la lame L₁ légèrement bombée qu'on impose la translation convenable à l'aide d'une vis micrométrique. Le système LL₁ est légèrement incliné sur le faisceau de lumière, de sorte que le foyer par réflexion se fasse en O :

c'est là qu'on met l'œil. On voit des franges sur toute la surface éclairée dont le diamètre est de 5 à 10 centimètres.

279. Étude de la constitution des raies. — Le cas de la lumière du sodium est particulièrement simple. On a affaire à deux raies sensiblement monochromatiques et de même intensité. Le problème général à résoudre est *celui de la constitution des raies*. Une raie s'étend d'une longueur d'onde λ_1 à une longueur d'onde λ_2 . Dans cet intervalle, qui se chiffre généralement par une fraction d'unité d'Armströng, l'intensité émise est une certaine fonction de la longueur d'onde. Étudier la constitution d'une raie, c'est déterminer cette fonction $f(\lambda)$.

Voici comment on applique la méthode précédente.

Nous avons appelé *visibilité* d'un système de franges le rapport :

$$V = \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2},$$

de la différence des intensités d'un maximum et d'un minimum du système, à la somme de ces intensités.

On peut calculer à l'avance comment varie la visibilité des franges en fonction de l'épaisseur e de la couche d'air, pour différentes formes (choisies parmi les plus simples) de la fonction $f(\lambda)$ ci-dessus définie.

Ce barème établi, on étudie expérimentalement la manière dont la visibilité varie en fonction de e : la comparaison avec les cas théoriquement traités donne au moins une indication générale sur la fonction $f(\lambda)$.

Mais on a des méthodes plus rapides et plus sûres.

280. Emploi des franges fines obtenues avec des lames argentées. — Si nous employons des lames argentées étudiées au § 275, les franges obtenues avec l'une ou l'autre des radiations qu'émet la lumière du sodium, étant très fines, resteront parfaitement distinctes quand l'épaisseur sera telle qu'un maximum d'un des systèmes coïncide avec un minimum de l'autre. Il y aura donc, non plus variation dans la visibilité d'un système complexe, mais bien *dédoublement* en deux systèmes distincts.

On observe un phénomène analogue quand on regarde deux grilles parallèles et formées de barreaux parallèles équidistants, ou deux quadrillages égaux parallèles. En les éloignant plus ou moins l'un de l'autre et de l'œil, on fait varier de manières différentes les angles apparents sous lesquels sont vus les intervalles des deux systèmes. On observe les coïncidences et les dédoublements périodiques.

On conçoit combien précises sont les conséquences à tirer d'une séparation des franges des deux systèmes; tandis que la mesure d'une visibilité est toujours vague, on peut, avec une précision qui atteint le centième, déterminer la position d'une frange étroite d'un des systèmes par rapport aux franges adjacentes de l'autre.

281. Comparaison des longueurs d'onde de deux radiations voisines. — Regardons les franges obtenues avec la lame argentée supposée en forme de coin et éclairée par des sources étendues de longueurs d'onde λ_1 et λ_2 . A cause de l'étroitesse des maximums, ils restent distincts. Pour un certain point de la lame et par conséquent pour une certaine épaisseur e , une raie d'un des systèmes coïncide avec une raie de l'autre. On doit écrire, si l'incidence est normale :

$$2e = m_1\lambda_1 = m_2\lambda_2,$$

où m_1 et m_2 sont des nombres entiers.

La coïncidence a encore lieu pour un autre point, et par conséquent pour une autre épaisseur e' . On passe, pour aller de e à e' , sur $p - 1$

raies brillantes du système λ_1 et sur p raies brillantes du système λ_2 .

On doit donc écrire :

$$\begin{aligned} 2e' &= (m_1 + p)\lambda_1 = (m_2 + p + 1)\lambda_2. \\ p\lambda_1 &= (p + 1)\lambda_2, \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 1 + \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

Si l'on ne veut faire qu'une mesure relative, il est inutile de connaître e et e' .

Quand λ_1 et λ_2 sont très voisins, p est un nombre grand; il serait donc impossible de réaliser une lame argentée assez longue pour y trouver les deux coïncidences requises, tout en conservant aux franges une largeur suffisante. On tourne la difficulté en rendant une des lames mobile par rapport à l'autre d'un mouvement très lent (§ 277).

L'expérience se ramène à faire varier l'épaisseur de la lame sur les faces de laquelle ont lieu les réflexions. On vise un point de la lame fixe, et on détermine combien de franges d'un des systèmes passent en ce point entre deux coïncidences, ou généralement entre p coïncidences des franges des deux systèmes.

C'est l'expérience de Fizeau (§ 278), mais avec toute la précision qui résulte de la substitution d'une coïncidence de deux raies fines à la détermination vague d'une visibilité.

282. Détermination du numéro d'ordre d'une frange d'interférence. — Quand on observe des franges en lumière monochromatique, rien n'indique la partie entière de leur numéro d'ordre, c'est-à-dire de la valeur de la différence de phase entre les deux faisceaux qui interfèrent. Seule la partie fractionnaire est immédiatement connue. La détermination de ce numéro est pourtant essentielle dans toutes les applications des interférences à la métrologie (§ 257).

On résout le problème par l'emploi simultané de deux ou plusieurs radiations $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, dont on connaît les longueurs d'onde.

Soit l la différence de chemin optique à mesurer évaluée en longueur d'onde λ_1 :

$$l = (m_1 + x_1)\lambda_1; \quad (1)$$

m_1 est la partie entière inconnue, x_1 est ce qu'on appelle l'*excédent fractionnaire*; il est immédiatement déterminé par la disposition des franges autour du point où l'on veut le chemin l . L'équation (1) ne peut suffire à calculer l , puisque m_1 est inconnu. Nous savons seulement que c'est un entier.

On a imaginé, pour résoudre ce problème, plusieurs méthodes. Voici la plus simple.

Elle suppose le nombre m_1 approximativement connu par un procédé quelconque; approximativement veut dire ici à quelques unités près.

Déterminons par l'expérience les excédents fractionnaires $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$, pour les n radiations dont nous disposons. Si m_1 est connu, ces excédents peuvent être calculés. On a en effet :

$$(m_1 + \alpha_1)\lambda_1 = (m_2 + \alpha_2)\lambda_2, \quad m_2 + \alpha_2 = (m_1 + \alpha_1) \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

m_2 est inconnu, mais nous savons que c'est un entier.

Faisons ce calcul pour les divers nombres m_1 , entre lesquels nous hésitons; pour un seul de ces nombres le calcul donne des excédents $\alpha_2, \dots, \alpha_n$, identiques, aux erreurs d'expérience près, aux excédents expérimentaux.

Imaginons par exemple que l'excédent soit 0,35 pour $\lambda_1 = 0^\mu,6$; on sait que m_1 est compris entre 98 et 102. Cherchons les excédents pour $\lambda_2 = 0^\mu,5$. On a :

	$m_2 + \alpha_2 = (m_1 + 0,35)1,2.$				
$m_1 =$	98	99	100	101	102
$m_2 + \alpha_2 =$	118,02	119,22	120,42	121,62	122,82
$\alpha_2 =$	0,02	0,22	0,42	0,62	0,82

La mesure de l'excédent fractionnaire à 0,1 près ne peut laisser aucun doute sur la valeur m_1 à choisir. Si l'expérience donne 0,27 comme excédent, m_1 est sûrement égal à 99. Tout ceci suppose qu'on connaît le rapport $\lambda_1 : \lambda_2$ avec beaucoup de précision.

En recommençant les calculs avec une autre longueur d'onde λ_3 , on diminuera encore les chances d'erreur.

La détermination approximative de m_1 peut résulter d'une mesure directe d'épaisseur avec une vis micrométrique.

CHAPITRE VIII

DIFFRACTION. PRINCIPE D'HUYGHENS. RÉSEAUX

Franges localisées à l'infini.

283. **Généralités.** — Nous avons déjà rencontré les propositions sur lesquelles nous nous appuyerons. Nous avons vu (§ 274) que l'on peut composer en un point un nombre fini ou infini de faisceaux dont les phases et les amplitudes sont connues. Dans l'exemple traité la phase varie, d'une manière discontinue, d'un faisceau à l'autre; on obtient l'amplitude résultante en sommant les termes d'une série. Rien n'empêche de généraliser, de supposer qu'un nombre infini de faisceaux interfèrent, dont les phases varient d'une manière continue; on obtient l'amplitude résultante sous forme d'intégrale.

Les faisceaux que nous allons faire interférer sont parallèles; mais nous savons, d'après le théorème de Malus (§ 218, fig. 125), que la distance optique entre le foyer F' d'un faisceau cylindrique et un point quelconque d'un plan P quelconque normal au faisceau est constante. Additionner les amplitudes au point F' ou sur le plan P revient exactement au même.

A chaque point F' du plan focal principal correspond un faisceau cylindrique de direction α . Si nous connaissons, en fonction de l'angle α , l'amplitude de la résultante de toutes les vibrations qui existent au même instant en tous les points d'un plan P ; si nous connaissons par conséquent, en fonction de l'angle α , l'intensité du mouvement transmis par cette résultante, nous connaissons en fonction de $\overline{OF'} = f\alpha$, l'intensité de la lumière en un point F' du plan focal, et par conséquent la forme du système de franges vu dans ce plan. Ces franges sont comme les images de franges à l'infini; elles sont dites *localisées à l'infini*.

Réciproquement, si nous voulons obtenir des mouvements qui soient concordants en tous les points d'un plan, ce que nous appelons *une onde plane*, il suffit de mettre un point lumineux dans le plan focal principal d'une lentille. Elle transforme le cône émis en un

faisceau cylindrique; en tous les points d'un plan normal quelconque à ce faisceau, les mouvements sont concordants, puisque les distances optiques de la source à ces points sont égales.

Nous aurons enfin à invoquer un principe fondamental connu sous le nom de principe d'Huyghens, d'après lequel *tout point de l'espace, alors même qu'il ne s'y trouverait aucune matière, peut être traité comme un point lumineux qui rayonne dans toutes les directions. La phase du mouvement émis est celle qu'on peut calculer en composant tous les mouvements vibratoires qui se croisent au point considéré.*

Nous n'expliquerons pas davantage ce principe pour le moment avant d'avoir montré, dans les cas les plus simples, comment on s'en sert.

284. Franges à l'infini données par une fente étroite à bords parallèles. — Soit un point lumineux placé dans le plan focal d'une lentille : remplaçons, par exemple, la fente d'un collimateur par une plaque percée d'un petit trou.

Par le passage à travers l'objectif, le faisceau conique émis est transformé en un faisceau cylindrique SS' que l'on coupe par un diaphragme percé d'une fente rectangulaire de hauteur l , de largeur $\overline{AB} = a$, et dont les bords sont perpendiculaires et parallèles au plan du tableau.

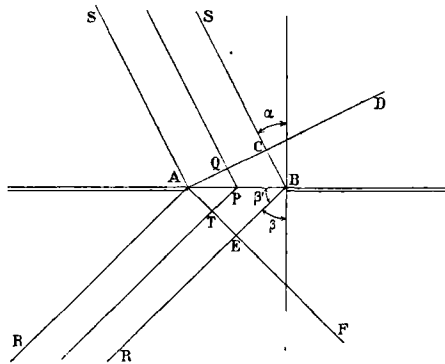


Fig. 173.

D'après le principe d'Huyghens, tous les points du plan AB jouent le rôle de sources de lumière. Les sources placées sur des bandes minces parallèles aux bords de la fente sont concordantes; mais les sources des bandes différentes ne le sont pas : elles présentent les unes par rapport aux autres des différences de phase qu'il est facile de calculer.

D'après le paragraphe précédent, les mouvements sont concordants sur le plan ACD normal au faisceau SS' . Posons $\overline{AP} = x$.

Au point P la vibration a sur celle du point A :

une différence de marche : $\overline{PQ} = x \sin \alpha$;

une différence de phase : $\delta = \frac{2\pi x}{\lambda} \sin \alpha$.

Il en est de même pour toutes les sources du rectangle de largeur dx et de hauteur l .

Cherchons l'amplitude de la vibration envoyée dans le plan du tableau et dans la direction β , par les différentes bandes constituant le plan AB et considérées comme sources de lumière. Admettons qu'une bande dx envoie un mouvement d'amplitude proportionnelle à dx et indépendante de l'angle β . Cette dernière hypothèse est évidemment peu rigoureuse : elle suffit pour de petits angles β .

La différence de marche entre le mouvement du point T et le mouvement du point P correspondant est $x \sin \beta$; la différence de marche avec le point A est donc :

$$x(\sin \alpha + \sin \beta).$$

La vibration résultante, somme des vibrations sur la portion \overline{AE} du plan AF, est :

$$A \sin(\omega t - \varepsilon) = \int_0^a \sin(\omega t - \mu x) dx,$$

en posant : $\mu = \frac{2\pi}{\lambda}(\sin \alpha + \sin \beta)$. On tire de là :

$$A^2 = \left[\int_0^a \cos \mu x dx \right]^2 + \left[\int_0^a \sin \mu x dx \right]^2 = a^2 \frac{\sin^2 \frac{\mu a}{2}}{\left(\frac{\mu a}{2}\right)^2}.$$

Discutons¹ ce résultat en considérant comme donné l'angle α et comme variable l'angle β . Cela revient à prendre μ comme variable.

Les *minimums nuls* correspondent à la condition : $\mu a = 2k\pi$, où k est un entier quelconque, $k=0$ excepté. Pour cette valeur, A^2 se présente sous la forme $0:0$; nous verrons qu'il existe alors un maximum. On a donc pour les minimums nuls :

$$a(\sin \alpha + \sin \beta) = k\lambda.$$

Les *maximums* sont donnés par la condition :

$$\frac{d(A^2)}{d\mu} = 0, \quad \text{tg } \frac{\mu a}{2} = \frac{\mu a}{2}.$$

Nous sommes ramenés à l'équation transcendante $\text{tg } y = y$, dont les racines sont :

$$y = 0, \quad \frac{3\pi}{2} \cdot 0,96, \quad \frac{5\pi}{2} \cdot 0,98, \quad \frac{7\pi}{2} \cdot 0,99, \quad \frac{9\pi}{2}, \dots$$

La condition réservée $\mu = 0$ correspond à une direction $\beta = -\alpha$ dans le prolongement même du faisceau cylindrique incident; c'est évidemment le maximum maximorum.

¹ Nous donnons, page 405, les valeurs des fonctions $y = \sin x : x$ et y^2 , de 15 en 150 pour l'intervalle de $x = 0$ à $x = 6\pi$. Le lecteur voudra bien s'y reporter pour suivre la discussion.

Ainsi, sauf le premier maximum, la différence entre les racines $y = \mu a : 2$ et les multiples impairs de $\pi/2$ (à partir de $3\pi/2$) est insignifiante. D'après la formule donnant A^2 , les intensités des maximums (le maximum maximorum excepté) sont donc entre elles en raison inverse de : $3^2, 5^2, 7^2, \dots$

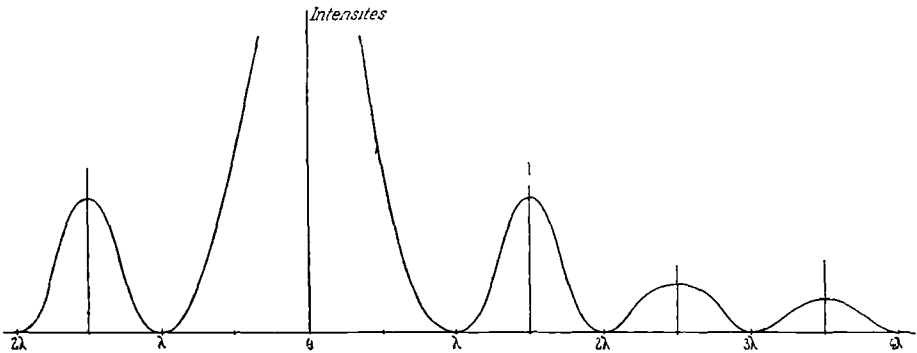


Fig. 174.

De plus, il est facile de voir que le maximum maximorum est au second maximum comme 100 est à 4,7. La figure 174 donne les valeurs de A^2 en fonction de μ . L'intensité pour $\mu = 0$ est si grande par rapport à celle des autres maximums, qu'on n'a pu la représenter.

285. Théorie synthétique. — On retrouve ces résultats par un procédé plus concret. Décomposons la fente en n fentes élémentaires égales. Chacune d'elles envoie dans le plan AE un mouvement représenté par un vecteur; appliquons à ces vecteurs la règle de Fresnel. On se reportera au § 273.

Si $\mu a = 0$, les vecteurs sont superposés. L'intensité résultante est représentée par n^2 . Quand μa n'est plus nul, les vecteurs forment entre eux des angles égaux δ , et s'étalent en une sorte d'éventail d'angle $(n - 1)\delta = \mu a$. Il est clair que la résultante est nulle, quand l'angle vaut un nombre entier de circonférences. Il y a très sensiblement maximum quand cet angle vaut un nombre impair de demi-circonférences (π excepté). Les résultats du § 273 sont donc immédiatement applicables. Ils conduisent aux propositions du paragraphe précédent.

286. Observation des phénomènes. — Supposons maintenant, pour fixer les idées, que l'angle α soit nul : nous faisons tomber sur la fente un faisceau normal. Nous recevons la lumière diffractée sur une lentille parallèle à l'écran, et nous observons les franges dans le plan focal principal.

Menons par le centre optique de la lentille un plan parallèle au faisceau incident : il coupe le plan focal suivant une droite XX dans le plan du tableau. Le point P distant de la droite CO (parallèle au

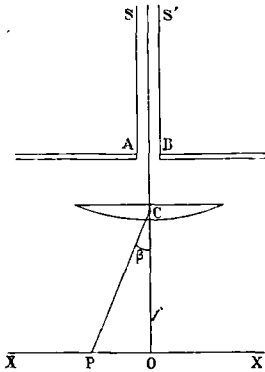


Fig. 175.

faisceau) de la quantité $\overline{PO} = f\beta$, correspond au faisceau diffracté suivant l'angle β . Nous devons avoir *suivant la ligne XX* des intensités représentées par la fig. 174.

La question est donc résolue pour les rayons diffractés dans le plan de la figure, c'est-à-dire le plan passant par le faisceau incident et normal aux bords de la fente.

Menons par la droite AB un plan qui fasse avec le précédent un angle γ . Il lui correspond dans le plan focal principal une droite $X'X'$, parallèle à XX et distante de $f\gamma$.

Je dis que la distribution des intensités est sensiblement la même sur cette droite à une même distance du point O' projection de O : de là je conclurai que le phénomène dans le plan focal principal est un système de franges rectilignes et parallèles aux bords de la fente.

Représentons (fig. 176) la fente, la droite AB normale aux bords, la direction BR' faisant avec AB l'angle β' complément de β , et une direction BE' inclinée de γ sur BE et placée dans le plan $R'BM$ passant par le bord BM de la fente. Abaissons les perpendiculaires AE et AE' . La différence de marche dans la direction BE' est :

$$\overline{BE'} = \overline{BE} \cos \gamma.$$

L'angle γ étant toujours petit, quelques degrés au maximum, $\cos \gamma$ est toujours pratiquement égal à l'unité. On peut poser $\overline{BE'} = \overline{BE}$; le retard est indépendant de γ .

En définitive, le phénomène dans le plan focal principal est un système de franges rectilignes, parallèles aux bords de la fente ; les minimums sont équidistants, situés de part et d'autre du maximum central à des distances 1, 2, 3, ... Les franges sont de même largeur, la frange centrale exceptée, qui est de largeur double. Les intensités des maximums sont entre elles comme :

$$1000, \quad 47, \quad 16, \quad 8, \dots$$

La largeur du phénomène est proportionnelle à la longueur d'onde et en raison inverse de la largeur de la fente.

Si on remplace le *trou* source par une fente, le phénomène reste le même et gagne simplement en éclat, à la condition que la fente source de lumière soit parallèle à la fente qui limite le faisceau parallèle.

Il ne faut pas oublier que des rayons issus de points lumineux différents ne peuvent pas interférer; si nous remplaçons le point lumineux par la fente ordinaire du collimateur, il faut, pour qu'il subsiste un système net de franges, que tous les points de la fente donnent isolément le même système, placé au même endroit. C'est possible, mais à la condition que la fente source soit parallèle aux bords de la fente AB. En effet, chaque point source donne un système de franges parallèle aux bords de la fente AB; ces franges se superposent complètement si leurs franges centrales sont superposées, ce qui nécessite le parallélisme des deux fentes, puisque les franges centrales passent par les rayons régulièrement réfractés.

287. Pouvoir séparateur. — Dans un grand nombre d'expériences, on reçoit dans une lunette un faisceau de rayons parallèles qui se trouve comme limité par une fente de largeur Λ . Si la diffraction n'existait pas, on verrait dans le plan focal principal une raie, dont la finesse ne dépendrait que des propriétés géométriques de l'objectif. A cause de la diffraction, on voit les franges étudiées aux paragraphes précédents.

Supposons qu'on reçoive simultanément deux faisceaux parallèles de largeur Λ faisant entre eux un angle δ ; on demande à quelle condition ce double faisceau est résolu. Il y a naturellement une part d'arbitraire dans la définition de cette condition, qui constitue le pouvoir séparateur. Nous poserons que la résolution est possible quand le maximum maximorum d'un des systèmes de franges coïncide avec le premier minimum de l'autre.

On a alors, l'incidence sur l'objectif étant quasiment normale (§ 284):

$$\alpha = 0, \quad \mu\Lambda = \frac{2\pi\Lambda}{\lambda} \sin \delta = \frac{2\pi\delta\Lambda}{\lambda} = 2\pi, \quad \delta = \frac{\lambda}{\Lambda}.$$

Donc, en admettant la définition ci-dessus, qui est évidemment arbitraire, il y a résolution quand l'angle des faisceaux exprimé en radians est égal au quotient de la longueur d'onde par la largeur de l'un ou l'autre faisceau.

Pour éclaircir le sens de cette condition, calculons les intensités dans le plan focal entre les maximums maximorum des deux systèmes. Exactement au centre du phénomène résultant de leur superposition (voir la table, p. 405), l'intensité est :

$$2 \left[\frac{\sin(\pi : 2)}{\pi : 2} \right]^2 = 0,81;$$

tandis qu'elle est 1 là où le maximum maximorum de l'un des systèmes coïncide avec le zéro de l'autre. Donc l'intensité ne décroît que de deux dixièmes de sa valeur. D'où la conclusion que la condition précédente est nécessaire, mais généralement insuffisante.

288. Application. Pouvoir séparateur d'un spectroscopie à prismes. — Considérons deux faisceaux de longueurs d'onde peu différentes, coïncidant avant le passage à travers un système de prismes, et faisant à l'émergence un angle (*dispersion*) δ .

On demande à quelle condition ils sont séparés.

Nous avons montré (§ 80) qu'il existe entre la largeur Λ du faisceau émergent, la dispersion δ et l'épaisseur e du prisme traversée, la relation :

$$\Lambda \delta = e dn.$$

dn est la variation de l'indice quand on passe de l'un à l'autre faisceau.

D'après le paragraphe précédent, la condition de résolution est :

$$\frac{e dn}{\Lambda} > \frac{\lambda}{\Lambda}, \quad e > \frac{\lambda}{dn}.$$

Supposons λ et n reliés par la formule de Cauchy :

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2}; \quad dn = -\frac{2B}{\lambda^3} d\lambda.$$

La condition devient : $e > -\frac{\lambda^4}{2B \cdot d\lambda}$.

En prenant pour unité de longueur le centimètre, on a pour le flint :

$$B = 10^{-10}, \quad \frac{\lambda^4}{2B \cdot d\lambda} = \frac{10^{10}}{2} \frac{\lambda^4}{d\lambda}.$$

Cherchons l'épaisseur nécessaire pour la séparation des deux raies D :

$$\lambda = 5,889 \cdot 10^{-5}, \quad d\lambda = 0,006 \cdot 10^{-5}, \quad \lambda^4 : d\lambda = 2 \cdot 10^{-10}.$$

Il faut donc que l'épaisseur du prisme soit supérieure à un centimètre.

Il importe fort peu que le système se compose d'un prisme ou de plusieurs prismes successivement traversés par la lumière.

L'expérience confirme la théorie.

289. Franges de n fentes égales et parallèles. Points correspondants. — Considérons n fentes égales et parallèles, ou plus généralement n ouvertures identiques parallèles, *régulièrement distribuées le long d'une droite*.

Dans une direction donnée, toutes ces ouvertures envoient respectivement une vibration résultante de *même* amplitude. La phase de

chacune de ces vibrations a une différence constante et la même pour toutes les ouvertures, avec la phase de la vibration qui passe en un point de l'ouverture choisi de la même manière, d'ailleurs quelconque, pour toutes les ouvertures ; c'est ce qu'on appelle des points correspondants.

Les ouvertures étant régulièrement distribuées le long d'une droite, les phases des points correspondants sont en progression arithmétique. Donc l'intensité envoyée par les n ouvertures est égale à l'intensité envoyée par une seule, multipliée par le facteur (§ 273) :

$$\sin^2 n \frac{\delta}{2} : \sin^2 \frac{\delta}{2},$$

où δ est la différence de phase entre les rayons passant par les points correspondants de deux ouvertures voisines.

Appliquons cette proposition absolument générale au cas de fentes égales, parallèles, régulièrement distribuées. La figure 177 n'en représente que deux ; le lecteur généralisera facilement.

Les points correspondants des fentes successives sont à la même distance des points A, A_1, A_2, \dots . Dans une diffraction caractérisée par les angles α et β , la différence de phase entre deux points correspondants successifs est :

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} (a + b) (\sin \alpha + \sin \beta),$$

où a est la largeur de la fente, b la distance entre deux fentes voisines.

Donc l'intensité envoyée dans une direction définie par une certaine valeur :

$$\mu = \frac{2\pi}{\lambda} (\sin \alpha + \sin \beta),$$

a pour expression générale :

$$a^2 \frac{\sin^2 \frac{\mu a}{2}}{\left(\frac{\mu a}{2}\right)^2} \frac{\sin^2 n \frac{\mu(a+b)}{2}}{\sin^2 \frac{\mu(a+b)}{2}}. \quad (1)$$

En particulier si $n = 1$, on retrouve la formule du § 284.

Si $n = 2$, il vient :

$$4a^2 \frac{\sin^2 \frac{\mu a}{2}}{\left(\frac{\mu a}{2}\right)^2} \cos^2 \frac{\mu(a+b)}{2}. \quad (2)$$

290. **Franges de deux fentes égales et parallèles.** — Il suffit de discuter la formule (2).

MINIMUMS NULS DE DIFFRACTION.

Dans une direction de minimum nul pour chaque fente, il y a

un minimum nul pour le système. Ces minimums correspondent aux valeurs nulles du premier facteur de l'expression (2). Ils sont donnés par la condition :

$$a(\sin \alpha + \sin \beta) = k\lambda,$$

où k est un nombre entier positif ou négatif ; la solution $k = 0$ est exceptée.

Dans la direction $k = 0$, c'est-à-dire $\alpha = -\beta$ (direction régulière de transmission), il y a le maximum maximorum ; toutes les vibrations sont en effet concordantes.

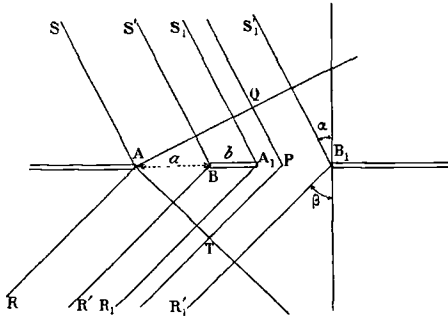


Fig. 177.

Les minimums nuls que nous étudions, sont placés dans le plan focal principal de la lentille de projection exactement comme s'il n'existait qu'une fente. Ils correspondent à ce qu'on appelle les *franges de diffraction*, nom impropre, mais si commode qu'il vaut mieux le conserver. Toutes les franges sont en effet également dues à des phénomènes de diffraction (voir § 214).

MAXIMUMS DITS D'INTERFÉRENCE.

Ils correspondent aux directions dans lesquelles les deux fentes envoient respectivement *comme résultante* des vibrations concordantes, l'amplitude de ces vibrations étant d'ailleurs quelconque. Ces maximums satisfont par conséquent à la condition :

$$(a + b)(\sin \alpha + \sin \beta) = p\lambda,$$

où p est un nombre entier.

Le second facteur de l'expression (2) est alors égal à 1.

Le premier peut avoir une valeur quelconque ; *il peut même être nul*. Un maximum d'interférence peut coïncider avec un minimum nul de diffraction. Il suffit que la condition :

$$\frac{a + b}{a} = \frac{p}{k},$$

où p et k sont des nombres entiers, soit satisfaite. Par exemple si $a = b$, la condition devient $p = 2k$. Subsistent seuls les maximums d'interférence qui correspondent à $p = 1, 3, 5, \dots$. Naturellement le maximum maximorum $k = p = 0$ existe toujours.

MINIMUMS DITS D'INTERFÉRENCE.

Ils correspondent à la condition :

$$(a + b)(\sin \alpha + \sin \beta) = (2p + 1) \frac{\lambda}{2},$$

où p est un nombre entier.

291. **Retour sur l'expérience des fentes d'Young.** — Les franges dites d'interférence sont toujours plus étroites que les franges dites de diffraction.

Supposons a très petit vis-à-vis de b . On voit dans la frange centrale de diffraction, qui est deux fois plus large que les autres, le système serré des franges d'interférence. Elles existent naturellement au delà, mais elles sont moins faciles à distinguer qu'au centre du phénomène.

Tel est précisément l'aspect du phénomène obtenu avec les fentes d'Young (Cours de Mathématiques, § 165 et sq.).

Le système d'interférence est fourni par la condition :

$$\beta = \frac{p\lambda}{a+b} - \alpha = \frac{p\lambda}{l} - \alpha,$$

où $l = a + b$ est la distance des milieux des deux fentes. Projétons avec une lentille de distance focale d ; la distance des *maximums d'interférence* au centre du phénomène est :

$$\Delta x = (\beta_{p+1} - \beta_p) d = \frac{\lambda d}{l}.$$

C'est précisément la formule donnée dans le Cours de Mathématiques (voir aussi § 214).

Les franges sont équidistantes; leur écartement Δx est proportionnel à la longueur d'onde et en raison inverse de la distance des milieux des fentes.

Si les fentes sont extrêmement étroites, les franges de diffraction sont si larges qu'elles sortent du champ et disparaissent absolument.

292. **Franges de deux fentes dont l'une est recouverte d'une lame qui impose une différence de phase Δ . Franges de Talbot.** — Nous supposons, ce qui est le cas habituel, que les fentes sont au contact : $b = 0$. La différence de phase entre deux points correspondants de deux fentes est :

$$\mu a + \Delta = \frac{2\pi a}{\lambda} (\sin \alpha + \sin \beta) + \Delta.$$

Les formules générales démontrées plus haut donnent pour l'intensité :

$$I^2 = 4a^2 \frac{\sin^2 \frac{\mu a}{2}}{\left(\frac{\mu a}{2}\right)^2} \cos^2 \frac{\mu a + \Delta}{2}.$$

Pour simplifier la discussion, faisons $\alpha = 0$ et β petit; il reste :

$$I^2 = 4a^2 \frac{\sin^2 \frac{\pi \beta a}{\lambda}}{\left(\frac{\pi \beta a}{\lambda}\right)^2} \cos^2 \left(\frac{\pi \beta a}{\lambda} + \frac{\Delta}{2} \right). \quad (2)$$

En lumière monochromatique, les minimums nuls de diffraction sont aux mêmes places que si la lame n'existait pas. Mais les minimums d'interférence sont déplacés : les franges sont *dissymétriques* par rapport au centre du phénomène.

En lumière blanche, nous ne verrons généralement que les franges de diffraction ; les franges d'interférence sont rejetées hors du champ, pour peu que la lame impose un retard supérieur à quelques longueurs d'onde.

Mais regardons le phénomène à travers un prisme : nous retombons sur la disposition représentée par la figure 155. Le prisme dévie les systèmes de franges correspondant aux diverses radiations, d'angles qui dépendent de la loi reliant ses indices aux longueurs d'onde. On conçoit donc que, conformément à l'expérience, la production de franges nettes nécessite une relation entre le sens dans lequel le retard de la lame rend les franges dissymétriques, et le sens dans lequel le prisme fait glisser les uns par rapport aux autres les systèmes de franges qui correspondent aux diverses radiations.

Indépendamment de ce premier fait, il existe nécessairement, pour le maximum de netteté des franges, une relation entre la dispersion et la largeur $2a$ de la fente à moitié recouverte par la lame.

Donnons une idée de la marche du calcul.

Considérons un point P du plan focal principal de la lentille de projection (plan du réticule de la lunette d'observation) ; à ce point correspond, *en avant* de la lentille et par conséquent à l'émergence du prisme, une certaine direction que nous désignerons par γ . A cette direction correspond *en avant* du prisme pour chaque λ une direction β . Nous pouvons poser :

$$\beta = \gamma - f(\lambda).$$

La fonction f dépend de la loi de dispersion. Or, pour un γ donné, c'est-à-dire pour un point P du plan d'observation, I^2 est une fonction de λ et de β reliés par l'équation (2). Nous pouvons donc considérer I^2 comme une fonction de λ . L'intensité reçue au point P est donc :

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} I^2 d\lambda = \varphi(\gamma) ;$$

λ_1 et λ_2 sont les longueurs d'onde entre lesquelles l'intensité visible n'est pas nulle.

Les calculs sont très compliqués et sans grand intérêt. Voici le résultat.

On peut mesurer la dispersion par l'angle ψ que sous-tend une frange du spectre cannelé, angle qui résulte de la théorie du § 253. Il est clair que la lame restant invariable, cet angle augmente à mesure que le pouvoir dispersif du spectroscopie augmente.

D'autre part, la formule (2) donne pour la distance de deux

minimums nuls (qu'il s'agisse du facteur en sinus ou du facteur en cosinus) :

$$\Delta\beta = \frac{\lambda}{a}.$$

Pour que les franges soient le plus nettes possible, il faut évidemment qu'on ait :

$$\psi = \Delta\beta, \quad a\psi = \lambda.$$

ψ est exprimé en radians, a et λ avec la même unité de longueur. L'expérience vérifie ces prévisions (Mascart).

293. Réseaux. — Ce que nous avons dit des minimums nuls et des maximums d'interférence s'applique quel que soit le nombre des fentes. Supposons un très grand nombre n de fentes très fines, parallèles, égales et également espacées. Il y en a par exemple m par millimètre :

$$m(a + b) = 1.$$

Il s'agit de montrer qu'il n'existe de lumière sensible que dans les directions pour lesquelles il y a concordance entre les vibrations résultantes envoyées respectivement par chaque fente.

Ces directions satisfont à la condition (maximums dits d'interférence) :

$$(a + b)(\sin \beta + \sin \alpha) = p\lambda, \quad \mu(a + b) = 2\pi p.$$

Le second facteur en sinus de la formule (1) (§ 289) est alors égal à n^2 .

Montrons d'abord qu'il suffit de se déplacer *en direction* extrêmement peu à partir des maximums principaux, pour que la lumière cesse d'être appréciable.

Soit β la direction du $p^{\text{ième}}$ maximum principal. La différence de marche entre les vibrations *résultantes* de deux fentes consécutives est $p\lambda$; la différence de marche entre les vibrations résultantes des *fentes extrêmes* est donc : $(n - 1)p\lambda$.

Pour la direction du $(p + 1)^{\text{ième}}$ maximum principal, cette différence devient :

$$(n - 1)(p + 1)\lambda = (n - 1)p\lambda + (n - 1)\lambda;$$

elle varie donc de $(n - 1)\lambda$ d'un maximum au suivant.

Ceci posé, considérons une direction voisine de β définie par l'angle $\beta + \beta'$, et, pour simplifier l'écriture, supposons les angles α et β petits, ce qui, du reste, est toujours le cas; la différence de marche entre les vibrations résultantes de deux fentes consécutives est :

$$(a + b)(\alpha + \beta + \beta') = (p + \varepsilon)\lambda.$$

La différence de marche entre les vibrations envoyées par les *fentes extrêmes* est donc :

$$(n - 1)p\lambda + (n - 1)\varepsilon\lambda.$$

Nous avons à composer n vibrations dont les phases varient en progression arithmétique, les phases des vibrations extrêmes différant de $2\pi(n-1)\varepsilon$. Il résulte de la règle de Fresnel que si $n\varepsilon$ est un nombre entier, la résultante est nulle. Les vibrations à composer sont alors représentées par des vecteurs faisant les uns avec les autres le même angle et s'étalant *sans superposition* sur un nombre entier de circonférences.

Entre deux maximums principaux, ε varie de 0 à 1, en vertu de la remarque précédemment faite. La quantité $n\varepsilon$ devient donc $n-1$ fois un nombre entier, puisqu'il faut excepter les valeurs limites 0 et 1 de ε .

Nous arrivons ainsi à montrer, entre les maximums principaux, l'existence de $n-1$ minimums nuls, nécessairement séparés par $n-2$ maximums secondaires. Si par exemple $n=2$, il n'y a pas de maximum secondaire.

Déterminons la position du premier minimum nul.

$$\text{Il faut poser : } \quad n\varepsilon = 1, \quad \beta' = \frac{m\lambda}{n}.$$

Pour fixer les idées, soit un réseau tracé sur une largeur Λ de 30 millimètres; $n : m = 30$, puisque n est le nombre total des traits et m le nombre des traits au millimètre. On a donc :

$$\beta' = \lambda : 30 = 0,000389 : 30 = 0,0000196 = 4'',$$

environ pour la raie D.

En résumé, les réseaux fournissent de la fente du spectroscopie, supposée monochromatique, l'image ordinaire correspondant à la condition :

$$p = 0, \quad \alpha = -\beta.$$

De part et d'autre de cette image, se trouve une série d'images appelées *maximums principaux*, qui satisfont à la condition :

$$\sin \alpha + \sin \beta = pm\lambda.$$

m est le nombre de traits au millimètre;

λ la longueur d'onde en millimètres;

p le numéro d'ordre de l'image.

Si les angles sont petits, on a simplement :

$$\alpha + \beta = pm\lambda.$$

Entre les maximums principaux existent $n-2$ maximums secondaires et par conséquent $n-1$ minimums nuls. Les maximums secondaires sont très rapprochés, généralement invisibles; leur existence influe cependant sur le *pouvoir séparateur* (voir plus loin).

Enfin, il faut tenir compte du premier facteur en sinus de la formule (1) du § 289, qui fournit des *maximums et minimums dits de diffraction*. Les maximums sont tellement étalés, qu'ils n'interviennent

pas pratiquement; mais les minimums peuvent être nuls et par conséquent supprimer certains maximums de l'autre système.

En lumière blanche, nous obtiendrons donc des spectres de divers ordres (Cours de Première, § 260 et sq.).

Certains spectres disparaissent quand un maximum principal d'interférence coïncide avec un minimum nul de diffraction. Si par exemple $a = b$, les spectres d'ordre pair sont supprimés. Il n'est donc pas possible de donner *a priori*, d'une manière générale, la loi de décroissance des spectres des différents ordres. Leur intensité peut varier périodiquement.

294. **Maximums secondaires.** — Le raisonnement précédent, dont on se contente ordinairement, est très insuffisant; il prouve bien qu'il existe un minimum nul tout près d'un maximum principal. Mais il n'apprend rien sur l'intensité des nombreux maximums secondaires qui existent entre les maximums principaux. Or il va de soi que s'ils ont de l'importance, le maximum principal de la radiation $\lambda + d\lambda$ se noiera plus ou moins dans le maximum secondaire de la radiation λ . L'étude du *pouvoir séparateur* implique donc l'étude des maximums secondaires.

Discutons le problème en partant de la formule (1) du § 289. Le premier facteur en sinus est trop lentement variable pour que ses variations interviennent au voisinage d'une direction donnée. Considérons donc les variations du second que nous mettrons sous la

$$\text{forme :} \quad A^2 = \sin^2 nu ; \sin^2 u. \quad (1)$$

Il passe par des maximums pour des angles u satisfaisant à la condition :

$$\text{tg } nu = n \text{ tg } u. \quad (2)$$

L'intensité est alors :

$$A^2 = \frac{n^2}{1 + (n^2 - 1) \sin^2 u}.$$

Pour $u = \pi p$ (maximums principaux), on a :

$$A_0^2 = \frac{\sin^2 nu}{\sin^2 u} = n^2.$$

$$\frac{A^2}{A_0^2} = \frac{1}{1 + (n^2 - 1) \sin^2 u} = \frac{1}{1 + n^2 \sin^2 u}, \quad (3)$$

car n est généralement grand.

Il est facile de voir que le premier angle très petit u qui satisfait à l'équation (2), est compris entre π/n et $3\pi/2n$.

En effet, $n \text{ tg } u$ est toujours positif et fini entre ces limites.

Pour la première limite : $\text{tg } nu = 0$.

Pour la seconde : $\text{tg } nu = \infty$.

Nous sommes donc assurés que les premières racines sont très petites. Nous n'avons d'ailleurs à nous inquiéter que de celles-là; car si u n'est pas très petit, il est clair que le rapport $A^2 : A_0^2$ est négligeable, en raison de la grandeur de n .

Au contraire, il y a doute pour les petites valeurs de u .

Vu la petitesse de u , nous pouvons remplacer la condition :

$$\operatorname{tg} nu = n \operatorname{tg} u, \text{ par la condition : } \operatorname{tg} nu = nu,$$

dont nous connaissons déjà les racines : $y = nu$ (§ 284).

Nous savons qu'elles coïncident à très peu près avec la série :

$$y : \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \dots$$

qui correspond à des rapports d'intensités [formule (3)] en raison inverse de :

$$\frac{9\pi^2}{4}, \frac{25\pi^2}{4}, \frac{49\pi^2}{4}, \dots$$

A partir du premier maximum secondaire, les intensités décroissent donc en raison inverse des nombres :

$$3^2, 5^2, 7^2, \dots$$

L'intensité du premier maximum secondaire est les 47 millièmes du maximum principal voisin.

Ces résultats sont absolument indépendants des nombres m et n caractéristiques du réseau. Si le premier maximum secondaire est généralement invisible, ce n'est donc pas faute d'intensité; c'est à cause de sa proximité avec le maximum principal voisin.

Du reste, les maximums secondaires sont visibles quand n n'est pas grand; mais pour des réseaux ordinaires, c'est-à-dire pour des valeurs de n de l'ordre de 10 000, ils sont extrêmement rapprochés.

Leur existence ne fait qu'élargir un peu les maximums principaux.

295. Pouvoir séparateur (Rayleigh). — On demande à quelle condition sont séparés par le système *réseau lunette* les maximums principaux d'ordre p qui correspondent à des radiations de longueurs d'onde λ et $\lambda + d\lambda$.

$\Lambda = n : m$, est la largeur du réseau, ou la distance des traits extrêmes.

Le faisceau incident sur le réseau ayant une direction α indépendante de la longueur d'onde, l'écart angulaire $d\beta$ des maximums principaux d'ordre p est (en supposant petit l'angle β) :

$$d\beta = mp d\lambda = \frac{np}{\Lambda} d\lambda.$$

La largeur du faisceau est à peu près égale à la largeur du

réseau. Nous retombons donc sur le problème traité aux §§ 287 et 288.

Pour la séparation, il faut qu'on ait :

$$d\beta > \frac{\lambda}{\Lambda}, \quad \frac{np}{\Lambda} d\lambda > \frac{\lambda}{\Lambda}, \quad \frac{d\lambda}{\lambda} \geq \frac{1}{pn} = \frac{m}{p\Lambda};$$

n est le nombre total de traits, p le numéro d'ordre du spectre.

Le pouvoir séparateur d'un réseau (pouvoir mesuré par l'inverse de $d\lambda$), est donc proportionnel à l'ordre du spectre employé.

Pour un nombre donné m de traits au millimètre, il est proportionnel à la largeur Λ .

Comparons la limite ainsi obtenue avec l'écart angulaire d'un maximum principal au minimum secondaire voisin pour une même radiation λ . Nous avons démontré ci-dessus (§ 293) qu'il est égal à :

$$\beta' = \frac{m\lambda}{n} = \frac{\lambda}{\Lambda}.$$

La définition choisie pour le pouvoir séparateur (§ 287) revient donc à dire que deux radiations λ et $\lambda + d\lambda$ sont résolues par un réseau quand le maximum principal de l'une coïncide avec le premier minimum nul de l'autre. On ne sépare donc pas les radiations λ et $\lambda + d\lambda$, sans séparer les maximums secondaires de s radiations λ ou de s radiations $\lambda + d\lambda$ considérées isolément.

Il est clair que la condition précédente est nécessaire, mais généralement insuffisante.

COMPARAISON D'UN PRISME ET D'UN RÉSEAU. — Nous trouvons donc comme limites (§ 288) :

pour un réseau : $\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{1}{pn}$; pour un prisme : $\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda^3}{2Be}$.

A égalité de pouvoir séparateur, on a :

$$e = \frac{pn\lambda^3}{2B}.$$

Comparons un réseau de 3000 traits, et le spectre de 4^e ordre avec le prisme de verre étudié au § 288. Pour la raie D on a :

$$e = \frac{12 \cdot 10^3 \cdot \lambda^3}{2 \cdot 10^{-10}} = 6 \cdot 10^{13} \cdot \lambda^3.$$

$$\lambda^3 = \overline{5,889^3} \cdot 10^{-15} = 2,04 \cdot 10^{-13}, \quad e = 12 \text{ centimètres environ.}$$

Telle est l'épaisseur du verre qui devrait être traversée.

296. Mesure des longueurs d'onde. Minimum de déviation. — Les réseaux servent à analyser la lumière.

Le problème se présente sous deux aspects :

- 1^o séparer les radiations de diverses longueurs d'onde ;
- 2^o déterminer en valeur absolue ces longueurs d'onde.

Occupons-nous du second problème. Soit λ_1 et λ_2 les longueurs d'onde :

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\sin \alpha + \sin \beta_1}{\sin \alpha + \sin \beta_2} = \frac{\alpha + \beta_1}{\alpha + \beta_2},$$

si les angles sont petits. Arrangeons-nous de manière que α soit nul :

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2}.$$

Cette équation permet *sans mesures absolues* de comparer les longueurs d'onde à l'une d'entre elles prise comme étalon.

La mesure absolue implique la connaissance du nombre m de traits par unité de largeur du réseau. On compte quel est le nombre de traits entre deux traits, dont on mesure la distance absolue en faisant glisser le réseau sous un microscope à l'aide d'une vis micrométrique dont on a comparé le pas au mètre étalon.

Malheureusement il est difficile de mesurer α ou de le rendre nul. On tourne la difficulté.

On ne s'astreint pas à employer une incidence normale ($\alpha = 0$), grâce à la propriété des réseaux de produire un minimum de déviation pour une incidence α convenable.

La déviation est : $D = \alpha + \beta$; écrivons que D est minimum.
 $\sin(D - \alpha) + \sin \alpha = mp\lambda$; $\cos(D - \alpha)(dD - d\alpha) + \cos \alpha d\alpha = 0$.

La condition de minimum est :

$$\cos(D - \alpha) = \cos \alpha, \quad \alpha = D - \alpha = \beta;$$

le réseau est alors bissecteur de l'angle du faisceau incident et du faisceau diffracté. On a :

$$\lambda = \frac{2}{mp} \sin \frac{D}{2}.$$

En définitive, la méthode consiste à chercher le minimum de déviation D de la radiation λ à mesurer, dans un spectre d'ordre p . Les longueurs d'onde sont entre elles comme $\sin \frac{D}{2}$.

On opère par cette méthode même dans le spectre *solaire* ultraviolet : les réglages se font automatiquement de proche en proche.

Amenons au minimum de déviation une raie *visible* située dans le violet ; soit alors D la déviation minima. Tournons le réseau d'un petit angle φ et la lunette (au foyer principal de laquelle se trouve une plaque photographique) de l'angle 2φ . La condition $\alpha = \beta$, reste satisfaite. La raie, *qui est maintenant sur le réticule*, est au minimum de déviation ; sa déviation est $D + 2\varphi$. En plaçant la plaque tout près du réticule, de manière à photographier l'ombre de celui-ci, on peut déterminer ainsi de proche en proche les longueurs d'onde de toutes les raies invisibles. On s'arrange de manière que l'angle 2φ choisi soit inférieur au champ de la lunette : les

diverses photographies obtenues ont alors des parties communes qui permettent de les raccorder (Mascart).

297. Focale des réseaux. — Si les traits d'un réseau sont équidistants et si la lumière incidente forme un faisceau parallèle, les foyers (c'est-à-dire les lieux de concordance des phases) sont à l'infini et dans les directions données par la théorie précédente.

Il n'en est plus ainsi si les traits B, C, D, E, ..., ne sont pas équidistants (le lecteur fera la figure), si par exemple leurs distances à une origine O sont données par la formule :

$$x = x_0 + Pm - Qm^2; \quad (1)$$

P et Q sont des constantes positives; les traits du réseau correspondent aux valeurs entières de m.

Montrons qu'il existe des droites focales à distance finie. Pour simplifier les calculs, admettons que la lumière incidente est un faisceau de rayons parallèles normal au réseau.

Pour que la droite A' de coordonnées $x = 0$, $y = b$, soit une droite focale, il faut que les chemins $\overline{A'B}$, $\overline{A'C}$, $\overline{A'D}$, ... diffèrent respectivement de λ .

Soit x la distance au point O du $m + 1^{\text{ième}}$ trait; nous devons écrire :

$$\sqrt{x^2 + b^2} = \sqrt{x_0^2 + b^2} + m\lambda.$$

Développons en série et conservons les termes de même ordre que

dans (1) :

$$x = x_0 + \frac{\sqrt{x_0^2 + b^2}}{x_0} m\lambda - \frac{b^2}{2x_0^3} m^2\lambda^2. \quad (2)$$

Identifions (1) et (2) :

$$P = \frac{\sqrt{x_0^2 + b^2}}{x_0} \lambda, \quad Q = \frac{b^2\lambda^2}{2x_0^3},$$

$$x_0 = \frac{P^2 - \lambda^2}{2Q}, \quad b = \frac{\sqrt{(P^2 - \lambda^2)^3}}{2\lambda Q}.$$

Ces formules définissent la position de la focale par ses coordonnées x_0 et b par rapport à la partie utile du réseau.

Si $Q = 0$, $x_0 = b = \infty$, comme on pouvait le prévoir ;

$$\sin \beta = \text{tg } \beta = \beta = \frac{x_0}{b} = \frac{\lambda}{\sqrt{P^2 - \lambda^2}} \leftarrow \frac{\lambda}{P},$$

formule connue, puisque P est la distance des points correspondants de deux traits consécutifs.

La distance du réseau à la focale est généralement :

$$\sqrt{x_0^2 + b^2} = \frac{P}{2Q} \frac{P^2 - \lambda^2}{\lambda}.$$

298. Phénomènes analogues aux précédents obtenus par réflexion. — On obtient des franges identiques à celles que fournit

une fente en remplaçant la fente par une bande réfléchissante à bords parallèles. On obtient des franges identiques à celles que fournissent deux fentes parallèles (§ 290) ou un réseau (§ 293), en remplaçant les fentes par deux bandes égales, réfléchissantes, à bords parallèles, ou le réseau par une série de traits parallèles, équidistants, tracés sur une surface réfléchissante. De même que dans le réseau par transmission tracé sur verre, les traits sont opaques par rapport aux parties non touchées par le diamant, de même les traits

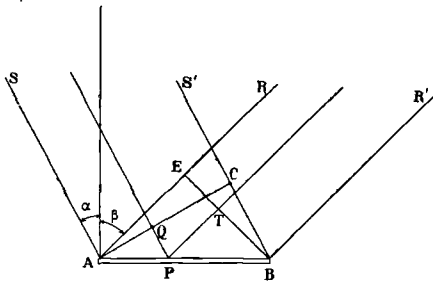


Fig. 178.

cessent de réfléchir ou de diffracter régulièrement la lumière dans le cas du réseau par réflexion.

Je vais établir sur le cas le plus simple l'identité des phénomènes et les formules à appliquer.

Soit AB la bande réfléchissante : les rayons incidents sont concordants sur le plan AC ; calculons les différences

de marche sur le plan BE . Posons : $\overline{AP} = x$, $\overline{AB} = a$.

A partir du plan AC , le rayon qui passe en A doit parcourir le chemin $\overline{AE} = a \sin \beta$; le rayon qui passe en C doit parcourir $\overline{CB} = a \sin \alpha$. La différence de marche est donc : $a(\sin \alpha - \sin \beta)$.

Nous trouverions, en poussant les calculs :

1° un maximum maximorum pour $\alpha = \beta$; c'est la direction de réflexion régulière qui joue ici le rôle de la direction de transmission régulière dans les phénomènes du § 284 ;

2° des minimums nuls pour :

$$a(\sin \alpha - \sin \beta) = k\lambda,$$

où k est un nombre entier positif ou négatif ; la valeur $k = 0$ est réservée ;

3° des maximums qui, sauf le premier, séparent très approximativement les minimums nuls ; ils correspondent à peu près à la condi-

tion : $a(\sin \alpha - \sin \beta) = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}$;

la valeur $k = 0$ est réservée.

On traiterait de même pour la réflexion les autres cas étudiés pour la transmission.

299. Réseaux par réflexion tracés sur une surface courbe.

— Les réseaux par transmission ont le grave inconvénient que la substance sur laquelle ils sont tracés est absorbante, opaque même pour certaines radiations. Les réseaux plans par réflexion n'ont pas

ce défaut ; mais pour obtenir des images, on doit leur adjoindre des lentilles qui sont absorbantes. On peut heureusement construire des réseaux en traçant les traits sur la surface réfléchissante d'un miroir concave métallique ; l'appareil spectroscopique est réduit au réseau lui-même.

Voici les principes de la théorie des réseaux courbes :

1° un faisceau conique d'ouverture très petite émis par un point lumineux S est assimilable à un mince faisceau cylindrique ;

2° un réseau tracé sur une surface courbe est assimilable à une juxtaposition de petits réseaux plans.

Cherchons à quelle condition les faisceaux émis par le point S donnent un maximum au point S'. La condition de maximum pour le petit réseau qui se trouve en O et admet ON comme normale est :

$$\sin \alpha - \sin \beta = pm\lambda.$$

Pour le réseau voisin, elle est :

$$\sin \alpha' - \sin \beta' = pm\lambda.$$

Pour que les résultantes au point S diffractées par tous les réseaux élémentaires soient concordantes, il faut donc que la surface courbe AB soit telle que :

$$\sin \alpha - \sin \beta = C^{te}.$$

La condition précédente est évidemment réalisée si l'on a :

$$\alpha = C^{te}, \quad \beta = C^{te}.$$

Il en est très exactement ainsi, si les traits sont tracés sur un miroir concave M, pourvu que les points S et S' soient sur une circonférence de centre C' ayant pour diamètre un des rayons OC du miroir de centre C.

Le plan SS' doit être normal aux traits du réseau.

En effet, les sphères de centre C et C' sont tangentes en O ; comme les dimensions du miroir sont très petites devant son rayon (les traits sont tracés sur 10 centimètres au maximum, et le rayon OC est de quelques mètres), la distance du miroir à la sphère de centre C' est extrêmement petite.

Ceci posé, joignons le point S à un point O' quelconque du réseau et menons la normale O'C. Le point O' pouvant être aussi bien considéré comme appartenant à la sphère de centre C', l'angle α a pour mesure la moitié de l'arc constant SC ; il est donc constant où que se trouve le point O'.

De même l'angle β est constant. CQFD.

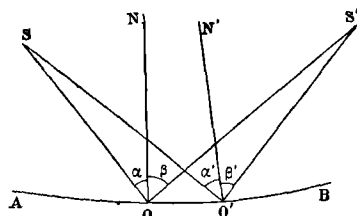


Fig. 179.

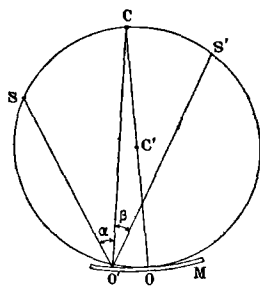


Fig. 180.

Il résulte de cette proposition un réglage particulièrement commode, puisqu'il suffit de maintenir mécaniquement constantes les distances $\overline{C'S}$ et $\overline{C'S'}$ avec des tiges ayant pour longueur la moitié du rayon \overline{OC} . Le maximum maximorum correspond à la condition de réflexion régulière $\alpha = \beta$; comme cette condition est satisfaite simultanément pour tous les points du miroir, S' est alors le conjugué de S au sens ordinaire du mot.

Voici une disposition mécanique plus simple. CO est une tige de longueur égale au rayon de courbure du réseau R qui lui est fixé

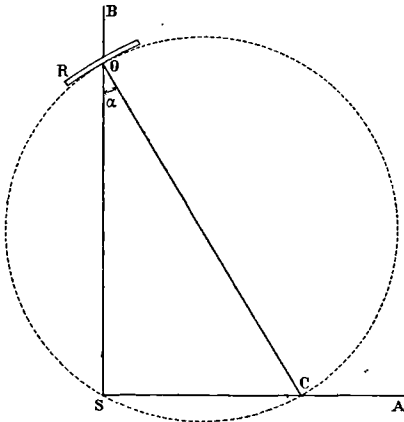


Fig. 181.

normalement. Ses extrémités C (centre de courbure du réseau) et O (centre de figure du réseau) glissent sur deux droites rectangulaires fixes SA et SB . Les points S et C font toujours partie du cercle décrit sur CO comme diamètre : ils sont donc conjugués par rapport au réseau. L'angle β est toujours nul ; on fait varier α en déplaçant la tige CO sur ses glissières : α est donné par son sinus proportionnel à la longueur SC . Il y a un maximum en C pour les radiations issues de S , telles que le nombre m de traits au milli-

mètre, l'ordre p du spectre, la longueur d'onde λ , soient reliés à l'angle α par l'équation :

$$pm\lambda = \sin \alpha.$$

On peut fixer sur le prolongement de la tige CO un oculaire visant en C , ou tout autre appareil d'observation (bolomètre, pile thermo-électrique, ...).

CHAPITRE IX

PRINCIPE D'HUYGHENS. FRANGES A DISTANCE FINIE

300. **Énoncé du principe d'Huyghens. Application à une onde sphérique.** — Le principe d'Huyghens consiste à admettre qu'un point où se croisent les rayons, joue le rôle d'une source de lumière émettant dans toutes les directions. Nous l'avons déjà appliqué; nous allons le faire encore, mais dans des conditions plus complexes.

Auparavant, il convient d'insister sur la différence profonde entre la construction d'Huyghens, qui donne les ondes successives à partir de l'une d'entre elles comme enveloppes d'ondes élémentaires (§§ 46 et 47), et le principe *dit* d'Huyghens. Géométriquement parlant, c'est la même chose. Physiquement parlant, il y a un abîme.

Le principe d'Huyghens, *complété par le principe des interférences*, est l'hypothèse physique qui légitime la construction d'Huyghens dans la théorie des ondulations; mais ses conséquences sont bien plus générales. Il nous explique pourquoi, dans le cas d'ondes indéfinies, le mouvement est localisé sur l'onde; mais il permet de plus d'expliquer les phénomènes de diffraction dans le cas d'ondes limitées.

Resterait à savoir si le *principe* appartient à Huyghens, ou à Young, ou à Fresnel; mais cet ordre de considérations est en dehors du cadre de notre ouvrage.

Soit S le point lumineux; puisque les rayons se propagent dans un milieu isotrope, les vibrations sont concordantes sur des sphères de centre S : ce sont *les surfaces d'onde*.

Dans les parties *efficaces* de ces ondes (nous verrons ce qu'il faut entendre par là au § 311), les vibrations sont parallèles et de même amplitude.

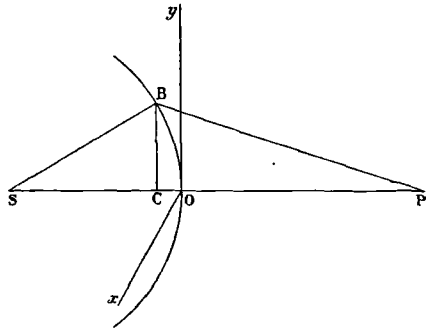


Fig. 182.

Limitons par un écran une portion de la surface d'onde : le problème consiste à chercher quelle est la lumière reçue par un point P quelconque situé au delà de l'écran.

Menons la droite POS ; le point O s'appelle le *pôle* du point P.

Calculons les chemins que les vibrations ont à parcourir pour aller d'un point B quelconque de l'onde (situé à une distance $s = \overline{OB}$, du pôle), jusqu'au point P. Menons dans le plan tangent à l'onde au pôle O, deux droites rectangulaires qui seront les axes des x et des y .

Posons : $\overline{SO} = a$, $\overline{OP} = b$.

Pourvu que le point B soit assez rapproché de O pour qu'on puisse écrire : $\overline{BC} = \overline{BO} = s$, on trouve aisément :

$$\overline{BS} = \sqrt{a^2 + s^2}, \quad \overline{BP} = \sqrt{b^2 + s^2}, \quad \overline{SB} + \overline{BP} = a + b + s^2 \frac{a+b}{2ab};$$

$$c = \overline{BP} = b + s^2 \frac{a+b}{2ab}.$$

Telle est la valeur du chemin géométrique.

Le chemin optique est plus court de $\lambda/4$. Nous savons en effet (§ 224) que quand un mouvement émane d'un point, la vitesse n'est pas constante ; elle décroît rapidement au voisinage de la source, de sorte qu'à distance suffisante tout se passe comme si le chemin optique était plus court d'un quart de longueur d'onde. Par rapport au point B, le retard est donc¹ :

$$b + s^2 \frac{a+b}{2ab} - \frac{\lambda}{4}.$$

Nous supposons pour l'instant que l'amplitude émise est indépendante de la loi d'obliquité : c'est évidemment inexact ; nous reviendrons sur cette hypothèse quand besoin sera.

Nous choisirons le facteur de décroissance en fonction de la distance de manière à retrouver certains résultats évidents *a priori*. La loi en raison inverse du carré des distances pour les intensités implique une loi en raison inverse de la distance pour les amplitudes. Le mouvement se propage en deux fois : d'abord de S à B, d'où le facteur de réduction $1 : a$; ensuite de B à P, d'où le nouveau facteur de réduction $1 : b$.

Il faut donc introduire le facteur $1 : ab$.

Il peut exister un facteur qui dépend de la longueur d'onde ; nous admettrons qu'il est en raison inverse de λ .

Enfin nous admettrons que l'amplitude de la vibration émise est proportionnelle à l'aire $d\sigma$ de l'élément qui émet.

¹ D'après le même principe, quand nous calculons le retard par rapport à la vibration du point source S, nous devrions diminuer le chemin de $\lambda/4$; mais ce serait inutilement compliquer l'écriture, puisque cette avance intervient dans tous les phénomènes.

Ces hypothèses réunies fournissent l'expression générale suivante de l'amplitude :

$$\frac{d\sigma}{ab\lambda} \sin \left[\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} \left(a + b + s^2 \frac{a+b}{2ab} \right) + \frac{\pi}{2} \right] = \frac{1}{ab\lambda} M d\sigma;$$

sin ωt représente à un facteur près l'amplitude de la vibration au point S au même instant.

301. Solution générale du problème. — Il est facile d'écrire l'intégrale qui résout généralement le problème posé. Toute la difficulté réside dans le calcul numérique de cette intégrale.

L'amplitude a pour expression :

$$A \sin(\omega t - \alpha) = \frac{1}{ab\lambda} \iint M d\sigma, \quad (1)$$

l'intégrale étant étendue à la surface de la sphère laissée découverte par l'écran.

Nous pouvons simplifier l'écriture en changeant l'origine des temps. Retrançons la phase constante :

$$-\frac{2\pi}{\lambda} (a + b) + \frac{\pi}{2},$$

l'intégrale devient :

$$\frac{1}{ab\lambda} \iint \sin \left(\omega t - \pi s^2 \frac{a+b}{ab\lambda} \right) d\sigma.$$

Posons pour simplifier :

$$v^2 = 2 \frac{a+b}{ab\lambda} s^2, \quad P = \iint \cos \frac{\pi v^2}{2} d\sigma, \quad Q = \iint \sin \frac{\pi v^2}{2} d\sigma.$$

Développons les deux membres de (1) et identifions :

$$A^2 = \frac{P^2 + Q^2}{a^2 b^2 \lambda^2}, \quad \text{tg} \left[\alpha + \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{\lambda} (a + b) \right] = \frac{Q}{P};$$

formules qui donnent l'intensité et la phase de la vibration résultante au point P. Toute la difficulté est dans le calcul.

302. Écran percé d'un trou circulaire dont le centre est au point O. Phénomènes sur la droite SO. — Soit R le rayon du trou ; divisons la surface en anneaux de rayon s et d'épaisseur ds .

$$d\sigma = d(\pi s^2) = \pi d(s^2) = \frac{\pi ab\lambda}{2(a+b)} d(v^2),$$

$$P = \frac{ab\lambda}{a+b} \int \cos \frac{\pi v^2}{2} d \frac{\pi v^2}{2} = \frac{ab\lambda}{a+b} \sin \frac{\pi v_0^2}{2},$$

$$Q = \frac{ab\lambda}{a+b} \int \sin \frac{\pi v^2}{2} d \frac{\pi v^2}{2} = \frac{ab\lambda}{a+b} \left(1 - \cos \frac{\pi v_0^2}{2} \right),$$

en posant :

$$v_0^2 = 2 \frac{a+b}{ab\lambda} R^2.$$

D'où :

$$A^2 = \frac{P^2 + Q^2}{a^2 b^2 \lambda^2} = \frac{4}{(a+b)^2} \sin^2 \frac{\pi v_0^2}{4}.$$

La différence de marche entre le rayon qui part du point B situé sur le bord du trou, et celui qui part du point O centre du trou, a pour expression :

$$\Delta_0 = \overline{BP} - \overline{OP} = R^2 \frac{a+b}{2ab} = \frac{v_0^2 \lambda}{4}.$$

On a de même :

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \left(\alpha + \frac{\pi}{2} - 2\pi \frac{a+b}{\lambda} \right) &= \left(1 - \cos \frac{\pi}{2} v_0^2 \right) : \sin \frac{\pi}{2} v_0^2 = \operatorname{tg} \frac{\pi v_0^2}{4}, \\ \alpha &= 2\pi \frac{a+b}{\lambda} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi \Delta_0}{\lambda}. \end{aligned}$$

Faisons croître le rayon du trou, a et b restant invariables. L'intensité envoyée en P passe par des maximums et des minimums nuls. Elle est maxima quand le Δ_0 qui correspond au rayon du trou, satisfait aux conditions :

$$\frac{\pi v_0^2}{4} = (2k+1) \frac{\pi}{2}, \quad \Delta_0 = (2k+1) \frac{\lambda}{2}.$$

Elle est nulle pour les valeurs $\Delta_0 = k\lambda$, où k représente la suite des nombres entiers.

On calcule donc aisément les phénomènes *sur la droite SO*. Quand on regarde dans un plan passant par le point P et normal à la droite SO, on aperçoit un système de franges circulaires sur lequel nous reviendrons (§ 312) et dont le centre est, suivant les distances a et b , un maximum, un minimum ou un état intermédiaire.

En lumière blanche le centre présentera toute une série de colorations, suivant les distances a et b .

La phase de la vibration varie elle aussi.

Pour $\Delta_0 = 0$, la phase est :

$$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} (a+b) - \frac{\pi}{2};$$

ce que nous pouvions prévoir, puisque la surface utile de l'onde est réduite à un point, et que, par hypothèse, au chemin géométrique b s'ajoute une avance égale à un quart de longueur d'onde (§ 72).

Pour $\Delta_0 = k \frac{\lambda}{2}$, on trouve :

$$\alpha = 2\pi \frac{a+b}{\lambda} + (k-1) \frac{\pi}{2}.$$

303. **Utilisation de l'onde entière.** — Les calculs précédents perdent toute signification quand on les applique à l'onde entière.

Les intégrales P et Q ne représentent évidemment pas les faits.

Pour des raisons que nous développerons plus loin (§ 305), il faut tenir compte de la décroissance des mouvements envoyés par les parties les plus obliques de l'onde, en introduisant un facteur décroissant. Dans l'ignorance où nous sommes de la forme exacte de ce facteur, choisissons-lui une expression simple (Mascart) :

$$e^{-\frac{\varepsilon \pi v^2}{2}},$$

où ε est un nombre positif très petit.

Intégrons alors entre 0 et ∞ , en nous rappelant que :

$$\int_0^{\infty} e^{-\varepsilon x} \sin x \, dx = \frac{1}{1 + \varepsilon^2}, \quad \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon x} \cos x \, dx = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon^2}.$$

On a donc, puisque ε est petit :

$$P = 0, \quad Q = \frac{ab\lambda}{a + b}, \quad A^2 = \frac{1}{(a + b)^2}.$$

$$\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2} - 2\pi \frac{a + b}{\lambda}\right) = \frac{Q}{P} = \infty, \quad \alpha = 2\pi \frac{a + b}{\lambda}.$$

L'intensité de la lumière au point P est en raison inverse du carré de la distance $a + b$ à la source. Le retard se calcule avec la distance géométrique \overline{PS} du point éclairé P au point lumineux S (§ 300, note).

Ce sont les propositions fondamentales de l'Optique; le fait que nous les retrouvons légitime les hypothèses du § 300.

304. **Emploi des zones.** — On peut établir les mêmes résultats par une méthode *identique au fond*, mais de forme plus concrète.

Du pôle O décrivons sur la sphère des circonférences passant par les points A, A', A'', ... tels que (fig. 183) :

$$\overline{PA} - \overline{PO} = \overline{PA'} - \overline{PA} = \dots = \frac{\lambda}{2}.$$

Les s correspondants satisfont à la condition :

$$s^2 \frac{a + b}{2ab} = k \frac{\lambda}{2}.$$

Les surfaces ainsi tracées découpent sur la sphère des anneaux qu'on appelle *zones* et dont les aires sont égales. L'aire d'une zone a en effet pour expression :

$$\pi(s_k^2 - s_{k-1}^2) = \frac{\pi ab\lambda}{a + b}.$$

Les phases des mouvements envoyés au point P par tous les

points d'une zone diffèrent entre elles d'une quantité inférieure à π . Les vecteurs qu'il faut composer, d'après la règle de Fresnel, pour

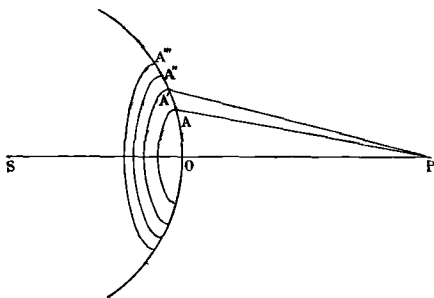


Fig. 183.

obtenir le vecteur résultant, sont tous du même côté d'une droite. Le vecteur résultant est donc plus grand quand on prend toute la zone que quand on en prend une partie seulement.

A supposer que les vibrations soient en tous points de l'onde égales, parallèles et de même phase, les mouvements résultants envoyés séparément par deux zones consécutives

sont égaux et de signes contraires, puisqu'on peut faire correspondre deux par deux des éléments de même surface et dont les phases diffèrent de π . Le mouvement résultant de toutes les vibrations envoyées simultanément par deux zones consécutives est nul.

Les aires correspondant à un même retard ayant même surface, le retard de la résultante envoyée par une zone est égal au retard moyen. Il est donc en phase :

$$\left(\frac{2\pi b}{\lambda} - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi b}{\lambda}, \quad \text{pour la première zone ;}$$

$$\left(\frac{2\pi b}{\lambda} - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{3\pi}{2} = \frac{2\pi b}{\lambda} + \pi, \quad \text{pour la seconde zone ;}$$

et ainsi de suite.

La phase de la vibration envoyée par la $k^{\text{ième}}$ zone est :

$$2\pi \frac{a+b}{\lambda} + (k-1)\pi.$$

La phase de la vibration envoyée par les k premières zones agissant simultanément, est donc :

$$2\pi \frac{a+b}{\lambda} + (k-1) \frac{\pi}{2}.$$

Ces résultats ont déjà été obtenus par la méthode du § 302.

305. Utilisation de l'onde entière.

Appelons : $u_0, u_1, u_2, \dots,$

les amplitudes des vibrations envoyées par les zones successives. Le raisonnement précédent nous apprend que les phases de ces vibrations varient suivant une progression arithmétique dont la raison est π . La résultante due à n zones est donc :

$$u_0 - u_1 + u_2 - \dots \pm u_{n-1}. \quad (1)$$

De l'hypothèse énoncée au milieu du § 304, résulterait la condition :

$$u_0 = u_1 = u_2 = \dots = u_{n-1}.$$

Mais il est certain que les termes successifs vont en décroissant :

1° parce que les différentes zones s'éloignent du point P : cette cause de variation est insignifiante ; si la concavité de l'onde était tournée vers P (§ 307), il en résulterait un *accroissement* des termes successifs ;

2° parce que les sources ponctuelles que le principe d'Huyghens suppose constituer la surface d'onde, n'émettent pas également dans toutes les directions ; il est naturel d'admettre que l'amplitude émise est maxima dans le sens de la normale à l'onde ;

3° *enfin et surtout*, parce que les mouvements des sources, que nous supposons parfaitement synchrones, ne le sont pas absolument (§ 216). Ils le sont d'autant moins dans toute l'étendue d'une zone qu'elle est plus éloignée du pôle O, puisqu'alors ses différents points sont plus distants les uns des autres. Les mouvements des zones assez éloignées du pôle présentent toutes les phases possibles ; *leur résultante est quasiment nulle.*

Admettons donc que les termes de la série (1) décroissent en progression arithmétique. Posons :

$$u_0 = u'_0 + u''_0, \quad u_1 = u'_1 + u''_1, \dots$$

en recoupant chacune des zones en deux parties d'aires égales et en appelant u' et u'' les amplitudes envoyées par ces moitiés.

La série (1) devient :

$$u'_0 + (u''_0 - u'_1 + u'_2) + (u''_2 - u'_3 + u'_4) + \dots$$

Avec une approximation beaucoup plus grande, nous pouvons considérer les parenthèses comme nulles ; d'où cette proposition due à Fresnel : *L'effet d'une onde entière est le même que celui de la première demi-zone.*

306. Vérifications expérimentales. — Montrons d'abord que les zones ont des dimensions d'un ordre de grandeur parfaitement réalisable. Posons : $a = b = 5$ mètres $= 5 \cdot 10^6$ microns. Le rayon \overline{OA} de la première zone est :

$$R_0 = \sqrt{\frac{ab\lambda}{a+b}} = 10^3 \sqrt{2,5\lambda}.$$

Soit $\lambda = 0^{\mu},6$; il vient : $R_0 = 1^{\text{mm}},22$.

Le rayon $\overline{OA'}$ de la seconde zone est $1,22\sqrt{2} = 1^{\text{mm}},72$;

$$\overline{AA'} = 0^{\text{mm}},5.$$

1° Construisons un écran percé d'un trou de rayon $R_0 = 1^{\text{mm}},22$. Installons-le à 5 mètres d'une source ponctuelle et observons l'éclair-

rement en un point P à 5 mètres de l'écran, dans une lumière rouge de longueur d'onde $0^{\mu},6$ environ. L'intensité de la lumière reçue est :

$$A^2 = \frac{4}{(a+b)^2};$$

elle est quadruple de l'intensité reçue quand l'écran n'existe pas. L'expérience est due à Fresnel.

2° Employons un écran percé d'un trou de rayon R quelconque, mais de l'ordre du millimètre. Plaçons-le à une distance fixe a de la source ponctuelle et sensiblement monochromatique S; regardons avec un oculaire positif un plan normal à la droite SO qui passe par la source S et le centre du trou O. Nous obtenons des franges circulaires de centre P. Lorsqu'on déplace l'oculaire de manière à faire varier la distance b du point P au pôle O, on trouve une série de positions pour lesquelles les franges sont à centre noir. L'intensité au centre P est nulle. Les distances b correspondantes satisfont à la condition :

$$\Delta_0 = R^2 \frac{a+b}{2ab} = \frac{R^2}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = k\lambda,$$

où k est un entier quelconque; elles ne sont pas équidistantes. Les positions successives se rapprochent quand b diminue (§ 302).

Entre les minimums nuls, sont des positions du point P pour lesquelles l'intensité est maxima; elle est quadruple de l'intensité reçue quand l'écran n'existe pas, pourvu que le nombre de zones comprises dans le trou reste petit.

En lumière blanche on obtient évidemment des franges irisées qui résultent de la superposition des franges pour les diverses radiations monochromatiques.

Nous reviendrons plus loin sur les anneaux dont il est parlé dans ce paragraphe (§ 312).

307. Expérience d'Arago. — Les expériences précédentes sont plus commodes quand on utilise une onde sphérique *présentant sa concavité vers le point P* placé à une petite distance du centre de l'onde (fig. 184).

Pour réaliser une telle onde sphérique, on reçoit le faisceau conique émis par une source ponctuelle S sur une lentille. Après le passage à travers elle, les rayons convergent au point conjugué S'. Les chemins optiques allant de S à S' sont égaux (§ 218); *donc les sphères décrites de S' comme centre sont des surfaces d'onde.* Le retard est

maintenant :
$$\Delta = \overline{PB} - \overline{PO} = s^2 \frac{a-b}{2ab}.$$

Le point P ne devant jamais s'écarter beaucoup de S', $a-b=d$ restant petit, on a :

$$\Delta = \frac{s^2 d}{2a^2}, \quad s = a \sqrt{\frac{2\Delta}{d}}.$$

Cette disposition agrandit considérablement les zones.

Visons, par exemple, une étoile avec un objectif de 2 mètres de distance focale principale.

Cherchons la valeur de s qui correspond au premier minimum, avec la condition que la distance : $d = \overline{PS'}$, soit alors 1 centimètre. Nous avons :

$$a = 2 \cdot 10^6 \text{ microns}, \quad \Delta = \lambda = 0^{\mu},6; \quad s = 2 \cdot 10^6 \sqrt{1,2 : 10^4} = 22^{\text{mm}}.$$

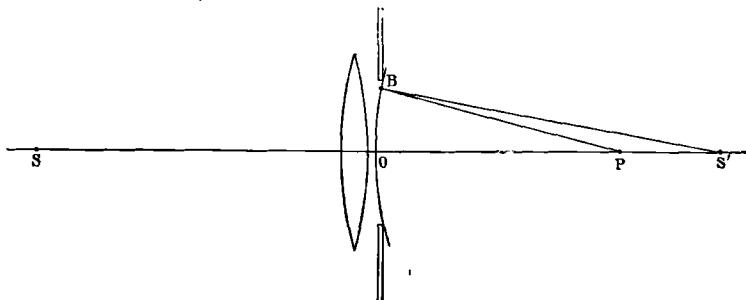


Fig. 184.

Ainsi avec un objectif de 44 millimètres d'ouverture et de 2 mètres de distance focale, nous aurons *sur la droite* SOS' évidemment un maximum de lumière au point S' conjugué de S ; nous aurons le premier minimum nul à 1 centimètre du point S' .

Il est donc aisément observable en déplaçant l'oculaire.

Des déplacements plus étendus montrent une série de maximums et de minimums sur la droite SOS' .

Pour chaque position de l'oculaire on voit un système de franges circulaires. Nous étudierons au § 322 le système très important qui se forme autour de S' dans le plan focal principal.

C'est un cas particulier des franges dont il est parlé au § 312.

308. Réseaux zonés (Soret). — Les expériences précédentes sont infiniment plus aisées et plus frappantes quand on utilise les *réseaux zonés* de Soret.

Voici comment ils sont obtenus.

On trace à l'encre de Chine sur une feuille de papier des cercles dont les rayons sont proportionnels aux racines carrées des nombres entiers successifs :

$$\sqrt{1}, \quad \sqrt{2}, \quad \sqrt{3}, \quad \dots$$

Le premier a par exemple 25 millimètres de rayon; le 100^{ième} a 25 centimètres, le 196^{ième} a 35 centimètres de rayon. On noircit à l'encre les espaces à l'intérieur de la première circonférence et compris entre la seconde et la troisième, la quatrième et la cinquième, ..., et

ainsi de suite; ou encore les espaces compris entre la première et la seconde, la troisième et la quatrième, ..., et ainsi de suite.

On photographie le dessin en réduisant considérablement, par exemple au 25^{ème} ou au centième, de manière que le cercle central ait de 1 millimètre à 1/4 de millimètre de rayon. On choisit des plaques sensibles en verre bien régulier, par exemple celles qui servent aux projections. On obtient des réseaux zonés positifs (cercle central transparent) et négatifs (cercle central opaque). Nous appellerons *axe principal du réseau* la droite perpendiculaire à son plan et passant par son centre.

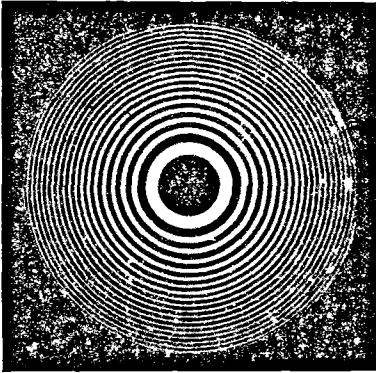


Fig. 185.

Il résulte immédiatement de la théorie précédente qu'un point lumineux A placé sur l'axe à une distance a du réseau admet une série de foyers A' placés sur l'axe.

FOYERS RÉELS. — Écrivons que le point A' est placé au delà du réseau à une distance b telle que le réseau zoné supprime toutes les zones paires (réseau positif) ou toutes les zones impaires (réseau négatif) de l'onde avec laquelle il coïncide sensiblement.

Soit ρ le rayon du premier cercle du réseau; il vient comme condition :

$$\frac{\rho^2}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \frac{\lambda}{2}, \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{\lambda}{\rho^2} = \frac{1}{f_1}. \quad (1)$$

Ainsi les points conjugués A et A' sont reliés par une formule identique à celle des lentilles convergentes; le point F₁, qui est à une distance $f_1 = \rho^2 : \lambda$, du réseau, joue le rôle de foyer principal.

Il est facile de voir que nous aurons une série de foyers. La lumière s'accumule encore en A', si ce point est situé *plus près* du réseau et de manière que chaque anneau libre du réseau contienne trois zones, cinq zones, ..., en général un nombre impair de zones. Nous obtenons une série de distances focales principales :

$$f_k = \frac{\rho^2}{k\lambda},$$

où k est un nombre impair. Les points conjugués sont toujours reliés par l'équation (1).

Les phénomènes sont identiques, qu'on emploie un réseau positif ou un réseau négatif.

Soit par exemple $\rho = 0^{\text{mm}},55 = 550 \mu$; le foyer F_1 le plus éloigné est à une distance de 55 centimètres pour la radiation la plus lumineuse du spectre ($\lambda = 0^{\mu},55$).

FOYERS VIRTUELS. — Nous venons de voir le réseau zoné jouer le rôle d'une lentille convergente à distances focales principales multiples. Montrons qu'il peut aussi jouer le rôle de lentille divergente à distances focales principales multiples : les valeurs numériques des distances focales principales sont les mêmes dans les deux cas.

Soit A' un point situé en avant du réseau à une distance $b < a$. Visons ce point à l'aide d'un instrument quelconque. Nous aurons une accumulation de lumière, au foyer conjugué de A' si le réseau zoné recouvre les zones paires ou les zones impaires correspondant aux points A et A' sur l'onde émise par A qui coïncide avec le réseau. La condition est :

$$\frac{\rho^2}{2} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) = \frac{\lambda}{2}, \quad \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = - \frac{\lambda}{\rho^2} = - \frac{1}{f_1}.$$

C'est la formule des lentilles divergentes. On montrerait, comme précédemment, que les distances focales sont multiples.

Pour obtenir rapidement des réseaux zonés, on photographiera le dessin donné par Wood dans le *Philosophical Magazine*, t. 45, 1898.

On met très facilement en évidence au moins le foyer le plus éloigné. On projette par exemple une fente, car les propriétés des points de l'axe existent encore pour les points voisins. Wood donne une photographie remarquable obtenue en se servant comme objectif d'un réseau zoné.

309. Réseau zoné à phase inversée (Wood). — On peut aller plus loin dans cette voie.

Photographions le dessin, non plus avec une plaque sensible ordinaire, mais avec une plaque recouverte de gélatine transparente sensibilisée par immersion dans une solution de bichromate de potassium. On sait que la lumière insolubilise une telle couche (procédé photographique au charbon).

Le dessin photographié, plongeons la plaque dans l'eau chaude : la gélatine se dissout sur les images des zones paires ou des zones impaires, suivant le dessin utilisé. Supprimons une épaisseur e telle que :

$$2e(n-1) = \lambda,$$

où n est l'indice de réfraction de la gélatine. Nous aurons réalisé un réseau zoné à phase inversée. Toutes les zones sont conservées, mais la phase de la lumière qui a traversé les zones paires (ou les zones impaires suivant les cas) est avancée de $\lambda : 2$; toutes les zones agissent donc pour augmenter l'amplitude aux foyers.

Naturellement il faut que la couche de gélatine soit bien homogène, et qu'on ait réalisé la dissolution d'une épaisseur convenable de gélatine, ce qui est affaire de tâtonnements.

L'expérience confirme de tous points la théorie. Tandis qu'avec des réseaux zonés ordinaires, il est difficile de distinguer plus de deux foyers, on peut aller jusqu'à six avec des réseaux à phase inversée.

310. Franges d'un écran circulaire. Phénomènes sur la droite SO. — Soit R le rayon de l'écran; considérons un point P placé sur la droite SO qui joint la source au centre de l'écran circulaire (fig. 182).

Nous pouvons décomposer ce qui reste de l'onde sphérique en zones à partir du bord de l'écran. Recommencant les raisonnements des §§ 304 et 305, on démontre aisément que le mouvement en P est identique à celui qu'envoie la première demi-zone. Puisque toutes les zones envoient sensiblement le même mouvement, *le mouvement au point P est le même que si l'écran n'existait pas.*

Quand on regarde l'ombre de l'écran, on voit donc toujours des franges circulaires à *centre blanc*. L'expérience est très facile à répéter.

Nous devons présenter ici une remarque importante.

En modifiant les valeurs de a et de b , nous obtenons, avec un trou de rayon R, des franges circulaires au centre desquelles l'intensité varie de 0 à 4. Avec un écran de rayon R, nous obtenons des franges circulaires au centre desquelles l'intensité est toujours 4. Ce résultat est paradoxal, parce qu'on est tenté d'appliquer de travers le principe de la conservation de l'énergie.

L'énergie se conserve dans son ensemble, mais sa répartition est a priori indéterminée.

Soit $A \sin \omega t$ l'amplitude envoyée en un point quelconque par l'onde entière; $A_1 \sin(\omega t - \alpha_1)$ l'amplitude au même point avec le trou, $A_2 \sin(\omega t - \alpha_2)$ l'amplitude avec l'écran complémentaire (§ 327). Nous pouvons seulement poser la condition identique :

$$A_1 \sin(\omega t - \alpha_1) + A_2 \sin(\omega t - \alpha_2) = A \sin \omega t.$$

$$\text{D'où :} \quad A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) = A^2.$$

Considérons le centre des franges; nous savons qu'alors $A_2 = A$; la condition devient :

$$A_1 = -2A \cos(\alpha_2 - \alpha_1).$$

Suivant les valeurs de $\alpha_2 - \alpha_1$, A_1 varie donc entre 0 et $\pm 2A$; corrélativement l'intensité varie entre 0 et $4A^2$. C'est le résultat précédemment obtenu pour le trou.

311. Propagation rectiligne. — Maintenant nous comprendrons mieux la proposition que *la lumière se propage en ligne droite.*

Cela ne signifie pas qu'on peut arrêter toute la lumière envoyée par une source ponctuelle S sur un point P, en plaçant en un point O de la droite SP un écran aussi petit qu'on voudra (fig. 183). Nous venons de voir qu'un écran interposé ne change pas sensiblement la quantité de lumière reçue par le point P.

Dire que la propagation est rectiligne signifie au contraire qu'on ne diminue pas sensiblement l'éclairement au point P, en supprimant à peu près toute l'onde, *sauf les parties voisines du pôle O*. Il suffit de laisser quelques centaines de zones dans les cas les plus défavorables, pour que l'effet de l'onde entière soit exactement le même que l'effet des zones maintenues qui constituent la partie *efficace* de l'onde.

Les dimensions de la partie efficace de l'onde, celle qu'on ne doit pas supprimer, dépendent des positions relatives des points S, P et de l'onde.

312. Système de franges circulaires avec un écran percé d'un trou circulaire. — Dans les paragraphes précédents nous avons calculé les phénomènes sur la droite SO qui passe par la source S et le centre O du trou. Au § 306, en vérifiant les conséquences de la théorie, nous avons observé pour toutes valeurs de a , b , R, un système de franges circulaires entourant la droite SO. Le calcul de ce système est compliqué; il faut toujours traiter l'intégrale du § 301, mais l'obtention des résultats numériques est pénible.

313. Photographie à travers un trou d'aiguille. Chambre noire sans objectif. — L'étude de ces franges circulaires a cependant un véritable intérêt pour la photographie sans objectif. On utilise une chambre noire dans l'une des parois de laquelle on perce un petit trou.

Le problème est de déterminer le diamètre $d = 2r$, du trou O en fonction des distances a à l'objet S et b à la plaque sensible P, de manière que le pouvoir séparateur de l'appareil soit le plus grand possible.

Construisons dans le plan de la plaque sensible le *solide de diffraction*, c'est-à-dire la surface dont les ordonnées au-dessus de la plaque sont en chaque point proportionnelles à l'intensité de la lumière diffractée en ce point. Cette surface est de révolution par rapport à la droite SO qui joint le point S au centre du trou, au moins si cette droite est à peu près normale à la paroi qui est percée.

Pour que le pouvoir séparateur soit le plus grand possible, il faut que le solide de diffraction présente en son centre une sorte de pic très abrupt à partir duquel l'intensité décroît rapidement. On trouve qu'il en est ainsi quand la condition :

$$r^2 \frac{a+b}{2ab} = \frac{\lambda}{4}, \quad (1)$$

est satisfaite. Elle exprime que la différence de marche entre les rayons qui partent du point P et aboutissent soit au centre du trou, soit à sa périphérie, est égale au quart de la longueur d'onde de la lumière pour laquelle la plaque est le plus sensible.

Admettons que λ soit $0^{\mu},4 = 0^{\text{mm}},0004$. Introduisons le diamètre du trou $d = 2r$. La formule devient :

$$d^2 \frac{a+b}{ab} = 0^{\text{mm}},0008, \quad b = \frac{d^2 a}{0,0008 a - d^2}.$$

Elle exprime à quelle distance b en millimètres il faut placer la plaque, quand on connaît le diamètre d du trou et la distance a de l'objet évalués aussi en millimètres. L'objet étant généralement très éloigné, on a simplement :

$$b = \frac{d^2}{0,0008}. \quad (2)$$

Si on choisit $b = 30$ centimètres = 300 millimètres, il faut prendre $d = 0^{\text{mm}},5$ environ.

Le calcul montre que la partie centrale du solide de diffraction a sensiblement la même forme pour la condition :

$$r^2 \frac{a+b}{2ab} = \frac{\lambda}{2}, \quad (1')$$

et les conditions intermédiaires entre (1) et (1'). Il y a donc une assez grande tolérance.

La formule (1') donne pour un objet suffisamment éloigné :

$$b = \frac{d^2}{0,0016}. \quad (2')$$

Le diamètre du trou est 1,41 fois plus grand qu'avec la première formule. Cela présente un certain intérêt pratique, l'éclairement de la plaque étant nécessairement faible avec ce procédé.

Les clichés obtenus sont toujours flous : le seul avantage de la photographie sans objectif est l'absence complète de distorsion.

Écrans à bords rectilignes et parallèles. Intégrales de Fresnel.

314. Division d'une onde en fuseaux. — Pour effectuer les intégrations indiquées au § 301, nous avons le droit de choisir la manière la plus commode de diviser l'onde en éléments de surface. Jusqu'à présent les écrans étant percés de trous circulaires et les points éclairés étant sur l'axe du phénomène, ces éléments étaient des couronnes concentriques. Maintenant que nous prenons des écrans à bords rectilignes et normaux à la droite SP, nous choi-

sissons comme éléments des fuseaux découpés par des plans passant par le diamètre SMM' parallèle aux bords des écrans. Le plan SEP normal aux bords des écrans s'appelle *équateur* de l'onde pour le point P ; il passe par le pôle O du point P (fig. 186).

Nous savons que seules sont utiles les parties de l'onde voisines du pôle. Les parties utiles des fuseaux sont donc des bandes à peu près parallèles à Oy, caractérisées par conséquent par une coordonnée x constante.

Nous allons montrer que le mouvement envoyé en P par le fuseau EE' a une amplitude proportionnelle à l'amplitude du mouvement envoyé par l'arc d'équateur EE', et que sa phase diffère de la phase du mouvement envoyé par EE' d'une quantité constante indépendante de la distance OE.

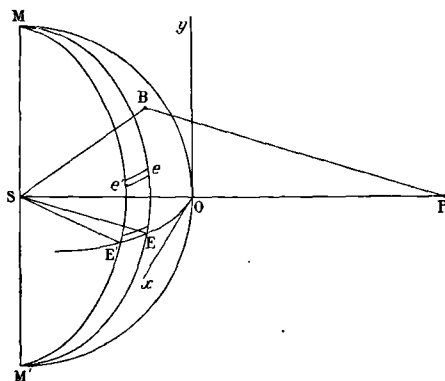


Fig. 186.

En effet, nous avons montré que le chemin BP diffère de PO de la quantité :

$$s^2 \frac{a+b}{2ab} = (x^2 + y^2) \frac{a+b}{2ab}.$$

Le chemin Pe diffère donc du chemin PE d'une quantité :

$$y^2 \frac{a+b}{2ab},$$

qui ne dépend pas de la coordonnée x du fuseau. Pour obtenir la résultante envoyée par le fuseau, il faut donc composer les mouvements émis par une série de petites aires dont les surfaces varient en fonction de y suivant une loi indépendante de l'x du fuseau, ces mouvements ayant avec le mouvement envoyé par l'arc d'équateur correspondant des différences de phase qui ne dépendent elles aussi que de y.

En définitive, on peut se borner à considérer la résultante des mouvements envoyés en P par l'équateur de l'onde ; à un facteur constant près, on obtiendra l'amplitude envoyée par la partie utile de l'onde, les phénomènes d'interférence ne dépendant que des différences de phase et non de la phase absolue.

315. **Écrans à bords rectilignes et parallèles.** — Tous les problèmes sont donc ramenés à l'étude de l'intégrale :

$$\int \sin \left(\omega t - \pi x^2 \frac{a+b}{ab\lambda} \right) dx,$$

étendue à toute la portion d'équateur laissée libre par le ou les écrans à bords rectilignes. Ce n'est donc plus qu'une question de

calcul. Posons : $v^2 = 2 \frac{a+b}{ab\lambda} x^2$.

A chaque valeur de x correspond une valeur de v . L'intégrale s'écrit, à un facteur constant près :

$$\int \sin \left(\omega t - \frac{\pi v^2}{2} \right) dv = \sin \omega t \int \cos \frac{\pi v^2}{2} dv - \cos \omega t \int \sin \frac{\pi v^2}{2} dv.$$

Posons :

$$G = \int \cos \frac{\pi v^2}{2} dv, \quad F = \int \sin \frac{\pi v^2}{2} dv.$$

Ces intégrales sont étendues aux valeurs de v qui correspondent aux valeurs de x laissées libres sur l'équateur par les écrans.

L'intensité résultante est :

$$I^2 = F^2 + G^2.$$

Les fonctions F et G sont les intégrales de Fresnel. On en a

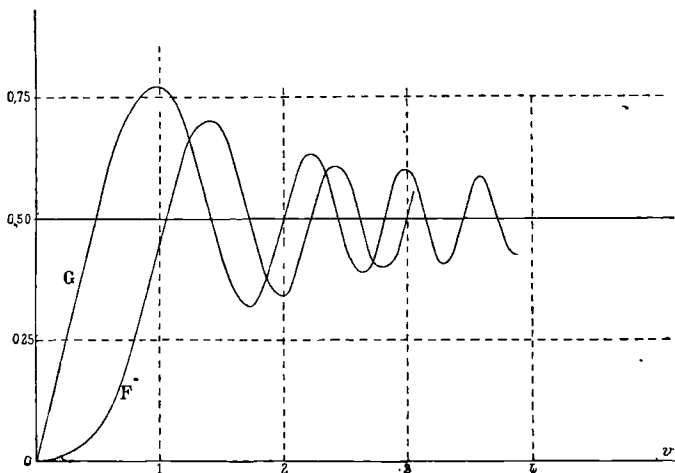


Fig. 187.

construit des tables numériques entre 0 et v par de nombreux procédés sur lesquels nous n'insisterons pas, mais dont voici les résultats.

Quand v croît de 0 à ∞ , les intégrales F_0^v et G_0^v sont toujours positives, alternativement croissantes et décroissantes, et tendent assez rapidement vers la même limite :

$$F_0^\infty = G_0^\infty = 0,5.$$

Les maximums et minimums de G_0^v sont donnés par la condition :

$$\frac{dG}{dv} = \cos \frac{\pi v^2}{2} = 0, \quad v = \sqrt{2k+1}.$$

Les maximums et minimums de F_0^v sont donnés par la condition :

$$\frac{dF}{dv} = \sin \frac{\pi v^2}{2} = 0, \quad v = \sqrt{2k}.$$

Voici le tableau des valeurs de v et des intégrales pour les premiers maximums et minimums.

G_0^v {	Maximums :	1,00 (0,780)	2,24 (0,637)	3,00 (0,606)	
	Minimums :		1,73 (0,323)	2,65 (0,388)	3,32 (0,405)
F_0^v {	Maximums :	1,41 (0,714)	2,45 (0,619)	3,16 (0,594)	
	Minimums :	2,00 (0,343)	2,83 (0,391)	3,46 (0,415)	

Nous donnons les tables numériques des intégrales F_0^v et G_0^v à la page 406.

Construisons avec elles la courbe :

$$\xi = G_0^v = \int_0^v \cos \frac{\pi v^2}{2} dv, \quad \eta = F_0^v = \int_0^v \sin \frac{\pi v^2}{2} dv.$$

C'est une sorte de double spirale aboutissant aux points asymptotiques J et J' :

$$\xi = \eta = \pm 0,5.$$

On a :

$$d\xi = \cos \frac{\pi v^2}{2} dv,$$

$$d\eta = \sin \frac{\pi v^2}{2} dv.$$

L'arc de courbe :

$$d\sigma = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2},$$

est donc égal à dv .
 Chaque point de la courbe correspond donc à une valeur de la variable auxiliaire v qui mesure sa distance à l'origine O comptée sur la courbe. On a inscrit sur la courbe quelques-unes de ces distances.

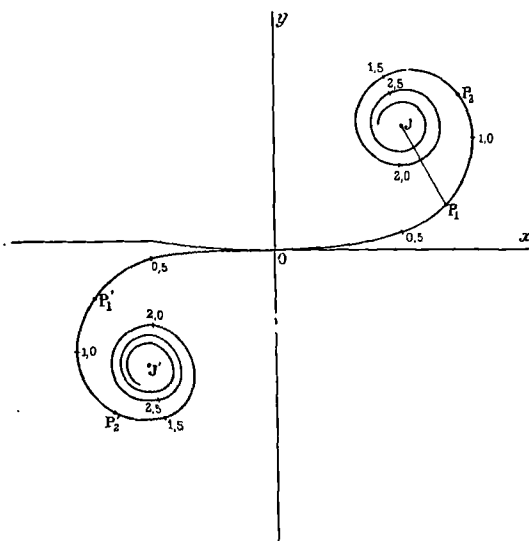


Fig. 188.

Considérons-en un arc P_1P_2 dont les points extrêmes correspondent à des valeurs v_1 et v_2 de la variable v (fig. 189). On a par définition :

$$\overline{OA} = G_0^{v_1}, \quad \overline{OB} = G_0^{v_2}, \quad \overline{AB} = G_{v_1}^{v_2}.$$

De même : $\overline{OC} = F_0^{v_1}, \quad \overline{OD} = F_0^{v_2}, \quad \overline{CD} = F_{v_1}^{v_2}.$

D'où : $\overline{\text{corde } P_1P_2}^2 = (F_{v_1}^{v_2})^2 + (G_{v_1}^{v_2})^2.$

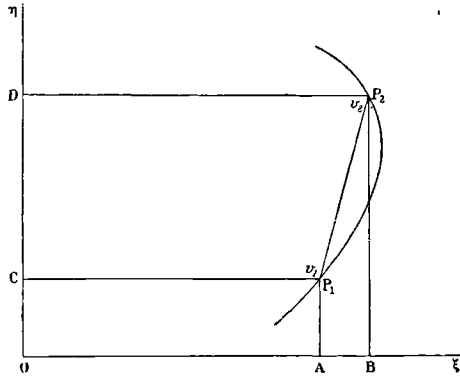


Fig. 189.

On se souviendra de plus qu'il y a proportionnalité entre la variable auxiliaire v et la variable x , qui mesure les longueurs des parties de l'équateur de l'onde qui sont conservées.

316. **Écran illimité d'un côté.** — Soit P_1PP_2 la sphère de centre S sur laquelle on regarde les franges et qui diffère très peu de son plan tangent en P . Le plan du tableau passe par la source S et est normal au bord de l'écran illimité dont la trace est en E .

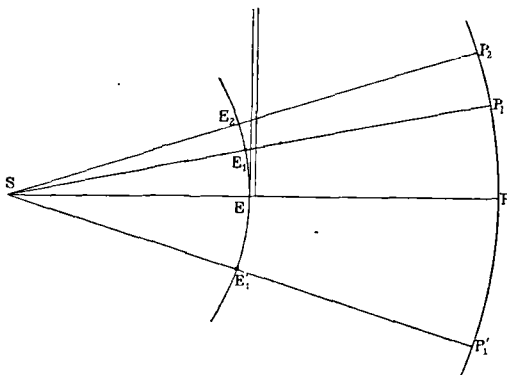


Fig. 190.

Nous nous proposons de trouver l'intensité en tous les points P de la circonférence P_1P_2 , presque rigoureusement assimilable à une droite. Les pôles respectifs des points P, P_1, \dots , sont en E, E_1, \dots . Nous poserons :

$$\overline{P_1P} = u.$$

LE POINT P_1 SE TROUVE DANS L'OMBRE GÉOMÉTRIQUE. IL N'Y A PAS DE FRANGES. — Imaginons d'abord que le point P_1 soit dans l'ombre géo-

métrique à une distance $\overline{P_1P} = u$. Le pôle E_1 correspondant se trouve alors à une distance x de E donnée par la formule :

$$\frac{u}{x} = \frac{a + b}{a}.$$

Pour connaître l'intensité au point P_1 , il faut donc calculer l'expression :

$$I^2 = (F_v^x)^2 + (G_v^x)^2,$$

v étant la valeur de la variable v qui correspond au point E et dont la valeur est :

$$v^2 = 2 \frac{a + b}{ab\lambda} x^2 = \frac{2a}{b(a + b)\lambda} u^2.$$

Le problème est numériquement résolu par les tables; nous reviendrons là-dessus tout à l'heure. La courbe (fig. 188) nous en donne immédiatement la solution graphique. Pour obtenir I^2 il suffit de joindre le point J qui correspond à $v = \infty$, au point P_1 de la courbe qui correspond à la valeur de v calculée par la formule précédente. Le carré du vecteur JP_1 est la quantité cherchée. Si P_1 est en P (fig. 190), on a : $u = 0, v = 0$; le point correspondant est en O (fig. 188). A mesure que u croît, le second point d'aboutissement décrit la courbe $OP_1P_2 \dots$; le vecteur qui le joint au point J diminue d'une manière continue; *il n'y a pas de franges dans l'ombre géométrique, mais simplement un affaiblissement continu de l'éclairement.*

LE POINT P'_1 SE TROUVE HORS DE L'OMBRE GÉOMÉTRIQUE. — Il faut calculer l'expression : $I^2 = (F_{-v}^x)^2 = (G_{-v}^x)^2.$

Le vecteur dont le carré donne l'intensité aboutit toujours au point J ; mais son autre extrémité décrit maintenant la courbe $OP'_1P'_2$ (fig. 188). L'intensité passe donc par une série de maximums et de minimums sans jamais s'annuler. Il est évident qu'ils ont lieu quand la droite variable JP' est normale à la courbe. Comme les boucles de la spirale sont à peu près des cercles du centre J' , cette condition est sensiblement réalisée pour la position JJ' de la droite JP' . Le coefficient angulaire du vecteur est alors égal à -1 . Or :

$$d\xi = \cos \frac{\pi v^2}{2} dv, \quad d\eta = \sin \frac{\pi v^2}{2} dv.$$

Écrivons que la spirale est normale à la droite dont le coefficient angulaire est 1 :

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \operatorname{tg} \frac{\pi v^2}{2} = -1, \quad \frac{\pi v^2}{2} = k\pi - \frac{\pi}{4}, \quad v^2 = 2k - 0,5.$$

En définitive, les maximums et les minimums correspondent aux valeurs de v :

Maximums v	Minimums v	Intensités I^2
1,217		2,744
	1,873	1,556
2,345		2,399
	2,739	1,686
3,082		2,291
	3,391	1,744
3,674		2,252
	3,937	1,778
4,183		2,221
	4,416	1,801
4,637		2,199
	4,847	1,819
5,050		2,182.

Les valeurs correspondantes de u sont données par la formule :

$$u = v \sqrt{\frac{b(a+b)}{2a}} \lambda.$$

Le premier maximum de lumière (maximum maximorum) est donc à quelque distance du point P, hors de l'ombre géométrique.

Les minimums ne sont pas équidistants : en prenant les différences des v qui leur correspondent, on trouve pour la largeur (relative) des franges : 866, 652, 546, 479, 431.

317. Discussion analytique du phénomène. — La discussion du phénomène à l'aide de la table numérique de la page 406 est aussi facile qu'à l'aide de la courbe. Il suffit de dresser une table des quantités :

$$I^2 = (0,5 \pm F)^2 + (0,5 \pm G)^2,$$

en fonction de la variable v . C'est grâce à cette table que le tableau du paragraphe précédent a été calculé.

Prenons par exemple le premier maximum ; l'interpolation donne :

$$v = 1,217, \quad F = 0,6341, \quad G = 0,7024,$$

$$(1,1341)^2 + (1,2024)^2 = 2,731.$$

La petite différence avec le résultat du tableau tient à l'interpolation *linéaire*.

Il est intéressant de mettre les intégrales de Fresnel sous une autre forme. On démontre les relations suivantes :

$$G = \int_0^v \cos \frac{\pi}{2} v^2 dv = \frac{1}{2} + M \sin \frac{\pi}{2} v^2 - N \cos \frac{\pi}{2} v^2,$$

$$F = \int_0^v \sin \frac{\pi}{2} v^2 dv = \frac{1}{2} - M \cos \frac{\pi}{2} v^2 - N \sin \frac{\pi}{2} v^2.$$

Les fonctions M et N sont données à la page 407. Pour $v=0$, elles sont égales à 0,5; pour v croissant, elles diminuent continûment jusqu'à 0; N devient même rapidement négligeable. On peut donc mettre en évidence dans les intégrales de Fresnel des éléments oscillants périodiques multipliés par des facteurs rapidement décroissants.

Dès que v est un peu grand, N est négligeable; G et F valent sensiblement :

$$G = \frac{1}{2} + M \sin \frac{\pi}{2} v^2,$$

$$F = \frac{1}{2} - M \cos \frac{\pi}{2} v^2$$

Les maximums et minimums de G coïncident avec les valeurs 0,5 de F, et inversement, comme il apparaît immédiatement dans la figure 187.

La discussion de la position des franges devient très élégante.

Considérons ce qui se passe en dehors de l'ombre géométrique.

L'intensité est :

$$I^2 = (0,5 + F)^2 + (0,5 + G)^2;$$

$$\text{D'où (§ 315) : } I \frac{dI}{dv} = (0,5 + F) \frac{dF}{dv} + (0,5 + G) \frac{dG}{dv}$$

$$= (0,5 + F) \sin \frac{\pi}{2} v^2 + (0,5 + G) \cos \frac{\pi}{2} v^2.$$

Substituons à F et à G leurs valeurs en fonction de M et de N;

$$\text{il reste : } I \frac{dI}{dv} = \sin \frac{\pi}{2} v^2 + \cos \frac{\pi}{2} v^2 - N.$$

Les maximums et minimums satisfont donc à la relation :

$$N = \sin \frac{\pi}{2} v^2 + \cos \frac{\pi}{2} v^2 = \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{2} \left(v^2 + \frac{1}{2} \right).$$

Il est facile de déterminer les racines de cette équation en construisant les deux courbes :

$$y = N, \quad y = \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{2} \left(v^2 + \frac{1}{2} \right).$$

Nous savons que la fonction N décroît très vite; dès qu'on peut la négliger, les minimums et maximums correspondent à la condition

$$\text{déjà obtenue : } v^2 + \frac{1}{2} = 2k.$$

Considérons ce qui se passe dans l'ombre géométrique.

L'intensité est :

$$I^2 = (0,5 - F)^2 + (0,5 - G)^2.$$

Par un calcul analogue au précédent, on vérifie la relation :

$$I \frac{dI}{dv} = -N.$$

La condition pour qu'il existe des maximums ou des minimums est donc $N=0$; or la fonction N ne s'annule que pour $v=\infty$. Il n'y a donc pas de franges dans l'ombre géométrique. L'intensité en un point quelconque de l'ombre est :

$$I^2 = M^2 + N^2.$$

318. Franges d'une fente et d'un fil. — FRANGES D'UNE FENTE.

$$\text{L'intensité est : } I^2 = (F_{v_1}^{v_2})^2 + (G_{v_1}^{v_2})^2,$$

$$\text{avec la condition : } v_2 - v_1 = e \sqrt{2 \frac{a+b}{ab\lambda}},$$

où e est la largeur de la fente. Comme nous savons que v mesure la distance comptée sur la courbe d'un point de la spirale à l'origine O , l'intensité est donnée par le carré de la corde d'un arc de la spirale dont la longueur est constante.

Raisonnons sur les figures 188 et 191.

1° Si la fente est très étroite, l'arc est toujours égal à la corde; la lumière ne présente ni maximum ni minimum : elle éclaire avec une intensité *presque constante* un espace angulaire considérable.

Supposons la fente assez étroite pour que l'arc $v_2 - v_1$ n'embrasse jamais qu'une portion de spire de la courbe ξ, η . Au point P (fig. 191), l'arc utile est à cheval sur le point O (fig. 188). A cause de l'inflexion, l'arc est encore sensiblement égal à la corde.

A mesure que le point observé s'éloigne de P (fig. 191), l'arc utile correspond à une corde de plus en plus petite. Il y a donc un maximum de lumière en P et une diminution peu rapide d'éclairement à partir de P .

2° Dans le cas extrême opposé où la fente est très large, tout se passe comme si on avait affaire à deux écrans illimités indépendants. On obtient deux fois le phénomène étudié au numéro précédent, symétriquement par rapport au point P . Il n'y a de franges qu'en dehors des ombres géométriques.

3° Reste enfin le cas intermédiaire où la fente n'est ni très large ni

très étroite. On obtient alors des franges dont la distribution dépend essentiellement de la largeur de la fente et des paramètres a et b ; elles peuvent envahir l'ombre géométrique.

Supposons le point observé P_1 assez éloigné du point P . L'arc utile de la courbe ξ , η , dont la longueur est constante, est assez éloigné du point O .

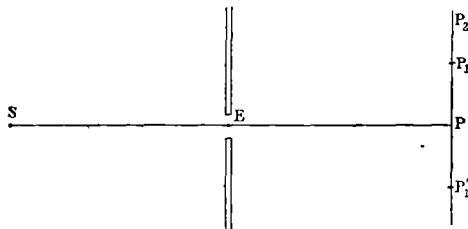


Fig. 191.

Quand il embrasse un nombre entier de spires, la corde qui joint ses extrémités est quasi nulle; il y a minimum d'intensité.

Quand il embrasse un nombre impair de demi-spires, la corde qui joint ses extrémités est maxima; il y a maximum d'intensité.

Comme à mesure que le point P_1 s'éloigne de P , l'arc utile s'éloigne du point O et se trouve sur des spires de plus petit rayon moyen, il embrasse un nombre de spires croissant; il y a par conséquent alternativement maximum et minimum.

FRANGES D'UN FIL. — Les franges dues à un écran à bords parallèles (fil métallique, par exemple) se déterminent par une méthode analogue. L'intensité a pour expression :

$$I^2 = (F_{-\infty}^{v_1} + F_{v_2}^{+\infty})^2 + (G_{-\infty}^{v_1} + G_{v_2}^{+\infty})^2,$$

avec la condition : $v_2 - v_1 = e \sqrt{2 \frac{a+b}{ab\lambda}}$,

où e est la largeur du fil.

L'intensité est donc le carré du vecteur résultant de deux vecteurs égaux et parallèles aux vecteurs qui partent respectivement des points asymptotiques de la spirale et aboutissent aux points qui correspondent aux valeurs v_1 et v_2 de la variable auxiliaire.

On vérifiera aisément que si l'arc de spirale qui mesure la partie inactive, est assez long pour comprendre un grand nombre de spires (fil assez épais), et si on observe au voisinage du centre du phénomène, ses extrémités sont sur des spires de rayons peu différents : les vecteurs à composer sont sensiblement égaux. Changer le point observé revient à faire glisser l'arc inactif sur la double spirale. Suivant sa position, les vecteurs ci-dessus définis sont de même sens ou de sens contraires; il y a des maximums dans le premier cas, des minimums nuls dans le second.

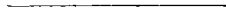
Les vecteurs sont de même sens par raison de symétrie au centre du phénomène : la frange centrale est donc toujours un maximum.

De part et d'autre de cette frange sont des franges sensiblement équidistantes, car la longueur des spires d'ordre élevé est sensible-

ment constante. Le phénomène est donc analogue à celui qu'on obtiendrait par l'interférence des radiations qui ont rasé le fil.

Mais le phénomène se complique quand on approche de l'ombre géométrique et quand on en sort : les vecteurs sont alors loin d'être égaux. D'une manière générale, la distribution des franges dépend des paramètres a , b , et de la largeur e du fil.

Les trois exemples traités (écran illimité d'un côté, fente et fil) suffisent pour acquérir une idée nette des phénomènes en lumière dite convergente.



CHAPITRE X

APPLICATIONS DIVERSES DE LA THÉORIE DE LA DIFFRACTION

Franges au voisinage d'un foyer; instruments d'optique.

319. **Position de la question.** — L'Optique géométrique nous apprend que tous les chemins qui vont d'un point A à son image A' sont équivalents. La Théorie des ondes donne de cette proposition une interprétation simple : les mouvements ondulatoires qui, au départ du point A, sont de même phase, sur tous les rayons, le sont encore à l'arrivée au point A'.

Dans la Théorie géométrique où les rayons sont considérés comme des droites, peu importe la manière dont on les a sélectionnés, par exemple au moyen d'écrans couvrant en partie une surface d'onde (rappelons ici, parce qu'on l'oublie trop habituellement, que les surfaces d'onde sont complètement définies par la Théorie géométrique, indépendamment de toute hypothèse sur le mécanisme de la propagation). Dans la Théorie des ondes, il n'en va pas ainsi : alors même qu'il existe un foyer parfait, que l'appareil est stigmatique, il se peut que de la lumière arrive en des points voisins du foyer, si l'onde est convenablement diaphragmée.

Nous connaissons déjà ces phénomènes puisque, d'après la méthode employée pour observer les franges de diffraction dites à l'infini, nous observons réellement ce qui se passe dans le plan focal principal d'une lunette au voisinage de l'image d'un point de l'infini. Le fait que nous utilisons comme source de lumière une fente au foyer principal d'une lentille formant collimateur, ne change pas la nature du phénomène : nous superposons une infinité de phénomènes identiques, dus séparément à tous les points de la fente.

Nous allons étudier d'une manière plus particulière ce qui se passe au foyer conjugué d'un point lumineux, lorsque la portion conservée de l'onde est circulaire. On voit immédiatement l'intérêt de la question, puisque ce cas est approximativement réalisé dans les instruments d'optique.

Changeons l'origine des temps (qui est arbitraire); la quantité (1) devient :

$$A = \iint dx dy \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{\varepsilon x}{f\lambda} \right) = \int (y_1 - y_0) \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{\varepsilon x}{f\lambda} \right) dx, \quad (2)$$

où y_1 et y_0 sont la plus petite et la plus grande des valeurs de y qui correspondent à une même valeur de x .

321. Autre manière de faire le calcul. — Au lieu de calculer les retards à partir de la sphère BOB' , on peut ramener la question à un problème de diffraction à l'infini.

Un faisceau cylindrique tombe normalement à une ouverture de forme quelconque *découpée dans un plan*. Calculons l'amplitude du faisceau diffracté dans une direction β .

Prenons le plan du tableau pour plan de diffraction; menons dans le plan de l'ouverture deux axes rectangulaires dont l'un Ox est dans le plan du tableau (fig. 193).

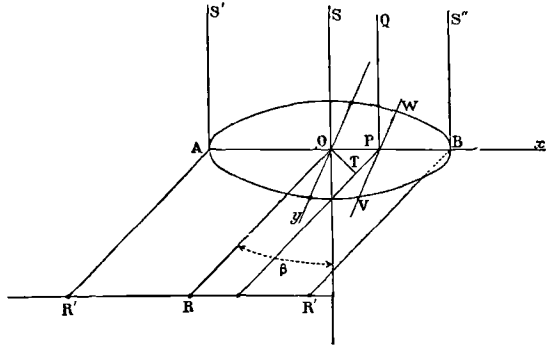


Fig. 193.

Dans la direction OR faisant l'angle β avec la normale à l'ouverture, la lumière envoyée par la tranche d'abscisse $OP = x$, et de largeur dx , est proportionnelle à son aire :

$$\overline{VW} \cdot dx = (y_1 - y_0) dx,$$

où y_1 et y_0 sont les y des points V et W . Le retard calculé par rapport à la vibration envoyée dans cette direction par l'élément qui est à l'origine est : $\overline{TP} = x \sin \beta$. Pour définir la résultante dans la direction β , on a l'équation :

$$A = \int (y_1 - y_0) \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \sin \beta \right) dx.$$

Plaçons maintenant devant l'ouverture une lentille de distance focale principale f ; le faisceau cylindrique diffracté dans la direction β vient se concentrer en un point P (fig. 192) situé à une distance ε du foyer A' donnée par la formule :

$$\varepsilon = f \operatorname{tg} \beta = f \sin \beta, \quad \text{puisque } \beta \text{ est petit.}$$

L'amplitude résultante au point P est donc :

$$A = \int (y_1 - y_0) \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\varepsilon x}{f\lambda} \right) dx,$$

expression trouvée plus haut. La solution est générale; mais si le point lumineux est à l'infini, f représente la distance focale principale de la lentille de projection; si le point est à distance finie, f représente la distance du foyer conjugué du point lumineux à la lentille de projection. On peut en effet remplacer le point à distance finie par un point à l'infini, pourvu qu'on remplace la lentille actuelle par une lentille donnant une image au même endroit. Le retard est nul sur la même sphère dont il faut utiliser la même portion; les phénomènes dans le plan de l'image sont identiquement les mêmes.

322. Ouverture circulaire. — Jusqu'ici nous n'avons rien supposé sur la forme de l'ouverture, qui est seulement assujettie à ne pas être trop grande par rapport au rayon de l'onde; car l'approximation consentie revient à la confondre avec son plan tangent.

Supposons maintenant qu'il s'agit d'une ouverture circulaire de rayon R. On a :

$$\begin{aligned} y_1 - y_0 &= 2\sqrt{R^2 - x^2}, \\ A &= 2 \sin 2\pi \frac{t}{T} \int_{-R}^{+R} \sqrt{R^2 - x^2} \cos \frac{2\pi \varepsilon x}{f\lambda} dx \\ &\quad - 2 \cos 2\pi \frac{t}{T} \int_{-R}^{+R} \sqrt{R^2 - x^2} \sin \frac{2\pi \varepsilon x}{f\lambda} dx. \end{aligned}$$

La seconde intégrale est évidemment nulle, puisque les éléments sont deux à deux égaux et de signes contraires. Posons :

$$m = \frac{2\pi \varepsilon R}{\lambda f}, \quad w = \frac{x}{R};$$

il vient :

$$A = 4R^2 \sin 2\pi \frac{t}{T} \int_0^1 \sqrt{1-w^2} \cos mw \, dw = \pi R^2 \sin 2\pi \frac{t}{T} \cdot \varphi(m).$$

L'intégrale :

$$\varphi(m) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-w^2} \cos mw \, dw = \frac{4}{\pi} \int_0^1 \sqrt{1-w^2} \cos mw \, dw,$$

est une certaine fonction de m exprimable avec la fonction \mathfrak{J}_1 de Bessel et dont on a calculé une table.

On vérifiera d'abord aisément que la fonction $\varphi(m)$ satisfait à l'équation différentielle :

$$\frac{d^2\varphi}{dm^2} + \frac{3}{m} \frac{d\varphi}{dm} + \varphi = 0, \tag{1}$$

avec les conditions pour $m = 0$:

$$\varphi = 1, \quad \frac{d\varphi}{dm} = 0. \tag{1'}$$

On a bien $\varphi(0) = 1$, puisqu'alors l'intégrale :

$$\int_0^1 \sqrt{1-w^2} dw,$$

représente le quart de l'aire d'un cercle de rayon 1, soit $\pi : 4$.

Il est d'ailleurs évident qu'on a :

$$\frac{d\varphi}{dm} = -\frac{4}{\pi} \int_0^1 w \sqrt{1-w^2} \sin mw dw = 0,$$

pour $m = 0$, puisque tous les éléments de l'intégrale sont nuls.

Posons : $\varphi = 2\mathfrak{J}_1 : m$. (1'')

On vérifiera que la fonction \mathfrak{J}_1 satisfait à l'équation :

$$\frac{d^2\mathfrak{J}_1}{dm^2} + \frac{1}{m} \frac{d\mathfrak{J}_1}{dm} + \left(1 - \frac{1}{m^2}\right) \mathfrak{J}_1 = 0, \tag{2}$$

avec les conditions :

$$\mathfrak{J}_1 = 0, \quad \frac{d\mathfrak{J}_1}{dm} = \frac{1}{2}, \quad \text{pour } m = 0, \tag{2'}$$

corrélatives des conditions (1') et (1'').

C'est précisément la définition de la fonction de Bessel du premier ordre. Elle intervient à chaque instant dans la théorie des ondes hertziennes; nous en donnerons une table dans le Tome V de ce Cours.

Les intensités lumineuses sont donc proportionnelles à :

$$I^2 = \frac{4\mathfrak{J}_1^2(m)}{m^2}.$$

Le tableau suivant donne les valeurs de m qui correspondent aux minimums nuls [racines de l'équation $\mathfrak{J}_1(m) = 0$] et aux maximums successifs, et les intensités de la lumière multipliées par 1000.

Centre de l'image	$m = 0$	$A^2 = 1000$	Multiple de $\lambda = 0$
1° Minimum	3,832	0	1,220
Maximum	5,136	17,5	1,635
2° Minimum	7,015	0	2,233
Maximum	8,417	4,1	2,679
3° Minimum	10,173	0	3,283
Maximum	11,620	4,6	3,699

On sait que pour des valeurs suffisantes de m , on peut poser :

$$J_1(m) = \sqrt{\frac{2}{\pi m}} \sin\left(m - \frac{\pi}{4}\right), \quad I^2 = \frac{8}{\pi m^3} \sin^2\left(m - \frac{\pi}{4}\right).$$

Les minimums correspondent sensiblement aux valeurs de m satisfaisant aux conditions :

$$m = (4k + 1) \frac{\pi}{4}.$$

$$3,927 \quad 7,068 \quad 10,210 \quad 13,351.$$

La courbe (fig. 194) montre la loi de variation des intensités.

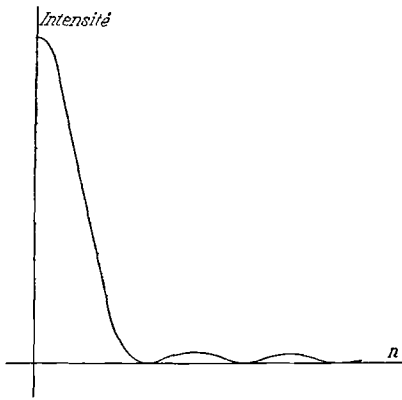


Fig. 194.

Donc l'image d'une étoile donnée par une lunette astronomique n'est pas un point, mais un disque lumineux de diamètre apparent sensible, entouré d'anneaux alternativement sombres et brillants. Le nombre des anneaux visibles diminue rapidement à mesure que l'astre est moins lumineux. Par suite d'un effet d'irradiation, le cercle lumineux central paraît d'autant plus large, que l'étoile est de *grandeur* plus voisine de la première. Je rappelle que les étoiles, même de première grandeur, ont un diamètre apparent

quasi nul, que la *grandeur* mesure l'énergie envoyée.

Les diamètres ε des anneaux maximums d'intensité sont proportionnels à la longueur d'onde de la lumière utilisée, puisqu'ils sont donnés par la formule :

$$\varepsilon_m = m_m \lambda \cdot \frac{f}{2\pi R},$$

en fonction des nombres m_m pour lesquels la quantité $\varphi(m)$ passe par ses maximums.

En lumière blanche, les franges sont par conséquent colorées.

323. Pénétration des lunettes. — Nous pouvons maintenant définir la *pénétration* d'une lunette ou d'un télescope de distance focale principale f , et d'ouverture $O = 2R$.

Le cercle lumineux central correspond à l'angle :

$$\frac{\varepsilon}{f} = \frac{m}{\pi} \frac{\lambda}{O}.$$

La valeur qu'il faut attribuer à m dans cette expression est évidemment *arbitraire*; elle dépend de l'intensité lumineuse du point

observé. Posons : $m = 3,83$, c'est-à-dire étendons le cercle central jusqu'au premier minimum. On a dès lors :

$$\frac{m}{\pi} = 1,22, \quad \frac{\varepsilon_1}{f} = 1,22 \frac{\lambda}{O}.$$

Pour cette valeur de ε , c'est-à-dire pour cette position du point P (fig. 192), la différence des distances maxima et minima du point P aux bords de la partie conservée de l'onde est :

$$\overline{PB} - \overline{PB'} = \frac{2\varepsilon_1 R}{f} = \frac{\varepsilon_1}{f} O = 2\varepsilon_1 \sin u_1 = 1,22 \cdot \lambda.$$

Le premier minimum ne correspond donc pas aux points P tels que la différence de leurs distances maxima et minima aux bords de la partie conservée de l'onde soit égale à une longueur d'onde, ainsi qu'on se l'imagine communément. Cela tient à ce que les parties de l'onde qui envoient des mouvements de même phase ne sont pas d'aires égales [comparer à ce qui se passe lorsque le point P est sur l'axe Oz (§ 302), et aux résultats relatifs à une ouverture rectangulaire (§ 287)].

Quoi qu'il en soit, *admettons que les images de deux points ne sont distinctes que si le centre de l'une est à une distance du centre de l'autre au moins égale à ε_1 ; appelons pénétration l'inverse de l'angle $\varepsilon_1 : f$ qu'ils font alors.*

Il résulte de ce qui précède, que *la pénétration est mesurée par l'expression :* $O : (1,22 \lambda).$

Elle est proportionnelle à l'ouverture et en raison inverse de la longueur d'onde.

Par exemple, pour un objectif de 10^{cm} d'ouverture et la lumière la plus intense du spectre, on a :

$$\lambda = 0^{\mu},55, \quad \frac{\varepsilon_1}{f} = 1,22 \times 0,55 \times 10^{-5} = 0,671 \cdot 10^{-5} = 1'',4.$$

Un tel appareil montrera distinctes les images de deux étoiles dont la distance angulaire est $1'',4$, autant du moins qu'elles sont distinctes quand le centre des franges de l'une se trouve sur le premier minimum de l'autre.

324. Influence de la cohérence des phases de deux points lumineux sur la séparation de leurs images. — Dans la définition précédente de la pénétration, nous supposons que les anneaux de diffraction dus aux deux points que nous cherchons à distinguer, se superposent purement et simplement, *les intensités s'ajoutant arithmétiquement.* Cela suppose l'incohérence des phases des mouvements vibratoires émis par les deux points. On démontre alors (§ 215) que l'intensité résultante est la somme des intensités.

Le raisonnement ne vaut plus si les phases des mouvements émis

par les deux points sont liées entre elles, si par exemple elles sont nécessairement en concordance, en quadrature, en opposition,...

Ainsi visons à travers une lunette des fentes très rapprochées, équidistantes. Prenons par exemple pour objet un peigne comme en fournit communément le commerce, dont les dents forment des intervalles remarquablement constants. *Éclairons sans précautions particulières*. Les mouvements envoyés par les diverses fentes ont des phases *incohérentes*; on veut dire par là que la phase de l'un peut être brusquement modifiée sans que les phases des autres le soient. Cela tient à ce qu'elles reçoivent la lumière qu'elles laissent passer, de points lumineux en très grand nombre, et dont les phases sont incohérentes.

Plaçons-nous à une distance telle, que nous distinguons bien les images séparées des fentes.

Éclairons maintenant le peigne à l'aide d'une fente fine parallèle aux dents : le phénomène est absolument modifié. Les images des dents dans la lunette cessent d'être nettes : elles sont sillonnées de franges plus fines.

C'est que maintenant nous n'avons plus affaire à une série de phénomènes lumineux indépendants, respectivement dus à chacune des fentes; nous n'avons plus qu'un seul phénomène. Nous ne pouvons plus calculer les *intensités de l'image* de chaque fente en tous les points du plan conjugué et ajouter arithmétiquement en chaque point les intensités calculées; nous devons calculer en chaque point du plan conjugué *l'amplitude* du mouvement résultant envoyé par l'ensemble des fentes : l'intensité est le carré de cette amplitude.

D'une manière générale, le calcul montre que le pouvoir séparateur d'un instrument est augmenté quand les mouvements des sources à distinguer sont indépendants.

Nous retrouverons plus loin la même question sous une autre forme, en étudiant d'une manière générale *la vision des objets qui ne sont pas lumineux par eux-mêmes* (§§ 330 et sq.). On conçoit déjà, et l'on verra mieux plus tard, l'importance des procédés au moyen desquels on les éclaire.

325. Application au microscope. Ouverture numérique. — Le diamètre du premier minimum est :

$$\varepsilon_1 = 1,22 \cdot \lambda \frac{f}{O}.$$

On a d'ailleurs :

$$f \sin u_1 = \frac{O}{2}; \quad \text{d'où :} \quad \varepsilon_1 = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{2 \sin u_1}.$$

La notation f ne signifie pas qu'on regarde dans le plan focal *principal*; f est la distance du plan d'observation à l'écran percé du trou

d'ouverture O (§ 322). La théorie précédente s'applique donc à tout appareil à la seule condition que ε soit assez petit.

Calculons la largeur ε_0 qui correspond à ε_1 dans l'espace objet d'indice n ; l'espace image est supposé d'indice 1. Soit u_0 l'inclinaison qui correspond dans l'espace objet à l'inclinaison maxima u_1 dans l'espace image. Sans qu'il soit nécessaire de connaître la structure de l'appareil, le seul fait que nous le savons *aplanétique* (§ 96) nous permet de poser :

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 n \sin u_0 &= \varepsilon_1 \sin u_1 = 0,61 \cdot \lambda, \\ \varepsilon_0 &= 0,61 \cdot \frac{\lambda}{n \sin u_0}. \end{aligned} \quad (1)$$

Nous avons fait observer (§ 323) que dans l'évaluation de la valeur de l'instrument le coefficient numérique est arbitraire. La *pénétration* est en raison inverse de ε_0 : *pour une radiation donnée, elle est donc proportionnelle à $n \sin u_0$* . D'où l'importance de cette quantité qu'on appelle *ouverture numérique*.

326. Discussion de la formule précédente. Objectifs à immersion homogène. — Le pouvoir séparateur du microscope est donc d'autant plus grand que son ouverture numérique est plus grande.

Dans les meilleurs objectifs à *sec*, c'est-à-dire où l'objet se trouve dans l'air ($n=1$), u_0 atteint 70° ; $n \sin u_0 = 0,94$. Comme le maximum de l'ouverture est l'unité, on a donc à peu près tout ce qu'il est permis d'atteindre.

Il faut donc augmenter l'indice n du milieu placé devant l'objectif: d'où les objectifs à *immersion*. Mais il ne suffit pas d'interposer entre le couvre-objet et la surface frontale un liquide d'indice *élevé*; il faut qu'aucune portion des milieux compris entre l'objet et la surface frontale, et en particulier le couvre-objet, n'ait un indice inférieur. Les couvre-objets ordinaires sont en crown d'indice 1,52. On a des liquides d'indice plus fort atteignant même 2; de ce côté, pas de difficulté de nature optique. On atteint donc l'ouverture :

$$1,52 \cdot \sin 70^\circ = 1,43.$$

Mais il est très difficile d'aller au delà, *faute de couvre-objets en verre de grand indice*. Au lieu d'une fabrication par soufflage et conséquemment bon marché, on doit travailler les couvre-objets de ces verres spéciaux comme une lame plan parallèle quelconque, c'est-à-dire les scier et les polir. D'autre part, les liquides de grand indice sont des composés de phosphore et d'arsenic, dangereux à manier, explosifs et attaquant le flint du couvre-objet qui devient opaque. D'ailleurs ces liquides détériorent les préparations (*qui y sont nécessairement plongées pour que l'immersion soit homogène*), par leur nature chimique et parce qu'elles doivent être chauffées.

Il n'y a donc rien à espérer de ce côté au delà de l'ouverture 1,43.

On a cherché à étendre les limites de visibilité par un autre moyen.

La formule (1) du § 325 montre qu'il est avantageux d'utiliser les radiations de courtes longueurs d'onde. Jusqu'à présent on étudiait les objectifs pour $\lambda = 0^{\mu},55$ qui correspond à la partie la plus lumineuse du spectre. Or l'œil *voit* encore distinctement les radiations $\lambda = 0^{\mu},44$. Cette réduction donne le même effet optique que si on augmentait l'ouverture dans le rapport de 1,43 à 1,81.

On peut aller plus loin avec la photographie.

Dans ces derniers temps on a construit des microscopes à lentilles de quartz non achromatisées, mais qu'on utilise avec de la lumière quasiment homogène (cadmium, $275 \mu\mu$; magnésium, $280 \mu\mu$). On recule de moitié la limite de pénétration. Mais les rayons sont invisibles sans artifice; l'oculaire fluorescent ne donne que des images floues; on doit recourir à la photographie dont l'emploi est toujours fastidieux, quand il est raisonnablement possible. Des études morphologiques avec la photographie sont une entreprise désespérée.

On a construit des microscopes en quartz à immersion pour lesquels: $n \sin u_0 = 1,25$. Prenons $\lambda = 275 \mu\mu$; il vient: $\varepsilon = 134 \mu\mu$. On sépare théoriquement des objets de dimensions telles, qu'il en tiendrait 7500 côte à côte sur une file dans un millimètre.

Or l'expérience prouve qu'on ne reconnaît plus la *forme* d'un objet au microscope ordinaire à immersion homogène, quand ses dimensions sont de l'ordre de $0,4 \mu$, c'est-à-dire quand il en tient côte à côte sur une file 2500 au millimètre. Les tests composés de raies parallèles ne doivent pas nous induire en erreur: autre chose est de distinguer la forme des objets, autre chose de séparer des traits parallèles. D'ailleurs, le 19^e et dernier test de Nobert ne contient que 4430 traits au millimètre.

Admettant le microscope à quartz aussi bien construit, on pourrait reconnaître la forme des objets qui auraient des dimensions supérieures à $0,2 \mu = 200 \mu\mu$; il en tiendrait 5000 au millimètre.

Le microscope est parvenu très près de sa perfection, du moins tant qu'on ne saura pas utiliser des radiations plus courtes.

Couronnes.

327. Ecrans complémentaires. — Limitons par un écran une certaine portion S d'une surface qui n'a pas besoin d'être une surface d'onde. Disposons *successivement* sur S deux systèmes d'écrans E_1 et E_2 , tels que placés *simultanément* ils la recouvrent exactement sans empiéter les uns sur les autres. Les systèmes E_1 et E_2 sont dits *complémentaires*.

Soit : $x = A \sin \omega t$, le mouvement envoyé sur un point par la portion S entièrement découverte. Soit :

$$x_1 = A_1 \sin (\omega t - \alpha_1), \quad x_2 = A_2 \sin (\omega t - \alpha_2),$$

les mouvements reçus par le même point, quand on met en place les écrans E_1 ou les écrans E_2 . On a identiquement :

$$A_1 \sin (\omega t - \alpha_1) + A_2 \sin (\omega t - \alpha_2) = A \sin \omega t,$$

$$A_1^2 = A^2 + A_2^2 - 2AA_2 \cos \alpha_2.$$

Si nous connaissons A , A_2 et α_2 , nous pouvons calculer A_1 . En général il est aussi court de calculer A_1 directement, c'est-à-dire sans passer par l'intermédiaire de l'effet de la surface S entière.

Du reste, il faut se garder de croire que des écrans complémentaires donnent des phénomènes complémentaires au sens ordinaire du mot, ce qui exigerait la condition :

$$A_1^2 + A_2^2 = A^2.$$

Ainsi tandis qu'un trou circulaire donne, suivant les valeurs relatives de a et de b , des anneaux à centre tantôt blanc, tantôt noir (§ 302), un écran circulaire de même diamètre donne toujours des anneaux à centre blanc (§ 310). Même remarque pour les franges d'une fente et d'un fil de même épaisseur (§ 318). *Somme toute*, le principe de la conservation de l'énergie est toujours satisfait : il ne l'est pas nécessairement en chaque point.

Mais supposons à peu près rigoureusement nul le mouvement envoyé par la surface S au point considéré ; il vient alors :

$$A = 0, \quad A_1^2 = A_2^2.$$

Les écrans complémentaires produisent le même éclaircissement en tout point situé dans la partie de l'espace non éclairé par la surface S entièrement découverte.

C'est là une conséquence paradoxale de la Théorie des ondulations, vérifiée par des observations vulgaires. Avant que le Soleil ne se lève derrière une colline, le spectateur situé dans l'ombre voit les broussailles du sommet, non pas obscures sur le fond peu lumineux du ciel, mais au contraire lumineuses, tout comme si on avait disposé un écran percé de fentes ayant le contour apparent des broussailles. Par diffraction ces fentes paraîtraient lumineuses, si l'angle de la visée avec les rayons solaires incidents n'est pas trop grand.

328. Écrans circulaires. — Les phénomènes sont particulièrement intéressants dans le cas de petits écrans circulaires, de dimensions identiques et distribués au hasard. Tout se passe comme si l'on avait affaire à de petits trous circulaires, de dimensions identiques et distribués au hasard.

Voici les deux expériences complémentaires.

Accommodons une lunette sur un point source A suffisamment éloigné, par exemple un trou d'épingle percé dans du clinquant.

1° Interposons sur le faisceau une plaque percée d'un grand nombre de petits trous circulaires, égaux mais distribués sans aucun ordre; mettons-la par exemple contre l'objectif. Nous observons autour de l'image du trou A des anneaux identiques à ceux que donnerait une ouverture unique. C'est exactement l'expérience du § 322, mais effectuée avec un très grand nombre de petits trous.

2° Reconnaissons l'expérience en interposant une glace recouverte de petits écrans (billes de bicyclettes) ou de poussières aussi régulières que possible (lycopode). Nous obtenons exactement le même phénomène que dans la première expérience: les anneaux ont le même diamètre dans les deux cas, si les trous et les écrans ont le même diamètre.

La condition posée est satisfaite; car, sauf sur l'image géométrique du point source A, le plan focal est obscur quand l'objectif, *supposé d'ouverture assez grande*, est complètement découvert.

329. Couronnes. — Soit S un plan perpendiculaire à la droite ON joignant l'œil O de l'observateur au Soleil. La distance NO est sup-

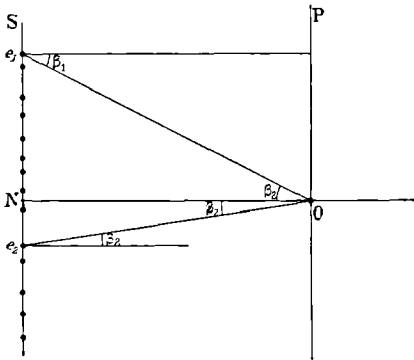


Fig. 195.

posée grande. Le plan S ne peut pas être considéré *dans son ensemble* comme une surface d'onde; car le Soleil étant de dimensions finies, les mouvements sur le plan S ne sont *cohérents* que dans un espace très limité (§ 216).

Supposons irrégulièrement distribués sur le plan S des écrans circulaires égaux. Le principe des écrans complémentaires permet de les remplacer par de petits trous égaux irrégulièrement distribués.

Chaque trou de rayon R envoie par diffraction dans la direction faisant l'angle β avec la normale au plan S, c'est-à-dire avec la lumière incidente, une intensité qui est calculable par les formules du § 322. Il suffit de poser :

$$m = \frac{2\pi}{\lambda} \beta R.$$

Pour une radiation donnée, les maximums et minimums correspondent aux valeurs inscrites dans le tableau du § 322.

L'intensité envoyée par l'ensemble des trous dans une direction donnée est la somme des intensités envoyées par chacun d'eux, puisque les phases des vibrations des différents trous sont incohérentes.

L'œil placé en O devant l'ensemble des trous aperçoit dans la direction β_1 ce que le trou e_1 envoie dans cette direction. De même pour un autre trou quelconque e_2 . On voit donc se projeter sur le plan S le phénomène qui serait produit par un seul trou sur le plan P parallèle à S et passant par O.

La substitution des écrans aux trous ne change rien au phénomène.

L'explication subsiste si les écrans ne sont plus exactement sur un plan S, mais occupent un certain volume, pourvu qu'il soit assez étroit dans le sens ON. En effet, les phénomènes dus à des plans parallèles à S et voisins de S sont à peu près identiques.

On aperçoit souvent des *couronnes* autour du Soleil et de la Lune. Elles sont dues aux gouttelettes d'eau qui flottent dans l'atmosphère et jouent le rôle d'écrans. La mesure des dimensions angulaires des anneaux permet de calculer leur diamètre.

Vision des objets non lumineux par eux-mêmes.

Dans les paragraphes suivants, nous insistons sur le problème posé et résolu par Abbe, problème dont nous avons fait entrevoir l'importance au § 324. Il s'agit de la vision des objets *non lumineux par eux-mêmes*. Ils sont par conséquent vus par réflexion ou par transparence. *Les phases de leurs divers points considérés comme sources lumineuses ne sont plus nécessairement incohérentes.*

Avant de décrire les célèbres expériences qu'Abbe effectuait avec un microscope, nous indiquerons une technique particulièrement simple et correcte par laquelle le lecteur pourra sans difficulté s'initier à ces curieux phénomènes.

330. Expériences avec un réseau de fentes parallèles. — Plaçons en T une fente. La lentille L en donne une image sur le plan F,

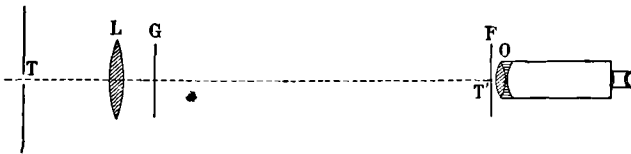


Fig. 196.

tout voisin de l'objectif O d'un viseur d'ouverture aussi grande que possible.

Disposons en G des fentes fines, parallèles, également espacées; un démêloir ordinaire en celluloïd suffit parfaitement.

La distance GF est de 4 à 5 mètres.

Si les dents du peigne sont parallèles à la fente, nous observons

en F des spectres de diffraction (spectre de réseaux), équidistants et symétriquement placés par rapport à l'image géométrique T'. Nous les numérotions 1, 2, 3, ..., à droite et à gauche de l'image T'.

Ceci posé, enlevons la fente T et mettons au point la lunette sur le peigne G : nous en distinguons fort bien les dents.

Réinstallons la fente et recouvrons-la d'un verre rouge, de manière à simplifier les phénomènes. Les spectres de réseau sur le plan F se transforment en franges rouges numérotées 1, 2, 3, ..., de part et d'autre de l'image T'.

Dans la lunette nous apercevons les dents avec leur écartement primitif; il existe seulement des franges très fines dans leur image géométrique.

Plaçons maintenant en F un écran découpé de manière à supprimer les franges 1, 3, 5, ..., de part et d'autre de l'image géométrique : *les dents du peigne apparaissent dédoublées.*

Supprimons toutes les franges latérales dans le plan F et ne conservons que l'image géométrique T' de la fente lumineuse T : *les dents du peigne disparaissent.*

L'explication du phénomène est simple.

Pour savoir quelle image se peint dans le plan conjugué de G par rapport à l'objectif de la lunette, on ne peut plus appliquer la théorie géométrique. En dernière analyse, nous faisons tomber sur une lunette un faisceau central et des faisceaux latéraux 1, 2, 3, ..., de part et d'autre du faisceau central.

Les phases de tous ces faisceaux sont cohérentes.

Le problème à résoudre est le suivant : *Quel phénomène donneront ces faisceaux après réfraction à travers l'objectif en vertu du principe d'Huyghens?* On démontre que si tous les faisceaux latéraux sont admis, c'est-à-dire si l'ouverture de l'objectif est suffisante, on obtient, dans le plan conjugué de G par rapport à l'objectif, *un système de franges* qui se rapproche beaucoup de l'image géométrique du peigne sans pourtant lui être nécessairement identique.

Mais supprimons les faisceaux 1, 3, 5, ... Le système admis dans la lunette se rapproche alors beaucoup (sans cependant qu'il y ait identité) du système de faisceaux qu'enverrait un peigne dont les dents seraient deux fois plus rapprochées (§ 289). Rien d'étonnant à ce que le *système de franges* qui joue le rôle d'image géométrique de G par rapport à l'objectif de la lunette, soit presque identique à l'image géométrique d'un peigne dont les dents seraient deux fois plus nombreuses.

Supprimons tous les faisceaux latéraux; tout se passe comme si le peigne n'existait pas : nous aurons une teinte plate à la place d'image.

331. **Expérience d'Abbe avec le microscope et un réseau de fentes parallèles.** — Plaçons sur la platine d'un microscope un réseau R obtenu en traçant avec un diamant des traits parallèles sur une lame de verre argentée : il y en a par exemple 70 ou 140 au millimètre. Nous donnons les dimensions des pièces qu'on trouve chez Zeiss (Iéna); nous ne saurions trop recommander au lecteur de répéter ces expériences et par la méthode simple précédemment indiquée, et par la méthode même d'Abbe.

Observons le réseau avec un objectif *aa* de Zeiss (longueur focale, 27 millimètres; ouverture numérique, 0,17) et un oculaire grossissant n° 3. Au-dessus de l'objectif se visse une pièce P dans laquelle glisse un porte-diaphragme D. La pièce P se visse elle-même au tube du microscope par l'intermédiaire d'une monture qui permet à tout le système DPO de tourner autour de l'axe de l'appareil.

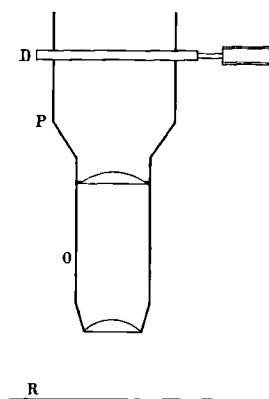


Fig. 197.

PREMIÈRE EXPÉRIENCE.

Enlevons le diaphragme D et l'oculaire; éclairons à l'aide d'un petit trou assez éloigné et recouvert du verre rouge. Regardons dans le tube du microscope et accommodons sur le plan focal principal. Nous voyons, de part et d'autre d'une tache lumineuse centrale C, des taches sensiblement équidistantes 1, 1, 2, 2, ... (I, fig. 198). Ce sont les images de diffraction dues au réseau et régulièrement projetées par l'objectif. Elles sont d'autant plus écartées que les traits sont plus rapprochés. *Si, par exemple, nous doublons le nombre de traits au millimètre du réseau, les taches prennent un écartement double.*

SECONDE EXPÉRIENCE.

Remettons l'oculaire, constatons l'écartement des traits, et introduisons un diaphragme (III, fig. 198) qui, *convenablement orienté*, supprime les images 1 de diffraction, c'est-à-dire qui rend la figure de diffraction *sensiblement* identique à ce qu'elle serait avec un réseau d'un nombre double de traits au millimètre.

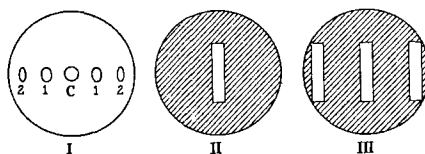


Fig. 198.

Le réseau nous paraît avoir effectivement le nombre double de traits.

Tournons le porte-diaphragme de 90°, de manière que la fente centrale du diaphragme laisse passer toutes les images de diffraction : *les traits du réseau reprennent leur écartement normal.*

TROISIÈME EXPÉRIENCE.

Installons le diaphragme II. Avec l'orientation représentée il ne laisse passer que la tache centrale : *les traits disparaissent et se fondent dans une teinte plate*. Tournons de 90° , les traits reparaissent : c'est qu'alors les images de diffraction ne sont plus arrêtées.

Le même diaphragme qui arrête toutes les images de diffraction d'un réseau au $1/140$, n'arrête plus toutes les images (*deux fois plus rapprochées*) d'un réseau au $1/70$. Corrélativement, si nous regardons un réseau de traits parallèles dont la moitié de la surface est au $1/140$ et l'autre au $1/70$, le même diaphragme *convenablement orienté* supprime l'une des images et non l'autre.

Le résultat général est très simple : *pour obtenir d'un objet périodique une image géométriquement aussi conforme que possible, il ne faut éliminer aucune image de diffraction. Ce sont ces images qui par leurs actions réciproques fournissent l'apparence d'une image géométrique régulière.*

332. Expériences avec un quadrillage. — Reprenons la technique du § 330, mais substituons au réseau G un grillage, par exemple une toile métallique de laiton ou de fer comme on en trouve dans les laboratoires. Éclairons avec un trou recouvert d'un écran rouge.

Dans le plan F nous obtenons la figure de diffraction du grillage à

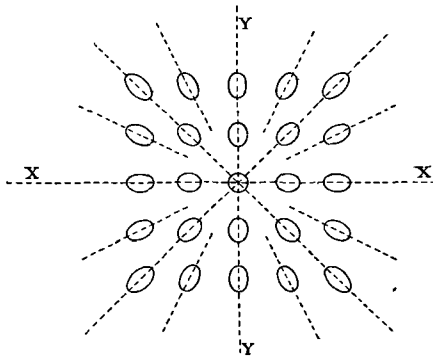


Fig. 199.

mailles rectangulaires ; elle est représentée fig. 199. En lumière monochromatique, les images de diffraction coïncident avec les sommets d'un quinconce dont les côtés sont parallèles aux fils et dont le centre coïncide avec l'image géométrique T' du trou T. Les séries d'images XX et YY parallèles aux fils et passant par le centre, sont particulièrement intenses. L'espacement des droites parallèles du

quinconce d'images de diffraction est précisément égal à l'espacement des franges de diffraction pour un réseau qui ne contiendrait qu'une des séries de fils du grillage.

Les images de diffraction sont de plus en plus ovalisées à mesure qu'on s'éloigne de l'image centrale, du fait qu'on utilise une lumière non parfaitement monochromatique.

Après avoir mis la lunette au point sur le grillage dont les fils

sont supposés verticaux et horizontaux, et constaté leur parfaite visibilité, plaçons devant l'objectif de la lunette une fente *horizontale* : *les traits horizontaux disparaissent*. En effet, nous ramenons approximativement les images de diffraction à ce qu'elles seraient pour un réseau de traits verticaux ; donc nous voyons un tel réseau.

Mettons la fente *verticalement* : *les traits verticaux disparaissent*. Même explication.

Mais voici plus curieux. Mettons la fente à 45° sur l'horizon : *nous apercevons dans le champ de la lunette un réseau de traits normaux à la fente et dont l'espacement est $1 : \sqrt{2} = 0,71$ fois celui des fils du grillage réel*. En effet, la fente ne laisse subsister que les images de diffraction à 45° , qui sont celles que donnerait un réseau normal à la fente. Comme l'équidistance de ces images est égale à $\sqrt{2}$ fois celle des images formant les séries horizontales ou verticales, l'objet nous paraît être formé de traits plus rapprochés que les traits réels dans le rapport de $\sqrt{2}$ à 1.

Tournons la fente de 90° : nous obtenons encore une image formée de traits parallèles, à 45° du grillage réel et à 90° de l'image inclinée précédemment obtenue.

333. Expérience d'Abbe avec le microscope et un quadrillage. — Plaçons sur la platine du microscope un réseau quadrillé. On l'obtient en traçant des traits parallèles et équidistants sur deux lamelles argentées qu'on superpose ensuite à angle droit.

PREMIÈRE EXPÉRIENCE. — Opérons comme plus haut en enlevant l'oculaire et éclairant avec un point éloigné. Nous observons les images de diffraction (fig. 199).

SECONDE EXPÉRIENCE. — Introduisons le diaphragme II (fig. 198). Suivant son orientation, nous verrons successivement un réseau de traits parallèles dans quatre directions à 45° les unes des autres. Les traits de deux images (normales entre elles) ont l'espacement des traits réels ; les traits des deux autres sont plus rapprochés dans le rapport de $\sqrt{2}$ à 1.

TROISIÈME EXPÉRIENCE. — On peut encore obtenir, mais c'est plus difficile, quatre réseaux à 27° des traits du grillage avec un espacement plus petit que l'espacement réel dans le rapport de $\sqrt{3}$ à 1.

QUATRIÈME EXPÉRIENCE. — Introduisons un diaphragme percé de quatre petits trous. Suivant son orientation, nous apercevons soit le grillage réel, soit un grillage à 45° du premier et dont les traits sont plus rapprochés.

334. Vision des objets microscopiques à structure périodique. — De ces expériences et d'autres analogues, Abbe a déduit la théorie de la vision des objets dont la structure est périodique. Voici quelles sont ses remarquables conclusions.

1° On peut voir un objet à structure périodique, même quand on élimine la lumière diffractée, pourvu que la période soit supérieure à 10 microns. Au-dessus de cette limite, il est légitime de parler d'une image au sens de la théorie géométrique. Au-dessous de cette limite, on ne voit qu'une teinte plate, quel que soit le grossissement.

2° Quand on admet un certain nombre de pinceaux diffractés, il existe une image, en ce sens que la teinte n'est pas plate dans le plan conjugué de l'objet. Mais cette image, elle-même périodique, ne reproduit pas nécessairement la structure réelle; la période n'est pas nécessairement la même.

3° Une série de lignes sera toujours reproduite comme telle quand on admettra des pinceaux diffractés; mais les lignes images peuvent être deux, trois, ... fois plus resserrées. Les lignes créées ne peuvent être distinguées par aucun moyen des images des lignes réelles.

4° On tend à se rapprocher d'une image géométriquement conforme en acceptant le plus grand nombre possible de pinceaux diffractés. Ainsi se trouve légitimée par une autre méthode l'importance de l'ouverture numérique (§ 323).

5° La meilleure définition obtenue par l'éclairage oblique avec un objectif d'ouverture donnée, provient de l'admission d'un plus grand nombre de pinceaux diffractés par l'emploi de cet éclairage. Inversement, cet éclairage peut faire apparaître des stries nouvelles dans une préparation qui présente deux systèmes de stries régulières.

CONCLUSION GÉNÉRALE. — Des structures différentes produisent les mêmes images, quand la différence résultant des effets de diffraction propres à chacune d'elles est artificiellement éliminée.

Des structures semblables donnent des images différentes, quand les effets de diffraction sont artificiellement rendus différents.

Les images sont en relation non pas avec les objets, mais avec ce qu'on laisse de leurs effets de diffraction.

335. **Rôle du condenseur d'Abbe.** — La théorie précédente s'appuie sur le fait que, pour de forts grossissements, les différents points de la préparation éclairée par transparence ne peuvent pas être assimilés à des points lumineux indépendants les uns des autres. Les centres d'émission de phases incohérentes sont, non pas dans la préparation, mais bien dans la source éclairante.

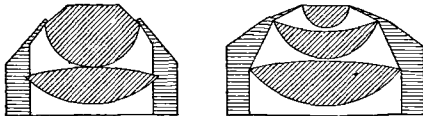


Fig. 200.

Nous avons vu ce qu'il en résulte pour l'importance de l'ouverture numérique; il est facile d'en déduire le rôle de l'appareil d'éclairage, le condenseur, qui est un des grands

perfectionnements dus à Abbe (fig. 200).

Le condenseur d'Abbe, dont la structure est fort analogue à celle d'un objectif, permet d'abord de donner aux faisceaux éclairants une convergence suffisante pour l'utilisation de l'ouverture entière de l'objectif. Il permet de réaliser l'éclairage oblique. *Il permet enfin d'obtenir une image correcte de la source éclairante sur le plan même de la préparation.* Chaque point de l'objet correspond dès lors à un point de la source et devient ainsi, au moins approximativement, une source dont la phase est indépendante de celle des points voisins.

Il est vrai qu'un nouveau problème se pose : *jusqu'à quelle limite de distance deux points d'une source peuvent-ils être considérés comme de phases incohérentes?*

Quoi qu'il en soit, c'est quand la préparation est *dans la lumière* qu'on obtient la meilleure définition des images, comme le veut la théorie.

Franges au voisinage d'un point quelconque de la caustique.

336. Franges au voisinage d'un point quelconque de la caustique. — Il s'agit de phénomènes qui sont parmi les plus beaux de l'Optique et des plus vulgaires.

Nous savons (§ 52) qu'au voisinage d'un point quelconque de la caustique, la surface d'onde *se replie*; elle se compose alors de deux nappes tangentes entre elles suivant une arête de rebroussement qui est une courbe tracée sur la caustique (fig. 33).

Considérons une droite passant par le point T voisin de C_1 , normale au plan du tableau, par conséquent parallèle à la tangente à l'arête de rebroussement passant en C_1 . Sur cette droite, au voisinage du plan du tableau, se coupent la nappe S_1 d'une certaine onde (dont l'arête de rebroussement passe par un point de la caustique compris entre C_1 et E) et la nappe S_2 d'une autre onde (dont l'arête de rebroussement passe par un point de la caustique compris entre C_1 et F). Or les vibrations de S_2 sont en retard par rapport aux vibrations de S_1 d'une quantité sensiblement égale à la distance, au niveau du point T, des nappes $S'_1S'_2$ de la surface d'onde S' . Du moins il en serait ainsi si la nappe S_2 qui a franchi sa focale (arête de rebroussement) n'avait pas pris une avance de $\lambda/4$ (§ 224).

En définitive, la différence de marche au point T, à une distance x du centre de courbure C_1 , est (§ 53) :

$$2y - \frac{\lambda}{4} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2}{\rho}} \sqrt{x^3} - \frac{\lambda}{4} = m \frac{\lambda}{2},$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{32} \left(\frac{2m+1}{4} \right)^2 \lambda^2 \rho}. \quad (1)$$

Plaçons notre œil dans le plan du tableau en un point du rayon C_1M'' , de manière à recevoir les rayons qui ont tangenté la caustique au voisinage du point C_1 . Accommodons-nous sur ce point. Nous apercevrons dans le plan C_1N normal à la visée, des franges parallèles à l'arête de rebroussement de la surface d'onde passant en C_1 . Leurs largeurs sont proportionnelles à la racine cubique du rayon de courbure de la caustique et à la puissance 2 : 3 de la longueur d'onde. On a des maximums pour toutes les valeurs entières paires de m et des minimums pour toutes les valeurs entières impaires.

La largeur des franges décroît donc très vite quand on s'éloigne de la caustique.

Ainsi nous devons nous représenter, autour des nappes de la caustique, une série de surfaces alternativement brillantes et sombres. Leurs distances les unes aux autres et à la caustique, au voisinage d'un point C_1 de celle-ci, varient suivant la même loi et proportionnellement à la racine cubique du rayon de courbure ρ de la caustique dans la section principale qui passe par le rayon lumineux tangent au point C_1 . Ces surfaces de maximum et de minimum d'intensité se rapprochent quand la courbure de la caustique augmente.

Quand la caustique présente une arête de rebroussement, le rayon de courbure devient nul; les franges sont à une distance nulle. Le phénomène change de caractère.

Il est remarquable que l'existence des surfaces dont il est ici question ne dépende en aucune manière de la limitation de l'onde employée. Par leurs distances respectives, elles caractérisent la caustique au voisinage d'un de ses points.

337. Méthode générale de calcul. — Il est facile de faire le calcul par une application directe du principe d'Huyghens, sans s'occuper de la forme de l'onde au voisinage de la caustique. Cherchons le mouvement envoyé au point T voisin de la caustique par l'onde indéfinie QMS supposée cylindrique et d'équation (fig. 35) :

$$Y = aX^2 + bX^3.$$

Son rayon de courbure $R = \overline{MC_1}$, au point M, est :

$$R = 1 : 2a.$$

La distance \overline{NT} du point N de l'onde QMNS au point T est :

$$r = \sqrt{(X - x)^2 + \left(\frac{1}{2a} - Y\right)^2},$$

expression qu'il est facile de mettre sous la forme :

$$r = \frac{1}{2a} - bX^3 - 2aXx = \frac{1}{2a} - r', \quad (2)$$

en négligeant les termes en x^3 et en X^4 . L'intégrale à calculer pour appliquer le principe d'Huyghens est :

$$\int \sin\left(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda}\right) dX = \int \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{\lambda a} + \frac{2\pi r'}{\lambda}\right) dX,$$

en admettant que l'amplitude envoyée par le rectangle de largeur dX et de hauteur indéfinie est proportionnelle à dX . L'intégrale se décompose en deux :

$$\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{\lambda a}\right) \int \cos \frac{2\pi r'}{\lambda} dX + \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{\lambda a}\right) \int \sin \frac{2\pi r'}{\lambda} dX.$$

La seconde intégrale est nulle, puisque r' est une fonction impaire de X ; les éléments sont deux à deux égaux et de signes contraires.

Reste la première intégrale. Elle a pour limites les limites de l'onde dans le plan du tableau, que nous devons supposer assez rapprochées pour que le développement (2) soit admissible. Mais le coefficient du terme en X^3 de ce développement est constant, et ce terme prédomine quand X n'est pas très petit. Bientôt le cosinus prend toutes les valeurs comprises entre -1 et $+1$ pour une variation insignifiante de X ; la valeur moyenne de l'intégrale pour cette variation est nulle. Donc on commet une erreur négligeable en intégrant entre $X = -\infty$ et $X = +\infty$. En définitive, l'amplitude est donnée par l'intégrale :

$$2 \int_0^{\infty} \cos \frac{2\pi r'}{\lambda} dX = 2 \int_0^{\infty} \cos \frac{\pi}{2} \left[\frac{4b}{\lambda} X^3 + \frac{8a}{\lambda} Xx \right] dX,$$

qu'on peut écrire :

$$2 \int_0^{\infty} \cos \frac{\pi}{2} (u^3 - zu) du, \tag{3}$$

$$\text{en posant : } \frac{4b}{\lambda} X^3 = u^3, \quad \frac{8a}{\lambda} Xx = -zu. \tag{4}$$

La disposition de la figure entraîne que R croisse quand X croît; d'après l'expression du rayon de courbure R donnée au § 53, il faut que b soit négatif. On trouve :

$$x = -z \sqrt[3]{\frac{b\lambda^2}{128 a^3}} = z \sqrt[3]{\frac{\lambda^2 \rho}{96}}, \tag{5}$$

en appelant ρ la valeur absolue du rayon de courbure de la caustique. Dans la disposition de la figure, aux valeurs positives de z correspondent les valeurs positives de x , c'est-à-dire l'extérieur de la caustique, c'est-à-dire encore la partie illuminée de l'espace.

L'intégrale (3) est une certaine fonction de z dont nous donnons une table à la page 408. Quand x est connu, c'est-à-dire quand on se donne le point T , la valeur de z est connue par les équations (5).

La figure 201 et la table montrent la marche du carré de la fonction :

$$f(z) = \int_0^{\infty} \cos \frac{\pi}{2} (u^3 - zu) du.$$

Pour des valeurs *négatives* de z inférieures à -3 , f^2 est négligeable. Elle croît d'une manière continue et vaut 0,442 pour $z=0$. Elle passe par un maximum très voisin de l'unité pour $z=1,08$; elle s'annule pour $z=2,49$, $z=4,36$, $z=5,89$,... Elle est maxima pour $z=3,47$, $z=5,14$,...

Les valeurs négatives de z correspondent aux valeurs négatives de x , c'est-à-dire aux points de la droite OC_1N qui sont à l'intérieur

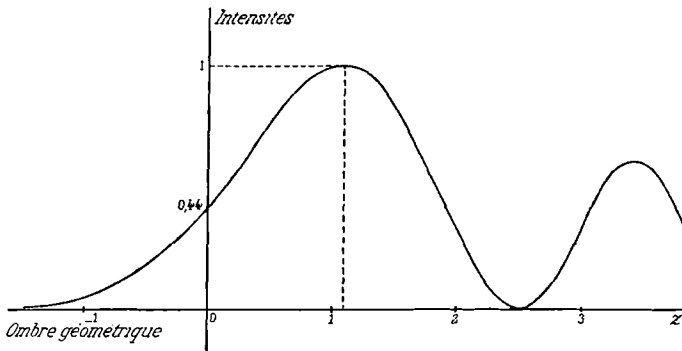


Fig. 201.

de la caustique, dans l'ombre géométrique par conséquent.

Ainsi la caustique n'est pas une limite rigoureuse pour l'énergie.

Pour z positif, par conséquent pour x positif et pour l'extérieur de la caustique, l'intégrale passe par une série de maximums et de minimums. Ils correspondent sensiblement aux valeurs de z données par

$$\text{la condition :} \quad z = 3 \sqrt[3]{\left(\frac{2m+1}{4}\right)^2}. \quad (6)$$

Les maximums correspondent à m entier et pair, les minimums à m entier et impair.

La relation (6) est précisément celle qu'on obtient en comparant les équations (1) et (5).

338. Expériences (Larmor). — Regardons un point brillant envoyant de la lumière sensiblement homogène (trou fin éclairé par la lumière électrique avec interposition d'un verre rouge) à travers une glace sur laquelle on a projeté de petites gouttelettes d'eau. Il se produit des caustiques sur la rétine même; leurs sections par le plan de la rétine apparaissent comme des courbes brillantes accom-

pagnées d'une bordure de franges de diffraction parallèles qui produisent un admirable phénomène.

On observe les mêmes franges sur la vitre d'un fiacre quand il pleut, en regardant un bec de gaz éloigné.

Leur caractère se modifie près des rebroussements de la caustique, où l'on aperçoit de véritables franges d'interférence.

Il ne faut pas confondre ces franges avec les franges qui entourent l'ombre géométrique. Par exemple, recevons dans l'œil la lumière émise par un point lumineux éloigné, à travers une lentille qui la fait converger. Il se forme sur la rétine les ombres des petits corps opaques que contiennent toujours les milieux de l'œil (mouches volantes); *elles sont entourées des franges ordinaires de diffraction* (§ 310).

On obtient les franges au voisinage de la caustique, en regardant à la loupe le contour apparent de la caustique que donne un point lumineux éloigné à travers une lentille inclinée (§ 111). Les franges sont très facilement visibles, même avec un grossissement faible. Il est bon d'employer de la lumière à peu près monochromatique.

**Franges au voisinage d'un minimum de déviation.
Arc-en-ciel.**

339. Phénomènes au voisinage d'un minimum d'inclinaison. — Nous savons (§ 55) que la section droite de l'onde supposée cylindrique a un point d'inflexion sur la trace du rayon qui correspond au minimum d'inclinaison. L'équation de l'onde au voisinage du point d'inflexion peut être mise sous la forme :

$$Y = bX^3.$$

Cherchons quel est le système de franges à l'infini que donne une telle onde; déterminons l'amplitude résultante dans une direction β (fig. 202).

Le retard δ de la vibration envoyée par le point A de la section droite, retard compté par rapport à la vibration envoyée par le point O, est :

$$\delta = -(\overline{AC} + \overline{CD}) = -(Y \cos \beta + X \sin \beta) = -(bX^3 \cos \beta + X \sin \beta).$$

Comme β est toujours petit, nous poserons :

$$\delta = -(bX^3 + \beta X).$$

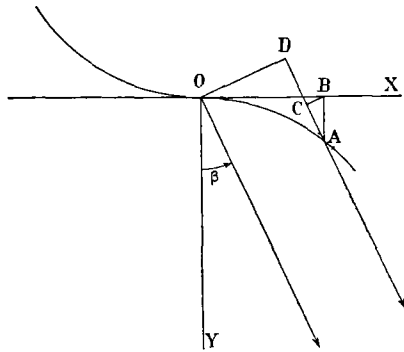


Fig. 202.

Le mouvement envoyé par l'onde entière est :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi\delta}{\lambda}\right) dX = 2 \sin \omega t \int_0^{\infty} \cos \frac{2\pi\delta}{\lambda} dX,$$

en vertu du raisonnement du § 337.

Posons : $u^3 = \frac{4b}{\lambda} X^3, \quad -zu = \frac{4X\beta}{\lambda}.$

L'intensité est définie, à un facteur constant près, par le carré de l'intégrale :

$$\int_0^{\infty} \cos \frac{\pi}{2} (u^3 - zu) du,$$

que nous avons déjà rencontrée (§ 337).

Reportons-nous aux figures 37 et 202. Nous verrons que les angles β positifs, qui correspondent aux valeurs négatives de z , définissent les directions pour lesquelles il n'existe aucun rayon lumineux. Quand on reçoit le faisceau faisant avec OY un angle β positif, on se trouve à l'intérieur de la caustique, dans l'ombre géométrique. Nous savons que la fonction f^2 ne présente alors ni maximum ni minimum : *il n'y a pas de franges dans l'ombre géométrique.*

Au contraire, pour les valeurs de z positives, c'est-à-dire pour les valeurs négatives de β , correspondant à des rayons réels, il y a des franges. La fonction f^2 présente alternativement des maximums et des minimums qui satisfont approximativement à la condition :

$$z = 3 \sqrt[3]{\left(\frac{2m+1}{4}\right)^2}.$$

L'intensité est nulle pour m entier impair, maxima pour m entier pair. Les franges se succèdent exactement suivant la même loi que celles du § 337. Mais il faut les observer avec un collimateur réglé sur l'infini ou avec l'œil accommodé sur un objet éloigné.

340. Expériences. Arcs surnuméraires de l'arc-en-ciel. — Nous avons démontré au § 130 qu'un faisceau parallèle tombant sur un cylindre parallèlement à la section principale est, à l'émergence, tangent à une caustique qui possède deux plans asymptotiques. Elle correspond à une surface d'onde cylindrique dont les sections droites possèdent deux points d'inflexion ; les tangentes d'inflexion sont normales aux asymptotes de la section droite de la caustique. Au voisinage de chacun des points d'inflexion, nous sommes donc dans le cas étudié au paragraphe précédent.

Regardons avec un collimateur réglé pour l'infini dans la direction de l'une des asymptotes de la section droite de la caustique, nous verrons en lumière monochromatique des franges distribuées suivant la loi ci-dessus étudiée.

L'écartement des franges est caractérisé par la constante b de l'équation :

$$Y = bX^3,$$

de la surface d'onde. Nous avons trouvé (§ 132) que b dépend du rayon a du cylindre, de son indice n , et de l'ordre p du phénomène, par la relation :

$$b = \frac{1}{3a^2} \frac{(q^2 - 1)^2}{q^2} \sqrt{\frac{q^2 - n^2}{(n^2 - 1)^3}},$$

qui pour $p = 1$, $q = 2$, devient :

$$b = \frac{3}{4a^2} \sqrt{\frac{4 - n^2}{(n^2 - 1)^3}}.$$

Les vérifications se font aisément avec des tiges cylindriques de verre bien travaillées, disposées normalement sur la platine d'un goniomètre et éclairées avec de la lumière homogène. Si l'appareil est bien réglé, on aperçoit plus de 200 franges (Mascart).

ARCS SURNUMÉRAIRES DE L'ARC-EN-CIEL. — A l'intérieur du premier arc-en-ciel, à l'extérieur du second, c'est-à-dire à l'extérieur des caustiques correspondantes (§ 134, là où se trouvent les rayons), on aperçoit des franges circulaires colorées, parallèles aux arcs, qu'on appelle *arcs surnuméraires*. Ces franges sont dues à l'existence pour chaque arc d'un cône de rayons inclinés au minimum sur une direction invariable.

Nous retombons donc dans la théorie précédente, à la différence près qu'il s'agit ici d'une onde de révolution et non plus d'une onde cylindrique. Les franges sont maintenant circulaires, mais elles restent distribuées suivant la loi ci-dessus calculée.

Tandis que la production de l'arc-en-ciel ne suppose pas aux gouttes de pluie le même diamètre, les arcs surnuméraires ne sont nets que si cette condition est satisfaite, puisque l'écartement des franges dépend du rayon des sphères. On comprend donc que les arcs surnuméraires soient moins fréquents que l'arc-en-ciel.

Diffraction éloignée.

341. Diffraction éloignée (Gouy). — Nous avons principalement étudié la diffraction dans le cas de faibles déviations. Disons quelques mots de la *diffraction éloignée*.

Une lentille achromatique C envoie un faisceau convergent sur le bord rectiligne B très aiguë d'un écran E. On regarde ce bord soit à l'œil nu, soit avec un microscope M de faible grossissement. La *déviatio*n due à la diffraction est définie par l'angle ω . Nous supposons que le *plan de diffraction* passant par les rayons incidents et diffractés est normal au bord rectiligne de l'écran.

La diffraction est *intérieure* si on observe *dans* l'ombre géométrique, comme le suppose la figure; *extérieure*, si on observe *hors* de l'ombre géométrique. Étudions d'abord la diffraction *intérieure*.

Le bord B est transformé, d'après le principe d'Huyghens, en une source lumineuse. On le voit comme une ligne brillante extrêmement fine, très régulière, qui dessine parfaitement la forme du bord; elle est donc rectiligne si le bord est bien travaillé; elle est sinueuse ou interrompue si le bord est courbe ou discontinu. On la distingue à l'œil nu en se plaçant même à plusieurs mètres; on l'observe commodément à l'aide du microscope. On peut même en déterminer approximativement l'éclat en la comparant à un fil F de platine de 20μ de diamètre tendu parallèlement et qui réfléchit la lumière.

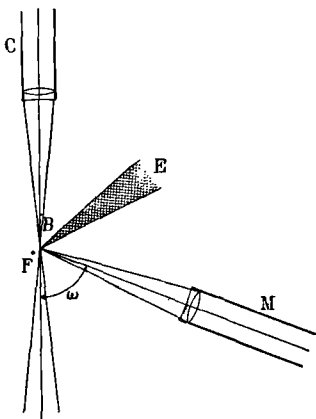


Fig. 203.

L'expérience montre d'abord que cette ligne brillante est visible, *même pour des angles ω différant peu de 180°* , pourvu

qu'on prenne comme source lumineuse le Soleil ou l'arc électrique et que le bord soit assez tranchant : son rayon de courbure doit par exemple être *inférieur* à 10μ . Si le rayon est de l'ordre de 20μ , on ne perçoit de lumière que jusque vers $\omega = 45^\circ$. On fait commodément cette vérification avec des fils fins fortement éclairés et dont on connaît le diamètre; un des bords réfléchit la lumière, mais l'autre la diffracte. A mesure que le diamètre croît, l'angle ω à partir duquel on ne voit plus de lumière diffractée, si intense que soit l'éclairement, diminue. On s'explique ainsi que pour obtenir une diffraction très éloignée, il faille obtenir un tranchant d'acier parfaitement aiguisé.

La lumière diffractée ne reste pas blanche.

1° Il y a prédominance des radiations de grandes longueurs d'onde, prédominance d'autant plus marquée que la déviation est plus grande et le bord plus arrondi.

2° Il y a alternance des teintes; le phénomène présente une grande analogie avec de grosses franges de diffraction. Avec une lumière homogène, on constate des maxima et des minima.

3° Enfin il y a prédominance de la couleur superficielle du métal.

On a repris ces expériences en plongeant l'écran dans un liquide contenu dans un prisme formé de glaces parallèles. On s'arrange pour qu'à l'entrée et à la sortie les rayons passent normalement à travers ces glaces. On trouve que l'accroissement de l'indice du milieu ambiant agit comme ferait un accroissement d'épaisseur du bord de l'écran. L'intensité de la lumière diffractée diminue.

342. Polarisation par diffraction sur le bord d'un écran. — Suivant notre convention générale de langage, nous admettons avec Fresnel que *la vibration est perpendiculaire au plan de polarisation, c'est-à-dire que la lumière, polarisée rectilignement par réflexion sur un miroir, vibre parallèlement à la surface du miroir ou perpendiculairement au plan de réflexion, ce qui revient au même.*

Soit P l'intensité (carré de l'amplitude) de la vibration diffractée *parallèle* au bord de l'écran, *normale* au plan de diffraction; soit N l'intensité de la vibration diffractée *normale* au bord de l'écran, *parallèle* au plan de diffraction.

Utilisons de la lumière incidente naturelle.

L'expérience montre que la lumière diffractée *intérieurement* est partiellement polarisée dans un plan parallèle au bord de l'écran; la composante normale au bord est donc supérieure à la composante parallèle: on a $N > P$. Le rapport $P : N$ est égal à l'unité pour une déviation petite; il tend vers 0 quand la déviation tend vers 180° . Il est de l'ordre de quelques centièmes pour une déviation de 30° . Pour une déviation suffisante, la lumière diffractée *intérieurement* vibre donc *normalement* au bord de l'écran.

Quand on opère avec de la lumière blanche, les lumières P et N n'ont pas la même teinte. La vibration N, de beaucoup la plus intense, offre la même teinte que la lumière diffractée observée sans analyseur; la vibration P est toujours *parfaitement blanche*.

Nous n'avons parlé précédemment que de la lumière diffractée *intérieurement*. On trouve qu'*avec des bords très tranchants, les lumières diffractées intérieurement et extérieurement ont des intensités égales pour une même déviation, la lumière incidente étant naturelle*. Il suit de là que dans la lumière diffractée extérieurement, c'est la composante P' parallèle au bord de l'écran qui l'emporte sur la composante normale N'.

L'effet de la diffraction extérieure est complémentaire de l'effet de la diffraction intérieure pour chaque déviation.

A la limite pour un écran infiniment tranchant, on aurait $P' = N$, $N' = P$ pour chaque déviation.

Les phénomènes dus à la lumière incidente polarisée découlent de ce qui précède.

Si la lumière incidente vibre dans un des azimuts principaux P ou N, elle reste après diffraction dans cet azimut. Sinon il faut la décomposer en deux vibrations qui seront différemment traitées.

Milieux troubles. Vision des objets ultramicroscopiques.

343. **Formule de Stokes.** — Voici quel problème Stokes s'était proposé de résoudre.

Soit un mouvement se propageant par ondes planes; D'OP est le plan de l'onde (fig. 204), OV est la direction de la vibration, OR' est la direction de propagation. Il s'agit de calculer quel mouvement un élément dS de l'onde, situé au voisinage du point O, envoie par diffraction dans la direction OD faisant l'angle $\Theta = \widehat{DOV}$ avec la vibration, et l'angle ψ avec la normale OR' à l'onde.

Le plan R'OD est la *plan de diffraction*.

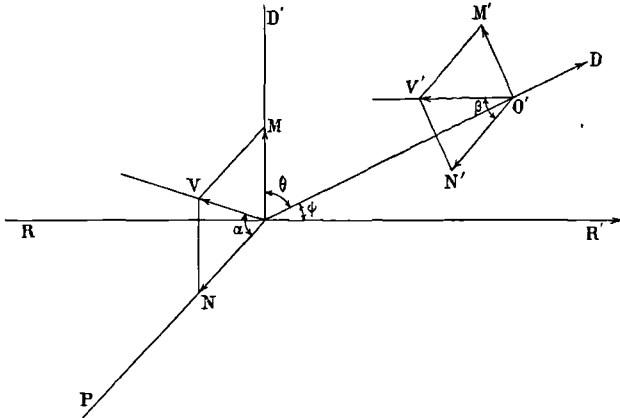


Fig. 204.

Stokes tire les conséquences suivantes d'une théorie sur laquelle nous n'insisterons pas.

La vibration diffractée $O'V'$ est normale à la direction OD; elle est dans le plan $O'OV$.

Ces conditions fixent complètement sa position.

A la distance $\overline{OO'} = r$, sa grandeur est (à un coefficient près) :

$$\frac{dS}{r\lambda} (1 + \cos \psi) \sin \Theta \cos \left(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda} \right). \quad (1)$$

Décomposons la vibration OV en deux composantes : $\overline{OM} = \sin \alpha$ dans le plan de diffraction, $\overline{ON} = \cos \alpha$ normale à ce plan. Appliquons la formule (1) à ces composantes. Au coefficient près :

$$dS(1 + \cos \psi) : r\lambda,$$

la composante \overline{OM} fournit une composante $\overline{O'M'}$ diffractée dans le plan de diffraction ($\Theta = \theta$) :

$$\overline{O'M'} = \overline{OM} \sin \theta = \sin \alpha \sin \theta ;$$

la composante \overline{ON} fournit une composante $\overline{O'N'}$ normale au plan de diffraction :

$$\overline{O'N'} = ON = \cos \alpha ,$$

puisqu'alors $\sin \Theta = 1$.

On a donc pour l'angle β que fait $O'V'$ avec la normale au plan de diffraction :

$$\text{tg } \beta = \frac{\sin \alpha \sin \theta}{\cos \alpha} = \text{tg } \alpha \sin \theta = \text{tg } \alpha \cos \psi .$$

On obtient immédiatement cette formule en écrivant que $O'V'$ est dans le plan $O'OV$. Les droites OV , OM , OO' , déterminent en effet un triangle sphérique rectangle dont les faces adjacentes à l'angle droit sont $\pi : 2 - \alpha$ et θ ; l'angle dièdre opposé à la première est $\pi : 2 - \beta$.

Il résulte de cette formule que α est toujours plus grand que β . Le plan de vibration de la lumière diffractée est donc plus éloigné du plan de diffraction que le plan de vibration de la lumière primitive. Le plan de polarisation est rapproché du plan de diffraction par la diffraction même.

La vérification expérimentale de la formule de Stockes est très compliquée et assez incertaine; en particulier, elle est loin de rendre compte des phénomènes signalés dans les deux paragraphes précédents. Nous n'insisterons pas.

Nous dirons maintenant quelques mots d'un problème analogue, mais dont la solution paraît beaucoup plus sûre.

344. Diffraction par une particule sphérique dont les dimensions sont très petites vis-à-vis de la longueur d'onde (L. Rayleigh). — On suppose qu'une onde plane traverse un milieu transparent dans lequel existent des particules sphériques, dont le rayon est très petit par rapport aux longueurs d'onde lumineuses, et qui troublent la propagation.

On peut admettre que tout se passe comme si l'onde n'était pas troublée et comme si la particule devenait un centre d'émission polarisé.

Dans la Théorie électromagnétique de la lumière, elle joue donc le rôle d'un petit oscillateur de Hertz, dirigé parallèlement à la vibration électrique (vibration de Fresnel) de l'onde troublée. Les propositions que nous démontrerons en Électroptique pour cet oscillateur (Tome V), lui sont donc immédiatement applicables.

Soit D' une variable mesurant les propriétés réfractives de la particule (nous verrons plus loin comment elle se relie à l'indice), D la même variable mesurant les propriétés du milieu ambiant, V le volume de la particule, λ la longueur d'onde, θ l'angle que fait la direction OD d'émission avec la direction BOB' de la vibration primaire (fig. 205).

L'amplitude envoyée à une distance r suffisamment grande par rapport à la longueur d'onde λ a pour expression :

$$\frac{D' - D}{D} \frac{\pi V}{r \lambda^2} \sin \theta \cos \left(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda} \right). \quad (1)$$

La vibration propagée dans la direction OD est normale à OD et fait avec la vibration primaire le plus petit angle possible; elle est donc dirigée dans le plan passant par OD et la vibration primaire.

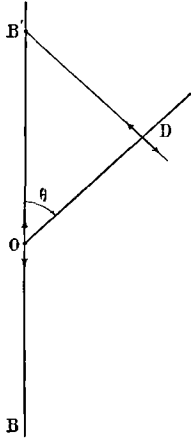


Fig. 205.

Cherchons ce qui résulte de la formule (1) quand on reçoit une onde plane rectilignement polarisée sur des particules sphériques très petites.

Soit RO la normale à l'onde plane P ; soit BOB' la direction de la vibration (fig. 206).

L'intensité diffractée est constante dans le plan $A'RA$ pour lequel on a : $\sin \theta = 1$.

Elle est nulle dans la direction BOB' pour laquelle $\sin \theta = 0$.

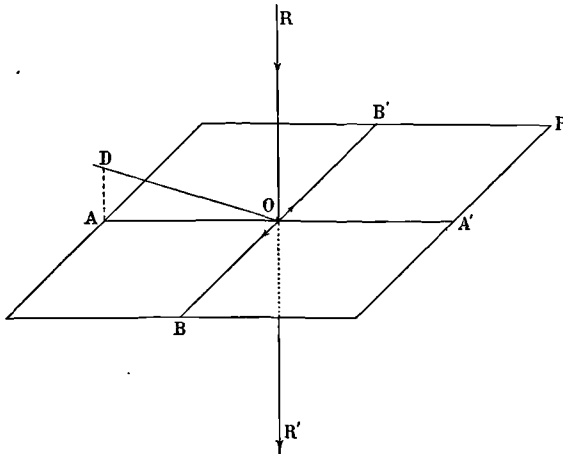


Fig. 206.

Supposons maintenant que l'onde ne soit pas polarisée; nous pouvons décomposer la vibration en deux composantes rectangulaires, suivant BOB' , AOA' , par exemple. Dans la direction OB , la composante BOB' n'envoie rien, la composante AOA' émet au maximum. Il résulte de là que la lumière diffractée dans le plan P est rectilignement polarisée; les vibrations

sont dans ce plan P lui-même. Autrement dit, le plan de

polarisation de la lumière diffractée dans le plan P est normal au plan P.

Hors du plan P la polarisation est de moins en moins complète; suivant la normale au plan, direction normale de propagation, la lumière n'est plus polarisée.

D'une manière générale, soit ψ (fig. 204) l'angle de la direction de diffraction avec la direction de propagation.

Quand l'onde n'est pas polarisée, nous pouvons considérer qu'elle est due à deux composantes rectangulaires quelconques dont les amplitudes moyennes sont égales. La composante OM donne une composante $\overline{OM'}$ d'intensité moyenne :

$$\left(\frac{D' - D}{D}\right)^2 \frac{\pi^2 V^2}{r^2 \lambda^4} \cos^2 \psi;$$

la composante \overline{ON} donne une composante $\overline{ON'}$ d'intensité moyenne :

$$\left(\frac{D' - D}{D}\right)^2 \frac{\pi^2 V^2}{r^2 \lambda^4}.$$

L'intensité moyenne de la lumière diffractée est donc :

$$\left(\frac{D' - D}{D}\right)^2 \frac{\pi^2 V^2}{r^2 \lambda^4} (1 + \cos^2 \psi).$$

La vibration dans le plan de diffraction est toujours plus petite que la vibration perpendiculaire : *la lumière est dite partiellement polarisée dans le plan de diffraction*. On prend pour mesure de la polarisation partielle le rapport de la différence des intensités maxima et

minima à leur somme :

$$\frac{1 - \cos^2 \psi}{1 + \cos^2 \psi}.$$

Ce rapport est égal à l'unité pour $\psi = \pi : 2$; il est nul pour $\psi = 0$: c'est ce que nous avons déjà trouvé.

Quand l'onde incidente est polarisée, la formule de Stockes :

$$\text{tg } \beta = \text{tg } \alpha \cos \psi,$$

s'applique évidemment.

L'expérience vérifie la théorie pourvu qu'on emploie des particules assez petites.

345. Expériences de vérification. Polarisation atmosphérique. — Pour vérifier la nature de la polarisation, on emploie commodément les précipités obtenus en traitant des solutions étendues d'hyposulfite de sodium par l'acide sulfurique dilué. On règle le mode d'apparition du précipité de soufre en étendant plus ou moins les solutions. On arrête la précipitation en neutralisant par l'ammoniaque.

Au début, *quand les particules sont extrêmement petites*, la théorie

s'applique exactement; c'est bien à 90° du rayon incident non polarisé que la polarisation est complète.

Quand les particules *grossissent*, la polarisation cesse d'être complète à 90° ; mais on l'observe encore complète pour des directions OD faisant avec la direction OR' de propagation un angle $R'OD = \psi$ (fig. 204) supérieur à 90° . Une théorie plus complète indique qu'il doit en être ainsi pour les particules qui ne sont pas très petites par rapport à la longueur d'onde.

Les mêmes résultats sont fournis par les solutions colloïdales non métalliques (silice colloïdale, sulfure d'arsenic).

Il faut ajouter que pour les colloïdes métalliques fraîchement préparés, l'angle ψ définissant les directions de polarisation complète est notablement plus petit que 90° (compris entre 60 et 70°).

Le bleu du ciel est polarisé plus ou moins complètement dans un plan qui passe par le Soleil (*plan de diffraction*), ce qui est bien conforme à la théorie. Le maximum de polarisation est à 90° du Soleil. Toutefois le *point neutre*, lieu de la polarisation nulle, n'est pas directement opposé au Soleil, ne coïncide pas avec l'*anthélie*. Il existe même plusieurs points neutres dans le plan vertical du soleil. Ces complications n'infirmen en rien le système général d'explication : nous n'avons pas à insister.

Quand on fait traverser une solution par un faisceau lumineux et qu'il devient nettement visible, on peut douter s'il s'agit d'un phénomène de diffraction sur des particules en suspension ou d'un phénomène de fluorescence. En lumière monochromatique, le doute n'est généralement pas possible : la diffraction laisse la longueur d'onde inaltérée, ce que ne fait pas la fluorescence. En lumière complexe, la polarisation partielle des rayons émis suffit à caractériser la diffraction. Les vibrations qui l'emportent sont normales au plan de diffraction; si l'on veut, la polarisation est plus ou moins complète dans le plan de diffraction.

346. Composition du faisceau diffracté par des particules petites vis-à-vis de la longueur d'onde. — L'amplitude étant, toutes choses égales d'ailleurs, en raison inverse du carré de la longueur d'onde, l'intensité est en raison inverse de sa quatrième puissance.

Il résulte de là que si le faisceau incident est blanc, la lumière diffractée est *bleue*. Deux radiations dont les longueurs d'onde sont dans le rapport de 1 à 2, donnent des intensités diffractées dans le rapport de 16 à 1.

Il est remarquable que la composition de la lumière calculée en appliquant cette loi au spectre solaire, soit à peu près identique à celle du *bleu du ciel*. On attribue ce bleu à la diffraction par les molécules de l'air.

Chaque fois que l'on produit dans un milieu des particules assez ténues, on observe d'abord une teinte bleue. Quelques gouttes d'essence de citron dans l'eau ou un précipité très léger de chlorure d'argent colorent d'abord en bleu ; mais les particules grossissent peu à peu, le phénomène change et la teinte vire au blanc.

347. Absorption dans la direction de propagation normale.

— Pour satisfaire le principe de la conservation de l'énergie, il faut que la lumière diffractée ne se retrouve pas dans la lumière transmise : d'où un coefficient d'absorption que nous allons calculer.

L'énergie totale diffractée par une particule s'obtient aisément. La quantité émise dans l'angle solide limité par les cônes d'angles au sommet θ et $\theta + d\theta$, est proportionnelle à :

$$\int_0^\pi \frac{\sin^3 \theta}{r^2} \cdot 2\pi r \sin \theta \cdot r d\theta = 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d\theta = \frac{8\pi}{3}.$$

L'énergie totale émise par une molécule est :

$$\frac{8\pi^3}{3} \left(\frac{D' - D}{D} \right)^2 \frac{V^2}{\lambda^4},$$

en prenant pour unité l'énergie de l'onde plane primaire par unité d'aire.

Supposons qu'il existe n particules par unité de volume et considérons une couche d'épaisseur dx . Soit E et $E + dE$ les énergies de l'onde primaire avant et après le passage à travers cette couche. On a :

$$\frac{1}{E} \frac{dE}{dx} = - \frac{8\pi^3 n}{3} \left(\frac{D' - D}{D} \right)^2 \frac{V^2}{\lambda^4} = -h, \quad E = E_0 e^{-hx}.$$

Il résulte de la forme de h en fonction de λ que la lumière se dépouille assez rapidement des radiations de petites longueurs d'onde et tend vers la coloration rouge. On sait que la lumière solaire qui a traversé notre atmosphère, est pauvre en violets et surtout en ultraviolets, comparativement à la lumière de l'arc électrique par exemple.

348. Relation entre les variables D et D' et les propriétés réfractives du milieu. — Les particules, étant très petites par rapport à la longueur d'onde, doivent être considérées comme quasiment transparentes. Si en définitive elles produisent une absorption, c'est par la lumière qu'elles diffractent.

Les variables D et D' sont liées à l'indice de réfraction μ du milieu ; la théorie électromagnétique fournit la relation :

$$\mu - 1 = nV \frac{D' - D}{2D}.$$

La constante h d'absorption serait donc :

$$h = \frac{32\pi^3(\mu - 1)^2}{3n\lambda^3}.$$

Ainsi se trouvent reliés le coefficient h , l'indice de réfraction et le nombre des particules que contient le milieu. Cherchons l'ordre de grandeur de h .

Prenons : $\lambda = 6 \cdot 10^{-5}$, $\mu - 1 = 0,000 \cdot 3$.

La formule donne pour le chemin x tel que la lumière soit atténuée dans le rapport de e à 1, c'est-à-dire de 2,7 à 1 :

$$x = 4,4 \cdot 10^{-13} n.$$

Faisons : $n = 4 \cdot 10^{19}$ (II, § 219); il vient : $x = 176$ kilomètres.

Il semble bien que l'atmosphère est moins transparente que ne l'indique ce calcul, même si on la suppose absolument purifiée de poussières (§ 175). On serait conduit pour augmenter h à diminuer le nombre n . Il n'en est pas moins remarquable qu'on arrive à un résultat aussi voisin de la réalité.

349. Vision des objets ultramicroscopiques (Cotton et Mouton). — Le fait que nous voyons les étoiles *malgré l'insignifiance de leur angle apparent* prouve que rien ne limite la petitesse d'un objet, quand il s'agit de reconnaître, non pas sa *forme*, mais son *existence*. Il faut seulement qu'il envoie une quantité suffisante de lumière et qu'il se projette sur un fond absolument obscur.

Les étoiles se classent en *grandeurs*; cela veut dire, non pas qu'une étoile de première grandeur a un diamètre apparent supérieur à celui d'une étoile de seconde grandeur, mais uniquement que la première envoie plus de lumière que la seconde. Nous voyons les étoiles la nuit et non le jour, à cause de la luminosité différente du fond sur lequel elles se projettent.

Une particule diffracte de la lumière dans tous les sens; c'est précisément l'hypothèse du § 344. Éclairons-la donc avec un faisceau intense *dirigé de manière à ne pas nous parvenir directement*; nous pourrions recevoir sa lumière diffractée. Elle joue le rôle d'une source lumineuse sur un fond obscur, grâce à la précaution de supprimer toute lumière parasite. Ses dimensions, supposées très inférieures à la longueur d'onde des radiations lumineuses, interviennent seulement pour limiter la quantité de lumière diffractée; il est naturel d'admettre (§ 344) que cette quantité croît avec la grosseur de la particule, au moins tant que celle-ci est *ultramicroscopique*, tant que ses dimensions sont inférieures à $100\mu\mu$ par exemple.

Dans bien des cas, si les particules sont assez grosses et assez distantes, on peut constater leur existence à l'œil nu : exemple, les poussières très fines éclairées par un faisceau solaire pénétrant dans

une chambre obscure. Mais si les particules sont petites, il faudra, outre un éclairage intense, utiliser un microscope. L'emploi de cet appareil est nécessaire pour deux raisons.

Nous avons expliqué (§ 156) pourquoi l'on aperçoit des étoiles en plein jour avec un télescope de grande ouverture. Les mêmes raisonnements s'appliquent au microscope. Chaque particule envoie une plus grande quantité de lumière, et d'ailleurs l'éclat du fond sur lequel elle se projette, est diminué : d'où l'emploi avantageux d'objectifs de *grande ouverture numérique* (§ 325). En second lieu le microscope, jouant son rôle ordinaire, sépare les images de deux particules voisines ; d'où la nécessité d'un *grossissement* suffisant.

Ces principes posés, voici le dispositif de Cotton et Mouton pour l'observation des particules dans les liquides. Un bloc de verre ABCD, taillé en forme de parallélépipède oblique à base rectangulaire, est posé sur la platine du microscope.

Son épaisseur est d'environ 1 centimètre et ses faces obliques font avec la base un angle de 51° . Un faisceau convergent tombe normalement sur la face BD, se réfracte à travers cette face, se réfléchit totalement sur CD, traverse

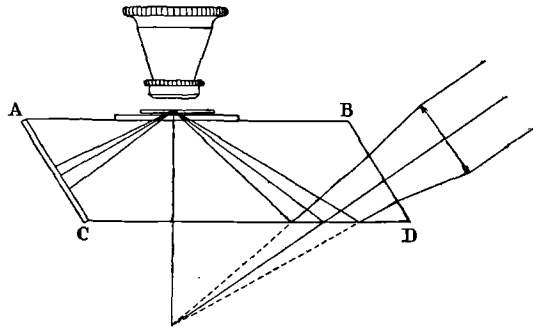


Fig. 207.

le bloc ABCD, le porte-objet (qui repose sur le bloc avec interposition d'une goutte de liquide de même indice), le liquide en expérience, le couvre-objet, et subit enfin une seconde réflexion totale sur la surface limite du couvre-objet et de l'air. La lumière qui éclaire les objets ultramicroscopiques contenus dans le liquide en expérience, est ainsi éliminée : elle vient s'absorber dans une couche noire AC.

On reçoit dans le microscope la lumière *diffractée* par les objets ultramicroscopiques en suspension dans le liquide.

L'image de la source lumineuse (trou éclairé par la partie incandescente des charbons d'un arc) se fait dans le liquide à observer juste dans l'axe du microscope. On choisit l'angle au sommet du cône des rayons incidents de manière que toute la lumière entre dans la préparation et soit éliminée par la dernière réflexion totale.

TABLE DES FONCTIONS

$$y = \frac{\sin x}{x}, \quad y^2 = \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2,$$

pour les valeurs de x variant de 0 à 6π .

Les valeurs de x choisies correspondent à des multiples de 15° .

Les fonctions y et y^2 sont multipliées par le facteur 10^4 .

x	x		$x + 2\pi$		$x + 4\pi$		
	y	y^2	y	y^2	y	y^2	
0°	0	10000	10000	0	0	0	0
15°	0,262	9889	9774	396	16	202	4
30°	0,524	9546	9119	735	54	382	15
45°	0,785	9003	8105	1001	100	528	28
60°	1,047	8270	6839	1183	140	637	41
75°	1,309	7379	5445	1274	162	695	47
90°	1,571	6366	4053	1274	162	709	50
105°	1,832	5271	2778	1191	142	671	45
120°	2,094	4135	1710	1035	107	589	35
135°	2,356	3001	901	819	67	474	22
150°	2,618	1910	365	507	26	329	11
165°	2,880	899	81	282	8	167	3
180°	3,142	0	0	0	0	0	0
195°	3,403	-760	58	-267	7	-162	3
210°	3,665	1364	186	503	25	309	10
225°	3,937	1801	324	692	48	429	18
240°	4,189	2067	427	828	69	516	27
255°	4,451	2170	471	900	81	567	32
270°	4,712	2122	450	909	83	578	33
285°	4,974	1942	377	858	74	552	30
300°	5,236	1654	274	752	57	486	24
315°	5,498	1286	165	600	36	391	15
330°	5,760	868	75	416	17	273	7
345°	6,021	430	18	210	4	139	2

TABLE DES INTÉGRALES DE FRESNEL

$$G = \int_0^v \cos \frac{\pi v^2}{2} dv, \quad F = \int_0^v \sin \frac{\pi v^2}{2} dv$$

F et G sont multipliées par 10^4 .

v	G	F	v	G	F
0,0	0	0	2,5	4574	6192
0,1	1100	5	2,6	3889	5500
0,2	1999	42	2,7	3926	4529
0,3	2994	141	2,8	4675	3915
0,4	3975	334	2,9	5624	4102
0,5	4923	647	3,0	6057	4963
0,6	5811	1105	3,1	5616	5818
0,7	6597	1721	3,2	4663	5933
0,8	7230	2493	3,3	4057	5193
0,9	7648	3398	3,4	4385	4297
1,0	7799	4383	3,5	5326	4153
1,1	7638	5365	3,6	5880	4923
1,2	7154	6234	3,7	5419	5750
1,3	6386	6863	3,8	4481	5656
1,4	5431	7135	3,9	4223	4752
1,5	4453	6975	4,0	4984	4205
1,6	3655	6386	4,1	5737	4758
1,7	3238	5492	4,2	5417	5632
1,8	3363	4509	4,3	4494	5540
1,9	3945	3734	4,4	4383	4623
2,0	4883	3434	4,5	5258	4342
2,1	5814	3743	4,6	5672	5162
2,2	6362	4556	4,7	4914	5669
2,3	6268	5525	4,8	4338	4968
2,4	5550	6497	4,9	5002	4351

TABLE DES FONCTIONS M ET N,

multipliées par 10^4 (voir § 317).

v	M	N	v	M	N
0,0	5000	5000	2,5	1265	62
0,1	4931	4078	2,6	1217	56
0,2	4760	3306	2,7	1172	50
0,3	4528	2671	2,8	1131	45
0,4	4265	2154	2,9	1093	41
0,5	3992	1736	3,0	1057	37
0,6	3723	1402	3,1	1023	33
0,7	3466	1135	3,2	991	30
0,8	3225	922	3,3	961	27
0,9	3002	753	3,4	934	24
1,0	2799	617	3,5	908	22
1,1	2614	508	3,6	882	21
1,2	2447	422	3,7	857	20
1,3	2294	353	3,8	834	19
1,4	2158	296	3,9	814	17
1,5	2034	250	4,0	794	16
1,6	1925	214	4,1	776	14
1,7	1819	181	4,2	758	13
1,8	1725	156	4,3	740	12
1,9	1645	136	4,4	724	12
2,0	1566	118	4,5	708	11
2,1	1495	103	4,6	693	11
2,2	1429	90	4,7	678	10
2,3	1369	80	4,8	663	9
2,4	1316	70	4,9	650	9

TABLE DE LA FONCTION

$$f^2(z) = \int_0^\infty \cos \frac{\pi}{2} (u^3 - zu) du,$$

et de la fonction $f(z)$, multipliées par 10^4 .

z	f	f^2	z	f	f^2
-4,0	30	0	2,0	5649	3191
-3,0	173	3	2,2	3537	1205
-2,0	791	63	2,4	1172	137
-1,0	2728	744	2,6	-1282	164
-0,2	5751	3307	2,8	-3624	1313
0,0	6653	4426	3,0	-5633	3172
0,2	7554	5706	3,2	-7088	5023
0,4	8404	7063	3,4	-7802	6088
0,6	9143	8360	3,6	-7652	5855
0,8	9701	9412	3,8	-6604	4362
1,0	10004	10008	4,0	-4742	2249
1,2	9979	9957	4,2	-2264	513
1,4	9561	9141	4,4	+ 519	27
1,6	8705	7577	4,6	3226	1041
1,8	7394	5467	4,8	5448	2968

TABLE DES MATIÈRES

OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

CHAPITRE I

Systemes centrés

§	1. Stigmatisme, aplanétisme	5
§	2. Distorsion du champ	6
§	3. Distorsion en coussinet, distorsion en barillet.	7
§	4. Première approximation de Gauss	8

Première approximation, dite de Gauss.

§	5. Notations et formules générales	8
§	6. Choix des origines de coordonnées. Distances focales principales	10
§	7. Grossissements. Classification des systèmes centrés	11
§	8. Inclinaisons.	12
§	9. Rapport de convergence.	13
§	10. Points cardinaux d'un système optique	14
§	10. Points nodaux	15
§	11. Construction des images.	16
§	12. Formules rapportées aux points principaux	16
§	13. Appareils télescopiques ou afocaux	17
§	14. Deux systèmes centrés coaxiaux placés l'un après l'autre.	18
§	15. Un nombre quelconque de systèmes centrés placés l'un après l'autre.	19
§	16. Distances focales principales.	20

Application aux instruments dioptriques.

§	17. Propriétés du dioptré	21
§	18. Approximation dite de Gauss.	22
§	19. Lentilles épaisses, existence des plans principaux	24
§	20. Foyers principaux.	25
§	21. Cas général : système centré quelconque	25
§	22. Distance focale principale d'une lentille épaisse	27
§	23. Positions des plans principaux ou des points nodaux dans les lentilles épaisses.	28
§	24. Cas général : rapport des distances focales principales.	29
§	25. Théorème de Lagrange	30

§ 26. Détermination expérimentale des caractéristiques d'un système : les milieux extrêmes ne sont pas identiques.	50
§ 27. Cas particulier : les milieux extrêmes sont identiques	31
§ 28. Diaphragmes et pupilles. Anneau oculaire.	33
§ 29. Profondeur du champ. Tolérance de mise au point.	34
§ 30. Distance hyperfocale	35

Système de deux lentilles minces.

§ 31. Éléments cardinaux du système de deux lentilles minces.	36
§ 32. Grossissement. Systèmes afocaux	37
§ 33. Discussion	38
§ 34. Oculaires usuels.	38
§ 35. Objectifs téléphotographiques	41

Achromatisme.

§ 36. Indices et dispersions	43
§ 37. Anciens verres et verres nouveaux	43
§ 38. Achromatisme d'un système de lentilles minces accolées.	44
§ 39. Anciens et nouveaux achromats	45
§ 40. Achromatisme d'un système de deux lentilles non accolées.	46
§ 41. Spectre secondaire. Foyer chimique	47

CHAPITRE II

Optique géométrique. Théorie générale.

§ 42. Position de la question. Chemin optique.	50
§ 43. Principe de Fermat	51
§ 44. Généralisation	52
§ 45. Définition de la surface d'onde : théorème de Malus et Dupin.	53
§ 46. Construction des surfaces d'onde successives	55
§ 47. Construction d'Huyghens	55

Caustiques.

§ 48. Normales, sections principales, lignes de courbure	57
§ 49. Caustiques	59
§ 50. Surfaces d'onde sphérique et de révolution	60
§ 51. Surfaces d'onde possédant un plan de symétrie	61
§ 52. Forme de la surface d'onde au voisinage de la caustique	63
§ 53. Équation de la surface d'onde au voisinage de la caustique	65
§ 54. Formes successives des surfaces d'onde de révolution	66
§ 55. Maximum d'inclinaison sur une direction de référence	67

Pinceaux, focales.

§ 56. Pinceau, aires d'amincissement, focales	68
§ 57. Expériences.	69
§ 58. Focales de Sturm	69
§ 59. Section droite d'un pinceau ; variation de forme	70
§ 60. Surfaces d'onde de révolution	71
§ 61. Œil placé dans un faisceau de rayons isogènes	72
§ 62. Intersection par un écran des rayons isogènes après leur sortie d'un système optique quelconque	73

CHAPITRE III

Étude générale des caustiques.

Caustique des miroirs.

§ 63. Caustique d'un miroir sphérique	74
§ 64. Pinceaux tombant sur le miroir.	75
§ 65. Miroir de petite ouverture placé à peu près normalement aux rayons incidents. Aberration	76
§ 66. Rôle des diaphragmes. Vérification de la sphéricité ou de l'ellipticité d'un miroir	77
§ 67. Procédé de Foucault pour l'étude des surfaces.	78

Caustiques des plans et des prismes.

§ 68. Surface d'onde des rayons isogènes après réfraction sur un plan.	79
§ 69. Surfaces d'onde virtuelles.	81
§ 70. Caustique des rayons isogènes après réfraction sur un plan	82
§ 71. Pinceaux de rayons.	84
§ 72. Expérience de vérification	84
§ 73. Vision d'un objet par réfraction à travers une surface plane indéfinie	85
§ 74. Remarques sur l'obtention des focales	86
§ 75. Système de prismes. Prisme unique	87
§ 76. Forme de la caustique	89
§ 77. Expériences de vérification.	89
§ 78. Largeur apparente des images prismatiques.	91
§ 79. Pureté du spectre.	92
§ 80. Largeur du faisceau; dispersion; pouvoir séparateur.	93

Systèmes optiques astigmatés.

§ 81. Définition des systèmes astigmatés.	94
§ 82. Propriétés des rayons issus d'un système optique astigmaté	95
§ 83. Image d'une droite à travers un appareil ayant deux plans de symétrie.	96
§ 84. Astigmatisme de l'œil	97
§ 85. Cause de l'astigmatisme de l'œil	98

CHAPITRE IV

Aberrations dans les systèmes centrés.

§ 86. Position de la question	100
§ 87. Classification des aberrations. Aberrations sphérique et chromatique.	100
§ 88. Astigmatisme, coma, courbure du champ, distorsion.	102

Aberrations pour les points voisins de l'axe.

§ 89. Aberration sphérique, invariant de réfraction d'Abbe.	103
§ 90. Aberrations.	105

§ 91.	Miroir sphérique	105
§ 92.	Dioptré, points aplanétiques	106
§ 93.	Lentille mince. Rayons parallèles. Condition d'Euler.	107
§ 94.	Aberration chromatique	108
§ 95.	Condition d'Herschel	109
§ 96.	Condition d'aplanétisme (des sinus ou d'Abbe)	111
§ 97.	Incompatibilité des relations d'Herschel, d'Abbe et de Lagrange	112
§ 98.	Critérium d'Abbe pour la condition des sinus	112
§ 99.	Expérience	114

Aberrations pour les points éloignés de l'axe.

§ 100.	Choix du pinceau utilisé pour chaque point	115
§ 101.	Reproduction d'un plan de front	116
§ 102.	Objectif photographique simple	116
§ 103.	Observation des phénomènes : courbure du champ, distorsion	118
§ 104.	Autres expériences de distorsion	120
§ 105.	Calcul de l'astigmatisme dans le cas du dioptré	120
§ 106.	Courbure d'une courbe en coordonnées polaires	122
§ 107.	Courbure du champ d'un dioptré	122
§ 108.	Cas d'une lentille infiniment mince traversée par les pinceaux au voisinage de l'axe	123
§ 109.	Courbure du champ d'une lentille infiniment mince	124
§ 110.	Suppression simultanée de la courbure du champ et de l'astigmatisme. Condition de Petzval	125
§ 111.	Coma. Caustique d'une lentille inclinée	126
§ 112.	Méthode rationnelle pour étudier les caustiques	128

Objectifs photographiques.

§ 113.	Classification	129
§ 114.	Obturbateurs	130
§ 115.	Étude d'un obturbateur	131
§ 116.	Netteté absolue, netteté apparente. Observation orthoscopique d'un cliché	132
§ 117.	Ouverture utile	133
§ 118.	Diaphragmes, clarté, coefficient de clarté. Profondeur du champ	133
§ 119.	Champ angulaire	134
§ 120.	Objectifs simples	135
§ 121.	Doublets symétriques	136
§ 122.	Doublets non symétriques, triplets	136

CHAPITRE V

Questions diverses d'optique géométrique.

Halos et phénomènes analogues.

§ 123.	Réflexions intérieures sur les faces d'un prisme à base polygonale	138
§ 124.	Réfraction à travers un prisme sous une incidence oblique (Bravais).	140
§ 125.	Minimum de déviation dans la réfraction oblique	141
§ 126.	Réflexion et réfraction d'un faisceau parallèle sur un prisme triangulaire tournant autour d'un axe vertical	142
§ 127.	Phénomènes naturels : cercle parhélique, parhélies, colonne	143
§ 128.	Explication des halos	144

Arc-en-ciel.

§ 129. Faisceau parallèle tombant sur un cylindre circulaire normalement aux génératrices.	145
§ 130. Forme de la caustique.	146
§ 131. Rayons efficaces, dispersion	148
§ 132. Surface d'onde au voisinage du minimum de déviation	148
§ 133. Applications	149
§ 134. Application à la sphère; arcs-en-ciel.	150
§ 135. Comparaison des théories de l'arc-en-ciel et des halos.	151

Rayons courbes. Mirage. Scintillation.

§ 136. Indice variable d'une manière continue	152
§ 137. Application du principe de Fermat et de la construction d'Huyghens.	153
§ 138. Équation générale de la trajectoire	154
§ 139. Cas particuliers.	155
§ 140. Mirage	157
§ 141. Phénomènes analogues au mirage. Réfractions atmosphériques	158
§ 142. Dispersion atmosphérique	160
§ 143. Scintillation	162
§ 144. Preuves à l'appui de la théorie.	163
§ 145. Généralisation de la théorie précédente.	164
§ 146. Scintillomètre.	164
§ 147. Lentilles non homogènes. Théorème de Malus. Cristallin.	165

OPTIQUE ONDULATOIRE**CHAPITRE I****Émission. Photométrie. Photochimie.**

§ 148. INTRODUCTION.	167
§ 149. Idée de l'émission et de la propagation de la lumière.	167

Éclairement et éclat des objets et des images.

§ 150. Définitions pour une lumière monochromatique ou de composition invariable.	168
§ 151. Comparaison des intensités de deux sources finies. Photomètre usuel.	170
§ 152. Éclairement des images. Premier cas : appareil photographique, œil	171
§ 153. Éclairement des images. Second cas : phares à éclairs et à feu fixe, projecteurs	173
§ 154. Application à la photométrie : emploi des lentilles pour graduer la lumière.	174
§ 155. Éclat des images	175
§ 156. Vision directe et à travers un appareil d'optique. Premier cas : la pupille est entièrement couverte par le cône émis par l'élément d'objet ou d'image considéré.	176

§ 157. Vision avec un appareil d'optique. Second cas : la pupille n'est pas entièrement recouverte par le cône émis par l'élément d'image considéré	177
§ 158. Application à la photométrie : emploi d'un diaphragme percé d'une ouverture d'aire variable pour graduer la lumière.	178
§ 159. Définitions générales pour un système de radiations complexes.	178

Émission.

§ 160. Émission suivant la loi de Lambert. Indicatrice d'émission.	179
§ 161. Conséquences de la loi de Lambert.	180
§ 162. Pouvoir émissif. Son expression dans l'hypothèse de Lambert	181
§ 163. Émission des corps lumineux par eux-mêmes	182
§ 164. Émission par diffusion (réflexion ou transmission)	183
§ 165. Intensité moyenne sphérique d'une source de révolution autour d'un axe. Application à l'arc électrique	184
§ 166. Données numériques. Intensité et éclat des principales sources.	186

Éclairage des objets vus à travers un instrument.

§ 167. Éclairage d'une échelle transparente	188
§ 168. Éclairage d'un objet à travers l'instrument même qui sert à l'observer.	188
§ 169. Lueur oculaire	189
§ 170. Vision du fond de l'œil ; ophtalmoscopes	189

Phares et projecteurs.

§ 171. Rôle des phares et des projecteurs	190
§ 172. Feux fixes, fanaux de port.	190
§ 173. Feux éclairs, phares à longue portée. Projecteurs pour télégraphie optique.	192
§ 174. Portée géographique des phares	193
§ 175. Portée optique des phares	194

Photographie.

§ 176. Photographie. Plaques au gélatino-bromure.	195
§ 177. Définition du noir.	196
§ 178. Plaques ortho et panchromatiques. Sensibilisateurs optiques	196
§ 179. Noir en fonction de l'intensité et du temps de pose	197
§ 180. Influence des interruptions de la pose.	198
§ 181. Application de la photographie à la photométrie.	198
§ 182. Halo photographique. Irradiation.	199
§ 183. Actions chimiques en général. Induction photochimique	199
§ 184. Piles photochimiques. Actinomètres	200
§ 185. Propriétés du sélénium. Variations de résistance	201

CHAPITRE II

Équilibre de température. Loi de Kirchhoff.

§ 186. Émission. Absorption	202
§ 187. Cas particuliers. Corps noirs. Pouvoir émissif des corps noirs. Équilibre de température.	203
§ 188. Corps pour lesquels α est constant en chaque point de la surface, mais différent de l'unité	204

§ 189. Cas général. On ne suppose rien sur la loi de variation de l'éclat ϵ du corps imparfaitement noir. Faisceau monochromatique	205
§ 190. Cas général. Faisceau quelconque, polarisation quelconque	207
§ 191. Conséquences générales de la loi de Kirchhoff	209

Étude expérimentale.

§ 192. Pouvoir émissif total des corps parfaitement noirs	211
§ 193. Distribution de l'énergie du rayonnement noir entre les diverses radiations	212
§ 194. Variation du pouvoir émissif des corps noirs avec le milieu environnant	213
§ 195. Démonstration plus générale	214
§ 196. Étude de la radiation d'un corps imparfaitement noir	215
§ 197. Manchons incandescents	216
§ 198. Luminescence	217
§ 199. Constante solaire. Calcul de la température de la Terre	217
§ 200. Température du Soleil	219

CHAPITRE III

Vision colorée.

§ 201. Fonctionnement de l'œil	220
§ 202. Mélange ou superposition des couleurs. Obtention d'un mélange déterminé	221
§ 203. Appareil de Maxwell	222
§ 204. Nombre des sensations élémentaires. Représentation dans un plan	223
§ 205. Couleurs principales	224
§ 206. Position des couleurs simples par rapport au triangle des couleurs	225
§ 207. Couleurs complémentaires. Ton, saturation. Pourpres	226
§ 208. Blanc d'ordre supérieur. Spectres cannelés	227
§ 209. Position dans le plan des sensations fondamentales. Images accidentelles	228
§ 210. Dyschromatopsie	229
§ 211. Photographie des couleurs, méthode pigmentaire	229
§ 212. Remarques sur le procédé précédent	230

CHAPITRE IV

Interférences de la lumière naturelle.

§ 213. Représentation et composition des vibrations	232
§ 214. Expérience fondamentale d'interférence	233
§ 215. Éclairage par deux sources de dimensions infiniment petites	235
§ 216. Éclairage par une source monochromatique de dimensions finies	236
§ 217. Projection d'un système de franges. Théorème de Malus	238
§ 218. Démonstration directe du théorème de Malus	240
§ 219. Modification de l'expérience d'Young	242
§ 220. Miroirs de Fresnel	243
§ 221. Dispositions équivalentes. Biprisme. Bilentille. Bilame	245
§ 222. Phénomènes en lumière non homogène	246
§ 223. Expériences des trois miroirs	248
§ 224. Passage des ondes par un foyer ou une ligne focale	249
§ 225. Vérification de l'analogie admise au paragraphe précédent (Gouy)	250

CHAPITRE V

Interférences des vibrations elliptiques.

§ 226. Interférences de deux faisceaux polarisés	253
§ 227. Loi de distribution des énergies dans le système de franges des trous d'Young	253
§ 228. Répartition de l'énergie dans l'interférence de deux faisceaux polarisés à angle droit.	254
§ 229. Expérience de Fresnel et Arago	255
§ 230. Obtention de vibrations elliptiques bien déterminées.	257
§ 231. Franges avec les tourmalines croisées. Analyse d'un système d'elliptiques	258
§ 232. Système d'elliptiques	259
§ 233. Constitution de la lumière naturelle monochromatique.	260
§ 234. Propriétés générales des lames cristallines. Sections principales. Lames quart d'onde	262
§ 235. Obtention de lumière polarisée circulairement. Analyse des rayons circulaires	263
§ 236. Interférence des circulaires. Circulaires de même sens.	265
§ 237. Interférence des circulaires. Circulaires de sens contraires.	266
§ 238. Expériences avec des faisceaux polarisés circulairement	267
§ 239. Interférence des circulaires inégaux	269

CHAPITRE VI

Interférences. Lames isotropes.

§ 240. Anneaux par réflexion sur les deux faces d'une lame mince plan parallèle.	271
§ 241. Observation en lumière blanche.	273
§ 242. Spectre cannelé par réflexion.	274
§ 243. Anneaux par réflexion sur les faces d'une lame d'air.	274
§ 244. Franges obtenues avec une lame d'épaisseur variable et localisées à distance finie	275
§ 245. Étude des épaisseurs d'une lame mince. Anneaux de Newton.	277
§ 246. Anneaux de Newton.	279
§ 247. Application des franges des lames minces.	280
§ 248. Échelles des teintes	281
§ 249. Teintes sensibles	283
§ 250. Anneaux de diffusion de Newton.	284
§ 251. Anneaux par transmission	286
§ 252. Retard produit par une lame plan parallèle d'indice n interposée sur un faisceau et plus ou moins inclinée. Compensateurs isotropes.	286
§ 253. Spectre cannelé par transmission : lames mixtes.	288

Méthodes interférentielles : applications.

§ 254. Dispositifs de Fizeau, de Mascart et de Jamin	290
§ 255. Indices de réfraction des gaz	291
§ 256. Dispositif de Michelson	294
§ 257. Mesure du mètre en longueurs d'onde ou mesure des longueurs d'onde en valeurs absolues.	295

CHAPITRE VII**Propriétés générales des franges d'interférence.****Localisation des franges (lumière monochromatique).**

§ 258. Surfaces équiphasés ; leur numérotage	299
§ 259. Application du principe du retour des rayons	300
§ 260. Franges localisées nettes avec une source étendue dans tous les sens.	301
§ 261. Appareils interférentiels présentant un plan de symétrie	301
§ 262. Franges localisées à l'infini	302
§ 263. Variation de visibilité des franges quand on augmente la largeur de la source	302
§ 264. Application de ces phénomènes à la mesure du diamètre apparent des astres.	303

Franges achromatiques (lumière blanche).

§ 265. Franges rectilignes ; frange achromatique	304
§ 266. Achromatisme des franges ordinaires d'interférence	305
§ 267. Franges de Herschel (Mascart)	307
§ 268. Franges courbes (Rayleigh)	308
§ 269. Application aux anneaux de Newton	308
§ 270. Changement du numéro d'ordre par interposition sur l'un des fais- ceaux interférents d'une lame plan parallèle	310
§ 271. Franges rigoureusement achromatiques.	311

**Franges obtenues par l'interférence d'un grand
nombre de faisceaux.**

§ 272. Règle de Fresnel	312
§ 273. Composition d'un nombre quelconque de vibrations de même ampli- tude et dont les phases varient en progression arithmétique.	313
§ 274. Interférences entre un nombre fini ou indéfini de faisceaux dont les différences de marche croissent en progression arithmétique et dont les amplitudes varient en progression géométrique.	314
§ 275. Franges par transmission à travers une lame mince d'air limitée par deux surfaces de verre argentées (Perot et Fabry)	315
§ 276. Franges par réflexion entre les faces d'une lame d'air, l'une argentée à fond, l'autre légèrement argentée (Hamy)	317

Détermination d'un ordre d'interférence; étude des sources pseudo-monochromatiques.

§ 277. Franges obtenues avec deux sources monochromatiques distinctes	318
§ 278. Lumière pseudo-monochromatique; lumière du sodium	318
§ 279. Étude de la constitution des raies	320
§ 280. Emploi des franges fines obtenues avec des lames argentées	321
§ 281. Comparaison des longueurs d'onde de deux radiations voisines	321
§ 282. Détermination du numéro d'ordre d'une frange d'interférence.	322

CHAPITRE VIII

Diffraction. Principe d'Huyghens. Réseaux.

Franges localisées à l'infini.

§ 283. Généralités	324
§ 284. Franges à l'infini données par une fente étroite à bords parallèles.	325
§ 285. Théorie synthétique.	327
§ 286. Observation des phénomènes.	327
§ 287. Pouvoir séparateur.	329
§ 288. Application. Pouvoir séparateur d'un spectroscope à prismes.	330
§ 289. Franges de n fentes égales. Points correspondants.	330
§ 290. Franges de deux fentes égales et parallèles	331
§ 291. Retour sur l'expérience des fentes d'Young	333
§ 292. Franges de deux fentes dont l'une est recouverte d'une lame qui impose une différence de phase Δ . Franges de Talbot	333
§ 293. Réseaux	335
§ 294. Maximums secondaires	337
§ 295. Pouvoir séparateur (Rayleigh)	338
§ 296. Mesure des longueurs d'onde. Minimum de déviation.	339
§ 297. Focales des réseaux.	341
§ 298. Phénomènes analogues aux précédents obtenus par réflexion	342
§ 299. Réseaux par réflexion tracés sur une surface courbe	342

CHAPITRE IX

Principe d'Huyghens. Franges à distance finie.

§ 300. Énoncé du principe d'Huyghens. Application à une onde sphérique.	345
§ 301. Solution générale du problème	347
§ 302. Écran percé d'un trou circulaire dont le centre est au point O. Phénomènes sur la droite SO	347
§ 303. Utilisation de l'onde entière	349
§ 304. Emploi des zones	349
§ 305. Utilisation de l'onde entière	350
§ 306. Vérifications expérimentales	351
§ 307. Expérience d'Arago	352

§ 308. Réseaux zonés (Soret)	353
§ 309. Réseau zoné à phase inversée (Wood).	355
§ 310. Franges d'un écran circulaire. Phénomènes sur la droite SO	356
§ 311. Propagation rectiligne.	356
§ 312. Système de franges circulaires avec un écran percé d'un trou circulaire	357
§ 313. Photographie à travers un trou d'aiguille. Chambre noire sans objectif.	357

Écrans à bords rectilignes et parallèles. Intégrales de Fresnel.

§ 314. Division d'une onde en fuseaux.	358
§ 315. Écrans à bords rectilignes et parallèles	359
§ 316. Écran illimité d'un côté	362
§ 317. Discussion analytique du phénomène	364
§ 318. Franges d'une fente et d'un fil	366

CHAPITRE X

Applications diverses de la théorie de la diffraction.

Franges au voisinage d'un foyer ; instruments d'optique.

§ 319. Position de la question	369
§ 320. Diffraction au voisinage d'un foyer	370
§ 321. Autre manière de faire le calcul	371
§ 322. Ouverture circulaire.	372
§ 323. Pénétration des lunettes.	374
§ 324. Influence de la cohérence des phases de deux points lumineux sur la séparation de leurs images.	375
§ 325. Application au microscope. Ouverture numérique	376
§ 326. Discussion de la formule précédente. Objectifs à immersion homogène.	377

Couronnes.

§ 327. Écrans complémentaires.	378
§ 328. Écrans circulaires	379
§ 329. Couronnes	380

Vision des objets non lumineux par eux-mêmes.

§ 330. Expériences avec un réseau de fentes parallèles	381
§ 331. Expérience d'Abbe avec le microscope et un réseau de fentes parallèles	383
§ 332. Expériences avec un quadrillage	384
§ 333. Expérience d'Abbe avec le microscope et un quadrillage	385
§ 334. Vision des objets microscopiques à structure périodique	385
§ 335. Rôle du condenseur d'Abbe	386

Franges au voisinage d'un point quelconque de la caustique.

§ 336. Franges au voisinage d'un point quelconque de la caustique	387
§ 337. Méthode générale de calcul	388
§ 338. Expériences (Larmor)	390

**Franges au voisinage d'un minimum de déviation.
Arc-en-ciel.**

§ 339. Phénomènes au voisinage d'un minimum d'inclinaison	391
§ 340. Expériences. Arcs surnuméraires de l'arc-en-ciel.	392

Diffraction éloignée.

§ 341. Diffraction éloignée (Gouy).	393
§ 342. Polarisation par diffraction sur le bord d'un écran.	395

Milieux troubles. Vision des objets ultramicroscopiques.

§ 343. Formule de Stokes	396
§ 344. Diffraction par une particule sphérique dont les dimensions sont très petites vis-à-vis de la longueur d'onde (L. Rayleigh)	397
§ 345. Expériences de vérification. Polarisation atmosphérique	399
§ 346. Composition du faisceau diffracté par des particules petites vis-à-vis de la longueur d'onde.	400
§ 347. Absorption dans la direction de propagation normale	401
§ 348. Relation entre les variables D et D' et les propriétés réfractives du milieu.	401
§ 349. Vision des objets ultramicroscopiques (Cotton et Mouton)	402