

ALLE RECHTE, EINSCHLIESZLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN

Inhalt.

	Seite
Blasius, H. Funktionentheoretische Methoden in der Hydrodynamik	90
— Laminare Strömung in Kanälen wechselnder Breite	225
Burmester, Herbert. Untersuchung der wahren Hellegleichen auf der Kugel nach dem Lommel-Seeligerschen Gesetz	129
Feigl, Leopold. Die Ermittlung der Bewegungsverhältnisse von Kurbelgetrieben in einfacher zeichnerischer Behandlungsweise	173
Hänert, L. Eine Darstellung der Gleichgewichtsform von Fäden, deren Dichte eine Funktion der Fadenlänge ist, und ein mechanisches Integrationsverfahren gewisser Differentialgleichungen	233
Hamel, Georg. Bemerkungen zu den Aufsätzen der Herren F. Klein und R. v. Mises	195
Herbst, C. Die ästhetische Kreisbogenkurve	72
Hertz, Paul. Zur Theorie des Saitengalvanometers	1
Jüttner, Ferencz. Die chemische Reaktionskinetik und eine neue Painlevésche Transzendente	385
Klein, F. Zu Painlevés Kritik der Coulombschen Reibungsgesetze. (Aus einer im Winter 1908/09 gehaltenen Vorlesung).	186
— Über die Bildung von Wirbeln in reibungslosen Flüssigkeiten	259
Klein, F. und Schilling, Fr. Modelle zur Darstellung affiner Transformationen von Punktsystemen in der Ebene und im Raume	311
Mehmke, R. Analytischer Beweis des Satzes von Herrn Reinhold Müller über die Erzeugung der Koppelkurve durch ein ähnlich-veränderliches System	257
Milankovitch, M. Zur Statik der massiven Widerlager	120
Mises, R. v. Zur Kritik der Reibungsgesetze	191
Müller, Reinhold. Erzeugung der Koppelkurve durch ähnlich-veränderliche Systeme	247
Näbauer, Martin. Vorrichtung zur Auflösung eines linearen Gleichungssystems	241
Pfeiffer, F. Zur Statik ebener Fachwerke	262
— Zur Frage der sog. Coulombschen Reibungsgesetze	273
Pöschl, Theodor. Beitrag zur graphischen Dynamik des starren ebenen Systems	156
Prandtl, L. Bemerkungen zu den Aufsätzen der Herren F. Klein, R. v. Mises und G. Hamel	196
Sanden, H. v. Photogrammetrie von Küstenaufnahmen	110
Skutsch, R. Über die von Herrn Reinhold Müller untersuchte besondere Bewegung eines ähnlich-veränderlichen Systems	252
Timoschenko, S. Einige Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie	337

Kleinere Mitteilungen.

Preisaufrage aus der angewandten Mathematik für 1911	208
Preisaufgaben der Académie des sciences de Paris aus der angewandten Mathematik für 1911 und 1912	315

Bücherschau.

	Seite
L. Günther. Die Mechanik des Weltalls. Von C. W. Wirtz	208
C. V. L. Charlier. Wie eine unendliche Welt aufgebaut sein kann. Von C. W. Wirtz	209
F. Nušl et J. J. Frič. Premiere étude sur les anomalies de réfraction. Von C. W. Wirtz	209
Astronomischer Kalender für 1909. Von C. W. Wirtz	210
C. V. L. Charlier. Die Rotation der Planeten Merkur und Venus. Von C. W. Wirtz	210
B. Peter. Die Planeten. Von C. W. Wirtz	211
M. Geistbeck. Leitfaden der mathematischen und physikalischen Geographie für höhere Schulen und Lehrerbildungs-Anstalten. Von C. W. Wirtz . .	211
Th. Albrecht. Formeln und Hilfstafeln für geographische Ortsbestimmung. Von C. W. Wirtz	212
Robert Haußner. Darstellende Geometrie. Von K. Doehle mann	212
Arthur Schönflies. Einführung in die Hauptgesetze der zeichnerischen Darstellungsmethoden. Von K. Doehle mann	213
Ferdinand Meisel. Lehrbuch der Perspektive zum Gebrauch an mittleren und höheren technischen Lehranstalten, Kunstgewerbe- und Kunstschulen, sowie bei eigenem Studium. Von K. Doehle mann	214
Otto Haeder. Die Schnell-Perspektive (Haeder-Perspektive) und Skizzieren. Von K. Doehle mann	214
O. Lohse. Tafeln für numerisches Rechnen mit Maschinen. Von P. Werk- meister	214
J. Peters. Neue Rechentafeln für Multiplikation und Division mit allen ein- bis vierstelligen Zahlen. Von P. Werkmeister	215
Karl Schwering. Lehrbuch der kleinsten Quadrate. Von P. Werkmeister	216
A. M. Nell. Fünfstellige Logarithmen der Zahlen und der trigonometrischen Funktionen. Von P. Werkmeister	217
Josef Mattauch. Lehr- und Aufgabenbuch der darstellenden Geometrie für Oberrealschulen. Von K. Doehle mann	316
E. Hammer. Der logarithmische Rechenschieber und sein Gebrauch. Von P. Werkmeister	316
— — — — —	
Neue Literatur über das Grenzgebiet der Biometrie. V und VI. Von F. Ludwig	198
Neue Bücher	217, 317
Eingelaufene Schriften	221, 319
Technisches Abhandlungsregister 1906—1907. Von Ernst Wölffing . .	321, 410

Zur Theorie des Saitengalvanometers.

Von PAUL HERTZ in Heidelberg.

Es ist bekannt, wie mannigfache physikalische und physiologische Anwendungen¹⁾ das von Einthoven erfundene Saitengalvanometer gestattet. Ist es doch mit seiner Hilfe möglich, elektrische und mittelbar auch unelektrische Vorgänge in ihrem zeitlichen Ablaufe genau zu verzeichnen. Freilich, das Zeitgesetz der untersuchten Erscheinung läßt sich nur dann mit Sicherheit ermitteln, wenn man vorher die Dynamik des Instrumentes erforscht hat. Denn in dem photographierten Kurvenbilde prägen sich nicht nur die äußeren Vorgänge aus, sondern auch die Züge, die den Eigentümlichkeiten des Apparates selbst verdankt werden. Zwischen beiden Bestandteilen müssen wir sondern; wir haben das aufgenommene Bild durch mathematische Analyse so zu reinigen²⁾, daß es die zu messende Größe als Funktion der Zeit erkennen läßt. Mit anderen Worten, wir müssen das Problem lösen: Wie kann man, wenn der Ort der Saitenmitte in seiner Abhängigkeit von der Zeit gegeben ist, daraus die äußere Klemmspannung für jeden Augenblick berechnen? In den Formeln werden natürlich gewisse Apparatkonstanten vorkommen, und es erhebt sich daher die weitere Frage: Wie können die Konstanten des Instrumentes durch Beobachtungen bestimmt werden? Endlich wird man, ehe man an die Lösung dieser Aufgabe herangeht, die Vorfrage behandeln: Welche Bewegung führt der Quarzfaden unter dem Einflusse einer gegebenen äußeren Potentialdifferenz aus?

Diese Aufgaben sind bereits von W. Einthoven in Angriff genommen worden. Bei ihrer Bewältigung geht er von der Anschauung aus, das Bild der Saitenmitte könne wie ein gedämpft schwingendes, mit einem Freiheitsgrade begabtes System behandelt werden. Diese Annahme liegt auch nahe genug; wir wissen ja schon durch die tägliche Erfahrung, daß eine Saite eine hin- und hergehende Bewegung aufweist, und müssen auch das Vorhandensein eines Dämpfungskoeffizienten erwarten. Denn einmal wird der Widerstand der Luft den Faden in seiner Bewegung hemmen, und zweitens werden bei seinem

1) Vgl. W. Einthoven, Ann. d. Phys. Bd. 21, S. 685 ff.; archives nérl. (II), tome 10, S. 468.

2) Vgl. W. Einthoven, Ann. d. Phys. Bd. 21, S. 483.

Fortschreiten Induktionsströme erzeugt, die nach der Lenzschen Regel zurücktreibend auf ihn wirken. Nun ist aber das Bild der Mitte doch kein materielles System; daher muß man ihm eine „scheinbare“ Masse¹⁾ zuschreiben. Einthoven denkt sich also an Stelle der Fadenmitte einen materiellen Körper, und nennt die Masse, die dieser haben müßte, um in seiner Bewegung mit jener übereinzustimmen, die scheinbare Masse des Saitenbildes. Ebenso kann von einer die Mitte antreibenden scheinbaren Kraft und von einer sie hemmenden Gegenkraft gesprochen werden, alles Größen, denen nur eine übertragene Bedeutung zukommt. Diese Konstanten werden experimentell ermittelt und in die Gleichung des gedämpft schwingenden Körpers eingesetzt, worauf sich eine in manchen Punkten recht befriedigende Übereinstimmung zeigt.

So einleuchtend dieses Verfahren, — im wesentlichen eine Interpolationsmethode, — nun auch ist, vom theoretischen Standpunkte kann es uns nicht befriedigen; denn die Saitenmitte verhält sich in manchen Punkten ganz anders als ein schwingender Körper von einem Freiheitsgrade. Nehmen wir z. B. den Fall an, daß der Quarzfaden plötzlich von einer konstanten Potentialdifferenz erregt wird. Eine gewisse endliche Zeit hindurch nach Einschaltung der elektromotorischen Kraft werden die mittleren Teile der Saite alle gleichmäßig stark beschleunigt, solange nämlich, als sich der Einfluß der festgehaltenen Enden noch nicht geltend macht. Ebensolange bewegen sich diese Teile im Zusammenhang, wie ein starrer Körper; es tritt keine Krümmung des Fadens auf und somit auch keine quasielastische Gegenkraft. Daher muß sich eine endliche Zeit das Fadenbild wie ein freifallender Körper, nicht aber wie ein durch eine elastische Gegenkraft getriebenes System verhalten, seine Bewegung muß durch rationale und nicht durch trigonometrische Funktionen bestimmt werden. Diese einfache Überlegung zeigt, daß, so brauchbar auch als erste Annäherung die Einthovensche Methode für manche Betrachtungen sein mag, sie doch nicht in allen Punkten die Vorgänge richtig wiedergeben kann.

Zu einer strengeren Behandlung des Problems kann man nur dann gelangen, wenn man die Funktionalgleichung für die Bewegung der Saite aufstellt. Diese wird mit der bekannten Gleichung der schwingenden Saite übereinstimmen bis auf drei Glieder, die neu hinzutreten, erstens ein Glied, das die erregende Kraft darstellt und sodann die beiden Glieder, welche die Dämpfung zum Ausdruck bringen. Die auf ein Teilchen wirkende Luftreibung wird offenbar ein der ihm inwohnenden Geschwindigkeit proportionales Glied ergeben, während die

1) a. a. O., S. 487.

elektromagnetische Dämpfung von der Bewegung *aller* Teilehen abhängt, und somit auf ein Integral führt. Wenn man nun die so erhaltene, mit den Konstanten beider Dämpfungsarten versehene Funktionalgleichung weiter behandelt, findet man, daß die Lösung recht schwierig ist. (§ 12). Wir wollen also von den beiden Dämpfungen zunächst nur eine berücksichtigen und uns für die elektromagnetische entscheiden. Über die durch Luftreibung gehemmten Schwingungen sind nämlich schon manche Untersuchungen angestellt worden, während die für das andere Problem sich ergebende Gleichung, die zudem mathematisch interessanter ist, wohl noch nicht näher behandelt ist. Nun sind zwar bei den Einthovenschen Messungen die zwei Dämpfungsarten von der gleichen Größenordnung, ja die Luftdämpfung überwiegt die elektromagnetische¹⁾, dennoch brauchen wir nicht zu befürchten, uns mit einem praktisch nicht zu verwirklichenden Falle zu beschäftigen. Einmal rechnet nämlich Einthoven wiederholt mit der Möglichkeit, das Instrument in ein Vakuum einzuschließen²⁾, sodann kann man es auch, wie er die Güte hatte, mir brieflich mitzuteilen, leicht durch Verwendung dickerer Drähte erreichen, daß die elektromagnetische Dämpfung mehrere hundertmal überwiegt.

Noch in einem anderen Punkte müssen wir unser Problem idealisieren: Wir setzen nämlich das magnetische Feld vollkommen homogen voraus. Tatsächlich ist es durchaus nicht homogen, sondern in der Mitte schwächer³⁾, sodaß man sekundäre Schwingungen zu erwarten hat, die sich der Hauptschwingung überlagern. Aber auch hier dürfte unsere Vereinfachung gestattet sein. Denn es wird wohl möglich sein, durch passende Konstruktion des Magneten die Inhomogenität weiter herabzusetzen, außerdem nimmt ihr Einfluß bei stärkerer Fadenspannung ab, und endlich läßt sich der Fall des inhomogenen Feldes kaum behandeln, wenn nicht eine Untersuchung des homogenen vorausgegangen ist.

Die unter diesen Vernachlässigungen gewonnene Gleichung kann nun nach der Riemannschen Methode integriert werden. Es zeigt sich, daß stets eine und nur eine Lösung existiert, aber diese gilt nur für das Zeitintervall einer Viertelperiode nach dem gegebenen Anfangszustande. Theoretisch ist damit jedoch sofort die Eindeutigkeit und die Existenz der Lösung für alle folgenden Zeiten bewiesen, da man den nach einer Viertelperiode herrschenden Zustand als neuen Anfangszustand ansehen kann. Praktisch ist mit dieser Methode des Zu-

1) Einthoven, a. a. O., S. 508.

2) a. a. O., S. 687, 689.

3) a. a. O., S. 506.

sammenflickens nicht viel gewonnen. Man kann aber von jenen ersten Ergebnissen ausgehend, eine allgemein gültige Funktionalgleichung für den induzierten Strom ableiten und eine zweite Gleichung, die daraus die Bewegung der Fadenmitte zu berechnen gestattet. Alle diese durch die Riemannsche Methode gewonnenen Resultate können im Anschluß an Rayleigh auf einem zweiten Wege durch Entwicklung nach trigonometrischen Funktionen wiedergefunden werden.

Aus den so doppelt bewiesenen Funktionalgleichungen können wir manche Schlüsse ziehen. Bei *Abwesenheit* einer äußeren Potentialdifferenz ergibt sich die Möglichkeit einer Reihe von gedämpft abklingenden Schwingungen, und es zeigt sich, daß sich aus ihnen, den Eigenschwingungen, jede Bewegung zusammensetzen läßt, die ohne Einwirkung einer erregenden elektromotorischen Kraft vor sich geht. Auch die bei *Anwesenheit* einer äußeren Klemmspannung auftretenden Erscheinungen lassen sich näher behandeln; hier interessieren besonders zwei Fragen: die Wirkung des Wechselstromes und die Wirkung des Gleichstromes auf unser Instrument. Wir finden, daß unter dem Einflusse eines Wechselstromes der Quarzfaden ebenfalls periodisch schwingt, und können seine Amplitude berechnen und die Phasendifferenz, mit der er hinter dem erregenden Strome zurückbleibt. Ein besonders einfacher Ausdruck ergibt sich für das Verhältnis von Fadenamplitude zur Stromamplitude, für die Wechselstromempfindlichkeit, wenn sich der Faden in Resonanz mit dem Strom befindet. Unter diesen Umständen ist die Empfindlichkeit des Saitengalvanometers der magnetischen Feldstärke umgekehrt proportional; wenn es also gelingt, den Faden in einem Vakuum einzuspannen und man sehr schwache Felder verwendet, so wird man über ein sehr empfindliches Instrument verfügen. Weniger weit reichen unsere Untersuchungen über die Vorgänge, die sich beim Einschalten eines Gleichstroms abspielen. Nur während der Zeit der ersten Viertelperiode gilt eine einfache Formel; aber wenigstens kann angegeben werden, wann die Saite zum ersten Male umkehrt und in welchem Verhältnis ihre beiden ersten Ausschläge zueinander stehen. Die wichtige Frage nach der Aperiodizität mußte dagegen unerledigt bleiben; denn es ließ sich nicht ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Bewegung der Saitenmitte, auf die es doch allein ankommt, aufstellen; nur für das aperiodische Verhalten der *ganzen* Saite wird ein *notwendiges* Kriterium gewonnen.

Mit diesen Hilfsmitteln läßt sich nun auch schon die vorher angedeutete Frage nach der Konstantenbestimmung erledigen. Wir werden uns hierzu zweier Methoden bedienen: Wie man aus dem logarithmischen Dekremente und der gedämpften Periode eines schwingenden

Körpers seine Eigenperiode und seinen Dämpfungskoeffizienten berechnen kann, so lassen sich dieselben Konstanten unserer Saite bestimmen, wenn der erste Rückkehrpunkt und das Verhältnis der beiden ersten Ausschläge bekannt ist. Eine zweite Methode benutzt die Ergebnisse über die Wechselstromempfindlichkeit, und endlich können noch einige andere Formeln zur Kontrolle herangezogen werden.

Was nun den mathematischen Inhalt der vorliegenden Untersuchung betrifft, so dürfte er wohl in dem stets wiederholten Hervortreten der Integralgleichungen bestehen. Durch sie wird der Induktionsstrom in seiner Abhängigkeit von der Zeit gegeben, wenn man von der Rayleighschen Methode ausgeht; auf eine Integralgleichung kommt man auch, wenn man, wie es am Schluß kurz geschieht, beide Dämpfungsarten berücksichtigt. Auch um die Entwicklung einer beliebigen Funktion nach den von uns aufgestellten Eigenschwingungen zu beweisen, müssen wir die Theorie dieser Gleichungen heranziehen. Mit ihrer Hilfe gelingt es nämlich, aus der Tatsache, daß in einem gewissen Intervalle willkürliche Funktionen nach zwei Scharen von Eigenfunktionen entwickelt werden können, den Schluß zu ziehen, daß in einem doppelt so großen Intervall die Entwicklung nach der vereinigten Schar möglich ist.

Eine numerische Vergleichung mit der Erfahrung wird überall, wo es möglich ist, versucht werden. Da aber bei den bisher veröffentlichten Einthovenschen Messungen die Luftdämpfung nicht vernachlässigt werden kann, so ist ein Vergleich nur der Größenordnung nach möglich, kann aber keine genaue quantitative Übereinstimmung ergeben. Auch der letzte Paragraph, der beide Dämpfungsarten berücksichtigt, kann nicht herangezogen werden, da die dort gefundenen Formeln viel zu kompliziert sind und höhere Differentialquotienten enthalten, als es bisher möglich war, der Messung zu unterwerfen. Eine genaue Prüfung an der Hand der Erfahrung muß also bis auf die Zeit verspart werden, wo Messungen im Vakuum oder mit dickeren Drähten vorliegen.

§ 1. Die Funktionalgleichung für die Saitenbewegung.

Die Saitenmitte wird von Einthoven wie ein materieller Körper behandelt, und für ihre Bewegungen werden die Gleichungen des schwingenden Körpers angenommen.¹⁾ Wollen wir uns von den darin liegenden Vernachlässigungen befreien, so müssen wir eine allgemeine Gleichung für die Bewegung der Saite aufstellen, die alle ihre Punkte in gleicher Weise berücksichtigt. Um sie zu gewinnen, brauchen wir

1) Ann. d. Phys. (4) 21, 1906 S. 487.

aber nur die Überlegungen von Einthoven¹⁾ auf einen mathematischen Ausdruck zu bringen. Wir nehmen also an, daß auf die Saite eine antreibende ponderomotorische Kraft wirkt, rücktreibend aber diejenige ponderomotorische Kraft, die der durch die Bewegung der Saite selbst erzeugte Induktionsstrom hervorruft.

Indem wir nun unser Problem etwas idealisieren, können wir es folgendermaßen aussprechen: *Die gespannte Saite, von überall gleicher Dicke und gleichem Querschnitt, befindet sich in einem vollkommen homogenen magnetischen Felde und kann nur in der zur Feldrichtung senkrechten Ebene schwingen.*²⁾ *Die Saitenenden besitzen eine nach bekannten Gesetzen variierende Potentialdifferenz; wie bewegt sich unter diesen Umständen die Saite?* Dabei soll vorläufig noch von der Reibung der Luft abgesehen werden.³⁾

Es bedeute⁴⁾:

t	die Zeit	
c	die Lichtgeschwindigkeit	
l	die Länge	} der Saite
m	die Masse	
P	die Spannung (in Dynen)	
w	den elektrischen Widerstand	
x	die Entfernung eines Punktes der Saite von einem Endpunkt	
η	die Entfernung eines Saitenpunktes aus der Ruhelage	
J	den elektrischen Strom (in elektrostatischen Einheiten)	
H	die magnetische Feldstärke des äußeren Feldes in Gauß.	
E	die Potentialdifferenz als Funktion der Zeit.	

1) A. a. O. S. 504.

2) Tatsächlich ist das Feld inhomogen, nämlich in der Mitte schwächer (vgl. Einthoven, a. a. O. S. 506). Es ist klar, wie diese Inhomogenität wirken wird. Die mittleren Teile der Saite, unter besonderen Bedingungen stehend und anfangs zurückbleibend, bilden gewissermaßen für sich eine sehr kleine und daher sehr rasch schwingende Saite, deren Schwingungen sich der Hauptschwingung überlagern. Diese Störung nimmt aber, wie Herr Einthoven die Güte hatte mir brieflich mitzuteilen, mit der Spannung der Saite immer mehr ab.

Daß die Saite nur in einer Ebene schwingen soll, ist keine große Einschränkung. Wird die Bewegung nur durch den elektrischen Strom hervorgerufen, so findet von selbst kein Heraustreten aus dieser Ebene statt.

3) Vgl. jedoch § 12.

4) Alle Größen werden im C. G. S. System angegeben und zwar die elektrischen Größen im elektrostatischen Maße.

Nun setzt sich die auf ein Längenelement dx wirkende Kraft, die gleich $\frac{m}{l} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} dx$ ist, aus zwei Summanden zusammen: erstens aus einer mechanischen Kraft¹⁾ $P \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$ und zweitens aus einer Kraft elektromagnetischen Ursprungs, vom Betrage $\frac{J}{c} H dx$.²⁾ Also hat man

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{Pl}{m} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{HJl}{c} \frac{1}{m}.$$

Da sich aber die Gesamtspannung aus der Klemmspannung E und der induzierten³⁾ Spannung

$$- \frac{H}{c} \int_0^l \frac{\partial \eta}{\partial t} dx$$

zusammensetzt, so wird

$$(2)^4) \quad J = \frac{1}{w} \left\{ E - \frac{H}{c} \int_0^l \frac{\partial \eta}{\partial t} dx \right\}.$$

Aus (1) und (2) ergibt sich:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{lP}{m} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{Hl}{m c w} E - \frac{H^2 l}{w m c^2} \int_0^l \frac{\partial \eta}{\partial t} dx$$

oder wenn abkürzend

$$(3) \quad \frac{Pl}{m} = a^2$$

$$(4) \quad \frac{Hl}{m c w} E(t) = F(t)$$

$$(5) \quad \frac{H^2 l}{w m c^2} = b$$

1) Vgl. z. B. Riemann-Weber, Bd. II, S. 205 ff.

2) Vgl. z. B. Abraham-Föppl, Theorie d. Elektr. I. Bd., S. 411. E, J sind also nicht als absolute Größen aufzufassen, sondern bald positiv, bald negativ nach der Ampèreschen Schwimmregel.

3) Vgl. z. B. Kohlrausch, Lehrb. d. prakt. Phys. 1901, S. 560. $H \int_0^l \eta dx$ ist der magnetische Kraftfluß. Das Vorzeichen folgt aus der Lenzschen Regel.

4) — $\frac{H}{c w} \int_0^l \frac{\partial \eta}{\partial t} dx$ ist der induzierte Strom sowohl nach der Hertzschen als auch nach der Lorentzschen Elektrodynamik. Vgl. Abraham, Theorie d. Elektr., Bd. II, S. 321, 2. Aufl. S. 302.

gesetzt wird, und die räumlichen Differentialquotienten durch Akzente, die zeitlichen durch Punkte bezeichnet werden¹⁾:

$$(6) \quad \ddot{\eta} - a^2 \eta'' = F(t) - b \cdot \int_0^l \dot{\eta} dx.$$

Hierzu treten noch die Nebenbedingungen:

$$(7) \quad \eta(t, 0) = \eta(t, l) = 0.$$

und die Forderung, daß $\dot{\eta}$ in bezug auf t und η' in bezug auf x stetig sein sollen, die aber nur dann befriedigt werden können, wenn im Anfangszustande $\frac{\partial \eta}{\partial t}$ und $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ mit x stetig variieren.²⁾

1) Diese Gleichung wurde mir von Herrn Prof. Dr. R. Gans mitgeteilt, der mir die vorliegende Untersuchung vorgeschlagen hat. Hierfür sage ich ihm meinen herzlichsten Dank.

2) Es gehört mit in den Inhalt der für unsere Betrachtungen grundlegenden Newtonschen Bewegungsgleichung, daß sobald η' in bezug auf x stetig ist, auch $\dot{\eta}$ in bezug auf t stetig sein muß. Solange daher η' in bezug auf x stetig ist, werden beide Stetigkeitsforderungen erfüllt und die Betrachtungen des folgenden Paragraphen anwendbar sein (wir wollen im Augenblick $b = 0$ annehmen). Wäre also η' bis zu einem bestimmten Zeitpunkte exklusive eine stetige Funktion von x , während das für diesen Zeitpunkt selbst noch ungewiß wäre, so ließe sich η doch in der im folgenden Paragraphen gegebenen Weise darstellen. Es müßte also in dem betrachteten Zeitpunkte dennoch η' stetig in bezug auf x sein (vgl. Gl. 19) und daher nach Newton $\dot{\eta}$ stetig in bezug auf t sein. Ist andererseits bekannt, daß die Stetigkeitsforderungen bis zu einem bestimmten Zeitpunkte inklusive gelten, so läßt sich wenigstens immer eine Lösung geben, bei der sie auch nachher gelten.

Unsere auf die Stetigkeit bezüglichen Nebenbedingungen sind also im wesentlichen mit der Forderung gleichbedeutend: Es soll dann, wenn η' in bezug auf x stetig ist, auch $\dot{\eta}$ in bezug auf t stetig sein.

Immer muß aber natürlich vorausgesetzt werden, daß im Anfangszustande $\dot{\eta}$ und η' in bezug auf x stetig sind. Ohne das kann auch nicht die Stetigkeit von η' in bezug auf x zu späteren Zeiten erwiesen werden (vgl. die spätere Formel (19), 3. Zeile). Es gibt aber durchaus diskutabile Anfangsbedingungen, bei denen das nicht der Fall ist (z. B. die in Dreiecksform gezupfte Saite). Doch ist es für unsere Zwecke bequem, solche Fälle hier auszuschließen. Dagegen braucht man durchaus nicht zu fordern, daß $\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial t}$ eine stetige Funktion von x ist. Man könnte vermuten, daß, wenn diese Funktion unstetig ist, unmittelbar darauf eine Unstetigkeit von η' aufträte. Das ist nicht der Fall. (Beispiel: Zur Zeit 0: $\eta = 0$; $\dot{\eta} = 0$ für $x < \frac{l}{2}$; $\dot{\eta} = \alpha \left(x - \frac{l}{2}\right)$ für $x > \frac{l}{2}$; Lösung: $\eta = 0$, $= \frac{\alpha}{4a} \left(x - \frac{l}{2} + at\right)^2$, $= \alpha t \left(x - \frac{l}{2}\right)$ in den Intervallen 0 bis $\left(\frac{l}{2} - at\right)$, $\left(\frac{l}{2} - at\right)$ bis $\frac{l}{2} + at$, $\frac{l}{2} + at$ bis l).

Die elektromagnetische Dämpfung ändert an diesen Verhältnissen nichts.

Es könnte Bedenken erregen, daß wir Einthoven folgend¹⁾ den Strom der gleichzeitigen Potentialdifferenz proportional setzen, also die Selbstinduktion nicht berücksichtigen. Solange indes keine künstliche Selbstinduktion in den Stromkreis eingefügt wird, ist die dadurch bedingte Vernachlässigung durchaus gerechtfertigt. Der elektromagnetisch gemessene Selbstinduktionskoeffizient ist nämlich²⁾

$$2l \left\{ \ln \frac{2l}{\delta} - 0,75 \right\},$$

resp. $2l \left\{ \ln \frac{2l}{\delta} - 1 \right\}$

wo δ den Drahradius bezeichnet, und der obere oder untere Ausdruck gilt, je nachdem man annimmt, daß der Strom über den ganzen Drahtquerschnitt verteilt ist oder nur auf der Oberfläche fließt. Setzt man nach Einthoven

$$2l = 25,4 \text{ cm}^3)$$

$$\delta = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^4)$$

so erhält man als Wert für den Selbstinduktionskoeffizienten $2l \cdot 11,29$ resp. $2 \cdot l \cdot 11,04$ d. i. einen zwischen 280 und 287 liegenden Wert. Ferner beträgt für Saite 10 der elektromagnetisch gemessene Widerstand⁵⁾ 10^{13} elektromagnetische Einheiten. Der Quotient von Selbstinduktion und Widerstand, also etwa $2,8 \cdot 10^{-11}$ sec. gibt die Zeit an, während der ein plötzlich geschlossener Strom das $\left(1 - \frac{1}{e}\right)$ fache seines endgültigen Betrages erreicht. Mit dieser Zeit vergleichen wir die Dauer der kleinstmöglichen Eigenperiode. Da man bei einem Drahte von $1,5 \mu$ Radius die Empfindlichkeit — in den Einthovenschen Einheiten gemessen — auf $\frac{1}{5} \cdot (1,75)^2$ erniedrigen muß, um an die Zerreißungsgrenze zu gelangen⁶⁾, so erhält man für die Saite 10 eine Minimal-Eigenperiode vom $7,2 \cdot 10^{-4}$ sec.⁷⁾ Man sieht: auch bei den schnellsten vorkommenden Schwingungen erreicht der Strom seinen endgültigen Wert in einer Zeit, die äußerst klein ist gegen die Eigen-

1) A. a. O., S. 505.

2) Maxwell, Elektr., §§ 691 u. 692. M. Wien, Wiedem. Ann. d. Phys. Bd. 53, S. 928.

3) A. a. O., S. 677.

4) A. a. O., S. 500 (für Saite 10).

5) A. a. O., S. 507.

6) Vgl. S. 680, Zeile 17 v' oben, Zeile 10 u. 11 von unten.

7) Einthoven, a. a. O., S. 488, Formel 4; S. 492, Zeile 10 von unten; S. 676, Formel 30; S. 677, Zeile 14 von oben.

periode der Saite.¹⁾ Wir sind also berechtigt, die Selbstinduktion zu vernachlässigen und die Gleichung (6) als hinreichend streng anzusehen.²⁾

Wir wollen einen wichtigen Schluß aus ihr ziehen. Multiplikation mit $\dot{\eta}$ und Integration nach x liefert

$$\frac{1}{2} \int_0^l \frac{\partial}{\partial t} \dot{\eta}^2 dx - \int_0^l a^2 \eta'' \dot{\eta} dx = F \int_0^l \dot{\eta} dx - b \cdot \left[\int_0^l \dot{\eta} dx \right]^2$$

oder nach partieller Integration wegen (7)³⁾

$$(8) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l (\dot{\eta}^2 + a^2 \eta'^2) dx = F \int_0^l \dot{\eta} dx - b \cdot \left[\int_0^l \dot{\eta} dx \right]^2,$$

eine Gleichung, die den Energiesatz ausspricht. Nehmen wir an, daß von einem gewissen Zeitpunkte an $F = 0$ ist, und bezeichnen wir den zu dieser Zeit vorhandenen Wert der rechten Seite mit T_0 , so ist also

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \int_0^l a^2 \eta'^2 dx &\leq 0, \\ \int_0^l \eta'^2 dx &\leq \frac{2}{a^2} T_0, \end{aligned}$$

und daher nach einer bekannten Ungleichung von H. A. Schwarz⁴⁾

$$(9) \quad \begin{aligned} \eta = \int_0^x \eta' dx &\leq \sqrt{x \cdot \int_0^x \eta'^2 d\xi} \leq \sqrt{x} \sqrt{\int_0^l \eta'^2 dx} \leq \frac{\sqrt{2lT_0}}{a} \\ \eta &\leq \frac{1}{a} \sqrt{2lT_0}. \end{aligned}$$

Wir sehen: Falls von einem gewissen Zeitpunkte an die Funktion F verschwindet, so bleibt η an allen Stellen stets unter einer gemeinsamen Grenze.

1) Diese Größenverhältnisse ändern sich auch durch die Zuleitungen nicht wesentlich, sicherlich nicht, wenn diese bifilar gewickelt sind; vgl. M. Wien, a. a. O., S. 940.

2) Außerdem setzt die Gleichung (6) voraus, daß die Schwingungsperiode groß ist gegen die Zeit, in der sich etwa angehäufte freie Ladungen, die die Quellenfreiheit des Stromes stören, vernichten resp. an die Oberfläche gelangen. Diese Zeit ist noch viel kleiner als die eben betrachtete Relaxationszeit. Wollte man die Frage streng behandeln, so hätte man an die Lorentz'schen oder Min-kowskischen Gleichungen anzuknüpfen, die bei Abraham, Bd. II, S. 324, 2. Aufl. S. 308, sehr übersichtlich zusammengestellt sind.

3) Wegen $\lim_{x=0} \dot{\eta} = \dot{\eta}_{x=0}$; vgl. S. 18 Anm.

4) H. A. Schwarz, gesammelte Abh. Berlin 1890, Bd. I, S. 251, siehe auch E. Schmidt, math. Ann., Bd. 63, S. 440.

§ 2. Ungedämpfte Schwingungen.

Zu einem wichtigen Sonderfall gelangen wir, wenn wir $b = 0$ setzen (zu verwirklichen durch Einschalten eines sehr großen Widerstandes, vgl. Gl. (5)). Dadurch erhalten wir die Beziehung

$$(10) \quad \ddot{\eta} - a^2 \eta'' = F(t),$$

die wir die Gleichung der ungedämpften Saite nennen. Obwohl diese in der Literatur eine eingehende Berücksichtigung¹⁾ gefunden hat, ist es doch erforderlich, hier kurz ihre Lösung zu entwickeln, da wir von ihr aus den Weg auch zur Theorie der gedämpften Schwingungen finden werden.

Zunächst verallgemeinern wir (10) ein wenig und betrachten an ihrer Stelle

$$(11) \quad \ddot{\eta} - a^2 \eta'' = \hat{\Phi}(t, x)$$

wo $\hat{\Phi}(t, x)$ von t und x abhängt.²⁾ Außerdem soll stets

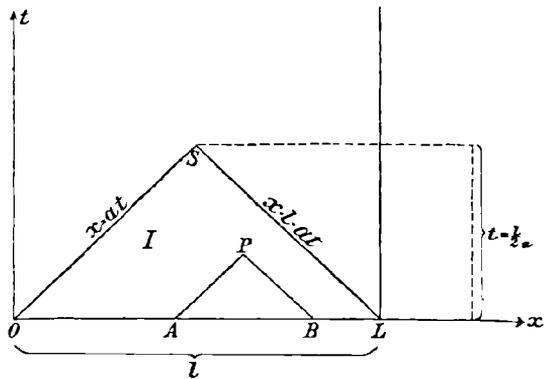
$$\eta_{x=0} = 0; \quad \eta_{x=l} = 0$$

und soll $\dot{\eta}$ in bezug auf t und η' in bezug auf x stetig sein. Endlich wird gefordert, daß für $t = 0$, η in eine gegebene Funktion $y(x)$ und $\dot{\eta}$ in eine gegebene Funktion \dot{y} übergeht.³⁾ y und \dot{y} können dabei ganz beliebig gewählt werden, nur sollen $\frac{dy}{dx}$ und y stetig in bezug auf x sein. Zur Lösung dieses Problems führt die bekannte Riemannsche Methode.⁴⁾

Wir deuten x und t als Koordinaten einer Ebene (Fig. 1). Dann ergibt (11) in Verbindung mit dem Stokeschen Satze und den Stetigkeitsforderungen, die Gleichung:

$$\begin{aligned} & - \int_a^1 \dot{\eta} dx + a \eta' dt \\ & = \frac{1}{a} \int \hat{\Phi}(t, x) do, \end{aligned}$$

Fig. 1.



wo die linke Seite die rechtsläufige Integration um eine beliebige geschlossene Kurve, die rechte eine Flächenintegration um das von ihr

1) Besonders: Donkin, acoustics, Oxford 1884, S. 124 (etwas andere Problemstellung); Rayleigh, Theorie des Schalles, deutsch von Neesen, Braunschweig, 1880, Bd. I, S. 195 u. 207; Riemann-Weber, Bd. II, S. 224 ff.

2) Φ ohne Akzent wird für eine andere Größe aufgespart.

3) \dot{y} ist also kein Differentialquotient von y , da y reine Funktion von x ist, sondern bezeichnet nur eine willkürliche Funktion.

4) Riemann-Weber, a. a. O.

umschlossene Gebiet bezeichnet. Wir wollen jetzt den Punkt $x = 0$ bzw. $x = l$, O bzw. L nennen, durch O bzw. L zwei Gerade von den Gleichungen $x = at$ bzw. $x = l - at$ legen und deren Schnittpunkt, der die Ordinate $t = \frac{l}{2a}$ besitzen wird, den Punkt S nennen. Endlich ziehen wir durch einen beliebigen Punkt P des Dreieckes SOL , das wir das Gebiet I nennen, Parallelen zu SO und SL — solche Parallelen mögen jetzt immer Charakteristiken heißen — die OL in A und B schneiden. Wenn wir dann die zuletzt erhaltene Gleichung auf den Zug $ABPA$ anwenden, bekommen wir

$$-\int_{AB} \frac{1}{a} \dot{\eta} dx - \int_B^P \frac{1}{a} \dot{\eta} dx + a\eta' dt + \int_A^P \frac{1}{a} \dot{\eta} dx + a\eta' dt = \frac{1}{a} \int \widehat{\Phi} do,$$

oder da längs der Charakteristiken $dx = \pm a dt$ nach Ausführung der Integration und Einführung von y und \dot{y} auf OL :

$$(12) \quad \eta_P = \frac{1}{2} \left\{ y_A + y_B + \frac{1}{a} \int_{AB} \dot{y} dx \right\} + \frac{1}{2a} \int \widehat{\Phi} do.$$

Es ist also bewiesen, daß jede (11) samt den Nebenbedingungen genügende Funktion in I von der Form (12) sein muß; der *Eindeutigkeitsbeweis* ist geführt.

Es ist bequem (12) zu zerlegen. Wir schreiben also

$$(13) \quad \eta = \eta^* + \widehat{\psi},$$

wo

$$(14) \quad \begin{aligned} \eta^* &= \frac{1}{2} \left\{ y_A + y_B + \frac{1}{a} \int_{AB} \dot{y} dx \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ y(l - at) + y(l + at) + \frac{1}{a} \int_{l-a}^{l+at} \dot{y} dx \right\} \end{aligned}$$

und

$$(15) \quad \widehat{\psi} = \frac{1}{2a} \int_{PAB} \widehat{\Phi} do$$

ist. Wenn wir für einen Augenblick die Giltigkeit des Existenzsatzes vorausgreifend annehmen, so können wir der Funktion $\eta^*(t, x)$ eine einfache physikalische Bedeutung beilegen: Sie ist unabhängig von $\widehat{\Phi}$, hängt nur vom Anfangszustand ab und gibt diejenige Elongation, die die Saite bei diesem Anfangszustande aufweisen würde, wenn Dämpfung und antreibende Kraft fehlten. Es muß also sein:

$$(16) \quad \frac{\partial^2 \eta^*}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \eta^*}{\partial x^2} = 0,$$

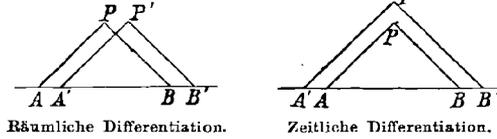
$$(17) \quad \eta^*(0, x) = y(x); \quad \dot{\eta}^*(0, x) = \dot{y}(x),$$

$$(18) \quad \eta^*(t, 0) = \eta^*(t, l) = 0.$$

Nun ist aber auch der *Existenzbeweis* leicht zu führen. Durch Differentiation erhält man aus (14) (vgl. Fig. 2)

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \eta^*}{\partial x} &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_A + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_B + \frac{1}{a} \dot{y}_B - \frac{1}{a} \dot{y}_A \right\} \\ \frac{\partial^2 \eta^*}{\partial x^2} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 y}{\partial x_A^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_B^2} + \frac{1}{a} \frac{\partial \dot{y}}{\partial x_B} - \frac{1}{a} \frac{\partial \dot{y}}{\partial x_A} \right\} \\ \frac{\partial \eta^*}{\partial t} &= \frac{1}{2} \left\{ -a \frac{\partial y}{\partial x_A} + a \frac{\partial y}{\partial x_B} + \dot{y}_B + \dot{y}_A \right\} \\ \frac{\partial^2 \eta^*}{\partial t^2} &= \frac{1}{2} \left\{ a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x_A^2} + a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x_B^2} + a \frac{\partial \dot{y}}{\partial x_B} - a \frac{\partial \dot{y}}{\partial x_A} \right\} \\ \frac{\partial^2 \eta^*}{\partial x \partial t} &= \frac{1}{2} \left\{ -a \frac{\partial^2 y}{\partial x_A^2} + a \frac{\partial^2 y}{\partial x_B^2} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial x_A} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial x_B} \right\} \end{aligned} \right.$$

Fig. 2.



Hieraus und aus (14) folgen in der Tat (16) bis (18). Ebenso ist geometrisch ersichtlich (vgl. ebenfalls Fig. 2):

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} &= \frac{1}{2a} \int_B^P \hat{\Phi} dt - \frac{1}{2a} \int_A^P \hat{\Phi} dt \\ \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial x^2} &= \frac{1}{2a} \int_B^P \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial x} dt - \frac{1}{2a} \int_A^P \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial x} dt \\ \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \int_B^P \hat{\Phi} dt + \frac{1}{2} \int_A^P \hat{\Phi} dt \\ \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial t^2} &= \frac{1}{2} \int_B^P \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \int_A^P \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \hat{\Phi}_A + \frac{1}{2} \hat{\Phi}_B \end{aligned} \right.$$

Also ist nach (13), (19), (20):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} &= \frac{1}{2} \int_A^P \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial t} dt + \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \int_B^P \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial t} dt + \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \hat{\Phi}_A + \frac{1}{2} \hat{\Phi}_B \\ &= \frac{1}{2} \{ 2 \hat{\Phi}_P - \hat{\Phi}_A - \hat{\Phi}_B \} + \frac{1}{2} \hat{\Phi}_A + \frac{1}{2} \hat{\Phi}_B = \hat{\Phi}_P, \end{aligned}$$

d. h. (11) wird tatsächlich befriedigt.

Endlich lassen (13), (19), (20) erkennen, daß η und $\dot{\eta}$ für $t = 0$ in y und \dot{y} übergehen, und (19) und (20), daß $\dot{\eta}$ und η' die gewünschten

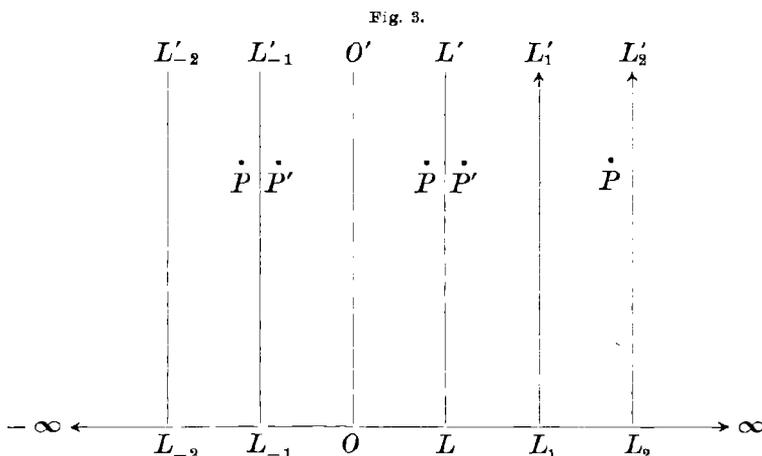
Stetigkeitseigenschaften aufweisen, sofern nur das auf S. 13 über y Vorausgesetzte zutrifft.

Damit ist nun auch (10) für das Gebiet I gelöst (Fig. 1). Es ist nur nötig zu setzen

$$(21) \quad \widehat{\Phi}(t, x) = F(t).$$

Aber auch für die andern Teile der Ebene ist es leicht, die Lösung zu finden. Behandeln wir wieder Eindeutigkeitsbeweis und Existenzbeweis gesondert.

Sei also zunächst η eine Funktion, die (11) samt den Nebenbedingungen genügt und zwischen den durch L und O gehenden Senk-



rechten LL' und OO' definiert ist. Wir erweitern dann die Definition der vier Funktionen η , y , \dot{y} , $\widehat{\Phi}(t, x)$: Man denke sich nämlich die ganze Halbebene durch Senkrechte zerschnitten, deren Abstände von O und L ganze Vielfache von l betragen (Fig. 3). In $OO'LL'$ sollen nun unsere Funktionen die ursprünglich gegebenen Werte annehmen, über die anderen Streifen dagegen so verteilt werden, daß symmetrisch zur Scheidelinie liegende Punkte (z. B. P und P') entgegengesetzt gleiche Funktionswerte erhalten. Man weist leicht das Zutreffen von (11) samt den Nebenbedingungen nach¹⁾, so daß η sich notwendig durch (13) bis (15) darstellen läßt, wo P wieder einen Punkt in $OO'LL'$ bedeuten kann und für y Werte einzusetzen sind, die in leicht ersichtlicher Weise mit den ursprünglich gegebenen zusammenhängen.

Will man den *Existenzbeweis* führen, muß man sich $\widehat{\Phi}$, y , \dot{y} gegeben und η gesucht denken, in der besprochenen Weise die Defini-

1) Daß z. B. η mit t , η mit x sich auch beim Überschreiten der Scheidelinien stetig ändern, folgt aus dem Verschwinden von η an diesen Linien.

tion von y und \dot{y} über die ganze Abszissenachse erweitern und kann dann zeigen, daß die durch (13) bis (15) gegebene Funktion η in der Tat (11) samt den Nebenbedingungen genügt. Es interessiert uns aber nur die so erhaltene Funktion η im Gebiete $OO'LL'$.

Hieraus folgt weiter, daß auch (10) eine und nur eine Lösung hat. Sie wird ebenfalls durch (13) und (15) gegeben, wenn darin eingesetzt wird

$$(22) \quad \widehat{\Phi}(t, x) = \pm F(t)$$

und in (22) das positive oder negative Zeichen gewählt wird, je nachdem x einem Streifen angehört, der durch Verschiebung um ein gerades oder ungerades Vielfaches von l mit dem ursprünglichen Streifen zur Deckung gebracht werden kann.

Ehe wir weitergehen, wollen wir noch einige Folgerungen aus den bisherigen Entwicklungen ziehen. Zunächst ersieht man aus (19) und (20), daß $\dot{\eta}$ auch in bezug auf x stetig sein wird. Es ist also

$$\lim_{x=0} \dot{\eta} = \dot{\eta}_{x=0} = 0.$$

Sodann ziehen wir einen wichtigen Schluß für den Fall, daß $F=0$ ist. Es wird dann $\eta = \eta^*$, woraus in Verbindung mit (14) und den Festsetzungen über y folgt, daß die Bewegung der Saite die Periode $\frac{2l}{a}$ besitzen wird. Für diese Zeitgröße schreiben wir τ , so daß wir haben

$$(23) \quad \tau = \frac{2l}{a}.$$

Endlich können wir jetzt schon den Fall behandeln, daß die ungedämpfte Saite, die zur Zeit 0 ruht, plötzlich von einer zeitlich konstanten Potentialdifferenz erregt wird. In diesem Falle ist $\eta^* = 0$ und (13) bis (15), sowie (21) liefern für einen Punkt in I):

$$\eta = \frac{1}{2} \cdot Ft^2.$$

Man kann noch etwas anders verfahren: Aus (15) und (21) folgt, daß für alle Punkte in I die Funktion $\widehat{\psi}$ und daher auch η von x unabhängig sein wird. Somit reduziert sich (10) auf $\ddot{y} = F$, was integriert ebenfalls $\eta = \frac{F}{2} t^2$ ergibt. Bezeichnen wir nun die Elongation der Mitte mit $\bar{\eta}$, d. h. setzen

$$(24) \quad \eta\left(t, \frac{l}{2}\right) = \bar{\eta}(t),$$

so haben wir

$$(25) \quad \bar{\eta} = \frac{1}{2} Ft^2$$

für das Zeitintervall

$$0 \text{ bis } \frac{\tau}{4}.$$

Die Saitenmitte erleidet also eine endliche Zeit hindurch keine zurücktreibende elastische Kraft, sondern verhält sich wie ein frei fallender Körper. Ihre Bewegung wird nicht durch trigonometrische, sondern rationale Funktionen bestimmt. Für feinere Untersuchungen ist es also *nicht gerechtfertigt, sie als schwingendes System anzusehen*.

Es ist leicht (25) zu vervollständigen. Aus (20) folgt für unsern Fall

$$\dot{\bar{\eta}} = \int_B^P \widehat{\Phi}(t) dt$$

und daraus

$$(26) \quad \ddot{\bar{\eta}} = \pm F,$$

wo das obere Vorzeichen zunächst $\frac{\tau}{4}$ Zeiteinheiten gilt und dann alle $\frac{\tau}{2}$ Zeiteinheiten ein Zeichenwechsel stattfindet. Durch Integration erhält man

$$(27) \quad \begin{cases} \dot{\bar{\eta}} = Ft & 0 \leq t \leq \frac{l}{2a} \\ \dot{\bar{\eta}} = F \left\{ -t + \frac{l}{a} \right\} & \frac{l}{2a} \leq t \leq \frac{3l}{2a} \\ \dot{\bar{\eta}} = F \left\{ t - \frac{2l}{a} \right\} & \frac{3l}{2a} \leq t \leq \frac{5l}{2a} \\ \dot{\bar{\eta}} = F \left\{ -t + \frac{3l}{a} \right\} & \frac{5l}{2a} \leq t \leq \frac{7l}{2a} \text{ usw.} \end{cases}$$

Oder geometrisch: Stellt man die Größe von $\dot{\bar{\eta}}$ durch einen Punkt auf einer Geraden dar, so bewegt sich dieser vertretende Geschwindigkeitspunkt beständig mit der Geschwindigkeit 1 zwischen den Punkten $-\frac{2l}{a}$ und $+\frac{2l}{a}$. Er beginnt bei 0, wendet sich zuerst nach den positiven Werten und wird an den Enden der Strecke stets reflektiert. Man sieht, daß auch in diesem Falle $\bar{\eta}$ die Periode τ besitzt. Übrigens läßt sich leicht zeigen, daß auch die nicht in der Mitte gelegenen Saitenpunkte mit der Periode τ schwingen.

Nach einer Viertelperiode ist wegen (25)

$$(28) \quad \bar{\eta} = \frac{1}{8} F \frac{l^2}{a^2} = \frac{1}{32} F \tau^2.$$

Denselben Wert besitzt $\bar{\eta}$ bei einer ruhenden Saite, wie aus Integration von $-a^2 \eta'' = F$ (vgl. 10) hervorgeht. Überhaupt passiert die Saite zu den Zeiten $\frac{l}{2a}$ und $\frac{3l}{2a}$ die Ruhelage. Integriert man (27) und stellt die so entstandene Funktion als Kurve dar, so bekommt man ein Gebilde, das, obwohl nur aus rationalen Funktionen aufgebaut, doch die

größte Ähnlichkeit mit der Sinuskurve aufweist. Insbesondere erhält man bei den Abszissen $\frac{l}{2a}$, $3\frac{l}{2a}$, $5\frac{l}{2a}$ usw. Wendepunkte, d. h. zu den Zeiten, in denen die Saite durch die Ruhelage hindurchgeht. Hierdurch wird es bis zu einem gewissen Grade gerechtfertigt, die Saitenmitte als schwingendes System zu betrachten; denn auch bei einem solchen treten die Wendepunkte beim Passieren der Ruhelage auf.

§ 3. Bewegung der gedämpften Saite im ersten Stadium.

Wir behandeln jetzt die allgemeine Gleichung

$$(6) \quad \ddot{\eta} - a^2 \eta'' = F - b \int_0^l \dot{\eta} dx,$$

wo b nicht mehr $= 0$ vorausgesetzt wird. Wieder verlangen wir, daß η für $x = 0$ und $x = l$ verschwinde, das $\dot{\eta}$ in bezug auf t , η' in bezug auf x stetig sei, und daß η und $\dot{\eta}$ für $t = 0$ in bekannte Funktionen y und \dot{y} übergehen, die beide in bezug auf x stetig sind. Auch $\frac{dy}{dx}$ soll in bezug auf x stetig sein.

Wir bemerken, daß die rechte Seite von (6) nur von t abhängt; setzen wir also

$$(29) \quad \Phi(t) = F - b \int_0^l \dot{\eta} dx,$$

so lautet unsere Gleichung

$$(30) \quad \ddot{\eta} - a^2 \eta'' = \Phi(t)$$

und ist damit auf dieselbe Form wie (10) oder (11) gebracht. Zwar enthielt dort die rechte Seite eine bekannte Funktion, während Φ eine unbekannte Funktion ist. Aber das kann uns nicht hindern, alle im vorigen Paragraphen gemachten Schlüsse auch als gültig für (30) anzuerkennen, insbesondere auch (13) bis (15) für sie aufzustellen, wenn uns auch dieses System jetzt keine Lösung gibt. Es gelten also wieder

$$(13) \quad \eta = \eta^* + \hat{\psi},$$

$$(14) \quad \eta^* = \frac{1}{2} \left\{ y_A + y_B + \frac{1}{a} \int_{AB} \dot{y} dx \right\},$$

$$(15) \quad \hat{\psi} = \frac{1}{2a} \int_{PAB} \hat{\Phi} do$$

und nur statt (22) hat man jetzt

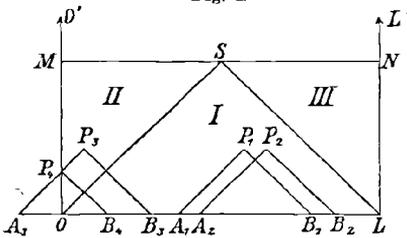
$$(31) \quad \widehat{\Phi}(t, x) = \pm \Phi(t),$$

wobei über das Vorzeichen das früher Gesagte gilt.¹⁾

Hier ist uns η^* nach wie vor vollständig bekannt; von $\widehat{\psi}$ dagegen ergibt sich vorläufig nur eine wichtige Eigenschaft, die wir geometrisch aufsuchen wollen.

Wir beschränken uns auf das Zeitintervall 0 bis $\frac{l}{2a}$ oder 0 bis $\frac{\tau}{4}$. Durch S (Fig. 1 u. 4) ziehen wir eine Parallele zur Abszissenachse, welche die durch O und L gehenden Senkrechten OO' und LL' in M und N schneidet, und nennen MOS das Gebiet II, SNL das Gebiet III, während SOL wie früher I heißen möge. Analytisch gesprochen: bei gegebenem t liegt die Strecke O bis at in I, at bis $l - at$ in II, $l - at$ bis l in III.

Fig. 4.



Seien P_1 und P_2 Punkte in I von gleicher Höhe (gleichem t) (Fig. 4), und denke man sich einen beweglichen Punkt von P_1 nach P_2 hinüberschafft, so verschiebt sich das zugehörige Charakteristikendreieck (S. 14) PAB von $P_1A_1B_1$ nach $P_2A_2B_2$; daher sieht man, daß $\widehat{\psi}$ in I von x unabhängig ist und einer reinen Funktion von t , wir wollen sie $\psi(t)$ nennen, gleichgesetzt werden kann.

Befindet sich andererseits P in II etwa in P_3 und nennt man P_4 den Schnittpunkt von P_3A_3 mit OO' , so ist bei der durch (15) geforderten Integration in P_4A_3O nach (31) $\widehat{\Phi}(t, x) = -\Phi(t)$ zu setzen. Statt dessen können wir die Integration (15) so ausführen, als ob überall $\widehat{\Phi}(t, x) = +\Phi(t)$ wäre, und dann ein ebensolches Integral, genommen über $A_3B_4P_4 = 2 \cdot P_4A_3O$ abziehen. Für III gilt Entsprechendes. Somit hat man:

$$(32) \quad \begin{cases} \text{in I.} & \widehat{\psi}(t, x) = \psi(t) & (a) \\ \text{in II.} & \widehat{\psi}(t, x) = \psi(t) - \psi\left(t - \frac{x}{a}\right) & (b) \\ \text{in III.} & \widehat{\psi}(t, x) = \psi(t) - \psi\left(t - \frac{l-x}{a}\right) & (c) \end{cases}$$

Hierzu kommt wegen (15) und (20)

$$(33) \quad \begin{cases} \psi(0) = 0 \\ \dot{\psi}(0) = 0. \end{cases}$$

1) Hieraus in Verbindung mit dem vorigen Paragraphen (S. 15) folgt also auch, daß für jede Lösung von (6), die die Nebenbedingung erfüllt, auch $\dot{\eta}$ in bezug auf x stetig sein wird. Es wird also auch $\lim_{\eta_x=0} \dot{\eta} = 0$ sein, wovon auf S. 10 Gebrauch gemacht wurde.

und schließlich bemerken wir noch, daß wegen (20) ψ eine stetige Funktion von t ist.

Die erhaltenen Werte von $\hat{\psi}$ wollen wir jetzt in (30) einsetzen. Wegen (32) ist in allen drei Gebieten

$$(34) \quad \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial x^2} = \frac{d^2 \psi}{dt^2}.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} \int_0^l \hat{\psi} dx &= l\psi - \int_0^{at} \psi \left(t - \frac{x}{a} \right) dx - \int_{l-at}^l \psi \left(t - \frac{l-x}{a} \right) dx \\ &= l\psi - 2 \int_0^{at} \psi \left(t - \frac{x}{a} \right) dx \\ &= l\psi + 2a \int_0^{at} \frac{d}{dx} \psi \left(t - \frac{x}{a} \right) \\ &= l\psi + 2a \left[\psi \left(t - \frac{x}{a} \right) \right]_0^{at} \end{aligned}$$

oder wegen (33)

$$= l\psi - 2a\psi,$$

so daß man erhält:

$$b \int_0^l \dot{\eta} dx = b \cdot \int_0^l \dot{\eta}^* dx + bl\psi - 2ab\psi.$$

Hieraus, aus (13) (S. 12), (16) (S. 12) und (34) folgt

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} = F(t) - b \cdot \int_0^l \dot{\eta}^* dx - bl\psi + 2ab\psi.$$

Falls also eine Lösung von (6) samt seinen Nebenbedingungen vorhanden ist, wird sie eindeutig durch das Formelsystem gegeben:

$$(35) \quad F^*(t) = F(t) - b \cdot \int_0^l \dot{\eta}^* dx$$

$$(36) \quad \ddot{\psi} + bl\dot{\psi} - 2ab\psi(t) = F^*(t)$$

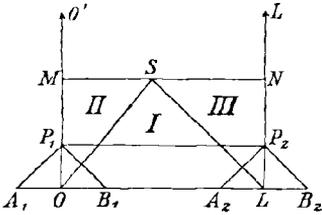
$$(33) \quad \psi(0) = 0; \quad \dot{\psi}(0) = 0.$$

ψ stetig in bezug auf t .

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{in I} & \eta = \eta^* + \psi(t) \\ \text{in II} & \eta = \eta^* + \psi(t) - \psi \left(t - \frac{x}{a} \right) \\ \text{in III} & \eta = \eta^* + \psi(t) - \psi \left(t - \frac{l-x}{a} \right). \end{array} \right.$$

Aber (35—37) und (33) stellen auch stets eine Lösung unseres Problems dar. Daß (6) wirklich durch sie befriedigt wird, folgt schon aus ihrer Herleitung; daß η und $\dot{\eta}$ für $t=0$ in y und \dot{y} übergehen, folgt aus (33) und (17), daß η für $x=0$ resp. $x=l$ verschwindet, aus (18) und (32b), resp. (18) und (32c), daß η endlich die gewünschten Stetigkeitseigenschaften besitzt, ist klar, weil ψ eine stetige Funktion von t sein sollte und daher nach (32) $\hat{\psi}$ samt seinen Ableitungen nach x und t eine stetige Funktion der Koordinaten ist.¹⁾ (35) bis (37) und (33) stellen also eine und die einzige Lösung von (6) samt seinen Nebenbedingungen dar.

Fig. 5.



Wollen wir die Lösung noch etwas analytischer gestalten, so müssen wir den Ausdruck für F^* umformen. Um $\int_0^l \dot{\eta}^* dx$ zu bilden, lasse man einen Punkt P in konstanter Höhe von P_1 [auf OO'] nach P_2 auf $[LL']$ die ganze Strecke l durchwandern. Dabei geht dann das zugehörige A (S. 12) von A_1 nach A_2 , das zugehörige B von B_1 nach B_2 (Fig. 5), und man erhält aus (19) unter Berücksichtigung der für y und \dot{y} geltenden Symmetrieeigenschaften (S. 14)

$$\int_0^l \dot{\eta}^* dx = -a \left[y(at) + y(l-at) + \int_{at}^{l-at} \dot{y} dx \right],$$

also

$$(38) \quad F^*(t) = F(t) + ba \{ y(at) + y(l-at) \} - \int_{at}^{l-at} \dot{y} dx.$$

Durch unsere Überlegungen ist Eindeutigkeit und Existenz der Lösung für die Zeit $\frac{\tau}{4}$ nach dem Anfangszustand bestimmt. Da man aber den nach $\frac{\tau}{4}$ Zeiteinheiten eintretenden Zustand seinerseits als neuen Anfangszustand ansehen kann, folgt: *es existiert eine und nur eine Lösung von (6) für beliebig große Zeiten.* Diese Methode des „Zusammenflickens“, die den Existenz- und Eindeutigkeitssatz sofort aussprechen läßt, kann zwar auch zur wirklichen Aufstellung der Bewegungsgleichungen angewandt werden, führt aber da im allgemeinen zu ziemlich verwickelten Formeln. Es sind also, um die späteren Stadien behandeln zu können, noch

1) Daß diese Stetigkeit auch beim Überschreiten der Grenzlinien zwischen I, II und III Bestand hat, folgt aus (32) und (33). Aus (13) und (10) und der auf S. 17 über $\frac{dy}{dx}$ gemachten Voraussetzung folgt jetzt auch, daß $\dot{\eta}$ in bezug auf x stetig ist.

weitere Hilfsmittel erforderlich, die im folgenden Paragraphen gewonnen werden sollen. Einstweilen haben wir noch die Saitenbewegung im ersten Stadium näher zu untersuchen.

Besonders wichtig ist der Fall der Bewegung nach dauernder Ruhe unter der Einwirkung einer konstanten Potentialdifferenz.¹⁾ Unter diesen Voraussetzungen wird: $F^* = F$, $\eta^* = 0$, $\bar{\eta} = \psi$ und daher nach (36) und (33)

$$(39) \quad \begin{cases} \ddot{\bar{\eta}} + bl\dot{\bar{\eta}} - 2ab\bar{\eta} = F \\ \bar{\eta} = 0; \quad \dot{\bar{\eta}} = 0 \end{cases}$$

oder wenn abkürzend

$$(40) \quad \begin{cases} bl = 2\alpha \\ 2ab = \beta^2 \end{cases}$$

gesetzt wird:

$$(39a) \quad \begin{cases} \ddot{\bar{\eta}} + 2\alpha\dot{\bar{\eta}} - \beta^2\bar{\eta} = F \\ \bar{\eta}(0) = 0; \quad \dot{\bar{\eta}} = 0. \end{cases}$$

Die Lösung dieser Gleichung läßt sich aus Exponentialgrößen e^{qt} aufbauen, wo die q Wurzeln der Gleichung

$$(41) \quad q^2 + 2\alpha q - \beta^2 = 0$$

sind. Setzt man:

$$(42) \quad \begin{cases} q_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \\ q_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \end{cases}$$

so wird für das Intervall 0 bis $\frac{\tau}{4}$:

$$\bar{\eta} = \frac{F}{\beta^2} \left\{ -1 + \frac{1}{2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} (q_1 e^{q_1 t} - q_2 e^{q_2 t}) \right\}$$

oder

$$(43) \quad \bar{\eta} = \frac{F}{\beta^2} \left\{ -1 + \frac{1}{2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} [(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) e^{(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2})t} + (-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) e^{(-\alpha - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2})t}] \right\}.$$

Hier bedeutet also nach (5), (23), (39)

$$(44) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{H^2 l^2}{2wmc^2} \\ \beta = \frac{2Hl}{c} \sqrt{\frac{1}{wm\tau}}. \end{cases}$$

Aus α und β ergibt sich die Periode τ nach (23) durch

$$(45) \quad \tau = \frac{8\alpha}{\beta^2}.$$

1) Einthoven, a. a. O., S. 666 und 668.

Es ist hier vielleicht der Ort, ein Wort über die Größenordnung unserer Konstanten zu sagen. Als Konstanten unserer Gleichung bezeichnen wir nach (6) die Größen a , bl und das konstante Verhältnis $\frac{F}{E}$ (vgl. (4)) oder auch α , β , $\frac{F}{E}$. Diese drei Werte hängen außer von den unmittelbar meßbaren Größen, noch von drei Konstanten ab, die der direkten Messung nicht zugänglich sind, nämlich von: H , m , P . Wir werden später einen Plan mitteilen, nach dem es möglich sein wird, a , bl , $\frac{F}{E}$ resp. H , m , P experimentell zu bestimmen. Die dazu erforderlichen Messungen liegen aber einstweilen nicht vor, und so begnügen wir uns damit, die Werte von α und β usw. auf Grund der Schätzungen zu geben, die Einthoven über H und m angestellt hat. Es ist nach ihnen (Saite 10, Platte A 22, S. 666):

$$\tau = 28,2 \cdot 10^{-3} \text{ sec}^1)$$

$$\frac{\tau}{4} = 7 \cdot 10^{-3} \text{ sec}$$

$$\alpha = 365 \text{ sec}^{-1} \text{ 2)}$$

$$\beta = 322 \text{ sec}^{-1} \text{ 3)}$$

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 487 \text{ sec}^{-1}$$

$$q_1 = 122 \text{ sec}^{-1}; \quad q_2 = -852 \text{ sec}^{-1}$$

$$F = 150 \text{ cmsec}^{-2} \text{ 4)}$$

Setzt man diese Werte in (43) ein, so sieht man, daß der Zeit $t = 6 \cdot 10^{-3}$ eine Elongation von 14μ zukommt, während Einthoven bei dieser Zeit eine Elongation von $4,8\mu$ fand.⁵⁾ Der große Unterschied dieser beiden Werte erklärt sich leicht aus der Vernachlässigung der Luftdämpfung. Außerdem sind die benutzten Zahlen für H und m nur als Schätzungen anzusehen.

Um genau zu verfahren, müßte man in den Entwicklungen die Luftdämpfung berücksichtigen und die Formelkonstanten den Messungen selbst entnehmen. Dieser Weg bietet große Schwierigkeiten, da die Formeln bei Berücksichtigung der Luftdämpfung noch verwickelter werden (§ 12), da sie, ebenso wie (43), nur für das kurze Zeitintervall 0 bis

1) Einthoven, a. a. O., S. 448 Formel (2); S. 492, Z. 11 v. u.; S. 665 Angabe $c = 535$; S. 676 Formel (30); S. 677, Z. 14 v. o. (für die scheinbare Masse wird absichtlich der in § 3 und nicht der in § 6 angegebene Wert genommen.)

2) S. 677 Z. 11, 12, 23; S. 507 Tabelle IV.

3) Vgl. unsere Formel (45).

4) Vgl. unsere Formel (4); Einthoven, S. 665 Z. 11 v. u.; S. 666 Tabelle IV erste Reihe.

5) S. 666 Tabelle VII; S. 677 Z. 13 v. o.

$\frac{\tau}{4}$ (etwa $7 \cdot 10^{-3}$ sec) gelten, und da die Einthovenschen Tabellen schon nicht mehr die zweiten Differentialquotienten erkennen lassen.¹⁾ Es bleibt also nur der Weg übrig, Beobachtungen anzustellen, bei denen die Luftdämpfung vernachlässigt werden kann, und die Theorie so auszuarbeiten, daß sie diesen Beobachtungen die Konstanten zu entnehmen gestattet. Hierauf werden wir später einzugehen haben.

§ 4. Formeln für beliebig große Zeitintervalle.

Wenn wir Formeln zu erhalten wünschen, die für beliebige Zeitintervalle gelten, so werden wir nach Möglichkeit diejenigen Größen fortzuschaffen suchen, die sich nicht ohne Bezugnahme auf einen Anfangspunkt definieren lassen. Von dieser Art ist ψ . Während nämlich die Saite in jedem Augenblicke ein bestimmtes $\bar{\eta}$, $\dot{\eta}$, F , Φ besitzt, kann von einem bestimmten ψ erst dann gesprochen werden, wenn gesagt ist, auf welchen Zeitpunkt als Anfangspunkt wir uns beziehen. Es ist aber leicht, an Stelle von ψ die Größe von Φ einzuführen. Nach (31) und (15) hat man nämlich für einen weniger als $\frac{\tau}{4}$ vom Anfangszustand entfernten Zeitpunkt

$$(46) \quad \frac{d^2\psi}{dt^2} = \Phi(t).$$

Obwohl also ψ nicht dem Zeitpunkt schlechthin, sondern nur mit Bezug auf einen Anfangszeitpunkt zukommt, fällt doch ihre zweite Ableitung bei verschiedener Wahl des Anfangszeitpunktes gleich aus. Daher ist uns $\ddot{\psi}$ wichtiger als ψ , und es liegt nahe, (36) zweimal zu differenzieren. Dadurch bekommt man

$$(47) \quad \frac{d^2\Phi}{dt^2} + bl \frac{d\Phi}{dt} - 2ab\Phi = \frac{d^2F^*}{dt^2}.$$

Zur Differentiation von F^* benutzen wir (38) und die Fig. 2. Dann finden wir, wenn wir die Summe

$$(48) \quad a \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d\dot{y}}{dx} = S$$

und die Differenz

$$(49) \quad a \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d\dot{y}}{dx} = D$$

setzen:

$$(50) \quad \ddot{\Phi} + bl\dot{\Phi} - 2ab\Phi = \ddot{F} + ba^2\{S(at) + D(l-at)\}.$$

1) Regelmäßigeren Verlauf zeigen die Beobachtungen bei stärker gespannter Saite (arch. néerl. sér. II tome 10 p. 456). Dieser Vorteil wird aber durch Verkleinerung der Eigenperiode aufgewogen.

Wenn wir die Definitionen (48), (49) der Funktionen S , D auch für negative y und für $y > l$ festhalten, so haben wir nach den Seite 14 über y und \dot{y} getroffenen Verabredungen

$$(51) \quad \begin{cases} S(-x) = -D(x) & S(x+l) = -D(l-x) \\ D(-x) = -S(x) & D(x+l) = -S(l-x), \end{cases}$$

woraus sich ergibt, daß S und D die Periode $2l$ besitzen werden.

Die Gültigkeit von (50) ist wieder auf den Fall $t < \frac{\tau}{4}$ beschränkt. Zu weiterreichenden Formeln kann man nur durch wiederholte Anwendung der eben abgeleiteten Beziehungen gelangen.

Wir wollen zunächst die Saite zur Zeit $t = 0$ als ruhend annehmen. Ferner teilen wir die Zeit in Intervalle von der Größe $\frac{\tau}{4}$ und stellen die zur Zeit $\nu \cdot \frac{\tau}{4}$ vorhandene Lage und Geschwindigkeit der Saite durch die Funktionen y_ν und \dot{y}_ν dar. Mit andern Worten, es sei

$$(52) \quad \begin{cases} \eta(x, \nu \frac{l}{2a}) = y_\nu(x) \\ \dot{\eta}(x, \nu \frac{l}{2a}) = \dot{y}_\nu(x). \end{cases}$$

Jetzt darf $t > \frac{\tau}{4}$ angenommen werden. Liegt es zwischen $\frac{l}{2a} \nu$ und $\frac{l}{2a}(\nu + 1)$, so werde

$$(53) \quad t_\nu = t - \frac{l}{2a} \nu = t - \frac{\tau}{4} \nu$$

gesetzt, so daß stets

$$(54) \quad 0 \leq t_\nu \leq \frac{\tau}{4}$$

sein muß. Endlich mag

$$(55) \quad \begin{aligned} a \frac{d^2 y_\nu}{dx^2} + \frac{d \dot{y}_\nu}{dx} &= S_\nu(x) \\ a \frac{d^2 y_\nu}{dx^2} - \frac{d \dot{y}_\nu}{dx} &= D_\nu(x) \end{aligned}$$

sein und mögen die zu y , \dot{y} als Anfangszustand gehörigen Funktionen η^* , ψ mit $\eta^*(t_\nu)$, $\psi_\nu(t_\nu)$ bezeichnet werden. Es sind also die t_ν , y_ν , \dot{y}_ν , S_ν , D_ν , ψ_ν , $\hat{\psi}_\nu$, η^*_ν abhängig von der Wahl des Anfangszeitpunktes, unabhängig $\bar{\eta}$, $\bar{\eta}$, Φ , F .

Nach diesen Festsetzungen wird, wenn $t > \frac{\tau}{4}$ ist und zwar im Zeitintervalle $n \frac{\tau}{4}$ bis $(n+1) \frac{\tau}{4}$ enthalten ist, (50) durch

$$(56) \quad \ddot{\Phi} + bl\ddot{\Phi} - 2ab\dot{\Phi} = \ddot{F} + ba^2 \{ S_n(at_n) + D_n(l-at_n) \}$$

zu ersetzen sein. Es muß also unsere Aufgabe sein, S_v und D_v durch S_{v-1} und D_{v-1} auszudrücken.

Nun hat man nach (13)

$$\eta_v(x) = \eta_{v-1}^*\left(\frac{\tau}{4}, x\right) + \hat{\psi}_{v-1}\left(\frac{\tau}{4}, x\right),$$

ferner nach (19)

$$\frac{\partial^2 \eta_{v-1}^*}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 y_{v-1}}{\partial x_A^2} + \frac{\partial^2 y_{v-1}}{\partial x_B^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial \dot{y}_{v-1}}{\partial x_A} + \frac{1}{a} \frac{\partial \dot{y}_{v-1}}{\partial x_B} \right\}$$

$$\frac{\partial^2 \eta_{v-1}^*}{\partial x \partial t} = \frac{1}{2} \left\{ -a^2 \frac{\partial y_{v-1}^2}{\partial x_A^2} + a \frac{\partial^2 y_{v-1}}{\partial x_B^2} + \frac{\partial \dot{y}_{v-1}}{\partial x_A} + \frac{\partial \dot{y}_{v-1}^2}{\partial x_B} \right\}$$

und nach (32b) resp. (32c)

$$\frac{\partial^2 \hat{\psi}_{v-1}}{\partial x^2} = -\frac{1}{a^2} \ddot{\psi}_{v-1} \left(t_v - \frac{x}{a} \right) \quad \text{resp.} \quad \frac{\partial^2 \hat{\psi}_{v-1}}{\partial x^2} = -\frac{1}{a^2} \ddot{\psi}_{v-1} \left(t_v - \frac{l-x}{a} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{\psi}_{v-1}}{\partial x \partial t} = \frac{1}{a} \dot{\psi}_{v-1} \left(t_v - \frac{x}{a} \right) \quad \text{resp.} \quad \frac{\partial^2 \hat{\psi}_{v-1}}{\partial x \partial t} = -\frac{1}{a} \dot{\psi}_{v-1} \left(t_v - \frac{l-x}{a} \right),$$

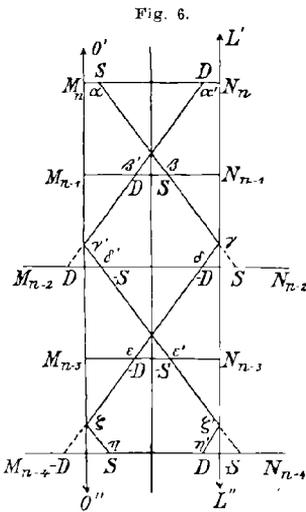
also nach (50) und (55)

$$(57) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{für } x < \frac{l}{2} \\ S_v(x) = S_{v-1} \left(x + \frac{l}{2} \right) \\ D_v(x) = D_{v-1} \left(x - \frac{l}{2} \right) - \frac{2}{a} \ddot{\psi}_{v-1} \left(\frac{l}{2a} - \frac{x}{a} \right) \\ \quad = -S_{v-1} \left(\frac{l}{2} - x \right) - \frac{2}{a} \ddot{\psi}_{v-1} \left(\frac{l}{2a} - \frac{x}{a} \right) \\ \text{für } x > \frac{l}{2} \\ D_v(x) = D_{v-1} \left(x - \frac{l}{2} \right) \\ S_v(x) = S_{v-1} \left(x + \frac{l}{2} \right) - \frac{2}{a} \ddot{\psi}_{v-1} \left(\frac{l}{2a} - \frac{l-x}{a} \right) \\ \quad = -D_{v-1} \left(3\frac{l}{2} - x \right) - \frac{2}{a} \ddot{\psi}_{v-1} \left(\frac{l}{2a} - \frac{l-x}{a} \right). \end{array} \right.$$

Es ist bequem diese Beziehungen durch eine Figur darzustellen. (Fig. 6.)

Es sei $O'O''$ die Ordinatenachse unserer stets benutzten xt -Ebene und $L'L''$ die Senkrechte im Abstände l von $O'O''$. $M_n N_n$, $M_{n-1} N_{n-1}$ usw. seien Horizontalen von den Ordinaten $n \frac{\tau}{4}$, $(n-1) \frac{\tau}{4}$ usw. (vgl. auch Fig. 4), stellen also die Punkte der Saite zu den Zeiten $n \frac{\tau}{4}$, $(n-1) \frac{\tau}{4}$ usw. dar. Es sollen jetzt durch Gerade

resp. Geradenzüge diejenigen Punkte der verschiedenen MN verbunden werden, deren S oder D einander gleich sind oder sich nur durch Summanden $\ddot{\psi}$ unterscheiden. Nach (57) bekommt man einen solchen Zug durch folgende Konstruktion: man zeichne einen Zug, der stets geradlinig verläuft, und den Richtungstangens $-\frac{l}{2a}$ (z. B. α bis γ , ξ bis η) oder $+\frac{l}{2a}$ (γ bis ξ) besitzt, und nur beim Auftreffen auf $O'O''$ oder $L'L''$ geknickt wird, dort aber eine optische Reflexion erleidet (z. B. bei γ und ξ). Ordnet man nun jedem Schnittpunkte eines Zuges



mit den MN eine der Funktionen $\pm S$, $\pm D$ zu, so, daß den Schnittpunkten auf den nach rechts hin abfallenden Teilen des Zuges (wie α , β , η) nur $+$ oder $- S$ zugeordnet wird, auf den nach links hin abfallenden (wie δ , ϵ) nur $\pm D$, und so, daß nach jeder Reflexion, und nur dann, Buchstabe und Zeichen der zugeordneten Funktion sich ändern, so unterscheiden sich in den einzelnen Punkten die Werte der zugeordneten Funktionen nur durch die $\ddot{\psi}$ enthaltenden Summanden. In der Fig. 6 sind den Schnittpunkten eines solchen Zuges mit den MN die Funktionen beige geschrieben, die — von den $\ddot{\psi}$ abgesehen — einander gleichzusetzen sind (sie zeigt z. B., daß

$$S \text{ in } \alpha = S \text{ in } \beta = -D \text{ in } \delta = -D \text{ in } \epsilon = S \text{ in } \eta$$

abgesehen von den $\ddot{\psi}$ ist). In zwei sich folgenden Punkten auf den $M_n N_n$ unterscheiden sich die zugeordneten Funktionen nur dann um einen Summanden $\ddot{\psi}$, wenn zwischen ihnen ein Knickpunkt liegt (wie γ zwischen β und δ), und die Differenz ist, vom Vorzeichen abgesehen, gleich der im Knickpunkte herrschenden Funktion $\frac{2}{a} \ddot{\psi}_\gamma(t_\gamma)$ oder nach (46) $\frac{2}{a} \Phi(t_\gamma)$ (wird z. B. $M_{n-1} \beta = x$ gesetzt, so ist das in (57) vorkommende $\frac{l}{2a} - \frac{l-x}{a}$ gleich der Höhe von γ über $M_{n-2} N_{n-2}$, also $S_\beta = -D_\delta - \frac{2}{a} \Phi_\gamma$).

Kehren wir zu unserm Ausgangspunkte zurück. Es sei ein zwischen $n \frac{\tau}{4}$ und $(n+1) \frac{\tau}{4}$ liegendes t gegeben. Dann merken wir auf $M_n N_n$ die Punkte at_n resp. $l - at_n$ an, konstruieren von dort aus den nach rechts und nach links hin abfallenden Zug und erhalten

$$S_n(at_n) + D_n(l - at_n) = -\frac{4}{a} \Phi\left(t - \frac{l}{a}\right) + \frac{4}{a} \Phi\left(t - \frac{2l}{a}\right) - \frac{4}{a} \Phi\left(t - \frac{3l}{a}\right) \pm \dots$$

(da z. B. die beiden ersten Knickpunkte γ und γ' von der Horizontalen in der Höhe t den senkrechten Abstand $\frac{l}{a}$ besitzen).

Wann bricht diese Reihe ab? Offenbar in zwei Fällen: Erstens, wenn die Ordinate der zuletzt betrachteten Funktionen im Intervalle 0 bis $\frac{\tau}{4}$ liegt; denn dann sind der Reihe nur zwei Größen S_0, D_0 , hinzuzufügen, die aber wegen $y=0, \dot{y}=0$ fortgelassen werden können. Zweitens hört die Entwicklung auch auf, wenn die zuletzt hingeschriebene Funktion ein Argument im Intervalle $\frac{\tau}{4}$ bis $\frac{\tau}{2}$ besitzt. In diesem Falle hätten wir noch zwei Funktionen S_1 und D_1 zu betrachten, die aber S_0 und D_0 gleich sind und daher ebenfalls verschwinden. Unsere Reihe läßt sich also stets in endlicher Form schreiben, und man hat nach (56)

$$(58) \quad \left\{ \begin{aligned} \ddot{\Phi} + bl\dot{\Phi} - 2ab\Phi &= \ddot{F} - 4ab \left\{ \Phi\left(t - \frac{l}{a}\right) - \Phi\left(t - \frac{2l}{a}\right) \pm \dots \pm \Phi\left(t - \frac{\mu l}{a}\right) \right\} \\ 0 < t - \frac{\mu l}{a} &< \frac{l}{a}, \end{aligned} \right.$$

wo das Argument der letzten Funktion zwischen 0 und $\frac{l}{a}$ liegt. Wir sind zu einer Differentialgleichung zweiter Ordnung gelangt und müssen noch die Anfangsbedingungen suchen, denen Φ zur Zeit 0 genügt. Aus (46) und (36) folgt:

$$\Phi(t) = -bl\dot{\psi} + 2ab\psi + F(t) - b \int_0^t \ddot{\eta}^* dx,$$

also wegen (33)

$$(54) \quad \Phi(0) = F(0).$$

Ferner ist

$$\dot{\Phi}(0) = -bl\dot{\psi} + \dot{F}(0)$$

und daher wegen (33)

$$\dot{\Phi}(0) = -bl\dot{\psi}(0) + \dot{F}(0)$$

oder nach (36) und (33)

$$(60) \quad \dot{\Phi}(0) = -blF(0) + \dot{F}(0).$$

(53) und (55) liefern uns die funktionale Abhängigkeit der Größe Φ von t in Form einer Differentialgleichung mit Anfangsbedingungen. Nur hat die Bestimmung von Φ successive zu geschehen, indem man zu ihrer Berechnung in einem Intervalle $\frac{\tau}{2}$ erst ihre Werte in den früheren Intervallen kennen muß. Außerdem muß — Stetigkeit von F und

\dot{F} vorausgesetzt — auch Stetigkeit für Φ und $\dot{\Phi}$ gefordert werden, wodurch man für den Beginn eines jeden Intervalles eine Anfangsbedingung erhält.¹⁾

Aus (58) bis (60) ergibt sich, falls noch nicht $\frac{\tau}{2}$ Zeiteinheiten nach dem Ruhezustand verstrichen sind und F konstant ist (plötzliches Einschalten einer konstanten Potentialdifferenz)

$$(61) \quad \begin{cases} \ddot{\Phi} + bl\dot{\Phi} - 2ab\Phi = 0 \\ \Phi(0) = F \\ \dot{\Phi}(0) = -blF = -2\alpha F \quad [\text{vgl. (40)}], \end{cases}$$

oder integriert

$$(62) \quad \Phi = \frac{F}{2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} (q_1 e^{4t} - q_2 e^{2t}) \quad [\text{vgl. (42)}],$$

eine Gleichung, die sich dadurch vor (43) auszeichnet, daß sie nicht nur für das Zeitintervall $\frac{\tau}{4}$ nach der Ruhe, sondern für das Zeitintervall $\frac{\tau}{2}$ gilt. Im übrigen erkennt man aus (43) und (62), was auch aus (46) folgt, daß im Anfang der Bewegung ist:

$$\frac{d^2\bar{\eta}}{dt^2} = \Phi.$$

Wir wollen jetzt in (58) $\frac{l}{a}$ durch $\frac{\tau}{2}$ ersetzen, und für t die Zeit $t + \tau$ substituieren, und endlich von der so erhaltenen Gleichung die ursprüngliche Gleichung (58) subtrahieren. Dann bekommt man

$$(63) \quad \begin{aligned} & \ddot{\Phi}(t + \tau) - \ddot{\Phi}(t) + bl[\dot{\Phi}(t + \tau) - \dot{\Phi}(t)] \\ & - 2ab[\Phi(t + \tau) - 2\Phi(t + \frac{\tau}{2}) + \Phi(t)] - \dot{F}(t + \tau) + \dot{F}(t) = 0. \end{aligned}$$

Diese Funktionalbeziehung setzt, im Gegensatz zu (58), nicht voraus daß früher einmal Ruhe geherrscht hat. Um das einzusehen, breche man zunächst (58) nach zwei Gliedern ab, schreibe also:

$$\begin{aligned} \ddot{\Phi} + bl\dot{\Phi} - 2bl\dot{\Phi} &= \dot{F} - 4ab\left\{\Phi\left(t - \frac{l}{a}\right) - \Phi\left(t - \frac{2l}{a}\right)\right\} \\ &+ b\alpha^3[S_{v-4}(at_v) + D_{v-4}(l - at_v)]. \end{aligned}$$

1) Um zu zeigen, daß Φ und $\dot{\Phi}$ zu jeder Zeit stetig sind, wähle man einen Hilfsanfangszeitpunkt, der vom gegebenen Zeitpunkt weniger als $\frac{\tau}{4}$ Einheiten entfernt ist. Dann müssen y und \dot{y} in bezug auf x stetig sein (vgl. S. 20 Anm.), also in dem zu untersuchenden Zeitpunkte wegen (38) F^* und \dot{F}^* . Da ψ stetig sein soll, muß wegen (36) $\ddot{\psi}$ stetig sein und daher wegen der differenzierten Gleichung (36) $\ddot{\psi}$. Hieraus folgt unter Berücksichtigung von (46) die Stetigkeit von Φ und $\dot{\Phi}$.

Liegt jetzt t im Intervalle $n \frac{l}{2a}$ bis $(n+1) \frac{l}{2a}$, bezogen auf irgendeinen Anfangszeitpunkt, in dem die Saite aber nicht geruht zu haben braucht, so wende man die obige Formel auf die Zeit $t + \tau$ an. Man beachte dabei, daß diese im Intervalle $(n+4) \frac{l}{2a}$ bis $(n+5) \frac{l}{2a}$ liegt, sodaß anstelle von ν überall $n+4$ zu schreiben ist. Da nun nach (53) $(t + \tau)_{n+4} = t_n$ ist, so bekommt man

$$\begin{aligned} \ddot{\Phi}(t + \tau) + bl \dot{\Phi}(t + \tau) - 2ab \Phi(t + \tau) &= \ddot{F}(t + \tau) \\ &- 4ab \left\{ \Phi \left(t + \frac{\tau}{2} \right) - \Phi(t) \right\} \\ &+ ba^2 \{ S_n(at_n) + D_n(at_n) \}, \end{aligned}$$

wovon man nur (56) zu subtrahieren hat, um (63) zu erhalten. Unter allen Umständen wird also Φ der Gleichung (63) genügen.

§ 5. Formel für die Saitengeschwindigkeit; erster Rückkehrpunkt einer Gleichstromschwingung.

Es ist aber nicht unsere Aufgabe Φ , sondern $\bar{\eta}$ und $\bar{\eta}'$ zu berechnen. Durch Differentiation folgt aus (13)

$$\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} = \frac{\partial \eta^*}{\partial t_x = \frac{l}{2}} + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial t_x = \frac{l}{2}}.$$

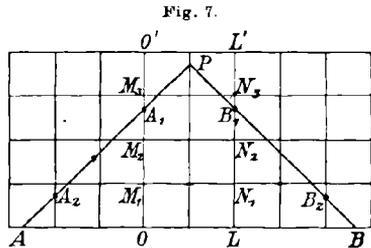
Suchen wir nun $\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial t_x = \frac{l}{2}}$ zu bestimmen.

Sei P ein Punkt (Fig. 1 und 7) von der Abszisse $\frac{l}{2}$ und beliebiger, also nicht auf das Intervall 0 bis $\frac{\tau}{4}$ beschränkter Ordinate. Weiter ziehe man, wie in Fig. 1 von P aus, die beiden Charakteristiken, die OL in A und B schneiden mögen, dann ist nach (15)

$$\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial t_x = \frac{l}{2}} = \frac{1}{2} \left\{ \int_A^P \hat{\Phi} dt + \int_B^P \hat{\Phi} dt \right\}$$

oder wegen der Symmetrieeigenschaften von Φ

$$\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial t_x = \frac{l}{2}} = \int_A^P \hat{\Phi} dt.$$



(31) zufolge ist aber $\hat{\Phi} = \pm \Phi$ (z. B. $= \Phi$ auf der Strecke A_1P , $= -\Phi$ auf A_2A_1 , $= +\Phi$ auf AA_2). Man sieht leicht, daß, wenn man von P längs AP herabgeht, zuerst, nachdem die Ordinate um $\frac{l}{2a}$ ab-

genommen hat, ein Vorzeichenwechsel stattfindet, und darauf jedesmal dann, wenn die Ordinate aufs neue um je $\frac{l}{a}$ abgenommen hat. Daher ist

$$(64) \quad \dot{\eta} = \dot{\eta}_{x=\frac{l}{2}} + \int_{t-\frac{\tau}{4}}^t \Phi(\vartheta) d\vartheta - \int_{t-\frac{\tau}{4}}^{t-\frac{\tau}{2}} \Phi(\vartheta) d\vartheta \pm \dots \pm \int_0^{t-\frac{\tau}{4}-\mu\frac{\tau}{4}} \Phi(\vartheta) d\vartheta,$$

wo μ so zu wählen ist, daß $0 \leq t - \frac{\tau}{4} - \mu \frac{\tau}{2} \leq \frac{\tau}{2}$ ist. Wir wollen noch eine andere Formel für $\dot{\eta}$ ableiten. Sei zunächst zur Zeit 0, $y = 0$ und $\dot{y} = 0$, dann folgt aus (58) durch Integration, unter C eine Konstante verstanden,

$$C + \dot{\Phi} + bl\Phi = \dot{F} + 2ab \left\{ \begin{array}{l} \int_0^t \Phi(\vartheta) d\vartheta - 2 \int_0^{t-\frac{\tau}{2}} \Phi(\vartheta) d\vartheta + 2 \int_0^{t-2\frac{\tau}{2}} \Phi(\vartheta) d\vartheta \\ \pm \dots \pm 2 \int_0^{t-\mu'\frac{\tau}{2}} \Phi(\vartheta) d\vartheta, \end{array} \right.$$

wo

$$0 \leq t - \mu' \frac{\tau}{2} \leq \frac{\tau}{2}$$

ist. Nun ist wegen (59) und (60) $C = 0$. Also bekommt man

$$\dot{\Phi} + bl\Phi = \dot{F} + 2ab \left\{ \begin{array}{l} \int_{t-\frac{\tau}{2}}^t \Phi(\vartheta) d\vartheta + \int_{t-2\frac{\tau}{2}}^{t-\frac{\tau}{2}} \Phi(\vartheta) d\vartheta \pm \dots \pm \int_0^{t-\frac{\tau}{2}\mu'} \Phi(\vartheta) d\vartheta \end{array} \right.$$

Diese Gleichung auf $t - \frac{\tau}{4}$ angewandt, ergibt

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}\left(t - \frac{\tau}{4}\right) + bl\Phi\left(t - \frac{\tau}{4}\right) &= \dot{F}\left(t - \frac{\tau}{4}\right) \\ &+ 2ab \left\{ \int_{t-\frac{\tau}{4}-\frac{\tau}{2}}^{t-\frac{\tau}{4}} \Phi(\vartheta) d\vartheta - \int_{t-\frac{\tau}{4}-2\frac{\tau}{2}}^{t-\frac{\tau}{4}-\frac{\tau}{2}} \Phi(\vartheta) d\vartheta \pm \dots \pm \int_0^{t-\frac{\tau}{4}-\frac{\tau}{2}\mu} \Phi(\vartheta) d\vartheta \right\} \end{aligned}$$

oder nach (69), da $\eta^* = 0$ ist

$$= \dot{F}\left(t - \frac{\tau}{4}\right) + 2ab \left\{ -\dot{\eta}(t) + \int_{t-\frac{\tau}{4}} \Phi(\vartheta) d\vartheta \right\}$$

also

$$(65) \quad \dot{\eta}(t) = \int_{t-\frac{\tau}{4}}^t \Phi(\vartheta) d\vartheta - \frac{\tau}{4} \Phi\left(t - \frac{\tau}{4}\right) - \frac{1}{2ab} \dot{\Phi}\left(t - \frac{\tau}{4}\right) + \frac{1}{2ab} \dot{F}\left(t - \frac{\tau}{4}\right).$$

Man beachte hierbei die naheliegende geometrische Interpretation, welche in (65) auf der rechten Seite die Summe der ersten beiden Glieder gestattet. Ist Φ als Kurve gegeben, so stellt jene Summe ein Flächensegment dar, das von einem Kurvenbogen, einer Horizontalen von der Größe $\frac{\tau}{4}$ und einer Senkrechten begrenzt wird. Ähnlich läßt sich das dritte Glied geometrisch veranschaulichen.

Diese Formel ist nicht auf den Fall beschränkt, daß zur Zeit 0 Ruhe geherrscht hat. Um sie allgemein zu beweisen, gehen wir von den Gleichungen (13) bis (15) aus. Betrachtet man einen dem zu untersuchenden Zeitpunkte um $\frac{\tau}{4}$ Einheiten vorausgehenden Augenblick als Anfangszeitpunkt im Sinne der Formeln (13) bis (15), so wird

$$y_A = y(0) = 0; \quad y_B = y(l) = 0$$

und daher

$$\eta^* = \frac{1}{2a} \int_0^l \dot{y} dx - \frac{1}{2a} \int_0^l \dot{\eta} \left(t - \frac{\tau}{4}, x \right) dx,$$

d. i. nach (29)

$$\frac{1}{2ab} \left[F \left(t - \frac{\tau}{4} \right) - \Phi \left(t - \frac{\tau}{4} \right) \right]$$

also:

$$(66) \quad \bar{\eta} = \frac{1}{2ab} \cdot \left[F \left(t - \frac{\tau}{4} \right) - \Phi \left(t - \frac{\tau}{4} \right) \right] + \int_{t - \frac{\tau}{4}}^t \Phi(\vartheta) \cdot (t - \vartheta) d\vartheta,$$

woraus (65) durch Differenzieren folgt.

Die bis jetzt entwickelten Formeln gestatten es anzugeben, wann unter dem Einfluß einer plötzlich eingeschalteten Potentialdifferenz die nur elektromagnetisch gedämpfte Saite zum ersten Male umkehren wird. Für $0 < t < \frac{\tau}{2}$ fanden wir:

$$(62) \quad \Phi = \frac{F}{2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} (q_1 e^{\alpha t} - q_2 e^{\beta t}),$$

Daher ist:

$$\int \Phi(\vartheta) d\vartheta = \text{Const.} + \frac{F}{2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} (e^{\alpha t} - e^{\beta t}).$$

Falls die Zeit t_1 der ersten Umkehr ins Intervall 0 bis $\frac{\tau}{2}$ fällt, so bestimmt sie sich aus

$$0 = \int_{t_1 - \frac{\tau}{4}}^{t_1} \Phi(\vartheta) d\vartheta - \int_0^{t_1 - \frac{\tau}{4}} \Phi(\vartheta) d\vartheta,$$

oder

$$e^{q_1 t_1} - 2e^{q_1 \left(t_1 - \frac{\tau}{4}\right)} + 1 = e^{q_2 t_1} - 2e^{q_2 \left(t_1 - \frac{\tau}{4}\right)} + 1,$$

oder:

$$e^{q_1 t_1} \left[1 - 2e^{-q_1 \frac{\tau}{4}} \right] = e^{q_2 t_1} \left[1 - 2e^{-q_2 \frac{\tau}{4}} \right],$$

wird also:

$$(67) \quad t_1 = \frac{1}{q_1 - q_2} \ln \left\{ \frac{2e^{-\frac{q_2 \tau}{4}} - 1}{2e^{-\frac{q_1 \tau}{4}} - 1} \right\}$$

ein Ausdruck, der nur gültig ist, falls $t_1 < \frac{\tau}{2}$ ist.

Es ist wichtig, diese Formel auf den Fall schwacher Dämpfung anzuwenden. In diesem Falle sind nach (40) und (42) q_1 und q_2 sehr klein und man erhält aus (67):

$$t_1 = \frac{\tau}{2} + \frac{q_1 + q_2}{16} \tau^2$$

oder nach (40) und (42):

$$(68) \quad t_1 = \frac{\tau}{2} \left(1 - \frac{bl}{8} \tau \right).$$

Es ist also in der Tat $t_1 < \frac{\tau}{2}$. Die elektromagnetische Dämpfung verringert die erste Halbperiode, falls die Dämpfung nur klein ist.

§ 6. Die Rayleighsche Methode.

Wir wollen in diesem Paragraphen die bisher gewonnenen Resultate auf eine neue Weise wiederfinden, indem wir im Anschluß an Rayleigh uns der trigonometrischen Reihenentwicklung bedienen. Unser Problem besteht wieder in der Lösung der Gleichung

$$(6) \quad \ddot{\eta} - a^2 \eta'' = F - b \int_0^l \dot{\eta} dx,$$

doch werde der Einfachheit halber jetzt vorausgesetzt:

$$y(x) = \eta(0, x) = 0; \quad \dot{y}(x) = \dot{\eta}(0, x) = 0.$$

Um (6) aufzulösen, machen wir zunächst den Ansatz

$$(69) \quad \eta = \sum_1^{\infty} \gamma_v(t) \sin \frac{v\pi x}{l},$$

wo wegen der Nebenbedingungen gilt:

$$(70) \quad \gamma_v(0) = 0; \quad \dot{\gamma}_v(0) = 0.$$

Es ist nötig, auch F in eine entsprechende Form zu bringen. Wir entwickeln dazu die Funktion 1 im Intervalle 0 bis l , setzen also:

$$(71) \quad 1 = \sum h_\nu \sin \frac{\pi x \nu}{l}.$$

Hier ist

$$(72) \quad h_\nu = \frac{2}{l} \int_0^l \sin \frac{\nu \pi x}{l} dx$$

und daher

$$(73) \quad \begin{cases} h_\nu = 0; & [\nu \text{ gerade}] \\ h_\nu = \frac{4}{\nu \pi} & [\nu \text{ ungerade}] \end{cases}$$

Also ist:

$$(74) \quad F = \sum_{1,3,\dots} \frac{4F}{\nu \pi} \sin \frac{\nu \pi x}{l},$$

Nach (69) ist:

$$(75) \quad \begin{aligned} \int_0^l \dot{\eta} dx &= \sum \dot{\gamma}_\nu \int_0^l \sin \frac{\nu \pi x}{l} dx \\ &= \frac{2l}{\pi} (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_3 + \dot{\gamma}_5 + \dots) \end{aligned}$$

oder nach (71)—(73):

$$(76) \quad \int_0^l \dot{\eta} dx = \frac{8l}{\pi^2} (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_3 + \dot{\gamma}_5 + \dots) \sum_{1,3,\dots} \frac{1}{\nu} \sin \frac{\nu \pi x}{l},$$

Setzt man also abkürzend

$$(77) \quad n = \frac{a \nu \pi}{l} = \frac{2 \pi \nu}{\tau},$$

welche Definition von τ im Einklang mit der in (23) eingeführten ist, und entwickelt (6) nach trigonometrischen Funktionen, so zerfällt diese Gleichung in die Systeme¹⁾

$$(78) \quad \text{gerade } \nu: \quad \ddot{\gamma}_\nu + n^2 \gamma_\nu = 0$$

$$(79) \quad \text{ungerade } \nu: \quad \ddot{\gamma}_\nu + n^2 \gamma_\nu = \frac{4F}{\nu \pi} - \frac{8bl}{\pi^2 \nu} (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_3 + \dot{\gamma}_5 \dots)$$

Aus (70) und (78) folgt zunächst für gerade ν :

$$(80) \quad \gamma_\nu = 0. \quad [\text{gerade } \nu]$$

Weniger einfach gestaltet sich die Behandlung von (79). Während nämlich bei Rayleigh jede Gleichung nur eine Variable enthält,

1) Hiermit vgl. Rayleigh, Theorie des Schalles, deutsch von Neesen, Braunschweig 1880. 1. Aufl. I. Bd., S. 202. Wir wären auch auf obige Gleichung ge-
Zeitschrift f. Mathematik u. Physik. 58. Band. 1910. Heft 1 2. 3

kommt in (79) in jeder Gleichung jede Variable vor, entsprechend dem Umstande, daß zwar bei Luftdämpfung die auf jedes Teilchen wirkende Hemmungskraft von seiner eigenen Geschwindigkeit, bei elektromagnetischer aber von der Geschwindigkeit aller Teilchen abhängt. Um die auf der rechten Seite vorkommenden Veränderlichen zu eliminieren, setzen wir abkürzend:

$$(81) \quad F - \frac{2bl}{\pi} \left(\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_3 + \dot{\gamma}_5 \dots \right) = \Phi(t).$$

Dann lautet (79):

$$(82) \quad \ddot{\gamma}_v + n^2 \gamma_v = \frac{4\Phi}{v\pi},$$

und man erkennt aus (81), (75) und (29), daß die jetzt eingeführte Funktion Φ dieselbe Bedeutung wie die früher benutzte hat.

(82) ergibt integriert, unter Benutzung von (70)¹⁾

$$(83) \quad \gamma_v = \frac{4}{v\pi} \frac{1}{n} \int_0^t \sin n(t - \vartheta) d\vartheta \Phi(\vartheta),$$

also ist:

$$(84) \quad \dot{\gamma}_v = \frac{4}{v\pi} \int_0^t \cos n(t - \vartheta) \Phi(\vartheta) d\vartheta$$

$$\left(\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_3 + \dot{\gamma}_5 \dots \right) = \frac{4}{\pi} \int_0^t \Phi(\vartheta) d\vartheta \sum_{1,3,\dots} \cos \frac{2\pi v}{\tau} (t - \vartheta) \frac{1}{v^2},$$

oder nach (81)

$$(85) \quad F(t) - \Phi(t) = \int_0^t \Phi(\vartheta) d\vartheta \frac{8bl}{\pi^2} \sum_{1,3,\dots} \frac{1}{v^2} \cos \frac{2\pi v}{\tau} (t - \vartheta),$$

oder kürzer:

$$(86) \quad F(t) - \Phi(t) = \int_0^t \Phi(\vartheta) d\vartheta N(t - \vartheta),$$

kommen, wenn wir nach dem Beispiele Rayleighs von den zu erweiternden Lagrangeschen Gleichungen ausgegangen wären. Sind x_λ die Kartesischen Koordinaten eines mechanischen Systems, und erleidet jeder Punkt eine Reibungskraft $-\beta \sum \dot{x}_\lambda$, so definiere man die Zerstreuungsfunktion $B = \frac{\beta}{2} \sum \dot{x}_\lambda^2$. Dann lauten die Lagrangeschen Gleichungen in verallgemeinerten Koordinaten: $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{p}} - \frac{\partial T}{\partial p} = P - \frac{\partial B}{\partial \dot{p}}$ voraus, wenn die Fourierschen Koeffizienten als allgemeine Koordinaten eingeführt werden, (78) und (79) gewonnen werden können.

1) Vgl. Rayleigh, a. a. O. S. 195. Wegen der Integration s. z. B. Riemann-Weber, 1900, Bd. I, S. 145.

wo

$$(87) \quad N(u) = \frac{8bl}{\pi^2} \sum_{1,3,5\dots} \frac{1}{v^2} \cos \frac{2\pi v}{\tau} u$$

gesetzt ist. Φ erscheint also hier als Lösung einer Volterraschen Integralgleichung.¹⁾

(85) ergibt differenziert

$$(88) \quad \begin{aligned} \dot{F}(t) - \dot{\Phi}(t) &= \Phi(t)N(0) + \int_0^t \Phi(\vartheta) d\vartheta \dot{N}(t - \vartheta) d\vartheta \\ &= \Phi(t)N(0) + \int_0^t \dot{N}(\vartheta) \Phi(t - \vartheta) d\vartheta \end{aligned}$$

und nochmals differenziert

$$\ddot{F}(t) - \ddot{\Phi}(t) = \dot{\Phi}(t)N(0) + \dot{N}(t)\Phi(0) + \int_0^t \dot{N}(\vartheta)\dot{\Phi}(t - \vartheta) d\vartheta.$$

Nun ist²⁾ für $x < \pi$:

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \dots \right),$$

also:

$$\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right) = \frac{\pi^2}{8},$$

d. h. nach (87):

$$(89) \quad N(0) = bl.$$

Somit wird unsere zuletzt erhaltene Gleichung:

$$(90) \quad \begin{aligned} \ddot{F}(t) - \ddot{\Phi}(t) &= bl\dot{\Phi}(t) + \dot{N}(t)\Phi(0) + \int_0^t \dot{N}(\vartheta)\dot{\Phi}(t - \vartheta) d\vartheta \\ &= bl\dot{\Phi}(t) + \dot{N}(t)\Phi(0) + \int_0^t \dot{N}(t - \vartheta)\Phi(\vartheta) d\vartheta. \end{aligned}$$

Die Funktion N finden wir aus (87):

$$\dot{N}(u) = -\frac{8ba}{\pi} \sum_{1,3\dots} \frac{1}{v} \sin \frac{2\pi v}{\tau} u.$$

Entwickelt man die Funktion 1 statt wie in (71) für das Intervall 0 bis l , jetzt für das Intervall 0 bis $\frac{\tau}{2}$, so erhält man: $\frac{4}{\pi} \sum_{1,3\dots} \frac{1}{v} \sin \frac{2\pi v u}{\tau}$;

1) Literatur: Volterra, Linc. Rend. (V^a) 5, 1896, S. 177, 289, Atti di Torino 31, 1896, S. 231, 286, 389, 429, Ann. di Mat. (II), 25, 1897, S. 139; P. Hertz, Math. Ann. 65, S. 1; G. Herglotz, Math. Ann. 65, S. 87.

2) Riemann-Weber, Bd. I, S. 77.

allgemein ist $\frac{4}{\pi} \sum_{1,3,\dots} \sin \frac{2\pi\nu u}{\tau} = +1$ oder -1 , je nachdem u zwischen $(2m-1)\frac{\tau}{2}$ und $2m\frac{\tau}{2}$ oder zwischen $2m\frac{\tau}{2}$ und $(2m+1)\frac{\tau}{2}$ liegt, unter m eine ganze positive Zahl verstanden. Je nachdem das eine oder das andere der Fall ist, wird also auch $\dot{N}(u) = -2ab$ oder $= +2ab$ sein. Somit lautet (90):

$$\ddot{F}(t) - \ddot{\Phi}(t) = bl\dot{\Phi}(t) \mp 2ab\Phi(0) - 2ab \cdot \left\{ \begin{array}{l} \int_{t-\frac{\tau}{2}}^t \dot{\Phi}(\vartheta) d\vartheta \\ t-\frac{\tau}{2} \\ - \int_{t-\frac{2\tau}{2}}^{t-\frac{\tau}{2}} \dot{\Phi}(\vartheta) d\vartheta \\ t-\frac{2\tau}{2} \\ \pm \dots \mp \int_0^{t-\mu\frac{\tau}{2}} \dot{\Phi}(\vartheta) d\vartheta \end{array} \right\},$$

wo $0 < t - \mu\frac{\tau}{2} < \frac{\tau}{2}$ ist, oder:

$$\begin{aligned} \ddot{F}(t) - \ddot{\Phi}(t) \\ = bl\dot{\Phi} - 2ab \cdot \left\{ \Phi(t) - 2\Phi\left(t - \frac{\tau}{2}\right) + 2\Phi\left(t - 2\frac{\tau}{2}\right) \pm \dots \pm \Phi\left(t - \mu\frac{\tau}{2}\right) \right\} \end{aligned}$$

da sich die beiden $\Phi(0)$ enthaltenen Glieder in jedem Falle aufheben. Wir haben also in der Gleichung:

$$(91) \quad \begin{aligned} \ddot{\Phi}(t) + bl\dot{\Phi}(t) - 2ab\Phi(t) \\ = \ddot{F}(t) - 4ab \cdot \left\{ \Phi\left(t - \frac{\tau}{2}\right) - \Phi\left(t - 2\frac{\tau}{2}\right) \pm \dots \pm \Phi\left(t - \mu\frac{\tau}{2}\right) \right\} \end{aligned}$$

(58) wiedergewonnen. Außerdem folgt aus (85):

$$(92) \quad \Phi(0) = F(0)$$

und aus (88), (89), (92)

$$(93) \quad \dot{\Phi}(0) = \dot{F}(0) - blF(0),$$

worin wir (59) und (60) wiedererkennen.

Es bleibt noch übrig $\ddot{\eta}$ durch Φ auszudrücken. Nach (69) ist

$$\ddot{\eta} = \eta\left(\frac{l}{2}, t\right) = \gamma_1 - \gamma_3 + \gamma_5 \pm \dots,$$

daher:

$$(94) \quad \dot{\ddot{\eta}} = \dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_3 + \dot{\gamma}_5 \pm \dots$$

also nach (84) und (77)

$$\dot{\eta} = \frac{4}{\pi} \int_0^t \Phi(\vartheta) d\vartheta \left\{ \frac{1}{1} \cos \frac{2\pi}{\tau} (t - \vartheta) - \frac{1}{3} \cos 3 \cdot \frac{2\pi}{\tau} (t - \vartheta) \pm \dots \right\},$$

oder wenn

$$\sigma(u) = \frac{1}{1} \cos \frac{2\pi}{\tau} u - \frac{1}{3} \cos 3 \cdot \frac{2\pi}{\tau} u \pm \dots$$

gesetzt wird:

$$\dot{\eta} = \frac{4}{\pi} \int_0^t \Phi(\vartheta) d\vartheta \sigma(t - \vartheta).$$

Entwickeln wir eine Funktion $f(u)$, die im Intervalle 0 bis $\frac{\tau}{2}$ gegeben ist, und zwar im Intervalle 0 bis $\frac{\tau}{4} = +\frac{\pi}{4}$, im Intervalle $\frac{\tau}{4}$ bis $\frac{\tau}{2} = -\frac{\pi}{4}$, in eine Kosinusreihe, so findet man als ihre Koeffizienten die Integrale

$$\frac{4}{\tau} \int_0^{\frac{\tau}{2}} \cos \frac{2\nu\pi\xi}{\tau} d\xi f(\xi) = \frac{1}{2\nu} \int_0^{\frac{\nu\pi}{2}} \cos \eta d\eta - \frac{1}{2\nu} \int_{\frac{\nu\pi}{2}}^{\nu\pi} \cos \eta d\eta,$$

d. h. unsere Funktion ist $\sigma(u)$. Mit anderen Worten $\frac{4}{\pi} \sigma(u)$ ist $= +1$ in den Intervallen $m\tau$ bis $m\tau + \frac{\tau}{4}$ und $m\tau + \frac{3}{4}\tau$ bis $m\tau + \tau$, aber $= -1$ in den Intervallen $m\tau + \frac{\tau}{4}$ bis $m\tau + \frac{3}{4}\tau$ (m positiv oder $= 0$). Hieraus folgt:

$$(95) \quad \dot{\eta} = \int_{t-\frac{\tau}{4}}^t \Phi(\vartheta) d\vartheta - \int_{t-\frac{3}{4}\tau}^{t-\frac{\tau}{4}} \Phi(\vartheta) d\vartheta + \int_{t-\frac{5}{4}\tau}^{t-\frac{3}{4}\tau} \Phi(\vartheta) d\vartheta \pm \dots \pm \int_0^{t-\frac{\tau}{4}-\mu'\frac{\tau}{2}} \Phi(\vartheta) d\vartheta$$

$$0 < t - \frac{\tau}{4} - \mu' \frac{\tau}{2} < \frac{\tau}{2},$$

womit (64) wiedergewonnen ist.

§ 7. Eigenschwingungen des Induktionsstromes.

Von besonderer Wichtigkeit für Theorie und Praxis ist der Fall, daß die Saite ohne Einwirkung einer äußeren elektromotorischen Kraft schwingt. Wir wollen untersuchen, von welcher Form unter diesen Umständen die Funktion Φ ist, die — bei Abwesenheit einer äußeren

Potentialdifferenz — dem induzierten Strome proportional ist. Wenn $F = 0$ ist, so gilt nach (63)

$$(96) \quad \ddot{\Phi}(t + \tau) - \ddot{\Phi}(t) + bl[\dot{\Phi}(t + \tau) - \dot{\Phi}(t)] \\ - 2ab[\Phi(t + \tau) - 2\Phi(t + \frac{\tau}{2}) + \Phi(t)] = 0.$$

Suchen wir partikuläre Lösungen dieser Gleichung. Wir setzen

$$(97) \quad \Phi = \Re(e^{pt}),$$

wo das Symbol \Re den Realteil der ihm folgenden Größe bedeutet.

Dann muß p der Gleichung genügen:

$$(98) \quad p^2(e^{p\tau} - 1) + blp(e^{p\tau} - 1) \\ - 2ab[e^{p\tau} - 2e^{p\frac{\tau}{2}} + 1] = 0.$$

Suchen wir die Wurzeln dieser Gleichung.

Zuerst finden wir, daß $p = 0$ eine Wurzel von (98) darstellt. Man überzeugt sich leicht, unter Benutzung von (23), daß (98) bei $p = 0$ eine dreifache Wurzel besitzt. Dementsprechend vermuten wir, daß

$$(1) \quad 1, t, t^2$$

Lösungen von (96) sein werden, was sofort bestätigt werden kann. Sodann sieht man, daß $e^{p\frac{\tau}{2}} - 1$ in der linken Seite von (98) als Faktor enthalten ist; also auch die Nullstellen von

$$(99) \quad e^{p\frac{\tau}{2}} - 1 = 0; \quad \text{d. h.} \\ (2) \quad p = \pm \frac{4\pi i\nu}{\tau},$$

wo ν eine positive Zahl ist, sind Wurzeln von (98) (der Fall $\nu = 0$ wurde schon unter (1) behandelt). Als Lösungen von (96) bekommen wir somit

$$(2) \quad \sin \frac{2\pi t\nu}{\tau}, \quad \cos \frac{2\pi t\nu}{\tau},$$

Funktionen, aus denen sich in Verbindung mit der unter (1) aufgeführten Funktion 1 jede in bezug auf $\frac{\tau}{2}$ periodische Funktionen aufbauen läßt.

Um nun noch die übrigen Wurzeln von (98) zu erhalten, dividieren wir durch $e^{p\frac{\tau}{2}} - 1$. Dann erhalten wir

$$p^2(e^{p\frac{\tau}{2}} + 1) + blp(e^{p\frac{\tau}{2}} + 1) - 2ab(e^{p\frac{\tau}{2}} - 1) = 0$$

oder

$$(100) \quad e^{\frac{p\tau}{2}} [p^2 + blp - 2ab] + [p^2 + blp + 2ab] = 0.$$

Wir haben also als Wurzeln von (98):

(3) die von Null verschiedenen Nullstellen der Gleichung (100) und als Partikularlösung von (96):

(3) die Funktionen $e^{p_v t}$, unter p_v die von 0 verschiedenen Wurzeln von (100) verstanden.

Es ist nun angezeigt, die Nullstellen von (100) näher zu untersuchen. Zunächst werden wir erwarten, bei $p = 0$ eine doppelte Wurzel zu finden, da (100) nach Division durch $e^{\frac{p\tau}{2}} - 1$ aus (98) entsteht, und (98) eine dreifache, (99) eine einfache Wurzel bei $p = 0$ besitzt. In der Tat bestätigt man leicht das doppelte Verschwinden der linken Seite von (100) bei $p = 0$.

Da die linke Seite von (100) für $p = 0$ verschwindet und für $p = 0$ mit p beständig wächst, so kann (100) keine positive Wurzel besitzen. Setzt man $p = -p^*$, so kann (100) geschrieben werden:

$$e^{p^*\frac{\tau}{2}} [p^*(p^* - bl) + 2ab] + [p^*(p^* - bl) - 2ab] = 0,$$

eine Gleichung, deren linke Seite für p^* verschwindet und für positive p^* mit p^* beständig wächst. (100) kann auch keine negativen Wurzeln besitzen; d. h. außer der doppelten Wurzel 0 besitzt (100) keine reelle Wurzel.

Dagegen hat unsere Gleichung, wie aus den Untersuchungen von G. Herglotz¹⁾ hervorgeht, unendlich viele komplexe Wurzeln. Wir wollen für sehr große Nullstellen einen asymptotischen Ausdruck aufstellen.²⁾

Dazu schreiben wir (100) in der Form:

$$(101) \quad e^{\frac{p\tau}{2}} = - \frac{1 + \frac{1}{p}bl + \frac{1}{p^2}2ab}{1 + \frac{1}{p}bl - \frac{1}{p^2}2ab},$$

oder für kleine $\frac{1}{p}$ entwickelt

$$(102) \quad e^{\frac{p\tau}{2}} = - \left(1 + \frac{4ab}{p^2} + \dots \right).$$

1) Gött. Nachr. 1903, Heft 6, Kap. V. Im Folgenden nehmen wir der Einfachheit halber an, daß (100) keine mehrfachen komplexen von 0 verschiedenen Wurzeln besitzt. Eine mehrfache Wurzel kann, wenn überhaupt möglich, nur an den Nullstellen von $p \cdot (p + bl)^2 + \frac{8ab^2}{l} = 0$ auftreten.

2) Hierzu vgl. A. Sommerfeld, Gött. Nachr. 1904, S. 438.

Hieraus bekommt man durch Logarithmieren:

$$\begin{aligned}
 p_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} &= i\pi(1 + 2n) + \frac{4ab}{p^2} + \dots \\
 &= \frac{2i\pi}{\tau}(1 + 2n) + \frac{8ab}{p^2\tau} + \dots \\
 &= \frac{2i\pi}{\tau}(1 + 2n) + \frac{8ab}{\tau \left[\frac{2i\pi}{\tau}(1 + 2n) \right]^2} + \dots \\
 (103) \quad p &= -\frac{2ab\tau}{\pi^2(1 + 2n)^2} + i\frac{2\pi}{\tau}(1 + 2n) + \dots
 \end{aligned}$$

Aus dieser asymptotischen Form, in der sich die Wurzeln für große p , darstellen lassen, sieht man, daß außerhalb eines gewissen Kreises die p keine positiven Realteile besitzen können. Falls also (98) überhaupt Wurzeln mit positivem Realteile besitzt, so können diese nur in endlicher Anzahl vorhanden sein.

Jede Funktion $e^{p\nu t}$, ferner $\Re(e^{p\nu t})$, $\Sigma C_\nu e^{p\nu t}$, unter C_ν komplexe Konstante verstanden, sowie $\Re \Sigma C_\nu e^{p\nu t}$ genügen der Funktionalgleichung (96). Damit ist aber durchaus nicht gesagt, daß es zu jeder dieser Funktionen wirklich eine Eigenschwingung gibt (so wollen wir die Bewegung der Saite nennen, wenn $F' = 0$ ist) bei der Φ in dieser Weise von der Zeit abhängt. Ebensowenig können wir bis jetzt schließen, daß sich, bei Abwesenheit einer äußeren elektromotorischen Kraft, Φ in eine Reihe von den unter (1), (2), (3) aufgeführten Funktionen zerlegen läßt. Es wäre das der Fall, wenn gezeigt werden könnte, daß sich jede im Intervall 0 bis τ gegebene Funktion in eine solche Reihe zerlegen läßt. Die Möglichkeit einer derartigen Entwicklung vorausgesetzt, könnte man immer, welche Funktion Φ auch ist, sie im Intervalle 0 bis τ in eine Reihe der Funktionen (1), (2), (3) entwickeln, und wäre dann, weil alle diese Funktionen (96) genügen und weil (96) eine eindeutige Lösung zuläßt, versichert, daß auch weiterhin über das Intervall hinaus die Entwicklung mit Φ übereinstimmt. Es kommt also darauf an, den Nachweis zu erbringen: *Jede Funktion läßt sich im Intervalle 0 bis τ in eine Reihe der unter (1) bis (3) aufgeführten Funktionen entwickeln.*

Um diese Behauptung zu beweisen, stützen wir uns auf einen Satz von Poincaré, aus dem folgt, daß im Intervalle 0 bis $\frac{\tau}{2}$ jede Funktion nach Funktionen (3) entwickelt werden kann (unter Hinzuziehung von 1, t). Andererseits kann nach Fourier jede Funktion im Intervalle 0 bis $\frac{\tau}{2}$ durch die Funktionen (2) linear ausgedrückt werden (unter

Hinzuziehung von 1. Es liegt nahe zu vermuten, daß dann, wenn sowohl die Funktionen (2), als auch die Funktionen (3) zur Verfügung stehen, der Entwicklungsbereich größer sein wird. Es zeigt sich, daß er gerade doppelt so groß ist, mithin jede zwischen 0 bis τ gegebene Funktion sich durch die Funktionen (1), (2), (3) darstellen läßt. Die nähere Ausführung dieser Gedankengänge muß dem folgenden Paragraphen vorbehalten bleiben. Ich wage sie hier mitzuteilen, obwohl sie an zwei Stellen nicht allen Anforderungen mathematischer Strenge genügen.

§ 8. Entwicklung von Φ nach Eigenschwingungen.

Wir schreiben (100) in der Form

$$(104) \quad e^{\frac{p\tau}{4}}(p^2 + b1p - 2ab) + (p^2 + b1p + 2ab)e^{-\frac{p\tau}{4}} = 0,$$

eine Gleichung, die dieselben Nullstellen wie (100) besitzt. Nach Poincaré¹⁾ läßt sich eine beliebige zwischen 0 und $\frac{\tau}{2}$ gegebene Funktion in eine Summe von Exponentialgrößen, $\Sigma C_\nu e^{p_\nu t}$ entwickeln, wo die p_ν die Wurzeln von (104) bezeichnen, und die C_ν komplexe Koeffizienten. Nun ist allerdings zu beachten, daß (104) bei $p = 0$ eine Doppelwurzel besitzt; wenn man aber den Poincaréschen Beweis nachliest, wird man finden, daß der Satz trotzdem richtig bleibt, daß man nur der Entwicklung noch eine lineare Funktion $\beta + \gamma t$ hinzuzufügen hat, (nämlich $\beta \cdot e^{0 \cdot t} + \gamma t e^{0 \cdot t}$). Nicht aber kann man jede Funktion im Intervalle 0 bis τ nach diesen Exponentialgrößen entwickeln. Das wird nur unter besonderen Umständen möglich sein, für die wir ein Kriterium aufstellen wollen.

Jede unserer Exponentialgrößen, die wir mit Bezugnahme der auf Seite 39 gegebenen Aufzählung kurz die Funktionen (3) nennen wollen, wird in dem Intervalle $\frac{\tau}{2}$ bis τ der Integralgleichung:

$$(105) \quad \int_0^{\frac{\tau}{2}} [bl - 2ab\vartheta] \varphi(t - \vartheta) d\vartheta = -\varphi(t) - \varphi\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$$

genügen; denn, setzt man $\varphi = e^{pt}$ in (105) ein, erhält man für die p die Gleichung (100).²⁾ Jede Funktion, die sich also im Intervalle 0 bis τ durch die Funktionen (3) ausdrücken läßt, muß im Intervalle

1) Théorie de la chaleur, Paris 1895, S. 216, § 117.

2) Die Funktionen 1 und t sind nicht Lösungen von (105). Um von (105) auf (100) zu kommen, muß man mit p multiplizieren.

$\frac{\tau}{2}$ bis τ (105) genügen. Sehen wir nun, inwieweit dieser Satz sich umkehren läßt. Die Gleichung (105), die sich auch

$$(106) \quad \varphi(t) = -\varphi\left(t - \frac{\tau}{2}\right) - \int_{t - \frac{\tau}{2}}^t [bl - 2ab \cdot (t - \vartheta)] \varphi(\vartheta) d\vartheta$$

schreiben läßt, muß zu diesem Zwecke näher untersucht werden. Falls φ zwischen 0 und $\frac{\tau}{2}$ bekannt ist und nur zwischen $\frac{\tau}{2}$ und τ gesucht wird, kann $-\varphi\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$ als bekannte Funktion von t angesehen werden. Nach dieser Auffassung stellt dann (105) oder (106) eine Volterrasche Integralgleichung von der Art dar, die ich in den mathematischen Annalen untersucht habe.¹⁾ Aus den dort gegebenen Entwicklungen geht hervor, daß, wenn φ im Intervalle 0 bis $\frac{\tau}{2}$ gegeben ist, es stets auf eine und nur eine Weise im Intervalle $\frac{\tau}{2}$ bis τ so fortgesetzt werden kann, daß (105) resp. (106) erfüllt ist.

Wir wollen jetzt zwei Funktionen $g_0(t), g_1(t)$ durch folgende Festsetzungen definieren: zwischen 0 bis $\frac{\tau}{2}$ soll $g_0(t)$ resp. $g_1(t) = 1$ resp. $= t$ sein, dagegen im Intervalle $\frac{\tau}{2}$ bis τ (105) und (106) genügen. Sei jetzt von einer Funktion φ bekannt, daß sie (105) und (106) genügt, dann wissen wir nach dem Poincaréschen Satz, daß sie sich im Intervalle 0 bis $\frac{\tau}{2}$ in der Form

$$\varphi = c_0 + c_1 t + A(t)$$

darstellen läßt, wo c_0, c_1 Konstanten sind und $A(t)$ aus Funktionen (3) additiv zusammengesetzt ist. Im Intervalle 0 bis $\frac{\tau}{2}$ stimmen also $g_0 + tg_1(t) + A(t)$ und φ überein. Da nun unsere beiden Ausdrücke zwischen 0 und $\frac{\tau}{2}$ den Gleichungen (105) und (106) genügen und da diese Gleichungen nur eine eindeutige Lösung gestatten, so muß sich die Übereinstimmung auch über das ursprüngliche Intervall hinaus erstrecken, d. h. für alle positiven t muß $\varphi = g_0 + tg_1 + A$ sein. Jede Funktion also, die aus $g_0(t), g_1(t)$ und den Funktionen (3) zusammengesetzt ist, genügt im Intervalle 0 bis τ (105); und jede (105) im Intervalle 0 bis τ genügende Funktion gestattet eine Entwicklung nach $g_0(t), g_1(t)$ und

1) Math. Ann. Bd. 65, S. 1.

Funktionen (3). Die zu diesem Satze leitenden Überlegungen sind nicht ganz streng. Es wurde stillschweigend vorausgesetzt, daß, wenn man φ im Intervalle 0 bis $\frac{\tau}{2}$ entwickelt, diese Entwicklung auch für das Intervall $\frac{\tau}{2}$ bis τ konvergiert. Einen Beweis für die Richtigkeit dieser Annahme habe ich nicht gefunden.

Nennen wir eine Funktion, die zwischen $\frac{\tau}{2}$ und τ der Gleichung (105) oder (106) genügt, eine Funktion V (nach Volterra), so haben wir zu untersuchen, ob sich jede beliebige Funktion im Intervalle 0 bis τ in eine Funktion mit der Periode $\frac{\tau}{2}$ und eine V -Funktion zerlegen läßt.

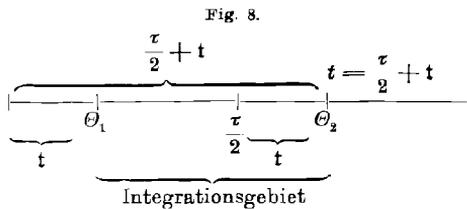
Sei also f irgendeine im Intervalle 0 bis τ gegebene Funktion, so wird eine Zerlegung

$$(107) \quad f(t) = \omega(t) + v(t)$$

gesucht, wo ω die Periode $\frac{\tau}{2}$ besitzt und $v(t)$ (105) und (106) genügt. Wir brauchen dabei ω nur für das Intervall 0 bis $\frac{\tau}{2}$ zu bestimmen; diese Bestimmung gelingt, wenn wir für einen Wert $t > \frac{\tau}{2}$ die Bedingungen aufsuchen, daß v (106) befriedigt.

t soll also einen Wert $> \frac{\tau}{2}$ besitzen und zur Abkürzung soll gesetzt werden:

$$(108) \quad t = t - \frac{\tau}{2}.$$



Dann muß die Funktion v für das Argument $\frac{\tau}{2} + t$ mit einem Integrale verglichen werden, dessen Variable ϑ nach (106) mit t beginnt (bei Θ_1 , Fig. 8) und mit $t + \frac{\tau}{2}$ aufhört (bei Θ_2). Dieses Integral zerfällt in die beiden Teilintegrale

$$\int_{\frac{\tau}{2}}^t \text{ und } \int_{t-\frac{\tau}{2}}^{t+\frac{\tau}{2}}; \text{ aber da im Integranden } v(\vartheta) = f(\vartheta) - \omega(\vartheta) \text{ vorkommt,}$$

so kann das zweite Teilintegral, soweit es ω enthält, in ein Integral \int_0^t verwandelt werden. Somit wird (106)

$$\begin{aligned}
 & f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) + f(t) - 2\omega(t) \\
 &= - \int_t^{t+\frac{\tau}{2}} [bl - 2ab\left(t + \frac{\tau}{2} - \vartheta\right)] f(\vartheta) d\vartheta \\
 &+ \int_0^t [bl - 2ab \cdot (t - \vartheta)] \omega(\vartheta) d\vartheta + \int_t^{\frac{\tau}{2}} [bl - 2ab \cdot \left(t + \frac{\tau}{2} - \vartheta\right)] \omega(\vartheta) d\vartheta.
 \end{aligned}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$(109) \quad f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) + f(t) + \int_t^{t+\frac{\tau}{2}} [bl - 2ab \cdot \left(t + \frac{\tau}{2} - \vartheta\right)] f(\vartheta) d\vartheta = 2 \cdot f_1(t)$$

und definiert eine Funktion $K(t, \vartheta)$ durch die Festsetzungen:

$$(109) \quad \begin{cases} K(t, \vartheta) = \frac{2}{\tau}(t - \vartheta) - \frac{1}{2} & \text{für } \vartheta < t \\ K(t, \vartheta) = \frac{2}{\tau}(t - \vartheta) + \frac{1}{2} & \text{für } \vartheta > t, \end{cases}$$

so können wir schreiben:

$$(110) \quad f_1(t) = \omega(t) - bl \int_0^{\frac{\tau}{2}} K(t, \vartheta) \omega(\vartheta) d\vartheta.$$

Dies ist eine Fredholmsche Integralgleichung, deren Kern $K(t, \vartheta)$ und deren Parameter bl ist. Wie man sieht, ist der Kern unsymmetrisch und hat bei $\vartheta = t$ eine Unstetigkeit im Betrage 1. Es gibt nun nach Fredholm¹⁾ eine ganze transzendente Funktion $\mathcal{A}(\lambda)$ von der Eigenschaft, daß falls bl nicht gerade einer der Wurzeln von

$$(111) \quad \mathcal{A}(\lambda) = 0$$

gleich ist, (110) stets eine und nur eine Lösung besitzt. Da \mathcal{A} eine ganze Transzendente ist, können sich ihre Nullstellen nicht häufen, d. h. diejenigen Werte bl , für die (110) nicht auflösbar ist, liegen diskret verteilt. Die Nichtauflösbarkeit von (110) erweist sich somit als eine Singularität; wir sind in einem konkreten Fall berechtigt zu vermuten, daß sie nicht vorliegt und daß es eine Lösung ω von (110) gibt. Bei solcher Wahl von bl kann, das haben wir jetzt gezeigt, jede Funktion in Intervalle 0 bis τ in eine Funktion mit der Periode $\frac{\tau}{2}$ und in eine

1) Acta math. 28, 1903, besonders S. 371 u. 375.

V -Funktion zerlegt werden. Daraus folgt aber weiter, daß jede Funktion eine Zerlegung in $g_0(t)$, $g_1(t)$, $A(t)$, $\omega(t)$ gestattet, wo ω nach $\frac{\tau}{2}$ periodisch ist und $A(t)$ aus den Funktionen (3) zusammengesetzt werden kann.

Wendet man dieses Ergebnis auf die Funktionen t und t^2 an, so findet man, daß es solche Funktionen A und ω geben muß und solche Koeffizienten γ , daß im Intervalle 0 bis τ gilt:

$$(112) \quad \begin{cases} t = A_1(t) + \omega_1(t) + \gamma_{11} g_0(t) + \gamma_{12} g_1(t) \\ t^2 = A_2(t) + \omega_2(t) + \gamma_{21} g_0(t) + \gamma_{22} g_1(t). \end{cases}$$

Würde jetzt die Determinante der γ verschwinden, so gäbe es eine lineare Beziehung zwischen den A , ω , t , und t^2 , in denen die beiden letzten Funktionen nicht beide fehlen dürfen, also:

$$m_1 t + m_2 t^2 + m_3 A_1(t) + m_4 A_2(t) + m_5 \omega_1(t) + m_6 \omega_2(t) = 0.$$

Diese Gleichung würde für das Intervall 0 bis τ gelten; da aber alle darin vorkommenden Funktionen (96) genügen, so müßte sie für $t=0$ bis $t=\infty$ erfüllt sein, was wegen des asymptotischen Verhaltens der A einen Widerspruch bedeutete. Denn wären unter den A Exponentialgrößen mit positivem Realteil — solche können nur in endlicher Anzahl vorhanden sein — so würden die A stärker unendlich werden, als t oder t^2 ; im andern Falle würde aber wieder t nicht durch die A im Unendlichen aufgehoben werden können.¹⁾ Da unsere Annahme, die Determinante der γ sei $= 0$, zu einem Widerspruche geführt hat, so muß dieser Ausdruck von 0 verschieden sein. Somit lassen sich $g_0(t)$ und $g_1(t)$ durch t , t^2 , A , ω ausdrücken.

Daraus folgt aber: *Im Intervalle 0 bis τ läßt sich jede Funktion in eine Reihe, bestehend aus den Funktionen t , t^2 , und den $e^{p_v t}$ und eine nach $\frac{\tau}{2}$ periodische Funktion entwickeln, oder auch, wenn man von dem Fourierschen Satze Gebrauch macht, im Intervalle 0 bis τ läßt sich jede Funktion nach den Funktionen 1 , t , t^2 , $e^{p_v t}$, $\sin \frac{4\pi t}{\tau}$, $\cos \frac{4\pi t}{\tau}$ entwickeln oder drittens: durch Funktionen $e^{p_v t}$ ausdrücken, wo die p_v die Wurzeln von (98) bedeuten und das dreifache Verschwinden bei $p=0$ berücksichtigt werden muß.*

Aus der Zerlegbarkeit einer willkürlichen im Intervalle 0 bis τ gegebenen Funktion schließen wir weiter, daß bei Abwesenheit einer äußeren elektromotorischen Kraft, Φ sich aus Funktionen der an-

1) Hier ist die zweite Lücke unseres Beweises. Wenn auch ein einzelnes $e^{p_v t}$ für sehr große t verschwindet, so folgt das noch nicht streng für eine unendliche Reihe von $e^{p_v t}$.

gegebenen Art zusammensetzen läßt. In der Tat ist diese Zerlegung für die Zeitdauer 0 bis τ eben bewiesen worden, und folgt für spätere Zeiten aus der Eindeutigkeit von (96).

§ 9. Eigenschwingungen der Saitenmitte.

Von größerem Interesse als der induzierte Strom ist für uns die Geschwindigkeit der Saitenmitte. Sehen wir, welche Schlüsse wir im Falle $F = 0$ aus der Entwicklung von Φ auf die Darstellung von $\dot{\eta}$ ziehen können. Findet irgend ein Vorgang statt, bei dem sich die Saite ohne Einwirkung einer äußeren elektromotorischen Kraft bewegt, so läßt sich, wie wir sahen, Φ durch folgende drei Funktionsgruppen ausdrücken:

$$(1) \quad 1, \quad t, \quad t^2$$

$$(2) \quad \sin \frac{4\pi t\nu}{\tau}, \quad \cos \frac{4\pi t\nu}{\tau}$$

$$(3) \quad e^{2\nu t}.$$

Hieraus ergeben sich nach (65) drei Funktionengattungen, aus denen der Ausdruck für $\dot{\eta}$ zusammengesetzt werden kann.

Aus den Funktionen (1) erhalten wir die Summanden

$$(1) \quad 0, \quad \frac{\tau^2}{32} - \frac{1}{2ab}, \quad t \left(\frac{1}{16} \tau^2 - \frac{1}{ab} \right) + \left(\frac{\tau}{4ab} - \frac{\tau^3}{96} \right),$$

ferner aus den Funktionen (2), wenn $\nu = 1$ ist,

$$(2) \quad \left(\cos \frac{4\pi t}{\tau} \right) \left(\frac{2\pi}{ab\tau} - \frac{\tau}{2\pi} \right) + \frac{\tau}{4} \sin \frac{4\pi t}{\tau},$$

$$\left(\sin \frac{4\pi t}{\tau} \right) \left(\frac{\tau}{2\pi} - \frac{2\pi}{ab\tau} \right) + \frac{\tau}{4} \cos \frac{4\pi t}{\tau}$$

und ähnliche Ausdrücke für $\nu > 1$.

Endlich ergeben die Funktionen (3) für $\dot{\eta}$ die Summanden

$$(3) \quad -e^{2\nu t} \cdot \frac{1}{2abp_\nu} \left\{ e^{-2\nu \frac{\tau}{4}} [p_\nu^2 + blp_\nu + 2ab] - 2ab \right\}$$

Es ist zu bemerken, daß der in der geschweiften Klammer befindliche Ausdruck nicht verschwinden kann. Denn wäre

$$e^{-2\nu \frac{\tau}{4}} (p^2 + blp + 2ab) = 2ab,$$

so müßte gleichzeitig wegen (104)

$$e^{2\nu \frac{\tau}{4}} (p^2 + blp - 2ab) = -2ab$$

sein, was multipliziert

$$(p^2 + blp)^2 - 4a^2b^2 = -4a^2b^2$$

oder

$$(p^2 + blp)^2 = 0$$

ergäbe. Diese Gleichung ist aber nur möglich für $p = 0$ und $p = -bl$. Der Fall $p = 0$ braucht nicht berücksichtigt zu werden, da er auf die Funktionen (1) führt, während der Fall $p = -bl$ unmöglich ist, da, wie früher nachgewiesen, (104) keine reellen Wurzeln besitzt.

Nun ist nachzusehen, ob wirklich alle erhaltenen Summanden in $\dot{\eta}$ vorkommen können. Zunächst folgt aus (9), daß die Entwicklung von $\dot{\eta}$ weder Exponentialgrößen mit positivem Realteile noch konstante oder lineare Glieder enthalten kann. Ebenso wenig können von 0 verschiedene periodische Funktionen in ihr vorkommen. Denn träten solche auf, so müßte nach sehr langer Zeit Φ nahezu periodisch sein, während $F = 0$ wäre. Ferner wäre nach (8)

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l (\dot{\eta}^2 + a^2 \eta'^2) dx = -\frac{1}{b} \Phi^2$$

was für $\Phi \neq 0$ offenbar unmöglich ist. Wir finden also, daß die Entwicklung von $\dot{\eta}$ keinen periodischen Bestandteil enthalten kann¹⁾, und gelangen zu dem Ergebnis: *Bei Abwesenheit einer Klemmspannung läßt sich $\dot{\eta}$ aus Funktionen $e^{p \cdot t}$ zusammensetzen, wo die p , die Wurzeln von (100) (nicht von (98)) mit negativen Realteilen bedeuten.* Statt der Entwicklung nach den $e^{p \cdot t}$ kann man auch eine Entwicklung nach den Funktionen $\Re(e^{p \cdot t})$ bekommen. Damit ist übrigens noch nicht gesagt, daß es zu jeder Funktion $\Re(e^{p \cdot t})$ wirklich einen Vorgang $F = 0$ gibt, bei dem $\dot{\eta}$ in solcher Weise von der Zeit abhängt.

Besonders erwünscht wäre es, zu untersuchen, welchen Charakter nach unendlich langer Zeit die Eigenbewegung der Saite annimmt. Bedeutet es doch für alle Messungen einen grundlegenden Unterschied, ob das Instrument oszillatorische oder aperiodische Ausschläge hervorbringt. Leider konnte ich kein allgemeines Kriterium aufstellen, nach dem über die Bewegung der *Saitenmitte* entschieden werden kann, sondern konnte nur zu einer notwendigen Bedingung für das gelangen,

1) Sehr wohl ist es aber möglich, daß im Falle $F = 0$, $\eta(x, t)$ in bezug auf t die Periode τ besitzt, z. B. bei solchen stehenden Wellen, bei denen in der Mitte ein Knoten liegt, und wegen der Symmetrie kein Strom induziert wird, die Bewegung daher so vor sich geht, als ob gar keine Dämpfung vorhanden wäre. Da jedoch bei $x = \frac{l}{2}$ ein Knoten liegt, so ist in solchen Fällen $\dot{\eta} = 0$.

was ich absolute Aperiodizität nennen möchte. Wenn von einem bestimmten Zeitpunkte an *alle* Punkte der Saite die gleiche Geschwindigkeitsrichtung besitzen und diese stets weiter behalten, und wenn ihre absoluten Geschwindigkeiten beständig abnehmen, so soll dieser Vorgang ein absolut aperiodischer heißen.

Im Falle der absoluten Aperiodizität strebt die Saite der Ruhelage $\eta = 0$ zu. Es müssen also von einem bestimmten Zeitpunkte an alle $\dot{\eta}$ das entgegengesetzte Zeichen besitzen, wie alle η und insbesondere auch wie $\bar{\eta}$. Nun ist nach (29) $\Phi = -b \int_0^t \dot{\eta} dx$; daher hat Φ dasselbe Vorzeichen wie $\bar{\eta}$, nimmt aber seinem absoluten Betrage nach beständig ab, und $\frac{d\Phi}{dt}$ muß somit von dem betreffenden Zeitpunkte an das umgekehrte Zeichen wie $\bar{\eta}$ besitzen. Nach (66) ist aber

$$(113) \quad \bar{\eta} = \int_{t-\frac{\tau}{4}}^t d\vartheta \left\{ \Phi(\vartheta) \left[(t-\vartheta) - \frac{2}{\tau ab} \right] + \dot{\Phi}(\vartheta) \frac{2 \cdot (t-\vartheta)}{\tau ab} \right\}.$$

Wäre nun $\frac{2}{\tau ab} > \frac{\tau}{4}$, so müßte a fortiori $\frac{2}{\tau ab} > t - \vartheta$ sein und daher müßten sowohl $\Phi(\vartheta) \left[(t-\vartheta) - \frac{2}{ab\tau} \right]$ als auch $\frac{2(t-\vartheta)}{\tau ab} \dot{\Phi}$ von umgekehrtem Vorzeichen wie $\bar{\eta}$ sein, was einen Widerspruch gegen die Gleichung (113) bedeutete. Die Annahme $\frac{2}{\tau ab} > \frac{\tau}{4}$ ist somit unmöglich; d. h. absolute Aperiodizität kann nur dann eintreten, wenn $\frac{2}{\tau ab} < \frac{\tau}{4}$ ist oder wenn $b\tau \geq \frac{4}{\tau}$ ist, oder anders ausgedrückt: Wenn $b\tau < \frac{4}{\tau}$ ist, gibt es immer noch Punkte der Saite, die entweder ihre Geschwindigkeitsrichtung umkehren oder einen Geschwindigkeitszuwachs erhalten.

Dieselben Schlüsse gelten, wenn F nicht $= 0$ ist, sondern einen konstanten Wert besitzt. In diesem Falle führe man als Hilfsvariable

$$(114) \quad \Phi_{\text{I}} = \Phi - F$$

$$(115) \quad \bar{\eta}_{\text{I}} = \bar{\eta} - \frac{\tau^2}{32}$$

ein, wo somit Φ_{I} die induzierte Potentialdifferenz $-b \int_0^t \dot{\eta} dx$ und $\bar{\eta}_{\text{I}}$ den Abstand der Elongation von der definitiven Lage $\eta_{\infty} = \frac{\tau^2}{32}$ bedeutet. Setzt man diese Größen in (66) ein, so kann man schreiben:

$$(116) \quad \bar{\eta}_{\text{I}} = -\frac{1}{2ab} \Phi_{\text{I}} \left(t - \frac{\tau}{4} \right) + \int_{t-\frac{\tau}{4}}^t \Phi_{\text{I}}(\vartheta) (t-\vartheta) d\vartheta,$$

oder wieder:

$$(117) \quad \bar{\eta}_I = \int_{t-\frac{\tau}{4}}^t d\vartheta \left\{ \Phi_I(\vartheta) \left[(t - \vartheta) - \frac{2}{\tau a b} \right] + \left[\frac{2 \cdot (t - \vartheta)}{\tau a b} \cdot \dot{\Phi}_I(\vartheta) \right] \right\}$$

eine Gleichung, an die sich alle früheren Überlegungen knüpfen lassen. Unsere Ungleichung ist also auch im Fall $F' = \text{constans}$ ein notwendiges Kriterium für das Eintreten der absoluten Aperiodizität.

Es ist klar, daß mit unseren Ergebnissen für die Praxis nur wenig gewonnen ist. Denn erstens kommt es nicht sowohl auf die Aperiodizität der ganzen Saite als vielmehr auf diejenige der Saitenmitte an, und es ist denkbar, daß sich zwar nicht alle Saitenpunkte aperiodisch bewegen, trotzdem aber die Mitte aperiodisch ihrer Ruhelage zustrebt. Zweitens aber hätte nicht nur eine notwendige, sondern eine hinreichende Bedingung abgeleitet werden müssen.

Immerhin dürfte es zur vorläufigen Orientierung Interesse verdienen, den Wert der Eigenperiode mitzuteilen, den die Saite (10) überschreiten muß, um überhaupt absolut aperiodisch werden zu können. Dieser beträgt $\tau = \frac{4}{bl}$ d. i. nach (40) $= \frac{2}{\alpha}$ und nach S. 22 ungefähr $\frac{2}{365}$ oder $2,7 \cdot 10^{-3}$ sec., eine Zahl, die sich aber nur auf den Fall rein elektromagnetischer Dämpfung bezieht. Nach den experimentellen Untersuchungen Einthovens¹⁾ liegt für die Bewegung der Saitenmitte die Grenze der Aperiodizität bei $\tau = 2,2 \cdot 10^{-3}$ sec., wenn Luftdämpfung und elektromagnetische Dämpfung vorhanden sind. Alle diese Werte werden durch die bei der Messung A 22 auftretende Eigenperiode weit überschritten.²⁾

§ 10. Erregung der Saite durch Wechselstrom.

Ein Hauptanwendungsgebiet des Saitengalvanometers besteht in der Aufzeichnung periodischer Vorgänge.³⁾ Um die funktionale Abhängigkeit der hier wirkenden äußeren Kraft von der Zeit genau erkennen zu können, ist es nötig, Klarheit zu gewinnen über diejenigen Verzerrungen des registrierten Bildes, die den Eigenschaften des Apparates selbst verdankt werden. Dafür genügt es aber, die Deformation zu untersuchen, die ein rein sinusförmiger Vorgang bei seiner Aufzeichnung erfährt, da aus solchen alle anderen Vorgänge zusammengesetzt

1) A. a. O., S. 509, Tab. VI; S. 488, Formel 4; S. 492, Zeile 11 von unten; S. 676, 677, Angabe über V.

2) Vgl. S. 22 der vorliegenden Untersuchung.

3) Vgl. Einthoven a. a. O. § 9.

werden können. Wirkt auf das Instrument die Spannung E periodisch, so muß nach sehr langer Zeit auch Φ eine periodische Zeitfunktion geworden sein. Unter der Annahme nun, daß F sowohl als Φ periodische Funktionen sind, ist es leicht, ihre gegenseitige Abhängigkeit voneinander zu untersuchen. Dazu betrachten wir anstelle der bisher benutzten Funktionen komplexe Funktionen Φ und F , um erst bei den Anwendungen zu ihren Realteilen überzugehen.

Sei also:

$$(118) \quad F = |F| e^{\frac{2\pi i \tau}{\sigma}},$$

wo somit σ die Periode der erregenden Schwingung bedeutet, so kann man

$$(119) \quad \Phi = F \cdot \frac{1}{C}$$

setzen und erhält für C nach (63)

$$(120) \quad \frac{1}{C} \left\{ -\frac{4\pi^2}{\sigma^2} \left[e^{\frac{2\pi i \tau}{\sigma}} - 1 \right] + \frac{bl2\pi i}{\sigma} \left[e^{\frac{2\pi i \tau}{\sigma}} - 1 \right] - 2ab \left[e^{\frac{2\pi i \tau}{\sigma}} - 2e^{\frac{i\pi \tau}{\sigma}} + 1 \right] \right\} \\ = -\frac{4\pi^2}{\sigma^2} \left[e^{\frac{i2\pi \tau}{\sigma}} - 1 \right].$$

Also

$$C = \frac{-\frac{4\pi^2}{\sigma^2} \left[e^{\frac{2\pi i \tau}{\sigma}} - 1 \right] + \frac{bl2\pi i}{\sigma} \left[e^{\frac{2\pi i \tau}{\sigma}} - 1 \right] - 2ab \left[e^{\frac{2\pi i \tau}{\sigma}} - 2e^{\frac{i\pi \tau}{\sigma}} + 1 \right]}{-\frac{4\pi^2}{\sigma^2} \left[e^{\frac{i2\pi \tau}{\sigma}} - 1 \right]}.$$

Da nun

$$e^{\frac{i2\pi \tau}{\sigma}} - 1 = \left(e^{\frac{i\pi \tau}{\sigma}} + 1 \right) \left(e^{\frac{i\pi \tau}{\sigma}} - 1 \right) \\ \left(e^{\frac{i2\pi \tau}{\sigma}} - 2e^{\frac{i\pi \tau}{\sigma}} + 1 \right) = \left(e^{\frac{i\pi \tau}{\sigma}} - 1 \right)^2$$

gilt, so erhält man, falls nicht $e^{\frac{i\pi \tau}{\sigma}} - 1 = 0$ ist (Resonanz), durch Division

$$C = \frac{\left[bl \frac{2\pi i}{\sigma} - \frac{4\pi^2}{\sigma^2} \right] \left[e^{\frac{i\pi \tau}{\sigma}} + 1 \right] - 2ab \cdot \left(e^{\frac{i\pi \tau}{\sigma}} - 1 \right)}{4\pi^2 \left[e^{\frac{i\pi \tau}{\sigma}} + 1 \right]}.$$

Nun ist allgemein

$$(121) \quad \frac{e^{i\alpha} - 1}{e^{i\alpha} + 1} = i \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2},$$

wie durch Rechnung leicht bestätigt wird und auch geometrisch aus der beigefügten Figur folgt (siehe Fig. 9). Daher wird

$$C = \frac{\left[bl \frac{2\pi i}{\sigma} - \frac{4\pi^2}{\sigma^2} \right] - 2abi \operatorname{tg} \frac{\pi\tau}{2\sigma}}{\frac{4\pi^2}{\sigma^2}}$$

$$= \frac{-\frac{4\pi^2}{\sigma^2} + i \left[bl \frac{2\pi}{\sigma} - 2ab \operatorname{tg} \frac{\pi\tau}{2\sigma} \right]}{-\frac{4\pi^2}{\sigma^2}}$$

$$= 1 + i \frac{\sigma bl}{2\pi} \left\{ \frac{2\sigma}{\pi\tau} \operatorname{tg} \frac{\pi\tau}{2\sigma} - 1 \right\}.$$

Also

$$(122) \quad F = \Phi \left\{ 1 + i \frac{\sigma bl}{2\pi} \left(\frac{2\sigma}{\pi\tau} \operatorname{tg} \frac{\pi\tau}{2\sigma} - 1 \right) \right\}.$$

Bedeutet ε' den Winkel, um den die Phase von Φ hinter der von F zurückbleibt, und A' das Verhältnis der Amplituden von Φ und F , so ist

$$(123) \quad F' = \Phi \frac{1}{A'} e^{i\varepsilon'}$$

$$F = \Phi \frac{1}{A'} (\cos \varepsilon' + i \sin \varepsilon')$$

$$(124) \quad = \Phi \frac{\cos \varepsilon'}{A'} (1 + i \operatorname{tg} \varepsilon').$$

Durch Vergleich mit (122) erhält man für ε' und A' die Formeln

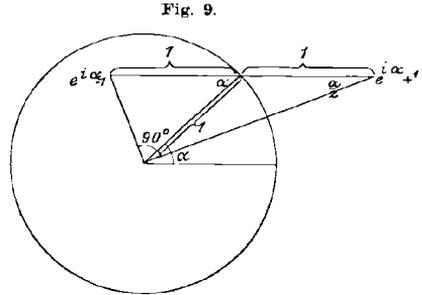
$$(125) \quad \operatorname{tg} \varepsilon' = \frac{\sigma bl}{2\pi} \left\{ \frac{2\sigma}{\pi\tau} \operatorname{tg} \frac{\pi\tau}{2\sigma} - 1 \right\},$$

$$(126) \quad A' = \cos \varepsilon'.$$

Diese Gleichungen lassen zwei verschiedene Werte von ε' zu, die sich um 180° unterscheiden und daher entgegengesetzt gleiche Werte von A' liefern. Somit haben beide Bestimmungen denselben physikalischen Inhalt.

Ist die Eigenperiode der Saite sehr klein, was bei starker Saitenspannung eintritt, so wird $\varepsilon' = 0$, $A' = 1$, d. h. der Induktionsstrom schwingt in derselben Phase und in derselben Stärke wie der erregende. Man kann ε' stets im ersten oder vierten Quadranten (den Quadranten der positiven Kosinus) liegend annehmen und erhält dann immer positive Amplitudenverhältnisse. Für mäßig kleine τ ist ε' positiv, d. h. Φ gegen F verzögert.

Falls $\tau = \sigma$ ist, d. h. Resonanz vorliegt, wird $\varepsilon' = \frac{\pi}{2}$, $A' = 0$.
Übrigens kann, wenn τ genau $= \sigma$ ist, jede beliebige Wahl von A' und



ε' zur Befriedigung von (120) führen; hatten wir doch bei der weiteren Behandlung dieser Gleichung sie durch $e^{\frac{2\pi i x}{\sigma}} - 1$ dividiert. Außerdem reduziert sich (63), wenn F die Periode τ besitzt, auf (96), eine Gleichung, die durch jede Funktion mit der Periode τ befriedigt wird. Ob wirklich solche Schwingungen möglich sind, soll hier nicht untersucht werden. Wir halten uns nur an die bei kontinuierlicher Änderung von τ sich ergebenden Werte $\varepsilon' = \frac{\pi}{2}$, $A' = 0$. Überschreitet man mit der Periode τ die Resonanzlage, so springt ε' auf $-\frac{\pi}{2}$ im vierten Quadranten (man könnte auch sagen ε' befindet sich im zweiten Quadranten bei $+\frac{\pi}{2}$; dann wäre A' negativ anzunehmen). Jetzt also eilt Φ in der Phase voraus.

Wir untersuchen zweitens, wie eine sinusförmige Schwingung von Φ auf die Bewegung der Saite wirkt. Wir verstehen unter F , Φ jetzt wieder reelle Funktionen und suchen

$$(127) \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \Phi_0 \sin \frac{2\pi t}{\sigma}.$$

zu integrieren.

Machen wir dazu den Ansatz

$$(128) \quad \eta = X\Phi,$$

wo X eine reine Funktion von x sein soll, so ergibt sich

$$(129) \quad -\frac{4\pi^2}{\sigma^2} X - a^2 \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = 1$$

mit den Nebenbedingungen

$$(130) \quad X(0) = X(l) = 0.$$

Durch Integration erhalten wir

$$(131) \quad \eta = \frac{\Phi \sigma^2}{4\pi^2} \left\{ \frac{\sin \frac{2\pi}{\sigma a} x [1 - \cos \frac{2\pi}{\sigma a} l] - \sin \frac{2\pi}{\sigma a} l [1 - \cos \frac{2\pi}{\sigma a} x]}{\sin \frac{2\pi}{\sigma a}} \right\} \Big|_1 \\ = \frac{\Phi \sigma^2}{4\pi^2} \left\{ \frac{-2 \cos \frac{\pi}{\sigma a} (x+l) \sin \frac{\pi}{\sigma a} (l-x) + \sin \frac{2\pi}{\sigma a} (l-x)}{\sin \frac{2\pi}{\sigma a} l} \right\}.$$

1) Von hier ausgehend hätten wir auch auf eine neue Weise die Beziehung zwischen Φ und F ableiten können. Die Methode des komplexen Ansatzes anwendend, kann man setzen $\Phi = \Phi | e^{\frac{2i\pi t}{\sigma}}$, also $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = i \frac{2\pi}{\sigma} \Phi$. Nun hat man nach (131)

$$\ddot{\eta} = \frac{i2\pi}{\sigma} \Phi \frac{\sigma^2}{4\pi^2} \frac{1}{\sin \frac{2\pi l}{\sigma a}} \left\{ \left(1 - \cos \frac{2\pi l}{\sigma a}\right) \sin \frac{2\pi x}{\sigma a} - \sin \frac{2\pi l}{\sigma a} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{\sigma a}\right) \right\}$$

Setzen wir hierin $x = \frac{l}{2}$, so bekommen wir

$$\begin{aligned}
 \bar{\eta} &= \frac{\Phi \sigma^2}{4\pi^2} \left[\frac{-2 \cos \frac{\pi}{\sigma a} \frac{3l}{2} \sin \frac{\pi}{\sigma a} \frac{l}{2} + \sin \frac{\pi l}{\sigma a}}{\sin \frac{2\pi l}{\sigma a}} \right] \\
 &= \frac{\Phi \sigma^2}{4\pi^2} \left\{ \frac{2 \sin \frac{\pi l}{2\sigma a} \left[\cos \frac{\pi l}{2\sigma a} - \cos \frac{3\pi l}{2\sigma a} \right]}{\sin \frac{2\pi l}{\sigma a}} \right\} \\
 &= \frac{\Phi \sigma^2}{4\pi^2} \cdot 2 \cdot \sin \frac{\pi l}{2\sigma a} \left\{ \frac{2 \sin \frac{\pi l}{\sigma a} \sin \frac{\pi l}{2\sigma a}}{\sin \frac{2\pi l}{\sigma a}} \right\} \\
 &= \frac{\Phi \sigma^2}{4\pi^2} \frac{4 \left(\sin \frac{\pi l}{2\sigma a} \right)^2 \sin \frac{\pi l}{\sigma a}}{2 \sin \frac{\pi l}{\sigma a} \cos \frac{\pi l}{\sigma a}} \\
 &= \frac{\Phi \sigma^2}{2\pi^2} \frac{\left(\sin \frac{\pi l}{2\sigma a} \right)^2}{\cos \frac{\pi l}{\sigma a}} \\
 (132) \quad \bar{\eta} &= \frac{\Phi \sigma^2}{2\pi^2} \frac{\left(\sin \frac{\pi \tau}{4\sigma} \right)^2}{\cos \frac{\pi \tau}{2\sigma}}
 \end{aligned}$$

oder auch

$$(133) \quad \bar{\eta} = \frac{\Phi \sigma^2}{4\pi^2} \frac{1 - \cos \frac{\pi \tau}{2\sigma}}{\cos \frac{\pi \tau}{2\sigma}}.$$

Hieraus erkennt man, daß $\bar{\eta}$ in derselben Phase schwingt wie Φ . Das Amplitudenverhältnis beträgt:

$$(134) \quad A'' = \frac{\sigma^2}{4\pi^2} \frac{1 - \cos \frac{\pi \tau}{2\sigma}}{\cos \frac{\pi \tau}{2\sigma}}.$$

und, wenn man nach x integriert und die Beziehung $F = \Phi + b \cdot \int_0^l \bar{\eta} dx$ beachtet

$$\begin{aligned}
 F &= \Phi \left(1 + \frac{ib\sigma}{2\pi} \frac{1}{\sin \frac{\pi \tau}{\sigma}} \left[\frac{\sigma a}{\pi} \left(1 - \cos \frac{\pi \tau}{\sigma} \right) - l \sin \frac{\pi \tau}{\sigma} \right] \right) \\
 &= \Phi \left(1 + \frac{i\sigma b l}{2\pi} \left[\frac{2\sigma}{\tau \pi} \operatorname{tg} \frac{\pi \tau}{2\sigma} - 1 \right] \right),
 \end{aligned}$$

womit (122) wieder gewonnen ist.

Wie man sieht, ist $A'' = \infty$ für $\tau = \sigma$: hierdurch allein erklärt es sich, daß auch im Falle der Resonanz trotz des Verschwindens von Φ , ein endliches Amplitudenverhältnis zwischen F' und $\bar{\eta}$ möglich ist.

Wir bezeichnen den Phasenrückstand von $\bar{\eta}$ hinter F' mit ε und das Verhältnis der Amplitude von $\bar{\eta}$ zu der von F' mit A . Dann hat man

$$(135) \quad \varepsilon = \varepsilon',$$

$$(136) \quad A = A' A'',$$

also nach (125), (126) und (134)

$$(137) \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\sigma b l}{2\pi} \left\{ \frac{2\sigma}{\tau \pi} \operatorname{tg} \frac{\pi \tau}{2\sigma} - 1 \right\},$$

$$(138) \quad A = \frac{\sigma^2}{4\pi^2} \frac{1 - \cos \frac{\pi \tau}{2\sigma}}{\cos \frac{\pi \tau}{2\sigma}} \cos \varepsilon.$$

Falls nahezu $\tau = \sigma$ ist, wird $\operatorname{tg} \varepsilon$ sehr groß und nahezu $\frac{1}{\cos \varepsilon}$. Daher wird in diesem Falle

$$\begin{aligned} \frac{\cos \varepsilon}{\cos \frac{\pi \tau}{2\sigma}} &= \frac{1}{\cos \frac{\pi \tau}{2\sigma} \cdot \frac{\sigma b l}{2\pi} \left(\frac{2\sigma}{\tau \pi} \operatorname{tg} \frac{\pi \tau}{2\sigma} - 1 \right)} \\ &= \frac{1}{\frac{\sigma^2 b l}{\pi^2 \tau} \left(\sin \frac{\pi \tau}{2\sigma} \right) - \left(\frac{\sigma b l}{2\pi} \right) \left(\cos \frac{\pi \tau}{2\sigma} \right)}, = \frac{\pi^2 \tau}{\sigma^2 b l}, \end{aligned}$$

also

$$(139) \quad A = \frac{\tau}{4 b l}.$$

Wir erhalten somit auch in diesem Falle einen endlichen Wert für die Amplitude der Elongation.

Für unendlich kleine τ ist $\varepsilon = 0$ und $A = 0$. Sehr stark gespannte Saiten arbeiten also sehr unempfindlich, ergeben dafür aber auch nur geringe Verzerrungen des Bildes. Für mäßig kleine τ sind ε und A positiv, d. h. die Bewegung der Saitenmitte ist gegen den Wechselstrom verzögert. Ist τ wenig kleiner als σ , so wird ε wenig kleiner als $\frac{\pi}{2}$ und A nahezu $= +\frac{\tau}{4 b l}$, d. h. es findet jetzt eine Verzögerung im Betrage von $+\frac{\pi}{2}$ statt. Überschreitet τ den Wert σ , so ist es bequem, ε größer als $+\frac{\pi}{2}$ anzunehmen (im zweiten Quadranten, statt $> -\frac{\pi}{2}$ im vierten Quadranten; wir verstehen unter der Verzögerung einen solchen Wert ε , der (137) befriedigt und A zu einer positiven Größe macht). Nimmt man also $\varepsilon > \frac{\pi}{2}$ an, so wird A positiv. Jetzt ist also

die Verzögerung größer als ein rechter Winkel; man sieht, beim Überschreiten der Resonanzlage ändert sich der Schwingungszustand kontinuierlich.

Im Falle der Resonanz selbst beträgt die Phasenverzögerung einen rechten Winkel und das Amplitudenverhältnis ist endlich. Der wirkende Gesamtstrom ist zwar äußerst schwach, im Grenzfall $= 0$, dafür wirkt aber auch ein äußerst schwacher Strom im höchsten Maße erregend auf die Saite. Schaltet man zwei Saitengalvanometer in einen Wechselstromkreis von der Periode σ und besitzt eines der Instrumente ebenfalls die Eigenperiode σ , so wird der tatsächlich im Stromkreis fließende Gesamtstrom ebenfalls die Periode σ besitzen. Er setzt sich nun zusammen aus dem ursprünglichen Wechselstrom und den in beiden Galvanometern induzierten Strömen. In der isochronen Saite findet aber eine solche Induktion statt, daß der Gesamtstrom 0 wird; daher wird zwar nicht das isochrone, wohl aber das asynchrone Instrument seine Schwingungen einstellen. Schaltet man also in einen Leitungskreis zwei Saitengalvanometer und ändert die Spannung des einen kontinuierlich, so wird man den Augenblick, in dem es sich in Resonanz mit dem Wechselstrom befindet, daran erkennen, daß das andere seine Schwingungen aussetzt.

Bei Arbeiten mit Wechselstrom wird man nun auf zwei Punkte zu achten haben, auf möglichst große Empfindlichkeit und möglichst geringe Verzerrung des Kurvenbildes. Bei Gleichstrom verstehen wir unter der Empfindlichkeit c_g den Quotienten vom definitiven Ausschlag und der angewandten Potentialdifferenz E . Aus der Integration von (10) folgt für die endgültige Lage $\bar{\eta}_\infty$ die Beziehung

$$(140) \quad \bar{\eta}_\infty = \frac{\tau^2}{32} F.$$

Es ist also

$$(141) \quad c_g = \frac{\tau^2}{32} \frac{F}{E}$$

oder nach (4)

$$(142) \quad c_g = \frac{\tau^2}{32} \frac{Hl}{m c v}.$$

Unter der Wechselstromempfindlichkeit c_ω wollen wir das Verhältnis zwischen der Elongationsamplitude und der Amplitude der Potentialdifferenz E verstehen. Man hat somit nach (138)

$$(143) \quad c_\omega = \frac{Hl}{m c v} \frac{\sigma^2}{4\pi^2} \frac{1 - \cos \frac{\pi\tau}{2\sigma}}{\cos \frac{\pi\tau}{2\sigma}} \cos \varepsilon,$$

und im Falle der Resonanz:

$$(144) \quad c_w = \frac{Hl}{mcw} \frac{\tau}{4bl}$$

oder

$$(145) \quad c_w = \frac{H\tau}{4mcwb},$$

d. i. nach (5)

$$(146) \quad c_w = \frac{\tau c}{4Hl}.$$

Um zu bestimmen, welche Werte von τ bei konstantem σ ein Maximum der Empfindlichkeit liefern, hat man im allgemeinen eine nicht sehr einfache transzendente Gleichung zu lösen. Jedenfalls sieht man, daß, wenn keine Resonanz vorhanden ist, also $\cos \frac{\pi\tau}{2\sigma}$ merklich von 0 verschieden ist, c_w von der Ordnung $\frac{Hl}{mcw} \frac{\sigma^2}{4\pi^2}$ ist. Dagegen ist im Falle der Resonanz $c_w = \frac{Hl}{mcw} \frac{\tau}{4bl}$. Wenn also $\frac{\sigma^2}{4\pi^2}$ klein gegen $\frac{\sigma}{4bl}$ ist, hat man im ersten Falle eine weit geringere Empfindlichkeit als im zweiten (die Größenordnung im ersten Fall wäre nur dann vergleichbar mit derjenigen im zweiten, wenn $\frac{1}{\cos \frac{\pi\tau}{2\sigma}}$ sehr groß wäre; das

bedeutet ja aber gerade Annäherung an die Resonanz). Falls also σ klein gegen $\frac{\pi^2}{bl}$, d. h. gegen $\frac{\pi^2 mc^2 w}{H^2 l^2}$ ist, wird man am empfindlichsten unter Anwendung der Resonanz arbeiten. Nach (40) und der Angabe auf S. 22 über α beträgt für die Saite (10) diese Zeit $\frac{\pi^2}{720}$ sec. = $1,4 \cdot 10^{-2}$ sec. Sie wird auch bei größerer Dicke der Saite nicht wesentlich anders ausfallen, da mw bei gleicher Wahl des Materiales konstant ist. Für die erwähnte Saite fanden wir als Minimalperiode $7,2 \cdot 10^{-4}$, ein Wert der auch ungefähr für dickere Saiten gelten dürfte, da diese zwar eine größere Masse besitzen (vgl. Formel 3), dafür aber auch eine stärkere Spannung P vertragen. Es ist also sehr wohl möglich, daß die Saite einem Wechselstrome folgen kann, der mit einer viel kleineren Periode als $1,4 \cdot 10^{-2}$ schwingt und in diesem Falle liefert die Resonanz das Maximum der Empfindlichkeit. Übrigens gilt die Formel (139) auch, wenn τ ein ungerades Vielfaches von σ ist. Man wird also noch empfindlicher arbeiten, wenn man τ zu einem möglichst großen ungeraden Multiplum von σ macht.

In diesen Fällen ist, wie (146) zeigt, die Empfindlichkeit der Feldstärke umgekehrt proportional. Man wird also die Feldstärke so klein wie möglich zu wählen haben. Durch Verkleinerung von H wächst

$\frac{\pi^2}{bl}$ d. h. die Zeit, unter der σ bleiben muß, damit der Resonanzfall das Maximum der Empfindlichkeit darstellt. Also auch schon aus diesem Grunde ist eine möglichst kleine Wahl von H zu empfehlen. Die Tatsache, daß kleine Feldstärken zu großen Elongationen führen, könnte überraschen und man könnte fragen, warum man dann nicht überhaupt das magnetische Feld ganz ausschaltet. Es ist aber zu bedenken, daß die endgültigen großen Elongationen ihr Entstehen den *wiederholten* Antrieben verdanken, daß eine bestimmte Zeit nötig ist, bis der definitive Zustand angenähert erreicht ist und daß diese Zeit mit abnehmender Feldstärke wächst. Bei unendlich kleinem H wird die erwähnte Zeit unendlich groß, sodaß der Fall $H = 0$ auszuschließen ist. Bei Hinzutreten von Luftreibung wird dagegen, das ist nach dem Entwickelten sehr wahrscheinlich, ein endliches von 0 verschiedenes H das Maximum der Empfindlichkeit darstellen¹⁾, und dieses Optimum von H wird mit abnehmender Luftdämpfung gegen 0 konvergieren.

Zweitens ist zu untersuchen, welche Verzerrung ein beliebig gestalteter Strom, dessen Periode σ_0 heißen möge, durch die Registrierung unseres Instrumentes erleidet. Zu diesem Zwecke zerlegen wir die Funktion F nach Fourier in die Reihe

$$(147) \quad F = \frac{v_0}{2} + \sum u_\nu \sin \frac{2\pi t \nu}{\sigma_0} + \sum v_\nu \cos \frac{2\pi t \nu}{\sigma_0}.$$

Jede Schwingung $u_\nu \sin \frac{2\pi t \nu}{\sigma_0}$ wird eine Schwingung $\bar{\eta}_\nu$ zur Folge haben deren Amplitudenverhältnis und Phasenverzug nach (137) und (138) gegeben sind durch

$$(148) \quad \text{tg } \varepsilon_\nu = \frac{\sigma_0 b l}{\nu 2\pi} \left\{ \frac{2\sigma_0}{\nu \tau \pi} \text{tg } \frac{\pi \tau \nu}{2\sigma_0} - 1 \right\}$$

$$(149) \quad A_\nu = \frac{\sigma_0^2}{4\pi^2 \nu^2} \frac{1 - \cos \frac{\pi \tau \nu}{2\sigma_0}}{\cos \frac{\pi \tau \nu}{2\sigma_0}} \cos \varepsilon_\nu.$$

Die gleichen Formeln gelten für das Amplitudenverhältnis A_ν und den Phasenverzug ε_ν der Kosinusschwingung.

Beschränken wir der Einfachheit halber unsere Betrachtung auf den Fall der Resonanz, sei also $\tau = \sigma_0$. Dann liefern die Formeln (148) und (149) verschiedene Ergebnisse, je nach dem Reste, dem modulo 4 der Index ν kongruent ist.

1) Daß man für eine bestimmte endliche Feldstärke am empfindlichsten arbeitet, hat mir R. Gans vorausgesagt.

Sei 1)

$$\nu \equiv 0 \pmod{4}.$$

Dann findet man

$$(150) \quad \begin{cases} \operatorname{tg} \varepsilon_\nu = -\frac{\sigma_0 b l}{\nu 2\pi} \\ A_\nu = 0 \end{cases}$$

2) sei

$$\nu \equiv 2 \pmod{4}.$$

Dann ist

$$(151) \quad \begin{cases} \operatorname{tg} \varepsilon_\nu = -\frac{\sigma_0 b l}{\nu 2\pi}; \quad \frac{\pi}{2} < \varepsilon < \pi \\ A_\nu = \frac{\sigma_0^2}{\pi \nu \sqrt{4\pi^2 \nu^2 + \sigma_0^2 b^2 l^2}}, \end{cases}$$

wo die Wurzel das positive Zeichen besitzt.

3) sei

$$\nu \equiv 1 \pmod{4}.$$

Dann wird

$$(152) \quad \begin{cases} \varepsilon_\nu = \frac{\pi}{2} \\ A_\nu = \frac{\tau}{4 b l} \end{cases}$$

Ist endlich

$$4) \quad \nu \equiv 3 \pmod{4},$$

so wird $\varepsilon_\nu = -\frac{\pi}{2}$, also $\operatorname{tg} \varepsilon_\nu$ sehr groß. Ferner wird

$$\cos \varepsilon_\nu = -\frac{1}{\operatorname{tg} \varepsilon_\nu},$$

$$A_\nu = -\frac{\sigma_0^2}{4\pi^2 \nu^2} \frac{\sigma_0 b l}{\nu 2\pi} \left\{ \frac{2\sigma_0}{\nu \tau \pi} \sin \frac{\pi \tau \nu}{2\sigma_0} - \cos \frac{\pi \tau \nu}{2\sigma_0} \right\}$$

und weil der Sinus $= -1$ ist, $A_\nu = \frac{\tau}{4 b l}$.

Also hat man in diesem Falle:

$$(153) \quad \begin{cases} \varepsilon_\nu = -\frac{\pi}{2} \\ A_\nu = \frac{\tau}{4 b l} \end{cases}$$

Damit also beim Bestehen der Resonanz die Kurve $\bar{\eta}$ ein unverzerrtes Abbild der Funktion F darstellt, ist es erstens erforderlich, daß in der Entwicklung (147) das konstante Glied fehlt. Zweitens müssen für alle Partialerschwingungen Phasenverschiebung und Amplitudenverhältnis gleich sein. Es dürfen also in der Entwicklung entweder

nur nach 1 oder nach 3 (modulo 4) kongruente ν vorkommen, also F muß entweder von der Form:

$$(154) \quad \begin{cases} F = u_1 \sin \frac{2\pi t}{\sigma_0} + u_3 \sin \frac{10\pi t}{\sigma} + u_9 \sin \frac{18\pi t}{\sigma} + \dots \\ \quad v_1 \cos \frac{2\pi t}{\sigma_0} + v_5 \cos \frac{10\pi t}{\sigma} + v_9 \cos \frac{18\pi t}{\sigma} + \dots \end{cases}$$

sein oder von der Form:

$$(155) \quad \begin{cases} F = u_3 \sin \frac{6\pi t}{\sigma_0} + v_7 \sin \frac{14\pi t}{\sigma_0} + u_{11} \sin \frac{22\pi t}{\sigma_0} + \dots \\ \quad v_3 \cos \frac{6\pi t}{\sigma} + v_7 \cos \frac{14\pi t}{\sigma} + v_{11} \cos \frac{22\pi t}{\sigma_6}. \end{cases}$$

Falls σ_0 klein gegen $\frac{2\pi^2}{bl}$ ist, überwiegen in der Abbildung die Schwingungen von ungeradem ν .

§ 11. Erregung durch Gleichstrom; Konstantenbestimmung.

Von besonderem Interesse ist der Fall, daß eine ruhende Saite plötzlich durch eine konstante Klemmspannung erregt wird. Die einfachsten auf diesen Fall bezüglichen Ergebnisse haben wir bereits gelegentlich mitgeteilt. Wir fanden, daß im Zeitintervall 0 bis $\frac{\tau}{4}$ die Bewegung durch die Formel:

$$(43) \quad \bar{\eta} = \frac{F'}{\beta^2} \left\{ -1 + \frac{1}{2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} [(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2})e^{(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2})t} + (-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2})e^{(-\alpha - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2})t}] \right\},$$

(S. 21)

dargestellt wird. Falls die Zeit der ersten Umkehr in das Intervall $\frac{\tau}{2}$ bis τ fällt, so ist sie gegeben durch

$$(67) \quad t_1 = \frac{1}{q_1 - q_2} \ln \frac{2e^{-\frac{q_2 \tau}{4}} - 1}{2e^{-\frac{q_1 \tau}{4}} - 1}$$

(S. 34)

und im Falle kleiner Dämpfung durch:

$$(68) \quad t_1 = \frac{\tau}{2} \left(1 - \frac{bl}{8} \tau \right).$$

In mancher Beziehung wies die Saitenmitte Ähnlichkeit mit einem schwingenden Systeme auf, wenn auch die Bedeutung dieser Analogie keineswegs überschätzt werden darf. Es ist aber jedenfalls nützlich, in bezug auf die Saitenbewegung dieselben Fragen aufzuwerfen, die aus der Theorie des mit einem Freiheitsgrade schwingenden Körpers ge-
läufig sind. Wir wollen also das Dämpfungsverhältnis der Saitenmitte

aufsuchen, uns aber der Einfachheit halber auf den Fall kleiner elektromagnetischer Dämpfung beschränken.

Nimmt man b klein an, also β klein von der ersten und α klein von der zweiten Ordnung, so ist nahezu $\Phi = F$, mithin nach (61) für das Intervall 0 bis $\frac{\tau}{2}$

$$\ddot{\Phi} = 2abF$$

und, integriert, unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen:

$$(156) \quad \Phi = F(1 - bbt + abt^2),$$

eine Gleichung, die auch aus (62) durch Entwicklung nach α und β folgt. Im Intervalle 0 bis $\frac{\tau}{4}$ ist aber:

$$\ddot{\bar{\eta}} = \Phi; \quad \dot{\bar{\eta}}(0) = 0; \quad \bar{\eta}(0) = 0$$

und daher

$$(157) \quad \bar{\eta} = F\left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}bllt^3 + \frac{1}{12}ablt^4\right)$$

Wir müssen den zur Zeit $\frac{\tau}{4}$ erreichten Wert von $\bar{\eta}$ kennen lernen; dieser lautet:

$$(158) \quad \bar{\eta}\left(\frac{\tau}{4}\right) = F\left(\frac{\tau^2}{32} - \frac{bl\tau^3}{512}\right).$$

Ebenso ist:

$$\dot{\bar{\eta}}\left(\frac{\tau}{4}\right) = F\left(\frac{\tau}{4} - \frac{bl\tau^2}{48}\right).$$

Ferner ist für $t > \frac{\tau}{4}$ nach (64):

$$\dot{\bar{\eta}} = \int_{t-\frac{\tau}{4}}^t \Phi(\vartheta) d\vartheta - \int_0^{t-\frac{\tau}{4}} \Phi(\vartheta) d\vartheta$$

und da nach (156)

$$\int \Phi(\vartheta) d\vartheta = F\left(t - \frac{1}{2}bllt^2 + \frac{1}{3}ablt^3\right)$$

gilt, so hat man, wenn $t > \frac{\tau}{4}$ ist:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\bar{\eta}} &= F\left\{t - \frac{bl}{2}t^2 + \frac{1}{3}ablt^3 \right. \\ &\quad \left. - 2\left[\left(t - \frac{\tau}{4}\right) - \frac{bl}{2}\left(t - \frac{\tau}{4}\right)^2 + \frac{1}{3}ab\left(t - \frac{\tau}{4}\right)^3\right]\right\}. \end{aligned} \right.$$

Setzen wir abkürzend

$$(159) \quad t - \frac{\tau}{4} = t,$$

so wird daraus:

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= F \left\{ \left(t + \frac{\tau}{4} \right) - \frac{bl}{2} \left(t + \frac{\tau}{4} \right)^2 + \frac{1}{3} ab \left(t + \frac{\tau}{4} \right)^3 - 2t + blt^2 - \frac{2}{3} abt^3 \right\} \\ &= F \left\{ \left(\frac{\tau}{4} - \frac{1}{48} bl\tau^2 \right) + \left(-1 - \frac{1}{8} bl\tau \right) t + blt^2 - \frac{1}{3} abt^3 \right\}, \end{aligned}$$

also im Intervalle $\frac{\tau}{4} < t < \frac{\tau}{2}$:

$$\bar{\eta} = C + F \left\{ \left(\frac{\tau}{4} - \frac{1}{48} bl\tau^2 \right) t + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{16} bl\tau \right) t^2 + \frac{1}{3} blt^3 - \frac{1}{12} abt^4 \right\},$$

wo C eine Konstante ist. Setzt man $t = 0$, so folgt aus (159) u. (158)

$$C = F \left(\frac{\tau^2}{32} - \frac{1}{512} bl\tau^3 \right).$$

Also ist:

$$(160) \quad \bar{\eta} = F \left\{ \left(\frac{\tau^2}{32} - \frac{1}{512} bl\tau^3 \right) + \left(\frac{\tau}{4} - \frac{1}{48} bl\tau^2 \right) t + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{16} bl\tau \right) t^2 + \frac{1}{3} blt^3 - \frac{1}{12} abt^4 \right\}$$

Nach (68) und (159) entspricht dem ersten Rückkehrpunkte ein Wert t :

$$t_1 = \frac{\tau}{4} - \frac{bl}{16} \tau^2 = \frac{\tau}{4} \left(1 - \frac{bl}{4} \tau \right).$$

Indem wir nur erste Potenzen von b berücksichtigen, erhalten wir für die der Zeit $t_1 = \frac{\tau}{4} + t_1$ entsprechende Elongation $\bar{\eta}_1$:

$$(161) \quad \bar{\eta}_1 = F \left\{ \frac{\tau^2}{16} - \frac{3bl}{5 \cdot 4^4} \tau^3 \right\}.$$

Nun kann man den Abstand der Saitenmitte zur Zeit 0 von der endgültigen Ruhelage als den nullten Ausschlag a_0 bezeichnen, und die Entfernung, die die Mitte bei ihrer ersten Umkehr von der endgültigen Einstellung besitzt, als den ersten Ausschlag a_1 . Dann ist nach (140) und (161)

$$(162) \quad \begin{cases} a_0 = \frac{F\tau^2}{32} \\ a_1 = \frac{F\tau^2}{32} - \frac{3F}{5 \cdot 4^4} bl\tau^3. \end{cases}$$

Setzen wir den Quotienten $\frac{a_1}{a_0}$, der das erste Dämpfungsverhältnis heißen möge, $= k_1$, so wird

$$k_1 = 1 - \frac{3}{40} bl\tau.$$

Die Zeit der ersten Umkehr und das erste Dämpfungsverhältnis sind also durch das Formelsystem gegeben:

$$(68) \quad t_1 = \frac{\tau}{2} \left(1 - \frac{1}{8} bl\tau \right)$$

$$(163) \quad k_1 = 1 - \frac{3}{40} bl\tau.$$

Durch Auflösung nach τ und bl folgt hieraus:

$$(164) \quad \tau = 2t_1 \left[1 + \frac{5}{3}(1 - k_1) \right]$$

$$(165) \quad bl = \frac{20(1 - k_1)}{3t_1}.$$

Die Ergebnisse dieses und des vorigen Paragraphen setzen uns in den Stand, die Konstanten unseres Instrumentes zu bestimmen. Freilich bezieht sich die vorgeschlagene Methode nur auf den Fall, daß man von der Luftreibung absehen kann; wollte man diese berücksichtigen, so käme man, wie man im Schlußparagraphen sieht, zu Formeln, die zu verwickelt sind, um der experimentellen Prüfung unterworfen zu werden, und die höhere Differentialquotienten enthalten, als sich bisher genau messen ließen. Wenn man also die Theorie zu prüfen und außerdem die Apparatkonstanten zu bestimmen wünscht, muß man entweder im Vacuum arbeiten oder einen dickeren Draht verwenden, wodurch, wie Herr Einthoven mir gütigst mitteilte, die elektromagnetische Dämpfung mehrere 100 mal stärker als die Luftdämpfung werden kann. Die Konstantenbestimmung hätte ungefähr in folgenden vier Schritten zu geschehen:

Erstens verwende man einen Wechselstrom von bekannter Periode σ . Wird die Spannung der Saite stetig verändert, so kann man den Augenblick, in dem $\tau = \sigma$ wird, daran erkennen, daß die Empfindlichkeit zu einem Maximum ansteigt¹⁾, sofern nur σ klein gegen $1,4 \cdot 10^{-2}$ sec ist (S. 56; auch bei dickeren Drähten gilt ungefähr dieselbe Zahl.) Außerdem kann man durch Einschaltung eines zweiten Galvanometers den Augenblick der Resonanz feststellen (S. 55). Da im Falle der Resonanz $\sigma = \tau$ ist, kann σ als bekannt gelten. Außerdem nehme man eine Gleichstrommessung zur Ermittlung der Empfindlichkeit hinzu. Nun ist nach (142) und (144)

$$(166) \quad \frac{c_w}{c_g} = \frac{8}{\tau bl}$$

$$(141) \quad c_g = \frac{\tau^2 F}{32 E}.$$

Da τ bekannt ist, sind wegen (166) und (141) die Konstanten τ , b , $\frac{F}{E}$ oder auch a , b , $\frac{F'}{E}$ der Messung zugänglich.

Man kann auch wünschen, an Stelle der Koeffizienten unserer Differentialgleichung diejenigen Konstanten zu bestimmen, denen eine

1) Diese Operation läßt sich sehr rasch ausführen. Vgl. Einthoven a. a. O. S. 688.

unmittelbarere physikalische Bedeutung zukommt. Unter diesen sind es gerade drei, die nicht ohne weiteres meßbar sind, sondern erst durch Schwingungsbeobachtungen gewonnen werden können, die Feldstärke H , die wahre Masse m und die Spannung P . Nun lassen die drei Gleichungen

$$(167) \quad \text{(vgl. 3 u. 23)} \quad \frac{P}{m} = \frac{4l}{\tau^2}$$

$$(142) \quad c_g = \frac{\tau^2}{32} \frac{Hl}{mcw}$$

$$(146) \quad c_w = \frac{\tau c}{4lH}$$

erkennen, daß die Messung von τ , c_g , c_w zur Bestimmung von H , m , P ausreicht.

Vermag man die Phasendifferenz zwischen Wechselstrom und Saitenschwingung festzustellen, so kann auch, falls keine Resonanz vorhanden ist, die Gleichung (143) verwandt werden.

Zweitens kann man dieselben Konstanten unter alleiniger Benutzung von Gleichströmen experimentell bestimmen. Man mache dazu den Widerstand so groß, daß die elektromagnetische Dämpfung nur sehr klein ist und verwende das Formelsystem:

$$(168) \quad \frac{F}{E} = c_g t_1^8 \left[1 - \frac{10}{3} (1 - k_1) \right]$$

$$(164) \quad \tau = 2t_1 \left[1 + \frac{5}{3} (1 - k_1) \right]$$

$$(165) \quad bl = \frac{20(1 - k_1)}{3t_1}$$

oder auch nach (3) bis (5) und (23)

$$(169) \quad \frac{Hl}{mcw} = c_g t_1^8 \left[1 - \frac{10}{3} (1 - k_1) \right]$$

$$(170) \quad \frac{P}{lm} = \frac{1}{t_1^2} \left[1 - \frac{10}{3} (1 - k_1) \right]$$

$$(171) \quad \frac{H^2 l^2}{w m c^2} = \frac{20(1 - k_1)}{3t_1}$$

Aus diesen Gleichungen können $\frac{F}{E}$, τ , bl oder H , m , P bestimmt werden.

Es ist aber zu bemerken, daß nach Einthoven¹⁾ die Messung der Größe k_1 nicht mit großer Genauigkeit vollzogen werden kann.

1) A. a. O. S. 490.

Drittens kann man auch Messungen bei nicht sehr kleiner Dämpfung vornehmen, die jedoch nur zur Kontrolle der nach den vorigen Methoden bestimmten Konstantenwerten dienen. Man hat dazu die elektromagnetische Dämpfung so zu wählen, daß der erste Rückkehrpunkt in das Zeitintervall $\frac{\tau}{2}$ bis τ fällt. Dann gilt:

$$(67) \quad t_1 = \frac{1}{q_1 - q_2} \ln \frac{2e^{-\frac{q_2 \tau}{4}} - 1}{2e^{-\frac{q_1 \tau}{4}} - 1}$$

Hierin ist

$$(42) \quad \begin{cases} q_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \\ q_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \end{cases}$$

$$(44) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{H^2 l^2}{2wmc^2} \\ \beta = \frac{2Hl}{c\sqrt{m\omega\tau}} \end{cases}$$

Viertens kann man ebenfalls zur Kontrolle untersuchen, ob bei den für die Konstanten gefundenen Werten sich eine richtige funktionale Abhängigkeit der Größe $\bar{\eta}$ von der Zeit ergibt. Es muß nämlich in der ersten Viertelperiode nach Einschaltung der Klemmspannung die Bewegung nach der folgenden Gleichung vor sich gehen:

$$(43) \quad \bar{\eta} = \frac{HlE}{mcw\beta^2} \left\{ -1 + \frac{1}{2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} (q_1 e^{q_1 t} - q_2 e^{q_2 t}) \right\}$$

§ 12. Luftdämpfung.

Wenn die Saite nicht im Vakuum schwingt, sondern im luftgefüllten Raume und ihre Dicke nicht sehr beträchtlich ist, gilt wegen der Luftreibung die Gleichung (6) nicht mehr. Da man annehmen kann, daß die durch die Luftreibung hervorgerufene Gegenkraft der Geschwindigkeit proportional ist¹⁾, so gilt an ihrer Stelle

$$(172) \quad \ddot{\eta} - a^2 \eta'' + g \dot{\eta} = F - b \int_0^t \dot{\eta} dx = \Phi.$$

Zur Lösung dieser Gleichung führt wieder die Riemannsche Methode. Sei P ein Punkt im Gebiete I (Fig. 1) und seien A, B die beiden Punkte, in denen die durch P gezogenen Charakteristiken die Abszissenachse schneiden. Dann definieren wir eine „Greensche Funktion“ v durch die Festsetzung: Innerhalb PAB soll

$$(173) \quad \ddot{v} - a^2 v'' - g \dot{v} = 0$$

1) Einthoven, a. a. O. S. 485.

sein, und auf PA und PB soll

$$(174) \quad v = e^{\frac{g}{2}(t-t_P)}$$

sein. v ist also von der Wahl des Punktes P abhängig. Nun wird der Wert der Funktion η in der x - t -Ebene durch die Gleichung

$$(175) \quad \eta_P = \frac{1}{2a} \left\{ y a v_A + y a v_B + \int_A^B (\dot{y} v - y \dot{v} + g y v) dx + \iint_{PAB} d\sigma v \Phi \right\}$$

gegeben, wo y und \dot{y} wieder die Werte von η und $\dot{\eta}$ sind, die $t = 0$ zugehören.¹⁾ Versteht man also unter η^* wieder die Elongation, die stattfinden würde bei Abwesenheit einer äußeren Potentialdifferenz und einer elektromagnetischen Dämpfung, so gilt:

$$(176) \quad \eta = \eta^* + \iint d\sigma v \Phi$$

und

$$(177) \quad \eta^* = \frac{1}{2a} \left\{ y a v_A + y a v_B + \int_A^B (\dot{y} v - y \dot{v} + g y v) dx \right\}$$

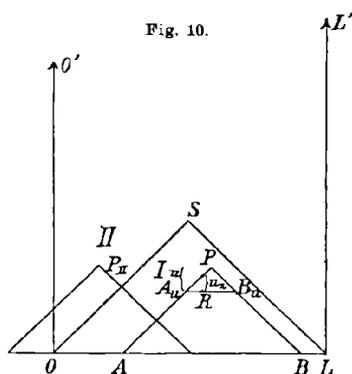
Zieht man unterhalb des Punktes P (Fig. 10) eine Horizontale, die von P den senkrechten Abstand u besitzen möge, und seien A_u, B_u die Schnittpunkte der Charakteristiken mit ihr, so können wir eine Funktion $w(u)$ definieren durch die Festsetzung:

$$(178) \quad \left\{ \begin{array}{l} w(u) = \frac{1}{2a} \int_{A_u}^{B_u} d\xi v, \\ \text{oder ausführlicher geschrieben:} \\ w(u) = \frac{1}{2a} \int_{-a_u}^{+a_u} v(t_P - u, \xi) d\xi. \end{array} \right.$$

Dann ist für $0 < t < \frac{t}{4}$:

$$(179) \quad \bar{\eta} = \bar{\eta}^* + \int_0^t \Phi(\vartheta) d\vartheta w(t - \vartheta) = \eta^* + \int_0^t \Phi(t - \vartheta) w(\vartheta) d\vartheta.$$

1) Vgl. A. Sommerfeld Enzyklopädie d. math. Wissensch. Bd. II A. 7 c S. 513 ff.; besonders 518.



Behandeln wir zunächst einen besonderen Fall. Sei $y = 0$, $\dot{y} = 0$ und werde $b = 0$ angenommen, so ist auch $\eta^* = 0$ und es ist nach (176) geometrisch ersichtlich, daß im Gebiete I η von x unabhängig ist. Daher schreibt sich (172)

$$(180) \quad \ddot{\eta} + g\dot{\eta} = F(t).$$

Ist zudem F konstant, so ergibt die Integration:

$$(181) \quad \bar{\eta} = \frac{F}{g^2}(e^{-gt} - 1 + gt),$$

(181) enthält also die Lösung unseres Problems für den Fall, daß eine ruhende, keiner elektromagnetischen Dämpfung unterworfenen Saite zur Zeit 0 plötzlich von einer konstanten Potentialdifferenz erregt wird.

Nach (179) ist in diesem Falle $\dot{\eta} = F \cdot w$; daher folgt:

$$(182) \quad w(u) = \frac{1}{g}(1 - e^{-ug}).$$

Da aber die Definition von w keine auf b und F bezügliche Angaben enthält, ist (182) allgemein gültig. Falls somit Φ bekannt ist, gibt das System (177), (179) und (182) die Lösung der Saitenmitte im Zeitintervalle 0 bis $\frac{\pi}{4}$. Bei Abwesenheit von elektromagnetischer Dämpfung ist daher unser Problem für die Zeit der ersten Viertelperiode bereits gelöst.

Wenn außer der Luftdämpfung auch elektromagnetische Dämpfung vorhanden ist, gilt es vor allem, Φ zu bestimmen. Hierzu verfahren wir ähnlich wie im § 3. Wir definieren eine Funktion ω zweier Argumente durch die folgende Festsetzung: Man konstruiere zu einem Punkte P das Charakteristikendreieck (Fig. 10), ziehe im Abstände u eine Horizontale $A_u B_u$ und wähle einen Punkt R auf ihr, so, daß das Lot von R bis zum Schnittpunkte mit $A_u P = u_2$ ist, dann soll

$$(183) \quad \frac{1}{2a} \int_A^R v d\xi = \omega(u, u_2)$$

sein. Daraus folgt

$$(184) \quad \omega(u, u) = \frac{1}{2} w(u)$$

$$(185) \quad \omega(u, 0) = 0.$$

Ferner bezeichnen wir die Ableitungen von ω nach seinem ersten und zweiten Argumente mit ω_1 resp. ω_2 . Setzt man dann, ähnlich wie im § 3

$$(186) \quad \int_0^t \Phi(\vartheta) w(t - \vartheta) d\vartheta = \psi(t),$$

so ist wieder (vgl. Fig. 10)

$$\text{in I) } \eta = \eta^* + \psi(t)$$

$$\text{in II) } \eta = \eta^* + \psi(t) - 2 \cdot \int_0^{t-\frac{x}{a}} \Phi(\vartheta) d\vartheta \omega\left(t - \vartheta, t - \vartheta - \frac{x}{a}\right)$$

(vgl. den Punkt P_{II} in Fig. 10) also wegen (185)

$$\text{in I) } \dot{\eta} = \dot{\eta}^* + \dot{\psi}(t)$$

$$\text{in II) } \dot{\eta} = \dot{\eta}^* + \dot{\psi}(t)$$

$$- 2 \cdot \int_0^{t-\frac{x}{a}} \Phi(\vartheta) d\vartheta \left[\omega_1\left(t - \vartheta, t - \vartheta - \frac{x}{a}\right) + \omega_2\left(t - \vartheta, t - \vartheta - \frac{x}{a}\right) \right].$$

Eine entsprechende Formel können wir für III aufstellen und erhalten somit

$$b \cdot \int_0^l \dot{\eta} dx = b \cdot \int_0^l \dot{\eta}^* dx + bl \dot{\psi}$$

$$- 4b \cdot \int_0^{at} dx \int_0^{t-\frac{x}{a}} \Phi(\vartheta) d\vartheta \left[\omega_1\left(t - \vartheta, t - \vartheta - \frac{x}{a}\right) + \omega_2\left(t - \vartheta, t - \vartheta - \frac{x}{a}\right) \right].$$

Nun ist

$$\begin{aligned} & - 4b \int_0^{at} dx \int_0^{t-\frac{x}{a}} \Phi(\vartheta) d\vartheta \omega_2\left(t - \vartheta, t - \vartheta - \frac{x}{a}\right) \\ & = 4ab \int_0^{at} dx \int_0^{t-\frac{x}{a}} \Phi(\vartheta) \frac{\partial}{\partial x} \left[\omega\left(t - \vartheta, t - \vartheta - \frac{x}{a}\right) \right], \end{aligned}$$

und da wegen (185) gilt:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{t-\frac{x}{a}} \Phi(\vartheta) \omega\left(t - \vartheta, t - \vartheta - \frac{x}{a}\right) d\vartheta \\ & = \int_0^{t-\frac{x}{a}} \Phi(\vartheta) \frac{\partial}{\partial x} \left[\omega\left(t - \vartheta, t - \vartheta - \frac{x}{a}\right) \right], \end{aligned}$$

5*

so wird

$$\begin{aligned}
 & -4b \cdot \int_0^{at} dx \int_0^{t-\frac{x}{a}} \Phi(\vartheta) d\vartheta \omega_2 \left(t - \vartheta, t - \vartheta - \frac{x}{a} \right) \\
 & = 4ab \cdot \int_0^{at} dx \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{t-\frac{x}{a}} \Phi(\vartheta) d\vartheta \omega \left(t - \vartheta, t - \vartheta - \frac{x}{a} \right) \\
 & = 4ab \left[\int_0^{t-\frac{x}{a}} \Phi(\vartheta) \omega \left(t - \vartheta, t - \vartheta - \frac{x}{a} \right) \right]_{x=0}^{x=at} = -4ab \int_0^t \Phi(\vartheta) \omega \left(t - \vartheta, t - \vartheta \right) d\vartheta,
 \end{aligned}$$

also nach (184):

$$= -2ab \int_0^t \Phi(\vartheta) \omega \left(t - \vartheta \right) d\vartheta$$

oder nach (186):

$$= -2ab\psi(t).$$

Somit folgt:

$$\begin{aligned}
 (187) \quad & b \cdot \int_0^t \dot{\eta} dx = b \cdot \int_0^t \dot{\eta}^* dx + bl\psi(t) - 2ab\psi(t) \\
 & - 4b \cdot \int_0^{at} dx \int_0^{t-\frac{x}{a}} \Phi(\vartheta) d\vartheta \omega_1 \left(t - \vartheta, t - \vartheta - \frac{x}{a} \right).
 \end{aligned}$$

In dem letzten Integral können wir nun die Integrationsfolge umkehren. Dann schreibt es sich:

$$-4b \cdot \int_0^t d\vartheta \Phi(\vartheta) \int_0^{a(t-\vartheta)} dx \omega_1 \left(t - \vartheta, t - \vartheta - \frac{x}{a} \right).$$

Also ist

$$(188) \quad b \cdot \int_0^t \dot{\eta} dx = b \cdot \int_0^t \dot{\eta}^* dx + bl\psi - 2ab\psi - 4b \cdot \int_0^t d\vartheta \Phi(\vartheta) \Omega(t - \vartheta),$$

wo

$$(189) \quad \Omega(u) = \int_0^{au} dx \omega_1 \left(u, u - \frac{x}{a} \right)$$

gesetzt ist. Ist daher wie früher:

$$(190) \quad F - b \int_0^t \dot{\eta}^* dx = F^*,$$

so bekommt man:

$$(191) \quad F^*(t) = \Phi(t) + bl\psi - 2ab\psi - 4b \cdot \int_0^t d\vartheta \Phi(\vartheta) \Omega(t - \vartheta).$$

Nun berücksichtige man noch (186) und die aus ihrer Differentiation hervorgehende Beziehung:

$$\psi = \int_0^t \Phi(\vartheta) \dot{w}(t - \vartheta) d\vartheta,$$

so erhält man schließlich für Φ die Integralgleichung

$$(192) \quad \begin{cases} F^*(t) = \Phi(t) - \int_0^t \Phi(\vartheta) Q(t - \vartheta) d\vartheta \\ = \Phi(t) - \int_0^t \Phi(t - \vartheta) Q(\vartheta) d\vartheta, \end{cases}$$

wo

$$(193) \quad Q(u) = 4b \cdot \Omega(u) + 2abw(u) - bl\dot{w}(u)$$

ist.

In dieser Integralgleichung muß noch der Kern berechnet werden. Dazu ist es nötig, v zu kennen; aber das kann nach der bei Riemann-Weber¹⁾ gegebenen Methode geschehen. Ich will nicht durch die etwas umständliche, aber keine grundsätzlichen Schwierigkeiten bietende Ausführung ermüden und nur das Endergebnis mitteilen.

Setzt man

$$(194) \quad H(z) = 1 + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^4}{2^2 4^4} + \frac{z^6}{2^2 4^2 6^2} + \dots;$$

so wird

$$(195) \quad Q(u) = b \cdot \left\{ e^{-\frac{gu}{2}} \left[-ag \int_0^u dy y H\left(\frac{g}{2}y\right) + 2au H\left(\frac{g}{2}u\right) \right] - l e^{-u\varrho} \right\}$$

oder entwickelt:

$$(196) \quad Q(u) = b \cdot \left\{ -l + ug \left(2 \frac{a}{g} + l \right) - u^3 g^2 \left(\frac{3}{2} \frac{a}{g} + \frac{l}{2} \right) + u^5 g^3 \left(\frac{5}{8} \frac{a}{g} + \frac{l}{6} \right) \dots \right\}.$$

Wir fassen zusammen:

Um

$$(172) \quad \ddot{\eta} - a^2 y'' + g\dot{\eta} = F - b \int_0^t \dot{\eta} dx,$$

1) Band 2, S. 309.

für $0 < t < \frac{\tau}{4}$ zu lösen, setze man:

$$(190) \quad F - b \int_0^t \bar{\eta}^* dx = F^*$$

$$(182) \quad w(u) = \frac{1}{g} \cdot (1 - e^{-ug})$$

$$(195) \quad Q(u) = b \cdot \left\{ -l + ug \left(2 \frac{a}{g} + l \right) - u^2 g^2 \left(\frac{3}{2} \frac{a}{g} + \frac{l}{2} \right) + u^3 g^3 \left(\frac{5}{8} \frac{a}{g} + \frac{l}{6} \right) \dots \right\},$$

löse sodann

$$(192) \quad F^*(t) = \Phi(t) - \int_0^t \Phi(\vartheta) Q(t - \vartheta) d\vartheta$$

nach Φ , und bekommt:

$$\bar{\eta} = \bar{\eta}^* + \int_0^t \Phi(\vartheta) d\vartheta w(t - \vartheta).$$

Der wesentliche Teil unserer Aufgabe besteht also wieder in der Lösung einer Volterraschen Integralgleichung.

Ist g klein, so hat man in erster Annäherung:

$$(197) \quad Q(u) = -bl + 2aub$$

$$(198) \quad w(u) = u.$$

Daher lautet die Integralgleichung

$$(199) \quad F^*(t) = \Phi(t) - \int_0^t \Phi(\vartheta) [-bl + 2ab \cdot (t - \vartheta)] d\vartheta,$$

woraus sich $\bar{\eta}$ durch:

$$(200) \quad \bar{\eta} = \bar{\eta}^* + \int_0^t \Phi(\vartheta) d\vartheta (t - \vartheta)$$

bestimmt. Setzt man

$$(201) \quad \int_0^t \Phi(\vartheta) d\vartheta (t - \vartheta) = \psi(t),$$

so erhält man

$$F^*(t) = \ddot{\psi}(t) + bl \dot{\psi} - 2ab \psi(t),$$

d. h. man gelangt zur Gleichung (36) zurück.

Um eine kleine Luftdämpfung zu berücksichtigen, ist die Annäherung noch ein Glied weiter zu treiben: Man setze daher

$$(202) \quad \begin{cases} w(u) = u - \frac{1}{2} g u^2 \\ Q(u) = [-bl + 2abu] + g [ubl - \frac{3}{2} ab u^2], \end{cases}$$

oder nach u geordnet

$$(203) \quad Q(u) = -bl + u(2ab + gbl) - \frac{3}{2}abgu^2.$$

(192) wird am einfachsten gelöst, indem man $Q(t - \vartheta)$ nach ϑ entwickelt und die Gleichung dreimal differenziert. Dadurch erhält man:

$$(204) \quad \left\{ \begin{array}{l} \ddot{F}^* = \ddot{\Phi} + bl\ddot{\Phi} - (2ab + gbl)\dot{\Phi} + 3abg\Phi \\ \Phi(0) = F^*(0) \\ \dot{\Phi}(0) = \dot{F}^*(0) - blF^*(0) \\ \ddot{\Phi}(0) = (2ab + gbl + b^2l^2)F^*(0) - bl\dot{F}^*(0) + \ddot{F}^*(0). \end{array} \right.$$

(Die letzte Gleichung stimmt im Falle $g = 0$ für $t = 0$ mit (47) überein.) Ist die Potentialdifferenz E konstant, so bekommt man daraus:

$$(205) \quad \left\{ \begin{array}{l} \ddot{\Phi} + bl\ddot{\Phi} - (2ab + gbl)\dot{\Phi} + 3abg\Phi = 0 \\ \Phi(0) = F; \dot{\Phi}(0) = -blF; \ddot{\Phi}(0) = (2ab + gbl + b^2l^2)F. \end{array} \right.$$

Hat man ein im Luftraum schwingendes Galvanometer, so sind (204) und (205) natürlich viel genauer als (35) bis (37). Während nun eine Prüfung der bisherigen Formeln durch die Einthovenschen Messungen eben wegen des Luftwiderstandes unmöglich ist, kann (204) ihrer komplizierten Bauart halber nicht gut mit der Erfahrung verglichen werden. Setzt sie doch die Meßbarkeit der dritten Differentialquotienten von Φ voraus, während den Einthovenschen Tabellen kaum die zweiten Differentialquotienten von $\bar{\eta}$ entnommen werden können. Dazu kommt noch, daß die Gültigkeit von (204) nur auf die Zeit 0 bis $\frac{\tau}{4}$ beschränkt ist (für Seite 10 Platte A 22 ungefähr $7 \cdot 10^{-3}$ sec.).

Unter diesen Umständen bleibt zur genaueren Prüfung der Theorie nichts anderes übrig als entweder die hier gegebenen Formeln zu vereinfachen oder solche Messungen anzustellen, bei denen die Luftdämpfung vernachlässigt werden kann. Das aber kann entweder durch Arbeiten im Vakuum oder durch Verwendung dickerer Drähte geschehen.

Die ästhetische Kreisbogenkurve.

Von C. HERBST, Dipl.-Ing., in Dortmund.

Soll in $\triangle MNQ$ (Fig. 1) die Seite MN durch eine Zweikreis-
kurve überspannt und dabei ein möglichst sanfter Übergang der beiden
Kreisbogen erreicht werden, so ist das

Verhältnis $\frac{\varrho_1}{\varrho_2}$ zu einem Minimum zu
machen.

Es ist

$$\sphericalangle PNQ = \frac{1}{2} PO_1N = \varphi_1,$$

$$\sphericalangle PMQ = \frac{1}{2} PO_2M = \varphi_2 - \varphi_1$$

$$\frac{m}{n} = \frac{\sin PMN}{\sin PNM} = \frac{\sin [\beta - (\varphi_2 - \varphi_1)]}{\sin (\alpha - \varphi_1)}$$

$$= \frac{2 \varrho_1 \cdot \sin \varphi_1}{2 \varrho_2 \cdot \sin (\varphi_2 - \varphi_1)}$$

Mit

$$(1) \quad x^2 = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}$$

wird hieraus:

$$x^2 = \frac{\sin (\varphi_2 - \varphi_1) \cdot \sin [\beta - (\varphi_2 - \varphi_1)]}{\sin \varphi_1 \cdot \sin (\alpha - \varphi_1)}$$

Da $2\varphi_2 = \gamma = \text{konstant}$, so ist φ_1 die für x^2 maßgebende Ver-
änderliche; folglich ist zu bilden:

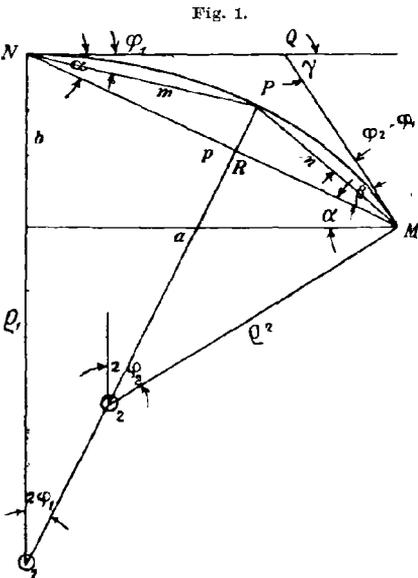
$$\begin{aligned} \frac{d(x^2)}{d\varphi_1} = 0 &= \sin \varphi_1 \cdot \sin (\alpha - \varphi_1) \{ -\sin [\beta - (\varphi_2 - \varphi_1)] \cdot \cos (\varphi_2 - \varphi_1) + \\ &+ \sin (\varphi_2 - \varphi_1) \cdot \cos [\beta - (\varphi_2 - \varphi_1)] \} - \\ &- \sin (\varphi_2 - \varphi_1) \cdot \sin [\beta - (\varphi_2 - \varphi_1)] \cdot \{ \sin (\alpha - \varphi_1) \cdot \cos \varphi_1 - \\ &- \sin \varphi_1 \cdot \cos (\alpha - \varphi_1) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \sin \varphi_1 \cdot \sin (\alpha - \varphi_1) \cdot \sin [2(\varphi_2 - \varphi_1) - \beta] - \\ &- \sin (\varphi_2 - \varphi_1) \cdot \sin [\beta - (\varphi_2 - \varphi_1)] \cdot \sin (\alpha - 2\varphi_1). \end{aligned}$$

Für $2\varphi_1 = \alpha$ wird $2(\varphi_2 - \varphi_1) - \beta = \gamma - \alpha - \beta = 0$ und somit die
Gleichung erfüllt. Es ist noch:

$$\begin{aligned} \sin^2 \varphi_1 \cdot \sin^2 (\alpha - \varphi_1) \cdot \frac{d^2(x^2)}{d\varphi_1^2} &= -2 \cdot \sin \varphi_1 \cdot \sin (\alpha - \varphi_1) + \\ &+ 2 \cdot \sin (\varphi_2 - \varphi_1) \cdot \sin [\beta - (\varphi_2 - \varphi_1)] = 2 \cdot \sin^2 \frac{1}{2} \beta - 2 \cdot \sin^2 \frac{1}{2} \alpha > 0, \end{aligned}$$

daher x^2 ein Minimum.



Die Zentrale beider Kreise muß also bei der ästhetischen Zweikreisurve zu der überspannten Sehne senkrecht sein. Demnach wird

$$(2) \quad x = \frac{\sin \frac{1}{2} \beta}{\sin \frac{1}{2} \alpha}$$

$$p = m \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta)}{\sin \frac{1}{2} \beta} = 2 \varrho_1 \cdot \sin \varphi_1 \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} \gamma}{\sin \frac{1}{2} \beta}$$

$$(3) \quad \varrho_1 = \frac{p \cdot \sin \frac{1}{2} \beta}{2 \cdot \sin \frac{1}{2} \alpha \cdot \sin \frac{1}{2} \gamma} = \frac{a \cdot \sin \frac{1}{2} \beta}{2 \cos \alpha \cdot \sin \frac{1}{2} \alpha \cdot \sin \frac{1}{2} \gamma}$$

$$(4) \quad \varrho_2 = \frac{\varrho_1}{x^2} = \frac{p \cdot \sin \frac{1}{2} \alpha}{2 \cdot \sin \frac{1}{2} \beta \cdot \sin \frac{1}{2} \gamma} = \frac{a \cdot \sin \frac{1}{2} \alpha}{2 \cos \alpha \cdot \sin \frac{1}{2} \beta \cdot \sin \frac{1}{2} \gamma}$$

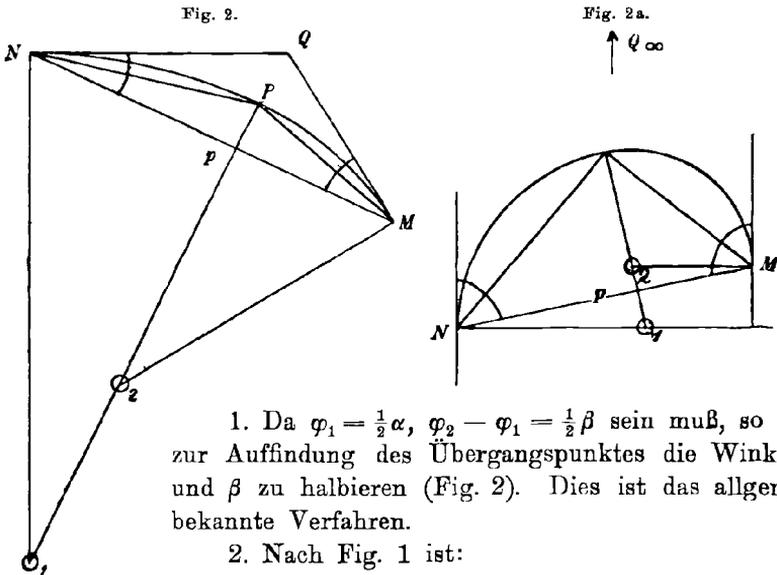
Für den Ellipsenquadranten erhält man mit $\gamma = 90^\circ$, $\beta = 90^\circ - \alpha$:

$$(3a) \quad \varrho_{1;e} = \frac{a \cdot \sin (45^\circ - \frac{1}{2} \alpha)}{\sqrt{2} \cdot \cos \alpha \cdot \sin \frac{1}{2} \alpha}; \quad (4a) \quad \varrho_{2;e} = \frac{a \cdot \sin \frac{1}{2} \alpha}{\sqrt{2} \cdot \cos \alpha \cdot \sin (45^\circ - \frac{1}{2} \alpha)};$$

für den steigenden Korbbogen mit $\gamma = 180^\circ$, $\beta = 180^\circ - \alpha$:

$$(3b) \quad \varrho_{1;s} = \frac{a \cdot \cotg \frac{1}{2} \alpha}{2 \cdot \cos \alpha}; \quad (4b) \quad \varrho_{2;s} = \frac{a \cdot \tg \frac{1}{2} \alpha}{2 \cdot \cos \alpha}.$$

An der Hand vorstehender Entwicklungen gelangt man zu folgenden geometrischen Konstruktionen der Zweikreisurve:



$$MQ = \frac{p \cdot \sin \alpha}{\sin \gamma}; \quad NQ = \frac{p \cdot \sin \beta}{\sin \gamma}$$

$$p - (NQ - MQ) = \frac{p}{\sin \gamma} (\sin \gamma - \sin \beta + \sin \alpha)$$

$$\begin{aligned} \sin \gamma + (\sin \alpha - \sin \beta) &= \sin \gamma + 2 \cdot \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cdot \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \\ &= 2 \cos \frac{1}{2} \gamma [\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)] \\ &= 4 \cdot \cos \frac{1}{2} \gamma \cdot \sin \frac{1}{2} \alpha \cdot \cos \frac{1}{2} \beta \\ p - (NQ - MQ) &= \frac{2p \cdot \sin \frac{1}{2} \alpha \cdot \cos \frac{1}{2} \beta}{\sin \frac{1}{2} \gamma}. \end{aligned}$$

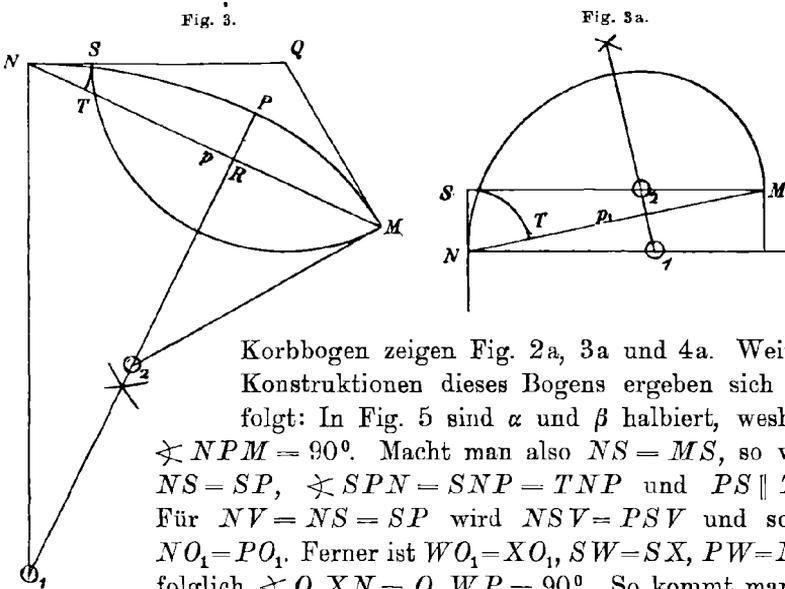
Ferner ist:

$$\begin{aligned} MR &= \varrho_2 \cdot \sin 2(\varphi_2 - \varphi_1) = \varrho_2 \cdot \sin \beta = \frac{p \cdot \sin \frac{1}{2} \alpha \cdot \cos \frac{1}{2} \beta}{\sin \frac{1}{2} \gamma} \\ &= \frac{1}{2} [p - (NQ - MQ)] \end{aligned}$$

und

$$NR = \frac{1}{2} [p + (NQ - MQ)].$$

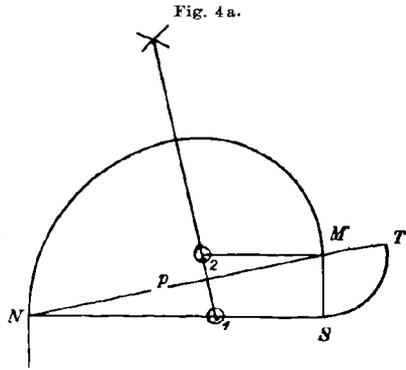
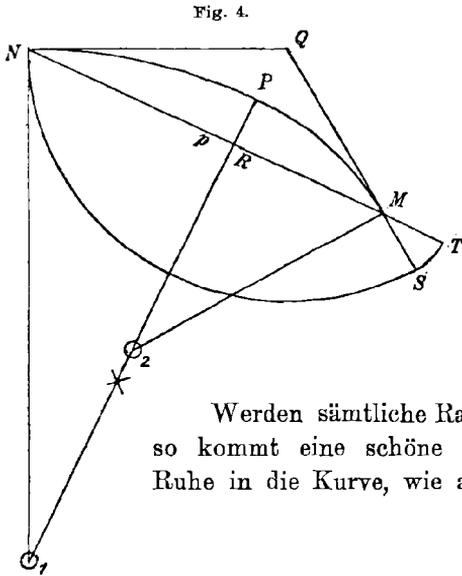
Darauf gründen sich die aus Fig. 3 und 4 ersichtlichen Konstruktionen. Die entsprechenden Konstruktionen für den steigenden



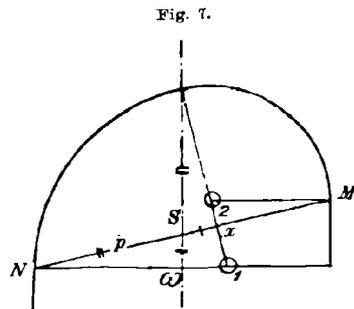
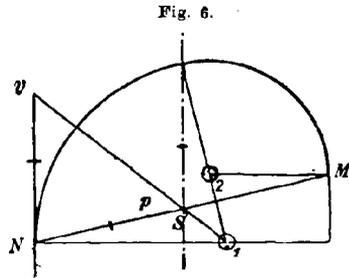
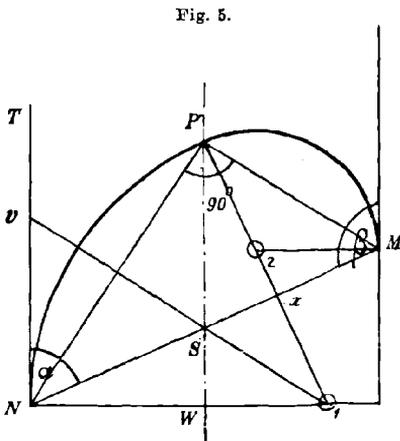
Korbbogen zeigen Fig. 2a, 3a und 4a. Weitere Konstruktionen dieses Bogens ergeben sich wie folgt: In Fig. 5 sind α und β halbiert, weshalb $\sphericalangle NPM = 90^\circ$. Macht man also $NS = MS$, so wird $NS = SP$, $\sphericalangle SPN = \sphericalangle SNP = \sphericalangle TNP$ und $PS \parallel TN$. Für $NV = NS = SP$ wird $NSV = PSV$ und somit $NO_1 = PO_1$. Ferner ist $WO_1 = XO_1$, $SW = SX$, $PW = NX$, folglich $\sphericalangle O_1 XN = \sphericalangle O_1 WP = 90^\circ$. So kommt man zu den in Fig. 6 und 7 angedeuteten Konstruktionen.

Es liege nun ein Kurvenzug $P_0, P_1, P_2 \dots P_n$ (Fig. 8) gezeichnet vor, auf dessen Sehnen $P_0 P_2, P_1 P_3 \dots P_{n-2} P_n$ die Zentralen der sie überspannenden Kreise senkrecht stehen; dann gelten die Beziehungen:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\sin \frac{1}{2} \beta_1}{\sin \frac{1}{2} \alpha_1} = \frac{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{\sin \varphi_1} \\ x_2 &= \frac{\sin \frac{1}{2} \beta_2}{\sin \frac{1}{2} \alpha_2} = \frac{\sin(\varphi_3 - \varphi_2)}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)} \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= \frac{\sin \frac{1}{2} \beta_{n-1}}{\sin \frac{1}{2} \alpha_{n-1}} = \frac{\sin(\varphi_n - \varphi_{n-1})}{\sin(\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2})}. \end{aligned}$$



Werden sämtliche Radienverhältnisse α einander gleich, so kommt eine schöne harmonische Gesetzmäßigkeit und Ruhe in die Kurve, wie aus folgendem hervorgeht.



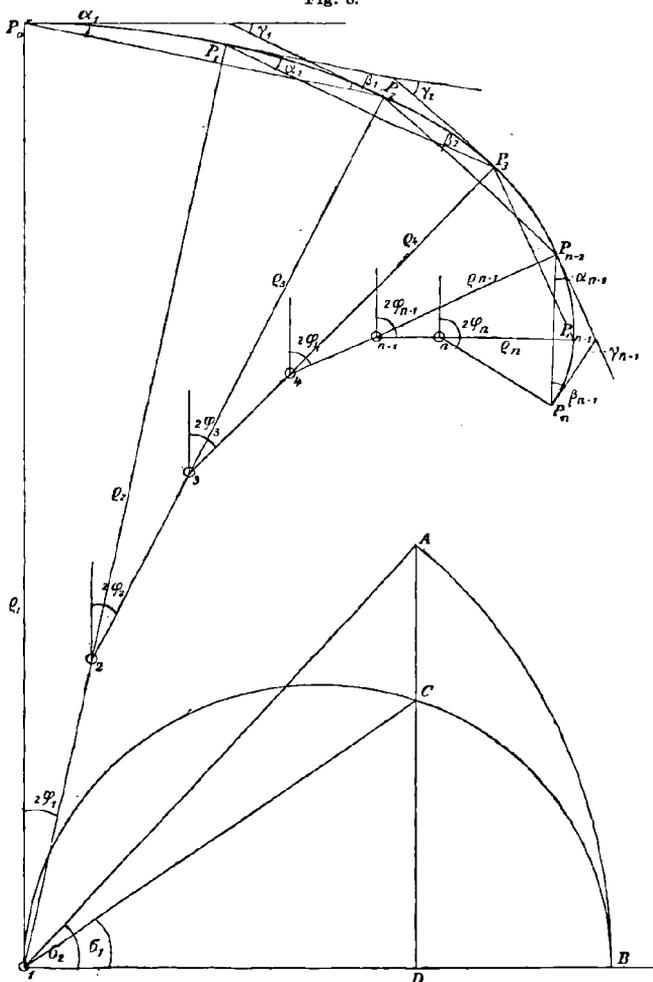
Man erhält:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{\sin \varphi_1} = \frac{\sin(\varphi_3 - \varphi_2)}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)} = \frac{\sin(\varphi_4 - \varphi_3)}{\sin(\varphi_3 - \varphi_2)} = \dots = \frac{\sin(\varphi_n - \varphi_{n-1})}{\sin(\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2})} \\
 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) &= \alpha \cdot \sin \varphi_1 \\
 \sin(\varphi_3 - \varphi_2) &= \alpha \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1) = \alpha^2 \cdot \sin \varphi_1 \\
 \sin(\varphi_4 - \varphi_3) &= \alpha \cdot \sin(\varphi_3 - \varphi_2) = \alpha^3 \cdot \sin \varphi_1 \\
 &\vdots \\
 \sin(\varphi_n - \varphi_{n-1}) &= \alpha \cdot \sin(\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}) = \alpha^{n-1} \cdot \sin \varphi_1.
 \end{aligned}$$

(5)

wenn man die Punkte $P_2, P_3, P_4 \dots P_n$, von P_1 fortschreitend, durch Kreise bestimmt, deren Radien $P_1P_2, P_2P_3 \dots P_{n-1}P_n$ mit Hilfe eines

Fig. 8.



anderen Winkel σ_1 ermittelt werden. Für diesen gilt nach Fig. 8 die Gleichung

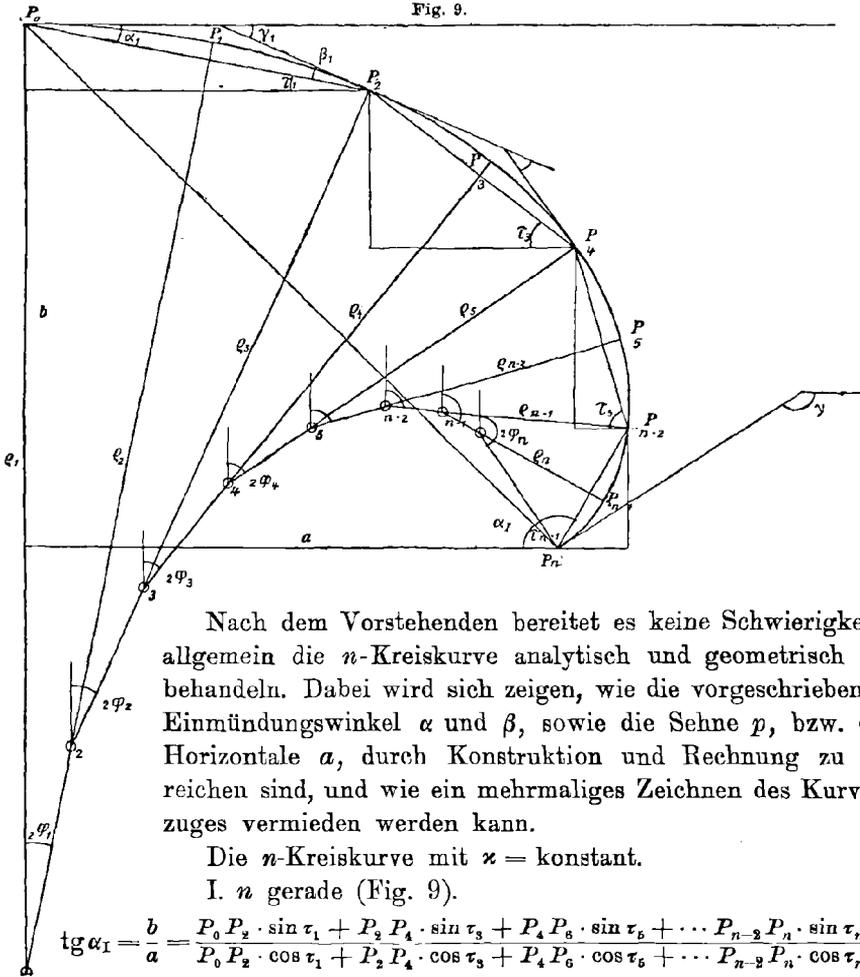
$$\cos^2 \sigma_1 = \frac{O_1 C^2}{O_1 B^2} = \frac{O_1 C^2}{O_1 B} : O_1 B = O_1 D : O_1 B = O_1 D : O_1 A = \cos \sigma_2 = \frac{1}{x^2}$$

$$\cos \sigma_1 = \frac{1}{x}$$

$$P_1 P_2 = P_0 P_1 \cdot \frac{1}{x} = P_0 P_1 \cdot \cos \sigma_1$$

$$P_2 P_3 = P_1 P_2 \cdot \frac{1}{x} = P_1 P_2 \cdot \cos \sigma_1 \quad \text{usw.}$$

So ist die obige Aufgabe gelöst. Man erkennt noch, daß auch die Kreismittelpunkte zueinander in geometrischer Progression liegen; der Quotient ist $\frac{1}{\kappa^2}$.



Nach dem Vorstehenden bereitet es keine Schwierigkeit, allgemein die n -Kreiskurve analytisch und geometrisch zu behandeln. Dabei wird sich zeigen, wie die vorgeschriebenen Einmündungswinkel α und β , sowie die Sehne p , bzw. die Horizontale a , durch Konstruktion und Rechnung zu erreichen sind, und wie ein mehrmaliges Zeichnen des Kurvenzuges vermieden werden kann.

Die n -Kreiskurve mit $\kappa = \text{konstant}$.

I. n gerade (Fig. 9).

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{b}{a} = \frac{P_0 P_2 \cdot \sin \tau_1 + P_2 P_4 \cdot \sin \tau_3 + P_4 P_6 \cdot \sin \tau_5 + \dots + P_{n-2} P_n \cdot \sin \tau_{n-1}}{P_0 P_2 \cdot \cos \tau_1 + P_2 P_4 \cdot \cos \tau_3 + P_4 P_6 \cdot \cos \tau_5 + \dots + P_{n-2} P_n \cdot \cos \tau_{n-1}}$$

Da allgemein:

$$p = 2 \varrho_1 \cdot \sin \frac{1}{2} \gamma \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} \alpha}{\sin \frac{1}{2} \beta} = \frac{2 \varrho_1 \cdot \sin \frac{1}{2} \gamma}{\kappa}$$

so wird:

$$\begin{aligned} P_0 P_2 &= \frac{2 \varrho_1 \cdot \sin \frac{1}{2} \gamma_1}{\kappa} = \frac{2 \varrho_1 \cdot \sin \varphi_2}{\kappa} \\ P_2 P_4 &= \frac{2 \varrho_3 \cdot \sin \frac{1}{2} \gamma_3}{\kappa} = \frac{2 \varrho_1 \cdot \sin (\varphi_4 - \varphi_2)}{\kappa^3} \\ P_4 P_6 &= \frac{2 \varrho_5 \cdot \sin \frac{1}{2} \gamma_5}{\kappa} = \frac{2 \varrho_1 \cdot \sin (\varphi_6 - \varphi_4)}{\kappa^5} \\ &\vdots \\ P_{n-2} P_n &= \frac{2 \varrho_{n-1} \cdot \sin \frac{1}{2} \gamma_{n-1}}{\kappa} = \frac{2 \varrho_1 \cdot \sin (\varphi_n - \varphi_{n-2})}{\kappa^{2n-3}} \end{aligned}$$

Mit $\tau_m = 2\varphi_m$ wird nun:

$$(7) \quad \operatorname{tg} \alpha_I = \frac{Z_I}{N_I} = \frac{\sin \varphi_2 \cdot \sin 2\varphi_1 + \left(\frac{1}{\kappa}\right)^4 \cdot \sin(\varphi_4 - \varphi_2) \cdot \sin 2\varphi_3 + \left(\frac{1}{\kappa}\right)^8 \cdot \sin(\varphi_6 - \varphi_4) \cdot \sin 2\varphi_5 + \dots \sin(\varphi_n - \varphi_{n-2}) \cdot \sin 2\varphi_{n-1} \left(\frac{1}{\kappa}\right)^{2n-4}}{\sin \varphi_2 \cdot \cos 2\varphi_1 + \left(\frac{1}{\kappa}\right)^4 \cdot \sin(\varphi_4 - \varphi_2) \cdot \cos 2\varphi_3 + \left(\frac{1}{\kappa}\right)^8 \cdot \sin(\varphi_6 - \varphi_4) \cdot \cos 2\varphi_5 + \dots \sin(\varphi_n - \varphi_{n-2}) \cdot \cos 2\varphi_{n-1} \left(\frac{1}{\kappa}\right)^{2n-4}}$$

$$(8) \quad N_I = a \cdot \frac{\kappa}{2\varrho_1} \quad (9) \quad \varrho_1 = \frac{a \cdot \kappa}{2N_I}$$

II. n ungerade (Fig. 10).

$$\operatorname{tg} \alpha_{II} = \frac{b}{a} = \frac{\varrho_1(1 - \cos 2\varphi_1) + P_1 P_3 \cdot \sin \tau_2 + P_3 P_5 \cdot \sin \tau_4 + \dots P_{n-2} P_n \cdot \sin \tau_{n-1}}{\varrho_1 \cdot \sin 2\varphi_1 + P_1 P_3 \cdot \cos \tau_2 + P_3 P_5 \cdot \cos \tau_4 + \dots P_{n-2} P_n \cdot \cos \tau_{n-1}}$$

$$1 - \cos 2\varphi_1 = 2 \cdot \sin^2 \varphi_1$$

$$P_1 P_3 = \frac{2\varrho_2 \cdot \sin \frac{1}{2} \gamma_2}{\kappa} = \frac{2\varrho_1 \cdot \sin(\varphi_3 - \varphi_1)}{\kappa^3}$$

$$P_3 P_5 = \frac{2\varrho_4 \cdot \sin \frac{1}{2} \gamma_4}{\kappa} = \frac{2\varrho_1 \cdot \sin(\varphi_5 - \varphi_3)}{\kappa^5}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$P_{n-2} P_n = \frac{2\varrho_1 \cdot \sin(\varphi_n - \varphi_{n-2})}{\kappa^{2n-3}}$$

$$(10) \quad \operatorname{tg} \alpha_{II} = \frac{Z_{II}}{N_{II}} = \frac{\sin^2 \varphi_1 + \left(\frac{1}{\kappa}\right)^5 \cdot \sin(\varphi_3 - \varphi_1) \cdot \sin 2\varphi_2 + \left(\frac{1}{\kappa}\right)^7 \cdot \sin(\varphi_5 - \varphi_3) \cdot \sin 2\varphi_4 + \dots \left(\frac{1}{\kappa}\right)^{2n-3} \cdot \sin(\varphi_n - \varphi_{n-2}) \cdot \sin 2\varphi_{n-1}}{\sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1 + \left(\frac{1}{\kappa}\right)^3 \cdot \sin(\varphi_3 - \varphi_1) \cdot \cos 2\varphi_2 + \left(\frac{1}{\kappa}\right)^5 \cdot \sin(\varphi_5 - \varphi_3) \cdot \cos 2\varphi_4 + \dots \left(\frac{1}{\kappa}\right)^{2n-3} \cdot \sin(\varphi_n - \varphi_{n-2}) \cdot \cos 2\varphi_{n-1}}$$

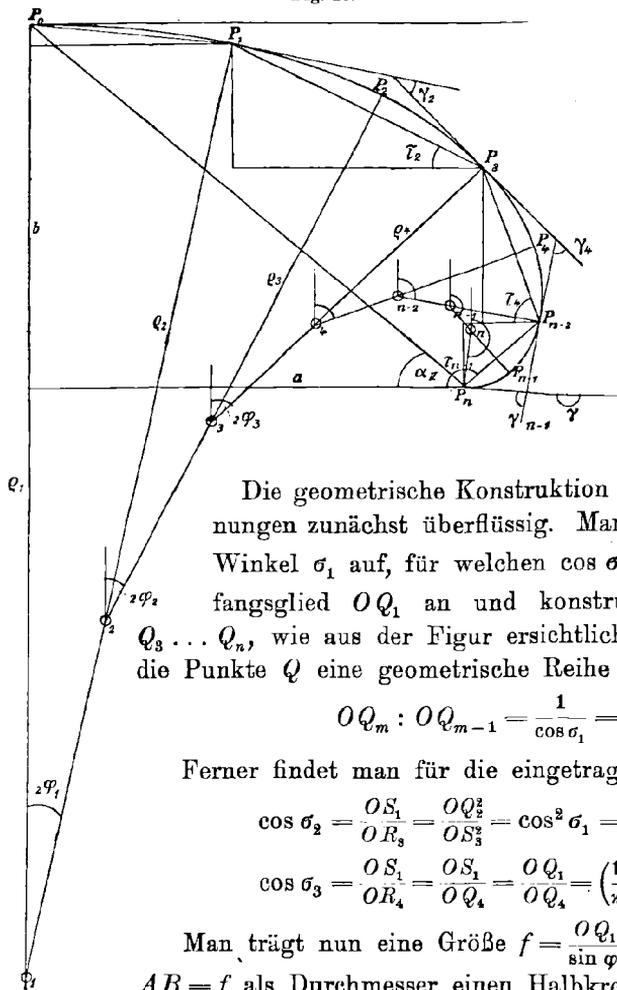
$$(11) \quad N_{II} = \frac{a}{2\varrho_1} \quad (12) \quad \varrho_1 = \frac{a}{2N_{II}}$$

In beiden Fällen sind die Winkel festgelegt durch die allgemeine Beziehung:

$$(13) \quad \sin(\varphi_m - \varphi_{m-1}) = x^{m-1} \cdot \sin \varphi_1.$$

Die gegebenen Größen p, α und β bedingen x, φ_1 und ϱ_1 ; auf diesen drei Grundlagen baut sich nach vorstehendem die Kurve auf.

Fig. 10.



x und φ_1 werden zunächst angenommen. Nach Gleichung (13) könnte man dann der Reihe nach die Werte $\varphi_2, \varphi_3 \dots \varphi_n$ ermitteln. Da $2\varphi_n = \gamma$ sein muß, so wäre die Rechnung mehrmals durchzuführen, bis $2\varphi_n$ und das gegebene γ mit der gewünschten Genauigkeit übereinstimmen.

Die geometrische Konstruktion macht derartige Rechnungen zunächst überflüssig. Man trägt (Fig. 11) einen Winkel σ_1 auf, für welchen $\cos \sigma_1 = \frac{1}{x}$, nimmt ein Anfangsglied OQ_1 an und konstruiert die Punkte $Q_2, Q_3 \dots Q_n$, wie aus der Figur ersichtlich. Man erkennt, daß die Punkte Q eine geometrische Reihe liefern; allgemein ist:

$$OQ_m : OQ_{m-1} = \frac{1}{\cos \sigma_1} = x.$$

Ferner findet man für die eingetragenen Winkel

$$\cos \sigma_2 = \frac{OS_1}{OR_3} = \frac{OQ_2^2}{OS_3^2} = \cos^2 \sigma_1 = \left(\frac{1}{x}\right)^2$$

$$\cos \sigma_3 = \frac{OS_1}{OR_4} = \frac{OS_2}{OQ_4} = \frac{OQ_1}{OQ_4} = \left(\frac{1}{x}\right)^3.$$

Man trägt nun eine Größe $f = \frac{OQ_1}{\sin \varphi_1}$ auf, beschreibt über $AB = f$ als Durchmesser einen Halbkreis, trägt darin ein:

und erhält: $AA_1 = OQ_1, AA_2 = OQ_2 \dots AA_n = OQ_n$

$$AA_1 = f \cdot \sin \varphi_1$$

$$AA_2 = OQ_2 = x \cdot OQ_1 = x \cdot f \cdot \sin \varphi_1 = f \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \text{ nach Gl. (13)}$$

$$AA_3 = OQ_3 = x \cdot OQ_2 = x^2 \cdot f \cdot \sin \varphi_1 = f \cdot \sin(\varphi_3 - \varphi_2) \text{ ,, ,, ,, usw.}$$

Folglich ist:

$$\sphericalangle AMA_1 = 2\varphi_1, \quad \sphericalangle AMA_2 = 2(\varphi_2 - \varphi_1), \quad \sphericalangle AMA_3 = 2(\varphi_3 - \varphi_2)$$

und schließlich

$$\sphericalangle AMA_n = 2(\varphi_n - \varphi_{n-1}).$$

Durch einfaches Abgreifen kann man die erforderlichen Additionen vornehmen; man hat der Reihe nach:

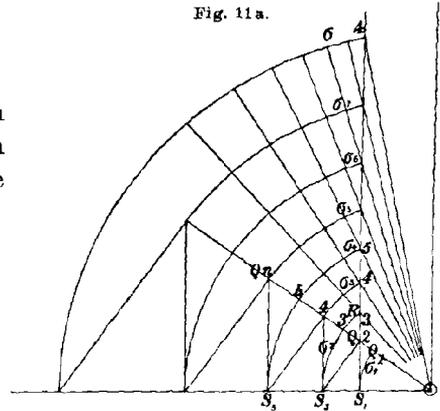
$$2\varphi_2 = \sphericalangle AMA_1 + \sphericalangle AMA_2$$

$$2\varphi_3 = \sphericalangle AMA_3 + 2\varphi_2$$

⋮

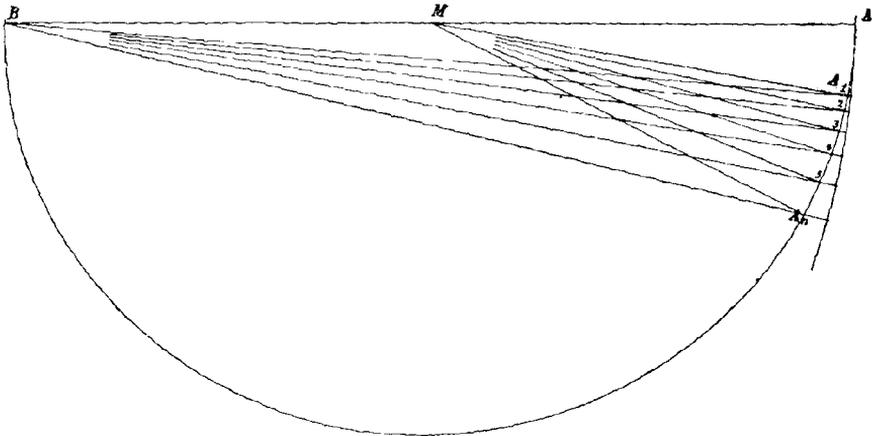
$$2\varphi_n = \sphericalangle AMA_n + 2\varphi_{n-1}.$$

Fig. 11 a.



Wird für ein gewähltes φ_1 der Endwinkel $2\varphi_n > \gamma$, so ist mit einem kleineren φ_1 , d. h. einem größeren f , die Arbeit wiederum zu

Fig. 11 b



beginnen; anderenfalls mit einem kleineren f . Das Verfahren führt schnell zum Ziel, wovon man sich leicht überzeugt.

Es ist noch zu entscheiden, auf welches α uns die Annahme von $\alpha = \frac{1}{\cos \sigma_1}$ führt, und ob dieses α mit dem verlangten hinlänglich übereinstimmt. Um dieses graphisch ermitteln zu können, werde eine Erweiterung der Brüche für $\operatorname{tg} \alpha$ mit einem Faktor μ vorgenommen. So entsteht:

$$(7a) \quad \operatorname{tg} \alpha_I = \frac{Z'}{N'} = \frac{\mu [\sin \varphi_2 \cdot \sin 2\varphi_1 + \cos \sigma_4 \cdot (\sin \varphi_4 - \varphi_2) \cdot \sin 2\varphi_3 + \cos \sigma_6 \cdot \sin (\varphi_6 - \varphi_4) \cdot \sin 2\varphi_5 + \dots + \cos \sigma_{2n-4} \cdot \sin (\varphi_n - \varphi_{n-2}) \cdot \sin 2\varphi_{n-1}]}{\mu [\sin \varphi_2 \cdot \cos 2\varphi_1 + \cos \sigma_4 \cdot (\sin \varphi_4 - \varphi_2) \cdot \cos 2\varphi_3 + \cos \sigma_6 \cdot \sin (\varphi_6 - \varphi_4) \cdot \cos 2\varphi_5 + \dots + \cos \sigma_{2n-4} \cdot \sin (\varphi_n - \varphi_{n-2}) \cdot \cos 2\varphi_{n-1}]}$$

$$(10a) \quad \operatorname{tg} \alpha_{II} = \frac{Z''}{N''} = \frac{\mu [\sin^2 \varphi_1 + \cos \sigma_3 \cdot \sin (\varphi_3 - \varphi_1) \cdot \sin 2\varphi_2 + \cos \sigma_5 \cdot \sin (\varphi_5 - \varphi_3) \cdot \sin 2\varphi_4 + \dots + \cos \sigma_{2n-3} \cdot \sin (\varphi_n - \varphi_{n-2}) \cdot \sin 2\varphi_{n-1}]}{\mu [\sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1 + \cos \sigma_3 \cdot \sin (\varphi_3 - \varphi_1) \cdot \cos 2\varphi_2 + \cos \sigma_5 \cdot \sin (\varphi_5 - \varphi_3) \cdot \cos 2\varphi_4 + \dots + \cos \sigma_{2n-3} \cdot \sin (\varphi_n - \varphi_{n-2}) \cdot \cos 2\varphi_{n-1}]}$$

$$(9a) \quad \varrho_I^I = \frac{\alpha \cdot \mu \cdot \kappa}{2N'} \quad (n \text{ gerade}) \quad (12a) \quad \varrho_I^{II} = \frac{\alpha \cdot \mu}{2N''} \quad (n \text{ ungerade}).$$

Zur Bestimmung des erreichten Wertes α trägt man nun die Winkel σ , φ und 2φ von einem Punkte aus strahlenförmig an eine Horizontale an, greift mit dem Zirkel nach Beschreibung eines Kreises mit dem Radius μ die Einzelausdrücke für Zähler und Nenner ab und summiert diese. Ist der so festgestellte Wert α größer, wie verlangt, so hat man die Konstruktion mit einem größeren κ , d. h. mit einem größeren σ_1 , wieder vorzunehmen. — Es empfiehlt sich, bei der Zeichnung $\mu > f$ zu wählen.

Nachdem ϱ_1 gefunden ist, ergeben sich die anderen Radien mit Hilfe der Formel

$$(14) \quad \varrho_m = \frac{\varrho_1}{\kappa^2 (m-1)}.$$

Die graphisch gefundenen Näherungswerte können dann als Grundlage der genaueren analytischen Rechnung benutzt werden.

Was die Wahl von κ anbetrifft, so kann man nehmen:

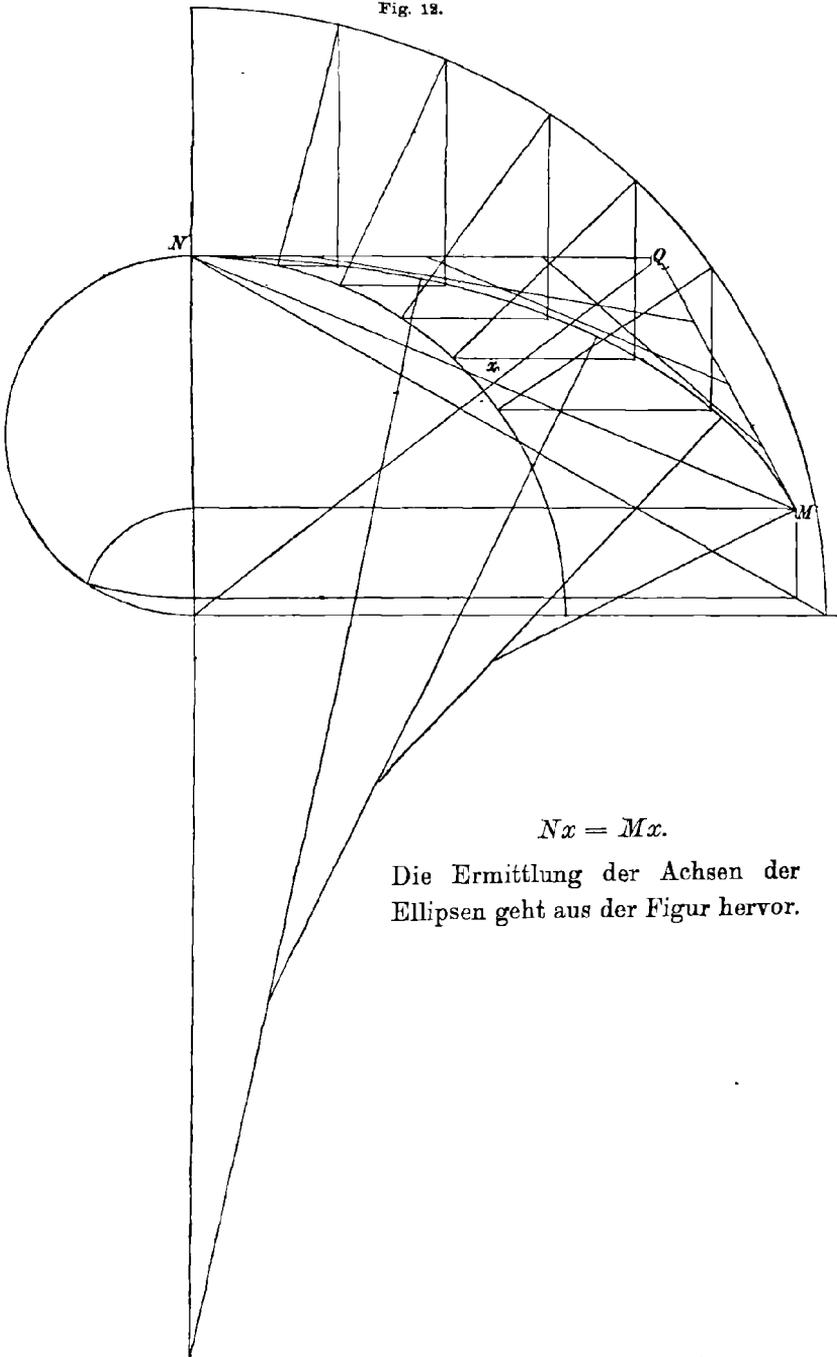
$$1,5 < \kappa^2 < 2.$$

Will man hochwertige Kurven haben, so hat man die kleineren Werte von κ zugrunde zu legen.

Um bei $\gamma \sim 90^\circ$ die Wahl von κ zu erleichtern, werde hier noch eine Tabelle wiedergegeben, die für $n = 3 \dots 8$ graphisch ermittelt wurde.

n	3	4	5	6	7	8	3	4	5	6	7	8	3	4	5	6	7	8
φ_1	12° 1'	8° 0'	5° 44'	4° 13'	3° 9'	2° 26'	10° 57'	6° 57'	4° 43'	3° 15'	2° 22'	1° 42'	10° 6'	6° 6'	3° 58'	2° 40'	1° 46'	1° 14'
$\operatorname{tg} \alpha$	0,74	0,65	0,58	0,51	0,44	0,40	0,66	0,57	0,48	0,41	0,34	0,28	0,60	0,48	0,40	0,32	0,25	0,21
	$\kappa^2 = 1,50$						$\kappa^2 = 1,75$						$\kappa^2 = 2,00$					

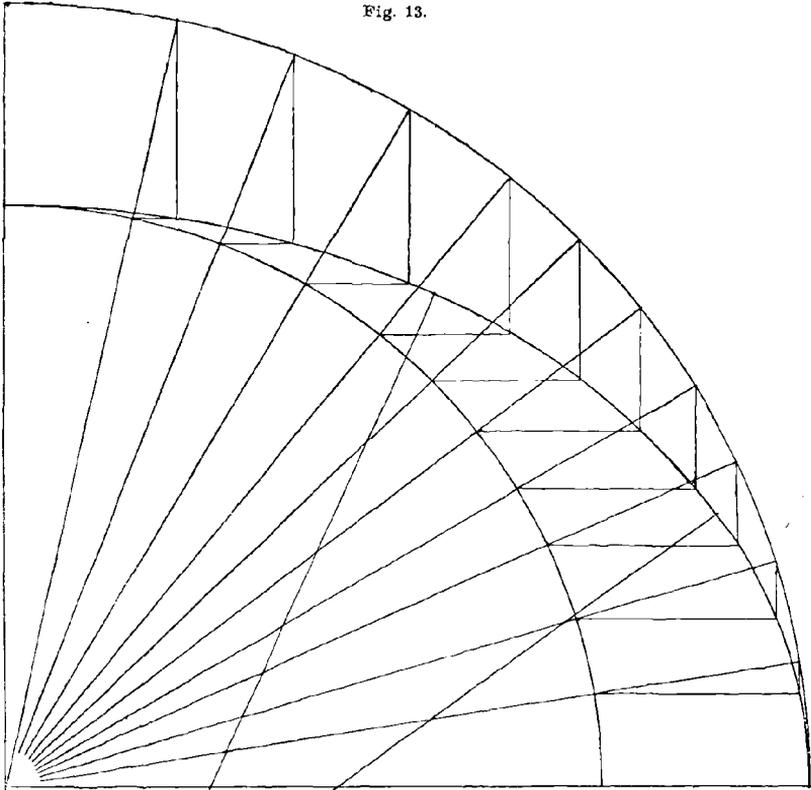
Fig. 12.



$$Nx = Mx.$$

Die Ermittlung der Achsen der Ellipsen geht aus der Figur hervor.

Fig. 13.



Hat man z. B. bei $\gamma \sim 90^\circ$ und $\text{tg } \alpha = 0,4$ eine Siebenkreiskurve zu bestimmen, so trägt man zu den Abszissen 0,44, 0,34 und 0,25 die Ordinaten 1,50, 1,75 und 2,00 auf, verbindet die Punkte durch eine Kurve und greift bei der Abszisse 0,40 das zu wählende x^2 ab. Ferner trägt man die Bogen $3^\circ 9'$, $2^\circ 22'$ und $1^\circ 46'$ als Abszissen auf, zeichnet eine neue Kurve der (x^2) und greift auf dieser für das gefundene (x^2) die Abszisse, d. h. das zunächst zu wählende φ_1 ab. — Für denjenigen, der viel mit derartigen Kurven arbeitet, empfiehlt es sich, solche Tabellen, wie die obige, für verschiedene γ aufzustellen.

Aus ihnen kann man ohne weiteres erschen, wieviel Bogen für ein gegebenes α und $\beta = (\gamma - \alpha)$ anzunehmen sind, wenn man befriedigende Kurven haben will.

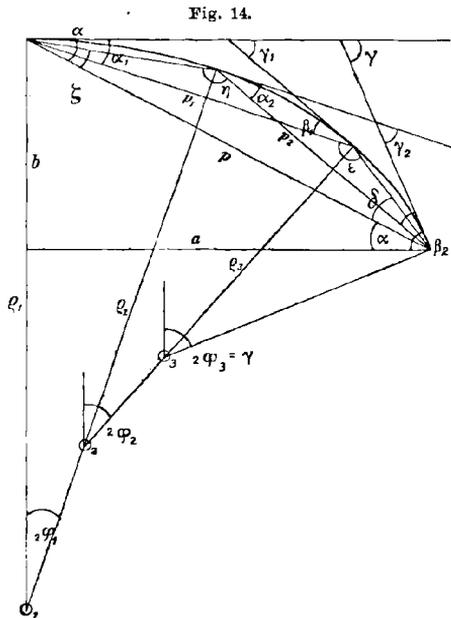
Die auf diese Weise gefundenen Kreisbogenkurven verlaufen zwischen

der durch p , α und β bestimmten Ellipse und der Parabel; die Ellipse liegt innerhalb, die Parabel außerhalb der Kreiskurve (Fig. 12).¹⁾

Fig. 13 zeigt eine Dreikreiscurve mit $\kappa = 1,50$, $\varphi_1 = 12^\circ 1' 12''$, $\varphi_2 = 26^\circ 47' 49''$, $\varphi_3 = \frac{1}{2} \gamma = 44^\circ 59' 59'' \sim 45^\circ$, $\text{tg } \alpha = 0,742582$. Zum Vergleiche sind ebenso wie in Fig. 12 die Ellipsenpunkte durch die bekannte Radialkonstruktion angedeutet. Die Abweichung beider ist bei sorgfältigem Zeichnen derartig gering, daß sie kaum noch erkennbar ist.

Im folgenden sollen für die Drei- und Vierkreisbogenkurve an Hand von Fig. 14 und 15 noch besondere, logarithmisch bequem auszuwertende Formeln hergeleitet werden, die eine vorherige Annahme von κ überflüssig machen.

In Fig. 14 ist:



$$\alpha_1 = 2 \varphi_1 \qquad \beta_1 = 2 (\varphi_2 - \varphi_1) = \alpha_2 \qquad \gamma_1 = \alpha_1 + \beta_1 = 2 \varphi_2$$

$$\alpha_2 = 2 (\varphi_2 - \varphi_1) \qquad \beta_2 = \gamma - 2 \varphi_2 \qquad \gamma_2 = \alpha_2 + \beta_2 = \gamma - 2 \varphi_1$$

$$\delta = \beta - \frac{1}{2} \beta_2 = \beta - \frac{1}{2} \gamma + \varphi_2$$

$$\begin{aligned} \epsilon &= 180^\circ - \delta - (\alpha - \alpha_1) = 180^\circ - [\beta - \frac{1}{2} \gamma + \varphi_2 + \alpha - 2 \varphi_1] = \\ &= 180^\circ - [\frac{1}{2} \gamma + \varphi_2 - 2 \varphi_1] \end{aligned}$$

$$\zeta = \alpha - \frac{1}{2} \alpha_1 = \alpha - \varphi_1$$

$$\begin{aligned} \eta &= 180^\circ - (\zeta + \beta - \beta_2) = 180^\circ - (\gamma - \varphi_1 - \gamma + 2 \varphi_2) = \\ &= 180^\circ - (2 \varphi_2 - \varphi_1) \end{aligned}$$

$$p_1 = \frac{p \cdot \sin \delta}{\sin \epsilon} = \frac{p \cdot \sin (\beta - \frac{1}{2} \gamma + \varphi_2)}{\sin (\frac{1}{2} \gamma + \varphi_2 - 2 \varphi_1)}$$

$$p_2 = \frac{p \cdot \sin \zeta}{\sin \eta} = \frac{p \cdot \sin (\alpha - \varphi_1)}{\sin (2 \varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$(15) \quad \varphi_1 = \frac{p_1 \cdot \sin \frac{1}{2} \beta_1}{2 \cdot \sin \frac{1}{2} \alpha_1 \cdot \sin \frac{1}{2} \beta_1} = p \cdot \frac{\sin (\beta - \frac{1}{2} \gamma + \varphi_2) \cdot \sin (\varphi_2 - \varphi_1)}{2 \cdot \sin (\frac{1}{2} \gamma + \varphi_2 - 2 \varphi_1) \cdot \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2}$$

1) Ich beschränke mich auf Beobachtungsergebnisse, der analytische Nachweis erscheint mir hier belanglos.

$$\varphi_2 = \frac{p_1 \cdot \sin \frac{1}{2} \alpha_1}{2 \cdot \sin \frac{1}{2} \beta_1 \cdot \sin \frac{1}{2} \gamma_1} = \frac{p_2 \cdot \sin \frac{1}{2} \beta_2}{2 \cdot \sin \frac{1}{2} \alpha_2 \cdot \sin \frac{1}{2} \gamma_2}$$

$$\frac{\sin \frac{1}{2} \alpha_1 \cdot \sin \delta}{\sin \varepsilon \cdot \sin \frac{1}{2} \beta_1 \cdot \sin \frac{1}{2} \gamma_1} = \frac{\sin \frac{1}{2} \beta_2 \cdot \sin \zeta}{\sin \eta \cdot \sin \frac{1}{2} \alpha_2 \cdot \sin \frac{1}{2} \gamma_2}$$

$$\frac{\sin \frac{1}{2} \alpha_1 \cdot \sin \delta}{\sin \varepsilon \cdot \sin \frac{1}{2} \gamma_1} = \frac{\sin \frac{1}{2} \beta_2 \cdot \sin \zeta}{\sin \eta \cdot \sin \frac{1}{2} \gamma_2}$$

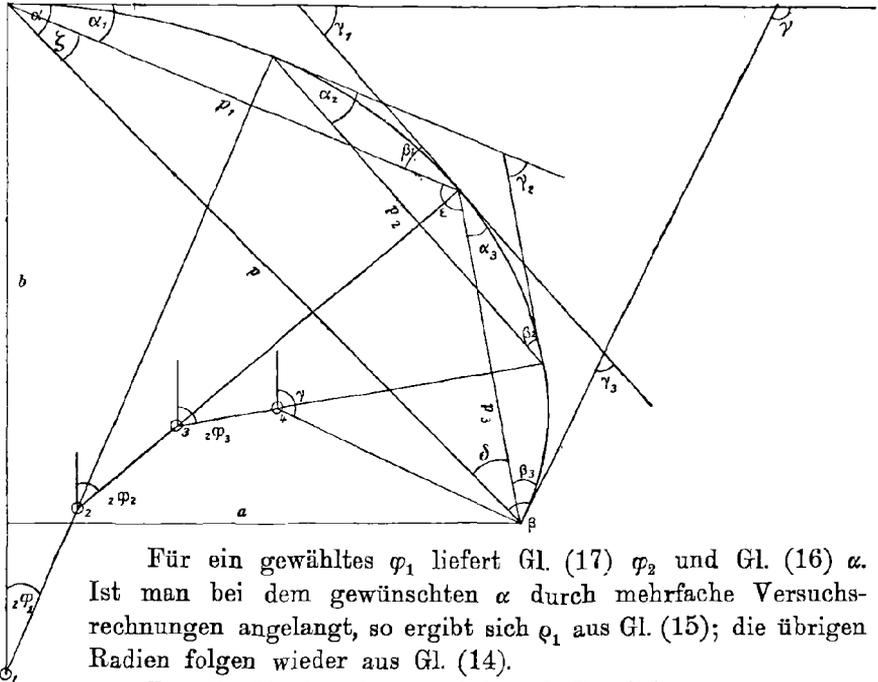
$$\frac{\sin \varphi_1 \cdot \sin (\beta - \frac{1}{2} \gamma + \varphi_2)}{\sin \varphi_2 \cdot \sin (\frac{1}{2} \gamma + \varphi_2 - 2 \varphi_1)} = \frac{\sin (\frac{1}{2} \gamma - \varphi_2) \cdot \sin (\alpha - \varphi_1)}{\sin (\frac{1}{2} \gamma - \varphi_1) \cdot \sin (2 \varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$(16) \quad \frac{\sin (\frac{1}{2} \gamma - \alpha + \varphi_2) \cdot \sin (\frac{1}{2} \gamma - \varphi_1)}{\sin (\frac{1}{2} \gamma + \varphi_2 - 2 \varphi_1) \cdot \sin (\frac{1}{2} \gamma - \varphi_2) \cdot \sin (\alpha - \varphi_1)} = \frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi_1 \cdot \sin (2 \varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$(17) \quad \alpha = \frac{\sin \frac{1}{2} \beta_1}{\sin \frac{1}{2} \alpha_1} = \frac{\sin \frac{1}{2} \beta_2}{\sin \frac{1}{2} \alpha_2} = \frac{\sin \frac{1}{2} \beta_2}{\sin \frac{1}{2} \beta_1} \cdot \sin^2 (\varphi_2 - \varphi_1) = \sin \varphi_1 \cdot \sin (\frac{1}{2} \gamma - \varphi_2).$$

$$(18) \quad \alpha = \frac{\sin (\varphi_2 - \varphi_1)}{\sin \varphi_1}.$$

Fig. 15.



Für ein gewähltes φ_1 liefert Gl. (17) φ_2 und Gl. (16) α . Ist man bei dem gewünschten α durch mehrfache Versuchsrechnungen angelangt, so ergibt sich φ_1 aus Gl. (15); die übrigen Radien folgen wieder aus Gl. (14).

Für die Vierkreiskurve wird nach Fig. 15:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2 \varphi_1 & \beta_1 &= 2 (\varphi_2 - \varphi_1) = \alpha_2 & \gamma_1 &= 2 \varphi_2 & \delta &= 2 \varphi_3 - \alpha \\ \alpha_2 &= 2 (\varphi_2 - \varphi_1) & \beta_2 &= 2 (\varphi_3 - \varphi_2) = \alpha_3 & \gamma_2 &= 2 (\varphi_3 - \varphi_1) & \xi &= \alpha - 2 \varphi_1 \\ \alpha_3 &= 2 (\varphi_3 - \varphi_2) & \beta_3 &= \gamma - 2 \varphi_3 & \gamma_3 &= \gamma - 2 \varphi_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_1 &= p \cdot \frac{\sin \delta}{\sin \varepsilon} = p \cdot \frac{\sin (2 \varphi_3 - \alpha)}{\sin 2(\varphi_3 - \varphi_1)} \\
 p_1 &= p_3 \cdot \frac{\sin \delta}{\sin \zeta} = p_3 \cdot \frac{\sin (2 \varphi_3 - \alpha)}{\sin (\alpha - 2 \varphi_1)} \\
 (19) \quad \varrho_1 &= \frac{p_1 \cdot \sin \frac{1}{2} \beta_1}{2 \cdot \sin \frac{1}{2} \alpha_1 \cdot \sin \frac{1}{2} \gamma_1} = p \cdot \frac{\sin (2 \varphi_3 - \alpha) \cdot \sin (\varphi_2 - \varphi_1)}{2 \cdot \sin 2(\varphi_3 - \varphi_1) \cdot \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2} \\
 \varrho_2 &= \frac{p_1 \cdot \sin \frac{1}{2} \alpha_1}{2 \cdot \sin \frac{1}{2} \beta_1 \cdot \sin \frac{1}{2} \gamma_1} = \frac{p_2 \cdot \sin \frac{1}{2} \beta_2}{2 \cdot \sin \frac{1}{2} \alpha_2 \cdot \sin \frac{1}{2} \gamma_2} \\
 \varrho_3 &= \frac{p_3 \cdot \sin \frac{1}{2} \beta_3}{2 \cdot \sin \frac{1}{2} \alpha_3 \cdot \sin \frac{1}{2} \gamma_3} = \frac{p_2 \cdot \sin \frac{1}{2} \alpha_2}{2 \cdot \sin \frac{1}{2} \beta_2 \cdot \sin \frac{1}{2} \gamma_2}.
 \end{aligned}$$

Durch Division wird:

$$\begin{aligned}
 \frac{p_1 \cdot \sin \frac{1}{2} \alpha_1 \cdot \sin \frac{1}{2} \alpha_3 \cdot \sin \frac{1}{2} \gamma_3}{p_3 \cdot \sin \frac{1}{2} \beta_3 \cdot \sin \frac{1}{2} \beta_1 \cdot \sin \frac{1}{2} \gamma_1} &= \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \beta_2}{\sin^2 \frac{1}{2} \alpha_2} \\
 \frac{p_1 \cdot \sin \frac{1}{2} \alpha_1 \cdot \sin \frac{1}{2} \gamma_3}{p_3 \cdot \sin \frac{1}{2} \beta_3 \cdot \sin \frac{1}{2} \gamma_1} &= \frac{\sin \frac{1}{2} \beta_2}{\sin \frac{1}{2} \alpha_2} \\
 \frac{\sin (2 \varphi_3 - \alpha) \cdot \sin \varphi_1 \cdot \sin (\frac{1}{2} \gamma - \varphi_2)}{\sin (\alpha - 2 \varphi_1) \cdot \sin (\frac{1}{2} \gamma - \varphi_3) \cdot \sin \varphi_2} &= \frac{\sin (\varphi_3 - \varphi_2)}{\sin (\varphi_2 - \varphi_1)}. \\
 (20) \quad \frac{\sin (2 \varphi_3 - \alpha)}{\sin (\alpha - 2 \varphi_1)} &= \frac{\sin (\varphi_3 - \varphi_2) \cdot \sin (\frac{1}{2} \gamma - \varphi_3) \cdot \sin \varphi_2}{\sin (\varphi_2 - \varphi_1) \cdot \sin (\frac{1}{2} \gamma - \varphi_2) \cdot \sin \varphi_1}. \\
 x &= \frac{\sin \frac{1}{2} \beta_1}{\sin \frac{1}{2} \alpha_1} = \frac{\sin \frac{1}{2} \beta_2}{\sin \frac{1}{2} \alpha_2} = \frac{\sin \frac{1}{2} \beta_3}{\sin \frac{1}{2} \alpha_3} \\
 &= \frac{\sin (\varphi_2 - \varphi_1)}{\sin \varphi_1} = \frac{\sin (\varphi_3 - \varphi_2)}{\sin (\varphi_2 - \varphi_1)} = \frac{\sin (\frac{1}{2} \gamma - \varphi_3)}{\sin (\varphi_3 - \varphi_2)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sin \varphi_2 \cdot \cotg \varphi_1 - \cos \varphi_2 &= \frac{\sin (\varphi_3 - \varphi_2)}{\sin \varphi_1 [\sin \varphi_2 \cdot \cotg \varphi_1 - \cos \varphi_2]} = \frac{\sin (\frac{1}{2} \gamma - \varphi_3)}{\sin (\varphi_3 - \varphi_2)} \\
 \sin \varphi_2 \cdot \cotg \varphi_1 &= \frac{\sin (\frac{1}{2} \gamma - \varphi_3) + \cos \varphi_2 \cdot \sin (\varphi_3 - \varphi_2)}{\sin (\varphi_3 - \varphi_2)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sin^2 \varphi_1} &= 1 + \cotg^2 \varphi_1 = \\
 &= \frac{\sin^2 (\varphi_3 - \varphi_2) + \sin^2 (\frac{1}{2} \gamma - \varphi_3) + 2 \cdot \sin (\frac{1}{2} \gamma - \varphi_3) \cdot \cos \varphi_2 \cdot \sin (\varphi_3 - \varphi_2)}{\sin^2 \varphi_2 \cdot \sin^2 (\varphi_3 - \varphi_2)}
 \end{aligned}$$

$$(\sin \varphi_2 \cdot \cotg \varphi_1 - \cos \varphi_2)^2 = \frac{\sin (\varphi_3 - \varphi_2)}{\sin \varphi_1} = \frac{\sin^2 (\frac{1}{2} \gamma - \varphi_3)}{\sin^2 (\varphi_3 - \varphi_2)}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sin^2 \varphi_1} &= \frac{\sin^4 (\frac{1}{2} \gamma - \varphi_3)}{\sin^6 (\varphi_3 - \varphi_2)} = \\
 &= \frac{\sin^2 (\varphi_3 - \varphi_2) + \sin^2 (\frac{1}{2} \gamma - \varphi_3) + 2 \cdot \sin (\frac{1}{2} \gamma - \varphi_3) \cdot \cos \varphi_2 \cdot \sin (\varphi_3 - \varphi_2)}{\sin^2 \varphi_2 \cdot \sin^2 (\varphi_3 - \varphi_2)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\sin^2 \varphi_2 \cdot \sin^4 (\frac{1}{2} \gamma - \varphi_3)}{\sin^4 (\varphi_3 - \varphi_2)} &= \sin^2 (\varphi_3 - \varphi_2) + \sin^2 (\frac{1}{2} \gamma - \varphi_3) + \\
 &+ 2 \cdot \sin (\frac{1}{2} \gamma - \varphi_3) \cdot \cos \varphi_2 \cdot \sin (\varphi_3 - \varphi_2) \\
 &= \frac{1}{2} [1 - \cos 2(\varphi_3 - \varphi_2)] + \frac{1}{2} [1 - \cos 2(\frac{1}{2} \gamma - \varphi_3)] + \\
 &+ 2 \cdot \sin (\frac{1}{2} \gamma - \varphi_3) \cdot \cos \varphi_2 \cdot \sin (\varphi_3 - \varphi_2).
 \end{aligned}$$

$$(21) \frac{\sin^2 \varphi_2 \cdot \sin^2(\frac{1}{2} \gamma - \varphi_3)}{\sin^2(\varphi_3 - \varphi_2)} - 1 = 2 \cdot \sin(\frac{1}{2} \gamma - \varphi_3) \cdot \cos \varphi_2 \cdot \sin(\varphi_3 - \varphi_2) - \\ - \cos(\frac{1}{2} \gamma - \varphi_2) \cdot \cos(2 \varphi_3 - \varphi_2 - \frac{1}{2} \gamma).$$

Ein angenommenes φ_2 liefert hieraus φ_3 durch Näherung. Dann folgt φ_1 aus

$$(22) \quad \sin \varphi_1 = \frac{\sin^3(\varphi_3 - \varphi_2)}{\sin^2(\frac{1}{2} \gamma - \varphi_3)}$$

und α aus (20). Ist das gegebene α erreicht, so erhält man ϱ_1 aus (19). ϱ_2 , ϱ_3 und ϱ_4 folgen wiederum aus Gl. (14).

Im vorstehenden ist die Auffindung von Kreisbogenkurven mit konstantem Sehnenverhältnis gezeigt werden; es ist noch zu untersuchen, welche Bogenverhältnisse sich dabei ergeben und wieweit letztere miteinander übereinstimmen. Sind b_1 , b_2 und b_3 die Bogenlängen bei der Dreikreisurve, so wird

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{\varrho_1 \cdot 2 \varphi_1}{\varrho_2 \cdot 2(\varphi_2 - \varphi_1)} = \frac{\kappa^2 \cdot \varphi_1}{\varphi_2 - \varphi_1} \\ \frac{b_2}{b_3} = \frac{\varrho_2 \cdot 2(\varphi_2 - \varphi_1)}{\varrho_3 \cdot (\gamma - 2 \varphi_2)} = \frac{\kappa^2 (\varphi_2 - \varphi_1)}{\frac{1}{2} \gamma - \varphi_2}.$$

Das Verhältnis der Bogenquotienten wird demnach

$$v = \frac{b_1}{b_2} : \frac{b_2}{b_3} = \frac{\varphi_1 (\frac{1}{2} \gamma - \varphi_2)}{(\varphi_2 - \varphi_1)^2}.$$

Für Fig. 13 ergibt sich z. B. $v = 1,002$; die einzelnen Bogenverhältnisse weichen also nur sehr wenig voneinander ab, so daß der ganze Kurvenzug mit genügender Genauigkeit harmonisch unterteilt ist, wie ästhetische Rücksichten es fordern.

Will man eine mathematisch genaue Austeilung erreichen, so wird κ^2 veränderlich und die Formeln werden überaus schwer lösbar; nur bei der Dreikreisurve gelingt noch die Auflösung; es soll daher davon Abstand genommen werden.

Zum Schluß hebe ich noch hervor, daß das vorgeschlagene graphische Verfahren für φ_1 schnell einen Wert liefert, der die Gleichung $2 \varphi_n = \gamma$ erfüllt. Man kann geradezu sagen, daß die Unsicherheit in der Wahl von φ_1 bei Beurteilung des Verfahrens ausscheidet, und daß lediglich die Unsicherheit in der Wahl von κ für die Festlegung der Kurve unbequem ist.

Anmerkung: Ohne eine Annahme über die Lage der Übergangspunkte zueinander ist die vorliegende Aufgabe unlösbar. Stellt man z. B. bei der Dreikreisurve ϱ_1 als $f(\varphi_1, \varphi_2)$ dar, und sucht man den

Grenzwert von $\frac{\varrho_1}{\varrho_2}$, indem man die Abhängigkeit von φ_1 und φ_2 durch $\psi(\varphi_1, \varphi_2)$ berücksichtigt, so wird man $\varrho_1 = \varrho_2$ finden und damit bei der Zweikreisurve anlangen.

$\frac{\varrho_1}{\varrho_2}$ und $\frac{\varrho_2}{\varrho_3}$ können nicht gleichzeitig absolute Minima sein, wie aus

folgendem hervorgeht: Es werde gesetzt

$$f_1(\varphi_1, \varphi_2) = \sqrt{\frac{\varrho_1}{\varrho_2}} = \frac{\sin \frac{1}{2} \beta_1}{\sin \frac{1}{2} \alpha_1} = \frac{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{\sin \varphi_1}$$

$$f_2(\varphi_1, \varphi_2) = \sqrt{\frac{\varrho_2}{\varrho_3}} = \frac{\sin \frac{1}{2} \beta_2}{\sin \frac{1}{2} \alpha_2} = \frac{\sin(\frac{1}{2} \gamma - \varphi_2)}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \varphi_1} = -\lambda \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \varphi_1} \qquad \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_2} = -\lambda \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \varphi_2}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \varphi_1} = -\xi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \varphi_1} \qquad \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_2} = -\xi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \varphi_2}$$

$$\frac{\lambda}{\xi} = \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_2}, \quad \text{d. h.} \quad \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_2} = \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_2}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \varphi_1} = -\frac{\sin \varphi_2}{\sin^2 \varphi_1}; \qquad \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_2} = \frac{\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}{\sin \varphi_1}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \varphi_1} = \frac{\sin(\frac{1}{2} \gamma - \varphi_2) \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}{\sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)}; \qquad \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_2} = -\frac{\sin(\frac{1}{2} \gamma - \varphi_1)}{\sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

Also wird

$$\frac{\sin \varphi_2}{\sin^2 \varphi_1} \cdot \frac{\sin(\frac{1}{2} \gamma - \varphi_1)}{\sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)} = \frac{\sin(\frac{1}{2} \gamma - \varphi_2) \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}{\sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)} \cdot \frac{\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}{\sin \varphi_1}$$

$$\frac{\sin(\frac{1}{2} \gamma - \varphi_1)}{\sin(\frac{1}{2} \gamma - \varphi_2)} = \frac{\sin \varphi_1 \cdot \cos^2(\varphi_2 - \varphi_1)}{\sin \varphi_2}$$

Da $\varphi_2 > \varphi_1$, so wird die linke Seite > 1 , die rechte < 1 . $\frac{\varrho_1}{\varrho_2}$ und $\frac{\varrho_2}{\varrho_3}$ sind demnach nur relative Grenzwerte, bedingt durch die Lage der Übergangspunkte und ihrer Tangenten. Die Gleichung wird nur erfüllt für $\varphi_2 = \varphi_1$; was natürlich unbrauchbar ist.

Funktionentheoretische Methoden in der Hydrodynamik.

Von H. BLASIUS in Berlin.

Die Absicht der folgenden Rechnungen ist nicht, unmittelbar praktisch verwertbare Resultate zu erhalten, sondern ich will den Wert der funktionentheoretischen Methoden, die sich im Anschluß an die Erfindung des komplexen Potentials darbieten, an Beispielen zeigen und sie für den vorliegenden Zweck ausbauen.

Speziell das erste Problem: „Kraft auf starre Körper in zweidimensionaler Potentialströmung“ ist schwer realisierbar, weil Wasser eben nicht in Potentialbewegung strömt; dagegen zeigt es die Bedeutung des Begriffes Impulsstrom und des Residuensatzes.

Günstiger ist das zweite Problem gestellt: „Strömung beim Überfall über ein Wehr“. Auch hier ist zwar die Reibung vernachlässigt, aber das hat auf den Verlauf der Strömung hier wenig Einfluß. Daß man die Form des Wehres nicht willkürlich wählen kann, läßt sich vielleicht durch ein reicheres Material von Beispielen zu dieser Methode ausgleichen. Vorläufig habe ich auf die quantitative Ausbeutung meiner Formeln (genaue Berechnung der erhaltenen Wehrformen, Ergiebigkeitsgleichung für verschiedene Stromlinien usw.), soweit sie nicht unmittelbar zu erhalten waren, verzichtet und habe den Hauptwert auf die Darstellung der geometrischen Methoden gelegt: Die Methode¹⁾, die Funktion $w(z) = u(xy) + i \cdot v(xy)$ durch die Kurven $u = \text{const}$ und $v = \text{const}$ in der xy -Ebene („Achsenparallelen der w -Ebene über der z -Ebene“) darzustellen, hat nicht nur den Wert einer Veranschaulichung des Verlaufs der Funktion $w(z)$, sondern kann auch dazu dienen, analytische Rechnungen (Eliminationen) mit diesen Funktionen durch geometrische Operationen (Verbiegungen) zu ersetzen. Die praktische Verwendbarkeit ist dabei nicht auf die stereotypen Beispiele $z^n, \ln z \dots$ beschränkt.

I. Kraft auf starre Körper in zweidimensionaler ungleichförmiger stationärer Potentialströmung.

In paralleler Strömung erfährt ein eingetauchter Körper bekanntlich keine Kraft, wenn angenommen wird, daß er vom Wasser in Potentialströmung vollständig umflossen wird; erst die infolge Reibung

1) Vgl. die Lehrbücher der Funktionentheorie: Burckhardt, Fricke u. a

auftretende Wirbelbildung gibt zu Verschiedenheit der Druckverteilung vor und hinter dem Körper und damit zu einer Gesamtkraft Anlaß. Dagegen übt in krummer Strömung bereits die Potentialströmung Kräfte auf eingetauchte Körper aus, wie im folgenden unter Herstellung eines komplexen Ausdrucks für die Kräfte berechnet werden soll. Der abzuleitende Ausdruck gilt dabei völlig allgemein für jede beliebige Potentialströmung, in der sich ein starrer Körper abgrenzen läßt. Wir wollen trotzdem an einen speziellen Ausdruck für die krumme Strömung (Potenzentwicklung um den Ort des starren Körpers) anknüpfen, um ein Bild von den vorkommenden Singularitäten zu gewinnen.

1. Zur Anwendung des komplexen Potentials schreiben wir in üblicher Bezeichnung:

$$\begin{aligned} z &= x + iy & \chi &= \varphi + i\psi \\ w &= u - iv = \frac{d\chi}{dz}. \end{aligned}$$

Für parallele Potentialströmung ist $\chi = \alpha z$, das nächste Entwicklungsglied ergibt:

$$\chi = \alpha z + \frac{1}{2}(\beta + i\gamma)z^2.$$

Hierin ist α die Geschwindigkeit bei $z = 0$. Das Hinzutreten von β gibt beschleunigte, also konvergente Strömung. γ charakterisiert die Krümmung der Stromlinien bei $z = 0$ (bei positivem γ konvex nach oben, Krümmungsradius = α/γ). Den eingetauchten zylindrischen starren Körper berücksichtigen wir durch einen Dipol. Es ist also das komplexe Potential der krummen Strömung um einen starren Körper nunmehr vollständig:

$$\begin{aligned} \chi &= \alpha z + \frac{1}{2}(\beta + i\gamma)z^2 + \frac{\varepsilon}{z} \\ \varphi &= \alpha x + \frac{1}{2}\beta(x^2 - y^2) - \gamma xy + \varepsilon \frac{x}{r^2} \\ \psi &= \alpha y + \beta xy + \frac{1}{2}\gamma(x^2 - y^2) - \varepsilon \frac{y}{r^2} \\ w &= \alpha + (\beta + i\gamma)z - \frac{\varepsilon}{z^2} \\ u &= \alpha + \beta x - \gamma y - \varepsilon \frac{x^2 - y^2}{r^4} \\ v &= -\beta y - \gamma x - \varepsilon \frac{2xy}{r^4}. \end{aligned}$$

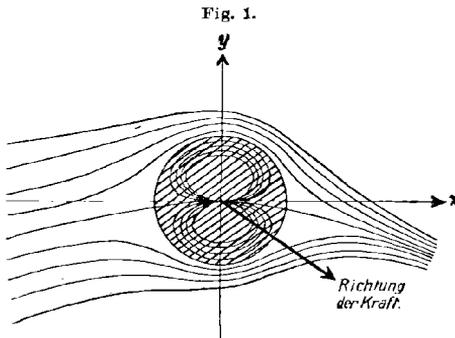
Bei nicht zu großem ε ist der eingetauchte Körper klein, so daß man zur Berechnung der bez. Stromlinie die in höhere Potenzen mul-

tiplizierten β und γ ignorieren kann; er wird in dieser Annäherung ein Kreiszyylinder vom Radius $\sqrt{\varepsilon/\alpha}$. (Fig. 1.)

2. Die X -Komponente der Kraft, die die Längeneinheit des Zylinders erfährt, ist:

$$X = \int p \cdot n_x \cdot ds.$$

n_x ist der Kosinus der für das Strömungsfeld äußeren Normale gegen x ; das Integral ist um den Umfang des Zylinders zu erstrecken, der kein Kreiszyylinder zu sein braucht.



Diese Kraft, die man ja zunächst durch Ausrechnung der speziellen Oberflächendrucke und Integration bestimmen würde, steht in *allgemeiner* Beziehung zur Strömung durch den Impulssatz:

Wenn man zur Elimination der dem Gesetz von actio und reactio folgenden inneren Kräfte die hydrodynamische Grundgleichung über den ganzen Raum integriert:

$$\iint (\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x}) dx dy = 0$$

(Φ ist äußeres Potential), so läßt sich dies unter Heranziehung der Kontinuitätsgleichung ausintegrieren zu:

$$\int \{ \rho u (u n_x + v n_y) + (p + \rho \Phi) n_x \} ds = 0$$

mit der Bedeutung, daß bei stationärer Strömung der gesamte konvektiv und dynamisch durch eine Zylinderfläche strömende X -Impuls Null ist.¹⁾ Für den Y -Impuls folgt eine ähnliche Gleichung:

$$\int \{ \rho v (u n_x + v n_y) + (p + \rho \Phi) n_y \} ds = 0.$$

1) Man beachte hierbei, daß Drucke, elastische Spannungen, überhaupt Kräfte als Intensitäten von Impulsströmen angesehen werden können. Das Prinzip von actio und reactio und die Newtonschen und Eulerschen Grundgleichungen sagen dann aus, daß der Impulsstrom entweder divergenzfrei weiterfließt (Gleichgewicht) oder daß seine Divergenz sich in Abnahme des Impulsgehaltes äußert. Hierdurch erfahren die bekannten Ausdrucksweisen, daß Kräfte in Widerlagern, Fundamenten usw. „aufgenommen“ werden, daß Kräfte nach gewissen Gesetzen „übertragen“ werden (vgl. Berechnung der Kräfte und Momente auf Querschnitte in der Festigkeitslehre), eine sehr anschauliche Deutung; ähnlich wie wir sie bei der Energieübertragung durch den Begriff des Energiestromes haben.

Umschließt die Integrationsfläche einen fremden Körper, den starren Zylinder im vorliegenden Problem, so können wir nur behaupten, daß für zwei solche Flächen das Integral gleichen Wert hat. Als eine derselben (a) nehmen wir die Oberfläche des eingetauchten Körpers, an der die Normalkomponente der Geschwindigkeit und damit der konvektive Impulsstrom verschwindet. Wir finden dann unsere Gesamtkraft X als Teil des dynamischen Impulsstromes durch den Zylinderumfang wieder und haben im Vergleich mit einer anderen (b) beliebigen umschließenden Zylinderfläche:

$$X + \int_{(a)} \rho \Phi n_x ds = \int_{(b)} \{ \rho u^2 n_x + \rho u v n_y + (p + \rho \Phi) n_x \} ds.$$

Das Integral der linken Seite gibt, nach rechts hinübergeschafft, den Auftrieb, der sich also, rein statisch durch Integral über die Oberfläche des starren Körpers berechnet, zu den dynamischen Wirkungen addiert. Das Integral der rechten Seite liefert den, an beliebiger umschließender Fläche berechneten, zuströmenden Impuls.

3. Zu seiner Umformung benutzen wir die Bernoullische Gleichung, nach der in stationärer Potentialströmung:

$$\frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) + p + \rho \Phi = C$$

konstant im ganzen Raume ist. Wir erhalten so, weil für geschlossene Flächen $\int C n_x ds = 0$ ist:

$$X + \int \rho \Phi n_x ds = \int \{ \frac{1}{2} \rho (u^2 - v^2) n_x + \rho u v n_y \} ds$$

$$Y + \int \rho \Phi n_y ds = \int \{ \frac{1}{2} \rho (v^2 - u^2) n_y + \rho u v n_x \} ds.$$

Wir unterdrücken jetzt den Auftrieb, der nichts Neues bietet, und wenden uns dem Problem zu, die Integrale rechts durch das komplexe Potential χ , bzw. durch: $w = u - iv = d\chi/dz$ auszudrücken. Hierauf weist erstens ihre analytische Form hin, die den reellen und imaginären Teil von w^2 enthält; und zweitens müssen sie ja ihrer physikalischen Bedeutung nach vom Wege unabhängig sein, also sich durch komplexe Integrale darstellen lassen. Unter Beachtung der Normalenrichtung ist:

$$dz = -i(n_x + i n_y) ds,$$

und man verifiziert leicht, daß:

$$X - iY = \frac{i\rho}{2} \cdot \int w^2 dz$$

ist, das Integral in positivem Sinne um den Umfang des Zylinders erstreckt. Dies ist unsere Grundformel, die auch diese in den Geschwindigkeiten quadratischen Größen an die komplexe Rechnung anschließt.

4. Wir wenden sie auf unser Problem in (1) an:

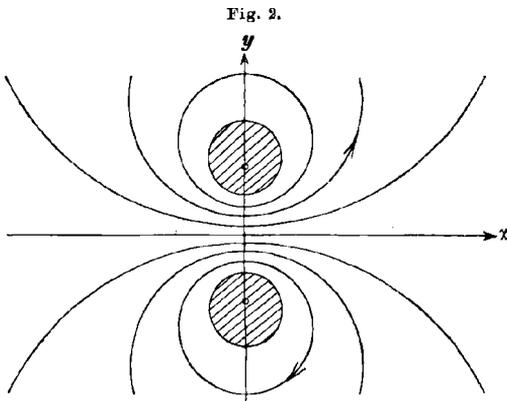
$$X - iY = \frac{i\rho}{2} \cdot \int \left\{ \alpha + (\beta + i\gamma)z - \frac{\varepsilon}{z^2} \right\}^2 dz.$$

Dies ist nach dem Residuensatz:

$$= 2\pi\rho\varepsilon(\beta + i\gamma).$$

In konvergenter Strömung ($\beta > 0$) liegt die Kraft $X = 2\pi\rho\varepsilon\beta$ in Richtung der Strömung, bei Divergenz ($\beta < 0$) ist sie sogar der Geschwindigkeit $\alpha > 0$ entgegengerichtet. In gekrümmter Strömung ($\gamma \neq 0$) ist $Y = -2\pi\rho\varepsilon\gamma$ nach dem Krümmungsmittelpunkt, oder, was bei

Potentialströmung dasselbe ist, nach Stellen höherer Geschwindigkeit hin gerichtet.



5. Die Anwendung unserer komplexen Formel ist auch im allgemeinen Fall äußerst einfach: In jeder Strömung, zu der wir $w(z)$ kennen und in der man ein von Stromlinien begrenztes geschlossenes Gebiet als eingetauchten starren Körper betrachten kann, ist $X - iY$

gleich $-\pi \cdot \rho$ multipliziert mit der Summe der Residuen der Funktion w^2 im Innern dieses Gebietes. Betrachten wir z. B. eine Zirkulation um zwei parallele Säulen (Fig. 2), so ist das komplexe Potential:

$$\chi = \frac{c}{i} \cdot \ln(z - ia) - \frac{c}{i} \cdot \ln(z + ia).$$

also:

$$w = \frac{c}{i(z - ia)} - \frac{c}{i(z + ia)}.$$

Das Residuum von w^2 im Punkte $z = +ia$ ist c^2/ia ; also: $X = 0$, $Y = -\pi\rho \cdot c^2/a$. Mit dieser Kraft ziehen sich die Säulen gegenseitig an.

Ist $w(z)$ ein mehrwertiger Ausdruck, — es braucht ja nur außerhalb der starren Körper unverzweigt zu sein, — so treten noch die Perioden des $\int w^2 dz$ auf.

6. Die Resultate von (4) sind nicht überraschend, denn die Kräfte liegen stets in der Richtung, in der auch schon in der ungestörten Strömung ein Druckgefälle herrscht, welches bei $\beta > 0$ zur Beschleunigung der Strömung in Richtung der Geschwindigkeit, bei $\gamma \neq 0$ im Gleichgewicht mit der Zentrifugalkraft (Querbeschleunigung)

senkrecht zur Strömung liegt. Diesem Druckgefälle könnte man sich auch den eingetauchten Körper unterworfen denken: Wir bezeichnen die ungestörte Strömung mit

$$w_0 = u_0 - iv_0 = \alpha + (\beta + i\gamma)z$$

und wollen die Kraft ausrechnen, die das nunmehr bei $z = 0$ herrschende Druckgefälle in einem Gebiet vom Inhalt $F = \pi R^2 = \pi \varepsilon / \alpha$ des vorhin dort liegenden Kreises ausübt.

$$\begin{aligned} X_0 - iY_0 &= F \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + i\frac{\partial p}{\partial y} \right)_{z=0} \\ &= F \rho \left(u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} - iu_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} - iv_0 \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Wegen

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} = 0$$

ist dies:

$$\begin{aligned} &= F \rho \left(u_0 \frac{\partial u_0 - iv_0}{\partial x} + iv_0 \frac{\partial u_0 - iv_0}{\partial x} \right) \\ &= F \rho (u_0 + iv_0) \frac{d(u_0 - iv_0)}{dz} \\ &= F \rho \bar{w}_0 \frac{dw_0}{dz} \quad \text{für } z = 0. \end{aligned}$$

In unserem Falle liefert dies:

$$X_0 - iY_0 = \pi \rho \varepsilon (\beta + i\gamma),$$

also gerade die Hälfte der auf den wirklich eingetauchten Körper wirkenden Kraft. Das in der ungestörten Strömung w_0 herrschende Druckgefälle reicht also allein zur Erklärung dieser Kraft nicht aus, es ist noch überdies zu berücksichtigen, daß bei der konvergenten Strömung in den Staupunkten, bei der krummen Strömung an den Seiten des Zylinders, an denen sich die Stromlinien zusammendrängen, wegen der Geschwindigkeitsdifferenzen entsprechend höhere Druckdifferenzen entstehen. Man darf sich nicht durch Anschaulichkeit verleiten lassen, das in der ungestörten Strömung herrschende Druckgefälle, das dort in Beschleunigung übergeht, zur quantitativen Ausrechnung der Kraft auf einen dort einzutauchenden Körper zu benutzen.

7. Die in (2) und (3) für den Impuls gemachten Entwicklungen kann man auf den Drehimpuls übertragen. Die hier folgende Rechnung geht, wie man vergleichen möge, der obigen analog:

Das Moment um den Koordinatenmittelpunkt, das der eingetauchte Körper erfährt, ist:

$$N = \int (x \cdot p n_y - y \cdot p n_x) ds.$$

Den Drehimpulssatz, in dem es mit den anderen Drehimpulsströmen zusammensteht, erhalten wir aus den Eulerschen Grundgleichungen, indem wir sie mit $-y$ bzw. $+x$ multiplizieren und integrieren (vgl. Ableitung des Flächensatzes in der Mechanik):

$$\iint \left\{ x \left(\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) - y \left(\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \right\} dx dy = 0.$$

Dies wird zum Oberflächenintegral:

$$\int \{ \rho (xv - yu) (un_x + vn_y) + (p + \rho \Phi) (xn_y - yn_x) \} ds,$$

welches für zwei den Zylinder umschließende Flächen gleichen Wert haben muß. An der Oberfläche des Zylinders selbst bleibt außer dem zu berechnenden N das Moment des statisch berechneten Auftriebs stehen, das wir aber nicht mitschreiben wollen. Für die beliebige umschließende Zylinderfläche wird das Integral durch Einführung von

$$p + \rho \Phi = C - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2)$$

umgeformt. Man erhält nach Zusammenfassung verwandter Glieder:

$$N = \rho \cdot \int \left[\frac{1}{2} (u^2 - v^2) y - uvx \right] dy - \left[\frac{1}{2} (u^2 - v^2) x + uv y \right] dx$$

und dieser Ausdruck für den gesamten „Drehimpulsstrom“ ist der reelle Teil von:

$$-\frac{\rho}{2} \int w^2 z dz.$$

II. Der Überfall über ein Wehr.

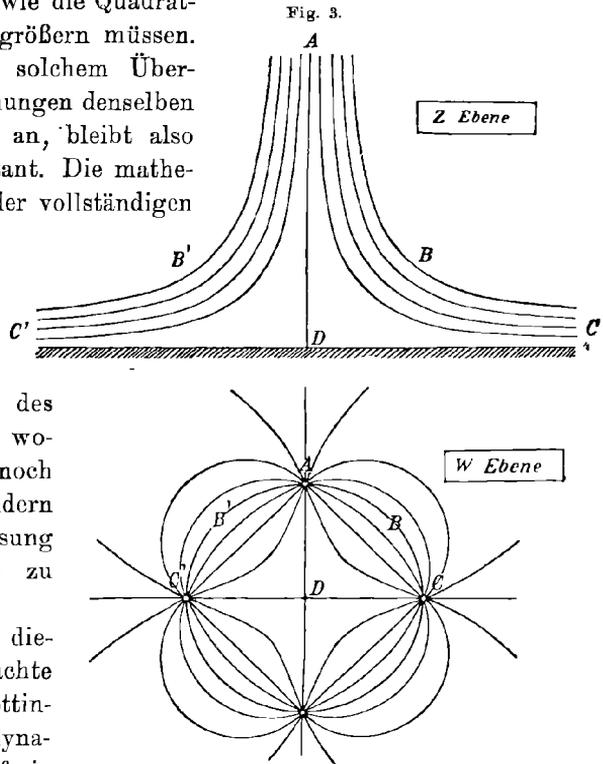
Das Problem der Strömung mit freier Grenze ist von Helmholtz auf eine funktionentheoretische Abbildungsaufgabe zurückgeführt worden: z. B. bei dem auf eine Platte treffenden Strahl bilden sich die Stromlinien $\psi = \text{const}$ auf der $w = u - iv$ -Ebene so ab, daß die freie Grenze ABC auf den Umfang eines Kreises fällt. Die Figuren 3 veranschaulichen den Verlauf der Kurven $\psi = \text{const}$ über der z - und der w -Ebene. Aus letzterer liest man unmittelbar ab:

$$\chi = \ln \frac{(w - i)(w + i)}{(w - 1)(w + 1)} = \ln \frac{w^2 + 1}{w^2 - 1}$$

und erhält dann z als $\int d\chi/w$.

Die Methode versagt jedoch, sobald die Schwere in Betracht kommt, weil sich dann die Randstromlinie nicht mehr in vorherzubestimmender Weise auf eine Kurve der w -Ebene festlegen läßt.

1. Von dem hierher gehörigen Problem des Überfalls über ein Wehr (Fig. 4b) weiß man aus mechanischer Ähnlichkeit nur, daß die Ergiebigkeit pro Einheit von Breite und Zeit der $\frac{3}{2}$ ten Potenz der Überfallhöhe proportional ist. Es ist dies ein Fall der gewöhnlichen Newtonschen Ähnlichkeit, nach der die Beschleunigungen im Einklang mit der Schwerebeschleunigung ungeändert bleiben und deshalb die Geschwindigkeiten sich wie die Quadratwurzeln der Längen vergrößern müssen. Der Druck nimmt bei solchem Übergang zu ähnlichen Strömungen denselben Faktor wie die Längen an, bleibt also auf freien Grenzen konstant. Die mathematische Schwierigkeit der vollständigen Lösung des Überfallproblems liegt darin, daß Grenzbedingungen an zwei verschiedenen Stellen, der freien Oberfläche und der Fläche des Wehres zu erfüllen sind, wobei die erste Grenze noch nicht einmal festliegt, sondern erst simultan mit der Lösung des Strömungsproblems zu bestimmen ist.



2. Zur Vermeidung dieser Schwierigkeiten machte Herr Prof. Runge im Göttinger Seminar über Hydrodynamik den Vorschlag, die freie Grenze im geeigneten Verlauf willkürlich zu zeichnen. Die Geschwindigkeit auf ihr ist dann als Funktion der Höhe bekannt und das Potential auf ihr hiernach auszuintegrieren. Aus solchen Randwerten kann man, etwa durch zeichnerische Fortsetzung, das Stromlinienbild eindeutig herstellen. Als Wehrrücken wählt man dann eine im Innern liegende Stromlinie, die sich wohl stets ungefähr der Natur entsprechend vorfinden wird, wenn die freie Grenze der Anschauung nach vernünftig gewählt ist. Die nötigen Formeln sind folgende:

Auf der Randkurve: $y = f(x)$

ist: $\frac{1}{2}(u^2 + v^2) - gy = 0$

oder:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \sqrt{2} g y.$$

Die X-Achse, $y = 0$, ist hier stets in solche Höhe gelegt, daß y die Druckhöhe der Geschwindigkeit $\partial \varphi / \partial s$ ist. Es ist dann:

$$\frac{1}{\sqrt{2g}} \varphi = \int^x \sqrt{f(1 + f'^2)} dx = \int^y \sqrt{y \cdot \left[1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 \right]} dy.$$

Man erkennt bereits aus Fig. 4, wie man durch Wahl der Randkurve die verschiedensten Fälle berücksichtigen kann: Die schnelle Änderung von

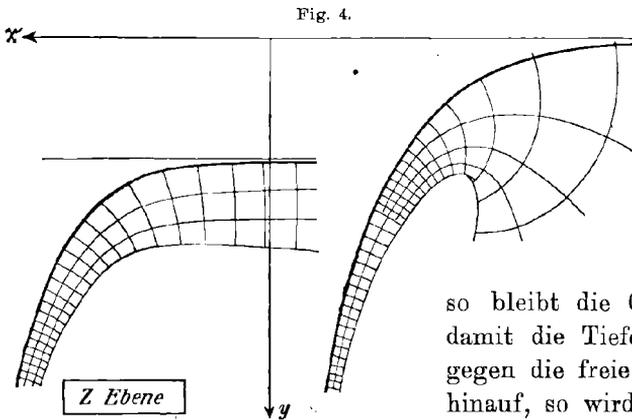


Fig. 4.

φ mit wachsendem y veranlaßt durch Verkleinerung der Quadrate Verengung des Strahles. Liegt die Asymptote des Oberwassers in endlichem Abstände unter $y=0$,

so bleibt die Geschwindigkeit und damit die Tiefe endlich. Geht dagegen die freie Grenze bis zu $y=0$ hinauf, so wird dort die Geschwindigkeit Null, und wir erhalten den

Abfluß aus stehendem sehr tiefen Gewässer. — Wir beschränken uns auch hier stets auf zweidimensionale Strömungen.

3. Den in (2) ausgesprochenen Gedanken zur Lösung des Überfallproblems verbinde ich mit folgender funktionentheoretischer Methode¹⁾: Schreibt man die obigen Gleichungen:

$$y = f(x), \quad \varphi = \int^y \sqrt{y \left[1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 \right]} dy$$

in der Form:

$$x = p(\varphi), \quad y = q(\varphi),$$

die als Gleichungen in Parameterform für die Randstromlinie $\psi = 0$ gelten können, so ist die zugehörige vollständige Abbildung (Lösung von $\Delta \varphi = 0$ mit dieser Randbedingung) gegeben durch:

$$x + iy = p(\varphi + i\psi) + i \cdot q(\varphi + i\psi),$$

1) Burckhardt: Funktionentheorie Seite 218.

denn wenn p und q reelle Funktionen sind, so kann man für $\psi = 0$ die Trennung in reell und imaginär ausführen und kommt zu den Ausgangsgleichungen zurück. Nach Einführung der beim Gebrauch des komplexen Potentials üblichen Bezeichnungen (s. I 1) ist also die gesuchte Abbildung:

$$z = p(\chi) + i \cdot q(\chi).$$

4. Bei Beispielen zu diesem Verfahren, bei denen man instinktiv zunächst mit rationalen Funktionen $y = f(x)$ zu probieren beginnt, kommt man leicht in die Verlegenheit, daß wegen $1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2$ im Integral für φ unter der $\sqrt{\quad}$ Ausdrücke höheren Grades in y stehen. Die Integration wird erleichtert, wenn man umgekehrt sich Kurven aussucht, bei denen $\frac{ds}{dy}$ etwa einer Potenz von y proportional ist. Wählen wir z. B. $ds^2 = a \cdot y \cdot dy^2$, so entspricht dies der Kurve $x = \frac{2}{3a} \sqrt{ay - 1}^3$, also einer semikubischen Parabel. Das Geschwindigkeitspotential an der Grenze ist nach (2):

$$\frac{1}{\sqrt{2g}} \varphi = \int \sqrt{y \cdot ay} dy = \frac{\sqrt{a}}{2} y^2.$$

Die oben verlangte „Normalform“ der Gleichung der Randstromlinie ist:

$$y = b \cdot \sqrt{\varphi}, \quad x = \frac{2}{3a} \sqrt{ab\sqrt{\varphi} - 1}^3,$$

wenn $b^2 = \sqrt{\frac{2}{ag}}$ gesetzt wird.

Die gesuchte Abbildung ist nach dem dargestellten Verfahren (3):

$$z = \frac{2}{3a} \sqrt{ab\sqrt{\chi} - 1}^3 + ib\sqrt{\chi}.$$

Die hiernach zu diskutierende Strömung folgt dem einen Zweig der semikubischen Parabel von ihrer Spitze an, wo $y = \frac{1}{a}$, $x = 0$, $\sqrt{\chi} = \frac{1}{ab}$ ist. Für kleinere Werte von φ hört $\psi = 0$ auf, freie Grenze zu sein: mit Überschreitung des Verzweigungspunktes tritt eine andere Trennung in reell und imaginär ein. Eine Strecke weit oberhalb der Spitze ist die Grenze ein senkrechtes Brett. (Fig. 5 auf der nächsten Seite: Strömung unter einem Schütz hervor.)

5. Der praktische Wert dieses Verfahrens wäre aber sehr gering, wenn man die Gleichungen stets erst auf die Normalform $x = p(\varphi)$, $y = q(\varphi)$ bringen müßte, was oft mit den vorliegenden Funktionen gar

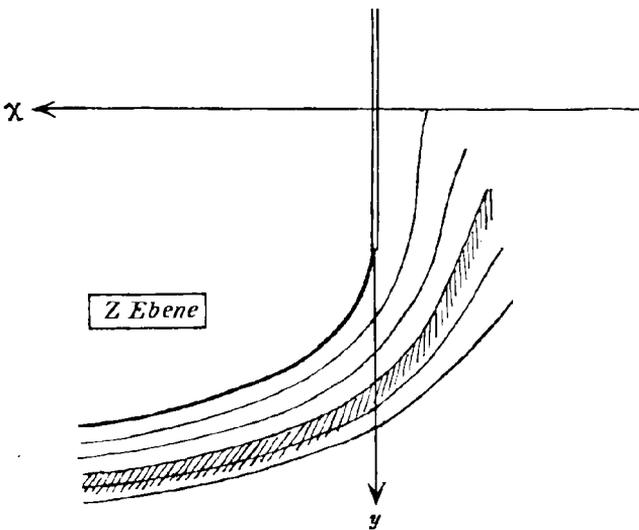
nicht ausführbar ist. (Auflösung transzendenter Gleichungen.) Es muß uns gelingen, das Verfahren für implizites Rechnen zu erweitern:

a) Sind unsere Gleichungen in der Form:

$$y = Y(x), \quad \varphi = F(x)$$

gegeben, so müßte man zur Herstellung der Normalform die zweite nach x auflösen und dies in die erste einsetzen, ehe man zum Komplexen übergehen kann. $z(\chi)$ ist also ein Ausdruck, der aus Y und F durch ein Eliminationsverfahren entsteht. Diese Elimination läßt sich nicht vermeiden, aber wir können versuchen, sie bis nach dem Über-

Fig. 5.



gang zum Komplexen aufzuschieben, wo sie weniger Schwierigkeiten macht, weil wir dort geometrische Methoden benutzen können. Um also sofort zum Komplexen überzugehen, schreiben wir:

$$\varphi + i\psi = F(a + ib),$$

$a + ib = c$ ist hierdurch als Hilfsvariable eingeführt: Das Auftreten einer solchen ist gerechtfertigt, weil zwischen den beiden Ausdrücken F und Y eine

Elimination stattfinden muß, um zu einer Beziehung zwischen χ und z zu gelangen. $\psi = 0$ erfordert nun: $b = 0$, $x = a$, dies mit $y = Y(x)$ zusammen ergibt nach der Methode von (3):

$$x + iy = a + ib + i \cdot Y(a + ib).$$

Die gesuchte Abbildung erscheint also in der Form:

$$\chi = F(c)$$

$$z = c + i \cdot Y(c).$$

c steht hier zur Elimination bereit. Dies tun wir aber nicht, sondern c wird bei unseren Abbildungen die Rolle einer Zwischenvariablen oder „Hilfsebene“ spielen.

b) Ebenso: wenn für die Randstromlinie $\psi = 0$ die Gleichungen bestehen:

$$x = X(y), \quad \varphi = G(y),$$

so ist die Abbildung:

$$\chi = G(c), \quad z = X(c) + ic.$$

c) Wenn schließlich:

$$\varphi = H(xy), \quad f(xy) = 0,$$

so folgt aus der zur Einführung der nötigen Hilfsgrößen angesetzten Gleichung:

$$\varphi + i\psi = H(a_1 + ib_1, a_2 + ib_2),$$

für die Stromlinie $\psi = 0$:

$$x = a_1, \quad b_1 = 0, \quad y = a_2, \quad b_2 = 0,$$

also:

$$x + iy = a_1 + ib_1 + i(a_2 + ib_2),$$

und:

$$f(a_1 + ib_1, a_2 + ib_2) = 0.$$

Wir haben also unter Einführung zweier Hilfsvariablen das Resultat:

$$\chi = H(c_1, c_2), \quad f(c_1, c_2) = 0, \quad z = c_1 + ic_2.$$

6. Eine Abbildung, die uns einen Überfall über einen Wehrrücken (Fig. 4b) liefert, erhält man aus der Annahme

$$x = 2a \cdot \frac{1}{\sqrt{y}}$$

für die Randstromlinie. Die Wahl gerade dieser Potenz von y geschah erstens deshalb, weil es die einzige negative Potenz ist, bei der sich das Integral für φ in bekannten Funktionen auswerten läßt¹⁾, und zweitens gibt es auch zufällig²⁾ für großes x gerade die Spiegelsenkung, die der Geschwindigkeitsvermehrung bei radialem Heranströmen entspricht ($u \sim \frac{1}{x}$, $y \sim u^2 \sim \frac{1}{x^2}$). Für diesen Fall ist das Integral für φ :

$$\frac{1}{\sqrt{2g}} \varphi = \int \sqrt{y \left(1 + \frac{a^2}{y^3} \right)} dy,$$

1) Man setze $x = y^n$ und frage, wann das Integral $\int \sqrt{y(1 + n^2 y^{2n-2})} dy$ durch eine Substitution $y = \eta^l$ so umgeformt werden kann, daß unter der $\sqrt{\quad}$ ein Ausdruck ersten und zweiten Grades in η steht. Dies gibt verschiedene Gruppen zusammengehöriger Werte von n und l . $n = -\frac{1}{2}$ ist das einzige in ihnen vorkommende negative n .

2) Das Zufällige an diesem Zusammentreffen zwischen einfacher Integrierbarkeit und radialem Zustrom läßt sich vielleicht dadurch erklären, daß die Darstellung eines anderen als radialen oder parallelen Zustroms auch kompliziertere Funktionen erfordert.

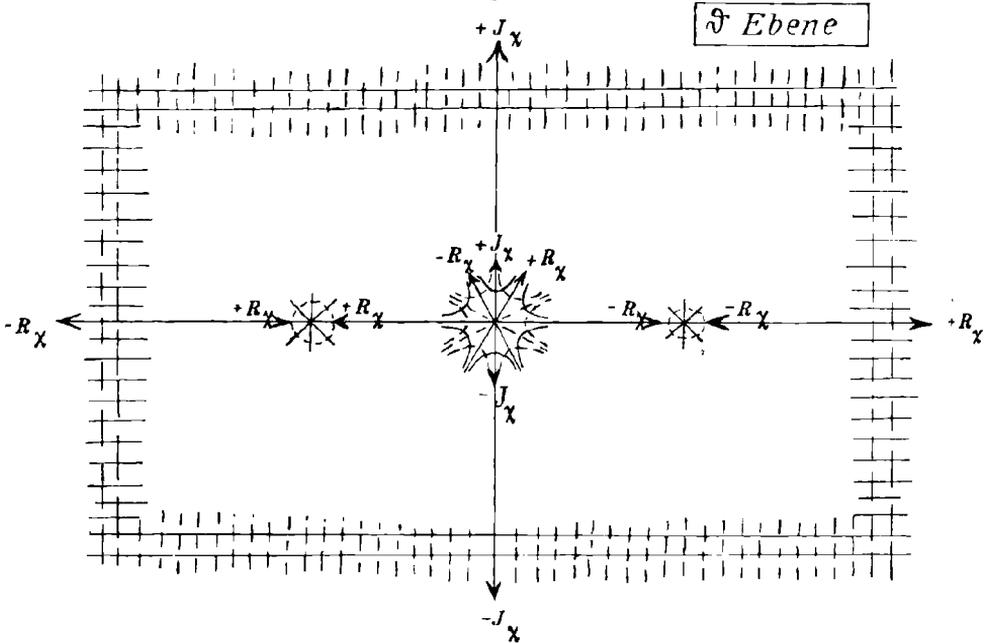
was durch Substitution: $\eta = y^3/a^2$ übergeht in:

$$\frac{3}{a\sqrt{2g}} \varphi = \int \sqrt{\eta + 1} \frac{d\eta}{\eta} = \ln \frac{a - \sqrt{a^2 + y^3}}{a + \sqrt{a^2 + y^3}} + \frac{2}{a} \sqrt{a^2 + y^3}.$$

Die Konstanten a und g stellen wir vorerst in den Reduktionsformeln¹⁾

$$\frac{3}{a\sqrt{2g}} \chi = X, \quad a^{-2/3} \cdot z = Z$$

Fig. 6.



beiseite, und erhalten dann durch Anwendung unseres Verfahrens (5b):

$$X = \ln \left(\frac{1 - \sqrt{1 + c^3}}{1 + \sqrt{1 + c^3}} \right) + 2 \cdot \sqrt{1 + c^3},$$

$$Z = \frac{2}{\sqrt{c}} + ic.$$

Das Verfahren von Nr. 3 hätte in diesem Falle versagt. Auch jetzt wäre eine Elimination von c , durch die X als Funktion von Z erschiene, nicht vorteilhaft; im Gegenteil, es ist besser, durch Einführung *noch einer* Zwischenvariablen $\vartheta = \sqrt{1 + c^3}$ die Behandlung der Singularitäten dieser $\sqrt{\quad}$ und des \ln zu trennen, und schließlich können wir noch durch $\sqrt{c} = \xi$ die überflüssige Singularität der \sqrt{c} entfernen.

1) Es ist $X = \Phi + i\Psi$, $Z = X + iY$. Eine Verwechslung von griech. X mit lat. X , wovon letzteres übrigens nirgends ausgesprochen wird, ist zu vermeiden.

Wir haben dann nacheinander folgende Abbildungen herzustellen und später zu vereinigen:

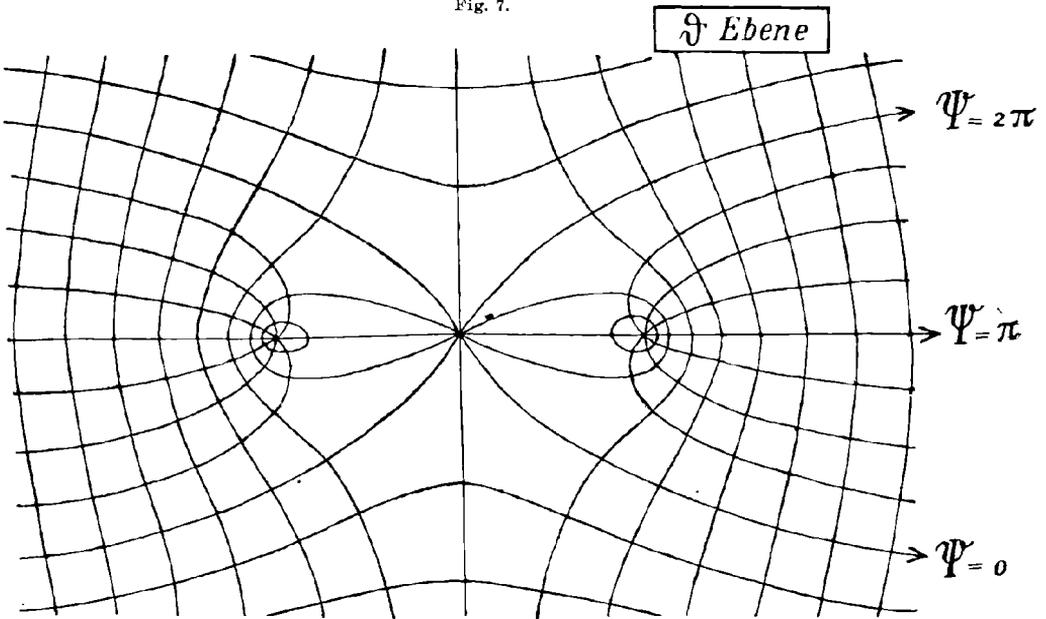
$$X = \ln \left(\frac{1 - \vartheta}{1 + \vartheta} \right) + 2\vartheta,$$

$$\vartheta = \sqrt{1 + \xi^2},$$

$$Z = \frac{2}{\xi} + i\xi^2.$$

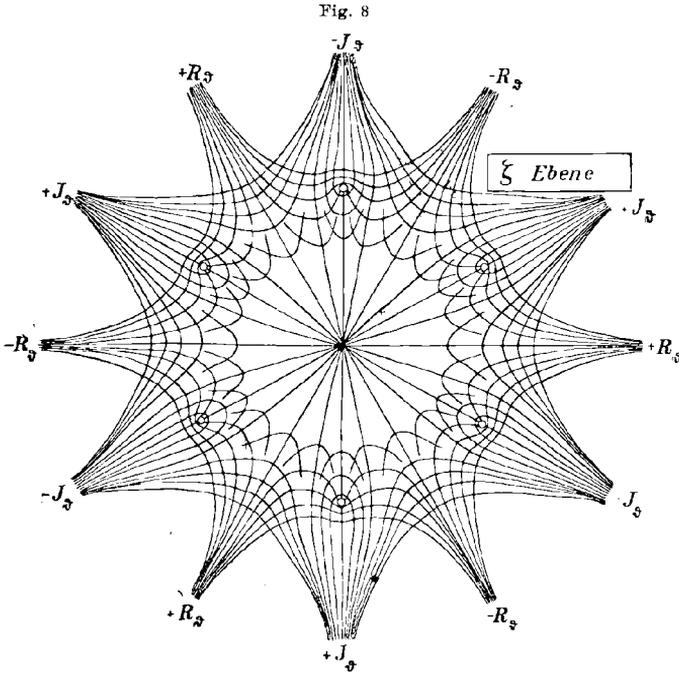
7. Die Abbildung X über der ϑ -Ebene verhält sich im Unendlichen wie $2\vartheta + (2k + 1)\pi i$; für $\vartheta = 0$ wie $-\frac{2}{3}\vartheta^3$; für $\vartheta = \pm 1$ logarithmisch, sonst regulär. Diese Angaben, deren geometrische Bedeutung

Fig. 7.

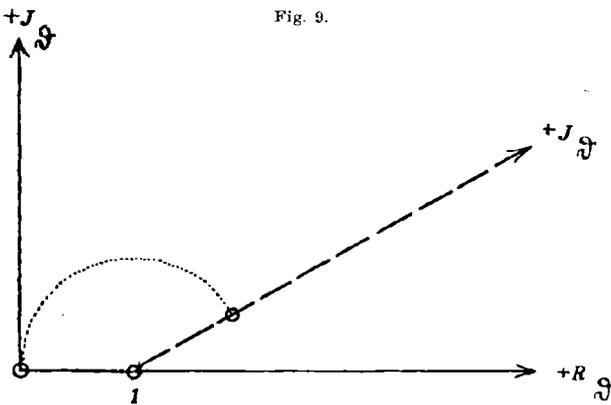


für den Verlauf der X -Kurven über der ϑ -Ebene in Fig. 6 gezeichnet ist, genügen, um das vollständige Kurvensystem (Fig. 7) zu entwerfen. Die in Fig. 6 angefangenen Kurven muß man nämlich jetzt, unter Rücksicht auf den angeschriebenen Richtungssinn der Achsenbilder, auf direktestem Wege zu zwei Kurvenscharen aneinanderschließen, was mit einiger Übung an elementaren Beispielen gelingt. Es sei gleich hier bemerkt, daß diese und alle folgenden Figuren nur Skizzen sein sollen und deshalb absichtlich aus freier Hand gezeichnet sind, wobei sich die geforderte Konformität nicht immer erreichen ließ. Es ist gerade der Vorteil dieses geometrischen Verfahrens, daß man ein Bild vom Verlauf der Kurven fast ohne jede quantitative Rechnung, nur aus den hier gemachten Angaben, erhält.

8. $\vartheta = \sqrt{1 + \zeta^6}$ über der ζ -Ebene verhält sich im Unendlichen wie ζ^3 ; für $\zeta = 0$ wie $\pm(1 + \frac{1}{2}\zeta^6)$; es hat 6 Verzweigungspunkte bei



$\zeta = e^{\frac{2k+1}{6}i\pi}$, in denen $\vartheta = 0$ wird; es ist symmetrisch gegen Drehungen um $2\pi/6$ und reell oder rein imaginär auf den Richtungen $2k\pi/12$.

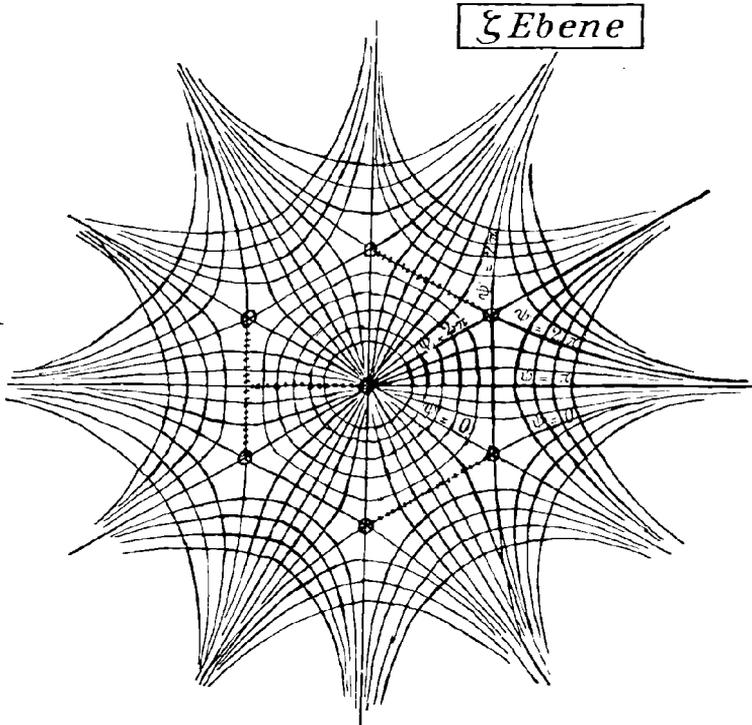


Aus diesen Angaben ist uns die Abbildung der Achsen der ϑ -Ebene über ζ bereits vollständig bekannt, wie in Fig. 8 in leicht verständlicher Bezeichnung eingeschrieben. Die Einzeichnung der Achsenparallelen geschieht unter Rücksicht auf das typische

Verhalten komplexer Funktionen in der Nähe ihrer Verzweigungs- und Sattelpunkte, wie in Fig. 8 ausgeführt ist. Von jedem Verzweigungspunkt müßte ein Schnitt ausgehen, der aber für das Kurvenbild nichts ausmacht,

weil in den beiden Blättern der Riemannschen Fläche nur die Vorzeichen der ϑ -Werte verschieden sind. Der Mechanismus, durch den die ϑ -Ebene in dieses Bild auf der ξ -Ebene übergeht, ist in Fig. 9 angedeutet: Vom ersten Quadranten der ϑ -Ebene wird die reelle Achse bei $\vartheta = 1$ im Winkel von 30° geknickt, der Winkel zwischen der reellen und imaginären Achse gestreckt; die so deformierte Ebene wird dann so auf die ξ -Ebene gelegt, daß $\vartheta = 1$ auf $\xi = 0$ und $\vartheta = 0$ auf den ersten Verzweigungspunkt fällt. Ebenso werden die anderen Winkelräume ausgefüllt.

Fig. 10.



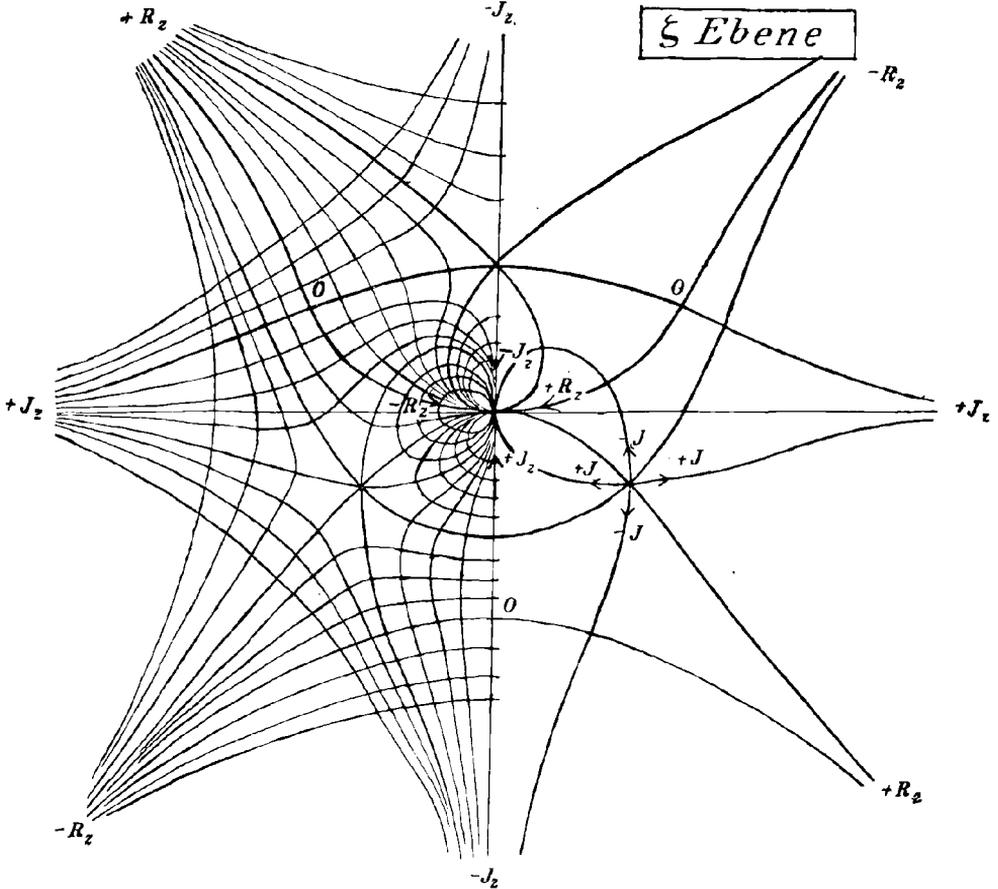
9. Durch diesen Mechanismus übertragen wir das Bild der X -Kurven aus der ϑ -Ebene (Fig. 7) in die ξ -Ebene (*Elimination* von ϑ) (Fig. 10). Die Winkel aufeinanderfolgender Achsenrichtungen, die bei $\vartheta = 0$ 30° betragen, werden auf 60° verdoppelt. Bei $\xi = 0$ liegen jetzt zwei logarithmische Verzweigungspunkte, deren Blätter an den anderen 6 Verzweigungsstellen paarweise ineinander übergehen, so daß nun dort je unendlich viele einfache Verzweigungspunkte liegen. Bleibt uns nur noch übrig, dieses Bild auf die Z -Ebene zu übertragen.

10. ξ ist mit Z verbunden durch:

$$Z = \frac{2}{\xi} + i\xi^2,$$

und es ist leichter, erst die eindeutige Funktion $Z(\xi)$ zu untersuchen, und erst hieraus die mehrwertige Umkehrung $\xi(Z)$ durch Deformation

Fig. 11.



herzustellen. Man gewinnt hierdurch gleichzeitig den Deformationsmechanismus, der die Funktion X von der ξ -Ebene (Fig. 10) auf die Z -Ebene überträgt, wobei dann unsere gesuchte Strömung erscheinen muß.

Z verhält sich im Unendlichen der ξ -Ebene wie $i\xi^2$, im Nullpunkt wie $2/\xi$, hat keine Verzweigungspunkte und 3 einfache Sattelpunkte bei $\xi = \sqrt[3]{-i} = e^{\frac{4k+3}{6}i\pi}$. Diesen 3 Stellen entsprechen folgende Werte von Z :

$$\xi = i, \quad Z = -3i, \quad \xi = \pm \frac{1}{2}\sqrt[3]{3} - \frac{i}{2}, \quad Z = \pm \frac{3}{2}\sqrt[3]{3} + \frac{3}{2}i.$$

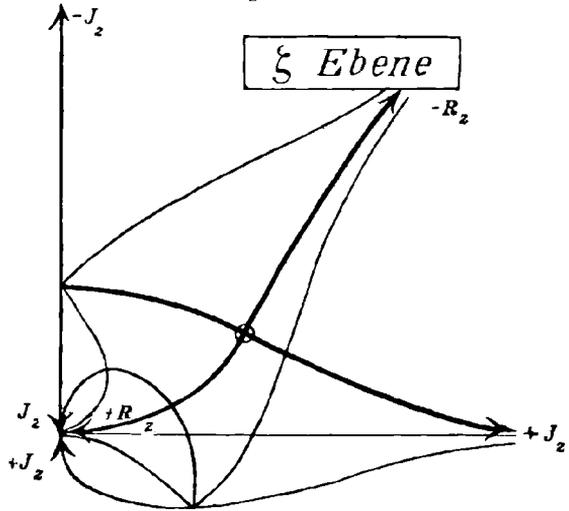
Im Sattelpunkt $\xi = e^{-i\pi/6}$ verhält sich Z so:

$$Z - 3e^{i\pi/6} = 3i(\xi - e^{-i\pi/6})^2,$$

wie man durch Entwicklung oder durch den zweiten Differentialquotienten ausrechnet. Die Richtung $+J_z$ des Sattelpunktes verläuft also

horizontal. $Z = 0$ fällt in die Punkte $\xi = \sqrt[3]{2}i = \sqrt[3]{2} e^{\frac{4k+1}{6}i\pi}$. Ebenso wie in Fig. 6 kennen wir aus diesen Angaben die Achsenrichtungen in den singulären Punkten und die Lage der Nullpunkte, die man sich in der ξ -Ebene aufzeichnen muß. Indem man nun die nächstliegenden Richtungen unter Beachtung des (sich in Sattelpunkten bei geradem Durchgang umkehrenden) Richtungssinnes verbindet, erhält man zunächst ein Gerippe, das außer den Achsen der Z -Ebene die Bilder der durch die singulären Punkte gehenden Achsenparallelen der Z -Ebene enthält (rechte Hälfte von Figur 11), in ein solches vollständiges Gerippe kann man nun in eindeutiger Weise die übrigen Achsenparallelen einzeichnen) linke Hälfte von Fig. 11).

Fig. 12.



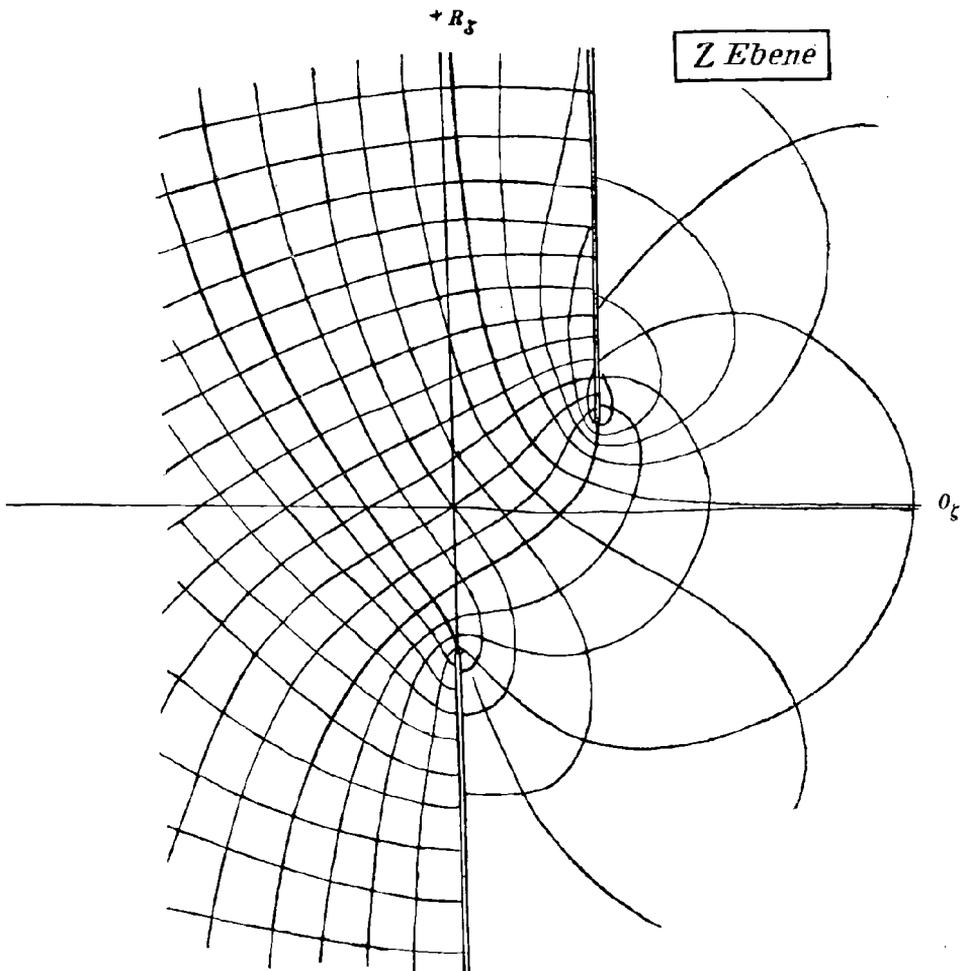
11. Die Umkehrung $\xi(Z)$ dieser Abbildung hat 3 Blätter,

den 3 Fundamentalbereichen des letzten Bildes entsprechend. Von diesen Bereichen ist einer in Fig. 12 nochmals skizziert, der zweite symmetrisch gestaltete liegt links neben ihm, der dritte erfüllt den Rest der ξ -Ebene. Die Deformation von Fig. 12 auf die Z -Ebene geschieht durch Geradestrecken der Z -Achsen, Einknicken der beiden Sattelpunkte und Abfahren der links liegenden Polhälfte ins Unendliche. Das erste Blatt der Z -Ebene mit den Achsenparallelen der ξ -Ebene erhält daher folgendes Aussehen (Fig 13): Der Nullpunkt der ξ -Ebene rückt rechts ins Unendliche, wo die Kurven das typische Aussehen der Abbildung $2/Z$ zeigen. Die positiv reelle ξ -Achse gibt uns die verlangte hyperbolische Grenze, in der Tat fällt sie nach Fig. 10 mit einer Kurve $\psi = \text{const} = \pi$ zusammen. Sie zieht zwischen den beiden Verzweigungspunkten, die sich aus den Sattelpunkten entwickelt haben, hindurch in der $+J_z$ -Richtung ins Unendliche, wo sich ξ wie $\sqrt{Z/i}$

verhält. Das zweite Blatt ist symmetrisch gestaltet, das dritte interessiert uns hier nicht, da es die freie Grenze $\xi = 0$ nicht enthält.

12. Unsere gesuchte Strömung muß im Innern der hyperbolischen Grenze nach dem oberen Verzweigungspunkt von Fig. 13 hin liegen,

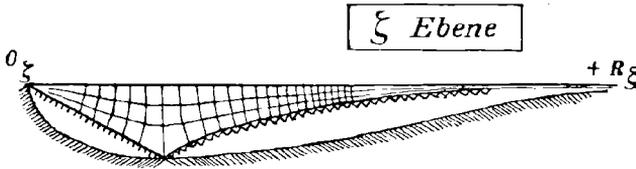
Fig. 13.



dies entspricht dem in Fig. 14 gezeichneten Teil der ξ -Ebene, in welchen jetzt, soweitig nötig, die X -Kurven aus Fig. 10 eingetragen sind. Die Deformation von Fig. 14 auf die Z -Ebene geschieht wie in Fig. 13 durch Einknicken des Sattelpunktes, Krümmung von R_ξ zur hyperbolischen Grenze und Abfahren des links liegenden logarithmischen Verzweigungspunktes ins Unendliche. Wir erhalten dann mit Fig. 15, --

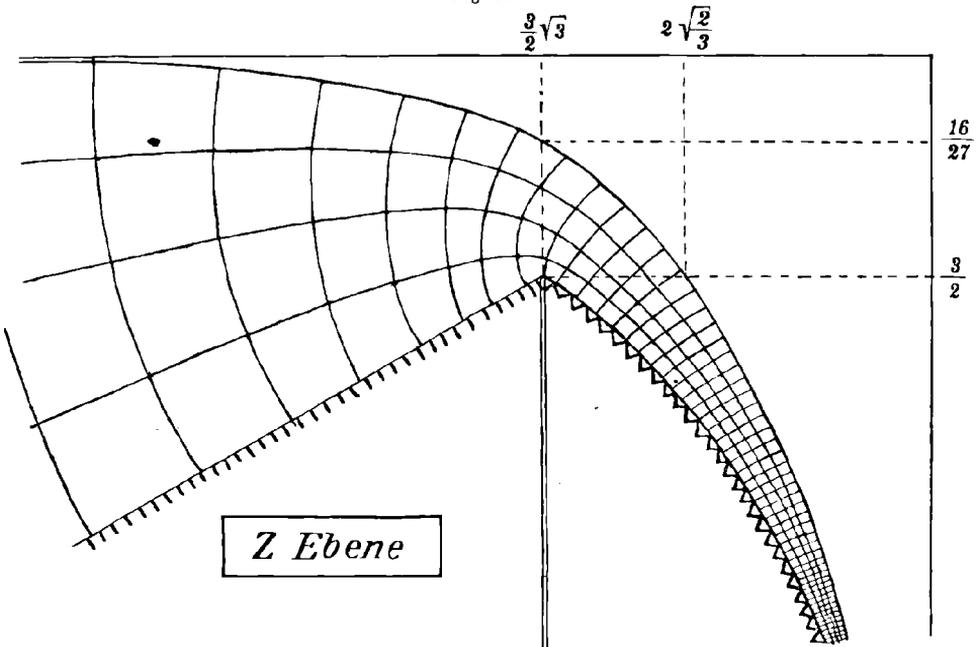
der Bequemlichkeit wegen gegen Fig. 13 um 180° gedreht, — eine Strömung, die uns den Überfall über einen Wehrrücken mit scharfer Kante (120°) darstellt. Auch die zweite Zwischenvariable ξ ist nun

Fig. 14.



eliminiert und wir sind am Ziele. — Die Werte besonderer Koordinaten sind aus Nr. 10 eingetragen. Man kann den Wehrrücken auch längs jeder anderen Stromlinie annehmen, und vermeidet so die Singularität der 120° -Ecke, die in Wirklichkeit zur Ablösung des Strahles Anlaß gibt.

Fig. 15.



Unter den Verzweigungspunkt kann der Scheitel des Wehres nicht hinunter. Der andere Teil des ersten Fundamentalbereichs liefert noch eine mögliche Strömung mit derselben freien Grenze, das zweite Blatt enthält die symmetrischen Bilder, das dritte nichts, nur analytische Fortsetzungen. Zur genauen Ausrechnung der in Fig. 15 gewonnenen Wehrformen müßten die Schlußformeln von Nr. 6 in reell und imaginär ge-

trennt werden, was immer durchführbar, aber sehr mühsam ist. Die charakteristischen Eigenschaften, Lage des Scheitels, Winkel, Spiegel-senkung haben wir auch ohne das erhalten und begnügen uns nun noch damit, die Durchflußmenge für den Fall auszurechnen, wo die durch den Verzweigungspunkt gehende Stromlinie als Wehrrücken gewählt wird.

13. Die Durchflußmenge ist bestimmt durch $D\psi = \pi$ (Figg. 7, 10), die Überfallhöhe ist $DY = \frac{3}{2}$ (Lage des Verzweigungspunktes Nr. 10, 12. Fig. 15.) Hierbei bedeutet D die Differenz zwischen Verzweigungspunkt und Randstromlinie. Indem wir nun wieder auf unsere Reduktionsformeln (Nr. 6) zurückgehen, erhalten wir:

$$\frac{3}{a\sqrt{2g}} D\psi = \pi, \quad a^{-2/3} Dy = \frac{3}{2},$$

also durch Elimination von a die Durchflußmenge

$$D\psi = \frac{\pi}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} \sqrt{2g} (Dy)^{3/2}$$

(vgl. bez. mechanischer Ähnlichkeit Nr. 1).

Bazin¹⁾ schreibt: $Q = M \cdot lh\sqrt{2gh}$, wobei Q Wassermenge, l Wehrbreite, h Überfallhöhe ist. Nach unserer Rechnung ist $M = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} = 0,57$. Bazin erhält Werte um 0,50. Daß sie kleiner sind, als der berechnete, ist neben der Reibung dadurch begründet, daß bei scharfen Ecken der Strahl sich meist löst und so die eigentliche Überfallhöhe kleiner wird.

Photogrammetrie von Küstenaufnahmen.

Von Dr. HORST v. SANDEN in Göttingen.

Ein dankbares Anwendungsgebiet dürfte sich der Photogrammetrie darbieten in der Verwertung von photographischen Aufnahmen einer Meeresküste, die von einem vorüberfahrenden Schiffe aus gemacht werden.

Der photogrammetrischen Vermessung können hierbei noch Punkte zugänglich gemacht werden, die bei anderen Verfahren nur mühsam oder gar nicht zu erreichen sind, wie z. B. vorgelagerte, unzugängliche Felsenriffe u. dergl.

Andererseits liegen bei diesem Problem die geometrischen Verhältnisse so günstig, daß es nur weniger bekannter Größen bedarf, um aus den Aufnahmen eine Karte des Gebietes zu konstruieren.

1) Bazin, Expériences nouvelles sur l'écoulement en déversoir, Paris 1898.

Als Kamera kann ein beliebiger photographischer Apparat benutzt werden, von dem im folgenden nur die „innere Orientierung“ als bekannt vorausgesetzt wird, d. h. Länge und Fußpunkt des Lotes vom Linsenmittelpunkt auf die Platte. Diese Daten lassen sich auch un schwer ermitteln.

Ferner werden noch einige Voraussetzungen gemacht, die eine Vereinfachung der Aufgabe bedeuten und durch die Praxis gerechtfertigt werden können.

Von dem in Betracht kommenden Küstenstrich sollen *drei* Aufnahmen gemacht werden, und der Kurs des Schiffes soll dabei ein nahezu geradliniger sein.

Zunächst wird die Rechnung durchgeführt für den Fall, daß die drei Aufnahmestandorte genau auf einer Geraden liegen (S. 112 bis 116), später werden kleine Abweichungen vom gradlinigen Kurse mit in Betracht gezogen (S. 116 bis 118).

Weiter sollen die Abstände zwischen den Aufnahmestandorten gemessen werden, was mittelst Logg und Uhr geschehen kann. Im Verlauf der Rechnung wird das *Verhältnis* zweier Abstände korrigiert, die Genauigkeit des Maßstabes der Rekonstruktion ist natürlich durch die Genauigkeit dieser Längenmessung bedingt.

Eine weitere Vereinfachung bietet die Möglichkeit, eventuell den Winkel zwischen Kurs des Schiffes und der Richtung, in der ein Punkt der Küste vom Schiffe aus gesehen wird, zu messen, etwa mittels Peilkompaß (S. 118 bis 119). Die geometrische Aufgabe, welche zu lösen ist, ergibt sich aus folgendem:

Auf allen Bildern stellt sich der Horizont, soweit er durch die Meeresoberfläche gebildet wird, als Gerade dar. Damit ist eine horizontale Ebene, welche die drei Bildgeraden und die drei Projektionszentren der drei photographischen Aufnahmen enthält, ohne weiteres gegeben.

Durch die auf dem Horizont sichtbaren Punkte (die anderen Bildpunkte hat man orthogonal auf den Horizont zu projizieren), werden, bei gegebener innerer Orientierung, die Winkel gemessen, welche die nach diesen Punkten hinführenden Projektionsstrahlen miteinander bilden.

Jede Aufnahme liefert also ein Strahlenbüschel diskreter Strahlen, deren Winkel untereinander bekannt sind. Die drei Büschel sind außerdem derart aufeinander bezogen, daß die nach ein und demselben Objektpunkte führenden Strahlen einander zugeordnet sind.

Die Aufgabe ist nun die: Durch Verschiebung und Drehung die drei Büschel in einer Ebene so gegeneinander zu orientieren, daß sich immer drei entsprechende Strahlen in einem Punkte schneiden. Die Bedeutung der oben gemachten Voraussetzungen ist leicht ersichtlich.

Falls Punkte des Objektes einen relativ großen Abstand vom Horizont haben, so gelingt eine Rekonstruktion bereits aus zwei Aufnahmen. Hierüber siehe Finsterwalder „Eine neue Art, die Photogrammetrie bei flüchtigen Aufnahmen zu verwenden“ (Sitzungsber. der Kgl. bayr. Akademie der Wissenschaften, Bd. XXXIV, 04, Heft 1)¹⁾, wo auch die übrige Literatur zu diesem Gegenstand angegeben ist.

I.

Annahme, daß die Aufnahmestandorte auf einer Geraden liegen.

In Fig. 1 seien ABC die Aufnahmestandorte. P_1 sei ein Objektpunkt. $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ seien die Winkel der betreffenden Projektionsstrahlen

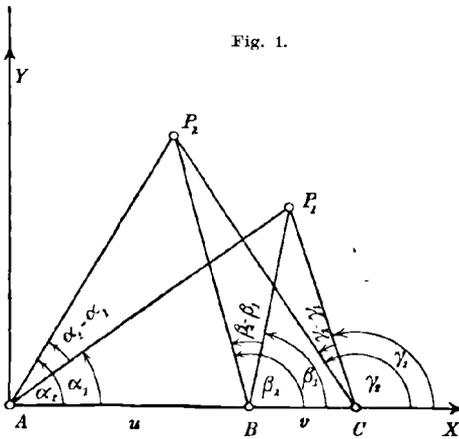


Fig. 1.

mit \overline{AC} (der Bahn des Schiffes), die, um einen allgemeinen Fall zu behandeln, als *nicht* gemessen vorausgesetzt werden. Ferner sei $\overline{AB} = u$; $\overline{BC} = v$ und $u + v = w = \overline{AC}$ (etwa mittels Logg und Uhr) gemessen. Solange der Maßstab nicht in Betracht kommt, sind kleine Fehler in dieser Messung belanglos, da nur $\frac{u}{v} = k$ in der Rechnung auftritt und diese Größe noch korrigiert wird. Der Fehler bei

maßstabrichtiger Rekonstruktion ist natürlich dem Fehler, mit dem diese Längen u, v, w gemessen sind, proportional.

Wir suchen nun die Bedingung dafür, daß die drei Strahlen $\overline{AP_1}, \overline{BP_1}, \overline{CP_1}$ durch einen Punkt gehen. Dies wird offenbar eine Gleichung

$$\varphi(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, k) = 0$$

sein.

Führen wir ein rechtwinkliges Achsenkreuz (XY) ein, dessen X -Achse die Gerade \overline{AC} ist, und dessen Y -Achse darauf in A senkrecht steht, so lauten die Gleichungen der drei Projektionsstrahlen $\overline{AP_1}, \overline{BP_1}, \overline{CP_1}$ in diesem Koordinatensystem:

1) Finsterwalder erhält in obiger Arbeit eine Gleichung sechsten Grades für die Tangente eines Winkels (S. 108). In dieser Gleichung treten die Koordinaten von drei Punktepaaren auf. Es mag bemerkt werden, daß durch Hinzunahme von mehr Punkten die Aufgabe auf die Auflösung von sechs *linearen* Gleichungen mit sechs Unbekannten zurückgeführt werden kann.

$$\begin{aligned} x \cdot \operatorname{tang} \alpha_1 - y &= 0 \\ x \cdot \operatorname{tang} \beta_1 - y - u \cdot \operatorname{tang} \beta_1 &= 0 \\ x \cdot \operatorname{tang} \gamma_1 - y - w \cdot \operatorname{tang} \gamma_1 &= 0 \end{aligned}$$

und die Gleichung $\varphi = 0$ wird durch das Verschwinden der Determinante gegeben:

$$\varphi \equiv \begin{vmatrix} \operatorname{tang} \alpha_1 & -1 & 0 \\ \operatorname{tang} \beta_1 & -1 & -u \cdot \operatorname{tang} \beta_1 \\ \operatorname{tang} \gamma_1 & -1 & -w \cdot \operatorname{tang} \gamma_1 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{v} = 0.$$

Dies wird ausgeschrieben (wobei sich noch etwas weghebt und $\frac{u}{v} = k$ eingeführt wird),

$$\varphi \equiv k \operatorname{tang} \alpha_1 \cdot \operatorname{tang} \beta_1 - (1 + k) \operatorname{tang} \alpha_1 \cdot \operatorname{tang} \gamma_1 + \operatorname{tang} \beta_1 \cdot \operatorname{tang} \gamma_1 = 0.$$

Diese Gleichung muß auch erfüllt sein für die Projektionsstrahlen nach allen anderen Punkten P_i , d. h. für deren Winkel $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ mit \overline{AC} . Gemessen werden aber die Differenzen

$$\begin{aligned} A_i &= \alpha_i - \alpha_1 \\ B_i &= \beta_i - \beta_1 \\ C_i &= \gamma_i - \gamma_1, \end{aligned}$$

sodaß wir in den Gleichungen zu setzen haben:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= A_i + \alpha_1 \\ \beta_i &= B_i + \beta_1 \\ \gamma_i &= C_i + \gamma_1. \end{aligned}$$

Jeder Punkt P_i liefert damit eine Gleichung, die wir $\Phi_i = 0$ nennen und es wird also:

$$\begin{aligned} \Phi_i(\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 k) &\equiv k \operatorname{tang}(A_i + \alpha_1) \cdot \operatorname{tang}(B_i + \beta_1) - \\ &- (1 + k) \operatorname{tang}(A_i + \alpha_1) \cdot \operatorname{tang}(C_i + \gamma_1) \\ &+ \operatorname{tang}(B_i + \beta_1) \cdot \operatorname{tang}(C_i + \gamma_1). \end{aligned}$$

Für $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ kann man auf diese Weise, durch Hinzunahme von weiteren Punkten, beliebig viele Gleichungen erhalten, und es ist empirisch bekannt, daß es ein Wertesystem der Unbekannten gibt, welches alle Gleichungen befriedigt.

Durch Einführen der Tangenten der einzelnen Winkel schreibt sich die Gleichung zunächst:

$$\begin{aligned} &k \cdot \frac{(\operatorname{tang} \alpha_1 + \operatorname{tang} A_i)(\operatorname{tang} \beta_1 + \operatorname{tang} B_i)}{(1 - \operatorname{tang} \alpha_1 \cdot \operatorname{tang} A_i)(1 - \operatorname{tang} \beta_1 \cdot \operatorname{tang} B_i)} - \\ &- (1 + k) \frac{(\operatorname{tang} \alpha_1 + \operatorname{tang} A_i)(\operatorname{tang} \gamma_1 + \operatorname{tang} C_i)}{(1 - \operatorname{tang} \alpha_1 \cdot \operatorname{tang} A_i)(1 - \operatorname{tang} \gamma_1 \cdot \operatorname{tang} C_i)} + \\ &+ \frac{(\operatorname{tang} \beta_1 + \operatorname{tang} B_i)(\operatorname{tang} \gamma_1 + \operatorname{tang} C_i)}{(1 - \operatorname{tang} \beta_1 \cdot \operatorname{tang} B_i)(1 - \operatorname{tang} \gamma_1 \cdot \operatorname{tang} C_i)} = 0. \end{aligned}$$

Zur Abkürzung setzen wir jetzt:

$$\left. \begin{array}{l} \text{tang } \alpha_1 \cdot \text{tang } \beta_1 = L \\ \text{tang } \alpha_1 \cdot \text{tang } \gamma_1 = M \\ \text{tang } \beta_1 \cdot \text{tang } \gamma_1 = N \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{tang } \alpha_1 = P \\ \text{tang } \beta_1 = Q \\ \text{tang } \gamma_1 = R \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{tang } A_i = a_i \cdot L \cdot R \\ \text{tang } B_i = b_i \cdot M \cdot Q \\ \text{tang } C_i = c_i \cdot N \cdot P \end{array} \right\} = S.$$

Dann bestehen die Gleichungen:

$$P \cdot Q = L \quad P \cdot R = M \quad Q \cdot R = N \quad P \cdot Q \cdot R = S$$

Wir betrachten nun die sieben Größen L, M, N, P, Q, R, S als Unbekannte und erhalten für $i = 1, 2, 3 \dots 7$ sieben *lineare* Gleichungen dafür:

$$\begin{aligned} L \cdot [k(1 + b_i \cdot c_i) + c_i(a_i - b_i)] - M \cdot [k(1 + b_i \cdot c_i) + a_i \cdot b_i + 1] + \\ + N \cdot [k a_i(b_i - c_i) + a_i b_i + 1] + S \cdot [k(b_i - c_i) + b_i - a_i] + \\ + P \cdot [k(b_i - c_i) - c_i(a_i \cdot b_i + 1)] + Q \cdot [k a_i(1 + b_i \cdot c_i) + c_i(1 + a_i \cdot b_i)] - \\ - R \cdot [k a_i(b_i c_i + 1) + a_i - b_i] + c_i(b_i - a_i) + k a_i(b_i - c_i) = 0 \end{aligned}$$

(für $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$).

Was die Determinante dieser Gleichungen anbetrifft, so ist ersichtlich, daß weder zwei Horizontalreihen noch zwei Vertikalreihen derselben, auch nach Multiplikation mit Konstanten, *identisch* gleich werden. Es gibt also nur *ein* Wertesystem der eigentlichen Unbekannten $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, das sämtliche 7 Gleichungen befriedigt, die Lösung ist demnach eindeutig.

Die Auflösung der Gleichungen, die zweckmäßig durch sukzessive Elimination der Unbekannten bewerkstelligt wird, bietet keine Schwierigkeit und ist besonders mit dem Rechenschieber leicht auszuführen.

Die Koeffizienten setzen sich aus den Tangenten der gemessenen Winkel zusammen. Als Anfangsstrahlen (die durch $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ bezeichnet werden) kann man drei beliebige entsprechende Strahlen annehmen. Man wird zweckmäßig solche wählen, die in allen drei Büscheln ungefähr in der Mitte liegen. Da der Sichtwinkel der gebräuchlichen Objekte etwa 50° bis 70° beträgt¹⁾, so wird es sich erreichen lassen, daß die gemessenen Winkel $< \frac{\pi}{4}$ bleiben, mithin ihre Tangenten < 1 . Die Koeffizienten in den Gleichungen werden also nicht unbequem groß werden.

Man braucht auch nur die Unbekannten P, Q, R zu berechnen. Die eventuelle Berechnung auch der anderen Unbekannten liefert durch die obenstehenden Gleichungen, die zwischen den Unbekannten bestehen müssen, eine Kontrolle der Richtigkeit und Genauigkeit der Rechnung. Ist die Genauigkeit des auf diese Weise ermittelten Resultates ausreichend, so ist die Aufgabe erledigt.

1) Nach einer Mitteilung der Firma Carl Zeiß, Jena.

Ist eine größere Genauigkeit erwünscht, so kann man die auf die soeben angegebene Weise erhaltenen Werte von $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, die wir jetzt mit $\bar{\alpha}_1, \bar{\beta}_1, \bar{\gamma}_1$ bezeichnen wollen, als Näherungswerte betrachten und mittelst des Newtonschen Verfahrens in folgender Weise verbessern. Hierbei kann auch der gemessene Wert von k , den wir \bar{k} nennen und dann auch als Näherungswert betrachten, verbessert werden.

Die Näherungswerte werden die Gleichungen $\Phi_i = 0$ (S. 113) nicht genau befriedigen, sondern wir werden erhalten:

$$\Phi_i(\bar{\alpha}_1, \bar{\beta}_1, \bar{\gamma}_1, \bar{k}) = \varepsilon_i,$$

worin ε_i kleine Abweichungen sind.

Zur Korrektur ändern wir die Näherungswerte um kleine Größen (Korrekturen) $\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1, k'$, dabei ändert sich Φ_i um $\Delta \Phi_i$ und wir setzen unter Vernachlässigung Glieder höherer Ordnung:

$$\Delta \Phi_i = \frac{\partial \Phi_i}{\partial \alpha_1} \cdot \alpha'_1 + \frac{\partial \Phi_i}{\partial \beta_1} \cdot \beta'_1 + \frac{\partial \Phi_i}{\partial \gamma_1} \cdot \gamma'_1 + \frac{\partial \Phi_i}{\partial k} \cdot k',$$

wo in die Ableitungen die Näherungswerte einzusetzen sind. Die Korrekturen $\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1, k'$ sind nun so zu bestimmen, daß $\Phi_i + \Delta \Phi_i = 0$ wird, oder da $\Phi_i = \varepsilon_i$ ist, muß $\Delta \Phi_i + \varepsilon_i = 0$

gesetzt werden. Nun ist:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \alpha_1} &= \frac{k \operatorname{tang}(B_i + \beta_1) - (1 + k) \operatorname{tang}(C_i + \gamma_1)}{\cos^2(A_i + \alpha_1)} \\ \frac{\partial \Phi_i}{\partial \beta_1} &= \frac{k \operatorname{tang}(A_i + \alpha_1) + \operatorname{tang}(C_i + \gamma_1)}{\cos^2(B_i + \beta_1)} \\ \frac{\partial \Phi_i}{\partial \gamma_1} &= \frac{\operatorname{tang}(B_i + \beta_1) - (1 + k) \operatorname{tang}(B_i + \alpha_1)}{\cos^2(C_i + \gamma_1)} \\ \frac{\partial \Phi_i}{\partial k} &= \operatorname{tang}(A_i + \alpha_1) \cdot [\operatorname{tang}(B_i + \beta_1) - \operatorname{tang}(C_i + \gamma_1)]. \end{aligned}$$

Damit werden die Gleichungen zur Bestimmung von $\alpha', \beta', \gamma', k'$, wenn man sie noch mit einem Generalnenner

$$G = \cos(A_i + \bar{\alpha}_1) \cdot \cos(B_i + \bar{\beta}_1) \cdot \cos(C_i + \bar{\gamma}_1)$$

multipliziert:

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{k} \sin(B_i - C_i + \bar{\beta}_1 - \bar{\gamma}_1) - \sin(C_i + \bar{\gamma}_1) \cdot \cos(B_i + \bar{\beta}_1)}{\cos(A_i + \bar{\alpha}_1)} \cdot \alpha' + \\ & + \frac{\bar{k} \sin(A_i + \bar{\alpha}_1) \cdot \cos(C_i + \bar{\gamma}_1) + \sin(C_i + \bar{\gamma}_1) \cos(A_i + \bar{\alpha}_1)}{\cos(\beta + B_i)} \cdot \beta' + \\ & + \frac{\sin(B_i - A_i + \bar{\beta}_1 - \bar{\alpha}_1) - \bar{k} \sin(A_i + \bar{\alpha}_1) \cos(B_i + \bar{\beta}_1)}{\cos(C_i + \bar{\gamma}_1)} \cdot \gamma' \\ & + \sin(A_i + \bar{\alpha}_1) \sin(B_i - C_i + \bar{\beta}_1 - \bar{\gamma}_1) \cdot k' + \\ & + \cos(A_i + \bar{\alpha}_1) \cdot \cos(B_i + \bar{\beta}_1) \cdot \cos(C_i + \bar{\gamma}_1) \cdot \varepsilon_i = 0. \end{aligned}$$

8*

Für $i = 1, 2, 3, 4$ wären dies vier lineare Gleichungen für die vier Unbekannten $\alpha', \beta', \gamma', k$; da jedoch bereits zur Ermittlung der Näherungen 7 Punkte vermessen sind, so wird es sich empfehlen, hier 7 Gleichungen für die Korrekturen aufzustellen und diese nach der Methode der kleinsten Quadrate in bekannter Weise auszugleichen.

Durch

$$\alpha_1 = \bar{\alpha}_1 + \alpha'; \quad \beta_1 = \bar{\beta}_1 + \beta'; \quad \gamma_1 = \bar{\gamma}_1 + \gamma'; \quad k = \bar{k} + k'$$

erhält man dann die verlangten Werte. Durch Berechnung des mittleren Fehlers kann man einen Schluß auf die Genauigkeit ziehen. Genügt dieselbe nicht, so kann man die Werte $\alpha_1 = \bar{\alpha}_1 + \alpha'$ als zweite Näherungen betrachten und das Korrekturnverfahren noch einmal wiederholen.

II.

Berücksichtigung des Umstandes, daß die Aufnahmestandorte A, B, C nicht genau in einer Geraden liegen.

Der Punkt B liege jetzt nicht auf der Geraden \overline{AC} (s. Fig. 2), sondern habe von ihr den Abstand d , der jedoch klein sein soll gegen-

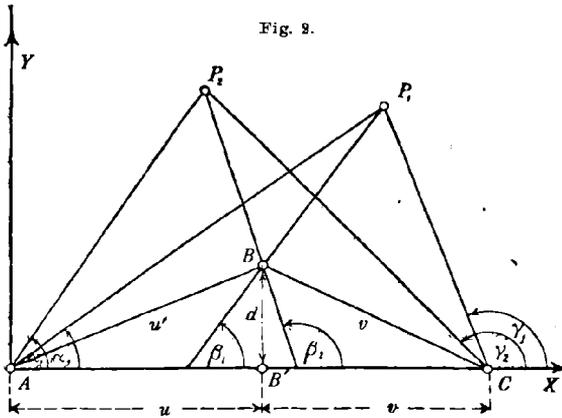


Fig. 2.

über v , so daß $\delta = \frac{d}{v}$ ein kleiner Bruch ist. Der Fußpunkt des Lotes von B auf \overline{AC} sei B' und wir nennen $u = \overline{AB'}$; $v = \overline{B'C}$. Gemessen werden in diesem Falle allerdings $AB = u'$ und $BC = v'$, doch ist $\frac{u}{v} = k$ von $\frac{u'}{v'} = k'$ nur sehr wenig (um Glieder zweiter Ordnung in δ) ver-

schieden. Den Winkel, den der Strahl \overline{BP} mit \overline{AC} bildet, nennen wir wieder β . Dann haben die Geraden AP, BP und CP in einem Koordinatensystem, wie es auf S. 113 benutzt wurde, die Gleichungen:

$$\begin{aligned} x \cdot \text{tang } \alpha - y &= 0 \\ x \cdot \text{tang } \beta - y + (d - u \cdot \text{tang } \beta) &= 0 \\ x \cdot \text{tang } \gamma - x - w \cdot \text{tang } \gamma &= 0 \quad (w = u + v). \end{aligned}$$

Die Bedingung des gemeinsamen Schnittpunktes der drei Geraden, die wir jetzt $\psi = 0$ nennen wollen, enthält jetzt auch noch δ , es ist:

$$\psi(\alpha\beta\gamma k\delta) \equiv \begin{vmatrix} \text{tang } \alpha - 1 & 0 \\ \text{tang } \beta - 1 & d - u \text{ tang } \beta \\ \text{tang } \gamma - 1 & -w \text{ tang } \gamma \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{v} = 0$$

oder:

$$\text{tang } \beta \cdot \text{tang } \gamma + \delta \text{ tang } \gamma - (1 + k) \cdot \text{tang } \alpha \cdot \text{tang } \gamma - \delta \text{ tang } \alpha + k \cdot \text{tang } \alpha \cdot \text{tang } \beta = 0.$$

Führen wir, ebenso wie auf S. 113, die gemessenen Winkel ein, so erhalten wir die Gleichungen:

$$\Psi_i \equiv k \text{ tang } (\alpha_1 + A_i) \cdot \text{tang } (\beta_1 + B_i) - (1 + k) \cdot \text{tang } (\alpha_1 + A_i) \cdot \text{tang } (\gamma_1 + C_i) + \delta \{ \text{tang } (\gamma_1 + C_i) - \text{tang } (\alpha_1 + A_i) \} + \text{tang } (\beta_1 + B_i) \cdot \text{tang } (\gamma_1 + C_i) = 0.$$

Zur Aufsuchung von Näherungswerten nehmen wir $\bar{\delta} = 0$ als erste Näherung an und ermitteln die Werte von $\bar{\alpha}_1, \bar{\beta}_1, \bar{\gamma}_1$ genau so wie es auf S. 113 und 114 angegeben ist, da für $\delta = 0$ die Gleichungen $\Psi_i = 0$, die jetzt auftreten, in die früher benutzten $\Phi_i = 0$ übergehen. Diese Näherungen werden wie vorher durch:

$$A \Psi_i + \varepsilon_i = 0$$

korrigiert. In den Korrektionsgleichungen tritt jetzt jedoch ein Glied mehr auf, nämlich:

$$\delta' \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \delta} = \{ \text{tang } (\bar{\gamma}_1 + C_i) - \text{tang } (\bar{\alpha}_1 + A_i) \} \cdot \delta',$$

während

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial \alpha} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial \alpha}$$

usw. ist.

Nach Multiplikation mit dem Generalnenner

$$G = \cos(A_i + \bar{\alpha}_1) \cdot \cos(B_i + \bar{\beta}_1) \cdot \cos(C_i + \bar{\gamma}_1)$$

wird das neue Glied:

$$\cos(B_i + \bar{\beta}_1) \cdot \sin(C_i - A_i + \bar{\gamma}_1 - \bar{\alpha}_1) \cdot \delta'.$$

Statt der vier Korrektionsgleichungen auf S. 116 hat man es jetzt mit fünf zu tun, indem δ' als neue Unbekannte hinzutritt.

Vermutet man, daß δ relativ groß sein kann, so wird es sich empfehlen, zunächst aus fünf Gleichungen ein System von Korrekturen zu berechnen, die damit erhaltenen Werte der Unbekannten $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, k$ als zweite Näherungen zu betrachten und dann nach der Methode der kleinsten Quadrate neue Korrekturen zu berechnen.

In diesem Falle hat man bei der zweiten Korrektur nicht mehr $\delta = 0$ zu setzen, sondern für δ die erhaltene erste Korrektur δ' einzuführen. Dann ist nur noch:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \beta_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial \beta_i} \text{ und } \frac{\partial \Psi_i}{\partial k} = \frac{\partial \Phi}{\partial k},$$

bei den anderen Ableitungen, nach α und γ , tritt ein neues Glied mit δ' hinzu, es wird nämlich:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} = \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} + \frac{\delta'}{\cos^2(\alpha_1 + A_1)}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \gamma} = \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} + \frac{\delta'}{\cos^2(\bar{\gamma}_1 + C_1)}$$

Nach Multiplikation mit dem Generalnenner G kommt:

$$G \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} = G \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} - \frac{\cos(\bar{\beta}_1 + B_1) \cdot \cos(\bar{\gamma}_1 + C_1) \cdot \delta'}{\cos(\alpha_1 + A_1)}$$

$$G \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma} = G \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} + \frac{\cos(\bar{\alpha}_1 + A_1) \cdot \cos(\bar{\beta}_1 + B_1) \cdot \delta'}{\cos(\bar{\gamma}_1 + C_1)}$$

$\frac{\partial \Psi}{\partial \delta}$ und $\frac{\partial \Psi}{\partial k}$ bleiben ungeändert. Die Korrektionsgleichungen für die zweite Korrektur lauten somit vollständig:

$$\frac{\bar{k} \sin(B_i - C_i + \bar{\beta}_1 - \bar{\gamma}_1) - \sin(C_i + \gamma_1) \cdot \cos(B_i + \bar{\beta}_1) - \cos(\bar{\beta}_1 + B_i) \cdot \cos(C_i + \bar{\gamma}_1) \cdot \delta'}{\cos(A_i + \alpha_1)} \cdot \alpha''$$

$$+ \frac{\bar{k} \sin(A_i + \bar{\alpha}_1) \cdot \cos(C_i + \gamma_1) + \sin(C_i + \bar{\gamma}_1) \cdot \cos(A_i + \bar{\alpha}_1)}{\cos(B_i + \eta_1)} \cdot \beta''$$

$$+ \frac{\sin(B_i - A_i + \bar{\beta}_1 - \bar{\alpha}_1) - \bar{k} \sin(A_i + \alpha_1) \cdot \cos(B_i + \beta_1) + \cos(A_i + \alpha_1) \cdot \cos(B_i + \beta_1) \cdot \delta'}{\cos(C_i + \bar{\gamma}_1)} \cdot \gamma''$$

$$+ \sin(A_i + \bar{\alpha}_1) \cdot \sin(B_i - C_i + \bar{\beta}_1 - \bar{\gamma}_1) \cdot k''$$

$$+ \cos(B_i + \bar{\beta}_1) \cdot \sin(C_i - A_i + \bar{\gamma}_1 - \bar{\alpha}_1) \cdot \delta''$$

$$+ \cos(A_i + \alpha_1) \cdot \cos(B_i + \bar{\beta}_1) \cdot \cos(C_i + \gamma_1) \cdot \varepsilon'_i = 0.$$

Hierin sind die zweimal überstrichenen Größen die zweiten Näherungen, die zweigestrichenen, deren Korrekturen und ε'_i die Abweichungen nach Einsetzen der zweiten Näherungen, also

$$\Psi_i(\bar{\alpha}_i \dots) = \varepsilon'_i.$$

Aus diesen Gleichungen erhält man dann die zweiten Korrekturen und damit die dritten Näherungen. Ob die erste Korrektur genügt oder eine zweite notwendig ist, vielleicht gar eine dritte, muß von Fall zu Fall entschieden werden, unter Berücksichtigung der sonstigen Fehlerquellen.

III.

Vereinfachende Annahmen.

Eine wesentliche Ersparnis an Rechenarbeit kann dadurch erreicht werden, wenn es möglich ist, für die Unbekannten α_1 , β_1 , γ_1 Näherungswerte zu erhalten, ohne die Gleichungen auf S. 114 auflösen zu müssen. Steht auf dem Schiffe, von dem aus die Aufnahmen ge-

macht werden, ein Peilkompaß zur Verfügung, so kann gleichzeitig mit der Aufnahme der Winkel zwischen dem Kurse des Schiffes und einem Objektpunkte gemessen werden. Führt man dies bei allen drei Aufnahmen für den gleichen Objektpunkt durch, so hat man damit Näherungswerte für die drei gesuchten Winkel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$. Zu beachten wäre dabei, daß der Verschuß der Kamera in einem Momente zu öffnen ist, in dem das Schiff genau an seinem Kurse anliegt.

Eine andere Möglichkeit, um zu Näherungswerten zu gelangen, wäre durch folgendes Verfahren gegeben:

Man stellt die Kamera auf der Mittellinie des Schiffes auf. Dann werden sich auch Teile des Schiffes abbilden. Macht man nun eine zweite Aufnahme, indem man die Kamera so weit dreht, daß ein auf der Schiffsmittellinie befindlicher Gegenstand (Flaggenstock, Mast oder dergl.) zusammen mit einem auf der ersten Aufnahme befindlichen Schiffsgegenstand abgebildet wird, so gibt die erste Aufnahme den Winkel zwischen einem Objektpunkte und dem Schiffsgegenstand, und die zweite Aufnahme den Winkel zwischen diesem und dem Kurse des Schiffes. Durch Addition beider Winkel erhält man den gewünschten Näherungswert. Ev. kann man eine dritte Aufnahme zwischen die erstgedachten einschalten. Der Zeitpunkt der zweiten (und ev. dritten) Aufnahme ist beliebig.

Die Rekonstruktion des Objektes bzw. Zeichnung eines Grundrisses desselben gestaltet sich sehr einfach:

Man bringt die drei Strahlbündel auf dem Papier in geeignetem Maßstab in die durch $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, k, \delta$ gegebene orientierte Lage und erhält als Schnittpunkte von je drei zugeordneten Strahlen (worin eine Kontrolle liegt) die Punkte des Grundrisses. Die Höhen sind dann in bekannter Weise zu ermitteln, wobei eine doppelte Kontrolle möglich ist, da die Höhen bereits aus einer Aufnahme zu bestimmen sind.

Es mag noch bemerkt werden, daß das in vorstehendem geschilderte Verfahren auch bei anderen als Küstenaufnahmen Verwendung finden könnte. Sobald es durch eine Libelle möglich ist, die Kamera vertikal zu stellen, und die drei Standorte ungefähr in einer Vertikalebene liegen und ihr Abstand voneinander geschätzt werden kann (ev. sind die Standorte auf einer Landkarte markiert), so kann man durch Projektion auf eine Horizontalebene das Problem auf das oben behandelte zurückführen.

Zur Statik der massiven Widerlager.

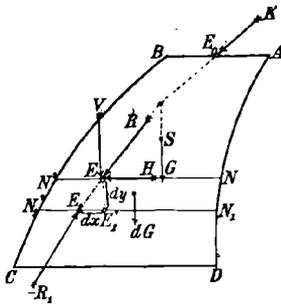
Von Dr. M. MILANKOVITCH in Wien.

Wir wollen in dieser Abhandlung drei verschiedene Formen der massiven Widerlager entwickeln, die gewissen, von vornherein gestellten Forderungen in allen ihren Teilen vollkommen entsprechen und als die *theoretisch günstigsten Formen* bezeichnet werden können.

Bevor wir zur Behandlung dieser drei Probleme schreiten, wollen wir folgende allgemeinere Betrachtungen vorausschicken:

Es sei in der Fig. 1 ein Widerlager $ABCD$ dargestellt. Dasselbe habe eine prismatische Form, seine Erzeugenden seien senkrecht zur Bildebene, die Leitlinien AND und $BN'C$ stetige Kurven (Begrenzungskurven). Die Tiefe des betrachteten Teiles des Widerlagers — senkrecht zur Bildebene gemessen — sei gleich der Einheit. Auf diesen Teil des Widerlagers wirke im Punkte E_0 der schief gerichtete Druck K . Auf den durch eine etwaige Hinterfüllung des Rückens BC des Widerlagers hervorgerufenen Erddruck soll hier keine Rücksicht genommen werden, da derselbe vom Feuchtigkeitsgrad der Hinterfüllung abhängig ist und bei Vornahme von Reparaturen am Widerlager gänzlich verschwinden kann.

Fig. 1.



Dann wirken auf das Widerlager zwei Arten von Kräften: der schief gerichtete Druck K und das vertikal wirkende Eigengewicht des Widerlagers selbst. Die Fugen des Mauerwerks nehmen wir horizontal an, da dieselben bei den praktischen Ausführungen in Ziegel und Stein tatsächlich so ausgeführt werden und bei Ausführungen in Beton die Arbeitsgrenzen eine horizontale Lage besitzen. So wirkt dann auf eine beliebige horizontale Fuge NN' die Druckkraft R , welche sich als die Resultante des Druckes K und des Eigengewichtes G des oberhalb dieser Fuge befindlichen Widerlager-teiles $NABN'$ darstellt. Der Angriffspunkt E dieser Kraft wird der Druckmittelpunkt der Fuge NN' und der geometrische Ort der Druckmittelpunkte der horizontalen Fugen die Druckkurve genannt. Die der Fuge NN' unendlich benachbarte Fuge sei $N_1N'_1$, ihr Druckmittelpunkt sei E_1 und ihre Druckkraft R_1 . Legen wir in der Kräfteebene ein orthogonales Koordinatensystem mit einer horizontalen Abszissenachse

und einer vertikalen Ordinatenachse und bezeichnen wir die Koordinaten des Punktes E mit x und y , so ist:

$$E'E_1 = dx \quad \overline{EE_1} = dy.$$

Bezeichnen wir noch das spezifische Gewicht des Widerlagermaterials mit g , so können folgende Erwägungen angestellt werden:

Auf das unendlich schmale Körperelement $NN'N_1N_1$ wirken folgende Kräfte:

1. die Druckkraft R der Fuge NN' , welche aus den Kräften K und G hervorgeht und welche wir in die orthogonalen Komponenten V und H zerlegt denken;
2. die negativ genommene Druckkraft R_1 der Fuge N_1N_1' ;
3. das Eigengewicht dG des unendlich schmalen Körperelementes $NN'N_1N_1$, welches in der Halbierungslinie der Länge NN' wirkend anzunehmen ist.

Die ersten drei dieser Kräfte sind endlich, die dritte Kraft dG verschwindet mit dx und ist von derselben Kleinheitsordnung wie dx .

Die Summe der statischen Momente dieser drei Kräfte bezüglich eines beliebigen Punktes der Kraftebene muß, wegen des notwendigen Gleichgewichtes, gleich Null sein. Wählt man somit den Punkt E_1 zum Momentenpunkt und bezeichnet das Moment der Kraft dG bezüglich dieses Punktes mit M_g (positiv, wenn im Sinne des Uhrzeigers drehend), so besteht die Gleichung:

$$(1) \quad Vdx - Hdy + M_g = 0.$$

In dieser Gleichung sind alle drei Glieder von derselben Kleinheitsordnung. In den ersten zwei Gliedern ist die Kraft endlich, der Arm unendlich klein, im dritten Glied ist die Kraft unendlich klein, der Arm dagegen endlich.

Die Momentengleichung (1) wird der Ausgangspunkt unserer Untersuchungen sein. Vorher sei jedoch der praktische Zweck der zu behandelnden Probleme in Kürze erläutert.

Von der Lage des Druckmittelpunktes in der Fuge hängt auch die Normalspannungsverteilung längs der Fuge ab. Fällt der Druckmittelpunkt mit der Mitte der Fuge zusammen, so wird die Fuge in allen ihren Punkten gleiche Normalspannungen aufweisen; im anderen Falle erfolgt die Spannungsverteilung entsprechend der Navierschen Annahme nach einer zur Fuge geneigten Geraden. Liegt der Druckmittelpunkt im mittleren Drittel der Fuge, so wird dieselbe nur Druckspannungen aufzunehmen haben, fällt dagegen der Druckmittelpunkt

außerhalb des mittleren Drittels der Fuge, so ist dieselbe auch auf Zug beansprucht. Die Materialien, aus welchen die Widerlager hergestellt werden, sind in der Regel gegen Zug nicht widerstandsfähig, und es ist die Aufgabe der Konstrukteure, das Auftreten der Zugspannungen zu verhindern. Zu diesem Ende genügt es — wie aus dem Vorhergehenden folgt — daß der Druckmittelpunkt im mittleren Drittel — Kern — der Fuge liege. Die Sonderfälle jedoch, wo der Druckmittelpunkt mit dem Mittelpunkte der Fuge oder ihrem Drittelpunkte — Kernpunkte — zusammenfällt, sind, da der erste Fall eine gleichmäßige Beanspruchung der Fuge, der zweite eine größtmögliche Ersparnis an Material ergibt, von besonderer Wichtigkeit, und mit diesen wollen wir uns hier beschäftigen.

Unsere Aufgabe wird demnach vor allem sein, die Form des Widerlagers abzuleiten, welches die Eigenschaft hat, daß es in allen seinen Teilen gleich gedrückt ist und in die Kategorie der *Körper gleichen Widerstandes* gehört, welche als die vollkommensten Konstruktionen bezeichnet werden können. Es wird sich zeigen, daß ein solches Widerlager gekrümmte Begrenzungskurven AD und BC besitzt. In der Praxis wird jedoch oft die Forderung gestellt, daß die vordere Begrenzungskurve AD eine vertikale Gerade sei und diese Forderung berücksichtigend, werden wir auch die Form des Widerlagers ableiten, dessen vordere Begrenzungslinie eine vertikale Gerade ist, dessen Druckkurve aber auch durch die Fugenmitten hindurchgeht und auf diese Weise eine gleichmäßige Spannungsverteilung längs der Fuge hervorruft. Dieser zweite Fall hat mehr ein theoretisches Interesse als praktische Bedeutung, weil diese Form des Widerlagers unökonomisch ist. Für den Fall einer vertikalen vorderen Begrenzungslinie bekommt man — falls keine Zugspannungen zugelassen werden sollen — die ökonomischste Form des Widerlagers, wenn man die Druckkurve mit den Drittelpunkten der Fugen zusammenfallen läßt, da in diesem Falle gerade noch keine Zugspannungen im Widerlager auftreten. Mit diesem Falle werden wir uns deshalb auch befassen und die betreffende Form des Widerlagers ableiten.

Das Profil des Widerlagers gleichen Widerstandes.

Es sei in Fig. 2 das Widerlagerprofil $ABCD$ dargestellt. Dasselbe sei im Mittelpunkte E_0 der Krone AB mit dem schiefen Druck K belastet, dessen wagerechte und senkrechte Komponenten die Kräfte Q und P sind. Wenn das Widerlager in allen Punkten seiner horizontalen Fugenschnitte gleich stark gedrückt sein soll, so muß offenbar seine

Druckkurve E_0EE_1 mit dem geometrischen Ort der Fugen zusammenfallen, und es muß außerdem die Breite δ einer beliebigen Fuge proportional sein der Normalkraft V derselben.

Fig. 2.

Die eingangs entwickelte Momentengleichung (1) wird demnach in diesem Falle lauten:

$$(2) \quad Vdx - Hdy = 0,$$

da das Glied M_g als eine unendlich kleine Größe zweiter Ordnung verschwindet.

Es soll aber außerdem die Beziehung bestehen:

$$(3) \quad \delta = kV,$$

wo k eine Konstante bedeutet.

Die horizontale Komponente H der Druckkraft R ist offenbar gleich der horizontalen Komponente der Kraft K , da auf den Widerlagerteil $ABN'N$ sonst keine weitere horizontale Kraft wirkt.

$$(4) \quad H = Q.$$

Die vertikale Komponente V der Druckkraft R ist, wie leicht einzusehen:

$$(5) \quad V = P + g \int_0^y \delta dy,$$

und es ist mit Rücksicht auf (3)

$$\frac{\delta}{k} = P + g \int_0^y \delta dy.$$

Die Differentiation der vorstehenden Gleichung nach y ergibt:

$$\frac{1}{k} \frac{d\delta}{dy} = g\delta$$

oder

$$\frac{d\delta}{\delta} = kg dy,$$

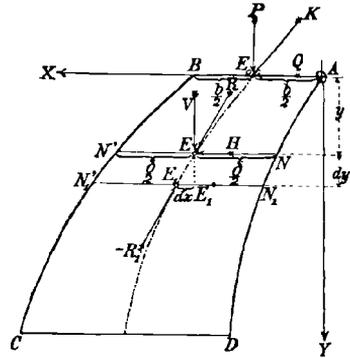
woraus durch Integration — unter Berücksichtigung, daß für $y = 0$, $\delta = b$ — die Gleichung folgt:

$$(6) \quad \delta = be^{kgy}.$$

Diese Gleichung gibt uns das Gesetz an, nach welchem die Fugenbreite δ nach unten hin zunehmen soll.

Die Gleichungen (2), (4), (5) und (6) ergeben die Beziehung:

$$P + gb \int_0^y e^{kgy} dy = Q \frac{dy}{dx}$$



oder

$$P + \frac{b}{k} e^{kgy} = Q \frac{dy}{dx},$$

woraus:

$$(7) \quad x = kQ \int \frac{dy}{kP + be^{kgy}} + C.$$

Der Ausdruck unter dem Integralzeichen kann wie folgt transformiert werden:

$$\begin{aligned} \frac{1}{kP + be^{kgy}} &= \frac{1}{kP} \cdot \frac{kP + be^{kgy} - be^{kgy}}{kP + be^{kgy}} = \frac{1}{kP} \left\{ 1 - \frac{be^{kgy}}{kP + be^{kgy}} \right\} = \\ &= \frac{1}{k^2 g P} \left\{ kg - \frac{kg be^{kgy}}{kP + be^{kgy}} \right\}. \end{aligned}$$

Das unbestimmte Integral der Gleichung (7) lautet also:

$$(7) \quad x = \frac{Q}{kgP} \left\{ kgy - \log_{\text{nat}} (kP + be^{kgy}) \right\} + C.$$

Da jedoch für $y = 0$ $x = \frac{b}{2}$, so ist:

$$C = \frac{b}{2} + \frac{Q}{kgP} \log_{\text{nat}} (kP + b),$$

worauf aus (7) folgt:

$$(8) \quad x = \frac{b}{2} + \frac{Q}{kgP} \left\{ kgy - \log_{\text{nat}} \frac{kP + be^{kgy}}{kP + b} \right\}.$$

Dies ist die Gleichung der Mittellinie des Widerlagerprofiles. Durch die Gleichungen (6) und (8) ist das Profil des Widerlagers gleichen Widerstandes vollkommen bestimmt.¹⁾

Wenn $Q = 0$, so lautet die Gleichung der Mittellinie der Profiles $x = \frac{b}{2}$, während das Gesetz der Zunahme der Fugenbreite unverändert bleibt. Diese spezielle Form des Widerlagers ist in der technischen Mechanik unter der Bezeichnung „logistischer Körper“ bekannt.

Das Profil des Widerlagers, dessen vordere Begrenzungslinie eine Gerade ist und dessen Druckkurve durch die Fugenmittelpunkte hindurchgeht.

In der Fig. 3 sei dieser Fall dargestellt. Es ist nun unsere Aufgabe, die Form des Profiles zu bestimmen. Zu diesem Ende wollen

1) Mit dem soeben behandelten Problem befaßte sich auch Resal in seiner *Stabilité des constructions*, Paris 1901 (S. 548 ff.), doch sind seine Ableitungen fehlerhaft, wie wir dies in unserer Abhandlung „Theorie der Druckkurven“, diese Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 55, nachgewiesen haben. Um Wiederholungen zu vermeiden, verweisen wir auf diese Abhandlung.

wir die Gleichung der Druckkurve ableiten, welche als die Mittellinie des Profils dasselbe vollkommen bestimmt. Die Momentengleichung (1) lautet im vorliegenden Falle:

$$Vdx - Qdy = 0,$$

da wie früher $H = Q$ und das Glied M_y eine unendlich kleine Größe zweiter Ordnung ist. Es ist auch, wie leicht einzusehen:

$$(9) \quad V = P + 2g \int_0^y dx y,$$

so daß:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{Q} + \frac{2g}{Q} \int_0^y x dy.$$

Durch Differentiation dieser Gleichung nach x bekommt man:

$$(10) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2g}{Q} x \frac{dy}{dx}.$$

Eine einmalige Integration dieser Gleichung ergibt die Beziehung:

$$(11) \quad \frac{dy}{dx} = C e^{\frac{g}{Q} x^2},$$

wo C noch eine willkürliche Konstante bedeutet, welche wie folgt bestimmt wird: Die Beziehung $\frac{dy}{dx} = \frac{V}{Q}$ besagt, daß die Druckkraft R die Druckkurve berührt, und es ist deshalb:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{y=0} = \frac{P}{Q}.$$

Es ist somit:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\substack{x=\frac{b}{2} \\ y=0}} = \frac{P}{Q} = C e^{\frac{g}{Q} \cdot \frac{b^2}{4}},$$

woraus

$$C = \frac{P}{Q} e^{-\frac{g}{Q} \cdot \frac{b^2}{4}}.$$

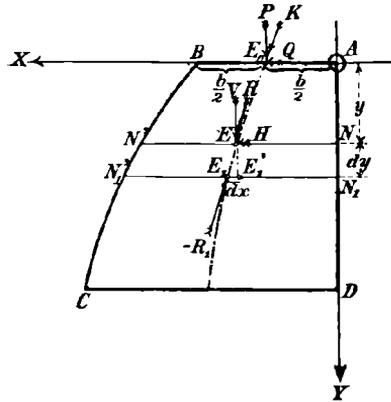
Es ist also

$$(12) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{P}{Q} \cdot e^{-\frac{g}{Q} \cdot \frac{b^2}{4}} \cdot e^{\frac{g}{Q} x^2}$$

und

$$(13) \quad y = \frac{P}{Q} e^{-\frac{g}{Q} \cdot \frac{b^2}{4}} \int e^{\frac{g}{Q} x^2} \cdot dx.$$

Fig. 8.

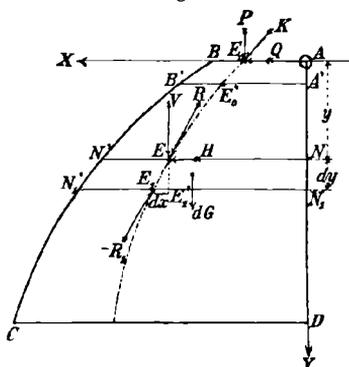


Dies ist die Gleichung der Druckkurve. Das vorstehende Integral kann nicht in endlicher Form entwickelt werden, doch hat Stieltjes Methoden angegeben, wie dasselbe berechnet werden kann.¹⁾

Das Profil des Widerlagers, dessen vordere Begrenzungslinie eine vertikale Gerade ist und dessen Druckkurve durch die Drittelpunkte der Fugen hindurchgeht.

Dieser Fall, bei welchem also gerade noch keine Zugspannungen auftreten, sei in der Fig. 4 dargestellt. Es ist auch hier wie früher $H = Q$. Das Glied M_g der Momentengleichung (1) wird gegen die anderen Glieder der Gleichung nicht mehr verschwinden, da die Entfernung der Kraft dG vom Momenten-

Fig. 4.



punkte E_1 endlich ist. Wegen der unendlichen Annäherung des Punktes E_1 an den Punkt E und der endlichen Entfernung der Kraft dG von diesen Punkten ist die Entfernung der Kraft dG von E_1 gleich ihrer Entfernung vom Punkte E und diese ist, wie sofort einzusehen, gleich $\frac{x}{4}$.

Es ist demnach

$$(14) \quad M_g = \frac{x}{4} dG = \frac{x}{4} \frac{3}{2} x g dy = \frac{3}{8} g x^2 dy,$$

und die Momentengleichung (1) lautet im vorliegenden Falle

$$(15) \quad V dx - Q dy + \frac{3}{8} g x^2 dy = 0,$$

und da

$$V = P + \frac{3}{2} g \int_0^x x dy,$$

so ist

$$(16) \quad P + \frac{3}{2} g \int_0^x x dy - Q \frac{dy}{dx} + \frac{3}{8} g x^2 \frac{dy}{dx} = 0.$$

Durch Differentiation dieser Gleichung nach x gelangt man zur Gleichung:

$$(17) \quad \left(\frac{3}{8} g x^2 - Q\right) \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{9}{4} g x \frac{dy}{dx} = 0$$

oder

$$(18) \quad \frac{\frac{d^2 y}{dx^2} dx}{\frac{dy}{dx}} = - \frac{18 g x}{3 g x^2 - 8 Q} dx,$$

1) Siehe Acta mathematica Bd. 9, 1886.

woraus durch Integration die Gleichung folgt:

$$(19) \quad \frac{dy}{dx} = C(3gx^2 - 8Q)^{-3}.$$

Für das Gleichgewicht des obersten Elementes gilt die Momentengleichung bezüglich E'_0 :

$$Pdx - Qdy + \frac{3}{8}gx_0^2dy = 0,$$

woraus:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right\}_{x=x_0} = - \frac{8P}{3yx_0^2 - 8Q}.$$

Es ist mit Rücksicht auf die Gleichung (19):

$$- \frac{8P}{3yx_0^2 - 8Q} = C(3gx_0^2 - 8Q)^{-3},$$

woraus:

$$C = - 8P(3gx_0^2 - 8Q)^2.$$

Es ist also:

$$(20) \quad \frac{dy}{dx} = - 8P(3gx_0^2 - 8Q)^2(3gx^2 - 8Q)^{-3}.$$

Wird nun der Einfachheit halber gesetzt:

$$(21) \quad \frac{8Q}{3g} = k^2,$$

so ist:

$$(22) \quad y = - \frac{8P}{3g} (x_0^2 - k^2)^2 \int \frac{dx}{(x^2 - k^2)^3}.$$

Die zu integrierende Funktion kann in folgende Partialbrüche zerlegt werden:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x^2 - k^2)^3} &= \frac{1}{8k^3} \cdot \frac{1}{(x - k)^3} - \frac{3}{16k^4} \cdot \frac{1}{(x - k)^2} + \frac{3}{16k^5} \cdot \frac{1}{x - k} - \frac{1}{8k^3} \cdot \frac{1}{(x + k)^3} \\ &\quad - \frac{3}{16k^4} \cdot \frac{1}{(x + k)^2} - \frac{3}{16k^5} \cdot \frac{1}{x + k}. \end{aligned}$$

Berücksichtigt man, daß für $x = x_0$, $y = 0$, so folgt durch Integration der Gleichung (22):

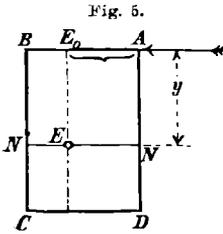
$$(23) \quad y = \frac{8P}{3k^2g} (x_0^2 - k^2)^2 \left\{ \frac{x}{(x^2 - k^2)^2} - \frac{x_0}{(x_0^2 - k^2)^2} - \frac{3}{2k^2} \left[\frac{x}{x^2 - k^2} - \frac{x_0}{x_0^2 - k^2} \right] - \frac{3}{4k^3} \operatorname{Log}_{\text{nat}} \frac{(x - k)(x_0 + k)}{(x + k)(x_0 - k)} \right\}.$$

Dies ist die Gleichung der Druckkurve $E_0EE_1E_1'$ und ist durch dieselbe das Widerlagerprofil vollkommen bestimmt.

Für $x = \pm k$ wird $y = \pm \infty$.

Es sind somit die Geraden $x = k$ und $x = -k$ Asymptoten dieser Kurve.

Die Begrenzungskurve $BN'N_1C$ entsteht aus der Druckkurve, wenn man deren Abszissen um die Hälfte vergrößert; sie hat demnach auch vertikale Asymptoten und deren Gleichungen sind $x = \frac{3}{2}k$ und $x = -\frac{3}{2}k$.



Wird $P = 0$ angenommen, d. h. wirkt auf das Widerlager nur eine horizontale Kraft Q , so kann y

nur dann endlich sein, wenn $x_0 = k = \sqrt{\frac{8Q}{3g}}$. In diesem Falle ist die Begrenzungskurve BC eine vertikale Gerade, wie dies durch folgende einfache Überlegungen bewiesen werden soll. In der nebenstehenden Figur sei dieses Profil dargestellt, wo also

$$\overline{AE_0} = \sqrt{\frac{8Q}{3g}}$$

und

$$\overline{AB} = \frac{3}{2}\overline{AE_0} = \sqrt{\frac{6Q}{g}}$$

ist.

Das Kippmoment bezüglich des Kernpunktes E einer beliebigen Fuge ist dann:

$$M = Q \cdot y - G \cdot \frac{\overline{AB}}{6} = Q \cdot y - \frac{g}{6} \cdot \overline{AB}^2 \cdot y = 0.$$

Diese Gleichung ist das Kriterium, daß die Druckkurve durch die Kernpunkte hindurchgeht und das Profil den gestellten Bedingungen entspricht. Eine bemerkenswerte Eigenschaft dieses Spezialfalles ist, daß die Druckkraft der obersten Fuge die Druckkurve unter einem rechten Winkel schneidet.

Untersuchung der wahren Hellegleichen auf der Kugel nach dem Lommel-Seeligerschen Gesetz.

Von HERBERT BURMESTER in Kairo.

(Mit zwei lithographierten Tafeln.)

I. Vorbemerkungen.

Bei der theoretischen Untersuchung der Verteilung der Helligkeit auf krummen Flächen denkt man sich die Fläche von parallelen Lichtstrahlen beleuchtet und von einem unendlich fernen Auge durch parallele Sehstrahlen betrachtet. Von einer krummen Fläche empfangen wir durch das Auge die Wahrnehmung, daß die Helligkeit auf ihr verschieden ist. Euler suchte die Gesetzmäßigkeit der Helligkeit dadurch zu bestimmen, daß er annahm, die wahre Helligkeit jedes Flächenelementes sei proportional dem Kosinus des Winkels λ , den der Lichtstrahl mit der Normalen des Flächenelementes bildet. Bezeichnet H die wahre Helligkeit und c eine Konstante, so ist die Formel für das *Eulersche Gesetz*:

$$(I) \quad H = c \cos \lambda.$$

Lambert¹⁾ nahm an, daß die Helligkeit auch noch proportional dem Kosinus des Ausfallwinkels σ sei, den der nach dem Auge gehende Lichtstrahl mit der Normalen des betrachteten Flächenelementes einschließt. Demnach ist die Formel für das *Lambertsche Gesetz*:

$$(II) \quad H = c \cos \lambda \cos \sigma.$$

Da sich diese beiden Gesetze als unwahrscheinlich erwiesen²⁾, gelangte Lommel³⁾ auf Anregung von Seeliger zu einem neuen Gesetz, bei welchem der Lichtverlust der ein- und der ausdringenden Lichtstrahlen innerhalb der Volumenelemente des beleuchteten Körpers berücksichtigt wurde. Bezeichnen k_λ und k_σ beziehentlich die Absorptionskoeffizienten für die ein- und ausdringenden Lichtstrahlen inner-

1) Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 32. J. H. Lambert, Photometrie, deutsch von E. Anding, 1892.

2) H. Seeliger, Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft. Bd. 21 (1886), S. 216, und Sitzungsberichte der mathem.-phys. Klasse der k. bayer. Akademie der Wissenschaften 1888. S. 201.

3) E. Lommel in Wiedemanns Annalen der Physik und Chemie Bd. 10 (1880), S. 449.

130 Wahre Hellegleichen auf der Kugel nach dem Lommel-Seeligerschen Gesetz.
 halb der Volumenelemente, so ist die Formel für das Lommel-
 Seeligersche Gesetz:

$$(III) \quad H = \frac{c' \cos \lambda \cos \sigma}{k_\lambda \cos \lambda + k_\sigma \cos \sigma}.$$

Wenn wir das Verhältnis $\frac{k_\lambda}{k_\sigma}$ gleich k und die Konstante $\frac{c'}{k_\sigma}$ gleich c setzen, dann ist

$$(IIIa) \quad H = \frac{c \cos \lambda \cos \sigma}{k \cos \lambda + \cos \sigma}.$$

Nach dem Vorgange von Anding¹⁾ nehmen wir an, daß für die Beurteilung der Helligkeit eines Flächenelementes nicht nur die Intensität der wahren Helligkeit in Betracht kommt, sondern auch die Dichte der in das Auge fallenden Strahlen. Denkt man sich nun, daß das Auge die Fläche gleichsam mit einem Sehstrahlenzylinder von konstanter Öffnung $d\varphi$ abtastet, so wird jedes Flächenelement df in einer scheinbaren Größe $d\varphi$ gesehen und die Dichte der in das Auge gelangenden Strahlen, die von df ausgehen, wird also umgekehrt proportional dem Verhältnisse $\frac{d\varphi}{df} = \cos \sigma$. Denn, wenn dQ die scheinbare Helligkeit eines Flächenelementes df bezeichnet, so ist

$$dQ = Hdf = H \frac{d\varphi}{\cos \sigma};$$

und demnach ergeben sich aus (I), (II), (IIIa) die folgenden Formeln für die scheinbare Helligkeit:

$$(I) \quad \text{Eulersches Gesetz} \quad dQ = \frac{c \cos \lambda d\varphi}{\cos \sigma},$$

$$(II') \quad \text{Lambertsches Gesetz} \quad dQ = c \cos \lambda d\varphi,$$

$$(III'a) \quad \text{Lommel-Seeligersches Gesetz} \quad dQ = \frac{c \cos \lambda d\varphi}{k \cos \lambda + \cos \sigma}.$$

Nach den Gleichungen (I), (II), (IIIa) und (I'), (II'), (III'a) werden auf einer durch ihre Gleichung $F(x, y, z) = 0$ gegebenen Fläche beziehentlich die Kurven der gleichen wahren und der gleichen scheinbaren Helligkeit bestimmt, die wir *wahre*, beziehungsweise *scheinbare Hellegleichen* nennen wollen. Aus den übereinstimmenden Formeln (I) und (II') folgt, daß die wahren Hellegleichen nach dem Eulerschen Gesetz und die scheinbaren Hellegleichen nach dem Lambertschen Gesetz gleich sind. Die Hellegleichen sind nach dem Eulerschen Gesetz $H = c \cos \lambda$ und dem Lambertschen Gesetz $H = c \cos \lambda \cos \sigma$ für

1) E. Anding, *Astronomische Nachrichten* Bd. 129 (1892), S. 377.

viele gesetzmäßig gestaltete Flächen ausführlich behandelt und dargestellt.¹⁾

Auf der Kugel erscheinen in dem meistens angenommenen speziellen Fall $k = 1$, nach dem Lommel-Seeligerschen Gesetz, welches von den drei genannten am besten mit den experimentellen Beobachtungen übereinstimmt²⁾, die scheinbaren Hellegleichen projiziert auf eine zur Sehrichtung senkrechte Ebene als Halbellipsen³⁾, deren gemeinsame große Achse die Projektion des auf der Ebene des Winkels der ein- und ausfallenden Lichtstrahlen senkrechten Kugeldurchmessers ist. Diese Folge, daß die scheinbaren Hellegleichen der Kugel alle in zwei Polen zusammenlaufen sollen, ist physikalisch nicht wahrscheinlich. Außerdem ist die Annahme, daß bei der Betrachtung einer beleuchteten Fläche stets ein Strahlenzylinder von konstantem Querschnitte in das Auge gelangt, nicht streng zutreffend; denn je größer die Intensität des in das Auge gelangenden Lichtes ist, desto mehr verengert sich die Pupille und es können auch noch andere uns unbekanntere physiologische Einwirkungen die Wahrnehmung der Helligkeit bedingen.

Von diesen Einflüssen ist die wahre Helligkeit unabhängig und deshalb sollen die noch nicht bekannten wahren Hellegleichen, die sich auf der Kugel nach dem Lommel-Seeligerschen Gesetz ergeben, untersucht und konstruiert werden. Vorher wollen wir aber die allgemeinen für jede Fläche geltenden Gleichungen der wahren Hellegleichen ableiten.

II. Ableitung der allgemeinen Gleichungen der wahren Hellegleichen der Kugel nach dem Lommel-Seeligerschen Gesetz.

Bei der Untersuchung der Hellegleichen kommen in dem Lommel-Seeligerschen Gesetz

$$H = \frac{c \cos \lambda \cos \sigma}{k \cos \lambda + \cos \sigma}$$

nur die relativen Werte der Helligkeit H in Betracht, deshalb können wir die Konstante $c = 1$ setzen und die Formel

$$(IIIb) \quad H = \frac{\cos \lambda \cos \sigma}{k \cos \lambda + \cos \sigma}$$

verwenden.

1) L. Burmester, Theorie und Darstellung der Beleuchtung gesetzmäßig gestalteter Flächen, 1871. In diesem Werke werden die Hellegleichen für $H = c \cos \lambda \cos \sigma$ *Isophoten*, für $H = c \cos \lambda \cos \sigma$ *Isophengen* genannt.

2) Seeligér a. a. O.

3) E. Anding a. a. O.

Eine von parallelen Lichtstrahlen beleuchtete Fläche sei durch ihre Gleichung

$$(1) \quad F(x, y, z) = 0$$

gegeben. Es seien

$$\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$$

die Winkel, welche die Lichtrichtung l mit den positiven Richtungen der Koordinatenachsen einschließt, und

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$$

die Winkel, welche die Sehrichtung s mit den positiven Richtungen der Koordinatenachsen bildet. Ferner sei zur Abkürzung gesetzt:

$$l_x = \cos \lambda_x, \quad l_y = \cos \lambda_y, \quad l_z = \cos \lambda_z, \\ s_x = \cos \sigma_x, \quad s_y = \cos \sigma_y, \quad s_z = \cos \sigma_z.$$

Da der Winkel zwischen der Lichtrichtung l und der Normalen eines Flächenelementes mit λ , ferner der Winkel zwischen der Sehrichtung s und der Normalen des Flächenelementes mit σ bezeichnet ist, so erhalten wir

$$(2) \quad \cos \lambda = \frac{l_x \frac{\partial F}{\partial x} + l_y \frac{\partial F}{\partial y} + l_z \frac{\partial F}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}$$

und

$$(3) \quad \cos \sigma = \frac{s_x \frac{\partial F}{\partial x} + s_y \frac{\partial F}{\partial y} + s_z \frac{\partial F}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}.$$

Durch Einsetzen der Werte für $\cos \lambda$ und $\cos \sigma$ aus (2) und (3) in Gleichung (IIIb) ergibt sich:

$$(4) \quad H = \frac{\left(l_x \frac{\partial F}{\partial x} + l_y \frac{\partial F}{\partial y} + l_z \frac{\partial F}{\partial z}\right) \left(s_x \frac{\partial F}{\partial x} + s_y \frac{\partial F}{\partial y} + s_z \frac{\partial F}{\partial z}\right)}{\left[k \left(l_x \frac{\partial F}{\partial x} + l_y \frac{\partial F}{\partial y} + l_z \frac{\partial F}{\partial z}\right) + s_x \frac{\partial F}{\partial x} + s_y \frac{\partial F}{\partial y} + s_z \frac{\partial F}{\partial z}\right] \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}.$$

Diese Gleichung repräsentiert für konstante Werte von H ein System von Flächen; und die Schnittkurven, die diese Flächen mit der durch die Gleichung $F(x, y, z) = 0$ gegebenen Fläche bilden, sind die Hellegleichen dieser Fläche nach dem Lommel-Seeligerschen Gesetz. Es sind aber zu unterscheiden: erstens die *wahren Hellegleichen*, welche die physikalische Bedingung erfüllen, daß die Lichtrichtung und die Sehrichtung nach einer Seite der Flächenelemente liegen; zweitens die *virtuellen Hellegleichen*, bei denen die Lichtrichtung nach der einen und

die Sehrichtung nach der anderen Seite der Flächenelemente gelegen ist. Die virtuellen Hellegleichen haben keine physikalische Bedeutung, weil die betreffenden Flächenelemente mit ihrer nicht beleuchteten Seite nach dem Beobachter gewendet sind.

Zur Vereinfachung der Gleichung (4) nehmen wir unbeschadet der Allgemeinheit die ausgezeichnete Ebene, welche die durch den Koordinatenanfang gehenden Parallelen zur Lichtrichtung l und zur Sehrichtung s enthält, als xy -Ebene, die wir auch die *Richtungenebene* nennen wollen. Ferner nehmen wir die Halbierungsgerade des Winkels zwischen der Licht- und Sehrichtung als die positive y -Achse und bezeichnen diesen Winkel mit 2ε ; dann ist, wenn die Sehrichtung s innerhalb des von der positiven x - und y -Achse gebildeten rechten Winkels liegt:

$$\begin{aligned} l_x &= -\sin \varepsilon, & l_y &= \cos \varepsilon, & l_z &= 0 \\ s_x &= \sin \varepsilon, & s_y &= \cos \varepsilon, & s_z &= 0. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen dieser Werte in die Gleichung (4) folgt:

$$(5) \quad H = \frac{\cos^2 \varepsilon \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 - \sin^2 \varepsilon \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2}{\left[(1-k) \sin \varepsilon \frac{\partial F}{\partial x} + (1+k) \cos \varepsilon \frac{\partial F}{\partial y}\right] \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}.$$

Bezeichnen wir die Winkel, die die Normale eines Flächenelementes mit der positiven x - und y -Achse bildet, beziehentlich mit ν_x und ν_y , so ist

$$\cos \nu_x = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}, \quad \cos \nu_y = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}};$$

dann erhalten wir aus der Gleichung (5)

$$(6) \quad H = \frac{\cos^2 \varepsilon \cos^2 \nu_y - \sin^2 \varepsilon \cos^2 \nu_x}{(1-k) \sin \varepsilon \cos \nu_x + (1+k) \cos \varepsilon \cos \nu_y}$$

und für $k = 1$

$$(6a) \quad H = \frac{\cos^2 \varepsilon \cos^2 \nu_y - \sin^2 \varepsilon \cos^2 \nu_x}{2 \cos \varepsilon \cos \nu_y}$$

Aus der Gleichung (6) folgt, wenn die Flächennormale parallel zur x -Achse, also $\cos \nu_x = \pm 1$, $\cos \nu_y = 0$ ist, der Helligkeitswert

$$H_x = \mp \frac{\sin \varepsilon}{(1-k)};$$

und ferner, wenn die Flächennormale parallel zur y -Achse, also $\cos \nu_x = 0$, $\cos \nu_y = \pm 1$ ist, der Helligkeitswert

$$H_y = \pm \frac{\cos \varepsilon}{1+k}.$$

Für den speziellen Fall $k = 1$ ergeben sich die maximalen Helligkeitswerte

$$H_x = \pm \infty, \quad H_y = \pm \frac{1}{2} \cos \varepsilon.$$

Wenn die Flächennormale parallel zur z -Achse ist, dann wird $\cos v_x = 0$, $\cos v_y = 0$, und aus den Gleichungen (6), (6a) folgt der unbestimmte Helligkeitswert

$$H_z = \frac{0}{0},$$

weil in diesen Gleichungen Zähler und Nenner voneinander unabhängig sind. Diese Flächennormalen bestimmen auf der Fläche die Berührungspunkte der zur Richtungenebene parallelen Tangentialebenen. Durch diese Berührungspunkte gehen demnach alle virtuellen Hellegleichen.

Ausgezeichnet ist ferner die Hellegleiche für den Helligkeitswert $H = 0$; denn aus der Gleichung (4) folgt die Doppelgleichung

$$(7) \begin{cases} (7a) & l_x \frac{\partial F}{\partial x} + l_y \frac{\partial F}{\partial y} + l_z \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \\ (7b) & s_x \frac{\partial F}{\partial x} + s_y \frac{\partial F}{\partial y} + s_z \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \end{cases}$$

aus der sich zusammen mit der Fläche $F(x, y, z) = 0$ eine aus zwei Teilen bestehende Kurve ergibt. Der Gleichung (7a) entspricht die Kurve, in welcher die beleuchtete Fläche von einer zu den Lichtstrahlen parallelen Zylinderfläche berührt wird, während der Gleichung (7b) die Kurve entspricht, in welcher die Fläche von einer zu den Sehstrahlen parallelen Zylinderfläche berührt wird. Die Kurve von (7a) ist die Grenze zwischen Licht und Schatten, die Kurve von (7b) die Grenze zwischen sichtbarem und unsichtbarem Flächenteil; deshalb wollen wir diese Hellegleiche die *Grenzhellegleiche* nennen.

III. Die allgemeinen und die speziellen Hellegleichen der Kugel und ihre Projektionen auf die Koordinatenebenen.

Es sollen nun die Hellegleichen der Kugel für das Lommel-Seeligersche Gesetz untersucht werden, weil die Kugel die einfachste Fläche ist, deren Flächenelemente in jeder Lage vorkommen. Aus der Gleichung der Kugel, deren Radius R und deren Mittelpunkt der Koordinatenanfang ist,

$$(8) \quad F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

folgt

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z,$$

und durch Einsetzen dieser Werte in die Gleichung (5) erhalten wir:

$$(9) \quad H = \frac{y^2 \cos^2 \varepsilon - x^2 \sin^2 \varepsilon}{[x(1-k) \sin \varepsilon + y(1+k) \cos \varepsilon] \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Diese Gleichung repräsentiert für konstante Werte von $\pm H$ Kegelflächen vierter Ordnung, die ihre Spitzen in dem Kugelmittelpunkt haben und von der Richtungsebene xy symmetrisch geteilt werden. Die Schnittkurven, die diese Flächen mit der Kugelfläche bilden und sich aus den beiden Gleichungen (8), (9) ergeben, sind die allgemeinen Hellegleichen der Kugel nach dem Lommel-Seeligerschen Gesetz. Hieraus folgt:

Die Hellegleichen der Kugel sind Raumkurven achter Ordnung, die gemäß dem positiven und negativen Vorzeichen aus zwei symmetrisch gleichen Teilen bestehen.

In dem speziellen Fall $k = 1$ ergibt sich für die Kegelflächen die Gleichung

$$(9a) \quad H = \frac{y^2 \cos^2 \varepsilon - x^2 \sin^2 \varepsilon}{2y \cos \varepsilon \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

und diese Kegelflächen werden von jeder der drei Koordinatenebenen symmetrisch geteilt, die demnach auch Symmetralebenen der speziellen Hellegleichen sind.

Durch Einsetzung von

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \pm R$$

in die Gleichung (9) erhalten wir

$$(10) \quad \pm HR = \frac{y^2 \cos^2 \varepsilon - x^2 \sin^2 \varepsilon}{x(1-k) \sin \varepsilon + y(1+k) \cos \varepsilon}$$

und durch Umformung

$$(10a) \quad \left[x \pm \frac{HR(1-k)}{2 \sin \varepsilon} \right]^2 \frac{2 \sin^2 \varepsilon}{H^2 R^2 (1+k^2)} - \left[y \mp \frac{HR(1+k)}{2 \cos \varepsilon} \right]^2 \frac{2 \cos^2 \varepsilon}{H^2 R^2 (1+k^2)} + 1 = 0$$

Diese Gleichung repräsentiert die Projektionen der allgemeinen Hellegleichen der Kugel auf die Richtungsebene xy ; und für konstante Werte von $\pm H$ ergeben sich je zwei schief symmetrisch liegende gleiche, durch den Koordinatenanfang als Kugelmittelpunkt gehende Hyperbeln, deren Mittelpunktkoordinaten

$$n_x = \mp \frac{HR(1-k)}{2 \sin \varepsilon}, \quad n_y = \pm \frac{HR(1+k)}{2 \cos \varepsilon}$$

und deren Halbachsen

$$a = \frac{HR\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{2} \sin \varepsilon}, \quad b = \frac{HR\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{2} \cos \varepsilon}$$

der Helligkeit H proportional sind. Die Hauptachsen sind zu der y -Achse parallel.

Ferner ist das Verhältnis

$$\frac{a}{b} = \operatorname{ctg} \varepsilon.$$

Für $H = 0$ entartet das Hyperbelpaar in die doppelzähligen Geraden

$$\frac{y}{x} = \pm \operatorname{tg} \varepsilon,$$

die in dem Koordinatenanfang beziehentlich auf der Licht- und Sehrichtung senkrecht stehen; und die Asymptoten der Hyperbeln sind zu diesen Geraden parallel.

Für $H = \pm \infty$ entartet das Hyperbelpaar in die doppelzählige Gerade

$$\frac{y}{x} = -\frac{1-k}{1+k} \operatorname{tg} \varepsilon,$$

die von allen Hyperbeln im Koordinatenanfang berührt wird und in die doppelzählige unendlich ferne Gerade.

Hiernach ergibt sich der Satz:

Die Projektionen der allgemeinen Hellegleichen der Kugel auf die Richtungsebene bilden ein Büschel ähnlicher und bezüglich des Kugelmittelpunktes ähnlich liegender Hyperbeln, die sich in demselben berühren und durch die unendlich fernen Punkte der auf der Licht- und Sehrichtung senkrechten Geraden gehen.

Da diese Hyperbeln sich im Kugelmittelpunkt berühren, so sind die Endpunkte des auf der Richtungsebene senkrechten Durchmessers der Kugel die singulären Punkte der Hellegleichen. Vermittels dieser Projektionen können die allgemeinen Hellegleichen auf der Kugel konstruiert werden.

Da die Projektionen der allgemeinen Hellegleichen auf die xz -Ebene und die yz -Ebene verwickelt sind, so wollen wir nur in dem speziellen Fall $k = 1$ die Gleichungen für die Projektionen der Hellegleichen auf die drei Koordinatenebenen xy , xz , yz betrachten, die Symmetralebenen der speziellen Hellegleichen sind.

Um diese Projektionen in Fig. 1, Taf. I zu konstruieren, nehmen wir drei Ebenen, die den Koordinatenebenen xy , xz , yz parallel sind, als Grundriß-, Aufriß- und Seitenrißebene für die dargestellte Kugel, deren Mittelpunktprojektionen mit O_1 , O_2 , O_3 bezeichnet sind. Die in der Grundrißebene liegende Lichtrichtung l_1 und Sehrichtung s_1 bilden den Winkel 2ε , für den $\operatorname{tg} 2\varepsilon = \sqrt{2}$ angenommen ist; und die Halbierungsgerade dieses Winkels ist die positive y_1 -Achse.

Aus der Gleichung (10a) ergibt sich dann für die Grundrißprojektionen die Gleichung der Hyperbeln

$$x^2 \frac{\sin^2 \varepsilon}{H^2 k^2} - \left[y \mp \frac{HR}{\cos \varepsilon} \right]^2 \frac{\cos^2 \varepsilon}{H^2 R^2} + 1 = 0,$$

deren Mittelpunktkoordinaten

$$n_x = 0, \quad n_y = \pm \frac{HR}{\cos \varepsilon}$$

und deren Halbachsen

$$a = \frac{HR}{\sin \varepsilon}, \quad b = \frac{HR}{\cos \varepsilon}$$

sind. Demnach liegen die Hauptachsen dieser Hyperbeln in der y -Achse, und wir erhalten den Satz:

Die Grundrißprojektionen der speziellen Hellegleichen der Kugel bilden ein Bündel ähnlicher und bezüglich des Mittelpunktes O_1 des Konturkreises K_1 ähnlich liegender Hyperbeln, die in O_1 mit dem einen ihrer Scheitel die x -Achse berühren und durch die unendlich fernen Punkte der auf der Licht- und Schrichtung senkrechten Geraden gehen.

Für den Radius R der Kugel als Einheit sind beispielsweise die den Werten $H = \pm 0,2, \pm 0,4$ entsprechenden Hyperbeln $h_1^2 i_1^2, h_1^2 i_1^2$ und $h_1^4 i_1^4, h_1^4 i_1^4$ im Grundriß konstruiert. Die den positiven Werten entsprechenden Hyperbeln sind mit der Marke 1, die den negativen Werten entsprechenden Hyperbeln mit der Marke I bezeichnet.

Für den Wert $H = 0$ entartet das Hyperbelpaar in die doppelzähligen Geraden h_1^0, h_1^0 , die in dem Mittelpunkt O_1 beziehentlich zu der Lichtrichtung l_1 und der Schrichtung s_1 senkrecht sind. Die Gerade h_1^0 ist im Grundriß die Grenze der beleuchteten Halbkugel und die Gerade h_1^0 die Grenze der sichtbaren Halbkugel.

Die zwischen den Geraden h_1^0, h_1^0 befindlichen und durch den Mittelpunkt O_1 gehenden Hyperbeläste i_1^2, i_1^2 und i_1^4, i_1^4 sind die Grundrißprojektionen der virtuellen Hellegleichen; denn bei diesen liegen die Lichtrichtung und die Schrichtung als geometrische Geraden zu beiden Seiten der betreffenden Flächenelemente.

Für den Wert $H = \pm \infty$ entartet das Hyperbelpaar in die doppelzählige, auf der x -Achse liegende Gerade h_1^∞ und in die doppelzählige, unendlich ferne Gerade. Die Hyperbeläste h_1^2, h_1^4 sind die Grundrißprojektionen der wahren Hellegleichen auf der beleuchteten Halbkugel; und die Hyperbeläste h_1^2, h_1^4 sind die Grundrißprojektionen der wahren Hellegleichen in der hohlen Halbkugel, in die die Lichtstrahlen einfallen, wenn jene als nicht vorhanden angenommen wird.

Vermittels dieser Grundrißprojektionen werden die doppelt entsprechenden Aufrißprojektionen $h_2^0 h_2^0; h_2^2 h_2^2; i_2^2 i_2^2, h_2^4 h_2^4, i_2^4 i_2^4$ konstruiert, die Kurven vierter Ordnung sind. Die Aufrißprojektion $h_2^0 h_2^0$ ist eine doppelzählige Ellipse, und die anderen Aufrißprojektionen bestehen aus je zwei doppelzähligen Ovalen, von denen die den virtuellen Hellegleichen entsprechenden durch die Endpunkte Z_2, Z_2' des zur Grundrißebene senkrechten Kugeldurchmessers gehen. Dem Durchmesser h_1^∞ des Konturkreises K_1 entspricht im Aufriß der Konturkreis h_2^∞ .

Für die maximalen Werte $H = \pm \frac{1}{2} \cos \varepsilon$ berühren die beiden entsprechenden Hyperbeln den Konturkreis K_1 in den auf der y_1 -Achse liegenden Punkten Y_1, Y'_1 , denen im Aufriß der Mittelpunkt O_2 entspricht.

Indem wir y aus den Gleichungen (8), (9a) eliminieren, ergibt sich für die Aufrißprojektionen der speziellen Hellegleichen die folgende komplizierte Gleichung vierten Grades:

$$(x^2 + z^2 \cos^2 \varepsilon)^2 + 2x^2 R^2 (2H^2 - 1) \cos^2 \varepsilon + 2z^2 R^2 (2H^2 - \cos^2 \varepsilon) \cos^2 \varepsilon \\ = R^4 (4H^2 - \cos^2 \varepsilon) \cos^2 \varepsilon.$$

Durch die Einsetzung der Polarkoordinaten ϱ, φ , bei denen die x -Achse die Polarachse und

$$x = \varrho \cos \varphi, \quad z = \varrho \sin \varphi, \quad x^2 + z^2 = \varrho^2$$

ist, folgt die auf ϱ reduzierte Polargleichung

$$\varrho = \frac{R \cos \varepsilon}{1 - \sin^2 \varepsilon \sin^2 \varphi} \sqrt{(1 - \sin^2 \varepsilon \sin^2 \varphi) - 2H^2 \pm 2H \sqrt{H^2 + \tan^2 \varepsilon \cos^2 \varphi} (1 - \sin^2 \varepsilon \sin^2 \varphi)}.$$

Für die Seitenrißprojektionen erhalten wir durch Elimination von x aus den Gleichungen (8), (9a) die Gleichung

$$y^2 + z^2 \sin^2 \varepsilon \mp 2yHR \cos \varepsilon - R^2 \sin^2 \varepsilon = 0,$$

und durch Umformung folgt

$$\frac{(y \mp HR \cos \varepsilon)^2}{R^2 (H^2 \cos^2 \varepsilon + \sin^2 \varepsilon)} + \frac{z^2 \sin^2 \varepsilon}{R^2 (H^2 \cos^2 \varepsilon + \sin^2 \varepsilon)} - 1 = 0.$$

Diese Gleichung repräsentiert für konstante Werte von $\pm H$ je zwei zur z_3 -Achse symmetrisch liegende Ellipsen, die durch die Punkte Z_3, Z'_3 gehen, in welchen die z_3 -Achse den Konturkreis c_3 schneidet. Die Halbachsen dieser Ellipsen, deren auf der y_3 -Achse liegende Mittelpunkte vom Koordinatenanfang O_3 den Abstand $\nu_y = \pm HR \cos \varepsilon$ haben, sind

$$\beta = R \sqrt{H^2 \cos^2 \varepsilon + \sin^2 \varepsilon}, \quad \gamma = \frac{R}{\sin \varepsilon} \sqrt{H^2 \cos^2 \varepsilon + \sin^2 \varepsilon},$$

und ferner ist

$$\frac{\beta}{\gamma} = \sin \varepsilon.$$

Aus der Gleichung dieser Ellipsen folgt der Satz:

Die Seitenrißprojektionen der speziellen Hellegleichen der Kugel bilden ein Büschel ähnlicher Ellipsen, die durch die Punkte Z_3, Z'_3 und durch zwei auf der unendlich fernen Geraden liegende imaginäre Punkte gehen.

Den Werten $H = 0, \pm 0,2, \pm 0,4, \pm \infty$ entsprechen die jenen Hyperbeln gemäß doppelt bezeichneten Ellipsenpaare $h_3^0 h_3^0; h_3^2 h_3^2,$

$h_{III}^2 i_{III}^2$; $h_3^2 i_3^2$, $h_{III}^4 i_{III}^4$; h_3^∞ . Für $H = 0$ entartet das Ellipsenpaar in die doppelzählige Ellipse $h_3^0 h_3^0$, für $H = \infty$ entartet es in den doppelzähligen auf der z_3 -Achse liegenden Durchmesser h_3^∞ und in die doppelzählige, unendlich ferne Gerade.

Somit erhalten wir aus diesen Darlegungen den Satz:

Die speziellen Hellegleichen der Kugel sind erstens Schnittkurven, die ein Büschel von zur xy -Ebene senkrechten und zur xz -Ebene symmetrischen hyperbolischen Zylinderflächenpaaren mit der Kugelfläche bildet, zweitens auch die Schnittkurven, die ein Büschel von zur xy -Ebene senkrechten und zur xz -Ebene symmetrischen elliptischen Zylinderflächenpaaren mit der Kugelfläche bildet. Diese Schnittkurven, als Raumkurven achter Ordnung, bestehen aus je zwei zur xz -Ebene symmetrischen Raumkurven vierter Ordnung.

Durch jede dieser Raumkurven vierter Ordnung können außer der zur z -Achse parallelen hyperbolischen Zylinderfläche und der zur x -Achse parallelen elliptischen Zylinderfläche noch zwei Kegelflächen zweiten Grades gelegt werden, deren Spitzen in der y_1 -Achse liegen. Denn die Eckpunkte des gemeinschaftlichen Polardreiecks einer jener Hyperbeln und des Konturkreises K_1 der Kugel im Grundriß, von denen der eine Eckpunkt der unendlich ferne Punkt der x_1 -Achse ist und die beiden anderen Eckpunkte auf der y_1 -Achse liegen, nebst dem unendlich fernen Punkt der z_2 -Achse sind die vier Eckpunkte des gemeinschaftlichen Polartetraeders der Kugelfläche und der beiden betreffenden Zylinderflächen.

IV. Elementare Ableitung der wahren Hellegleichen der Kugel und Konstruktion ihrer Projektionen auf eine zur Sehrichtung senkrechte Ebene.

Die Hellegleichen der Kugel können anstatt aus den allgemeinen für alle Flächen geltenden Gleichungen auch in elementarer Weise abgeleitet werden. In Fig. 2 ist um den Mittelpunkt O mit dem Radius R der Konturkreis K der Kugel in der Richtungenebene beschrieben, die die Lichtrichtung l und die Sehrichtung s enthält. Die Winkel λ , σ , welche die Normale eines Flächenelementes der Kugel beziehentlich mit der Lichtrichtung l und der Sehrichtung s bilden, bestimmen auf der Kugelfläche zwei zur Richtungenebene symmetrisch liegende Punkte, denen als senkrechte Projektion auf dieselbe ein Punkt P entspricht. Füllen wir von dem Punkt P auf die Lichtrichtung l die Senkrechte PP_1 und auf die Sehrichtung die Senkrechte PP_2 , dann ist

$$OP_1 = R \cos \lambda, \quad OP_2 = R \cos \sigma.$$

Wenn wir die Strecke OP mit ρ und den Winkel mOP , den die

140 Wahre Hellegleichen auf der Kugel nach dem Lommel-Seeligerschen Gesetz.

Gerade OP mit der Halbierungsgeraden m des Winkels $\angle OS = 2\varepsilon$ einschließt, mit φ bezeichnen, so ist

$$R \cos \lambda = \rho \cos (\varepsilon + \varphi), \quad R \cos \sigma = \rho \cos (\varepsilon - \varphi).$$

Durch Einsetzung der hiernach sich ergebenden Ausdrücke für $\cos \lambda$ und $\cos \sigma$ in die Formel für das Lommel-Seeligersche Gesetz

$$H = \frac{\cos \lambda \cos \sigma}{k \cos \lambda + \cos \sigma}$$

erhalten wir

$$H = \frac{\rho \cos (\varepsilon + \varphi) \cos (\varepsilon - \varphi)}{R[k \cos (\varepsilon + \varphi) + \cos (\varepsilon - \varphi)]}$$

und

$$(11) \quad \rho = HR \frac{k \cos (\varepsilon + \varphi) + \cos (\varepsilon - \varphi)}{\cos (\varepsilon + \varphi) \cos (\varepsilon - \varphi)}$$

oder

$$(11a) \quad \rho = HR[k \sec (\varepsilon - \varphi) + \sec (\varepsilon + \varphi)].$$

Aus dieser Gleichung, die in den Polarkoordinaten ρ, φ für konstante Werte von H die Projektionen der Hellegleichen auf die Richtungenebene repräsentiert, ergibt sich die folgende Konstruktion der Fahrstrahlen ρ , die auf den durch den Mittelpunkt O gehenden Geraden liegen. Um diese Konstruktion beispielsweise für $H = 1$ auszuführen, betrachten wir den Radius R als Einheit und nehmen $k = \frac{1}{2}$ an. Der Konturkreis K schneidet die Lichtrichtung l in den Punkten L, L_T und die Sehrichtung s einerseits in dem Punkt S . Durch den Punkt L ziehen wir auf l die Senkrechte ξ ; auf der Sehrichtung s machen wir die Strecke $OS_k = kR = \frac{1}{2}R$ und ziehen durch S_k auf s die Senkrechte ψ . Die durch den Winkel φ gegebene Gerade OP schneidet ξ, ψ in den Punkten Ξ, Ψ ; dann ist

$$O\Xi = HR \sec (\varepsilon + \varphi), \quad O\Psi = HRk \sec (\varepsilon - \varphi).$$

Ferner machen wir auf OP die Strecke $\Xi\Phi = O\Psi$, und demnach ist

$$\rho = O\Phi = O\Xi + \Xi\Phi.$$

Nach dieser Konstruktion ist der Punkt Φ ein Punkt einer durch O gehenden Hyperbel hi , deren Asymptoten die beziehentlich auf l, s senkrechten Geraden ξ, ψ sind, weil eine Hyperbel die Eigenschaft hat, daß auf jeder Sekante derselben gleiche Strecken zwischen der Hyperbel und den Asymptoten liegen. Auf der durch den Schnittpunkt M der Asymptoten ξ, ψ , den Mittelpunkt der Hyperbel hi , gehenden Geraden OM erhalten wir den Hyperbelpunkt Φ_m , indem wir $M\Phi_m = OM$ machen, und demnach ist $O\Phi_m$ ein Durchmesser der Hyperbel. Ferner ist noch auf einer beliebigen Geraden Of_x , die ξ, ψ in den Punkten

Ξ_x, Ψ_x schneidet, durch $\Xi_x \Phi_x = O \Psi_x$ der Hyperbelpunkt Φ_x gezeichnet. Die Tangente h^∞ , die in dem Punkt O die Hyperbel hi berührt, wird durch den Schnittpunkt M_1 der in L_1 auf l senkrechten Geraden ξ_1 und der Geraden ψ bestimmt; denn es ist O die Mitte der zwischen den Asymptoten ψ, ξ auf ihr liegenden Strecke $M_1 \Xi_1$ und somit auf ihr auch $\rho = 0$.

Für $H = \infty$ entartet also die zugehörige Hyperbel in diese Tangente h^∞ , die von allen, den verschiedenen Werten von H entsprechenden Hyperbeln in O berührt wird, und in die unendlich ferne Gerade.

Für $H = 0$ entartet die Hyperbel in die in O auf l und s senkrechten Geraden h^0, h^s , die auch mit l' und s' bezeichnet sind. Aus dieser Konstruktion ergeben sich synthetisch dieselben Beziehungen dieser Hyperbeln, die S. 135 analytisch abgeleitet sind. Denn diese Hyperbeln sind ähnlich und ähnlich liegend in bezug auf O als Ähnlichkeitspunkt, sie berühren die Gerade h^∞ in dem Punkt O und gehen durch die unendlich fernen Punkte der Geraden l', s' , weil ihre Asymptoten diesen Geraden parallel sind. Die Hauptachsen dieser Hyperbeln sind demnach parallel zu der Halbierungsgeraden m des Winkels lOs und ihre Nebenachsen senkrecht zu derselben. Die Größen der Halbachsen dieser Hyperbeln sind durch die Gleichungen S. 135 bestimmt. Wenn eine der Hyperbeln wie etwa hi gezeichnet ist, ergeben sich die anderen den einzelnen Werten von H entsprechenden ähnlichen Hyperbeln durch proportionale Teilung der Fahrstrahlen der Hyperbel hi . So wird z. B. für $H = 0,5$ die entsprechende Hyperbel $h^5 i^5$ durch die Halbierungspunkte dieser Fahrstrahlen bestimmt. Diese Hyperbel kann auch, ebenso wie vorhin, vermittels ihrer Asymptoten konstruiert werden, die in den Halbierungspunkten der Strecken OL, OS_k auf l und s senkrecht stehen. Die Scheitel D, D^5 der Hyperbeln $hi, h^5 i^5$ befinden sich auf einer durch O gehenden Geraden. Zu diesen Hyperbeln liegen die den gleichen negativen Werten von H entsprechenden Hyperbeln schief symmetrisch in bezug auf die Tangente h^∞ . Für den speziellen Fall $k = 1$ enthält die Halbierungsgerade m die Hauptachsen der Hyperbeln und sie berühren in einem ihrer Scheitel in dem Punkt O die auf m senkrechte Gerade m' .

Von den Hyperbeln kommen physikalisch nur die innerhalb des Konturkreises K liegenden Teile der nicht durch O gehenden Hyperbeläste in Betracht, denen die wahren Hellegleichen entsprechen und den anderen durch O gehenden Hyperbelästen i, i^5 entsprechen die virtuellen Hellegleichen.

Die Bestimmung derjenigen Punkte der Hyperbeläste h, h^5 in denen die um den Mittelpunkt O beschriebenen Kreise diese Hyperbeläste be-

rühren, erfordert rechnerisch die Lösung einer Gleichung dritten Grades, weil von einem auf einer Hyperbel liegenden Punkt O drei Normalen an die Hyperbel gehen, von denen im vorliegenden Fall nur eine reell ist. Um aber diese Lösung zu vermeiden, können wir z. B. auf dem Hyperbelast h den Berührungspunkt N konstruktiv bestimmen, indem wir um O etwa drei Kreisbögen beschreiben, die diesen Hyperbelast schneiden und durch die Halbierungspunkte dieser Kreisbögen die Hilfskurve θ zeichnen, die in ihrer Fortsetzung den Hyperbelast h im Berührungspunkt N trifft. Die Berührungspunkte auf diesen Hyperbelästen und die als solche von dem Punkt O den kleinsten Abstand haben, liegen auf der Geraden ON , die demnach auf dem Hyperbelast h^5 den Berührungspunkt N^5 und auf dem Konturkreis K den Punkt N^m der maximalen Helligkeit bestimmt.

Nehmen wir bei der Sebrichtung s eine der Lichtrichtung l entgegengesetzte Lichtrichtung l_1 an, die den Konturkreis K in dem Punkt L_1 trifft, dann ist, wenn wir mit $2\varepsilon'$ den Winkel $l_1 Os$, dessen Halbierungsgerade m' ist, bezeichnen, $\varepsilon' = 90^\circ - \varepsilon$, und wir erhalten durch dieselbe Konstruktion wie vorher für bestimmte Werte von H Hyperbeln, die in dem Mittelpunkt O eine $H = \infty$ entsprechende Gerade $h^{(\infty)}$ berühren und auch nach den unendlich fernen Punkten der Geraden l', s' gehen. Die in dem Punkt L_1 auf l_1 senkrechte Gerade ξ_1 und die auf s senkrechte Gerade ψ , die sich in dem Punkt M_1 schneiden, sind dann die Asymptoten für die dem Wert $H = 1$ entsprechenden Hyperbel, deren Mittelpunkt M_1 ist und auf jener Tangente h^∞ liegt.

Um anstatt dieser Hyperbel beispielsweise die Hyperbel $h^{(3)}i^{(3)}$ für $H = 0,3$ zu konstruieren, beschreiben wir um O mit dem Radius $r = 0,3 R$ einen Kreisbogen, der l_1 in dem Punkt L_r und s in dem Punkt S_r trifft, ziehen durch L_r die auf l_1 senkrechte Gerade ξ_r und durch die Mitte von OS_r die auf s senkrechte Gerade ψ_r , die sich in dem Punkt $M^{(3)}$ schneiden; dann sind die Geraden ξ_r, ψ_r die Asymptoten der Hyperbel $h^{(3)}i^{(3)}$, deren Mittelpunkt $M^{(3)}$ ist. Vermittels des Punktes O und dieser Asymptoten ist die Hyperbel $h^{(3)}i^{(3)}$ konstruiert. Für die Tangente $h^{(\infty)}$, die diese Hyperbel sowie alle den verschiedenen Werten von H entsprechenden Hyperbeln im Punkt O berührt, ergibt sich in analoger Weise wie bei der Tangente k^∞ , daß sie durch den Mittelpunkt M der Hyperbel hi geht, und demnach erhalten wir den Satz:

Die Mittelpunkte der Hyperbeln für die Richtungen l, s liegen auf der Tangente $h^{(\infty)}$ und die Mittelpunkte der Hyperbeln für die Richtungen l_1, s liegen auf der Tangente h^∞ .

Der Punkt $N^{(3)}$, in dem ein um O beschriebener Kreis die Hyperbel $h^{(3)}i^{(3)}$ berührt, wird ebenso wie vorher der Punkt N auf der Hyperbel

hi mittels einer Hilfskurve bestimmt. Durch proportionale Teilung der Fahrstrahlen dieser Hyperbel erhalten wir die andern Hyperbeln, von denen nur die innerhalb des Konturkreises K liegenden Teile der nicht durch O gehenden Hyperbeläste physikalisch in Betracht kommen.

Um nun die Projektionen der allgemeinen wahren Hellegleichen, wie sie bei der wirklichen Betrachtung der Kugel erscheinen, auf eine zur Sehrichtung s senkrechte Ebene für $k = \frac{1}{2}$ und den Kugelradius R als Einheit zu konstruieren, nehmen wir in Fig. 3 als solche Ebene die Aufrißebene an, auf der die Sehrichtung senkrecht ist. Die Kugel mit dem Mittelpunkt O ist im Aufriß durch den Konturkreis h_2^o dargestellt, und die Grundrißprojektion s_1 der Sehrichtung ist senkrecht zu der Projektionsachse p_{12} . Ferner ist die Lichtrichtung l so angenommen, daß ihre Grundrißprojektion l_1 sowie ihre Aufrißprojektion l_2 beide gegen die Projektionsachse p_{12} unter dem Winkel von 45° geneigt sind. Wenn wir nun parallel zur Richtungsebene, also parallel zur Licht- und Sehrichtung eine Seitenrißebene annehmen, für welche die zu l_2 parallele Gerade p_{23} die Projektionsachse ist, dann befinden sich in dieser Seitenrißebene die hyperbolischen Projektionen der Hellegleichen. Der Projektion der Kugel im Seitenriß entspricht der Konturkreis K_3 . Die Seitenrißprojektion s_3 der Sehrichtung ist senkrecht auf p_{23} und die Seitenrißprojektion l_3 der Lichtrichtung bildet mit s_3 den Winkel 2ε , der sich durch die Konstruktion $\operatorname{tg} 2\varepsilon = \sqrt{2}$ ergibt.

Für die Werte $H = 0, 0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,5$ und 1 sind die hyperbolischen Projektionen in der angegebenen Weise durch Zehntelteilung der Fahrstrahlen des zu dem Wert $H = 1$ gehörenden, zuerst gezeichneten Hyperbelastes konstruiert, und sie sind diesen Werten entsprechend der Kürze wegen mit 0, 1, 2, 3, . . . 10 bezeichnet, indem wir uns diese Werte um das Zehnfache vergrößert denken. Die Scheitel der Hyperbeläste liegen auf der durch den Punkt O_3 und den Scheitel D^{10} des Hyperbelastes 10 bestimmten Geraden.

Anstatt des Hyperbelastes 10 kann man auch den Hyperbelast 5 zuerst konstruieren, und dann ergeben sich durch Fünftelteilung der Fahrstrahlen dieses Hyperbelastes die anderen Hyperbeläste, die durch den Konturkreis K_3 begrenzt werden. Auf dem Hyperbelast 10 wird der Punkt N^{10} oder in anderem Falle auf dem Hyperbelast 5 der Punkt N^5 mittels jener Hilfskurve bestimmt; demnach ergibt sich durch die Gerade $O_3 N^{10}$ bzw. $O_3 N^5$ auf jedem der anderen Hyperbeläste der dem Mittelpunkt O_3 am nächsten liegende Punkt und auf dem Konturkreis K_3 der Punkt, dem der Teilung gemäß die maximale Helligkeit 5,9 entspricht und in dem der zugehörige Hyperbelast den Konturkreis K_3 berührt. Diesen Punkten entsprechen diejenigen auf einem Kugel-

kreise liegenden Punkte der Hellegleichen, welche sich von der symmetralen Richtungsebene in den größten Abständen befinden. Die Tangenten der Aufrißprojektionen der Hellegleichen in diesen Punkten sind demnach parallel zur Aufrißprojektion l_2 der Lichtrichtung, und dem Punkt 5,9 des Konturkreises K_3 entspricht im Aufriß der auf l_2 liegende Punkt 5,9 der maximalen Helligkeit. Die Aufrißprojektionen werden vermittels Kugelkreise, deren Ebenen entweder parallel zur Aufrißebene oder parallel zur Seitenrißebene sind, konstruiert.

Der Seitenriß der Grenzhellegleiche besteht aus dem auf l_3 senkrechten Radius 0 und aus dem auf s_3 senkrechten Durchmesser o des Konturkreises K_3 . Diesem Radius entspricht im Aufriß die Halbellipse 0 und in diesem Durchmesser der Konturkreis h_2^* .

Der Sektor $L_3' O_3 S_3'$ des Konturkreises K_3 begrenzt im Seitenriß den sichtbaren, aber von den Lichtstrahlen nicht beleuchteten Teil der Kugel. Nehmen wir nun an, die Kugel werde ebenso wie in der Lichtrichtung l_3 auch in der entgegengesetzten Lichtrichtung \bar{l}_3 beleuchtet, dann haben auch die auf diesem Teil der Kugel befindlichen Hellegleichen physikalische Bedeutung, deren hyperbolische Seitenrißprojektionen sich in diesem Sektor befinden. In der Wirklichkeit ist zwar nur die eine Hälfte der Kugel als direkt beleuchtet anzusehen und die andere Hälfte befindet sich im Selbstschatten, für den man eine schwächere Beleuchtung in der entgegengesetzten Richtung \bar{l}_3 annehmen kann. Wenn für diese indirekt beleuchtete Hälfte theoretisch die gleiche Beleuchtung vorausgesetzt wird und demgemäß die gleichen Werte für H auf den beiden Hälften der Kugel gelten, so muß bei einer vermittels Tusche ausgeführten Abtönung nach den wahren Hellegleichen der Selbstschatten durch einen besonderen Grundton dunkler gehalten werden. Der entgegengesetzten Lichtrichtung \bar{l}_3 entsprechend sind die Hellegleichen im Selbstschatten durch einen Strich über den bezeichnenden Ziffern von den anderen Hellegleichen unterschieden worden.

In dem Sektor $L_3' O_3 S_3'$ sind vermittels Fünfteilung der Fahrstrahlen des zuerst gezeichneten Hyperbelastes $\bar{5}$ die nur in Betracht kommenden Hyperbeläste $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$ konstruiert. Ferner ist ebenso wie vorher durch die Gerade $O_3 N^{(5)}$ auf jedem dieser Hyperbeläste der dem Mittelpunkt O_3 am nächsten liegende Punkt und auf dem Konturkreis K_3 der Punkt 3,1 der maximalen Helligkeit bestimmt. Aus der Konstruktion der hyperbolischen Projektionen folgt die Kontrolle, daß die Halbierungsgeraden m, m' die gleichbezifferten Hyperbeläste in Punkten schneiden, deren Verbindungsgeraden zu s_3 senkrecht sind.

Für eine größere oder kleinere Kugel bleiben bei der angenommenen Einheit R die hyperbolischen Seitenrißprojektionen dieselben, aber die

Anzahl der Hellegleichen auf der Kugel wird je nachdem vergrößert oder verkleinert. Wenn wir z. B. eine Kugel vom Radius gleich $2R$ betrachten, dann schneidet der um O_3 beschriebene zugehörige Konturkreis auch den Hyperbelast 10, dem die Hellegleiche 10 auf dieser Kugel entspricht. Ferner sind noch ergänzend die Grundrißprojektionen der auf der oberen Kugelhälfte liegenden Hellegleichen konstruiert worden. Diese Grundrißprojektionen sind Teile von Kurven vierter Ordnung.

Für den speziellen Fall, daß die Lichtrichtung parallel zu der Aufrißebene ist, sind in Fig. 3a die Aufrißprojektionen der wahren Hellegleichen der Kugel konstruiert; und sie sind in bezug auf den zu l_3 senkrechten Durchmesser O des Konturkreises h_2^2 symmetrisch kongruent.

In Fig. 4, Taf. II sind für den speziellen Fall $k = 1$ in gleicher Weise wie vorher bei derselben Licht- und Sehrichtung die Aufrißprojektionen der wahren Hellegleichen der Kugel mittels der hyperbolischen Seitenrißprojektionen konstruiert. Durch Fünftelteilung der Fahrstrahlen des zuerst gezeichneten Hyperbelastes 5 ergeben sich die Hyperbeläste 1, 2, 3, 4, deren Hauptachsen in der Halbierungsgeraden m des Winkels $l_3 O_3 s_3$ liegen, die auf dem Konturkreis K_3 den Punkt der maximalen Helligkeit 4,4 bestimmt. Ferner erhalten wir durch Halbierung der Fahrstrahlen des alsdann zuerst gezeichneten Hyperbelastes 2 den Hyperbelast $\bar{1}$, und für diese Hyperbeläste liegen die Hauptachsen in der Halbierungsgeraden m' des Winkels $\bar{l}_3 O_3 s_3$, die auf dem Konturkreis K_3 den Punkt der maximalen Helligkeit 2,3 im Selbstschatten bestimmt. Da der größte Wert des Verhältnisses der Absorptionskoeffizienten für das Eindringen und das Ausdringen des Lichtstrahles innerhalb eines Volumenelementes nur $k = 1$ sein kann, so erhalten wir in diesem Fall bei der gegebenen Licht- und Sehrichtung und der angenommenen Einheit gleich dem Kugelradius die kleinste Anzahl der Hellegleichen auf der Kugel. Ferner vergrößert sich die Anzahl der Hellegleichen bei einer angenommenen Einheit je kleiner k ist, wie z. B. bei $k = \frac{1}{2}$ in Fig. 3. Die allgemeinen Hellegleichen weichen bezüglich ihrer Gestalt wenig ab von den speziellen Hellegleichen in Fig. 4, sind aber verschieden in ihrer Verteilung auf der Kugel und in ihrer Anzahl. Es ist noch bemerkenswert, daß auch bei derselben Licht- und Sehrichtung diese wahren Hellegleichen nach dem Lommel-Seeligerschen Gesetz gestaltlich nicht sehr abweichen von den Hellegleichen nach dem Lambertschen Gesetz $H = \cos \lambda \cos \sigma^1$), trotzdem diese Gesetze doch wesentlich verschieden sind.

1) Vgl. L. Burmester a. a. O. Fig. 95, Taf. XII.

Für den speziellen Fall, daß die Lichtrichtung l parallel zur Aufrißebene ist, sind in Fig. 4a die Aufrißprojektionen der wahren Hellegleichen der Kugel konstruiert; und sie sind in bezug auf den zu l_2 senkrechten Durchmesser O des Konturkreises h_2^0 symmetrisch kongruent.

V. Abbildung der Hellegleichen der Kugel als parallele Gerade.

Um die für diese Abbildung erforderliche quadratische Verwandtschaft abzuleiten, dividieren wir in der Formel des Lommel-Seeligerschen Gesetzes

$$H = \frac{\cos \lambda \cos \sigma}{k \cos \lambda + \cos \sigma}$$

den Zähler und Nenner durch $\cos \lambda \cos \sigma$; dann ist

$$H = \frac{1}{\frac{k}{\cos \sigma} + \frac{1}{\cos \lambda}}$$

Da wir den Radius R der Kugel als Einheit annehmen, so ergibt sich nach Erweiterung des Bruches mit R

$$H = \frac{R}{\frac{kR}{\cos \sigma} + \frac{R}{\cos \lambda}} = \frac{R}{kR \sec \sigma + R \sec \lambda}$$

Wenn wir

$$R \sec \lambda = \xi, \quad R \sec \sigma = \eta$$

setzen und ξ, η als rechtwinklige Koordinaten betrachten, dann erhalten wir die Gleichung

$$H = \frac{R}{\xi + k\eta}$$

oder

$$(12) \quad \xi + k\eta = \frac{R}{H},$$

die für konstante Werte von H parallele Gerade repräsentiert.

Die Winkel λ, σ bestimmen auf der Kugeloberfläche zwei zur xy -Ebene symmetrisch liegende Punkte, deren senkrechte Projektion auf die xy -Ebene, welche die Licht- und Sehrichtung enthält, ein durch die rechtwinkligen Koordinaten x, y bestimmter Punkt ist. Diesem Punkt entspricht dann eindeutig ein durch die rechtwinkligen Koordinaten ξ, η bestimmter Punkt in der $\xi\eta$ -Ebene, und umgekehrt. Dadurch erhalten wir zwei eindeutig verwandte Systeme, die wir mit xy und $\xi\eta$ bezeichnen wollen und beide in einer Ebene liegend annehmen.

Demnach ergibt sich der Satz:

Die Hellegleichen der Kugel werden in dem System $\xi\eta$ als parallele Gerade abgebildet, so daß je zweien zur Richtungsebene symmetrisch

liegenden Punkten einer Hellegleiche ein Punkt in diesem System entspricht.

Zur konstruktiven Bestimmung der entsprechenden Punkte der Systeme xy , $\xi\eta$ ist in Fig. 5 um den Koordinatenanfang O mit dem Radius R der Konturkreis K der Kugel beschrieben, der die Lichtrichtung l in den Punkten L_1, L_I und die Sehrichtung s in den Punkten S_1, S_I schneidet; und es ist der Winkel $\angle Os = 2\varepsilon$. Für die beiden Systeme xy , $\xi\eta$ sind die gemeinsamen rechtwinkligen Koordinatenachsen $+x\xi$, $+y\eta$ so gewählt, daß die Halbierungsgeraden m, m' ihrer rechten Winkel mit den Halbierungsgeraden des Winkels $\angle Os$ und seines Nebenwinkels identisch sind. Diese Koordinatenachsen sind aber als solche nicht selbstentsprechende Gerade der Systeme xy , $\xi\eta$.

Um zu einem gegebenen Punkt P in dem System xy den entsprechenden Punkt \mathfrak{P} in dem System $\xi\eta$ zu bestimmen, betrachten wir die durch die Punkte O, P gehende Gerade p als die senkrechte Projektion auf die xy -Ebene von den Kugelnormalen der beiden Punkte der Kugeloberfläche, denen die Projektion P auf die xy -Ebene entspricht. Demnach bilden die Geraden Ol, Os und diese Kugelnormale drei Kanten einer dreiseitigen körperlichen Ecke, deren Seiten die Winkel $2\varepsilon, \lambda, \sigma$ sind. Wenn wir nun die Seiten λ, σ durch Drehung um l bzw. s in die xy -Ebene umlegen, indem wir von P auf l, s die Senkrechten PP_1, PP_s fällen, die den Konturkreis K einerseits in den Punkten A, Σ treffen, so erhalten wir die Winkel $\lambda = \angle L_1 OA$ und $\sigma = \angle S_1 O\Sigma$. Die in den Punkten A, Σ an den Konturkreis K gelegten Tangenten schneiden die Geraden l bzw. s in den Punkten A_1, Σ_s ; demnach sind die Strecken

$$OA_1 = R \sec \lambda, \quad O\Sigma_s = R \sec \sigma;$$

und indem wir diese auf der ξ -Achse und η -Achse abtragen, erhalten wir die Koordinaten des Punktes \mathfrak{P}

$$\xi = O\mathfrak{X} = OA_1, \quad \eta = O\mathfrak{Y} = O\Sigma_s.$$

Aus dieser Konstruktion folgen die Gleichungen

$$OP_1 \cdot OA_1 = R^2, \quad OP_s \cdot O\Sigma_s = R^2.$$

Hiernach wird auch, wenn z. B. der Fußpunkt P_1 der von P auf l gefällten Senkrechten außerhalb des Konturkreises K liegt, der zugehörige Punkt A_1 bestimmt, indem wir von P_1 eine Tangente an den Konturkreis legen und von dem Berührungspunkt auf l die Senkrechte fällen, deren Fußpunkt dann A_1 ist. Umgekehrt ergibt sich in analoger Weise zu einem in dem System $\xi\eta$ angenommenen Punkt \mathfrak{P} der entsprechende Punkt P in dem System xy . Werden die Koordinaten ξ, η

eines Punktes \mathfrak{P} durch die Koordinaten x, y des entsprechenden Punktes P ausgedrückt und umgekehrt, so erhalten wir die Verwandtschaftsgleichungen der beiden Systeme $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$, xy .

Zu diesem Zwecke fällen wir von dem Fußpunkt E der Koordinate $EP = x$ die Senkrechte EJ auf s und die Senkrechte EJ' auf PP_s ; dann ist

$$OP_s = OJ + EJ'$$

und

$$OP_s = y \cos(45^\circ - \varepsilon) + x \sin(45^\circ - \varepsilon).$$

Da die Gleichung $OP_s \cdot O\Sigma_s = R^2$ für einen innerhalb und einen außerhalb des Konturkreises K liegenden Punkt P gilt, so erhalten wir allgemein

$$O\Sigma_s = \mathfrak{y} = \frac{R^2}{x \sin(45^\circ - \varepsilon) + y \cos(45^\circ - \varepsilon)}$$

und in analoger Weise

$$OA_t = \mathfrak{x} = \frac{R^2}{x \cos(45^\circ - \varepsilon) + y \sin(45^\circ - \varepsilon)}$$

Durch Umformung ergeben sich die Verwandtschaftsgleichungen:

$$(13) \quad \mathfrak{x} = \frac{R^2 \sqrt{2}}{x(\cos \varepsilon + \sin \varepsilon) + y(\cos \varepsilon - \sin \varepsilon)}$$

$$(13a) \quad \mathfrak{y} = \frac{R^2 \sqrt{2}}{x(\cos \varepsilon - \sin \varepsilon) + y(\cos \varepsilon + \sin \varepsilon)}$$

und ferner

$$(14) \quad x = \frac{R^2 \sqrt{2}}{4\mathfrak{x}\mathfrak{y} \sin \varepsilon \cos \varepsilon} [\mathfrak{x}(\sin \varepsilon - \cos \varepsilon) + \mathfrak{y}(\sin \varepsilon + \cos \varepsilon)]$$

$$(14a) \quad y = \frac{R^2 \sqrt{2}}{4\mathfrak{x}\mathfrak{y} \sin \varepsilon \cos \varepsilon} [\mathfrak{x}(\sin \varepsilon + \cos \varepsilon) + \mathfrak{y}(\sin \varepsilon - \cos \varepsilon)].$$

Aus diesen Verwandtschaftsgleichungen folgt der Satz:

Die Systeme xy und $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ sind in quadratischer Verwandtschaft, die für $\varepsilon = 45^\circ$ in eine involutorische übergeht.

Die zu diesen Systemen gehörenden Hauptpunkte und Hauptgeraden ergeben sich aus der in Fig. 5 ausgeführten wechselweisen konstruktiven Bestimmung der entsprechenden Punkte und auch aus den Verwandtschaftsgleichungen. Je nachdem der Koordinatenanfang O als Punkt des Systems xy oder $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ betrachtet wird, entsprechen demselben alle Punkte der unendlich fernen Geraden in dem Systeme $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ oder xy . Dem unendlich fernen Punkt \mathfrak{X}_∞ der \mathfrak{x} -Achse entsprechen alle Punkte der in O auf l senkrechten Geraden l' , und dem unendlich fernen Punkt \mathfrak{Y}_∞ der \mathfrak{y} -Achse entsprechen alle Punkte der in O auf s senkrechten Geraden s' . Ferner entsprechen dem unendlich fernen Punkt L'_∞ der Geraden l' alle Punkte der \mathfrak{x} -Achse, und dem unendlich fernen Punkt S'_∞ der Geraden s' alle Punkte der \mathfrak{y} -Achse. Somit ergibt sich:

In dem System $\xi\eta$ sind O, X_∞, Y_∞ die Hauptpunkte, denen in dem System xy die unendliche ferne Gerade und die Geraden l', s' als Hauptgeraden entsprechen; ferner sind O, L'_∞, S'_∞ die Hauptpunkte in dem System xy , denen die unendlich ferne Gerade und die Koordinatenachsen x, y als Hauptgeraden in dem System $\xi\eta$ entsprechen.

Demnach entspricht jeder Geraden des Systems $\xi\eta$ eine durch die Hauptpunkte O, L'_∞, S'_∞ gehende Hyperbel des Systems xy , und jeder Geraden des Systems xy eine durch die Hauptpunkte O, X_∞, Y_∞ gehende Hyperbel des Systems $\xi\eta$.

Aus der konstruktiven Bestimmung der entsprechenden Punkte der Systeme $xy, \xi\eta$ folgt ferner, daß die Halbierungsgeraden m, m' des Winkels $\angle O$ und seines Nebenwinkels selbstentsprechende Gerade dieser Systeme sind. Auf diesen Halbierungsgeraden bilden die sich wechselweise entsprechenden Punkte je eine involutorische Punktreihe, deren Mittelpunkt O ist. Um den Abstand δ der Doppelpunkte A_1, A_I der auf m liegenden involutorischen Punktreihe von ihrem Mittelpunkt O zu erhalten, setzen wir in einer der Gleichungen $x = y = \xi = \eta = \frac{\delta}{\sqrt{2}}$, dann ist

$$\delta = \pm R \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\cos \varepsilon}}.$$

Ebenso ergibt sich der Abstand δ' der Doppelpunkte A'_1, A'_I der auf m' liegenden involutorischen Punktreihe, indem wir in einer der Gleichungen

$$x = -y = \xi = -\eta = \frac{\delta'}{\sqrt{2}}$$

setzen

$$\delta' = \pm R \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sin \varepsilon}}.$$

Diese vier Doppelpunkte A_1, A_2, A'_1, A'_2 sind die selbstentsprechenden Punkte der Systeme $xy, \xi\eta$. In dem System xy kommt zunächst nur das von dem Konturkreis K umgrenzte Gebiet in Betracht, und das entsprechende Gebiet in dem System $\xi\eta$ wird demnach von einer Kurve \mathfrak{R} umgrenzt, die dem Konturkreis K entspricht, und somit von vierter Ordnung ist.

Indem wir in die Gleichung dieses Konturkreises

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0$$

für x, y die Werte aus den Gleichungen (14), (14a) einsetzen, ergibt sich durch Umformung die Gleichung der Kurve \mathfrak{R}

$$(15) \quad \xi^2 + \eta^2 - 2\xi\eta \cos 2\varepsilon - \frac{\xi^2 \eta^2 \sin^2 2\varepsilon}{R^2} = 0,$$

und durch die Einsetzung

$$\xi = r \cos w, \quad \eta = r \sin w, \quad \xi^2 + \eta^2 = r^2$$

erhalten wir in Polarkoordinaten die Gleichung

$$(16) \quad r = \frac{2R\sqrt{1 - \cos 2\varepsilon \sin^2 2w}}{\sin 2\varepsilon \sin 2w}.$$

Diese Kurve vierter Ordnung kann nach dieser Polargleichung direkt konstruiert werden. Einfacher wird aber die Konstruktion durch die konstruktive Bestimmung der Punkte, die den Punkten des Konturkreises K entsprechen, in folgender Weise. Wir ziehen z. B. die in einem Punkt T den Konturkreis K berührende Tangente, welche die Geraden l, s beziehentlich in den Punkten A_i, Σ_i schneidet und machen auf der ξ -Achse die Strecke $O\mathfrak{X}_i = OA_i$, ferner auf der η -Achse die Strecke $O\mathfrak{Y}_i = O\Sigma_i$; dann sind $O\mathfrak{X}_i, O\mathfrak{Y}_i$ die Koordinaten des entsprechenden Punktes \mathfrak{Z} der Kurve \mathfrak{K} .

Aus dieser Konstruktion der Kurve \mathfrak{K} folgt, daß den auf der Geraden l liegenden Punkten L'_i, L_i des Konturkreises K die unendlich fernen Punkte $\mathfrak{Z}'_{i\infty}, \mathfrak{Z}_{i\infty}$ der zur ξ -Achse parallelen Geraden $I'_i I'_i, I_i I_i$ entsprechen. Ferner entsprechen den auf der Geraden s' liegenden Punkten S'_i, S_i des Konturkreises K die unendlich fernen Punkte $\mathfrak{S}'_{i\infty}, \mathfrak{S}_{i\infty}$ der zur η -Achse parallelen Geraden $I'_i I'_i, I_i I_i$.

Die Schnittpunkte I'_i, I'_i, I_i, I_i dieser beiden Paare paralleler Geraden, die Asymptoten der Kurve \mathfrak{K} sind, bilden ein Quadrat; denn, wie aus der Konstruktion, so ergibt sich auch aus der Gleichung (15), daß diese vier Geraden vom Mittelpunkt O den gleichen Abstand haben, dessen Größe gleich $\frac{R}{\sin 2\varepsilon}$ ist, wenn die Gleichung erstens durch ξ^2 dividiert und $\xi = \infty$, zweitens durch η^2 dividiert und $\eta = \infty$ gesetzt wird.

Den auf der Geraden m liegenden Punkten A_1, A_I des Konturkreises K entsprechen die auf diesen Geraden liegenden Punkte $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_I$; und für ihre beiderseitigen Abstände von O ergibt sich

$$O\mathfrak{A}_1 = O\mathfrak{A}_I = \frac{R\sqrt{2}}{\cos \varepsilon},$$

weil die in A_1 und A_I an den Konturkreis gelegten Tangenten auf den Geraden l, s von O aus gleiche Strecken abschneiden, deren Länge $R \sec \varepsilon$ ist. Die Punkte A_1, \mathfrak{A}_1 und A_I, \mathfrak{A}_I sind konjugierte Punkte der auf m befindlichen involutorischen Punktreihe, die durch ihre Doppelpunkte A_1, A_I bestimmt ist. Analoge Beziehungen gelten für die auf der Geraden m' liegenden Punkte A', A'_I des Konturkreises und die entsprechenden Punkte $\mathfrak{A}'_1, \mathfrak{A}'_I$, für deren beiderseitige Abstände von O

$$O\mathfrak{A}'_1 = O\mathfrak{A}'_I = \frac{R\sqrt{2}}{\sin \varepsilon}$$

ist. Die vier Punkte $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}'_1, \mathfrak{A}_I, \mathfrak{A}'_I$ sind Scheitelpunkte der Kurve \mathfrak{K} und bilden ein Parallelogramm, dessen Seiten $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}'_1, \mathfrak{A}_I \mathfrak{A}'_I$ senkrecht

zu s und dessen Seiten $\mathfrak{A}_I, \mathfrak{A}'_I, \mathfrak{A}_I, \mathfrak{A}'_I$ senkrecht zu l sind. Ferner entsprechen den Punkten L_1, L_I und S_1, S_I , in welchen der Konturkreis K die Geraden l und s schneidet, beziehentlich die Punkte $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_I$ und $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_I$. Aus der konstruktiven Bestimmung dieser Punkte ergibt sich, wenn X_1, X_I und Y_1, Y_I die Schnittpunkte bezeichnen, in denen der Konturkreis K die x -Achse und die y -Achse schneidet, daß die vier Geraden $X_1\mathfrak{L}_1, X_I\mathfrak{L}_I, Y_1\mathfrak{S}_1, Y_I\mathfrak{S}_I$ gemeinsame Tangenten des Konturkreises und der Kurve \mathfrak{K} sind.

Die Kurve \mathfrak{K} besteht aus den vier zu den Geraden m, m' symmetrisch liegenden und ins Unendliche sich erstreckenden Ästen

$$\mathfrak{L}'_{1\infty} \mathfrak{A}_1 \mathfrak{S}'_{1\infty}, \mathfrak{S}'_{(1\infty)} \mathfrak{A}'_I \mathfrak{L}'_{I\infty}, \mathfrak{L}'_{(I\infty)} \mathfrak{A}_I \mathfrak{S}'_{1\infty}, \mathfrak{S}'_{(I\infty)} \mathfrak{A}'_I \mathfrak{L}'_{(I\infty)},$$

die den Bogenstücken

$$L'_I A_1 S'_I, S'_I A_I L'_I, L'_I A_I S'_I, S'_I A'_I L'_I$$

des Konturkreises K entsprechen. Nach Gleichung (15) ist der Mittelpunkt O ein isolierter Punkt der Kurve \mathfrak{K} , der sich infolge des verwendeten Koordinatensystems ergibt und der als solcher keinem Punkt des Konturkreises K entspricht.

Wir wollen diese für die weiteren Darlegungen erforderliche Kurve \mathfrak{K} wegen ihrer kreuzförmigen Gestalt *Chioide*¹⁾ nennen. Wenn die Lichtrichtung l und die Sehrichtung s einen rechten Winkel bilden, also $2\varepsilon = 90^\circ$ ist, dann erhalten wir die Gleichung

$$\frac{R^2}{x^2} + \frac{R^2}{y^2} - 1 = 0$$

der gleichästigen Chioide, die eine zirkulare Kurve vierter Ordnung ist.²⁾ Hiernach besteht das Abbildungsgebiet der Kugelfläche aus den innerhalb der vier Chioidenästen sich ins Unendliche erstreckenden Flächen teilen.

Durch die Betrachtung dieser quadratischen Verwandtschaft gelangt man zur Kenntnis der Beziehungen zwischen den Hellegleichungen und ihren Abbildungen als parallele Gerade, die durch die S. 146 abgeleitete Gleichung (12)

$$x + ky = \frac{R}{H}$$

1) Von $Xz =$ Kreuzform.

2) In G. Loria, Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven. 1902. S. 210, wird diese gleichästige Chioide eine gerade zirkulare Kreuzkurve genannt, weil sie dort als Spezialfall der Kreuzkurve erscheint, deren Gleichung $\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 1$ ist.

bestimmt sind und die wir *Hellegeraden* nennen wollen. Für die in Fig. 5 beispielsweise dem Wert $H = 0,5$ entsprechende Hellegleiche ist in dem System xy die durch den Koordinatenanfang O gehende Hyperbel $h^5 i^5$ die senkrechte Projektion auf die xy -Ebene, und dieser ist in dem System $\xi\eta$ die Hellegerade \mathfrak{h}^5 zugeordnet, die demgemäß, weil $k - \frac{1}{2}$ genommen ist, durch die Gleichung

$$\xi + \frac{1}{2}\eta = 2R$$

repräsentiert wird. Diese Hellegerade schneidet die ξ - und η -Achse in den Punkten $\mathfrak{U}, \mathfrak{B}$, deren Abstände von dem Koordinatenanfang

$$O\mathfrak{U} = 2R, \quad O\mathfrak{B} = 4R$$

sind.

Diesen Punkten $\mathfrak{U}, \mathfrak{B}$ entsprechen die unendlich fernen Punkte L'_∞, S'_∞ der Geraden l, s' . Für alle Punkte der Strecke $\mathfrak{U}\mathfrak{B}$ sind die beiden Koordinaten positiv und ebenso auch die Werte von $\cos \lambda, \cos \sigma$. Demnach ist der zwischen den positiven Koordinatenachsen ξ, η liegenden Strecke $\mathfrak{U}\mathfrak{B}$ der Hellegeraden \mathfrak{h}^5 der Hyperbelast h^5 zugeordnet, dem die wahre Hellegleiche entspricht. Für alle anderen Punkte der Hellegeraden haben die Koordinaten ungleiche Vorzeichen und ebenso auch die Werte von $\cos \lambda, \cos \sigma$. Demnach ist den anderen ins Unendliche gehenden Strecken dieser Hellegeraden der durch O gehende Hyperbelast i^5 zugeordnet, dem die virtuelle Hellegleiche entspricht.

Die Hellegerade \mathfrak{h}^5 trifft den Chioidenast $\mathfrak{L}'_\infty \mathfrak{X}_1 \mathfrak{S}'_{1\infty}$ in den Punkten $\mathfrak{F}, \mathfrak{G}$, denen auf dem Konturkreis K die Punkte F, G des Hyperbelastes h^5 entsprechen. Demnach ist dem innerhalb dieses Chioidenastes befindlichen Teil $\mathfrak{F}\mathfrak{G}$ der Hellegeraden \mathfrak{h}^5 der innerhalb des Konturkreises K liegende Teil FG des Hyperbelastes h^5 zugeordnet. Für die wahren Hellegleichen, die sich bei der Lichtrichtung l und Sehrichtung s ergeben, kommen hiernach nur die innerhalb des Chioidenastes $\mathfrak{L}'_\infty \mathfrak{X}_1 \mathfrak{S}'_{1\infty}$ liegenden Strecken der parallelen Hellegeraden zur Geltung. Den beiden Schnittpunkten, welche die Hellegerade \mathfrak{h}^5 noch mit den Chioidenästen $\mathfrak{S}'_{(1\infty)} \mathfrak{X}'_1 \mathfrak{L}'_{1\infty}$ und $\mathfrak{S}'_{(1\infty)} \mathfrak{X}'_1 \mathfrak{L}'_{(1\infty)}$ ergibt, entsprechen die auf dem Konturkreis liegenden Punkte des Hyperbelastes i^5 .

Für $H = 0$ liegt die zugehörige Hellegleiche \mathfrak{h}^0 im Unendlichen, und die zugeordnete Hyperbel entartet in die beiden Geraden l, s' , auf denen die Durchmesser h^0, h^0 des Konturkreises die Projektionen der Grenzhellegleiche sind.

Für $H = \infty$ geht die zugehörige Hellegerade \mathfrak{h}^∞ parallel zu \mathfrak{h}^5 durch den Punkt O und ihr ist die Hyperbel zugeordnet, welche in die alle Hyperbeln in O berührende Tangente h^∞ und in die unendlich ferne Gerade entartet. Da die durch den Punkt O gehenden entsprechenden

Geraden der Systeme $\xi\eta$, xy zwei projektive Strahlenbüschel bilden, so sind die Hellegerade h^∞ und die Tangente h^∞ entsprechende Strahlen dieser Strahlenbüschel. Hierbei ist aber zu beachten, daß der Punkt O kein selbstentsprechender Punkt ist; denn je nachdem O ein Punkt des Systems xy oder $\xi\eta$ ist, entspricht ihm der unendlich ferne Punkt auf h^∞ oder h^∞ . Dem Berührungspunkt der den Chioidenast $\mathcal{C}'_{(\infty)} \mathcal{C}_1 \mathcal{C}'_\infty$ berührenden Hellegerade entspricht auf dem Konturkreis K der Punkt der maximalen Helligkeit. Für alle Hellegerade, die diesen Chioidenast nicht schneiden, gibt es keine wahren Hellegleichen.

Die zu den negativen Werten von H gehörenden Hellegleichen befinden sich auf der innern Fläche der Kugel, wenn diese als halbe Hohlkugel beleuchtet ist. Die entsprechenden parallelen Hellegeraden liegen dann jenseits des Punktes O parallel zu den vorher betrachteten Hellegeraden. Die zugeordneten Hyperbeln für negative Werte sind bezüglich der gemeinsamen Tangente h^∞ schief symmetrisch zu den Hyperbeln für positive Werte, aber die Grenzhellegleiche ist in beiden Fällen dieselbe.

Wenn wir bei der Sehrichtung s noch annehmen, daß die Kugel auch in der zu l entgegengesetzten Lichtrichtung l_1 im Selbstschatten beleuchtet wird, dann geht demgemäß auch die positive Richtung der $x\xi$ -Achse in die entgegengesetzte Richtung über. Die Gleichung

$$\xi + \frac{1}{2}\eta = \frac{R}{H}$$

repräsentiert dann für $H = 0,5$ die Hellegerade $h^{(5)}$, die auf den Koordinatenachsen $\xi\eta$ die Strecken

$$O\mathcal{U}_1 = 2R, \quad O\mathcal{V} = 4R$$

abschneidet, und ihr ist die Hyperbel $h^{(5)}i^{(5)}$ zugeordnet, deren Ast $h^{(5)}$ außerhalb des Konturkreises K liegt, weil die Hellegeraden $h^{(5)}$ den Chioidenast $\mathcal{C}'_{(\infty)} \mathcal{C}_1 \mathcal{C}'_{(\infty)}$ nicht schneidet. Im übrigen ergeben sich bei dieser Abbildung der Hellegleichen für die Lichtrichtung l_1 und Sehrichtung s die analogen Beziehungen wie bei der Abbildung der Hellegleichen für die Lichtrichtung l und Sehrichtung s .

In dem speziellen Fall, daß $k = 1$ ist, sind bei der Lichtrichtung l und der Sehrichtung s die Hellegeraden senkrecht zu der Halbierungsgeraden m des Winkels lOs ; bei der entgegengesetzten Lichtrichtung l_1 und derselben Sehrichtung s sind sie senkrecht zu der Halbierungsgeraden m' des Nebenwinkels l_1Os . Demnach stehen die Hellegeraden, die bei diesen beiden Beleuchtungen gleichen Werten von H entsprechen und sich auf der η -Achse schneiden, senkrecht aufeinander.

VI. Abbildung der Hellegleichen der Kugel als Kreise mit einem gemeinsamen Berührungspunkt.

Vermittels der Transformation des Systems $\xi\eta$ durch reziproke Radien in bezug auf den Konturkreis K als Inversionskreis ergibt sich ein System, welches wir mit $\mathbf{x}\mathbf{y}$ bezeichnen. Die Systeme $\xi\eta$, $\mathbf{x}\mathbf{y}$ stehen hiernach in einer speziellen Kreisverwandtschaft, in der den parallelen Hellegeraden des Systems $\xi\eta$ Kreise des Systems $\mathbf{x}\mathbf{y}$ entsprechen, die sich in dem Mittelpunkt O des Konturkreises berühren. Demnach erhalten wir den Satz:

Die Hellegleichen der Kugel werden in dem Systeme $\mathbf{x}\mathbf{y}$ als Kreise abgebildet, die sich in dem Mittelpunkt des Konturkreises berühren, und so, daß je zweien zu der Richtungenebene symmetrisch liegenden Punkten einer Hellegleiche ein Punkt in diesem System entspricht.

In den Systemen $\xi\eta$, $\mathbf{x}\mathbf{y}$ sind der Mittelpunkt O und die beiden unendlich fernen imaginären Kreispunkte gemeinsame Eckpunkte der beiden Hauptdreiecke. Da nun das System $\mathbf{x}\mathbf{y}$ zu dem System $\xi\eta$ und dieses zu dem System $\mathbf{x}\mathbf{y}$ quadratisch verwandt ist, und von den drei Hauptdreiecken dieser drei Systeme drei Eckpunkte in dem Mittelpunkt O vereint sind, so stehen die Systeme $\mathbf{x}\mathbf{y}$, $\mathbf{x}\mathbf{y}$ in einer speziellen kubischen Verwandtschaft, in denen der Mittelpunkt O ein selbstentsprechender Punkt ist. Einer Geraden des Systems $\mathbf{x}\mathbf{y}$ entspricht im allgemeinen eine Kurve dritter Ordnung des Systems $\mathbf{x}\mathbf{y}$ und umgekehrt. Diese kubische Verwandtschaft wird eine involutorische, wenn Licht- und Sehrichtung einen rechten Winkel bilden.

Den sich in dem Mittelpunkt O berührenden hyperbolischen Projektionen der Hellegleichen auf die Richtungenebene im System $\mathbf{x}\mathbf{y}$ entsprechen somit Kreise in dem System $\mathbf{x}\mathbf{y}$, die sich als solche auch in O berühren und die wir die *Hellekreise* nennen wollen.

In Fig. 6 ist um den Mittelpunkt O mit dem Radius R der Konturkreis K beschrieben, ferner ist die dem Wert $H = 0,5$ entsprechende Hyperbel h^5i^5 in dem System $\mathbf{x}\mathbf{y}$ und die zugehörige Hellegerade h^5 in dem System $\xi\eta$ gezeichnet. Um zu der Hyperbel h^5i^5 durch reziproke Radien den zugehörigen Hellekreis zu erhalten, füllen wir auf h^5 die Senkrechte $O\Omega$, ziehen dann von dem Fußpunkt Ω eine Tangente $\Omega\Theta$ an den Konturkreis K und füllen von ihrem Berührungspunkt Θ auf $O\Omega$ die Senkrechte ΘQ ; somit ist der über OQ als Durchmesser beschriebene Kreis der Hellekreis h^5 . Dem Hyperbelast h^5 entspricht der zwischen den Koordinatenachsen $\xi\eta$, $\eta\eta$ liegende Halbkreis des Kreises h^5 , und dem Hyperbelast i^5 entspricht der andere durch O gehende Halbkreis.

Aus der Gleichung der Hellegeraden

$$x + ky = \frac{R}{H}$$

folgt, daß die von dem Mittelpunkt O auf eine Hellegerade gefällte Senkrechte

$$OQ = \frac{R}{H\sqrt{1+k^2}}$$

ist, und demnach ergibt sich, weil $OQ \cdot OQ = R^2$ ist, für den betreffenden Kreis der Durchmesser

$$OQ = HR\sqrt{1+k^2},$$

der dem Wert H der Helligkeit proportional ist.

Der für $H = 0$ in die Geraden h^0, h^∞ entarteten Hyperbel entspricht der in den Punkt O zusammengeschrunpfte Kreis, und der für $H = \infty$ in die Gerade h^∞ und die unendlich ferne Gerade entarteten Hyperbel entspricht der in die Gerade h^∞ übergehende Kreis. Diese Gerade wird in O von allen Halbkreisen berührt und fällt mit der Hellegeraden h^∞ zusammen.

Dem Konturkreis K in dem System xy ist in dem System $\alpha\gamma$ die inverse Kurve \mathbf{K} zu der in Fig. 6 nur teilweise gezeichneten Chioide \mathfrak{K} zugeordnet, und den vier sich ins Unendliche erstreckenden Ästen der Chioide \mathfrak{K} entsprechen vier Blätter der Kurve \mathbf{K} , die in dem Mittelpunkt O von den Koordinatenachsen $\alpha\gamma, \beta\delta$ berührt werden. Aus der Polargleichung (16) der Chioide ergibt sich, indem wir statt ihrer Polarkoordinaten r, w resp. \mathbf{r}, \mathbf{w} setzen, weil $r \cdot r = R^2$ ist, als Polargleichung der inversen Kurve \mathbf{K} :

$$\mathbf{r} = \frac{R \sin 2\varepsilon \cos 2\mathbf{w}}{2\sqrt{1 - \sin 2\varepsilon \cos 2\mathbf{w}}}.$$

Durch Einsetzung rechtwinkliger Koordinaten folgt, daß die Kurve \mathbf{K} von der sechsten Ordnung ist; und sie kann nach dieser Polargleichung auch direkt konstruiert werden. Das vierteilige Abbildungsgebiet der Kugel wird von den vier Blättern der Kurve \mathbf{K} umgrenzt. Die beiden größeren kongruenten Blätter werden durch die Halbierungsgerade m , die beiden kleineren kongruenten Blätter durch die Halbierungsgerade m' symmetrisch geteilt. Dem innerhalb des einen Blattes liegenden Bogen \mathbf{FG} des Kreises h^5 entspricht der innerhalb des Konturkreises befindliche Teil \mathbf{FG} des Hyperbelastes h^5 und auf der Hellegeraden h^5 die Strecke $\mathfrak{F}\mathfrak{G}$, die sich innerhalb des Chioidenastes befindet.

Beitrag zur graphischen Dynamik des starren ebenen Systems.

VON THEODOR PÖSCHL in Graz.

1. Man versteht unter einem *starren ebenen System* oder kurz einem *ebenen System* die Gesamtheit aller in einer Ebene liegenden Punkte, welche ihre gegenseitige Lage nicht ändern.

Die geometrische Untersuchung der bei der Bewegung eines solchen Systems auftretenden Geschwindigkeiten und Beschleunigungen ist Gegenstand der Kinematik; die Massen und Kräfte des bewegten Systems und damit auch die Frage nach der Ermittlung des Bewegungszustandes aus gegebenen Kräften bleiben in der Kinematik der Natur der Sache gemäß ausgeschaltet.

Die obige Definition hat ohne Einschränkung auch nur dann einen Sinn, wenn es sich um rein kinematische Untersuchungen handelt; wollte man sie für die Dynamik aufrecht erhalten, wo man die Systempunkte mit Masse ausrüsten muß, so käme man mit Notwendigkeit zur Einführung einer unendlichen Masse des Bewegten, da der noch denkmögliche Fall des Endlichbleibens der über eine unendliche Ebene ausgebreiteten Masse bei unendlich abnehmender „Dichtigkeit“ zu einem physikalischen Widerspruch führt. Um dieser unendlichen Masse aus dem Wege zu gehen, muß man notwendig eine Begrenzung annehmen, und wir wollen für die Kinetik des ebenen Systems folgende Definition an die Spitze stellen:

Die Gesamtheit aller in einer Ebene liegenden Massenpunkte, welche ihre gegenseitige Lage nicht ändern und welche innerhalb von im Endlichen verlaufenden Begrenzungslinien liegen, nennen wir ein starres ebenes System oder auch kurz ein ebenes System. Hierbei bleibt es gleichgültig, ob die vorhandene Masse als System diskreter Punkte oder kontinuierlich verbreitet angesehen wird. Doch kann auch für die Dynamik die Vorstellung der bewegten unbegrenzten Ebene, von welcher das starre ebene System nur ein mit Masse belegter Teil ist, mit Vorteil beibehalten werden, z. B. dann, wenn es sich um eingeführte Bedingungen handelt. Wird z. B. ein Punkt der Ebene gezwungen, sich auf einer bestimmten festen Kurve zu bewegen, so ist es für die Untersuchung der Frage nach dem resultierenden Beschleunigungszustand vollständig gleichgültig, ob dieser Punkt gerade Träger einer Masse ist oder nicht; im negativen Falle

muß dann angenommen werden, daß der betreffende Punkt durch masselose Stangen mit der bewegten Masse in Verbindung steht.

2. Die vorliegende Abhandlung soll zur Lösung der Aufgabe beitragen, die Bewegung eines ebenen Systems, welches der Einwirkung beliebiger in der Ebene liegender Kräfte unter beliebigen Bedingungen unterworfen ist, aus diesen Kräften zu ermitteln.

Für einen einzelnen Massenpunkt hat die Aufgabe, seine Bewegung zu bestimmen, deshalb keine Schwierigkeit, weil durch Division der Kraft in seine Masse sofort seine Beschleunigung der Größe und Richtung nach folgt. Ist noch sein Zustand zu einer bestimmten Zeit gegeben, so können die Geschwindigkeit und der zurückgelegte Weg nach bekannten Methoden dargestellt werden.¹⁾ Diese Methoden versagen jedoch, wenn von der bewegten Masse angenommen wird, daß sie Ausdehnung besitzt. In diesem Falle sind die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der einzelnen Systempunkte im allgemeinen voneinander verschieden, und werden durch Angabe des Geschwindigkeitspoles (Drehpoles), des Beschleunigungspoles und der Größe der Geschwindigkeit und Beschleunigung für einen beliebigen Systempunkt vollständig dargestellt. Zur Vervollständigung der Kennzeichnung des Bewegungszustandes dient die Angabe des Wendepoles und Tangentialpoles, deren Bedeutung hier ebenfalls als bekannt vorausgesetzt wird.

Die Frage, die wir behandeln wollen, stellt sich dann folgendermaßen dar: Zu einer beliebigen Zeit t_0 sei der Zustand der Bewegung des Systems durch Angabe des „vollständigen Geschwindigkeitssystems“ gegeben. Für den betrachteten Zeitpunkt sei ferner das System der äußeren Kräfte gegeben, unter dessen Einwirkung das System seine Bewegung im folgenden Zeitelemente verändert. — Es entsteht die Aufgabe, aus den aufgedrückten Kräften auf den Beschleunigungszustand des Systems zu schließen. Auf diese Frage wollen wir die bei der Bewegung des ebenen Systems auftretenden Fälle, soweit sie dynamisch bestimmt sind, untersuchen. Durch Angabe des Geschwindigkeits- und Beschleunigungszustandes ist die Bewegung für zwei aufeinanderfolgende Zeitelemente und damit vollständig bestimmt.

3. Die Konstruktion des Beschleunigungspoles für den Fall der freien Bewegung des ebenen Systems wird auf einfache Weise durch zwei Sätze (I, II) geleistet, die wir zunächst beweisen wollen. Wir führen dazu folgende Bezeichnungen ein: wir nennen

a) die Gesamtheit der ∞^1 in einer gegebenen Wirkungslinie p möglichen Kräfte einen *Kräftestrahl* und

1) Vgl. Proell, Graphische Dynamik, Leipzig 1874.

b) die Gesamtheit der ∞^1 zu einer gegebenen Kraft P parallelen, gleich großen und gleichgerichteten Kräfte der Ebene ein *Parallelkräftebüschel von konstanter Größe P* .

Der erste Satz lautet:

I. Für alle möglichen Geschwindigkeitszustände liegen die Beschleunigungspole der Beschleunigungssysteme, welche von einem Kräftestrahl an einem frei beweglichen System erzeugt werden können, auf einem Kreise, welcher die durch den Massenmittelpunkt gezogene Parallele zum Kräftestrahle im Massenmittelpunkte berührt; der Kreis liegt auf jener Seite dieser Parallelen, auf welcher der Kräftestrahl selbst nicht liegt, und sein Durchmesser ist $\frac{k^2}{p}$, wenn k den Trägheitsradius des Systems für den Massenmittelpunkt und p den Abstand des Kräftestrahles von diesem bedeutet; der Kreis ist also die Inversion des Kräftestrahles am Kreise k . Wir nennen ihn den *Beschleunigungspolkreis erster Art* und sagen, daß er von dem Kräftestrahle p erzeugt wird.

Die Lage des Beschleunigungspoles G auf diesem Kreise, den eine in p wirkende Kraft von der Größe P an dem System erzeugt, ist nur durch die Größe der Winkelgeschwindigkeit vom Geschwindigkeitszustande abhängig, gänzlich unabhängig jedoch von der Lage des Geschwindigkeitspoles.

Der Beweis für diese Sätze ergibt sich einfach aus folgendem: Bekanntlich¹⁾ werden die Entfernung f des Beschleunigungspoles vom Massenmittelpunkte und die Winkelbeschleunigung ω' des freien ebenen Systems durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$M\vartheta f = P, \quad Mk^2\omega' = Pp.$$

Hierin bedeutet P die äußere Kraft, p ihren Arm in bezug auf den Massenmittelpunkt, M die Masse des Systems, $\vartheta = \sqrt{\omega^4 + \omega'^2}$ die in der Einheit der Entfernung vom Beschleunigungspole gemessene Größe der Beschleunigung.

Wählen wir nun (Fig. 1) ein Achsensystem OXY , dessen Ursprung O in den Massenmittelpunkt S fällt, $Y \parallel P$, $X \perp P$, so ist, wenn wir mit x und y die Koordinaten des Beschleunigungspoles G bezeichnen

$$f^2 = x^2 + y^2 = \frac{P^2}{M^2(\omega^4 + \omega'^2)} = \frac{P^2}{M^2\omega'^2 \left(1 + \frac{\omega^4}{\omega'^2}\right)}.$$

Nun ist

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{\omega'}{\omega^2} = \frac{x}{y},$$

1) W. Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte, 2. Aufl. Bd. II, S. 399.

wenn λ den Winkel \widehat{GSY} bezeichnet, und $\frac{P}{M\omega'} = \frac{k^2}{p}$, daher

$$x^2 + y^2 = \frac{k^4 : p^2}{1 + y^2 : x^2} = \frac{(k^4 : p^2)x^2}{x^2 + y^2},$$

oder

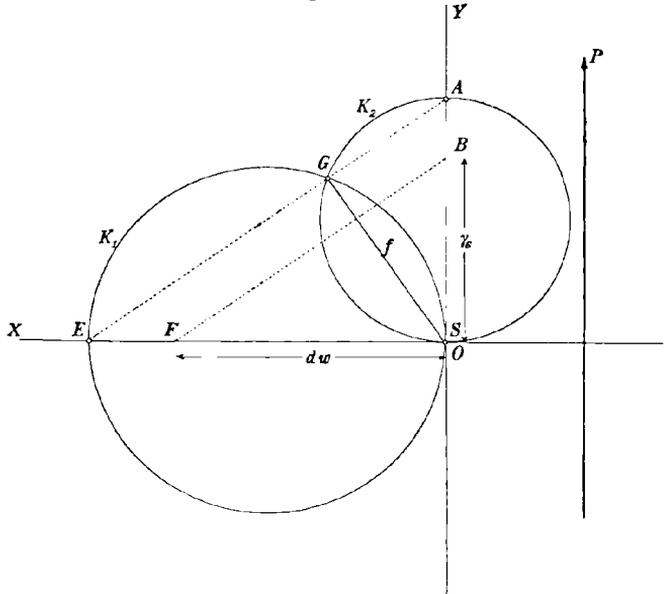
$$x^2 + y^2 = + \frac{k^2}{p} x$$

d. i.

$$(K_1) \quad \left(x^2 - \frac{k^2}{2p}\right)^2 + y^2 = \frac{k^4}{4p^2}.$$

Damit ist die Behauptung erwiesen. (Der zweite Kreis, der dem unteren Vorzeichen in der vorletzten Gleichung entspricht, hat keine mechanische Bedeutung.)

Fig. 1.



Der Durchmesser des Beschleunigungspolkreises erster Art ist k^2 , und der Kreis berührt die Parallele zum Kräftestrahl durch S auf der diesem abgewendeten Seite. Es möge hier daran erinnert werden, daß $\frac{k^2}{p}$ auch der Abstand des Drehpoles E vom Massenmittelpunkt ist, wenn das ruhende ebene System von einem in der Linie des Kräftestrahles wirkenden Impuls getroffen wird. In der Tat ist die unendlich große Kraft des Kräftestrahles als Impuls aufzufassen, und wir nennen daher den Punkt E den *Impuls*pol des Beschleunigungspolkreises K_1 ; für seine Lage ist es gleichgültig, nach welcher der beiden Richtungen des Kräftestrahles der Impuls wirkt, wir haben deshalb auch nur von *einer* unendlich großen Kraft gesprochen. Der Impuls ist natürlich durch die unendlich große Kraft in bestimmter Wirkungslinie noch nicht vollständig gekennzeichnet. Seine Größe (Mv) kann noch immer jeden beliebigen Wert haben.

Die Benützung des Beschleunigungspolkreises erster Art führt auf eine einfache Konstruktion des Beschleunigungspoles. Es ist

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{\omega'}{\omega^2} = \frac{M\omega'}{M\omega^2} = \frac{Pp}{Mk^2\omega^2} = \frac{P/M}{k^2/p \cdot \omega^2} = \frac{\gamma_s}{d_1\omega^2}.$$

Hierin ist $P/M = \gamma_s$ die Beschleunigung des Massenmittelpunktes und der Nenner $d_1\omega^2$ ($k/p = d_1$) stellt die Normalbeschleunigung von E gegen S hin dar, herrührend von der Drehung des Systemes um S .

Nachdem der Kreis K_1 mit dem Durchmesser k^2/p gezeichnet ist, mache man $\overline{SB} = \gamma_s$, $\overline{SF} = d_1\omega^2$ in einem beliebigen Maßstabe, verbinde F mit B und ziehe $EG \parallel FB$, dann ist der Schnittpunkt G dieser Linie mit dem Kreise K_1 der gesuchte Beschleunigungspol. Da ferner die Beschleunigung eines Systempunktes (S) auch der Größe nach bekannt ist (γ_s), so sind für alle Punkte die Beschleunigungen gegeben.

Da λ stets ein spitzer Winkel ist, so kann bei gegebener Wirkungsrichtung von P für die Lage des Beschleunigungspoles nur jener Halbkreis in Betracht kommen, welcher nach der Seite dieser Wirkungsrichtung liegt.

Geht die Wirkungslinie der Kraft durch den Massenmittelpunkt S ($p = 0$), so wird der Beschleunigungspolkreis erster Art diese Wirkungslinie selbst. Rückt die Kraft ins Unendliche und wird sie gleichzeitig Null, so resultiert ein Moment und der Beschleunigungspolkreis zieht sich in den Massenmittelpunkt zusammen — ein Moment erteilt dem System Beschleunigungen um diesen. Den ∞^2 Geraden der Ebene als Kräftestrahlen entsprechen die ∞^2 Kreise durch S als Beschleunigungspolkreise.

4. Eliminieren wir ω' aus der im vorigen Artikel benützten Gleichung

$$x^2 + y^2 = \frac{P^2 : M^2}{\omega^4 + \omega'^2}$$

mit Hilfe des aus der Gleichung für $\operatorname{tg} \lambda$ entnommenen Ausdrucks

$$\omega' = \frac{x}{y} \omega^2,$$

und bezeichnen wir $\frac{P}{M\omega^2} = d_2$, so folgt

$$x^2 + y^2 = d_2 y,$$

oder

$$(K_2) \quad x^2 + \left(y - \frac{d_2}{2}\right)^2 = \frac{d_2^2}{4}.$$

Dieser Kreis ist der Ort aller Beschleunigungspole, welche auftreten, wenn eine Kraft P bei festgehaltener Intensität parallel mit sich selbst verschoben wird, also ein Parallelkräftebüschel konstanter Stärke durch-

läuft; sein Durchmesser ist $d_2 = \frac{P}{M\omega^2} = \frac{\gamma_s}{\omega^2}$, eine reine Strecke in Richtung von γ_s . Die Strecke $\frac{\gamma_s}{\omega^2} = \frac{P}{M\omega^2}$, in Richtung der Beschleunigung des Massenmittelpunktes S aufgefaßt, werden wir die nach S reduzierte Kraft von P nennen.

Der Durchmesser dieses Kreises ergibt sich auch aus den Betrachtungen des vorhergehenden Artikels direkt; es ist in Fig. 1: $\overline{SE} = d_1 = \frac{k^2}{p}$, $\text{tg } \lambda = \frac{\omega'}{\omega^2}$, daher

$$S\overline{A} = \frac{k^2}{p} \text{tg } \lambda = \frac{k^2 \omega'}{p \omega^2} = \frac{Mk^2 \omega'}{Mp \omega^2} = \frac{Pp}{Mp \omega^2} = \frac{\gamma_s}{\omega^2} = d_2,$$

oder

$$d_2 \cdot \omega^2 = \gamma_s.$$

Wir fassen dieses Ergebnis in die Worte:

II. Der Ort der Beschleunigungspole, welche von einem Parallelkräftebüschel konstanter Stärke P an einem ebenen System erzeugt werden, ist ein Kreis (K_2 in Fig. 1), der über der in S in der Richtung von P angesetzten Strecke $\frac{P}{M\omega^2}$ geschlagen wird; wir nennen ihn den *Beschleunigungspolkreis zweiter Art*, welcher P angehört.

Mit Hilfe dieser beiden Kreise ist für ein freies ebenes System der Beschleunigungspol des Beschleunigungszustandes, den eine äußere Kraft erzeugt, in einfacher Weise durch deren Schnittpunkt (G) bestimmt.

5. Die Anwendung des Satzes I hat den Verfasser auf einen Satz aus der projektiven Geometrie geführt, der hier wiedergegeben werden möge. Fassen wir nämlich den Fall ins Auge, daß das ebene System aus zwei in unveränderlicher Entfernung befindlichen Punkten A und B besteht, welche von einer beliebigen Kraft P beeinflusst werden. Nach dem d'Alembertschen Prinzip ist die Gesamtheit der möglichen Beschleunigungszustände offenbar durch die Mannigfaltigkeit der von den Punkten von P nach A und B gezogenen Strahlenpaare erschöpft (Fig. 2). Da die Richtung der Beschleunigung des Massenmittelpunktes S immer parallel zur Krafrichtung fällt, so erhält man für die jedem Punkt von P entsprechende Zerlegung, da man die Beschleunigungsrichtungen von drei Punkten des Systems A , B und S kennt, den Beschleunigungspol als Schnittpunkt der vier Kreise, welche den vier durch das entstehende vollständige Vierseit gebildeten Dreiecken umschrieben werden können. In Fig. 2 sind die gegenüberliegenden Ecken dieses Vierseits mit gleichen Ziffern bezeichnet, 1, 1', 2, 2', 3, 3'.

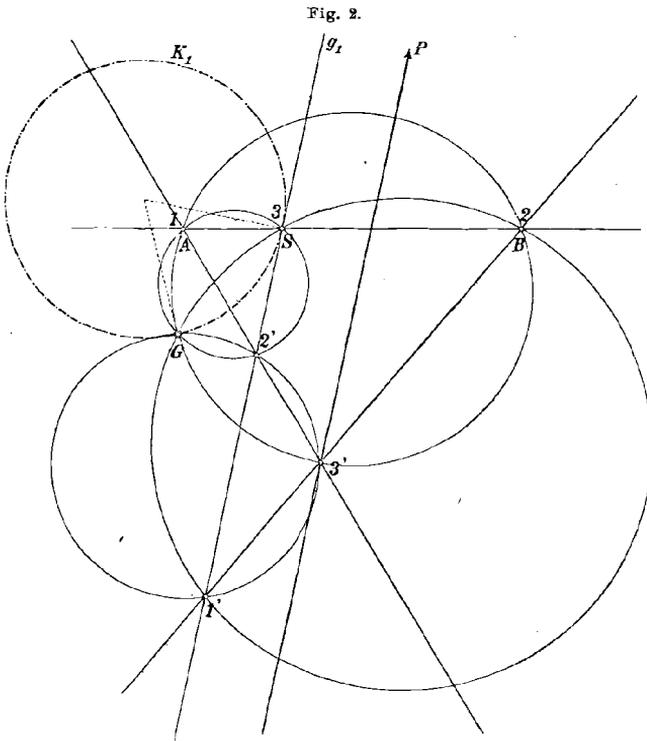
Denken wir uns nun das Vierseit so veränderlich, daß die Ecke 3' z. B. eine zur gegenüberliegenden Seite g_1 parallele Gerade (P) beschreibt

— dadurch erhalten wir die Gesamtheit der Vierseite, die in unserer Aufgabe auftreten können — so durchläuft der Schnittpunkt der vier den jeweilig entstehenden Dreiecken umschriebenen Kreise — der Beschleunigungspol G — einen weiteren Kreis (K_1).

6. Aus Art. 3 ergibt sich unmittelbar der Satz:

III. Für alle Kräftestrahlen, welche durch einen Punkt A hindurchgehen, schneiden sich die von ihnen erzeugten Beschleunigungspolkreise außer in S noch in einem zweiten Punkt B , der A durch die Gleichung

$$r \cdot r' = k^2$$



zugeordnet ist, wenn r und r' die Abstände der beiden A und B genannten Punkte von S sind; die drei Punkte A, S, B liegen auf einer Geraden und zwar liegt S zwischen A und B . Die sämtlichen so entstehenden Beschleunigungspolkreise bilden ein Kreisbündel mit den Grundpunkten S und B .

Es gehört daher auch der Be-

schleunigungspolkreis erster Art, den die Resultierende zweier sich in A schneidender Kräfte erzeugt, dem Kreisbündel an, das durch die Beschleunigungspolkreise der Komponenten bestimmt ist.

7. Wir wollen nun einen Schritt weiter gehen, und nach den geometrischen Örtern der Wendepole fragen, welche den auf den Beschleunigungspolkreisen erster und zweiter Art gelegenen einfachen Mannigfaltigkeiten von Beschleunigungspolen für einen vorgegebenen Geschwindigkeitspol entsprechen. Zunächst gilt der Satz:

IV. Die Wendepole, welche von den ∞^1 Kräften eines Kräftestrahles erzeugt werden, liegen für jeden Punkt C der Ebene als Geschwindig-

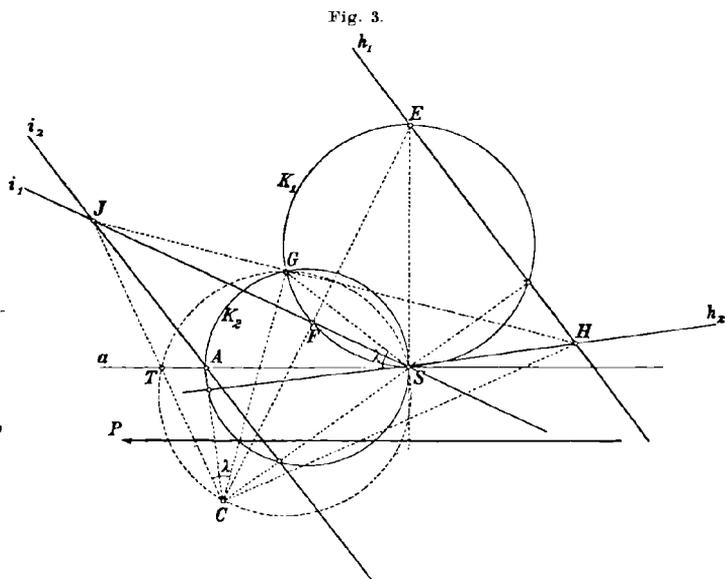
keitspol in einer geraden Linie, deren Lage durch den Geschwindigkeitspol eindeutig bestimmt ist. Diese Gerade — wir werden sie die *Wendepolgerade erster Art* für den betreffenden Punkt nennen — geht durch den Massenmittelpunkt S und steht auf der Verbindungslinie von C und E , dem Impulspole des zugehörigen Beschleunigungspolkreises erster Art, senkrecht.

Daraus ist zu ersehen, daß allen auf der Geraden CE gelegenen Geschwindigkeitspolen dieselbe Wendepolgerade erster Art, i_1 , entsprechen wird. Alle für den Geschwindigkeitspol C möglichen Wendepolgeraden gehen dann durch den Punkt F , den Schnittpunkt der Geraden CF mit dem Kreis K_1 und i_1 (Fig. 3).

Beweis: Aus dem Umstande, daß die Beschleunigung des Massenmittelpunktes die Richtung der äußeren Kraft P hat und aus den Eigenschaften des Wendepoles

und Beschleunigungspoles folgt, daß $\sphericalangle GST = \sphericalangle GCJ = \lambda$ ist, daher liegen die vier Punkte $CSGT$ auf einem Kreis. Das Kreisbüschel mit den Grundpunkten CS schneidet mithin auf a ($\parallel P$ durch S) die Punktreihe I. O. T und auf K_1 die Punktreihe II O. G aus, welche projektiv sind: daher sind auch das Strahlenbüschel I. O., welches die Punktreihe a aus C projiziert und das Strahlenbüschel II. O. (GJ), für welches C ein Brennpunkt und K der Scheitelkreis ist, projektiv. Die zwei Strahlenbüschel haben die beiden Strahlen, welche von C nach den beiden imaginären Kreispunkten gehen, entsprechend gemein und erzeugen daher eine gerade Linie i_1 ; diese geht durch S , weil S ein gemeinsamer Punkt der beiden Punktfolgen a und K_1 ist und gehört dem Strahlenbüschel II. O. GJ an, w. z. b. w.

Wir wollen auch hier den Sprachgebrauch einführen, daß jeder Kräftestrahl der Ebene an dem System in bezug auf jeden Punkt C



der Ebene als Geschwindigkeitspol eine bestimmte Wendepolgerade erster Art erzeugt.

Entsprechend dem Beschleunigungspolkreis zweiter Art gilt für die Wendepole der Satz:

V. Wendepole, welche von den ∞^1 Kräften eines Parallelkräftebüschels von der Größe P , das durch den Durchmesser $\frac{P}{M\omega^2}$ des von ihm erzeugten Beschleunigungspolkreises (zweiter Art) \overline{SA} charakterisiert werden möge, erzeugt werden, liegen auf einer Geraden, der *Wendepolgeraden zweiter Art* i_2 , welche durch A geht, und auf CS senkrecht steht.

Der Beweis ist analog wie bei IV.

Ferner erhalten wir (Fig. 3):

VI. Die Tangentialpole, welche von einem Kräftestrahl p in bezug auf einen bestimmten Punkt C der Ebene als Geschwindigkeitspol erzeugt werden, liegen in einer Geraden h_1 , die durch den Impulspol E hindurchgeht und zu CS senkrecht steht, der *Tangentialpolgeraden erster Art*.

Denn nach einem bekannten Satze liegen die Punkte H , die auf den Strahlen des Strahlenbüschels JG so bestimmt sind, daß $\sphericalangle H C J = 90^\circ$ ist, ebenfalls auf einem Strahle dieses Büschels. Und:

VII. Die Tangentialpole, welche von einem Parallelkräftebüschel von der Größe P in bezug auf den Punkt C der Ebene als Geschwindigkeitspol erzeugt werden, liegen auf einer Geraden h_2 , die durch S hindurchgeht und auf \overline{CA} senkrecht steht, der *Tangentialpolgeraden zweiter Art*.

Mithin ergeben sich der Wendepol und Tangentialpol, die eine bestimmte Kraft P an dem System erzeugt, als Schnitt der Wendepolgeraden und Tangentialpolgeraden erster und zweiter Art, die durch den Kräftestrahl und das Parallelkräftebüschel, denen P angehört, definiert sind.

8. Die Methode, nach welcher wir die in Art. 2 definierten Aufgaben lösen wollen, beruht nun in folgendem: Zunächst ist zu bemerken, daß die Anzahl der voneinander unabhängigen Bedingungen für das ebene System und damit die Zahl der unbekanntenen Reaktionen höchstens zwei sein kann. Für jede dieser Bedingungen ist die Wirkungslinie der durch sie hervorgerufenen Reaktion bestimmt — sie ist die Richtung der Normalen zu der die Bedingung darstellenden Kurve. Wie bei der analytischen Behandlung führen wir das Problem auf eine „freier“ Bewegung zurück, indem wir uns die Bedingungen entfernt und in jenen Normalenrichtungen die Reaktionen wirkend denken; ihre

Größen sind unbekannt, jedenfalls gehören sie aber den Kräftestrahlen an, welche in die bezüglichen Normalen hineinfallen. Wir haben also ein starres System unter dem Einflusse von zwei bzw. drei Kräften (je nach der Anzahl der Bedingungen), deren Richtungen sämtlich bekannt sind, von der äußeren Kraft ist überdies die Größe gegeben. Nach Art. 3 und 7 läßt sich für jeden Kräftestrahl der Beschleunigungspolkreis erster Art und für den gegebenen Geschwindigkeitspol C die zugehörige Wendepolgerade konstruieren. Jeder Kraft entspricht ein Beschleunigungszustand, den sie erzeugen würde, wenn sie für sich allein auf das System einwirkte, und der wirklich auftretende Beschleunigungszustand entsteht durch Superposition der einzelnen Beschleunigungszustände dadurch, daß die einzelnen Kräfte *gleichzeitig* auf das System einwirken. Der Fall, daß das ebene System einen festen Punkt hat, verlangt eine etwas abweichende Behandlung, die wir unten geben wollen.

9. Es handelt sich nun darum, die Zusammensetzung von Beschleunigungszuständen, welche der gleichzeitigen Einwirkung mehrerer Kräfte auf das ebene System entsprechen, durchzuführen, wenn sich das System mit gegebenem Geschwindigkeitszustande bewegt. Es gilt der Satz:

VIII. Der Wendepol (J) des Beschleunigungszustandes, welchen die Resultierende zweier oder mehrerer gleichzeitig einwirkender Kräfte an dem System hervorbringt, ist der Endpunkt der Streckensumme, welche durch geometrische Addition der Verbindungsstrecken des Massenmittelpunktes S mit den Wendepolen (J_n) der von den einzelnen Kräften erzeugten Beschleunigungszustände gebildet wird:

$$(1) \quad \overline{SJ} = \sum_n \overline{SJ}_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Wir werden den übrigens einfachen Beweis dieses Satzes in einer folgenden Arbeit nachtragen.

Für die Ermittlung des Beschleunigungspoles könnte die aus der elementaren Mechanik bekannte Beziehung zwischen den Winkelbeschleunigungen

$$\omega' = \sum_n \omega'_n$$

verwendet werden. Nun ist

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{\omega'}{\omega^2}, \quad \operatorname{tg} \lambda_n = \frac{\omega'_n}{\omega^2} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

daher

$$(2) \quad \operatorname{tg} \lambda = \sum_n \operatorname{tg} \lambda_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Ist der Wendepol J und damit der Wendekreis für die resultierende Bewegung bekannt, so könnte durch Auftragen des Winkels λ an \overline{JC} im richtigen Sinne der Beschleunigungspol erhalten werden.

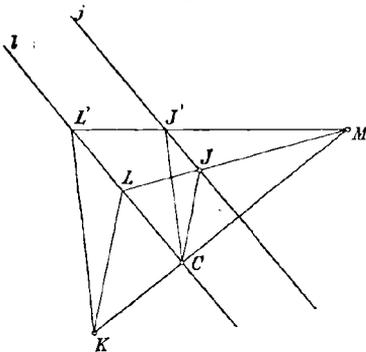
Bei den unten folgenden Anwendungen gelangt diese letztere Beziehung lediglich als Kontrolle zur Ausführung. Wir werden an ihrer Stelle die oben definierten Gebilde „zweiter Art“ verwenden und fügen hier nur die Bemerkung an, daß sich der Durchmesser \overline{SA} des Beschleunigungspolkreises zweiter Art für die resultierende Bewegung durch geometrische Addition der entsprechenden Durchmesser für die Einzelbewegungen \overline{SA}_n in bezug auf S ergibt:

$$(3) \quad \overline{SA} = \sum_n \overline{SA}_n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

ein nach dem Prinzip der Erhaltung der Bewegung des Massenmittelpunktes selbstverständlicher Ansatz.

10. Um nun den Einfluß der Bedingungen auf die Bewegung des Systems einzuführen, benützen wir die Umkehrung der bekannten Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes der Bahnkurve eines Systempunktes mit Hilfe des Wendepoles.¹⁾

Fig. 4.



Nach dieser Konstruktion ergibt sich der Krümmungsmittelpunkt K der Bahnkurve eines Systempunktes M aus dem gegebenen Geschwindigkeitspole C und Wendepole J in folgender Weise: Man verbinde (Fig. 4) M mit J und mit C , ziehe $\overline{LC} \perp \overline{MC}$ bis zum Schnitt L mit \overline{MJ} und mache $\overline{LK} \parallel \overline{JC}$; dann ist K der gesuchte Krümmungsmittelpunkt.

Ist nun umgekehrt der Krümmungsmittelpunkt K bekannt, so kann zufolge dieser Konstruktion eine Gerade j als Ort für den Wendepol J angegeben werden; man erhält sie, wenn man L die Gerade l ($\perp KM$) durchlaufen läßt: J beschreibt dann eine zu l parallele Gerade j , welche durch Ausführung der obigen Konstruktion in umgekehrter Form für einen beliebig gewählten Punkt L' von l erhalten werden kann.

Wenn zwei Punkte des Systems gezwungen werden, vorgegebene Bahnkurven zu beschreiben, welche für den betreffenden Zeitpunkt durch ihre Normalen und Krümmungsmittelpunkte gegeben sind, dann ist der Wendepol der resultierenden Bewegung durch zweimalige Ausführung der angegebenen Umkehrung gegeben. In diesem Falle wird

1) Siehe Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte, Bd. I, S. 464.

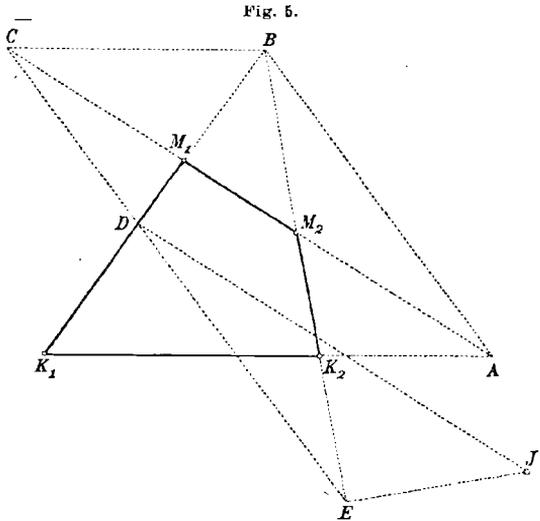
man es jedoch vorziehen, das folgende Verfahren zur Ermittlung des Wendepoles zu verwenden, welches auf der Zurückführung des durch die beiden betrachteten Systempunkte und die zugehörigen Krümmungsmittelpunkte gebildeten Viereckes auf ein Kurbelviereck beruht, von welchem die Krümmungsmittelpunkte die Endpunkte des ruhenden Gliedes sind. Das Verfahren möge hier ohne Beweis wiedergegeben werden.

M_1 und M_2 seien die geführten Systempunkte, K_1 und K_2 die Krümmungsmittelpunkte ihrer Bahnen in diesem Augenblicke (Fig. 5). Man verlängere K_1K_2 und $\overline{M_1M_2}$ bis zum Schnitte A , K_1M_1 und $\overline{K_2M_2}$ bis zum Schnitte B ; mache $\overline{BC} \parallel K_1K_2$, $\overline{CE} \parallel BA$ und errichte in den Punkten D und E die Senkrechten $\overline{DJ} \perp \overline{K_1M_1}$, $\overline{EJ} \perp \overline{K_2M_2}$, dann ist J der gesuchte Wendepol.

Wenn ein Punkt des bewegten Systems eine Gerade beschreibt, dann geht diese durch den Wendepol und der sie beschreibende Punkt liegt auf dem Wendekreise [Schell a. a. O.].

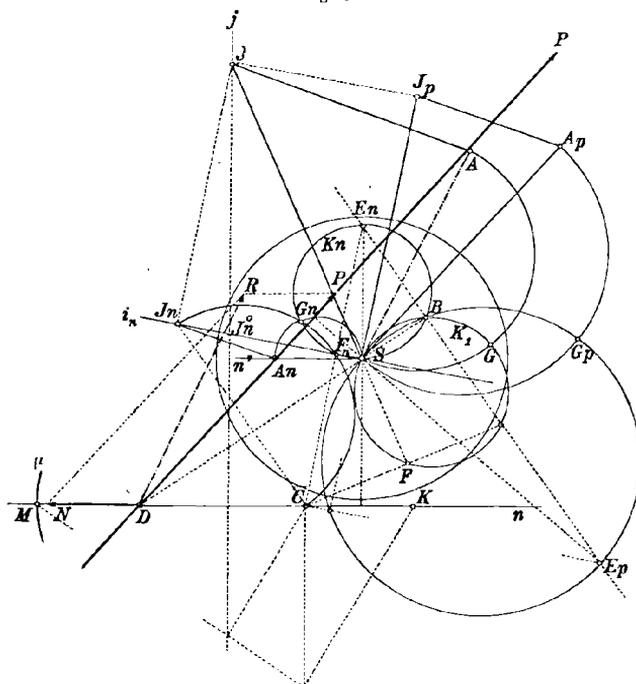
Wir gehen nun dazu über, die Ermittlung des resultierenden Beschleunigungszustandes für die einzelnen möglichen Fälle gesondert zu besprechen.

11. *Eine Bedingung* (Fig. 6). Der Punkt M des Systems sei gezwungen, sich auf der Kurve μ zu bewegen, welche der festen Ebene angehört. Ferner sei gegeben: Der Geschwindigkeitspol C (auf der Kurvennormalen n), die Winkelgeschwindigkeit ω in dem betrachteten Zeitpunkte und die einwirkende Kraft P , bzw. deren reduzierte $\overline{SA}_P = \frac{P}{M\omega^2}$. Für die gegebene Bedingung muß der Wendepol des resultierenden Beschleunigungszustandes J auf der Geraden j liegen, welche durch Angabe des Krümmungsmittelpunktes K der Kurve μ für M nach der in Art. 10 wiedergegebenen Konstruktion erhalten werden kann. Diesen resultierenden Beschleunigungszustand denken wir uns durch Superposition der beiden Beschleunigungszustände hervorgerufen, welche die gegebene Kraft P und die unbekannte Reaktion,



N , je für sich allein an dem System erzeugen würden. Der erstere, der durch G_p, J_p charakterisiert ist, ist mit P gegeben. Der Kräftestrahl n , dem die gesuchte Reaktion N angehört, erzeugt einen Beschleunigungspolkreis erster Art K_n und für den Punkt C als Geschwindigkeitspol eine Wendepolgerade $i_n (\perp CF_n$ durch S). Damit ist aber der resultierende Wendepol J und der Wendepol J_n des von der Reaktion N allein erzeugten Beschleunigungszustandes gefunden; denn

Fig. 6.



nach (1) Art. 9 ist

$$SJ = \overline{SJ_p} \hat{+} \overline{SJ_n},$$

wodurch J auf j und J_n auf i_n bestimmt sind. Der Kreis über CJ_n gibt den Wendekreis des von der Reaktion N allein erzeugten Beschleunigungszustandes; sein Schnitt mit K_n liefert sofort den zugehörigen Beschleunigungspol G_n und zwar eindeutig, da der zweite Schnittpunkt F_n von i_n mit K_n , durch den der Wendekreis CJ_n hindurchgeht, hierfür nicht in Betracht

kommt. Die durch J zu CS gezogene Senkrechte gibt im Schnitte mit n' ($\parallel n$) den Endpunkt der reduzierten Reaktion $\overline{SA_n} = \frac{N}{M\omega^2}$ (Satz V, Art. 7). Damit ist aber auch die in D angreifende Gesamtkraft R , bzw. deren reduzierte gegeben, denn es ist

$$\frac{R}{M\omega^2} = \frac{P}{M\omega^2} \hat{+} \frac{N}{M\omega^2} = \overline{SA};$$

dabei ist $J\hat{A} \perp \overline{CS}$. Der von R erzeugte Beschleunigungszustand stellt die Lösung der Aufgabe dar. Der zugehörige Beschleunigungspolkreis erster Art, K_1 , der durch $S, B(\overline{BS} \cdot \overline{SD} = k^2, \text{ III. Art. 6})$ und $F(CF \perp JS$ auf dieser letzteren gelegen) bestimmt ist, muß die Inversion der Wirkungslinie in bezug auf den Kreis k sein, was als Kontrolle dienen

kann. Der Schnitt von K_1 mit dem über \overline{SA} geschlagenen Beschleunigungspolkreis zweiter Art gibt den gesuchten Beschleunigungspol der resultierenden Bewegung G ; dabei ist $JG \perp GC$. — Als weitere Kontrolle kann die durch Gleichung (2) Art. 9 ausgedrückte Beziehung dienen; ferner ist $\sphericalangle GSA = \sphericalangle GCJ$ und $\sphericalangle G_n SA_n = \sphericalangle G_n CJ_n$.

Es sei hier noch darauf hingewiesen, daß die Einführung der Bedingung für den Punkt M — ohne äußere Kraft P — einen Beschleunigungszustand zur Folge hat, der ebenfalls leicht erhalten werden kann: Aus geometrischen Gründen muß nämlich wie zuvor der Wendepol J_n^0 des gesuchten Beschleunigungszustandes auf der Geraden j liegen; und da der Kräftestrahl n , dem die gesuchte Reaktion angehört, nur Wendepole auf i_n erzeugen kann, so liegt J_n^0 notwendig im Schnittpunkt von j und i_n . Der Kreis über CJ_n^0 gibt dann den Wendekreis und sein Schnitt mit dem von n erzeugten Beschleunigungspolkreis erster Art K_n den gesuchten Beschleunigungspol G_n^0 .

12. *Zwei Bedingungen (Zwanglauf)*. (Fig. 7). Zwei Punkte M , und M_n des Systems sind gezwungen, sich auf zwei Kurven λ und ν zu bewegen, welche in der Bezugsebene fest liegen; ihre Normalen seien l und n . In dem betrachteten Zeitelemente drehe sich das System mit der Winkelgeschwindigkeit ω um C , dem Schnitt von l und n und werde von einer Einzelkraft P angegriffen. Man ermittle den resultierenden Beschleunigungszustand und die Größe der Reaktionen.

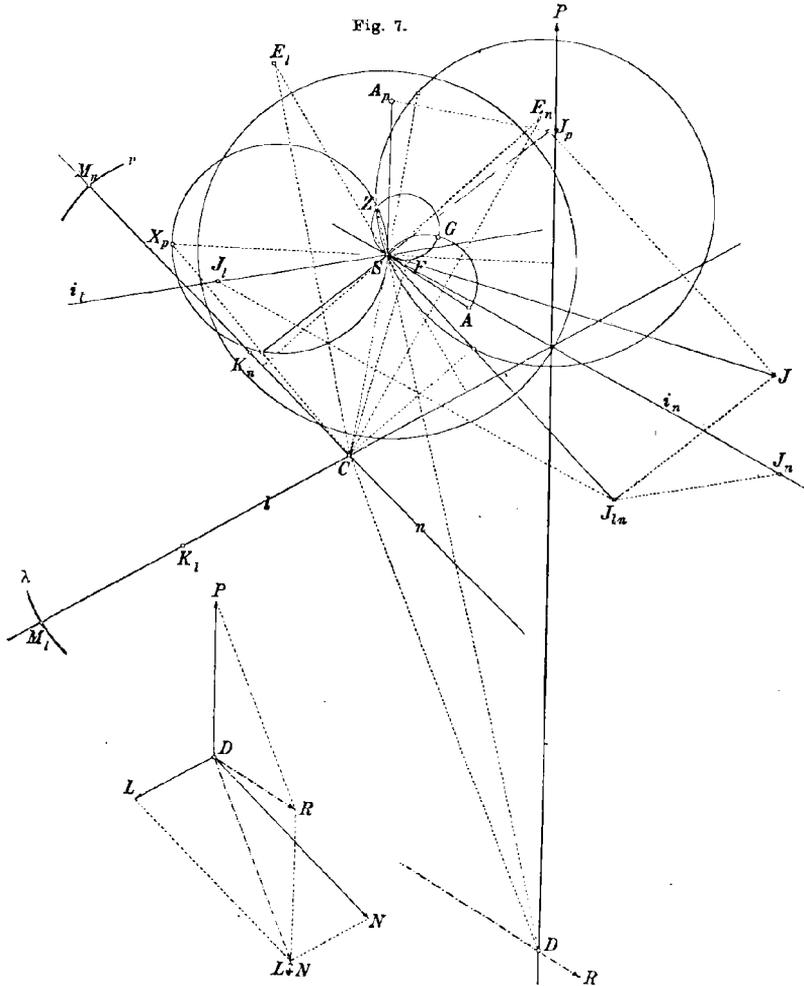
Durch die Krümmungsmittelpunkte K_l und K_n der Kurven λ und ν für das betrachtete Zeitelement ist der Wendepol J des resultierenden Beschleunigungszustandes nach Art. 10 bestimmt. Der von P allein an dem System erzeugte Beschleunigungszustand (G_p, J_p) kann ohne weiteres konstruiert werden. Wir erhalten daher in der geometrischen Differenz von \overline{SJ} und $\overline{SJ_p}$ den Wendepol J_{in} für jenen Beschleunigungszustand, welchen die Reaktionen L und N der Kurven λ und ν zusammen an dem System erzeugen müssen,

$$\overline{SJ_{in}} = \overline{SJ} \hat{-} \overline{SJ_p}.$$

Zeichnen wir ferner die von den Kräftestrahlen l und n , denen die unbekanntenen Reaktionen L und N bzw. angehören, erzeugten Beschleunigungspolkreise erster Art K_l und K_n und in bezug auf C die Wendepolgeraden erster Art i_l und i_n bzw., so erhalten wir die Wendepole J_l und J_n der Beschleunigungszustände, welche die Reaktionen je für sich allein an dem System erzeugen würden, indem wir $\overline{SJ_{in}}$ nach den Richtungen i_l und i_n in zwei Komponenten zerlegen:

$$\overline{SJ_{in}} = \overline{SJ_l} \hat{+} \overline{SJ_n}.$$

Die Wendekreise über \overline{CJ}_i und \overline{CJ}_n geben dann im Schnitt mit den bezüglichen Beschleunigungspolkreisen K_i und K_n die Beschleunigungspole G_i und G_n . Zieht man durch S die Geraden $l \parallel l, n' \parallel n$, erhalten wir auf diesen im Schnitt mit $J_i A_i (\perp CS)$ und $J_n A_n (\perp CS)$ die Punkte



A_i und A_n , welche die Größen der reduzierten Reaktionen $\frac{L}{M\omega^2}$ und $\frac{N}{M\omega^2}$ liefern; damit ist der „reduzierte“ Kräfteplan gegeben. Die geometrische Summe von $\frac{P}{M\omega^2}$, $\frac{L}{M\omega^2}$ und $\frac{N}{M\omega^2}$ liefert die an dem System angreifende, reduzierte Gesamtkraft $\frac{R}{M\omega^2}$:

$$\frac{R}{M\omega^2} = \frac{P}{M\omega^2} \hat{+} \frac{L}{M\omega^2} \hat{+} \frac{N}{M\omega^2};$$

sie geht durch den Punkt D , in welchem P von der durch C gehenden Kraft $L \hat{+} N$ geschnitten wird. Ist R und ihr Ort in der Ebene gefunden, so erhalten wir den Beschleunigungspol G der resultierenden Bewegung, die eben von R erzeugt wird, als Schnitt der beiden zugehörigen Beschleunigungspolkreise erster und zweiter Art, wobei $\overline{JG} \perp \overline{GC}$ sein muß. Als weitere Kontrolle ergibt sich die Tatsache, daß die Richtungen der Beschleunigungen von S in den einzelnen Beschleunigungssystemen (G, J) , (G_n, J_n) , (G_{in}, J_{in}) und (G, J) den bezgl. Kraftrichtungen parallel ausfallen müssen; ihre Größen sind den reduzierten Kräften $L, N, L \hat{+} N$ und R proportional. Endlich kann die Lage der Beschleunigungspole G_{in} und G nach (2) Art. 9 kontrolliert werden.

Diese Methode zur Ermittlung des Beschleunigungszustandes bleibt auch anwendbar, wenn an den Kurven λ und ν Reibung von bekannten Reibungsziffern $f_1 = \text{tg } \varrho_1, f_2 = \text{tg } \varrho_2$ auftritt. Die Richtungen der Reaktionen L und N sind dann einfach um die Punkte M_i und M_n im Sinne der Drehrichtung des Systems um den Reibungswinkel zu verdrehen usw.

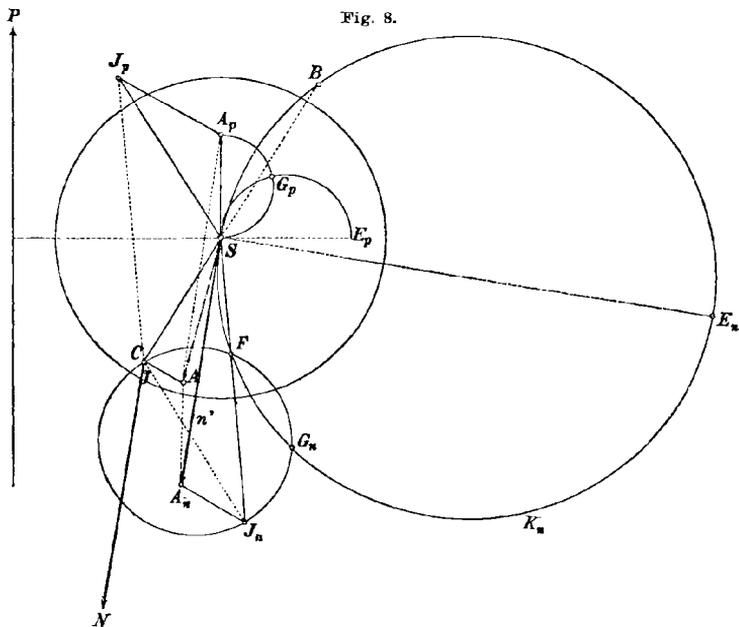
13. *Bewegung um einen festen Punkt.* (Fig. 8.) Das ebene System drehe sich (durch zwei Zeitelemente) um einen festen Punkt C mit der Winkelgeschwindigkeit ω und werde von äußeren Kräften beeinflusst, deren Resultante P ist; man bestimme den Beschleunigungszustand und die Reaktion des festen Punktes für den betrachteten Zeitpunkt.

Auch hier denken wir uns den resultierenden Beschleunigungszustand durch das Zusammenwirken der bekannten Kraft P und der unbekanntten Reaktion N des festen Punktes hervorgebracht; jetzt ist auch die Richtung dieser Reaktion unbekannt, ihre Wirkungslinie geht aber jedenfalls durch C . Wir konstruieren zunächst wieder den Beschleunigungspol und Wendepol jenes Beschleunigungszustandes (G_p, J_p) , den P für sich allein an dem System erzeugen würde. Da hier die Punkte G und J , welche den resultierenden Beschleunigungszustand kennzeichnen, mit C zusammenfallen, so muß die Strecke $SC \wedge S\overline{J}_p = S\overline{J}_n$ den Wendepol J_n (den Wendepol des Beschleunigungssystems) ergeben, den die Reaktion N des Punktes C für sich allein an dem System erzeugen würde. Der Beschleunigungspolkreis K_n des Kräftestrahles n , der mit N zusammenfällt, ist dann bestimmt durch die drei Punkte $S, F(\overline{CF} \perp \overline{J}_n \overline{S})$ und $B(\overline{BS} \cdot \overline{SC} = k^2, \text{ Art. 6, III})$; die Richtung der Reaktion N ist zu $E_n S$ senkrecht, wenn E_n der Impulspol von K_n ist. Zieht man $n' \parallel n$ durch $S, J_n A_n \perp CS$ bis zum Schnitt A_n mit n' , so ist \overline{SA}_n die Größe der reduzierten Reaktion $\frac{N}{M \omega^2}$. Der zweite Schnitt-

punkt von K_n mit dem Wendekreise CJ_n gibt G_n , den Beschleunigungspol des von N erzeugten Beschleunigungszustandes, wobei $\sphericalangle GCJ = \sphericalangle GSA_n$. Die Resultierende aus N und P gibt die auf das System einwirkende Gesamtkraft R ; ihre reduzierte ist

$$\overline{SA} = \overline{SA_p} \hat{+} \overline{SA_n}.$$

Die Größe der Beschleunigung des Massenmittelpunktes ist $\overline{SA} \cdot \omega^2$. —



Wir bemerken zum Schlusse, daß diese Methode auf den Fall, wo Beschleunigungssysteme gleicher und gleichgerichteter Beschleunigungen vorkommen, wie sie durch die Schwere erzeugt werden, nicht anwendbar ist. Die darauf bezüglichen Fragen, sowie die Weiterführung des hier verfolgten Gedankenganges auf gelenkig verbundene Systeme sollen den Gegenstand weiterer Arbeiten bilden.

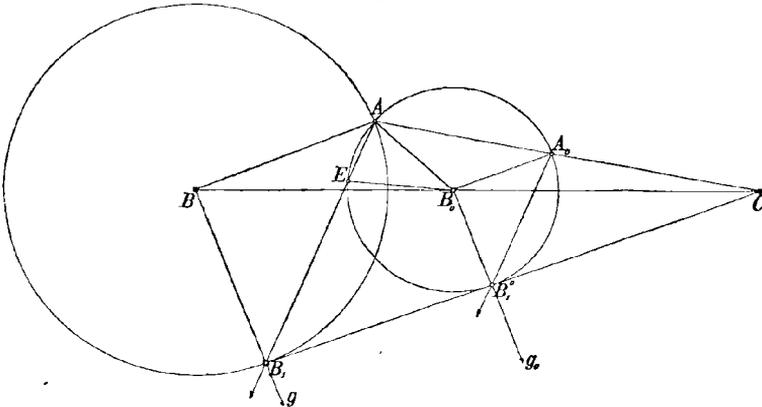
Die Ermittlung der Bewegungsverhältnisse von Kurbelgetrieben in einfacher zeichnerischer Behandlungsweise.

Von LEOPOLD FEIGL in Wien.

I. Einleitung.

Bei der Durchführung der geometrischen Konstruktionen, welche sich anlässlich der Untersuchung der Bewegungsverhältnisse von Kurbelgetrieben ergeben, ist man häufig gezwungen mit Kreisen von großen Halbmessern zu arbeiten. Abgesehen von der Unhandlichkeit der hierzu notwendigen Zeichenhilfsmittel, werden die bei jeder geometrischen Konstruktion auftretenden Fehler durch die unvermeidlichen Federungen des Zirkels bedeutend vermehrt. Es soll nun in der vorliegenden Arbeit ein Verfahren angegeben werden, welches die Bewegungsverhältnisse bei Kurbelgetrieben ohne Zuhilfenahme der Bogenprojektion ermitteln läßt. Zunächst werden zwei geometrische Aufgaben gelöst werden, welche die Grundlage für dieses Verfahren bilden.

Fig. 1.



Aufgabe 1. (Fig. 1.) Ein Kreis ist gegeben durch einen Punkt A seines Umfangs, durch die Richtung des durch A gehenden Halbmessers AB und durch die Länge des Halbmessers $AB = l$. Es soll ein beliebiger Punkt B_1 des Kreisumfangs ermittelt werden unter der Voraussetzung, daß der Mittelpunkt B des Kreises außerhalb der Zeichenfläche liege und zur Konstruktion nicht verwendet werden könne.

Um Aufgabe 1 zu lösen, legen wir durch den Punkt A einen Kreis, dessen Mittelpunkt B_0 ¹⁾ und dessen Halbmesser $AB_0 = r$ ist.

1) In Fig. 1 wurden einige Punkte mit Rücksicht auf den durchzuführenden Beweis anders bezeichnet als die analogen Punkte der folgenden Figuren.

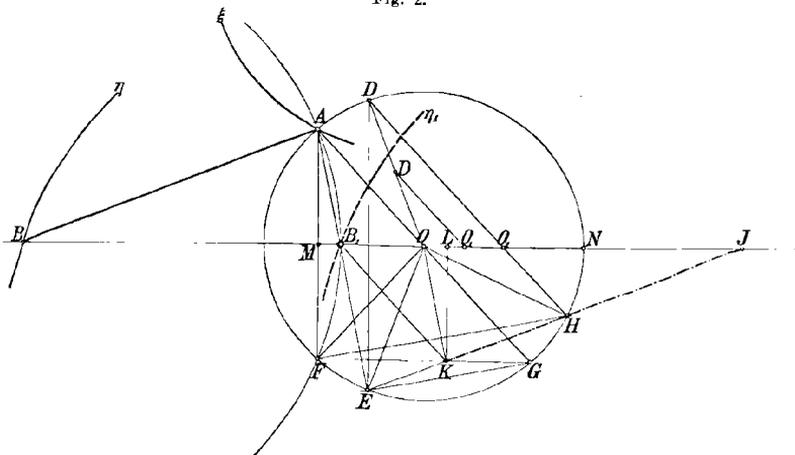
Mittelpunkt und Halbmesser können frei gewählt werden. Nun nehmen wir die durch B gehende Gerade g an, auf welcher der gesuchte Punkt B_1 liegen soll. Wie die Gerade g ermittelt wird, ist für die Lösung der Aufgabe ohne Belang. Wir bestimmen zunächst ein Ähnlichkeitszentrum der beiden Kreise $(B, l)^1$ und (B_0, r) , hier das äußere C . C wird als Schnitt zweier Ähnlichkeitsstrahlen gefunden, und zwar der Verbindungsgeraden der beiden Mittelpunkte B und B_0 und der Verbindungsgeraden der Kreispunkte A und A_0 , welche auf den parallelen Halbmessern \overline{BA} und $\overline{B_0A_0}$ liegen. Wenn wir nun einen Punkt B_1 des Kreises (B, l) suchen, so muß er auf einem Ähnlichkeitsstrahl $\overline{CB_1^0}$ liegen, welcher durch den dem Punkte B_1 entsprechenden Punkt B_1^0 des Kreises (B_0, r) geht. Nun stellen wir die Bedingung, daß das Ähnlichkeitszentrum C zur Bestimmung von B_1 nicht verwendet werden solle. Daher verbinden wir A_0 mit B_1^0 und legen durch A eine zu $\overline{A_0B_1^0}$ parallele Gerade, welche die Gerade g in B_1 schneidet. Es ist also die Konstruktion reduziert auf das Zeichnen der Geraden $\overline{AB_1}$, bzw. auf die Ermittlung des zweiten Schnittpunktes E der Geraden $\overline{AB_1}$ mit dem Kreise (B_0, r) . Um E zu finden, machen wir $\sphericalangle B_1^0B_0E = \sphericalangle B_0AB = \sphericalangle \gamma$. Es ist aber auch $\sphericalangle AB_0A_0 = \sphericalangle B_0AB = \sphericalangle \gamma$ als Wechselwinkel, daher $\sphericalangle B_1^0B_0E = \sphericalangle AB_0A_0$. Diese Winkel liegen nun so, daß ihre Scheitel B_0 mit der Spitze und ihre Schenkel B_0A und $\overline{B_0A_0}$ bzw. $\overline{B_0E}$ und $B_0B_1^0$ mit den Schenkeln der gleichschenkeligen Dreiecke $\overline{AB_0E}$ und $\overline{A_0B_0B_1^0}$ identisch sind. Es müssen deshalb die Geraden \overline{AE} und $\overline{A_0B_1^0}$ als Grundlinien dieser Dreiecke einander parallel sein. Man findet daher den Punkt B_1 , indem man durch B_0 die Gerade g_0 parallel der Geraden g zeichnet, den Winkel $B_1^0B_0E = \sphericalangle \gamma$ aufträgt und die Geraden \overline{AE} und g zum Schnitt bringt.

Aufgabe 2. (Fig. 2.) Gegeben ist eine beliebige ebene Bewegung mit einem Freiheitsgrade. Wir betrachten zwei zusammenfallende Ebenen: eine derselben, \mathfrak{A} , sei fest, die andere, \mathfrak{B} , beweglich. Die Bewegung der Ebene \mathfrak{B} ist eindeutig bestimmt, wenn man die Bewegung zweier in der Ebene \mathfrak{B} fester Punkte A und B kennt, deren Abstand $AB = l$ ungeändert bleiben muß. Die Bahnkurven von A und B in der festen Ebene \mathfrak{A} seien ξ und η . Sind also die Kurven ξ und η und ein Paar zugeordneter Lagen AB , damit auch der Abstand $AB = l$, gegeben, so ist jeder Lage A eine Lage B eindeutig zugeordnet und umgekehrt, d. h. die Kurven $\xi\eta$ sind punktweise ein-eindeutig aufeinander abgebildet. *Diese Abbildung wollen wir zunächst als gegeben voraussetzen.* Bei den Anwendungen, welche diese

1) Kreis (B, l) = Kreis mit dem Mittelpunkt B und Halbmesser l .

Aufgabe auf die Kurbelgetriebe finden wird, ist dies tatsächlich der Fall. Neben der Kurve η betrachten wir eine Kurve η_1 , welche aus η durch eine Translation von gegebener Richtung um die Strecke l hervorgeht, wobei jeder Punkt B von η in einen Punkt B_1 von η_1 übergeht. Da durch dieselbe auch η und η_1 punktweise ein-eindeutig aufeinander abgebildet sind, so gilt das Gleiche von den Kurven ξ und η_1 , wenn jedem Punkt A der entsprechende Punkt B_1 zugeordnet wird. Wir nehmen an, die Kurve η befinde sich nicht mehr auf der Zeichenfläche, während die Kurven ξ und η_1 zugänglich sind. Es soll zu jedem Punkt A von ξ der entsprechende Punkt B_1 von η_1 gefunden werden, ohne daß man die Kurve η dabei verwendet.

Fig. 2.



Diese Aufgabe läßt sich auf die Konstruktion Fig. 1 zurückführen, denn man kann die Frage auch so stellen: es ist jener Punkt B_1 der Kurve η_1 zu suchen, welcher auf einem Kreise liegt, dessen Mittelpunkt der Punkt B auf η und dessen Halbmesser $BA = l$ ist. Dabei ist vorausgesetzt, B sei unzugänglich. Wir zeichnen nun den Hilfskreis (O, r) , [in Fig. 1 Kreis (B_0, r) bezeichnet]. Wo der Mittelpunkt O angenommen wird, ist belanglos; in Fig. 2 wurde er in die durch B parallel der Translationsrichtung gehende Gerade verlegt. Es geschah dies, weil sich dadurch bei Kurbelgetrieben die analoge Konstruktion am einfachsten gestaltet. Die Allgemeinheit der Lösung bleibt hiervon unberührt. Die Konstruktion wird mit Hilfe des Halbmessers OE , wobei $\sphericalangle NOE = \sphericalangle \gamma$, und der Geraden AE durchgeführt. Im Schnitt von AE und η_1 liegt B_1 . Es wurde bereits erwähnt, daß im besonderen Falle eines Kurbelgetriebes das Gesetz der punktweisen Abbildung der Kurven $\xi\eta$ bzw. $\xi\eta_1$ stets bekannt ist; es ist dann einfacher,

die Lage des Punktes E nicht durch Übertragung des Winkels γ zu ermitteln, da $\sphericalangle \gamma$ als nicht gegeben zu betrachten ist, sondern auf folgende Weise: man konstruiert statt des Punktes E sein Spiegelbild D bezüglich \overline{OB} , indem man durch einen Punkt \overline{O}_1 , wobei $\overline{OO}_1 = \frac{1}{n} \cdot \overline{AO}$, eine Gerade parallel \overline{OA} legt, auf dieser $\overline{O}_1\overline{D} = \frac{1}{n} \cdot \overline{OB}$ aufträgt und den Punkt \overline{D} mit O verbindet. Der Schnitt der Geraden \overline{OD} mit dem Kreise (O, r) gibt den gesuchten Punkt D . Es ist dann $\triangle OO_1\overline{D} \sim \triangle AOB$, somit $\sphericalangle DOO_1 = \sphericalangle BAO = \sphericalangle \gamma$. Nimmt man $\frac{1}{n} = \frac{r}{l}$ an, so wird $\overline{OO}_1 = \frac{r^2}{l}$ und \overline{D} fällt mit D zusammen. D kann für jede Lage A ermittelt werden, da im speziellen Falle das Verhältnis der Gliederlängen $\frac{r}{l}$ bekannt ist. Es ist von Wichtigkeit, zu jeder Lage des Punktes A die Lagen aller Glieder des bewegten Getriebes zu kennen. Diese kann man innerhalb des Kreises (O, r) folgendermaßen festlegen: man verbindet E mit dem zweiten Schnittpunkt H der Geraden \overline{DO}_1 mit dem Kreise (O, r) , bringt EH mit einer durch F parallel zu \overline{BO} gelegten Geraden zum Schnitt K und verbindet K mit B_1 ; so ist $\overline{B_1K} \parallel \overline{OA} = r$, $\overline{KJ} \parallel \overline{AB} = l$. Es seien bezeichnet $\sphericalangle AOB = \sphericalangle \alpha$ und $\sphericalangle OBA = \sphericalangle \beta$. Es ist $\sphericalangle AOD = \pi - \sphericalangle BOA = \sphericalangle DON = \pi - \alpha - \gamma = \sphericalangle \beta$; $\sphericalangle HOG = \sphericalangle EOF = \sphericalangle AOD = \sphericalangle \beta$; $\sphericalangle EHF = \sphericalangle GFH = \sphericalangle \frac{\beta}{2}$, als Peripheriewinkel zu den Zentriwinkeln $\sphericalangle EOF$ bzw. $\sphericalangle GOH$. \overline{FH} schließt mit \overline{BO} den Winkel $\frac{\beta}{2}$ ein, da $\overline{FG} \parallel \overline{BO}$. $\overline{FK} = \overline{KH}$, als Seiten des gleichschenkeligen Dreiecks \overline{FKH} . $\overline{OK} \perp \overline{FH}$, als Diagonalen des Deltoids \overline{FKHO} . Daher ist $\sphericalangle KOL = \sphericalangle \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2} \right) = \sphericalangle AB_1M$; da ferner $\overline{KL} = \overline{AM}$ und $\sphericalangle OLK = \sphericalangle B_1MA = \frac{\pi}{2}$, so ist $\triangle OLK \cong \triangle B_1MA$. Mithin $\overline{KO} = \overline{AB_1}$. Daraus folgt: $\triangle OKJ \cong \triangle B_1AB$, weil $\overline{OK} = \overline{B_1A}$, $\sphericalangle JOK = \sphericalangle BB_1A = \sphericalangle \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2} \right)$ und $\sphericalangle OKJ = \sphericalangle B_1AB = \sphericalangle \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2} \right)$. Daher ist $\overline{OJ} = \overline{B_1B} = l$, $\overline{KJ} = \overline{AB} = l$ und $\sphericalangle OJK = \sphericalangle B_1BA = \sphericalangle \beta$. Endlich ist $\triangle OKB_1 \cong \triangle B_1AO$, weil $\overline{KO} = \overline{AB_1}$, $\sphericalangle KOB_1 = \sphericalangle AB_1O = \sphericalangle \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\beta}{2} \right)$, $\overline{OB_1} = \overline{B_1O}$, d. f. $\overline{B_1K} = \overline{OA} = r$, $\sphericalangle OB_1K = \sphericalangle B_1OA = \sphericalangle \alpha$. Von dem Dreieck B_1KJ kann man bei Kurbelgetrieben den weitgehendsten Gebrauch machen. Ist der geometrische Ort der Punkte K leicht zu bestimmen, so folgt hieraus eine einfache Ermittlung der Punkte B_1 . In allen Fällen jedoch kann $\triangle B_1KJ$, bzw. die Gerade \overline{EH} zur einfachen Konstruktion der Weg-Geschwindigkeits- und Beschleunigungskurven des Punktes B dienen.

II. Die Ermittlung des Kreuzkopf-Weges bei einigen Kurbelgetrieben.

Es soll nun die Anwendung der vorangehenden Konstruktionen auf Kurbelgetriebe gezeigt werden. Kurbelgetriebe entstehen aus dem Gelenkviereck, dem einfachen ebenen Mechanismus mit vier Drehpaarungen, wenn eines seiner Glieder festgestellt wird.¹⁾ Es können aber auch die Drehpaarungen teilweise durch Richtpaarungen ersetzt werden (Schubkurbelgetriebe). Bei allen Kurbelgetrieben müssen daher die Kurven ξ und η Kreise oder Geraden sein. Da stets mindestens ein Glied des Getriebes, die Kurbel oder Schwinde, eine drehende Bewegung macht, kann die Bahnkurve des Endpunkts dieses Gliedes mit dem Hilfskreis (O, r) identifiziert und die Bewegung der übrigen Glieder, seien es Kurbeln oder Koppeln, leicht festgelegt werden. Es sollen aus der großen Zahl von Kurbelgetrieben, welche durch Kombination von Dreh- und Richtpaarungen, ferner durch die Wahl der Längen der einzelnen Glieder und Abstände der Drehpunkte, aus dem Gelenkviereck entstehen, nur drei hervorgehoben werden, die im Maschinenbau häufige Anwendung finden: das zentrische Schubkurbelgetriebe, das exzentrische Schubkurbelgetriebe und das Schwingkurbelgetriebe (auch Doppelkurbelgetriebe bzw. Doppelschwinggetriebe). Alle übrigen Kurbelgetriebe lassen analoge Konstruktionen zu. Auch soll nur die Bestimmung des Weges gezeigt werden, während hinsichtlich der Konstruktionen der Koppelkurven, der Bahnkurven von mit einzelnen Gliedern fest verbundenen Punkten usf. auf das Lehrbuch der Kinematik von Burmester verwiesen sei, an Hand dessen das vorliegende Verfahren auf die erwähnten Konstruktionen angewendet werden kann.

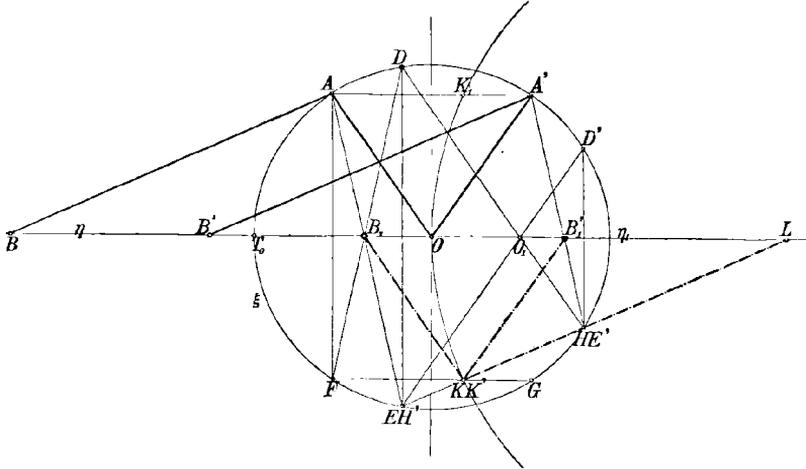
1. Das zentrische Schubkurbelgetriebe.

Die Kurve ξ (Fig. 3) ist ein Kreis (Halbmesser = Kurbellänge), die Kurve η eine durch den Mittelpunkt des Kurbelkreises gehende Gerade (Kreuzkopfbahn). Als Hilfskreis benützen wir den Kurbelkreis (O, r) , $\overline{OO_1} = \frac{r^2}{l}$ (normal $\frac{1}{5} \cdot r$). Die Konstruktion zur Ermittlung der um l verschobenen Kreuzkopflage B_1 beschränkt sich auf das Zeichnen der Geraden $\overline{O_1D} \parallel \overline{OA}$, $\overline{AF} \perp \eta$, und FD (oder $\overline{O_1D}$, DE und EA). Der geometrische Ort der Punkte K ist ein Kreis vom Halbmesser l (gleich der Schubstangenlänge \overline{AB}), der durch O geht und dessen Mittelpunkt L auf η , bzw. η_1 , liegt. Daraus läßt sich eine zweite Konstruktion des Kreuzkopf-Weges ableiten: man projiziert A nach K_1 und schneidet von K_1 als Mittelpunkt mit r in η ein: es entstehen zwei

1) L. Burmester, Lehrbuch der Kinematik, I. Band, S. 283 ff., Leipzig 1888.
 Zeitschrift f. Mathematik u. Physik. 58. Band. 1910. Heft 1/2. 12

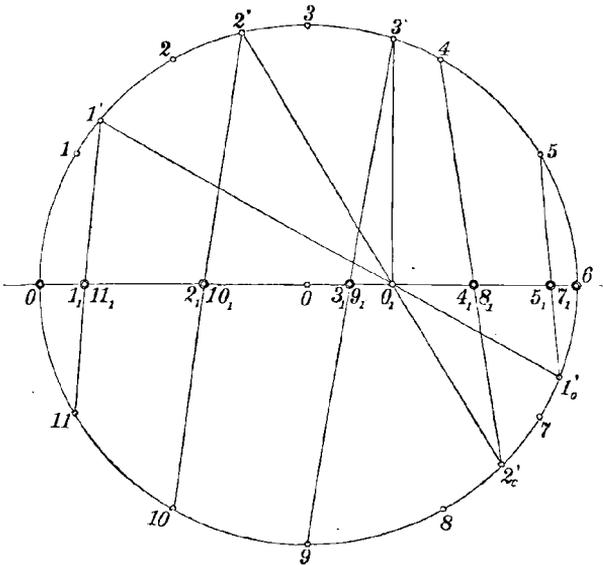
Lösungen B_1 und B'_1 , entsprechend den beiden zur y -Achse¹⁾ symmetrischen Kurbellagen \overline{OA} und \overline{OA}' . Es ergibt sich, daß zu zwei zur

Fig. 3.



y -Achse symmetrischen Kurbelstellungen \overline{OA} und \overline{OA}' [mit den Winkeln $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle T_0OA$ und $\sphericalangle (\pi - \alpha) = \sphericalangle T_0OA'$] Lagen der Schubstange

Fig. 4.



\overline{BA} bzw. $\overline{B'A'}$ gehören, die einander parallel sind ($\sphericalangle ABT_0 = \sphericalangle A'B'T_0 = \sphericalangle \beta$). Es fallen demgemäß die Geraden \overline{KL} und $\overline{K'L}$ bzw. die Punkte E mit H' und E' mit H zusammen. Dies ergibt sich auch aus der Bedingungsgleichung $r \sin \alpha = l \sin \beta$ des Getriebes. Unter Benutzung dieser Erscheinung ist in Fig. 4 gezeigt, in welcher einfachen Weise man die Kolbenstellungen ($1_1, 2_1, \dots$) erhält, wenn der Kurbel-

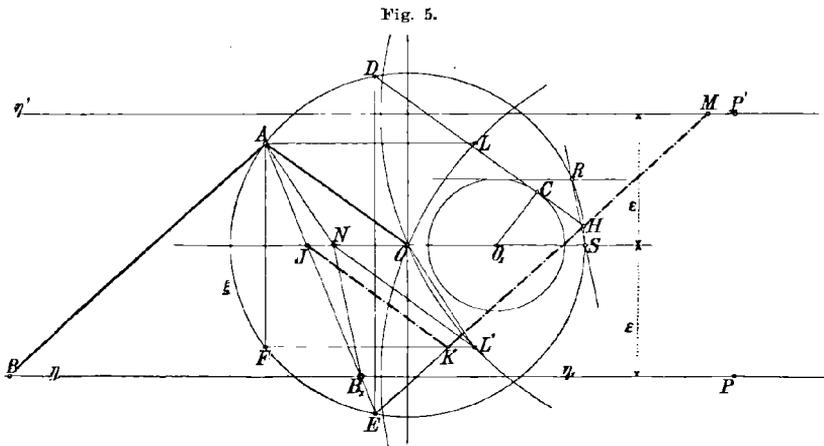
kreis in eine gerade Anzahl gleicher Teile geteilt wird, d. h. die Kurbel-

1) In den Figuren 3—9 ist als Ursprung des Koordinatensystems der Mittelpunkt O des Kreises (O, r), die x -Achse parallel und die y -Achse normal der Richtung der Translation angenommen.

stellungen ($\overline{O1}, \overline{O2}, \dots$) in bezug auf beide Achsen symmetrisch angenommen werden. Man findet zu 12 Kurbelstellungen die zugehörigen Kolben-(Kreuzkopf-)Stellungen durch Zeichnen von 8 Geraden. Würde man die Lagen des Kreuzkopfes durch Bogenprojektion bestimmen, so hätte man 7 Kreisbogen vom Halbmesser l zu zeichnen, also scheinbar eine einfachere und genauere Lösung erzielt. Auch eine geometrographische Untersuchung beider Methoden mit Hilfe der Lemoineschen¹⁾ Symbole würde für die Bogenprojektion sprechen. Zwei Konstruktionen lassen sich jedoch hinsichtlich ihrer Einfachheit und Genauigkeit nur dann vergleichen, wenn von annähernd gleich großen Zeichenhilfsmitteln Gebrauch gemacht wird, was in diesem Falle nicht zutrifft. Nur die Durchführung beider Konstruktionen zeigt, daß die erstangeführte die vorteilhaftere ist.

2. Das exzentrische Schubkurbelgetriebe.

Die Kurve ξ (Fig. 5) ist ein Kreis vom Halbmesser r , gleich der Kurbellänge, die Kurve η eine Gerade im Abstande ε , gleich der Exzen-



trizität, von O . η_1 , die um l verschobene Kurve η , fällt, wie beim zentrischen Getriebe, mit η zusammen. Wir machen wieder $\overline{OO_1} = \frac{r^2}{l}$. Zur einfacheren Bestimmung der Punkte B_1 zeichnen wir den festen Hilfskreis $(O_1, \frac{r}{l} \varepsilon)$. Für eine bestimmte Stellung \overline{OA} der Kurbel hat man folgende Geraden zu zeichnen: $\overline{CD} \parallel \overline{OA}$, $\overline{DE} \perp \eta$ und \overline{EA} . EA schneidet η_1 in B_1 . Der Linienzug CDE ist so zu zeichnen, daß O_1C

1) A. Adler, Theorie der geometrischen Konstruktionen, S. 277 ff. Sammlung Schubert LII, Leipzig 1906.

der Kurbelstellung \overline{OA} um $\frac{\pi}{2}$ im Umlegungssinne \widehat{AB}_1 voraneilt. Auch hier gilt das für zentrische Getriebe bezüglich zur y -Achse symmetrischer Kurbelstellungen Gesagte. Ermittelt man mit Hilfe der Bedingungsgleichung $l \sin \beta - r \sin \alpha - \varepsilon = 0$ des Getriebes den geometrischen Ort der Punkte K , so ergibt sich eine Kurve dritten Grades, die zur einfachen Bestimmung von B_1 unverwendbar ist. Wir werden daher den Punkt L' aufsuchen. Die Dreiecke OAN und $NL'O$ sind kongruent, die zugehörigen Seiten einander parallel. Vertauscht man die Punkte L' mit A und N mit O , so ist leicht einzusehen, daß der geometrische Ort der Punkte L' ein Kreis vom Halbmesser l ist, dessen Mittelpunkt P' auf η' liegt und der durch O geht. Um daher N aus A zu bestimmen, projiziert man A nach L , Kreis (P, l) , und schneidet mit r von L als Mittelpunkt in x ein. Aus N ergibt sich dann B_1 , indem man durch N eine Gerade parallel \overline{RS} legt, und diese mit η_1 zum Schnitt bringt. Diese Konstruktion ist dem sogenannten Schorchschen Diagramm¹⁾ analog, aber in der Durchführung bedeutend einfacher.

3. Das Schwingkurbelgetriebe.

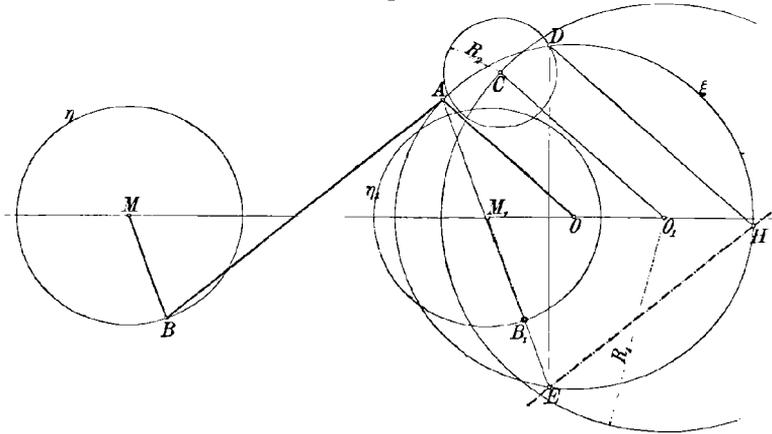
Dieses in Fig. 6 dargestellte Getriebe kann je nach Wahl der Längen der beiden Kurbelarme und des Abstandes OM der beiden Drehpunkte auch in das Doppelkurbel- oder in das Doppelschwinggetriebe übergehen. Die Kurve ξ ist ein Kreis vom Halbmesser $r = OA$, die Kurve η ein Kreis vom Halbmesser $\rho = MB$. Um die Konstruktion zur Aufsuchung des Punktes B_1 möglichst einfach zu gestalten, kann man den festen Hilfskreis $(O_1, R_1 = \frac{ra}{l})$ verwenden, wobei $a = MO$. Überdies zeichnen wir η_1 , d. h. den Kreis (M_1, ρ) , wobei $\overline{M_1O} = a - l$. Zur Bestimmung des zu OA gehörenden Punktes B_1 dient die folgende Konstruktion: Gerade $\overline{O_1C} \parallel \overline{OA}$ zum Schnitt zu bringen mit dem Kreise (O_1, R_1) , Kreis $(C, R_2 = \frac{r}{l}\rho)$ zum Schnitt zu bringen mit dem Kreise (O, r) , Punkt D nach E zu projizieren, Gerade \overline{EA} mit dem Kreise (M_1, ρ) zu schneiden. Um den richtigen Schnittpunkt (B_1) der Geraden \overline{EA} mit dem Kreise (M_1, ρ) zu wählen, hat man zu bedenken, daß die Punkte D und O bezüglich der Geraden $\overline{CO_1}$ dieselbe Lage einnehmen wie A und B_1 gegenüber x . \overline{EH} ist der Lage der Stange \overline{BA} parallel, $\overline{M_1B_1}$ gibt die Lage der Kurbel \overline{MB} an. Man kann auch

1) Schorch, Kolben- und Schieberdiagramme für doppeltwirkende Dampfmaschinen mit Muschelschiebersteuerungen. Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Jahrgang 1876, S. 403.

bei diesem Getriebe eine der Schorchschen analoge Konstruktion durchführen.

Anschließend an Kurbelgetriebe könnten die einfachen Mechanismen mit Kurvenführung behandelt werden, welche neben niederen Paarungen auch eine höhere aufweisen. Betrachten wir die Bewegung einer Stange, von welcher ein Punkt A sich auf einer beliebigen gegebenen Kurve ξ , ein zweiter B auf einer Geraden (oder einer leicht zeichenbaren Kurve etwa einem Kreise) bewegt, so wird die Konstruktion zur Ermittlung

Fig. 6.



von B_1 , falls man von der Bewegung auf der Kurve ξ ausgehen kann, ohne erhebliche Schwierigkeiten durchführbar sein; bedeutend schwieriger gestaltet sie sich, wenn man von der Bewegung auf η ausgeht, d. h. den Punkt A_1 suchen muß, da hier für jede Lage des Punktes B eine der Kurve ξ ähnliche konstruiert werden muß. Falls beide Kurven nicht auf einfache Weise zeichenbar sind, muß man Bogenprojektion anwenden.

III. Geschwindigkeit und Beschleunigung des Kreuzkopfes beim zentrischen Schubkurbelgetriebe.

1. Geschwindigkeit c .

Man kann die Geschwindigkeit c des Kreuzkopfes B in einem Polardiagramm oder in einem Weggeschwindigkeitsdiagramm erhalten. In Fig. 7 gibt T_0E die Größe der Geschwindigkeit im Polardiagramm an. $\sphericalangle T_0OA = \sphericalangle \alpha$, $\sphericalangle AOD = \sphericalangle \beta$. Daher ist, wenn wir $T_0E \perp OA$

1) Schorch, Kolben- und Schieberdiagramme für doppelt wirkende Dampfmaschinen mit Muschelschiebersteuerungen. Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure, Jahrgang 1876, S. 403.

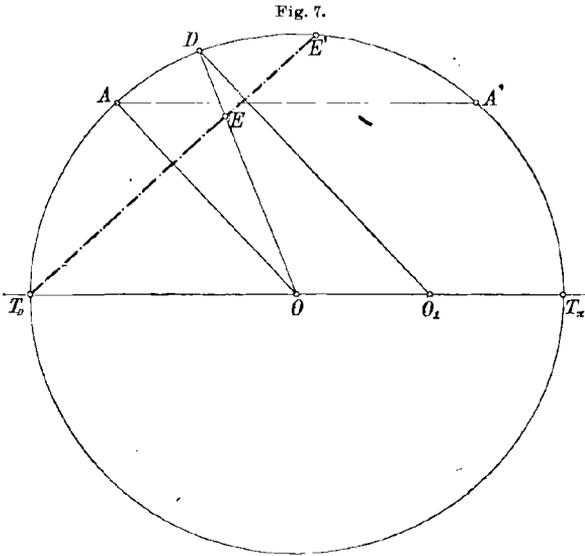


Fig. 7.

zeichnen,
 $\sphericalangle ET_0O = \sphericalangle \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right),$
 $\sphericalangle T_0OE = \sphericalangle (\alpha + \beta),$
 $\sphericalangle OET_0 = \sphericalangle \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right).$

Mit Hilfe des Sinus-satzes erhält man:

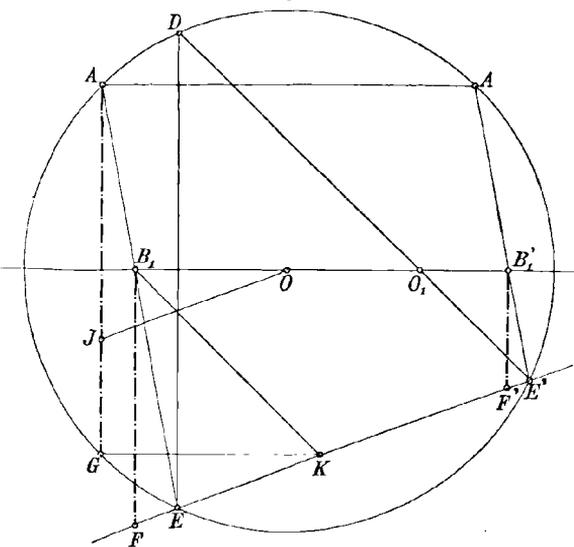
$$\frac{T_0E}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{T_0O}{\cos \beta} = \frac{r}{\cos \beta},$$

$$\overline{T_0E} = r \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta} = c,$$

unter der Voraussetzung, die Geschwindigkeit des Punktes $A, v = \text{const.} = r.$ Betrachten wir die Geschwindigkeiten c und c' zweier Lagen B und B'

des Kreuzkopfes, gehörig zu den Kurbelwinkeln α und $(\pi - \alpha)$, d. h. zu zwei Lagen \overline{OA} und $\overline{OA'}$, die zur y -Achse

Fig. 8.



ergibt die Summe von c und c' : $c + c' = 2r \sin \alpha$; so daß, da in Fig. 7 $\overline{T_0F'} = 2r \sin \alpha, \overline{EE'} = c$ sein muß. Will man daher die Geschwindigkeiten des Kreuzkopfes zwischen den Totlagen T_0 und T_x ermitteln, so genügt es, die Lagen der Kurbel zwischen O und $\frac{\pi}{2}$ zu berücksichtigen, da hierdurch auch die Geschwindigkeiten zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π bestimmt sind. Wichtiger

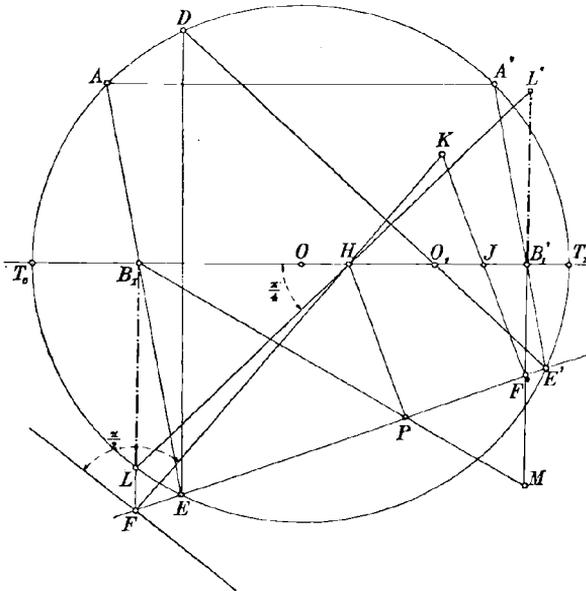
als die obige Konstruktion ist die Ermittlung des Weggeschwindigkeitsdiagramms, Fig. 8. Wir bestimmen auch hier die Geschwindigkeiten c und c' zweier Lagen des Kreuzkopfes B und B' , welche zu zwei zur y -Achse symmetrischen Stellungen \overline{OA} und $\overline{OA'}$ der Kurbel gehören,

gemeinsam. Wir suchen die Punkte B_1 und B'_1 auf und bringen $\overline{EE'}$ mit durch B_1 und B'_1 parallel zur y -Achse gelegten Geraden zum Schnitt. (Punkte F und F'). $B_1F = c$, $B'_1F' = c'$. Aus $\triangle B_1FK$ geht hervor: $\overline{B_1F} = \frac{r \sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta} = c$. Man könnte auch \overline{AG} durch eine durch O parallel $\overline{EE'}$ gehende Gerade teilen: $\overline{AJ} = c$, $\overline{JG} = c'$.

2. Kreuzkopfbeschleunigung p .

Es soll vorerst ein Hilfssatz über die Beschleunigungen p und p' in Stellungen B und B' (bzw. B_1 und B'_1) des Kreuzkopfes, die zu

Fig. 9.



zwei zur y -Achse symmetrischen Stellungen \overline{OA} und $\overline{OA'}$ der Kurbel gehören, nachgewiesen werden (Fig. 9). Wir bezeichnen die Wege des Kreuzkopfes: $T_0B_1 = s$, $T_0B'_1 = s'$.

- (1) $s = r(1 - \cos \alpha) + l(1 - \cos \beta)$
- (2) $s' = r(1 + \cos \alpha) + l(1 - \cos \beta)$
- (3) $s' - s = 2r \cos \alpha$.

Beschleunigungen für B_1 bzw. B'_1 , unter der Voraussetzung $v = r$:

- (4) $p = r \cdot \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \beta} + \frac{r^2}{l} \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^3 \beta}$
- (5) $p' = -r \cdot \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \beta} + \frac{r^2}{l} \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^3 \beta}$
- (6) $p - p' = 2r \cos \alpha$
- (7) $s' - s = p - p'$.

Gleichung (7) lautet in Worten: für zwei zur y -Achse symmetrische Stellungen der Kurbel ist die Differenz der absoluten Werte der Wege des Kreuzkopfes gleich der Summe der absoluten Werte der Beschleunigungen des Kreuzkopfes. Auf diesem Satze beruht die Konstruktion der Beschleunigungen, Fig. 9. Man bestimmt die Größen der Geschwindigkeiten $c = \overline{B_1 F}$, $c' = \overline{B'_1 F'}$, errichtet in F' eine Normale auf EE' , macht $KJ = \overline{JF'}$ und verbindet K mit F' : $B_1 H = p$, $HB'_1 = p'$. Der Nachweis läßt sich folgendermaßen erbringen:

$$(8) \quad B_1 H : (\overline{HB'_1} - 2 \cdot \overline{JB'_1}) = c : c'$$

$$(9) \quad B_1 H + \overline{HB'_1} = 2r \cos \alpha$$

$$(10) \quad c = r \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta}$$

$$(11) \quad c' = r \cdot \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \beta}$$

$$(12) \quad \overline{JB'_1} = c' \operatorname{tg} \beta = r \cdot \frac{\sin(\alpha - \beta) \sin \beta}{\cos^2 \beta}.$$

Verbindet man Gleichungen (8)–(12) und bestimmt $\overline{B_1 H}$ unter Zuhilfenahme der Grundgleichung des Getriebes

$$(13) \quad r \sin \alpha = l \sin \beta,$$

so erhält man schließlich:

$$(14) \quad \overline{B_1 H} = r \cdot \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \beta} + \frac{r^2 \cos^2 \alpha}{l \cos^3 \beta} = p.$$

$$(15) \quad \overline{HB'_1} = -r \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \beta} + \frac{r^2 \cos^2 \alpha}{l \cos^3 \beta} = p'.$$

Um die Beschleunigungen an der richtigen Stelle zu erhalten, projiziert man mit Hilfe einer unter $\frac{\pi}{4}$ gegen die x -Achse gelegten Geraden H nach L bzw. L' ; für die Totlagen $\overline{OT_0}$ und $\overline{OT_\pi}$ geht diese Gerade durch O_1 . Will man statt der Beschleunigungskurve die Beschleunigungsdruckkurve erhalten, so hat man zu bedenken, daß zwischen der Beschleunigung p und dem Beschleunigungsdruck b die Beziehung besteht: $b = \frac{g}{g} \cdot p$, wobei g das auf den Kolbenhub und auf die Einheit der Kolbenfläche (es ist dann auch b auf die Einheit der Kolbenfläche bezogen) reduzierte Gewicht der hin- und hergehenden Maschinenteile und g die Beschleunigung durch die Schwere ist.¹⁾ Die Kurven für p und b werden identisch, wenn man den Maßstab so wählt, daß $\frac{g}{g} \frac{v^2}{r} = r$.

1) Des Ingenieurs Taschenbuch (der Hütte), 18. Aufl. 1. Abteilung, S. 690.

Man kann den Punkt H auch durch folgende Konstruktion erhalten: man macht $F'M = B_1F'$, verbindet M mit B_1 und legt durch den Schnittpunkt P dieser Geraden mit $\overline{EE'}$ eine Gerade normal $\overline{EE'}$. Diese schneidet x in H . Man kann die vorliegenden Konstruktionen auch auf die Mohrsche Beschleunigungskonstruktion¹⁾ zurückführen. Legt man durch den Punkt F' eine Gerade normal \overline{FH} , so ist diese eine Tangente an die Weggeschwindigkeitskurve, da die Beschleunigung $\overline{B_1H}$ die Subnormale dieser Kurve, HF' schon die Normale ist. (Siehe die Konstruktion der Beschleunigung nach Bour und Pröll).²⁾

Zum Schluß soll die in Punkt I gezeigte Methode der Wegbestimmung mit schon bestehenden ähnlichen Konstruktionen verglichen werden. Von Näherungsmethoden abgesehen, standen zur Verfügung: die Verfahren von Müller³⁾, Schorch, Goldberger⁴⁾ u. a. m. Mit Ausnahme der Goldbergerschen Methode beruhen alle auf Anwendung mindestens eines großen Kreises. Goldberger verwendet zwar nur Geraden, doch kann seine Methode, wie alle übrigen mit Ausnahme der Schorchschen, die von Baudiss⁵⁾ verallgemeinert wurde, nur für das zentrische Schubkurbelgetriebe verwendet werden. Die hier gezeigte Methode hat den Nachteil, daß sie nicht umkehrbar ist, d. h. daß man zwar aus der Lage des Punktes A die Lage des Punktes B bzw. B_1 bestimmen kann, nicht aber aus dem Weg (B_1) die Lage von A . Diesem Nachteil stehen folgende Vorteile gegenüber: Anwendbarkeit nicht auf das zentrische Schubkurbelgetriebe beschränkt, sondern auf alle Kurbelgetriebe ausgedehnt, einfache Weggeschwindigkeits- und Beschleunigungskonstruktionen. Man kann daher die vorliegenden Konstruktionen mit Vorteil zur zeichnerischen Untersuchung der kinematischen und dynamischen Verhältnisse von Getriebeketten verwenden.

1) Mohr, Die geometrische Konstruktion der Beschleunigungen der ebenen Bewegung. Civil-Ingenieur, Jahrg. 1879, S. 613.

2) Pröll, Graphische Dynamik, 1874.

3) Civil-Ingenieur 1861, S. 347.

4) A. Goldberger, Genaue Konstruktion der Schieberdiagramme. Dingers polytechnisches Journal, Band 320 (1905), S. 451.

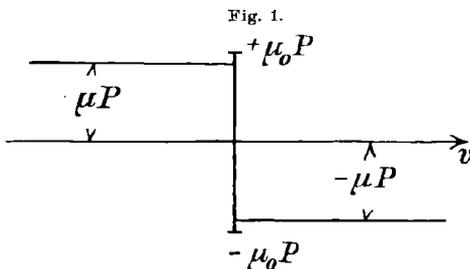
5) L. Baudiss, Beiträge zur zeichnerischen Ausmittlung von Steuerungsgetrieben. Dingers polytechnisches Journal, Band 322 (1907), S. 417.

Zu Painlevés Kritik der Coulombschen Reibungsgesetze.

(Aus einer im Winter 1908/09 gehaltenen Vorlesung.)

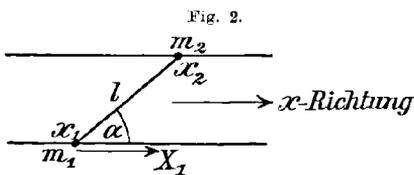
Von F. KLEIN in Göttingen.

„Wir hatten uns die Gesetze der gewöhnlichen trockenen Reibung durch nebenstehende Figur veranschaulicht, in welcher die relative Geschwindigkeit der reibenden Körper gegeneinander als Abszisse, der Betrag der Reibung als Ordinate aufgetragen ist. Dabei bedeutet P den Normaldruck, der die Körper aneinander preßt, μ ist der Reibungskoeffizient der Bewegung, μ_0 der Reibungskoeffizient der Ruhe. Man



erkennt, daß die Reibungskraft für alle positiven Werte von v denselben negativen Wert ($-\mu P$), für alle negativen Werte von v denselben positiven Wert ($+\mu P$) hat, für $v = 0$ aber aller Werte fähig ist, die zwischen ($-\mu_0 P$) und ($+\mu_0 P$) liegen.

„Diese Gesetze, die man gewöhnlich nach Coulomb benennt (der um 1780 besonders sorgfältige Versuche zu ihrer Prüfung anstellte), sind neuerdings von Painlevé einer eingehenden Kritik unterzogen worden, die in der Behauptung gipfelt, daß selbige bereits in ganz einfachen Fällen zu logischen Widersprüchen mit den Prinzipien der Mechanik führen.¹⁾ Ich bin hierüber mit Prof. Prandtl in Verbindung getreten und dieser entwickelt an der Hand des einfachsten der von Painlevé aufgestellten Beispiele eine ganz andere Auffassung, die er



experimentell bestätigt und über die hier berichtet werden soll.

„Es handelt sich um folgende mechanische Aufgabe. Zwei Massenpunkte von den Massen m_1 und m_2 , die durch eine gewichtlose Stange von der unveränderlichen Länge l verbunden sind, sollen sich auf zwei parallelen Geraden bewegen; die Führung von m_1 soll den Reibungs-

1) Betreffend die Literatur des Gegenstandes wolle der Leser die Angaben von Stäckel in Nr. 6 des Artikels über elementare Dynamik in Bd. IV₁, I der mathematischen Enzyklopädie vergleichen.

koeffizienten μ , bez. μ_0 haben, die von m_2 aber soll vollkommen glatt sein. Die Abszissen von m_1 und m_2 mögen x_1 und x_2 heißen, der Winkel, den die Stange l mit der positiven Abszissenrichtung bildet, α . Auf m_2 wirke nur die Reaktion der Führung und der Verbindungsstange l , auf m_1 außerdem eine in Richtung der positiven x wirkende konstante Kraft X_1 und die von der Führung längs der Geraden herrührende Reibungskraft.

„Wir haben dann zunächst die geometrische Bedingung

$$(1) \quad x_2 - x_1 = l \cos \alpha$$

und übrigens, wenn der längs der Stange wirkende Druck mit λ bezeichnet wird, die Bewegungsgleichungen:

$$(2) \quad \begin{cases} m_2 x_2'' = \lambda \cos \alpha, \\ m_1 x_1'' = X_1 - \lambda \cos \alpha - (\mu) \lambda \sin \alpha. \end{cases}$$

Hier ist (μ) der im einzelnen Momente in Betracht kommende Reibungskoeffizient, also, sobald Ruhe vorliegt:

$$(3) \quad -\mu_0 \leq (\mu) \leq +\mu_0,$$

sobald aber Bewegung eintritt, $(\mu) = \pm \mu$ und

$$(4) \quad (\mu) \cdot \lambda \cdot x_1' > 0.$$

Die Paradoxien, welche Painlevé bei der weiteren Behandlung des Problems findet, stecken in dieser Ungleichung (4).

„Um diese Paradoxien hervorzukehren, genügt es, wie nun gesehen mag, den Fall $m_1 = m_2 = 1$ zu betrachten. Da infolge von (1) $x_1'' = x_2''$ ist, folgt aus den Gleichungen (2) ohne weiteres

$$(5) \quad \lambda = \frac{X_1}{2 \cos \alpha + (\mu) \sin \alpha}.$$

Es gilt diese Formel zu diskutieren.

„Wir knüpfen dabei mit Painlevé an den Fall der *Bewegung* an (wo $(\mu) = \pm \mu$ ist) und werden übrigens zweckmäßigerweise von vornherein *zwei Hauptfälle* unterscheiden, je nachdem

$$|\mu \sin \alpha| \lesseqgtr |2 \cos \alpha|;$$

sollte $|\mu \sin \alpha| = |2 \cos \alpha|$ sein, so sprechen wir vom *Übergangsfalle*. Da $\sin \alpha$ in der Figur 2 notwendig positiv ist, wirft sich diese Unterscheidung auf den absoluten Wert von $\tan \alpha$. Im *ersten Hauptfalle*, wo

$$|\tan \alpha| < \frac{2}{\mu},$$

sprechen wir von einer *flach* gestellten Stange (Fig. 3), im *zweiten Hauptfalle*, wo

$$|\tan \alpha| > \frac{2}{\mu},$$

Fig. 3.



von einer *steil* gestellten (Fig. 4). Im ersten Hauptfalle stimmt das Vorzeichen von λ (da wir X_1 von vorn herein als positiv nahmen) mit demjenigen von $\cos \alpha$ überein, im zweiten Hauptfalle mit dem Vorzeichen von $(\mu) = \pm \mu$.

Fig. 4.



„Es sei nun für $t = 0$ eine von Null verschiedene Anfangsgeschwindigkeit $x'_1 (= x'_2)$ gegeben. Was wird eintreten? Wir unterscheiden innerhalb eines jeden unserer beiden Hauptfälle je

nach dem Vorzeichen von x'_1 und dem Vorzeichen von $\cos \alpha$ vier Unterfälle und vereinigen die Ergebnisse der Überlegung je in einer Tabelle. Wir erhalten dann aus der Ungleichung (4) für den

Hauptfall I (flach gestellte Stange)

$\cos \alpha > 0 : \lambda > 0$ (Druck)	$\cos \alpha < 0 : \lambda < 0$ (Zug)
$x'_1 > 0 \quad (\mu) = + \mu$	$x'_1 > 0 \quad (\mu) = - \mu$
$x'_1 < 0 \quad (\mu) = - \mu$	$x'_1 < 0 \quad (\mu) = + \mu$

Dagegen für den

Hauptfall II (steil gestellte Stange)

$\cos \alpha > 0 : \lambda \geq 0$, je nachdem $(\mu) = \pm \mu$	$\cos \alpha < 0 : \lambda \geq 0$, je nachdem $(\mu) = \pm \mu$
$x'_1 > 0 \quad (\mu) \text{ nach Belieben} = \pm \mu$	$x'_1 > 0 \quad (\mu) \text{ nach Belieben} = \pm \mu$
$x'_1 < 0 \quad \text{Widerspruch mit (4)}$	$x'_1 < 0 \quad \text{Widerspruch mit (4)}$

Die Fälle eines positiven und eines negativen $\cos \alpha$ sind hier also nicht unterschieden und es wird das Resultat auch für $\cos \alpha = 0$ Geltung haben. — Endlich erhalten wir für den

Übergangsfall

$\cos \alpha > 0 : \lambda > 0$ oder ∞ , je nachdem $(\mu) = + \mu$	$\cos \alpha < 0 : \lambda < 0$ oder ∞ , je nachdem $(\mu) = \mp \mu$
--	--

und von hier aus, wenn wir nur die endlichen Werte von λ berücksichtigen wollen:

$x'_1 > 0 : (\mu) = + \mu$	$x'_1 > 0 : (\mu) = - \mu$
$x'_1 < 0 \quad \text{Widerspruch mit (4)}$	$x'_1 < 0 \quad \text{Widerspruch mit (4)}$

„Die Tabelle für den Hauptfall I stimmt mit dem, was wir erwarten werden. Sie gibt in jedem Unterfalle einen bestimmten Wert von (μ) und damit von λ ; die Beschleunigung $\lambda \cos \alpha$ des Punktes x_1 ist in jedem Falle positiv. — Dagegen erscheint das Resultat im Hauptfalle II durchaus paradox, indem sich entweder *zwei* Werte von (μ) und damit von $\lambda \cos \alpha$, oder *keiner* als zulässig erweisen. Und auch im Übergangsfalle kommen wir aus den Paradoxien nicht heraus, indem wir beim Ausschluß unendlicher λ immer noch im Falle $x'_1 < 0$ auf einen Widerspruch stoßen.

„Diese Paradoxien sind es, welche Painlevé herausgebracht hat und in denen er einen *Widerspruch mit dem Grundsatz der Mechanik* findet, daß ein mechanisches System, dessen Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit gegeben sind, sich auf eine und nur auf eine Weise weiterbewegt.

„Dieser Argumentation stellt nun aber Prof. Prandtl folgendes entgegen:

1. Es ist gar nicht wunderbar, daß gegebenenfalls, je nachdem $\lambda \geq 0$ genommen wird, zweierlei Bewegungen resultieren. Denn die Führung eines Punktes längs einer Geraden läßt sich konstruktiv nur

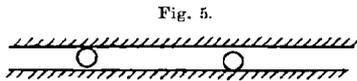


Fig. 5.

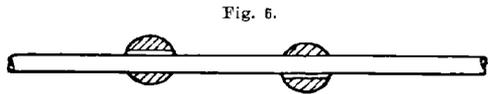


Fig. 6.

so ausführen, daß je nach dem Vorzeichen von λ tatsächlich verschiedene kinematische Verhältnisse vorliegen. Schließt man z. B. den Punkt zwischen zwei dicht nebeneinander herlaufende Schienen ein (Fig. 5), so wird er je nach dem Vorzeichen von λ bald an die eine, bald an die andere Schiene angepreßt. Ebenso gibt es zwei Möglichkeiten, wenn man den Punkt durch eine durchbohrte Kugel ersetzt, die auf einem Draht läuft (Fig. 6).

2. Experimentell wird man allerdings immer nur die eine Bewegung realisieren können, weil die andere *labil* ist, und, eben eingeleitet, durch die kleinste Störung gleich in die erste überspringt. Es tritt im Hauptfalle II bei positivem x'_1 tatsächlich jedesmal nur die nach *rechts* beschleunigte Bewegung ($\lambda \cos \alpha > 0$) ein.

3. Was den Übergangsfall angeht, so hat man bei positivem x'_1 in dem oben bezeichneten Sinne $\lambda \cos \alpha$ endlich und damit positiv zu nehmen. Für negatives x'_1 aber wird das tatsächliche Verhalten des Apparats völlig richtig durch $\lambda = \infty$ geschildert. Es tritt nämlich *instantane Selbstsperrung* der Bewegung ein (was natürlich *cum grano salis* zu verstehen ist; man würde instantane Selbstsperrung haben, wenn

man es, beim Experiment, wirklich mit *starr*en Führungen zu tun hätte; nun aber die Führungen tatsächlich ein wenig nachgiebig sein werden, wird man statt dessen *sehr rasche* Arretierung der Bewegung beobachten).

4. Bleiben die Unterfälle des Hauptfalls II mit negativem α' , welche dem voraufgestellten Schema zufolge notwendig zu Widersprüchen führen. Die nähere Überlegung und das Experiment zeigen, daß man es hier jedesmal auch mit instantaner Selbstsperrung zu tun hat.

„Soweit die Mitteilungen von Prof. Prandtl. Ich füge meinerseits hinzu, daß das Auftreten von *Selbstsperrungen* in den letztangeführten Fällen in der Tat nicht mit den Coulombschen Gesetzen in Widerspruch steht. Wir haben in unseren Schematen die Beschleunigung

$$\lambda \cos \alpha = \frac{X_1 \cos \alpha}{2 \cos \alpha - (\mu) \sin \alpha}$$

nach dem Vorgange von Painlevé so berechnet, als wenn Bewegung stattfände. Indem wir dementsprechend $(\mu) = \pm \mu$ setzten, entstanden die Widersprüche. Aber es bleibt die Möglichkeit, daß instantan Ruhe eintritt. Dann verlangt Coulomb nur, daß (μ) zwischen $+\mu_0$ und $-\mu_0$ liegt, und wir können dem μ gern einen in diesem Intervalle liegenden Wert geben, der λ zu ∞ macht und damit das Eintreten einer Selbstsperrung anzeigt. Damit sind die formalen Widersprüche beseitigt.

„Fassen wir zusammen und verallgemeinern gleich, was wir am einfachsten Beispiel lernten, so werden wir sagen: *Die Coulombschen Gesetze sind weder mit den Prinzipien der Mechanik noch mit den tatsächlich eintretenden Erscheinungen im Widerspruch; sie müssen nur richtig interpretiert werden.* Painlevé behält das außerordentliche Verdienst, nachdrücklich darauf aufmerksam gemacht zu haben, daß gegebenenfalls singuläre Verhältnisse eintreten. Aber er hat zu früh an logische Widersprüche geglaubt, statt alle Möglichkeiten, welche die Gesetze bieten, durchzudenken.

„Unsere Rettung der Coulombschen Gesetze soll natürlich nur eine Rettung ihres Prinzips, nicht der in ihnen enthaltenen quantitativen Einzelangaben sein. Daß die Coulombschen Gesetze nach unseren heutigen Kenntnissen physikalisch nur als eine *Annäherung* an die in Wirklichkeit hervortretenden Verhältnisse anzusehen sind, ist unter andern von Sommerfeld und mir in unserer „*Theorie des Kreisels*“ auf S. 537 ff. ausführlich dargelegt.

„Schließlich wolle man noch beachten, daß das einfache von uns behandelte Beispiel großes technisches Interesse bietet. Denn es gibt in idealisierter Form Beziehungen wieder, die in praxi, z. B. bei Hebezeugen, vielfach auftreten dürften. Der Gedanke liegt nahe, daß die

Painlevéschen Entwicklungen, in unserem Sinne interpretiert, der Ausgangspunkt für die Entwicklung eines neuen Zweiges der technischen Mechanik werden könnten.“

Das Vorstehende ist eine Wiedergabe der Darstellung, welche ich im vergangenen Winter in einer Vorlesung über Mechanik von der Sachlage gegeben habe. Diese Darstellung erhebt keinen Anspruch darauf, ihren Gegenstand allseitig zu behandeln oder gar zu erledigen; ich hätte sonst viel ausführlicher auf Painlevés eigene Publikationen und namentlich die Einwände, welche die Herren Lecornu und de Sparre gleich anfangs gegen Painlevés Entwicklungen erhoben haben, überhaupt die ganze anschließende, meist ausländische Literatur eingehen müssen. Mein bescheidener Zweck ist, zu erneuter Diskussion dieser Dinge, auch in Deutschland, den Anstoß zu geben. Mögen dabei die Theoretiker mit den Experimentatoren und konstruierenden Ingenieuren Hand in Hand gehen! Denn das scheint am förderlichsten.

Göttingen, den 17. April 1909.

Zur Kritik der Reibungsgesetze.

Von R. v. Mises in Straßburg i. E.

Herr Geheimrat Professor Klein hatte die Freundlichkeit, mir einen Korrekturabzug der voranstehenden Note zur Kenntnis zu bringen, nachdem ich vor kurzem in dem Entwurfe zum Enzyklop.-Artikel IV 10 (K. Heun und R. v. Mises, Dynamische Probleme der Maschinentechnik) demselben Gegenstand eine etwas abweichende Darstellung gegeben habe. Ich möchte mir nun gestatten, hier mit ganz wenigen Worten meine Auffassung darzulegen, die die Painlevésche Kritik etwas günstiger beurteilt, ohne sich mit ihr zu identifizieren und ohne zu dem Standpunkte der Herren Klein und Prandtl in direkten Widerspruch zu treten.

Meine Ausführungen gipfeln in den beiden Behauptungen: 1. Hr. Klein erklärt die Erscheinungen nicht *aus den Coulombschen Gesetzen*, sondern unter Benutzung eines *neuen Erfahrungssatzes*. 2. Es ist nahe liegend und möglich, dem neu einzuführenden Erfahrungssatz *die Form einer Modifikation der Coulombschen Gesetze* zu geben.

Ich knüpfe an das von Hrn. Klein gewählte Beispiel an und behalte alle Bezeichnungen seiner Note bei. Es handelt sich ausschließlich um die unter Ziffer 4 besprochenen Unterfälle des zweiten Haupt-

falles mit negativem x'_1 , von denen es oben heißt: „Die nähere Überlegung und das Experiment zeigen, daß man es hier jedesmal auch mit instantaner Selbstsperrung zu tun hat.“ Mein Standpunkt hierzu ist folgender.

1. Das Experiment zeigt, daß in dem gegebenen Falle Selbsthemmung in sehr kurzer Zeit eintritt. Also müßte man es einer Theorie gewiß sehr hoch anrechnen *wenn sie zu dem Schlusse führte*, der Körper komme plötzlich zur Ruhe.

2. Eine *rein deduktive* Überlegung, die ausschließlich von den Gleichungen des starren Körpers und den Coulombschen Gesetzen [Gl. 1—4 einschl. der Bedingung $(\mu) = \pm \mu$ für $x'_1 \geq 0$] ausgeht, *führt nicht zu dem Schlusse*, daß der Körper plötzlich oder in kurzer Zeit die negative Anfangsgeschwindigkeit x'_1 verliert. Die Überlegung, die tatsächlich angestellt wird, ist vielmehr die:

Es gibt für negative x'_1 keine Lösung des Gleichungsansatzes. Aus Erfahrung weiß man, daß rasche Selbstsperrung eintritt. Also wird den Gleichungen die *Annahme hinzugefügt*, die Geschwindigkeit x'_1 gehe instantan verloren. Was hierauf geschieht, läßt sich ohne weiteres erklären. Denn jetzt hat man es mit dem „Anfangszustand“ $x'_1 = 0$ zu tun, der keine Schwierigkeiten bereitet.

Das Ergebnis der Painlevéschen Kritik und der Kleinschen Untersuchung läßt sich sonach wie folgt formulieren:

*„Ist der Anfangszustand der Bewegung eines starren Körpers ein derartiger, daß die Annahme der Coulombschen Reibungsgesetze an irgend einer Stelle einen negativen Anfangswert des Normaldruckes ergibt, ohne daß eine Bewegung unter Abheben des Körpers von der Führung möglich wäre, so löst sich die Schwierigkeit, wenn man den **Erfahrungssatz** zu Hilfe nimmt: in jedem solchen Falle trete eine plötzliche Geschwindigkeitsänderung in dem Sinne ein, daß der Zustand nach der Änderung überall positiven Normaldruck ergibt.“*

Hr. Painlevé hat somit Unrecht, wenn er die Coulombschen Gesetze als „logiquement inadmissibles“ bezeichnet, er hat aber mit der Behauptung recht, daß diese Gesetze, innerhalb der Mechanik starrer Körper betrachtet, rein logisch *einer Ergänzung bedürfen*.

Andrerseits scheint die Auffassung zu weit gehend, es handle sich bei Lösung der Schwierigkeiten nur um eine „Interpretation der Coulombschen Gesetze.“ Dies mag noch durch folgende Bemerkungen näher erläutert werden.

Die Mechanik, deren Grundlagen erstmals Newton zusammengefaßt, dann Cauchy durch Einführung des Spannungsbegriffes wesentlich vervollständigt hat, diese Mechanik strebt dem Ziele zu: eine solche

Darstellung der Bewegungs- und Gleichgewichts-Erscheinungen zu geben, bei der *alle der Erfahrung entnommenen Hypothesen die bestimmte Form von Kraftgesetzen, bezw. Spannungsgesetzen haben.* Dies Ziel, das man gewohnt ist, in der Mechanik starrer Körper als erreicht anzusehen, fordert in unserem Falle, daß die oben formulierte Klein-Prandtl'sche Hypothese durch ein Kraftgesetz, d. h. *durch eine Modifikation der Coulombschen Gesetze ersetzt werde. Also nicht die Logik, aber die Methodik der Newtonschen Mechanik zwingt zum Aufgeben der Coulombschen Gesetze.* Nach der üblichen Terminologie muß man das modifizierte Reibungsgesetz geradezu als die „Erklärung“ für die Erscheinung der Selbstsperrung ansehen, eine Erscheinung, welche die Klein-Prandtl'sche Hypothese einfach als Tatsache hinnimmt. — Es sei mir gestattet, hier zwei Vorschläge in dieser Richtung zu besprechen, die den Erfahrungsresultaten insofern besser gerecht werden denn jene Hypothese, als sie nicht eine plötzliche, sondern beliebig rasche Selbsthemmung ergeben.

Der eine Vorschlag rührt von Lecornu¹⁾ her und findet die Zustimmung von de Sparre.²⁾ Darnach wächst der Reibungskoeffizient bei Beginn jeder Bewegung in den ersten Sekunden von Null an bis zu dem Werte, den etwa das Coulombsche Gesetz als während der ganzen Bewegung bestehend postuliert. Es ist klar, daß man sich bei entsprechender Bestimmung der Abhängigkeit des Reibungskoeffizienten von der Zeit den Beobachtungen in jedem Einzelfall beliebig genau anpassen kann. Ob man damit zu einer *einheitlichen* Darstellung verschiedener Fälle gelangt, hängt natürlich von dem Ergebnis der Experimente ab und kann nicht vorausgesagt werden. Jedenfalls hat die Annahme etwas physikalisch durchaus Einleuchtendes, wenn man sich den Anfang der Bewegung derart denkt, daß der Körper auf seine Unterlage eben „aufgebracht“ wird. Es lassen sich aber Fälle verwirklichen, in denen der kritische Anfangszustand ohne irgend eine Veränderung an der betreffenden Berührungsstelle, etwa durch Wegnahme einer überzähligen Führung, entsteht. Für diese Fälle kann man noch eine zweite Darstellungsmöglichkeit ins Auge fassen, die vielleicht auch sonst plausibel erscheinen mag.

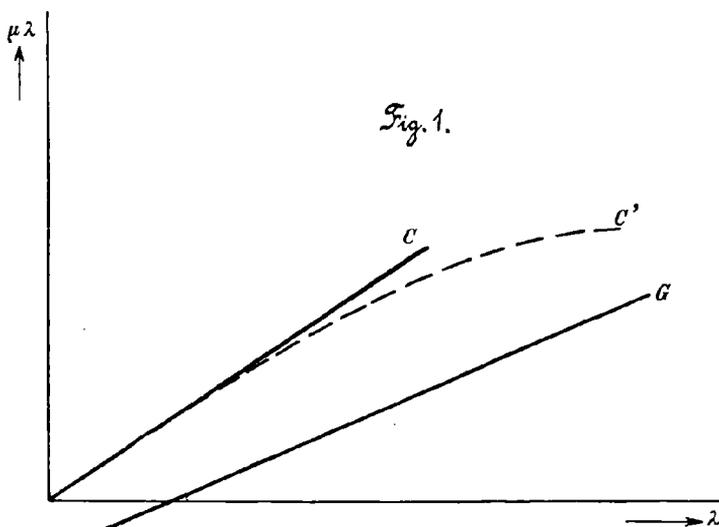
Bekanntlich zeigen genauere Beobachtungen, daß der Reibungskoeffizient μ nicht nur von der Gleitgeschwindigkeit sondern auch vom *Normaldruck wesentlich abhängt.*³⁾ Stellt man den Zusammenhang

1) Comptes rendus, Paris t. 140 (1905), p. 635.

2) *ibid.* t. 141 (1905), p. 310.

3) Vgl. das Referat in dem angef. Enz.-Art.

zwischen Normaldruck λ und Reibung $\mu\lambda$ in einem cartesischen Koordinatensystem dar, so erhält man als Ausdruck des Coulombschen Gesetzes einen vom Ursprung ausgehenden, im ersten Quadranten verlaufenden Halbstrahl C — wofern das Vorzeichen der Reibungskraft von vornherein feststeht. (Fig. 1.) Gl. (5), oder allgemein die Elimination der Beschleunigungsgrößen aus den Gleichungen des stereokinetisch bestimmten starren Körpers führt ebenfalls zu einer *linearen Beziehung* zwischen λ und $\mu\lambda$. Ihr Ausdruck ist eine Gerade G , die in allen uns interessierenden Fällen die *positive* Seite der λ -Achse schneidet. Man erkennt nun aus der Figur, daß allemal wenn G nach rechts ansteigt, bei hinreichend großem μ der Schnittpunkt von C und G ein



negatives λ ergibt. Diese Schwierigkeit wird behoben, wenn man an Stelle der Coulombschen Geraden C eine Kurve C' nimmt, die vom Ursprung ausgehend ganz im ersten Quadranten liegt und die Bedingung erfüllt:

$$\lim_{\lambda = \infty} \frac{\mu\lambda}{\lambda} = 0.$$

Es genügt also, anstelle der Einführung der Klein-Prandtl'schen Hypothese, das Reibungsgesetz dahin zu modifizieren, daß man sagt: *Der Reibungskoeffizient hängt derart vom Druck ab, daß er in der Grenze für $\lambda = \infty$ verschwindet.*

Die bisherigen experimentellen Untersuchungen über die Abhängigkeit des μ von λ reichen nicht hin, um ein Urteil über die Zulässigkeit der vorstehenden Theorie zu ermöglichen. Es müßten geradeso wie zur Prüfung des Vorschlages von Lecornu Versuche an Er-

scheinungen mit rascher Selbstsperrung vorgenommen werden, und ebenso wie dort, hängt schließlich der Erfolg des Vorschlages davon ab, ob sich ein genügend einheitlicher Ausdruck für den Zusammenhang von μ und λ aus den Experimenten ableiten läßt. — Einstweilen hoffe ich durch den kleinen Beitrag zur logischen Klärung der Frage auch gerade den praktischen Zwecken der Mechanik gedient zu haben.

Brünn, am 22. Mai 1909.

Bemerkungen zu den vorstehenden Aufsätzen der Herren F. Klein und R. v. Mises.

Von GEORG HAMEL in Brünn.

Zu dem in Rede stehenden Problem der Reibung möchte ich mir die folgenden Bemerkungen erlauben:

Es scheint mir am klarsten, wenn man das Painlevésche Resultat so formuliert:

„Die vier Hypothesen:

1. es gibt starre Körper,
2. die Normaldrucke zwischen zwei starren Körpern sind nie negativ,
3. alle Beschleunigungen und alle Spannungen sind endlich, wenn die räumlich verteilten Kräfte endlich sind,
4. es gelten die Coulombschen Reibungsgesetze,

stehen in einigen Fällen mit den Grundsätzen der allgemeinen Mechanik in einem logischen Widerspruch.“ (Übrigens widerstreiten ja bekanntlich 1. 2. 3. zuweilen auch dann, wenn keine Reibungen da sind, indem unendliche Spannungen auftreten können, während die Beschleunigungen in diesem Falle endlich bleiben (vergleiche meine Arbeit über die Grundlagen der Mechanik, Math. Ann. Bd. 66 (1908), Kap. II, § 4, S. 388).

Klein und Prandtl versuchen nun den Widerspruch dadurch aus der Welt zu schaffen, daß sie unendliche Beschleunigungen zulassen, d. h. ein plötzliches Verändern der Geschwindigkeit. Und zwar bedürfen sie zum Ersatz für das weggelassene Axiom (3) einer ganz bestimmten Annahme über diese Änderung der Geschwindigkeit. Diese Annahme aber bedeutet, wie v. Mises treffend bemerkt, eine wesentlich neue Aussage, sie folgt logisch keineswegs aus den anderen Hypothesen.

Painlevé, v. Mises u. a. suchen durch eine Änderung der Coulombschen Gesetze zum Ziele zu kommen, wenn auch in wesentlich verschiedener Weise. Gibt Painlevé eine ganz neue Definition des

Reibungsbegriffes, so ändert v. Mises nur das Gesetz, indem er den Reibungskoeffizienten als Funktion des Normaldruckes auffaßt. Ich glaube aber nicht, daß sich die Misessche Hypothese in allen Fällen durchführen läßt, wenn sie auch in allen bekannten Beispielen zum Ziele führt.

Der natürlichste Weg scheint mir der zu sein, den auch schon Lecornu eingeschlagen hat, nämlich die Hypothese des starren Körpers fallen zu lassen. Es gibt ja doch in Wahrheit keinen starren Körper. Aus der Annahme nachgiebiger Verbindungen folgen die Resultate der Erfahrung zwanglos, ebenso wie ja dann auch bei reibungsfreien Systemen die Paradoxie der unendlichen Spannungen verschwindet.

Man mag sich hinterher, aus methodischen Rücksichten, der Annahme von Klein und Prandtl anschließen, um nicht die bequeme Hypothese des starren Körpers fallen lassen zu müssen. Sie stellt jedenfalls von einem rein beschreibenden Standpunkt aus die Erscheinungen am bequemsten dar. Sie ist das, was man im prägnantesten Sinne eine pragmatische Konvention nennen könnte, gibt aber keinen Einblick in den wirklichen Naturvorgang.

Brünn, den 24. Mai 1909.

Bemerkungen zu den Aufsätzen der Herren F. Klein, R. v. Mises und G. Hamel.

Von L. PRANDTL in Göttingen.

Es sei mir gestattet, zu dem Vorstehenden auch meine Auffassung darzutun. Wenn man als die wesentliche Aufgabe der Mechanik die ansieht, *eine möglichst getreue Darstellung der in ihr Gebiet fallenden Erscheinungen zu geben*, wobei dann im Interesse der Durchführbarkeit meist passende Vereinfachungen der Ansätze vorgenommen werden müssen, dann wird man bei der Begründung der Mechanik zunächst die Körper als deformierbar ansehen (was sie ja in Wirklichkeit immer sind), und nun als vereinfachtes Bild des festen Körpers den starren Körper einführen, der gewissermaßen aus dem festen Körper dadurch erhalten wird, daß man mit dem Elastizitätsmodul zur Grenze $E = \infty$ übergeht.

In den normalen Fällen ist es erlaubt, den Grenzübergang schon in den Differentialgleichungen zu machen, man erhält so die bekannten bequemen Gesetze über die starren Körper; bei der Herkunft dieser Ge-

setze aus einem Grenzübergang ist es nun aber nicht verwunderlich, wenn gelegentlich die Lösung unbestimmt wird; die einfache Anweisung für alle diese Fälle ist nun die, den Grenzübergang bis zum Resultat, also bis nach der Integration zu verschieben. Erst wenn dieser Weg ebenfalls eine unbestimmte Antwort lieferte, dürfte man sagen, daß die gestellte Frage beim starren Körper ihren Sinn verliert. Der Weg, den man beim Studium der sogenannten *statisch unbestimmten Aufgaben* einschlägt, entspricht genau dem hier gegebenen allgemeinen Rezept.

Nach diesem muß nun auch bei unserem Problem verfahren werden. Wie sich zeigt, genügt es vollkommen, die Verbindungsstange zwischen den beiden Massen, die im übrigen als masselos angesehen werden darf, als elastisch ausdehnbar vorauszusetzen. Man hat jetzt zwei Freiheitsgrade und erhält unter Annahme des Coulombschen Reibungsgesetzes für jeden anfänglichen Bewegungszustand eine eindeutige Lösung mit überall endlichen Beschleunigungen. Für negative Impulse erhält man eine rasche Umkehr der Bewegung; geht man zur Grenze $E = \infty$ über (starre Stange), so ergibt sich als Grenzwert dieser letzteren Bewegung die augenblickliche Selbsthemmung.

In den vorangehenden Äußerungen der Herren v. Mises und Hamel ist von einer „*Hypothese*“ der instantanen Selbsthemmung die Rede. Ich lege im Gegensatz hierzu Wert darauf, daß — in Verbindung mit meinem Namen wenigstens — nur von einem aus dem Grenzprozeß erhaltenen *Resultat* gesprochen wird.

Die Diskussion des elastischen Systems liefert übrigens mehr: es zeigt sich, daß von den zwei möglichen Bewegungen, die die einfache Theorie für positive Impulse liefert, die eine, nämlich die beschleunigte stabil, die andere, verzögerte dagegen labil wird. In der Grenze erhält man unendlich große Labilität, so daß man ruhig sagen kann, daß diese zweite Bewegung praktisch unmöglich ist. Dadurch ist auch für den Grenzfall der Starrheit das Postulat der Eindeutigkeit der Bewegung gerettet. Sicher aber steht fest, daß keinerlei logische Bedenken gegen die Coulombschen Gesetze aufrecht erhalten bleiben können.

Die Bewegung unseres elastischen Systems sind auf meine Anregung hin von Herrn Dr. Pfeiffer im einzelnen verfolgt worden. Seine Ausführungen werden im nächsten Heft dieser Zeitschrift erscheinen.

Neue Literatur über das Grenzgebiet der Biometrie. V. u. VI.

Von Hofrat Prof. Dr. F. LUDWIG in Greiz.

V.

1. *W. Bateson* M. A. F. R. S. and *R. P. Gregory* M. A. On the Inheritance of Heterostylism in *Primula*. Proceedings of the Royal Society 13., Vol. 76. 1905. p. 582—586.
2. *W. Bateson*, F. R. S., *E. R. Saunders* and *R. C. Punnett*. Further Experiments on Inheritance in Sweet Peas and Stocks. Preliminary Account. Proceedings of the Roy. soc. B. Vol. 77. p. 237—238.
3. *W. Bateson*. Experimental studies in the physiology of heredity. Report 3 to the evolution committee of the Royal Society. p. 53. London 1906.
4. *W. Bateson*. Über Hybriden seit Mendels Untersuchungen. *Progressus rei botanicae*. Leiden u. Jena. Bd. 1. 1906.
5. *Bernstein*. Über eine erweiterte Begründung des Gaußschen Fehlergesetzes. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. Leipzig. Sitzg. v. 18. Juni 1901.
6. *Th. Boveri*. Ergebnisse über die Konstitution der chromatischen Kernsubstanz. Verh. d. Deutsch. Zool. Ges. 1903. Bd. XIII. S. 10—32.
7. *C. de Bruyker*. De gevoelige periode van den invloed der voeding op het aantal randbloemen van het eindhooftje bij *Chrysanthemum carinatum*. Overgedrukt uit de Handelingen van het Tiende Vlaamsch Natuur en Geneskundig Congres, gehouden te Brugge op 29 en 30 en September 1906. 6 p.
8. *H. Bruns*. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßelehre. 1906. B. G. Teubner Leipzig 328 S.; 7,8 M.
9. *W. E. Castle*. Yellow mice and gametic purity. *Science*. N. S. V. XXIV. No. 609. pp. 275—281. Aug. 31. 1906.
10. — Inbreeding, cross-breeding, and sterility in *Drosophila*. *Science* n. s. V. XXIII. No. 578 p. 153. Jan. 26 1906.
11. — The origin of a polydactylous race of guinea-pigs. *Publ. Carnegie Inst. Washington*. No. 49. p. 17—29. May 1906.
12. — *F. W. Carpenter*, *A. H. Clark*, *S. O. Mast* and *W. M. Barrows*. The effects of inbreeding, cross-breeding, and selection upon the fertility and variability of *Drosophila*. *Proc. Amer. Acad. Arts and Sciences*. V. XLI. pp. 732—768. May 1906.
13. — and *Alexander Forbes*. Heredity of hair-length in guinea-pigs and its bearing on the theory of pure gametes. *Publ. Carnegie Inst. Washington* Nr. 49. p. 5—14. May 1906.
14. *C. Correns*. Über Vererbungsgesetze. Vortr. v. d. Vers. D. Naturf. u. Ärzte Meran. Berlin 1905 Bomträger. 43 S. u. 4 Abb. M. 1,50.
15. — Experimentelle Untersuchungen über die Gynodioecie. Ein typisch spaltender Bastard zwischen einer einjährigen und einer zweijährigen Sippe des *Hyoscyamus niger*. *Ber. d. D. Bot. Ges.* 1904. Bd. XXII 718. p. 506—524.
16. — Weitere Untersuchungen über die Gynodioecie. *Ber. d. D. Bot. Ges.* 1905. Bd. XXIII 79. p. 452—463.
17. — Ein Vererbungsversuch mit *Dimorphotheca pluvialis*. Das Keimen der *Dimorphotheca pluvialis*. *Ber. d. D. Bot. Ges.* 1906. Bd. XXIV H. 3. p. 162 bis 176.
18. — Zur Kenntnis der Geschlechtsformen polygamer Blütenpflanzen und ihrer Beeinflussbarkeit. Mit 4 Textfiguren. Jahrbücher für wissenschaftliche Botanik. Bd. XLIV Heft 1. Leipzig 1907. p. 124—173.
19. — Über Vererbungsgesetze. Bornträger. Berlin 1905.
20. — Über Vererbungsgesetze. *Verh. d. Ges. D. Naturf. u. Ärzte* 1905. Allgemeiner Teil. Erschienen 1906.
21. — Die Vererbung der Geschlechtsformen bei den gynodioecischen Pflanzen. *Ber. d. D. Bot. Ges.* XXIV. 1906. H. 8. p. 459—474.
22. *L. Cuénot*. Sur une sole à deux faces colorées. *Bull. de la Station biologique d'Arcachon*, 8^e année, 1904—1905, pp. 82—89. 2 planches.
23. — L'hérédité. *Revue scientifique* t. V. N. 17, Avril 1906, p. 513—521.
24. — Rapport sur l'hérédité présenté à la Société de Zoologie de l'Association française pour l'Avancement des Sciences. Congrès de Lyon Août 1906.

25. *A. D. Darbishire*. Professor Lang's breeding experiments with *Helix hortensis* and *H. nemoralis*; an abstract and review. *Journ. of Conchology*. V. II. p. 193.

26. — On the difference between physiological and statistical laws of heredity. *Mem. and Proc. Manchester Literary and Philosophical Society*. V. 50. No. 11. July 6. 1906.

27. *C. B. Davenport*. Imperfection of Mendelian dominance in poultry hybrids. *Soc. for Experimental Biology and Medicine, American Medicine*. V. XI. pp. 105—110. Jan. 20. 1906.

28. — Report on the work of the Station for Experimental Evolution. Year Book No. 4 of the Carnegie Institution of Washington. pp. 87—107. 1905.

29. — Inheritance in poultry. *Publ. Carnegie Inst. Washington* No 52. 1906.

30. — Studies in the Evolutions of *Pecten* IV Ray Variability in *Pecten varius*. *The Journ. of Experim. Zoology*. Vol. I No. 4. Baltimore, M. D. U. S. A. 1904. p. 607—616.

31. — Evolution without Mutation. *The Journ. of Exp. Zool.* Vol. II No. 1. 1905. p. 137—143.

32. — Animal Morphology in its Relation to other Sciences. *Science N. S.* Vol. XX No. 517. p. 697—706. Nov. 23. 1904.

33. — The origin of Black Sheep in the Flock. I. c. Vol. XXII No. 519. p. 674—675.

34. — Report of the Department of Experimental Evolution. Cold Spring Harbor, New York. Extract from the fifth Year Book of the Carnegie Institution of Washington. pp. 92—105, plates 4—6. Washington D. C. 1907.

35. *L. Errera*. Sur les caractères hétérotyliques secondaires des Primevères. *Recueil de l'Institut botanique de Bruxelles*. Tome VI. 1905. p. 223 bis 255. Mit 1 Taf.

36. *Angel Gallardo*. L'interprétation bipolaire de la division karyocinétique. Buenos Aires 1906. *Anales del Museo Nacional de Buenos Aires*. Tomo XIII. Ser. 3^o t. VI. p. 259—276.

37. *W. Haacke*. Die Gesetze der Rassenmischung und die Konstitution des Kernplasmas. *Archiv f. Entwicklungsmechanik*. 1906. Bd. 21. S. 1—93.

38. — Das Rassenmischungsgesetz. *Die Umschau*, X, 1906, No. 48, S. 941 bis 944.

39. *V. Häcker*. Von den Erscheinungen des Mendelschen Vererbungs-

gesetzes beim Axolotl oder mexikanischen Kiemenmolch. *Berichte d. 78. Vers. deutscher Naturf. u. Ärzte in Stuttgart* 1906.

40. *V. Häcker*. Über das Schicksal der elterlichen und großelterlichen Kernanteile. *Morphol. Beiträge zum Ausbau der Vererbungslehre*. *Jen. Ztschr. f. Naturw.* 1902, S. 297—398.

41. — Bastardierung und Geschlechtszellenbildung. *Zool. Jahresber. Suppl.* VII, *Festschr. f. A. Weismann*. S. 161 bis 256.

42. *Hartog*. Des chaînes de force et d'un nouveau modèle magnétique des mitoses cellulaires. *Compt. rend. des séances de l'Acad. des Sciences*. Paris t. CXXXVIII, p. 1523—1525. 1904.

43. — Die Doppelkraft der sich teilenden Zelle. I. Die achromatische Spindelfigur, erläutert durch magnetische Kraftketten. *Biol. Centralbl.* t. XXV, p. 387—391, 1905. (*Proceed. of the Roy. Soc.* 1905. Dasselbe englisch.)

44. *O. Hertwig*. *Allgemeine Biologie*. Gust. Fischer, Jena, 1906.

45. *A. Heyer*. Über Variation der Blattform von *Prunus spinosa*. *Archives des sciences physiques et naturelles. Compte rendu des Travaux de la Société helvétique*. Genève, 1906, p. 70.

46. *K. A. Högström*. Die Vererbung des Fettgehaltes der Milch. (*N. Hermes, Mitteil. d. D. Landwirtschaftsgesellsch.* 1906, Stück 49 [8. Dez.], S. 468 ff.

47. *C. C. Hurst*. On the Inheritance of Coat Colour in Horses. *Proceed. of the Roy. Soc. B*, Vol. II, 1906, p. 388 bis 394.

48. *I. C. Kapteyn*. Reply to Pearson's criticisms. *Extrait du Recueil des Travaux botaniques Neerlandais* No. 3, 1905. 3 Seiten.

49. *Arnold Lang*. Über die Mendelschen Gesetze, Art- und Varietätenbildung, Mutation und Variation, insbesondere bei unseren Hain- und Schnirkelschnecken. *Verh. d. Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft in Luzern*. 88. Jahresversammlung, 1906. S. 159 ff.

50. *Victor Langhans*. *Asplachua priodonta* Gosse und ihre Variation. *Archiv f. Hydrobiol. u. Planktonkunde*, herausgeg. v. Dr. O. Zacharias. Stuttgart, E. Nägeli. Bd. I, H. 4, p. 439—468. 1906.

51. *Ralph S. Lillie*. On the condition determining the disposition of the chromatic filaments and chromosomes in mitosis. *Biological Bulletin* 1905, t. VIII. p. 193—204.

52. *F. Ludwig*. Die Buchenformen unserer Wälder. Natur u. Kultur 1905, Heft 2.
53. *F. E. Lutz*. Preserving spiders' webs. Science n. s. V. XXIII. p. 391. Mas. 9 1906.
54. — The tegminal position in Gryllus. Canadian Entomologist. V. XXXVIII, pp. 207—209. June 1906.
55. *Mac Curdy, Hansford and W. E. Castle*. Selection and cross-breeding in relation to inheritance of Coat-pigments and Coat-patterns in Rats and Guinea-pigs. Publications of the Carnegie Institution of Washington. No. 70. 1907.
56. *D. T. Mac Dougal*. Heredity and the Origin of Species. Monist, Jan. 1906.
57. — Discontinuous Variation in pedigree cultures. Pop. Sci. Monthly, LXIX, pp. 207—225. Sept. 1906.
58. *Henry V. A. Mayer*. L'état actuel de nos connaissances sur les colloïdes. Revue générale des Sciences pures et appliquées. Paris 1904. t. XV, p. 1015 bis 1030, 1066—1081, 1129—1140.
59. *M. Nußbaum*. Mutationserscheinungen bei Tieren. Bonn 1906.
60. *Raymond Pearl*. Variation and Differentiation in Ceratophyllum. Publications of the Carnegie Institution of Washington. No. 58. 1907.
61. — and *A. B. Clawson*. Variation and Correlation in the Crayfish, with special reference to the Influence of Differentiation and Homology of parts. l. c. No. 64. 1907.
62. *R. C. Punnett*. Sex-determination in Hydatina. Proceed. Roy. B. Vol. 78. 1906. p. 223.
63. *C. Raunkjaer*. Sur la transmission par hérédité dans les espèces hétéromorphes. Acad. Roy. des Sciences et des Lettres de Danemark. Bull. de l'année 1906, No. 1.
64. — Über die Vererbung bei den heteromorphen Arten. Übersicht over het Kg. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlingar 1906, p. 31—39.
65. *H. Schmidt*. Beobachtungen über Abänderungen in der Blütenform bei *Linaria vulgaris* Mill. Aus der Natur II, 1906/7, H. 20, p. 629—635.
66. *C. Schröter*. Über Mutationen der Hirschnge. Verh. d. Schweiz. Naturforsch. Gesellsch. in Luzern, 88. Jahresversammlung 1906. S. 169 ff.
67. *Ed. Straßburger*. Die stofflichen Grundlagen der Vererbung im organischen Reich. Jena 1905, G. Fischer. 68 S.
68. *S. Walter Sutton*. On the morphology of the Chromosome group in *Brachystola magna*. Biological Bull. 1902, Vol. IV.
69. *Tine Tammes*. Über den Einfluß der Ernährung auf die fluktuierende Variabilität einiger Pflanzen. Proceed. Kon. Akad. v. Wetensch. te Amsterdam 1905, p. 398—411.
70. *E. Tschermak*. Die Mendelsche Lehre und die Galtonsche Theorie vom Ahnenerbe. Ber. d. Abt. 9: Bot. d. 77. Vers. D. Ntf. u. Ärzte in Meran 1905. Rdsch. XX, 1905, No. 48, p. 618.
71. — Die Kreuzung im Dienste der Pflanzenzüchtung. Jahrb. d. Österr. landw. Ges. V. XX, pp. 325—338. 1905.
72. — Die Blüh- und Fruchtbarkeitsverhältnisse bei Roggen und Gerste. Fühlings Landw. Zeitung, Heft 6, 1906. Wiener Landw. Zeitg. Nr. 54, 7. Juli 1906.
73. — Über Züchtung neuer Getreiderassen — mittels künstlicher Kreuzung. II. T. Kreuzungsstudien am Roggen. Zeitschr. f. landwirtsch. Versuchswesen in Österreich, Heft 6, 1906.
74. — Über Bildung neuer Formen durch Kreuzung. Résultats scientifiques de Congrès international de Botanique Wien 1905.
75. *H. de Vries*. Species and Varieties; edited by Daniel Trembly Mac Dougal. Chicago. The Open Court Publishing Co. — Science U. S. Vol. XXII, No. 500, p. 369—372, 22, XI, 1902.
76. — Arten und Varietäten und ihre Entstehung durch Mutation. Berlin 1906. Übersetzt von H. Klebahn nach den Vorlesungen, die H. de Vries in Californien an der Universität zu Berkeley hielt.
77. — Ältere und neuere Selectionsmethoden. Biol. Zentralbl. 1906. Bd. 26, S. 385—395.
78. — La théorie darwinienne et la sélection dans l'agriculture. Revue Scientifique 1906. Sér. 5. Tome 5, p. 449 bis 454.
79. — Ein Besuch bei Luther Burbank. Die Umschau Nr. 41, 43, 1906.
80. *Jul. Wiesner*. Die Elementarstruktur und das Wachstum der lebenden Substanz. Wien, A. Hölder, 1892. (Vorläufige Mitt. im Ber. d. D. Bot. Ges. VIII, 1890, H. 7, p. 196—201.)
81. *L. Wittmack*. Die internationale Konferenz über Hybridisation und Pflanzenzüchtung in London vom 30. Juli bis 3. August 1906. Mitt. d. D. Landwirtschafts. Gesellschaft, XXII. 1907, Stück 1—3.
82. *Michel Yégonow*. Les sulfo-bactéries des limans d'Odessa. Arch. des sc. hist. T. III, 1895, No. 4.

83. *Michel Yégonow*. Bakteriengesellschaften. Zentralbl. f. Bakt. II. Abt., Bd. II, 1896.

84. — Die Mechanik und Typen der Teilung der Bakterienscharen. Z. f. Bakt., II. Abt. 1898.

85. — Les bassins bio-anisotropiques. Ann. de Géolog. et Minér. de la Russie. T. I. 1900, Livr. 3 (russisch) etc.

86. *Michel Yégonow*. Lois du mouvement de la foule microbienne. Zentralbl. f. Bakt. II. Abt. Bd. XVIII, 1907, No. 1/3, p. 1—9.

87. *H. E. Ziegler*. Die Vererbungslehre in der Biologie. 16 S., 8°, Jena 1905, G. Fischer. 76 S. mit 9 Fig. im Text u. 2 Taf.

VI.

88. *L. H. Bailey*. Plant Breeding. Ed. 4. New York, Macmillan, 1906.

89. *W. Bateson*. The progress of Genetics since the rediscovery of Mendel's papers. Progressus Rei botanicæ Heft 2. 1906. (Genetik, Wissenschaft, die dem Wesen von der Vererbung auf den Grund zu gehen sucht.)

90. *H. R. Biffen*. Die Backfähigkeit des Weizens. Nach Journ. of Agriculture Science, Vol. III, part 1. Dez. 1908, Cambridge, p. 86—101. Mitt. d. D. Landw. Ges. XXIV, 1909, Stück 12, p. 194—196.

91. *Th. Boveri*. Experimente an Zellkernen. Ber. d. Senckenbergerschen Naturforsch. Gesellsch. zu Frankfurt a. M. 1908, p. 91—95.

92. *G. Bredmann*. Variation und Stickstoffbindungsvermögen des *Bacillus astero sporus* A. M. Z. f. Bakteriologie u. Parasitenkunde 1909, II. Abt., XXII, p. 44 ff. über *Bacillus Amylobacter* l. c. XXIII, p. 385 ff.

93. *Artur Brozek*. Über die Variabilität und Lokalformen bei *Palaeonetes varians* Leach aus vier verschiedenen Lokalitäten. Eine statistisch vergleichende Studie. Aus dem zoologischen Institute der Böhmisches Universität Prag. Mit 8 Textfiguren und einer Tafel. Sep.-Abdr. aus den Sitzungsberichten der Königl. Böhm. Gesellsch. d. Wissensch. in Prag, 1907, 27 S.

94. — Über die Variabilität bei *Palaeonetes varians* Leach aus Monfalcone bei Triest. Mit 1 Tafel. Sep.-Abdr. aus d. Sitzungsber. d. Kgl. Böhm. Gesellsch. d. Wissensch. in Prag, 1909. 11 S. Mit 1 Taf.

95. *C. de Bruyker*. De polymorphe variatiecurve van het aantal bloemen bij *Primula elatior* Jacq; hare beteeknis en hare beïnvloeding door uitwendige factoren. Overgedrukt uit de „Handelingen van het Tiende Vlaamsch Natuur- en Geneeskundig Congres“ gehouden te Brugge op 29en en 30en September 1906. 29 Seiten.

96. *C. de Bruyker*. Bemerkingen aangaande de Galtonsche curve l. c. 6 S.

97. — Een nieuw geval van omkeering eener „halve Galton-Curve“. Handelingen van het Elfde Vlaamsch Natuur- en Geneeskundig Congres gehouden te Mechelen op 21, 22 en 23 September 1907.

98. *W. E. Castle, F. W. Carpenter, K. H. Clark, S. O. Mast and W. M. Barrows*. The effects of inbreeding, crossbreeding, and selection upon the fertility and variability of *Drosophila*. Contributions from the zoological laboratory of the Museum of comparative zoology at Harvard College No. 177. Cambridge Mass. U. S. A. Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences, Vol. XLI, No. 33, p. 731—786.

99. *C. Correns*. Mendels Briefe an Carl Nägeli 1866—1873. Ein Nachtrag zu den veröffentlichten Bastardierungsversuchen Mendels. Abh. d. math.-phys. Klasse d. K. Sachs. Gesellsch. d. Wissensch. Leipzig. Bd. XXIX, Nr. III, 1905.

100. — Die Bestimmung und Vererbung des Geschlechtes nach neuen Versuchen mit höheren Pflanzen. Gebr. Bornträger, Berlin 1908. (Kurzes Resumé vom Verf. in Die Umschau, 1908, Nr. 19, 9. Mai.)

101. — Die Rolle der männlichen Keimzellen bei der Geschlechtsbestimmung der gynodiöcischen Pflanzen. Ber. d. D. Bot. Ges. 1908, XVIIa, H. 9, p. 686—701.

102. — Weitere Untersuchungen über die Geschlechtsformen polygamer Blütenpflanzen und ihre Beeinflussbarkeit. Mit 11 Textfig. Jahrb. f. wiss. Bot., Bd. XLV, H. 4. Leipzig 1908. p. 661 bis 700.

103. — Die Bestimmung und Vererbung des Geschlechtes bei den Pflanzen. Die Umschau XII, 1909, Nr. 19, p. 361 bis 367.

104. *Mac Curdy, Hansford and W. E. Castle*. Selection and Cross-breeding in Relation to the Inheritance of Coat-

- pigments and Coat-patterns in Rats and Guinea-pigs. Washington D. C. 1907. 50 S.
105. *Charles B. Davenport*. Dominance of Characteristics in Poultry. Royal Hortic. Society's Report of the Conference on Genetics. London 1907. 2 p.
106. *C. Gertrude Davenport* and *C. B. Davenport*. Heredity of hair-form in Man. The American Naturalist, Vol. XLII, No. 497, 1908, p. 341—349.
107. — Heredity of eye color in Man. Science N. S., Vol. XXVI, No. 670. 1907. p. 589—592.
108. *Charles B. Davenport*. Heredity and Mendel's Law. Proceed. of the Washington Academy of Sciences, Vol. IX, 1907, p. 179—188.
109. — Determination of Dominance in Mendelian Inheritance. Proceed. of the American Philosophical Society, Vol. XLVII, 1908, p. 59—63.
110. *D. T. Mac Dougal*, *A. M. Vail* and *G. H. Shull*. Mutations, Variations, and Relationships of the Oenotheras. Carnegie Institution of Washington Publications No. 81. (Papers of the Station for Experimental Evolution No. 9.) 92 S. Mit 22 Tafeln u. 72 Fig. im Text.
111. *Winfried Dudgeon*. A study of the Variation of the Number of Ray flowers of Certain Compositae. Contributions Bot. Depart. Iowa State College of Agriculture and Mechanic Arts No. 36. Roy. Proceedings Iowa Academy of Science Vol. XIV. 20 Seiten, 9 Tafeln u. 2 Abb. (Rudbeckia triloba, R. hirta, Helianthus grosseserratus.)
112. *Georg Duncker*. Variation und Modifikation bei Siphonostoma typhle L. Syngnathidenstudien I. Mitteilungen aus dem naturhistorischen Museum zu Hamburg XX. 2. Beiheft zum Jahrbuch der Hamburger Wissenschaftlichen Anstalten XX, Hamburg 1908. 115 Seiten, 20 Tabellen, 3 Tafeln und 4 Textfiguren.
113. *Edward M. East*. The Relation of Certain Biological Principles to Plant Breeding Connecticut Agricultural Experiment Station New Haven Conn. Bulletin 158, November 1907. 93 pp.
114. — Connecticut Agricultural Experiment Station. Part VII. Report of the Agronomist. May 1908.
- I. The Prospects of Better Seed Corn in Connecticut, p. 397.
 - II. Practical Use of Mendelism in Corn Breeding, p. 406.
 - III. Inbreeding in Corn, p. 419.
 - IV. Some Essential Points in Potato Breeding, p. 429.
115. *Edward M. East*. A Note Concerning Inheritance in Sweet Corn. Science U. S., Vol. XXIX, No. 742. p. 465—467. 1909.
116. — The Distinction between Development and Heredity in Inbreeding. The American Naturalist, Vol. XLIII, March 1909. p. 173—181.
117. *Léo Errera*. Cours de Physiologie moléculaire. Leçons recueillies et rédigées par H. Schouteden. Extrait du Recueil de l'Institut botanique de Bruxelles, tome VII. Bruxelles 1907. 153 S.
118. *Richard Falck*. Wachstumsgesetze, Wachstumsfaktoren und Temperaturwerte der holzzerstörenden Mycelien. Sep.-Abdr. aus: Hausschwammforschungen, im amtlichen Auftrage herausgegeben von Prof. Dr. A. Möller. Jena 1901. p. 53—154.
119. *H. S. Fawcok*. Variation in Ray Flowers of Anthemis Cotula and other Composites. Iowa Acad. Sci. 12. p. 55 bis 68. 1905.
120. — Numerical Variation of the Ray Flowers of Compositae. Bot. Gazelle 33. p. 463—465. June 1902.
121. *Fruhwith*. Die Züchtung der landwirtschaftlichen Kulturpflanzen. Berlin. P. Parey. 4 Bände, 1907 (M. 31).
122. — Wie kann sich der Landwirt Pflanzenzüchtung, Sortenversuche und Saatgutbau zu Nutze machen. Berlin, Paul Parey (M. 1,50).
123. *Angel Gallardo*. Bipolaridad de la Division celular. Revista del Museo de la Plata, Tomo XVI (2. Serie, tomo II), p. 7—31. Buenos Aires 1909.
124. *D. Geyer*. Die Lartetien der süddeutschen Jura- und Muschelkalkgebirge. Zool. Jahrbücher, Abt. f. Systematik, 1908. Bd. 26, S. 591—620.
125. *Ludwik Garbowski*. Über Abschwächung und Variabilität bei Bacillus luteus Smith et Baker und Bacillus tumescens Zopf. Z. f. Bakteriologie, II. Abt., Bd. XIX, Nr. 21/25 XX, Nr. 1—5.
126. *Van der Gucht*. Veranderlijkheit en correlatie bij Pecten opercularis Handel. VIIe VI Nat.-Geneesk. Congres 1903. Gent. pp. 325—355.
127. *B. Hansteen*. Über korrelative Gesetzmäßigkeiten im Stoffwechsel der Samen. Nyt Magazin for Naturvidenskaberne, B. 45, H. II. Kristiania 1907. p. 97—111.
128. — Ein Beitrag zur Kenntnis der Korrelationen im pflanzlichen Stoffwechsel. Sonderabdruck aus „Landwirtschaftl. Jahrbücher“, Berlin 1907, p. 445.

129. *B. Heyer*. Über die Längenvariation der Coniferennadeln. *Biometrica* VI, 1909, Nr. 4, p. 345—365.

130. *Hink*. Die Vererbung, ihr Wesen und ihre züchterische Tragweite. Vortrag, gehalten am 13. Februar 1907 in der Tierzucht-Abteilung der Deutschen Landwirtschaftsgesellschaft. Jahrbuch der D. Landwirtschaftsgesellschaft, Bd. 22, 1. Lief. Berlin 1907. p. 158—175.

131. *K. Hofmann*. Der exakte Artbegriff, seine Ableitung und Anwendung. *Ostwalds Annalen der Naturphilosophie* 1907, Bd. 6, S. 154—216. Ref. in *Ntw. Rdsch.* XXIII, 1908, Nr. 23, p. 292.

132. *Paul Jaccard*. Nouvelles recherches sur la distribution florale. *Bull. de la Société Vaudoise des Sc. nat.* Lausanne 1908. Vol. XLIV, 163, p. 223 bis 270, Pl. X—XX.

133. *H. C. Jacobsen*. Über einen richtenden Einfluß beim Wachstum gewisser Bakterien in Gelatine. *Zentralbl. f. Bakteriol.* Nr. II, Abt. XVII, 1907, p. 53—64.

134. *G. van Iterson jun.* Mathematische und mikroskopisch-anatomische Studien über Blattstellungen nebst Betrachtungen über den Schalenbau der Miliolinien 331 S., 16 Taf., 110 Textfig. Jena 1907, G. Fischer.

135. *H. Krätzschar*. Über den Polymorphismus von *Anuraea cochleata* Ehrbg. Variationsstatistische und experimentelle Untersuchung. *Internationale Revue für die gesamte Hydrobiologie und Hydrographie.* Bd I, S. 623—675.

136. *Julius MacLeod*. Over den invloed der levensvoorwaarden op het aantal randbloemen bij *Chrysanthemum carinatum* en over de trappen der verandering. *Bot. Jaarboek*, 13^e Jaargang. Gent 1907. p. 77—179.

137. *C. A. M. Lindman*. Über den floralen Syndimorphismus einiger Festuceen. *Arkiv för Botanik.* K. Svenska Vetenskapsakad. i Stockholm. Bd. 8, 1909, No. 12.

138. *R. H. Lock*. *Variation Heredity and Evolution.* London, John Murray, 1906.

139. *T. H. Morgan*. *Evolution and Adaption.* New York, Macmillan, 1903.

140. *R. Pearl*. Die Variationen von *Chilomonas* unter günstigen und ungünstigen Lebensbedingungen. *Biometrica* 1906, Vol. 5, p. 53—72.

141. — Eine biologische Studie an *Paramecium*. *Biometrica* 1907, p. 213 bis 297.

142. *J. Perriraz*. Variations chez *Astrantia major*. *Bulletin de la Soc. Vaudoise des Sciences naturelles.* 5 S. Vol. XLII, No. 159. Lausanne 1907.

143. *L. Plate*. Die Variabilität und Artbildung nach dem Prinzip geographischer Formenketten bei den Cerion-Landschnecken der Bahamainseln. *Archiv f. Rassen- und Gesellschaftsbiologie*, VI, 1907. S. 433—614.

144. *Hans Przibram*. Anwendung elementarer Mathematik auf biologische Probleme. Vortr. u. Aufsätze üb. Entwicklungsmechanik der Organismen. Herausgeg. von Wilh. Roux. Leipzig, Engelmann, 3. Heft, 1908.

145. *R. C. Punnett*. *Mendelism.* Ed. 2. Cambridge, Macmillan, 1907.

146. *Georg Rätter*. Beiträge zur Physiologie des Flächenwachstums der Pflanzen. *Beih. z. Botan. Centralbl.*, Bd. XXII, 1907, Abt. II. p. 317—329. Mit 4 Fig.

147. — Das normale Längen-, Flächen- und Körperwachstum der Pflanzen. Beihefte zum *Bot. Centralblatt*, Bd. XXIII (1908), Abt. I, p. 273—319.

148. — Über diskontinuierliche Variation im Organismenreiche. Beihefte z. *Bot. Centralblatt*, Bd. XXV (1909), Abt. I, 29 S.

149. *K. von Rümker*. Über Sortenauswahl bei Getreide. Tagesfragen aus dem modernen Ackerbau, Heft 5 (Preis 80 Pfennige). Berlin, Paul Parey.

150. — Der Saatbau und die Saatbauverceine. Heft 7.

151. — Die systematische Einteilung und Benennung der Getreidesorten für praktische Zwecke. *Jahrb. d. D. L.-Ges.* 1908, Bd. 20, 1. Lief., p. 137—160.

152. — Methoden und Organisation der Pflanzenzüchtung. *Mitteil. d. Deutschen Landwirtschaftsgesellschaft* 1909. Stück 6, S. 65—67. Stück 7, S. 80—82.

153. *Rutger Sernander*. Entwurf einer Monographie der Europäischen Myrmecochoren. *Upsala-Stockholm* 1906. 410 S.

154. *George Harrison Shull*. The Significance of latent characters, some late Characters of a White Bean. *Science N. S.*, Vol. XXV, No. 646, p. 792 bis 794, 1907. No. 647, p. 828—832, 1907.

155. — Elementary Species and Hybrids of *Bursa*. *Science N. S.*, Vol. XXV, No. 641, p. 590—591. 1907.

156. — Some new cases of Mendelian Inheritance with four figures. *Bot. Gaz.* 45, p. 103—116. February 1908.

157. *George Harrison Shull*. Importance of the Mutation Theory in practical Breeding. Proceedings American Breeders' Association, Vol. III, 1907.

158. — The Pedigree Culture, its Aims and Methods. The Plant World 11, p. 21—28, 55—64. Febr./Mars 1908.

159. — At new Mendelian Ratio and Several Types of Latency. The American Naturalist, Vol. XLII, No. 499, Jahrg. 1908. p. 433—451.

160. — The Composition of a Field of Maize. Reprinted from Vol IV American Breeders' Association. 1908. 6 S.

161. *Steglich*. Die Statik des Obstbaues. Arb. d. D. Landwirtschaftsges., H. 132, Berlin 1907. — Jahrbuch d. D. L.-G., Bd. 23, H. 1, 1908. p. 183—189.

162. *Tine Tammes*. Der Flachstengel. Eine statistisch-anatomische Monographie. Aus dem Botanischen Laboratorium der Universität Groningen. Naturkundige Verhandlungen van de Hollandse Maatschappij der Wetenschappen. Derde Verzameling Deel VI, vierde Stuk. Haarlem 1907. 285 Seiten, 4^o, u. 6 Taf.

163. *Ernst Teichmann*. Fortpflanzung und Zeugung. Stuttgart 1907, Kosmosgesellschaft.

164. — Die Vererbung als erhaltende Macht im Flusse organischen Geschehens. Mit Textabb. u. 4 Tafeln, 94 S.

165. *William Lawrence Tower*. An Investigation of Evolution in Chrysomelid Beetles of the Genus Leptinotarsa. Washington D. C., Carnegie Instit. of Washington 1906, No. 48. (Papers of the Station for Experimental Evolution at Cold Spring Harbor New York, No. 4.) 320 S. mit 30 Tafeln u. 31 Textfiguren.

166. *Paul Vogler*. Die Variabilität der Früchte von *Acer pseudoplatanus* L. in der Ostschweiz. Jahresber. d. St. Gallischen Naturw. Ges. 1906. 34 S.

167. — Variationsstatistische Untersuchungen an den Dolden von *Astrantia* L. Sep.-Abdr. aus Beihefte zum Bot. Centralblatt, Bd. XXIV, 1908, Abt. I. 19 S. mit 6 Abbild.

168. — Variationsstatistische Untersuchungen an den Blättern von *Vincaminor* L. Ein Beitrag zur Theorie des Flächenwachstums der Blätter. Sep.-Abdr. aus d. Jahrbuch d. St. Gallischen Naturw. Gesellschaft 1908. 31 S. u. 8 Fig.

169. *H. de Vries*. Plant Breeding. Comments on the Experiments of Nilsson and Burbank. The Open Court Publishing Co., Chicago 1907. pp. XV bis 360 with 114 plates from nature.

170. — Die Umwandlung der Nachkerze. „Aus der Natur“ III, 1907, H. 1. p. 7—14.

171. — Luxus in der Natur. „Aus d. Natur“ IV, 1908, H. 1, p. 18 ff.

172. *H. Wiechel*. Volksdichte-Schichtenkarten in neuer mathematisch begründeter Entwurfsart. Mit 1 Karte. Abh. d. naturw. Ges. Iris in Dresden, Jahrg. 1905, Jan./Juni. p. 34—48.

173. *Michel Yégourow*. Poids moléculaire et la forme des corps. Travail du poids moléculaire. Centralbl. f. Bakt., Parasitenk. u. Infektionskrankh. II. Abt., Bd. XXIII, 1909, Nr. 115, p. 1—10 mit 8 Figuren.

Nachtrag.

174. *Karl Peter*. Variationsstatistische Untersuchungen und deren biologische Bedeutung. Die Umschau, XIII, 1909. p. 651—654 mit 5 Fig.

Das biometrische Grenzgebiet hat auch heute noch nicht die Beachtung der Mathematiker und der Biologen bei uns in Deutschland gefunden, die es verdient; das beweisen die Verhandlungen und Kongresse, die anlässlich der Einführung des biologischen Unterrichts in den Oberklassen unserer Gymnasien und der Vertiefung des mathematischen Unterrichts an Gymnasien, Realschulen usw. stattgefunden haben. Bei ersterem ist zwar der modernen Entwicklungslehre vielseitig Rechnung getragen und bei letzterer treten die physikalischen und chemischen Anwendungen der Mathematik stark in den Vordergrund; aber der Schulbiologie ist die Mathematik und der Schulmathematik die Biologie fremd geblieben. Um so freudiger begrüßt der Verf. die Aufforderung des Herrn Herausgebers dieser Zeitschrift zur Fortsetzung seiner Literaturübersicht über das interessante Zwischengebiet, die er in früheren Jahren gegeben hat (I 1898 S. 230—242, II 1903 S. 269—277, III 1904 S. 168—164, IV 1905 S. 106—111).

Trotzdem die Arbeiten der letzten Jahrgänge der „Biometrika“ (A Journal

for the statistical study of biological problems. Edited in consultation with Francis Galton by W. F. R. Weldon, Karl Pearson and Davenport) und der seit 1908 erscheinenden „Zeitschrift für induktive Abstammungs- und Vererbungslehre“ (herausgegeben von C. Correns, V. Hacker usw., Berlin, Gebr. Bornträger) hier des Raumes wegen außer Acht gelassen werden sollen, ist die Literatur umfangreicher geworden, als in den letzten Berichten über gleiche Zeiträume — ein Beweis für das lebhaftes Wachstum der jungen Wissenschaft der Biometrie und ein Grund mehr, derselben endlich auch in das Schulzimmer Einlaß zu gewähren.

In den Vordergrund treten unter den neueren Arbeiten wiederum die variationsstatistischen, welche sich auf die *natürliche Verwandtschaft* der Lebewesen, die Analyse der Rasse und Art und ihres Wesens, ihrer Ursache beziehen. Der von Qnetelet und Galton begründeten Methode der Variationsstatistik liegt die früher besonders von Heincke, neuerdings von K. Hofmann (131) u. a. praktisch mit Erfolg verwendete *Definition der Rasse* als der Individuen zugrunde, die sich um einen mittleren Typus (Rasstypus) in derselben Weise gruppieren, wie die Beobachtungsfehler nach dem Gaußschen Fehlerverteilungsgesetz. Zu einer Rasse gehören darnach alle Individuen, für die die Summe der Quadrate der Abweichungen vom Rasstypus dieselbe und zwar ein Minimum, d. h. kleiner als die Summe der Quadrate der Abweichungen vom Typus einer anderen Rasse ist. Sind also $a, b, c \dots$ die Eigenschaften des Rasstypus, x_1, y_1, z_1 die irgendeines Individuums der Rasse, $x_2, y_2, z_2 \dots$ die eines zweiten usw., so ist

$$\begin{aligned} & (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 + (z_1 - c)^2 + \dots \\ & = (x_2 - a)^2 + (y_2 - b)^2 + (z_2 - c)^2 + \dots = \text{konst.} \end{aligned}$$

(die Individuen einer Rasse werden dargestellt als Punkte einer n -dimensionalen Kugel). Wie auch der *Verwandtschaftsgrad der Rassen und Arten* festgestellt werden kann und damit *stammesgeschichtliche Fragen* gelöst werden können — auch in Fällen, wo die in jüngster Zeit in Aufnahme gekommene Serumdiagnose nicht anwendbar ist — wird in (131) gezeigt (durch Berechnung der entsprechenden Artenmittelpunkte nach Messungen an Knochen findet Hofmann z. B., daß wahrscheinlich die miocene *Anas blanchardi* als Stammart der rezenten Gattungen *Anas* und *Dendrocygna* anzusehen ist, was Milne Edwards aus anderen Gründen vermutet). Hierher gehören auch die Arbeiten von Bruns (8), Bernstein (5), Kapteyn (48) und de Bruyker (96, 97), Przibram (144) z. T. Wie die Variationsbreite bei der individuellen Variation durch *veränderte Lebensbedingungen* vergrößert wird, hat Peter (174) experimentell dargetan.

Auch nach einer anderen Richtung ist der *Begriff der Art* heute ein anderer geworden, als in der früheren Naturforschung. Die Bastardlehre und namentlich die Verfolgung der *Mendelschen Gesetze*, ihrer Erweiterungen und Ergänzungen, haben die *de Vriessche Anschauung* bestätigt, nach der die *Art ein Mosaik aus gegebenen an materielle Träger gebundenen Merkmalen* (oben die Größen a, b, c usw.) darstellt, die für sich vererblich, bei der Bastardierung in verschiedener Weise kombinierbar sind, in den Nachkommen dominieren oder regressiv sein können usw. Die Bedeutung der *Zellkerne* und das Studium der *Chromosome*, deren *typische Zahl in den somatischen Zellen* der einzelnen

Art, ihre *Reduktionsteilung usw. in den Geschlechtszellen*, haben einmal das *Wesen der Sexualität* unserem Verständnis näher gebracht, deren verschiedene Formen und Abstufungen, wie auch die Formen der *Apogamie* und die weite Verbreitung auch der letzteren z. B. bei den Phanerogamen uns kennen gelehrt, dann auch neben der planmäßigen *Bastardierung* die *Züchtung in reinen Linien* zur Folge gehabt, durch die Praxis und Theorie gleich viel gewonnen haben. Die Unterscheidung von *kleinen oder elementaren Arten*, *biologischen Arten*, *Variationen* und *Mutationen*, alles das ist uns heutzutage ohne die mathematischen Gebiete der Kombinations- und Wahrscheinlichkeitslehre unverständlich, im Wesen unzugänglich.

Auf *Vererbung* und *Vererbungsgesetze* beziehen sich insonderheit die Arbeiten (1), (2), (3), (14), (15), (16), (17), (18), (19), (20), (21), (22), (23), (24), (26), (56), (63), (64), (67), (87), (115), (138), (139), (164); auf *Sexualität* (1), (15), (16), (17), (18), (21), (100—103), (163); auf *Variation* usw. (49), (52), (57), (69), (75), (76); *Mutation* (31), (49), (59), (76), (110), (157), (170); *Mendelismus* usw. (1), (4), (9), (15—18), (21), (25), (27), (35), (37), (38), (39), (70), (71), (89), (98), (99), (104), (105), (109), (113), (145), (156), (159); *Anwendung der Vererbungsgesetze bei Tierzucht* (46), (130); *Züchtung der Kulturpflanzen* (71—74), (77—79), (81), (88), (90), (103), (114), (121), (122), (149), (150—152), (158), (160), (169); auf *Kernteilung, Chromosomenlehre* usw. (6), (39), (40), (41), (44), (51), (67), (68), (87); *elementare Arten* (155). Im einzelnen ist bearbeitet die Variabilität usw. bei Menschen (101), (106), (107), (172), Kühen (46), Pferd (47), Ratten, Mäusen (9), (37), (55), Meerschweinchen (11), (13), (55), Hühnern (27), (29), Enten (131), Fischen (61), (112), Axolotl (39), Käfer (Leptinotarsa) (165), Gryllus (54), Drosophila (10), (12), (98), Palaeomonetes (93), (94), Spinnen (53), Asplachna priodonta (50), Anuraea cochleata (134), Hydatina (62), Helix (25), (49), Lartetien (124), Cerion-Landschnecken (143), Pecten varius (30), (126), Chilomonas (140), Paramaecium (141); ferner bei folgenden Pflanzen: Acer (Frucht) (166), Allium (Zwiebel) (147), Alnus (Frucht) (148), Amygdalus (Frucht) (147), Anthemis (Blütenstand) (119), Astrantia (142), (148), (167), Bakterien (92), (125), (133), Begonien (147), Berberis (147), Bohnen (102), Bryonia (16), Buxus (147), Caragana (148), Ceratophyllum (45), Chaerophyllum (147), Chelidonium (148), Chrysanthemum (7), (111), Clematis (147), Compositen (111), (119), (120), Coniferen (128), Cornus (148), Cytisus (148), Dimorphoteca (17), Echium (102), Elaeagnus (147), Euphorbia (147), Fagus (52), Fragaria (148), Geranium (18), (102), Geum (18), (102), Helianthus (111), Hyoseyamus (15), Hypericum (148), Knautia (102), Linaria (65), Linum (162), Lysimachia (148), Majanthemum (147), Medicago (148), Mirabilis (19), (20), Myrtus (146), Oenothera (110), Oxalis (148), Plantago (21), (101), (102), Primula (1), (35), (95), Prunus (45), Quercus (Frucht) (148), Robinia (149), Rosa (148), Rudbeckia (111), Sanguisorba (148), Satureja (15), (16), (18), (21), (101), (102), Sambucus (147), Scabiosa (102), Scolopendrium (66), Silene (15), (16), (21), (102), Solanum (Knollen) (147), Stellaria (148), Succisa (147), Symphoricarpos (148), Trifolium (147), Urtica (15), (19), (20), Vaccinium (147), Vinca (146), (147), (148), (168).

Daß „stets Maß und Zahl den Strom des Seins beherrschen“ (37), daß nicht nur bei der Vermehrung der Lebewesen selbst, ihrer Ausgliederung usw.,

sondern auch bei der *Vermehrung der organischen Einheiten, beim Wachstum* des Körpers und seiner Organe, mathematisch formulierbare Gesetze gelten, das zeigen auch die neueren Arbeiten über die *Gipffelage numerischer Variation* der Blütenstände usw. (7), (45), (95), (119), (120), (136), (142), (176) *und der metrischen Variation von Längengebilden, Blattflächen und Körpergebilden* (45), (80), (129), (146), (147), (148), (168), die *Blattstellungsgesetze* (134) höherer Pflanzen. *Bei niederen Gebilden, wie den Pilztypen, walten andere Gesetze*, wie Falck (118) gezeigt hat, *die mehr an das Wachstum anorganischer Zellen erinnern*. Über die *Gesetze der Teilung, Bewegung usw. der Bakteriengesellschaften* haben Yégounow und Jacob mehreres veröffentlicht in (82 bis 86), (133).

Den in dem IV. Bericht erörterten forstbotanischen Anwendungen der Mathematik durch Metzger, Schwarz u. a. — *Aufbau des Waldes und der Bäume nach mathematisch-statischen Prinzipien* — schließen sich in gewissem Sinne die in praktischer Hinsicht wichtigen Untersuchungen von Steglich über die *Statik des Obstbaues* (161) an. Die Feststellungen der bestimmten *Gewichtsverhältnisse von Stamm, Ästen und Blättern der Obstbäume*, des Verhältnisses des jährlichen Holzzuwachses, der jährlichen Laub- und Fruchtproduktion, der Zunahme des Stammumfangs *zusammen mit der chemischen Zusammensetzung* der Vegetationsorgane und Früchte ergeben den Wiederersatz der jährlichen Bodenerschöpfung.

Bezüglich der in den *Organen* (Wurzeln, Stengel, Blättern, Frucht) *bei verschiedenen Blütenpflanzen angehäuften Mengen von Kali, Phosphorsäure, Magnesia, Stickstoffverbindungen usw.* wurde der Nachweis geführt (127), (128), daß *überall* und zu jeder Zeit bis zum Lebensende *bestimmte Relationen* bestehen. Die *Quantitätsunterschiede dieser Stoffe sind spezifisch für die Art oder Rasse, das Organ und die Entwicklungsstufe*, und erfahren mit der fortschreitenden Ontogenese stets charakteristische, absolute und relative Änderungen. So ist z. B. das Verhältnis der stickstoffhaltigen und stickstofffreien Bestandteile der Samen $\left(\frac{Nk}{Nf}\right)$ eine Funktion des Verhältnisses des Phosphor- und Kaliumgehaltes $\left(\frac{P}{K}\right)$ derselben, die durch gleichzeitige Hyperbeln dargestellt wird. Die Cerealien und Leguminosen bilden zwei verschiedene „phylogenetische Hyperbeln“ usw.

Eine reiche Fülle der interessantesten Anwendungen der niederen und höheren Mathematik enthalten die von Schouteden gesammelten Vorlesungen von Léo Errera über *Molekularphysiologie* (117) — vgl. z. B. die Ableitung des *Gesetzes der Trajektorien*, S. 41 ff., denen sich auch die mathematisch-physikalischen Ableitungen der *Zellteilungsfiguren* durch Gallardo (36), (123) und Hartog (42), (43), sowie die Abhandlungen (173) und (58) anschließen. Neue fruchtbare Anwendungen der Statistik auf die *Oekologie* bietet die Bestimmung des Grades der Myrmecochorie der Ameisenpflanzen durch Sernander (153), sowie die Ermittlung wichtiger Gesetzmäßigkeiten bezüglich der Pflanzenverbreitung auf dem Gebiete der *Pflanzengeographie* die Arbeit von Jaccard (132).

Kleinere Mitteilungen.

Preisauflage aus der angewandten Mathematik für 1911.

Fürstlich Jablonowskische Gesellschaft in Leipzig. Es soll die Theorie des Regenbogens gefördert und insbesondere der Verteilungszustand des Lichtes mit anzugebender Genauigkeit für eine Kugel mit beliebigem Durchmesser bestimmt werden, der aber so klein sei, daß er nur wenige oder gar keine Beugungsstreifen ermöglicht, und zugleich so groß, daß er nicht gegenüber der Lichtwellenlänge vernachlässigt werden darf. (1500 *M.*)

Bücherschau.

L. Günther. Die Mechanik des Weltalls. Eine volkstümliche Darstellung der Lebensarbeit Johannes Keplers, besonders seiner Gesetze und Probleme. Mit 13 Figuren, 1 Tafel und vielen Tabellen. XVI u. 156 S. 8. Leipzig 1909, B. G. Teubner. Geb. *M* 2.50.

Kepler hat sein großes Lebenswerk nicht selbst in zusammenfassender Weise niedergelegt, wie das vor ihm Ptolemäus und Kopernikus, nach ihm Newton getan; seine Forschungsergebnisse sind vielmehr in zahlreichen umfangreichen Schriften niedergelegt, deren Reiz nicht zuletzt gerade darin beruht, daß sie uns alle Irrwege führen, die Kepler selbst gegangen, ehe er zur Wahrheit vordrang. Daraus mag es sich wohl erklären, daß die gewaltige Bedeutung Keplers als Forscher in weiteren Kreisen nicht die Würdigung findet, die der Größe des Mannes zukommt.

Man wird daher jedes Buch gerne in die Hand nehmen, das sich die Darstellung der Lebensarbeit Keplers zur Aufgabe stellt. Und die vom Verf. vorgelegte Schrift enttäuscht nicht. Im knappen Rahmen der Vorläufer und Nachfolger erscheint hier Keplers große astronomische Leistung in glänzendem Licht. Die Darstellung ist einfach, vielfach durch gut gewählte Zitate aus Keplers Werken belebt und von ehrlicher Begeisterung für den Heros getragen. Die Hauptwerke erfahren ihrem Werdegang und ihrer sachlichen Bedeutung nach eine treffende Inhaltsangabe und die Hinweise auf moderne Anschauungen und Ergebnisse verbreiten einen prophetischen Glanz über Keplers Gestalt. Besonderer Nachdruck liegt auf der Feststellung, daß Kepler schon mit einer der Newtonschen Fassung kaum etwas nachgebenden Schärfe das Gravitationsgesetz ausgesprochen habe.

Der Anhang bringt Tabellen über das Sonnensystem und viele Anmerkungen, in denen historisch-literarische Angaben abwechseln mit mathematischen und physikalischen Notizen.

Straßburg i. E.

WIRTZ.

C. V. L. Charlier. *Wie eine unendliche Welt aufgebaut sein kann.* (Arkiv f. Mat., Astron. och fysik, Bd. 4, Nr. 24.) 15 S. 8. Upsala u. Stockholm 1908.

Gegen die unendliche Größe der Materie im unendlichen Raum werden gemeinhin zwei Einwände erhoben. Den einen formulierte schon Olbers dahin, daß der ganze Himmelsgrund uns ebenso hell erscheinen müßte wie die Sonne. Sodann zeigte Seeliger, daß das Newtonsche Gravitationsgesetz, auf das unermesslich ausgedehnte Universum angewandt, widersinnige mechanische Wirkungen nach sich zöge, unter denen z. B. die vorhandene Stabilität des Sonnensystems unmöglich würde.

Um diese Erscheinungen zum Verschwinden zu bringen, nimmt nun Charlier zunächst an, daß zwar die Gesamtmasse im Universum unendlich sei, daß aber gleichzeitig die durchschnittliche Dichtigkeit ihrer Verteilung verschwindend wäre. Den Aufbau des Weltalls stellt er sich der Art vor, daß eine Anzahl Sterne ein Milchstraßensystem erster Ordnung bilden, eine Anzahl Milchstraßensysteme erster Ordnung ein solches zweiter Ordnung, usf., und er diskutiert nun die Bedingungen, unter denen unsere Beobachtungen dargestellt werden. Dabei zeigt sich, daß man dem Olbersschen Einwand schon bei ziemlich geringer Zerstreung der verschiedenen Systeme ausweicht, daß sogar die Systeme ineinander übergreifen können, ohne eine beträchtliche Himmelhelligkeit zu verursachen. Eine viel stärkere Dispersion verlangt aber der Seeligersche Einwand und das verwandte von Charlier aufgestellte Geschwindigkeitskriterium. Danach beliefe sich der scheinbare Durchmesser der uns nächsten Milchstraße auf nur $0''2$ und ihre Helligkeit sänke auf die eines Sterns der 37ten Größe herab, d. h. wir können die Milchstraßen außerhalb unseres Systems niemals wahrnehmen. —

Gleichzeitig mit dieser Arbeit Charliers betonte jedoch P. Harzer in seiner bekannten Kieler Rektoratsrede¹⁾, daß, im Gegensatz zu Charliers Bestrebungen, auch schon ein ziemlich kleiner endlicher elliptischer Raum genügt, um uns in keinem Punkte mit der Erfahrung in Widerspruch zu bringen; der Inhalt des ganzen Raumes brauchte nur 17 mal größer zu sein als der einer das Sternensystem soeben einschließenden Kugel.

Straßburg i. E.

WIRTZ.

F. Nušl et J. J. Frič. *Première étude sur les anomalies de réfraction.* (Bull. internat. de l'acad. de Bohême, 1908.) Mit 2 Tafeln und 5 Figuren im Text. 10 S. 8. Prag 1908.

Die Beobachtungen an Zirkumzonalinstrument (siehe diese Ztschr. Bd. 50, S. 157 und Bd. 56, S. 92) brachten die Verf. auf die Vermutung, daß neben den kleinen, unregelmäßigen, rasch verlaufenden Refraktionsschwankungen noch eine in längeren Zeitintervallen sich vollziehende Oszillation der Bilder vorhanden sein müsse. Zum photographischen Studium des ganzen Phänomens stellten sie nun folgenden Apparat zusammen. Über einem Quecksilberhorizont war ein Kreuzspiegel angebracht, der einmal direkt und dann nach Reflexion am Quecksilber das Bild eines Sternes (hier des Polarsterns) auf ein Objektiv

1) P. Harzer, Die Sterne und der Raum. Jahresber. d. D. Math.-Verein. Bd. 17, S. 237—267, 1908.

von 24 cm Öffnung wirft, in dessen 6 m entfernter Brennebene eine photographische Platte sich befindet. Vermöge seines täglichen Laufs und einer durch ein Uhrwerk besorgten Bewegung der Platte zeichnet der eingestellte Stern zwei Spuren auf, in denen sich die durch Refraktionsstörungen verursachten Höhenschwankungen als symmetrische Ausweichungen verraten und sich leicht von äußeren Störungen trennen lassen. Die Ausmessung der Platten geschah unterm Mikroskop und zeigte, daß in dem einen mitgeteilten Falle neben den unregelmäßigen schnellen Schwankungen langsame ziemlich regelmäßige Wellen auftreten, die eine Periode von etwa 30° und eine Amplitude von $1''0$ besaßen. —

Dieser eigenartige, genauen Messungen sehr hinderliche Luftzustand der langsamen Refraktionschwankungen war den astronomischen Mikrometerbeobachtern schon lange bekannt.

Straßburg i. E.

WIRTZ.

Astronomischer Kalender für 1909. Berechnet für den Meridian und die Polhöhe von Wien. Herausgegeben von der K. K. Sternwarte. 153 S. Wien, K. Gerolds Sohn. Kart. *M* 2.40.

Als dankenswerte Zugabe darf man diesmal ein Verzeichnis der Bahnelemente aller bisher berechneten Kometen begrüßen. Es umfaßt 388 Nummern zwischen 372 a. C. und 1907, und ist bis auf ein paar ihren Elementen oder ihrer Existenz nach ohnehin recht unsicheren Kometen als vollständig zu betrachten. Die Dauer der Sichtbarkeit und die Namen von Entdecker und Berechner sind beigelegt; in den Anmerkungen findet man noch Angaben über Besonderheiten der Bahnlage und über physische Eigentümlichkeiten. Solange also der auf breiterer Basis aufgebaute und eingehendere Gallese Kometenkatalog¹⁾ nicht in neuer Ausgabe vorliegt, wird der Fachmann die hier gebotene Übersicht mit Nutzen gebrauchen.

Herr Weiß hat, zum letzten Mal nach nahe dreiBigjähriger Mitarbeit, wieder den Bericht über die neuen Asteroiden, Satelliten und Kometen des Jahres 1908 beigelegt. Besonderes Interesse beansprucht der Planet 659 CS, der sich den drei bisher bekannten Gliedern der Jupitergruppe, Achilles, Hektor und Patroklos, als viertes hinzugesellt. Auch im Jupitersystem gelang ein interessanter Fund: Melotte in Greenwich entdeckte einen achten Mond, dessen Umlaufzeit fast $2\frac{1}{3}$ Jahre beträgt und der im Apojovium seiner rückläufigen Bahn einen Abstand vom Jupiter erreicht, der der Periheldistanz des Merkur gleichkommt.

Straßburg i. E.

WIRTZ.

C. V. L. Charlier. Die Rotation der Planeten Merkur und Venus. (Arkiv f. Mat., Astron. och fysik, Bd. 4, Nr. 23.) 19 S. 8. Upsala u. Stockholm 1908.

In der Theorie der gebundenen Rotation treten drei verschiedene Typen auf, von denen die beiden ersten als stabil bekannt sind. Nach dem ersten Typus vollzieht sich z. B. die Rotation unseres Mondes, die um die Achse des

1) J. G. Galle. Verzeichnis der Elemente der bisher berechneten Kometenbahnen. Leipzig 1894, W. Engelmann.

größten Trägheitsmomentes stattfindet. Der dritte Typus ist im allgemeinen unstabil. Charlier behandelt diesen Fall näher und zeigt, daß mit bestimmten durchaus möglichen Annahmen die Rotation stabil wird.

Das tritt nun ein, wenn die Umdrehung hauptsächlich um eine zur Bahnebene des Planeten senkrechte Achse erfolgt und außerdem eine langsame Drehung um den zur Sonne gerichteten Radiusvektor vor sich geht; die Lage der Rotationsachse ist dann zwar im Raum, aber nicht mehr im Körper, unveränderlich. Als Stabilitätsbedingung ergibt sich, daß der Planet gegen die Sonne verlängert sein muß. Die nach der von Roche entwickelten Theorie der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten berechnete Abplattung kommt für Merkur und Venus indes so gering heraus, daß ihre Konstatierung durch Beobachtungen ziemlich aussichtslos scheint.

Könnten also auch Merkur und Venus vielleicht am ehesten die Bedingungen des dritten Rotationstypus erfüllen, so wird man doch durch mikrometrische Messungen nicht sicherer zum Ziele gelangen, als das die bisher auf die Frage der Rotation der beiden Planeten angewandten Fleckenbeobachtungen und spektrographischen Aufnahmen vermochten.

Straßburg i. E.

WIRTZ.

B. Peter. *Die Planeten.* Mit 18 Figuren im Text. IV u. 131 S. Sammlung „Aus Natur und Geisteswelt“. 240. Bändchen. 8. Leipzig 1909, B. G. Teubner. Geb. *M* 1.25.

Das Büchlein beschäftigt sich mit dem heutigen Stande unserer Kenntnis von den Planeten und ihren Monden. Einer kurzen Übersicht über das Sonnensystem schließt sich die Behandlung der einzelnen Körper in der Reihenfolge ihres Sonnenabstandes an, von Merkur bis Neptun. Den breitesten Raum nimmt natürlich die Darstellung der Topographie und der physischen Beschaffenheit jedes Planeten ein, doch fehlen weder Zahlenangaben über die Bahnverhältnisse noch historische Notizen. Daß Vollständigkeit, kritische Sichtung und gemeinverständliche Darstellung Hand in Hand gehen, beweisen zur Genüge die längeren Abschnitte über Mars, die Planetoiden und Saturn. —

Der Erdmond ist nicht in den Kreis der Betrachtung gezogen worden: ihm hat J. Franz im Bändchen Nr. 90 derselben Sammlung (*Der Mond*, 1906) eine besondere eingehende Beschreibung gewidmet.

Straßburg i. E.

WIRTZ.

M. Geistbeck. *Leitfaden der mathematischen und physikalischen Geographie für höhere Schulen und Lehrerbildungs-Anstalten.* 30. u. 31. Aufl. VIII u. 186 S. 8. Freiburg i. B. 1908, Herder. Geb. *M* 2.—.

Dieses Schulbuch erschien zum ersten Male i. J. 1879, es erlebte also seitdem Jahr für Jahr Neuauflagen, die immer wieder Anlaß zu kleinen Verbesserungen in der Auswahl des Stoffes und der Formulierung boten. Die Beliebtheit und weite Verbreitung ist wohlberechtigt: in straffer Disposition bietet das Buch einen Lehrgang der mathematischen und physischen Erdkunde, der innerhalb des knappen Raumes eine bemerkenswerte Vollständigkeit besitzt.

Eine kleine Bemerkung sei hier gestattet, die sich nicht nur an das vorliegende Werkchen wendet. Vielleicht wäre es jetzt an der Zeit, daß man in

unsere Lehrbücher der mathematischen Geographie auch den schönen Beweis für die Achsendrehung der Erde aufnähme, der sich darauf gründet, daß ein Kreisel mit fester horizontaler Achse sich in den astronomischen Meridian einstellt. Die Notwendigkeit dieser Tatsache läßt sich mit elementaren Mitteln leicht richtig darstellen; sie kann aber auch genau so einfach, einleuchtend und — unrichtig traktiert werden, wie der Foucaultsche Pendelversuch und die östliche Fallabweichung. Da in nächster Zukunft wohl schon der Kreiselkompaß mindestens auf Kriegsschiffen wegen seiner Unabhängigkeit vom Schiffsmagnetismus eine wichtige Rolle zu spielen berufen ist, sollte man seine interessante Grundlage in der Schule nicht mehr verschweigen.

Druckfehler: S. 51, Z. 16 v. o. Statt 29.6 lies 24.6 Stunden.

„ „ 26 „ „ „ 22 „ 12 Jahre.

Straßburg i. E.

WIRTZ.

Th. Albrecht. *Formeln und Hilfstafeln für geographische Ortsbestimmungen.* 4. Aufl. VIII u. 348 S. Lex. 8^o. Leipzig 1908, W. Engelmann. M 20.—

Die Hilfstafeln von Albrecht, die seit mehr als 30 Jahren ein wertvolles Handbuch für astronomisch-geographische Ortsbestimmungen erster Ordnung bilden, liegen jetzt in vierter Auflage vor. Der Umfang blieb derselbe, wie der der dritten Auflage, doch hat das Werk zahlreiche Verbesserungen, Ergänzungen und Kürzungen erfahren, die seinen eigentlichen Zweck, die Erleichterung der Berechnung fundamentaler Ortsbestimmungen, noch schärfer betonen.

Die wichtigste Neuerung besteht in dem Übergang von der Besselschen zu der auf die Gyldénsche Theorie gestützten Refraktionstafel. Die Konstante ist in Übereinstimmung mit den neueren Beobachtungen (wie in der de Ballschen¹⁾ Refraktionstafel) zu 60'15 angenommen, und der $\log \alpha \tan z$ bis zur Zenitdistanz 60^o 4stellig, von da an bis 80^o 5stellig tabuliert, während die Besselschen Tafeln der älteren Auflagen diesen Wert schon von 36^o an bis 84^o 5stellig geben. Eine durchgehende Beschränkung auf 4 Stellen nach dem Vorgange der de Ballschen Tafel hätte völlig hingereicht und auch äußerlich an den natürlichen Genauigkeitsgrad einer Refraktionstafel erinnert.

Die Darstellung der fundamentalen Methoden der Zeit- und Ortsbestimmung im ersten Abschnitt berücksichtigt alle praktischen Bedürfnisse, und man findet in übersichtlichen Tabellen die Grenzen der Brauchbarkeit und die Fehlerinflüsse für die verschiedenen Beobachtungs- und Rechnungsverfahren. Gegen früher tritt u. a. hinzu die Messung kleiner Differenzen von Zenitdistanzen außerhalb des Meridians, zu deren Ausführung in letzter Zeit von verschiedenen Seiten besondere Instrumente konstruiert worden sind (Siehe z. B. diese Ztschr. Bd. 50, S. 157 und Bd. 56, S. 92). Die von der Deklination des Polarsterns abhängigen Tafeln gelten für die Zeit von 1909—1927, und alle Tafeln, in die die geographische Breite als Argument eingeht, erstrecken sich über die Zone von 30^o—65^o.

Das Buch ist für den Geodäten ebenso unentbehrlich, wie für den an festen Sternwarten tätigen Astronomen.

Straßburg i. E.

WIRTZ.

1) L. de Ball, Refraktionstafeln. Leipzig 1906, W. Engelmann.

Dr. Robert Haußner, Professor der Mathematik an der Universität Jena: **Darstellende Geometrie**. Zweiter Teil. Perspektive ebener Gebilde; Kegelschnitte. Mit 80 Figuren im Texte. Leipzig, G. J. Göschen. Sammlung Göschen Nr. 143. 164 S. Preis geb. 80 Pf.

Das vorliegende Bändchen behandelt keine Fragen der darstellenden Geometrie, vielmehr wird eine Ableitung der Haupteigenschaften der Kegelschnitte gegeben, indem diese als Projektionen oder perspektive Bilder des Kreises definiert werden. Überhaupt wird prinzipiell der Vorgang der Projektion benutzt, um Eigenschaften des neuen Gebildes aus denen des ursprünglichen herzuleiten. Nachdem die perspektive Beziehung zweier Ebenen im Raume sowie zweier ineinander liegender Felder definiert und gezeigt ist, wie man durch eine solche Zentral-Kollineation oder Perspektive ein beliebiges Viereck in ein Rechteck überführen kann, lassen sich die harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierecks aus denen des Rechtecks entwickeln. Es folgt sodann eine bemerkenswerte Betrachtung über die perspektive Beziehung zweier Kreise, die zu dem Satze führt, daß es noch unendlich viele Perspektiven gibt, welche einen Kreis und ein ihm eingeschriebenes Sehnenviereck in einen Kreis und ein Sehnenrechteck überführen. Nun können die Polareigenschaften der Kegelschnitte aus bekannten Sätzen vom Kreise übertragen werden. Die Brennpunkte-Eigenschaften endlich ergeben sich aus dem Dandelin-Satze. Den Schluß bilden Konstruktionen für die Krümmungskreise der Kegelschnitte, indem unter Bezugnahme auf eine Arbeit von C. Heumann der Zusammenhang untersucht wird zwischen dem Krümmungskreis einer Kurve und dem ihrer Projektion. — Die Figuren 51, 53, 54 hätten ganz gut noch genau gezeichnet werden können. Einfacher wäre es, in diesem Falle Orthogonalprojektionen zu benutzen. Der Beweis des Satzes 15 bedarf einer Vervollständigung.

München, Aug. 1909.

KARL DOEHLEMANN.

Artur Schönflies, Professor der Mathematik an der Universität Königsberg i. P.: **Einführung in die Hauptgesetze der zeichnerischen Darstellungsmethoden**. Mit 98 Textfiguren. Leipzig und Berlin. B. G. Teubner. 1908. V u. 92 S. Preis geb. M. 2.80.

Dem Titel entsprechend wollte der Verfasser kein Lehrbuch der darstellenden Geometrie schreiben, sondern die mathematischen Grundlagen dieser Disziplin auseinandersetzen. Dies gelingt ihm in ausgezeichnete Weise. Den Ausgangspunkt nimmt der Verfasser vom physiologischen Prozeß des Sehens, schließt daran die Theorie der Zentralprojektion, die perspektive Abbildung zweier Ebenen und räumlicher Objekte überhaupt. Die parallelperspektivische Abbildung zweier Ebenen, und die Darstellung eines Objektes in Grund- und Aufriß werden ebenfalls behandelt. Betrachtungen über Axonometrie, über die stereographische Projektion und die Reliefperspektive bilden den Schluß. In dem ganzen Buche überwiegt aber so sehr die theoretische Seite, daß die praktische d. h. die wirkliche Darstellung von Objekten überall nur in dürftigen Ansätzen zur Geltung kommt. Relativ ausführlich ist noch die perspektive Abbildung behandelt, wenn auch mit Übergehung aller praktischen Fragen; das über Grund- und Aufrißverfahren und axonometrische Methoden Vorgebrachte aber wird dem Leser kaum zu einer richtigen Vorstellung von

diesen Disziplinen verhelfen. Die zahlreichen Anmerkungen unterbrechen unangenehm die Darstellung. Die Figuren entsprechen nur sehr wenig den Anforderungen, die man in der darstellenden Geometrie stellen muß.

München, Aug. 1909.

KARL DOEHLEMANN.

Dr. Ferdinand Meisel, Großherzoglicher Direktor der Gewerbe- und Handwerkerschule und Privatdozent an der technischen Hochschule in Darmstadt: **Lehrbuch der Perspektive zum Gebrauche an mittleren und höheren technischen Lehranstalten, Kunstgewerbe- und Kunstschulen, sowie bei eigenem Studium.** Mit 244 Abbildungen im Texte. IV und 221 S. Leipzig 1908, Seemann & Co. Preis geb. 9,60 *M.*

Der Verfasser versteht es, den vielbehandelten Stoff in zum Teil neuer und eigenartiger Weise vorzutragen und die Begriffe und Definitionen streng und präzise zu formulieren. Der Inhalt des Buches ist ein äußerst reichhaltiger: in der Abbildung auf eine vertikale Bildebene wird auch die stereographische Kartenprojektion und die gnomonische Projektion behandelt, bei der Konstruktion der Schatten werden nützliche Bemerkungen über die Halbschatten beigelegt. Die Herstellung der durch Spiegelung und Brechung erzeugten Bilder, der stereoskopischen Bilder, die Abbildung auf wagrechten Ebenen, auf Zylinder- und Kugelflächen, sowie ein Abriß der Reliefperspektive beschließen die Darstellung. Besonders ausführlich wird die Abbildung des Kreises besprochen und dabei auch der Fall mit hereingezogen, wo der Kreis, ohne zur Bildtafel parallel zu sein, sich wieder als Kreis abbildet. Zur Erläuterung werden auch photographische Bilder von Innenräumen wiedergegeben. Dies ruft den Wunsch wach, daß in dem so reichhaltigen Buche auch eine kurze Erörterung über die Entstehung des photographischen Bildes, sowie über den physiologischen Vorgang beim Sehen Platz finden möge. Für das Selbststudium ist das Buch wohl zu kurz und knapp gehalten; der Anfänger wird die ausgeführten Konstruktionen ohne erläuternden Text kaum verfolgen können. Die auf S. 103 gegebene Konstruktion für die Spitzen in der Darstellung einer Hohlkehle müßte ausdrücklich als bloß empirische oder angenäherte bezeichnet werden.

München, Juni 1909.

KARL DOEHLEMANN.

Otto Haeder, jun., Duisburg am Rhein, **Die Schnell-Perspektive (Haeder-Perspektive) und Skizzieren.** Für technische Lehranstalten und zum Selbstunterricht. Mit vielen Abbildungen und Maßtabellen. Beilage: Zeichendreieck mit Haeder-Winkel. 71 S. Duisburg am Rhein, Selbstverlag. Kommissionsverlag von L. Schwann in Düsseldorf. Preis 2 *M.*

Dem Verfasser fehlen die elementarsten Kenntnisse in der Projektionslehre; die von ihm nach einem Schema entworfenen „Bilder“ sind gar keine Projektionen der betreffenden Objekte. Man muß vor solchen Büchern warnen, da sie in unklaren Köpfen unendlich viel Verwirrung anrichten können.

München, Juni 1909.

KARL DOEHLEMANN.

O. Lohse, **Tafeln für numerisches Rechnen mit Maschinen.** Leipzig 1909, Wilhelm Engelmann. Geb. *M.* 13.50.

Die Rechenmaschinen, die im Grundgedanken Additionsmaschinen sind, eignen sich zunächst zur Ausführung von Multiplikationen; ihre Verwendungs-

weise bei der Ausführung von Divisionen ist umständlich. Um die Rechenmaschinen auch bequem zur Division verwenden zu können, ist es deshalb nötig, diese auf eine Multiplikation zurückzuführen; dies läßt sich bekanntlich dadurch erreichen, daß man, anstatt mit einer Größe zu dividieren, mit ihrem reziproken Wert multipliziert. Steht demnach eine Tafel der Reziproken derjenigen Größen, die bei numerischen Rechnungen als Divisor auftreten, zur Verfügung, so läßt sich jede Division in einfacher Weise auf eine Multiplikation zurückführen und damit bequem mit der Rechenmaschine berechnen.

Die vorliegende Tafel enthält für diesen Zweck je auf fünf Stellen die Reziproken der Zahlen von 1 bis 5000 und — für jedes Hundertstel des Grades — die natürlichen Werte der sechs trigonometrischen Funktionen Sinus, Cosecante, Tangente, Cotangente, Secante und Cosinus; da bekanntlich je zwei dieser Funktionen reziprok sind, so lassen sich mit Hilfe der Tafel Divisionen mit jeder der sechs mit der Maschine berechnen.

Eine kleine Unbequemlichkeit bei Benutzung der Tafel der natürlichen Werte der trigonometrischen Funktionen liegt darin, daß der Winkel nach Teilen eines Grades fortschreitet, so daß die Minuten und Sekunden eines gegebenen Winkels vor dem Eingehen in die Tafel in Grade zu verwandeln sind, für welchen Zweck eine kleine Hilfstafel beigegeben ist.

Außer den wichtigsten Formeln der Goniometrie und der ebenen und sphärischen Trigonometrie findet man in einem Anhang eine Tafel der Quadrate 1 bis 1000, eine Tafel zur Berechnung der Quadratwurzeln, eine Tafel zur Verwandlung von Stunden und Minuten in Dezimalteile des Tages und eine solche zur Verwandlung von Stunden, Minuten und Sekunden in Grade.

Mit Rücksicht auf die Übersichtlichkeit wäre eine Gruppierung der fünf Stellen — z. B. in ähnlicher Weise wie bei den meisten fünfstelligen Logarithmentafeln — erwünscht.

Straßburg i./E.

P. WERKMEISTER.

Dr. **J. Peters**, Observator am Kgl. Astronomischen Recheninstitut. **Neue Rechentafeln für Multiplikation und Division mit allen ein- bis vierstelligen Zahlen.** Berlin 1909, Georg Reimer. Geb. *M* 15.—

Die Tafeln enthalten die Produkte aller ein- und zweistelligen mit allen ein- bis vierstelligen Zahlen unmittelbar und erlauben das Produkt von zwei vierstelligen Zahlen in einfachster Weise zu bestimmen; sie zerfallen wie die bekannten Crelleschen Rechentafeln, mit denen sie im äußeren Bild übereinstimmen, in einzelne, je auf einer halben Seite untergebrachte Tafeln. Jede dieser Tafeln ist nach den drei letzten Ziffern des einen Faktors (Multiplikator) bezichnet, so daß ihrer 1000 vorhanden sind; ihre Vertikalreihen entsprechen der ersten Ziffer (Tausender) des vierstelligen Multiplikators, und sind demnach je mit den Zahlen 0 bis 9 überschrieben. Die Horizontalreihen einer Tafel entsprechen dem andren — zweistelligen — Faktor (Multiplikand). Bei dieser Anordnung stimmen die drei letzten Ziffern der einer Horizontalreihe angehörenden Produkte überein; sie sind deshalb — ähnlich wie bei den Crelleschen Tafeln die zwei letzten Ziffern — abgetrennt und in einer besonderen Vertikalreihe angeordnet.

Die Benutzung der Tafeln beim Ermitteln des Produkts einer zwei- mit einer vierstelligen Zahl ist sehr einfach; man sucht zunächst die Tafel auf, die

mit den drei letzten Ziffern des vierstelligen Faktors überschrieben ist, geht mit dessen erster Ziffer (Tausender) in die betreffende Vertikalreihe und mit dem anderen Faktor in die betreffende Horizontalreihe ein, und findet in dieser das in zwei Teile zerlegte Produkt.

Die Verwendung der Tafeln bei der Multiplikation von vier- mit zwei- bis vierstelligen Zahlen ist mit Rücksicht darauf, daß als Haupteingang der vierstellige Faktor gewählt ist, sehr bequem, da man nach Zerlegung des drei- oder vierstelligen Multiplikanden in zwei Teile die beiden — nur noch zu addierenden — Teilprodukte *einer* Tafel und *denselben* Vertikalreihen entnehmen kann.

Die von der neuen Ausgabe der Crelleschen Tafeln übernommene Anordnung der einzelnen Tafeln und deren Horizontal- und Vertikalreihen läßt an Übersichtlichkeit nichts zu wünschen übrig, so daß die neuen Rechentafeln bei ihrer gediegenen Ausstattung unter den Tafeln für Multiplikation mit ein- bis vierstelligen Zahlen wohl bald einen ähnlichen Ruf erhalten werden wie die beliebten Crellesche Tafeln unter denen zur Multiplikation mit ein- bis dreistelligen Zahlen.

Straßburg i./E.

P. WERKMEISTER.

Dr. Karl Schworing, Direktor des Gymnasiums an der Apostelkirche in Köln. **Lehrbuch der kleinsten Quadrate**. Mit drei Figuren. Freiburg im Breisgau 1909, Herder'sche Verlagshandlung.

Das Buch zerfällt in zwei Teile, die sich hinsichtlich der nötigen mathematischen Hilfsmittel unterscheiden, und zwar derart, daß — wie z. B. in dem bekannten Handbuche (1. Band Ausgleichungsrechnung) von W. Jordan — mit dem Einfacheren begonnen wird.

Im ersten Teil behandelt der Verfasser ausgehend vom arithmetischen Mittel das quadratische Mittel, den mittleren Fehler, das Fehlerfortpflanzungsgesetz und verschiedene Aufgaben der Ausgleichungsrechnung; der Begriff des Gewichts wird erst am Schluß eingeführt. Im zweiten Teil wird das Gaußsche Fehlergesetz besprochen, auf dessen Begründung der Verfasser absichtlich verzichtet. Nach Bemerkungen über die Gammafunktion und die Stirlingsche Reihe werden der wahrscheinliche und der durchschnittliche Fehler eingeführt, und die zwischen diesen und dem mittleren Fehler bestehenden Beziehungen abgeleitet. Zum Schluß wird noch ein anderes Fehlergesetz als das Gaußsche besprochen.

Das Buch wendet sich zunächst an Mathematiker, trotzdem wäre es wünschenswert gewesen, wenn die eigentliche Aufgabe der Ausgleichungsrechnung und das ihrer Lösung zugrunde gelegte Prinzip — z. B. im Anschluß an das über das arithmetische Mittel Gesagte — deutlich hervorgehoben worden wäre. Mit Rücksicht auf die Übersichtlichkeit wäre es angezeigt gewesen, die von Gerling eingeführte, in den für den Praktiker bestimmten Büchern über Ausgleichungsrechnung enthaltene Unterscheidung der Hauptformen der Aufgaben der Ausgleichungsrechnung wenigstens anzudeuten.

Die anregende, teilweise eigenartige Behandlung des Stoffes macht das Buch auch für den mit der Ausgleichungsrechnung bereits vertrauten Praktiker lesenswert.

Auf Seite 91 befindet sich ein — auch in der 5. Auflage 1904 des angeführten Werkes von Jordan vorhandener — Druckfehler; es muß dort heißen $w = 0,6744898 m$ (w wahrscheinlicher, m mittlerer Fehler).

Straßburg i./E.

P. WERKMEISTER.

Dr. A. M. Nell. Fünfstellige Logarithmen der Zahlen und der trigonometrischen Funktionen. 13. Auflage in völliger Neubearbeitung von Professor Ludwig Balsler. Gießen 1909, Emil Roth. Geb. *M* 2.—

Die vorliegende Tafel, deren erste Auflage im Jahre 1865 erschien, unterscheidet sich von anderen Logarithmentafeln hauptsächlich durch die eigenartige — erstmals von A. M. Nell angewandte — Anordnung der Proportionaltafelchen. Die Proportionalteile sind nicht wie sonst üblich untereinander, sondern nebeneinander und zwar für jede einzelne Horizontalreihe angegeben; die dadurch erreichte Bequemlichkeit bei ihrer Benutzung ist nicht unwesentlich.

Außer den fünfstelligen Tafeln der Logarithmen der Zahlen 1 bis 10000 und der trigonometrischen Funktionen sind auch vierstellige Tafeln für die Logarithmen der Zahlen 1 bis 10000, für die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen und für die natürlichen Werte der trigonometrischen Funktionen vorhanden. Von den verschiedenen kleineren Tafeln seien erwähnt: eine Tafel der Länge der Kreisbögen für den Halbmesser 1, eine solche der Logarithmen der Zinsfaktoren und eine Tafel der Logarithmen der Größen S und T ; bei der letzteren Tafel, die bekanntlich Verwendung findet bei der Berechnung der Logarithmen der Funktionen Sinus und Tangente kleiner Winkel nach der Maskelyneschen Regel, ist die sonst übliche, bequeme Anordnung verlassen, wonach sie bei der Tafel der Logarithmen der natürlichen Zahlen untergebracht ist.

Die Tafel ist für die Schule bestimmt, und dürfte dort besonders auch mit Rücksicht auf ihre gediegene Ausstattung gute Dienste leisten.

Straßburg i./E.

P. WERKMEISTER.

Neue Bücher.

Analysis.

1. THIELE, T. N., Interpolationsrechnung. Leipzig, Teubner. *M* 10.—
2. WELLISCH, SIEGMUND, Theorie u. Praxis der Ausgleichsrechnung. Erster Band: Elemente der Ausgleichsrechnung. Wien u. Leipzig, Fromme. K. 12 = *M* 10.—

Astronomie, Geodäsie, Nautik.

3. BALL, SIR ROBERT S., The story of the heavens. To be completed in 14 fortnightly parts, Part I. London, Cassell. 6 d.
4. BRENDEL, MART., Theorie der kleinen Planeten. 2. Tl. (Abh. königl. Ges. Wiss. Göttingen, mathem.-physikal. Klasse. Neue Folge. VI. Bd. Nr. 4.) Berlin, Weidmann. *M* 18.—
5. ENZYKLOPÄDIE der mathem. Wissenschaften m. Einschluß ihrer Anwendungen. VI. Bd. 1. Tl. A. Geodäsie u. Geophysik. 3. Heft. Leipzig, Teubner. *M* 4.—
6. HALE, G. E., The study of stellar evolution. 104 plates. London, Wesley. 16 s. 6 d.

7. JADANZA, NICODEMO, Trattato di geometria pratica. Torino. L. 20.
 8. PILKINGTON, W., Coordinate geometry applied to land-surveying. London, Spon. 1 s. 6 d.
 9. SCHWARZSCHILD, K., Über das System der Fixsterne. Aus populären Vorträgen. Leipzig u. Berlin, Teubner. M 1.—.
 10. WILLIAMSON, A. P. W., Text book of navigation and nautical astronomy. London, Griffin. 7 s. 6 d.

Darstellende Geometrie, graphische Methoden.

11. BERNHARD, MAX, Darstellende Geometrie m. Einschluß der Schattenkonstruktionen u. der Perspektive. Als Leitfaden f. den Unterricht an techn. Lehranstalten, Oberrealschulen und Realgymnasien, sowie zum Selbststudium hrsg. 3., verb. u. verm. Aufl. Stuttgart, Enderlen. M 5.20; geb. in Leinw. M 5.80.
 12. FÖRG, KARL, Die Bestimmung des Standpunktes u. der äußeren Orientierungselemente in der Photogrammetrie bei bekannter innerer Orientierung. Progr. Nürnberg, Schrag. M 1.—.
 13. TAPLA, TH., Vademecum der darstellenden Geometrie. Für Schüler gewerb. Lehranstalten, f. Schüler u. Absolventen des Gymnasiums, sowie f. Praktiker. 2., durchgeseh. Aufl. Wien, Fromme. Kart. M 5.—.
 14. TURNER, G. C., Graphical methods in applied mathematics. London, Macmillan. 6 s.
 15. WILSON, V. T., Descriptive geometry: a treatise from a mathematical standpoint, together with a collection of exercises and practical applications. New York, Wiley. Cloth. \$ 1.50.

Geschichte.

16. KÄSTNER, ABRAHAM GOTTHELF, Selbstbiographie u. Verzeichnis seiner Schriften nebst Heyne's Lobrede auf Kästner, hrsg. v. Rudolf Eckardt. Hannover, Geibel. Brosch. M 1.—.
 17. MACH, E., Die Geschichte u. die Wurzel des Satzes v. d. Erhaltung d. Arbeit. Vortrag. 2., unveränd. Abdruck nach der in Prag 1872 erschienenen 1. Aufl. Leipzig, Barth. M 2.—.
 18. SIMON, MAX, Geschichte der Mathematik im Altertum in Verbindung mit antiker Kulturgeschichte. Berlin, Cassirer. M 15.—.
 19. WOHLWILL, EMIL, Galilei u. sein Kampf f. die Copernikanische Lehre. 1. Bd. Bis zur Verurteilung der Copernican. Lehre durch die römischen Kongregationen. Hamburg, Voss. M 14.—.

Mechanik.

20. BJÖRNSTAD, EJNAR, Die Berechnung von Steifrahmen nebst anderen statisch unbestimmten Systemen. Berlin, Springer. M 9.—, geb. M 10.—.
 21. BRADN, ERNST, Druckschwankungen in Rohrleitungen m. Berücksichtigung der Elastizität der Flüssigkeit u. d. Rohrmaterials. Stuttgart, Wittwer. M 1.80.
 22. BRILL, ALEXANDER, Vorlesungen zur Einführung in die Mechanik raumerfüllender Massen. Leipzig u. Berlin, Teubner. M 7.—; geb. M 8.—.
 23. FÖPPL, AUG., Vorlesungen über technische Mechanik. Dritter Band. Festigkeitslehre. Vierte Auflage. Leipzig u. Berlin, Teubner. Geb. in Leinw. M 10.—.
 24. LANCHESTER, F. W., Äërodynamik. Ein Gesamtwerk über das Fliegen. Aus dem Englischen übersetzt v. C. und A. Runge. Erster Band. Mit Anhängen üb. die Geschwindigkeit u. den Impuls v. Schallwellen, über die Theorie des Segelfluges usw. Leipzig u. Berlin, Teubner. Geb. in Leinw. M 12.—.
 25. VERGNE, H., Contribution à la théorie des ondes liquides. Thèse. Paris, Gauthier-Villars.

26. WELLNER, GEO., Die Flugmaschinen. Theorie u. Praxis. Berechnung der Drachenfieger u. Schraubenflieger. Wien 1910, Hartleben. *M* 10.—; geb. *M* 12.—.
27. ZIMMERMANN, KARL, Der Dreigelenkbogen aus Stein, Beton oder Eisenbeton. Rechnerische u. zeichner. Verfahren; Näherungsformeln und Tabellenwerte, allgemeine Formeln zur Dimensionierung rechteckiger Fugen. Stuttgart, Deutsche Verlagsanstalt. *M* 5.—.

Physik.

28. ABEGG, R., u. SACKUR, O., Physikalisch-chemische Rechenaufgaben. (Sammlung Götschen. Nr. 445.) Leipzig, Götschen. Geb. *M* —.80.
29. COOPS, G. H., Übersichtliche Darstellung des 2. Hauptsatzes der Thermodynamik u. der daraus herzuleitenden Folgen. Mit e. empfehl. Worte von Wilh. Ostwald. Groningen, Noordhoff. *M* —.75.
30. ENZYKLOPÄDIE der mathem. Wissenschaften m. Einschluß ihrer Anwendungen. V. Bd.: Physik. 3. Tl. 2. Heft. Leipzig, Teubner. *M* 5.—.
31. FORTSCHRITTE, die, der Physik im J. 1908. Dargestellt v. der deutschen physikal. Gesellschaft. 64. Jahrg, 2. Abtlg. Elektrizität u. Magnetismus, Optik des gesamten Spektrums, Wärme. Braunschweig, Vieweg & Sohn. *M* 34.—.
32. —, die, der Physik im J. 1908. Dargestellt v. d. deutschen physikal. Gesellschaft. 64. Jahrg. 3. Abtlg. Kosmische Physik. Braunschweig, Vieweg & Sohn. *M* 32.—.
33. GREBE, L., Spektroskopie. (Aus „Natur u. Geisteswelt“, 284. Bändchen.) Leipzig 1910, Teubner. *M* 1.—; geb. *M* 1.25.
34. GREINACHER, HEINRICH, Die neueren Strahlen. Radium- (α - β - γ -) Strahlen, Kathoden-, Kanal-, Anoden-, Röntgen-Strahlen. In leichtfäßlichen Einzeldarstellungen, Stuttgart, Enke. *M* 4.—.
35. JÄGER, GUSTAV, Theoretische Physik. I. Mechanik u. Akustik. Vierte, verb. Aufl. (Sammlung Götschen 76.) Leipzig, Götschen. Geb. *M* —.80.
36. JANSCH, PAUL, Die Physik in der Volksschule. Lehrproben, Entwürfe, Stoffsammlungen mit angeschlossenen Fragen u. Aufgaben u. Lehrplänen. Köln, Bachem. *M* 4.—; geb. *M* 4.80.
37. —, Fragen u. Aufgaben aus der Physik der Volksschule. Köln, Bachem. *M* —.60.
38. KELVIN, LORD, Vorlesungen über Molekulardynamik u. die Theorie d. Lichts. Deutsch hrsg. v. B. Weinstein. Leipzig u. Berlin, Teubner. Geb. in Leinw. *M* 18.—.
39. KOHLRAUSCH, FRIEDRICH, Lehrbuch der praktischen Physik. Elfte, stark verm. Auflage. Leipzig u. Berlin 1910, Teubner. Geb. in Leinw. *M* 11.—.
40. PÖSCHL, VICT., Die Härte der festen Körper und ihre physikalisch-chemische Bedeutung. Dresden, Steinkopff. *M* 2.50.
41. RIES, CHR., Das Licht in seinen elektrischen und magnetischen Wirkungen. Versuchsergebnisse, Theorien u. Literatur. („Wissen u. Können“ Bd. 11.) Leipzig, Barth. Geb. in Leinw. *M* 5.—.
42. RIGHI, AUGUSTO, Strahlende Materie u. magnetische Strahlen. Mit Zusätzen des Verf. f. die deutsche Ausgabe. Aus dem Ital. v. Max Iklé. Leipzig, Barth. *M* 6.40; geb. in Leinw. *M* 7.20.
43. STEIN, ALFRED, Die Lehre von der Energie. (Aus „Natur und Geisteswelt“). 257. Bändchen.) Leipzig, Teubner. *M* 1.—; geb. in Leinw. *M* 1.25.
44. WALLENTIN, IGNAZ G., Lehrbuch der Physik. Ausg. C. Für Realgymnasien. Wien, Pichlers Wwe. & Sohn. Kr. 3.80.
45. WIEN, W., Über Elektronen. Vortrag, gehalten auf der 77. Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte in Meran. Zweite, die Fortschritte der Wissenschaft berücksichtigende Auflage. Leipzig u. Berlin, Teubner. *M* 1.40.
46. WINKELMANN, A., Handbuch der Physik. 2. Aufl. II. Bd. (Schluß). Akustik. Leipzig, Barth. *M* 25.—; geb. *M* 27.—.

Tafeln, Rechenapparate.

47. BECKER, C. F., and VAN ORSTRAND, C. E., Smithsonian mathematical tables. Hyperbolic functions. London, Wesley. 18 s.
48. CAJORI, FLORIAN, A history of the logarithmic slide rule and allied instruments. London, Constable. 4 s. 6 d.
49. COHN, B., Tafeln der Additions- und Subtraktions-Logarithmen auf sechs Dezimalen. Leipzig, Engelmann. *M* 4.—
50. JADANZA, NICODEMO, Tavole tacheometriche centesimali. Torino. L. 3.50.
51. JAHNKE, EUGEN, u. EMDE, FRITZ, Funktionentafeln mit Formeln und Kurven. (Mathem.-physikal. Schriften f. Ingenieure u. Studierende. hrsg. v. E. Jahnke, 5.) Leipzig u. Berlin, Teubner. Geb. in Leinw. *M* 6.—
52. LOHSE, O., Tafeln f. numerisches Rechnen m. Maschinen. Leipzig, Engelmann. *M* 12.—; geb. in Leinw. *M* 13.50.
53. NITZSCHE, H., u. SCHIEWIOR, G. Graphische Tafeln f. Eisenbahn-Konstruktionen, Leipzig, Engelmann. Geb. *M* 20.—
54. SCHWARZSCHILD, K., u. BIRCK, O., Tafeln zur astronomischen Ortsbestimmung im Luftballon bei Nacht, sowie z. leichten Bestimmung der mitteleuropäischen Zeit an jedem Orte Deutschlands. Mit e. Karte v. Mittel-Europa auf Pauspapier in 2 Exemplaren als Einlage. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. Kart. *M* 3.80.

Verschiedenes.

55. Annuaire pour l'an 1910, publié par le Bureau des Longitudes. Avec des notices scientifiques. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 1.50.
56. BRAUER, ERNST A., Grundriss der Turbinentheorie. Zweite, verm. Auflage. Leipzig, Hirzel. Geb. in Leinen *M* 6.—
57. BRIOSCHI, FRANCESCO, Opere matematiche. T. V. Milano, Hoepli.
58. BOLZA, OSKAR, Vorlesungen über Variationsrechnung. Umgearbeitete u. stark vermehrte deutsche Ausgabe der „Lectures on the Calculus of Variations“ desselben Verfassers. In drei Lieferungen. Dritte (Schluß-)Lieferung. Leipzig und Berlin, Teubner. *M* 5.—
59. BURALI-FORTI, C., e MARCOLOGO, R., Elementi di calcolo vettoriale con numerose applicazioni alla geometria, alla meccanica e alla fisica-matematica. Bologna, Zanichelli.
60. —, Omografie vettoriali con applicazioni alle derivate rispetto ad un punto e alla fisica-matematica. Torino, Petrini. L. 4.—
61. COFFIN, J. G., Vector Analysis. London, Chapman & Hall. 10 s. 6 d.
62. GANS, RICHARD, Einführung in die Vektoranalysis. Mit Anwendungen auf die mathematische Physik. 2. Auflage. Leipzig u. Berlin, Teubner. Geb. in Leinw. *M* 3.60.
63. IGNATOWSKY, W. v., Die Vektoranalysis und ihre Anwendung in der theoretischen Physik. In 2 Teilen. Teil I. Die Vektoranalysis. (Mathem.-physikalische Schriften für Ingenieure und Studierende, hrsg. v. E. Jahnke 6, 1.) Leipzig u. Berlin, Teubner. Geb. *M* 3.—
64. LORENZ, Die Änderung der Umlaufzahl und des Wirkungsgrades von Schiffschrauben mit der Fahrgeschwindigkeit. Berlin, Springer. *M* 1.—
65. MARTINI, Z. A., Teoria matematica del conto corrente e sue applicazioni. Livorno. L. —.50.
66. MITTEILUNGEN über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, insbesondere aus den Laboratorien der technischen Hochschulen, hrsg. vom Verein deutscher Ingenieure. Heft 71. Rogowski: Über das Streufeld und den Streuinduktionskoeffizienten eines Transformators mit Scheibenwicklung u. geteilten Endspulen.

67. MOHR, ERNST, Anleitung zum zweckmäßigen Rechnen bei chemischen präparativen Arbeiten. Braunschweig, Vieweg & Sohn. *M.* —.75; geb. *M.* 1.10.
68. PERRY, JOHN, Die Dampfmaschine (einschließlich der Dampfturbine) und Gas- und Ölmaschinen. Autorisierte, erweiterte deutsche Bearbeitung v. Hermann Meuth. Leipzig u. Berlin, Teubner. Geb. *M.* 22.—.
69. WANGERIN, A., Theorie des Potentials u. d. Kugelfunktionen. I. (Sammlung Schubert LVIII.) Leipzig, Göschen. Geb. in Leinw. *M.* 6.60.
70. WEYRAUCH, R., Hydraulisches Rechnen. Formeln und Zahlenwerte aus dem Gebiet des Wasserbaus f. die Praxis. Stuttgart, Wittwer. Geb. *M.* 3.—.

Eingelaufene Schriften.

[In dieser Abteilung werden alle eingelaufenen Schriften regelmäßig aufgeführt. Die Besprechung geeigneter Schriften bleibt vorbehalten. Rücksendung findet nicht statt.]

- ABEGG, R., u. SACKUR, O., Physikalisch-chemische Rechenaufgaben, s. N. B. („Neue Bücher“) Nr. 28.
- ANNUARIO biografico del Circolo matematico di Palermo 1909. (20 settembre 1909.) Palermo, via Ruggiero Settimo 30.
- ANNUAIRE pour l'an 1910, s. N. B. 55.
- BARTHÉLEMY, E., Le transport à Paris des forces motrices du Rhone. Aperçu critique du rapport de la commission de la houille blanche et des conditions financières de l'entreprise. Paris, Gauthier-Villars.
- BEUTEL, EUGEN, Algebraische Kurven. Erster Teil. Kurvendiskussion. (Sammlung Göschen Nr. 435.) Leipzig, Göschen. Geb. *M.* —.80.
- BOLZA, O., Vorlesungen über Variationsrechnung, s. N. B. 58.
- BRÄUER, E. A., Turbinen-Theorie, s. N. B. 56.
- BRILL, A., Vorlesungen zur Einführung in die Mechanik raumerfüllender Massen, s. N. B. 22.
- BRIOSCHI, FR., Opere matematiche, s. N. B. 57.
- BÖCHER, MAXIME, Einführung in die höhere Algebra. Deutsch v. Hans Beck. Mit einem Geleitwort von E. Study. Leipzig u. Berlin 1910, Teubner. Geb. *M.* 7.—.
- BOREL, EMILE, Die Elemente der Mathematik. Vom Verfasser genehmigte deutsche Ausgabe, besorgt von Paul Stäckel. II. Band. Geometrie. Leipzig u. Berlin 1909, Teubner. Geb. in Leinw. *M.* 6.40.
- BURALI-FORTI, C., e MARCOLONGO, R., Elementi di calcolo vettoriale, s. N. B. 59.
- , Omografie vettoriali, s. N. B. 60.
- COHN, B., Tafeln der Additions- und Subtraktions-Logarithmen, s. N. B. 49.
- DETTE, W., Analytische Geometrie der Kegelschnitte. Leipzig u. Berlin 1909, Teubner. Geb. in Leinw. *M.* 4.40.
- FÖPPL, A., Vorlesungen über technische Mechanik, III, s. N. B. 23.
- FRANKENBACH, FR. W., Lineare Erzeugung der Kegelschnitte u. auf ihr beruhende Ableitung der Kegelschnittsgleichungen. Ein Beitrag zur Lehre von den Kurven zweiter Ordnung zum Gebrauch an Realanstalten. Liegnitz, Krumbhaar. *M.* 1.—.
- GANS, R., Vektoranalysis, s. N. B. 62.
- GREBE, L., Spektroskopie, s. N. B. 33.
- GREINACHER, H., Die neueren Strahlen, s. N. B. 34.
- HEILERMANN-DICKMANN, Lehr- und Übungsbuch f. den Unterricht in der Algebra an den höheren Schulen. Neu bearbeitet von Karl Knops. I. Teil. 13. Aufl. Essen, Budeker. Geb. *M.* 2.80.

- JÄGER, G., Theoretische Physik. I., s. N. B. 35.
- JAHNKE, E., u. EMDE, F., Funktionentafeln, s. N. B. 51.
- JANSCH, P., Die Physik in der Volksschule, s. N. B. 36.
- , Fragen u. Aufgaben aus der Physik der Volksschule, s. N. B. 37.
- IGNATOWSKY, W. v., Die Vektoranalysis, s. N. B. 63.
- KÄSTNER, A. C., Selbstbiographie, s. n. B. 16.
- KELVIN-WEINSTEIN, Vorlesungen über Molekulardynamik u. die Theorie d. Lichts, s. N. B. 38.
- KILLING, W. u. HOVESTADT, H., Handbuch des mathematischen Unterrichts. Erster Band. Leipzig u. Berlin 1910, Teubner. Geb. *M* 10.—.
- KIRSCH, BERNH., Einfluß wiederholter Beanspruchung auf die Haftfestigkeit von Beton an Eisen mit reiner u. verrosteter Oberfläche. 7. Mitteilung aus dem mechanisch-technischen Laboratorium der k. k. technischen Hochschule in Wien. (Sonderabdruck aus der „Österreichischen Wochenschrift f. d. öffentlichen Baudienst“, Heft 17, Jahrg. 1909.) Wien, Lehmann & Wentzel.
- , Experimentelle Untersuchungen zu dem Maxwellschen Satze v. der Gegenseitigkeit der Verschiebungen. 9. Mitteilung aus d. mechanisch-technischen Laboratorium der k. k. technischen Hochschule in Wien. (Sonderabdruck aus der „Österreichischen Wochenschrift f. den öffentlichen Baudienst“, Heft 36, Jahrg. 1909.) Ebenda.
- KLEINSCHMIDT, MAX, Elementarer Beweis des Fermat'schen Satzes. Rostock, Boldt. *M* 1.50.
- KNOPS, K. u. MEYER, ED., Lehrbuch der Physik mit Einschluß der Chemie f. höhere Mädchenschulen. Nach Koppe-Husmanns Physik bearbeitet. Heft 1 f. Klasse III der höheren Mädchenschule. Essen, Bädcker. *M* 1.50.
- , Dasselbe. Heft 2 für Klasse II der höheren Mädchenschule. Ebenda. *M* 1.50.
- , Dasselbe. Heft 3 für Klasse I der höheren Mädchenschule. Ebenda. *M* 1.50.
- , Lehr- und Übungsbuch für den Unterricht in der Mathematik an den höheren Mädchenschulen, Lyceen und Studienanstalten. Nach Heilermann-Dickmanns Algebra und Koppe-Dickmanns Geometrie bearb. Heft 1 f. Klasse IV der höheren Mädchenschule. Essen, Bädcker. *M* 1.20.
- , Dasselbe. Heft 2 für Klasse III der höheren Mädchenschule und Klasse VI der Studienanstalten. Ebenda. *M* 1.20.
- , Dasselbe. Heft 3 für Klasse II der höheren Mädchenschule. Ebenda. *M* 1.20.
- , Dasselbe. Heft 4 f. Klasse I der höh. Mädchenschule. Ebenda. *M* 1.20.
- KOHLRAUSCH, FR., Lehrbuch der praktischen Physik, s. N. B. 39.
- KOPPE-HUSMANN, Lehrbuch der Physik mit Einschluß der Chemie und mathemat. Geographie. 33. Aufl. des ursprünglichen Werks. Ausg. B in zwei Lehrgängen. I. Teil: Lehrgang f. die Unterstufe höherer Lehranstalten. 10. Aufl. v. Karl Knops,
- , Lehrbuch der Physik mit Einschluß der mathemat. Geographie. (28. Aufl. des ursprünglichen Werks). Ausg. B in zwei Lehrgängen. II. Teil: Lehrgang für die Oberstufe (größere Ausgabe). 7. Aufl. von Karl Knops. Essen, Bädcker. Geb. *M* 5.20.
- KRIENELKE, KARL, J. H. Lamberts Philosophie der Mathematik. Halle a. S. 1909 (Berlin, Mayer & Müller). *M* 2.40.
- LANCHESTER-RUNGE, Aërodynamik, s. N. B. 24.
- LANDAU, EDMUND, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. In 2 Bänden. Erster Band. Leipzig 1909, Teubner. *M* 20.—; geb. *M* 21.—.
- , Dasselbe. Zweiter Band. Ebenda. 1909. *M* 14 —; geb. *M* 15.—.

- LIETZMANN, WALTHER, Stoff u. Methode im mathematischen Unterricht der nord-deutschen höheren Schulen auf Grund der vorhandenen Lehrbücher. (Abhandlungen üb. den mathem. Unterricht in Deutschland, veranlaßt durch die Internationale Mathem. Unterrichtskommission, hrsg. v. F. Klein, Bd. 1, Heft 1.) Mit einem Einführungswort v. F. Klein. Leipzig u. Berlin 1909, Teubner. *M* 2.—.
- LIEWALD, KURT, die Anschaulichkeit im geometrischen Anfangsunterricht. (Sonderabdruck aus dem 40. Jahrgang der Zeitschr. f. mathem. u. naturw. Unterricht.) Leipzig u. Berlin 1909, Teubner. *M* —.80.
- LEON, ALFONS, Zur Theorie der Verbundkörper. (Sonderabdruck aus: Armierter Beton, Heft 9 u. 10, Sept. u. Okt. 1909.) Berlin, Springer.
- , Neue Versuche an Betoneisenbalken. (Sonderabdruck aus: Österreichische Wochenschrift f. den öffentlichen Baudienst, Heft 40, Jahrgang 1909.) Wien Selbstverlag.
- , Zur Architektur der Bau- und Maschinenkonstruktionen. Vortrag, gehalten in der Fachgruppe der Maschinen-Ingenieure des Öst. Ingen.- u. Arch.-Vereines am 19. Januar 1909. (Sonderabdruck aus der Zeitschr. des öst. Ingen.- u. Arch.-Vereines, Jahrg. 1909, Nr. 20.) Wien, Selbstverlag.
- , Baugesetze in Natur und Technik. Vortrag, gehalten den 3. März 1909. Vorträge des Vereines zur Verbreitung naturwissenschaftl. Kenntnisse in Wien. 49. Jahrg., Heft 14. Wien, Selbstverlag des Vereines.
- , Über die Spannungsstörungen beim Verbund verschiedener Materialien. Aus den Mittheilungen des mechanisch-technischen Laboratoriums der k. k. Technischen Hochschule in Wien, 1908. (Internationaler Verband f. d. Materialprüfungen der Technik. V. Kongreß, Kopenhagen, 1909. VIII 10.) Wien, Lehmann & Wentzel.
- LOHSE, O., Tafel f. numerisches Rechnen mit Maschinen, s. N. B. 52.
- MEYER, W. FRANZ, Allgemeine Formen- und Invariantentheorie. I. Bd. Binäre Formen. (Sammlung Schubert XXXIII.) Leipzig, Göschen, Geb. *M* 9.60.
- MITTHEILUNGEN über Forschungsarbeiten, s. N. B. 66.
- MÜSEBECK, CARL, Aufgaben für den Unterricht in der Planimetrie, enthaltend Aufgaben zu Teil I.: Ausgabe A des Leitfadens der Elementar-Mathematik von H. Lieber u. F. von Lüthmann. Berlin 1908, Simon Nf. *M* 1.50.
- , Aufgabe f. den Unterricht in der Geometrie u. ebenen Trigonometrie, enthaltend Aufgaben zu Teil III: Ebene Trigonometrie desselben Leitfadens. Ebenda. *M* 1.50.
- , Aufgaben f. den Unterricht in der Stereometrie und sphärischen Trigonometrie, enthaltend Aufgaben zu Teil III desselben Leitfadens. Ebenda. *M* 1.80.
- , Aufgaben f. den Unterricht in der analytischen Geometrie, enthaltend Aufgaben zu Teil III desselben Leitfadens. Ebenda. *M* 1.80.
- , Auflösungen zu den Aufgaben f. den Unterricht in der analytischen Geometrie, enthaltend Aufgaben zu Teil III desselben Leitfadens. Ebenda, 1909. *M* 1.—.
- NÖLKE, FR., Die Entstehung der Eiszeiten. Sonderabdruck aus den „Deutschen Geographischen Blättern“, Bd. XXXII, 1909.
- , Neue Erklärung der Entstehung der irdischen Eiszeiten. Sonderabdruck aus den Abh. d. Nat. Ver. Brem., Bd. XX, Heft 1. Bremen, Illing & Lüken.
- , Neue Erklärung des Ursprungs der Kometen. Sonderabdruck aus den Abh. d. Nat. Ver. Brem., Bd. XX, Heft 1. Ebenda.
- PARRIS, MARION, Total utility and the economic judgement compared with their ethical counterparts. A dissertation presented to the Faculty of Bryn Mawr College for the degree of Doctor of Philosophy. Philadelphia, Winston Co.
- PERRY, JOHN, Die Dampfmaschine usw, s. N. B. 68.
- PIZZ, H., Geometrie. Ein Wiederholungs- und Aufgabenbuch f. d. Unterricht an gewerblichen Lehranstalten u. Fortbildungsschulen. 2. verb. Aufl. Gießen, Roth. *M* —.80.

- PROGRAMM des Staatlichen Technikums zu Hamburg. Hamburg, September 1909.
- RENCZEDER, HEINRICH, Einiges über Traß-, Traßzement- und Zementkalkmörtel. 8. Mitteilung aus dem mechanisch-technischen Laboratorium der k. k. technischen Hochschule in Wien. (Sonderabdruck aus der „Österreichischen Wochenschrift f. den öffentlichen Baudienst“, Heft 28, Jahrg. 1909) Wien, Lehmann & Wentzel.
- REYE, THEODOR, Die Geometrie der Lage. Vorträge. Dritte Abteilung. Vierte, umgearbeitete u. vermehrte Auflage. Leipzig 1910, Kröner.
M 8.—; geb. in Halbfranz M 10.—.
- SCHUB, FRIEDRICH, Grundlagen der Geometrie. Leipzig u. Berlin 1909, Teubner.
M 6.—; gcb. M 7.—.
- SCHWAB, KARL, Lehr- und Übungsbuch der Geometrie. Erster Teil: Ausgabe A; Für die mittleren Klassen der Realanstalten. Wien, Tempsky; Leipzig, Freytag.
Geb. K. 4.80 = M 4.—.
- SCHWARZSCHILD, K., Über das System der Fixsterne, s. N. B. 9.
- SCHWERING, K., Stereometrie f. höhere Lehranstalten. 3. Aufl. Freiburg i. B., Herder.
- SERRET, J. A., u. SCHEFFERS, G., Lehrbuch der Differential- u. Integralrechnung. Nach Axel Harnacks Übersetzung. Neu bearbeitet v. Georg Scheffers. III. Bd. Differentialgleichungen und Variationsrechnung. 3. Auflage. Leipzig 1909, Teubner.
Geb. M 13.—.
- SIMON, M., Geschichte der Mathematik im Altertum, s. N. B. 18.
- SMITH, EDWIN, William Eimbeck. Read before the Philosophical Society of Washington. May 22, 1909. (Phil. Soc. Washington Bull. vol. XV, pp. 127—131.) Washington, July 1909.
- SOMMERMEYER, E., $x^n + y^n = z^n$ in ganzen Zahlen u. der große Fermatsche Satz.
- SONNE, JULIUS, Praktischer Lehrgang der Arithmetik. Ein Hilfsbuch in ausführlicher Darstellung f. Lehrende u. Lernende. Berlin 1910, Salle. M 2.40.
- STEIN, A., Die Lehre v. der Energie, s. N. B. 43.
- STURM, RUDOLF, Die Lehre v. den geometrischen Verwandtschaften. IV. Bd. Die nicht linearen u. die mehrdeutigen Verwandtschaften zweiter und dritter Stufe. (Teubners Sammlung Bd. XXVII, 4.) Leipzig u. Berlin 1909, Teubner. Geb. M 20.—.
- THIELE; T. N., Interpolationsrechnung, s. N. B. 1.
- THEIME, H., Leitfaden der Mathematik f. Realanstalten. I. Teil: Die Unterstufe. 4. Aufl. Wien, Tempsky. Geb. M 1.80.
- VAERTING, MARIE, Die hyperbolischen Funktionen und das Dreieck. Bonn, Hauptmann.
- VOGT, WOLFGANG, Synthetische Theorie der Cliffordschen Parallelen u. der linearen Linienörter des elliptischen Raumes. Leipzig u. Berlin 1909, Teubner. M 2.40.
- WALLENTIN, S. G., Lehrbuch der Physik, s. N. B. 44.
- WANGERIN, A., Theorie des Potentials u. der Kugelfunktionen, s. N. B. 69.
- WELLSCH, S., Theorie u. Praxis der Ausgleichungsrechnung, I, s. N. B. 2.
- WEYRAUCH, R., Hydraulisches Rechnen, s. N. B. 70.
- WIEN, W., Über Elektronen, s. N. B. 45.
- ZINNER, E., Über die sekularen Störungen im planetarischen Rotationsproblem. (Meddelande från Lunds Astronomiska Observatorium No. 40). Lund 1909.

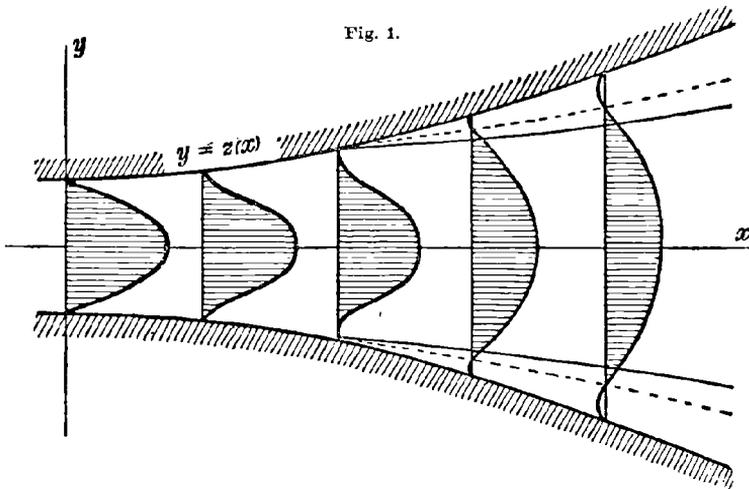
Laminare Strömung in Kanälen wechselnder Breite.

Von H. BLASIUS in Berlin.

1. Bei der zweidimensionalen laminaren Strömung in einem Kanal der Breite $2z$, — z gegebene Funktion von x , — wird man bei kleinen Breitenänderungen die Geschwindigkeitsverteilung in erster Annäherung an jeder Stelle dem parabolischen Profil entsprechend annehmen, das der dort vorhandenen Breite entspricht. Bei dem Durchflußvolumen M wäre dann:

$$u = \frac{3}{4} \frac{M}{z} \left(1 - \frac{y^2}{z^2}\right).$$

Die Zusatzglieder, die hinzukommen müssen, um dies zu einer besseren Lösung der hydrodynamischen Gleichungen zu machen, ver-



sprechen nun, uns Aufschluß über den Vorgang der Ablösung eines Strahles im konisch erweiterten Rohr zu geben: In solchem Rohr haben wir infolge der Geschwindigkeitsverminderung steigenden Druck zu erwarten, der sich über das Reibungsdruckgefälle überlagert. Resultiert hieraus ein Druckanstieg in Richtung der Strömung, so liegt nach Prandtl¹⁾ die Möglichkeit vor, daß der entgegenstehende Druck die Wasserteilchen am Rande zur Umkehr bringt, da deren geringe Geschwindigkeit durch Verzögerung leicht aufgebraucht wird. Eine

1) L. Prandtl: Verhandlungen des internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg 1904. S. 484. Ausführungen hierzu bei: H. Blasius; Zeitschrift f. Mathematik u. Physik 55 (1908), S. 1. E. Boltze: Grenzsichten an Rotationskörpern. Diss. Göttingen 1908.

solche Umkehr, Rückströmung am Rande, wie sie die Geschwindigkeitsprofile der Figur zeigen, ist aber das, was wir als Strahlablösung beobachten.¹⁾ Aus der Wirkung der Reibung wird sich ergeben, daß der Gegendruck erst eine gewisse Größe erreichen muß, ehe dieser Effekt eintritt.

Die Korrektionsglieder berechnen wir durch systematische Vernachlässigung²⁾ aus den hydrodynamischen Grundgleichungen:

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + k \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Grenzbedingungen:

$$\text{für } x = 0: \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad v = 0$$

$$\text{für } y = z(x): \quad u = 0, \quad v = 0$$

Durchflußmenge:

$$\int_{-z}^{+z} u \, dy = M$$

gegeben.

$z(x)$ soll nun mit x langsam variieren: Hier haben wir zwei Vernachlässigungsarten zu unterscheiden: 1. Jede Differentiation nach x erniedrigt die Größenordnung, z. B. $z = a + b e^{\varepsilon x}$, $\varepsilon =$ kleine Größe. 2. Alle Differentialquotienten sind gleicher Größenordnung, z. B. $z = a + \varepsilon \sin bx$. Der Bequemlichkeit wegen nehmen wir die erste Art an.

Mit z' wird auch v klein wie ε bleiben, und überhaupt wird nun auch in u und v jede Differentiation von x Erniedrigung der Größenordnung zur Folge haben. Unsere Grundgleichungen lauten also, mit nach der Größe geordneten Gliedern:

$$\underbrace{\frac{\partial p}{\partial x} - k \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{\sim 1} + \underbrace{\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right)}_{\sim \varepsilon} - \underbrace{k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\sim \varepsilon^2} = 0$$

$$\underbrace{\frac{\partial p}{\partial y} - k \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}_{\sim \varepsilon} + \underbrace{\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right)}_{\sim \varepsilon^2} - \underbrace{k \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}_{\sim \varepsilon^3} = 0$$

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}}_{\sim \varepsilon} = 0.$$

1) Einen ähnlichen Vorgang bei zeitlich veränderlicher Strömung s. Lamb Hydrodynamics S. 561/62 Kap. XI Art. 330. — Wenn sich Wasser in einem Glasrohr unter Druckschwankungen hin und her bewegt, so beobachtet man an schwimmenden Teilchen ein Voreilen der Randschichten in der Phase.

2) Im Gegensatz zu den oben zitierten Arbeiten wird hier die Reibung nicht als klein vorausgesetzt; die Vernachlässigung knüpft hier an die Kleinheit der Differentialquotienten von z nach x an.

3. Die Glieder höchster Größenordnung allein, die Hauptglieder der betr. Differentialgleichung, müssen die oben hingeschriebene erste Näherung ergeben, die wir hier noch einmal systematisch ableiten:

Aus:

$$\underbrace{\frac{\partial p_1}{\partial x} - k \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}}_1 = 0 \qquad \underbrace{\frac{\partial p_1}{\partial y} - k \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}}_\varepsilon = 0$$

$$\underbrace{\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}}_\varepsilon = 0.$$

folgt durch Elimination von p_1 und Vernachlässigung¹⁾ von $\frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y^2}$:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 0$$

oder unter Rücksicht auf die Symmetrie:

$$u_1 = A(x) + B(x) \cdot y^2$$

Hieraus und aus der dritten Gleichung folgt, wenn Striche Differentiation nach der angehängten Unabhängigen x bedeuten:

$$v_1 = - \int_0^y (A'_x + B'_x y^2) dy = - A'_x y - \frac{1}{3} B'_x y^3.$$

Die Grenzbedingungen geben zur Bestimmung der Integrationskonstanten $A(x)$ und $B(x)$:

also: $A_x + B_x z^2 = 0 \qquad A'_x + \frac{1}{3} B'_x z^2 = 0,$

$$A_x = \frac{\alpha}{z} \qquad B_x = - \frac{\alpha}{z^3}.$$

Die zurückgebliebene Konstante α steht mit der gegebenen Durchflußmenge in Beziehung durch:

Wir erhalten also: $\alpha = \frac{3}{4} M.$

$$u_1 = \frac{\alpha}{z} \left(1 - \frac{y^2}{z^2}\right) \qquad v_1 = \frac{\alpha z' y}{z^2} \left(1 - \frac{y^2}{z^2}\right).$$

4. Aus den beiden ersten Gleichungen wird nun der Druck berechnet:

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} = - \frac{2 \alpha k}{z^2} \qquad \frac{\partial p_1}{\partial y} = - 6 \frac{\alpha k z' y}{z^4}.$$

1) Die verschiedene Größenordnung der Glieder in den drei Gleichungen, die eigentlich u_1, v_1, p_1 simultan bestimmen, bewirkt hier, daß u_1 vor v_1 berechnet werden kann. Nur in der Erfüllung der Grenzbedingungen tritt keine

Trennung ein, wenn man nicht die Gleichung $\frac{\partial}{\partial x} \int_0^z u dy = 0$ heranziehen will.

wobei $\frac{\partial p_1}{\partial x}$ nur in der Größenordnung 1 richtig ist, während $\frac{\partial p_1}{\partial y}$ schon z' enthält. Das hieraus zu integrierende:

$$p_1 = -2 \alpha k \int \frac{dx}{z^3} - 3 \frac{\alpha k z' y^2}{z^4}$$

ist demnach zwar noch in keiner Größenordnung vollständig, wir dürfen aber beim Einsetzen in die Gleichungen der späteren Näherungen trotzdem nicht das zweite Glied von vornherein gegen das erste streichen, da sonst $\frac{\partial p_1}{\partial y} - k \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} = 0$ nicht mehr innerhalb seiner Größenordnung ε richtig wäre. Noch aus der zweiten Näherung wird $\frac{\partial p_2}{\partial x} \sim \varepsilon$, $p_2 \sim 1$, aber unabhängig von y , aus der dritten Näherung sind noch zu z' proportionale, von y unabhängige Anteile in p zu erwarten. Dagegen hat der Anteil zu $\frac{\partial p_1}{\partial x}$, den das zweite Glied liefert, erst auf die übernächste Näherung (u_3) Einfluß. Diese komplizierten Verhältnisse sind durch die verschiedene Größenordnung der Hauptglieder in den Grundgleichungen bedingt.

5. Setzen wir zur weiteren Annäherung:

$$u = u_1 + u_2 \quad v = v_1 + v_2 \quad p = p_1 + p_2,$$

so bleiben u_2 , v_2 , p_2 wie üblich nur in den Hauptgliedern der Grundgleichungen (2) stehen, und was von u_1 , v_1 , p_1 nicht infolge der Grundgleichungen (3) der ersten Näherung fortfällt, wird zur „eingepprägten Kraft“ für die zweite Näherung. Wir erhalten:

$$\frac{\partial p_2}{\partial x} - k \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \varrho \left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = 0 \quad (\sim \varepsilon)$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial y} - k \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} + \varrho \left(u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) = 0 \quad (\sim \varepsilon^2)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0 \quad (\sim \varepsilon^2)$$

Aus der zweiten Gleichung folgt, daß $\frac{\partial p_2}{\partial x}$ von y unabhängig wird, wir können also schreiben:

$$k \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = \varrho \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = -\varrho \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\alpha^2 z'}{z^3} \left(1 - \frac{y^2}{z^2} \right)^2 \right\}.$$

Hieraus folgt:

$$u_2 = \frac{\varrho \alpha^2 z'}{k z} \left(\frac{1}{6} \frac{y^4}{z^4} - \frac{1}{30} \frac{y^6}{z^6} \right) + A_x + B_x \cdot y^2$$

v_2 ergibt sich aus der dritten Gleichung:

$$v_2 = -\frac{\varrho \alpha^2 z''}{k} \left(\frac{1}{30} \frac{y^5}{z^5} - \frac{1}{210} \frac{y^7}{z^7} \right) + \frac{\varrho \alpha^2 z'^2}{k z} \left(\frac{1}{6} \frac{y^5}{z^5} - \frac{1}{30} \frac{y^7}{z^7} \right) - A'_x y - \frac{1}{3} B'_x y^3.$$

Zur Bestimmung von A_x und B_x (höhere Glieder der Integrationskonstanten) folgt aus den Grenzbedingungen:

$$\frac{2}{15} \frac{\varrho \alpha^2 z'}{kz} + A_x + B_x z^2 = 0$$

$$-\frac{1}{35} \frac{\varrho \alpha^2 z''}{k} + \frac{2}{15} \frac{\varrho \alpha^2 z'^2}{kz} = A'_x z + \frac{1}{3} B'_x z^3.$$

Man verifiziert, daß hieraus folgt:

$$A = \frac{1}{42} \frac{\varrho \alpha^2 z'}{kz} \qquad B = -\frac{11}{70} \frac{\varrho \alpha^2 z'}{kz^3}.$$

Der Ausdruck für u_2 lautet hiernach vollständig:

$$u_2 = \frac{\varrho \alpha^2 z'}{kz} \left(\frac{1}{42} - \frac{11}{70} \frac{y^2}{z^2} + \frac{1}{6} \frac{y^4}{z^4} - \frac{1}{30} \frac{y^6}{z^6} \right).$$

6. Zur Berechnung des Druckes p_2 liefert nun die erste Gleichung dieser Näherung die noch fehlenden Anteile der Ordnung ε in $\frac{\partial p}{\partial x}$, der Ordnung 1 in p :

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{24}{35} \frac{\varrho \alpha^2 z'}{z^5}$$

$$p_2 = -\frac{12}{35} \frac{\varrho \alpha^2}{z^2}.$$

Vollständig in den Gliedern größter Ordnung ist also:

$$p = -2\alpha k \int \frac{dx}{z^3} - \frac{12}{35} \frac{\varrho \alpha^2}{z^2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{2\alpha k}{z^3} + \frac{24}{35} \frac{\varrho \alpha^2 z'}{z^5}.$$

Ebenso können wir aus 3. und 5. $u_1 + u_2$ und $v_1 + v_2$ zusammenstellen. Die ferneren Näherungen sollen nicht weiter berechnet werden.

7. Ablösung eines Strahles tritt ein, wenn für $y = z$:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_z = \frac{\alpha}{z^2} \left(-2 + \frac{16}{105} \frac{\varrho \alpha z'}{k} \right) = 0$$

ist. Als „Ablösungsgleichung“ erhalten wir also:

$$\frac{\varrho \alpha z'}{k} = \frac{105}{8}$$

oder mit $\alpha = \frac{3}{4} M$:

$$\frac{\varrho M z'}{k} = \frac{35}{2}.$$

Dagegen tritt Druckgefälle Null in Richtung der Strömung schon ein für:

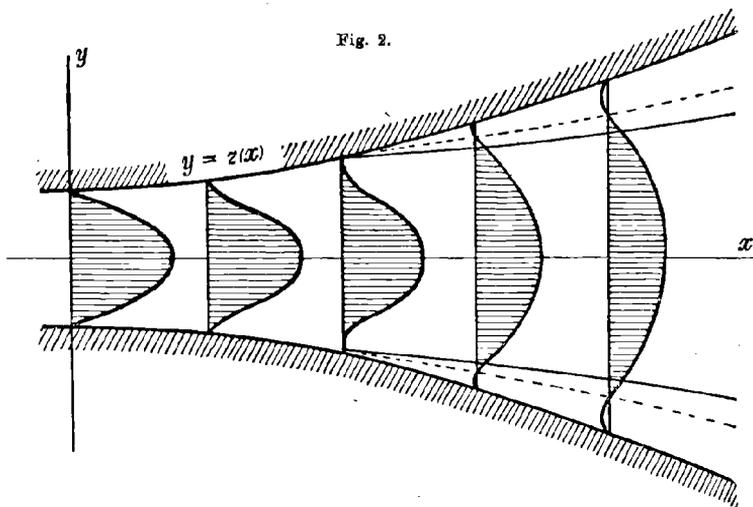
$$\frac{\rho \alpha z'}{k} = \frac{35}{12} \quad \text{oder} \quad \frac{\rho M z'}{k} = \frac{35}{9}.$$

Hier ist: $(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})_z = 0$ und $(\frac{\partial u}{\partial y})_z$ hat den Wert $-\frac{14}{9} \frac{\alpha}{z^2}$; das Geschwindigkeitsprofil kann also einen gewissen Gegendruck aushalten, ehe es zur Strahlbildung kommt.

Für Wasser von 20° ist $\frac{k}{\rho} = 0,01 \frac{\text{cm}^2}{\text{sec}}$, also für den Grenzfall der Ablösung

$$M z' = 0,175 \frac{\text{cm}^2}{\text{sec}}.$$

Bei größerer Wassermenge wird also der Grenzwinkel $\arctg z'$ kleiner.



8. In gleicher Weise behandeln wir die Röhre von kreisförmigem Querschnitt, deren Radius R gegebene Funktion von x ist. Der Unterschied gegen das zweidimensionale Problem besteht zunächst darin, daß das Reibungsglied der ersten Grundgleichung (Nr. 2) (Koordinaten hier x und r) unter Vernachlässigung des $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ die Form hat:

$$k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{k}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right).$$

Zur Berechnung von u_1 erhalten wir so:

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{k}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_1}{\partial r} \right),$$

und da aus der zweiten Gleichung (vgl. 3) wieder folgt, daß $\frac{\partial p_1}{\partial x}$ in erster Ordnung von y unabhängig ist, so ist:

$$u_1 = \frac{\alpha}{R^2} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} = -\frac{4k\alpha}{R^4},$$

wobei α mit der Durchflußmenge M verknüpft ist durch:

$$\alpha = \frac{2}{\pi} M.$$

v_1 wird aus der Kontinuitätsgleichung berechnet, die hier lautet:

$$r \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial r v_1}{\partial r} = 0,$$

also durch Integration:

$$v_1 = \frac{\alpha R' r}{R^3} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right).$$

Daß das so berechnete v_1 die Grenzbedingung $v = 0$ für $r = R$ von selbst erfüllt, rührt daher, daß durch die Kontinuitätsgleichung, aus der ja v berechnet wurde, die betreffende Grenzbedingung verknüpft ist mit der Konstanz der Durchflußmenge durch einen Rohrquerschnitt, die wir durch Wahl des Faktors $\frac{\alpha}{R^2}$ in u_1 erreicht hatten.

9. Zur Berechnung des u_2 der zweiten Näherung ist zu benutzen, daß $\frac{\partial p}{\partial x}$ auch in zweiter Näherung von r unabhängig ist (vgl. 5), daß wir demnach schreiben können:

$$\varrho \left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial r} \right) = -\frac{\partial p_2}{\partial x} + \frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_2}{\partial r} \right)$$

oder mit $P_x = \frac{\partial p_2}{\partial x}$:

$$\frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_2}{\partial r} \right) = P_x - \frac{2 \varrho \alpha^2 R'}{R^5} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^2$$

und durch Integration mit Q_x als Integrationskonstante:

$$k \cdot u_2 = Q_x + \frac{1}{4} P_x r^2 - \frac{\varrho \alpha^2 R'}{R^5} \left(\frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2} - \frac{1}{4} \frac{r^4}{R^4} + \frac{1}{18} \frac{r^6}{R^6} \right).$$

Aus der Kontinuitätsgleichung folgt nun:

$$r \cdot v_2 = - \int_0^r r \frac{\partial u_2}{\partial x} dr$$

oder:

$$k v_2 = -\frac{1}{2} Q_x' r - \frac{1}{16} P_x' r^3 + \frac{\varrho \alpha^2 R'}{R^2} \left(\frac{1}{8} \frac{r^3}{R^3} - \frac{1}{24} \frac{r^5}{R^5} + \frac{1}{144} \frac{r^7}{R^7} \right) - \frac{\varrho \alpha^2 R'^2}{R^3} \left(\frac{5}{8} \frac{r^3}{R^3} - \frac{7}{24} \frac{r^5}{R^5} + \frac{1}{16} \frac{r^7}{R^7} \right).$$

Aus den Grenzbedingungen $u_2 = 0$, $v_2 = 0$ für $r = R$ folgt nun:

$$Q_x + \frac{1}{4} P_x R^2 = \frac{11}{36} \frac{\varrho \alpha^2 R'}{R^3}$$

$$\frac{1}{2} Q_x' + \frac{1}{16} P_x' R^2 = \frac{13}{144} \frac{\varrho \alpha^2 R'}{R^3} - \frac{19}{48} \frac{\varrho \alpha^2 R'^2}{R^4}$$

aufgelöst durch:

$$P_x = \frac{\varrho \alpha^2 R'}{R^5} \quad Q_x = \frac{1}{18} \frac{\varrho \alpha^2 R'}{R^3}.$$

Hiernach ist der endgültige Ausdruck für u_2 :

$$u_2 = \frac{\varrho \alpha^2 R'}{k R^3} \left(\frac{1}{18} - \frac{1}{4} \frac{r^2}{R^2} + \frac{1}{4} \frac{r^4}{R^4} - \frac{1}{18} \frac{r^6}{R^6} \right).$$

Mit P_x haben wir gleichzeitig das Druckgefälle von p_2 bestimmt:

$$\frac{\partial p_2}{\partial x} = \frac{\varrho \alpha^2 R'}{R^5} \quad p_2 = -\frac{1}{4} \frac{\varrho \alpha^2}{R^4}.$$

Die vollständigen Werte von u , v , p können wir nun aus (8) und (9) zusammenstellen.

10. Als Gleichung für den Eintritt der Strahlbildung haben wir hier:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=R} = \frac{\alpha}{R^3} \left(-2 + \frac{1}{6} \cdot \frac{\varrho \alpha R'}{k R} \right) = 0,$$

also die „Ablösungsgleichung“:

$$\frac{\varrho \alpha R'}{k R} = 12$$

oder mit $\alpha = \frac{2}{\pi} M$:

$$\frac{\varrho M R'}{k R} = 6\pi.$$

Für Wasser (vgl. 7):

$$\frac{M R'}{R} = 0,19 \frac{\text{cm}^2}{\text{sec}}.$$

Druckgefälle Null in Richtung der Strömung findet statt bei:

$$\frac{\partial p_1 + p_2}{\partial x} = -\frac{4\alpha k}{R^4} + \frac{\varrho \alpha^2 R'}{R^5} = 0$$

oder:

$$\frac{\varrho \alpha R'}{k R} = 4 \quad \frac{\varrho M R'}{k R} = 2\pi.$$

Steigender Druck bedingt auch hier noch nicht sofort Ablösung, sie tritt erst ein, wenn die Neigung R' der Rohrwand dreimal größer ist, als in dem Falle, wo das Druckgefälle verschwindet. Sonst genügt die Reibung gegen die inneren Schichten, um die Wasserteilchen am Rande der Röhre auch gegen den Druck durchzuziehen.

Hierdurch ist für Flüssigkeiten beliebig großer Reibung der Eintritt der Strahlbildung berechnet, sofern R' klein ist. Es sei bemerkt,

daß dies Resultat nur auf Strömungen inkompressibler Flüssigkeiten Anwendung findet. Die Strömung z. B. von Gasen in Lavalschen Düsen geht dagegen sogar unter Druckabnahme vor sich, wobei zur Ablösung der in (1) beschriebenen Art keine Veranlassung vorliegt.

11. Das zweite Glied der Gleichung für den Druck:

$$p = -4\alpha k \int \frac{dx}{R^4} - \frac{1}{4} \frac{\rho \alpha^2}{R^4}$$

ist dem Quadrat der mittleren Geschwindigkeit U proportional¹⁾:

$$U = \frac{M}{\pi R^2} = \frac{\alpha}{2R^2},$$

$$p = -\frac{8}{\pi} M k \int \frac{dx}{R^4} - 2 \cdot \frac{\rho U^2}{2}.$$

Der in der Encyklopädie¹⁾ α genannte Koeffizient ist also bei laminarer Strömung in Röhren gleich 2. Dieses zweite Glied von p setzt sich übrigens gemäß seiner Entstehung (9) aus Geschwindigkeitsdruck *und* dem Reibungsanteil von u_2 zusammen. Die Anteile sind in verschiedenen Abständen r verschieden.

Ebenso kann man auch beim zweidimensionalen Problem (6) das zweite Druckglied ausrechnen und findet es zu:

$$-\frac{54}{35} \cdot \frac{\rho M^2}{8z^2} = -1,54 \cdot \frac{\rho U^2}{2}.$$

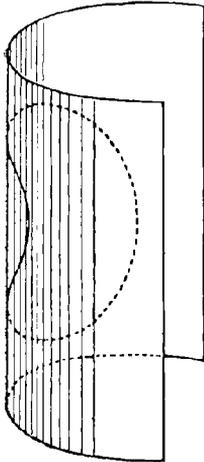
Eine Darstellung der Gleichgewichtsform von Fäden, deren Dichte eine Funktion der Fadenlänge ist und ein mechanisches Integrationsverfahren gewisser Differentialgleichungen.

Von Oberlehrer L. HÄNERT in Wahlstatt bei Liegnitz.

Ein ausdehnbarer Faden, dessen Dichte eine beliebig gegebene Funktion der Fadenlänge ist, nimmt unter dem Einfluß der Schwere eine bestimmte Gleichgewichtsform an, die von jener Funktion abhängig ist. Im Folgenden wollen wir zunächst versuchen, die zugehörige Gleichgewichtsform durch ein geometrisches Modell darzustellen. Es wird sich dann leicht zeigen lassen, wie man das angewandte Darstellungsverfahren zur Lösung einer gewissen Gruppe von Differentialgleichungen auf mechanischem Wege verwenden kann.

1) Vgl. Encyklopädie d. math. Wiss. IV, 3, Art. 20: Forchheimer, Hydraulik S. 331 Formel 3 ff.

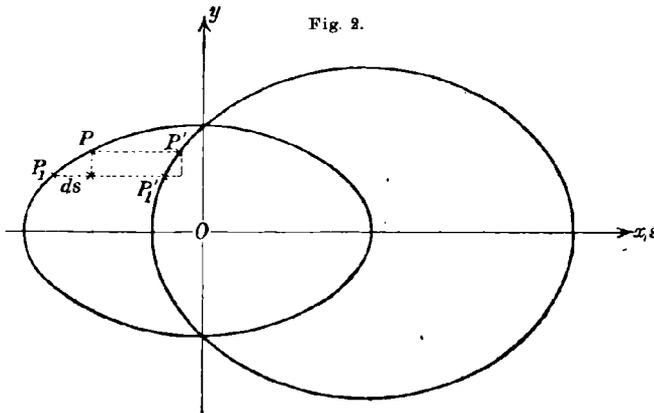
I. Wir gehen von einer bestimmten Aufgabe aus: Gegeben sei ein gerader Hohlzylinder mit einem Kegelschnitt als Querschnitt und eine Scheibe, deren Rand ebenfalls in einem Kegelschnitt bestehe. Es sei nur vorausgesetzt, daß die kleinere



Achse der Scheibe nicht größer sei als die größere des Zylinders, und daß die Scheibe aus biegsamem Stoff, etwa dünner Pappe, bestehe. Wir bringen dann die Scheibe derart in den Zylinder hinein, daß sie den Zylinder in den Endpunkten ihrer einen Achse berührt und eben diese Achse senkrecht auf einer der beiden Symmetrieebenen des Zylinders steht. Es wird dann möglich sein, die Scheibe unter Festhalten der genannten Achse so zu biegen, daß sich ihr Rand vollständig an die Zylinderwand anschmiegt. Die Scheibe wird alsdann den Mantel eines Zylinders bilden, dessen Querschnittskurve zu betrachten ist. Die Punkte, in denen die Scheibe den Zylinder vor der Verbiegung

berührt, seien A und B . Die xy -Ebene legen wir durch AB senkrecht zum Zylinder, die Scheibe denken wir uns alsdann um AB in die xy -Ebene hineingeklappt.

Die Gerade durch A und B sei die y -Achse und die Mittelsenkrechte auf AB die x -Achse (Fig. 2). Ist die Entfernung des Mittelpunktes der Querschnittskurve des Zylinders vom Koordinatenanfang k ,



so lautet die Gleichung des Querschnitts

$$(x - k)^2 b^2 + y^2 a^2 = a^2 b^2.$$

Die Gleichung der Scheibe lautet, wenn wir die x -Koordinate mit s bezeichnen:

$$s^2 \beta^2 + y^2 a^2 = a^2 \beta^2.$$

Bei der Verbiegung wird nun ein bestimmter Punkt P' des Scheibenrandes mit einem bestimmten Punkte des Zylinders zusammenfallen, dessen Projektion P auf die xy -Ebene dasselbe y hat (s. Fig. 2). Der Nachbarpunkt P'_1 von P , der einem bestimmten Zuwachs dy entspricht, wird senkrecht über den Nachbarpunkt P_1 von P zu liegen

kommen, der zu demselben dy gehört. Bei der Scheibe entspricht jedoch einem bestimmten dy ein bestimmtes ds und bei dem Zylinder ein bestimmtes dx . Die Neigung des Zylinders, zu dem die Scheibe verbogen wird, gegen die xy -Ebene ist dann im Punkte P' gegeben durch $\frac{ds}{dx}$. Hierbei sind nach obigen Gleichungen:

$$ds = -\frac{\alpha^2 y dy}{\beta^2 s}, \quad dx = -\frac{\alpha^2 y dy}{b^2 (x-k)}.$$

Demnach ist:

$$\frac{ds}{dx} = \frac{\alpha^2 b^2 (x-k)}{\beta^2 a^2 s}$$

oder, wenn man zur Abkürzung $\frac{\alpha^2 b^2}{\beta^2 a^2} = \lambda$ setzt:

$$s ds = \lambda (x - k) dx.$$

Integriert man unter der Annahme $s = 0$ für $x = 0$, so folgt:

$$s^2 = \lambda (x^2 - 2 k x).$$

Dies ist die Gleichung der Querschnittskurve des von der verbogenen Scheibe gebildeten Zylinders, wo s die Bogenlänge derselben bedeutet. Wollen wir die Gleichung in rechtwinkligen Koordinaten x, z haben, so müssen wir setzen:

$$dz = \sqrt{ds^2 - dx^2} = \sqrt{\lambda^2 \frac{(x-k)^2}{s^2} - 1} dx.$$

Setzen wir für s^2 seinen Ausdruck ein, so erhalten wir die Differentialgleichung des von der Scheibe gebildeten Zylinderprofils in der Form:

$$dz = \sqrt{(\lambda - 1) s^2 + \lambda^2 k^2} \frac{dx}{s}.$$

Ist $\lambda = 1$ oder $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{b}{a}$, d. h. sind Scheibenumfang und Zylinderquerschnitt ähnliche Kegelschnitte, so haben wir:

$$dz = k \frac{dx}{s}.$$

Dies ist die Gleichung der Kettenlinie, sie lautet integriert

$$x = \frac{k \left(e^{\frac{z}{k}} - e^{-\frac{z}{k}} \right)}{2} - k.$$

Wir sehen also

Verbiegt man eine Scheibe, deren Rand ein Kegelschnitt ist, derart, daß sie sich mit ihrem Rande vollständig dem Mantel eines Zylinders zweiter Ordnung anschließt, so bildet sie einen Zylinder, dessen Querschnitt eine Kettenlinie ist, wenn der Rand der Scheibe und der Querschnitt des gegebenen Zylinders ähnliche Kegelschnitte sind. Die Achse des Zylinders wird alsdann die Leitlinie der Kettenlinie sein. Die Kon-

stante k ist umgekehrt proportional dem Gewichte der Längeneinheit des Fadens.

Betrachten wir nun einen Faden, dessen Dichte eine bestimmte Funktion $\delta(s)$ der Bogenlänge s ist, so lautet die Differentialgleichung der Gleichgewichtsform, wie man leicht findet,

$$dz = \frac{c}{g} \frac{dx}{\int \delta(s) ds},$$

wo c eine beliebige Integrationskonstante und g die Beschleunigung durch die Schwere bedeutet. Vergleichen wir diese Gleichung mit der oben gefundenen Gleichung

$$dz = \sqrt{(\lambda - 1)s^2 + \lambda^2 k^2} \frac{dx}{s},$$

so sehen wir, daß sich die Querschnittskurve der gebogenen Scheibe auffassen läßt als die Gleichgewichtsform eines Fadens, dessen Dichte $\delta(s)$ gegeben ist durch

$$\int \delta(s) ds = \frac{c}{g} \frac{s}{\sqrt{(\lambda - 1)s^2 + \lambda^2 k^2}}, \quad \text{also}$$

$$\delta(s) = \frac{c}{g} \frac{d}{ds} \sqrt{(\lambda - 1)s^2 + \lambda^2 k^2} = \frac{c \lambda^2 k^2}{g \sqrt{[(\lambda - 1)s^2 + \lambda^2 k^2]^3}}.$$

Die Fadenlänge denken wir uns auf einer Achse eines Koordinatensystems abgetragen. Im Koordinatenanfang errichten wir die δ -Achse. Tragen wir die zu einem bestimmten s gehörige Dichte δ senkrecht zur s -Achse auf, so erhalten wir eine Kurve 8. Ordnung als „Belastungslinie“ des Fadens (Fig. 3). Diese Kurve ist symmetrisch in bezug auf die s -Achse, d. h. man kann sich die auf den Faden wirkende Kraft vertikal nach oben oder nach unten denken und erhält hierfür je einen Ast der Belastungslinie; in dem einen Falle würde sich die Kurve nach unten, im anderen nach oben durchbiegen. Diese Belastungskurven nehmen verschiedene Formen an je nach dem Werte von λ . Ist $\lambda > +1$, so wird die Dichte δ immer endlich bleiben und für $s = \pm \infty$ zu 0 werden (Fig. a). Diesen Fall stellen wir dar, wenn wir entweder elliptische Scheibe und elliptischen Zylinder oder hyperbolische Scheibe und hyperbolischen Zylinder nehmen. Für den Fall $0 < \lambda < 1$ wird die Dichte an zwei symmetrisch zum Anfangspunkt liegenden Stellen ∞ sein, darüber hinaus imaginär. In diesem Falle sind Zylinder und Scheibe wieder entweder beide hyperbolisch oder beide elliptisch, aber es ist $a : b < \alpha : \beta$ (Fig. b). Ist schließlich $\lambda < 0$, so hat man entweder elliptische Scheibe und hyperbolischen Zylinder oder umgekehrt. Auch in diesem Falle ist an zwei symmetrisch zum Anfangspunkt gelegenen Stellen des Fadens die Dichte

gleich ∞ und darüber hinaus imaginär: Die Gestalt der Belastungskurve ist der vorigen gleichartig.

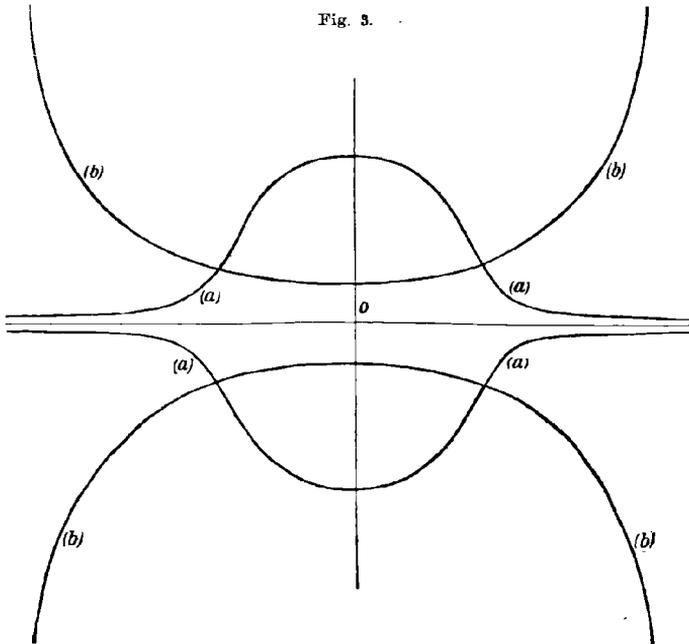
II. Jetzt möge dieselbe Frage allgemeiner behandelt werden. Gegeben sei ein beliebiger gerader Zylinder, dessen Querschnitt in bezug auf die x -Achse symmetrisch sei. Seine Gleichung laute:

$$(1) \quad f(x) b^2 + y^2 \alpha^2 = c^2.$$

Desgleichen möge eine Scheibe mit der Gleichung

$$(2) \quad \varphi(s) \beta^2 + y^2 \alpha^2 = \gamma^2$$

gegeben sein. Die Größen $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ sind Konstanten, die imaginär oder reell sein können. Ebenso wie vorher denken wir uns



die Scheibe derart verbogen, daß sich ihr Rand vollständig an den Zylinder anschließt. Die Querschnittskurve des von der Scheibe gebildeten Zylinders bestimmen wir in genau derselben Weise wie vorhin. Es ist:

$$dx = -\frac{\alpha^2 2 y dy}{b^2 f'(x)}, \quad ds = -\frac{\alpha^2 2 y dy}{\beta^2 \varphi'(s)}$$

und demnach

$$\frac{ds}{dx} = \frac{\lambda f'(x)}{\varphi'(s)}, \quad \text{wo } \lambda = \frac{\alpha^2 b^2}{\beta^2 a^2}$$

$$\varphi(s) = \lambda f(x) + C.$$

Die Integrationskonstante C ist bestimmt durch die Wahl des Koordinatensystems.

Dies ist die Gleichung der Querschnittskurve des von der Scheibe bei der Verbiegung gebildeten Zylinders, wo x die Abszisse und s die Bogenlänge bedeutet. Führen wir statt s die Ordinate z ein, so kommen wir zu der Differentialgleichung

$$dz = \sqrt{\frac{\lambda^2 f'^2(x) - \varphi'^2(s)}{\varphi'^2(s)}} dx.$$

Das s ist in dieser Gleichung mittels der Beziehung

$$\varphi(s) = \lambda f(x) + C$$

durch x auszudrücken, womit die Integration der Differentialgleichung auf eine Quadratur zurückgeführt ist.

Die durch diese Differentialgleichung dargestellte Kurve ist identisch mit der Gleichgewichtsform eines Fadens, dessen Dichte $\delta(s)$ als Funktion der Fadenlänge s bestimmt ist durch:

$$\int \delta(s) ds = \frac{c}{g} \sqrt{\frac{\varphi'^2(s)}{\lambda^2 f'^2(x) - \varphi'^2(s)}},$$

wo man mittels derselben Beziehung x durch s auszudrücken hat.

Ist die Dichte δ als Funktion von s gegeben, so können wir uns den zugehörigen Zylinder nebst Scheibe konstruieren, wenn wir die Gleichgewichtsform des Fadens durch ein Modell kennen lernen wollen: *Wir können entweder die Scheibe oder den Zylinder, wie es in den einzelnen Fällen am vorteilhaftesten ist, beliebig annehmen; der zugehörige Zylinder oder die Scheibe ist hierdurch bestimmt. Nehmen wir zum Beispiel die Scheibe als durch ihre Gleichung gegeben an, dann kennen wir $\varphi(s)$. Nach der zuletzt gegebenen Gleichung ist dann f bestimmt durch*

$$\frac{df}{dx} = \frac{\varphi'(s)}{g \int \delta(s) ds} \sqrt{c^2 + g^2 (\int \delta(s) ds)^2};$$

hier ist mittels der Beziehung

$$\varphi(s) = \lambda f + C$$

die Bogenlänge s als Funktion von f auszudrücken. Die Gleichungen des Zylinderquerschnitts und des Scheibenrandes sind dann:

$$f(x)b^2 + y^2 a^2 = c^2$$

und

$$\varphi(s)\beta^2 + y^2 \alpha^2 = \gamma^2.$$

Wollen wir z. B. die Gleichgewichtsfigur eines Fadens, dessen Dichte umgekehrt proportional dem Quadrate der Fadenlänge ist, darstellen, so haben wir zu setzen $\int \delta(s) ds = -\frac{k}{s}$. Ferner können wir annehmen,

die Scheibe sei dadurch bestimmt, daß die Funktion $\varphi(s)$ der Beziehung genüge:

$$\varphi'(s) = \frac{\sqrt{c^2 + g^2 \frac{k^2}{s^2}}}{-\frac{k}{s}} = \frac{1}{\varphi}.$$

$$\varphi d\varphi = \frac{1}{\sqrt{\frac{c^2 s^2}{k^2} + g^2}} ds$$

$$\varphi^2 = \frac{2k \log\left(\frac{cs}{k} + \sqrt{\frac{c^2 s^2}{k^2} + g^2}\right)}{c} + \text{const.},$$

wo wir bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems $\text{const} = 0$ setzen können. Sodann haben wir

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{\varphi},$$

oder, da $\varphi = \lambda f(C = 0)$ ist,

$$\lambda f df = dx,$$

also

$$f^2 = \frac{2x}{\lambda} + \text{const.}$$

Demnach ist für $\text{const} = 0$ die Gleichung des Zylinders nach Gl. (1):

$$\sqrt{\frac{2x}{\lambda}} b^2 + y^2 a^2 = c^2$$

und die der zugehörigen Scheibe nach Gl. (2):

$$\sqrt{\frac{2k}{c}} \log\left(\frac{cs}{k} + \sqrt{\frac{c^2 s^2}{k^2} + g^2}\right) \beta^2 + y^2 a^2 = \gamma^2.$$

Durch zweckmäßigere Wahl von $\varphi(s)$ oder $f(x)$ hätte man vielleicht noch bequemere Gleichungen erhalten.

III. Hat man die Aufgabe, eine Kurve darzustellen, deren Gleichung in der Form

$$F(x, s) = 0$$

gegeben ist, wo x die Ordinate und s die Bogenlänge bedeutet, so müßte man, wenn man sie punktweise konstruieren wollte, für s rechtwinkliche Koordinaten einführen. Zu diesem Zwecke müßte man die Gleichung nach s auflösen und $s = \int \sqrt{dx^2 + dz^2}$ setzen; man erhielte also

$$\int \sqrt{dx^2 + dz^2} = \Phi(x),$$

woraus sich ergibt

$$z = \int \sqrt{(\Phi'(x))^2 - 1} dx + C.$$

Die Aufgabe kommt also auf die Auflösung der Gleichung $F(x, s) = 0$ nach s und eine Quadratur hinaus. Wenn dies nun umständlich oder unmöglich ist, man aber die Gleichung $F(x, s) = 0$ in der Form schreiben kann

$$F_1(x) - F_2(s) = K,$$

so kann man auf folgende Weise die Kurve $F(x, s) = 0$ darstellen: Man konstruiert einen Zylinder, dessen Querschnitt die Gleichung hat

$$F_1(x) + y^2 = C_1$$

und eine Scheibe, deren Rand die Gleichung hat

$$F_2(s) + y^2 = C_2,$$

(hier bedeuten s und y rechtwinklige Koordinaten). Verbiegt man dann die Scheibe derart, daß ihr Rand sich dem Zylinder vollständig anschließt, so wird ihre Symmetrieachse, die s -Achse, die Kurve $F(x, s) = 0$ darstellen. Denn die Gleichung des Querschnitts des von der Scheibe gebildeten Zylinders ist ja

$$F_1(x) - F_2(s) = K.$$

Wie man sofort sieht, kann man dieses Verfahren auch zur mechanischen Bestimmung gewisser Integrale verwenden:

Wir setzen

$$s - \Phi(x) = 0,$$

wo $\Phi(x)$ eine ganz beliebige Funktion von x ist. Dann erhält man ein Integral von der Form

$$z = \int \sqrt{(\Phi'(x))^2 - 1} \, dx + C.$$

Dieses läßt sich auf folgende Weise mechanisch bestimmen:

Man konstruiert einen Zylinder mit der Querschnittsgleichung:

$$\Phi(x) + y^2 = C_1$$

und eine Scheibe mit der Gleichung:

$$s + y^2 = C_2.$$

Verbiegt man dann diese Scheibe in der oben angegebenen Weise, so stellt ihre Symmetrieachse das Integral $\int \sqrt{(\Phi'(x))^2 - 1} \, dx + C$ dar. Die Integrationskonstante C ergibt sich aus der Wahl des Koordinatensystems.

Vorrichtung zur Auflösung eines linearen Gleichungssystems.¹⁾

Von Privatdozent Dr. MARTIN NÄBAUER in München.

1. Der kinematische Grundgedanke.

Die Auflösung linearer Gleichungen mit einer beliebigen Zahl von Unbekannten läßt sich mechanisch ausführen, wenn es gelingt, einen kontinuierlich wirkenden Mechanismus zu bauen, der nach einmaliger Einstellung der Koeffizienten für jedes System von Unbekannten die zugehörigen Absolutglieder angibt. Wenn nämlich umgekehrt am Apparat eine bestimmte Wertreihe von Absolutgliedern eingestellt wird, so ist hierzu nur ein einziges System von Unbekannten möglich, welches das vorgegebene Gleichungssystem erfüllt und vom Apparat angezeigt wird.²⁾

Der vorteilhafteste Weg zur Erreichung dieses Zieles führt zu einer kinematischen Darstellung der einzelnen Gleichungen, wobei die Bewegungsübertragung wie bei einem Uhrwerk durch Räder erfolgt und alle veränderlichen Größen wie auch die Absolutglieder in Umdrehungen gemessen werden.

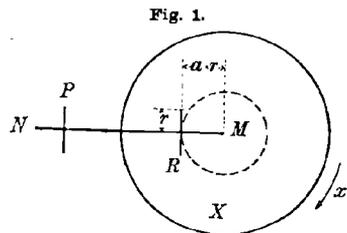
Wir gehen an die nähere Ausführung des Grundgedankens.

Zunächst ist uns die Aufgabe gestellt, das Produkt

$$p = a \cdot x$$

so zu bestimmen, daß der eine Faktor x und das Rechnungsergebnis in Umdrehungen gemessen werden. Zur Durchführung dient folgende, in Fig. 1 dargestellte Vorrichtung.

Parallel zur horizontal liegenden Scheibe X , der Multiplikatorscheibe, ist im Abstand r eine Welle MN geführt, welche die Achse der Scheibe im Punkt M trifft. Diese Welle dient den beiden Rollen R u. P , die wir nach ihrer Bestimmung Lauf- und Produktrolle nennen wollen, als Achse. Rolle P ist damit fest verbunden. Die Laufrolle R hingegen,



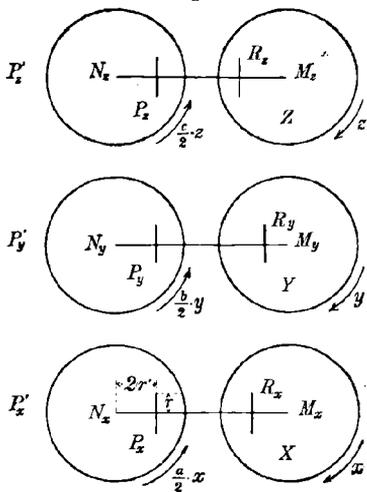
1) Sonderbearbeitung eines Abschnittes der in der Zeitschrift des Bayerischen Geometervereins Nr. 4 u. 5/1909 veröffentlichten Abhandlung des Verfassers: Theorie, Beschreibung u. Gebrauch einer Ausgleichungsmaschine.

2) Über die verschiedenen Versuche, Gleichungssysteme mechanisch aufzulösen, siehe die Abhandlung von R. Mehmke: „Mechanismen zur Auflösung von Gleichungssystemen“ in Band I, Heft 7 der Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften

welche die Multiplikatorscheibe X berührt, läßt sich auf der Achse verschieben, ist jedoch mit der Produktrolle winkelfest verbunden, so daß beide die gleiche Drehbewegung ausführen.

Um nun das gewünschte Produkt $p = a \cdot x$ darzustellen, machen wir den Abstand der Laufrolle von der Achse der Scheibe X gleich dem a -fachen Betrag des Laufrollenhalbmessers, also gleich $a \cdot r$ und erteilen der Multiplikatorscheibe eine Bewegung von x Umdrehungen. Dadurch wird auch R gedreht und der Weg, den hierbei irgend ein Punkt des Berührungskreises zwischen X und R zurücklegt, ist ebenso groß wie der Weg, den irgend ein Punkt der Laufrolle beschreibt, nämlich gleich $2ar\pi \cdot x$. Diesem Weg entsprechen $ax = p$ Umdrehungen von R , die an der Produktrolle P abgelesen werden können.

Fig. 2.



Wir gehen einen Schritt weiter zur mechanischen Darstellung der Funktion

$$l = a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z$$

Aus rein äußerlichen Gründen wird von nun ab immer die bestimmte Anzahl von drei Unbekannten benutzt. Alle Entwicklungen aber werden so geführt, daß die gewonnenen Ergebnisse auch für eine beliebige Anzahl von Unbekannten gelten.

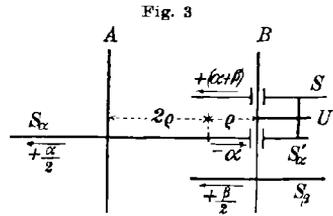
Wir ordnen, wie Fig. 2 zeigt, die Multiplikatorscheiben X, Y, Z in einer Horizontalebene hintereinander an. Die Umdrehungszahlen der Produktrollen P_x, P_y, P_z geben, wenn wir die in Fig. 1 gebrauchte Bezeichnungsweise für Fig. 2 entsprechend erweitern, auch hier die Produktwerte ax, by, cz . Diese Umdrehungen werden von den Produktrollen auf die Hilfsscheiben P'_x, P'_y, P'_z übertragen, deren Mittelpunkte N von den Berührungspunkten der Produktrollen um deren doppelten Halbmesser ($= 2r'$) abstehen. Durch dieses Halbmesserverhältnis wird erreicht, daß die Hilfsscheiben nur $\frac{1}{2}ax, \frac{1}{2}by, \frac{1}{2}cz$ Umdrehungen ausführen, ein Umstand, der für die nachfolgende Summenbildung zwar nicht notwendig aber doch erwünscht ist.

Wie ist es nun möglich, die den einzelnen Gliedern entsprechenden Umdrehungen zu summieren, um auch den Funktionswert l in Umdrehungen zu erhalten?

Wir beschränken uns vorerst darauf, die Umdrehungen von nur zwei, auf verschiedenen Achsen sitzenden Scheiben zu addieren. Hierzu dient der in Fig. 3 schematisch gezeichnete Mechanismus.

Auf den parallelen Achsen A und B sitzen die damit fest verbundene Scheiben S_α und S_β , die Summandenscheiben, deren $\frac{\alpha}{2}$ und $\frac{\beta}{2}$ Umdrehungen in eine Summe zu vereinigen sind. Die erste Summandenscheibe S_α berührt eine um die Achse B frei drehbare Hilfsscheibe S'_α , deren Durchmesser nur halb so groß ist wie derjenige von S_α . Auf dieser Hilfsscheibe ruht eine Übertragungsrolle U , die sich um eine horizontale, mit B u. S_β in starrer Verbindung stehende Achse dreht. Auf der Rolle U endlich ruht die um B frei drehbare Summenscheibe S .

Um den Vorgang der Summenbildung leichter verfolgen zu können, sollen die beiden Summandenscheiben ihre Bewegungen nicht gleichzeitig sondern nacheinander ausführen. Diese Annahme ist zulässig, weil die Gesamtbewegung der Summenscheibe S in beiden Fällen die gleiche ist.



Dreht sich vorerst S_α um den Betrag $+\frac{\alpha}{2}$, so ist die unmittelbare Folge davon, daß sich die Hilfsscheibe S'_α um $-\alpha$ dreht. Diese Bewegung wird durch die Übertragungsrolle U , deren Achse ihre Lage zunächst nicht ändert, als $+\alpha$ auf die Summenscheibe S übertragen.

Nummehr stehe S_α fest und es drehe sich die zweite Summandenscheibe S_β um den Betrag $+\frac{\beta}{2}$. Die starr mit B und S_β verbundene Achse der Übertragungsrolle U macht diese Bewegung mit und schließt demnach mit ihrer Anfangslage den Winkel $+\frac{\beta}{2}$ ein. Hierbei wälzt sich der Umfang der Übertragungsrolle auf der ruhenden Hilfsscheibe S'_α ab und dreht die auf ihr liegende Summenscheibe S um $+\frac{\beta}{2}$ gegen die Endlage der Rollenachse. Da diese selbst bereits um $+\frac{\beta}{2}$ gegen ihre Anfangslage gedreht ist, so hat sich die Summenscheibe um $+\beta$ gedreht.

Die Gesamtbewegung von S beträgt also $\alpha + \beta$.

Nachdem die Frage der Summierung von Umdrehungen für zwei Summanden gelöst ist, kann sie auch für eine mehrgliedrige Summe als gelöst betrachtet werden. Man kann nämlich schrittweise vorgehen und zur Summe der vorhergehenden Glieder immer nur das nächstfolgende Glied addieren, bis sich mit Hinzufügung des letzten Gliedes die Gesamtsumme ergibt.

Wenden wir dies auf unseren Ausdruck

$$l = a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z$$

an und verbinden je zwei aufeinander folgende Hilfsscheiben P' (Fig. 2) durch einen solchen Summenmechanismus, so gibt die Umdrehungszahl der letzten Summenscheibe den Wert l .

Nun handelt es sich darum, mehrere Gleichungen

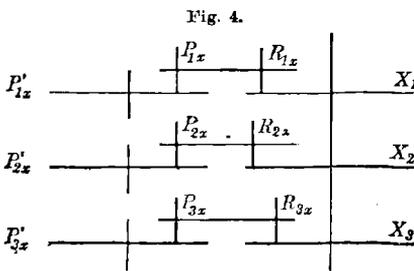
$$l_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z$$

$$l_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z$$

$$l_3 = a_3 x + b_3 y + c_3 z$$

gleichzeitig so darzustellen, daß die Unbekannten zwangsweise dieselben Werte besitzen.

Um dieser Forderung gerecht zu werden, ordnet man die den einzelnen Gleichungen entsprechenden Scheibenverbindungen übereinander an, wie dies in Fig. 4 für die Un-



bekannte x gezeigt ist und setzt die zur gleichen Unbekannten gehörigen Multiplikatorscheiben aller Gleichungen in starrer Verbindung auf ein und dieselbe Achse, so daß sie gezwungen sind, die gleiche Drehbewegung auszuführen.

Dreht man in diesem System die Multiplikatorscheiben der ersten Gleichung um die Beträge x, y, z , so erscheinen an den Endsummenscheiben der einzelnen Gleichungen die Absolutglieder l_1, l_2, l_3 .

Kehrt man den ganzen Vorgang um, indem man an den Endsummenscheiben die Absolutglieder einstellt, so erhält man die gesuchten Unbekannten als die Umdrehungszahlen der Multiplikatorscheiben.

Damit ist die kinematische Auflösung von linearen Gleichungen mit einer beliebigen Zahl von Unbekannten theoretisch gelöst.

Damit ist die kinematische Auflösung von linearen Gleichungen mit einer beliebigen Zahl von Unbekannten theoretisch gelöst.

2. Die Auflösung in Stellenprodukte.

Es wurde bisher stillschweigend vorausgesetzt, daß die zwischen den einzelnen Bestandteilen des Mechanismus vorhandene Reibung für die Bewegungsübertragung ausreichend sei. Bei der großen Anzahl der in Frage kommenden Scheiben und Rollen kann jedoch diese Voraussetzung nicht festgehalten werden, und wir sind gezwungen, vom glatten auf den gezahnten Rand überzugehen. Die Folge davon ist, daß bei jeder Produktbildung so viele Einzelmultiplikationen erforderlich werden als der Multiplikand Stellen besitzt. Damit nämlich die Multiplikatorscheibe eine beliebige Anzahl von Umdrehungen ungehindert ausführen kann, ist es notwendig, daß der Umfang des Berührungskreises zwischen dem Multiplikator und dem Laufrädchen durch den Zahnabstand des

letzteren ohne Rest teilbar ist. Das trifft jedoch nur für gewisse Halbmesser des Berührungskreises, jedenfalls aber für alle ganzzahligen Faktoren a zu. Wir ordnen daher, um die Multiplikation mit den Multiplikanden $1, 2, 3, \dots, 9$ durchzuführen, auf der Multiplikatorscheibe 9 konzentrische Zahnkränze mit den Halbmessern $1r, 2r \dots 9r$ an.

Für die Multiplikation der übrigen Stellen dienen mehrere nebeneinander liegende, der ersten gleiche Multiplikatorscheiben. Je zwei aufeinander folgende dieser Scheiben sind miteinander zwangsläufig im Übersetzungsverhältnis $10:1$ verbunden. Ist demnach der Multiplikand $a = a^{(0)} + a^{(-1)} + a^{(-2)}$, so entstehen bei der Multiplikation mit x die Teilprodukte $a^{(0)}x + a^{(-1)}x + a^{(-2)}x \dots$, welche durch die vorher beschriebenen Addiervorrichtungen zum Gesamtprodukt ax vereinigt werden.

Erscheint die Auflösung in Stellenmultiplikationen vom rein konstruktiven Standpunkt aus als ein Nachteil, weil sie einen vielgliedrigen Mechanismus erfordert, so bietet sie vom Standpunkt der Raumfrage aus nur Vorteile. Wollte man nämlich für große Koeffizienten die ungetrennte Multiplikation durchführen, so müßten die Multiplikatorscheiben eine ganz unzulässige Größe erhalten, während die getrennte Multiplikation nur einen verhältnismäßig kleinen Raum beansprucht.

3. Verbesserung eines mit Näherungskoeffizienten ermittelten Unbekanntensystems.

Es bietet keine prinzipiellen Schwierigkeiten, die beschriebene Vorrichtung zum Auflösen linearer Gleichungen für beliebig viele Stellen einzurichten. Die praktische Ausführung des Apparates aber gestaltet sich um so einfacher, je geringer die Stellenzahl ist. In einem solchen Falle muß mit abgerundeten Koeffizienten aufgelöst werden, und das mit diesen Näherungskoeffizienten ermittelte System von Unbekannten ist nur ein System von Näherungswerten. Es fragt sich nun, wie muß man diese Näherungswerte verbessern, um sie in die streng richtigen Werte der Unbekannten überzuführen.

Es sei

$$\begin{aligned}
 & a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 \cdot z + l_1 = 0 \\
 (1) \quad & a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 \cdot z + l_2 = 0 \\
 & a_3 \cdot x + b_3 \cdot y + c_3 \cdot z + l_3 = 0
 \end{aligned}$$

das aufzulösende Gleichungssystem. Bei Verwendung der Auflösungs-vorrichtung werden statt der streng richtigen Koeffizienten a, b, c die Näherungswerte a', b', c' eingestellt, womit das fehlerhafte Wertesystem x', y', z' erhalten wird. Bezeichnen wir die an den verschiedenen

Näherungsgrößen anzubringenden Verbesserungen mit ihrem Differential, so ist

$$(2) \quad \begin{array}{ll} a = a' + da & x = x' + dx \\ b = b' + db & y = y' + dy \\ c = c' + dc & z = z' + dz \end{array}$$

Führen wir diese Werte in die Gleichungen (1) ein, so ergibt sich:

$$(3) \quad \begin{array}{l} (a'_1 + da_1)(x' + dx) + (b'_1 + db_1)(y' + dy) + (c'_1 + dc_1)(z' + dz) + l_1 = 0 \\ (a'_2 + da_2)(x' + dx) + (b'_2 + db_2)(y' + dy) + (c'_2 + dc_2)(z' + dz) + l_2 = 0 \\ (a'_3 + da_3)(x' + dx) + (b'_3 + db_3)(y' + dy) + (c'_3 + dc_3)(z' + dz) + l_3 = 0 \end{array}$$

Werden die Klammern aufgelöst und die Glieder nach der Größenordnung zusammengefaßt, so erhalten wir zunächst für die erste Gleichung:

$$(a'_1 x' + b'_1 y' + c'_1 z' + l_1) + (a'_1 dx + b'_1 dy + c'_1 dz + da_1 x' + db_1 y' + dc_1 z') + (da_1 dx + db_1 dy + dc_1 dz) = 0$$

In dieser Gleichung ist die erste Klammer = 0; denn diese Gleichung ist zur Bestimmung der Näherungswerte x' , y' , z' verwendet worden. Die dritte Klammer können wir als eine Produktsumme sehr kleiner Größen ebenfalls = 0 setzen, so daß nur mehr bleibt:

$$a'_1 dx + b'_1 dy + c'_1 dz + da_1 x' + db_1 y' + dc_1 z' = 0.$$

Setzen wir in dieser Gleichung die Summe der konstanten Glieder

$$(4) \quad da_1 x' + db_1 y' + dc_1 z' = (l_1)$$

so wird

$$a'_1 dx + b'_1 dy + c'_1 dz + (l_1) = 0.$$

Die Anwendung dieser Ableitung auf sämtliche Gleichungen liefert zur Bestimmung der Unbekanntenverbesserungen die einfachen Gleichungen:

$$(5) \quad \begin{array}{l} a'_1 dx + b'_1 dy + c'_1 dz + (l_1) = 0 \\ a'_2 dx + b'_2 dy + c'_2 dz + (l_2) = 0 \\ a'_3 dx + b'_3 dy + c'_3 dz + (l_3) = 0. \end{array}$$

Dieses System (5) entspricht bis auf die konstanten Glieder vollkommen den ursprünglichen Gleichungen (1). Es ist daher möglich, die Unbekanntenverbesserungen bei unveränderter Koeffizienteneinstellung mit der Auflösungsvorrichtung durch Einstellung der neuen nach Gleichung (4) zu berechnenden Absolutglieder (l) zu ermitteln.

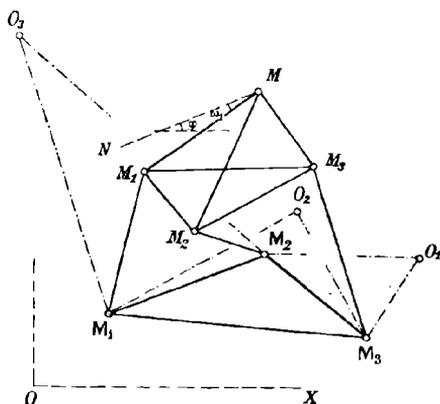
Die durch zweimalige Auflösung mit einem n -stelligen Apparat gewonnenen Resultate sind, abgesehen von den Fehlern, welche durch Vernachlässigung der Glieder zweiter Ordnung entstehen, ebenso genau wie die aus einer einmaligen Auflösung mit einer $2n$ -stelligen Vorrichtung erhaltenen Werte. —

Erzeugung der Koppelkurve durch ähnlich-veränderliche Systeme.

Von REINHOLD MÜLLER in Darmstadt.

1. Die Bewegung eines ebenen ähnlich-veränderlichen Systems in seiner Ebene ist bekanntlich bestimmt durch die Bahnkurven μ_1, μ_2, μ_3 dreier Punkte M_1, M_2, M_3 . Wir setzen voraus, diese Bahnen seien drei Kreise mit den Mittelpunkten M_1, M_2, M_3 , und fragen nach der Bahnkurve μ , die irgend ein vierter Punkt M des bewegten Systems beschreibt.

Die Gestalt des ähnlich-veränderlichen Vierecks $MM_1M_2M_3$ sei gegeben durch das Verhältnis $s_1:s_2:s_3$ der Strecken MM_1, MM_2, MM_3 und durch die Winkel $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, die sie mit einer beliebigen Geraden MN der bewegten Ebene bilden. Wir bezeichnen ferner mit r_h ($h = 1, 2, 3$) den Radius des Kreises μ_h , mit ξ_h, η_h die Koordinaten des Punktes M_h in bezug auf irgend ein in der festen



Ebene liegendes rechtwinkliges Koordinatensystem, mit x_h, y_h und x, y bzw. die Koordinaten der augenblicklichen Lagen der Punkte M_h und M . Ist dann die augenblickliche Länge von $MM_h = \lambda s_h$, und bildet die Systemgerade MN mit der festen x -Achse momentan den Winkel φ , so ist

$$x_h = x - \lambda s_h \cos (\omega_h + \varphi)$$

$$y_h = y - \lambda s_h \sin (\omega_h + \varphi)$$

und

$$(x_h - \xi_h)^2 + (y_h - \eta_h)^2 = r_h^2.$$

Durch Einsetzung der Werte von x_h und y_h in die letzte Gleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} &\lambda^2 s_h^2 - 2 \lambda s_h \cos \varphi \{ (x - \xi_h) \cos \omega_h + (y - \eta_h) \sin \omega_h \} \\ &\quad - 2 \lambda s_h \sin \varphi \{ -(x - \xi_h) \sin \omega_h + (y - \eta_h) \cos \omega_h \} \\ &\quad + (x - \xi_h)^2 + (y - \eta_h)^2 - r_h^2 = 0. \end{aligned}$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{s_h} \left\{ (x - \xi_h) \cos \omega_h + (y - \eta_h) \sin \omega_h \right\} &= \alpha_h \\ \frac{1}{s_h} \left\{ -(x - \xi_h) \sin \omega_h + (y - \eta_h) \cos \omega_h \right\} &= \beta_h \\ \frac{1}{s_h^2} \left\{ (x - \xi_h)^2 + (y - \eta_h)^2 - r_h^2 \right\} &= p_h \end{aligned} \right.$$

und $\lambda \cos \varphi = \xi$, $\lambda \sin \varphi = \eta$, so verwandelt sich die vorige Gleichung in

$$(2) \quad \xi^2 + \eta^2 - 2\alpha_h \xi - 2\beta_h \eta + p_h = 0.$$

Hier ist $h = 1, 2, 3$, und wir erhalten die Gleichung der Kurve μ durch Elimination von ξ und η zwischen den drei Gleichungen (2). Führen wir noch die Bezeichnungen ein

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} p_1 (\alpha_2 - \alpha_3) + p_2 (\alpha_3 - \alpha_1) + p_3 (\alpha_1 - \alpha_2) &= \mathfrak{A} \\ p_1 (\beta_2 - \beta_3) + p_2 (\beta_3 - \beta_1) + p_3 (\beta_1 - \beta_2) &= \mathfrak{B} \\ (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) + (\alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3) + (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) &= \mathfrak{C} \\ p_1 (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) + p_2 (\alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3) + p_3 (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) &= \mathfrak{D}, \end{aligned} \right.$$

so folgt nach einfacher Rechnung als Gleichung von μ

$$(4) \quad \mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + 4\mathfrak{C}\mathfrak{D} = 0.$$

Die Kurve μ ist also von der sechsten Ordnung.

2. Um das Verhalten der Kurve μ hinsichtlich der imaginären Kreispunkte J_1, J_2 zu ermitteln, schneiden wir sie mit der Geraden

$$(5) \quad x + iy = 0,$$

die den Koordinatenanfangspunkt O mit einem der beiden Kreispunkte, etwa J_1 , verbindet. Zerlegen wir $\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2$ in $(\mathfrak{A} + i\mathfrak{B})(\mathfrak{A} - i\mathfrak{B})$, so ist nach (3)

$$\mathfrak{A} \pm i\mathfrak{B} = \sum p_h \{ (\alpha_k \pm i\beta_k) - (\alpha_i \pm i\beta_i) \}$$

und nach (1)

$$\alpha_k + i\beta_k = \frac{e^{-i\omega_k}}{s_k} \left\{ (x + iy) - (\xi_k + i\eta_k) \right\}.$$

Setzen wir hier nach (5) $y = ix$ und zur Abkürzung $\xi_k + i\eta_k = \zeta_k$, so folgt

$$\alpha_k + i\beta_k = -\frac{\zeta_k}{s_k} e^{-i\omega_k};$$

gleichzeitig wird der Faktor von x in $\alpha_k - i\beta_k$

$$= 2 \frac{e^{i\omega_k}}{s_k}$$

und in p_h

$$= -2 \frac{\zeta_h}{s_h^2}.$$

Nach fallenden Potenzen von x geordnet ergibt sich also

$$(6) \quad \begin{aligned} \mathfrak{A} + i\mathfrak{B} &= 2 \sum \frac{\xi_h}{s_h^2} \left(\frac{\xi_k}{s_k} e^{-i\omega_k} - \frac{\xi_l}{s_l} e^{-i\omega_l} \right) \cdot x \dots \\ &= 2 \sum \frac{\xi_k \xi_l}{s_k s_l} e^{-i(\omega_k + \omega_l)} \left(\frac{e^{i\omega_k}}{s_k} - \frac{e^{i\omega_l}}{s_l} \right) \cdot x + \dots \end{aligned}$$

und

$$\mathfrak{A} - i\mathfrak{B} = -4 \sum \frac{\xi_h}{s_h^2} \left(\frac{e^{i\omega_k}}{s_k} - \frac{e^{i\omega_l}}{s_l} \right) \cdot x^2 + \dots$$

Es ist ferner

$$(7) \quad \begin{aligned} \alpha_k \beta_l - \alpha_l \beta_k &= \frac{1}{s_k s_l} \{ [x^2 + y^2 - (\xi_k + \xi_l)x - (\eta_k + \eta_l)y + (\xi_k \xi_l + \eta_k \eta_l)] \sin \omega_k - \omega_l \} \\ &\quad + [(\eta_k - \eta_l)x - (\xi_k - \xi_l)y + (\xi_k \eta_l - \xi_l \eta_k)] \cos (\omega_k - \omega_l), \end{aligned}$$

also wird für $y = ix$

$$\alpha_k \beta_l - \alpha_l \beta_k = - \frac{i}{s_k s_l} \{ \xi_k e^{-i(\omega_k - \omega_l)} - \xi_l e^{i(\omega_k - \omega_l)} \} x + \dots,$$

mithin

$$\mathfrak{C} = -i \sum \frac{\xi_h}{s_h} e^{-i\omega_h} \left(\frac{e^{i\omega_k}}{s_k} - \frac{e^{i\omega_l}}{s_l} \right) \cdot x + \dots$$

und

$$\begin{aligned} \mathfrak{D} &= 2i \sum \frac{\xi_h}{s_h^2 s_k s_l} \{ \xi_k e^{-i(\omega_k - \omega_l)} - \xi_l e^{i(\omega_k - \omega_l)} \} \cdot x^2 + \dots \\ &= 2i \sum \frac{\xi_k \xi_l}{s_h s_k s_l} e^{i(\omega_h - \omega_k - \omega_l)} \left(\frac{e^{i\omega_k}}{s_k} - \frac{e^{i\omega_l}}{s_l} \right) \cdot x^2 + \dots \end{aligned}$$

Durch die Substitution $y = ix$ verwandelt sich also Gleichung (4) in eine Gleichung dritten Grades in x . Setzen wir noch

$$\frac{e^{i\omega_k}}{s_k} - \frac{e^{i\omega_l}}{s_l} = \Omega_{kl},$$

so lautet der Faktor von $8x^3$

$$\begin{aligned} & - \sum \frac{\xi_h}{s_h^2} \Omega_{kl} \cdot \sum \frac{\xi_k \xi_l}{s_k s_l} e^{-i(\omega_k + \omega_l)} \Omega_{kl} \\ & + \sum \frac{\xi_h}{s_h} e^{-i\omega_h} \Omega_{kl} \cdot \sum \frac{\xi_k \xi_l}{s_h s_k s_l} e^{-i(\omega_h - \omega_k - \omega_l)} \Omega_{kl} \\ &= - \sum \frac{\xi_h^2}{s_h^3} e^{-i\omega_h} \Omega_{kl} \left\{ \frac{\xi_k}{s_k} e^{-i\omega_k} \Omega_{hk} + \frac{\xi_l}{s_l} e^{-i\omega_l} \Omega_{lh} \right\} \\ & \quad + \sum \frac{\xi_h^2}{s_h^2} e^{-i\omega_h} \Omega_{kl} \left\{ \frac{\xi_k}{s_k s_l} e^{i(\omega_l - \omega_h - \omega_k)} \Omega_{hk} + \frac{\xi_l}{s_k s_l} e^{i(\omega_k - \omega_l - \omega_h)} \Omega_{lh} \right\} \\ &= \Omega_{12} \Omega_{23} \Omega_{31} \sum \frac{\xi_h^2}{s_h^2} e^{-2i\omega_h} \left(\frac{\xi_k}{s_k} e^{-i\omega_k} - \frac{\xi_l}{s_l} e^{-i\omega_l} \right) \\ &= \Omega_{12} \Omega_{23} \Omega_{31} \left(\frac{\xi_1}{s_1} e^{-i\omega_1} - \frac{\xi_2}{s_2} e^{-i\omega_2} \right) \left(\frac{\xi_2}{s_2} e^{-i\omega_2} - \frac{\xi_3}{s_3} e^{-i\omega_3} \right) \left(\frac{\xi_3}{s_3} e^{-i\omega_3} - \frac{\xi_1}{s_1} e^{-i\omega_1} \right). \end{aligned}$$

Der Punkt J_1 zählt also für drei Schnittpunkte der Geraden OJ_1 mit μ , und zwar gilt dies unabhängig von der Lage des Koordinatenanfangspunktes O in der Ebene $M_1M_2M_3$. Die Kurve μ hat daher die imaginären Kreispunkte zu dreifachen Punkten.

Hat aber der Punkt O eine solche Lage gegen das Dreieck $M_1M_2M_3$, daß einer der Ausdrücke von der Form $\frac{\xi_k}{s_k} e^{-i\omega_k} - \frac{\xi_l}{s_l} e^{-i\omega_l}$ verschwindet, so berührt die Gerade OJ_1 die Kurve μ in J_1 , und dann ist O ein Fokalzentrums von μ . Für solche Lagen von O ergibt sich also die Bedingung

$$\frac{\xi_k}{\xi_l} = \frac{s_k}{s_l} e^{i(\omega_k - \omega_l)},$$

und hieraus folgt, wenn $\xi_h = \rho_h e^{i\vartheta_h}$ gesetzt wird,

$$\frac{\rho_k}{\rho_l} = \frac{s_k}{s_l}$$

und

$$\vartheta_k - \vartheta_l = \omega_k - \omega_l,$$

d. h. $\triangle M_k M_l O \sim \triangle M_k M_l M$. Die Fokalzentra O_1, O_2, O_3 der Kurve μ werden demnach gefunden, indem man bzw. über den Strecken M_2M_3, M_3M_1, M_1M_2 Dreiecke zeichnet, die den Dreiecken $M_2M_3M, M_3M_1M, M_1M_2M$ gleichsinnig ähnlich sind.

Nach (7) ist $\mathfrak{C} = 0$ die Gleichung eines Kreises c . Setzen wir $\xi_h = \rho_h \cos \vartheta_h, \eta_h = \rho_h \sin \vartheta_h$, so lautet ihr absolutes Glied

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_1}{s_1} \cdot \frac{\rho_2}{s_2} \sin(\omega_1 - \omega_2 - \vartheta_1 + \vartheta_2) + \frac{\rho_2}{s_2} \cdot \frac{\rho_3}{s_3} \sin(\omega_2 - \omega_3 - \vartheta_2 + \vartheta_3) \\ & + \frac{\rho_3}{s_3} \cdot \frac{\rho_1}{s_1} \sin(\omega_3 - \omega_1 - \vartheta_3 + \vartheta_1). \end{aligned}$$

Fällt nun der Koordinatenanfangspunkt mit dem Punkte O_1 zusammen, so ist $\frac{\rho_2}{s_2} = \frac{\rho_3}{s_3}$ und $\vartheta_2 - \omega_2 = \vartheta_3 - \omega_3$, und dann wird jener Ausdruck gleich Null. Die drei Fokalzentra O_1, O_2, O_3 liegen demnach auf dem Kreise c .

3. Die Gleichungen $\mathfrak{A} = 0$ und $\mathfrak{B} = 0$ definieren zwei zirkuläre Kurven dritter Ordnung a und b ; ebenso bedeutet $\mathfrak{D} = 0$ eine bizirkuläre Kurve vierter Ordnung d .

Zu dem durch a und b bestimmten Büschel von Kurven dritter Ordnung gehören auch die imaginären Kurven $\mathfrak{A} + i\mathfrak{B} = 0$ und $\mathfrak{A} - i\mathfrak{B} = 0$, und von diesen hat die eine in J_1 , die andere in J_2 nach (5) einen Doppelpunkt. Die Kurven a und b — und alle übrigen Kurven des Büschels — berühren sich folglich in J_1 und J_2 . Da ferner für $p_1 = p_2 = p_3$ die Ausdrücke \mathfrak{A} und \mathfrak{B} identisch verschwinden, so gehen

α und β durch die Schnittpunkte S und T der Kreise $p_1 - p_2 = 0$ und $p_2 - p_3 = 0$, und sie schneiden sich außerdem noch in drei Punkten, die wir mit U, V, W bezeichnen.

Nun ist nach (3)

$$(\beta_2 - \beta_1) \mathfrak{A} - (\alpha_2 - \alpha_1) \mathfrak{B} = (p_1 - p_2) \mathfrak{C}$$

und

$$(p_1 \beta_2 - p_2 \beta_1) \mathfrak{A} - (p_1 \alpha_2 - p_2 \alpha_1) \mathfrak{B} = (p_1 - p_2) \mathfrak{D};$$

jeder Schnittpunkt von α und β liegt also entweder auf dem Kreise $p_1 - p_2 = 0$ oder auf \mathfrak{c} und \mathfrak{d} , oder auf allen drei Kurven zugleich. Das letzte gilt von den imaginären Kreispunkten; die Punkte S und T befinden sich auf dem Kreise $p_1 - p_2 = 0$, aber nicht auf \mathfrak{c} und \mathfrak{d} . Da endlich die Punkte U, V, W nicht dem Kreise $p_1 - p_2 = 0$ angehören, so liegen sie auf \mathfrak{c} und \mathfrak{d} . Die Kurven $\alpha, \beta, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ schneiden sich also, von den imaginären Kreispunkten abgesehen, noch in den Punkten U, V, W . Dann folgt aber aus der Form der Gleichung (4): *Die Punkte U, V, W sind Doppelpunkte der Kurve μ .* Und weiter ergibt sich aus dem Schlußsatz des vorigen Artikels: *Diese Doppelpunkte liegen auf dem durch die drei Fokalzentra gehenden Kreise \mathfrak{c} .*

4. Von der Bahnkurve μ kennen wir jetzt die folgenden Eigenschaften:

1. Sie ist von der sechsten Ordnung,
2. sie hat die imaginären Kreispunkte zu dreifachen Punkten,
3. sie besitzt außerdem drei Doppelpunkte,
4. diese Doppelpunkte liegen mit den drei Fokalzentren der Kurve auf einem Kreise.

Die Gleichung einer Kurve, die diesen Bedingungen genügt, enthält $27 - 2 \cdot 6 - 3 - 3 = 9$ willkürliche Konstanten. Genau dieselben Eigenschaften besitzt aber die bekannte Koppelkurve, die ein Punkt der Koppelene eines Gelenkvierecks in der Ebene des festen Gliedes beschreibt, und die Bestimmung einer Koppelkurve erfordert gleichfalls 9 Konstanten, nämlich 4 zur Angabe der beiden festen Drehpunkte, 3 für die Längen der drei beweglichen Glieder und 2, um den erzeugenden Punkt in der Koppelene festzulegen. Wir schließen hieraus, daß μ eine Koppelkurve ist, erhalten also den Satz: *Bewegen sich drei Punkte eines ebenen ähnlich-veränderlichen Systems auf Kreisen, so beschreibt jeder vierte Punkt eine Koppelkurve.*

Über die von Herrn Reinhold Müller untersuchte besondere Bewegung eines ähnlich veränderlichen Systems.

Von R. SKUTSCH in Dortmund.

Herr Reinhold Müller hat die besondere Bewegung eines ebenen ähnlich-veränderlichen Systems in dem Falle untersucht, daß die Bahnkurven dreier Punkte Kreise sind, und hat gezeigt, daß dann jeder vierte Punkt eine Koppelkurve beschreibt. Die nachstehende elementargeometrische Herleitung dieses merkwürdigen Ergebnisses verdankt ihre verhältnismäßige Einfachheit freilich in erster Linie der Beschränkung auf reelle Elemente, bietet aber auch in ihrer Anschaulichkeit manche Anregung, welche eine Veröffentlichung rechtfertigen dürfte.

Ich schließe mich der Bezeichnungsweise des Herrn Müller größtenteils an und nenne $M_1, M_2, M_3, r_1, r_2, r_3$ die Mittelpunkte und die Halbmesser der festen Kreise, M_1, M_2, M_3 die auf den festen Kreisen geführten drei Punkte des ähnlich veränderlichen Systems, M einen beliebigen vierten Punkt desselben. Die Lage der vier Punkte M_1, M_2, M_3, M des ähnlich veränderlichen Systems zu einander sei festgelegt durch die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \lambda s_1 &= M M_1; & \lambda s_2 &= M M_2; & \lambda s_3 &= M M_3 \\ \lambda t_1 &= M_2 M_3; & \lambda t_2 &= M_1 M_3; & \lambda t_3 &= M_1 M_2. \end{aligned}$$

1. Konstruktion einer bedingungsmaßigen Lage des ähnlich veränderlichen Systems.

Unsere erste Aufgabe sei, zu einer bestimmten Lage von M_1 auf dem Kreis um M_1 die zugehörigen Lagen von M_2, M_3 und M zu konstruieren.

Wir legen das Dreieck M_1, M_2, M_3 zunächst so, daß M_1 auf M_1 und M_2 auf M_2 fällt. Die zugehörige Lage von M ist ohne weiteres zeichnerisch bestimmbar, wir nennen sie C .

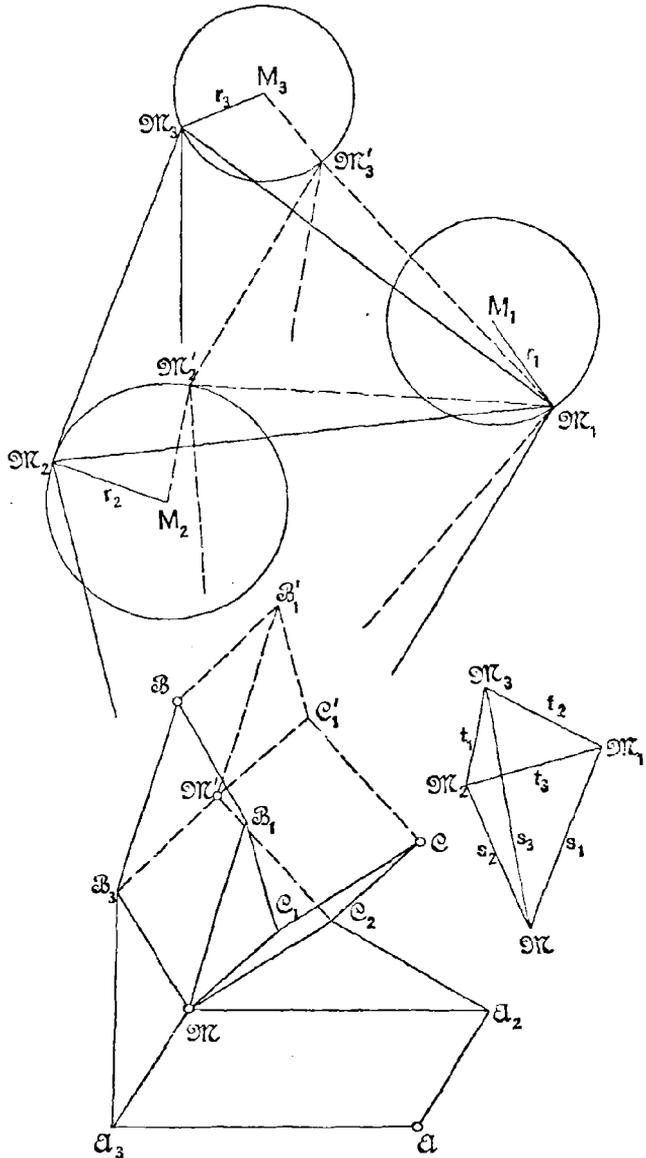
Wir halten dann M_2 auf M_2 fest und bewegen M_1 auf dem Radius r_1 in die gewünschte Lage. Bei einer solchen „einförmigen“ Bewegung¹⁾ mit festem Pol beschreiben aber alle Systempunkte ähnliche Bahnen mit dem festen Punkt als Ähnlichkeitspol; es bewegt sich also, wie auch leicht zu verfolgen, M geradlinig von C nach C_2 derart, daß $CC_2 = r_1 \cdot \frac{s_2}{t_3}$ und $\sphericalangle M_2 C C_2 = \sphericalangle M_2 M_1 M_1$.

1) Vgl. Burmester, Lehrbuch der Kinematik, Nr. 334.

Nunmehr halten wir M_1 in dieser Lage fest und bewegen M_2 nach dem Umfang des Kreises um M_2 , wobei dahingestellt bleibe, auf welchem Halbmesser dies geschieht. Jedenfalls legt dabei der Punkt M eine gerade Strecke

$r_2 \cdot \frac{s_1}{t_3}$ zurück, und da die Richtung unbestimmt ist, so gelangt er von seiner bisherigen Lage C_2 irgendwo an den Umfang eines mit dem Halbmesser $r_2 \cdot \frac{s_1}{t_3}$ um C_2 beschriebenen Kreises. Dieser Kreis ist also der geometrische Ort für M , wenn die Bedingungen erfüllt sind, daß M_1 die gegebene Lage auf dem Umfang des Kreises um M_1 einnimmt und M_2 sich irgendwo auf dem Umfang des Kreises um M_2 befindet.

Wir wiederholen nunmehr die ganze bisherige Konstruktion, indem wir nur M_3 bzw. M_3 an die Stelle von M_2 bzw. M_2 treten lassen. Wir legen also diesmal M_1 auf M_1 und M_3 auf M_3 , nennen B die zugehörige Lage von M , bewegen diesmal unter Festhaltung von M_3 M_1 in die nämliche Lage wie vorhin, wobei B nach B_3 gelangen möge, $BB_3 = r_1 \cdot \frac{s_3}{t_2}$ und $\sphericalangle M_3 B B_3 = \sphericalangle M_3 M_1 M_1$ ist. Dann wird M_1 fest-



gehalten und M_3 an den Umfang des Kreises um M_3 gebracht, wobei M von B_3 an den Umfang eines Kreises mit dem Halbmesser $r_3 \cdot \frac{s_1}{t_2}$ um B_3 gelangt. Dieser Kreis ist also der geometrische Ort für M , wenn die Bedingungen erfüllt sind, daß M_1 wieder die frühere, bestimmte Lage auf dem Umfang des Kreises um M_1 einnimmt, M_3 aber sich irgendwo auf dem Umfang des Kreises um M_3 befindet.

Bringt man die beiden Kreise um B_3 und C_2 zum Schnitt, so hat man offenbar die gesuchte Lage von M , da sich in diesem Falle sowohl M_2 als M_3 auf den Kreisen um M_2 bzw. M_3 befinden. Die beiden Systemlagen, die man hiernach als Lösungen der Aufgabe erhält, sind in der Figur durch Strichart und oberen Index unterschieden.

2. Die Gesamtheit der bedingungsmaßigen Lagen.

Es bleibt jetzt zu untersuchen, wie sich der Punkt M aus der gefundenen Anfangslage bewegt, wenn M_1 auf dem Umfang des Kreises um M_1 umläuft, während M_2 und M_3 ebenfalls dauernd an ihre Kreise gebunden bleiben.

Hätten wir die Betrachtung 1. für eine andere Lage von M_1 , im übrigen unverändert durchgeführt, so hätte sich der Linienzug BB_3MC_2C natürlich anders ergeben. Unverändert wären aber die vier Strecken $BB_3 = r_1 \frac{s_2}{t_2}$, $B_3M = r_3 \cdot \frac{s_1}{t_2}$, $MC_2 = r_2 \frac{s_1}{t_3}$ und $C_2C = r_1 \frac{s_2}{t_3}$ geblieben. Die neue Lage kann also jedenfalls aus der vorigen erhalten werden, indem man mit dem Linienzug wie mit einem Gelenkeck verfährt; zu einer bestimmten aber wird die Bewegung von M erst dadurch, daß nach früherem die Winkel M_3BB_3 und M_3CC_2 sich um gleiche Beträge ändern oder daß mit anderen Worten BB_3 und CC_2 einen festen Winkel einschließen.

Was es mit dieser Beziehung auf sich hat, erkennt man leicht, wenn man die Reihenfolge der Stäbe vertauscht, ohne ihre Richtung zu verändern, also von B ausgehend die Stäbe $r_3 \frac{s_1}{t_2}$, $r_1 \frac{s_2}{t_2}$, $r_1 \frac{s_2}{t_3}$, $r_2 \frac{s_1}{t_3}$ aneinanderfügt, eine Veränderung, von welcher weder M noch C berührt werden. Da in dem so erhaltenen Stabzug BB_1MC_1C der Winkel B_1MC_1 unveränderlich ist, so kann man auch B_1 mit C_1 unmittelbar durch einen Stab verbinden. Hiermit ist die Natur der von M beschriebenen Kurve als einer Koppelkurve klargestellt.

3. Entstehung des Cayleyschen Diagramms aus der Müllerschen Figur.

Ersichtlich fehlte in den bisherigen Betrachtungen noch die Symmetrie; der Punkt M_1 spielte eine andere Rolle als die Punkte

M_2 und M_3 . So ist denn auch die bisher gewonnene Figur unsymmetrisch.

Man kann aber jetzt nachträglich, nachdem drei zusammengehörige Lagen der Punkte $M_1 M_2 M_3$ gefunden sind, dieselben Betrachtungen noch zweimal wiederholen, indem man an die Stelle von M_1 das erste Mal M_2 , das zweite Mal M_3 treten läßt. So ergänzt sich die Figur zu vollständiger Symmetrie, und man erhält das bekannte Diagramm, mit dem Cayley die dreifache Erzeugung der Koppelkurve veranschaulichte.¹⁾ Eine Erläuterung, wie die einzelnen Linien gewonnen sind, dürfte dank der systematischen Bezeichnungsweise entbehrlich sein. Die einzelnen Längen sind

$$A A_2 = A_3 M = r_3 \cdot \frac{s_2}{t_1};$$

$$A A_3 = A_2 M = r_2 \cdot \frac{s_3}{t_1};$$

$$B B_1 = B_3 M = r_3 \cdot \frac{s_1}{t_2};$$

$$B B_3 = B_1 M = r_1 \cdot \frac{s_3}{t_2};$$

$$C C_1 = C_2 M = r_2 \cdot \frac{s_1}{t_3};$$

$$C C_2 = C_1 M = r_1 \cdot \frac{s_2}{t_3};$$

und da die Dreiecke $M B_1 C_1$, $A_2 M C_2$ und $A_3 B_3 M$ ähnlich sind, so bestimmt sich schließlich auch:

$$B_1 C_1 = \frac{r_1 s_1 t_1}{t_2 t_3};$$

$$C_2 A_2 = \frac{r_2 s_2 t_2}{t_1 t_3};$$

$$A_3 B_3 = \frac{r_3 s_3 t_3}{t_1 t_2}.$$

Zu erwähnen wäre etwa noch, daß von den neun beweglichen Stücken der Cayleyschen Figur je drei die nämlichen Drehungen ausführen und daß dies zugleich die Drehungen der Halbmesser r_1 , r_2 und r_3 in der Müllerschen Figur sind. Es drehen sich nämlich:

$B B_3$, $C C_2$ und $M B_1 C_1$ wie r_1

$A A_3$, $C C_1$ und $A_2 M C_2$ wie r_2

$A A_2$, $B B_1$ und $A_3 B_3 M$ wie r_3 .

1) Proceedings of the London Mathematical Society T. VII p. 142.

4. Das Dreieck der Fokalzentren.

Das Dreieck ABC der Fokalzentren ist bekanntlich den vorstehend aufgeführten Dreiecken ebenfalls ähnlich, seine Seiten stehen also im Verhältnis

$$BC : AC : AB = s_1 t_1 : s_2 t_2 : s_3 t_3,$$

und seine Gestalt ist unabhängig von den Zentralen und Halbmessern der festen Kreise. Ist $M_1 M_2 M_3 M$ ein Kreisviereck, so ist eins von den drei Produkten st gleich der Summe der beiden andern. In diesem Fall degeneriert das Dreieck ABC , seine Punkte fallen in eine gerade Linie und die Koppelkurve wird symmetrisch.

5. Zusammenhang der Drehungen und der Größenänderungen des Systems.

Es war schon oben bemerkt, daß sich die Dreiecke $B_1 C_1 M$, $MC_2 A_2$, $B_3 M A_3$ bzw. wie die Halbmesser r_1 , r_2 und r_3 drehen. Es liegt nahe, die Linienzüge $M_1 M_1 M$, $M_2 M_2 M$, $M_3 M_3 M$ zu Parallelogrammen $M_1 M_1 M M_I$, $M_2 M_2 M M_{II}$, $M_3 M_3 M M_{III}$ zu ergänzen, wo dann die in die Figur nicht eingetragenen Punkte M_I , M_{II} , M_{III} feste Lage auf den Dreiecken $B_1 C_1 M$, $MC_2 A_2$, $B_3 M A_3$ haben, also Koppelkurven beschreiben. Da nun z. B. der Strahl $M_1 M_I$ ein Maß für die Größenänderung des ähnlich veränderlichen Systems gibt und sich gleichzeitig mit demselben um den festen Punkt M_1 dreht, so stellt die von seinem Endpunkt M_I beschriebene Koppelkurve ein Polardiagramm der Drehungen und der Größenänderungen des Systems dar.

Die Vierecke $B_1 C_1 M M_I$, $A_2 C_2 M M_{II}$, $A_3 B_3 M M_{III}$ stehen übrigens in einem merkwürdigen Zusammenhang mit dem Viereck $M_1 M_2 M_3 M$, indem je drei von den vier Dreiecken, in welche jedes von ihnen zerlegt werden kann, je drei solchen des Vierecks $M_1 M_2 M_3 M$ ähnlich sind.

6. Zu einem gegebenen Cayleyschen Diagramm eine entsprechende Müllersche Figur zu zeichnen.

Während oben von der Müllerschen Figur ausgegangen und die zugehörige Cayleysche Figur konstruiert wurde, liefert uns der letzte Satz eine Lösung der Aufgabe, zu einer Cayleyschen Figur eine Müllersche zu zeichnen. Man nehme etwa M_I willkürlich an und erhält dann durch einfaches Aneinandersetzen ähnlicher Dreiecke auch die Punkte M_{II} und M_{III} , mit ihnen r_1 , r_2 , r_3 und zudem die Gestalt des Vierecks $M_1 M_2 M_3 M$.

Es fehlt jetzt nur noch die Orientierung des festen Dreiecks $M_1 M_2 M_3$.

Eine Ecke desselben, etwa M_1 kann man noch willkürlich annehmen und erhält dann M_2 und M_3 als die Lagen von M_2 und M_3 des veränderlichen Vierecks, wenn man M das eine Mal auf C , das andere Mal auf B , beide Male aber M_1 auf M_1 fallen läßt. Daß dann tatsächlich auch M auf A fällt, wenn M_2 auf M_2 und M_3 auf M_3 gelegt werden, folgt daraus, daß nach 4. die Gestalt des Dreiecks ABC nur von der Gestalt des Vierecks $M_1 M_2 M_3 M$ abhängt, also zu bestimmten B und C unabhängig von der Wahl von M_1 immer das nämliche A gehört.

Analytischer Beweis des Satzes von Herrn Reinhold Müller über die Erzeugung der Koppelkurve durch ein ähnlich-veränderliches System.

(Vgl. die vorhergehenden beiden Abhandlungen S. 247 und 252.)

Von R. MEHMKE in Stuttgart.

Bei Beschränkung auf die allereinfachsten Hilfsmittel der Vektorenrechnung — nämlich die Addition von Vektoren in Verbindung mit der Tatsache, daß in der Ebene einen Vektor mit einer beliebigen komplexen Zahl $\rho e^{i\varphi}$ multiplizieren soviel heißt wie die Länge des Vektors mit ρ multiplizieren und ihn zugleich um den Winkel φ drehen — läßt sich der in der Überschrift genannte Satz beweisen wie folgt.

Zur Bequemlichkeit des Lesers bezeichne ich die vorkommenden Punkte mit denselben Buchstaben, wie die Herren Müller und Skutsch. Da das Dreieck $M_3 M_1 M$ ähnlich-veränderlich ist, so geht der Vektor von M_3 nach M , für den man bekanntlich $M - M_3$ schreiben darf, aus dem Vektor von M_3 nach M_1 , also $M_1 - M_3$, durch Multiplikation mit einer konstanten komplexen Zahl, die durch b_1 bezeichnet sei, hervor:

$$M - M_3 = b_1 (M_1 - M_3),$$

was mit der Abkürzung

$$1 - b_1 = b_3$$

die Gleichung gibt:

$$(1) \quad M = b_3 M_3 + b_1 M_1.$$

Weil das Dreieck $M_1 M_2 M$ ebenfalls ähnlich-veränderlich ist, so besteht auch eine Gleichung der Form

$$(2) \quad M = c_1 M_1 + c_2 M_2,$$

worin c_1 und $c_2 = 1 - c_1$ konstante komplexe Zahlen sind.

Führen wir mit Herrn Müller die festen Punkte O_2 und O_3 (Herr Skutsch bezeichnet sie mit B und C) durch die Ähnlichkeiten ein:

$$M_3 M_1 O_2 \sim M_3 M_1 M \text{ und } M_1 M_2 O_3 \sim M_1 M_2 M,$$

die man durch die Gleichungen

$$(3) \quad O_2 = b_3 M_3 + b_1 M_1,$$

$$(4) \quad O_3 = c_1 M_1 + c_2 M_2$$

ausdrücken kann, und ebenso mit Herrn Skutsch die beweglichen Punkte B_1 und C_1 , erklärt durch die Ähnlichkeiten

$$M_3 M_1 B_1 \sim M_3 M_1 M \text{ und } M_1 M_2 C_1 \sim M_1 M_2 M,$$

denen die Gleichungen entsprechen:

$$(5) \quad B_1 = b_3 M_3 + b_1 M_1,$$

$$(6) \quad C_1 = c_1 M_1 + c_2 M_2.$$

Zuerst erhält man durch Subtraktion von (1) und (5), sowie von (2) und (6):

$$(7) \quad M - B_1 = b_1 (M_1 - M_1),$$

$$(8) \quad M - C_1 = c_1 (M_1 - M_1).$$

Aus diesen Gleichungen, oder noch deutlicher aus

$$M - C_1 = \frac{c_1}{b_1} (M - B_1)$$

oder auch

$$(b_1 - c_1) M = b_1 C_1 - c_1 B_1,$$

sieht man vor allem, daß bei beliebiger Bewegung von M_1 das Dreieck $B_1 C_1 M$ ähnlich-veränderlich ist. Ferner erkennt man, daß die Seiten dieses Dreiecks ihre Länge behalten, also das Dreieck sich als starres bewegt, dann und nur dann wenn $M_1 M_1$ konstante Länge hat d. h. wenn M_1 einen Kreis um M_1 als Mittelpunkt beschreibt. M_2 und M_3 können sich noch beliebig bewegen. Nun erhält man weiter durch Subtraktion von (5) und (3), sowie von (6) und (4):

$$(9) \quad B_1 - O_2 = b_3 (M_3 - M_3),$$

$$(10) \quad C_1 - O_3 = c_2 (M_2 - M_2).$$

Hiernach führt $B_1 (C_1)$ gegen den festen Punkt $O_2 (O_3)$ eine Bewegung aus, die zur Bewegung von $M_3 (M_2)$ gegen $M_3 (M_2)$ ähnlich ist. Durchziehen z. B. M_3 und M_2 je eine beliebige feste Gerade, so beschrieben auch B_1 und C_1 feste Geraden, und der Ort von M wäre folglich eine

Ellipse. Herr Müller läßt M_3 und M_2 sich auf Kreisen um M_3 und M_2 bewegen; dann beschreibt auch B_1 einen Kreis um O_2 , C_1 einen Kreis um O_3 , und folglich M eine Koppelkurve. Durch „zyklische Vertauschung“ der Punkte M_1, M_2, M_3 , sowie der zugehörigen Punkte M_1, M_2, M_3 erhält man die andern beiden Erzeugungen derselben Kurve, die nach Roberts möglich sind.

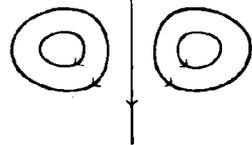
Wenn man die Buchstaben b und c nicht gewöhnliche komplexe Zahlen bedeuten ließe, sondern Vektorbrüche (Symbole für Affinitäten), so bräuchten die obigen Gleichungen Sätze über affin-veränderliche Systeme zum Ausdruck.

Über die Bildung von Wirbeln in reibungslosen Flüssigkeiten.

Von F. KLEIN in Göttingen.

Am Schlusse seiner berühmten Abhandlung über die Wirbelbewegungen beschreibt Helmholtz eine einfache Methode zur Erzeugung von Wirbeln, die jedermann bei seiner Tasse Kaffee alltäglich bequem ausprobieren kann. Man führe die (in die Flüssigkeit eingetauchte) Spitze eines Löffels eine kurze Strecke längs der Oberfläche der Flüssigkeit hin und ziehe sie dann plötzlich heraus. Es bleibt ein Wirbelfaden in der Flüssigkeit zurück, dessen Gestalt dem Umriß der eingetauchten Löffelspitze entspricht und der in Richtung der dem Löffel ursprünglich erteilten Geschwindigkeit in der Flüssigkeit fortschreitet. In die Beobachtung fallen natürlich nur die beiden Punkte, in denen dieser Wirbelfaden die freie Oberfläche der Flüssigkeit schneidet. Sie erscheinen als flache, oder — bei schnellerer

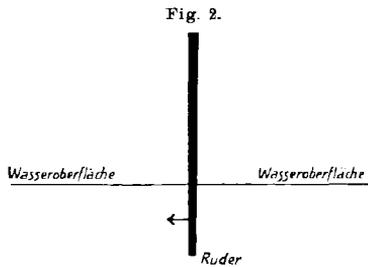
Fig. 1.



Vorwärtsbewegung des Löffels — als trichterförmige Vertiefungen der freien Oberfläche, um welche die Flüssigkeit zirkuliert. Es braucht kaum gesagt zu werden, daß diese Vertiefungen als solche aus dem Zusammenwirken der Schwerkraft und der auf die einzelnen Flüssigkeitsteilchen bei der Zirkulation wirkenden Zentrifugalkraft zu erklären sind.

Im größeren Maßstabe realisiert beobachtet man dieselbe Erscheinung beim Rudern: nach jedem Ruderschlag wandeln zwei den äußeren Kanten des jeweils eingetauchten Ruderteils entsprechende Vertiefungen über die Wasseroberfläche hin; die Mittelpunkte dieser Vertiefungen sind als Schnittpunkte der Wasseroberfläche mit einem Wirbelfaden aufzufassen, den man sich entlang dem Gesamtumriß des eingetauchten Ruderteils verlaufend denken muß.

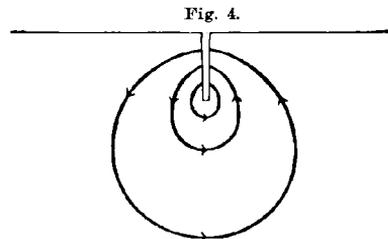
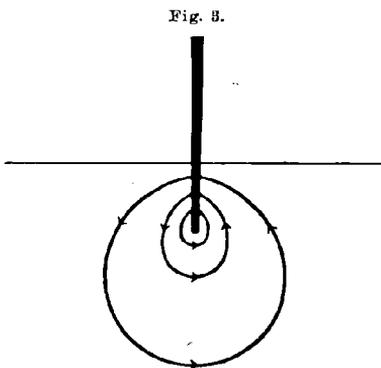
Wie ist diese Erscheinung zu erklären? Man wird zunächst jedenfalls an eine Reibungswirkung denken. Eine solche tritt aber, so viel ich sehen kann, höchstens sekundär hinzu; man darf annehmen, daß die Erscheinung in völlig reibungsfreien Flüssigkeiten im wesentlichen ebenso, wie geschildert, verlaufen würde. Der eigentliche Grund der den üblichen Aussagen der reibungsfreien Hydrodynamik offenbar widersprechenden Erscheinung scheint vielmehr ein ganz anderer zu sein.



Ich will mir der bequemen Auseinandersetzung wegen den ganzen Vorgang zweidimensional denken. In eine reibungsfreie, unendliche, durch eine horizontale Ebene begrenzte (nur der Schwere unterworfenen) Wassermasse werde ein unendlich breites, ebenes, von einer horizontalen Geraden begrenztes Ruderblatt eingetaucht, senkrecht zu seiner Ebene vorwärts bewegt und inmitten dieser Bewegung instantan herausgezogen. Figur 2 gebe ein schematisches Bild der Versuchsanordnung.

Die aufeinanderfolgenden Bewegungsvorgänge dürften dann folgendermaßen zu schildern sein:

1. So lange das Ruder in voller Tiefe eingetaucht ist und vorwärts geschoben wird, herrscht die bekannte Potentialbewegung, deren Geschwindigkeitskurven nebenstehend abgebildet sind. — Diese Geschwindigkeitskurven sitzen nicht genau senkrecht auf dem Ruderblatt auf, sondern bilden

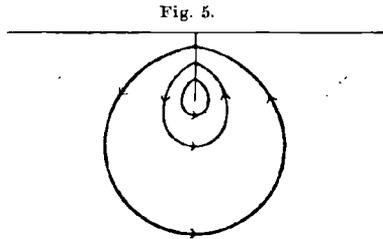


mit ihm einen nach unten hin spitzen Winkel, der um so kleiner ist, je mehr man an die untere Begrenzungslinie des Ruderblattes herangeht.

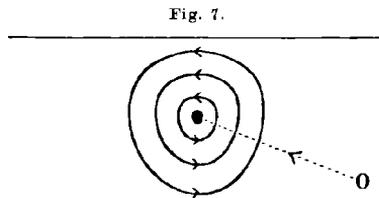
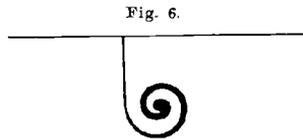
2. Jetzt ziehe man das Ruder plötzlich vertikal aus dem Wasser heraus. Irgend welchen Einfluß auf die Bewegung der Wasserteilchen hat dies, da ausdrücklich von Reibung abgesehen werden soll, unmittelbar nicht. Die einzige instantane Änderung ist die, daß sich jetzt

da, wo vorher das Ruder stand, in der Wassermasse ein vertikaler Schlitz befindet.

3. Nun aber kommt die Schwere, bez. der aus ihr resultierende Flüssigkeitsausdruck zur Geltung, unter dessen Einfluß die Wasserp^{ar}tien links und rechts von diesem Schlitz (den man sich als sehr schmal vorstellen möge) sofort zusammenfließen werden. Man hat jetzt in der nur noch von der Horizontalebene begrenzten Wassermasse da, wo vorher das Ruder stand, eine Diskontinuitätsfläche für die den einzelnen Wasserteilchen beizulegenden Geschwindigkeiten, d. h. eine Wirbelschicht. Die Intensität des Wirbels nimmt dabei vom oberen Ende der Schicht gegen das untere hin zu.



4. Und nun scheint die Entwicklung dieser Wirbelschicht die zu sein, daß sie sich sehr rasch um das untere Ende spiralförmig aufrollt, so daß nach einiger Zeit die Bewegung merklich so stattfindet, als befände sich in der Nähe des unteren Endes der ursprünglichen Schicht ein nahezu punktförmiges Wirbelgebiet *O*. (Die von *O* entfernter liegenden Stücke der Wirbelschicht verteilen sich in stetiger Deformation auf den immer länger werdenden bis an die Wasseroberfläche reichenden Ast der Spirale und verlieren damit für die Flüssigkeitsbewegung immer mehr an Bedeutung). — Das Wirbelgebiet *O* unserer Figur ist natürlich der Schnitt unserer Zeichnungsebene mit einem senkrecht gegen dieselbe (also parallel mit der unteren Begrenzungskante des Ruders) verlaufenden Wirbelfaden und mit dem Gesagten also das Zustandekommen eines solchen Wirbelfadens erklärt. —



Es erübrigt, daß wir diese ganze Überlegung vom Zweidimensionalen ins Dreidimensionale übertragen (indem wir statt des unendlich ausgedehnten Ruderblattes ein solches von endlicher Breitenausdehnung setzen). Dann tritt an Stelle des gefundenen geradlinigen Wirbelfadens augenscheinlich ein solcher, der (mehr oder minder genau) der Kontur des eingetauchten Ruderteils folgt, so wie es der Versuch, von dem wir ausgingen, vor Augen stellt. —

Man wird natürlich verlangen können, daß die hier nur qualitativ

gefaßten Bewegungsvorgänge quantitativ formuliert, bzw. aus den Differentialgleichungen der Hydrodynamik abgeleitet werden. Indem ich dies anderen Mathematikern überlasse, beantworte ich nur noch die zunächst hervortretende Frage, wie denn die vorgetragene Theorie mit dem allverbreiteten, von Helmholtz selbst in seiner oben genannten Abhandlung gegebenen Satz verträglich ist, daß durch Bewegung starrer Körper in einer reibungslosen nur der Schwere unterworfenen Flüssigkeit niemals Wirbel entstehen können. Offenbar liegt dies darin, daß wir das Zusammenfließen zweier ursprünglich voneinander getrennter Flüssigkeitspartien ins Auge zu fassen hatten, während bei der gewöhnlichen Begründung des genannten Satzes angenommen wird, daß Flüssigkeitsteilchen, welche einmal an der Oberfläche der Flüssigkeit liegen, immer auch an der Oberfläche bleiben.

Langeoog, 20. August 1909.

Zur Statik ebener Fachwerke.

Von F. PFEIFFER in Göttingen.

Die folgenden Ausführungen schließen sich aufs engste an die kürzlich unter dem Titel: „Über Selbstspannungen ebener Diagramme“ erschienene Abhandlung von Herrn Geheimrat Klein¹⁾ an. Den analytisch-geometrischen Betrachtungen der genannten Arbeit möge hier die graphische Darstellung angereicht werden.

Es wird gezeigt werden, wie die Heranziehung der zu geeigneten ebenen Diagrammen gehörigen räumlichen Polyeder für die Konstruktion reziproker Diagramme und damit auch für die graphische Bestimmung der Selbstspannungen eines ebenen Fachwerks zweckmäßig gehandhabt werden kann, und es sollen im Anschluß an die genannte Abhandlung speziell die Verhältnisse betrachtet werden, wie sie bei Fachwerkdigrammen auftreten, die als Projektionen *einseitiger* geschlossener Polyeder aufzufassen sind.

1. Es genügt, hier voranzuschicken, daß ein räumliches *geschlossenes* Polyeder, das aus ebenen Polygonen zusammengesetzt ist, als Spannungsfläche aufgefaßt, die *Selbstspannungen* in demjenigen ebenen Fachwerk gibt, das als seine orthogonale Projektion angesehen werden kann.²⁾

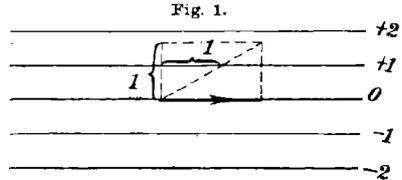
Wir werden mit Vorteil die Darstellung der ebenen Begrenzungs-

1) Mathematische Annalen Bd. 67 (1909).

2) F. Klein und K. Wieghardt. Über Spannungsflächen und reziproke Diagramme, mit besonderer Berücksichtigung der Maxwell'schen Arbeiten. Archiv der Mathematik und Physik. III. Reihe. VIII. 1. und 2. Heft. (1904).

flächen des Polyeders mit Hilfe der *Höhenlinien* und des *Gradienten* benützen, eine Methode, die Herr Prof. Runge in seinen Vorlesungen über graphische Statik zu verwenden pflegt.

Eine Ebene schneide die Horizontalebene (*Zeichenebene*) nach der Geraden O . Wir wählen eine Einheitsstrecke und schreiten nun auf einer Geraden der darzustellenden



Ebene senkrecht zur Höhenlinie O fort, bis die senkrechte Erhebung über die Horizontalebene gleich der Einheitsstrecke ist. Durch die Projektion des so erreichten Punktes auf

die Horizontalebene ziehen wir die Parallele zu O und haben damit die Höhenlinie 1 . Die Höhenlinien $2, 3, \dots$ sind die Parallelen in gleichen Abständen, die Parallelen $-1, -2, \dots$ geben die Höhenlinien für den absteigenden Teil der Ebene.

Diejenige Erhebung der Ebene, welche einem Punkte entspricht, dessen Projektion die senkrechte Entfernung 1 in der Zeichenebene von der Nulllinie hat, gibt die Größe des Gradienten der Ebene. Wir wollen verabreden, daß wir diesen Gradienten als gerichtete Strecke längs einer Höhenlinie (gewöhnlich der Nulllinie) eintragen und ihm dabei eine solche Pfeilrichtung geben, daß (von oben auf das Zeichenblatt gesehen) der um 90° entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn gedrehte Vektor Richtung und Größe des Anstiegs der Ebene gibt.

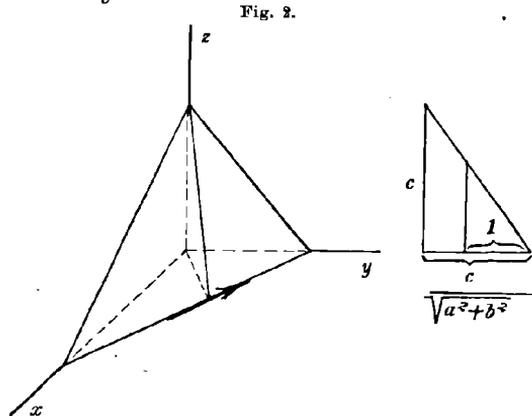
Ist die Gleichung der darzustellenden Ebene in einem rechtwinkligen Koordinatensystem, dessen xy -Ebene mit der Zeichenebene zusammenfällt:

$$z = ax + by + c,$$

so ist:

$$ax + by + c = 0$$

die Gleichung der Höhenlinie O , und die Länge des Gradienten ist $\sqrt{a^2 + b^2}$.



Zieht man durch den Anfangspunkt des Koordinatensystems einen parallelen Vektor zu dem auf der Höhenlinie eingetragenen Vektor (wir wollen diesen Vektor auf der Höhenlinie im folgenden der Kürze halber als den *Gradienten* bezeichnen), so haben die Koordinaten seines Endpunktes die Werte: $x = b, y = -a$.

Wenn wir also in einem Koordinatensystem, dessen Achsen parallel der x - und y -Achse sind, vom Anfangspunkt, dem *Pol*, aus, in den der Gradient der Horizontalebene zusammenschrupft, die Gradienten der verschiedenen Ebenen des zu einem vorgegebenen Diagramm als Spannungsfläche gehörigen Polyeders abtragen, so sind die Endpunkte dieser Gradienten gerade die Punkte $x = b, y = -a$ des reziproken Diagramms, welche nach den Formeln (5) der S. 262, Anm. 1 zitierten Arbeit den Polyederebenen:

$$z = ax + by + c$$

entsprechen.

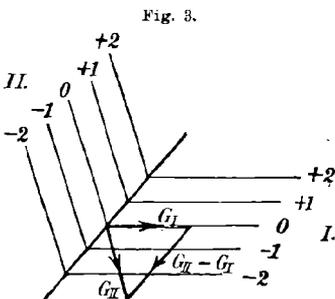
Wir haben so in dem Auftragen der Gradienten von einem Punkt aus ein äußerst bequemes Mittel, uns die Punkte des reziproken Diagramms zu verschaffen.

Ist G_k der so aufgetragene Gradient der Ebene (k) des Polyeders, G_l der der Ebene (l), so ist nach den Formeln (4) der soeben zitierten Arbeit die geometrische Differenz $G_l - G_k$ zunächst der Größe nach die Spannung längs der Projektion der Schnittkante (kl) der Ebenen (k) und (l) und damit also die Stabspannung in dem Stab des Fachwerks, der die Projektion der betreffenden Polyederkante ist.

2. Wie können wir nun eindeutig bestimmen, ob die im Stab auftretende Spannung, die wir nun ihrem absoluten Betrage nach kennen, ein *Zug* oder ein *Druck* ist?

Wir wollen uns zunächst nicht ein geschlossenes Polyeder denken, sondern eine Facettenfläche mit angehefteter Polyederzone, die die Ebene nur einfach überdeckt, wie man sie bei einem Fachwerk, das unter der Wirkung eines Gleichgewichtssystems von äußeren Kräften steht, als Spannungsfläche erhält. Die Projektionen der beiden ebenen Facetten,

die in einer Kante der Spannungsfläche zusammenstoßen, liegen dann zu verschiedenen Seiten der Projektionslinie der Kante im Diagramm.



Wir tragen die Gradienten G_I und G_{II} der beiden Ebenen gemäß unserer Festsetzung ein und erhalten beim Übergang von Ebene I nach Ebene II als geometrische Differenz der Gradienten $G_{II} - G_I$ den eingezeichneten Vektor parallel der Projektion der Schnittkante der Ebenen I und II.

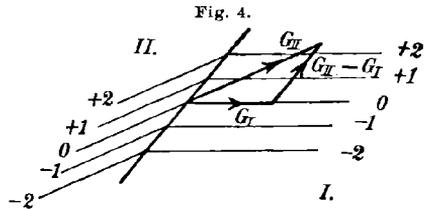
Wir bekommen nun das richtige Vorzeichen der Spannung, wenn wir festsetzen: *Der Vektor gibt uns die Kraftwirkung auf den Stabteil zur Linken eines den Stab in der vorgeschriebenen Richtung überschreitenden Beobachters.* Das

steht im Einklang mit den allgemeinen Ausführungen auf Seite 3 der S. 262, Anm. 2 genannten Abhandlung.

In der Figur erhielten wir also beim Übergang von I nach II Druckspannung im Stabe. Bei Übergang von II nach I hat der Vektor $G_I - G_{II}$ gerade die entgegengesetzte Pfeilrichtung wie vorher $G_{II} - G_I$, wir erhalten also wieder eine Druckwirkung auf den für diese Überschreitungsrichtung als linken aufzufassenden Stabteil.

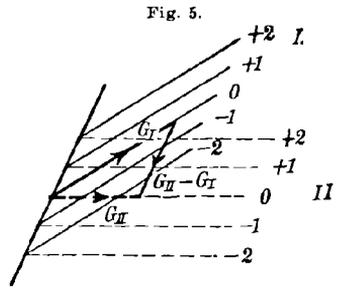
Die nebenstehende Figur 4 entspricht einer Zugspannung im Stabe.

Dies die Regel für einfache Überdeckung der xy -Ebene durch das Diagramm.



Bei doppelter Überdeckung betrachten wir zunächst eine Ebene I des ersten Blattes und eine Ebene II des zweiten Blattes, welche beide nach einer Kante des Umrißpolygons zusammenhängen. Tragen wir die Gradienten beider Ebenen gemäß unserer Vorschrift ein, so gilt für den Übergang von I nach II die aufgestellte Regel. Gehen wir aber von II nach I,

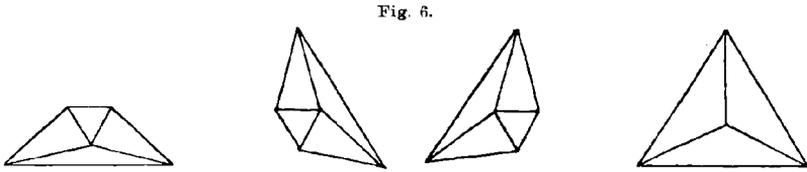
so überschreiten wir den Stab in demselben Sinne wie oben, würden also gemäß unserer Regel jetzt gerade die entgegengesetzte Spannung wie vorher erhalten. Wir müssen also beim Übergang von einer Ebene des zweiten Blattes nach einer solchen des ersten Blattes als maßgebend für die Spannung im Stabe, die durch die Gradientendifferenz gegebene Kraftwirkung auf den rechts von der Überschreitungsstelle gelegenen Stabteil nehmen. Dasselbe gilt, wenn wir von einer Ebene des zweiten Blattes in eine andere Ebene des zweiten Blattes übergehen.



Wir können so zusammenfassen: *Schreiten wir auf die Schnittkante zu in einer Ebene des ersten Blattes, so gibt der resultierende Vektor die Kraftwirkung auf den linken Stabteil, gehen wir in einer Ebene des zweiten Blattes auf die Schnittkante zu, so stellt der resultierende Vektor die Kraftwirkung auf den rechten Stabteil vor.*

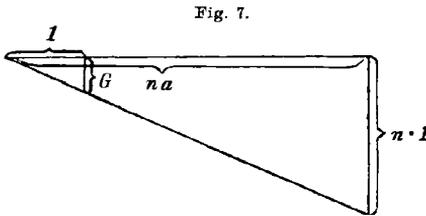
3. Wenden wir diese Sätze nun für den Fall eines einfachen geschlossenen Polyeders an. Das geschlossene Polyeder sei ein zweiseitiges und gehöre zu dem in Fig. 9 gezeichneten Diagramm als Spannungsfäche. Das Diagramm hat 7 Knotenpunkte und 15 Stäbe, also $15 - (2 \cdot 7 - 3) = 4$ linear unabhängige Selbstspannungen. Man kann leicht 4 solcher unabhängiger Selbstspannungen angeben, wenn man

jedesmal nur die Stäbe des Diagramms in Spannung versetzt denkt, die die folgenden Figuren enthalten:



Wir wählen für unsere Konstruktion ein ganz bestimmtes Polyeder, indem wir den z -Ordinaten der Punkte die im Diagramm beigezeichneten Werte erteilen und erhalten damit eine bestimmte Selbstspannung unseres Diagramms. (Die Ebenen des Polyeders sind in Fig. 9 mit a, \dots, k bezeichnet, die Buchstaben für die unsichtbaren Ebenen sind in Klammer gesetzt. Fig. 11 gibt eine Darstellung des zum Diagramm gehörigen räumlichen Polyeders in schiefer Parallelepipedprojektion).

Die Konstruktion des reziproken Diagramms folgt aus den vorhergehenden Ausführungen ohne weiteres; man trägt von einem beliebigen Punkte O aus die Gradienten nach der gegebenen Vorschrift auf und verbindet die Endpunkte solcher Gradienten, die aneinanderstoßenden Ebenen des Polyeders entsprechen. Für die Ermittlung des Gradienten G braucht man zur Richtungsbestimmung nur die Richtung der Höhenlinien; seine Länge ergibt sich wohl am einfachsten, wenn man die einmal gewählte Einheitsstrecke 1 als Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks und den Abstand a zweier aufeinanderfolgender Höhenlinien als einen Hypotenusenabschnitt aufträgt, der andere Abschnitt der Hypotenuse ist die Länge des Gradienten. Größere Zeichengenauigkeit gibt jedoch bestehende einfache Konstruktion.



Um nun die Unterscheidung in Zug- und Druckspannungen zu machen, bedienen wir uns einer Vorstellungsweise, die uns beim Übergang zu den einseitigen Polyedern von Wert sein wird und die auch gelegentlich von Herrn Prof. Runge angedeutet wurde.

Wir wollen von einer bestimmten Seitenfläche unseres zweiseitigen Polyeders ausgehend, die Außenseite der Fläche etwa weiß, die Innenseite rot bemalen. Schreiten wir dabei über das ganze Polyeder hinweg, so kommen wir (außen sowohl als innen) wieder in eine Seitenfläche, welche bereits bemalt ist und zwar in derselben Farbe, die wir nun wieder auftragen würden. Die Färbung der einzelnen Seitenflächen ist also eine eindeutige: jede Fläche ist außen weiß, innen rot; und so

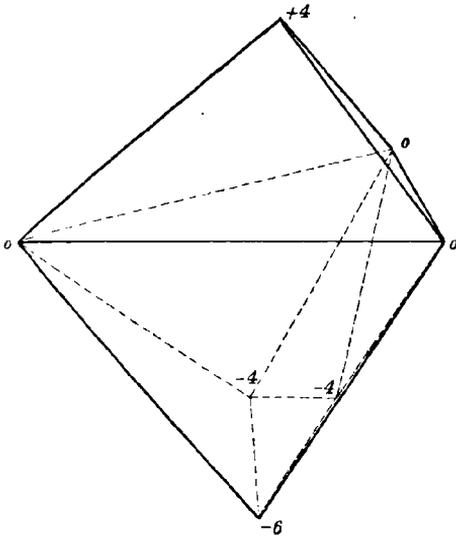
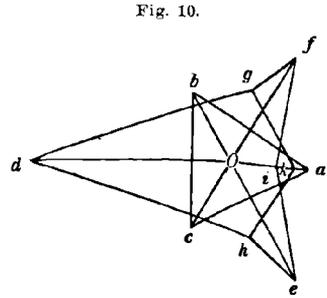
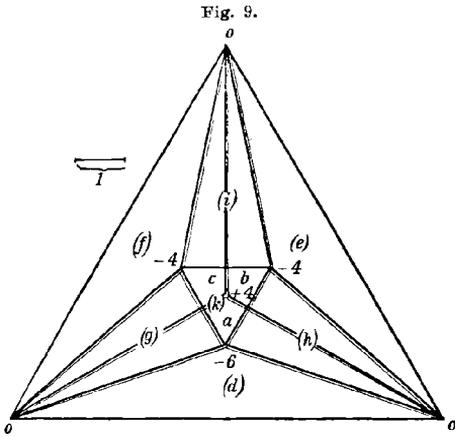


Fig. 11.

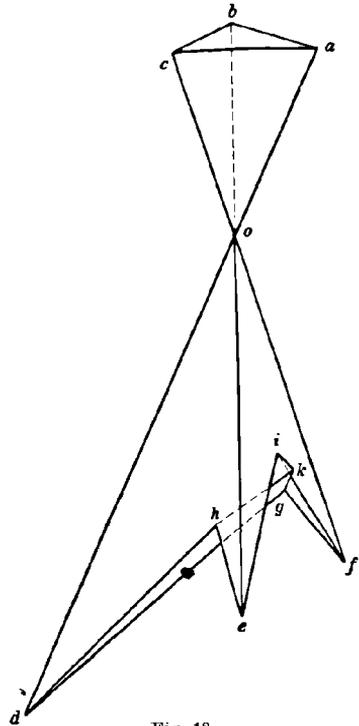


Fig. 12.

oft wir auch bei beliebigem Wege auf der Außen- oder Innenseite des Polyeders eine Seitenfläche bemalen, es gehört immer zu ein und derselben Seite die weiße, zur andern die rote Farbe. Wenn wir jetzt das Diagramm betrachten, das Projektion dieses so bemalten Polyeders ist,

so werden sich, von oben gesehen, die Seitenflächen des Polyeders oberhalb der räumlichen Umrißlinie als weiße Polygone, die unterhalb der Umrißlinie als rote Polygone projizieren, und es ist ohne weiteres klar, was wir im Diagramm mit der Bezeichnung weiße und rote Polygone meinen.

Unsere Vorzeichenregel für die Stabspannungen können wir dann so aussprechen: *Kommen wir in einem weißen Polygon des Diagramms auf einen Stab zu, so gibt uns der Vektor des reziproken Kräfteplans die Kraftwirkung auf den linken Stabteil, bei einem roten Polygon die auf den rechten Stabteil.* Damit findet man nun leicht die Zug- und Druckspannung in unserem Fachwerksdiagramm. Die gedrückten Stäbe sind in Fig. 9 wie gebräuchlich durch Schattenstriche gekennzeichnet.

4. Wie liegen nun die Verhältnisse bei *einseitigen* geschlossenen Polyedern als Spannungsflächen? Wir nehmen wie Hr. Klein in seiner oben genannten Annalenarbeit als Polyeder eine Pyramide, die über den freien Kanten eines aus 5 Dreiecken bestehenden räumlichen Möbius'schen Bandes errichtet ist. Die Projektion derselben ist das Fig. 13 gezeichnete Diagramm. Die den 6 Knotenpunkten beigeetzten Zahlen geben die z -Koordinaten der Ecken des räumlichen Polyeders an, die in Klammer beigefügten Zahlen bilden die Nummerierung der Knotenpunkte. Die Ebenen des Polyeders sind:

a : 132	f : 136
b : 243	g : 356
c : 354	h : 526
d : 415	i : 246
e : 521	k : 416.

Das Diagramm hat 6 Knotenpunkte und 15 Stäbe, also $15 - (2 \cdot 6 - 3) = 6$ Selbstspannungssysteme. Durch bestimmte Wahl der Ordinaten haben wir wieder eine bestimmte Selbstspannung herausgegriffen. Fig. 15 stellt das räumliche Polyeder vor, dabei sind — wie auch in den übrigen räumlichen Figuren — die eigentlichen Polyederkanten, welche Fachwerkstäben entsprechen, soweit sie unsichtbar sind, punktiert eingetragen, während die unsichtbaren Durchdringungskanten des Polyeders nicht gezeichnet sind.

Der reziproke Plan, Fig. 14, läßt sich zunächst in genau derselben Weise durchführen wie bei einem zweiseitigen Polyeder, ein abweichendes Verhalten ergibt sich erst bei Bestimmung des Vorzeichens der Spannungen.

Beginnen wir auch wieder, von einer Seitenfläche des Polyeders ausgehend, das Polyeder zu bemalen, etwa die Oberseite der Ausgangs-

fläche weiß, die Unterseite rot. Dann können wir zunächst den Weg so wählen, daß das ganze Polyeder schließlich bemalt ist, jede Seitenfläche auf einer Seite weiß, auf einer rot. Wir erhalten also auch in

Fig. 13.

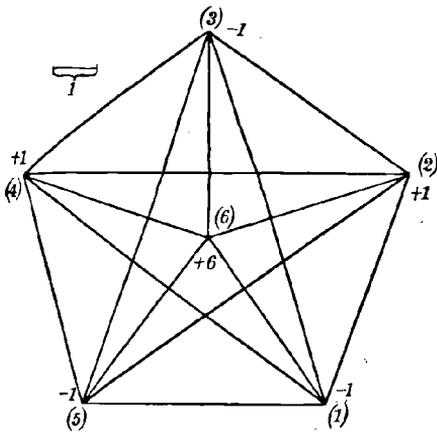


Fig. 14.

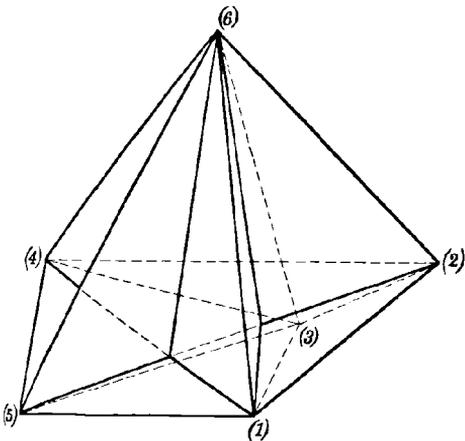
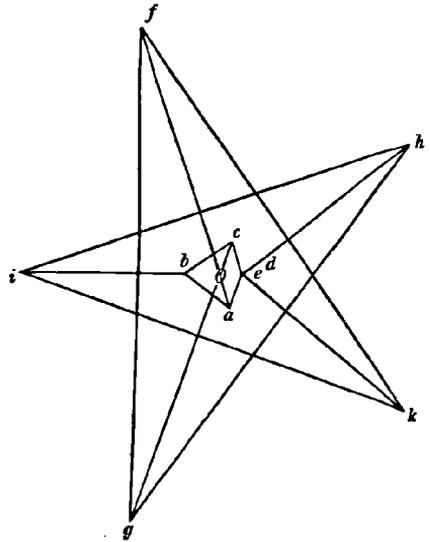


Fig. 15.

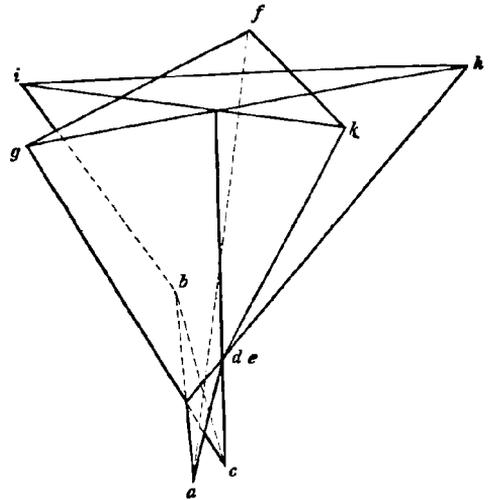


Fig. 16.

der Projektion die Polygone in einer ganz bestimmten Farbe und können demnach Zug und Druck nach unsern Regeln unterscheiden. Wandern wir aber jetzt auf unserem räumlichen Polyeder geeignet weiter, so zeigt sich, daß wir nun Flächenstücke, die wir bisher in der

einen Farbe bemalt haben, gerade in der andern bemalen müßten. Das überträgt sich natürlich auf die Polygone im Diagramm, und unsere Regeln würden uns jetzt gerade das entgegengesetzte Vorzeichen der Spannungen liefern wie vorher: wir erhalten kein eindeutig bestimmtes Vorzeichen der Spannung.

Das sind die Widersprüche, auf die man bei Betrachtung einseitiger Polyeder als Spannungsflächen kommt. Sie lassen sich, wie Herr Geheimrat Klein gezeigt hat, beseitigen, wenn man die einseitige Fläche zu einer zweiseitigen ergänzt durch doppelte Überdeckung, also gewissermaßen durch Hinzufügen einer Ergänzungsfläche, die genau dieselben Ecken, Kanten und Flächen hat wie die Ausgangsfläche. Dabei hat man das gegebene Diagramm als Doppelprojektion dieser zweiseitigen Fläche aufzufassen, das reziproke Diagramm ist das doppelt zu zählende der einseitigen Fläche. Jedes Polygon, das sich als Ebene der Ausgangsfläche weiß projiziert, projiziert sich als Ebene der Ergänzungsfläche rot, und umgekehrt, und die Bestimmung der Vorzeichen liefert nach unserer Regel zu jeder Druckspannung in einem Stab genau dieselbe Zugspannung in ihm und umgekehrt, also lauter *Nullspannungen*.

5. Wir kommen zur wirklichen Bestimmung der Stabspannungen, wie sie einem gewissen Selbstspannungszustand in unserem Diagramm entsprechen. *Nach den Ausführungen der wiederholt zitierten Abhandlung erledigt sich dieselbe durch Heranziehung eines zweiseitigen Polyeders, dessen Doppelprojektion unser Diagramm ist.* Wie dort gezeigt, gibt es zu einem bestimmten Spannungszustand immer ein Doppelpolyeder, das die xy -Ebene als Symmetrieebene hat; wir wollen ein solches Polyeder wählen, dessen Ecken im übrigen die z -Koordinaten haben, wie sie den Knotenpunkten des Diagramms, Fig. 17 beigeschrieben sind. (In den Klammern stehen wieder die Nummern der Ecken des Polyeders). Die Polyederebenen sind:

$$\begin{array}{lllll}
 a_1 : 1'2''3'; & b_1 : 2''3'4''; & c_1 : 3'4''5'; & d_1 : 4''5'1''; & e_1 : 5'1''2'; \\
 a_2 : 1''2'3''; & b_2 : 2'3''4'; & c_2 : 3''4'5''; & d_2 : 4'5''1'; & e_2 : 5''1'2''; \\
 f_1 : 6'1'3'; & g_1 : 6'3'5'; & h_1 : 6'5'2'; & i_1 : 6'2'4'; & k_1 : 6'4'1'; \\
 f_2 : 6''1''3''; & g_2 : 6''3''5''; & h_2 : 6''5''2''; & i_2 : 6''2''4''; & k_2 : 6''4''1''.
 \end{array}$$

Der Symmetrie der Spannungsfläche in bezug auf die xy -Ebene entspricht die Symmetrie des reziproken Diagramms Fig. 18 in bezug auf den Pol.

Wir erhalten jetzt zu jedem Stab des Diagramms zwei parallele Linien im reziproken Diagramm, infolge der Symmetrieverhältnisse unseres Polyeders sind diese beiden Parallelen von gleicher Länge. Unsere Vorzeichenregel liefert uns für diese beiden parallelen Kräfte

Fig. 17.

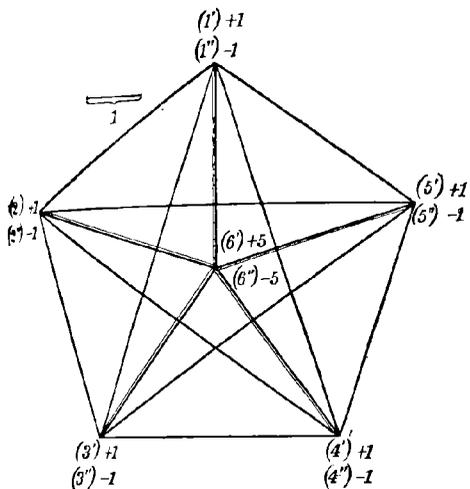


Fig. 18.

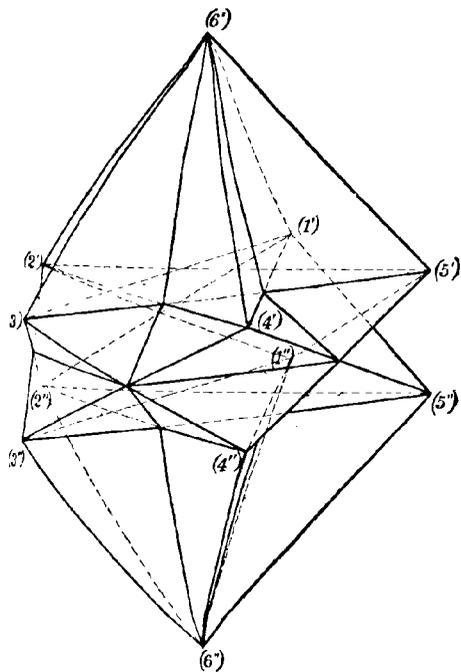
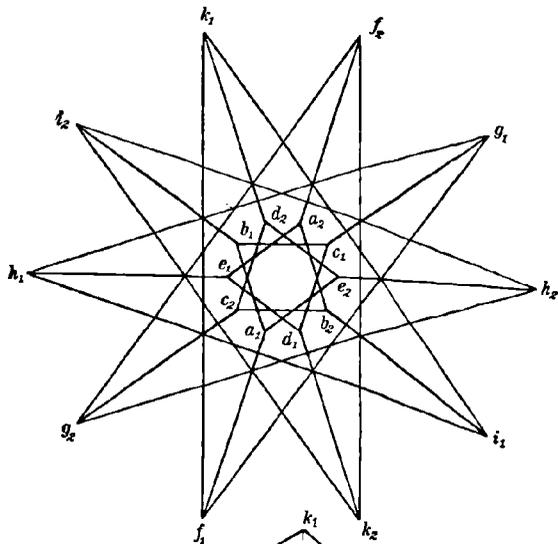


Fig. 19.

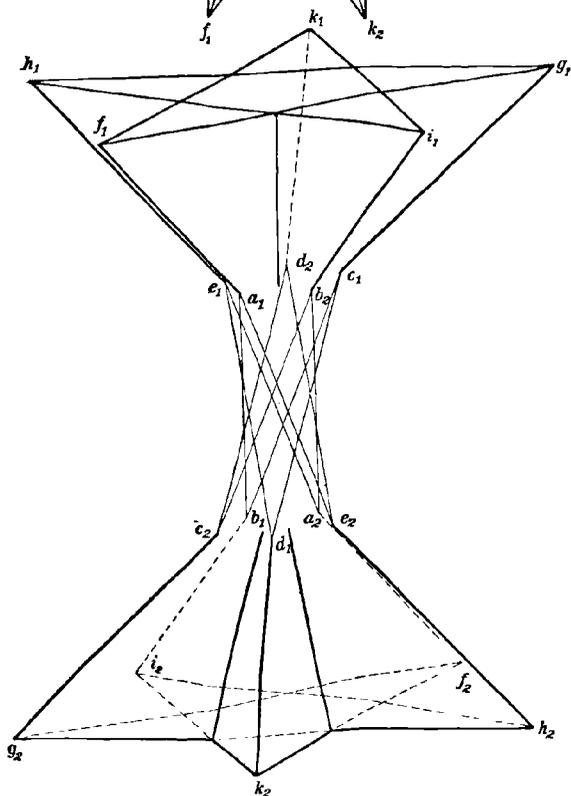


Fig. 20.

dasselbe Vorzeichen; die Stabspannung ergibt sich durch Addition der beiden Teilspannungen. (Die gedrückten Stäbe des Diagramms sind wieder durch Schattenstriche gekennzeichnet).

6. Schließlich noch eine Bemerkung über die reziproken räumlichen Polyeder selbst. Die Spannungsfläche haben wir willkürlich gewählt; es ist natürlich leicht, sich das räumliche Polyeder zu konstruieren, wie das in den Fig. 11, 15, 19 geschehen ist. Aber auch die Punkte der reziproken Polyeder lassen sich bequem erhalten. Bei der vorliegenden reziproken Verwandtschaft ist die Beziehung zwischen den Koordinaten x, y, z der Ausgangsfläche $z = z(x, y)$ und den Koordinaten ξ, η, ζ der reziproken Fläche gegeben durch:

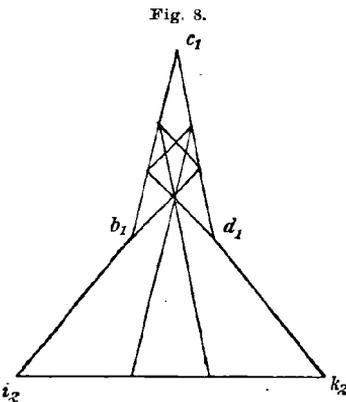
$$\xi = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \eta = -\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \zeta = z - x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y},$$

also ist für den Fall der Ebene $z = ax + by + c = 0$:

$$\xi = b, \quad \eta = -a, \quad \zeta = c.$$

Die ξ -Koordinaten der Ecken des reziproken Polyeders sind also einfach die Ordinaten der Schnittpunkte der ihnen entsprechenden Ebenen der Ausgangsfläche mit der z -Achse.

In den Fig. 12, 16, 20 sind diese reziproken Polyeder in schiefer Parallelprojektion dargestellt. Den mit a, b, \dots bezeichneten Ebenen des Ausgangspolyeders entsprechen immer die gleichbezeichneten Punkte



des reziproken Polyeders. Die Zusammenhängeverhältnisse der reziproken Polyeder sind sehr einfach zu übersehen. Dagegen sind die gegenseitigen Durchdringungen der Polyederflächen schon ziemlich kompliziert. Besonders ist dies bei Fig. 20 der Fall; es ist aus diesem Grunde nur der obere und untere Teil des Polyeders mit den Durchdringungslinien gezeichnet, im mittleren Teil sind nur diejenigen Kanten des Polyeders, deren Projektionen Fachwerkstäbe sind (ohne Rücksicht auf Sichtbarkeit und Unsichtbarkeit) eingetragen. Prinzipielle Schwierigkeiten bietet die Konstruktion der gegenseitigen Durchdringungslinien nicht; man erkennt leicht, daß jede der 10 Seitenflächen des Polyeders z. B. $i_2 k_2 a_1 c_1 b_1 i_2$ zusammen mit ihren Durchdringungslinien mit den andern Flächen durch beistehende Figur dargestellt ist.

Prinzipielle Schwierigkeiten bietet die Konstruktion der gegenseitigen Durchdringungslinien nicht; man erkennt leicht, daß jede der 10 Seitenflächen des Polyeders z. B. $i_2 k_2 a_1 c_1 b_1 i_2$ zusammen mit ihren Durchdringungslinien mit den andern Flächen durch beistehende Figur dargestellt ist.

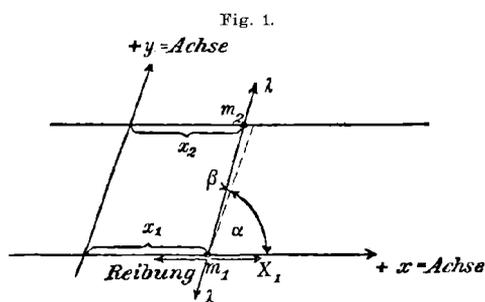
Göttingen, 1. Juni 1909.

Zur Frage der sog. Coulombschen Reibungsgesetze.

Von F. PFEIFFER in Göttingen.

Die folgenden Ausführungen stehen in direktem Zusammenhange mit den Aufsätzen der Herren Klein und Prandtl im letzten Heft dieser Zeitschrift. Ihr Zweck ist, das von Herrn Geheimrat Klein in seiner Abhandlung betrachtete Bewegungsproblem für den Fall einer elastisch nachgiebigen Verbindungsstange der beiden Massenpunkte genauer zu diskutieren und zu zeigen, wie auf Grund der Ergebnisse, die wir erhalten werden, die zunächst paradox erscheinenden Resultate des direkten Ansatzes für starre Körper eine anschauliche Erklärung finden.¹⁾

Es handelt sich um folgendes Problem. Zwei Massenpunkte von den Massen m_1 und m_2 seien durch eine Stange, deren Masse vernachlässigt werden kann, verbunden. Die beiden Massenpunkte können sich auf zwei parallelen geradlinigen Führungen bewegen, die Führung von m_1 soll den Reibungskoeffizienten μ haben, die von m_2 soll vollkommen glatt sein. Auf den Massenpunkt m_2 wirken nur die Reaktionskräfte von Stange und Führung, auf m_1 außer diesen und der Reibungs-



kraft noch eine äußere Massekraft X_1 in Richtung der Führung. Die Stange sei gegen Zug und Druck etwas elastisch nachgiebig, alle übrigen Teile des Systems seien vollständig starr gedacht. Durch die Länge l der Verbindungsstange im spannungslosen Zustand und den Abstand der beiden Führungen ist der Winkel α der Stange gegen die Führungen bestimmt. (Wir wollen uns dabei auf den Fall $\alpha' < \frac{\pi}{2}$ beschränken; $\alpha > \frac{\pi}{2}$ gibt keinen wesentlichen Unterschied.) Es werden im folgenden Bewegungen des Systems bei gegebenen Anfangsbedingungen untersucht und insbesondere die Grenzvorgänge bestimmt werden, gegen die die Bewegungen des elastischen Systems bei unbegrenzt wachsendem Elastizitätsmodul der Stange konvergieren.

1) In analoger Weise verfährt übrigens Herr de Sparre, um gewisse Unstetigkeiten in der Bewegung eines Systems mit Reibung zu erklären. (Bull. de la Soc. math. de France, t. 35 (1907).)

I. Aufstellung und Integration der Differentialgleichungen für die Bewegung des Systems bei elastischer Stange.

Als x -Achse wählen wir die Führungsgerade von m_1 ; die Kraft X_1 wirke stets in Richtung der positiven x -Achse. Als y -Achse nehmen wir eine Gerade unter dem Winkel α gegen die $+x$ -Achse; die Abszissen der beiden Massenpunkte seien x_1 bzw. x_2 . Die Spannung in der Verbindungsstange sei mit λ bezeichnet, und zwar bedeute ein positiver Wert von λ Druckspannung, ein negativer Zugspannung. Die Vergrößerung des Winkels der Stange gegen die Führung infolge der elastischen Nachgiebigkeit der Stange sei β . Dann lauten die Differentialgleichungen der Bewegung:

$$\begin{aligned} m_1 x_1'' &= X_1 - \lambda \cos(\alpha + \beta) - \lambda(\mu) \sin(\alpha + \beta), \\ m_2 x_2'' &= \lambda \cos(\alpha + \beta), \end{aligned}$$

wobei $(\mu) = \pm \mu$ ist.

Dabei ist das Vorzeichen von (μ) so zu bestimmen, daß für $x_1' \geq 0$:

$$\lambda(\mu) x_1' > 0$$

ist.

Durch Subtraktion der beiden Gleichungen folgt, wenn die elastische Nachgiebigkeit der Stange so gering ist, daß wir $\sin \beta = \beta$ vernachlässigen und $\cos \beta = 1$ setzen können:

$$x_1'' - x_2'' = \frac{X_1}{m_1} - \lambda \left\{ \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \cos \alpha + \frac{1}{m_1} (\mu) \sin \alpha \right\}.$$

Setzt man

$$x_1 - x_2 = \xi$$

und führt

$$\lambda = \nu \xi,$$

wo ν eine Elastizitätskonstante ist und einen sehr großen positiven Zahlenwert hat, als neue Variable ein, so wird die Differentialgleichung für λ :

$$\lambda'' = \nu \frac{X_1}{m_1} - \nu \lambda \left\{ \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \cos \alpha + \frac{1}{m_1} (\mu) \sin \alpha \right\}.$$

Wir wollen uns darauf beschränken, den Fall der *steilgestellten* Stange zu betrachten, für den:

$$\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \cos \alpha < \frac{1}{m_1} \mu \sin \alpha$$

ist, da der Fall der *flachgestellten* Stange mit:

$$\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \cos \alpha > \frac{1}{m_1} \mu \sin \alpha$$

auch bei direktem Ansatz für starre Körper keine Besonderheiten zeigt. Auch auf die Grenzlage der Stange mit:

$$\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \cos \alpha = \frac{1}{m_1} \mu \sin \alpha$$

soll im folgenden nicht weiter eingegangen werden.

Vermöge der Abkürzungen:

$$\frac{X_1}{m_1} = a,$$

$$\left\{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right\} \cos \alpha + \frac{1}{m_1} \mu \sin \alpha = d,$$

$$\frac{1}{m_1} \mu \sin \alpha - \left\{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right\} \cos \alpha = f$$

geht die Differentialgleichung für λ über in:

$$\lambda'' = \nu a - \nu \lambda \bar{d} \text{ bzw. } \lambda'' = \nu a + \nu \lambda f,$$

je nachdem $(\mu) = \pm \mu$ ist.

Die allgemeinsten Lösungen dieser Differentialgleichungen sind:

$$(1) \quad \begin{cases} \lambda = \frac{a}{\bar{d}} + A_1 \sin t\sqrt{\nu \bar{d}} + A_2 \cos t\sqrt{\nu \bar{d}} = \lambda_I \\ \text{bzw.} \\ \lambda = -\frac{a}{f} + B_1 e^{t\sqrt{\nu f}} + B_2 e^{-t\sqrt{\nu f}} = \lambda_{II}, \end{cases}$$

wo A_1, A_2, B_1, B_2 willkürliche Integrationskonstante sind.

Da bei der gemachten Annahme über β :

$$x_2'' = \frac{\lambda}{m_2} \cos \alpha,$$

so erhält man unter den Anfangsbedingungen $x_2 = x_{2_0}$ und $x_2' = x_{2_0}'$ für $t = 0$ in den beiden Fällen folgende Formeln für die jeweiligen Geschwindigkeiten und Abszissen der beiden Massenpunkte:

a) für $\lambda = \lambda_I$:

$$(2a) \quad \begin{cases} x_2' = \frac{\cos \alpha}{m_2} \left(\frac{a}{\bar{d}} t - \frac{A_1}{\sqrt{\nu \bar{d}}} \cos t\sqrt{\nu \bar{d}} + \frac{A_2}{\sqrt{\nu \bar{d}}} \sin t\sqrt{\nu \bar{d}} + \frac{A_1}{\sqrt{\nu \bar{d}}} \right) + x_{2_0}', \\ x_2 = \frac{\cos \alpha}{m_2} \left(\frac{a t^2}{2} - \frac{A_1}{\nu \bar{d}} \sin t\sqrt{\nu \bar{d}} - \frac{A_2}{\nu \bar{d}} \cos t\sqrt{\nu \bar{d}} + \frac{A_1}{\sqrt{\nu \bar{d}}} t + \frac{A_2}{\nu \bar{d}} \right) + x_{2_0}' t + x_{2_0}, \\ x_1' = x_{2_0}' + \frac{A_1 \sqrt{\bar{d}}}{\sqrt{\nu}} \cos t\sqrt{\nu \bar{d}} - \frac{A_2 \sqrt{\bar{d}}}{\sqrt{\nu}} \sin t\sqrt{\nu \bar{d}}, \\ x_1 = x_2 + \frac{a}{\nu \bar{d}} + \frac{A_1}{\nu} \sin t\sqrt{\nu \bar{d}} + \frac{A_2}{\nu} \cos t\sqrt{\nu \bar{d}}; \end{cases}$$

b) für $\lambda = \lambda_{II}$:

$$(2b) \begin{cases} x_2' = \frac{\cos \alpha}{m_2} \left(-\frac{a}{f} t + \frac{B_1}{\sqrt{vf}} e^{t\sqrt{vf}} - \frac{B_2}{\sqrt{vf}} e^{-t\sqrt{vf}} - \frac{B_1 - B_2}{\sqrt{vf}} \right) + x_2', \\ x_2 = \frac{\cos \alpha}{m_2} \left(-\frac{a}{f} \frac{t^2}{2} + \frac{B_1}{vf} e^{t\sqrt{vf}} + \frac{B_2}{vf} e^{-t\sqrt{vf}} - \frac{B_1 - B_2}{\sqrt{vf}} t - \frac{B_1 + B_2}{vf} \right) + x_2' t + x_2, \\ x_1' = x_2' + \frac{B_1 \sqrt{f}}{\sqrt{v}} e^{t\sqrt{vf}} - \frac{B_2 \sqrt{f}}{\sqrt{v}} e^{-t\sqrt{vf}}, \\ x_1 = x_2 - \frac{a}{vf} + \frac{B_1}{v} e^{t\sqrt{vf}} + \frac{B_2}{v} e^{-t\sqrt{vf}}. \end{cases}$$

Das eine oder andere der beiden Formelsysteme ist zu verwenden, je nachdem $(\mu) = \pm \mu$ ist.

Die 4 Fälle der Bewegung des elastischen Systems unter Zug- und Druckbeanspruchung der Stange mit $x_1' > 0$ (nach rechts) und $x_1' < 0$ (nach links) sind mit den zugehörigen Werten von (μ) und λ in folgender Tabelle zusammengestellt:

	Druck $\lambda > 0$	Zug $\lambda < 0$
Rechts $x_1' > 0$	$(\mu) = + \mu$ $\lambda = \lambda_{II}$	$(\mu) = - \mu$ $\lambda = \lambda_{II}$
Links $x_1' < 0$	$(\mu) = - \mu$ $\lambda = \lambda_{II}$	$(\mu) = + \mu$ $\lambda = \lambda_I$

c) Besonders zu behandeln ist der Fall der Bewegung des Systems bei Ruhe von m_1 (der beispielsweise eintritt, wenn die Geschwindigkeit von m_1 durch die Reibung an der Führung vernichtet wird). Dann gilt, nach unseren Annahmen über die Kleinheit des Winkels β , für die Bewegung von m_2 :

$$x_2'' = \frac{\lambda \cos \alpha}{m_2} = \frac{v \cos \alpha}{m_2} (x_1 - x_2),$$

wo x_1 die konstante Abszisse von m_1 ist. Sind C_1 und C_2 zwei willkürliche Integrationskonstante, so ist:

$$(2c) \quad x_2 = x_1 + C_1 \sin t \sqrt{\frac{v \cos \alpha}{m_2}} + C_2 \cos t \sqrt{\frac{v \cos \alpha}{m_2}}.$$

II. Spezielle Fälle der Bewegung des Systems bei elastischer Stange.

Die Bewegungen des elastischen Systems sind sehr mannigfaltig, je nach den Anfangsbedingungen, das heißt, je nach der Größe und dem Vorzeichen von λ , λ' und x_1' bei $t = 0$.

Es mögen hier einige typische Fälle der Bewegung, die ich zahlenmäßig durchgeführt habe, ohne die etwas umständlichen Zahlenrechnungen selbst wiedergegeben und durch Figuren veranschaulicht werden. Es wurde gewählt:

$$\alpha = 76^\circ, \quad X_1 = 200 \text{ [gr]}, \quad m_1 = \frac{60}{981} \frac{\text{[gr]}}{\text{cm}}, \quad m_2 = \frac{300}{981} \frac{\text{[gr]}}{\text{cm}}, \quad v = 1000 \frac{\text{[gr]}}{\text{cm}},$$

Damit wird: $\mu = 0,5.$

$$d = 12,68 \frac{\text{cm}}{\text{[gr] sec}^2}, \quad \sqrt{vd} = 112,6 \frac{1}{\text{sec}},$$

$$f = 3,18 \frac{\text{cm}}{\text{[gr] sec}^2}, \quad \sqrt{vf} = 56,4 \frac{1}{\text{sec}}.$$

1. Anfangsbewegung nach rechts mit Druck in der Stange.

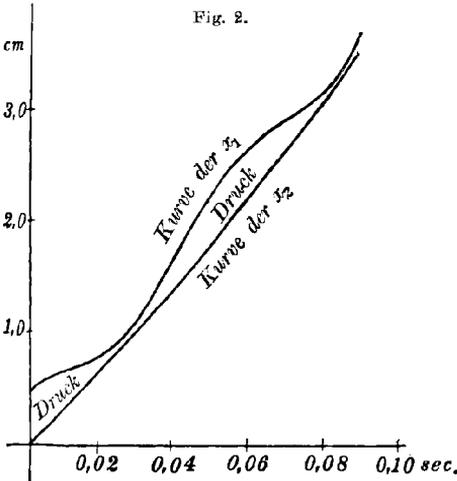
$\alpha)$ Für die gewählten Anfangsbedingungen:

$$t = 0: \quad x_{1_0} = 0,5 \text{ cm}, \quad x_{2_0} = 0, \quad x'_{1_0} = x'_{2_0} = 30 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$$

werden die Integrationskonstanten in den Formeln 2a):

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 242.$$

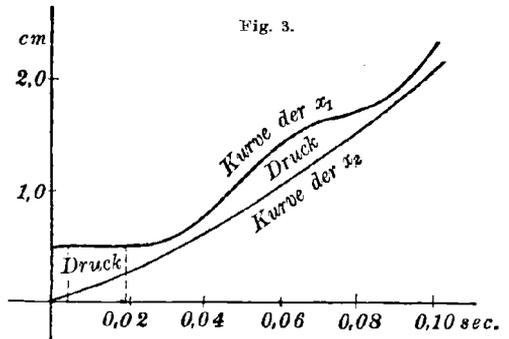
Bei dieser Wahl der Anfangsbedingungen bleibt λ stets positiv, die Stange steht beständig unter Druck. m_1 und m_2 führen neben der beschleunigten Bewegung nach rechts sehr rasche ungedämpfte Schwingungen aus (vgl. Fig. 2). Für x_2 ergibt sich durch Überlagerung sehr kleiner Schwingungen mit der Parabel eine von dieser nur sehr wenig abweichende Kurve ohne Wendepunkte.



$\beta)$ Für die Anfangswerte:

$$t = 0: \quad x_{1_0} = 0,5 \text{ cm}, \quad x_{2_0} = 0, \quad x'_{1_0} = x'_{2_0} = 10 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$$

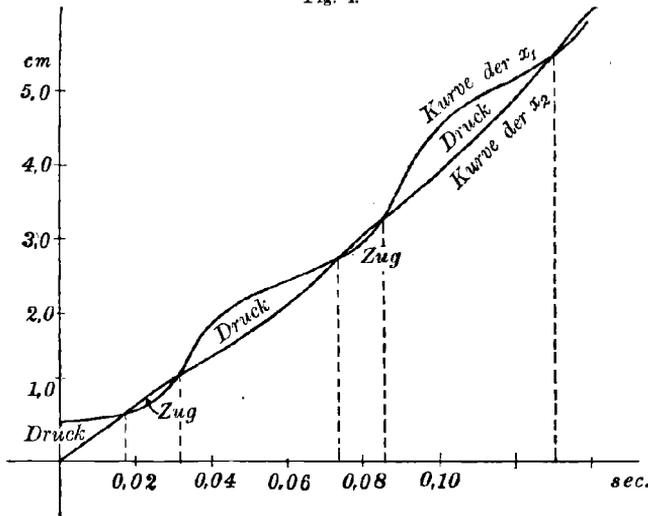
bleiben die Integrationskonstanten A_1



und A_2 dieselben wie vorher, λ bleibt stets positiv, aber x'_1 wird schon sehr rasch zu Null. Dies bewirkt, daß zunächst m_1 sehr rasch zur

Ruhe kommt; nachdem es wieder beschleunigt ist, tritt dann eine Schwingungsbewegung derselben Art wie in α) ein (vgl. Fig. 3).

Fig. 4.



γ) Einen anderen Typus erhält man für die Anfangsbedingungen:

$$t = 0: x_{1_0} = 0,5 \text{ cm}, x_{2_0} = 0, x'_{1_0} = 10 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}, x'_{2_0} = 30 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}.$$

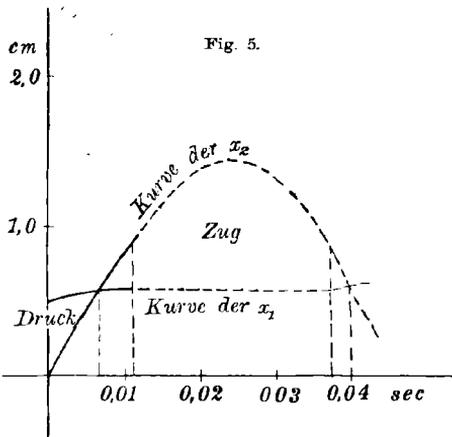
Hier tritt ein Umschlagen der Bewegung unter Druck in solche unter Zug ein, bevor $x'_1 = 0$ wird, und die Bewegung setzt sich auch in der

Weise fort, daß sie abwechselnd unter Druck und Zug nach rechts hin weiter geht, wie Fig. 4 zeigt.

δ) Bei noch größerem Geschwindigkeitsunterschied, wie er den Anfangswerten:

$$t = 0: x_{1_0} = 0,5 \text{ cm}, x_{2_0} = 0, \\ x'_{1_0} = 10 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}, x'_{2_0} = 90 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$$

entspricht, tritt nach einmaligem Spannungswechsel in Zug kein Umschlagen in Druck mehr ein; bei dem wachsenden Zug kommt m_1 sehr bald zur Ruhe. Soweit ist in Fig. 5



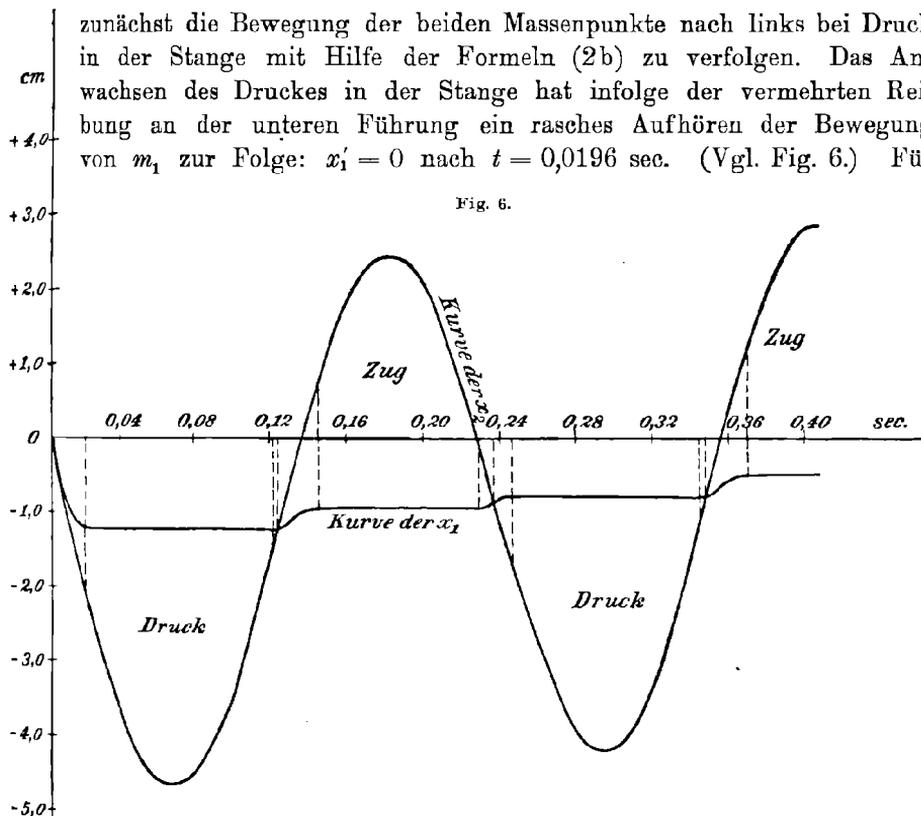
die Bewegung verfolgt; es tritt dann eine Schwingung von m_2 bei ruhendem m_1 und dann Weiterbewegung nach rechts auf, etwa in der Art der folgenden Fig. 6.

2. Anfangsbewegung nach links mit Druck in der Stange.

Hier ist unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen:

$$t = 0: \quad x_{1_0} = x_{2_0} = 0, \quad x'_{1_0} = x'_{2_0} = -100 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$$

zunächst die Bewegung der beiden Massenpunkte nach links bei Druck in der Stange mit Hilfe der Formeln (2b) zu verfolgen. Das Anwachsen des Druckes in der Stange hat infolge der vermehrten Reibung an der unteren Führung ein rasches Aufhören der Bewegung von m_1 zur Folge: $x'_1 = 0$ nach $t = 0,0196$ sec. (Vgl. Fig. 6.) Für



die Weiterbewegung von m_2 bei ruhendem m_1 gelten die Formeln (2c). Die Abszisse von m_2 erreicht nach $t = 0,0680$ sec. ein Minimum und nimmt dann wieder zu. Die Abnahme des Druckes in der Stange hat zur Folge, daß m_1 bei $t = 0,1210$ sec. wieder in Bewegung versetzt wird ($x''_1 > 0$)¹⁾; von diesem Moment ab hat man $x'_1 > 0$, $\lambda > 0$, also nach den Formeln (2a) weiter zu rechnen, bis $\lambda = 0$ wird (bei $t = 0,1239$ sec.). Die Werte $x_1 = x_2$, x'_1 und x'_2 lassen sich für diesen Punkt berechnen und auf Grund der Formeln (2b) läßt sich die Bewegung mit $\lambda < 0$, $x'_1 > 0$ weiter verfolgen, bis $x'_1 = 0$ wird bei $t = 0,1455$ sec., von wo ab wieder die Schwingung

1) Dabei ist der Reibungskoeffizient der Ruhe in der Rechnung auch = 0,5 gesetzt.

von m_2 bei ruhendem m_1 erfolgt. Im Momente $t = 0,2298$ sec. wird m_1 wieder mitbewegt, diese Bewegung mit $x'_1 > 0$, $\lambda < 0$ dauert an bis $t = 0,2380$ sec., von wo ab dann wieder eine Bewegung nach rechts unter Druck mit Stillstand des m_1 von $t = 0,2456$ sec. bis $t = 0,3460$ sec. statthat. Bei dem zur Zeit $t = 0,3488$ sec. eintretenden Spannungswechsel ergibt die Rechnung für λ , x'_1 und x'_2 Werte, die nur wenig von denen bei $t = 0,1239$ sec. abweichen, so daß anzunehmen ist, daß die Bewegung sich wiederholend ungedämpft weiterverläuft, während die Unterschiede wohl auf Ungenauigkeit der mit dem Rechenschieber gewonnenen Resultate zurückzuführen sind. Bei der noch berechneten Weiterbewegung mit $x'_1 > 0$, $\lambda < 0$ tritt $x'_1 = 0$ bei $t = 0,3701$ sec. und das Maximum von x_2 bei $t = 0,4077$ sec. ein.

3. Anfangsbewegung nach rechts mit Zug in der Stange.

Eine Bewegung dieser Art findet sich bereits unter den eben besprochenen Fällen zur Zeit $t = 0,1239$ sec. beginnend mit den Anfangswerten:

$$x_{1_0} = x_{2_0} = -1,2104 \text{ cm}, \quad x'_{1_0} = 4,655 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}, \quad x'_{2_0} = 98,09 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}.$$

4. Anfangsbewegung nach links mit Zug in der Stange.

Eine solche den Anfangswerten

$$t = 0: \quad x_{1_0} = -0,5 \text{ cm}, \quad x_{2_0} = 0, \quad x'_{1_0} = x'_{2_0} = -50 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$$

entsprechende Bewegung ist in Fig. 7 dargestellt, ihre Berechnung erfolgt nach den Formeln (2a), bis bei $t = 0,0108$ sec. mit einem Spannungswechsel in der Stange eine Bewegung nach links unter Druck eintritt, die entsprechend den Werten:

$$x_1 = x_2 = -0,559 \text{ cm},$$

$$x'_1 = -52,778 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}, \quad x'_2 = -81,978 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$$

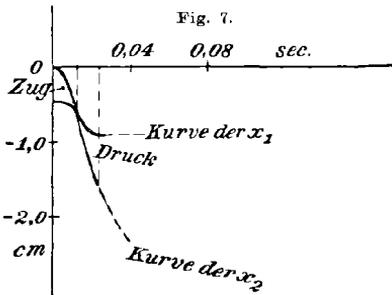
$$\text{bei } t = 0,0108 \text{ sec.}$$

im wesentlichen den Charakter der unter 2. geschilderten Bewegung hat. Dem

Werte $x'_1 = 0$ bei $t = 0,0230$ sec. entsprechen die Werte $x_1 = -0,9090$ cm, $x_2 = -1,5487$ cm und $x'_2 = -79,74 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$.

5. Wichtige partikuläre Lösungen.

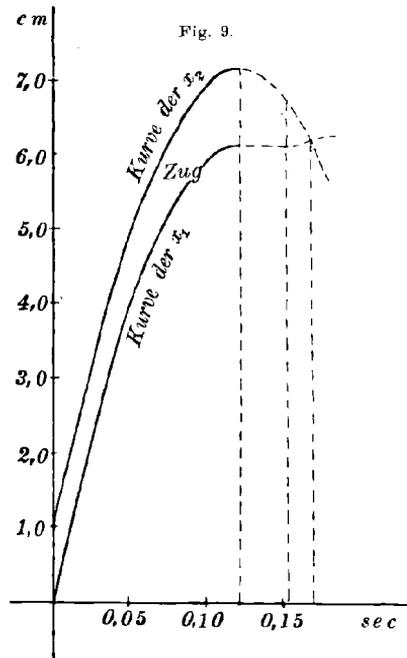
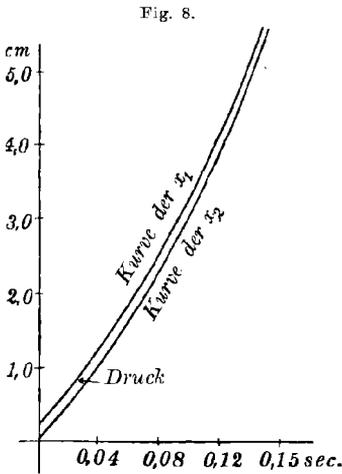
α) Neben diesen Bewegungen mit willkürlichen Anfangsbedingungen seien noch zwei wichtige partikuläre Lösungen der Differentialgleichungen



für λ und die ihnen entsprechenden Bewegungen des Systems erörtert. Im Falle $\lambda x'_1 > 0$, also bei:

$$\lambda = \lambda_I = \frac{a}{d} + A_1 \sin t\sqrt{vd} + A_2 \cos t\sqrt{vd},$$

erhält man durch passend gewählte Anfangsbedingungen eine Lösung, die sich für $A_1 = 0$ und $A_2 = 0$ aus der allgemeinen Lösung ergibt. Diese partikuläre Lösung ist natürlich nur für $x'_1 > 0$, $\lambda > 0$ zulässig, dagegen nicht bei $x'_1 < 0$, $\lambda < 0$ da $\lambda = \frac{a}{d}$ positiv ist. Unter den Bewegungen des elastischen Systems nach rechts mit Druck in der Stange gibt es also *eine*, für welche λ während der ganzen Bewegung den konstanten Wert $\frac{a}{d}$ hat, während es für Bewegung nach links unter Zug *keine* Bewegung mit von der Zeit unabhängigem Werte von λ



gibt. Bei dieser einen besonderen Bewegung sind die Kurven für x_1 und x_2 als Funktionen von t *Parabeln*, die sich durch die konstante Ordinatendifferenz $\xi = \frac{a}{v d}$ unterscheiden.

β) Ganz analog ist für $\lambda x'_1 < 0$, also bei:

$$\lambda = \lambda_{II} = -\frac{a}{f} + B_1 e^{t\sqrt{vf}} + B_2 e^{-t\sqrt{vf}}$$

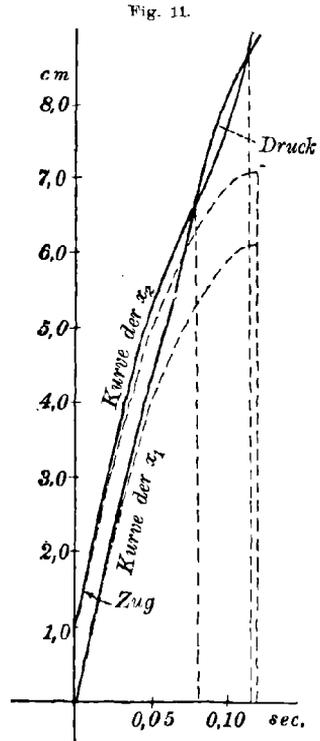
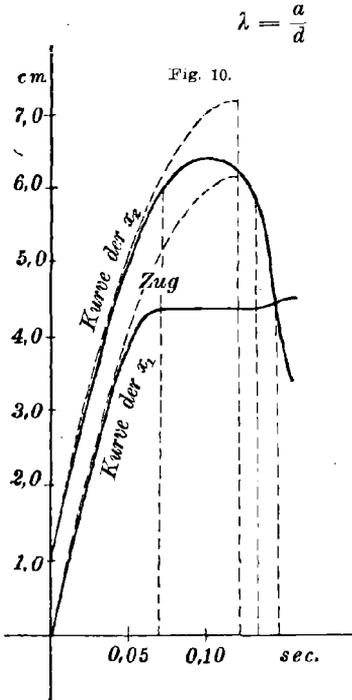
nur im Falle $x'_1 > 0$, $\lambda < 0$, aber nicht bei $x'_1 < 0$, $\lambda > 0$ die partikuläre Lösung mit $B_1 = 0$, $B_2 = 0$:

$$\lambda_{II} = -\frac{a}{f}$$

zulässig. Es gibt daher auch unter den Bewegungen des elastischen

Systems nach rechts mit Zug in der Stange eine Bewegung mit konstantem Werte von λ , während es nach links auch unter den Bewegungen mit Druck keine mit von der Zeit unabhängigem λ gibt.

Von diesen beiden ausgezeichneten Bewegungen mit $x'_1 > 0$ ist die erste für



eine gleichförmig beschleunigte Bewegung mit der Beschleunigung

$$x''_1 = x''_2 = \frac{\cos \alpha \cdot a}{m_2 d} = \frac{\cos \alpha \cdot a}{m_2 \left\{ \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \cos \alpha + \frac{1}{m_1} \mu \sin \alpha \right\}} \quad (\text{vgl. Fig. 8}),$$

die andere mit

$$\lambda = -\frac{a}{f}$$

eine gleichförmig verzögerte Bewegung mit der Beschleunigung:

$$x''_1 = x''_2 = -\frac{\cos \alpha \cdot a}{m_2 f} = -\frac{\cos \alpha \cdot a}{m_2 \left\{ \frac{1}{m_1} \mu \sin \alpha - \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \cos \alpha \right\}} \quad (\text{vgl. Fig. 9}).$$

6. Nachbarbewegungen zu der gleichförmig verzögerten Bewegung.

Es seien noch zwei Bewegungen betrachtet, bei denen die Anfangswerte sich nur sehr wenig von denen unterscheiden, die auf die verzögerte Bewegung unter β) führen.

α) Nimmt man für:

$$t = 0: x_{1_0} = 0, x_{2_0} = 1,05 \text{ cm}, x'_{1_0} = x'_{2_0} = 100 \frac{\text{cm}}{\text{sec}},$$

so erhält man eine Bewegung, die in der Weise von der verzögerten Bewegung abweicht, daß mit wachsendem Zug die Bewegung von m_1 allmählich zur Ruhe kommt und die Bewegung damit den in Fig. 10 gegebenen Typus zeigt.

β) Für:

$$t = 0: x_{1_0} = 0, x_{2_0} = 1,01 \text{ cm}, x'_{1_0} = x'_{2_0} = 100 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$$

weicht die Bewegung in der Weise von der gleichförmig verzögerten ab, daß Spannungswechsel und dann Fortsetzung der Bewegung unter abwechselndem Zug und Druck eintritt (Fig. 11). Diese beiden Nachbarbewegungen lassen bereits die Labilität der gleichförmig verzögerten Bewegung erkennen.

III. Allgemeine Diskussion der Bewegung des Systems bei elastischer Stange.

Wir werden die Bewegungen des elastischen Systems vollständig übersehen, wenn wir angeben können, wie bei jedem möglichen Tripel von Anfangswerten $\lambda_0, \lambda'_0, x'_{1_0}$ die Bewegung weiter verläuft. (Der Index soll — hier, wie auch im Folgenden — andeuten, daß es sich um die Werte von λ, λ' und x'_1 bei $t = 0$, bei Beginn der Bewegung, handelt.) Die Bewegungen werden der Art nach verschieden sein, je nachdem λ bzw. x'_1 im Verlaufe der Bewegung das Zeichen von λ_0 bzw. x'_{1_0} beibehalten oder nicht; werden sie zu Null, so wird es für den Charakter der Bewegung wesentlich sein, ob λ oder x'_1 zeitlich früher Null wird.

Die Frage, bei welchen Anfangswerten Zeichenänderungen des λ , also Spannungswchsel, eintreten können und bei welchen nicht, erfordert, für Bewegungen mit $x'_{1_0} > 0, \lambda_0 > 0$ und $x'_{1_0} < 0, \lambda_0 < 0$ zu bestimmen, ob und für welche Werte A_1, A_2 die Gleichung:

$$0 = \frac{a}{d} + A_1 \sin t\sqrt{\nu d} + A_2 \cos t\sqrt{\nu d}$$

eine positive Wurzel t hat; für $x'_{1_0} > 0, \lambda_0 < 0$ und $x'_{1_0} < 0, \lambda_0 > 0$ ist festzustellen, ob und für welche Werte B_1, B_2 die Gleichung:

$$0 = -\frac{a}{f} + B_1 e^{t\sqrt{\nu f}} + B_2 e^{-t\sqrt{\nu f}}$$

für einen positiven Wert von t erfüllt wird. Wir verfahren in beiden Fällen am einfachsten so, daß wir A_1 und A_2 und ebenso B_1 und B_2 als Koordinaten von Punkten in einem rechtwinkligen System in der

Ebene deuten und dann jedesmal zunächst nach den Punkten fragen, für die der Spannungswechsel *gleichzeitig* auftritt. Im Falle der Gleichung:

$$0 = \frac{a}{d} + A_1 \sin t\sqrt{vd} + A_2 \cos t\sqrt{vd}$$

erhalten wir für den geometrischen Ort der Punkte, für die $\sin t\sqrt{vd} = \text{const} = C$ ist, die Gerade:

$$0 = \frac{a}{d} + A_1 C + A_2 \sqrt{1 - C^2},$$

und wenn wir C alle Werte $-1 \leq C \leq +1$ beilegen, so überdeckt das System der damit gegebenen Geraden den Teil der Ebene, dessen Punkte Werte A_1, A_2 als Koordinaten haben, denen Spannungswechsel entsprechen kann. Die Enveloppe dieser Geraden ist der Kreis:

$$A_1^2 + A_2^2 = \frac{a^2}{d^2};$$

zu dem Paar von Koordinaten eines jeden Punktes, der nicht innerhalb dieses Kreises liegt, gibt es (abgesehen von periodischen Wiederholungen) zwei Wurzeln $t \geq 0$ der Gleichung:

$$0 = \frac{a}{d} + A_1 \sin t\sqrt{vd} + A_2 \cos t\sqrt{vd}.$$

Übertragen wir diese Ergebnisse nun auf die Anfangswerte λ_0 und λ'_0 . Nach den Formeln (1) haben wir die Beziehungen:

$$\lambda_0 = \frac{a}{d} + A_2; \quad A_2 = \lambda_0 - \frac{a}{d},$$

$$\lambda'_0 = \sqrt{vd} A_1; \quad A_1 = \frac{\lambda'_0}{\sqrt{vd}}.$$

Die Gebietseinteilung in der λ_0, λ'_0 -Ebene wird also durch die Ellipse:

$$\left(\lambda_0 - \frac{a}{d}\right)^2 + \frac{\lambda'^2_0}{vd} = \frac{a^2}{d^2}$$

bewirkt; die Geraden:

$$0 = \frac{a}{d} + C \frac{\lambda'_0}{\sqrt{vd}} + \sqrt{1 - C^2} \left(\lambda_0 - \frac{a}{d}\right)$$

sind die Tangenten an die Ellipse, die das Gebiet außerhalb der Ellipse mit Einschluß der Grenzkurve doppelt überdecken (Fig. 12).

Für jedes Paar von Anfangswerten λ_0, λ'_0 , das als Koordinaten einem Punkt zugehört, der nicht innerhalb dieser Ellipse liegt, kann also im Laufe der Bewegung Spannungswechsel in der Verbindungsstange der beiden Massenpunkte eintreten.

In analoger Weise verfahren wir, um die Werte B_1, B_2 zu bestimmen, zu denen es Wurzeln $t \geq 0$ der Gleichung:

$$0 = -\frac{a}{f} + B_1 e^{t\sqrt{vf}} + B_2 e^{-t\sqrt{vf}}$$

gibt. Die Geraden der Ebene, deren Punkten Koordinaten B_1, B_2 zugehören, die denselben Wert von t liefern, sind gegeben durch:

$$0 = -\frac{a}{f} + C' B_1 + \frac{1}{C'} B_2,$$

wo $C' \geq 1$ ist. Die Umhüllende der Geraden ist bei beliebigem C' die Hyperbel:

$$4 B_1 B_2 = \frac{a^2}{f^2};$$

da für uns nur Werte $C' \geq 1$ in Betracht kommen, so entsprechen nur dem von Tangenten mit $C' \geq 1$ überdeckten Gebiet Wertepaare B_1 und B_2 , für die die obige Gleichung Wurzeln $t \geq 0$ haben kann.

Der Übertragung in die Ebene λ_0, λ'_0 liegen die aus Formel (1) folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= -\frac{a}{f} + B_1 + B_2; & B_1 &= \frac{1}{2} \left(\lambda_0 + \frac{a}{f} + \frac{\lambda'_0}{\sqrt{vf}} \right), \\ \lambda'_0 &= \sqrt{vf} (B_1 - B_2); & B_2 &= \frac{1}{2} \left(\lambda_0 + \frac{a}{f} - \frac{\lambda'_0}{\sqrt{vf}} \right) \end{aligned}$$

zugrunde; sie liefert, wie aus Fig. 13 ersichtlich, als Grenzkurven einen Halbast der Hyperbel:

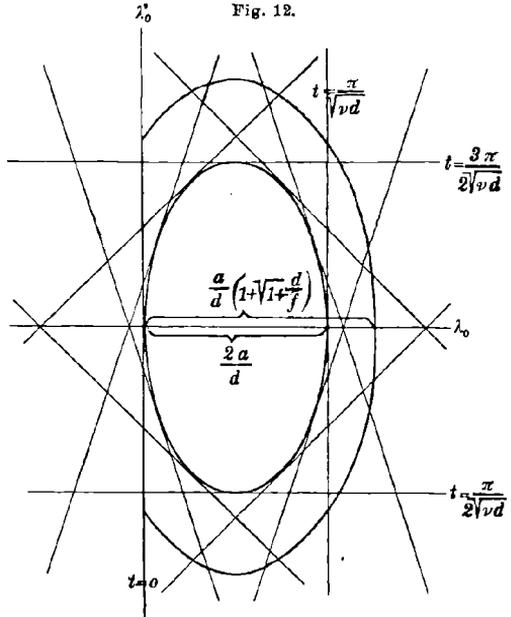
$$\left(\lambda_0 + \frac{a}{f} \right)^2 - \frac{\lambda_0'^2}{vf} = \frac{a^2}{f^2}$$

und die Geraden:

$$\lambda_0 = 0 \text{ und } \lambda_0 + \frac{a}{f} + \frac{\lambda'_0}{\sqrt{vf}} = 0.$$

Nur ein Teil des Gebietes wird hier von den Tangenten doppelt überdeckt.

Für jedes Paar von Anfangswerten λ_0 und λ'_0 , das Punkten angehört, die nicht außerhalb des in Fig. 13 durch Einzeichnen der Hyperbeltangenten markierten Gebietes liegen, kann also im Laufe der Bewegung Spannungswechsel eintreten.



Wir sprachen davon, daß für die in obiger Weise abgegrenzten Wertepaare λ_0 und λ'_0 Spannungswechsel eintreten kann. Dieser Spannungswechsel tritt tatsächlich ein und zwar in dem Zeitmoment, der der kleinsten der vorhandenen positiven Wurzeln t der Gleichung $\lambda = 0$ zugehört, wenn nicht für die betreffende Bewegung das x'_1 zeitlich früher als λ zu Null wird. Es wären daher zunächst die Anfangswerte $\lambda_0, \lambda'_0, x'_{1_0}$ einzuteilen in solche, bei denen x'_1 für $t \geq 0$ zu Null wird und in solche, bei denen dies nicht der Fall. Diese Aufgabe ist aber nicht so einfach allgemein durchzuführen, wie die vorhin erledigte.

Der wesentliche Unterschied ist der, daß nach den beiden Formeln:

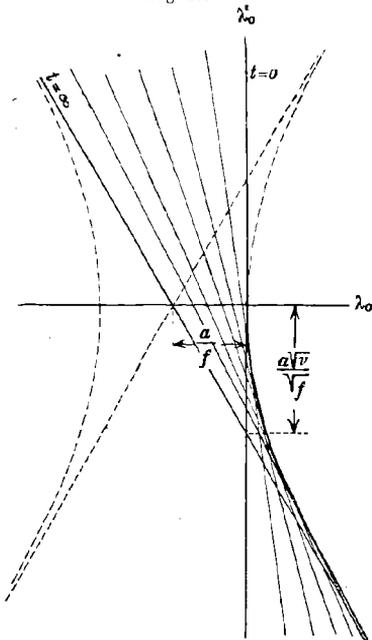
$$x'_1 = \frac{\cos \alpha}{m_2} \frac{a}{d} t + \left(d - \frac{\cos \alpha}{m_2} \right) \left(\frac{A_1}{\sqrt{vd}} \cos t\sqrt{vd} - \frac{A_2}{\sqrt{vd}} \sin t\sqrt{vd} - \frac{A_1}{\sqrt{vd}} \right) + x'_{1_0}$$

und

$$x'_1 = - \frac{\cos \alpha}{m_2} \frac{a}{f} t + \left(\frac{\cos \alpha}{m_2} + f \right) \left(\frac{B_1}{\sqrt{vf}} e^{t\sqrt{vf}} - \frac{B_2}{\sqrt{vf}} e^{-t\sqrt{vf}} - \frac{B_1 - B_2}{\sqrt{vf}} \right) + x'_{1_0}$$

x'_1 von drei Parametern $\lambda_0, \lambda'_0, x'_{1_0}$ abhängt, so daß für verschiedene Werte von x'_{1_0} verschiedene Diagramme in der λ_0, λ'_0 -Ebene nötig wären.

Fig. 13.



Immerhin bietet die Konstruktion eines Diagramms für ein einzelnes x'_{1_0} keine prinzipielle Schwierigkeit; die Kurven $t = \text{const.}$ sind wieder Gerade, die Umhüllende wird hier eine transzendente Kurve. Beim Übergang von einem Werte des x'_{1_0} zu einem anderen erfährt jede Gerade nur eine Parallelverschiebung.

Hat man für ein bestimmtes x'_{1_0} die beiden zugehörigen Diagramme und außerdem die Diagramme der Figuren 12 und 13 gezeichnet, so ist die Verwendung der Diagramme die: Man bestimmt aus Figur 12 bzw. 13, ob, eventuell zu welcher Zeit bei den gegebenen Anfangswerten λ_0 und λ'_0 das λ zu Null wird. Aus dem einschlägigen der Diagramme für x'_{1_0} läßt sich dann ersehen, ob für dieses Wertepaar λ_0, λ'_0 das x'_1

zeitlich früher als λ zu Null wird oder nicht. Man erfährt so, ob, eventuell in welchem Zeitmoment die Bewegung ihren anfänglichen Typus ändert. Für diesen Zeitmoment sind gegebenenfalls die Werte λ, λ' und x'_1 zu berechnen, und mit diesen Größen als Anfangswerten

kann dann die Bewegung weiterverfolgt werden, bis sich ihr Typus wieder ändert. Für das neue x'_{1_0} wäre dabei, falls es ≥ 0 ist, wieder ein neues Diagramm nötig; ist es gleich Null, so ist die Formel 2c), S. 276, zu verwenden. Natürlich wird es für die wirkliche Ausführung der Diskussion der Bewegung eines elastischen Systems mit festen vorgegebenen Konstanten $X_1, m_1, m_2, \alpha, \mu, \nu$ vorteilhafter sein, nur für die Entscheidung der Frage nach einem eventuellen Spannungswechsel die Diagramme zu verwenden, dagegen die Untersuchung, ob, eventuell wann x'_1 zu Null wird, rechnerisch zu führen.

Die speziellen Beispiele von Bewegungen, die wir im ersten Abschnitt durchgeführt haben, lassen erkennen, welche mannigfaltigen Bewegungsmöglichkeiten eine allgemeinste Diskussion beim elastischen System berücksichtigen müßte.

IV. Spezialisierung der Diskussion durch vereinfachende Annahmen über den Wert von ν .

Wir wollen hier die Diskussion spezialisieren und uns darauf beschränken, für jedes Tripel endlicher Anfangswerte $\lambda_0, \lambda'_0, x'_{1_0}$ die zugehörigen Bewegungen solcher elastischer Systeme zu untersuchen, deren ν einen so großen Zahlenwert hat, daß gewisse Forderungen, die den Typus der Bewegung bedingen, und die wir von Fall zu Fall kennen lernen werden, erfüllt sind. Ist dann gezeigt, daß es für jedes Tripel von endlichen Anfangswerten $\lambda_0, \lambda'_0, x'_{1_0}$ einen Wert $\nu = N$ gibt, so daß alle Werte $\nu > N$ diese Forderungen auch erfüllen, so ist der Gewinn der angedeuteten Spezialisierung — abgesehen von der Vereinfachung der Betrachtungen — der, daß der für *ein* solches $\nu > N$ gefundene Typus der Bewegung sicher auch für *alle* Systeme mit Werten $\nu > N$ gilt. Es ist wohl zu beachten, daß wir damit eine große Reihe von Bewegungen, die für die gegebenen Anfangswerte bei elastischen Systemen mit $\nu < N$ möglich sind, außer acht lassen; aber wir können dies tun, da der Hauptzweck unserer Ausführungen der ist, die Grenzbewegungen zu bestimmen, denen sich die Bewegungen des elastischen Systems mit über alle Grenzen wachsendem ν — wie wir zeigen werden — nähern.

Wir werden das ganze System von Anfangswerten $\lambda_0, \lambda'_0, x'_{1_0}$ einteilen in 4 Gruppen (vgl. die Tabelle S. 276):

- | | | | | |
|---------------|---------------------------|------------------|----------------------|-----------------|
| Die 1. Gruppe | umfaßt alle Anfangswerte: | $\lambda_0 > 0,$ | $\lambda'_0 \geq 0,$ | $x'_{1_0} > 0.$ |
| „ 2. „ | „ | $\lambda_0 < 0,$ | $\lambda'_0 \geq 0,$ | $x'_{1_0} > 0.$ |
| „ 3. „ | „ | $\lambda_0 > 0,$ | $\lambda'_0 \leq 0,$ | $x'_{1_0} < 0.$ |
| „ 4. „ | „ | $\lambda_0 < 0,$ | $\lambda'_0 \leq 0,$ | $x'_{1_0} < 0.$ |

Die Fälle $\lambda_0 = 0$, $\lambda'_0 \geq 0$, $x'_{1_0} \geq 0$ werden wir gesondert behandeln; auf die Fälle mit $x'_{1_0} = 0$ werden wir nicht eingehen.

1. Gruppe: $\lambda_0 > 0$, $\lambda'_0 \geq 0$, $x'_{1_0} > 0$.

Anknüpfend an unser Diagramm Fig. 12, dessen rechts von der λ'_0 -Achse gelegener Teil für diese Gruppe in Betracht kommt, unterteilen wir die Anfangswerte der Gruppe in:

a) solche, für die $0 < \lambda_0 < \frac{2a}{d}$, $\lambda'_0 \geq 0$,

b) solche, für die $\lambda_0 > \frac{2a}{d}$, $\lambda'_0 \geq 0$.

Zu a).

Die Aufgabe ist, für ein gegebenes Wertetripel λ_0 , λ'_0 , x'_{1_0} , das unter die Kategorie a) gehört, den Verlauf der Bewegung des elastischen Systems zu bestimmen bei der oben angedeuteten Einschränkung der Werte von ν . Diese Einschränkung besteht zunächst darin, daß wir verlangen, ν soll so groß sein, daß der Punkt mit den Koordinaten λ_0 , λ'_0 innerhalb der Ellipse:

$$\left(\lambda_0 - \frac{a}{d}\right)^2 + \frac{\lambda_0'^2}{\nu d} = \frac{a^2}{d^2}$$

liegt. Jedes $\nu > N_1$, wo

$$N_1 = \frac{\lambda_0'^2}{d \left(\frac{2a\lambda_0}{d} - \lambda_0^2 \right)}$$

ist, erfüllt diese Forderung.

Für die Geschwindigkeit x'_1 der Masse m_1 während der Bewegung haben wir die Gleichung:

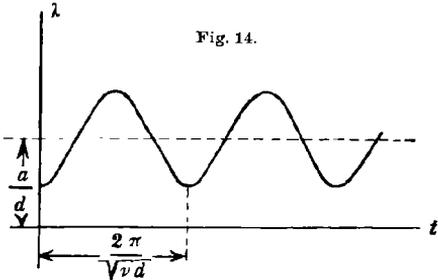
$$(3) \quad x'_1 = \frac{\cos \alpha}{m_2} \frac{a}{d} t + \left(d - \frac{\cos \alpha}{m_2} \right) \left(\frac{\lambda'_0}{\nu d} \cos t \sqrt{\nu d} - \frac{\lambda_0 - \frac{a}{d}}{\sqrt{\nu d}} \sin t \sqrt{\nu d} - \frac{\lambda'_0}{\nu d} \right) + x'_{1_0},$$

und unsere zweite Forderung ist nun die, das ν so groß zu wählen, daß x'_1 für $t > 0$ nicht zu Null werden kann. Da die Werte des zweiten Termes der rechten Gleichungsseite zwischen zwei Grenzen liegen, die für wachsendes ν beliebig nahe zusammenrücken, so kann man einen Wert $\nu = N_2$ finden, so daß sicher für jedes $\nu > N_2$ das x'_1 nicht Null werden kann für $t > 0$.

Wählen wir nun $\nu > N$, wo N der größere der beiden Werte N_1 und N_2 ist, so ist für ein elastisches System mit solchem ν bei den gegebenen Anfangswerten die Bewegung derart, daß im Verlauf derselben weder ein Spannungswechsel noch Ruhe von m_1 (d. h. $x'_1 = 0$) eintritt.

Für jedes Wertetripel der Gruppe 1a) setzt sich daher bei elastischen Systemen mit $\nu > N$, wo N selbst von $\lambda_0, \lambda'_0, x'_{1_0}$ abhängt, die Bewegung nach rechts beliebig lange ohne Spannungswechsel fort.

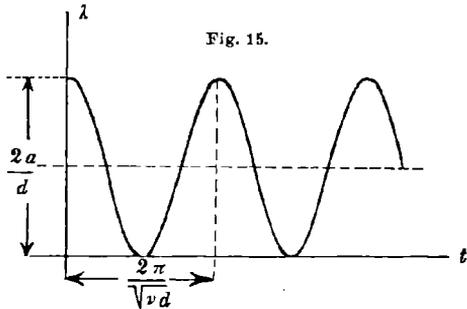
Der Typus einer solchen Bewegung ist durch Fig. 2 gegeben. Fig. 14 zeigt den Druckverlauf für einen Anfangswert $0 < \lambda_0 < \frac{a}{d}$; dabei ist — wie auch in den folgenden Figuren für den Druckverlauf — der Einfachheit halber $\lambda'_0 = 0$ gesetzt, außerdem handelt es sich nur um eine rein qualitative Darstellung des Spannungsverlaufs.



Zu b).

Bei den Anfangswerten $\lambda_0 \geq \frac{2a}{d}, \lambda'_0 \geq 0, x'_{1_0} > 0$ kann nach Fig. 12 stets Spannungswechsel eintreten; er tritt tatsächlich ein bei elastischen Systemen, deren ν so groß ist, daß das x'_1 zeitlich später Null wird, als der Spannungswechsel statthat. Das ist sicher der Fall bei allen Systemen mit $\nu > N$, wo für $\nu = N$ das x'_1 für $t > 0$ nicht 0 wird.

Für alle Anfangswerte der Gruppe 1b) tritt also bei allen elastischen Systemen mit so festgelegtem ν ein Spannungswechsel ein; der Typus einer solchen Bewegung ist durch Fig. 4, und zwar zunächst durch das Stück vom Beginn bis zum ersten Schnittpunkt der Kurven der x_1 und x_2 gegeben. Wie sich die Bewegung vom Spannungswechsel ab weiter fortsetzt, werden wir später untersuchen.



Auch den Spannungsverlauf werden wir später kennen lernen; hier ist er in Fig. 15 nur für den Grenzfall $\lambda_0 = \frac{2a}{d}$ gegeben.

2. Gruppe: $\lambda_0 < 0, \lambda'_0 \geq 0, x'_{1_0} > 0$.

Auch hier trennen wir die Anfangswerte in zwei Unterabteilungen,

a) in solche, für die $-\frac{a}{f} < \lambda_0 < 0, \lambda'_0 \geq 0$ und $\lambda_0 = -\frac{a}{f}, \lambda'_0 > 0$,

b) in solche, für die $\lambda_0 < -\frac{a}{f}, \lambda'_0 \geq 0$ und $\lambda_0 = -\frac{a}{f}, \lambda'_0 < 0$.

Den Fall $\lambda_0 = -\frac{a}{f}, \lambda'_0 = 0$ behandeln wir gesondert.

Zu a).

Wir setzen wieder elastische Systeme von so großem ν voraus, daß der Punkt mit den Koordinaten λ_0, λ'_0 innerhalb des Gebietes liegt (Fig. 13), in dem Spannungswechsel eintreten kann. Für $\lambda'_0 \geq 0$ ist das für jedes ν der Fall, für $\lambda'_0 < 0$ muß:

$$\nu > \frac{\lambda'_0{}^2}{f\left(\lambda_0 + \frac{a}{f}\right)^2}$$

sein. Die Geschwindigkeit ist bei einem Tripel von Anfangswerten dieses Gebietes gegeben durch:

$$(4) \quad x'_1 = -\frac{\cos \alpha}{m_2} \frac{a}{f} t + \left(\frac{\cos \alpha}{m_2} + f\right) \left(\frac{1}{2} \frac{\lambda_0 + \frac{a}{f} + \frac{\lambda'_0}{\sqrt{\nu f}}}{\sqrt{\nu f}} e^{i\sqrt{\nu} t} - \frac{1}{2} \frac{\lambda_0 + \frac{a}{f} - \frac{\lambda'_0}{\sqrt{\nu f}}}{\sqrt{\nu f}} e^{-i\sqrt{\nu} t} - \frac{\lambda'_0}{\nu f} \right) + x'_{1_0}$$

Man kann demnach für jedes Wertetripel $\lambda_0, \lambda'_0, x'_{1_0}$ das ν so groß wählen, daß x'_1 für den Wert $t = \frac{\text{const.}}{\sqrt{\nu f}}$, bei dem Spannungswechsel eintritt, noch positiv ist.

Für alle elastischen Systeme mit solchen ν geht dann für die Anfangswerte der Gruppe 2a) die Bewegung so vor sich, daß sie unter Zug verläuft bis zu einem Zeitmomente $t = t_1$, wo $\lambda = 0$ wird. Den Typus einer solchen Bewegung zeigt Fig. 11 von $t=0$ bis $t=0,0821$ sec. Den weiteren Verlauf werden wir später noch genauer diskutieren.

Zu b).

Aus Fig. 13 folgt unmittelbar, daß bei jedem ν , das

$$\lambda_0 + \frac{a}{f} + \frac{\lambda'_0}{\sqrt{\nu f}} < 0$$

macht, die Anfangswerte λ_0, λ'_0 eine Bewegung ohne Spannungswechsel einleiten, und aus der obigen Formel für x'_1 ergibt sich, daß für jedes solche ν im Verlauf der Bewegung der Wert $x'_1 = 0$ angenommen wird.

Für jedes ν , das diese Forderung erfüllt, verläuft also die Bewegung bei einem Wertetripel der Gruppe 2b) unter Zug, bis die Masse m_1 zur Ruhe kommt, worauf eine Bewegung eines anderen Typus beginnt. (Vgl. Fig. 10).

Der Zug in der Stange wächst vom Werte λ_0 ab exponentiell an.

Den besonderen Fall $\lambda_0 = -\frac{a}{f}, \lambda'_0 = 0, x'_{1_0} > 0$, der zu einer gleichförmig verzögerten Bewegung unter konstantem Zug $\lambda = -\frac{a}{f}$ führt (Fig. 9), haben wir S. 281 schon erörtert. Nun erkennen wir die Bewegung sehr deutlich als labil: dem einzigen Punkte $\lambda_0 = -\frac{a}{f}, \lambda'_0 = 0$

unserer λ_0, λ'_0 -Ebene entspricht diese verzögerte Bewegung; jedem Wertepaar, das zu einem benachbarten Punkte gehört, entsprechen Bewegungen der Gruppe 2a) oder 2b) — Bewegungen von ganz anderer Art als die gleichförmig verzögerte Bewegung.

3. Gruppe: $\lambda_0 > 0, \lambda'_0 \geq 0, x'_{1_0} < 0$.

Bei dieser Gruppe haben wir bei $\lambda'_0 \geq 0$ immer, bei $\lambda'_0 < 0$ dann, wenn ν die Forderung erfüllt:

$$\left(\lambda_0 + \frac{a}{f}\right)^2 - \frac{\lambda_0'^2}{\nu f} - \frac{a^2}{f^2} > 0$$

Bewegung nach links unter Druck ohne Spannungswechsel, und unter den soeben gemachten Voraussetzungen wird dabei immer für ein $t > 0$ das $x'_1 = 0$.

Bei $\lambda'_0 \geq 0$ haben wir also für jedes elastische System, bei $\lambda'_0 < 0$ für elastische Systeme mit genügend großem ν , Bewegung nach links unter exponentiell anwachsendem Druck solange, bis durch die Reibung die Bewegung der Masse m_1 aufgehalten wird.

Bei eingetretener Ruhe von m_1 erfolgt eine Schwingung der Masse m_2 und dann Umkehr der Bewegung in eine nach rechts fortschreitende wie dies in Fig. 6 dargestellt ist. (Es ist dort $\lambda_0 = 0, \lambda'_0 = 0$ gewählt, was aber — wie wir noch sehen werden — an der Art der Bewegung nichts ändert).

4. Gruppe: $\lambda_0 < 0, \lambda'_0 \geq 0, x'_{1_0} < 0$.

Aus Fig. 12 ist ersichtlich, daß für jedes Wertetripel dieser Gruppe Spannungswechsel für $t > 0$ eintreten kann. Man braucht nun ν nur so groß zu wählen, daß für den Zeitmoment des ersten Spannungswechsels x'_1 noch negativ ist, was nach Gleichung (3) stets möglich ist.

Für die elastischen Systeme mit solchem ν tritt dann im Verlauf der nach links gerichteten Bewegung unter anfänglichem Zug ein Spannungswechsel in der Stange tatsächlich ein; den Verlauf der Bewegung nach dem Spannungswechsel werden wir später erfahren. (Vgl. auch Fig. 7.)

Wir müssen noch die Bewegungen bestimmen, die zu den Anfangswerten $\lambda_0 = 0, \lambda'_0 \geq 0, x'_{1_0} \geq 0$ gehören; sie sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

$$\lambda_0 = 0 \begin{cases} x'_{1_0} > 0 \begin{cases} \lambda'_0 \geq 0 & \text{Bewegung nach r. unter Druck b. z. Spannungswechsel} \\ \lambda'_0 < 0 & \text{„ „ „ „ Zug „ „ „} \end{cases} \\ x'_{1_0} < 0 \begin{cases} \lambda'_0 \geq 0 & \text{„ „ l. „ Druck „ } x'_1 = 0 \\ \lambda'_0 < 0 & \text{„ „ „ „ Zug „ z. „} \end{cases} \end{cases}$$

Dabei ist für die zwei ersten und den letzten der 4 Fälle wieder Be-

dingung, daß man sich auf elastische Systeme von genügend großem ν beschränkt — das „genügend groß“ in dem wiederholt angegebenen Sinne verstanden.

Damit können wir nun zu jedem Wertetripel $\lambda_0, \lambda'_0, x'_{1_0}$ bei der Beschränkung auf elastische Systeme von genügend großem ν (— wir wollen dies der einfachern Ausdrucksweise wegen in der Folge stillschweigend voraussetzen —) die zunächst eintretende Bewegung ihrer Art nach angeben. Aber vollständig erledigt sind bis jetzt nur die Bewegungen, die zu Anfangswerten der Gruppe 1a) gehören, es sind dies beschleunigte Bewegungen nach rechts, überlagert von Schwingungen der Massen m_1 und m_2 , ferner die gleichförmig beschleunigte Bewegung für $\lambda_0 = \frac{a}{d}, \lambda'_0 = 0, x'_{1_0} > 0$ und die gleichförmig verzögerte Bewegung für $\lambda_0 = -\frac{a}{f}, \lambda'_0 = 0, x'_{1_0} > 0$. Von allen übrigen Bewegungen haben wir nur das erste Stadium bestimmt; und die Frage ist nun, wie setzen sie sich weiter fort?

Da fanden wir zunächst bei den Anfangswerten der 3. Gruppe und außerdem bei $\lambda_0 = 0, \lambda'_0 \geq 0, x'_{1_0} < 0$, daß zu einem gewissen Zeitpunkt die Masse m_1 zur Ruhe kommt; m_2 hat dabei noch eine Geschwindigkeit $x'_2 < 0$, und es erfolgt nun bei ruhendem m_1 eine Schwingung von m_2 und hierauf Umkehr der Bewegung in eine solche nach rechts. (Vgl. Fig. 6 und den zugehörigen Text S. 279.) Für die dann eintretende Bewegung mit $x'_1 > 0$ gelten dann wieder die hierauf bezüglichen Ausführungen. Wenn wir uns aber damit begnügen, die Bewegungen mit $x'_{1_0} < 0$ nur soweit zu verfolgen, als sie wirklich nach links gerichtete Bewegungen sind, also bis $x'_1 = 0$, so können wir auch die zu den Anfangswerten der 3. Gruppe und $\lambda_0 = 0, \lambda'_0 \geq 0, x'_{1_0} < 0$ gehörigen Bewegungen als erledigt betrachten. Ebenso brauchen wir auf die Bewegungen der Gruppe 2b) nicht weiter einzugehen, wenn wir uns darauf beschränken, sie nur bis zu dem Momente, der $x'_1 = 0$ entspricht, zu verfolgen.

Dagegen müssen wir nun in eine genauere Diskussion der Bewegungen für alle noch übrigen Anfangswerte eintreten, die wir bisher nur bis zu dem in ihrem Verlauf vorkommenden ersten Spannungswechsel verfolgt haben.

Beginnen wir mit den Anfangsbedingungen der

4. Gruppe: $\lambda_0 < 0, \lambda'_0 \geq 0, x'_{1_0} < 0$ mit Einschluß von $\lambda_0 = 0, \lambda'_0 < 0, x'_{1_0} < 0$.

Die Zeit t , zu der in der ersten Phase der Bewegung der erste Spannungswechsel eintritt, berechnet sich auf Grund der Gleichung:

$$0 = \frac{a}{d} + \frac{\lambda'_0}{\sqrt{v d}} \sin t \sqrt{v d} + \left(\lambda_0 - \frac{a}{d} \right) \cos t \sqrt{v d}$$

aus:

$$\sin t \sqrt{v d} = \frac{-\frac{a}{d} \frac{\lambda'_0}{\sqrt{v d}} - \left(\lambda_0 - \frac{a}{d} \right) \sqrt{\lambda_0^2 - \frac{2a\lambda_0}{d} + \frac{\lambda_0'^2}{v d}}}{\left(\lambda_0 - \frac{a}{d} \right)^2 + \frac{\lambda_0'^2}{v d}}$$

und

$$\cos t \sqrt{v d} = \frac{-\frac{a}{d} \left(\lambda_0 - \frac{a}{d} \right) + \frac{\lambda'_0}{\sqrt{v d}} \sqrt{\lambda_0^2 - \frac{2a\lambda_0}{d} + \frac{\lambda_0'^2}{v d}}}{\left(\lambda_0 - \frac{a}{d} \right)^2 + \frac{\lambda_0'^2}{v d}}$$

Damit erhält man dann als neue Anfangsbedingungen für die zweite Phase der Bewegung:

$$\lambda_{(1)} = 0, \quad \lambda'_{(1)} = \sqrt{v d} \sqrt{\lambda_0^2 - \frac{2a\lambda_0}{d} + \frac{\lambda_0'^2}{v d}} = \varphi \sqrt{v},$$

wo

$$\varphi = \sqrt{d} \sqrt{\lambda_0^2 - \frac{2a\lambda_0}{d} + \frac{\lambda_0'^2}{v d}},$$

während $x'_{(1)} < 0$ ist. Der Ausdruck:

$$\lambda_0^2 - \frac{2a\lambda_0}{d} + \frac{\lambda_0'^2}{v d}$$

ist für unsere Anfangswerte immer positiv. Spannungswechsel kann nach Fig. 13 nicht mehr eintreten; die den neuen Anfangswerten entsprechende Bewegung erfolgt unter wachsendem Druck und hält solange an, bis die Masse m_1 zur Ruhe kommt. ($x'_1 = 0$ nach Gleichung (4)). Daran schließt sich wieder Bewegung von m_2 bei ruhendem m_1 und dann Umkehr der Bewegung in eine solche nach rechts. Mit Rücksicht auf die Ergebnisse S. 291 haben wir demnach zusammenfassend:

Bei allen Bewegungen unseres Systems mit $x'_{i_0} < 0$, das heißt mit Anfangsgeschwindigkeit nach links hin, kommt — event. nach erfolgtem Spannungswechsel — die reibende Masse im Lauf der Zeit infolge zunehmenden Druckes und dadurch bedingter vermehrter Reibung zur Ruhe, und es tritt eine Umkehr der Bewegung ein.

Eine Reihe ganz neuer Bewegungen ergeben sich nun bei den Anfangswerten der

$$\text{Gruppe 1b) mit } \lambda_0 \geq \frac{2a}{d}, \quad \lambda'_0 \geq 0, \quad x'_{i_0} > 0.$$

Für die erste Phase der Bewegung bestimmt sich die Zeit t , zu der der erste Spannungswechsel eintritt, aus:

$$\sin t \sqrt{v d} = \frac{-\frac{a\lambda'_0}{d\sqrt{v d}} + \left(\lambda_0 - \frac{a}{d} \right) \sqrt{\lambda_0^2 - \frac{2a\lambda_0}{d} + \frac{\lambda_0'^2}{v d}}}{\left(\lambda_0 - \frac{a}{d} \right)^2 + \frac{\lambda_0'^2}{v d}}$$

und

$$\cos t \sqrt{v d} = \frac{-\frac{a}{d} \left(\lambda_0 - \frac{a}{d} \right) - \frac{\lambda'_0}{\sqrt{v d}} \sqrt{\lambda_0^2 - \frac{2a\lambda_0}{d} + \frac{\lambda_0'^2}{v d}}}{\left(\lambda_0 - \frac{a}{d} \right)^2 + \frac{\lambda_0'^2}{v d}};$$

Die Werte der λ , λ' , x'_1 und x_1 , die diesem Zeitmoment entsprechen und die die Anfangswerte für die zweite Phase der Bewegung liefern, berechnen sich zu:

$$\begin{aligned} \lambda_{(1)} &= 0, & \lambda'_{(1)} &= -\varphi \sqrt{v}, \\ x'_{(1)} &= \frac{\cos \alpha}{m_2} \frac{a}{d} \frac{1}{\sqrt{v d}} \arcsin \frac{-\frac{a\lambda'_0}{d\sqrt{v d}} + \left(\lambda_0 - \frac{a}{d} \right) \frac{\varphi}{\sqrt{d}}}{\frac{\varphi^2}{d} - \frac{a^2}{d^2}} \\ &\quad - \left(d - \frac{\cos \alpha}{m_2} \right) \frac{1}{\sqrt{v d}} \left(\frac{\lambda'_0}{\sqrt{v d}} + \frac{\varphi}{\sqrt{d}} \right) + x'_{1_0}, \\ x_{(1)} &= \frac{\cos \alpha}{m_2} \frac{a}{d} \frac{1}{2} \frac{1}{v d} \left\{ \arcsin \frac{-\frac{a\lambda'_0}{d\sqrt{v d}} + \left(\lambda_0 - \frac{a}{d} \right) \frac{\varphi}{\sqrt{d}}}{\frac{\varphi^2}{d} - \frac{a^2}{d^2}} \right\}^2 \\ &\quad - \left(d - \frac{\cos \alpha}{m_2} \right) \frac{1}{v d} \left(\lambda_0 + \frac{\lambda'_0}{\sqrt{v d}} \arcsin \frac{-\frac{a\lambda'_0}{d\sqrt{v d}} + \left(\lambda_0 - \frac{a}{d} \right) \frac{\varphi}{\sqrt{d}}}{\frac{\varphi^2}{d} - \frac{a^2}{d^2}} \right) \\ &\quad + x'_{1_0} \frac{1}{\sqrt{v d}} \arcsin \frac{-\frac{a\lambda'_0}{d\sqrt{v d}} + \left(\lambda_0 - \frac{a}{d} \right) \frac{\varphi}{\sqrt{d}}}{\frac{\varphi^2}{d} - \frac{a^2}{d^2}} + x_{1_0}, \end{aligned}$$

wobei φ dieselbe Bedeutung wie vorhin hat. Fig. 13 zeigt, daß wir einen weiteren Spannungswechsel für die nun einsetzende Bewegung bekommen können, wenn

$$\varphi < \frac{a}{\sqrt{f}},$$

d. h. wenn:

$$\left(\lambda_0 - \frac{a}{d} \right)^2 + \frac{\lambda_0'^2}{v d} < \frac{a^2}{d^2} \left(1 + \frac{d}{f} \right)$$

ist. Es muß also, damit nochmals Spannungswechsel eintritt, der Punkt mit den Koordinaten λ_0 , λ'_0 in Fig. 12 innerhalb der Ellipse:

$$\left(\lambda_0 - \frac{a}{d} \right)^2 + \frac{\lambda_0'^2}{v d} = \frac{a^2}{d^2} \left(1 + \frac{d}{f} \right)$$

liegen, und wir werden daher die Anfangswerte der Gruppe 1b) trennen in:

α) solche, für die

$$\lambda_0 > \frac{a}{d} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{d}{f}} \right), \lambda'_0 \geq 0,$$

oder

$$\lambda_0 = \frac{a}{d} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{d}{f}} \right), \lambda'_0 \geq 0,$$

β) solche, für die

$$\lambda_0 < \frac{a}{d} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{d}{f}} \right), \lambda'_0 \geq 0;$$

ist; den Wert

$$\lambda_0 = \frac{a}{d} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{d}{f}} \right), \lambda'_0 = 0,$$

müssen wir gesondert behandeln.

Beginnen wir mit diesem rasch zu erledigenden Fall: Der Druckverlauf für die zweite Phase der Bewegung mit den Anfangswerten

$$\lambda_{(1)} = 0, \lambda'_{(1)} = -\frac{a}{\sqrt{f}} \sqrt{v}$$

ist durch die Gleichung gegeben:

$$\lambda = -\frac{a}{f} + \frac{a}{f} e^{-t\sqrt{vf}},$$

und es nähert sich also der Druck asymptotisch dem Werte $-\frac{a}{f}$ (Fig. 16); die Gleichung (4) zeigt, daß x'_1 im Laufe der Bewegung zu Null wird.

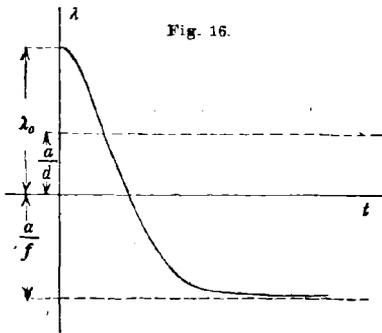


Fig. 16.

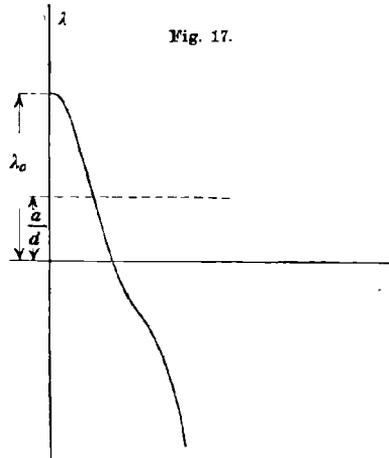


Fig. 17.

Bei den Anfangswerten unter α) kann auch kein Spannungswechsel mehr eintreten, der Zug in der Stange (Fig. 17) nimmt fortwährend zu, nach Gleichung (4) tritt auch hier ein Stehenbleiben der reibenden Masse ein.

Anders bei den Anfangswerten unter β). Hier tritt sicher Spannungswechsel ein, wenn wir nur zu jedem Wertetripel $\lambda_0, \lambda'_0, x'_{1_0}$ das v so

wählen, daß einerseits der Punkt λ_0, λ'_0 innerhalb der oben gefundenen Ellipse liegt und andererseits x'_1 noch positiv ist im Zeitmomente des Spannungswechsels. Die Zeit t (vom letzten Spannungswechsel ab), zu der dieser neue eintritt, ist gegeben durch:

$$e^{t\sqrt{vf}} = \frac{\frac{a}{f} + \frac{\varphi}{\sqrt{f}}}{\frac{a}{f} - \frac{\varphi}{\sqrt{f}}},$$

und für die dritte Phase der Bewegung hat man dann die Anfangswerte:

$$\lambda_{(2)} = 0, \quad \lambda'_{(2)} = \varphi \sqrt{v},$$

$$x'_{(2)} = -\frac{\cos \alpha}{m_2} \frac{a}{f} \frac{1}{\sqrt{vf}} \log \frac{\frac{a}{f} + \frac{\varphi}{\sqrt{f}}}{\frac{a}{f} - \frac{\varphi}{\sqrt{f}}} + \left(\frac{\cos \alpha}{m_2} + f \right) \frac{2\varphi}{f\sqrt{v}} + x'_{(1)0},$$

$$x_{(2)} = -\frac{\cos \alpha}{m_2} \frac{a}{f} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{vf}} \left\{ \log \frac{\frac{a}{f} + \frac{\varphi}{\sqrt{f}}}{\frac{a}{f} - \frac{\varphi}{\sqrt{f}}} \right\}^2 + \left(\frac{\cos \alpha}{m_2} + f \right) \frac{\varphi}{\sqrt{vf}} \log \frac{\frac{a}{f} + \frac{\varphi}{\sqrt{f}}}{\frac{a}{f} - \frac{\varphi}{\sqrt{f}}} + x'_{(1)0} \frac{1}{\sqrt{vf}} \log \frac{\frac{a}{f} + \frac{\varphi}{\sqrt{f}}}{\frac{a}{f} - \frac{\varphi}{\sqrt{f}}} + x_{(1)0}.$$

Damit kommt man in ein Gebiet (Fig. 12), in dem wieder Spannungswechsel möglich ist bei jedem Wert von φ , und er tritt auch ein, wenn wir nur v wieder so gewählt haben, daß x'_1 noch positiv ist in der dritten Phase der Bewegung im Zeitmoment t dieses neuen Spannungswechsels, für den

$$\sin t\sqrt{vd} = \frac{-2a\varphi\sqrt{d}}{a^2 + \varphi^2 d},$$

$$\cos t\sqrt{vd} = \frac{a^2 - \varphi^2 d}{a^2 + \varphi^2 d}$$

ist. Für diesen Spannungswechsel sind die Werte der λ, λ', x'_1 und x_1 bzw.:

$$\lambda_{(3)} = 0, \quad \lambda'_{(3)} = -\varphi \sqrt{v},$$

$$x'_{(3)} = \frac{\cos \alpha}{m_2} \frac{a}{d} \frac{1}{\sqrt{vd}} \arcsin \frac{-2a\varphi\sqrt{d}}{a^2 + \varphi^2 d} - \left(d - \frac{\cos \alpha}{m_2} \right) \frac{2\varphi}{d\sqrt{v}} + x'_{(2)0},$$

$$x_{(3)} = \frac{\cos \alpha}{m_2} \frac{a}{d} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{vd}} \left\{ \arcsin \frac{-2a\varphi\sqrt{d}}{a^2 + \varphi^2 d} \right\}^2 - \left(d - \frac{\cos \alpha}{m_2} \right) \frac{\varphi}{\sqrt{vd}} \arcsin \frac{-2a\varphi\sqrt{d}}{a^2 + \varphi^2 d} + x'_{(2)0} \frac{1}{\sqrt{vd}} \arcsin \frac{-2a\varphi\sqrt{d}}{a^2 + \varphi^2 d} + x_{(2)0}.$$

Das sind aber dieselben Werte von λ_0 u. λ'_0 wie diejenigen, die die 2. Phase der Bewegung einleiteten (λ_0 u. λ'_0), und man erkennt, daß sich die Bewegung nun in der für die beiden letzten Phasen geschilderten Weise unter abwechselndem Zug und Druck fortsetzen wird.

Dabei ist allerdings noch zu überlegen, ob es möglich ist, zu jedem $\lambda_0, \lambda'_0, x'_{1_0}$ einen Wert von ν anzugeben, so groß, daß auch alle folgenden Spannungswechsel eintreten, bevor das zugehörige x'_{1_0} zu Null wird.

Wenn das ν so bestimmt ist, daß diese Forderung für x'_{1_0} und x'_{1_0} erfüllt war, so ist sie sicher auch bei allen folgenden Spannungswechseln für dasselbe ν erfüllt, wenn stets $x'_{1_0} \geq x'_{1_0}$ ist. Ist aber stets $x'_{1_0} < x'_{1_0}$, so läßt sich kein Wert von ν finden, so daß für beliebige Wiederholung des Spannungswechsels die Forderung erfüllt ist. Nur im ersten Falle gibt es daher für jedes Tripel von Werten $\lambda_0, \lambda'_0, x'_{1_0}$ ein ν , so daß für alle elastischen Systeme mit größerem ν bei denselben Anfangswerten unbegrenzt oft Spannungswechsel eintritt. Im zweiten Falle dagegen wird bei jedem ν nach einer gewissen Zahl von Spannungswechseln die reibende Masse zur Ruhe kommen.

Wir können nun, um ein genaueres Bild des ganzen Bewegungsvorganges zu bekommen, für jeden Zeitmoment t , der einem Spannungswechsel entspricht, x_1 und x'_1 als Funktionen von t angeben. Der bequemen Schreibweise wegen führe ich dazu folgende Abkürzungen ein; ich setze:

$$\frac{\cos \alpha}{m_2} \frac{a}{d} \frac{1}{2} \frac{1}{d} \left(\arcsin \frac{-2a\varphi\sqrt{d}}{a^2 + \varphi^2 d} \right)^2 - \left(d - \frac{\cos \alpha}{m_2} \right) \frac{\varphi}{d\sqrt{d}} \arcsin \frac{-2a\varphi\sqrt{d}}{a^2 + \varphi^2 d} = A,$$

$$- \frac{\cos \alpha}{m_2} \frac{a}{f} \frac{1}{2} \frac{1}{f} \left(\log \frac{\frac{a}{f} + \frac{\varphi}{\sqrt{f}}}{\frac{a}{f} - \frac{\varphi}{\sqrt{f}}} \right)^2 + \left(\frac{\cos \alpha}{m_2} + f \right) \frac{\varphi}{f\sqrt{f}} \log \frac{\frac{a}{f} + \frac{\varphi}{\sqrt{f}}}{\frac{a}{f} - \frac{\varphi}{\sqrt{f}}} = B,$$

$$- \frac{\cos \alpha}{m_2} \frac{a}{f} \frac{1}{\sqrt{f}} \log \frac{\frac{a}{f} + \frac{\varphi}{\sqrt{f}}}{\frac{a}{f} - \frac{\varphi}{\sqrt{f}}} + \left(\frac{\cos \alpha}{m_2} + f \right) \frac{2\varphi}{f} = D,$$

$$\frac{\cos \alpha}{m_2} \frac{a}{d} \frac{1}{\sqrt{d}} \arcsin \frac{-2a\varphi\sqrt{d}}{a^2 + \varphi^2 d} - \left(d - \frac{\cos \alpha}{m_2} \right) \frac{2\varphi}{d} - \frac{\cos \alpha}{m_2} \frac{a}{f} \frac{1}{\sqrt{f}} \log \frac{\frac{a}{f} + \frac{\varphi}{\sqrt{f}}}{\frac{a}{f} - \frac{\varphi}{\sqrt{f}}} + \left(\frac{\cos \alpha}{m_2} + f \right) \frac{2\varphi}{f} = R,$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} \log \frac{\frac{a}{f} + \frac{\varphi}{\sqrt{f}}}{\frac{a}{f} - \frac{\varphi}{\sqrt{f}}} + \frac{1}{\sqrt{d}} \arcsin \frac{-2a\varphi\sqrt{d}}{a^2 + \varphi^2 d} = C;$$

dabei ist dann $\frac{C}{\sqrt{v}}$ die Dauer einer ganzen Schwingung, wenn damit die Bewegung zwischen irgend einem und dem dazu übernächsten Spannungswechsel verstanden sein soll. Ist n die Zahl der ganzen Schwingungen, gerechnet vom Beginn der zweiten Phase ab, so sind die Werte der x'_1 bzw. x_1 am Ende der n^{ten} Schwingung:

$$x'_{(2n+1)0} = n \cdot \frac{R}{\sqrt{v}} + x'_{(1)0}$$

und

$$x_{(2n+1)0} = \frac{n}{v} \left(A + B + D \frac{1}{\sqrt{d}} \arcsin \frac{-2a\varphi\sqrt{d}}{a^2 + \varphi^2 d} \right) + \frac{n}{\sqrt{v}} C x'_{(1)0} + \frac{(n-1)n}{2} \frac{1}{v} RC + x_{(1)0}.$$

Da die Dauer einer ganzen Schwingung

$$\frac{C}{\sqrt{v}}$$

ist, so ist

$$T = n \frac{C}{\sqrt{v}}$$

der Zeitmoment, der dem Ende der n^{ten} Schwingung zugehört, wenn man dem Beginn der zweiten Phase den Moment $T = 0$ beilegt.

Damit wird:

$$x'_{(2n+1)0} = \frac{R}{C} T + x'_{(1)0}$$

und

$$x_{(2n+1)0} = \frac{1}{\sqrt{v}} \left(\frac{A}{C} + \frac{B}{C} + \frac{D}{C} \frac{1}{\sqrt{d}} \arcsin \frac{-2a\varphi\sqrt{d}}{a^2 + \varphi^2 d} - \frac{R}{2} \right) T + x'_{(1)0} T + \frac{R}{C} \frac{T^2}{2} + x_{(1)0}.$$

Für diejenigen Werte von T , die ganzen Zahlen n entsprechen, stimmen die Werte $x_{(2n+1)0}$ überein mit den Ordinaten der Parabel, die die letzte Gleichung für alle Werte von T darstellt. Den aufeinanderfolgenden Spannungswechseln entsprechen also im Diagramm x_1, T Punkte, die auf einer Parabel vom Parameter $\frac{C}{R}$ liegen. Für die Diskussion des Ausdrucks $\frac{C}{R}$ hat man φ die Werte von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{a}{\sqrt{d}}$ beizulegen; für $\varphi = 0$ ist

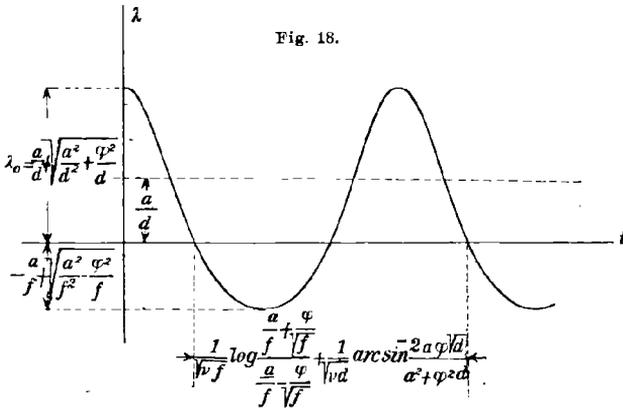
$$\frac{C}{R} = \frac{m_2 d}{\cos \alpha a},$$

während:

$$\lim_{\varphi = \frac{a}{\sqrt{f}}} \left(\frac{C}{R} \right) = - \frac{m_2 f}{\cos \alpha a}$$

ist.

Die Parameter aller dieser Parabeln liegen also zwischen den beiden Werten, die den Parabeln, die wir für die gleichförmig beschleunigte und die gleichförmig verzögerte Bewegung fanden, zukommen. (Ich verweise hier schon auf Fig. 21, die das ganze System der Grenzparabeln bei unbegrenzt wachsendem ν für ein bestimmtes x'_1 zeigt.) Dem Werte von φ , für den $R = 0$ ist, entspricht eine Gerade.



Die Kurven der x_1 und x_2 (als Funktionen von t) zeigen nun Schwingungen um eine solche Parabel und durchsetzen sich stets in Punkten der Parabel. Die Werte $x_1 - x_2 = \frac{\lambda}{\nu}$ als Funktion der Zeit ersieht man aus der beistehenden Fig. 18 für den Druckverlauf.

Ähnliche Betrachtungen gelten nun für die Anfangsbedingungen der Gruppe 2a: $-\frac{a}{f} < \lambda_0 < 0$, $\lambda'_0 \geq 0$ und $\lambda_0 = -\frac{a}{f}$, $\lambda'_0 > 0$.

Speziell wären über die Größe von ν dieselben Aussagen zu machen, wie vorher; wir wollen darauf nicht noch einmal eingehen. Die Bewegung verläuft hier so: Die erste Phase endigt mit einem Spannungswechsel zur Zeit t , wo:

$$e^{t\sqrt{\nu f}} = \frac{\frac{a}{f} + \sqrt{\frac{\lambda_0'^2}{\nu f} - \lambda_0^2 - \frac{2a\lambda_0}{f}}}{\lambda_0 + \frac{a}{f} + \frac{\lambda_0'}{\sqrt{\nu f}}},$$

$$e^{-t\sqrt{\nu f}} = \frac{\frac{a}{f} - \sqrt{\frac{\lambda_0'^2}{\nu f} - \lambda_0^2 - \frac{2a\lambda_0}{f}}}{\lambda_0 + \frac{a}{f} - \frac{\lambda_0'}{\sqrt{\nu f}}}.$$

und bei dem:

$$\lambda_{(1)} = 0, \lambda'_{(1)} = \psi \sqrt{v}, \quad \left(\psi = \sqrt{f} \sqrt{\frac{\lambda_0'^2}{vf} - \lambda_0^2 - \frac{2a\lambda_0}{f}} \right),$$

$$x'_{(1)0} = -\frac{\cos \alpha}{m_2} \frac{a}{f} \frac{1}{\sqrt{vf}} \log \frac{\frac{a}{f} + \frac{\psi}{\sqrt{f}}}{\lambda_0 + \frac{a}{f} - \frac{\lambda_0'}{\sqrt{vf}}} + \left(\frac{\cos \alpha}{m_2} + f \right) \frac{1}{\sqrt{vf}} \left(\frac{\psi}{\sqrt{f}} - \frac{\lambda_0'}{\sqrt{vf}} \right) + x'_{1_0},$$

$$x_{(1)0} = -\frac{\cos \alpha}{m_2} \frac{a}{f} \frac{1}{2} \frac{1}{vf} \left(\log \frac{\frac{a}{f} + \frac{\psi}{\sqrt{f}}}{\lambda_0 + \frac{a}{f} - \frac{\lambda_0'}{\sqrt{vf}}} \right)^2$$

$$- \left(\frac{\cos \alpha}{m_2} + f \right) \frac{1}{vf} \left(\lambda_0 + \frac{\lambda_0'}{\sqrt{vf}} \log \frac{\frac{a}{f} + \frac{\psi}{\sqrt{f}}}{\lambda_0 + \frac{a}{f} - \frac{\lambda_0'}{\sqrt{vf}}} \right)$$

$$+ x'_{1_0} \frac{1}{\sqrt{vf}} \log \frac{\frac{a}{f} + \frac{\psi}{\sqrt{f}}}{\lambda_0 + \frac{a}{f} - \frac{\lambda_0'}{\sqrt{vf}}} + x_{1_0}.$$

Diese Werte leiten die zweite Phase der Bewegung ein, die wieder in eine Bewegung unter Zug umschlägt nach der Zeit t , wo

$$\sin t \sqrt{vd} = \frac{-2a\psi\sqrt{d}}{a^2 + \psi^2 d},$$

$$\cos t \sqrt{vd} = \frac{a^2 - \psi^2 d}{a^2 + \psi^2 d}$$

ist.

$$\lambda_{(2)} = 0, \lambda'_{(2)} = -\psi \sqrt{v},$$

$$x'_{(2)0} = \frac{\cos \alpha}{m_2} \frac{a}{d} \frac{1}{\sqrt{vd}} \arcsin \frac{-2a\psi\sqrt{d}}{a^2 + \psi^2 d} - \left(d - \frac{\cos \alpha}{m_2} \right) \frac{2\psi}{d\sqrt{v}} + x'_{1_0}$$

und

$$x_{(2)0} = \frac{\cos \alpha}{m_2} \frac{a}{d} \frac{1}{2} \frac{1}{vd} \left(\arcsin \frac{-2a\psi\sqrt{d}}{a^2 + \psi^2 d} \right)^2 - \left(d - \frac{\cos \alpha}{m_2} \right) \frac{\psi}{d\sqrt{vd}} \arcsin \frac{-2a\psi\sqrt{d}}{a^2 + \psi^2 d}$$

$$+ x'_{(1)0} \frac{1}{\sqrt{vd}} \arcsin \frac{-2a\psi\sqrt{d}}{a^2 + \psi^2 d} + x_{1_0}$$

sind dann die Anfangswerte für die dritte Phase der Bewegung. Hier muß nun, damit Spannungswechsel eintreten kann

$$\psi < \frac{a}{\sqrt{f}}, \text{ d. h.}$$

$$\left(\lambda_0 + \frac{a}{f} \right)^2 - \frac{\lambda_0'^2}{vf} > 0$$

sein. Das läßt sich für jedes Wertepaar λ_0, λ'_0 , für das $0 > \lambda_0 > -\frac{a}{f}$ ist, für genügend großes ν erreichen, und in dem ganzen Gebiet $-\frac{a}{f} < \lambda_0 < 0$ tritt dann auch in der dritten Phase wieder Spannungswechsel ein und zwar bei den Werten t , wo

$$e^{i\sqrt{\nu}f} = \frac{\frac{a}{f} + \frac{\psi}{\sqrt{f}}}{\frac{a}{f} - \frac{\psi}{\sqrt{f}}}$$

ist. Für diesen neuen Spannungswechsel gilt dann:

$$\lambda_{(3)} = 0, \quad \lambda'_{(3)} = \psi\sqrt{\nu},$$

$$x'_{(3)} = -\frac{\cos\alpha}{m_2} \frac{a}{f} \frac{1}{\sqrt{\nu}f} \log \frac{\frac{a}{f} + \frac{\psi}{\sqrt{f}}}{\frac{a}{f} - \frac{\psi}{\sqrt{f}}} + \left(\frac{\cos\alpha}{m_2} + f\right) \frac{2\psi}{f\sqrt{\nu}} + x'_{(2)},$$

$$x_{(3)} = -\frac{\cos\alpha}{m_2} \frac{a}{f} \frac{1}{2} \frac{1}{\nu f} \left(\log \frac{\frac{a}{f} + \frac{\psi}{\sqrt{f}}}{\frac{a}{f} - \frac{\psi}{\sqrt{f}}} \right)^2 + \left(\frac{\cos\alpha}{m_2} + f\right) \frac{\psi}{\nu f \sqrt{f}} \log \frac{\frac{a}{f} + \frac{\psi}{\sqrt{f}}}{\frac{a}{f} - \frac{\psi}{\sqrt{f}}} + x'_{(2)} \frac{1}{\sqrt{\nu}f} \log \frac{\frac{a}{f} + \frac{\psi}{\sqrt{f}}}{\frac{a}{f} - \frac{\psi}{\sqrt{f}}} + x_{(2)}.$$

Von hier ab erfolgt nun ganz analog wie vorher (S. 297 ff.) die Bewegung unter abwechselndem Druck und Zug, wir können uns darauf beschränken unter Bezugnahme auf die dortigen Ausführungen die Werte der x'_1 und x_1 am Ende der n^{ten} Schwingung (gerechnet vom Anfang der zweiten Phase ab) anzugeben:

$$x'_{(2n+1)} = \frac{R^*}{C^*} T + x'_{(1)},$$

$$x_{(2n+1)} = \frac{1}{\sqrt{\nu}} \left(\frac{A^*}{C^*} + \frac{B^*}{C^*} + \frac{E}{C^*} \frac{1}{\sqrt{f}} \log \frac{\frac{a}{f} + \frac{\psi}{\sqrt{f}}}{\frac{a}{f} - \frac{\psi}{\sqrt{f}}} - \frac{R^*}{2} \right) T + x'_{(1)} T + \frac{R^* T^2}{C^*} + x_{(1)}.$$

Dabei unterscheiden sich die mit * versehenen Größen nur dadurch von den früher eingeführten gleichbezeichneten Abkürzungen, daß in diesen das φ durch ψ ersetzt wurde, während

$$E = \frac{\cos\alpha}{m_2} \frac{a}{d} \frac{1}{\sqrt{d}} \arcsin \frac{-2a\psi}{a^2 + \psi^2 d} - \left(d - \frac{\cos\alpha}{m_2}\right) \frac{2\psi}{d}$$

ist. Auch für die Diskussion der Parabeln und für den Spannungsverlauf gelten den vorigen ganz analoge Ausführungen.

(Daß beim Experiment diese große Serie von Bewegungen unter wechselndem Zug und Druck sich nicht von selbst einstellt, ist — nach einer Bemerkung von Herrn Prof. Prandtl — dadurch bedingt, daß die fortwährenden Umlagerungen in sämtlichen Spielräumen von besonderen Reibungen begleitet sind, wodurch die Schwingungen merklich gedämpft verlaufen. Es tritt dann sehr rasch die gewöhnliche beschleunigte Bewegung ein.)

Es bleibt nur noch der Fall: $\lambda_0 = -\frac{a}{f}$, $\lambda'_0 > 0$ zu erledigen. Dafür ergibt sich eine erste Phase der Bewegung bis zum Umschlagen der Spannung in Druck, dann Bewegung unter Druck bis zu einem zweiten Spannungswechsel, dann Bewegung ohne Spannungswechsel (weil $\psi > \frac{a}{\sqrt{f}}$) bei wachsendem Zug, bis $x'_1 = 0$ wird.

Es ist noch zu erwähnen, daß auch die auf S. 291 aufgeführten Anfangswerte:

$$\lambda_0 = 0, \quad x'_{1_0} > 0, \quad \lambda'_0 \geq 0$$

zu Bewegungen unter abwechselndem Zug und Druck Veranlassung geben, wobei der Absolutwert des λ' in den Momenten des Spannungswechsels stets $|\lambda'_0|$ ist.

Auf Grund der vorausgehenden Ausführungen können wir nun zu jedem Tripel von endlichen Anfangswerten $\lambda_0, \lambda'_0, x'_{1_0}$ den ganzen Verlauf der einsetzenden Bewegung angeben für alle elastischen Systeme, deren ν größer ist, als eine für bestimmte Werte des $\lambda_0, \lambda'_0, x'_{1_0}$ feste Zahl. Dabei ist vorausgesetzt, daß wir die Bewegungen, in deren Verlauf $x'_1 = 0$ eintritt, nur bis zu dem hierzu gehörigen Zeitmoment verfolgen wollen.

V. Grenzvorgänge, gegen die die Bewegungen des elastischen Systems bei über alle Grenzen wachsendem ν konvergieren.

Nachdem wir wissen, daß für unbegrenzt wachsendes ν die Bewegung, die zu einem bestimmten Wertetripel $\lambda_0, \lambda'_0, x'_{1_0}$ gehört, den Typus der bereits gefundenen Bewegung immer beibehält, handelt es sich nunmehr, um den Grenzübergang zu $\nu = \infty$ zu machen, nur noch um eine quantitative Untersuchung der aufgestellten Bewegungsvorgänge.

Bestimmen wir zunächst, wie unsere Gebietseinteilung der Fig. 12 und 13 sich bei über alle Grenzen wachsendem ν abändert. Da fällt die Ellipse:

$$\left(\lambda_0 - \frac{a}{d}\right)^2 + \frac{\lambda'_0{}^2}{\nu d} = \frac{a^2}{d^2}$$

immer genauer mit dem Paar von Geraden:

$$\lambda_0 = 0 \text{ und } \lambda_0 = \frac{2a}{d} \text{ (Fig. 19),}$$

die Hyperbel:

$$\left(\lambda_0 + \frac{a}{f}\right)^2 - \frac{\lambda_0'^2}{\nu d} = \frac{a^2}{f^2}$$

mit dem Geradenpaar:

$$\lambda_0 = 0 \text{ und } \lambda_0 = -\frac{2a}{f}$$

zusammen, während die Geraden:

$$\lambda_0 + \frac{a}{f} + \frac{\lambda_0'}{\sqrt{\nu f}} = 0$$

und

$$\lambda_0 + \frac{a}{f} - \frac{\lambda_0'}{\sqrt{\nu f}} = 0$$

beliebig nahe in die Gerade $\lambda = -\frac{a}{f}$ zusammenrücken (Fig. 20). In den Figuren sind die Gebiete, in denen ein Spannungswechsel eintritt, schraffiert, die Grenzgeraden $\lambda_0 = 0$ und

$\lambda_0 = +\frac{2a}{d}$ bzw. $\lambda_0 = 0$ und $\lambda_0 = -\frac{a}{f}$ gehören mit Ausnahme des Stückes der Geraden $\lambda_0 = -\frac{a}{f}$, für das $\lambda_0' \leq 0$ ist, zum schraffierten Gebiet. Die Ellipse:

$$\left(\lambda_0 - \frac{a}{d}\right)^2 + \frac{\lambda_0'^2}{\nu d} = \frac{a^2}{d^2} \left(1 + \frac{d}{f}\right),$$

nähert sich bei unbegrenzt wachsendem ν dem Geradenpaar:

$$\lambda_0 = \frac{a}{d} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{d}{f}}\right)$$

und

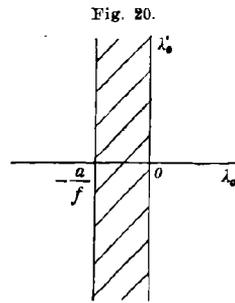
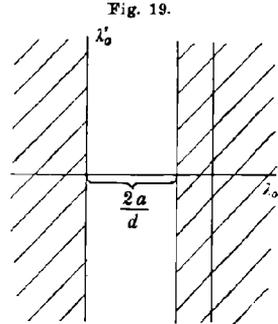
$$\lambda_0 = \frac{a}{d} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{d}{f}}\right);$$

die Gerade:

$$\lambda_0 = \frac{a}{d} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{d}{f}}\right)$$

selbst gehört nicht zu dem links von ihr liegenden Gebiet.

Im Anschluß an die Untersuchung der Gebietseinteilung bestimmen wir, was sich in den Gebieten mit Spannungswechsel für den Zeitpunkt $t \geq 0$ seines Eintretens bei beliebig wachsendem ν ergibt. Dieser Zeitpunkt war uns durch die Formeln:



$$t = \frac{1}{\sqrt{vd}} \arcsin \frac{-\frac{a}{d} \frac{\lambda'_0}{\sqrt{vd}} \pm \left(\lambda_0 - \frac{a}{d}\right) \sqrt{\lambda_0^2 - \frac{2a\lambda_0}{d} + \frac{\lambda_0'^2}{vd}}}{\left(\lambda_0 - \frac{a}{d}\right)^2 + \frac{\lambda_0'^2}{vd}}$$

bzw.

$$t = \frac{1}{\sqrt{vf}} \log \frac{\frac{a}{f} \pm \sqrt{\frac{\lambda_0'^2}{vf} - \lambda_0^2 - \frac{2a\lambda_0}{f}}}{\lambda_0 + \frac{a}{f} + \frac{\lambda_0'}{\sqrt{vf}}}$$

(vgl. S. 283 und 284) festgelegt.

Für jedes Wertepaar λ_0, λ'_0 , für das überhaupt Spannungswechsel für $t \geq 0$ eintreten kann, konvergiert also die Zeit vom Beginn der Bewegung bis zum Eintreten des Spannungswechsels mit unbegrenzt wachsendem ν gegen Null.

Bestimmen wir nach diesen Vorbemerkungen die Grenzvorgänge für die Bewegung unseres elastischen Systems selbst. Wir unterteilen dabei das ganze Gebiet der Anfangswerte λ_0, λ'_0 wieder und bestimmen zunächst die Grenzbewegung im Gebiete:

$$0 < \lambda_0 < \frac{2a}{d} \quad \text{bei} \quad x'_0 > 0.$$

Dem Wert $\lambda_0 = \frac{a}{d}$ entspricht die ausgezeichnete Bewegung mit konstantem Druck in der Stange: mit unbegrenzt wachsendem ν rücken die beiden Parabeln $x_1(t)$ und $x_2(t)$ von der Ordinatendifferenz $\xi = \frac{a}{\nu d}$ (Fig. 8) immer näher zusammen. Für alle anderen Werte λ_0, λ'_0 des betrachteten Bereiches bewirkt ein unbegrenztes Anwachsen von ν , daß die Amplitude und die Wellenlänge der Schwingungen der Kurven x_1 und x_2 (vgl. Fig. 2) immer kleiner werden, und daß diese Kurven sich für alle Werte der Abszisse unbegrenzt an die Parabel:

$$x_1 = \frac{\cos \alpha}{m_2} \frac{a}{d} \frac{t^2}{2} + x'_{1_0} t + x_{1_0}$$

annähern. Gleichzeitig konvergieren die Werte der Geschwindigkeit der beiden Massen gegen den Wert:

$$x'_1 = \frac{\cos \alpha}{m_2} \frac{a}{d} t + x'_{1_0}.$$

Für alle Werte λ_0, λ'_0 des Bereiches und ein bestimmtes x'_{1_0} konvergieren also die Kurven der x_1 und x_2 gegen dieselbe Parabel I der Fig. 21; ein Unterschied ist bei den verschiedenen Werten λ_0 nur dadurch bedingt, daß der Druck dauernd zwischen zwei Grenzen schwankt, die sich mit wachsendem ν den Werten λ_0 und $\frac{2a}{d} - \lambda_0$ beliebig nähern (Vgl. Fig. 14).

(Alle diese und die folgenden Aussagen ergeben sich direkt aus den abgeleiteten Formeln; wir wollen hier nur darauf verzichten, diese in jedem einzelnen Fall zu zitieren).

Für die unter abwechselndem Zug und Druck verlaufenden Bewegungen bei den Anfangswerten:

$$\left. \begin{aligned} \frac{2a}{d} < \lambda_0 < \frac{a}{d} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{d}{f}} \right), \quad \lambda'_0 \geq 0 \\ \lambda_0 = 0, \quad \lambda'_0 < 0 \end{aligned} \right\} x'_{1_0} > 0$$

wissen wir bereits, daß die Zeit vom Beginn der Bewegung bis zum Eintreten des ersten Spannungswechsels mit wachsendem ν gegen Null konvergiert; dasselbe ist aber auch der Fall für die Zeit zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Spannungswechseln im weiteren Verlauf der Bewegung.

Wie wir S. 298 sahen, liegen die aufeinanderfolgenden Schnittpunkte der Kurven der x_1 und x_2 auf einer Parabel, und diese Parabel rückt mit zunehmendem ν selbst immer näher an die Parabel von der einfachen Gleichung:

$$x_{1_0} = x'_{(1)_0} T + \frac{R T^2}{C} + x_{(1)_0}$$

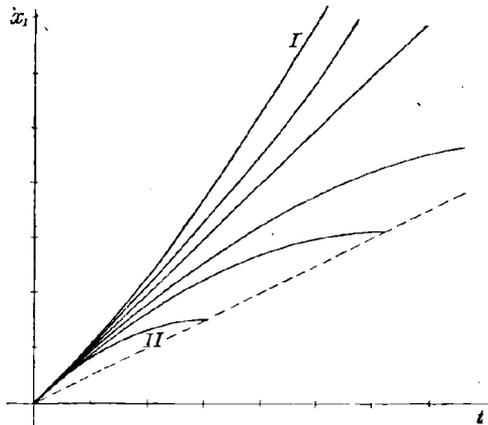
heran. Die Schnittpunkte der Kurven $x_1(t)$ und $x_2(t)$ liegen auf der Parabel immer dichter, und die Tangentenrichtung an die Kurven in diesen Schnittpunkten fällt immer genauer mit der Parabeltangente zusammen. Die beiden Kurven $x_1(t)$ und $x_2(t)$ stimmen also bei unbegrenzt wachsendem ν für ein Wertepaar λ_0, λ'_0 immer näher mit einer der verschiedenen Parabeln überein, die das von den Parabeln I und II begrenzte Büschel bilden, und sie durchsetzen dabei die Parabeln in immer dichter liegenden Punkten. Die Parabel I gehört selbst zu dem Büschel, während sich die Parabeln der Parabel II mit der Gleichung:

$$x_1 = - \frac{\cos \alpha}{m_2} \frac{a}{f} \frac{t^2}{2} + x'_{(1)_0} t + x_{(1)_0}$$

nur unbegrenzt nähern.

Dem Wertetripel $\lambda_0 = \frac{a}{d} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{d}{f}} \right), \lambda'_0 = 0, x'_{1_0} > 0$ entspricht, wie aus Fig. 16 folgt, bei unbegrenzt wachsendem ν eine Bewegung, die

Fig. 21.



nach einem immer rascher sich vollziehenden Spannungswechsel der verzögerten Bewegung mit $\lambda = -\frac{a}{f}$ immer benachbarter verläuft.

Auf dasselbe Grenzkurvensystem wie soeben werden wir geführt, wenn wir die Bewegungen des elastischen Systems bei unbegrenzt wachsendem ν betrachten für die Anfangswerte:

$$-\frac{a}{f} < \lambda_0 < 0, \quad \lambda'_0 \geq 0, \quad x'_{1_0} > 0.$$

Für $\lambda_0 = -\frac{a}{f}$, $\lambda'_0 = 0$ fallen die beiden Parabeln von der Ordinaten-differenz $\xi = -\frac{a}{\nu f}$, welche uns die verzögerte Bewegung geben, mit wachsendem ν immer näher in die Parabel II zusammen.

Schließlich haben wir noch den Einfluß des unbegrenzten Anwachsens von ν auf diejenigen Bewegungen zu untersuchen, in deren Verlauf das x'_1 zu Null wird. Wir wollen diese Bewegungen — der kurzen Ausdrucksweise wegen — als sich sperrende Bewegungen bezeichnen und den Moment, in dem $x'_1 = 0$ wird, den Moment der Sperrung nennen.

Wir kennen bereits den Verlauf der sich sperrenden Bewegungen und untersuchen noch, wie die Zeit zwischen dem Beginn einer solchen Bewegung und dem Moment der Sperrung sich mit über alle Grenzen wachsendem ν abändert.

Für alle Bewegungen mit

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_0 > 0, \quad \lambda'_0 \geq 0 \\ \lambda_0 = 0, \quad \lambda'_0 \geq 0 \end{array} \right\} x'_{1_0} < 0$$

ergibt sich diese Zeit als die kleinste positive Wurzel der Gleichung (Formel (4)):

$$0 = -\frac{\cos \alpha}{m_2} \frac{a}{f} t + \left(\frac{\cos \alpha}{m_2} + f \right) \left(\frac{1}{2} \frac{\lambda_0 + \frac{a}{f} + \frac{\lambda'_0}{\sqrt{\nu f}}}{\sqrt{\nu f}} e^{t\sqrt{\nu f}} - \frac{1}{2} \frac{\lambda_0 + \frac{a}{f} - \frac{\lambda'_0}{\sqrt{\nu f}}}{\sqrt{\nu f}} e^{-t\sqrt{\nu f}} - \frac{\lambda'_0}{\sqrt{\nu f}} \right) - x'_{1_0}.$$

Diese Gleichung wird durch einen Wert:

$$t = \frac{\log(M\sqrt{\nu f})}{\sqrt{\nu f}},$$

wo

$$M = \frac{|x'_{1_0}|}{\frac{1}{2} \left(\frac{\cos \alpha}{m_2} + f \right) \left(\lambda_0 + \frac{a}{f} \right)}$$

ist, erfüllt bis auf einen Fehler, der mit wachsendem ν selbst gegen 0 geht. Bei unbegrenzt wachsendem ν stimmt also der Wert:

$$t = \frac{\log(M\sqrt{\nu f})}{\sqrt{\nu f}}$$

immer genauer mit dem Wurzelwert überein, und da

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\log(M\sqrt{vf})}{\sqrt{vf}} \right\} = 0,$$

so geht die Wurzel selbst gegen 0.

Auf fast dieselbe Weise zeigt man, daß auch bei den Bewegungen mit

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_0 < 0, \quad \lambda'_0 > 0 \\ \lambda_0 = 0, \quad \lambda'_0 < 0 \end{array} \right\} x'_{1_0} < 0$$

nach einem mit wachsendem v immer rascher erfolgenden Spannungswechsel Sperrung nach Verlauf einer Zeit t eintritt, die mit über alle Grenzen wachsendem v gegen 0 konvergiert.

Zusammenfassend ergibt sich so:

Bei allen Bewegungen des elastischen Systems mit $x'_{1_0} < 0$, d. h. mit nach links gerichteter Anfangsgeschwindigkeit, sperrt sich die Bewegung nach Verlauf einer Zeit t , die mit unbegrenzt wachsendem v gegen Null konvergiert.

Ganz analoge Überlegungen lassen erkennen, daß auch für alle sich sperrenden Bewegungen unter Zug nach rechts, ebenso wie für diejenigen Bewegungen nach rechts, die durch immer rascher eintretenden Spannungswechsel in solche unter dauernd wachsendem Zug übergehen, die Zeit vom Beginn bis zum Eintreten der Sperrung gegen Null konvergiert. Die ersteren gehören zu den Anfangswerten

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_0 < -\frac{a}{f}, \quad \lambda'_0 \geq 0, \\ \lambda_0 = -\frac{a}{f}, \quad \lambda'_0 < 0, \end{array} \right\} x'_{1_0} > 0,$$

die letzteren zu den Anfangswerten

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_0 > \frac{a}{d} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{d}{f}} \right), \quad \lambda'_0 \geq 0 \\ \lambda_0 = \frac{a}{d} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{d}{f}} \right), \quad \lambda'_0 \geq 0 \\ \lambda_0 = -\frac{a}{f}, \quad \lambda'_0 > 0 \end{array} \right\} x'_{1_0} > 0.$$

Erwähnt sei wenigstens, daß wir durch die Einschränkung, die sich sperrenden Bewegungen nur bis zum Momente $x'_1 = 0$ zu betrachten, auf die Bestimmung der Grenzvorgänge, gegen die die Bewegungen von dem in Fig. 6 dargestellten Typus konvergieren, verzichten.

So viel über die Bewegungen des elastischen Systems bei über alle Grenzen wachsendem v . Wir können schließlich noch von einem Grenzfall $v = \infty$ selbst sprechen und von einem *starr*en System als zu-

gehörigem Grenzfall des elastischen Systems. Wenn wir die zunächst unbekanntem Bewegungsvorgänge für dieses starre System so definieren, daß wir sagen, sie sollen übereinstimmen mit den Grenzvorgängen, denen sich die Bewegungen des elastischen Systems mit unbegrenzt wachsendem ν nähern, dann können wir unsere Ergebnisse bequem so fassen:

Beim starren System werden die Vorgänge unabhängig von dem endlichen Wert λ'_0 , sie zerfallen in drei Hauptgruppen:

1. Für alle Werte $0 < \lambda_0 < \frac{2a}{d}$, $x'_{1_0} > 0$ führt das starre System eine gleichförmig beschleunigte Bewegung nach rechts aus; die Kurven $x_1(t)$ und $x_2(t)$ decken sich mit der zu dem betreffenden x'_{1_0} gehörigen Parabel I (Fig. 21).

2. Für alle Werte:

$$\frac{2a}{d} \geq \lambda_0 < \frac{a}{d} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{d}{f}}\right), \quad x'_{1_0} > 0$$

und alle Werte:

$$-\frac{a}{f} < \lambda_0 \leq 0, \quad x'_{1_0} > 0$$

vollzieht sich die Bewegung unter fortwährendem Spannungswechsel, und es stimmen in jedem Zeitmoment t die Ordinaten bzw. Tangentenrichtungen der Kurven $x_1(t)$ und $x_2(t)$ überein mit der zu t gehörigen Ordinate bzw. Tangentenrichtung einer bestimmten Parabel des Büschels Fig. 21.

Den Werten $\lambda_0 = \frac{2a}{d}$ bzw. $\lambda_0 = 0$ entspricht die Parabel I, mit wachsendem bzw. abnehmendem λ_0 nähern sich die Parabeln immer mehr der Parabel II.

Dem Werte $\lambda_0 = \frac{a}{d} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{d}{f}}\right)$ entspricht nach einem instantanen eintretenden Spannungswechsel die durch Parabel II gegebene gleichförmig verzögerte Bewegung; dieselbe Bewegung setzt für den Wert $\lambda_0 = -\frac{a}{f}$ direkt ein.

3. Allen Werten

$$\left. \begin{aligned} \lambda_0 &> \frac{a}{d} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{d}{f}}\right) \\ \lambda_0 &< -\frac{a}{f} \end{aligned} \right\} x'_{1_0} > 0,$$

$$\lambda_0 \geq 0, \quad x'_{1_0} < 0$$

entspricht instantane Sperrung der Bewegung (eventuell nach vorausgegangenem instantanem Spannungswechsel).

Unter der Voraussetzung, daß das Experiment eine befriedigende Übereinstimmung unserer Ergebnisse für elastische Systeme mit den Verhältnissen bei den wirklichen Körpern zeigt, läßt sich die Frage, wie weit die direkten Ansätze für starre Körper — wie sie in der zitierten Arbeit von Herrn Klein benutzt sind — das Verhalten der physikalischen Körper richtig geben, durch einen Vergleich der beiderseitigen Ergebnisse so beantworten:

Daß diese Ansätze sowohl die gleichförmig beschleunigte und die gleichförmig verzögerte Bewegung, als auch — bei der Interpretation der Herren Klein und Prandtl — instantane Sperrung der nach links gerichteten Bewegungen liefern, ist als eine gute Annäherung an die Bewegungsvorgänge der wirklichen Körper zu bezeichnen; sie geben aber andererseits nichts von den unter abwechselndem Zug und Druck erfolgenden Bewegungen und lassen die Labilität der verzögerten Bewegung nicht hervortreten.

VI. Beschreibung eines Apparates zur Demonstration der geschilderten Bewegungen.

Eine Skizze dieses nach Angaben von Herrn Prof. Prandtl hergestellten Apparates und Detailzeichnungen enthalten die Fig. 22a—22d.

Die beiden Führungen sind auf einer Holzplatte von $100 \times 30 \text{ cm}^2$ montiert; die beiden parallelen Holzleisten, welche die Führung von m_1 bilden, sind fest, die Führung von m_2 (zwei auf ein Flacheisen geschraubte Winkeleisen, vgl. Fig. 22d) ist längs zweier Schlitze in der Holzplatte verschiebbar,

Fig. 22 b.

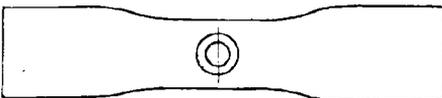
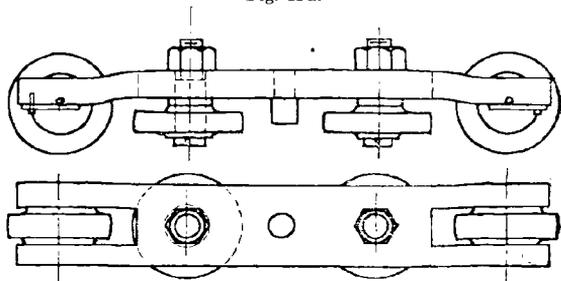
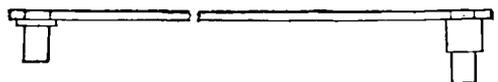


Fig. 22 a.



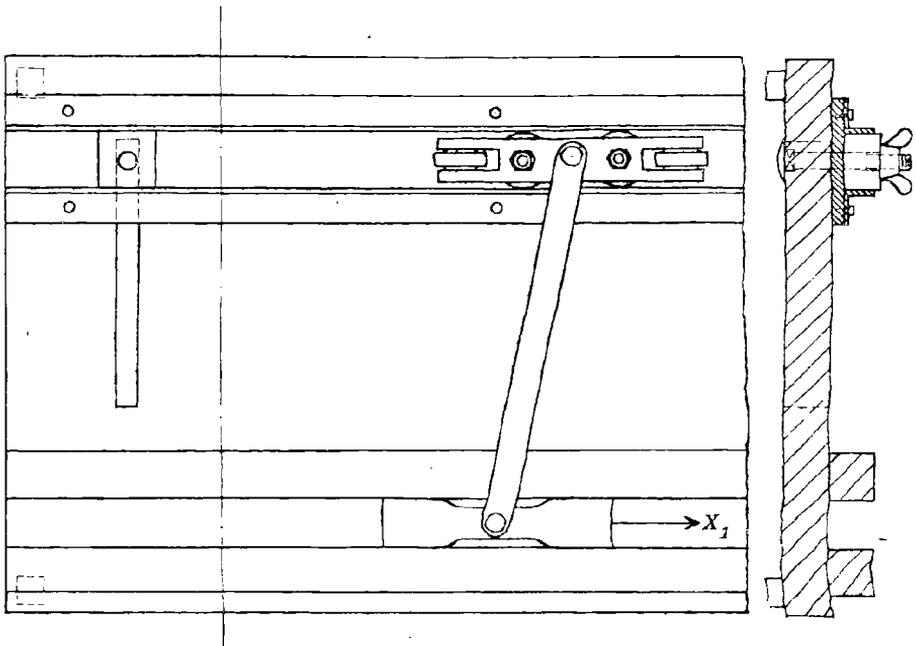
um durch Änderung des Abstandes der beiden Führungen ohne Änderung der Länge der Verbindungsstange die Stange flach und steil stellen zu können. Die Masse m_1 wird durch ein Holzprisma (Fig. 22 b) gebildet; die an den Führungsleisten

Fig. 22 c.



reibenden Flächen desselben sind mit Glaspapier überklebt. Um die Reibung in der Führung von m_2 möglichst klein zu bekommen, ist hier rollende Reibung von Metall auf Eisen gewählt. Die beiden längs der Winkeleisen laufenden Rollen sind leicht drehbar auf einem Wagen befestigt (Fig. 22a), der selbst auf Rollen aus Metall auf dem Flacheisen läuft. Die Verbindungsstange ist in Fig. 22c und 22d dargestellt; die Kraft X_1 wird durch ein mittels Schnur an m_1 befestigtes Gewicht ausgeübt.

Fig. 22d.



Es läßt sich mit dem Apparat außer der beschleunigten Bewegung nach rechts auch eine Bewegung vom Typus der Bewegungen unter abwechselndem Druck und Zug nach rechts ausführen, wenn man durch leichtes Andrücken von m_1 an die Führung die Stange unter Zug setzt. Bei Anfangsgeschwindigkeit des Systems nach links ist sehr gut zu unterscheiden zwischen der verzögerten Bewegung bei flachgestellter Stange und der sehr rasch sich sperrenden Bewegung bei steilgestellter Stange. (Natürlich tritt nach Sperrung der Bewegungen infolge der Wirkung von X_1 aus der Ruhe heraus sofort die gewöhnliche beschleunigte Bewegung nach rechts wieder ein.) Sperrung bei Bewegung nach rechts läßt sich sehr schön dadurch zeigen, daß man bei der gewöhnlichen beschleunigten Bewegung das sinkende Gewicht plötzlich aufhält oder es auf den Boden sich aufsetzen läßt. Es ist zu beachten, daß

bei diesem Apparat nicht genau die Verhältnisse vorliegen, die wir in der Rechnung voraussetzten, bei ihm sind die Vorgänge wesentlich beeinflusst durch die elastische Nachgiebigkeit aller Teile des Systems und die Spielräume in den Führungen. Um alle Bewegungen des elastischen Systems gut zu übersehen, müßte man eine federnde Verbindungsstange anbringen und, was sehr schwierig wäre, die Spielräume des Apparates auf ein wesentlich geringeres Maß zurückführen.

Modelle zur Darstellung affiner Transformationen von Punktsystemen in der Ebene und im Raume.¹⁾

Unter Mitwirkung von FR. SCHILLING in Danzig
herausgegeben von F. KLEIN in Göttingen.

Affin veränderliche Systeme sind bekanntlich nicht nur für die reine Geometrie, sondern auch für die verschiedensten Teile der Mechanik von grundlegender Wichtigkeit. Man denke in der Hinsicht insbesondere an die Mechanik der Kontinua. Die Veranschaulichung der affin veränderlichen Systeme durch Modelle dürfte daher gewiß allseitiges Interesse erwecken.

Analytisch wird die affine Transformation der Ebene, bezogen auf ein beliebiges Parallelkoordinatensystem durch die Formeln gegeben:

$$\begin{aligned}x' &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1, \\y' &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2,\end{aligned}$$

wo allgemein $\Delta = \alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2 \geq 0$ ist, und analog die des Raumes durch

$$\begin{aligned}x' &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1, \\y' &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \delta_2, \\z' &= \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z + \delta_3,\end{aligned}$$

wo wieder allgemein

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \geq 0$$

ist.

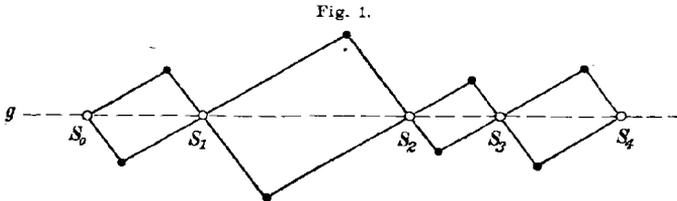
1) Die Modelle, die auf der Salzburger Naturforscherversammlung von Hrn. Timerding vorgezeigt wurden, sind inzwischen im Verlage der Firma Martin Schilling in Leipzig erschienen.

Hierbei wird jede Gerade *ähnlich* transformiert, der Tatsache gemäß, daß die unendlich ferne Ebene sich selbst entspricht und für die einzelne Gerade Affinität mit Ähnlichkeit zusammenfällt.

Geometrisch kann man am einfachsten das affin veränderliche ebene System dargestellt denken durch drei zu einem Dreieck vereinigte affin (d. h. ähnlich) veränderliche Punktreihen. Man braucht dann für den weiteren Ausbau nur noch beliebig weitere solche Punktreihen einzufügen, gleichsam einzuspannen, von denen die einzelne zwei der bereits vorhandenen Punkte verbindet.

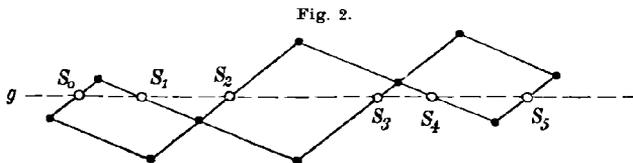
Analoges gilt für den Raum. Hier bilden sechs zu einem Tetraeder vereinigte ähnlich veränderliche Punktreihen die Grundlage des affin veränderlichen Systems.

Hat man dies Prinzip einmal erkannt, so kommt die Frage nach der Veranschaulichung der affin veränderlichen Systeme durch Modelle



darauf hinaus, wie man die einzelne ähnlich veränderliche Punktreihe in einfachster Weise verwirklichen kann.

Ein einfacher Mechanismus, der die ähnliche Transformation diskreter Punkte S_i einer (gedachten) Geraden g verwirklicht, wird nun durch die „Nürnberger Schere“ geliefert. Die einzelnen Parallelogramme



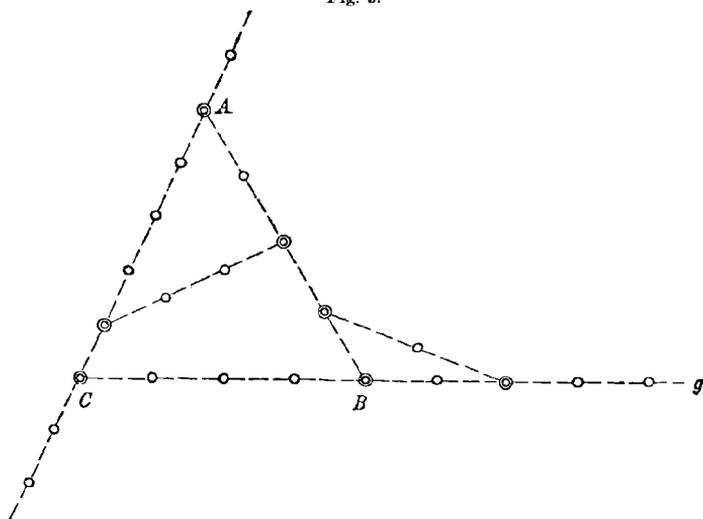
der Schere können sehr wohl verschieden große Seitenlängen haben wie in der Fig. 1; in unseren Modellen sind diese indes der Einfachheit halber alle einander gleich gewählt. (Man kann übrigens statt der „Diagonalgeraden“ g der Fig. 1 auch jede andere, die Parallelogrammseiten oder ihre Verlängerungen durchsetzende Gerade wählen; auch brauchen dann die aneinander gereihten Parallelogramme überhaupt keine gemeinsame Diagonale zu besitzen, dem Prinzip des Storchschnabels entsprechend, Fig. 2.)

Dem Vorstehenden gemäß können wir also die affine Trans-

formation diskreter Punkte einer Ebene dadurch erzeugen, daß wir (auf einer Tischplatte oder einem Reißbrett) zunächst zwei Nürnberger Scheren mit einem der Gelenkpunkte S_i gelenkig verbinden und dann zwischen zwei beliebigen ihrer Punkte S_i eine dritte Schere einspannen, ebenso zwischen irgend zwei Punkten S_i dieser drei Scheren eine vierte usf. Das Punktsystem, welches bei der Veränderung des gesamten Gelenksystems in sich und dessen Bewegung in seiner Ebene sich affin transformiert, wird hierbei durch die Gelenkpunkte S_i auf den gemeinsamen Diagonalen der Parallelogramme jeder Schere gegeben, während die übrigen Gelenkpunkte außer Betracht bleiben.

So bekommt man in einfachster Weise einen organischen Aufbau des affin veränderlichen ebenen Systems, indem man eben die Verbindung

Fig. 3.

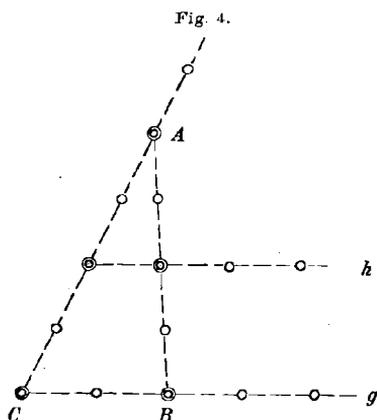


zweier Punkte durch eine Gerade sich nicht durch eine am Lineal gezogene Linie oder durch einen gespannten Faden, sondern allemal durch eine Nürnberger Schere ausgeführt denkt.

Das Modell 1 besteht aus je zwei 8- und 6-gliedrigen und je einer 4-, 3- und 2-gliedrigen Nürnberger Schere und einer Anzahl federnder Stifte, welche diese Scheren wie geschildert beliebig zusammenzukoppeln gestatten.

Die Gelenkpunkte S_i treten durch ihre glänzende Messingfarbe besonders hervor, während die unwesentlichen Gelenkpunkte schwarz gebeizt sind. (Die beigegebenen Messingplättchen sollen eventuell als Zwischenlagen bei den zusammengekuppelten Gelenkpunkten zweier Scheren dienen, um ein Aneinanderstoßen der Scheren zu verhindern.)

Die nebenstehenden Figuren 3—5 a, b sollen aus der großen Fülle der zu bildenden Formen einige Beispiele auswählen. Die einzelnen Scheren sind durch die (gestrichelten) Diagonalgeraden mit den Gelenkpunkten auf ihnen und die zusammengekuppelten Gelenkpunkte durch doppelte Nullenkreise angedeutet.



Die Fig. 3 zeigt einen sich eng an die obige Ausführung anschließenden Aufbau. In der Fig. 4 wird veranschaulicht, daß die Geraden g, h wie in der Anfangslage auch bei allen affinen Transformationen parallel bleiben. Die Figuren 5 a, b stehen in engster Beziehung zu dem Satze des Menelaos für das Dreieck ABC , daß nämlich:

$$AE \cdot BF \cdot CD = AF \cdot BD \cdot CE$$

ist, insofern die Scheren EF und BC wie in der Anfangslage so auch bei allen Veränderungen an der Stelle D sich stets deckende Gelenkpunkte haben.

Die *perspektive* Affinität einer Ebene wird durch die Fig. 3 und 4 veranschaulicht, wenn man die Gerade g als „Affinitätsachse“ unverändert läßt und nur den übrigen Teil verändert.

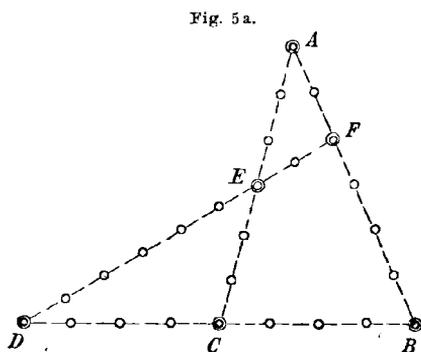


Fig. 5a.

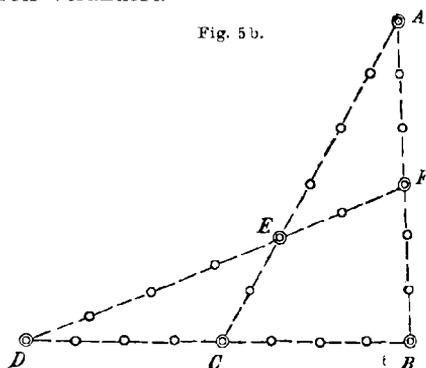


Fig. 5b.

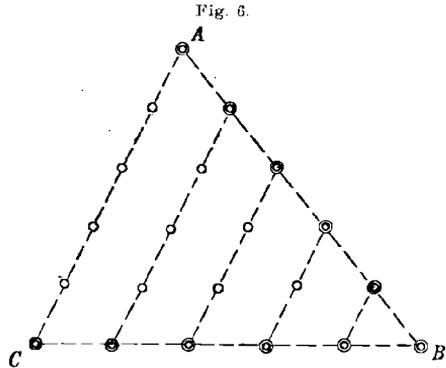
Andererseits zeigen die Modelle dieser Figuren mit hinreichendem Grade der Annäherung auch die *ausgearteten* Affinitäten, also die Fälle, daß die ganze Ebene sich auf eine Gerade oder aber in einen Punkt abbildet.

Das *Modell 2*¹⁾ gibt speziell die in der Fig. 6 gezeichnete Vereinigung Nürnberger Scheren.

1) Die Modelle 2 und 4 hat zuerst Herr cand. math. Remack in Göttingen in brauchbarer Form angefertigt und damit zu der jetzt erfolgenden Herausgabe der Modelle sehr beigetragen.

Abgesehen von der Bewegung in der Ebene zeigt jedes Modell eine Gruppe von ∞^3 Veränderungen, d. h. es besitzt als Gelenksystem drei Grade der Freiheit.

Die Modelle 3 und 4 geben durch Zusammensetzung von Nürnberger Scheren spezielle Beispiele für die affine Transformation des Raumes, und zwar zeigt das Modell 3 das Tetraeder, dessen 6 Kanten durch zweigliedrige Scheren ersetzt sind, das Modell 4 das Tetraeder, bei dem 3 Seitenebenen wie in der Fig. 6 ausgebildet sind. Alle Gelenke, in denen drei Scheren zusammenstoßen, sind als Cardanosche Gelenke ausgebildet. Abgesehen von der Bewegung im Raume selbst zeigt jedes der beiden Modelle eine Gruppe von ∞^6 Veränderungen in sich, d. h. es besitzt als Gelenksystem 6 Grade der Freiheit (von unwesentlichen Veränderungen wegen der Cardanoschen Gelenke abgesehen).



Wir stellen es als eine Aufgabe hin, ähnlich einfache Gelenksysteme zur Darstellung der kollinearen Transformationen in der Ebene und im Raume¹⁾ zu bilden.

Kleinere Mitteilungen.

Preisaufgaben

der Académie des sciences de Paris aus der angewandten Mathematik.

Für 1911.

Prix Vaillant (4000 fr.). 1. Perfectionner en un point important l'application des principes de la dynamique des fluides à la théorie de l'hélice.

2. Perfectionner en quelque point l'étude du mouvement d'un ellipsoïde dans un liquide indéfini, en ayant égard à la viscosité du liquide.

Prix Damoiseau (2000 fr.). 1. (Wiederholt aus dem Jahre 1909.) Théorie de la planète Éros basée sur toutes les observations connues.

2. Perfectionner les Tables de Jupiter de Le Verrier.

Für 1912.

Prix Fourneyron (1000 fr.). Théorie et expériences sur la résistance de l'air, applicables à l'aviation.

Prix Gay (1500 fr.). Étude des marées de l'écorce terrestre.

1) Kompliziertere Gelenksysteme dieser Art sind ja bereits bekannt, vgl. z. B. Arnold Emch, Kinematische Gelenksysteme und die durch sie erzeugten geometrischen Transformationen, Solothurn 1906, S. 32 ff.

Bücherschau.

Josef Mattauch, k. k. Professor an der Staatsrealschule in B. Leipa, **Lehr- und Aufgabenbuch der darstellenden Geometrie für Oberrealschulen**. Mit 215 Abbildungen. Wien 1909, Pichlers Witwe & Sohn. IV, 244 S. Preis geb. 3 K. 60 h.

In dem vorliegenden Schulbuche der darstellenden Geometrie, das hauptsächlich für Schüler österreichischer Oberrealschulen geschrieben ist, will der Verfasser zu den in Grund- und Aufriß ausgeführten Konstruktionen möglichst anschauliche Figuren geben. Er hat aus Kugeln, Stäben, Glas- und Papier- tafeln Modelle hergestellt und reproduziert in Autotypen Photographien dieser Modelle. Die Figuren sind also Perspektiven. Für den Unterricht selbst erscheint dem Referenten die Verwendung so vieler Modelle von zweifelhaftem Werte; sofern sie aber nur zu guten Erläuterungsfiguren in einem Buche benutzt werden, läßt sich dagegen nichts einwenden. Nicht wenige der Figuren, auch von den in Grund- und Aufriß ausgeführten, sind mit Linien überladen. Eine gewisse Ökonomie, welche die unwichtigeren Linien bloß andeutet, hätte zu größerer Übersichtlichkeit geführt. Behandelt wird zunächst die Projektion in einer Tafel, daran schließt sich in Grund- und Aufriß durchgeführt eine Untersuchung der fundamentalen Konstruktionen, der ebenkantigen Gebilde, sodann von Kegel, Zylinder und Kugel, sowie der Durchdringungen und Schatten dieser Gebilde. In bezug auf mathematische Strenge bleibt manches zu wünschen übrig. Die im Texte behandelten, sowie die am Schlusse in einem eigenen Abschnitte zusammengestellten zahlreichen Aufgaben sind sehr gut ausgewählt.

München, 27. Nov. 1909.

KARL DOEHLEMANN.

Der logarithmische Rechenschieber und sein Gebrauch. Eine elementare Anleitung zur Verwendung des Instruments für Studierende und für Praktiker. Bearbeitet von **Dr. E. Hammer**, Professor an der K. Technischen Hochschule Stuttgart. Vierte, durchgesehene Auflage. Mit 5 Figuren im Text. Stuttgart 1908, Konrad Wittwer. Preis *M* 1.—.

Der Verfasser gibt in einer Einleitung einen Überblick über die Geschichte der logarithmischen Skale und des heutigen Rechenschiebers. An eine eingehende Beschreibung des Rechenschiebers schließt sich die eigentliche Anleitung zu seinem Gebrauch bei der Multiplikation, Division, Proportionsrechnung, Quadrat- und Quadratwurzelbildung, Kubus- und Kubikwurzelbildung usw. an. In einem Anhang wird die Verwendung des Rechenschiebers zur Rechnung mit den trigonometrischen Funktionen besprochen. Eine Betrachtung über die Genauigkeit des Rechenschiebers bildet den Schluß.

Wenn auch — wie der Verfasser in seiner Vorbemerkung zur ersten Auflage selbst anführt — die mündliche Anleitung durch einen im Gebrauch des Rechenschiebers erfahrenen Rechner den Vorzug verdient, so wird es doch viele geben, die auf eine schriftliche Anleitung zum Teil oder ganz angewiesen sind; solchen kann die vorliegende Anleitung nicht genug empfohlen werden.

Straßburg i. E.

P. WERKMEISTER.

Neue Bücher.¹⁾

Analysis.

1. Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées. Ed. française. Rédigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de Jules Molk. Tome I (1. vol.). Calcul des probabilités. Théorie des erreurs. Applications diverses. Fasc. 3. Paris 1909. Leipzig, Teubner. *M* 5.—
S. auch Nr. 2.

Astronomie, Geodäsie.

2. JORDAN, W., Handbuch der Vermessungskunde, fortgesetzt von weil. C. Reinherz. I. Bd. Ausgleichungs-Rechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. 6. erweit. Aufl. bearb. von O. Eggert. Stuttgart 1910, Metzler. *M* 14.—
3. TAFLA, THEODOR, Grundzüge der niederen Geodäsie. I. Methoden u. Dispositionen (Dispositionenlehre). 2., verb. Aufl. Leipzig u. Wien 1910, Deuticke.
S. auch Nr. 5, 6, 8. *M* 3.—

Darstellende Geometrie.

4. Exercices de géométrie descriptive. 4^e éd. Paris 1909, Poussielgue.
5. SCHOY, CARL, Beiträge zur konstruktiven Lösung sphärisch-astronomischer Aufgaben. Leipzig u. Berlin, Teubner. *M* 1.60.

Geschichte.

6. JEREMIAS, ALFRED, Das Alter der babylonischen Astronomie. 2. erweiterte Aufl. Unter Berücksichtigung der Erwiderung von P. F. X. Kugler S. J. Leipzig 1909, Hinrich. *M* 1.60.
7. ÖTTINGEN, ARTH. v., Robert Mayers wissenschaftlicher Entwicklungsgang im Jahre 1841. Vortrag. Abh. d. kgl. sächs. Ges. d. Wiss. Mathem.-phys. Klasse. 31. Bd. Nr. 3. Leipzig 1909, Teubner. *M* 1.—
8. SCHILLING, C., Wilhelm Olbers, sein Leben und seine Werke. Im Auftrage der Nachkommen herausgeg. II. Bd. Briefwechsel zwischen Olbers u. Gauß. 2. Abteil. Zum Druck gegeb. von C. Schilling u. J. Kramer. Mit Bewilligung der königl. Gesellsch. der Wissensch. zu Göttingen veröffentlicht. Berlin 1909, Springer. *M* 16.—

Mechanik.

9. ACHENBACH, ALB., Die Schiffsschraube. III. Tl. Ihre Wirungsweise u. Berechnung. Eine Zusammenstellung u. Kritik der gebräuchlichsten Theorien. Kiel 1909, Cordes. Geb. in Leinw. *M* 20.—
10. APPELL, P., Traité de mécanique rationnelle. 3^e éd., entièrement refondue. Vol. I: Statique, Dynamique du point. Paris 1909, Gauthier-Villars. Fr. 20.—
11. EBERHARDT, C., Theorie u. Berechnung der Luftschrauben. Mit Beispielen u. Versuchsergebnissen aus der Praxis. Berlin, Krayn. *M* 6.—; geb. *M* 7.50.
12. FISCHER, OTTO, Zur Kinematik des Listingschen Gesetzes. Abh. d. kgl. sächs. Ges. d. Wiss. Mathem.-phys. Klasse. 31. Bd. Nr. 1. Leipzig 1909, Teubner. *M* 3.40.
13. FÖPPL, AUGUST, Vorlesungen über technische Mechanik. In sechs Bänden. 6. Bd. Die wichtigsten Lehren der höheren Dynamik. Leipzig 1910, Teubner. Geb. in Leinw. *M* 12.—
14. LONEY, S. L., An elementary treatise on the Dynamics of a particle and of rigid bodies. Cambridge, University Press. 12 s.
15. NICOL, GEORGE, Ship construction and calculations. With numerous illustr. and examples. London, Brown. 16 s. 6 d.

1) Wo kein Erscheinungsjahr angegeben, ist es 1910.

Physik.

16. BERGSTRAND, ÖSTEN, Sur le calcul de la réfraction différentielle en distance et en angle de position. (Acta nova regiae societatis scientiarum Upsaliensis. Ser. IV. Vol. II. Nr. 6.) Upsala 1909, Akad. Buchh. *M* 3.—.
17. BÖRNSTEIN, R., u. MARCKWALD, W., Sichtbare u. unsichtbare Strahlen. („Aus Natur u. Geisteswelt“, 64. Bändchen.) 2. neubearb. u. verm. Aufl. Leipzig 1910, Teubner. *M* 1.—; geb. *M* 1 25.
18. BOLTZMANN, LUDW., Wissenschaftliche Abhandlungen. Im Auftrage u. mit Unterstützung der Akademien der Wissenschaften zu Berlin, Göttingen, Leipzig, München, Wien herausgeg. von Fritz Hasenöhl. (1885—1905.) Mit einem Bildnis Boltzmanns radiert von Aug. Steininger. Leipzig 1909, Barth. *M* 20.60; geb. in Leinw. *M* 22.40.
19. FRANKLIN, W. S., Electric waves. London, Macmillan. 10 s.
20. GRAETZ, L., Die Elektrizität u. ihre Anwendungen. 15. Aufl. Stuttgart 1910, Engelhorn. Geb. in Leinw. *M* 9.—.
21. HOBART, H. M., Electricity. London, Constable. 6 s.
22. JÄGER, GUSTAV, Theoretische Physik. II. Licht u. Wärme. (Sammlung Göschen, Nr. 77.) 4. Aufl. Leipzig 1909, Göschen. Geb. *M* —.80.
23. OETTINGEN, ARTH. V., Elemente der projektiven Dioptrik. (Schluß.) (Abh. der kgl. sächs. Ges. d. Wiss. Mathem.-phys. Klasse. 30. Bd. Nr. VI.) Leipzig 1909. Teubner. *M* 2.—
24. PENNER, J. M., Meteorologische Optik. 4. Abschnitt. v. Fel. M. Exner. Wien, Braumüller. *M* 10.—.
25. SCHUSTER, ARTHUR, An introduction to the theory of Optics. 2nd ed. revised. London 1909, Arnold. 15 s.

Tafeln, numerisches Rechnen.

26. BOJKO, J., Neue Tafel der Viertelquadrate aller natürlichen Zahlen von 1 bis 20 000 zur Bildung aller möglichen Produkte im Bereiche $1 < 1$ bis 10 000 $> 10 000$. Zürich 1909, Speidel. *M* 1.50.
27. CANIN, O., Tafel der Logarithmen des Semiversus. Berlin 1909, v. Decker. *M* —.90.
28. HARDY, G. F., Theory of the construction of tables of mortality and of similar statistical tables in use by the actuary. London 1909, Cloth. *M* 8.50.
29. PANEBIANCO, H., Facilitazione del calcolo numerico di formule usuali in fisica. Padova 1909, Salmin.

Verschiedenes.

30. AHRENS, W., Mathematische Unterhaltungen u. Spiele. 2., verm. u. verb. Aufl. Leipzig u. Berlin 1910, Teubner. Geb. in Leinw. *M* 7.50.
31. BOLZA, OSKAR, Vorlesungen über Variationsrechnung. Umgearb. u. stark verm. deutsche Ausgabe der „Lectures on the Calculus of Variations“ desselben Verfassers. In drei Lieferungen. Zweite Lieferung. Leipzig u. Berlin 1909, Teubner. *M* 6.—.
32. DINGELDEY, FRIEDRICH, Sammlung von Aufgaben zur Anwendung der Differentialrechnung. Integralrechnung. I. Teil. Aufgaben zur Anwendung der Differentialrechnung. (Teubners Sammlung Bd. XXXII, 1.) Leipzig u. Berlin, Teubner.
33. NEUMANN, C., Über das logarithmische Potential einer gewissen Ovalfläche. (Abh. d. kgl. sächs. Ges. d. Wiss. Mathem.-phys. Klasse, Bd. XXXI, Nr. II.) Leipzig 1909, Teubner. *M* 3.—.
34. POINCARÉ, HENRI, Sechs Vorträge über ausgewählte Gegenstände aus der reinen Mathematik und mathematischen Physik. Auf Einladung der Wolfskell-Kommission der königl. Gesellschaft der Wissensch. gehalten zu Göttingen vom 22.—28. April 1909. Leipzig u. Berlin 1910, Teubner. *M* 1.80.
35. SCHUBERT, HERM., Mathem. Mußstunden. Eine Sammlung v. Geduldspielen, Kunststücken u. Unterhaltungsaufgaben mathem. Natur. Große Ausg. 3. Aufl.

2. Bd. Anordnungs- u. Wahrscheinlichkeitsprobleme. Leipzig 1909, Göschen.
Geb. in Leinw. *M* 4.—.
- SCHUBERT, HERM., Dasselbe. 3. Bd. Reiseprobleme u. geometrische Probleme.
Ebenda. Geb. in Leinw. *M* 4.—.
36. SELLENTHIN, BERNHARD, Mathematischer Leitfaden mit besonderer Berücksichtigung
der Navigation. Auf Veranlassung der Kaiserl. Inspektion des Bildungswesens
der Marine bearb. Zweite umgearb. Auflage. Leipzig u. Berlin, Teubner.
Geb. in Leinw. *M* 8.40.
37. VOLKMANN, PAUL, Erkenntnistheoretische Grundzüge der Naturwissenschaften
u. ihre Beziehungen zum Geistesleben der Gegenwart. Allgemein wissenschaftl.
Vorträge. („Wissenschaft u. Hypothese“, IX.) Zweite, vollständig umgearb.
u. erweif. Aufl. Leipzig u. Berlin, Teubner.

Eingelaufene Schriften.

[In dieser Abteilung werden alle eingelaufenen Schriften regelmäßig aufgeführt.
Die Besprechung geeigneter Schriften bleibt vorbehalten. Rücksendung findet
nicht statt.]

- AHRENS, W., Mathem. Unterhaltungen u. Spiele. 2. Aufl., s. N. B. („Neue Bücher“)
Nr. 30.
- BAUER, GUSTAV, Vorlesungen über Algebra. Hrsg. vom mathem. Verein München.
Mit dem Bildnis Gustav Bauers als Titelbild. Zweite Auflage. Leipzig u.
Berlin, Teubner. *M* 11.—; geb. in Leinw. *M* 12.—.
- BÖGER, RUDOLF, Elemente der Geometrie der Lage, für den Schulunterricht bearb.
2. Aufl. Leipzig, Göschen. Kart. *M* —.90.
- , Projektive u. analytische Schulgeometrie. Ein Lehr- u. Übungsbuch f. die
Oberklassen. Leipzig, Göschen. Geb. in Leinw. *M* 3.60.
- BOJKO, J., Neue Tafel der Viertelquadrate, s. N. B. 26.
- BOLZA, O., Vorlesungen über Variationsrechnung. 2. Lieferung, s. N. B. 31.
- BÖRNSTEIN-MARCKWALD, Sichtbare u. unsichtbare Strahlen, s. N. B. 17.
- BLOCK, HENRIK, Sur une classe de singularités dans le problème des n corps.
Meddelanden från Lunds Astronomiska Observatorium, Serie II. Nr 6. Lund
et Berlin 1909.
- CHARLIER, C. V. L., Über die Bewegung der Bahnebenen der Satelliten in unserem
Planetensystem. Meddelanden från Lunds Astronomiska Observatorium,
Serie II. Nr. 5. Kongl. Fysiografiska Sällskapets Handlingar, Band 19, Nr. 4.)
Lund 1909.
- COUTURAT, L., JESPERSEN, O., LORENZ, R., OSTWALD, W., PFAUNDLER, L., La langue
internationale et la science. Considérations sur l'introduction de la Langue
internationale dans la Science. Traduit par M. Boubier. Paris 1909, Dela-
grave. Fr. 1.—.
- DINGELDEY, FR., Sammlung von Aufgaben zur Anwendung der Differential- und
Integralrechnung, I, s. N. B. 32.
- FÖPPL, A., Vorlesungen über technische Mechanik, 6. Band, s. N. B. 13.
- FOUET, ÉDOUARD A., Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques.
2^{ème} éd., entièrement refondue. Tome II. Les fonctions algébriques. Les
séries simples et multiples. Les intégrales. Paris 1910, Gauthier-Villars.
Fr. 9.—.
- GAJDECZKA, JOSEF, Übungsbuch zur Arithmetik u. Algebra f. die oberen Klassen
der Gymnasien, Realgymnasien u. Realschulen. 8. Aufl. Wien, Tempsky.
Geb. K. 3.20.
- HOUBEVAR, FRANZ, Lehr- u. Übungsbuch der Geometrie f. Gymnasien, Realgymnasien
u. Realschulen. Unterstufe (I., II. u. III. Klasse). 9., umgearb. Aufl. Wien,
Tempsky. Geb. K. 1.80.

- HÖFLER, ALOIS, Didaktik des mathematischen Unterrichts. (Didaktische Handbücher f. den realistischen Unterricht an höheren Schulen. In 10 Bänden, hrsg. von A. Höfler u. F. Proske. I. Band: Mathematik). Leipzig u. Berlin 1910, Teubner.
- JÄGER, G., Theoretische Physik, II, s. N. B. 22.
- JEREMIAS, A., Das Alter der babylonischen Astronomie, s. N. B. 6.
- KOMMERELL, V., u. KOMMERELL, K., Allgemeine Theorie der Raumkurven u. Flächen. I. Bd. (Sammlung Schubert XXIX.) 2. Aufl. Leipzig 1909, Göschen.
Geb. *M.* 4.80.
- MINKOWSKI, HERMANN, Geometrie der Zahlen. In zwei Lieferungen. Zweite Lieferung. Leipzig u. Berlin, Teubner.
- MITTEILUNGEN über Raumschach u. wissenschaftliche Schachforschung. Hrsg. v. Ferdinand Maack, Hamburg 6, Marktstr. 23. Nr. 2. Hamburg 1909. (Gratis.)
- MOČNIK, Lehr- u. Übungsbuch der Arithmetik. Für die III. u. IV. Klasse der Mittelschulen. Bearb. von Karl Zahradníček. 30., nach den neuen Lehrplänen umgearb. Aufl. Wien, Tempsky. K. 2.50; geb. K. 3.—.
- NEUMANN, C., Über das logarithmische Potential einer gewissen Ovalfläche, s. N. B. 33.
- PILGRIM, L., Vereinfachte Behandlung der schiefwinkligen Koordinaten im Raum. (Separatabdruck aus den Mathem.-naturw. Mitteilungen.) Stuttgart 1909, Metzler. *M.* 2.40.
- POINCARÉ, H., Sechs Vorträge über ausgewählte Gegenstände aus der reinen Mathematik u. mathematischen Physik, s. N. B. 34.
- SCHILLING, C., Wilhelm Olbers, sein Leben u. seine Werke, s. N. B. 8.
- SCHOY, C., Beiträge zur konstruktiven Lösung sphärisch-astronomischer Aufgaben, s. N. B. 5
- SCHWARZSCHILD, K., u. BIRCK, O., Tafeln zur astronomischen Ortsbestimmung im Luftballon bei Nacht, sowie zur leichten Bestimmung der mitteleuropäischen Zeit an jedem Orte Deutschlands. Mit Unterstützung der Göttinger Vereinigung f. angewandte Mathematik u. Physik hrsg. Göttingen 1909, Vandenhoeck & Ruprecht. *M.* 3.80.
- SELENTHIN, B., Mathematischer Leitfaden, s. N. B. 36.
- SUPPANTSCHITSCH, RICHARD, Lehrbuch der Geometrie f. Gymnasien u. Realgymnasien. Mittelstufe. Planimetrie u. Stereometrie. Wien, Tempsky.
Geb. in Leinw. K. 4.50
- , Leitfaden der darstellenden Geometrie f. die V. u. VI. Klasse der Realgymnasien. Wien 1910, Tempsky. Geb. K. 3.—.
- , Mathematisches Unterrichtswerk. Arithmetik f. Gymnasien, Realgymnasien u. Realschulen. I. Heft (I. Klasse). Wien, Tempsky. Geb. K. 1.50.
- , Dasselbe, II. Heft, f. die II. Klasse. Ebenda. Geb. K. 1.50.
- , Dasselbe, III. Heft, f. die III. Klasse. Ebenda. Geb. K. 1.80.
- , Mathematisches Unterrichtswerk. Geometrische Anschauungslehre für die erste Klasse der Gymnasien, Realgymnasien u. Realschulen. Ebenda.
Geb. K. —.80.
- , Dasselbe, Grundriß der Geometrie f. Realschulen I. Heft, f. die II. Klasse. Ebenda. Geb. K. 1.40.
- TAPLA, TH., Grundzüge der niederen Geodäsie, I, s. N. B. 3.
- VOLKMANN, P., Erkenntnistheoretische Grundzüge der Naturwissenschaften, s. N. B. 37.
- WALLENTIN, J. G., Grundzüge der Naturlehre f. die unteren Klassen der Mittelschulen. Ausgabe A. Für Gymnasien. 7. Aufl. Wien, Pichlers Wittve & Sohn.
Geb. K. 2.80.
- , Dasselbe. Ausgabe B. Für Realschulen. Ebenda. Geb. K. 2.40.
- , Lehrbuch der Physik f. die oberen Klassen der Mittelschulen u. verwandten Lehranstalten. Ausgabe A. Für Gymnasien. 14. Aufl. Ebenda. Geb. K. 4.80.
- , Dasselbe. Ausgabe B. Für Realschulen. 12. Aufl. Ebenda. Geb. K. 3.80.

Technisches Abhandlungsregister 1906—1907.

Von E. WÖLFFING in Stuttgart.

Abkürzungen.

- Ac. Acetylen, Halle 10.
 A.D.M.P. Annales des Mines, Paris (10) 9—12.
 A.E.R.J. American Engineer and Railroad Journal, New-York 80—81.
 A.G.B. Annalen für Gewerbe und Bauwesen, Berlin 58—61.
 A.H.I. Anzeiger für die Holzindustrie, München 11.
 A.J.U. Allgemeines Journal für Uhrmacherkunde, Halle 31—32.
 Am.M. American Machinist, New York 29—30.
 A.P.Ch. Annales des Ports et Chaussées, Paris (8) 21—30.
 B.F.B. Beton und Eisen, Berlin 5—6.
 B.M.K. Baumaterialienkunde, Stuttgart 11—12.
 B.S.E. Bulletin de la Société d'Encouragement pour l'Industrie nationale, Paris 105—106.
 B.S.I.M. Bulletin de la Société industrielle, Mulhouse 77.
 C.B.B. Zentralblatt der Bauverwaltung, Berlin 26—27.
 C.G.U. Zentralblatt für das gewerbliche Unterrichtswesen in Österreich, Wien 24—25.
 C.Z.O.M. Zentralzeitung für Optik und Mechanik, Berlin 27—28.
 D.B.Z. Deutsche Bauzeitung, Berlin 40—41.
 D.M. Der Mechaniker, Berlin 14—15.
 D.M.Z. Deutsche Mechanikerzeitung, Berlin 1906—1907.
 D.U.Z. Deutsche Uhrmacherzeitung, Berlin 31.
 E. The Engineer, London 101—104.
 E.B.B. Elektrische Kraftbetriebe und Bahnen, München 4—5.
 E.E. L'Éclairage électrique, Paris 46—53.
 Eg. Engineering, London 81—84.
 E.K.K. Der Eisenkonstrukteur, Kattowitz 1.
 E.N. The Engineering News, New-York 55—58.
 E.T.M. Elektrotechnik und Maschinenbau, Wien 24—25.
 E.W. The Electrical World, New-York 47—50.
 E.Z. Elektrotechnische Zeitschrift, Berlin 27—28.
 F.J.L. Für Jedermann, Leipzig 2—3.
 G.C. Le Génie civil, Paris 48—52.
 G.I. Gesundheitsingenieur, München 29—30.
 J.A.M. Jahrbuch der Automobil- und Motorbootindustrie, Berlin 3.
 J.G. Journal des Géomètres, Paris (6) 8—9.
 J.G.W. Journal für Gasbeleuchtung und Wasserversorgung, Leipzig 49—50.
 J.S.G.B. Jahrbuch der schiffbautechnischen Gesellschaft, Berlin 7—8.
 K.B. Kraft, Berlin 24.
 L.U.Z. Leipziger Uhrmacherzeitung, Leipzig 13—14.
 M.F.I. Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiet des Ingenieurwesens, Berlin 30—48.
 M.I.C. Mémoires et Comptes Rendus de la Société des Ingénieurs civils, Paris 58 B—60 B.
 M.T.G.W. Mitteilungen des Technologischen Gewerbemuseums, Wien (2) 16—17.
 M.T.I. Leipziger Monatsschrift für Textilindustrie, Leipzig 21—22.
 M.U.H. Metallurgie, Halle 3—4.
 M.V.E.M. Mitteilungen der Vereinigung der Elektrizitätswerke, München 5—6.
 M.Z.B.E. Mitteilungen über Zement-, Beton- und Betoneisenbau, Berlin 3—4.
 N.A.C. Nouvelles Annales de la Construction, Paris (6) 3—4.
 Ö.Z.B.H. Österreichische Zeitschrift für Berg- und Hüttenwesen, Wien 54.
 O.F.E. Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens, Wiesbaden 43—44.
 P.E.M. Portefeuille économique des Machines, Paris (5) 5—6.

- P.J. Polytechnisches Journal, Berlin 321—322.
 P.M.C. Der praktische Maschinenkonstrukteur, Leipzig 39—40.
 R.D.M. Revue de Mécanique, Paris 18—21.
 R.G.L. Railway Gazette, London 40—43.
 S.B. Schiffbau, Berlin 8.
 S.B.Z. Schweizerische Bauzeitung, Zürich 47—48.
 S.D.B. Süddeutsche Bauzeitung, München 16—17.
 T. The Technologist, New-York 11—12.
 T.B. Technische Blätter, Prag 38.
 T.B.B. Tiefbau, Berlin 19—20.
 T.E. The Electrician, London 57—60.
 T.G. Technisches Gemeindeblatt, Berlin 9—10.
 V.V.G. Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfließes in Preußen, Berlin 85—86.
 W.A.B.Z. Wiener allgemeine Bauzeitung, Wien 71—72.
 W.B.S. Württembergische Bauzeitung, Stuttgart 3—4.
 W.S.T. Werkstatttechnik, Berlin 1.
 W.T.B. Die Welt der Technik, Berlin 69.
 Z.A.I. Zeitschrift für Architektur und Ingenieurwesen, Hannover (2) 11—12.
 Z.B.D. Zeitschrift des Bayr. Dampfkesselrevisionsvereins, München 10—11.
 Z.B.H.S. Zeitschrift für das Berg-, Hütten- und Salinenwesen des Preuß. Staates, Berlin 54—55.
 Z.B.W. Zeitschr. für Bauwesen, Berlin 56—57.
 Z.C.A.K. Zeitschr. für chemische Apparatenkunde, Berlin 2.
 Z.D.M. Zeitschr. für Dampfkessel- und Maschinenbetrieb, Berlin 29—30.
 Z.D.W. Zeitschr. der Dampfkessel-Untersuchungs- und Versicherungsgesellsch. Wien 31—32.
 Z.F.T. Zeitschr. für Farben- und Textilindustrie, Berlin 6.
 Z.G.K. Zeitschr. für die gesamte Kälteindustrie, München 13—14.
 Z.G.T. Zeitschr. für das gesamte Turbinenwesen, München 3—4.
 Z.G.U. Zeitschr. für gewerbl. Unterricht, Leipzig 21—22.
 Z.I. Zeitschr. für Instrumentenkunde, Berlin 26—27.
 Z.K.F.G. Zeitschr. für komprimierte und flüssige Gase, Weimar 9—10.
 Z.L.H. Zeitschr. für Lüftung und Heizung, Berlin 12—13.
 Z.M.S. Zeitschr. für Maschinenbau und Schlosserei, Berlin 23.
 Z.Ö.I.A.V. Zeitschr. des Österreich. Ingenieur- und Architektenvereins, Wien 58—59.
 Z.S.T. Zeitschr. für Schwachstromtechnik, München 1907.
 Z.V. Zeitschr. für Vermessungswesen, Stuttgart 35—36.
 Z.V.D.I. Zeitschr. des Vereins deutscher Ingenieure, Berlin 50—51.
 Z.W. Zeitschr. für Werkzeugmaschinen, Berlin 10—11.

Aerodynamik.

3084. *J. Armengaud.* Le problème de l'aviation et sa solution par l'aéroplane. B.S.E. 106. 845.
 3085. *L. Birstow.* Gasengine efficiencies. Eg. 83. 731.
 3086. *A. Balog.* Beitrag zur Berechnung der Turbokompressoren und Gasturbinen. Z.G.T. 3. 481.
 3087. *D. Bánki.* Grundlagen zur Berechnung von Dampfturbinen. Z.G.T. 3. 73; 93; 121; 154.
 3088. *D. Bánki.* Vergleich der Druck- und Überdruck-Dampfturbinen. Z.V.D. I. 50. 950.
 3089. *A. Barbezat.* Turbokompressor, Bauart Rateau und Armengaud. Z.G.T. 3. 521.
 3090. *A. Baumann.* Zur Ausführungsmöglichkeit von Gasturbinen. Z.G.T. 3. 43; 110; 185; 201; 213.
 3091. *B. E.* Der Dampfmesser von Gehre. Z.C.A.K. 2. 41.
 3092. *F. Bendemann.* Über den Ausfluß des Wasserdampfes und über Dampfmengenmessung. M.F.J. 37. 1.
 3093. *A. Berthier.* Les turbines à gaz. G.C. 48. 72.
 3094. *A. Bochet.* Ventilation and refrigeration of ammunition holds. Eg. 84. 125.
 3095. *H. Bochet.* Contribution à l'étude des ventilateurs centrifuges. A.D. M.P. (10) 12. 451.
 3096. *A. J. Bowie.* Windpressure on cylindrical conductors. E.W. 48. 606.
 3097. *K. Brabbée.* Die Lüftungsanlagen beim Baue des großen Alpentunnels in Österreich. G.I. 29. 701.
 3098. *L. Darapsky u. F. Schubert.* Die Wirkungsweise der Preßluftpumpen. Z.V.D.J. 50. 2062; 2093.
 3099. *A. Fliegner.* Versuche an der Leuchtgasfernleitung zwischen Rorschach und St. Gallen. J.G.W. 50. 629; 665; 689; 743; 765.

3100. *F. Foster*. Energy charts for proportioning steam-turbines. Eg. 83. 79.

3101. *A. Frank*. Versuche zur Vermittlung der Abhängigkeit des Luftwiderstandes von der Gestalt der Körper. Z.V.D.I. 50. 593. — *P. Roth*. 1127.

3102. *H. Friedrich*. Tabellen zur Ermittlung der Schwungmasse für Druckverdichter. Z.G.K. 14. 121.

3103. *J. Fürstenau*. Das Turbinengebläse von C. A. Parsons als Hochofengebläsemaschine. Z.V.D.J. 51. 1125; 1284. *A. Siegl* 1283.

3104. *H. Hirschclaff*. Aus der Praxis des Überbitzerbaues. K.B. 24. 485.

3105. *R. Hofmann*. Überdrucklüftung mit Ventilatorenbetrieb in Schulen. G.J. 29. 49.

3106. *K. J. Holmboe*. Die Abhängigkeit des Kraftbedarfs der Ventilatoren von den Rohrverhältnissen. Z.G.K. 14. 146.

3107. *C. F. Holmboe*. Beitrag zur Theorie der Schraubenventilatoren. Z.V.D.I. 50. 911; 1687.

3108. *H. Holzwarth*. Logarithmisches Diagramm zur Berechnung mehrstufiger Dampfturbinen. Z.G.T. 4. 236; 254.

3109. *M. Hottinger*. Gemauerte Kamine für Zentralheizungen. G.I. 30. 633.

3110. *H. Jansson*. Die Regelung mehrstufiger Dampfturbinen. Z.V.D.I. 50. 215.

3111. *H. Jansson*. Über die Regelung mehrstufiger Dampfturbinen. Z.G.T. 3. 463; 492; 507; 529.

3112. *W. Jasinsky*. Zur Frage der kombinierten Dampfturbine. Z.G.T. 4. 361; 379; 392; 421; 439.

3113. *O. Krell*. Überdrucklüftung ohne Ventilatorbetrieb des Sitzungssaales der städt. Kollegien in Nürnberg. G.I. 29. 633.

3114. *O. Krell*. Die Erprobung von Ventilatoren und Versuche über den Luftwiderstand von Panzergrätings. J.S.G.B. 7. 408.

3115. *F. Langen*. Der Dampfturbinenbetrieb von Schiffen. S.B. 8. 236; 271; 356; 385; 442.

3116. *F. Langen*. Einiges über Aktionsdampfturbinen. Z.G.T. 4. 261.

3117. *F. Langen*. Zur Frage der Gasturbine. Z.G.T. 4. 156; 319.

3118. *F. Langen*. Die Bestimmung des Wirkungsgrades von Dampfturbinen ohne Dampfverbrauch und Leistungsmessung. Z.G.T. 4. 433.

3119. *A. Langrod*. Zur Theorie der Gasdrosselung. P.J. 321. 705.

3120. *A. Langrod*. Über die Größe der Lokomotivregulator-Einströmöffnung. A.G.B. 58. 3.

3121. *A. Langrod*. Zur Theorie des Stodolaschen Gasstoßes. Z.G.T. 3. 234.

3122. *A. Langrod*. Synthetische Untersuchung der Gasströmung mit Berücksichtigung der Widerstände. P.J. 321. 116.

3123. *G. Leroux*. Note sur les canalisations d'air sous pressions élevées. M.I.C. 60. B. 332

3124. *H. Lorenz*. Theorie und Berechnung der Schraubenventilatoren. Z.G.T. 3. 321.

3125. *E. Maleire*. Le problème de l'aviation et la résistance de l'air. G.C. 51. 245; 264.

3126. *W. Mc Eutee*. The weathering of windmills. Eg. 81. 184.

3127. *P. Michel*. Injektoren. Z.V.D.I. 50. 1944.

3128. *P. Möller*. Untersuchung an Druckluftschlämmern. M.F.I. 37. 65; Z.V.D.I. 50. 1150.

3129. *S. A. Moss*. Flow of air and other gases with special reference to small pressure references. Am. M. 29. B. 368; 407.

3130. *S. A. Moss*. Rational methods of gas-engine powering. Am. M. 29. A. 381. — *J. A. G. Goulet*. 714.

3131. *C. H. Naylor*. Parsons type steam turbines. E. 104. 349.

3132. *F. Niethammer*. Ventilation von Turbodynamos. E.T.M. 24. 357.

3133. *P.* Beitrag zur Ermittlung von Windgeschwindigkeit. T.B.B. 19. 261.

3134. *J. Patoureau*. Note sur la suspension des véhicules industriels et les amortisseurs pneumatiques. M.I.C. 60. A. 280.

3135. *P. Perlewitz*. Spaltung der Trommel einer Drachenwinde. P.J. 321. 152.

3136. *Pflücke*. Neuerungen an Retortenöfen. J.G.W. 49. 497.

3137. *H. Pfützer*. Die Lüftung der Theater. G.I. 29. 33.

3138. *W. Pickersgill*. Ermittlung der Abmessungen zu einem Hochwaldschen Schieber. P.J. 322. 769.

3139. *G. v. Pirquet*. Versuch einer formelmäßigen Auseinanderhaltung des Reibungs- und Wirbelverlustes für Dampfdüsen. Z.G.T. 4. 482.

3140. *L. Prandtl*. Zur Theorie des Verdichtungsstoßes. Z.G.T. 3. 241.

3141. *R. Proell*. Strömungsverlauf und Verdichtungsstoß im zylindrischen Rohre. Z.G.T. 3. 37.

3142. *A. Rateau.* Développement, des turbines à vapeur d'échappement. R. D. M. 21. 356.

3143. *A. Rateau.* Kreiselgebläse für hohen Druck. Z. V. D. 351. 1296.

3144. *A. Rateau.* High pressure centrifugal fans. Eg. 84. 248.

3145. *O. Recke.* Druck- und Geschwindigkeitsverhältnisse des Dampfes in Freistrahlgrenzturbinen. Z. G. T. 3. 261; 273. 285. 303. 314. 325; 338; 350; 357; 381; 413.

3146. *G. Recknagel.* Konstruktive Vorkehrungen zur Vermeidung der Umkehr des Luftstromes im Erdgeschoß bei zentralen Lüftungsanlagen. G. I. 30. 777.

3147. *Rietschel.* Versuche über den Widerstand bei Bewegung der Luft in Rohrleitungen. Z. G. K. 13. 3.

3148. *J. Rodet.* Pression de l'air sur une surface en mouvement; étude du coefficient K. R. D. M. 20. 43.

3149. *F. Röscher.* Versuche an einer 2000 pferdigen Riedler-Stumpf-Dampfturbine. Z. V. D. I. 51. 605; 658; 707.

3150. *K. Rummel.* Turbogebälde, Bauart Brown-Boveri-Rateau von 750 P. S. Z. V. D. I. 51. 1845.

3151. *H. R. Sankey.* Note on steam turbines. Eg. 81. 2.

3152. *E. Sauerbrey.* Vergleichende Versuche mit Wettermotoren für Sonderbewetterung. Z. B. H. S. 54. 451.

3153. *H. Schmidt.* Über den auf Gasbehälter-Kuppelnausgeübten Winddruck. J. G. W. 49. 127.

3154. *L. Schütt.* Über die Wirkungsgrade von Ventilatoren und Zentrifugalpumpen. Z. G. T. 3. 441.

3155. *L. Schütt.* Die Wirkungsgrade von Ventilatoren und Zentrifugalpumpen. Z. V. D. I. 50. 1715.

3156. *W. Shule.* Dynamique de l'écoulement de la vapeur dans les machines à pistons. R. D. M. 20. 544; 21. 464.

3157. *E. M. Speakman.* Entwurf und Berechnung der Schiffsdampfturbine. Z. G. T. 3. 79; 142.

3158. *L. Stadlmayr.* Über Grubenlufttemperaturen und den Einfluß des natürlichen Wetterzuges auf die Wetterwirtschaft bei einigen tiefen Schächten des Brüxer Braunkohlenreviers. Ö. Z. B. H. 54. 2; 21; 34; 52.

3159. *O. Stix.* Studie über den Luftwiderstand von Eisenbahnzügen in Tunnelröhren. S. B. Z. 48. 39.

3160. *A. Stodola.* Zur Theorie der Dampfturbine. Z. G. T. 4. 245; 446; 541.

3161. *G. Wagner.* Druckluftfüllvorrichtung für Windkessel. A. G. B. 61. 104.

3162. *L. Wahl.* Überdrucklüftung mit Ventilatorenbetrieb. G. I. 29. 397; 401. — *R. Hofmann.* 400; 402.

3163. *E. Walter.* Die Ferndruckleitung Schneidemühl-Utsch und die Pole-sche Formel. J. G. W. 50. 265.

3164. *G. Wellner.* Die Zukunft der Luftschiffahrt. Z. Ö. I. A. V. 59. 311.

3165. *W. E. Wilson.* Influence of a sidewind on velocity of railway trains. Eg. 83. 457. — *C. E. Wolf.* 547.

3166. *A. Witz.* Canons et moteurs à gaz. G. C. 50. 334.

3167. *L. H. Wood.* Wind reactions in mill-building frames. E. N. 58. 58.

3168. *N. N.* The flow of steam through nozzles. E. G. 81. 139. — *W. Rosenhain.* 185.

3169. *N. N.* Der Winddruck als Zusatzbelastung eiserner Bahnbrücken. E. K. K. 1. 289.

3170. *N. N.* The compound reaction steam turbine. Eg. 82. 511; 545; 581; 618; 685; 736; 749.

3171. *N. N.* The practical proportioning of the reaction steam turbine. Eg. 84. 799.

3172. *N. N.* Measuring of the efficiency of turbine air-compressor. Eg. 82. 669. — *J. Rey.* 738.

3173. *N. N.* Cox's compressed air computer. Am. M. 29. B. 96.

3174. *N. N.* The Chapsal-Sailot compressed-air brake. Eg. 82. 863.

3175. *N. N.* Aerial locomotive. Eg. 82. 792.

3176. *N. N.* Betriebsergebnisse bei Anwendung mechanischen Zuges in einer Zementbrennofenanlage. P. M. C. 39. 85. 93.

Akustik.

3177. *H. Abraham.* The acoustic efficiency of the telephone. T. E. 59. 307.

3178. *L. I. Blake.* Finding direction by means of submarine sound signals. E. W. 49. 754.

3179. *D. S. Carpenter.* The rolling of thunder. F. W. 50. 1211.

Arithmetik.

3180. *E. Beck.* Betrachtungen über die Wirtschaftlichkeit der Anlage von Brücken an Stelle von Fähren. S. D. B. 16. 276; 302; 310.

3181. *H. J. Brackenbury.* Modern machinery and its future development. E. 104. 220; Eg. 84. 313.

3182. *O. Holtzhausen*. Das Verhältnis der verschiedenen Gespinste zueinander und ihre Verwendung in gemischten Geweben. M.T.I. 21. 207.

3183. *H. Krause*. Über den Mathematikunterricht an niederen Fachschulen. Z.O.U. 21. 56.

3184. *P. Lecler*. Les salaires à primes. M.I.C. 609. 141.

3185. *B. Mathis*. Der Unterricht im Rechnen im Lehrplan der Baugewerkschule. Z.G.U. 21. 4; 16; 25.

3186. *M. Milankovitch*. Die vorteilhafteste Konstruktionshöhe und Verlagsweite der Hennebique'schen Decke. Z. Ö.I.A.V. 59. 781; 932.

3187. *F. Pabst*. Sparsamkeit im Dampfkessel-Betriebe. P.M.C. 39. 30.

3188. *I. Pöschl*. Bestimmung des Stromkostenminimums bei kombinierten Zähler- und Pauschaltarifen. E.T.M. 24. 71.

3189. *A. Ramackers* and *M. E. J. Gheury*. State concessions to industrial companies. E. 101. 604.

3190. *C. Riedenauer*. Die Wirtschaftsfrage im Eisenbahnwesen. S.D.B. 16. 82; 90.

3191. *O. Rother*. Über Bau und Einrichtungen in Eisenbahnwerkstätten. W. A.B.Z. 71. 60.

3192. *Sch.* Grundstückstaxwesen und Selbsteinschätzen eines Grundstückswertes für Hypotheken-Kreditzwecke. A.H.I. 11. Nr. 40. 2.

3193. *J. Teichmüller*. Vergleich der Kosten der elektrischen Beleuchtung bei Benutzung der neueren Glühlampen. J. G.W. 49. 444.

3194. *Teitge*. Wert und Entwertung von Grundstücken, Gebäuden, Maschinen und Geräten in Bilanzen. Z.D.M. 30. 378.

3195. *M. Tornow*. Die Verwendung von Baggern zur Abbauarbeit auf den Braunkohlenbergwerken der Provinz Sachsen. Z.B.H.S. 54. 568.

3196. *Tourtay*. Note sur quelques aspects des formules d'exploitation pour les chemins de fer d'intérêt local. A.P. Ch. (8) 23. 10.

3197. *J. Weber*. Die Arbeitsteilung im Großbetrieb der Baumwollweberei. M.T.I. 22. 240.

3198. *Worms de Romilly*. Note sur les moyens d'évaluer l'effectif de matériel roulant nécessaire à un chemin de fer en exploitation. A.D.M.P. (10) 10. 242.

3199. *J. Ziegler*. Über Buchhaltungstheorie und Buchhaltungsunterricht. C. G.U. 24. 519.

Ballistik.

3200. *A. G. Greenhill*. Rifled artillery. E. 104. 513; 538; 561.

Chemie.

3201. *C. Benedicks*. Über das Gleichgewicht und die Erstarrungsstrukturen des Systems Fe—C. M.U.H. 3. 393; 425; 466.

3202. *K. Birkeland*. On the oxydation of atmospheric nitrogen in electric arcs. T.E. 57. 494.

3203. *W. Borth*. Über Rauchgasanalyse. Z.B.D. 11. 17; 35.

3204. *W. R. Bousfield* and *T. M. Lowry*. The thermochemistry of electrolytes in relation with the hydrate theory of ionisation. T.E. 59. 594.

3205. *H. Danneel*. Zeitlicher Verlauf der Polarisation während elektrolytischer Vorgänge. E.Z. 27. 1202.

3206. *K. Friedrich* und *A. Leroux*. Cu, Ag und Pt. M.U.H. 4. 293.

3207. *G. Gin*. Mémoires sur l'électrometallurgie. E.E. 47. 321; 361.

3208. *Guillet*. La constitution des laitons spéciaux. G.C. 49. 44.

3209. *L. Guillet*. L'utilisation industrielle de la métallographie microscopique. G.C. 51. 111; 123.

3210. *F. Häußer*. Über die Verbrennung des Stickstoffs in explodierenden Leuchtgas-Luftgemischen. V.V.G. 83. 37.

3211. *Häußer*. Darstellung von Salpetersäure mittels explosiver Verbrennungen. Z.V.D.I. 50. 298.

3212. *C. Hahn*. Neue Orsatapparate für die technische Gasanalyse. Z.V.D.I. 50. 212. — *F. Bendemann*. 454.

3213. *H. Jüptner v. Jonstorff*. Das chemische Gleichgewicht. Z. Ö.I.A.V. 58. Suppl. 18.

3214. *H. v. Jüptner*. Anwendung der Lehren der physikalischen Chemie im Eisenhüttenwesen. M.U.H. 4. 703.

3215. *B. Malenković*. Die Asphaltfrage, insbesondere die Nomenklaturfrage vom Standpunkt des Hochbau- und Straßenbau-Ingenieurs. B. M. K. 11. 12; 29.

3216. *R. Mollier*. Gleichungen und Diagramme zu den Vorgängen im Gas-generator. Z.V.D.I. 51. 532.

3217. *C. Pomeranz*. Chemische Kinetik. Z. Ö.I.A.V. 58. Suppl. 23.

3218. *G. Rosset*. Le phénomène de l'électrolyse. E.E. 46. 446.

3219. *G. Rosset*. L'électrolyse des mélanges. E.E. 50. 234; 301; 339; 51. 16; 49.

3220. *G. Rosset*. Sur l'expression de la résistivité électrolytique et ses conséquences. E. E. 53. 181; 262.

3221. *R. Wegscheider*. Die Phasenlehre. Z. Ö.I.A.V. 58. Suppl. 26.

3222. *N. N.* The fixation of atmospheric N. E. 102. 285.

3223. *N. N.* Interaction between Fe and C in the blast-furnace. Eg. 81. 471.

Darstellende Geometrie.

3224. *J. Adamczik*. Über Sonnenuhrkonstruktionen. Z. V. 36. 265.

3225. *F. Hochmuth*. Bestimmung des Hirkantenwinkels bei schrägen Zinken. C. G. U. 24. 273.

Dynamik.

3226. *A. B. C.* A centrifugal problem. E. 102. 637.

3227. *F. Adler*. Die Umlaufzahlen bei Werkzeugmaschinen. Z. V. D. I. 51. 1491; 1536; 1621.

3228. *A. H.* Studie über Selfaktorproduktion. M. T. I. 21. 175.

3229. *H. Bamford*. Moving loads on railway under-bridges. Eg. 82. 307; 445; 619; 83. 699.

3230. *A. Barbezat*. Les vitesses critiques des arbres animés de grandes vitesses angulaires. E. E. 47. 46.

3231. *A. Baril*. Note sur les frappeurs pneumatiques. R. D. M. 20. 5; 21. 433.

3232. *M. H. Bauer*. Motorrennboote. J. A. M. 3. 233.

3233. *A. Bauermeister*. De l'influence des masses en mouvement dans la machine à vapeur. R. D. M. 19. 105.

3234. *T. Beck*. Leonardo da Vinci's Ansicht vom freien Falle schwerer Körper. Z. V. D. I. 51. 1386.

3235. *L. Becker*. Betrachtungen über die Verluste bei Hgner-Förderanlagen und Bestimmung der wirtschaftlichen Schlüpfung ihrer Anlaßmotoren. E. B. B. 5. 485; 508; 528.

3236. *H. Bertschinger*. Die Wirtschaftlichkeit von Schiffshebewerken. Z. V. D. I. 51. 1925; 1989; 2015.

3237. *J. Bethenod*. Sur l'emploi des batteurs-tampon pour la traction par moteurs à explosion. E. E. 53. 5.

3238. *P. Boucherot*. Variations périodiques de vitesse dues aux régulateurs des moteurs. R. D. M. 20. 421.

3239. *G. Bourrey*. Calcul des contre-poids dans les machines alternatifs. G. C. 52. 360.

3240. *E. Bret*. Balaycuse-arroseuse automobile de la Ville de Paris. G. C. 52. 425; 457.

3241. *J. Brinkmann*. Der Stoßsteinbohrer mit elektrischem Antriebe. E. B. B. 5. 441; 465.

3242. *J. F. Brooks*. Machine for weighing the forces of a cutting tool. Eg. 84. 269.

3243. *J. A. Brown*. Diagramm for brake-strap calculations. Am. M. 29. A. 511.

3244. *A. Budau*. Technisches aus dem Gerichtssaale (Eisenbahnunfall durch unvorschriftsmäßige Verladung einer Kiste). Z. Ö. I. A. V. 58. 460; 552. — *F. Gebauer*. 551.

3245. *M. Buhle*. Neuere Förder- und Lageranlagen in Bremen. Z. V. D. I. 50. 21.

3246. *A. H. Burnard*. Thermal and power losses in internal-combustion engines. Eg. 84. 445; 509.

3247. *C. Codron*. Expériences sur le travail des machines-outils. R. D. M. 19. 431; 20. 21; 137.

3248. *C. Codron*. L'art de couper les métaux. R. D. M. 21. 5; 131; 278.

3249. *R. H. Collingham*. Long range versus short range trip gears for winding engines. E. 104. 460.

3250. *R. H. Collingham*. Weight in winding drums. E. 101. 186.

3251. *L. Cosyn*. Etude pratique sur le glissement longitudinal des poutres métalliques à âme pleine. N. A. C. (2) 3. 184; 4. 11.

3252. *W. Cox*. A time and cost computer for the boring mill. Am. M. 30. A. 842.

3253. *Cremer-Chapé*. Elektrischer Einzelantrieb in Tuchfabriken. E. Z. 28. 667.

3254. *E. W. X.* Unexplained railway accidents. E. 102. 203.

3255. *W. E. Dalby*. The economical working of locomotives. A. E. R. J. 80. 441.

3256. *C. Dantin*. Théorie élémentaire de l'enrouleur-débrayer Lanix système Leneveu. G. C. 52. 258.

3257. *P. Dawson*. Electric traction of railway. T. E. 59. 4; 44; 332; 372; 584; 664; 704; 741; 860; 900; 60. 80; 428.

3258. *P. v. Denffer*. Neue Holzbearbeitungsmaschinen. P. J. 321. 28.

3259. *A. Dennie*. Torsiometers as applied to the measurement of power in turbine and reciprocating engines. E. 103. 312.

3260. *Denninghoff*. Über die Zugwiderstände der Eisenbahnfahrzeuge. A. G. B. 58. 223.

3361. *A. Denny*. Torsiometers. Eg. 83. 482.

3162. *C. Dilerschoold*. Zwei Hemmungen mit konstanter Kraft. A.J.U. 31. 186; 233; 362.
3263. *W. X. van Druten*. Altering locomotive wheel pressures. A.E.R.J. 81. 66.
3264. *W. F. Durand*. Improved transmission dynamometer. Am.M. 30. A. 80.
3265. *P. Erlich*. Der Einfluß des Tachometers auf den Reguliervorgang indirekt wirkender Regulatoren. E.T.M. 25. 25; 53.
3266. *G. Eude*. Machine à tailler les engrenages coniques. R.D.M 19. 446.
3267. *H. Fock*. Die Berechnung von Schwungrädern P.M.C. 40. 77; 85; 96; 102.
3268. *Förster*. Der mechanische Wirkungsgrad des Dampfmotors Praktikus. P.M.C. 39. 197.
3269. *A. Frank*. Die Widerstände der Eisenbahnzüge und die zu ihrer Berechnung dienenden Formeln. Z.V.D.I. 51. 94.
3270. *A. Frank*. Neuere deutsche Schnellzugslokomotiven. Z.V.D.I. 51. 359 — *Richter*. 359.
3271. *M. Früh*. Studien über die Bildung des Kötzers beim Selfaktor. P.J. 322. 497; 516; 532.
3272. *F. Frühling*. Fördermaschinenverbesserungen. Z.D.M. 29. 445; 522.
3273. *L. H. Fry*. A method of plotting locomotive characteristics. A.E.R.J. 81. 389.
3274. *W. Gensecke*. Untersuchung einer mittelbaren Dampfmaschinenregelung. Z.V.D.I. 51. 1819; 1895.
3275. *P. Gesing*. Bestimmung von Bahnmotoren auf Grund der günstigsten Zahnradübersetzung. E.B.B. 5. 648.
3276. *J. H. Gibson*. Torque of propeller shafting. Eg. 83. 497.
3277. *K. Giebel*. Der Isochronismus bei äußeren Störungen. D.U.Z. 31. 161; 176; 254; 275; 330; 365; 381.
3278. *V. Ginneer*. A problem in laying out a gear train. Am.M. 30. B. 23.
3279. *C. L. Goodrich* and *F. A. Stanley*. Speeds and feeds for screw machine work. Am.M. 30. B. 501.
3280. *E. Graf*. Berechnung der Transmissionsanlage für eine Tonplattenfabrik P.M.C. 40. 185; 193; 200; 207.
3281. *Gravenhorst*. Das gezogene und das ziehende Rad. Z.A.I.(2) 11. 423; 517.
3282. *A. G. Greenhill*. The dynamics of long recoil. E. 104. 184.
3283. *R. Grimshaw*. Vorteile einer schnellen Schnittgeschwindigkeit. C.Z.O. M. 27. 337.
3284. *L. Gümbel*. Der heutige Stand der Theorie des Schraubenpropellers. Z.V.D.I. 51. 586. — *H. Lorenz* 588.
3285. *G. Hagemann*. Ventilsteuerungen und die Phasen der Dampfverteilung. Z.D.M. 30. 217.
3286. *O. Hecker*. Einrichtung für eine variable Dämpfung des Horizontalpendels. Z.I. 27. 6.
3287. *Hefft*. Versuche zur Ermittlung des Bewegungsräderstands einer $\frac{2}{4}$ gekuppelten Zwillinglokomotive. O.F. E. (2) 43. 49.
3288. *R. v. Helmholz*. Kurvenbewegliche Lokomotiven. Z.V.D.I. 50. 1553.
3289. *H. Hess*. The thrust of twist drills. Am.M. 30. A. 599.
3290. *O. Hildebrand*. Gewindebohrer mit genauer Steigung. W.S.T. 1. 194.
3291. *A. Hiller*. Die Glocken, ihre Berechnung und die beim Läuten auftretenden Kraftwirkungen. Z.Ö.I.A.V. 58. 505; 522; 532.
3292. *F. O. Hoagland*. The engine lathe as a relieving machine. Am.A. 29. B. 231.
3293. *H. Holzer*. Torsionsschwingungen von Wellen mit beliebig vielen Massen. S.B. 8. 823; 866; 904.
3294. *H. Holzwarth*. Über Federregulatoren für sehr hohe Winkelgeschwindigkeiten, insbesondere Federregulatoren direkt gekuppelt mit Dampfturbinenwellen. Z.G.T. 4. 21.
3295. *L. Hope*. The speed of motor boats and their rating for racing purposes. Eg. 81. 475; 636.
3296. *W. Hort*. Beitrag zur Theorie der Dampfmaschinenregelung. P.J. 322. 337; 357.
3297. *W. Hort*. Beitrag zur Theorie der Bewegung raschlaufender Turbinenwellen. Z.G.T. 4. 277.
3298. *A. C. Hough*. Solution of a rope drive problem. E.N. 57. 463.
3299. *Illeck*. Zur Theorie der rotierenden Scheiben. Z.Ö.I.A.V. 58. 729.
3300. *A. Issermann*. Produktionsberechnung von Vorspinn- und Spinnmaschinen sowie von Webstühlen und Bestimmung des Ketten- und Schußgarngewichtes. M.T.I. 22. 201.
3301. *J. Iversen*. Neue Sicherheitsvorrichtungen für Dampfördermaschinen. Z.V.D.I. 51. 1565.
3302. *E. G. Izod*. Le cisaillement des métaux et des bois. B.S.E. 105. 131.
3303. *F. Jaehn*. Neuere Schienenstoßanordnungen mit enger Stoßschwellenlage. P.J. 321. 401; 421; 437; 453.

3304. *J. Jahn.* Der Antriebsvorgang bei Lokomotiven. Z.V.D.I. 51. 1046; 1098; 1141.

3305. *F. Jordan.* Kritik der Bremsysteme bei elektrisch betriebenen Hebezeugen. Z.V.D.I. 50. 2011; 2056; 2097.

3306. *V. Kaplan.* Theoret. Untersuchung und deren praktische Verwertung zur Bestimmung rationeller Schaufelformen für Schnellläufer. Z.G.T. 3. 2. 25; 42; 62; 89; 113; 137; 158; 174; 181; 197; 216; 229; 245; 264.

3307. *M. Kaufhold.* Über Hauptschachtförderung mit Koepe-Scheibe. P.J. 322. 753.

3308. *E. Kaufmann.* Ein neues Verfahren zur Nutzbarmachung der Bremsleistung eines Prüffeldes für Kraftmaschinen. Z.V.D.I. 51. 1628.

3309. *S. E. Kelsey, R. E. Chandler, J. S. Myers, W. Hewitt.* A rope-drive problem; friction uniform or non-uniform? E. N. 57. 623.

3310. *B. Kirsch.* Über die technisch-physikalische Prüfung der Schmiermaterialien. M.T.G.W. (2) 16. 5.

3311. *A. König.* Arbeitsdiagramme der Flachformmaschinen. P.J. 321; 497; 523; 537; 555; 569; 587; 604; 617; 650.

3312. *H. Kotrbeletz.* Die Bestimmung des Ganges und Standes einer Uhr. L.U.Z. 14. 217.

3313. *E. Kotzer.* Die Bestimmung der Schaufelzahl für Löffelräder. Z.G.T. 3. 53.

3314. *E. Kramer.* Das Versagen von Straßenbahnbremsen. E.B.B. 4. 138; 153.

3315. *J. Krisko.* Benzinelektrische Selbstfahrer im Eisenbahnbetriebe. Z. Ö. I. A. V. 58. 346.

3316. *H. Kroen.* Unsichere Drahtlänge, gefährdete Seillänge und zulässige Anzahl der Drahtbrüche bei für Mannsfahrt noch verwendbaren Seilen. Ö.Z.B.H. 54. 145.

3317. *M. Kroll.* Beiträge zur Ausbalanzierung rasch rotierender Maschinenteile. E.T.M. 25. 583.

3318. *E. Kulka.* Ermittlung der höchsten Geschwindigkeit, der Beschleunigung und der Verzögerungsdauer elektrisch betriebener Fördermaschinen bei Anfahren und Stillsetzen mit konstantem Strom. E.Z. 28. 1185.

3319. *W. Kummer.* Die Aufstellung von Fahrlinien für aussetzende elektrische Kraftbetriebe einschließlich Bahnen. E.B.B. 5. 523.

3320. *W. Kummer.* Über die Anfahrbeschleunigung bei elektrischen Bahnen. S.B.Z. 48. 227.

3321. *M. Kusch.* Die Betriebssicherheit und Wirtschaftlichkeit von kleineren Heißdampflokobilen; Sauggasanlagen und Dieselmotoren. V.V.G. 86. 373.

3322. *A. Kutschera.* Über die Bestimmung der Achsenbelastungen bei Lokomotiven. Z. Ö. I. A. V. 59. 712; 725.

3323. *A. S. Langsdorf.* The plotting of speed time curves. E.W. 49. 989. — *L. A. Hazeltine, L. A. Freudenberger.* 1165.

3324. *C. E. Larard.* An electrically controlled single-lever testing machine and some torsion tests. E. 104. 147.

3325. *L. Lecornu.* Théorie de l'autoloc. R. D. M. 21. 42.

3326. *H. Leiser.* Zur Theorie eines neuen Rührers für Flüssigkeiten und geschmolzene Metalle sehr verschiedener Dichte. Z.C.A.K. 2. 37.

3327. *Leitzmann.* Schnellfahrversuche mit 3 verschiedenen Lokomotivgattungen auf der Strecke Hannover—Spandau. V.V.G. 85. 61; O.F.E. (2) 43. 307.

3328. *Leitzmann.* Ergebnisse der Versuchsfahrten mit einer 2/4 gekuppelten Vierzylinderlokomotive Grafenstädener Bauart. O.F.E. (2) 43. 333.

3329. *F. Leitzmann.* Versuche mit einer 2/5 gekuppelten vierzylinderigen Verbund-Schnellzuglokomotive, Grafenstädener Bauart mit Serve-Röhren. V.V.G. 86. 313.

3330. *F. v. Le Monnier.* Die Erdbeben in ihren Beziehungen zu Technik und Baukunst. Z. Ö. I. A. V. 59. 859; 873.

3331. *L. Letombe.* Influence de l'action de paroi sur le rendement des moteurs à gaz. R. D. M. 19. 256.

3332. *A. Lévy-Lambert.* Les chemins de fer à crémaillère. M.I.C. 59. A. 507.

3333. *W. Lindemann.* Das Wogen und Nicken der Lokomotive. A.G.B. 60. 2; 61. 12.

3334. *O. Lippmann.* Berechnungen des Mechanikers. D.M. 14. 21; 68; 127.

3335. *H. Lorenz.* Die Änderung der Leistung von Kolbenmaschinen mit der Umlaufzahl. Z.V.D.I. 50. 1277.

3336. *H. Lorenz.* Die Änderung der Umlaufzahl und des Wirkungsgrades von Schiffsschrauben mit der Fahrgeschwindigkeit. Z.V.D.I. 51. 329.

3337. *H. Lorenz.* Vergleichsversuche an Schiffsschrauben. Z.V.D. 351. 19.

3338. *H. R. A. Mallock.* The action between rohee and rail. Eg. 83. 867.

3339. *G. Marié.* Sur une formule relative à une condition de stabilité des automobiles et spécialement des autobus. M.I.C. 60. A. 649; 754.

- 3340.** *G. Marié.* Les grandes vitesses des chemins de fer: les oscillations du matériel et la voie. M.I.C. 59. A. 622.
- 3341.** *G. Marié.* Les oscillations du matériel des chemins de fer à l'entrée en courbe et à la sortie. M.I.C. 58. 673.
- 3342.** *G. Marié.* Les dénivellations de la voie et les oscillations du matériel des chemins de fer. A.D.M.P. (10) 9. 448; 10. 277.
- 3343.** *V. Marmor.* Note sur le tournage d'un arbre coudé. R.D.M. 19. 57.
- 3344.** *A. Martens.* Die Meßdose als Kraftmesser. Z.V.D.I. 50. 1310.
- 3345.** *R. E. Mathot et C. de Herbais.* Essais de moteurs à gaz et à pétrole. R.D.M. 18. 134.
- 3346.** *G. Mc Culloch.* Winding engines. E. 103. 44.
- 3347.** *R. v. Mises.* Die Ermittlung der Schwungmassen im Schubkurbelgetriebe. Z.Ö.I.A.V. 58. 577; 589; 606.
- 3348.** *M. A. Morel.* L'autoloc, système de blocage automatique et instantané. G.C. 50. 96.
- 3349.** *P. Mose.* Über Schwungradexplosionen. Z.V.D.I. 50. 1368.
- 3350.** *Mühlmann.* Das Anfahren der Eisenbahnzüge. O.F.E. 44. 78.
- 3351.** *W. A. Müller.* Die Loschwitzer Bergschwebebahn. A.G.B. 59. 21.
- 3352.** *J. E. Muhlfeld.* Tonnage rating. A.E.R.J. 81. 185.
- 3353.** *E. F. Nichols.* Generation of electromotive force by centrifugal force. T.E. 58. 24.
- 3354.** *J. T. Nicolson and D. Smith.* Machine tool design. E. 101. 132; 211; 413; 545; 571; 102. 110; 185; 466; 522; 541; 567.
- 3355.** *J. T. Nicolson and D. Smith.* Machine tool design. E. 103. 79; 127; 411; 465; 515; 104. 76; 203; 251.
- 3356.** „*Observer.*“ The designing of a combined punching and shearing machine. Am.M. 29. A. 52.
- 3357.** *G. Osanna.* Über das Adhäsionsgewicht von Wechselstromlokomotiven. E.B.B. 4. 229.
- 3358.** *P.* Berechnung der erforderlichen Kraft zur Fortbewegung eines auf Schienen laufenden Wagens. E.K.K. 1. 136.
- 3359.** *de Pambour.* On locomotive engines. E. 101. 129.
- 3360.** *J. Parker.* Speeds and feeds in geometric progression. Am.M. 30. B. 429.
- 3361.** *Paczmann.* Neuerungen bei der Köpfeförderung. Z.B.H.S. 54. 148.
- 3362.** *W. Pickersgill.* Mängel bei der Berechnung von Hebermaschinen. Z.G.U. 22. 143; 152; 167.
- 3363.** *Pietzsch.* Berstung eines Dampfmaschinenchwungrads. Z.B.D. 10. 229.
- 3364.** *J. Pirkl.* Regulator mit kombiniertem Inertie- und Interferenzprinzip. E.T.M. 24. 631.
- 3365.** *V. Pollack.* Über Erfahrungen im Lawinenverbau in Österreich. Z.Ö. I.A.V. 58. 145; 161; 177.
- 3366.** *Pregél.* Hammerwerke mit Kraftantrieb. P.J. 322. 273; 292; 311; 324; 343; 375; 403.
- 3367.** *C. del Proposto.* Dieselmotoren im Schiffsbetrieb. Z.D.M. 30. 249; 259.
- 3368.** *W. G. Raymond.* Curve resistance. R.G.T. 41. 250.
- 3369.** *W. G. Raymond.* Acceleration and some locomotive problem. R.G.T. 41. 345.
- 3370.** *H. Renold.* A grinding machine driven by chains. Am.M. 29. A. 682.
- 3371.** *J. Reyval.* Consommation d'énergie dans la traction électrique. E.E. 53. 224.
- 3372.** *M. Richter.* Neuere deutsche Schnellzuglokomotiven. Z.V.D.I. 50. 554; 602. — *A. Frank.* 609.
- 3373.** *R. Richter.* Das elastische Triebwerk. E.B.B. 5. 631; 692.
- 3374.** *R. Rinkel.* Dampfbetrieb und elektrischer Betrieb im Schnellzugsverkehr. E.B.B. 5. 421; 447.
- 3375.** *L. Rith.* Les régulateurs à force centrifuge. M.I.C. 58. B. 307.
- 3376.** *A. Rodrigue.* Les waggons dynamomètre. M.I.C. 60. B. 521.
- 3377.** *F. Roehle.* Anlaufs- und Auslaufversuch zur Bestimmung von Schwungmomenten. E.Z. 27. 77.
- 3378.** *V. Roessler.* Herstellung tiefer Bohrungen. Z.W. 11. 5; 17; 47; 76.
- 3379.** *P. Rollka.* Berechnung der Drehungen in der Kammgarnspinnerei. M.T.I. 22. 254.
- 3380.** *G. Rossat.* Vibration ordinaire sinusoidale et vibration ionique. E.E. 51. 182.
- 3381.** *J. E. Rutter.* Roads and speed. E. 103. 558.
- 3382.** *H. Saller.* Stoßwirkungen im Eisenbahnbetrieb. O.F.E. 44. 119; 155.
- 3383.** *R. Sanzin.* Untersuchungen über die Zugkraft der Lokomotiven. Z.V.D.I. 50. 118.
- 3384.** *R. Sanzin.* Untersuchung der Widerstände einer 3/3gekuppelten Lokomotive. Z.V.D.I. 51. 1695.

- 3385.** *R. Sanzin.* Bestimmung der Fahrzeiten aus der Leistungsfähigkeit der Lokomotiven. V.V.G. 85. 303.
- 3386.** *R. Sanzin.* Das Leistungsgebiet der Dampflokomotive. Z.Ö.I.A.V. 58. 441; 653.
- 3387.** *R. Sanzin.* Vergleich der Leistungsfähigkeit einer amerikanischen mit einer österreichischen Lokomotive. Z.Ö.I.A.V. 58. 99.
- 3388.** *E. Sauvage.* Sur l'indicateur de vitesse de M. Luc Denis. B.S.E. 105. 717.
- 3389.** *G. Schlesinger.* Versuche über die Leistung von Schmirgel- und Karborundumscheibe bei Wasserzuführung. M.F.I. 43. 1.
- 3390.** *Schlick.* Über den gyroskopischen Einfluß rotierender Schwungräder an Bord von Schiffen. Z.V.D.I. 50. 1466.
- 3391.** *O. Schlick.* Versuche mit dem Schiffskreisel. Z.V.D.I. 50. 1929. — *A. Föppl.* 2048.
- 3392.** *II. Schoeneich.* Eine Stapellaufstudie. Z.V.D.I. 361. 1993.
- 3393.** *R. Schröder.* Das Auswuchten umlaufender Maschinenteile. W.S.T. 1. 286.
- 3394.** *A. Schwarzenberg.* Vereinfachte Berechnung von kreisbogenförmigen Ablaufbahnen. S.B. 8. 637.
- 3395.** *T. R. Shaw.* Speeds of high-speed twist drills. Am.M. 29. A. 279. E.
- 3396.** *E. Siedek.* Der Fliehfaktor und eine einfache Formel zur Berechnung der Fliehkraft. E.Z. 28. 435. — *R. Gundel.* 498.
- 3397.** *E. Siedek.* The calculation of centrifugal force. T.E. 59. 991.
- 3398.** *G. Simpson.* Propellor struts. Eg. 83. 415; 465.
- 3399.** *J. A. Smith.* High speed motor boats. Eg. 81. 516.
- 3400.** *R. H. Smith.* Collision, direct and oblique, with and without friction. E. 101. 187; 237; 287.
- 3401.** *P. Soulaïrol.* Sur une méthode pour la détermination du rendement des dynamos à courant continu. E.E. 50. 185.
- 3402.** *A. Stodola.* Die Nebenspannungen in rasch umlaufenden Scheibenrädern. Z.V.D.I. 51. 1269.
- 3403.** *Strahl.* Ist das Zucken der Lokomotiven eine störende Bewegung? A.G.B. 61. 27; 160; 161. — *R. Skutsch.* 160; 161.
- 3404.** *A. Stucki.* Functions of a good draft gear. R.G.T. 40. 297.
- 3405.** *J. Teisset.* L'enrouleur de courroies de M. le Capitaine Leneveu „le Lénix“. M.I.C. 58. 359.
- 3406.** *W. Thele.* Vibrationserscheinungen neuerer Schnelldampfer. S.B. 8. 519; 559; 595.
- 3407.** *O. Thiering.* Zur Technologie des Spulers. M.T.I. 21. 73.
- 3408.** *S. T. Thompson.* Über die Konstruktion schnelllaufender Dynamomaschinen mit besonderer Berücksichtigung des Dampfturbinenantriebes. E.T.M. 25. 538.
- 3409.** *Tolle.* Die Ausbalanzierung rotierender Maschinenteile. Z.V.D.I. 50. 459.
- 3410.** *II. Undeutsch.* Kritische Besprechung gefährlicher Fall- und Fangergebnisse sowie der erforderlichen Unstörbarkeit des Fangapparates der Bergwerkfördergestelle. Ö.Z.B.II. 54. 105; 122.
- 3411.** *R. v. Foss.* Über eine Vorrichtung zur geradlinigen Führung des Schreibstiftes bei registrierenden Meßinstrumenten. D.M. 15. 25; 40; 52.
- 3412.** *A. Wagener.* Neuerungen an Indikatoren. Z.V.D.I. 51. 1365.
- 3413.** *G. Wagner.* Der Strobograph, eine Vorrichtung zum Aufzeichnen von Pendeldiagrammen. Z.V.D.I. 50. 1981.
- 3414.** *G. Watson.* Diagrams for automobile power calculations. Am.M. 29. B. 806.
- 3415.** *A. Watzinger.* Die Wahl der Exzenter bei Doppelschiebersteuerungen. Z.V.D.I. 50. 115. — *W. Pickersgill.* 116.
- 3416.** *W. Wechmann.* Vorschläge zur Verkürzung der Zugfolgezeit auf der Berliner Stadtbahn. A.G.B. 58. 156; 219. — *v. Glinski.* 218.
- 3417.** *A. Wessely.* Zur Theorie des Übergangsbogens. Z.Ö.I.A.V. 58. 617.
- 3418.** *W. White.* Gyroscopic steadying apparatus for vessels. Eg. 83. 442; 448.
- 3419.** *O. Willkomm.* Ware und Wirkmuster an Rundstählen. M.T.I. 21. 17; 53; 90; 122; 157; 189; 222; 251; 290; 321.
- 3420.** *F. Wittenbauer.* Dynamischer Kraftplan des Kurbelgetriebes. Z.V.D.I. 50. 951.
- 3421.** *R. Wittlinger.* Über Fallwerke, Kraftspindelpressen und Druckregelpressen. K.B. 24. 506; 523.
- 3422.** *W. Wyssling.* Der Kraftbedarf für den elektrischen Betrieb der Bahnen in der Schweiz. S.B.Z. 48. 189; 201.
- 3423.** *M. R. Zechlin.* Steuerung und Lenkachsen der Kraftwagen. Z.V.D.I. 51. 751.
- 3424.** *J. Zillgen.* Ein Vergleich der 2- und 3-gekuppelten Schnellzuglokomotiven der preuß.-hess. Staatsbahnen. A.G.B. 61. 227.

3425. *J. Zoller.* Die indizierte Leistung und der mechanische Wirkungsgrad. M.T.G.W. (2) 16. 181.

3426. *N. N.* The theory of the gyroscope. Eg. 83. 749.

3427. *N. N.* The Fleming summit loop. R.G.T. 40. 437.

3428. *N. N.* The resistance of railway trains. Eg. 84. 115.

3429. *N. N.* Moyens de réduire les intervalles entre les trains sur les lignes à circulation intense. G.C. 49. 106.

3430. *N. N.* Über die Verwendung von Kugellagern im Maschinenbau. Z.M.S. 23. 326; 344.

3431. *N. N.* The steam consumption of modern winding engines. E. 102. 363. — *C. J. Mawhood.* 404.

3432. *N. N.* Tramway électrique avec contrepoids de sécurité. P.E.M. (5) 6. 129.

Elastizität.

3433. *N. M. Abramoff.* Grundangaben über die gleichlaufende Untersuchung der Eigenschaften des umschnürten Betons, System Considère und Abramoff. B.M.K. 12. 353.

3434. *F. Adutt.* Fundierung einer Schiebebühne auf einem Eisenbetonrost. Z.Ö.I.A.V. 59. 824.

3435. *F. Adutt.* Projekt einer Eisenbetonbogenbrücke über die Reikka. Z.Ö.I.A.V. 59. 393.

3436. *W. L. Andrée.* Vereinfachte Spannungsermittlung der Kranlaufschiene. P.J. 322. 49.

3437. *W. L. Andrée.* Die Obergurtkrümmung eines Kranauslegers. P.J. 322. 395.

3438. *H. Anthes.* Versuchsmethode zur Ermittlung der Spannungsverteilung bei Torsion prismatischer Stäbe. P.J. 321. 342; 356; 388; 441; 455; 471.

3439. *E. Aragon.* Le calcul des fûches des poutres par l'intégration graphique. G.C. 51. 260; 277.

3440. *I. Arnolević.* Ein Fall des eingespannten auf Zug und Biegung beanspruchten Stabes. Z.Ö.I.A.V. 58. 480.

3441. *C. Bach.* Versuche über die Elastizität von Flammrohren mit einzelnen Wellen. M.F.I. 33. 39.

3442. *C. Bach.* Versuche zur Ermittlung der Durchbiegung und der Widerstandsfähigkeit von Scheibenkolben. M.F.I. 31. 1.

3443. *R. C. Barnett.* The application of the elastic theory to certain formes of arch. E.N. 58. 126.

3444. *O. H. Basquin.* Stresses in simple columns under eccentric load. E.N. 57. 420.

3445. *R. Bastian.* Das elastische Verhalten der Gleisbettung und ihres Untergrundes. O.F.F.E. (2) 43. 267.

3446. *R. C. Beardley.* Stresses in the Mc Call Ferry dam. E.N. 58. 525.

3447. *F. Berg.* Der Spannungszustand einfach geschlungener Drahtseile. P.J. 322. 289; 307.

3448. *L. Biette.* Déplacement de la passerelle de Passy. A.P.Ch. (8) 22. 225.

3449. *L. Bloudek.* Ein neues Verfahren zur Bestimmung der Lage der Neutralachse bei armierten Betonkörpern. Z.Ö.I.A.V. 59. 837.

3450. *R. Blumenfeld.* Berechnung von gekrümmten Stäben. Z.V.D.I. 51. 1426.

3451. *A. Bock.* Neue Verfahren zur Ermittlung der größten Stabkräfte im statisch bestimmten Fachwerk. Z.Ö.I.A.V. 58. 277.

3452. *F. Böhm.* Der Zweigelenkbogen mit Zugband in beliebiger Höhe. Z.V.D.I. 51. 695; 776.

3453. *J. B. Bosch.* Berechnung exzentrisch gedrückter Eisenbetonquerschnitte. M.Z.B.E. 4. 58.

3454. *A. J. Bowie.* Long span polelines. E.W. 48. 367.

3455. *A. J. Bowie.* Strains in polelines. E.W. 48. 953.

3456. *J. E. Boyd.* Theory of horizontal compression members with eccentric pin connections. E.N. 57. 404.

3457. „Brachistochrone“. Cast iron beams. Am.M. 29. B. 54. — *P. Palmer.* 385; 712. — *Sirah.* 676. — *F. F. Nickel.* 813.

3458. *A. W. Buel.* Uniform life loads for railroad bridges and shearing stress in webs of plate girders. R.G.T. 41. 227.

3459. *J. Bürgin.* Bestimmung der Deformierung einer Eisenbetonplatte und der auf ihr errichteten Gebäude. Z.A.I. (2) 12. 199.

3460. *Caldaguès.* Notice sur l'exécution des travaux du siphon de Suresnes. A.P.Ch. (8) 25. 171.

3461. „Careless“. Arches. Eg. 81. 798.

3462. *F. Chaudy.* Essai d'une théorie de la flexion des poutres droites en béton armé. M.I.C. 60. A. 257.

3463. *H. Chowaniec.* Bestimmungen der Biegungsspannungen in einem Ausdehnungskompensator. G.I. 29. 617.

3464. *L. Cohen.* Distortion in telephonic transmission. E.W. 50. 564.

- 3465.** *Coignet.* The national proportioning of structures in ferroconcrete. Eg. 81. 600.
- 3466.** *R. H. Collingham.* The static deflection of turbine rotors. E. 103. 305.
- 3467.** *J. Cornea.* Beiträge zur Ermittlung der Anstrengung der Eisenbahnschiene. O.F.E. 44. 293.
- 3468.** *L. Cosyn.* Cabine de signaux de la station de Bruxelles-Nord. N.A.C. (2) 3. 17.
- 3469.** *C. Cuenot.* Track deformation and their prevention. R.G.T. 42. 301.
- 3470.** *W. T. Curtis.* A new method of calculation bridge stresses under wheel loads. E.N. 55. 695
- 3471.** *C. Drach.* Beitrag zur Ökonomie der Plattenbalken aus Eisenbeton. M. Z. B. E. 3. 54.
- 3472.** *R. H. Duncan and F. Peam.* A question in designing a press frame. Am. M. 30. B. 129.
- 3473.** *L. Edelstein.* Mittel zur Beseitigung des Spielraums zwischen Schiene und Lasche. Z. Ö. I. A. V. 59. 734.
- 3474.** *R. Läder.* Berechnung von Zugfedern für elektrische und mechanische Apparate. E. T. M. 24. 375; 397; 417. — *R. Klein.* 430.
- 3475.** *P. Ehrlich.* Die elastische Verbindung der rotierenden Massen und ihr Einfluß auf den Reguliervorgang des Motors. Z. Ö. I. A. V. 58. 152.
- 3476.** *E. Elwitz.* Bestimmung der Einflußlinien für die Kantenpressungen beim Vollwandbogen mit 2 und 3 Gelenken. C. B. B. 26. 154.
- 3477.** *F. Engesser.* Über den Einfluß von Wärmeänderungen auf Bogenträger mit 2 Gelenken. C. B. B. 27. 155.
- 3478.** *F. Engesser.* Über weitgespannte Wölbrücken. Z. A. I. (2) 12. 403.
- 3479.** *M. Ensslin.* Beanspruchung eines ebenen Scheibenkolbens mit 2 Böden und ohne Rippen. P. J. 322. 577.
- 3480.** *F. H.* Appareil enregistrateur des flexions et des oscillations des ponts métalliques. G. C. 51. 298.
- 3481.** *F. C. Finkle.* The cave-in of an inclined shaft and subsequent rescue of an entombed miner at Bakersfield. E. N. 57. 318.
- 3482.** *A. Föppl.* Die Beanspruchung auf Verdrehen an einer Übergangsstelle mit scharfer Abrundung. Z. V. D. I. 50. 1032.
- 3483.** *B. de Fontviolant.* L'équation générale de l'élasticité des constructions et ses applications. M. I. C. 60. B. 365.
- 3484.** *P. Forchheimer.* Zur Einbeulung bei Innenpressung und Biegung bei Zug oder Druck. Z. V. D. I. 50. 58.
- 3485.** *J. H. Ford.* Live load moments in highway bridges carrying road rollers. E. N. 58. 19.
- 3486.** *A. Francke.* Der Parabelträger mit elastisch eingespannten Kämpfern. Z. A. I. (2) 11. 293.
- 3487.** *A. Francke.* Einige allgemeine elastische Werte für den Kreisbogenträger. Z. A. I. (2) 11. 45.
- 3488.** *A. Francke.* Der Balken mit elastisch gebundenen Auflagern bei Unsymmetrie mit Bezugnahme auf die Verhältnisse des Eisenbahnoberbaues. O.F.E. (2) 43. 143; 172; 191; 216.
- 3489.** *Frank.* Der Einfluß veränderlichen Querschnitts auf die Biegemomente kontinuierlicher Träger unter besonderer Berücksichtigung von Beton-eisenkonstruktionen. B. E. B. 5. 315.
- 3490.** *T. Friesendorff.* Über die Brinell'sche Kugelprobe zur Bestimmung der Härte der Metalle. B. M. K. 11. 122.
- 3491.** *H. Frölich.* Massivplatten mit kreuzweiser Eisenarmierung. B. E. B. 5. 205.
- 3492.** *F. Gebauer.* Beitrag zur Theorie der günstigsten Trägerhöhe des Parallelträgers. Z. Ö. I. A. V. 58. 381; 396; 409.
- 3493.** *C. Gégauff.* Force et élasticité des filés en coton. B. S. I. M. 77. 153.
- 3494.** *A. Gefner.* Härtebestimmung mittels der Ludwik'schen Kegelprobe unter Stoßwirkung. Z. Ö. I. A. V. 59. 799.
- 3495.** *R. Girtler.* Über die Deformationsarbeit als Maß der Beanspruchung. Z. Ö. I. A. V. 59. 649.
- 3496.** *Gisclard.* Pont suspendu à poutres raidissantes et à articulation médiane. A. P. Ch. (8) 27. 39.
- 3497.** *P. Gödel.* Beitrag zur Theorie von Scherspannungen in Deckenplatten. Z. Ö. I. A. V. 58. 610.
- 3498.** *M. Gräßler.* Der Spannungszustand in rotierenden Scheiben veränderlicher Breite. Z. V. D. I. 50. 535.
- 3499.** *E. Grüneisen.* Interferenzapparat zur Messung elastischer Dehnungen von Stäben. Z. I. 27. 38.
- 3500.** *F. Goske.* Vorschlag zur vereinfachten Berechnung zugarmierter Betonplatten und -Balken. S. D. B. 17. 154; 163.
- 3501.** *E. Haimovici.* Wie kann die Anwendung des Eisenbetons in der Eisenbahnverwaltung wesentlich gefördert werden? B. E. B. 5. 313.
- 3502.** *E. Haimovici.* Ermittlung der Drucklinien elastisch eingespannter Gewölbe. B. E. B. 6. 231.

3503. *E. A. Hamock.* Über den Einfluß zusammengesetzter Spannungen auf die elastischen Eigenschaften von Stahl. P.J. 322. 184.

3504. *Harel de la Noé.* Pont en acier et béton sur le Guindy maritime à Tréguier. A.P.Ch. (8) 28. 34.

3505. *Hasse.* Beitrag zur Bestimmung der Biegelinien beliebiger Fachwerke als Seilecke. Z.A.I. (2) 12. 75.

3506. *H. G. Crank shafts for triplex pumps.* Am.M. 29. A. 255.

3507. *Hirschland.* Über die Formänderung von Drahtseilen. P.J. 321. 209; 234; 250; 264; 279.

3508. *Hofmann.* Zur Berechnung der Spannungen in gedrückten Betonkörpern. S.D. B. 16. 245.

3509. *E. Horowitz.* Berechnung einer Speichermauer für seitliche Kräfte. E. K. K. 1. 3.

3510. *H. Hort.* Untersuchung über die Spannungserhöhung bei Wiederholungsversuchen; Einfluß der Festigkeitsmaschine auf die Gestalt des labilen Fließgebiets im Spannungsdiagramm. Z.V.D.I. 50. 2110.

3511. *L. Hotopp.* Biegungspaarungen in stabförmigen Körpern, die dem Hooke'schen Gesetz nicht folgen, sowie in Verbundkörpern. Z.A.I. (2) 11. 281.

3512. *M. A. Howe.* The graphical solution of the knee-brace problem. R. G.T. 48. 824.

3513. *Hundt.* Ersatz des Holzausbaus im Wilhelmsschacht II des K. Steinkohlenbergwerks „König“ (Saarrevier) durch Eisenbeton. B.E.B. 5. 189.

3514. *Izod.* Behaviour of materials of construction under poor shear. Eg. 81. 112.

3515. *Jaehn.* Der Osske-Kühnesche Biegungszeichner und die Auswertung seiner bei Eisenbahnbrücken ermittelten Messungsergebnisse. P.J. 322. 275.

3516. *T. H. Johnson.* Stresses in lattice bars of built columns. E.N. 58. 336.

3517. *H. J. Jones.* Modern armour and armour-piercing projectiles. E. 103. 361; 393. 414; 447.

3518. *Jupke.* Beitrag zur Vereinfachung der Berechnung von Eisenbetonkonstruktionen. B.E.B. 5. 178.

3519. *O. Kallir.* Über Hochspannungslösungen mit eisernen Masten. E.T.M. 24. 837; 861.

3520. *W. Kent.* The limit of proportionality and the elastic limit. Am. M. 30. B. 985.

3521. *F. Kerdijk.* Eisenbahnunter-

querung der Leidener Straße bei Utrecht. P.J. 322. 8; 23.

3522. *B. Kirsch.* Elementare Ableitung der Knickformel. M.T.G.W. (2) 16. 64.

3523. *R. Klein.* Die Arbeiten von H. Hertz auf dem Gebiete der Elastizität und Festigkeit. E.T.M. 24. 621.

3524. *F. Kliever.* Die Ermittlung der Schnittpunkte bei gekreuzten Diagonalen. S.B.Z. 47. 51.

3525. *F. Kögler.* Einflußlinien für beliebig gerichtete Lasten. C.B.B. 24. 398.

3526. *F. Kogler.* Ableitung der Richtungslinien von Bogenträgern aus den Einflußlinien der Bogenkräfte. C. B.B. 27. 550.

3527. *J. Kraft.* Die Elastizität von Rohrkrümmern. Z.V.D.I. 50. 1545; 2047. *G. Duffing.* 2046.

3528. *M. Kralupper.* Studie über die molekularen Veränderungen eines durch Zug beanspruchten Stahlstabes. Ö.Z.B. H. 54. 619; 636. 650.

3529. *M. Krause.* Der Spannungszustand im fallenden Schornstein. Z.B. D. 11. 210.

3530. *K. J. Kriemler.* Zwei Fälle von unsicherem Gleichgewicht bei gewöhnlicher Biegung. C.B.B. 27. 181.

3531. *G. Kull.* Träger mit kleinster Durchbiegung; Träger mit kleinstem Biegungswinkel am Ende. P.J. 321. 481.

3532. *G. Kull.* Bemerkung über die Beanspruchung gekrümmter Wellen. P.J. 321. 218.

3533. *E. Kux.* Über die Spannung des Winkelrings am Flachboden des Wasserbottichs bei eisernen Gasbehältern. J.G.W. 50. 273; 278. — *E. Szarbinowski.* 275.

3534. *Landmann.* Die Berechnung von Eisenbetonkonstruktionen bei exzentrisch wirkender Normalkraft. B.E. B. 5. 257. 284.

3535. *F. Lebert.* Ponts suspendus et ponts en arc. A.P.Ch. (8) 21. 26.

3536. *A. L. de Leeuw.* The design of bending rolls. Am. M. 29. A. 644.

3537. *Leibbrand.* Fortschritte im Bau weit gespannter massiver Brücken. D. B.Z. 40. 611; 639.

3538. *A. Leon.* Über die Materialspannung in rotierenden Körpern. Z. Ö. I.A.V. 59. 511.

3539. *W. E. Lilly.* Web stresses in plate girders. Eg. 83. 136.

3540. *E. Lorenz.* Vorschläge zu einem vereinfachten Berechnungsverfahren für Platten und Plattenbalken aus Eisenbeton. C.B.B. 26. 106.

- 3541.** *Lorieux.* Elargissement du pont sur la Seine à Corbeille au moyen d'encorbellements en ciment armé. A. P.Ch. (8) 28. 89.
- 3542.** *A. Ludin.* Zeichnerische Behandlung des beiderseits eingespannten Balken. C.B.B. 27. 420. — *C. Vlachos.* 548.
- 3543.** *P. Ludwik.* Über Härtebestimmung mittels der Brinell'schen Kugeldruckprobe und verwandter Eindruckverfahren. B.M.K. 12, 115; 147; Z. Ö.I.A.V. 59. 191; 205.
- 3544.** *J. Lüttmann.* Die Durchbiegung rotierender Schraubenfedern. Z.V.D.I. 51. 1788.
- 3545.** *M.* Allgemeine Einführung von Bezeichnungen zur Berechnung von Eisenbetonkonstruktionen sowie Ableitung der Formeln in den ministeriellen Vorschriften. K.K. 1. 32.
- 3546.** *R. Malmström.* Versuche mit Gußeisen über den Einfluß des Kugeldurchmessers und des Druckes bei der Brinell'schen Methode der Härtebestimmung. P.J. 322. 33.
- 3547.** *H. Maurer.* Berechnung steifer Rahmen. M.Z.B.E. 4. 30; 34.
- 3548.** *K. W. Mautner.* Bogendach mit einseitigem Kragarm in Monierkonstruktion. M.Z.B.E. 4. 57.
- 3549.** *F. P. Mc. Ribben.* Maximum live-load bending moments and shears for bridges carrying electric cars. E.N. 57. 372.
- 3550.** *Mehrtens.* Das Profilheft der Differdinger Hütte in Luxemburg. Z. V.D.I. 50. 497.
- 3551.** *O. Meyer.* Die Festigkeits- und Elastizitätseigenschaften, sowie die Biegezugfähigkeit verschiedener Zn-legierungen nebst Betrachtung über deren Veränderlichkeit bei Ätzung und Erhitzung. B.M.K. 11. 261.
- 3552.** *Mg.* Die Senkung der Schwerachse bei Trägern. E.K.K. 1. 137.
- 3553.** *R. v. Mises.* Die Ermittlung der Maximalbiegemomente an statisch bestimmten Laufkranträgern. P.J. 321. 593.
- 3554.** *F. Mörsch.* Versuche über die Schubwirkungen bei Eisenbetonträgern. D.B.Z. 41. 207; 223. 241.
- 3555.** *Müller-Breslau.* Über parabelförmige Einflußlinien. C.B.B. 26. 234.
- 3556.** *M. P. Murphy.* The design of eccentric pull and push rods. Am.M. 30. B. 292. — *J. A. Brown.* 559.
- 3557.** *K. Musiol.* Fortschritte im Räderziehpressebau. Z.W. 10. 311.
- 3558.** *W. H. Mussey.* Semi-elliptic springs for locomotives and tenders. A.E.R.J. 80. 233.
- 3559.** *F. H. Neely.* Designing a presse frame. Am.M. 30. B. 24. — *C. Wise.* 518.
- 3560.** *G. Nicolaus.* Über den Durchhang von Freileitungen. E.Z. 28. 896; 918.
- 3561.** *A. Nowak.* Der Eisenbetonbau bei den neuen durch die K.K. Eisenbahndirektion hergestellten Bahnlängen der österr. Monarchie. B.E.B. 5. 236; 274; 301.
- 3562.** *A. Ostenfeld.* Die Gesetze Considère's im Lichte der Versuche Kleinogels. B.E.B. 5. 132. — *A. Kleinogel* 132.
- 3563.** *K. Pearson, L. F. Richardson.* Stresses in masonry dams. Eg. 84. 555.
- 3564.** *Pendavies.* Note sur le calcul et sur la répartition des étriers dans les poutres droites en ciment armé. A.P.Ch. (8) 28. 73.
- 3565.** *H. Pender.* Tension and Sag in wire spans. E.W. 50. 604.
- 3566.** *H. Pender.* Simple formulae for the relations between deflection, tension and temperature in wire spans. E.W. 49. 99.
- 3567.** *C. Pfeleiderer.* Die Beanspruchung stabförmiger Träger mit gekrümmter Mittellinie. Z.V.D.I. 51. 209.
- 3568.** *C. Pfeleiderer.* Die Anstrengung stabförmiger Träger mit gekrümmter Mittellinie. Z.V.D.I. 51. 1507.
- 3569.** *R. Pokorný.* Ein Weg zur analytischen und graphischen Behandlung des mit Fe armierten Betonquerschnittes. Z. Ö.I.A.V. 59. 633.
- 3570.** *W. C. Poplewell.* Shear stress and permanent angular strain. E. 101. 53.
- 3571.** *T. Port.* Über Scherkräfte bei Talsperren. C.B.B. 27. 574. — *Kirchhofer.* 680.
- 3572.** *E. Preuß.* Zur Geschichte der Dauerversuche mit Metallen. B.M.K. 11. 245.
- 3573.** *M. Price.* The microstructure and frictional characteristic in bearing metals. Am.M. 29. B. 505; 535.
- 3574.** *H. S. Princhard.* Imperfect butt-joints in columns and stresses in lattice bars. E.N. 58. 368.
- 3575.** *E. Probst.* Bedeutung der Schubspannungen in Plattenbalken aus Eisenbeton. C.A.B. 26. 59. — *R. Stöcker.* 105.
- 3576.** *R.* Beitrag zur Berechnung von Eisenbetonkonstruktionen. E.K.K. 1. 79.
- 3577.** *Ramisch.* Über Sperrspannung. E.K.K. 1. 184.

- 3578.** *Ramisch.* Beitrag zur Bestimmung des Gleitwiderstandes bei Balken aus Eisenbeton. Z. Ö. I. A. V. 58. 54.
- 3579.** *G. Ramisch.* Untersuchung eines elastischen Bogenträgers mit 2 an den Kämpfern versehenen festen Gelenken. V. V. G. 85. 185.
- 3580.** *Ramisch.* Neue Untersuchung von armierten Betonplatten. V. V. G. 85. 330.
- 3581.** *G. Ramisch.* Berechnung von flachen Betonbögen auf 2 Auflagerstellen. Z. Ö. I. A. V. 59. 63.
- 3582.** *G. Ramisch.* Beitrag zur Berechnung von flachen Massivbögen. E. K. K. 1. 52.
- 3583.** *G. Ramisch.* Beitrag zur Berechnung von Unterzügen. Z. Ö. I. A. V. 58. 471.
- 3584.** *Ramisch.* Angenäherte Berechnungsweise von Unterzügen aus Eisenbeton. T. B. B. 20. 293.
- 3585.** *Rejtö.* Die auf dem Brüsseler Kongress mitgeteilten Versuchsergebnisse bezüglich der Gesetze der bleibenden Formänderungen (deutsch-franz.) B. M. K. 12. 257; 276; 299.
- 3586.** *C. Richter und H. Häser.* Über die Nachteile gekrümmter Kohlenstäbe bei der Bogenlampenbeleuchtung und ein Instrument zur Messung ihrer Geradheit. E. T. M. 25. 342.
- 3587.** *H. Royer.* Sur la construction des réservoirs à haute pression. R. D. M. 18. 533.
- 3588.** *Saliger.* Der Eisenbeton in Theorie und Konstruktion. B. E. B. 5. 99.
- 3589.** *R. Saliger.* Ermittlung des Eisens in einseitig gedrückten Eisenbetonquerschnitten. M. Z. B. E. 3. 39.
- 3590.** *Saliger.* Neue Formeln zur Berechnung von Eisenbetonplatten. S. D. B. 16. 261.
- 3591.** *Saliger.* Querschnittsabmessungen von Schornsteinen aus Eisenbeton. B. E. B. 5. 75.
- 3592.** *R. Schönhöfer.* Bestimmung der Spannungen des Einflusses von Wärmeschwankungen auf Gewölbe nach dem Verfahren mit konstanten Bogengrößen. B. E. B. 6. 79.
- 3593.** *J. Schorstein.* Einfache Konstruktion des neutralen Punktes beim Parabelträger. Z. Ö. I. A. V. 58. 265.
- 3594.** *T. Seyrig.* Le pont de commerce à Liège à arcs conjugués. M. I. C. 58. 538.
- 3595.** *J. Smith.* An application of stream-line apparatus to determine the direction and approximate magnitudes of the principal stresses in certain parts of ships. Eg. 82. 436.
- 3596.** *R. H. Smith.* Economical proportion in I-beam sections. E. 102. 462.
- 3597.** *W. Staedel.* Zur Hakeberechnung. P. J. 321. 560.
- 3598.** *H. Stefan.* Spannungen im Gesteine als Ursache von Bergschlägen in den Pribramer Gruben. J. Z. B. H. 54. 253.
- 3599.** *A. Streff.* The deflection of a beam of non-uniform section. E. N. 58. 526.
- 3600.** *R. Striebeck.* Warmzerreiβversuche mit Durana-Gußmetall. M. F. I. 31. 45.
- 3601.** *C. E. Stromeyer.* Remarks on pressure-gauges. Eg. 84. 316.
- 3602.** *Stromeyer.* Pressure gauges. E. 104. 325; 351.
- 3603.** *A. Swetz.* Massivplatten und Balkenplatten mit kreuzweiser Eisenarmierung. B. E. B. 5. 286.
- 3604.** *E. Szarbinowski.* Über die Spannungen des Winkelringes am Flachboden des Wasserbottichs bei eisernen Gasbehältern. J. G. W. 49. 261; 427.
- 3605.** *H. Tavernier.* Pont à arcs de pierre de taille articulés à la clef et aux naissances avec joints coulés en zinc. A. P. Ch. (8) 29. 6.
- 3606.** *v. Teng.* Statische Berechnung eines Oberlichtes von 9,2^m Länge und 7,8^m Breite. E. K. K. 1. 258.
- 3607.** *H. R. Thayer.* Web stresses in a plate girder with abrupt change of depth. E. N. 58. 123.
- 3608.** *H. R. Thayer, de Witt, D. Barlow, L. E. Picolet, G. L. Bilderbeck.* Problem. E. N. 58. 527.
- 3609.** *A. O. Thelin.* A review of formulas for helical springs. Am. M. 29. B. 847.
- 3610.** *Thieme.* Berechnung von 10 kontinuierlichen Trägern mit Hilfe einer Einflußlinie. E. K. K. 1. 67.
- 3611.** *Thrauer.* Ein neues System für Gasbehälterführungsgestelle. E. K. K. 1. 14.
- 3612.** *Till.* Berechnung von Stützen, die außer durch Vertikallasten noch durch eine Ausbiegung des Kopfes beansprucht werden. E. K. K. 1. 99.
- 3613.** *T. R. C.* A few notes about helical springs. Am. M. 30. A. 711.
- 3614.** *C. A. P. Turner.* Workingstresses in steel construction. E. N. 58. 626.
- 3615.** *U. W. M.* Stresses on braced stages. Eg. 84. 333.
- 3616.** *L. Vianello.* Der Flachträger. Z. V. D. I. 51. 1661.

3617. *A. Voigt*. Über die Druckverteilung in Fe vor einer eindringenden Schneide. *V.V.G.* 86. 443; 503.
3618. *G. Ward*. Arch designing. *E.* 101. 149.
3619. *J. Weingarten*. Zur Theorie der ungleichen Erwärmung auf elastische Körper in bezug auf Fachwerke. *Z.A.* I. (2) 12. 453.
3620. *P. Weiske und G. Lang*. Berechnung der Biegespannungen von Betonbalken nach dem hyperbolischen Dehnungsgesetz. *Z.A.I.* (2) 12. 489.
3621. *N. Werenskiöld*. Notes on the stress-deformation curve in concrete beams. *E.N.* 55. 390.
3622. *K. Wieghardt*. Über einen Grenzübergang der Elastizitätslehre und seine Anwendung auf die Statik hochgradig statisch unbestimmter Fachwerke. *V.V.G.* 85. 139.
3623. *J. P. Williams*. The high unit-stresses used in designing the chords of the Quebec bridge. *E.N.* 58. 392.
3624. *Winter*. Elementare Bestimmung der Durchbiegung eines auf 2 Stützen frei aufliegenden Trägers. *E.K.K.* 1. 27.
3625. *C. Wise*. A problem in crane truck design. *Am.M.* 30. B. 10.
3626. *R. Wuczkowski*. Beitrag zur Berechnung der Haftspannungen und Ermittlung der entsprechenden Rundeisendurchmesser. *B.E.B.* 6. 303.
3627. *T. F. H. Zealand*. The failure of lap joints. *A.E.R.J.* 81. 150.
3628. *J. Zingler*. Über Brückenwagen. *Z.Ö.I.A.V.* 59. 556.
3629. *S. Zipkes*. Fachwerkträger aus Eisenbeton. *B.E.B.* 5. 244; 281.
3630. *S. Zipkes*. Eisenbetonbrücke mit versenkter Fahrbahn. *B.E.B.* 5. 140; 197.
3631. *S. Zipkes*. Kontinuierliche Balkenbrücken aus Eisenbeton. *W.B.S.* 3. 131; 139; 155; 182; 311; 318; 327; 353; 4. 137; 145.
3632. *S. Zipkes*. Ein Lagerhaus für Eisenwaren in Eisenbeton. *M.Z.B.E.* 3. 19.
3633. *S. Zipkes*. Lagerhaus in Stuttgart-Ostheim. *W.B.S.* 3. 101.
3634. *N. N.* Zur Abhängigkeit der Bruchdehnung von der Meßlänge. *Z.B.D.* 10. 87.
3635. *N. N.* Continuous girders. *E.* 104. 305.
3636. *N. N.* The design of plate girders. *E.* 102. 190.
3637. *N. N.* Gewalzte Betonmasten. *B.E.B.* 5. 241.
3638. *N. N.* Turntable deflection. *T.G.T.* 43. 373.
3639. *N. N.* Gewölbte Brücke über den nichtschiffbaren Moselarm (Bahnhof Metz). *S.D.B.* 17. 210; 227.
3640. *N. N.* Failures of power generating plant. *Eg.* 84. 306.

(Fortsetzung folgt.)

Einige Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie.

Von Prof. S. TIMOSCHENKO in Kiew.

In den Ingenieurbauten finden sehr oft Verwendung als wichtige Teile der Eisenkonstruktionen lange prismatische Stäbe und Platten. Die Wandstärke der Platten und die Querschnittsabmessungen der Stäbe sind im Verhältnis zur Länge klein und infolgedessen können bekanntlich einige Formen des elastischen Gleichgewichtes labil ausfallen. Der gerade Stab kann nämlich unter Einwirkung einer längs gerichteten Druckkraft ausknicken, und die Platte kann, beansprucht von in der Mittelebene einwirkenden Druckkräften, ausbeulen. Bei der Berechnung ist es von großer Wichtigkeit, im voraus zu wissen, welche Größe die äußeren Kräfte erreichen müssen, um eine Gleichgewichtsform labil zu machen. Und erst nach Lösung dieser Frage kann man das richtige Urteil über den Sicherheitsgrad einer Konstruktion fällen.

In vorliegender Abhandlung gebe ich die Lösungen einiger Stabilitätsprobleme; sie zerfällt in folgende Kapitel:

- I. Kapitel: Knickung.
- II. „ Knicksicherheit ebener Platten.
- III. „ Kipperscheinungen.
- IV. „ Stabilität einer zylindrischen Schale.

Diese Untersuchungen sind in den Jahren 1906—1908 in russischer Sprache veröffentlicht worden.¹⁾

I. Knickung.

§ 1. Eulersche Knicklast.

Wird ein prismatischer Stab zwischen zwei ebenen Flächen zusammengedrückt, so wird die Frage über die Stabilität der geradlinigen Form des Gleichgewichtes durch Untersuchung des Ausdruckes der potentiellen Energie für die geradlinige und ausgebogene Form des Gleichgewichtes beantwortet. Der Abstand zwischen beiden Enden des

1) Mitteilungen der Techn. Hochschule zu St. Petersburg, 1906—1907. Mitteilungen der Techn. Hochschule zu Kiew, 1907—1908.

Stabes sei konstant; dann muß die Stabachse bei Ausbiegung sich verlängern und folglich die Energie der Kontraktion abnehmen. Ist die

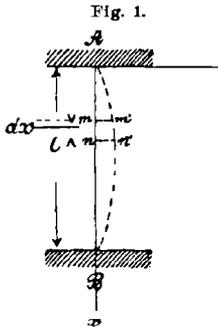


Fig. 1.

Abnahme dieser Energie größer als die Energie, die der Biegung des Stabes entspricht, so ist die geradlinige Form des Gleichgewichtes des Stabes labil. Die Größe der Knicklast wird bestimmt, indem die Energie der Biegung der Abnahme der Energie der Kontraktion gleich gesetzt wird.

Es bezeichne: E den Youngschen Modul, J das Trägheitsmoment, i den entsprechenden Radius, und ω die Querschnittsfläche des Stabes.

Legt man die Koordinatenachse nach Fig. 1 und bezeichnet y die Durchbiegung des Stabes in einem Schnitte mn , so erhält man die Verlängerung der Achse des Stabes bei der Ausbiegung:

$$\delta l = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx.$$

Ist P die Größe der Druckkraft, so ist die Abnahme der Energie der Kontraktion bei der Ausbiegung:

$$(1) \quad \delta v_1 = P \delta l = \frac{P}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx.$$

Die potentielle Energie der Biegung:

$$(2) \quad \delta v_2 = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EJ} = \frac{P^2}{2EJ} \int_0^l y^2 dx.$$

Im Falle eines an beiden Enden frei drehbaren Stabes kann man die Gleichung der ausgebogenen Achse in folgender Form schreiben:

$$y = \sum_{m=1}^{m=\infty} A_m \sin \frac{m\pi x}{l}.$$

Setzt man diese Größe in die Ausdrücke für δv_1 und δv_2 ein, so folgt:

$$(3) \quad \delta v_1 = \frac{Pl}{4} \sum A_m^2 \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2.$$

$$(4) \quad \delta v_2 = \frac{P^2 l}{4EJ} \sum A_m^2.$$

Setzt man $\delta v_1 = \delta v_2$, so ist die Knicklast:

$$(5) \quad P_k = \frac{EJ \sum A_m^2 \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2}{\sum A_m^2}.$$

Den kleinsten Wert der Knicklast erhält man, indem man das erste Glied ($m = 1$) der Summe nimmt. Dann gilt:

$$(6) \quad P_k = \frac{EJ\pi^2}{l^2}.$$

Wir sind also zu der bekannten Formel von Euler gekommen.

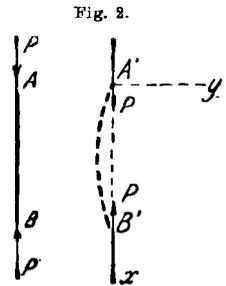
Es wurde oben angenommen, daß die Enden des Stabes sich bei der Ausbiegung einander nicht nähern. In diesem Falle hat die Ausbiegung eine Abnahme der längs gerichteten Druckkraft P zur Folge. Zu derselben Formel gelangen wir auch, wenn wir die Druckkraft P konstant annehmen und voraussetzen, daß die Ausbiegung der Achse des Stabes eine Annäherung der Enden (Fig. 2) zur Folge hat.

Die Annäherung der Enden δl bei kleinen Ausbiegungen ergibt sich aus der Formel:

$$\delta l = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx - \frac{P}{2E\omega_0} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx.$$

Die Arbeit der äußeren Kräfte, die dieser Annäherung entspricht, ist:

$$(7) \quad \delta T = \frac{P}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx - \frac{P^2}{2E\omega_0} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx.$$



Die Abnahme der potentiellen Energie der Kontraktion bei der Ausbiegung ist:

$$\delta v_1 = \frac{P^2}{2E\omega_0} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx.$$

Die potentielle Energie der Biegung wird aus der Formel (2) bestimmt.

Für die Bestimmung der Knicklast läßt sich jetzt folgende Gleichung aufstellen:

$$\delta T = \delta v_2 - \delta v_1$$

oder:

$$(8) \quad \frac{P}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx = \frac{P^2}{2EJ_0} \int_0^l y^2 dx,$$

woraus man für die Knicklast denselben Wert (6) erhält.

§ 2. Einfluß der Querkraft. Knicksicherheit von Gitterstäben.

Bei der Ableitung der Formeln (6) wurde die Querkraft $Q = P \frac{dy}{dx}$ vernachlässigt. Um diese in die Berechnung einzuführen, muß man der rechten Seite der Gleichung (8) (§ 1) die potentielle Energie des Schubes beifügen:

$$\delta v_3 = \int_0^l \frac{x \cdot Q^2 dx}{2\omega G}.$$

Hier ist G der Gleitungsmodul, κ ein Zahlenkoeffizient, der von der Querschnittsform abhängig ist. Die Gleichung für die Größe der Knicklast läßt sich jetzt in folgender Form schreiben:

$$(9) \quad \frac{P}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx = \frac{P^2}{2EJ} \int_0^l y^2 dx + \frac{\kappa P^2}{2\omega G} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx.$$

Setzt man für den Fall von frei drehbaren Enden:

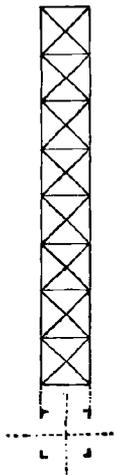
$$y = \sum A_m \sin \frac{m\pi x}{l},$$

so erhält man für die Knicklast:

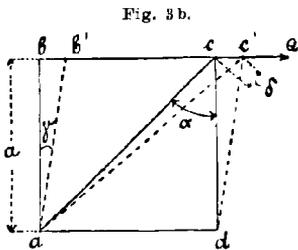
$$P = \frac{\sum A_m^2 \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2}{\frac{1}{EJ} \sum A_m^2 + \frac{\kappa}{\omega G} \sum A_m^2 \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2}.$$

Den kleinsten Wert für P erhält man, wenn man unter das Zeichen \sum nur das erste Glied nimmt; dann ist:

Fig. 3a. (10)
$$P_k = \frac{1}{\frac{1}{EJ\pi^2} + \frac{\kappa}{\omega G}} = \frac{F\omega}{\pi^2 y^2 + 2,6 \kappa}.$$



Für Eisen ist die Formel von Euler nur dann anwendbar, wenn $\frac{l}{i} > 100$, oder $\frac{1}{\pi^2} \frac{l^2}{i^2} > 1000$ ist. Da $2,6 \kappa < 10$ ist, so ist der Einfluß der Querkraft auf den Wert der Knicklast im Falle eines ungeteilten Stabes kleiner als 1%.



Bei den Gitterstäben kann der Einfluß der Querkraft viel bedeutender sein und hängt von der Querschnittsfläche der Diagonalen ab. Die Figur (3a) zeigt einen Gitterstab von quadratischem Querschnitt und Figur (3b) eines der Felder. Unter Einwirkung der

Querkraft Q bildet sich ein Schrägheitswinkel γ des Rechtecks $abcd$:

$$(11) \quad \gamma = \frac{Q}{4E\omega_d \sin^2 \alpha \cos \alpha}.$$

Hier bezeichnet ω_d die Querschnittsfläche einer der Diagonalen. Diesen Ausdruck für den Schubwinkel muß man in die Formel (10) statt

$\frac{\kappa Q}{G\omega}$ einsetzen.

Bezeichnet man ferner:

$$4 E \omega_d \sin^2 \alpha \cos \alpha = P_d \quad \text{und} \quad \frac{E J \pi^2}{l^2} = P_e,$$

so läßt sich die Formel (10) in folgender Weise schreiben:

$$(12)^1) \quad P_k = \frac{P_e \cdot P_d}{P_e + P_d}.$$

§ 3. Knickung im elastischen Medium.

Wir wollen die Größe der Knicklast und die Ausbiegungsform des gedrückten Stabes in dem Falle bestimmen, wenn bei der Ausbiegung des Stabes Querkräfte auftreten, die sich ununterbrochen auf der ganzen Länge verteilen und in jedem Querschnitte proportional der Durchbiegung sind.

Ist β der Proportionalkoeffizient, so ist die Kraft eines Elementes dx des Stabes:

$$\beta y dx.$$

Die Veränderung der potentiellen Energie, die der Arbeit der Querkräfte entspricht, ist:

$$(13) \quad \delta v_4 = \frac{\beta}{2} \int_0^l y^2 dx.$$

Die potentielle Energie der Biegung:

$$\delta v_2 = \int_0^l \frac{E J}{2} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx.$$

Die Abnahme der potentiellen Energie der Kontraktion, wenn der Abstand zwischen den Enden konstant bleibt, ist:

$$\delta v_1 = \frac{P}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx.$$

Zur Bestimmung der Knicklast erhält man dann die folgende Gleichung:

$$\delta v_1 = \delta v_2 + \delta v_4.$$

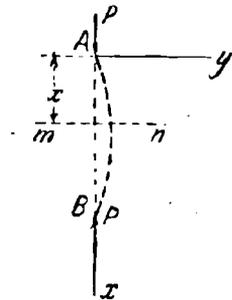
Setzt man für die frei drehbaren Enden:

$$y = \sum A_m \sin \frac{m \pi x}{l},$$

so folgt:

$$(14) \quad P = \frac{E J \sum A_m^2 \left(\frac{m \pi}{l} \right)^4 + \beta \sum A_m^2}{\sum A_m^2 \left(\frac{m \pi}{l} \right)^2}.$$

Fig. 4.



1) Diese Formel hat Prof. Prandtl auf anderem Wege abgeleitet. Z. d. V. d. Ing. 1907.

Weiter wird gezeigt, daß man den kleinsten Wert für P erhält, wenn der Stab sich nach einer Sinussoide biegt. In diesem Falle muß man unter dem Zeichen Σ in der Formel (14) nur je ein Glied lassen. Nimmt man noch an, daß die erste Ausbiegungsform m Halbwellen hat, so folgt:

$$(15) \quad P_k = EJ \frac{(m^2 \pi^2)^2 + k^4 l^4}{l^2 m^2 \pi^2},$$

wo

$$k^4 = \frac{\beta}{EJ}.$$

Die größte Länge des Stabes, bei welcher die erste Ausbiegungsform des Gleichgewichtes aus m Halbwellen besteht, wird natürlich die sein, bei welcher die Formel (15) einen und denselben Wert für P_k liefert, unabhängig davon, ob der Stab in m oder $m + 1$ Halbwellen sich teilt.

Für die Bestimmung von l läßt sich also folgende Gleichung aufstellen:

$$\frac{(m^2 \pi^2)^2 + k^4 l^4}{l^2 m^2 \pi^2} = \frac{[(m+1)^2 \pi^2]^2 + k^4 l^4}{l^2 (m+1)^2 \pi^2},$$

woraus:

$$(16) \quad l^2 = \frac{\pi^2}{k^2} (m+1) m.$$

Ist die Länge des Stabes groß, so ist die Anzahl m der Halbwellen auch groß: die Länge einer Halbwellen kann man aus (16) mit genügender Genauigkeit aus folgender Formel bestimmen:

$$(17) \quad s = \frac{l}{m} = \frac{\pi}{k} = \pi \sqrt[4]{\frac{EJ}{\beta}}.$$

Dies ergibt, in die Formel (15) eingesetzt,

$$(18) \quad P_k = 2EJk^3 = 2\sqrt{\frac{\beta}{EJ}} \cdot EJ = \frac{2EJ\pi^2}{s^2}.$$

Nimmt man statt einer Ausbiegung nach einer Sinussoide einen allgemeinen Ausdruck für die ausgebogene Achse, so ist der entsprechende Wert der längsgerichteten Druckkraft P_1 immer größer als der ermittelte Wert P_k , da

$$P_1 - P_k = \frac{EJ \Sigma A_i^2 \left(\frac{i\pi}{l}\right)^4 + \beta \Sigma A_i^2}{\Sigma A_i^2 \left(\frac{i\pi}{l}\right)^2} - \frac{EJ A_m^2 \left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 + \beta A_m^2}{A_m^2 \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2} > 0 \text{ ist.}$$

Bis jetzt haben wir stillschweigend β positiv angenommen. Ist β negativ, so erhält man den kleinsten Wert für P aus der Formel (14), indem man unter dem Zeichen Σ nur das erste Glied nimmt

$$(19) \quad P_k = \frac{EJ\pi^2}{l^2} + \frac{\beta l^2}{\pi^2}.$$

Diese Formel kann man zur Bestimmung der kritischen Winkelgeschwindigkeit einer Welle, die längsgerichteten Druckkräften unterworfen ist, benutzen. Bezeichnet μ die Masse einer Längeneinheit der Welle, so muß man in die Formel (19) statt β den Ausdruck $-\mu \Omega^2$ einsetzen, wo Ω die Winkelgeschwindigkeit ist. Dann erhält man:

$$P_k = \frac{EJ\pi^2}{l^2} - \mu \Omega^2 \frac{l^2}{\pi^2}.$$

Die Ausknickung der Welle ohne Vorhandensein einer längsgerichteten Druckkraft ist nur dann möglich, wenn

$$\frac{EJ\pi^2}{l^2} = \mu \Omega^2 \frac{l^2}{\pi^2} \text{ ist.}$$

Aus dieser Gleichung folgt die Formel für die kritische Winkelgeschwindigkeit:

$$(20) \quad \Omega_k = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}}$$

d. h. die kritische Winkelgeschwindigkeit ist der Frequenz der Querschwingungen der Welle gleich.

Wirkt statt einer Druckkraft eine längsgerichtete Zugkraft, so nimmt die kritische Winkelgeschwindigkeit zu.

Die Formeln (17) und (18) kann man zur Berechnung von zusammengelöteten Schienen benutzen (die längsgerichtete Druckkraft kommt bei ihnen bei Temperaturerhöhung zum Vorschein) und zur Berechnung von gedrückten Stäben, die auf elastischen Stützen ruhen.

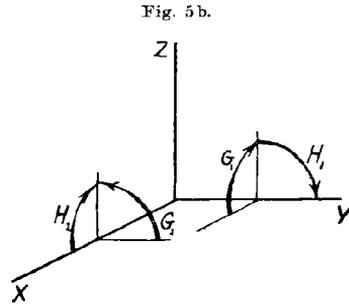
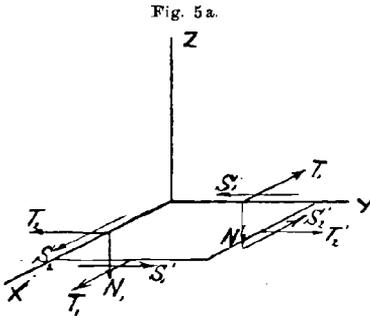
II. Über die Knicksicherheit einer rechteckigen Platte, die in ihrer Mittelebene auf Druck beansprucht ist.¹⁾

§ 4. Die Differentialgleichung des Problems.

So lange die Druckkräfte klein sind, ist die ebene Form der Platte die einzige und folglich auch die stabile Gleichgewichtsform. Bei Zunahme der Druckkräfte kann man die Grenze erreichen, bei der außer der ebenen noch eine gebogene Gleichgewichtsform der Platte möglich wird. Die Größe der Knicklast werden wir mit Hilfe der Differentialgleichung der gebogenen Platte bestimmen. Die Mittelebene der Platte nehmen wir als xy -Ebene. Die Achsen x und y richten wir so ein, daß die Ränder der Platten durch die Geraden $x = 0$; $x = a$; $y = 0$;

1) Die in § 6 und 7 enthaltenen Ergebnisse decken sich im wesentlichen mit denen, die Herr Prof. Reißner, natürlich unabhängig von den dieser Abhandlung zugrunde liegenden russischen Arbeiten, in Nr. 14 des Zentralblatts der Bauverwaltung von 1909 abgeleitet hat.

$y = b$ bestimmt sind. Es sind: T, S und N die Spannungsergebnisse (Fig. 5a), G und H die Spannungsmomente (Fig. 5b). (Die Bezeichnungen



s. Love, Elastizität). Bezeichnet man durch w die Durchbiegung der Platte und durch $C = \frac{E\delta^3}{12(1-\sigma^2)}$ den Plattenmodul (cylindrical rigidity), wobei δ die Plattendicke und σ das Poissonsche Verhältnis ist, so erhält man für die Spannungsmomente folgende Werte:

$$G_1 = -C \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \quad G_2 = -C \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$H_1 = -H_2 = C(1 - \sigma) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Für den Gleichgewichtszustand bestehen folgende Gleichungen:

$$(1) \begin{cases} \frac{\partial T_1}{\partial x} - \frac{\partial S_2}{\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} N_1 - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} N_2 + X' = 0 \\ \frac{\partial S_1}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} N_1 - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} N_2 + Y' = 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} - \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} T_1 + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} S_2 \right) + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} S_1 + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} T_2 \right) + Z' = 0. \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \frac{\partial H_1}{\partial x} - \frac{\partial G_2}{\partial y} + N_2 = 0 \\ \frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial H_2}{\partial y} - N_1 = 0. \\ G_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - G_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + H_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + H_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + S_1 + S_2 = 0. \end{cases}$$

Streichen wir die Produkte der Differentialquotienten von w , so erhalten wir aus den Gleichungen des Systems (2):

$$(3) \begin{cases} S_1 = -S_2 \\ N_1 = -C \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ N_2 = -C \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \end{cases}$$

Die ersten zwei Gleichungen des Systems (1) werden angenähert befriedigt, wenn man setzt:

$$(4) \quad S_1 = S_2 = T_2 = 0.$$

Was T_1 betrifft, so werden wir die Aufgabe unter der Annahme betrachten; daß

$$(5) \quad T_1 = \text{const} = -P. \quad X' = Y' = Z' = 0.$$

Die Platte wird dann durch Kräfte gedrückt, die gleichmäßig auf die Seiten $x = 0$ und $x = a$ verteilt sind. Setzt man die Werte von N_1 und N_2 (3) in die dritte Gleichung des Systems (1) ein, so erhält man mit Rücksicht auf (4) und (5) die folgende Gleichung:

$$(6) \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{T_1}{C} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

Zur Bestimmung der Knicklast muß die Gleichung (6) gelöst werden.

Wir werden folgende Verhältnisse am Rande unterscheiden:

I. Auf dem gestützten Rande:

$$(7) \quad \begin{cases} w = 0 \\ G_1 = -C \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0. \end{cases}$$

Der Rand ist der Y -Achse parallel.

II. Auf dem geklemmten Rande:

$$(8) \quad \begin{cases} w = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Der Rand ist der Y -Achse parallel.

III. Auf dem freien Rande:

$$(9) \quad \begin{cases} G_2 = -C \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0. \\ N_2 + \frac{\partial H_2}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Der Rand ist der X -Achse parallel.

Die letzte Bedingung kann man auf Grund der ersten Gleichung des Systems (2) durch die folgende ersetzen:

$$(9') \quad \frac{\partial G_2}{\partial y} + \frac{2 \partial H_2}{\partial x} = 0.$$

§ 5. Die Platte sei auf den sämtlichen Rändern gestützt und die Druckkräfte $P = -T_1$ seien gleichmäßig auf den Seiten $x = 0$ und $x = a^1$ verteilt.

1) P. Bryan, Proc. Lond. Math. Soc. Vol. XXII S. 54.

Die Gleichung (6) läßt sich dann so schreiben:

$$(6') \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{P}{C} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

Die Bedingungen auf der Peripherie der Platte werden befriedigt, wenn

$$y = A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}$$

gesetzt wird.

Dies ergibt, in die Gleichung (6') eingesetzt:

$$(10) \quad P = C\pi^2 \frac{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2}{\frac{m^2}{a^2}}.$$

Von praktischer Wichtigkeit ist es das kleinste P zu finden, bei welchem das Ausbeulen möglich wird. Dazu muß man natürlich $n = 1$ setzen; was den Wert von m anbetrifft, so wird er mit Hilfe folgender Betrachtungen ermittelt. Wir nehmen an, daß bei einiger Länge die erste ausgebeulte Gleichgewichtsform der Platte aus m Halbwellen besteht. Vergrößert man die Länge a , so kann man eine Grenze erreichen, bei welcher die Platte auf m und auf $m + 1$ Halbwellen sich verteilen kann. Die Länge der Platte, die diesem Grenzzustande entspricht, wird aus der folgenden Gleichung bestimmt:

$$\frac{\left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2}\right)^2}{\frac{m^2 \pi^2}{a^2}} = \frac{\left[\frac{(m+1)^2 \pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2}\right]^2}{\frac{(m+1)^2 \pi^2}{a^2}}$$

woraus:

$$a = b\sqrt{m(m+1)}.$$

Diese Formel bestimmt die größte Länge, bei welcher die erste ausgebeulte Form aus m Halbwellen besteht. Eine Halbwellen werden wir haben, wenn die Länge in den Grenzen: $a = 0$ bis $a = b\sqrt{2}$; zwei Halbwellen, wenn $a = b\sqrt{2}$ bis $a = b\sqrt{6}$ usw.

Ist die Länge der Platte groß, so ist auch m groß, und man kann darum mit genügender Genauigkeit setzen:

$$a = bm.$$

Die Platte strebt, beim Ausbeulen sich in Quadrate zu verteilen. Die Knicklast wird aus der Gleichung (10) bestimmt, wenn man $a = bm$ und $n = 1$ nimmt:

$$(11) \quad P_k = \frac{4C\pi^2}{b^2}.$$

Die dieser Knicklast entsprechende Spannung ist:

$$(11)' \quad p_k = \frac{P_k}{\delta} = \frac{E\pi^2}{3(1-\sigma^2)} \cdot \frac{\delta^2}{b^2}.$$

In eben solchen Verhältnissen wie die untersuchte Platte werden sich auch die Seiten eines Rohres mit quadratischem Querschnitte befinden. S. Fig. 6.

Es ist interessant, für ein langes Rohr dasjenige Verhältnis zwischen der Wandstärke δ und Rohrweite b zu bestimmen, bei welchem das Ausbeulen der Wände früher als die Knickung des Rohres wie eines Stabes anfängt. Die Eulersche Knicklast für einen Stab mit quadratischem Querschnitt von der Länge l ist:

$$P_e = \frac{E\pi^2}{l^2} \cdot J = \frac{E\pi^2}{l^2} \cdot \frac{2}{3} \delta b^3.$$

Die entsprechende Spannung ist:

$$p_e = \frac{P_e}{4b\delta} = \frac{E\pi^2}{l^2} \cdot \frac{b^2}{6}.$$

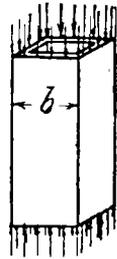
Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem früher gefundenen (11)', so erhält man:

$$\frac{\delta}{b} = \frac{b}{l} \sqrt{\frac{1}{2}(1-\sigma^2)}.$$

Ist $\frac{\delta}{b} < \frac{b}{l} \sqrt{\frac{1}{2}(1-\sigma^2)}$, so tritt das Ausbeulen der Rohrwände früher ein, als die Ausknickung der Rohrachse.

Wünscht man die Stabilität des Rohres mit Hilfe von Querdiaaphragmen zu vergrößern, so ist es am zweckmäßigsten, den Abstand zwischen denselben $h = b\sqrt{2}$ zu machen.

Fig. 6.



§ 6. Drei Ränder der Platte sind gestützt, und die Druckkräfte sind dem freien Rande parallel.

Die Ränder $x=0$, $x=a$ und $y=0$ seien gestützt, der Rand $y=b$ sei frei. Die Platte sei auf den Seiten $x=0$ und $x=a$ durch gleichverteilte Kräfte gedrückt. Die Gleichung (6) ist auch für diesen Fall anzuwenden.

Die Randbedingungen sind;

$$(I \text{ u. II}) \quad w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{bei } x = 0 \text{ und } x = a$$

$$(III \text{ u. IV}) \quad w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{bei } y = 0$$

$$(V \text{ u. VI}) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + 2(1-\sigma) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} = 0 \quad \text{bei } y = b.$$

Den Bedingungen I, II genügen wie durch den Ansatz:

$$(12) \quad w = A \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot f(y).$$

Aus der Gleichung (6)' erhält man zur Bestimmung von $f(y)$:

$$(13) \quad f^{IV}(y) - 2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 f''(y) + \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 - \frac{P}{C} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right] f(y) = 0.$$

Die willkürlichen Konstanten in dem allgemeinen Integrale dieser Gleichung:

$$(14) \quad f(y) = C_1 e^{-\alpha y} + C_2 e^{\alpha y} + C_3 \cos \beta y + C_4 \sin \beta y$$

bestimmt man aus den Bedingungen (III, IV) u. (V, VI) auf den Rändern $y = 0$ und $y = b$.

Die Bedingungen III u. IV liefern:

$$C_3 = 0; \quad C_1 = -C_2.$$

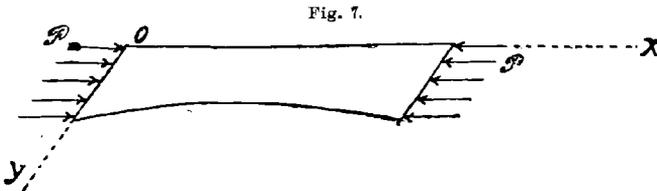
Folglich:

$$f(y) = A \sinh \alpha y + B \sin \beta y.$$

Aus den Bedingungen V u. VI erhält man folgende Gleichungen:

$$(15) \quad \begin{aligned} A \left[\alpha^2 - \sigma \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \right] \sinh \alpha b - B \left[\beta^2 + \sigma \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \right] \sin \beta b &= 0 \\ A \alpha \left[\alpha^2 - 2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \sigma \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \right] \cosh \alpha b \\ - B \beta \left[\beta^2 + 2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \sigma \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \right] \cos \beta b &= 0. \end{aligned}$$

Die Gleichungen werden befriedigt, wenn man $A = B = 0$ setzt; es ist aber in diesem Falle $f(y) = 0$ auf der ganzen Platte, und wir erhalten



eine ebene Gleichgewichtsform. Damit das Ausbeulen möglich wird, muß die Determinante der Gleichungen (15) gleich Null sein, d. h. es muß die folgende Gleichung bestehen:

$$(16) \quad \beta \left[\alpha^2 - \sigma \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \right] \operatorname{tgh} \alpha b = \alpha \left[\beta + \sigma \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \right]^2 \operatorname{tg} \beta b.$$

Die Berechnung zeigt, daß der kleinste Wert der Druckkraft, bei welcher das Ausbeulen stattfinden kann, dann erhalten wird, wenn $m = 1$ ist, d. h. wenn die ausgebeulte Platte eine auf Fig. 7 dargestellte Form hat. Setzt man in die Gleichung (16) statt α und β ihre Werte bei der Annahme $m = 1$ und bezeichnet man

$$(17) \quad U = \frac{Pb^3}{C} \quad \text{und} \quad V = \frac{\pi^2 b^3}{a^2},$$

so erhält man folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\sqrt{UV} - V} [(1 - \sigma)V + \sqrt{UV}]^2 \operatorname{tgh}(\sqrt{\sqrt{UV} + V}) = \\ & = \sqrt{\sqrt{UV} + V} [\sqrt{UV} - (1 - \sigma)V]^2 \operatorname{tg}(\sqrt{\sqrt{UV} - V}). \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung erhält man bei Annahme von beliebigen Werten für V , d. h. von beliebigen Verhältnissen zwischen a und b , verschiedene Werte für U , und folglich für p_k :

$$(18) \quad p_k = \frac{P_k}{\delta} = U \frac{E}{12(1 - \sigma^2)} \cdot \frac{\delta^2}{b^2}.$$

Die kritische Spannung bei einem und demselben Verhältnisse $\frac{a}{b}$ ist dem Verhältnisse $(\frac{\delta}{b})^2$ proportional. In der weiter folgenden Tabelle A sind die Werte von U und p_k bei der Annahme $\frac{\delta}{b} = 0,01$ berechnet; bei einem anderen Verhältnisse zwischen Breite und Dicke sind die angegebenen Werte der Tabelle für p_k mit dem Faktor $\frac{100^2 \delta^2}{b^2}$ zu multiplizieren.

Tabelle A.

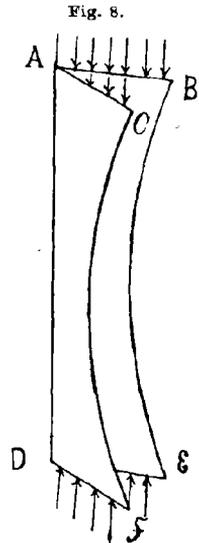
$\frac{a}{b}$	U	$\frac{p_k}{\delta} = 100$	$\frac{a}{b}$	U	$\frac{p_k}{\delta} = 100$
1	14,21	252,6 kg/cm ²	2,5	6,02	107,0 kg/cm ²
1,2	11,20	199,1 „	3	5,56	98,9 „
1,4	9,40	167,1 „	4	5,09	90,5 „
1,6	8,24	146,5 „	5	4,88	86,8 „
1,8	7,45	132,5 „	8	4,64	82,5 „
2	6,89	122,5 „	10	4,59	81,6 „

Mit Zunahme der Plattenlänge nimmt das Verhältnis $\frac{b}{a}$ ab, und die Größe U strebt dem Grenzwert 4,5 zu. Diesen Grenzwert erhält man leicht aus der Gleichung (16). Den Wert von U kann man mit genügender Genauigkeit mittels folgender Formel bekommen:

$$U = V + 4,5.$$

Die Seiten eines gedrückten Winkeleisens befinden sich in ebensolchen Verhältnissen, wie die oben untersuchte Platte, wenn die Ränder AC , AB , DE und DF (Fig. 8) drehbar befestigt sind.

Es ist leicht, das Verhältnis zwischen der Länge l und den Dimensionen b und δ aufzustellen, bei welchem der Widerstand der Winkel-



seiten gegen Ausbeulen gleich dem Widerstande des ganzen Winkels gegen Ausknickung ist.

$$P_e = \frac{E\pi^2}{l^2} \cdot \frac{\delta b^3}{12} \quad (\text{Eulersche Knicklast})$$

$$p_e = \frac{P_e}{2b\delta} = \frac{E\pi^2}{l^2} \cdot \frac{b^2}{24}$$

Setzt man den Wert von p_e gleich dem Wert von p_k , den man aus der Gleichung (18) bei Annahme $U = 4,5$ bestimmt, so folgt:

$$\frac{b}{\delta} = \frac{l}{b}.$$

§ 7. Die Ränder $x = 0$ und $x = a$ seien gestützt, der Rand $y = 0$ geklemmt, der Rand $y = b$ frei.

Die Druckkräfte $T_1 = -P$ sind gleichmäßig auf die Ränder $x = 0$ und $x = a$ verteilt. Die Grundgleichung und die Bedingungen I, II auf den Rändern $x = 0$ und $x = a$ und (V, VI) auf dem Rande $y = b$ bleiben dieselben; für den Rand $y = 0$ muß man setzen: $w = 0$ und $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$. Nimmt man den früheren Ausdruck für w , so erhält man auf Grund der oben angegebenen Bedingungen auf dem Rande $y = 0$ für die willkürlichen Konstanten des allgemeinen Integrals (14):

$$C_1 = -\frac{\alpha C_3 + \beta C_4}{2\alpha}; \quad C_2 = -\frac{\alpha C_3 - \beta C_4}{2\alpha};$$

Die Funktion $f(y)$ kann man in folgender Form ausdrücken:

$$f(y) = A(\cos \beta y - \cosh \alpha y) + B\left(\sin \beta y - \frac{\beta}{\alpha} \sinh \alpha y\right).$$

Aus den Bedingungen V und VI auf dem Rande $y = b$ folgen die Gleichungen:

$$A \left\{ \left[\beta^2 + \sigma \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right] \cos \beta b + \left[\alpha^2 - \sigma \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right] \cosh \alpha b \right\}$$

$$+ B \left\{ \left[\beta^2 + \sigma \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right] \sin \beta b + \frac{\beta}{\alpha} \left[\alpha^2 - \sigma \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right] \sinh \alpha b \right\} = 0,$$

$$A \left\{ -b \left[\alpha^2 - \sigma \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right] \sin \beta b + \alpha \left[\beta^2 + \sigma \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right] \sinh \alpha b \right\}$$

$$+ B \left\{ \beta \left[\alpha^2 - \sigma \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right] \cos \beta b + \beta \left[\beta^2 + \sigma \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right] \cosh \alpha b \right\} = 0.$$

Damit die ausgebeulte Gleichgewichtsform der Platte möglich ist, muß die Determinante dieser Gleichungen gleich Null sein, und das ist eben die für uns nötige Bedingung zur Ermittlung des kritischen Wertes der Druckkraft. Ist $t = \beta^2 + \sigma \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2$ und $s = \alpha^2 - \sigma \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2$, so kann die Determinante in folgender Form dargestellt werden:

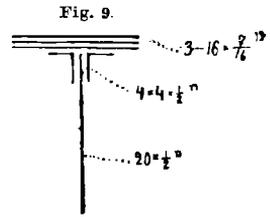
$$(19) \quad 2ts + (s^2 + t^2) \cos \beta b \cosh \alpha b = \frac{\alpha^2 t^2 - \beta^2 s^2}{\alpha \beta} \sin \beta b \sinh \alpha b.$$

Bei $m = 1$ und verschiedenen Werten für das Verhältnis $\frac{b}{a}$ kann man aus der Gleichung (19) die entsprechenden Werte für U , und folglich auch für p_k (S. 349) bestimmen. Eine Reihe von Wurzeln der Gleichung (19) führen wir in der Tabelle B an, ebenso wie die Werte von p_k bei $\frac{\delta}{b} = 0,01$; bei anderen Verhältnissen zwischen der Dicke und Breite der Platte muß man die Zahlen der Tabelle B mit dem Faktor $\frac{100^2 \cdot \delta^2}{b^2}$ multiplizieren.

Tabelle B.

$\frac{a}{b}$	U	$\frac{p_k}{\frac{\delta}{b} = 100}$	$\frac{a}{b}$	U	$\frac{p_k}{\frac{\delta}{b} = 100}$
1	16,76	298,0 kg/cm ²	1,8	13,24	235,4 kg/cm ²
1,1	15,41	274,0 „	1,9	13,43	238,8 „
1,2	14,47	257,3 „	2,0	13,67	243,1 „
1,3	13,88	246,8 „	2,1	14,01	249,1 „
1,4	13,45	239,1 „	2,2	14,35	255,1 „
1,5	13,20	234,7 „	2,3	14,76	262,4 „
1,6	13,13	233,5 „	2,4	15,21	270,4 „
1,635	13,11	233,1 „	—	—	—
1,7	13,15	233,8 „	2,5	15,73	279,7 „

Die Berechnungen zeigten, daß der kleinste Wert der kritischen Spannung dem Verhältnis $\frac{a}{b} = 1,635$ entspricht; daraus folgt, daß eine lange gedrückte Platte in eine solche Anzahl Halbwellen sich zu verteilen strebt, daß das Verhältnis zwischen der Länge einer Halbwelle und der Plattenbreite dem Werte 1,635 möglichst nahe kommt. Das System von Kurven $m = 1, m = 2 \dots$ auf der Zeichnung (Diagramm zur Tabelle B) stellt den Zusammenhang zwischen der Länge einer Halbwelle, der Zahl m und dem Werte von U dar. Die unteren Teile der Kurven m bestimmen den Wert der kritischen Spannung bei beliebigem $\frac{a}{b}$. Aus der Zeichnung ist leicht zu sehen, daß bei Zunahme von $\frac{a}{b}$ der Wert von U sich immer weniger von 13,11 unterscheidet.



In ähnlichen Bedingungen wie die eben betrachtete Platte befindet sich der Steg des T-eisens eines gedrückten Brückengurtes (Fig. 9). Hier ist $\frac{\delta}{b} = \frac{1}{40}$; da die Länge der Platte im Vergleich mit der Breite groß ist, so kann man in diesem Falle für U mit genügender Genauig-

keit 13,11 nehmen. Die kritische Spannung ist also (nach der Tabelle B):

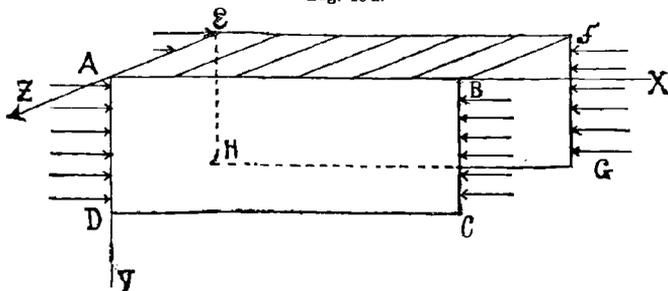
$$p_k = \frac{233 \cdot 100^2 \cdot 1}{40^2} = 1460 \text{ kg/cm}^2.$$

Um den Widerstand gegen das Ausbeulen zu vergrößern, ist es nötig, die Vertikalplatte mittels eines Winkeleisens am freien Rande zu versteifen.

§ 8. Einfluß der elastischen Einklemmung des Randes $y = 0$.

In der vorhergehenden Aufgabe haben wir angenommen, daß der Plattenrand $y = 0$ absolut eingeklemmt ist und darum $(\frac{\partial w}{\partial y})_{y=0} = 0$ ist. In der Praxis aber findet keine absolute Einklemmung statt, sondern etwas Mittleres zwischen gestützter und eingeklemmter Befestigung. Der lange (nicht freie) Plattenrand wird mit Hilfe von Nietreihen an die anderen Teile der Konstruktion angenietet. Eine solche Befestigungsart kann ihrer Natur nach bald gestützt, bald eingeklemmt genannt werden je nach der Steifigkeit der Teile, an welche der Plattenrand angenietet ist. Sind diese Teile sehr

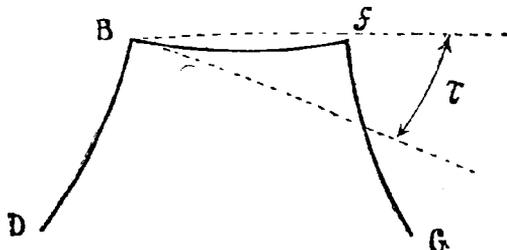
Fig. 10 a.



steif, so kann man

den Rand als eingeklemmt betrachten, sind sie aber nachgiebig, so sind die Eigenschaften dieser Befestigung ungefähr dieselben, wie im Falle eines gestützten Randes. Um den Einfluß des elastischen Einklemmens zu

Fig. 10 b.



berechnen, wollen wir den einfachsten Fall betrachten, wenn beim Ausbeulen der Platte auf dem eingeklemmten Rande ein Moment \mathcal{G}_2 zum Vorschein kommt, das nach dem Gesetze $\mathcal{G}_2 = \alpha \frac{\partial w}{\partial y}$ sich verändert. Dieses kann man sich auf folgende Weise verwirklicht denken.

Zwei Vertikalplatten $ABCD$ und $EFGH$ seien miteinander mittels nebeneinander liegenden Plattenstreifen, die eine Ebene $ABFE$ bilden, verbunden. Die Druckkräfte seien gleichmäßig auf die drehbar befestigten Ränder AD , BC , EH und FG verteilt. Wenn die Druck-

kräfte eine gewisse Grenze überschreiten, so müssen die Vertikalplatten ausbeulen, und der Π -förmige Querschnitt deformiert sich nach Fig. 10b. Auf den Rändern AB und FE der ausgebeulten Vertikalplatten treten Momente G_2 auf, die in jedem Querschnitte dem Winkel φ proportional sind. Bezeichnet d den Abstand zwischen den Vertikalplatten und C' den Plattenmodul der Plattenstreifen, die die Vertikalplatten verbinden, so erhält man für das Moment \mathfrak{G}_2 den Wert:

$$(\mathfrak{G}_2)_{y=0} = -C' \frac{2}{d} \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Zur Bestimmung der kritischen Spannung benutzen wir die Gleichung (6') und den früheren Ausdruck (12) für w .

Die Bedingungen (I u. II) auf den Rändern $x = 0$ und $x = a$ und (V u. VI) auf dem Rande $y = b$ bleiben dieselben wie im § 7. Für den Rand $y = 0$ bestehen die Gleichungen:

$$w = 0 \text{ und } \mathfrak{G}_2 = -C' \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -C' \frac{2}{d} \frac{\partial w}{\partial y},$$

woraus

$$(20) \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{y=0} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=0},$$

wo μ eine Konstante.

Auf Grund der Bedingungen für den Rand $y = 0$ erhalten wir für die willkürlichen Konstanten des allgemeinen Integrals (14) die folgende Beziehung:

$$C_1 = -\frac{C_3(\alpha^2 + \beta^2 + \mu\alpha)}{2\mu\alpha} - \frac{C_4\beta}{2\alpha}$$

$$C_2 = \frac{C_3(\alpha^2 + \beta^2 - \mu\alpha)}{2\mu\alpha} + \frac{C_4\beta}{2\alpha}.$$

Folglich:

$$f(y) = A \left[\cos \beta y - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\mu} \sinh \alpha y - \cosh \alpha y \right] + B \left[\sin \beta y + \frac{\beta}{\alpha} \sinh \alpha y \right].$$

Setzt man $\mu = \infty$, so erhält man für $f(y)$ den Ausdruck des vorhergehenden Paragraphen. Für den freien Rand $y = b$ bestehen zwei folgende Gleichungen:

$$A(t \cos \beta b + s \cosh \alpha b + q s \sinh \alpha b) + B \left(t \sin \beta b + \frac{\beta}{\alpha} s \sinh \alpha b \right) = 0$$

$$A(-\beta s \sin \beta b + \alpha t \sinh \alpha b + q \alpha t \cosh \alpha b) + B(\beta s \cos \beta b + \beta t \cosh \alpha b) = 0.$$

Hiernach bedeutet:

$$t = \beta^2 + \sigma \frac{\pi^2}{\alpha^2}; \quad s = \alpha^2 - \sigma \frac{\pi^2}{\alpha^2}; \quad q = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\mu}.$$

Das Ausbeulen kann nur dann stattfinden, wenn die Determinante dieser Gleichungen gleich Null ist. Diese Bedingung dient zur Bestimmung der kritischen Spannung.

Wir haben eine Reihe von Werten von U für verschiedene Größen des Verhältnisses $\frac{a}{b}$ und für $\mu\beta = 2$ und $\mu\beta = 8$ berechnet. Die Resultate sind in den Tabellen C und D angeführt; es sind dort auch die Werte der kritischen Spannung für den Fall $\frac{\delta}{b} = 0,01$ angegeben. Aus den Tabellen ist zu ersehen, wie mit der Zunahme des Einklemmkoeffizienten μ der Wert von U , und folglich auch von p_k sich den Werten der Tabelle B für die Platte mit absolut eingeklemmtem Rande nähert.

Tabelle C. $\mu b = 2$.

$\frac{a}{b}$	U	$\frac{p_k}{\frac{b}{\delta} = 100}$	$\frac{a}{b}$	U	$\frac{p_k}{\frac{b}{\delta} = 100}$
1	14,75	262,3 kg/cm	2,5	8,93	158,8 kg/cm
1,3	11,12	197,7 „	2,7	9,15	162,7 „
1,5	9,95	176,9 „	2,9	9,45	168,0 „
1,6	9,57	170,2 „	3,0	9,63	171,2 „
1,8	9,08	161,4 „	3,1	9,81	174,4 „
2,0	8,84	157,2 „	3,4	10,69	190,1 „
2,3	8,81	156,6 „	4	12,06	214,4 „

Tabelle D. $\mu b = 8$.

$\frac{a}{b}$	U	$\frac{p_k}{\frac{b}{\delta} = 100}$	$\frac{a}{b}$	U	$\frac{p_k}{\frac{b}{\delta} = 100}$
1	15,57	276,8 kg/cm	2,3	11,63	206,8 kg/cm
1,3	12,31	218,9 „	2,5	12,17	216,4 „
1,5	11,41	202,9 „	2,7	12,83	228,1 „
1,8	10,99	195,4 „	3	14,03	249,5 „
2	11,10	197,4 „	4	19,45	345,8 „

In den eben betrachteten ähnlichen Bedingungen befinden sich die Vertikalplatten des gedrückten Brückengurtes von dem in Fig. 11 dargestellten Querschnitt. Die Länge des Feldes ist $l = 152''$. Die Steifigkeit der Einklemmung ist einerseits von der Steifigkeit der Horizontalplatten, andererseits von der Steifigkeit der Winkeleisen abhängig. Der den Horizontalplatten entsprechende Koeffizient μ' wird auf Grund der Formel (20) bestimmt.

$$\mu' = \frac{C'}{C} \frac{2}{d}$$

Da die Horizontalplatten dieselbe Dicke wie die Vertikalplatten haben, so kann man $C' = 2C$ setzen:

$$\mu' b = 2 \frac{2.18}{10} = \sim 7,2.$$

Die Verbindungswinkelisen vergrößern die Steifigkeit der Einklemmung, da das Ausbeulen der Vertikalplatten von einer Torsion der Winkelisen begleitet ist. Die Momente \mathcal{G}_2 , die von der Steifigkeit der Winkelisen abhängen, sind $\frac{\partial w}{\partial y}$ proportional. In der Tat, die Torsion des Winkelisens in einem beliebigen Querschnitte wird durch die Formel

$$T = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{y=0}$$

bestimmt.

T ändert sich je nach der Länge des Winkelisens; diese Änderung ist durch das Vorhandensein der Momente \mathcal{G}_2 bedingt.

Ist K die Drillingssteifigkeit des Winkels, so ist

$$\mathcal{G}_2 = K \frac{\partial T}{\partial x} = K \left[\frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]_{y=0} = -K \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Der durch die Steifigkeit der Winkel bedingte Einklemmkoeffizient wird also:

$$(20) \quad \mu_2 = \frac{K m^2 \pi^2}{C a^2}.$$

Nach der Annäherungsformel von S. Venant erhält man bei der Annahme, daß die Vertikalplatten beim Ausbeulen in 4 Halbwellen sich verteilen:

$$\mu'' = \frac{2,33}{b}.$$

Der gesamte Einklemmkoeffizient ist

$$\mu = \mu' + \mu'' = \frac{9,5}{b}.$$

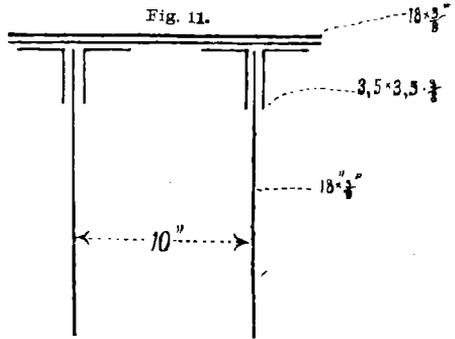
Aus der Tabelle D entnehmen wir für

$$\frac{a}{b} = \frac{152}{41,8} = 2,1$$

$$U = 11,3$$

$$p_k = \frac{200 \cdot 100^2 \cdot 3^2}{(8 \cdot 18)^2} = \sim 870 \text{ kg/cm}^2.$$

Der wahre Wert von p_k ist etwas größer, weil die Tabelle D für $\mu b = 8$ berechnet ist.



§. 9. Die Ränder $x = 0$ und $x = a$ sind gestützt; $y = 0$ und $y = b$ seien eingeklemmt.

Die Druckkräfte $T_1 = -P$ seien gleichmäßig auf die Ränder $x = 0$ und $x = a$ verteilt.

Die Gleichung (6') findet auch in diesem Falle Verwendung; die Bedingungen auf den Rändern $x = 0$ und $x = a$ bleiben die früheren. Was die Ränder $y = 0$ und $y = b$ betrifft, so gilt dafür:

$$w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Zur Bestimmung der kritischen Spannung müssen die Wurzeln der transzendenten Gleichung:

$$(22) (\cos \beta b - \cosh \alpha b)^2 = - \left(\sin \beta b - \frac{\beta}{\alpha} \sinh \alpha b \right) \left(\sin \beta b + \frac{\alpha}{\beta} \sinh \alpha b \right)$$

ermittelt werden.

Wir haben eine Anzahl von Wurzeln für verschiedene Werte von $\frac{a}{b}$ ermittelt; sie sind in der Tabelle E angeführt; es sind dort auch die Werte von p_k bei dem Verhältnisse $\frac{\delta}{b} = 0,01$ angegeben:

Tabelle E.

$\frac{a}{b}$	U	p_k $\frac{b}{\delta} = 109$ $E = 2,10^6$	$\frac{a}{b}$	U	p_k $\frac{b}{\delta} = 100$ $E = 2,10^6$
0,4	93,2	1657 kg/cm	0,8	72,0	1280 kg/cm
0,5	75,9	1350 „	0,9	77,3	1374 „
0,6	69,6	1237 „	1,0	84,6	1504 „
0,7	69,1	1229 „	1,5	141	2507 „

Aus der Tabelle ist ersichtlich, daß das ungünstigste Verhältnis zwischen den Dimensionen einer Platte zwischen den Grenzwerten 0,6 und 0,7 von $\frac{a}{b}$;

$$(23) \quad 0,6 < \frac{a}{b} < 0,7$$

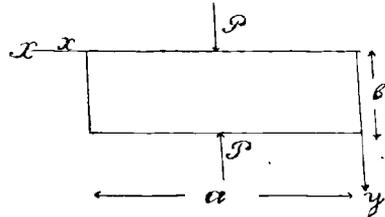
liegt. Beim Ausbeulen langer gedrückter Platten werden die Platten sich augenscheinlich in Halbwellen verteilen, die die Bedingung (23) befriedigen werden. Die kritische Spannung kann mit genügender Genauigkeit erhalten werden, wenn $u = \sim 69$ gesetzt wird.

§ 10. Stabilität einer rechteckigen Platte, die durch einzelne Kräfte gedrückt wird.

Wir haben bereits einige Fälle des Ausbeulens rechteckiger Platten unter Einwirkung von gleichmäßig auf die Ränder verteilten Kräften untersucht. Wird aber die Platte durch einzelne Kräfte gedrückt, so ist die Aufgabe viel komplizierter, da die Spannungsresultanten für verschiedene Punkte der Platte nicht konstant bleiben und die Gleichung (6) variable Koeffizienten haben wird. Hier wollen wir eine annähernde Lösung für einen speziellen Fall, den Professor A. Sommerfeld¹⁾ untersucht hat, anführen.

Eine rechteckige auf den Rändern gestützte Platte sei durch 2 entgegengesetzte, in den Mitten der langen Seiten angreifenden Kräfte P gedrückt. Sobald die Kräfte P eine gewisse Grenze erreichen, so hört die ebene Gleichgewichtsform der Platte auf stabil zu sein, die Platte beult aus. Die Größe der Knicklast kann aus folgenden Betrachtungen annähernd ermittelt werden. Beim Ausbeulen der Platte werden sich die Angriffspunkte der Kräfte P ein wenig nähern, und folglich werden die Kräfte P eine gewisse Arbeit leisten.

Fig. 12.



Zur gleichen Zeit wird sich auch die Größe der potentiellen Energie der deformierten Platte ändern. Diese Änderung wird hauptsächlich in der Energie der Biegung bestehen. Setzt man die Arbeit der Kräfte P der Energie der Biegung der ausgebeulten Platte gleich, so erhält man die Gleichung zur Bestimmung von P_k . Bestände die Änderung der potentiellen Energie der Platte ausschließlich in der Energie der Biegung, so wäre der auf solchem Wege bestimmte Wert von P_k vollständig genau. In Wirklichkeit aber ist die Aufgabe viel komplizierter, da außer der Biegung das Ausbeulen der Platte von Dehnungsänderungen begleitet wird.

Die Bedingungen auf den gestützten Rändern werden durch die Annahme befriedigt:

$$(A) \quad w = \sin \frac{\pi y}{b} \sum_{m=1, 3, 5, \dots} A_m \sin \frac{m \pi x}{a}.$$

Die potentielle Biegungsenergie der ausgebeulten Platte ist:

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} V &= \frac{1}{2} C \iint \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1 - \sigma) \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy \\ &= \frac{a b}{8} C \sum A_m^2 \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right)^2. \end{aligned} \right.$$

1) Z. f. Math. u. Phys. 1906, Bd. 54, „Über die Knicksicherheit der Stege von Walzwerkprofilen.“

Die gegenseitige Annäherung δb der Angriffspunkte der Kräfte P wird aus folgender Formel bestimmt:

$$\delta b = \frac{1}{2} \int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{x=\frac{a}{2}}^2 dy = \frac{\pi^2}{4b} (A_1 - A_3 + A_5 - \dots)^2.$$

Die dieser Annäherung entsprechende Arbeit ist:

$$\frac{P\pi^2}{4b} (A_1 - A_3 + A_5 - \dots)^2.$$

Wird diese Arbeit der potentiellen Biegungsenergie (24) gleichgesetzt, so erhält man die Gleichung zur Bestimmung der Knicklast P :

$$(25) \quad \frac{P\pi^2}{4b} (A_1 - A_3 + A_5 - \dots)^2 = \frac{\pi^4 ab C}{8} \sum A_m^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2.$$

Hieraus folgt:

$$(26) \quad P_k = \frac{C\pi^2 ab^3}{2} \frac{\sum \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 A_m^2}{(A_1 - A_3 + A_5 - \dots)^2}.$$

Damit dieser Ausdruck ein Minimum wird, muß ein beliebiger Koeffizient A_m die Form haben:

$$(27) \quad A_m = (-1)^{m-1} \frac{\sum A_n^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2}{(A_1 - A_3 + A_5 - \dots) \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2}.$$

Wird der Wert von A_m (27) in den Ausdruck (26) eingesetzt, so ist die Knicklast:

$$P_k = \frac{C\pi^2 ab^3}{2} \cdot \frac{1}{\sum \frac{1}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2}}.$$

Es bezeichne μ das Verhältnis der Länge der Platte zu ihrer Breite:

$$\mu = \frac{a}{b}.$$

Es ist dann

$$(28) \quad P_k = \frac{C\pi^2}{2b} \frac{1}{\sum_{m=1,3,5,\dots} \mu^2 \left(\frac{1}{\mu^2} + m^2 \right)^2}.$$

Zur Ermittlung der Knicklast muß man also die Summe der unendlichen Reihe im Nenner bestimmen.¹⁾

Wir wollen $\cosh \frac{\pi z}{2}$ in ein unendliches Produkt zerlegen:

$$\frac{e^{\frac{\pi z}{2}} + e^{-\frac{\pi z}{2}}}{2} = (1 + z^2) \left(1 + \frac{z^2}{9} \right) \left(1 + \frac{z^2}{25} \right) \dots$$

1) Das Summierungsverfahren ist mir von Herrn Prof. W. P. Ermakow angegeben worden.

Nach Logarithmierung dieses Ausdruckes und Differenzierung folgt:

$$(29) \quad \frac{\pi}{4} \operatorname{tgh} \frac{\pi z}{2} = z \left(\frac{1}{1+z^2} + \frac{1}{9+z^2} + \frac{1}{25+z^2} + \dots \right) = z \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{1}{m^2+z^2}.$$

Durch Differenziation beider Teile dieser Gleichung bekommen wir:

$$\frac{\pi^2}{8} \frac{1}{\cos^2 h \frac{\pi z}{2}} = \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{1}{m^2+z^2} - \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{2z^2}{(m^2+z^2)^2}.$$

Nach Multiplikation mit z und mit Rücksicht auf das Resultat (29) erhält man:

$$(30) \quad z^3 \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{1}{(m^2+z^2)^2} = \frac{\pi}{8} \left(\operatorname{tgh} \frac{\pi z}{2} - \frac{\frac{\pi z}{2}}{\cos^2 h \frac{\pi z}{2}} \right).$$

Mit Hilfe der Tabellen der hyperbolischen Funktionen ist es leicht, mittels der Formel (30) die Werte für P_k bei verschiedenen μ zu berechnen.

Es ist zu bemerken, daß die Summe $\sum_{m=1,3,5,\dots} \mu^3 \frac{1}{(\mu^2+m^2)^2}$ mit der Zunahme der Plattenlänge sehr schnell ihrem Grenzwert $\frac{\pi}{8}$ und die Knicklast ihrem Grenzwert $P_k = \frac{4\pi C}{b}$ sich nähern. (Für $\mu = \frac{a}{b} = 2$ wird die Summe $= 0,973 \frac{\pi}{8}$).

Der nach der Formel (28) berechnete Wert der Knicklast wird vermutlich kleiner, als der wirkliche sein, und der Unterschied zwischen dem berechneten und wirklichen Wert von P_k wird für kürzere Platten erheblicher sein. Wie nahe die erhaltene Formel zur Wirklichkeit ist, kann man nur auf Grund von Versuchen urteilen. (Eine Reihe solcher Versuche ist neuerdings in dem mechanischen Laboratorium der Technischen Hochschule in Kiew vorgenommen worden.)

Wir haben die Aufgabe gelöst, indem für w der Ausdruck (A) angenommen wurde. Nimmt man für w den allgemeinen Ausdruck

$$w = \sum \sum A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}$$

an, so kann man beweisen, daß der kleinste Wert für die Knicklast bei einem bestimmten Werte von n erhalten wird, für $a > b$ ist $n = 1$.

Wir haben alle Plattenränder frei drehbar vorausgesetzt; den Wert der Knicklast kann man auch annähernd berechnen, wenn die längeren Plattenränder eingeklemmt sind. Für diesen Fall ist

$$w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \text{ bei } y = 0 \text{ und bei } y = b.$$

Diese Bedingung wird befriedigt, wenn

$$w = \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right) \sum_{m=1,3,5,\dots} A_m \sin \frac{m\pi x}{a}$$

Die potentielle Biegeenergie wird in diesem Falle:

$$V = \frac{\pi^4 ab C}{8} \sum_{m=1,3,5,\dots} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{4}{b^2}\right)^2 A_m^2$$

Die Annäherung der Druckkräfte beim Ausbeulen der Platte ist:

$$\delta b = \frac{\pi^2}{b} (A_1 - A_3 + A_5 - \dots)^2$$

Setzt man die Arbeit der Kräfte P der potentiellen Biegeenergie gleich, so erhält man die folgende Gleichung:

$$\frac{P\pi^2(A_1 - A_3 + A_5 - \dots)^2}{b} = \frac{\pi^4 ab C}{8} \sum_{m=1,3,5,\dots} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{4}{b^2}\right)^2 A_m^2$$

Das Verhältnis zwischen den einzelnen Koeffizienten A_m bleibt dasselbe und darum

$$P_k = \frac{C\pi^2}{b} \frac{1}{(2\mu)^2} \frac{1}{\sum_{m=1,3,5,\dots} \left[\frac{1}{m^2 + (2\mu)^2}\right]^2}$$

Bei bedeutender Länge ist auf Grund von (30):

$$(31) \quad P_k = \frac{C\pi^2}{b} \cdot \frac{8}{\pi} = \frac{8\pi C}{b}$$

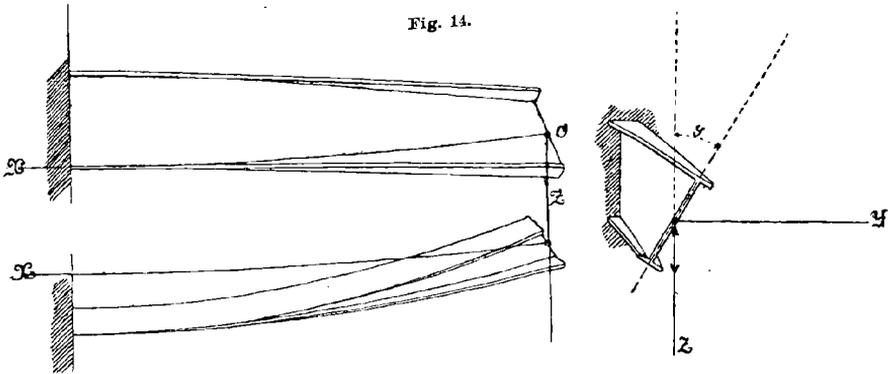
Es ist zu bemerken, daß die Formel (28) vollständig genau wäre, wenn die Druckkräfte nur auf den unendlich schmalen Streifen einwirken würden; die Aufgabe bestände dann darin, die Knicklast für diesen Streifen bei der Bedingung zu bestimmen, daß die ungestrichenen Teile der Platte (Fig. 13) das Ausbeulen des Streifens hindern.

III. Kipperscheinungen des I-Trägers.¹⁾

§ 11. Durch diesen Ausdruck bezeichnet Prof. Prandtl Labilitätserscheinungen, die bei Stäben auftreten, deren Querschnitt zwei sehr verschiedene Hauptträgheitsmomente aufweist, wenn diese Stäbe in der Richtung der größten Steifigkeit biegender Kräften unterworfen sind. Das soll ausdrücken, daß hier mit dem seitlichen Ausweichen des Stabes immer eine Torsion desselben verbunden ist.

1) An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Prandtl für mannigfachen Rat bei der Lösung des Problems der Stabilität des I-Trägers herzlichen Dank ausdrücken.

Prof. Prandtl hat den Wert der Kippplast für einige spezielle Fälle der Kräftewirkung bestimmt; dabei wurde der Stabquerschnitt rechteckig angenommen. Für die Praxis ist es sehr wichtig, die Resultate, die Prof. Prandtl erhalten hat, auf die Doppelträger zu erweitern. Die Doppeltauträger finden oft Verwendung in den Ingenieurbauten, da ihre Querschnittsform betreffs Materialverteilung sehr vorteilhaft ist. Das Bestreben, möglichst große Materialersparnis bei möglichst großer Steifigkeit zu erreichen, führt konsequenter Weise zu Trägern von großer Höhe. Die Gurtungsbreite kann aus konstruktiven Gründen nicht erheblich vergrößert werden und darum erhält man Träger mit großer Steifigkeit in der Vertikalebene und schwache in der zu ihr senkrechten Richtung. Solche Träger können unter Einwirkung von Kräften, die in der Vertikalebene liegen, sich als labil erweisen. Um



das Ausbeulen des Vertikalbleches zu verhüten, verstärkt man es mittels zugenerter Steifigkeitswinkel. Diese Winkel sind aber nicht im Stande das Umkippen des Trägers zu verhüten, wie das aus Fig. 14 ersichtlich ist.

Die Kippung des Trägers ist von Torsion begleitet, und zur Aufstellung der gesuchten Differentialgleichung muß man deshalb zuerst eine Formel ableiten, die den Zusammenhang zwischen dem Drehungswinkel φ und der Größe des Torsionsmomentes M festsetzt.

§ 12. Torsion eines Doppeltauträgers durch ein am Ende angreifendes Moment.

Für einen, von der Einklemmungsstelle weit entfernten Querschnitt ist:

$$(1) \quad M = C \varphi'$$

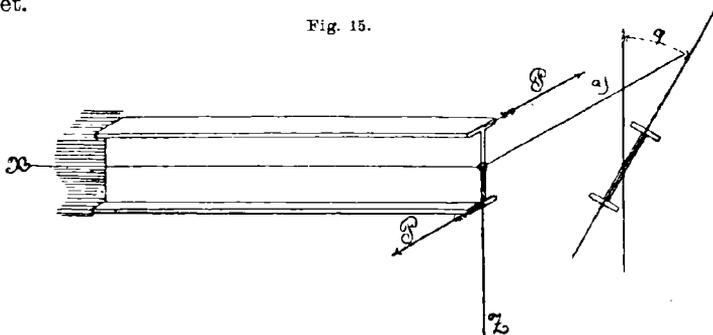
wo C die Drillingssteifigkeit des Balkens bedeutet. Liegt der Querschnitt nahe beim eingeklemmten Ende, so ist für diesen Querschnitt die

Formel (1) nicht anwendbar, da bei der Torsion die Flanschen auch eine Biegung erleiden. Den Einfluß der Biegung kann man auf folgende Weise in Rechnung ziehen. Es sei y die Durchbiegung der Flansche in der zu xy parallelen Ebene (Fig. 15). Dann ist $y = \frac{h}{2} \varphi$ und die Querkraft in einem beliebigen Querschnitte der Flansche wird aus der Formel:

$$(2) \quad Q = \frac{\partial M}{\partial x} = D \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \frac{h}{2} \cdot D \varphi'''$$

berechnet, wo D die Biegesteifigkeit einer Flansche in der xy -Ebene bedeutet.

Fig. 15.



Fügt man zum reinen Torsionsmomente das Moment der Querkräfte Q hinzu, so erhält man für die Bestimmung des Drehwinkels die Gleichung

$$(3) \quad M = -C\varphi' + \frac{Dh^2}{2} \varphi'''.$$

Mit der Bezeichnung:

$$\frac{2C}{Dh^2} = \frac{1}{a^2}$$

und mit Rücksicht auf die Bedingungen an den Balkenenden:

für $x = l$ sind 1) $\varphi = 0$ und 2) $\varphi' = 0$,

für $x = 0$ ist 3) $\varphi'' = 0$

erhält man das Integral der Gleichung (3) in folgender Form:

$$(4) \quad \varphi_x = \frac{M}{C} \left[l - x + \frac{a}{\cosh \frac{l}{a}} \sinh \frac{x}{a} - a \operatorname{tgh} \frac{l}{a} \right].$$

Für $x = 0$ ist:

$$\varphi_0 = \frac{M}{C} \left[l - a \operatorname{tgh} \frac{l}{a} \right].$$

Das zweite Glied in den Klammern gibt den Biegungeinfluß der Flanschen auf die Größe des Torsionswinkels an. Im allgemeinen ist

das Verhältnis $\frac{l}{a}$ bedeutend größer als Eins, man kann also mit genügender Genauigkeit annehmen:

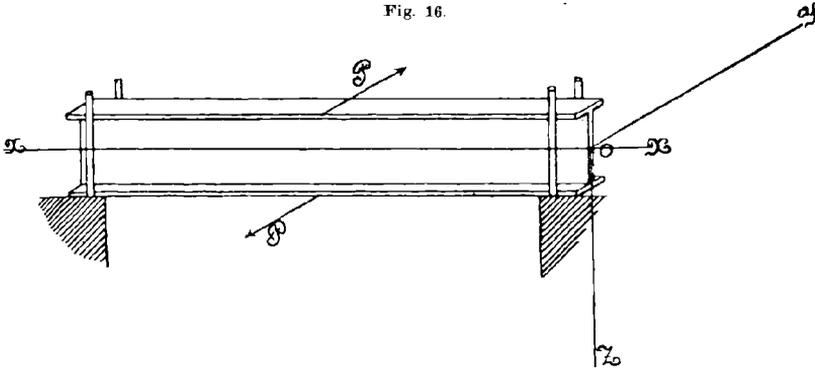
$$(4) \quad \varphi_0 = \frac{M}{C} (l - a).$$

Der Einfluß der Einklemmung eines Endes ist also ein solcher, als ob der Träger statt der Länge l eine Länge $l - a$ hätte. Die Formel (4) wurde durch Versuche geprüft. Zuerst wurde festgestellt, daß zur Bestimmung von C für die Praxis mit genügender Genauigkeit die Formel von S. Venant (Love S. 376):

$$C = \frac{\mu \Omega^4}{4 \pi^2 J}$$

anwendbar ist, wo μ die Steifigkeit, Ω die Querschnittsfläche, J das Trägheitsmoment sind. Um die absolute Einklemmung des Balkenendes

Fig. 16.



während des Versuches zu verwirklichen, wurde der Doppeltauträger durch ein in der Mitte angreifendes Moment gedreht. (Fig. 16.)

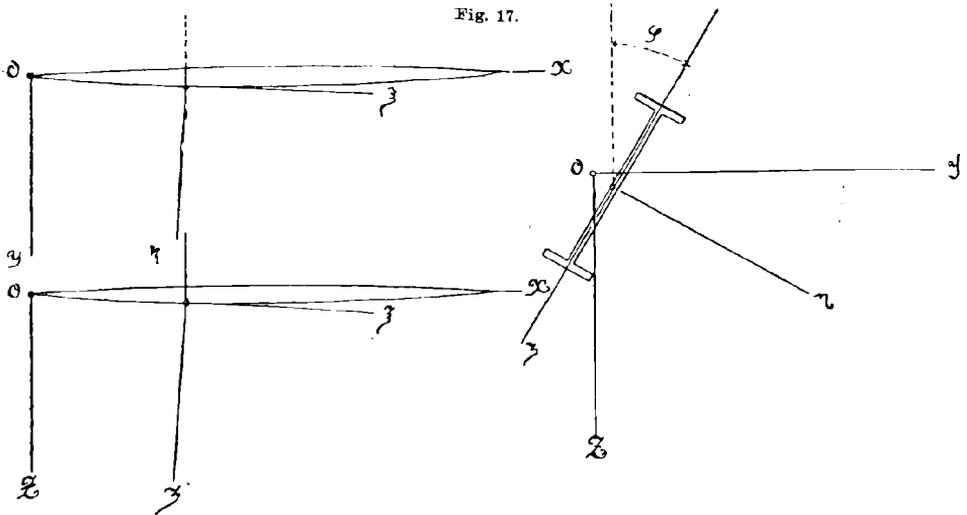
Infolge der Symmetrie bleibt der Querschnitt in der Mitte bei der Torsion eben. Die Torsionswinkel der Querschnitte in verschiedener Entfernung von der Mitte des Balkens werden mittels eines Spiegelapparates gemessen. Die Versuche haben mit genügender Genauigkeit die Formel (4) bestätigt. (Die Abweichung betrug im allgemeinen nicht mehr als 4%).¹⁾

§ 13. Aufstellung der Grundgleichungen.

Verlegen wir den Koordinatenanfang (XYZ) in den Schwerpunkt des Querschnittes im linken Balkenende. Die anfänglich gerade Balkenachse nehmen wir als X -Achse an, die Y - und Z -Achsen richten wir nach der Figur 17.

1) Näheres s. Mitteilungen der Techn. Hochschule in St. Petersburg 1906.

Außer dem unbeweglichen Koordinatensystem (XYZ) nehmen wir noch ein bewegliches Koordinatensystem $(\xi\eta\xi)$. Der Anfangspunkt dieses Systems soll immer mit dem Schwerpunkt eines beliebigen Balkenquerschnittes zusammenfallen, die ξ -Achse sei nach der Tangente zu der ausgebogenen Balkenachse gerichtet. η und ξ fallen mit den Hauptträgheitsachsen des Querschnittes zusammen.



Die Krümmung der Trägerachse in den Ebenen $\xi\eta$ und $\xi\xi$ werden nach den Formeln:

$$\alpha = \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2}; \quad \lambda = \frac{\partial^2 \xi}{\partial \xi^2}$$

bestimmt. Die Krümmung in den Ebenen XY und XZ bei kleinen Deformationen wird aus den Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \varphi,$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \varphi$$

bestimmt.

Bezeichnet man mit M_ξ , M_η , M_ξ die auf die Achsen ξ , η , ξ bezogenen Momente der äußeren Kräfte, die auf den linken Balkenteil einwirken, so erhält man folgende Gleichungen:

$$(5) \quad \begin{aligned} M_\xi &= B_2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} = B_2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \varphi \right), \\ M_\eta &= B_1 \frac{\partial^2 \xi}{\partial \xi^2} = B_1 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \varphi \right), \\ M_\xi &= C\varphi' - \frac{Dh^3}{2} \varphi'''. \end{aligned}$$

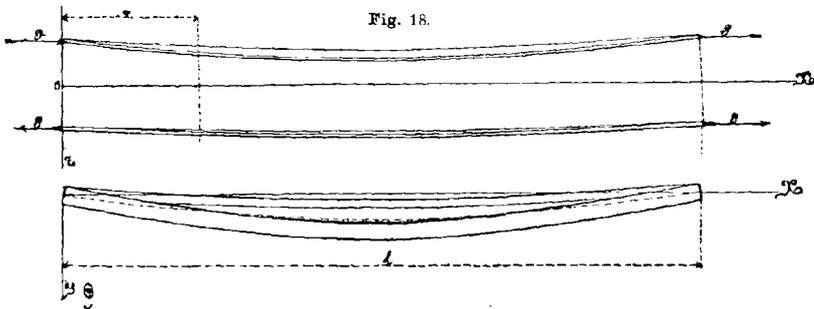
Mit B_1 und B_2 sind hier die Biegesteifigkeit in den Ebenen $\xi\eta$ und $\xi\xi$ bezeichnet. Bei der Ableitung ist angenommen, daß B_2 und C im Vergleich mit B_1 klein sind.

Im folgenden werden wir die Gleichungen (5) benutzen, indem wir statt M_ξ, \dots ihre Werte einsetzen werden.

§ 14. Biegung durch Kräftepaare.

Der Träger sei durch die an den Enden in der XZ -Ebene angreifenden Kräftepaare M (Fig. 18) gebogen.

Die Balkenenden seien so befestigt daß sie um die Achsen η und ξ frei drehbar sind; dann kann man bei Zunahme von M die Grenze erreichen, bei der außer der ebenen Bieungsgleichgewichtsform noch



die gekrümmte Gleichgewichtsform möglich ist, wie aus der Fig. 18 ersichtlich ist. Setzt man in die Gleichungen (5) die folgenden Werte ein:

$$M_\xi = M \frac{\partial y}{\partial x}, \quad M_\eta = M, \quad M_z = -M\varphi,$$

so erhält man folgende Gleichungen:

$$My' = C\varphi' - \frac{Dh^2}{2}\varphi''',$$

$$M\varphi = -B_2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \varphi \right),$$

$$M = -B_1 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \varphi \right).$$

Da das Verhältnis $\frac{B_2}{B_1}$ eine kleine Größe ist, so erhält man mit der Bezeichnung:

$$(6) \quad \frac{2C}{Dh^2} = \frac{1}{a^2}, \quad \frac{2M^2}{DB_2h^2} = \frac{1}{d^4}$$

zur Bestimmung von φ die Differentialgleichung:

$$\varphi^{IV} - \frac{1}{a^2}\varphi^{II} - \frac{1}{d^4}\varphi = 0$$

und daraus:

$$(7) \quad \varphi = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + C e^{\beta x} + D e^{-\beta x},$$

wo

$$\alpha = \sqrt{-\frac{1}{2a^2} + \sqrt{\frac{1}{4a^4} + \frac{1}{d^4}}}; \quad \beta = \sqrt{\frac{1}{2a^2} + \sqrt{\frac{1}{4a^4} + \frac{1}{d^4}}}.$$

Die willkürlichen Konstanten A, B, \dots ergeben sich aus den Bedingungen an den Balkenenden:

$$\text{Für } x = 0 \quad 1) \varphi = 0; \quad 2) \varphi'' = 0$$

$$\text{Für } x = l \quad 3) \varphi = 0; \quad 4) \varphi'' = 0.$$

Aus 1) und 2) folgt:

$$B = 0; \quad C = -D.$$

Aus den Bedingungen 3) und 4) folgen die Gleichungen:

$$A \sin \alpha l + C_1 \sinh \beta l = 0$$

$$-A \alpha^2 \sin \alpha l + C_1 \beta^2 \sinh \beta l = 0.$$

Diese Gleichungen werden befriedigt, wenn

$$A = C_1 = 0$$

gesetzt wird, in diesem Falle wird aber $\varphi = 0$ auf der ganzen Balkenlänge, und man erhält eine ebene Biegungsform. Damit eine gekrümmte Gleichgewichtsform möglich ist, muß die Determinante der oben erwähnten Gleichungen gleich Null sein, oder

$$\sin \alpha l = 0,$$

also $\alpha l = n\pi$, wo n eine ganze Zahl ist. Die erste mögliche gekrümmte Gleichgewichtsform entspricht dem Falle, wo die gekrümmte Balkenachse keinen Wendepunkt hat, d. h. wenn $n = 1$ ist.

Wenn man statt α seinen Wert einsetzt, so erhält man die Gleichung zur Bestimmung des kritischen Wertes des Biegemomentes

$$(8) \quad -\frac{l^2}{2a^2} + \sqrt{\frac{l^4}{4a^4} + \frac{l^4}{d^4}} = \pi^2.$$

Das Verhältnis $\frac{l^2}{a^2}$ ist nur von den Balkenabmessungen und den Elastizitätseigenschaften des Stoffes abhängig und kann für einen gegebenen Träger auf Grund der Gleichungen (6) berechnet werden. (Der Wert von C wird nach der Näherungsformel von S. Venant bestimmt.)

Darauf läßt sich der Wert von $\frac{l^4}{d^4}$, der vom Biegemomente abhängt, und folglich das Biegemoment aus der Gleichung (8) bestimmen.

Setzt man das Verhältnis $\frac{l^4}{a^4} : \frac{l^2}{a^2}$ gleich k^2 , so erhält man auf Grund der Beziehungen (6):

$$(9) \quad M_k = \frac{k \sqrt{B_2 C}}{l}.$$

Zur Bestimmung von M_k ist es bequem, in jedem speziellen Falle die Tabelle A zu benutzen, wo die Werte von K für verschiedene Werte von $\frac{l^2}{a^2}$ angegeben sind.

Tabelle A.

$\frac{l^2}{a^2}$	$\frac{l^4}{a^4}$	k^2	Der Wert p_{krt} bei $\frac{B_2}{B_1}=0,01; \frac{h}{l}=0,1$ $E=2,10^6 \text{ kg/cm}^2$	$\frac{l^2}{a^2}$	$\frac{l^4}{a^4}$	k^2	Der Wert p_{krt} bei $\frac{B_2}{B_1}=0,01; \frac{h}{l}=0,1$ $E=2,10^6 \text{ kg/cm}^2$
0,1	98,4	984	495 kg/cm ²	16	255,3	16,0	800 kg/cm ²
2	117,2	58,6	540 „	20	294,8	14,7	860 „
4	136,9	34,2	585 „	24	334,3	13,9	915 „
6	156,6	26,1	625 „	28	373,8	13,4	965 „
8	176,4	22,1	665 „	32	413,3	12,9	1015 „
10	196,1	19,6	700 „	36	452,7	12,6	1065 „
12	215,9	18,0	735 „	40	492,2	12,3	1110 „

In der Tabelle A sind auch die größten Zug- und Druckspannungen p_k , die M_k entsprechen, angegeben. Diese Spannungen sind für den speziellen Fall berechnet, daß

$$\frac{B_2}{B_1} = 0,01; \frac{h}{l} = 0,1; E = 2,10^6 \text{ kg/cm}^2.$$

Der Wert p_k bei anderen Verhältnissen zwischen den Balkenabmessungen ist leicht zu bestimmen. In der Tat:

$$p_k = \frac{M_k h}{2J_1} = \frac{k \sqrt{E J_2 C}}{2J_1} \cdot \frac{h}{l}.$$

Setzt man statt C seinen Wert aus (6) ein und berücksichtigt man, daß für einen Doppeltautträger annähernd:

$$D = \frac{E J_2}{2} = \frac{B_2}{2} \text{ ist,}$$

so kann man die Formel für p_k in folgender Form darstellen:

$$(10) \quad p_k = \frac{k \cdot E}{4} \cdot \frac{l}{a} \cdot \frac{J_2}{J_1} \left(\frac{h}{l}\right)^2,$$

d. h. für einen bestimmten Wert von $\frac{l}{a}$, und folglich auch von k ist p_k dem Verhältnis $\frac{J_2}{J_1}$ und dem Quadrate des Verhältnisses $\left(\frac{h}{l}\right)$ proportional.

Ist für einen bestimmten Träger: $\frac{J_2}{J_1} = \frac{1}{m}$ und $\left(\frac{h}{l}\right)^2 = \frac{1}{n}$, so erhält man p_k indem man die Zahlen der Tabelle A mit $\frac{100}{m} \cdot \frac{100}{n}$ multipliziert. Es wurde vorausgesetzt, daß die Balkenenden bei der Ausbiegung um die ξ -Achse sich drehen können. Ist das nicht der Fall, so dienen zur Bestimmung der beliebigen Konstanten des allgemeinen Integrals (7) folgende Bedingungen:

$$\text{Für } x = 0 \text{ ist } 1) \varphi = 0; \quad 2) \varphi' = 0.$$

$$\text{Für } x = l \text{ ist } 3) \varphi = 0 \text{ und } 4) \varphi' = 0.$$

Diese Bedingungen bestimmen, wie im vorigen Falle, den Wert von M_k . Die erste gebogene Gleichgewichtsform folgt aus der Gleichung:

$$\alpha l = 2\pi.$$

Jetzt kommen wir zu dem Resultate:

$$M_k = \frac{k\sqrt{B_2 C}}{l}.$$

Eine Reihe von Werten für k' und p'_k sind in der Tabelle B angegeben.

Tabelle B.

$\frac{l^2}{a^2}$	$\frac{l^4}{d^4}$	k'^2	Der Wert p'_k bei $\frac{B_2}{B_1} = 0,01; \frac{h}{l} = 0,1$ $E = 2,10^6 \text{ kg/cm}^2$	$\frac{l^2}{a^2}$	$\frac{l^4}{d^4}$	k'^2	Der Wert p'_k bei $\frac{B_2}{B_1} = 0,01; \frac{h}{l} = 0,1$ $E = 2,10^6 \text{ kg/cm}^2$
0,1	1563	15630	1980 kg/cm ²	14	2112	151	2300 kg/cm ²
1	1598	1598	2000 „	16	2191	138	2345 „
2	1638	819	2025 „	20	2349	117	2425 „
4	1717	429	2070 „	24	2507	104	2505 „
6	1795	299	2120 „	28	2664	95,2	2580 „
8	1874	234	2165 „	32	2822	88,2	2655 „
10	1954	195	2210 „	36	2980	82,8	2730 „
12	2033	169	2255 „	40	3138	78,5	2800 „

Es ist zu bemerken, daß, wenn $D = 0$ gesetzt wird, d. h. wenn ein Balken nur als aus einem Vertikalblech bestehend betrachtet wird, man zur folgenden Gleichung gelangt:

$$\varphi'' + \frac{M^2}{B_2 C} \varphi = 0$$

und der kritische Wert des Biegemomentes durch folgende Formeln bestimmt wird:

$$M_k = \frac{\pi\sqrt{B_2 C}}{l}$$

bei frei drehbaren Enden;

$$M_k = \frac{2\pi\sqrt{B_2 C}}{l}$$

bei eingeklemmten Enden.

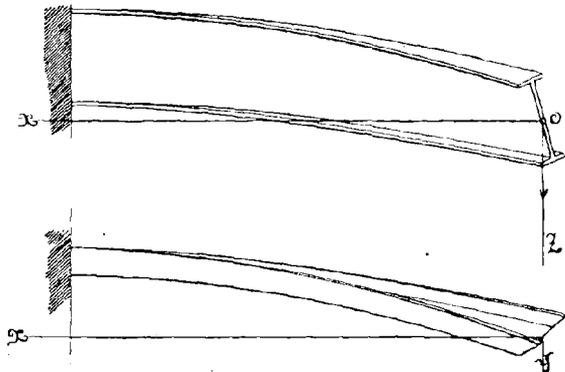
Ebenso einfach, wie bei Biegung durch Kräftepaare, werden Aufgaben über Biegung von Trägern unter Einwirkung von 2 entgegengesetzten Zug- oder Druckkräften parallel der Trägerachse gelöst.

§ 15. Ein Träger, an einem Ende eingeklemmt, ist am anderen Ende durch eine Einzelkraft belastet.

Der Angriffspunkt der Biegekraft P falle mit dem Schwerpunkt des Querschnittes zusammen. Die Kraft wirkt in der Mittelebene des Vertikalbleches und ist senkrecht zur Balkenachse gerichtet. Den Koordinatenanfangspunkt (XYZ) verlegen wir in den Kraftangriffspunkt, die X -Achse sei

nach der geraden Balkenachse und die Z -Achse nach der Kraft P gerichtet. Durch allmähliche Vergrößerung der Kraft P kann man die Grenze erreichen, bei der die ebene Gleichgewichtsform aufhört stabil zu sein, der Balken wird umkippen, wie aus der Fig. 19 ersichtlich ist.

Fig. 79.



Wir nehmen weiter ein bewegliches Koordinatensystem (ξ, η, ζ) an; dann bestehen für einen beliebigen Balkenquerschnitt bei kleinen Krümmungen die Beziehungen:

$$M_\xi = P \left(y - x \frac{\partial y}{\partial x} \right); \quad M_\eta = -Px; \quad M_\zeta = Px\varphi.$$

Dieses ergibt, in die Grundgleichungen (5) eingesetzt:

$$(11) \quad \begin{cases} P \left(x \frac{\partial y}{\partial x} - y \right) = -C\varphi' + \frac{Dh^2}{2} \varphi''' \\ B_2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = Px\varphi \\ B_1 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = Px \end{cases}$$

und daraus erhalten wir die Gleichung zur Bestimmung von φ :

$$(12) \quad \frac{P^2 x^2}{B_2} \varphi = -C\varphi'' + \frac{Dh^2}{2} \varphi''''.$$

Setzt man in dieser Gleichung $D = 0$, d. h. vernachlässigt man die Flanschenbiegung, so kommt man zu der von Prof. Prandtl untersuchten Biegung eines Stabes mit rechteckigem Querschnitte. Wenn man die Gleichung (12) durch den Koeffizienten von φ^{IV} dividiert, erhält man:

$$(12') \quad \varphi^{IV} - \frac{1}{a^2} \varphi^{II} - \frac{x^2}{b^6} \varphi = 0$$

wo

$$(13) \quad \frac{1}{a^2} = \frac{2C}{Dh^2}; \quad \frac{2P^2}{DB_2 h^2} = \frac{1}{b^6}.$$

Die Lösung der Gleichung (12) wollen wir in der Form einer unendlichen Reihe:

$$\varphi = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 \dots$$

durchführen.

Setzt man das in die Gleichung (12'), so kann man den Zusammenhang zwischen den Koeffizienten $A_0, A_1 \dots$ finden und das allgemeine Integral der Gleichung (12') in folgender Form darstellen:

$$(14) \quad \varphi = \varphi_0 [M] + \varphi'_0 x [N] + \frac{1}{2} \varphi''_0 x^2 [Q] + \frac{1}{6} \varphi'''_0 x^3 [P],$$

wo φ_0 der Torsionswinkel ist und die Werte seiner Differentialquotienten für $x = 0$; $[M], [N], \dots$ unendliche, nach zunehmenden Potenzen von x^2 geordnete Reihen sind. Der erste Differentialquotient des Ausdruckes (14) nach x lautet:

$$\varphi' = \frac{1}{x} \varphi_0 [R] + \varphi'_0 [S] + \frac{1}{2} \varphi''_0 x [U] + \frac{1}{6} \varphi'''_0 x^2 [T].$$

Die willkürlichen Konstanten φ_0, φ'_0 werden aus den Bedingungen an den Balkenenden bestimmt.

Da am rechten Balkenende ($x = 0$) kein Moment einwirkt, so folgt:

$$1) \varphi''_0 = 0; \quad 2) -C\varphi'_0 + \frac{Dh^2}{2} \varphi'''_0 = 0.$$

Für das eingeklemmte Balkenende ($x = l$) bestehen die Bedingungen:

$$3) \varphi_l = 0; \quad 4) \varphi'_l = 0.$$

Diese Bedingungen lassen sich mit Rücksicht auf 1) und 2) jetzt so schreiben:

$$(15) \quad \begin{cases} \varphi_0 [M]_l + l \varphi'_0 \left\{ [N]_l + \frac{1}{6} \frac{l^2}{a^2} [P]_l \right\} = 0 \\ \varphi_0 [R]_l + l \varphi'_0 \left\{ [S]_l + \frac{1}{6} \frac{l^2}{a^2} [T]_l \right\} = 0. \end{cases}$$

Die obigen Gleichungen werden befriedigt, wenn $\varphi_0 = \varphi'_0 = 0$ gesetzt wird, dann aber ist $\varphi = 0$ auf der ganzen Balkenlänge, wir erhalten also die ebene Gleichgewichtsform. Damit die gekrümmte Gleichgewichtsform möglich ist, muß die Determinante der Gleichungen (15) gleich Null sein, d. h. es muß sein

$$(16) \quad [M]_i \left\{ [S]_i + \frac{1}{6} \frac{l^2}{a^2} [T]_i \right\} - [R]_i \left\{ [N]_i + \frac{1}{6} \frac{l^2}{a^2} [P]_i \right\} = 0.$$

Es ist zu beachten, daß die unendlichen Reihen $[M]_i, [N]_i, \dots$ nur verschiedene Potenzen der Größen $\frac{l^2}{a^2}$ und $\frac{l^6}{b^6}$ enthalten. Aus der Bezeichnung (13) kann die Größe $\frac{l^2}{a^2}$ für einen gegebenen Träger im voraus berechnet werden. Dann wird die Größe $\frac{l^6}{b^6}$, die von der Biege- kraft P abhängt, und folglich auch der kritische Wert P_k durch Lösung der transzendenten Gleichung (16) bestimmt.

Bezeichnet man

$$\left(\frac{l^6}{b^6}\right) : \left(\frac{l^2}{a^2}\right) = k^2,$$

so folgt mit Rücksicht auf (13):

$$(17) \quad P_k = \frac{k\sqrt{B_2 C}}{l^2}.$$

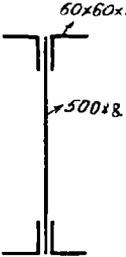
Zur Berechnung von P_k wurde von uns die Tabelle C zusammengestellt, wo für eine Reihe von Werten für $\frac{l^2}{a^2}$ die entsprechenden Werte von k angegeben sind.

Tabelle C.

$\frac{l^2}{a^2}$	$\frac{l^6}{b^6}$	k^2	Der Wert $p_{k,2}$ bei $\frac{B_2}{B_1} = 0,01; \frac{h}{l} = 0,1$ $E = 2,10^8 \text{ kg/cm}^2$	$\frac{l^2}{a^2}$	$\frac{l^6}{b^6}$	k^2	Der Wert p_k bei $\frac{B_2}{B_1} = 0,01; \frac{h}{l} = 0,1$ $E = 2,10^8 \text{ kg/cm}^2$
0,1	196	1960	700 kg/cm ²	10	575	57,5	1200 kg/cm ²
1	247	247	785 "	12	623	51,9	1250 "
2	296	148	860 "	14	678	48,4	1300 "
3	342	114	925 "	16	725	45,3	1345 "
4	381	95,3	975 "	24	918	38,3	1515 "
6	453	75,5	1065 "	32	1100	34,4	1660 "
8	516	64,5	1140 "				

Zahlenbeispiel.

Für den Blechträger von der Länge $l = 5$ m mit dem nebenstehend skizzierten Querschnitte soll mit Hilfe der Tabelle C die kritische Last bestimmt werden:



$J_1 = 27900 \text{ cm}^4; J_2 = 287 \text{ cm}^4; J_p = J_1 + J_2 = 28200 \text{ cm}^4.$
 $\Omega = 76,1 \text{ cm}^2.$
 $C = \frac{\Theta \Omega^2}{40 J_p} = \frac{8 \cdot 10^9 \cdot (76,1)^4 \cdot 1}{40 \cdot 282 \cdot 10^2}.$
 $\frac{l^2}{a^2} = \frac{4 C}{E J^2} \cdot \frac{l^2}{h^2} = 16,5.$
 Für diesen Wert von $\frac{l^2}{a^2}$ gibt die Tabelle C an:

$$p'_k = 1350 \text{ kg/cm}^2.$$

Die kritische Spannung des Trägers ist:

$$p_k = p'_k \cdot 100 \cdot 100 \frac{J_2}{J_1} \left(\frac{h}{l}\right)^2 = \sim 1390 \text{ kg/cm}^2.$$

Außerhalb der Grenzen der Tabelle C kann man die Größe k mit genügender Genauigkeit mit Hilfe der Näherungsformel:

$$(18) \quad k = \frac{4,013}{\left(1 - \frac{a}{l}\right)^2}$$

bestimmen. Diese Formel ist auf folgende Betrachtung gegründet. Für einen Träger mit rechteckigem Querschnitt hat Prof. Prandtl gefunden:

$$k' = 4,013 \quad \text{und} \quad P'_k = \frac{4,013 \sqrt{B_2} C}{l^2}.$$

Um den Einfluß der Flanschensteifigkeit mit in Rechnung zu ziehen, wollen wir die Formel (4') benutzen und statt der wirklichen Balkenlänge l die fiktive Länge $l - a$ einsetzen. Bei dieser Länge wird der Träger mit freien Enden denselben Torsionswinkel haben, wie der an einem Ende eingeklemmte Träger l (s. § 11). Da die Länge in dieser Formel für die kritische Last in der zweiten Potenz vorkommt, so kommen wir also zu der Formel (18). Es ist zu bemerken, daß die Formel (17) nicht anwendbar ist, wenn der Kraftangriffspunkt mit dem Schwerpunkt des Querschnitts nicht zusammenfällt. Beim Erhöhen des Angriffspunktes wird P_k abnehmen, bei seinem Sinken wird P_k zunehmen.

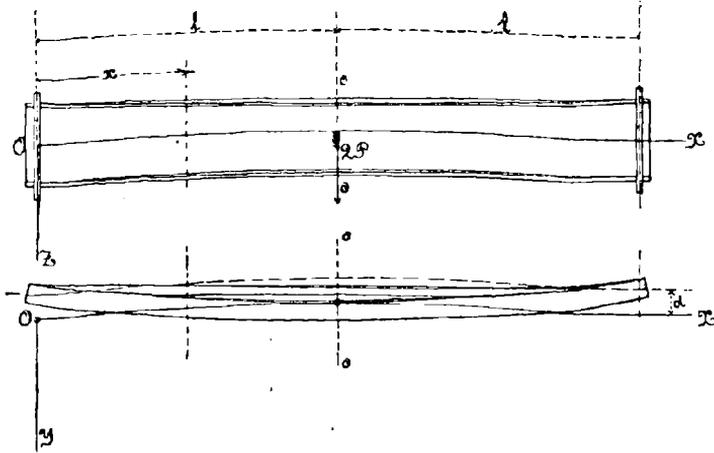
1) Die von mir durchgeführten Versuche mit einem genieteten Blechträger zeigen, daß auch in diesem Falle die angenäherte Formel von S. Venant anwendbar ist.

§ 16. Träger mit einer Last in der Mitte.

Der Kraftangriffspunkt liegt im Schwerpunkte des Querschnittes in der Mitte und die Kraft strebt den Träger in der Ebene seiner größten Steifigkeit zu biegen. Bei Zunahme der Kraft $2P$ kann man den Grenzzustand erreichen, wo die ebene Biegungsgleichgewichtsform aufhört stabil zu sein, und der Balken umkippen muß (s. Fig. 20).

Verlegt man die Koordinatenachsen (X, Y, Z) nach der Fig. 20 und betrachtet die linke Balkenhälfte, so kann für sie die oben aufgestellte allgemeine Lösung (1A) benutzt werden. Zur Bestimmung der will-

Fig. 20.



kürlichen Konstanten muß man die Ausdrücke für die Balkendurchbiegung y und für y' ableiten. Auf Grund der zweiten von den Gleichungen (11) folgt:

$$B_2 y'' = -Px \{ \varphi_0 [M] + \varphi_0' [N] x + \frac{1}{6} \varphi_0''' [P] x^3 \}.$$

Dieser Ausdruck ergibt nach zweimaliger Integration:

$$y' = -\frac{P}{B_2} x^2 \{ \varphi_0 [K] + \varphi_0' x [L] + \frac{1}{6} \varphi_0''' x^3 [E] \} + y_0'$$

$$y = -\frac{Px^3}{B_2} \{ \varphi_0 [J] + \varphi_0' x [H] + \frac{1}{6} \varphi_0''' x^3 [G] \} + xy_0' + y_0.$$

Hier sind $[K], \dots [G]$ unendliche Reihen, geordnet nach wachsenden Potenzen von x^2 .

Zur Bestimmung der Konstanten ergeben sich folgende Bedingungen:

Für $x = 0$ ist 1) $\varphi_0 = 0$; 2) $y_0 = -d$; 3) $Py_0 = C\varphi_0' - \frac{Dh^3}{2} \varphi_0'''$.

Für $x = l$ ist 4) $y_l = 0$; 5) $y_l' = 0$; 6) $\varphi_l' = 0$.

y_0 und y'_0 kann man aus den Bedingungen 3) und 5) durch φ'_0 und φ''_0 ausdrücken; wenn man diese Werte in die Gleichung (4) einsetzt, folgt:

$$\left\{ -[H]_i l^4 + [L]_i l^4 - \frac{C B_2}{P} \right\} \varphi'_0 + \left\{ \frac{[E]_i - [\mathcal{G}]_i}{6} + \frac{D h^2 B_2}{2 P^2 l^6} \right\} \varphi''_0 = 0.$$

Fügt man noch die Bedingung 6) hinzu, die in folgender Weise geschrieben werden kann:

$$\varphi'_0 [S]_i + \frac{1}{6} l^2 \varphi''_0 [T]_i = 0,$$

so erhält man zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten φ'_0 und φ''_0 . Damit das Umkippen möglich ist, muß die Determinante dieser Gleichungen gleich Null sein, nämlich:

$$(19) \quad \left\{ [L]_i - [H]_i - \frac{B_2 C}{P^2 l^4} \right\} \frac{[T]_i}{6} - \left\{ \frac{[E]_i - [\mathcal{G}]_i}{6} + \frac{D h^2 B_2}{2 P^2 l^6} \right\} [S]_i = 0.$$

In der obigen Gleichung sind nur folgende Größen vorhanden:

$$\frac{l^2}{a^2} = \frac{2C}{D h^2} \quad \text{und} \quad \frac{l^6}{b^6} = \frac{2 P^2 l^6}{D B_2 h^2}.$$

Die Größe $\frac{l^2}{a^2}$ kann für den gegebenen Träger im voraus berechnet werden, dann dient die Gleichung (19) zur Berechnung von $\frac{l^6}{b^6}$:

Wenn $\left(\frac{l^6}{b^6}\right) : \left(\frac{l^2}{a^2}\right) = k^2$ gesetzt wird:

$$P_k = \frac{k \sqrt{B_2 C}}{l^2}.$$

Es ist zu beachten, daß hier P die Hälfte der Biegekraft und l die Hälfte der Balkenlänge ist.

In der Tabelle D sind die Werte von k für verschiedene $\frac{l^2}{a^2}$ und die Werte von p_k für $\frac{B_2}{B_1} = 0,01$ und $\frac{h}{2l} = 0,1$ angegebenen. Bei anderen Verhältnissen zwischen diesen Größen müssen die Tabellenzahlen mit $\frac{100 \cdot 100}{m \cdot n}$ multipliziert werden, wo $\frac{1}{m} = \frac{J_2}{J_1}$ und $\frac{1}{n} = \left(\frac{h}{2l}\right)^2$ für den gegebenen Träger sind.

Tabelle D.

$\frac{l^2}{a^2}$	$\frac{l^6}{b^6}$	k^2	Der Wert p_k bei $\frac{B_2}{B_1} = 0,01; \frac{h}{2l} = 0,1$ $E = 2,10^6 \text{ kg/cm}^2$	$\frac{l^2}{a^2}$	$\frac{l^6}{b^6}$	k^2	Der Wert p_k bei $\frac{B_2}{B_1} = 0,01; \frac{h}{2l} = 0,1$ $E = 2,10^6 \text{ kg/cm}^2$
0,1	11,7	117	680 kg/cm ²	12	65,9	5,60	1620 kg/cm ²
1	15,9	15,9	800 "	16	84,0	5,25	1830 "
2	20,5	10,25	910 "	20	102	5,10	2020 "
4	29,7	7,43	1090 "	24	120	5,00	2190 "
6	38,8	6,47	1250 "	32	156	4,88	2500 "
8	47,8	5,98	1380 "	40	192	4,80	2770 "

Mit der Zunahme von $\frac{l^2}{a^2}$ strebt k zum Grenzwert 2,12. (Diese Zahl wurde von Prof. Prandtl für einen Stab rechteckigen Querschnitts ermittelt.) Liegt der Angriffspunkt der Biegekraft oberhalb des Schwerpunktes des Mittelquerschnittes des Trägers, so werden die kritischen Spannungen kleiner, als die in Tabelle D angegebenen. Wir haben den Fall untersucht, wenn der Kraftangriffspunkt mit der oberen Trägergurtungsfläche zusammenfällt. Für diesen Fall ist die Tabelle F aufgestellt.

Tabelle F.

$\frac{l^2}{a^2}$	$\frac{l^6}{b^6}$	k^2	Der Wert p_k bei $\frac{B_2}{B_1}=0,01; \frac{h}{2l}=0,1$ $E=2,10^6 \text{ kg/cm}^2$	$\frac{l^2}{a^2}$	$\frac{l^6}{b^6}$	k^2	Der Wert p_k bei $\frac{B_2}{B_1}=0,01; \frac{h}{2l}=0,1$ $E=2,10^6 \text{ kg/cm}^2$
0,1	4,13	41,3	405 kg/cm ²	8	27,7	3,46	1050 kg/cm ²
1	6,36	6,36	505 "	10	34,3	3,43	1170 "
2	9,05	4,53	600 "	12	41,2	3,43	1280 "
3	11,9	3,97	690 "	16	55,3	3,46	1485 "
4	14,9	3,73	770 "	24	84,8	3,53	1840 "
6	21,1	3,52	920 "	32	114,4	3,58	2135 "

Mit Hilfe der Tabelle F ist es leicht, den Wert der kritischen Spannung für den nebenstehend skizzierten Träger zu bestimmen.

Es ist:

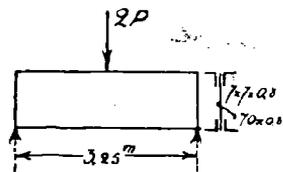
$$J_1 = 591,10^2 \text{ cm}^4; \quad J_2 = 446 \text{ cm}^4;$$

$$J_p = \sim 595 \cdot 10^2 \text{ cm}^4$$

$$\Omega_1 = 98,2 \text{ cm}^2$$

$$C = \frac{\Omega \cdot \Omega_1^4}{40 J_p} = \frac{8 \cdot 10^6 (98,2)^4}{40 \cdot 595 \cdot 10^2}; \quad \frac{l^2}{a^2} = \frac{2 C l^2}{D h^2} = \sim 0,75.$$

Fig. 21.



Nach der Tabelle F ist p'_k ungefähr = 480 kg/cm². Für unseren Träger:

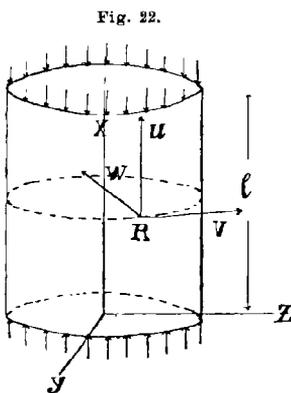
$$p_k = 480 \cdot 100 \cdot 100 \cdot \frac{J_2}{J_1} \left(\frac{h}{2l}\right)^2 = \sim 1670 \text{ kg/cm}^2.$$

Zum Schluß ist noch zu bemerken, daß die Formeln zur Bestimmung des Wertes von p_k unter der Annahme abgeleitet sind, daß die ganze Erscheinung in den Elastizitätsgrenzen vor sich geht. Übersteigen die nach unseren Formeln berechneten Spannungen die Elastizitätsgrenze des Stoffes, so entsprechen sie den tatsächlichen kritischen Spannungen nicht. Das Umkippen wird früher auftreten, als das nach der Berechnung sein sollte.

Bei der Ableitung wurde ferner vorausgesetzt, daß die Balkenachse gerade ist und die Kraft in der Mittelebene des Vertikalbleches einwirkt. In der Praxis aber kommen immer Abweichungen von diesen Annahmen vor, und darum fängt der Träger an, sich in der zum Vertikalbleche senkrechten Ebene auszubiegen. Die Ausbiegung bleibt aber klein, so lange die Biegungskraft sich vom theoretischen P_k bedeutend unterscheidet. Die Versuche¹⁾ mit einem massiven und einem genieteten Träger haben die Resultate der Tabelle C vollkommen bestätigt. (Die Abweichungen überstiegen nicht etwa 5 %.) Für Träger mit gestützten Enden haben die Versuche bedeutende Abweichungen von den Rechnungsergebnissen erwiesen. Die Erklärung liegt darin, daß die bei obiger Betrachtung angenommene Befestigung der Enden für diesen Fall sehr umständlich zu verwirklichen ist.

IV. Stabilität einer zylindrischen Schale, die in der Richtung der Erzeugenden auf Druck beansprucht ist.

§ 17. Wirken auf die Kreisränder eines Zylinders von kreisförmigem Querschnitte mit dem Radius a gleichmäßig verteilte Druckkräfte (P sei die Größe der Druckkraft pro Längeneinheit des Randes), so rufen sie eine Verkürzung $\frac{Pl}{2hE}$ des Zylinders hervor. Hier ist l



die Zylinderlänge und $2h$ die Wandstärke. Bei allmählicher Zunahme der Druckkräfte kann man die Grenze erreichen, bei der die zylindrische Gleichgewichtsform nicht mehr stabil ist und die Zylinderwände ausbeulen. Die Größe der kritischen Spannungsresultante P_k kann man sowohl aus den Gleichgewichtsgleichungen, als auch aus der Untersuchung der Änderungen der potentiellen Energie beim Ausbeulen bestimmen. Es bezeichne u , v und w die Komponenten der Verschiebung des Punktes P in der Richtung der Zylinderachse, der Tangente zum Kreisquerschnitte und der Normale, die nach dem Innern des Zylinders gerichtet ist (s. Fig. 22).

Die Deformation der Mittelebene wird bestimmt durch:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Zug: } \varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{a \partial \varphi} - \frac{w}{a} \\ \text{Schub: } \omega = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{a \partial \varphi} \end{array} \right.$$

1) Vgl. Mitteilungen d. Techn. Hochschule in St. Petersburg 1906.

und durch die Krümmungsänderungen

$$(2) \quad \kappa_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \kappa_2 = \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right); \quad \tau = \frac{1}{a} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

φ ist der Winkel zwischen der xy -Ebene und uw -Ebene.

Die Verzerrungsenergie pro Flächeneinheit bildet sich aus dem Teile

$$(3) \quad \frac{Eh}{1-\sigma^2} [(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 - 2(1-\sigma)(\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \frac{1}{4}\omega^2)],$$

der von Dehnungsgrößen ε_1 , ε_2 und ω abhängig ist, und aus dem Teile:

$$(4) \quad \frac{1}{2} C [(\kappa_1 + \kappa_2)^2 - 2(1-\sigma)(\kappa_1 \kappa_2 - \tau^2)],$$

der von den Biegungsverzerrungen abhängig ist; hier ist

$$C = \frac{2}{3} \frac{Eh^3}{1-\sigma^2}.$$

Die Differentialgleichungen des Gleichgewichtes für diesen Fall sind:

$$(5) \quad \begin{cases} a \frac{\partial T_1}{\partial x} - \frac{\partial S_2}{\partial \varphi} = 0 \\ a \frac{\partial S_1}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} - N_2 = 0 \\ a \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial \varphi} + T_1 a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_2 = 0. \end{cases}$$

$$(6) \quad \begin{cases} a \frac{\partial H_1}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{G}_2}{\partial \varphi} + N_2 a = 0 \\ a \frac{\partial \mathfrak{G}_1}{\partial x} + \frac{\partial H_2}{\partial \varphi} - N_1 a = 0 \\ H_2 + (S_1 + S_2) a \end{cases}$$

(Die Bezeichnungen für die Spannungsresultanten und Spannungsmomente sind Love (S. 610) entnommen).

Die Spannungsmomente \mathfrak{G}_1 , \mathfrak{G}_2 kann man durch die Verschiebungen u , v und w folgendermaßen ausdrücken:

$$(7) \quad \begin{cases} \mathfrak{G}_1 = -C(\kappa_1 + \sigma \kappa_2) \\ \mathfrak{G}_2 = -C(\kappa_2 + \sigma \kappa_1) \\ H_1 = -H_2 = C(1-\sigma)T. \end{cases}$$

Was die Spannungsresultanten T_1 , T_2 , S_1 und S_2 betrifft, so sind sie mit genügender Genauigkeit in den Fällen, wo die Deformation wesentlich durch die Dehnung gekennzeichnet ist, durch folgende Formeln bestimmt:

$$(8) \quad \begin{aligned} T_1 &= \frac{2Eh}{1-\sigma^2} (\varepsilon_1 - \sigma \varepsilon_2) \\ T_2 &= \frac{2Eh}{1-\sigma^2} (\varepsilon_2 - \sigma \varepsilon_1) \\ S_1 &= -S_2 = \frac{Eh}{1+\sigma} \omega. \end{aligned}$$

Wenn die Dehnungsgrößen der Mittelebene klein sind, so muß man zur Bestimmung von T_1, \dots genauere Formeln benutzen.

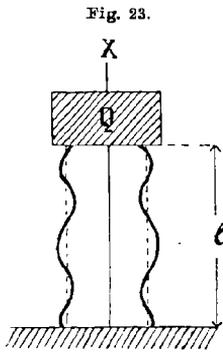
Für einen Kreiszyylinder vom Radius a sind diese Formeln nach Love (S. 621)

$$(9) \quad \begin{aligned} T_1 &= C \left[\frac{3}{h^2} (\varepsilon_1 + \sigma \varepsilon_2) + \frac{2-2\sigma-3\sigma^2}{2(1-\sigma)} \cdot \frac{\kappa_1}{a} - \frac{2\sigma+\sigma^2}{2(1-\sigma)} \frac{\kappa_2}{a} \right] \\ T_2 &= C \left[\frac{3}{h^2} (\varepsilon_2 + \sigma \varepsilon_1) - \frac{\sigma+2\sigma^2}{2(1-\sigma)} \frac{\kappa_1}{a} - \frac{2-\sigma}{2(1-\sigma)} \frac{\kappa_2}{a} \right] \\ S_1 &= \frac{C}{2} (1-\sigma) \left[\frac{3}{h^2} \omega + \frac{\tau}{a} \right]; \quad S_2 = \frac{C}{2} (1-\sigma) \left[-\frac{3}{h^2} \omega + \frac{\tau}{a} \right]. \end{aligned}$$

Die folgenden einfachen Beispiele zeigen, wie der kritische Wert der Druckkraft $P = -T_1$ bestimmt wird.

§ 18. Achsensymmetrische Form des Ausbeulens einer zylindrischen Schale.

Die Kreisränder der zylindrischen Schale seien drehbar befestigt. Bei allmählicher Zunahme der Belastung Q kann man einen Zustand erreichen, wo das Ausbeulen (s. Fig. 23) anfängt. So lange die Erzeugenden des Zylinders geradlinig bleiben, besteht die Deformation im längsgerichteten Zusammendrücken.



Die Größe der Dehnung ist:

$$\varepsilon_0 = -\frac{Q}{2\pi a} \cdot \frac{1}{2hE} = +\frac{T_1}{2hE}.$$

Diese Deformation ist von der Querdehnung $-\sigma\varepsilon_0$ begleitet. Die potentielle Energie — diesem Beanspruchungszustande entsprechend — ist:

$$(10) \quad V_0 = 2\pi a l E h \varepsilon_0^2.$$

Beim Ausbeulen der Schale nimmt die potentielle Energie zu, da zum Zusammendrücken in der Längsrichtung noch Zug in der Richtung der Tangente zum Querschnitte und Biegung der Schalenwände hinzukommen. Es ist klar, daß diese Zunahme der potentiellen Energie δv nur auf Rechnung der Arbeit δT der Druckbelastung Q , die beim Ausbeulen der Schalenwände ein wenig sinkt, zum Vorschein kommen kann. Die Größe der kritischen Druckkraft wird aus der Bedingung

$$(11) \quad \delta v = \delta T$$

bestimmt.

Es sei:

$$(12) \quad w = -A \sin \frac{m\pi x}{l}; \quad v = 0.$$

Was u betrifft, so wird es aus der Bedingung bestimmt, daß die Spannungsresultante T beim Ausbeulen konstant bleibt und folglich

$$\varepsilon_1 + \sigma \varepsilon_2 = \varepsilon_0 - \sigma^2 \varepsilon_0$$

ist.

Mit Rücksicht auf die Formeln (1) und (2) folgt:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 - \sigma \frac{A}{a} \sin \frac{m \pi x}{l}; \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{a} A \sin \frac{m \pi x}{l} - \sigma \varepsilon_0; \quad \omega = 0,$$

$$\kappa_1 = + A \frac{m^3 \pi^2}{l^2} \sin \frac{m \pi x}{l}; \quad \kappa_2 = 0; \quad \tau = 0.$$

Durch Einsetzung dieser Werte in (3) und (4) erhalten wir die Größe der potentiellen Energie der zylindrischen Schale nach dem Ausbeulen:

$$\begin{aligned} & \nu_0 + \delta \nu \\ &= 2 \pi a \frac{Eh}{1 - \sigma^2} \left\{ \int_0^l [(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 - 2(1 - \sigma)(\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \frac{1}{4} \omega^2)] dx + \frac{h^2}{3} \int_0^l \kappa_1^2 dx \right\} \\ &= V_0 - 2hE\sigma\varepsilon_0 \int_0^l \frac{A}{a} \sin \frac{m \pi x}{l} \cdot 2 \pi a + \frac{Eh}{a} \cdot A^2 l \pi + A^2 \frac{Eh^3}{3(1 - \sigma^2)} \frac{m^4 \pi^4}{l^4} l a \pi. \end{aligned}$$

Hieraus:

$$(13) \quad \delta \nu = -2hE\sigma\varepsilon_0 \int_0^l \frac{A}{a} \sin \frac{m \pi x}{l} \cdot 2 \pi a + EhA^2 \frac{l \pi}{a} + A^2 \frac{Eh^3}{3(1 - \sigma^2)} \frac{m^4 \pi^4}{l^4} l a \pi.$$

Die Größe der Senkung der Belastung Q beim Ausbeulen der Schale ist:

$$\delta l = + \int_0^l \frac{A}{a} \sin \frac{m \pi x}{l} dx + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx = \sigma \int_0^l \frac{A}{a} \sin \frac{m \pi x}{l} dx + \frac{A^2}{4} \frac{m^2 \pi^2}{l}.$$

Die dieser Senkung entsprechende Arbeit der Belastung Q ist:

$$(14) \quad \delta T = 2 \pi a P \left[\sigma \int_0^l \frac{A}{a} \sin \frac{m \pi x}{l} dx + \frac{A^2}{4} \frac{m^2 \pi^2}{l} \right].$$

Durch Vergleich von (13) und (14) folgt:

$$(15) \quad P_k = \frac{2l^2 Eh}{a^2 m^2 \pi^2} + \frac{2Eh^3}{3(1 - \sigma^2)} \frac{m^2 \pi^2}{l^2}.$$

Für verschiedene Werte von m erhält man aus der Formel (15) entsprechende Werte für P_k . Für die Praxis ist es wichtig, denjenigen Wert für m zu bestimmen, der den kleinsten Wert der Druckkraft liefert. Dieses kann in derselben Weise geschehen, wie bei Untersuchung der Knickung eines Stabes im elastischen Medium (s. § 3). Die größte

Länge l , bei welcher die erste ausgebeulte Form m Halbwellen hat, ist offenbar die, für welche die Formel (15) einen und denselben Wert von P_k liefert unabhängig davon, ob die Fläche beim Ausbeulen in m oder $m + 1$ Halbwellen sich verteilt.

Zur Bestimmung des Grenzwertes von l besteht die folgende Gleichung:

$$\frac{2l^2 E h}{a^2 m^2 \pi^2} + \frac{2 E h^3}{3(1-\sigma^2)} \frac{m^2 \pi^2}{l^2} = \frac{2l^2 E h}{a^2 (m+1)^2 \pi^2} + \frac{2 E h}{3(1-\sigma^2)} \frac{(m+1)^2 \pi^2}{l^2}$$

woraus:

$$(16) \quad l = \sqrt{m(m+1)} \sqrt[4]{\frac{\pi \sqrt{a h}}{3(1-\sigma^2)}}.$$

Die Grenzlänge, bei welcher die ausgebeulte Form aus einer Halbwelle besteht, ist

$$l = \frac{\sqrt{2} \pi \sqrt{a h}}{\sqrt[4]{3(1-\sigma^2)}} = \sim 3,43 \sqrt{a h}.$$

Für zwei Halbwellen ist die Grenzlänge:

$$l = \frac{\sqrt{6} \pi \sqrt{a h}}{\sqrt[4]{3(1-\sigma^2)}} = \sim 5,93 \sqrt{a h}.$$

Bei bedeutender Länge der Zylinderschale ist auch die Zahl m groß; in diesem Falle kann man für die Länge einer Halbwelle $\lambda = \frac{l}{m}$ auf Grund der Formel (16) mit genügender Genauigkeit annehmen.

$$\lambda = \frac{l}{m} = \frac{\pi \sqrt{a h}}{\sqrt[4]{3(1-\sigma^2)}}.$$

Denselben Wert einer Halbwellenlänge könnte man auch aus der Formel (15) erhalten, indem man in der rechten Seite $\frac{l^2}{m^2}$ durch λ^2 ersetzt und den ersten Differentialquotienten nach λ gleich Null setzt. Setzt man den gefundenen Wert für λ in den Ausdruck für P_k ein, so folgt

$$(17) \quad P_k = \frac{4 E h^2}{a \sqrt[3]{3(1-\sigma^2)}}.$$

Die entsprechende Druckspannung ist:

$$(18) \quad p_k = \frac{P_k}{2h} = E \cdot \frac{2h}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{3(1-\sigma^2)}}.$$

Damit das Ausbeulen in den Elastizitätsgrenzen stattfindet, muß die Wandstärke $2h$ im Verhältnis zum Radius a ziemlich klein sein. Für Eisen, zum Beispiel, muß die Bedingung

$$\frac{2h}{a} \frac{1}{\sqrt[3]{3(1-\sigma^2)}} \leq 0,001$$

erfüllt sein.

Außerhalb der Elastizitätsgrenzen sind allerdings die Formeln (17) und (18) nicht anwendbar. Der oben bestimmte Wert für P_k kann auch aus den Differentialgleichungen des Gleichgewichtes (5) und (6) bestimmt werden.

Für den betrachteten Fall bestehen die Beziehungen:

$$\mathfrak{G}_1 = -C\kappa_1 = -C \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \mathfrak{G}_2 = -C\sigma\kappa_1 = -C\sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

$$H_1 = -H_2 = 0; \quad S_1 = -S_2 = 0; \quad T_1 = \text{const} = -P; \quad T_2 = -\frac{w}{a} 2Eh.$$

Die erste und die zweite Gleichung des Systems (6) liefern:

$$N_2 = 0; \quad N_1 a = -aC \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}.$$

Diese Werte ergeben, in die dritte Gleichung des Systems (5) eingesetzt,

$$aC \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + aP \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{w}{x} 2Eh = 0,$$

oder nach Einführung der Bezeichnungen:

$$\frac{P}{C} = 2r^2; \quad \frac{2Eh}{a^2 C} = \frac{3(1-\sigma^2)}{a^2 h^2} = t^4$$

kommt man zur folgenden Gleichung:

$$w^{IV} + 2r^2 w^{II} + t^4 w = 0.$$

Da für

$$x = 0 \quad w = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

ist, so folgt

$$w = A \sin px + B \sin qx,$$

wo

$$p = \sqrt{r^2 + \sqrt{r^4 - t^4}}; \quad q = \sqrt{r^2 - \sqrt{r^4 - t^4}}.$$

Damit das Ausbeulen möglich ist, muß $r^4 - t^4 \geq 0$ sein. Ist $x = l$, so bestehen dieselben Endbedingungen wie für $x = 0$, folglich

$$A \sin pl + B \sin ql = 0,$$

$$Ap^2 \sin pl + Bq^2 \sin ql = 0.$$

Soll das Ausbeulen stattfinden, so muß die Determinante dieser Gleichungen gleich Null sein, d. h.

$$\sin pl = 0 \quad \text{und} \quad \sin ql = 0,$$

woraus wir zur Bestimmung von P_k erhalten:

$$(19) \quad \begin{cases} r^2 l^2 + \sqrt{r^4 l^4 - t^4 l^4} = m^2 \pi^2 \\ r^2 l^2 - \sqrt{r^4 l^4 - t^4 l^4} = n^2 \pi^2, \end{cases}$$

wo m und n beliebige ganze Zahlen sind. Ist die Länge des Stabes groß, so kann man

$$l^2 p^2 = m^2 \pi^2$$

setzen, wo m eine ganze Zahl ist.

In diesem Falle führen beide Bedingungen (19) zu einem und demselben Resultate:

$$r^2 l^2 = m^2 \pi^2$$

oder

$$P_k = \frac{2 C m^2 \pi^2}{l^2} = 2 C l^2 = \frac{2 C \sqrt{3} (1 - \sigma^2)^2}{a h} = \frac{4 E h^2}{a \sqrt{3} (1 - \sigma^2)},$$

was vollständig mit dem früher erhaltenen Werte (17) zusammenfällt. Es ist interessant, den eben bestimmten Wert für P_k mit dem Wert zu vergleichen, welchen die Formel von Euler liefert, auf unsere Zylinderschale angewandt:

$$2 \pi a \cdot P'_k = \frac{E J \pi^2}{l^2}.$$

Hier ist J das Trägheitsmoment des Querschnittes. Für einen dünnwandigen Zylinder kann man annehmen:

$$J = \frac{2 \pi a^3 \cdot 2 h}{2}.$$

Damit das Ausbeulen stattfinden kann, muß also sein:

$$(20) \quad P'_k = \frac{E \pi^2 a^2 h}{l^2}.$$

Es ist dann $P'_k = P_k$, wenn

$$\frac{4 E h^2}{a \sqrt{3} (1 - \sigma^2)} = \frac{E \pi^2 a^2 h}{l^2}.$$

Daraus erhalten wir das folgende Verhältnis zwischen den Dimensionen des Zylinders:

$$\frac{h}{a} = \frac{\pi^2 \sqrt{3} (1 - \sigma^2)}{4} \cdot \frac{a^2}{l^2} = 4,14 \frac{a^2}{l^2}.$$

Ist das Verhältnis $\frac{h}{a}$ kleiner, so wird die Zylinderschale, ehe sie wie ein Stab ausknickt, ein Ausbeulen der Wände erleiden, wie in der Fig. (23) angegeben ist.

Es wurde angenommen, daß die Schalenränder drehbar befestigt sind. Bei langen Zylindern hat die Art der Befestigung keine Bedeutung und die Formel (17) kann folglich auch für Zylinder mit eingeklemmten Rändern angewandt werden.

§ 19. Dehnungslose Deformation einer zylindrischen Schale.

Wenn nicht nur die Randlinien einer gedrückten Zylinderschale frei drehbar befestigt sind, sondern einzelne Punkte derselben sich verschieben können, so kann die Zylinderschale bei einer gewissen Größe

der Druckkräfte eine Gleichgewichtsform bekommen, wobei der Übergang zu dieser Gleichgewichtsform von keiner Änderung der Dehnungsgrößen der Mittelebene begleitet ist. Die dieser Deformationsart entsprechenden Verschiebungen können folgendermaßen festgestellt werden:

$$\begin{aligned}
 u &= - \sum_n^a B_n \sin(n\varphi + \beta_n) \\
 v &= \sum B_n x \cos(n\varphi + \beta_n) \\
 w &= - \sum n B_n x \sin(n\varphi + \beta_n).
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

(Love S. 545.)

Die potentielle Energie der Zylinderschale wird bei dieser Formänderung zunehmen, da zu der Energie der Kontraktion die Energie der Biegung hinzukommt. Die letztere wird aus folgenden Krümmungsänderungen bestimmt:

$$\begin{aligned}
 \kappa_1 &= 0; \quad \kappa_2 = \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) = \sum \frac{n^2 - n}{a^2} B_n \sin(n\varphi + \beta_n) \\
 \tau &= - \sum \frac{n^2 - 1}{a} B_n \cos(n\varphi + \beta_n).
 \end{aligned}$$

Die Zunahme der potentiellen Energie geschieht auf Rechnung der Arbeit der äußeren Druckkräfte. Diese Arbeit läßt sich aus folgenden Betrachtungen bestimmen: In der betrachteten Formänderung bleiben die Erzeugenden der Zylinderschale geradlinig und neigen sich um den Winkel:

$$\gamma = \sqrt{[\sum B_n \cos(n\varphi + \beta_n)]^2 + [\sum n B_n \sin(n\varphi + \beta_n)]^2}.$$

Dieser Neigung entspricht die Arbeit:

$$\delta T = Pl \int_0^{2\pi} \gamma^2 a d\varphi = \frac{\pi}{2} a l P \sum B_n^2 (1 + n^2).
 \tag{2}$$

Die Größe der Spannungsresultante P_k'' wird bestimmt, indem man die Arbeit δT der potentiellen Energie der Biegung gleich setzt:

$$\delta v = C \pi l \sum \frac{(n^2 - 1)^2}{a^3} B_n^2 \left[\frac{1}{2} n^2 l^2 + 2(1 - \sigma) a^2 \right].
 \tag{3}$$

Love S. 583.

Daraus folgt:

$$P_k'' = \frac{2C}{a^4} \frac{\sum (n^2 - 1)^2 B_n^2 \left[\frac{1}{3} n^2 l^2 + 2(1 - \sigma) a^2 \right]}{\sum B_n^2 (1 + n^2)},
 \tag{4}$$

Bei $n = 1$ erhält man die Verschiebung der Zylinderschale als eines starren Körpers.

Bei $n = 2$ ist:

$$P_k'' = \frac{2C}{a^4} \cdot \frac{9}{5} \left[\frac{4}{3} l^2 + 2(1 - \sigma) a^2 \right].
 \tag{5}$$

Ist die Länge der Zylinderschale im Verhältnis zum Durchmesser groß, so ist mit genügender Genauigkeit:

$$(6) \quad P_k'' = \frac{24}{5} \cdot \frac{C}{a^4} l^2 = \frac{16}{5} \cdot \frac{Eh^2}{a(1-\sigma^2)} \cdot \frac{h}{a} \cdot \frac{l^2}{a^2}.$$

Aus dem Vergleiche dieses Resultates mit der Formel (17) folgt:

$$P_k'' = P_k' \frac{4\sqrt{3}}{5(1-\sigma^2)} \cdot \frac{h}{a} \cdot \frac{l^2}{a^2}.$$

Es ist leicht zu beweisen, daß die angenommene dehnungslose Deformation die Grundgleichungen des Gleichgewichtes (5) und (6) (§ 7) nicht befriedigt. Dazu genügt es, den Ausdruck:

$$(7) \quad T_2 = - \frac{2+\sigma}{2(1-\sigma)} \frac{\alpha_2}{a} \cdot C,$$

der aus der Formel (9) (§ 17) folgt, mit dem zu vergleichen, welchen die dritte Gleichung des Systems (5) liefert, wenn man statt N_1 und N_2 ihre Werte aus den Gleichungen des Systems (6) einsetzt. Aus dieser Gleichung folgt:

$$(8) \quad T_2 = -a \frac{\partial N_1}{\partial x} - \frac{\partial N_2}{\partial \varphi} - T_1 a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{C}{a} \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial \varphi^2}.$$

Wenn man statt α_2 seinen Wert einsetzt, erhält man aus (7) und (8) folgende Werte:

$$T_2 = - \frac{2+\sigma}{2(1-\sigma)} \cdot \frac{C}{a} \sum \frac{n^3-n}{a^2} B_n x \sin(n\varphi + \beta_n)$$

$$T_2 = - \frac{C}{a} \sum n_2 \frac{n^3-n}{a^2} B_n x \sin(n\varphi + \beta_n).$$

Diese Werte für T_2 sind verschieden und folglich befriedigen die angenommenen Verschiebungen (1) nicht die Gleichgewichtsgleichungen. Um diese Gleichungen zu befriedigen, muß man zur Biegung noch die Dehnung hinzufügen.

Die angenommenen Verschiebungen befriedigen auch nicht die Randbedingungen. Für $x=0$ und $x=l$ müssen die Bedingungen:

$$\mathcal{G}_1 = 0; \quad N_1 - \frac{1}{a} \frac{\partial H_1}{\partial \varphi} = -P \frac{\partial w}{\partial x}$$

erfüllt sein, indessen erscheint bei den Verschiebungen (1) \mathcal{G}_1 als lineare Funktion von x und verwandelt sich nicht in Null bei

$$x = 0.$$

Zur Befriedigung der Differentialgleichungen des Gleichgewichtes muß man also zu den angenommenen Verschiebungen (1) noch eine Dehnung und einige Spannungen auf den Kreisrändern hinzufügen.

Die Lösung einiger Aufgaben bezüglich der Deformation von zylindrischen Schalen (s. Love S. 626) gibt Anlaß, zu behaupten, daß die potentielle Energie, die infolge der Zusatzdehnungen und Spannungen auf den Rändern erscheint, im Vergleiche mit der potentiellen Energie der Biegung klein ist, und darum kann die Formel (5) zur Bestimmung der Knicklast dienen.

Wir haben den einfachsten Fall betrachtet, wenn die Zylinderschale gleichmäßig auf Knickung belastet ist, wenn die Spannungseresultante auf dem ganzen Querschnitte konstant ist. Für die Praxis ist der Fall von Bedeutung, wenn die Spannungseresultante nach dem Gesetze $\cos \varphi$ sich ändert:

$$T_1 = - P \cos \varphi.$$

In diesem Falle erfährt die zylindrische Schale die Wirkung von Biegemomenten, die auf den Enden angreifen, und so lange diese Momente eine gewisse Grenze nicht überstiegen haben, biegt sich die Schale wie ein Stab.

Bei weiterer Zunahme der Kräfte kann das Ausbeulen der Schalenwände von der Seite der gedrückten Erzeugenden stattfinden.

Interessant ist auch die Aufgabe über die Stabilität eines Schalenstückes, der von 2 Erzeugenden und von 2 Kreisquerschnitten begrenzt ist und von einer Kraft P parallel der Erzeugenden zusammengedrückt wird.

Kiew, 1909.

Die chemische Reaktionskinetik und eine neue Painlevésche Transzendente.¹⁾

Von FERENCZ JÜTTNER in Breslau.

§ 1. Einleitung. Die gewöhnliche chemische Kinetik.

Die meisten chemischen Vorgänge in den im folgenden allein berücksichtigten homogenen Systemen, insbesondere in flüssigen Lösungen, die nur *eine* Schicht oder „Phase“ bilden, verlaufen so rasch, daß es unmöglich ist, ihren zeitlichen Fortgang zu verfolgen. Doch gelang es bereits um die Mitte des vorigen Jahrhunderts, unter den Reaktionen, bei denen keine Ionen mitwirken, ganz langsam sich abspielende aufzufinden und zu untersuchen, wie z. B. den Übergang eines Gemisches von

1) Der erste Teil dieses Aufsatzes, § 1 bis zum Beginn von § 6, wurde im Auszuge am 4. Mai 1909 in der Mathematischen Sektion der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Kultur in Breslau vorgetragen.

Äthylalkohol und Essigsäure in ein solches von Essigäther (Äthylazetat) und Wasser. Man fand zugleich, daß viele dieser langsamen Reaktionen unvollständig verliefen und zu einem deutlichen chemischen Gleichgewicht führten, indem der Vorgang einerseits schließlich nicht mehr fortschritt, trotzdem die Ausgangsstoffe noch nicht völlig verbraucht waren, und indem der Vorgang andererseits umkehrbar war, d. h. das Gleichgewichtsgemisch bei Anwendung geeigneter Konzentrationen auch aus den Endprodukten der Reaktion durch wechselseitige Rückzersetzung gebildet werden konnte. So kommt in dem obigen Beispiel die Bildung von Essigäther und Wasser schließlich zum Stillstand, obwohl noch unverbrauchter Alkohol und Essigsäure anwesend sind, und umgekehrt entsteht bei Einwirkung von viel Wasser auf wenig Essigäther allmählich wieder teilweise rückwärts Alkohol und Essigsäure.

Die Frage, wie sich nun die einzelnen Konzentrationen bei einer Reaktion (natürlich bei isothermer Führung derselben) bis zum Gleichgewicht ändern, löst das 1867 von Guldberg und Waage gefundene Massenwirkungsgesetz, das hier nur kurz formuliert werden möge.

Es gehe in einer verdünnten Lösung die allgemeine umkehrbare Reaktion vor sich:



Für die zugehörigen molaren Konzentrationen zur Zeit t

$$c_1 \quad c_2 \dots \quad c'_1 \quad c'_2 \dots$$

gilt dann die folgende Grundgleichung der chemischen Kinetik:

$$(1) \quad -\frac{dc_1}{dt} = k c_1^{n_1} c_2^{n_2} \dots - k' c'_1{}^{n'_1} c'_2{}^{n'_2} \dots;$$

hierin sind k und k' die Geschwindigkeitskoeffizienten der direkten bzw. der umgekehrten Reaktion.

Ist speziell $\frac{dc_1}{dt} = 0$, so wird die Frage nach einer Beziehung zwischen den Gleichgewichtskonzentrationen durch die folgende aus (1) hervorgehende Grundgleichung der chemischen Statik beantwortet:

$$(2) \quad \frac{c'_1{}^{n'_1} c'_2{}^{n'_2} \dots}{c_1{}^{n_1} c_2{}^{n_2} \dots} = \frac{k}{k'} = K.$$

Die aus der Differentialgleichung (1) folgende Theorie der chemischen Kinetik wird in den Lehrbüchern der Theoretischen Chemie behandelt. Hier sei darüber vom mathematischen Standpunkte aus nur Folgendes bemerkt.

Durch die Änderung von c_1 allein ist unmittelbar auch diejenige von $c_2, \dots, c'_1, c'_2, \dots$ bestimmt, da die Reaktion ja nach stöchiometri-

sehen Verhältnissen verläuft. Sind die molaren Konzentrationen der Stoffe für $t = 0$

$$\alpha_1 \quad \alpha_2 \dots \quad \alpha'_1 \quad \alpha'_2 \dots,$$

so liefert also das Gesetz der Stöchiometrie noch folgende zur Gleichung (1) hinzutretenden endlichen Gleichungen:

$$(1a) \quad \frac{\alpha_2 - c_2}{\alpha_1 - c_1} = \frac{n_2}{n_1}, \dots \quad \frac{c'_1 - \alpha'_1}{\alpha_1 - c_1} = \frac{n'_1}{n_1}, \quad \frac{c'_2 - \alpha'_2}{\alpha_1 - c_1} = \frac{n'_2}{n_1}, \dots$$

Hierdurch bestimmen sich $c_2, \dots, c'_1, c'_2, \dots$ als ganze lineare Funktionen von c_1 ; damit gewinnt dann (1) selbst die Form

$$(3) \quad \frac{dc_1}{dt} = g(c_1),$$

wo $g(c_1)$ eine ganze rationale Funktion von c_1 bedeutet. Die allgemeine Lösung des Problems der chemischen Kinetik ist also

$$(4) \quad t = \int \frac{dc_1}{g(c_1)} + \text{const.}$$

und führt, indem man $\frac{1}{g(c_1)}$ in Partialbrüche zerlegt, außer auf rationale Funktionen allein auf die elementaren Transzendenten \log und arctg .

§ 2. Die Reaktionskinetik bei Berücksichtigung der Diffusion.

Das oben in (1) und (2) ausgesprochene Gesetz der chemischen Kinetik gilt nur unter einer gewöhnlich stillschweigend angenommenen Voraussetzung, daß nämlich alle reagierenden Konzentrationen von Anfang an räumlich konstant sind. Im anderen Falle erfolgt dagegen, worauf besonders W. Nernst¹⁾ hinwies, eine Änderung der Konzentrationen der Stoffe außer durch den chemischen Umsatz gleichzeitig auch durch die Diffusion, und daher ist das einfache Massenwirkungsgesetz sodann durch verwickeltere Gleichungen zu ersetzen.

In diesem Falle ist nämlich noch der Ficksche Ansatz für die Diffusion der einzelnen Stoffe, der hier sogleich für die x -Achse spezialisiert werde:

$$(5) \quad \frac{\partial c_1}{\partial t} = D_1 \cdot \frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2}$$

der Differentialgleichung (1) für die Reaktionsgeschwindigkeit zu superponieren; D_1 bedeutet hierbei den Diffusionskoeffizienten des Stoffes A_1 .

In allgemeiner Weise hat Verfasser²⁾ diese Diffusions-Reaktionskinetik in einer früheren Arbeit behandelt. Hier soll nun ein weiterer

1) Chemisches Gleichgewicht und Temperaturgefälle. Boltzmannfestchrift 1904, S. 904—915.

2) Reaktionskinetik und Diffusion, Zeitschr. f. physik. Chemie 65, S. 595—623; 1909; vgl. auch das Autoreferat Zeitschr. f. Elektrochemie 15, S. 169—170; 1909.

Das Problem des stationären Zustandes ist also auf die Integration der einen gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung (8) reduziert.

Sind die Grenzbedingungen derart speziell, daß

$$b_2 = b_3 = \dots = b'_1 = b'_2 = \dots = 0,$$

so gehört (8) dem Typus

$$\frac{d^2 c_1}{dx^2} = g(c_1)$$

an, wo $g(c_1)$ eine ganze rationale Funktion von c_1 ist. Die Lösung der Gleichung ist dann auf die Auswertung eines logarithmischen, elliptischen oder allgemein hyperelliptischen Integrals erster Gattung zurückführbar.¹⁾

Sind die Grenzbedingungen jedoch ganz allgemein, so ist der Typus von (8)

$$\frac{d^2 c_1}{dx^2} = g(x, c_1),$$

wo $g(x, c_1)$ eine ganze rationale Funktion der beiden Variablen x und c_1 ist. Ist deren Grad gleich 1, so ist die Gleichung elementar integrierbar und zwar ganz einfach durch Exponential- oder Hyperbelfunktionen.²⁾ Diesem Fall entspricht chemisch die unimolekulare Reaktion



Ist dagegen der Grad von $g(x, c_1)$ größer als 1, so ist die Integration weder durch die elementaren Transzendenten und Quadraturen, noch durch die klassischen höheren Transzendenten zu erbringen, wie aus den wichtigen neueren Untersuchungen von P. Painlevé³⁾ über die algebraischen Differentialgleichungen 2. Ordnung hervorgeht. Dieser Fall tritt bei den bimolekularen und allen höhermolekularen Reaktionen ein.

§ 3. Das Problem der bimolekularen Reaktionen.

Ist die Reaktion insbesondere bimolekular, also in der allgemeinsten Form:



so lautet die zugehörige Differentialgleichung:

$$(9) \quad \frac{d^2 c_1}{dx^2} = Lc_1(c_1 - a_2 - b_2 x) - L' \cdot (-c_1 + a'_1 + b'_1 x) \cdot (-c_1 + a'_2 + b'_2 x);$$

sie hat also, falls man statt c_1 hier y schreibt, die Form:

$$(10) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = by^2 + (c_0 + c_1 x) \cdot y + d_0 + d_1 x + d_2 x^2,$$

worin $b, c_0, c_1, d_0, d_1, d_2$ Konstanten bedeuten.

1) A. a. O. S. 602—604.

2) A. a. O. S. 609—610.

3) Acta Mathematica 25, S. 1—85 (hier insbesondere S. 83), 1902.

Hier liegt der einfachste Fall vor, in dem eine Integration im elementaren Sinne unmöglich ist; die Lösung wurde früher in der Form gewöhnlicher Potenzreihen angegeben, die in der Umgebung von $x = 0$ konvergierten.¹⁾ In diesem Aufsätze soll nun der Fall der bimolekularen Reaktionen in anderer Weise behandelt werden, indem für die Integration eine neue von Painlevé²⁾ 1900 eingeführte Transzendente verwendet wird. Zuerst sollen jetzt die mathematischen Vorbereitungen hierfür getroffen werden.

§ 4. Eine neue Transzendente von Painlevé.

Vor allem zum Zwecke der Integration von Differentialgleichungen versuchte Painlevé systematisch neue eindeutige Funktionen aufzufinden, die von den klassischen höheren Transzendenten wesentlich verschieden wären. Da die algebraischen Differentialgleichungen 1. Ordnung nach einem Satze von Fuchs und Poincaré keine neuen eindeutigen Funktionen liefern können, so ging Painlevé zu den Differentialgleichungen 2. und höherer Ordnung über und untersuchte insbesondere zuerst alle Differentialgleichungen 2. Ordnung von der Form:

$$y'' = R(y', y, x),$$

wo R rational in y' , algebraisch in y und analytisch in x ist. Hierbei fand er 5 kanonische Differentialgleichungen 2. Ordnung, deren Integrale wesentlich neue eindeutige Funktionen darstellen³⁾:

$$y'' = 6y^2 + x,$$

$$y'' = 2y^3 + xy + \alpha,$$

$$y'' = \frac{y'^2}{y} + e^x(1 - y^2)$$

$$y'' = \frac{y'^2}{y} + e^x(\alpha y^2 + 1) - e^{2x}y^3,$$

$$y'' = \frac{y'^2}{y} + e^x(\alpha y^2 + \beta) + e^{2x}\left(\frac{1}{y} - y^3\right).$$

Die erste und einfachste derselben⁴⁾

$$(11) \quad y'' = 6y^2 + x$$

1) A. a. O. S. 616.

2) Bulletin de la Société mathématique de France 28, S. 201—261, 1900; ferner Acta Mathematica, a. a. O. Auch vergleiche man den kurzen Überblick, den J. Horn in seinen „Gewöhnlichen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung“, Leipzig 1905, S. 374—391, gibt; seine Bezeichnungen werden im folgenden öfters verwandt.

3) Acta Mathematica, a. a. O.

4) Vgl. auch P. Painlevé, Le problème moderne de l'intégration des équations différentielles, Verh. d. 3. Internat. Math.-Kongresses in Heidelberg 1904, Leipzig 1905, S. 86—99.

ist gerade für unser chemisches Problem von Bedeutung, da sich Gleichung (10) unter einer bestimmten Bedingung auf sie zurückführen läßt. Man kann nämlich, worauf Painlevé hinweist und was auch durch direkte Ausrechnung unmittelbar nachzuprüfen ist, die recht allgemeine Differentialgleichung

$$(12) \quad y'' = A(x) \cdot y' + B(x) \cdot y^2 + C(x) \cdot y + D(x)$$

auf die Form (11) bringen, falls zwischen den Funktionen $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$ eine gewisse Beziehung besteht.

Man setze zu diesem Zwecke:

$$(13) \quad X = \lambda(x), \quad y = \mu(x) \cdot Y + \nu(x);$$

dann nimmt Gl. (12) für

$$(13a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu = B^{-\frac{1}{5}} e^{\frac{2}{5} \int A dx}, \\ \lambda = X = \frac{1}{\sqrt{6}} \int B^{\frac{1}{2}} \mu^{\frac{1}{2}} dx, \\ 2 B \nu = -C + \frac{1}{5} \left[2 A' - \frac{B''}{B} + \frac{6}{5} \left(\frac{B'}{B^2} - A^2 \right) + \frac{1}{5} \frac{A B'}{B} \right] \end{array} \right.$$

die gewünschte Form an:

$$(14) \quad \frac{d^2 Y}{dX^2} = 6 Y^2 + X,$$

wenn folgende Bedingung identisch erfüllt wird:

$$(13b) \quad D + C \nu + B \nu^2 + A \nu' - \nu'' = \lambda \mu \lambda'^2.$$

§ 5. Transformation der Differentialgleichungen der bimolekularen Reaktionen.

Die Differentialgleichung, die wir behandeln wollen:

$$(10) \quad y'' = b y^2 + (c_0 + c_1 x) y + d_0 + d_1 x + d_2 x^2,$$

geht nun aus (12) hervor, wenn man setzt:

$$(15) \quad A(x) \equiv 0, \quad B(x) \equiv b, \quad C(x) \equiv c_0 + c_1 x, \quad D(x) \equiv d_0 + d_1 x + d_2 x^2.$$

Die Koeffizienten der Transformation (13), die Gl. (10) in die Gestalt (14) bringt, erhält man aus (13a) durch Berücksichtigung von (15) oder durchsichtiger durch direkte Ableitung. Es ergibt sich:

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu = m \\ \lambda = \sqrt{\frac{bm}{6}} x + l \\ \nu = -\frac{1}{2b} (c_0 + c_1 x), \end{array} \right.$$

wo m und l vorläufig noch unbestimmte Konstanten sind.

Die Bedingungsgleichung (13b) reduziert sich hier, da $A = 0$ und wegen (16) $v'' = 0$ ist, auf:

$$D + Cv + Bv^2 = \mu \lambda \lambda'^2.$$

Einsetzen der Werte von v , μ , λ , λ' ergibt:

$$\begin{aligned} d_0 + d_1 x + d_2 x^2 - \frac{1}{2b} (c_0 + c_1 x)^2 + \frac{1}{4b} (c_0 + c_1 x)^2 \\ = m \cdot \left(\sqrt{\frac{b\bar{m}}{6}} \right)^2 \cdot \left(\sqrt{\frac{b\bar{m}}{6}} x + l \right) \end{aligned}$$

oder nach Vereinfachung:

$$\begin{aligned} 36b d_0 + 36b d_1 x + 36b d_2 x^2 - 9c_0^2 - 18c_0 c_1 x - 9c_1^2 x^2 \\ = b^2 m^2 \sqrt{6b\bar{m}} \cdot x + 6b^2 m^2 l. \end{aligned}$$

Da diese Gleichung identisch erfüllt werden soll, so liefert die Vergleichung der Koeffizienten gleich hoher Potenzen von x links und rechts die 3 Beziehungen:

$$\begin{aligned} 36b d_2 - 9c_1^2 &= 0 \\ 36b d_1 - 18c_0 c_1 &= b^2 m^2 \sqrt{6b\bar{m}} \\ 36b d_0 - 9c_0^2 &= 6b^2 m^2 l. \end{aligned}$$

Nur die erste Gleichung, die vereinfacht lautet:

$$(17) \quad c_1^2 - 4b d_2 = 0,$$

ist eine Bedingungsgleichung zwischen den Koeffizienten der Gl. (10). Die anderen beiden Gleichungen bestimmen die oben noch willkürlich gebliebenen Konstanten m und l :

$$(18) \quad \begin{cases} m = \frac{1}{b} \sqrt[5]{54} (2b d_1 - c_0 c_1)^2 \\ l = \frac{3(4b d_0 - c_0^2)}{2b^2 m^2} = \frac{4b d_0 - c_0^2}{2 \sqrt[5]{12} (2b d_1 - c_0 c_1)^4}. \end{cases}$$

Die Bedeutung der Bedingung (17) ist diese:

„Die Differentialgleichung

$$(10) \quad y'' = by^2 + c_1 xy + d_2 x^2 + c_0 y + d_0 + d_1 x$$

läßt sich dann und nur dann in eine solche vom Typus nach Painlevé:

$$(14) \quad \frac{d^2 Y}{dX^2} = 6Y^2 + X$$

transformieren, wenn die Glieder 2. Grades, d. h.

$$by^2 + c_1 xy + d_2 x^2,$$

ein volles Quadrat bilden.“

Identisch erfüllt wäre diese Bedingung für $b = \beta^2$, $d_2 = \delta^2$, $c_1 = 2\beta\delta$, also für eine Gleichung von der Form:

$$y' = (\beta y + \delta x)^2 + c_0 y + d_0 + d_1 x;$$

sie hat nur 5 Koeffizienten, ebenso wie von den 6 Koeffizienten in (10) im Falle nach Painlevé nur 5 unabhängig sind.

Die Substitutionsformeln für (10) lauten nunmehr auf Grund von (13) und (16):

$$(19a) \quad \begin{cases} X = \sqrt{\frac{6}{bm}} \cdot x + l, \\ y = m Y - \frac{c_0}{2b} - \frac{c_1}{2b} x, \end{cases}$$

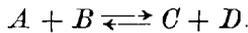
oder nach x und y aufgelöst:

$$(19b) \quad \begin{cases} x = \sqrt{\frac{6}{bm}} \cdot X - \sqrt{\frac{6}{bm}} \cdot l \\ y = m Y - \frac{c_1}{2b} \sqrt{\frac{6}{bm}} \cdot X + \frac{1}{2b} (c_1 l \sqrt{\frac{6}{bm}} - c_0), \end{cases}$$

worin m und l die in (18) angegebenen Werte haben.

Nunmehr werde die bedeutsame Bedingungsgleichung (17) für 3 ausgewählte Gattungen bimolekularer Reaktionen genauer diskutiert.

a) Zuerst komme wieder die allgemeinste bimolekulare Reaktion an die Reihe:



Ihre Differentialgleichung ist schon angegeben:

$$(9) \quad \frac{d^2 c_1}{dx^2} = Lc_1(c_1 - a_2 - b_2 x) - L' \cdot (-c_1 + a'_1 + b'_1 x) \cdot (-c_1 + a'_2 + b'_2 x).$$

Die Glieder 2. Grades der rechten Seite

$$(L - L')c_1^2 + (L'b'_1 + L'b'_2 - Lb_2)xc_1 - L'b'_1b'_2x^2$$

bilden ein volles Quadrat, wenn

$$(L'b'_1 + L'b'_2 - Lb_2)^2 + 4(L - L')L'b'_1b'_2 = 0$$

oder mehr symmetrisch:

$$(20) \quad L'^2(b'_1 - b'_2)^2 - 2LL'(b_2b'_1 + b_2b'_2 - 2b'_1b'_2) + L^2b_2^2 = 0;$$

hierin ist, wie sich aus (8a) ergibt:

$$(20a) \quad L = \frac{k}{D_2}, \quad L' = \frac{k'D_1}{D_1'D_1'}$$

Durch (20) wird den Integrationskonstanten b_2 , b'_1 , b'_2 und damit den Grenzbedingungen, durch die jene bestimmt werden, genau eine Bedingung auferlegt, damit die Reduktion auf die neue Funktion möglich ist. Da aber das vollständige Integral des unserer Reaktion ursprünglich entsprechenden Systems von 4 Differentialgleichungen 2. Ordnung

8 Integrationskonstanten enthält, denen also ∞^8 Lösungen zugehören, so sind unter diesen immerhin noch ∞^7 auf die Painlevésche Transzendente zurückführbare vorhanden. Für die ∞^1 übrigen bliebe allerdings nur noch der bereits früher eingeschlagene Weg der Taylorschen Reihenentwicklung (vgl. dazu oben § 3).

Um das Angeführte an einem Beispiel genauer zu zeigen, seien jetzt folgende sehr einfachen Grenzbedingungen angenommen¹⁾

$$(21) \quad \text{für } x=0 \text{ sei } \begin{cases} c_1 = C_1, & c_2 = C_2, & c'_1 = C'_1, & c'_2 = C'_2; \\ \frac{dc_1}{dx} = G_1, & \frac{dc_2}{dx} = G_2, & \frac{dc'_1}{dx} = G'_1, & \frac{dc'_2}{dx} = G'_2. \end{cases}$$

Mittels der Gl. (7) folgt dann:

$$(22) \quad b_2 = \frac{G_1 D_1 - G_2 D_2}{D_1}; \quad b'_1 = \frac{G_1 D_1 + G'_1 D'_1}{D_1}; \quad b'_2 = \frac{G_1 D_1 + G'_2 D'_2}{D_1}.$$

Unter Benutzung von (20a) und (22) geht jetzt (20) nach einer längeren elementaren Zwischenrechnung über in:

$$(23) \quad \begin{cases} \left(\frac{k}{D_1 D_2}\right)^2 \cdot (G_1 D_1 - G_2 D_2)^2 + \left(\frac{k'}{D'_1 D'_2}\right)^2 \cdot (G'_1 D'_1 - G'_2 D'_2)^2 \\ + 2 \left(\frac{k}{D_1 D_2}\right) \cdot \left(\frac{k'}{D'_1 D'_2}\right) \cdot [(G_1 D_1 + G_2 D_2)(G'_1 D'_1 + G'_2 D'_2)] \\ + 2 G_1 G_2 D_1 D_2 + 2 G'_1 G'_2 D'_1 D'_2 = 0. \end{cases}$$

Dies ist die Bedingungsgleichung für die Grenzbedingungs-Konstanten selbst. Von diesen treten in ihr nur die 4 Konzentrationsgradienten G_1, G_2, G'_1, G'_2 auf, nicht die Konzentrationen C_1, C_2, C'_1, C'_2 ; in den Koeffizienten sind die beiden Geschwindigkeitskoeffizienten k und k' der Reaktion, sowie die Diffusionskoeffizienten D_1, D_2, D'_1, D'_2 der 4 mitwirkenden Molekülgruppen enthalten, und zwar sämtliche Größen in symmetrischer Art.

b) Hierauf werde eine einfachere bimolekulare Reaktion betrachtet:



Die zugehörige Differentialgleichung folgt aus (8):

$$(24) \quad \frac{d^2 c}{dx^2} = Lc - L' \cdot (-c + a_1 + b'_1 x) \cdot (-c + a'_2 + b'_2 x).$$

Die Glieder des 2. Grades

$$-L'c^2 + L'(b'_1 + b'_2)xc - L'b'_1 b'_2 x^2$$

bilden ein Quadrat, falls

$$(25) \quad \begin{aligned} & (b'_1 + b'_2)^2 - 4b'_1 b'_2 = 0 \\ & b'_1 = b'_2. \end{aligned}$$

1) Vgl. a. a. O. S. 601 und 615.

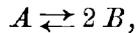
Dies ist die der verwickelteren Gleichung (20) des vorigen Falles entsprechende Bedingung zwischen den Integrationskonstanten; man hat hier statt ∞^6 nur ∞^5 auf die neue Transzendente reduzierbare Gleichungen.

Nimmt man darauf die Grenzbedingungen analog zu (21) an, so daß b'_1 und b'_2 dieselben Werte wie in (22) erhalten, so folgt aus (25) die sehr anschauliche Beziehung:

$$(26) \quad G'_1 : G'_2 = D'_2 : D'_1.$$

Es müssen sich also im Painlevéschen Fall die Konzentrationsgefälle der Stoffe B und C für $x = 0$ umgekehrt wie ihre Diffusionskoeffizienten verhalten.

c) Schließlich werde die überhaupt einfachste unter den bimolekularen Reaktionen betrachtet:



nämlich der umkehrbare Übergang eines Stoffes in sein einfachstes Polymeres, d. i. sein Dimeres.

Aus (8) erhält man die zugehörige Gleichung:

$$(27) \quad \frac{d^2 c}{dx^2} = Lc - L' \cdot (-c + a' + b'x)^2.$$

Die Glieder 2. Grades bilden hier offenbar *immer* ein *volles Quadrat*; die Bedingung (17) ist also *identisch* erfüllt und die Reduktion auf den Typus (14) in jedem Falle möglich.

Ebenso wie man nun z. B. die Funktion \sin am u mittels des ebenen hin- und hergehenden Pendels oder am u mittels des nach einer Richtung im Kreise herumschwingenden Pendels anschaulich erklären kann, so läßt sich jetzt eine *naturwissenschaftliche Deutung der Painlevéschen Transzendenten* $Y(X)$ geben. Die linear mit X, Y zusammenhängenden Variablen x, c (vgl. (19)) finden nämlich ihre anschauliche Deutung in der Konzentrationsverteilung des Stoffes A in dem stationären Zustande, den die umkehrbare chemische Reaktion $A \rightleftharpoons 2 B$ und gleichzeitige lineare Diffusion hervorrufen.

§ 6. Berechnung der Painlevéschen Transzendenten $y(x)$ und $\sigma(x)$.

Um nun die bimolekularen Reaktionen in den Fällen, in denen sie auf die Differentialgleichung (14) führen, auch numerisch behandeln zu können, ist die Berechnung der Painlevéschen Funktion $Y(X)$ erforderlich, was jetzt unternommen werden soll. Bei der selbständigeren Rolle dieses Paragraphen sei wieder die einfachere Bezeichnung $y(x)$ für die Transzendente angewandt und die definierende Differentialgleichung also wie früher geschrieben:

$$(11) \quad y'' = 6y^2 + x.$$

Zuerst sollen zwei von Painlevé eingeführte Hilfsfunktionen $\xi(x)$ und $\sigma(x)$ angegeben werden¹⁾, die für die folgende Berechnung grundlegend sind. Die Definitionsgleichungen der beiden Funktionen lauten:

$$(28) \quad y(x) = -\frac{d\xi(x)}{dx},$$

$$(29) \quad \xi(x) = \frac{d \log \sigma(x)}{dx} \equiv \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)}.$$

$\xi(x)$ ist also nur bis auf eine additive Konstante bestimmt, und ebenso $\log \sigma(x)$, daher $\sigma(x)$ selbst nur bis auf einen konstanten Faktor. Aus (28) und (29) folgt:

$$(30) \quad y(x) = -\frac{d^2 \log \sigma(x)}{dx^2} \equiv \frac{\sigma''^2 - \sigma \sigma''}{\sigma^3}.$$

Offenbar haben ξ und σ für die Funktion $y(x)$ dieselbe Bedeutung wie die gleichbezeichneten Funktionen der Weierstraßschen Theorie der elliptischen Funktionen für die Funktion $\wp(u)$.

Während nun $y(x)$ eine eindeutige Funktion ist, die im Endlichen unendlich viele Pole zweiter Ordnung besitzt, also sich meromorph verhält, hat $\sigma(x)$ außer der Stelle $x = \infty$ überhaupt keine singuläre Stelle, ist also eine *ganze transzendente Funktion* von x . Daher läßt sich $\sigma(x)$ in eine *beständig konvergente* Potenzreihe entwickeln. Legen wir nun der Funktion $y(x)$, da sie durch eine Differentialgleichung 2. Ordnung definiert wird, folgende beiden willkürlichen Grenzbedingungen auf:

$$(31) \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0,$$

so kann man $\sigma(x)$ auch in der Form darstellen²⁾:

$$(32) \quad \sigma(x) = \Sigma Q_n(x, x_0, y_0, y'_0),$$

worin die Q_n Polynome in bezug auf die eingeklammerten Größen und Σ eine unendliche Summation bedeuten; diese Reihe konvergiert dann für jedes reelle oder komplexe endliche x, x_0, y_0, y'_0 . Folglich läßt sich auf Grund von (30) und (32) $y(x)$ selbst in die Form eines *Quotienten zweier solcher für jedes reelle oder komplexe endliche x, x_0, y_0, y'_0 konvergenten Reihen* bringen²⁾:

$$(33) \quad y = \frac{\Sigma R_n(x, x_0, y_0, y'_0)}{\Sigma T_n(x, x_0, y_0, y'_0)}.$$

Auch existiert kein System von Werten x, x_0, y_0, y'_0 , für welches y die Form $\frac{0}{0}$ annimmt.²⁾

1) In der Bezeichnung nach Horn a. a. O.; Painlevé schreibt η und ξ statt ξ und σ .

2) Painlevé, Bulletin a. a. O. S. 248 und 249.

Um nun die den allgemeinen Ansätzen (32) und (33) entsprechenden Entwicklungen wirklich aufzustellen, sind zuerst die Differentialgleichungen für $\xi(x)$ und $\sigma(x)$ in explizite Gestalt zu bringen. Setzt man auf Grund von (28)

$$y = -\xi', \quad y' = -\xi'', \quad y'' = -\xi'''$$

in (11) ein, so folgt:

$$\xi''' + 6\xi'^2 + x = 0,$$

woraus sich alsbald durch Integration ergibt:

$$\frac{\xi''^2}{2} + 2\xi'^3 + x\xi' - \xi = \text{const.}$$

Da $\xi(x)$ aber, wie oben bemerkt, nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist, kann man die Integrationskonstante gleich Null annehmen. Also ist $\xi(x)$ durch folgende Differentialgleichung 2. Ordnung und 2. Grades definiert:

$$(34) \quad \frac{\xi''^2}{2} + 2\xi'^3 + x\xi' - \xi = 0.$$

Setzt man hierin gemäß (29)

$$(34a) \quad \xi = \frac{\sigma'}{\sigma}, \quad \xi' = \frac{\sigma\sigma'' - \sigma'^2}{\sigma^2}, \quad \xi'' = \frac{\sigma^2\sigma''' - 3\sigma\sigma'\sigma'' + 2\sigma'^3}{\sigma^3},$$

so erhält man folgende Differentialgleichung 3. Ordnung und 2. Grades für $\sigma(x)$:

$$(35) \quad \sigma^2\sigma'''^2 - 2\sigma'(3\sigma\sigma'' - 2\sigma'^2)\sigma''' + 4\sigma\sigma''^3 - 3\sigma'^2\sigma''^2 + 2x\sigma^3\sigma'' - 2x\sigma^2\sigma'^2 - 2\sigma^3\sigma' = 0.$$

Darauf setze man für $\sigma(x)$ von dem beliebigen Punkte $x = x_0$ aus die beständig konvergente Potenzreihe an:

$$\begin{aligned} \sigma(x) = & \sigma(x_0) + \frac{\sigma'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0) + \frac{\sigma''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \frac{\sigma'''(x_0)}{3!} (x - x_0)^3 \\ & + \frac{\sigma^{IV}(x_0)}{4!} (x - x_0)^4 + \frac{\sigma^V(x_0)}{5!} (x - x_0)^5 + \dots \end{aligned}$$

Da die definierende Differentialgleichung (35) dritter Ordnung ist, sind hierin 3 Koeffizienten willkürlich zu lassen, nämlich:

$$(36) \quad \sigma(x_0) = \sigma_0, \quad \sigma'(x_0) = \sigma'_0, \quad \sigma''(x_0) = \sigma''_0.$$

Da ferner $\sigma(x)$ nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt ist, darf man setzen:

$$(37) \quad \sigma(x_0) \equiv \sigma_0 = 1,$$

so daß nur noch σ'_0 und σ''_0 als beliebige Integrationskonstanten übrig bleiben, als deren Funktionen $\sigma'''(x_0)$, $\sigma^{IV}(x_0)$... darzustellen sind.

Der Ansatz lautet also nun:

$$(38) \quad \sigma(x) = 1 + \sigma'_0 \cdot (x - x_0) + \frac{\sigma''_0}{2} (x - x_0)^2 + \frac{\sigma'''_0(x_0)}{6} (x - x_0)^3 \\ + \frac{\sigma^{IV}(x_0)}{24} (x - x_0)^4 + \frac{\sigma^V(x_0)}{120} (x - x_0)^5 + \dots$$

Um nun gemäß

$$(30) \quad y(x) = \frac{\sigma'^2 - \sigma\sigma''}{\sigma^2}$$

für $y(x)$ selbst eine Darstellung mittels $\sigma(x)$ zu geben, bilde man aus (38):

$$\sigma'(x) = \sigma'_0 + \sigma''_0 \cdot (x - x_0) + \frac{\sigma'''_0(x_0)}{2} (x - x_0)^2 + \frac{\sigma^{IV}(x_0)}{6} (x - x_0)^3 \\ + \frac{\sigma^V(x_0)}{24} (x - x_0)^4 + \dots$$

$$\sigma''(x) = \sigma''_0 + \sigma'''(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\sigma^{IV}(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2 + \frac{\sigma^V(x_0)}{6} (x - x_0)^3 + \dots$$

$$\sigma(x)^2 = 1 + 2\sigma'_0 \cdot (x - x_0) + (\sigma_0'^2 + \sigma''_0) \cdot (x - x_0)^2 \\ + \left(\sigma'_0 \sigma''_0 + \frac{\sigma'''_0(x_0)}{3} \right) \cdot (x - x_0)^3 + \dots$$

$$\sigma'(x)^2 = \sigma_0'^2 + 2\sigma'_0 \sigma''_0 \cdot (x - x_0) + (\sigma_0''^2 + \sigma'_0 \cdot \sigma'''(x_0)) \cdot (x - x_0)^2 \\ + \left(\sigma''_0 \cdot \sigma'''(x_0) + \frac{\sigma_0' \cdot \sigma^{IV}(x_0)}{3} \right) \cdot (x - x_0)^3 + \dots$$

$$\sigma(x) \cdot \sigma''(x) = \sigma''_0 + (\sigma'_0 \sigma''_0 + \sigma'''(x_0)) \cdot (x - x_0) \\ + \left(\frac{\sigma_0''^2}{2} + \sigma'_0 \cdot \sigma'''(x_0) + \frac{\sigma^{IV}(x_0)}{2} \right) \cdot (x - x_0)^2 \\ + \left(\frac{2}{3} \sigma'_0 \sigma'''(x_0) + \frac{\sigma_0' \sigma^{IV}(x_0)}{2} + \frac{\sigma^V(x_0)}{6} \right) (x - x_0)^3 + \dots$$

Hiermit erhält man:

$$(39) \quad y(x) = \{ \sigma_0'^2 - \sigma''_0 + (\sigma'_0 \sigma''_0 - \sigma'''(x_0)) \cdot (x - x_0) \\ + \frac{1}{2} (\sigma_0''^2 - \sigma^{IV}(x_0)) \cdot (x - x_0)^2 \\ + \frac{1}{6} (2\sigma'_0 \sigma'''(x_0) - \sigma_0' \sigma^{IV}(x_0) - \sigma^V(x_0)) (x - x_0)^3 + \dots \} \\ : \{ 1 + 2\sigma'_0 \cdot (x - x_0) + (\sigma_0'^2 + \sigma''_0) \cdot (x - x_0)^2 \\ + \frac{1}{3} (3\sigma'_0 \sigma''_0 + \sigma'''(x_0)) \cdot (x - x_0)^3 + \dots \}.$$

Um diese Entwicklung in die Gestalt (33) zu bringen, hat man jetzt in die Koeffizienten statt σ'_0 , σ''_0 , $\sigma'''(x_0)$, $\sigma^{IV}(x_0)$... die Konstanten x_0 , y_0 , y'_0 einzuführen. Unmittelbar möglich ist dies für das Absolutglied des Zählers, indem man in (30) $x = x_0$ einsetzt und (31) sowie (37) beachtet:

$$(40) \quad \sigma_0'^2 - \sigma''_0 = y_0.$$

Bevor jedoch die Rechnung weitergeführt wird, sei (39) der Übersichtlichkeit wegen folgendermaßen umgeschrieben:

$$(41a) \quad y(x) = \frac{y_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \dots}{1 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + b_3(x - x_0)^3 + \dots}$$

worin:

$$(41b) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 = \sigma'_0 \sigma''_0 - \sigma'''(x_0) \\ a_2 = \frac{1}{2}(\sigma_0''^2 - \sigma^{IV}(x_0)) \\ a_3 = \frac{1}{6}(2\sigma_0'' \sigma'''(x_0) - \sigma'_0 \sigma^{IV}(x_0) - \sigma^V(x_0)) \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} b_1 = 2\sigma'_0 \\ b_2 = \sigma_0''^2 + \sigma_0'' \\ b_3 = \frac{1}{3}(3\sigma_0'' \sigma_0'' + \sigma'''(x_0)). \end{array} \right.$$

Jetzt sollen σ'_0 und σ''_0 durch x_0, y_0, y'_0 ausgedrückt werden. Gleichung (34) gibt für $x = x_0$:

$$\frac{\xi''(x_0)^2}{2} + 2\xi'(x_0)^3 + x_0 \xi'(x_0) - \xi(x_0) = 0.$$

Nun ist nach (29), (36) und (37) bzw. nach (28) und (31):

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi(x_0) = \sigma'_0 \\ \xi'(x_0) = -y_0, \quad \xi''(x_0) = -y'_0. \end{array} \right.$$

Also erhält man:

$$(43) \quad \sigma'_0 = \frac{1}{2}y_0'^2 - 2y_0^3 - x_0 y_0.$$

Mittels (40) folgt dann:

$$(44) \quad \sigma''_0 = \sigma_0''^2 - y_0 = \frac{1}{4}y_0'^4 - y_0'^2(2y_0^3 + x_0 y_0) + 4y_0^5 + 4x_0 y_0^4 + x_0^2 y_0^2 - y_0.$$

Damit lassen sich zwei Konstanten von (41 b) sofort angeben:

$$(45) \quad b_1 = y_0'^2 - 4y_0^3 - 2x_0 y_0.$$

$$(46) \quad b_2 = \frac{1}{2}y_0'^4 - 2y_0'^2(2y_0^3 + x_0 y_0) + 8y_0^5 + 8x_0 y_0^4 + 2x_0^2 y_0^2 - y_0.$$

Hierauf ist $\sigma'''(x_0)$ zu berechnen. Aus dem Ausdruck für ξ'' in (34 a) und (42) folgt bei Beachtung von (37) die „gemischte“ Formel:

$$(47) \quad \sigma'''(x_0) = 3\sigma'_0 \sigma''_0 - 2\sigma_0'^3 - y'_0.$$

Obwohl diese für das Folgende ausreicht, sei der Vollständigkeit halber auch die „reine“ Formel, die nur $x_0, \sigma'_0, \sigma''_0$ enthält, angegeben. Man drückt dazu y'_0 nach (43) aus und ersetzt hierin wieder y_0 nach (40):

$$(47a) \quad y'_0 = \sqrt{2\sigma'_0 - 2x_0(\sigma''_0 - \sigma_0''^2)} - 4(\sigma''_0 - \sigma_0''^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Aus (47) und (47a) ergibt sich jetzt, indem das Wurzelzeichen als doppeldeutig angesehen wird:

$$(48) \quad \sigma'''(x_0) = 3\sigma'_0 \sigma''_0 - 2\sigma_0'^3 - \sqrt{2\sigma'_0 - 2x_0(\sigma''_0 - \sigma_0''^2)} - 4(\sigma''_0 - \sigma_0''^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Diesen Wert erhält man auch direkt durch Auflösung der in σ''' quadratischen Differentialgleichung (35), nachdem man in ihr $x = x_0$ gesetzt hat.

Um jetzt $\sigma'''(x_0)$ allein durch x_0, y_0, y'_0 darzustellen, formt man (47) mittels (40) um:

$$(49) \quad \sigma'''(x_0) = \sigma_0'^3 - 3\sigma_0' y_0 - y_0'.$$

Wegen (43) hat man dann das gewünschte Resultat:

$$(50) \quad \begin{aligned} \sigma'''(x_0) = & \frac{1}{8} y_0'^6 - \frac{3}{2} y_0'^4 (y_0^3 + \frac{1}{2} x_0 y_0) \\ & + 3 y_0'^2 (2 y_0^6 + 2 x_0 y_0^4 + \frac{1}{2} x_0^2 y_0^2 - \frac{1}{2} y_0) \\ & - y_0' - 8 y_0^8 - 12 x_0 y_0^7 - 6 x_0^2 y_0^5 + 6 y_0^4 - x_0^3 y_0^3 + 3 x_0 y_0^2. \end{aligned}$$

Jetzt sind die beiden weiteren Konstanten a_1 und b_3 in (41 b) berechenbar. Man hat nach (40) und (49):

$$a_1 \equiv \sigma_0' \sigma_0'' - \sigma'''(x_0) = \sigma_0' (\sigma_0'^2 - y_0) - (\sigma_0'^3 - 3\sigma_0' y_0 - y_0')$$

oder:

$$a_1 = 2\sigma_0' y_0 + y_0',$$

folglich wegen (43):

$$(51) \quad a_1 = y_0 y_0'^2 + y_0' - 4 y_0^4 - 2 x_0 y_0^2.$$

Ferner hat man:

$$3b_3 \equiv 3\sigma_0' \sigma_0'' + \sigma'''(x_0) = 3(\sigma_0' \sigma_0'' - \sigma'''(x_0)) + 4\sigma'''(x_0),$$

d. h.

$$b_3 = a_1 + \frac{4}{3} \sigma'''(x_0);$$

also erhält man mittels (51) und (50):

$$(52) \quad \begin{aligned} b_3 = & \frac{1}{6} y_0'^6 - y_0'^4 (2 y_0^3 + x_0 y_0) + y_0'^2 (8 y_0^8 + 8 x_0 y_0^4 + 2 x_0^2 y_0^2 - y_0) \\ & - \frac{1}{3} y_0' - \frac{32}{3} y_0^9 - 16 x_0 y_0^7 - 8 x_0^2 y_0^5 + 4 y_0^4 - \frac{4}{3} x_0^3 y_0^3 + 2 x_0 y_0^2. \end{aligned}$$

Nunmehr werde $\sigma^{\text{IV}}(x_0)$ ermittelt. Differentiation der zugrunde liegenden Differentialgleichung (35) ergibt die neue Gleichung, die jetzt jedoch bezüglich des höchsten Differentialquotienten linear ist:

$$(53) \quad \begin{aligned} \sigma^{\text{IV}} \cdot (\sigma^2 \sigma''' - 3\sigma \sigma' \sigma'' + 2\sigma'^3) = & 2\sigma \sigma' \sigma'''^2 - 3\sigma \sigma''^2 \sigma''' + \sigma' \sigma''^3 \\ & + 4\sigma^2 \sigma'^2 - x \cdot (\sigma^3 \sigma''' + \sigma^2 \sigma' \sigma'' - 2\sigma \sigma'^3). \end{aligned}$$

Hieraus folgt unter Beachtung von (36) und (37):

$$(54) \quad \sigma^{\text{IV}}(x_0) = \frac{2\sigma_0' \sigma_0''^3 (x_0)^2 - 3\sigma_0''^2 \sigma_0'''(x_0) + \sigma_0' \sigma_0''^3 + 4\sigma_0'^2 - x_0 \cdot (\sigma_0'''(x_0) + \sigma_0' \sigma_0'' - 2\sigma_0'^3)}{\sigma_0'''(x_0) - 3\sigma_0' \sigma_0'' + 2\sigma_0'^3}.$$

Denkt man sich hierin $\sigma'''(x_0)$ nach (48) ersetzt, so hätte man den reinen Ausdruck von $\sigma^{\text{IV}}(x_0)$, der also nur x, σ_0', σ_0'' enthält, aber mit einer Quadratwurzel behaftet ist.

Am einfachsten drückt man jetzt sofort a_2 selbst durch $\sigma^{\text{IV}}(x_0)$ aus:

$$2a_2 = \sigma_0''^2 - \sigma^{\text{IV}}(x_0)$$

und führt hierin allmählich y_0, y_0' ein. Nach (47) wird (54), wenn Z seinen Zähler bedeutet:

$$\sigma^{\text{IV}}(x_0) = \frac{Z}{-y_0'};$$

also ist

$$2a_2 = \frac{y_0 \sigma_0''^2 + Z}{y_0}$$

$$= \frac{y_0 \sigma_0''^2 + 2\sigma_0' \sigma_0'''(x_0)^2 - 3\sigma_0''^2 \sigma_0'''(x_0) + \sigma_0' \sigma_0'''^3 + 4\sigma_0'^2 - x_0 \cdot (\sigma_0'''(x_0) + \sigma_0' \sigma_0'' - 2\sigma_0'^3)}{y_0}.$$

Hierin ersetzt man $\sigma_0'''(x_0)$ nach (47) durch σ_0' , σ_0'' und y_0' :

$$2a_2 \cdot y_0 = -8\sigma_0' \sigma_0''^3 + 24\sigma_0'^3 \sigma_0''^2 + 4y_0' \sigma_0''^2 - 24\sigma_0'^5 \sigma_0''$$

$$- 12y_0' \sigma_0'^2 \sigma_0'' - 4x_0 \sigma_0' \sigma_0'' + 8\sigma_0'^7 + 8y_0' \sigma_0'^4 + 4x_0 \sigma_0'^3$$

$$+ 4\sigma_0'^2 + 2\sigma_0' y_0'^2 + x_0 y_0'.$$

Nunmehr ersetzt man σ_0'' nach (40) durch σ_0' und y_0 und erhält, indem sich die höheren Potenzen von σ_0' , die anfangs bis zum 7. Grade aufsteigen, sämtlich bis auf diejenigen 2. und 1. Grades fortheben:

$$2a_2 \cdot y_0 = 4y_0 y_0' \sigma_0'^2 + 4\sigma_0'^2 + 2y_0'^2 \sigma_0' + 8y_0^3 \sigma_0' + 4x_0 y_0 \sigma_0' + 4y_0^3 y_0' + x_0 y_0'.$$

Endlich wird nun für σ_0' nach (43) x_0 , y_0 , y_0' eingeführt; dadurch erhält man den gewünschten Koeffizienten:

$$(55) \quad a_2 = \frac{1}{2} y_0' y_0'^4 + y_0'^3 - 2y_0'^2 (2y_0^4 + x_0 y_0^2) - 2y_0' (2y_0^3 + x_0 y_0)$$

$$+ 8y_0^7 + 8x_0 y_0^5 + 2x_0^2 y_0^3 + 2y_0^2 + \frac{1}{2} x_0.$$

Auch der Ausdruck von $\sigma^{IV}(x_0)$ in x_0 , y_0 , y_0' ist nunmehr wegen

$$\sigma^{IV}(x_0) = \sigma_0''^2 - 2a_2$$

nach (44) und (55) ziemlich leicht zu ermitteln:

$$(56) \quad \sigma^{IV}(x_0) = \frac{1}{16} y_0'^8 - y_0'^6 (y_0^3 + \frac{1}{2} x_0 y_0) + 3y_0'^4 (2y_0^5 + 2x_0 y_0^4 + \frac{1}{2} x_0^2 y_0^2 - \frac{1}{2} y_0)$$

$$- 2y_0'^3 - 2y_0'^2 (8y_0^6 + 12x_0 y_0^5 + 6x_0^2 y_0^4 - 6y_0^4 + x_0^3 y_0^3 - 3x_0 y_0^2)$$

$$+ 4y_0' (2y_0^3 + x_0 y_0) + 16y_0^{12} + 32x_0 y_0^{10} + 24x_0^2 y_0^8 - 24y_0^7$$

$$+ 8x_0^3 y_0^5 - 24x_0 y_0^4 + x_0^4 y_0^4 - 6x_0^2 y_0^3 - 3y_0^2 - x_0.$$

Um schließlich den letzten Koeffizienten a_3 in (41b), dessen Berechnung noch beabsichtigt, zu finden, müßte man sich durch Differentiation von (53) σ^V verschaffen und dann ähnlich wie soeben vorgehen. Da diese Rechnung aber ziemlich umständlich wäre, soll auf sie verzichtet und weiter unten ein einfacherer Weg eingeschlagen werden.

Vorher werde noch direkt gezeigt, daß die Funktion (41a) mit den soeben berechneten Koeffizienten a_1 , a_2 , b_1 , b_2 den Grenzbedingungen (31) und der Differentialgleichung (11) genügt.

Zur Abkürzung schreibe man:

$$(57) \quad x - x_0 = \xi,$$

und daher:

$$(58) \quad y(x) = \frac{y_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3 + \dots}{1 + b_1 \xi + b_2 \xi^2 + b_3 \xi^3 + \dots}.$$

Hieraus folgt für $x = x_0$, also $\xi = 0$, sofort:

$$y(x_0) = y_0$$

im Einvernehmen mit (31).

Differentiation von (58) nach x gibt, wenn man nach Potenzen von ξ ordnet:

$$(59) \quad y'(x) = \frac{(a_1 - b_1 y_0) + 2(a_2 - b_2 y_0)\xi + (a_2 b_1 - a_1 b_2 + 3(a_3 - b_3 y_0))\xi^2 + \dots}{1 + 2b_1 \xi + (b_1^2 + 2b_2)\xi^2 + \dots}$$

Daraus ergibt sich für $x = x_0$:

$$y'(x_0) = a_1 - b_1 y_0.$$

Setzt man hierin die Werte von a_1 und b_1 nach (51) und (45) ein, so erhält man:

$$y'(x_0) = y'_0,$$

wie nach (31) notwendig. Die Grenzbedingungen sind also beide erfüllt, und zugleich ergibt sich die Identität:

$$(60) \quad a_1 - b_1 y_0 = y'_0.$$

Nun differenziere man auch (59) nach x :

$$(61) \quad y''(x) = \frac{2(a_2 - b_2 y_0) - 2b_1(a_1 - b_1 y_0) + (2(a_2 b_1 - a_1 b_2) + 6(a_3 - b_3 y_0) - 2(a_1 - b_1 y_0)(b_1^2 + 2b_2))\xi + \dots}{1 + 4b_1 \xi + \dots}$$

Für $x = x_0$ erhält man:

$$y''(x_0) = 2(a_2 - b_2 y_0) - 2b_1(a_1 - b_1 y_0).$$

Benutzt man (60) und die Werte von a_2 , b_2 und b_1 nach (55), (46) und (45), so ist:

$$y''(x_0) = 6y_0^2 + x_0.$$

Dieses Resultat erhält man auch aus der Differentialgleichung (11) selbst für $x = x_0$, so daß diese Probe ebenfalls stimmt. Zugleich kann man die Identität anmerken:

$$(62) \quad 2(a_2 - b_2 y_0) - 2b_1 y'_0 = 6y_0^2 + x_0.$$

Jetzt setze man zur Abkürzung wieder entsprechend (58):

$$y''(x) = \frac{A_0 + A_1 \xi + \dots}{1 + B_1 \xi + \dots};$$

dann folgt analog zu der oben abgeleiteten Formel $y'(x_0) = a_1 - b_1 y_0$ hier sofort:

$$y'''(x_0) = A_1 - A_0 B_1,$$

oder nach Einsetzen der Werte:

$$y'''(x_0) = 2(a_2 b_1 - a_1 b_2) + 6(a_3 - b_3 y_0) - 2(a_1 - b_1 y_0)(b_1^2 + 2b_2) - 4b_1 \{2(a_2 - b_2 y_0) - 2b_1 \cdot (a_1 - b_1 y_0)\}.$$

Nun folgt aus (11) durch Differenzieren und Einsetzen von $x = x_0$:

$$y'''(x_0) = 12y_0 y'_0 + 1.$$

Benutzt man diese Beziehung sowie (60) und (62), so erhält man:

$$(63) \quad 2(a_2 b_1 - a_1 b_2) + 6(a_3 - b_2 y_0) - 2y_0'(b_1^2 + 2b_2) - 4b_1 \cdot (6y_0^2 + x_0) = 12yy_0' + 1.$$

Da hierin a_3 noch unbekannt ist, kann diese Gleichung nicht als Identität gelten; wohl aber kann man mittels derselben umgekehrt a_3 durch die viel einfacheren sämtlich bekannten Koeffizienten a_1, a_2, b_1, b_2, b_3 ausdrücken und so berechnen. In ähnlicher Weise wäre dies auch schon für a_1 und a_2 mittels (60) bzw. (62) möglich gewesen. Man erhält auf diesem schon oben angekündigten Wege:

$$(63a) \quad 6a_3 = 6y_0 b_3 + 2y_0' b_1^2 + 4y_0' b_2 + (24y_0^2 + 4x_0) \cdot b_1 + 2a_1 b_2 - 2a_2 b_1 + 12y_0 y_0' + 1$$

oder mittels (51), (55), (45), (46), (52):

$$(64) \quad a_3 = \frac{1}{6} y_0 y_0'^6 + \frac{1}{2} y_0'^5 - 2y_0^4 y_0'^4 - x_0 y_0^2 y_0'^4 - 2y_0'^3 \cdot (2y_0^3 + x_0 y_0) + y_0'^2 (8y_0^7 + 8x_0 y_0^5 + 2x_0^2 y_0^3 + 2y_0^2 + \frac{1}{2} x_0) + 2y_0' (4y_0^6 + 4x_0 y_0^4 + x_0^2 y_0^2 + \frac{1}{3} y_0) - \frac{32}{3} y_0^{10} - 16x_0 y_0^8 - 8x_0^2 y_0^6 - 8y_0^5 - \frac{4}{3} x_0^2 y_0^4 - 6x_0 y_0^3 - x_0^2 y_0 + \frac{1}{6}.$$

Dieses Verfahren könnte man allgemein fortsetzen, indem man immer durch direkte Berechnung (mittels aufeinander folgender Differentiationen der Differentialgleichung für $\sigma(x)$) nur die einfacheren Koeffizienten b_n des Nenners und aus ihnen dann (mittels aufeinander folgender Differentiationen der Differentialgleichung und des Reihenquotienten für $y(x)$) mit Zuhilfenahme von $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1$ die verwickelteren Koeffizienten a_n des Zählers findet.

Unser Ergebnis, die für jedes x, x_0, y_0, y_0' gültige Reihenentwicklung für die Painlevésche meromorphe Transzendente $y(x)$, sei hier noch einmal zusammengefaßt:

$$y(x; x_0, y_0, y_0') = \frac{y_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \dots}{1 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + b_3(x - x_0)^3 + \dots},$$

worin:

$$\begin{aligned} a_1 &= y_0 y_0'^2 + y_0' - 4y_0^4 - 2x_0 y_0^2, \\ a_2 &= \frac{1}{2} y_0 y_0'^4 + y_0'^3 - 2y_0'^2 \cdot (2y_0^4 + x_0 y_0^2) - 2y_0' \cdot (2y_0^3 + x_0 y_0) + 8y_0^7 + 8x_0 y_0^5 + 2x_0^2 y_0^3 + 2y_0^2 + \frac{1}{2} x_0, \\ a_3 &= \frac{1}{6} y_0 y_0'^6 + \frac{1}{2} y_0'^5 - 2y_0^4 y_0'^4 - x_0 y_0^2 y_0'^4 - 2y_0'^3 \cdot (2y_0^3 + x_0 y_0) + y_0'^2 (8y_0^7 + 8x_0 y_0^5 + 2x_0^2 y_0^3 + 2y_0^2 + \frac{1}{2} x_0) + 2y_0' (4y_0^6 + 4x_0 y_0^4 + x_0^2 y_0^2 + \frac{1}{3} y_0) - \frac{32}{3} y_0^{10} - 16x_0 y_0^8 - 8x_0^2 y_0^6 - 8y_0^5 - \frac{4}{3} x_0^2 y_0^4 - 6x_0 y_0^3 - x_0^2 y_0 + \frac{1}{6}, \\ b_1 &= y_0'^2 - 4y_0^3 - 2x_0 y_0, \\ b_2 &= \frac{1}{2} y_0'^4 - 2y_0'^2 \cdot (2y_0^3 + x_0 y_0) + 8y_0^6 + 8x_0 y_0^4 + 2x_0^2 y_0^2 - y_0, \\ b_3 &= \frac{1}{6} y_0'^6 - y_0'^4 (2y_0^3 + x_0 y_0) + y_0'^2 \cdot (8y_0^5 + 8x_0 y_0^3 + 2x_0^2 y_0^2 - y_0) - \frac{1}{3} y_0' - \frac{32}{3} y_0^9 - 16x_0 y_0^7 - 8x_0^2 y_0^5 + 4y_0^4 - \frac{4}{3} x_0^2 y_0^3 + 2x_0 y_0^2. \end{aligned}$$

Zugleich ergab sich für die ebenfalls neue, ganze transzendente Funktion $\sigma(x)$ folgende beständig konvergente Reihe:

$$\sigma(x; x_0, y_0, y_0') = 1 + \sigma_0' \cdot (x - x_0) + \frac{\sigma_0''}{2} \cdot (x - x_0)^2 + \frac{\sigma_0'''(x_0)}{6} (x - x_0)^3 + \frac{\sigma_0^{IV}(x_0)}{24} (x - x_0)^4 + \dots,$$

worin:

$$\begin{aligned} \sigma_0' &= \frac{1}{2} y_0'^2 - 2y_0^3 - x_0 y_0, \\ \sigma_0'' &= \frac{1}{4} y_0'^4 - y_0'^2 \cdot (2y_0^5 + x_0 y_0) + 4y_0^6 + 4x_0 y_0^4 + x_0^2 y_0^3 - y_0, \\ \sigma_0'''(x_0) &= \frac{1}{8} y_0'^6 - \frac{3}{2} y_0'^4 (y_0^5 + \frac{1}{2} x_0 y_0) + 3y_0'^2 \cdot (2y_0^6 + 2x_0 y_0^4 + \frac{1}{2} x_0^2 y_0^3 - \frac{1}{2} y_0) \\ &\quad - y_0' - 8y_0^8 - 12x_0 y_0^7 - 6x_0^2 y_0^5 + 6y_0^4 - x_0^3 y_0^3 + 3x_0 y_0^2, \\ \sigma_0^{IV}(x_0) &= \frac{1}{16} y_0'^8 - y_0'^6 \cdot (y_0^5 + \frac{1}{2} x_0 y_0) + 3y_0'^4 \cdot (2y_0^6 + 2x_0 y_0^4 + \frac{1}{2} x_0^2 y_0^3 - \frac{1}{2} y_0) \\ &\quad - 2y_0'^3 - 2y_0'^2 \cdot (8y_0^8 + 12x_0 y_0^7 + 6x_0^2 y_0^5 - 6y_0^4 + x_0^3 y_0^3 - 3x_0 y_0^2) \\ &\quad + 4y_0' \cdot (2y_0^5 + x_0 y_0) + 16y_0^{12} + 32x_0 y_0^{10} + 24x_0^2 y_0^8 - 24y_0^7 \\ &\quad + 8x_0^3 y_0^6 - 24x_0 y_0^5 + x_0^4 y_0^4 - 6x_0^2 y_0^3 - 3y_0^2 - x_0. \end{aligned}$$

§ 7. Spezielle Behandlung der Reaktion $A \rightleftharpoons 2B$.

Mittels der in den vorhergehenden Paragraphen vorbereiteten analytischen Hilfsmittel soll nun an dem Beispiel der einfachsten bimolekularen Reaktion



die, wie nachgewiesen, immer auf die Painlevésche Funktion führt, die mathematische Bearbeitung vollständig durchgeführt werden.

Die Konzentrationen seien

$$\text{für } A: c, \quad \text{für } B: c'.$$

Gemäß (6) sind dann die Differentialgleichungen des stationären Zustandes:

$$(65) \quad \begin{cases} D \frac{d^2 c}{dx^2} = kc - k'c'^2, \\ D' \frac{d^2 c'}{dx^2} = -2(kc - k'c'^2). \end{cases}$$

Als Grenzbedingungen seien die in unserem Zusammenhange mathematisch einfachsten gewählt (ähnlich wie oben (21)):

$$(66) \quad \text{für } x = 0 \text{ sei } \begin{cases} c = C, & c' = C', \\ \frac{dc}{dx} = G, & \frac{dc'}{dx} = G'; \end{cases}$$

doch wären auch andere Annahmen der Rechnung zugänglich, z. B. statt

der zweiten Zeile, von (66) folgende: für $x = \lambda$ sei $c = \gamma$, $c' = \gamma'$; vgl. die frühere Arbeit des Verfassers¹⁾).

Ein Integral von (65) erhält man sofort:

$$(67) \quad c + \frac{D'}{2D} c' = a' + b'x.$$

Hierin sind a' und b' Integrationskonstanten, die sich mittels der Grenzbedingungen bestimmen; in unserem Falle hat man wegen (66):

$$(68) \quad a' = C + \frac{D' C'}{2D}, \quad b' = G + \frac{D' G'}{2D}.$$

Aus (65) und (67) folgt nun für c allein die Differentialgleichung:

$$(69) \quad \frac{d^2 c}{dx^2} = Lc - L' \cdot (a' + b'x - c)^2,$$

worin

$$(69a) \quad L = \frac{k}{D}, \quad L' = \frac{4k'D}{D'^2}.$$

Nach Ausführung der Multiplikation lautet (69):

$$\frac{d^2 c}{dx^2} = -L'c^2 + (L + 2L'a')c + 2L'b'xc - L'a'^2 - 2L'a'b'x - L'b'^2x^2.$$

Sie geht in folgende der Gleichung (10) analoge Form über, indem hier nur statt des früheren y der Buchstabe c beibehalten werde:

$$(70) \quad \frac{d^2 c}{dx^2} = bc^2 + c_0 \cdot c + c_1 \cdot xc + d_0 + d_1x + d_2x^2,$$

wenn man setzt:

$$(70a) \quad \begin{cases} b = -L', & d_0 = -L'a'^2, \\ c_0 = L + 2L'a', & d_1 = -2L'a'b', \\ c_1 = 2L'b', & d_2 = -L'b'^2. \end{cases}$$

Um nunmehr die Gleichung (70) mit den Variablen x, c auf die Form (14) mit den Variablen X, Y zu bringen, benutzt man die Substitutionsformeln:

$$(19a) \quad \begin{cases} X = \sqrt{\frac{bm}{6}} \cdot x + l, \\ c = mY - \frac{c_0}{2b} - \frac{c_1}{2b} \cdot x. \end{cases}$$

Die Werte von m und l sind bestimmt durch:

$$(18) \quad \begin{cases} m = \frac{1}{b} \sqrt[5]{54(2bd_1 - c_0c_1)^2}, \\ l = \frac{3(4bd_0 - c_0^2)}{2b^2m^2}. \end{cases}$$

1) Zeitschr. f. phys. Chemie, a. a. O., S. 612—615.

Unter Benutzung von (70a) erhält man nun:

$$(71) \quad \begin{cases} m = -\frac{1}{L} \sqrt[5]{216 L^2 L' a' b'^2}, \\ l = -\frac{L(L+4L'a')}{4 \sqrt[5]{6 L^4 L'^4 b'^4}}; \\ \sqrt{\frac{b'm}{6}} = \sqrt[5]{\frac{\varepsilon L L' b'}{6}}, \\ -\frac{c_0}{2b} = \frac{L}{2L'} + a', \quad -\frac{c_1}{2b} = b', \end{cases}$$

worin $\varepsilon = +1$ oder -1 ist, und hiermit die gewünschten Substitutionsgleichungen:

$$(72) \quad \begin{cases} X = \sqrt[5]{\frac{\varepsilon L L' b'}{6}} \cdot x - \frac{L(L+4L'a')}{4 \sqrt[5]{6 L^4 L'^4 b'^4}}, \\ c = -\frac{1}{L'} \cdot \sqrt[5]{216 L^2 L'^2 b'^2} \cdot Y + b' \cdot x + \frac{L}{2L'} + a'. \end{cases}$$

Für die durch diese Transformation entstehende neue Differentialgleichung:

$$(14) \quad \frac{d^2 Y}{dX^2} = 6 Y^2 + X$$

erhält man aus (72) und (66) folgende (31) entsprechenden Konstanten der Anfangsbedingungen:

$$(73) \quad \begin{cases} X_0 = l, \quad Y_0 = \left(C - \frac{L}{2L'} - a'\right) : m, \\ Y'_0 = (G - b') : m \sqrt{\frac{b'm}{6}}; \end{cases}$$

oder in mehr entwickelter Form:

$$(73^*) \quad \begin{cases} X_0 = -\frac{L(L+4L'a')}{4 \sqrt[5]{6 L^4 L'^4 b'^4}}, \\ Y_0 = \frac{L+2L'(a'-C)}{2 \sqrt[5]{216 L^2 L'^2 b'^2}}, \\ Y'_0 = \frac{L'(b'-G)}{\sqrt[5]{36 \varepsilon L^3 L'^3 b'^3}}. \end{cases}$$

Sollen in den Formeln statt a' , b' , L und L' die eigentlichen naturwissenschaftlichen Größen explizit auftreten, so erhält man mittels (68) und (69a):

$$(71a) \quad \begin{cases} m = -\frac{D'}{2k'D^2} \cdot \sqrt[5]{27 k^2 k'^2 D^3 D' \cdot (2GD + G'D)^2}, \\ l = -\frac{k^2 D'^2 + 8kk'D(2CD + C'D)}{8D \sqrt[5]{3k^4 k'^4 D D'^2 \cdot (2GD + G'D)^4}}; \end{cases}$$

daher weiter:

$$(72a) \left\{ \begin{aligned} X &= \sqrt[5]{\frac{\varepsilon k k' (2GD + G'D')}{3DD'^2}} \cdot x - \frac{k^2 D'^2 + 8kk'D(2CD + C'D')}{8D \sqrt[5]{3k^4 k'^4 DD'^2 (2GD + G'D')^4}}, \\ c &= -\frac{D'}{2k'D^2} \cdot \sqrt[5]{27k^2 k'^2 D^3 D' (2GD + G'D')^2} \cdot Y \\ &+ \frac{2GD + G'D'}{2D} \cdot x + \frac{kD'^2}{8k'D^2} + \frac{2CD + C'D'}{2D}; \end{aligned} \right.$$

und endlich:

$$(73a) \left\{ \begin{aligned} X_0 &= -\frac{k^2 D'^2 + 8kk'D(2CD + C'D')}{8D \sqrt[5]{3k^4 k'^4 DD'^2 (2GD + G'D')^4}}, \\ Y_0 &= \frac{kD' + 4k'DC'}{4 \sqrt[5]{27k^2 k'^2 D^3 D' \cdot (2GD + G'D')^2}}, \\ Y'_0 &= \frac{k'DD'G'}{\sqrt[5]{9\varepsilon k^5 k'^5 D^2 D'^4 \cdot (2GD + G'D')^6}}. \end{aligned} \right.$$

Aus (73a) erkennt man, daß $Y'_0 = 0$ ist, wenn $G' = 0$ ist. Ist außer G' auch G gleich Null, soartet unsere Lösung aus, indem dann X_0 und Y_0 unendlich werden. In der Tat ist dann auf Grund von (68) auch $b' = 0$ und daher die Differentialgleichung (69) unmittelbar durch elliptische Funktionen lösbar.¹⁾

Mittels der angegebenen Anfangswerte X_0, Y_0, Y'_0 bildet man nun die am Schlusse des vorigen Paragraphen angeschriebene Reihenentwicklung für die Funktion $Y(X; X_0, Y_0, Y'_0)$, die die Lösung der Differentialgleichung (14) darstellt.

Um jetzt für einen beliebigen Wert der Koordinate x die Konzentration c des Stoffes A zu berechnen, bestimmt man mittels der ersten Formel von (72) oder (72a) das zugehörige X , dann mittels der Reihenentwicklung den Wert von Y und hieraus mit Hilfe der zweiten Formel von (72) bzw. (72a) die gesuchte Größe c . Die Konzentration c' von B findet man sodann mittels der aus (67) hervorgehenden Beziehung:

$$(74) \quad c' = \frac{2D}{D'} \cdot (a' + b'x - c).$$

Damit ist die Konzentrationsverteilung im stationären Zustand der mit linearer Diffusion verbundenen Reaktion $A \rightleftharpoons 2B$ vollständig ermittelt.

§ 8. Ein Zahlenbeispiel.

Zum Schlusse sei für die im vorigen Paragraphen behandelte Reaktion $A \rightleftharpoons 2B$ unter den dort gewählten Grenzbedingungen (66)

1) Vgl. oben § 2 am Ende sowie Zeitschr. f. phys. Chemie, a. a. O., S. 602—604.

ein Zahlenbeispiel gegeben. Es möge sein (in willkürlichen Einheiten):

$$\begin{aligned} k &= 2, & k' &= 5, & D &= 0,05, & D' &= 0,01, \\ C &= 1, & C' &= 0,1, & G &= -0,5, & G' &= 0. \end{aligned}$$

Dann ist nach (68) und (69a):

$$a' = 1,01, \quad b' = -0,5, \quad L = 40, \quad L' = 10000.$$

Nach (71) ergibt sich nun:

$$m = -0,02 \cdot \sqrt[5]{27} = -0,0386634, \quad l = -\frac{20,22}{\sqrt[5]{3}} = -16,2315,$$

$$\sqrt[5]{\frac{b'm}{6}} = \frac{10}{\sqrt[5]{3}} = 8,0275, \quad -\frac{c_0}{2b} = \frac{L}{2L'} + a' = 1,012, \quad -\frac{c_1}{2b} = b' = -0,5;$$

hierbei ist $\varepsilon = -1$ angenommen worden.

Also lauten die Substitutionsgleichungen (19a) oder (72) hier:

$$(S) \quad \begin{cases} X = 8,0275 \cdot x - 16,2315, \\ c = -0,0386634 \cdot Y - 0,5 \cdot x + 1,012. \end{cases}$$

Die Konstanten der Anfangsbedingungen der transformierten Gleichung sind nach (73):

$$X_0 = l = -16,2315, \quad Y_0 = \frac{0,012}{-m} = \frac{0,6}{\sqrt[5]{27}} = 0,310371, \quad Y'_0 = 0.$$

Die Gleichung (74) wird:

$$(T) \quad c' = 10,1 - 5x - 10c.$$

Zur Berechnung der Koeffizienten des Quotienten $Y(X; X_0, Y_0, Y'_0)$, die nunmehr erfolgen soll, benutzt man einfacher nicht die expliziten Endformeln, sondern geeignete Zwischenformeln aus dem Gange der Rechnung in § 6; das Verschwinden von Y'_0 ist immer sogleich berücksichtigt worden.

Aus (43) und (44) erhält man:

$$\begin{aligned} \sigma'_0 &= -2Y_0^3 - X_0Y_0 = 4,9780, \\ \sigma''_0 &= \sigma_0'^2 - Y_0 = 24,4696. \end{aligned}$$

Folglich hat man nach (41b):

$$\begin{aligned} b_1 &= 2\sigma'_0 = 9,9560, \\ b_2 &= \sigma_0'^2 + \sigma_0 = 49,2496; \end{aligned}$$

ferner nach (60):

$$a_1 = b_1 \cdot Y_0 = 3,09000.$$

Nunmehr findet man nach (49):

$$\sigma'''(X_0) = \sigma_0'^3 - 3\sigma'_0Y_0 = 118,718;$$

hiermit sodann nach einer auf (51) folgenden Formel:

$$b_3 = a_1 + \frac{4}{3} \cdot \sigma'''(X_0) = 161,383.$$

Sodann ergibt sich nach (62) und (63a):

$$a_2 = Y_0 b_2 + 3 Y_0^2 + \frac{1}{2} X_0 = 7,4591,$$

$$a_3 = Y_0 b_3 + (4 Y_0^2 + \frac{2}{3} X_0) \cdot b_1 + \frac{1}{3} (a_1 b_2 - a_2 b_1) + \frac{1}{6} = - 27,667.$$

Die Entwicklung für Y lautet also:

$$(U) \quad Y(X) = \frac{0,310371 + 3,09000 \cdot \xi + 7,4591 \cdot \xi^2 - 27,667 \xi^3 + \dots}{1 + 9,9560 \cdot \xi + 49,2496 \cdot \xi^2 + 161,383 \xi^3 + \dots},$$

worin $\xi = X - X_0$ ist, also wegen (S) in Zahlen:

$$(S') \quad \xi = X + 16,2315 = 8,0275 \cdot x.$$

Indem man jetzt für beliebige x mittels (S') das zugehörige ξ , dann mittels (U) hierzu Y , hierauf mittels der zweiten Gleichung von (S) den Wert c und endlich durch (T) die letzte Größe c' bestimmt, erhält man z. B. folgende kleine Tabelle:

x	ξ	Y	c	c'
0	0	0,31037	1	0,1
0,000124571	0,001	0,31037	0,99994	0,1000
0,00124571	0,01	0,30960	0,99941	0,0997
0,00373713	0,03	0,3036	0,99839	0,0974
0,0124571	0,1	0,252	0,9960	0,078

Für größere Werte von x ist die Konvergenz der Entwicklung (U) so schwach, daß man weitere Koeffizienten $a_4, a_5 \dots, b_4, b_5 \dots$ berechnen müßte, um c und c' mit ausreichender Genauigkeit zu finden.

Hiermit möge die Behandlung der chemischen Kinetik mittels der Painlevéschen Transzendenten abgeschlossen werden.

Technisches Abhandlungsregister 1906—1907.

Von E. WÖLFFING in Stuttgart.

(Fortsetzung von S. 336.)

Elektrizität.

- 3641.** *H. Abraham et Devaux-Charbonnel.* The propagation of telephonic currents through underground conductors. T.E. 60. 752.
- 3642.** *W. Akemann.* Über die wirk-
same Kapazität von Starkstromkabeln und
ihre einseitliche Messung mit Gleich-
strom. E.Z. 28. 6.
- 3643.** *W. Akemann.* On the effective
capacities of cables and their determi-
nation by the ballistic method. T.E. 58.
645.
- 3644.** *H. Armagnat.* The electrolytic
detector. T.E. 58. 461.
- 3645.** *E. Arnold.* Einiges über Wende-
polmaschinen und kompensierte Maschi-
nen. Zahl der Wendepole. E.Z. 27.
717; 916. — *M. Breslauer.* 917. —
W. Oelschläger. 1055.
- 3646.** *E. Arnold.* Verteilung des
Kraftflusses in einer Maschine mit Wende-
polen. E.Z. 27. 261; 714. — *R. Pohl.*
713. — *Pelikan.* 28. 66.
- 3647.** *E. Arnold.* Über die Unter-
suchung von Dynamobürsten. E.T.M.
24. 616. — *M. Latour.* 834.
- 3648.** *E. Arnold.* Brush contact resi-
stance. T.E. 58. 14.
- 3649.** *E. Arnold.* Reihenparallelanker
mit Äquipotentialverbindungen. E.Z. 27.
625.
- 3650.** *E. Arnold.* Series-parallel arma-
ture winding with equipotential connec-
tions. E.W. 48. 88; 130; T.E. 57. 322;
450.
- 3651.** *E. Arnold, J. L. la Cour.* Ein
neuer Einphasen-Kommutatormotor. E.
Z. 27. 894.
- 3652.** *G. Athanasiadis.* Measuring
of inductances with the differential
electrometer. T.E. 60. 262.
- 3653.** *K. Bädcker.* Resistance and
thermoelectric force of oxides and sul-
phides. T.E. 59. 234.
- 3654.** *C. Bäumler.* Über einige Wick-
lungsanordnungen zur Erzeugung har-
monischer elektromotorischer Kräfte. E.
Z. 27. 880.
- 3655.** *B. F. Bailey.* Maximum effi-
ciency of a storage battery. E.W. 47.
829.
- 3656.** *F. G. Baily and W. S. H. Cleg-
horne.* Some phenomena of commutation.
T.E. 58. 202; 365.
- 3657.** *P. Barreca.* The working of
Poulsens wave generator. T.E. 60. 522.
- 3658.** *P. Bary.* Actions mécaniques
du courant dans les conducteurs élec-
triques. E.E. 51. 37.
- 3659.** *P. Bary.* Mechanical action of
currents on conductors. T.E. 59. 829.
- 3660.** *A. Battelli and L. Magri.* The
oscillatory discharge in iron wires. T.
E. 59. 516.
- 3661.** *F. G. Baum.* Economical con-
ductor section. E.W. 49. 1029.
- 3662.** *F. Beaulard.* The dielectric
constant of ice. T.E. 59. 392.
- 3663.** *E. Beckmann.* Gleichstrom-Am-
pèrestundenzähler mit umlaufendem
Anker. E.Z. 27. 647; 761. — *J. Busch.*
761.
- 3664.** *F. Bedell and E. B. Tuttle.*
Effect of iron in distorting alternating
current wave form. T.E. 58. 130.
- 3665.** *G. Benischke.* Resonanz bei un-
vollkommenen Kondensatoren. E.Z. 27.
693; 869; 870. — *H. Zipp.* 868. — *P.
Müller.* 869.
- 3666.** *G. Benischke.* Elektrische Kraft
und Durchschlagsfestigkeit in 2 hinter-
einander geschalteten Isolierstoffen. E.
Z. 28. 95; 235; 236. *F. Emde.* 235. —
R. Nagel. 236.
- 3667.** *G. Benischke.* F. G. Baums
Formel für die Spannungserhöhung bei
Unterbrechen eines Stromes. E.Z. 27.
258.

- 3668.** *G. Benischke.* Der Einfluß eines sekundären Stromes auf Überspannung und Funkenbildung bei Stromunterbrechung. E.T.M. 24. 923.
- 3669.** *G. Benischke.* Die Abhängigkeit des Hystereseverlustes von der Wellenform bei legiertem Eisenblech. E.Z. 27. 9; 236. — *E. Gumlich.* 235.
- 3670.** *G. Benischke.* Resonanz unter dem Einflusse von Wirbelströmen und Hysterese. E.T.M. 25. 633.
- 3671.** *G. Benischke.* Zur Erklärung der sog. ungedämpften Schwingungen E.Z. 27. 1212.
- 3672.** *G. Benischke.* Vorrichtung zum selbsttätigen Parallelschalten von Drehstrommaschinen. E.Z. 27. 642; E.T.M. 24. 597.
- 3673.** *G. Benischke.* Theoretisches und Praktisches über den Parallelbetrieb von Wechselstrommaschinen. E.T.M. 25. 1009.
- 3674.** *G. Benischke.* Die Anwendung des Transformators als regulierbarer Widerstand. E.B.B. 5. 408.
- 3675.** *G. Benischke.* Der Resonanz-Transformator. E.Z. 28. 25.
- 3676.** *D. Bevcovitz.* Über Isolationsmessungen an Gleich- und Wechselstromanlagen. Z.D.M. 29. 72.
- 3677.** *A. Berthier.* La pile à gaz et la pile au charbon. E.E. 51. 397; 433; 52. 5;
- 3678.** *J. Berthenod.* Diagramme rigoureux du moteur monophasé asynchrone. E.E. 46. 131; 47. 41.
- 3679.** *J. Berthenod.* Sur le dimensionnement des moteurs monophasés à collecteur. E.E. 51. 181.
- 3680.** *J. Berthenod.* Note sur le moteur Shunt compensé monophasé. E.E. 50. 149; 51. 109; 52. 73; 145.
- 3681.** *J. Berthenod.* Sur les pertes moyennes dues à la commutation pendant la période du démarrage des moteurs monophasés à collecteur. E.E. 52. 289.
- 3682.** *J. Berthenod.* Sur le transformateur à résonance. E.E. 53. 115; 145; 217; 289; 377; 455.
- 3683.** *H. I. C. Beyer.* Gleichstrom-Turbogeneratoren. E.T.M. 25. 743; 768; 787.
- 3684.** *H. I. C. Beyer.* Direct current turbo-generators. E.W. 50. 964.
- 3685.** *A. Blondel.* Méthode pratique pour le calcul des lignes à courants alternatifs présentant de la selfinduction et de la capacité. E.E. 49. 121; 161; 241; 321.
- 3686.** *A. Blondel.* Sur le décharge des condensateurs alimentées par courants alternatifs et sur le réglage des transformateurs à la résonance. E.E. 51. 217; 253; 325.
- 3687.** *A. Blondel.* Ankerrückwirkung in Drehstromgeneratoren. E.T.M. 24. 332. — *J. K. Sumec.* 332.
- 3688.** *O. S. Bragstad.* Über Pulsationen der Zahninduktion in Maschinen mit Nuten im feststehenden und rotierenden Teil. E.T.M. 24. 1055.
- 3689.** *O. S. Bragstad* and *S. P. Smith.* Calculation of the characteristic curves of single-phase series commutator motors. T.E. 57. 996; 58. 4; 40.
- 3690.** *H. Brandes.* Über Abweichungen vom Ohmschen Gesetz, Gleichrichter-Wirkung und Wellenanzeiger der drahtlosen Telegraphie. E.Z. 27. 1015.
- 3691.** *F. Braun.* Ein neuer Wellenanzeiger. E.Z. 27. 1199.
- 3692.** *F. Braun.* On directed wireless telegraphy. T.E. 57. 222; 244.
- 3693.** *C. Breitfeld.* Die Größe c in G. Roebliers Werk, Fernleitung von Wechselströmen. E.T.M. 25. 913.
- 3694.** *C. Breitfeld.* Leerlauf- und Kurzschlußwiderstand von Wechselstromkabeln. E.T.M. 25. 705; 822.
- 3695.** *C. Breitfeld.* Der Resonanztransformator. E.Z. 28. 627.
- 3696.** *P. Brenot.* Note sur l'influence d'une capacité intercalée dans le circuit secondaire d'un transformateur. E.E. 50. 404.
- 3697.** *M. Breslauer.* Das Verhalten des Einphasenkolektormotors unter Berücksichtigung der Kurzschlußströme unter den Bürsten. E.Z. 27. 406.
- 3698.** *F. Brocq.* Les compteurs en général et plus spécialement les compteurs électriques. M.I.C. 59. B. 22.
- 3699.** *H. B. Brooks.* Deflection potentiometers. E.W. 47. 564.
- 3700.** *H. H. Broughton.* Electric cranes. T.E. 60. 40; 120; 197; 396; 505; 661; 701. 981.
- 3701.** *W. Burstyn.* Über den Einfluß des Gegengewichtes auf die Dämpfung des Luftdrabtes in der drahtlosen Telegraphie. E.Z. 27. 1117.
- 3702.** *M. L. Carr.* A graphical method for determining the power factor of an arc circuit. E.W. 50. 467.
- 3703.** *A. Campbell.* Inductance measurements. T.E. 60. 626.
- 3704.** *A. Campbell.* A standard of mutual inductance. T.E. 60. 209.
- 3705.** *A. Campbell.* On the use of variable mutual inductances. T.E. 60. 641.

- 3706.** *A. Campbell.* On the electric inductive capacities of dry paper and of solid cellulose. T.E. 57. 784; 814.
- 3707.** *F. T. Chapman.* The calculation of polyphase induction motor windings. T.E. 57. 169.
- 3708.** *J. G. Charvet.* Procédé Lodgepour l'allumage des moteurs à explosion. E.E. 52. 438.
- 3709.** *J. D. Coales.* Capacity currents in 3-core cables. T.E. 58. 66. — *A. Russell.* 105.
- 3710.** *A. Coggeshall.* Transformer design. E.W. 48. 719.
- 3711.** *B. S. Cohen.* The effects of leakage and the use of Heavisides distortionless condition in telephone transmission. T.E. 60. 983.
- 3712.** *L. Cohen.* Selbstinduktion eines Solenoids mit beliebigiger Anzahl von Drahtlagen. Z.S.T. 1907. 449.
- 3713.** *L. Cohen.* Self inductance of a solenoid of any number of layers. E.W. 50. 920.
- 3714.** *L. Cohen.* The telephone repeater. E.W. 49. 691.
- 3715.** *P. Cohn.* Der Spannungsabfall im Wechsel- und Drehstromleitungen. E.Z. 27. 645.
- 3716.** *A. Courtot.* Moteur asynchrone monophasé à rotor monophasé. E.E. 48. 401.
- 3717.** *W. Cramp.* The Cramp neutralised repulsion motor. T.E. 58. 617; 734.
- 3718.** *F. Creedy.* Méthode de calcul des moteurs à répulsion. E.E. 48. 161.
- 3719.** *F. Creedy.* Calcul d'un moteur à répulsion d'Atkinson. E.E. 48. 41.
- 3720.** *F. B. Crocker.* Resistivity-temperature formulae for copper. T.E. 58. 968. — *R. T. Glazebrook.* 59. 65 — *M. Kloss.* 65
- 3721.** *F. B. Crocker.* Resistivity-temperature formulae for copper. E.W. 49. 385.
- 3722.** *F. B. Crocker* and *M. Arendt.* Direct current motors, their action and control. E.W. 50. 852; 1095.
- 3723.** *R. Czepek.* Vergleichende Untersuchungen an einem Kollektormotor. E.T.M. 24. 225.
- 3724.** *W. B. v. Czudnochowski.* Vielfacherreger elektrischer Wellen. E.Z. 27. 1173.
- 3725.** *J. Dalemont.* Détermination des phases dans les transformateurs. E.E. 47. 9.
- 3726.** *R. David* u. *K. Simons.* Zur Frage der Wechselstromrelais nach dem Ferraristypus. E.Z. 28. 941.
- 3727.** *A. R. Dennington.* Torque analysis of induction meters. E.W. 50. 1213.
- 3728.** *Devaux-Charbonnel.* The experimental study of telegraphic transmission. T.E. 47. 969.
- 3729.** *E. Dick.* Beitrag zum Entwurf von Einphasenmotoren für Bahnzwecke. E.T.M. 24. 28; 40.
- 3730.** *H. Diesselhorst.* Über einen Kompensationsapparat mit kleinem Widerstand. Z.I. 26. 173.
- 3731.** *H. Diesselhorst.* Über thermokraftfreie Kompensationsapparate mit kleinem Widerstand. Z.I. 26. 297.
- 3732.** *A. Dina.* Über den Transformator mit Eigenkapazität. Versuche bei hoher Frequenz. E.Z. 27. 191.
- 3733.** *C. V. Drysdale.* The measurement of phase differences. T.E. 57. 726; 783.
- 3734.** *C. V. Drysdale.* Some measurements on phase displacements in resistances and transformers. T.E. 58. 160; 199. — *L. W. Wild.* 263.
- 3735.** *C. V. Drysdale.* Resistance coils and comparisons. T.E. 59. 955; 989; 1035; 60. 20; 53.
- 3736.** *R. Edler.* Beitrag zur Berechnung der Elektromagnetspulen für Starkstromrelais. E.T.M. 24. 1013; 1038; 1058; 25. 155.
- 3737.** *E. E. F.* Recent researches on electrical discharge. T.E. 57. 530.
- 3738.** *E. W. Ehnert.* Theorie und Vorausberechnung der Funkeninduktoren. E.T.M. 25. 337; 361; 377.
- 3739.** *F. Eichberg.* Über Wechselstrom in Kommutatormotoren. E.Z. 27. 769.
- 3740.** *F. Emde.* Beispiele für flächennormale Felder. E.T.M. 24. 318.
- 3741.** *F. Emde.* Torsion, différence de torsion, potentiel, différence de potentiel, force électromotrice. E.E. 46. 121.
- 3742.** *F. Emde.* Blondels Ableitung seiner Induktionskoeffizienten für gerade Drähte. E.Z. 28. 185. — *A. Blondel.* 187.
- 3743.** *F. Emde.* Der Einfluß der Dämpfung auf die Schwingungsvorgänge unparallel geschalteter Wechselstrommaschinen. E.T.M. 25. 721.
- 3744.** *G. Faccioli.* Self-exciting low frequency alternator. E.W. 48. 525.
- 3745.** *G. Faccioli.* A new induction Watt-hour meter. E.W. 47. 1266.
- 3746.** *F. E.* Leistungsmessungen bei Drehstrom. E.T.M. 25. 12.
- 3747.** *O. Feldmann.* Ideen englischer Fachleute über elektrische Bahnen. E. B.B. 4. 258.

3748. *C. Feldmann u. J. Herzog.* Über Schwingungen mit hoher Spannung und Frequenz in Gleichstromnetzen. *E.Z.* 27. 897; 923.

3749. *C. Feldmann u. J. Herzog.* Über Störungen in Gleichstromnetzen. *E.Z.* 28. 810; 979. — *R. Hiecke.* 979.

3750. *C. Feldmann u. J. Herzog.* Über Hochspannungskabel und ihre Prüfung. *E.Z.* 28. 1163.

3751. *L. Finzi.* Über elastische Mehrleiteranordnungen. *E.Z.* 27. 283.

3752. *F. A. Fish and A. Shane.* Load and power factor relations in two-phase to three-phase transformers. *E.W.* 48. 175.

3753. *L. Fleischmann.* Über den Parallelbetrieb von Wechselstrommaschinen. *E.Z.* 27. 873. — *G. Huldshiner.* 28. 44.

3754. *J. A. Fleming.* On the elementary theory of electric oscillations. *T.E.* 59. 936; 976; 1016.

3755. *J. A. Fleming.* A note on the theory of directive antennae or unsymmetrical hertzian oscillators. *T.E.* 57. 455.

3756. *J. A. Fleming.* The Poulsen arc as a mean of obtaining continuous electrical oscillations. *T.E.* 59. 914.

3757. *J. A. Fleming.* On the electric radiation from bent antennae. *T.E.* 58. 416.

3758. *J. A. Fleming.* Recent contributions to electric wave telegraphy. *T.E.* 59. 270; 311; 350; 378.

3759. *A. E. Flowers.* Bestimmung von Selbstinduktionskoeffizienten durch Wägung. *E.Z.* 27. 257. — *W. Peukert.* 258.

3760. *C. P. Fowler.* Synchronous motor compensation for lagging currents. *E.W.* 50. 281.

3761. *Frank.* Elektrische Meßinstrumente. *E.Z.* 28. 569; 1161. — *H. Benischke.* 1161.

3762. *M. Freimark.* Gebräuchliche amerikanische Verfahren zur Bestimmung von Fehlern in Fernsprechleitungen. *E.Z.* 27. 377.

3763. *L. A. Freudenberger.* Factors determining the design of needle galvanometers. *E.W.* 48. 607.

3764. *L. A. Freudenberger.* Factors determining the design of the d'Arsonval galvanometer. *E.W.* 48. 959.

3765. *N. E. Funk.* Power factor in 3 phase circuits. *E.W.* 50. 465.

3766. *V. A. Flynn.* The torque conditions in alternate current motors. *T.E.* 60. 413.

3767. *B. Gati.* On the measurement of the constants of the telephone lines. *T.E.* 58. 81.

3768. *N. Gennimatás.* Die Regel des rechten Winkels oder eine neue Regel zur Bestimmung der Richtung der in dem Leiter induzierten *EMK.* *E.T.M.* 24. 363.

3769. *N. Gennimatás.* Berechnung der Zahl der Elementengruppen und der Spannung zwischen 2 benachbarten Kollektorlamellen bei einer in sich einfach geschlossenen Gleichstromwicklung. *E.T.M.* 24. 269.

3770. *N. Gennimatás.* Die direkte Bestimmung der Zahl der Elementengruppen zwischen zwei benachbarten Kollektorlamellen bei einer in sich einfach geschlossenen Gleichstromwicklung. *E.T.M.* 25. 231; 322.

3771. *P. Gésing.* Choice of railway motors as influenced by gear ratio. *T.E.* 60. 597.

3772. *H. Görges.* A method of calculating the E.M.F. of polyphase and singlephase windings. *T.E.* 58. 761

3773. *H. Görges.* Die Berechnung der E.M.K. von Mehrphasen- und Einphasenwicklungen auf Grund eines Vektordiagramms der Feldstärke. *E.Z.* 28. 1.

3774. *H. Görges.* Das Verhalten der Wechselstrommotoren in einheitlicher Betrachtungsweise. *E.Z.* 28. 730 — *F. Eichberg.* 958.

3775. *H. Görges.* General theory of the alternate current motors. *T.E.* 59. 881.

3776. *H. Görges.* Die Abstufung der Anlasser. *E.B.B.* 4. 249; 345. — *F. Niethammer.* 345.

3777. *R. Goldschmidt.* Standard performances of electrical machinery. *T.E.* 60. 567; 593.

3778. *R. Goldschmidt.* The leakage of induction motors. *T.E.* 60. 236; 352; 430; 507; 624.

3779. *E. Gollmer.* Über Eisenbahnsicherungsanlagen mit isolierten Gleisstrecken. *D.M.* 14. 246; 259.

3780. *A. M. Gray.* The circle diagram and design of induction motors. *E.W.* 48. 284.

3781. *F. W. Grover.* The simultaneous measurement of the capacity and power factor of condensers. *T.E.* 59. 949.

3782. *F. Grünbaum.* Über relative Resonanz im Wechselstromkreis. *E.Z.* 28. 1120; 1150.

3783. *C. F. Guilbert.* Sur l'épuration des courbes périodiques par les condensateurs. *E.E.* 49. 441.

3784. *C. F. Guilbert.* Nouveau type de condensateurs industriels. *E.E.* 49. 208.

- 3785.** *C. F. Guilbert.* Relevé des caractéristiques en charge des dynamos et moteurs. E.E. 52. 361; 397; 53. 37; 73.
- 3786.** *C. F. Guilbert.* Sur les essais en charge des transformateurs. E.E. 52. 253.
- 3787.** *F. Haber.* Die vagabundierenden Straßenbahnströme. J.G.W. 49. 637.
- 3788.** *G. Haberland.* Das Diagramm des Drehstrommotors. E.Z. 28. 479.
- 3789.** *G. Hacault.* Étude du démarrage d'un appareil de levage entraîné par un moteur électrique à courant continu. E.E. 48. 441.
- 3790.** *W. Hahnemann.* Wasserstrahlantennen. E.Z. 27. 280. — *R. A. Fessenden.* 280.
- 3791.** *W. Hahnemann.* Über den Kurzschluß der Spulen und die Vorgänge bei der Kommutation des Stromes eines Gleichstromankers. E.Z. 27. 61; 303. — *P. Riibesell* 62; 303; 491. — *K. Waldmann.* 491.
- 3792.** *W. Hahnemann u. L. Adelmann.* Verluste in Kondensatoren mit festem Dielektrikum und ihre Dämpfung in Hochfrequenzkreisen. E.Z. 28. 988; 1010.
- 3793.** *W. Hahnemann and L. Adelmann.* Dielectric losses in condensers and their damping effect in high frequency circuits. T.E. 60. 327.
- 3794.** *F. J. Hall.* Rubber insulation for conductors. E.W. 50. 1009; 1053.
- 3795.** *I. E. Hansen.* Calculation of the leakage-reactance of induction motors. E.W. 49. 636; 1270; 50. 772.
- 3796.** *S. Hartmann.* Wärmeentwicklung und -beseitigung in elektrischen Betriebsräumen. E.B.B. 4. 551.
- 3797.** *F. E. Haskell.* Voltmeter compensator for direct-current circuits. E.W. 49. 1031.
- 3798.** *C. Heinke.* Die Verwertung des Lichtbogenwechselstromes in der Meßtechnik. E.Z. 28. 913.
- 3799.** *R. E. Hellmund.* Leakage coefficient of induction motors. E.W. 50. 1004.
- 3800.** *G. R. Henderson.* Economical loss in electric transmission. A.E.R.J. 80. 14.
- 3801.** *A. Heydweiller.* Énergie, durée, amortissement et résistance des étincelles oscillantes. E.E. 47. 281.
- 3802.** *A. Heyland.* Alternators with auxiliary regulating field. T.E. 58. 632; 671.
- 3803.** *A. Heyland.* Two-pole turboalternator with stationary field and magnetically-shunted excitor. T.E. 58. 998.
- 3804.** *R. Hiecke.* Über Schwingungen mit hoher Spannung und Frequenz in Gleichstrommaschinen. E.Z. 28. 334.
- 3805.** *W. Hildebrand.* Einachsige Drehgestelle. E.B.B. 4. 472.
- 3806.** *G. Hilpert.* Einfache graphische Ermittlung von Massenwirkungen in der Elektrotechnik nach Analogie mit solchen in der Mechanik. E.B.B. 4. 41; 61; 168; 245. — *F. Emde.* 167. — *K. Pottier.* 245.
- 3807.** *H. Hinden.* Sperrungsregelung in Transformatorstationen. E.Z. 27. 401; 424.
- 3808.** *H. M. Hoert u. F. Punga.* Beschreibung einer 5000 K.W.-Drehstrommaschine. E.B.B. 5. 541; 567; 588; 611.
- 3809.** *L'Hoest.* Éclairage électrique des trains de chemin de fer par le système L'Hoest-Pieper. M.I.C. 59. A. 685.
- 3810.** *E. P. Hollis and E. R. Alexander.* The regulation of the pressure of discharge of lighting batteries. T.E. 57. 216.
- 3811.** *G. Holzmüller.* Orientierung über die neuesten elektrischen Theorien besonders die Elektronentheorie. Z.V. D.I. 50. 91; 129.
- 3812.** *G. Holzmüller.* Résumé des bases sur lesquelles reposent les théories modernes et en particulier la théorie des électrons. E.E. 46. 243; 281.
- 3813.** *F. J. O. Howe.* Capacity of cables. T.E. 60. 864; 904.
- 3814.** *P. Humann.* Über den Leistungsverlust im Dielektrikum bei hohen Wechselspannungen. E.B.B. 4. 457; 477; 498; 518.
- 3815.** *P. Humann.* Dielectric losses with high pressure alternate currents. T.E. 58. 170.
- 3816.** *Humann.* Die Bestimmung der Phasenverschiebung in Drehstromanlagen. E.Z. 28. 706. — *W. Lulofs.* 956; 1117. — *C. A. Rossander.* 1095. — *C. Breilfeld.* 1117.
- 3817.** *J. H. Hunt.* Heating effects of quadrature currents in rotary converters. E.W. 50. 170.
- 3818.** *M. Jakob.* Ein zeichnerisches Verfahren zur Bestimmung der Leistung aus den Augenblickswerten von Spannung und Strom. E.Z. 28. 243.
- 3819.** *B. Jacobi.* Wirtschaftliche Schaltung zur Ladung von Akkumulatorbatterien im Anschluß an 500voltige Gleichstrombahnen. E.Z. 27. 244.
- 3820.** *B. F. Jacobsen.* Unbalanced load in two-phase to three-phase transformation. E.W. 50. 717.

3821. *G. Jacoby.* Einige Betrachtungen über Drehstromlokomotiven mit polumschaltbaren Motoren. E.B.B. 5. 501.

3822. *W. Jaeger.* Vergleichende Betrachtungen über die Empfindlichkeit verschiedener Methoden der Widerstandsmessung. Z.I. 26. 69.

3823. *W. Jaeger.* Über die Empfindlichkeit der Widerstandsthermometer. Z.I. 26. 278.

3824. *W. Jaeger* und *S. Lindeck.* Über die Konstanz von Normalwiderständen aus Manganin. Z.I. 26. 15.

3825. *P. Jégou.* Essai de théorie sur les radio-conducteurs. E.E. 51. 82.

3826. *Jonas.* Stufenregelungen von Drehstrommotoren. E.Z. 27. 531.

3827. *P. Juppont.* Note sur un système de mesure des grandeurs énergétiques. E.E. 46. 41. — *E. Brylinski.* 46. 242; 321; 47. 161.

3828. *E. Kalähne.* Oscillations électriques dans les tubes métalliques. Courbes en forme d'anneaux. E.E. 46. 287; 324; 361; 408.

3829. *M. Kallmann.* Über einen selbstregelnden Belastungswiderstand und seine Verwendung als Vergleichskilowatt. E.Z. 27. 45.

3830. *M. Kallmann.* Über ein neues Verfahren zur selbsttätigen Spannungs- und Isolationskontrolle. E.Z. 27. 686; 710.

3831. *W. Kaufmann.* Sur la constitution de l'électron. E.E. 47. 86; 125.

3832. *A. Keller.* Calculation of auxiliary pole windings. E.W. 49. 508; 801. — *R. B. Trent.* 644.

3833. *C. L. Kennedy.* Calculation of dynamo sparking characteristics. E.W. 49. 344. — *C. P. Poole.* 515.

3834. *A. E. Kennelly.* The resistivity and temperature coefficient of copper. E.W. 47. 1343. — *A. M. Gray.* 48. 141.

3835. *A. E. Kennelly* and *E. R. Shepard.* The heating of copper wires by electric currents. E.W. 49. 1306.

3836. *A. E. Kennelly* and *S. E. Whiting.* On an approximate measurement by electrolytic means of the electrostatic capacity between a vertical metallic cylinder and the ground. E.W. 48. 1239; T.E. 58. 929.

3837. *E. Klein.* Die elektrischen Aufzugssteuerungen der Firma A. Kühnscherf jun. E.B.B. 5. 621; 645.

3838. *J. Koenigsberger.* Conduction in solids. T.E. 60. 526.

3839. *A. Kolben.* Dreiphasengenerator für direkte Kuppelung mit Dampfturbine. E.T.M. 25. 1.

3840. *A. Korn.* On an apparatus for compensating the inertia of selenium. T.E. 58. 577.

3841. *M. Korndörfer.* Über die Berechnung von Transformatoren. E.Z. 27. 287.

3842. *D. Kos.* The Thury direct current transmission system. E.W. 50. 804.

3843. *E. Kronstein.* Das automatische Telephon. E.T.M. 24. 868; 889; 911.

3844. *F. Kuderna.* Konstruktion des Leistungsfaktors aus den Angaben der Zweiwattmetermethode. E.T.W. 25. 987.

3845. *A. Kühns.* Beitrag zur Untersuchung der Wirbelströme in Eisenblechen. E.Z. 27. 901.

3846. *J. Kuhn.* Eine graphische Darstellung der Elektrizitätsmenge und Arbeit des Wechselstromes von sinusartigem Verlauf. E.Z. 28. 217; 547. — *M. Radt, M. Jacob.* 547.

3847. *F. Kurlbaum* u. *W. Jaeger.* Rotierender Unterbrecher für Kapazitäts- und andere Messungen. Z.I. 26. 325.

3848. *A. S. Langsdorf.* Excitation characteristics of the synchronous motor. E.W. 50. 763.

3849. *A. S. Langsdorf.* Representation of armature reaction of the synchronous motor as an equivalent reaction. E.W. 50. 1048.

3850. *B. Lasgöity.* Les bobines thermoélectriques. E.E. 52. 42.

3851. *M. Latour.* Commutation in single-phase motors at starting. E.W. 47. 522; 48. 484.

3852. *M. Latour.* Ein für übersynchronen Betrieb geeigneter Wechselstromkumutatormotor mit elliptischem Felde. E.Z. 27. 89.

3853. *M. Latour.* Propriétés des rotors à collecteur. E.E. 50. 5; 41; 77.

3854. *L. Legros.* Prédétermination des ampère-tours d'entrefer dans les machines électriques. E.E. 50. 437; 51. 12.

3855. *L. Legros.* Calcul des rhéostats pour le réglage de la torsion des alternateurs. E.E. 46. 201; 252.

3856. *L. Legros.* Essais récents de turboalternateurs. E.E. 48. 121.

3857. *L. Legros.* Emploi du montage dans les machines à courants triphasés. E.E. 52. 37.

3858. *T. Lehmann.* Moteurs monophasés compensés sans balais d'excitation. E.E. 46. 481; 49. 451; 481.

3859. *F. Leprince—Ringuet.* Les expériences de Gelsenkirchen-Bismarck sur les moteurs et l'appareillage électriques de sûreté par les milieux grisouteux. A.D.M.P. (10) 12. 171.

- 3860.** *A. Libesny.* Stromwandlung durch Hg-Vakuumpapparate. E.T.M. 24. 783; 799.
- 3861.** *L. Lichtenstein.* Zu den Vorschlägen zur Definition der elektrischen Eigenschaften gestreckter Leiter. E.Z. 27. 20.
- 3862.** *I. Lichtenstein.* Zur Theorie der Wechselstromkreise. P.J. 321. 38; 109; 118.
- 3863.** *L. Lichtenstein.* Zur Theorie der Wechselstromverzweigung. E.Z. 28. 115.
- 3864.** *L. Lichtenstein.* Experimentelle Bestimmungen der für die Berechnung von Wechselstrombahnleiteranlagen maßgebenden physikalischen Größen. E.Z. 28. 620; 646; 847; 879. — *H. Hausrath.* 846. — *S. Benischke.* 878.
- 3865.** *L. Lichtenstein.* Experimental determination of resistance to alternating-currents and of equivalent permeability of rails. T.E. 59. 755.
- 3866.** *A. Liénard.* Sur un point de la théorie de la commutation. E.E. 51. 361.
- 3867.** *W. Linke.* Zur Trennung der Verluste in Asynchronmaschinen. E.Z. 28. 964; 1139. — *O. S. Brasstad.* 1138.
- 3868.** *A. Linke.* Der Einphasenwechselstrommotor. P.J. 322. 641; 657; 673; 690; 709; 723; 739; 757; 778; 795; 807.
- 3869.** *H. Linsenmann.* Eine graphische Behandlung des Kommutatorvorgangs. E.Z. 28. 506; 704; — *C. R. L. E. Menger.* 703.
- 3870.** *J. Liska.* Über die Wirkungsweise von Walzenblitzschutzapparaten. E.T.M. 25. 825.
- 3871.** *R. Livingstone.* Some notes on the mechanical design of electrical generators. T.E. 57. 569; 646; 687.
- 3872.** *R. Livingstone.* Mechanical design of commutators for direct-current generators. T.E. 57. 171; 207; 253.
- 3873.** *I. Lombardi.* Gilt das Kreisdiagramm für asynchrone Wechselmaschinen auch bei Übersynchronismus? E.T.M. 24. 775.
- 3874.** *T. E. Lyle.* The transformer indicator diagrams. T.E. 59. 1027.
- 3875.** *W. V. Lyon.* Notes on the parallel operation of alternators. E.W. 50. 1243.
- 3876.** *A. J. Makower.* Measurement of phase difference. T.E. 58. 694.
- 3877.** *A. Martinek.* Hydroelektrische Kraftzentrale der Stadt Prerau. E.T.M. 24. 6.
- 3878.** *W. W. Massie.* Diagram of electric wave lengths. E.W. 48. 330.
- 3879.** *A. S. Mc Allister.* Circular current loci of the synchronous motor. T.E. 60. 124; E.W. 50. 370.
- 3880.** *A. S. Mc Allister.* Graphic representation of induction motor phenomena. E.W. 47. 825.
- 3881.** *A. S. Mc Allister.* The exciting current of induction motors. T.E. 57. 29.
- 3882.** *A. S. Mc Allister.* Simple circular current locus of the induction motor. E.W. 47. 1077.
- 3883.** *A. S. Mc Allister.* Simple circle diagram of the single-phase induction motor. E.W. 47. 1339.
- 3884.** *A. S. Mc Allister.* The magnetic field in the single phase induction motor. T.E. 57. 857. — *V. A. Fynn.* 941.
- 3885.** *A. S. Mc Allister.* The leakage reaction of induction motors. E.W. 49. 181; T.E. 58. 888.
- 3886.** *A. S. Mc Allister.* Three-phase transformation. T.E. 59. 261. E.W. 49. 302.
- 3887.** *C. L. R. E. Menges.* Über die Anschauungen, auf denen die Diff. gleich. der Kommutierung beruht. E.Z. 28. 208; 957. — *R. Rüdenberg.* 957; 1073. — *E. Arnold.* 1072.
- 3888.** *C. L. R. E. Menges.* Über Kommutierung und Kompensierung von Gleichstrommaschinen. E.Z. 27. 1127. — *A. Press.* 28. 304.
- 3889.** *F. E. Meurer.* Eddy current losses in armature teeth. E.W. 49. 792.
- 3890.** *S. R. Milner.* The use of the seohmmeter for the measurement of the combined resistances and capacities. T.E. 58. 60.
- 3891.** *B. Monasch.* Über den Energieverlust im Dielektrikum von Kondensatoren und Kabeln. E.T.M. 25. 315; 318 B.
- 3892.** *B. Monasch.* On the loss of energy in the dielectric of condensers and cables. T.E. 59. 416; 460; 504.
- 3893.** *D. K. Morris and G. A. Lister.* The testing of transformers and transformer iron. T.E. 57. 61.
- 3894.** *G. H. Morse.* Compensating of phase differences. E.W. 47. 572.
- 3895.** *R. Moser.* Verwertung der Belastungsaufnahmen an Drehstrommotoren. E.Z. 27. 217.
- 3896.** *H. Mouradian.* La transmission téléphonique à grande distance. E.E. 53. 151.
- 3897.** *C. G. Muaux.* Dimensions générales rationnelles et réelles des quantités magnétiques et électriques. E.E. 47. 5.

3898. *E. Müllendorff.* Die Erzeugung einer Phasenverschiebung von genau 90° durch bloße Induktion. E.Z. 27. 1066; 28. 66. — *W. Uhde.* 66.

3899. *E. Müllendorff.* Zur Theorie des Mischtransformators. E.Z. 28. 1008.

3900. *E. Müllendorff.* Die Bestimmung der Einzelwiderstände in Dreileiternetzen mit ungeordnetem Mittelleiter. E.Z. 27. 501.

3901. *E. Müllendorff.* Ein Isolationsmesser für Dreileiteranlagen mit ungeordnetem Mittelleiter. E.Z. 27. 313.

3902. *A. Müller.* Über den Kraftlinienverlauf in gezähnten Ankern. E.Z. 27. 1103.

3903. *A. Müller.* Einiges über Kommutation und Wendepole. E.T.M. 24. 128. — *F. Arnold.* 129; 176.

3904. *A. Müller.* Über Kommutatorwirkungen. E.Z. 27. 509.

3905. *R. Nagel.* Über eine Neuerung an Hochspannungstransformatoren der Siemens-Schuckertwerke. E.B.B. 4. 275.

3906. *O. Nairz.* Ungedämpfte schnelle Schwingungen und drahtlose Telegraphie. Z.S.T. 1907. 187.

3907. *O. Nairz.* Fortschritte auf dem Gebiet der Funkentelegraphie. P.J. 322. 73; 471; 490.

3908. *E. Nesper.* Ein Universalmeßinstrument der Hochfrequenztechnik. E.Z. 28. 849; 872. — *B. Glätzl.* 1183.

3909. *L. C. Nicholson.* Location of broken insulators and other transmission line troubles. T.E. 60. 179.

3910. *F. Niethammer.* Das allgemeine Drehstromdiagramm. E.T.M. 24. 647; 666.

3911. *F. Niethammer.* Diagramme général des courants triphasés. E.E. 48. 481; 49. 5; 41.

3912. *F. Niethammer.* Falsche Drehstromzählerschaltungen. E.T.M. 24. 247.

3913. *F. Niethammer.* Théorie exacte de la commutation et diagrammes exacts des moteurs monophasés à collecteur. E.E. 46. 81; 136; 161.

3914. *F. Niethammer.* Wechselstromkommutatormotoren. E.T.M. 24. 2; 26; 155. — *R. Richter.* 108; 290. — *P. Müller.* 289. — *M. Schenkel.* 290.

3915. *Niethammer.* Die Eisenverluste von Wechselstrom-Kommutatormotoren. E.T.M. 24. 489.

3916. *J. P. Nikonow.* Standardization of scientific notation. E.W. 50. 531.

3917. *E. P. Northrop.* Forces in the interior of an electric conductor. T.E. 59. 868.

3918. *A. Nouguier.* Etude des installations à courant alternatif par la méthode des grandeurs wattées et magnétisantes. E.E. 47. 81; 121; 166; 201.

3919. *R. Nowotny.* Über die Ausrüstung der Telephonleitung von Wien nach Lemberg mit Pupinspulen. Z.S.T. 1907. 145.

3920. *W. Oelschläger.* Ein Beitrag zur Vorausberechnung des Kurzschlußstromes von Drehstrominduktionsmotoren. E.Z. 28. 1230.

3921. *W. Oelschläger.* A method for calculating the short circuit current in 3-phase motors. T.E. 60. 834.

3922. *W. Oelschläger.* Über die Lammellenspannung und die kritische Umdrehungszahl bei Nebenschlußmotoren mit starker Geschwindigkeitsregelung. E.Z. 28. 211.

3923. *P. Orlic.* Mittel zur Bestimmung der Richtung der E.M.K. bei Generatoren und der Bewegungsrichtung bei Motoren. E.T.M. 24. 413.

3924. *F. Orlich.* Notiz über die Leistungsmessung in Drehstromsystemen mit Nulleiter. E.Z. 28. 71.

3925. *M. Osnos.* Der Wechselstromdoppelschlußmotor der Felten- und Guilleaume-Lahmeyerwerke. E.Z. 28. 336; 358.

3926. *M. Osnos.* The new double-circuit single-phase motor of the Felten and Guilleaume-Lahmeyer works. T.E. 59. 515.

3927. *L. Ott.* Untersuchungen zur Frage der Erwärmung elektrischer Maschinen. Z.V.D.I. 51. 1145.

3928. *L. Ott.* Researches of the heating of armatures and field coils. T.E. 58. 805.

3929. *F. H. Page and F. J. Hiss.* The present state of direct current design as influenced by interpoles. T.E. 59. 304.

3930. *L. Pasching.* Die Elektrizitätswerke am Rheintalischen Binnenkanal. E.Z. 28. 1005; 1034.

3931. *W. H. Patterson.* The carbon cell. T.E. 58. 972.

3932. *C. Paulus.* Mitteilung über Zähler von Drehstrommotoren. M.V.E.M. 6. 261.

3933. *C. E. Paxson.* The storage battery in telephony. E.W. 49. 547.

3934. *H. Pécheux.* De la mesure de la résistance d'une pile en circuit fermé par la méthode de Mance. E.E. 51. 145.

3935. *H. Pécheux.* De l'emploi des wattmètres à la mesure de la puissance consommée par une distribution de lampes électriques. E.E. 51. 289.

3936. *F. Pelikan*. Wendepolmaschinen mit und ohne körperliche Pole. E.T.M. 25. 153.

3937. *F. Pelikan*. Wendepolbreite, Zahnteilung und Bürstenbreite. E.T.M. 25. 253.

3938. *H. Pellat*. Direct determination of the absolute value of the electric charge on a monovalent ion. T.E. 60. 527.

3939. *H. Pender*. The resistivity temperature coefficient of metals. E.W. 49. 756.

3940. *J. Perret*. Étude générale de la machine à courants alternatifs. E.E. 48. 281.

3941. *J. Terret*. Commutation parfaite dans les machines à courants alternatifs à collecteur. E.E. 46. 441.

3942. *W. Peukert*. Berechnung der Größe einer Akkumulatorenbatterie für eine gegebene Ampèrestundenleistung bei veränderlicher Strombelastung. E.E. 28. 705; 826. — *P. T. Lommel*. 826.

3943. *W. Peukert*. Measurement of high alternate current frequencies. T.E. 57. 1018.

3944. *K. Pichelmayer*. Über die Umwandlung der Energie in Dynamomaschinen. E.T.M. 24. 179.

3945. *C. Pichelmayer*. Das Heylanddiagramm. E.T.M. 25. 1022.

3946. *G. W. Pickard*. The potential of lightning. E.W. 48. 491.

3947. *H. Poincaré*. Les quelques théorèmes généraux relatifs à l'électrotechnique. E.E. 50. 293. — *M. Latour*. 51. 5.

3948. *H. Poincaré*. Étude du récepteur téléphonique. E.E. 50. 221; 257, 329; 365; 401.

3949. *R. Pohl*. The development of turbo-generators. T.E. 60. 243.

3950. *R. Pohl*. Simple two methods for the direct determination of leakage factors. T.E. 59. 215.

3951. *R. Pohl*. Über den Einfluß der Verwendung legierter Bleche auf den Transformatorenbau. E.E. 28. 603.

3952. *J. Polak*. Der Quecksilberlichtbogen und seine technische Verwendung. E.E. 28. 599; 651; 733.

3953. *A. Press*. Calculation of dynamo sparking constants. E.W. 47. 525.

3954. *A. Press*. Distribution des pertes dans le fer et production de chaleur dans les toles d'induits. E.E. 49. 401.

3955. *A. Press*. The estimation of the temperature rise of armatures. E.W. 47. 1338.

3956. *J. Puluy*. Kupferverluste und Ausnutzungsfähigkeit der Drehstromge-

neratoren. E.T.M. 24. 680; 986. — *J. Tuma*. 753; 987.

3957. *F. Punga*. Ein neuer Einphasen-Kommutatormotor. E.Z. 27. 267.

3958. *F. Punga*. Der plötzliche Kurzschluß von Drehstromdynamos. E.E. 27. 827.

3959. *F. Punga*. The sudden short-circuiting of alternators. T.E. 57. 765.

3960. *F. Punga* u. *W. Hess*. Eine Erscheinung an Wechsel- und Drehstromgeneratoren. E.T.M. 25. 615.

3961. *F. Punga* u. *W. Hess*. A phenomenon of revolving-field generators. E.W. 50. 962.

3962. *G. Rasch*. Über Fernspannungsmessung ohne Prüfdrähte. E.E. 27. 805.

3963. *Rayleigh*. On the experimental determination of the ratio of the electrical units. T.E. 57. 827; 859.

3964. *D. W. Rennie*. On the representation of alternating current phenomena. T.E. 60. 957.

3965. *G. J. Reynolds*. Three to six transformations and connections to rotary converters. E.W. 47. 1034.

3966. *J. Reichman* et *J. Perret*. Sur un procédé de compoundage des alternateurs. E.E. 52. 325.

3967. *J. Reichman* and *J. Perret*. A method of compounding alternators. T.E. 60. 89.

3968. *R. Richter*. Die Brechung der Belastungswiderstände für große Wechselstromgeneratoren. E.T.M. 25. 889.

3969. *R. Richter*. Über Wechselstromkommutatormotoren. E.E. 28. 21. — *F. Eichberg*. 305.

3970. *R. Richter*. Über den Anlauf von Wechselstromkommutatormotoren für Einphasenstrom. E.E. 27. 133.

3971. *R. Richter*. Wechselstromseitenschlußmotoren der Siemens-Schuckertwerke. E.E. 27. 537; 558; 847. — *M. Latour*. 780. 846. — *F. Emde*. 917.

3972. *R. Richter*. Siemens-Schuckert alternating current series motors. T.E. 58. 207; 247; 369; 408.

3973. *A. Right*. Sur quelques expériences déjà connues, considérées au point de la vue de la théorie des électrons. E.E. 48. 5.

3974. *J. A. Robertson*. Economy of reversible boosters. T.E. 59. 26.

3975. *G. Rosset*. La repartition du courant dans les électrodes. E.E. 51. 228; 298; 334; 367; 410; 437.

3976. *G. Rosset*. Longueur d'onde et vitesse de propagation des phénomènes électriques. E.E. 48. 361; 390.

- 3977.** *G. Rosset.* Expression de la période de vibration conique et électrique et ses conséquences. E.E. 48. 84; 167; 201.
- 3978.** *E. Roth.* Sur un nouveau mode de compoundage des alternateurs. E.E. 48. 241.
- 3979.** *R. Rüdenberg.* Der Einfluß der Zähne u. Nuten auf die Wirkungsweise der Dynamoanker. E.T.M. 25. 599; 618.
- 3980.** *R. Rüdenfeld.* Wirbelstromverluste in Wechselstrommaschinen mit elliptischem Drehfelde. E.T.M. 25. 533.
- 3981.** *A. Russell.* The dielectric strength of isolating materials and the grading of cables. T.E. 60. 160; 203.
- 3982.** *H. Sack.* Das Drehstrom-Wattmeter der Firma Siemens-Halske, A. G. u. eine Neukonstruktion ihres Präzisions-Wattmeters. E.Z. 28. 268.
- 3983.** *J. Sahulka.* Messung des Isolationswiderstandes und der Kapazität der einzelnen Leiter von Wechselstromanlagen während des Betriebes. E.Z. 28. 457; 484.
- 3984.** *J. Sahulka.* Measurement of insulation resistance and capacity of individual conductors of an alternating current net work during working. T.E. 59. 999.
- 3985.** *J. Sahulka.* Messung der Fehlerluste im Wechselstrombetriebe. E.T.M. 25. 808.
- 3986.** *J. Sahulka.* Measurement of iron losses. T.E. 60. 330
- 3987.** *J. Sahulka.* Zur Frage des blanken oder isolierten Mittelleiters. E.Z. 27. 189; 259. — *F. Evens. R. Skutsch.* 259.
- 3988.** *J. Sahulka.* Hochfrequenz-Lichtbogen im Schwingungskreise eines Duddell-Poulsenschen Lichtbogens. E.Z. 28. 1063.
- 3989.** *S. Salto.* Die Messung der Übergangswiderstände von Metall-Kohlebürsten. E.Z. 27. 892.
- 3990.** *G. H. Schaeffer.* Tests of electrically driven plainers. E.W. 48. 372.
- 3991.** *F. Schmitt.* Über die Elektronentheorie. Z. K. F. G. 9. 168.
- 3992.** *K. Schnetzler.* Regelung von Repulsionsmotoren durch Bürstenverschiebung. E.Z. 28. 1097; 1128.
- 3993.** *K. Schnetzler.* Control of repulsion motors by brush displacement. T.E. 60. 438.
- 3994.** *F. Schrottko.* Über den Einfluß der Hochspannungsleitungen auf die Betriebs-Fernsprechleitungen. E.Z. 28. 685; 707. — *H. Hausrath.* 911.
- 3995.** *H. Schultze.* Ein Verfahren zur Schlupfungsmessung an Asynchronmotoren. E.E. 28. 557.
- 3996.** *H. Schultze.* Ein neues Quadrantenelektrometer für dynamische Messungen. Z.I. 27. 65.
- 3997.** *E. Schulz.* Wendepolmaschine. E.Z. 28. 1149.
- 3998.** *E. Seligmann-Levi.* Bases d'une théorie mécanique de l'électricité. A.D.M.P. (10) 9. 517.
- 3999.** *A. Sengel.* Spannungskoeffizienten von Ein- und Mehrphasenmaschinen. E.Z. 28. 1188.
- 4000.** *E. R. Shepard.* Measurement of power in three phase systems. E.W. 47. 503.
- 4001.** *A. R. Short.* The use of Gotts manganin arm. T.E. 58. 816.
- 4002.** *E. Siedek.* Die Vorgänge an Kohlebürsten. E.Z. 27. 1057.
- 4003.** *de A. Silva.* Sur la méthode de Pirani. E.E. 50. 113.
- 4004.** *H. T. Simon.* Zur Theorie des selbsttönenden Lichtbogens. E.Z. 28. 295; 314; 804. — *A. Blondel.* 803.
- 4005.** *H. T. Simon.* Theory of the singing arc. T.E. 54. 580.
- 4006.** *C. F. Smith.* The experimental determination of losses in motors. T.E. 59. 805; 832.
- 4007.** *F. E. Smith.* On the comparison of resistances. E.T. 60. 469.
- 4008.** *F. E. Smith.* On methods of high precision for the comparison of resistances. T.E. 67. 946; 1009.
- 4009.** *F. E. Smith.* On the normal Weston Cadmium cell. T.E. 60. 403.
- 4010.** *C. N. A. Solberg.* Berechnung elektrischer Maschinen. E.Z. 27. 63.
- 4011.** *H. G. Salomon.* Die Grenzen der Verwendung von Dreileiter-Motorwattstundenzählern. E.Z. 28. 200.
- 4012.** *F. W. Springer.* Electric ignition in internal combustion engines. E.W. 48. 995; 1111; 1242.
- 4013.** *F. W. Springer.* The design and operation of spark coils. E.W. 50. 1163.
- 4014.** *N. Stahl.* Distribution and breadth coefficients of alternators. E.W. 50. 921.
- 4015.** *Stark, Retschinski u. Schaposchnikow.* Recherches sur l'arc électrique. E.E. 46. 5.
- 4016.** *H. C. Steidle.* Electric measurement of time intervals and its applications. T.E. 57. 971.
- 4017.** *H. C. Steidle.* Die praktische Anwendung direkter Zeitbestimmung zu Zwecken der Schwachstromtechnik. E.Z. 27. 763.

4018. *C. P. Steinmetz*. Lightning phenomena in electric circuits. T.E. 59. 780.
4019. *A. Still*. Single-phase currents from 3-phase supply. T.E. 58. 121.
4020. *A. Still*. The single-phase induction motor. E.W. 48. 1108; 1154; 1202.
4021. *Stirnemann*. Untersuchung über den Spannungsverlust im Kabel. E.Z. 28. 581; 607.
4022. *E. C. Stone*. Circle diagram of compensated series single-phase motor. E.W. 47. 610.
4023. *K. Strecker*. Einheitliche Formelzeichen. E.Z. 27. 395; 457. — *F. Emde* 509.
4024. *E. Suchy*. Die Grenzen der Verwendung von Drehstrom und Gleichstrom bei Stadtzentralen. E.T.M. 24. 819.
4025. *J. K. Sumec*. Berechnung der Selbstinduktion gerader Leiter und rechteckiger Spulen. E.Z. 27. 1175. — *W. Wittek*. 28. 209.
4026. *J. K. Sumec*. Ankerrückwirkung in Einphasengeneratoren. E.T.M. 24. 989.
4027. *J. K. Sumec*. Ankerrückwirkung in Drehstromgeneratoren. E.T.M. 24. 67; 88.
4028. *J. K. Sumec*. Die Umdrehungszahl des Winter-Eichbergmotors bei vollkommener Phasenkompensation. E.Z. 27. 667; 1213. — *G. Branna*. 667; 1213.
4029. *Sumpner and Record*. New alternate current instruments. T.E. 60. 561.
4030. *J. Teichmüller*. Belastung von Leitungen für Hausinstallationen. E.Z. 28. 475.
4031. *J. Teichmüller* u. *P. Humann*. Die Materialkonstanten zur Berechnung der Kabel auf Erwärmung. E.Z. 27. 579.
4032. *D. M. Therrell*. Transformer efficiency of telephonic induction coils as related to long distance transmission. E.W. 47. 1344.
4033. *A. Thomälen*. Schlüpfung, Drehmoment und Statorverluste des Einphasenmotors. E.Z. 28. 190.
4034. *A. Thomälen*. Die Theorie der einphasigen Kommutatormotoren mit Berücksichtigung der Streuung. E.T.M. 24. 717. 834. — *M. Osnos*. 834. — *J. K. Sumec*. 988.
4035. *J. J. Thomson*. Electric conduction in metals. Eg. 83. 265.
4036. *J. Thomson*. The modern theory of electrical conductivity of metals. T.E. 58. 839.
4037. *C. Tissot, K. E. F. Schmidt*. Über die Prüfung des Gesetzes des Quadrates der Entfernung in der Fortpflanzung elektromagnetischer Wellen mittels des Bolometers. E.Z. 28. 889.
4038. *C. Tissot*. Note on the use of the bolometer as a detector of electric waves. E. 101. 231.
4039. *Tissot*. The electrolytic detector T.E. 60. 25.
4040. *C. Tissot*. Methods of measurement in wireless telegraphy. T.E. 58. 21.
4041. *A. Tobler*. Neue Apparate zur Kabelprüfung. Z.S.T. 1907. 83; 103.
4042. *M. Toepler*. Über Funkenspannungen. E.Z. 28. 998; 1025.
4043. *H. Topham* and *H. G. Tisdall*. Some tests of a petrol engine. Eg. 82. 856.
4044. *W. S. Tucker*. The influence of pressure upon convection current. T.E. 59. 189.
4045. *C. R. Underhill*. Characteristics of the solenoid. E.W. 50. 1007.
4046. *R. de Valbreuse*. Sur les détecteurs d'ondes électrolytiques. E.E. 49. 201.
4047. *T. W. Varley*. Graphical diagram for determining the reactance in alternating current circuits. E.W. 49. 301.
4048. *J. Vinson*. Sous-station de transformation d'énergie électrique. G.C. 48. 321.
4049. *J. Wagner*. Nebenschlußwiderstände für Motoren mit Tourenregulierung. E.E. 28. 559.
4050. *K. W. Wagner*. Zu den Vorschlägen zur Definition der Induktivitäten gestreckter Leiter. E.Z. 28. 673.
4051. *W. Wagner*. Unstabile Betriebszustände bei Gleichstrommaschinen. E.Z. 28. 286.
4052. *T. F. Wall*. The iron losses in asynchronous machines. T.E. 58. 752; 797.
4053. *T. F. Wall*. The separation of the iron losses in asynchronous machines. T.E. 59. 374.
4054. *T. F. Wall* and *S. P. Smith*. Experimental determination of the losses in pole shoes and in armature-teeth. T.E. 60. 664.
4055. *K. Wallin*. Experiments on water resistances. T.E. 57. 825.
4056. *T. D. Waring*. Measurement of wire and cable insulation. E.W. 49. 795.
4057. *W. H. Warren*. Railroad motor with commutating poles. E.W. 49. 308.
4058. *E. A. Watson*. The permeability of alloyed irons at high flux densities. T.E. 60. 4.
4059. *E. A. Watson*. A simple method of measuring sparking voltages. T.E. 57. 53.

4060. *E. Wattelet*. Sur un indicateur de synchronisme et un indicateur de facteur de puissance. E.E. 47. 401; 441; 481.
4061. *E. Wattelet*. Réglage de la tension à l'extrémité d'une ligne génératrice triphasée. E.E. 53. 109.
4062. *E. L. Weber*. Investigation of high frequency, high potential. Oscillating discharges by means of the Brown tube. E.W. 49. 507.
4063. *W. P. White*. Thermokraftfreie Kompensationsapparate mit kleinem Widerstand und konstanter Galvanometerempfindlichkeit. Z.I. 27. 210.
4064. *W. P. White*. On increasing the constancy of batteries giving currents. T.E. 58. 606.
4065. *M. Wien*. Über die Abstimmung funktelegraphischer Sender. E.Z. 27. 337; 1197. — *A. Slaby*. 973; 1198.
4066. *R. Wikander*. Die Abstufung der Transformatoren mit veränderlichem Übersetzungsverhältnis. E.B.B. 4. 529.
4067. *C. T. Wilkinson*. Efficiency of lighting balancers. E. W. 47. 115; 998. — *B. F. Jacobsen*. 616.
4068. *H. A. Wilson*. The theory of moving coil and other kinds of ballistic galvanometers. T.E. 57. 860.
4069. *G. H. Wind*. Les électrons et la matière. E.E. 46. 901.
4070. *A. I. M. Winetraub*. Prodetermination of the length of armature conductors. E.W. 48. 371.
4071. *W. Wittek*. Die Berechnung des Selbstopinduktionskoeffizienten von in Fe gebetteten Spulen. E.Z. 27. 53; 304; 421; 445. — *F. Roßkopf*. 303; 421. — *O. Howe* 445.
4072. *W. Wittek*. Die Dimensionierung der Wechselstrommaschinen mit Rücksicht auf Spannungsänderung. E.T.M. 24. 109.
4073. *W. Wolf*. Neuere Formen und Untersuchungen von Influenzmaschinen. E.T.M. 24. 652; 688.
4074. *M. Wolfke*. L'électron considéré comme un centre de pression dans l'éther. E.E. 51. 73.
4075. *A. P. Young*. The most economical shape of winding for electrical measurement instruments. E.W. 50. 1247.
4076. *J. Zelisko*. Das Drehspulen-Relais. E.T.M. 25. 395; 419.
4077. *E. Ziehl*. Moderne Anschauungen über die Konstruktion elektrischer Maschinen. E.Z. 27. 956.
4078. *H. Zipp*. Resonanz im Stromkreisen, die mit Hysteresis und Wirbelstromverlusten behaftet sind. E. Z. 27. 1171. — *G. Benischke*. 1173.
4079. *H. Zipp*. Bestimmung der Fehlerluste nach der Dreivoltmethode. E.T.M. 25. 493.
4080. *H. Zipp*. Selbstinduktion oder Ankerwirkung? Ein Beitrag zur Vereinheitlichung der Theorien über sekundäre Gleichstrom- und Wechselstromkreise. E. Z. 27. 427.
4081. *H. Zipp*. Über den Einfluß der Wendepole auf die Wirkungsweise von Generatoren und Motoren. E.T.M. 25. 587; 740. — *F. Taussig*. 740.
4082. *H. Zipp*. Einiges über Wechselstrommotorenprobleme und deren graphische Behandlung. E.B.B. 4. 86; 198; 278; 379.
4083. *H. Zipp*. Eine einfache Herleitung der Betriebskurven einer Wechselstrommaschine. Z.V.D.I. 51. 1749.
4084. *H. Zipp*. Die Gefahrquellen in elektrischen Wechselstromanlagen und einige moderne Schutzvorrichtungen zur Abwendung der Gefahren. Z.V.D.I. 50. 1908.
4085. *N. N.* Prüfung elektrischer Maschinenanlagen. Z.D.M. 30. 271; 292.
4086. *N. N.* High speed electrical machinery. Eg. 81. 126; 158; 191.
4087. *N. N.* Standardization of direct current traction motors. E.W. 48. 714.
4088. *N. N.* Traction permutators. T.E. 58. 530.
4089. *N. N.* The theory of alternate current transmission in cables. T.E. 60. 277; 316; 359; 392; 468.
4090. *N. N.* A vital electric traction problem. T.E. 59. 264.
4091. *N. N.* Eisenbahnsicherungsanlagen mit isolierten Gleisstrecken. D.M. 15. 6. — *Gollmar*. 7.
4092. *N. N.* Radiotelegraphy and the Telefunken system. Eg. 82. 788; 827; 853.
4093. *N. N.* The Fleming direct-reading cyclometer and its applications. T.E. 58. 495; 536.
4094. *N. N.* Die Theorie des Selenkompensators. Z.S.T. 1907. 27.
4095. *N. N.* Blitzableiteruntersuchungen mittels des Blitzableiterprüfungsapparates. Z.M.S. 23. 240; 258; 274.

Erddruck.

4096. *E. P. Bone*. Reinforced concrete retaining wall design. E.N. 57. 448.
4097. *E. Godfrey*. The design of reinforced concrete retaining walls. E.N. 56. 402. — *H. Massart*. 689.

4098. *R. Hausse*. Von dem Niedergehen des Gebirges beim Kohlenbergbau und den damit zusammenhängenden Boden- und Gebäudesenkungen. Z.B.H.S. 55. 324.

4099. *O. Mohr*. Eine neue Theorie des Erddrucks. Z. A. I. (2) 12. 441.

4100. *Q.* Berechnung der Absteigungen beim Bau einer Schiffschleuße. T. B. B. 19. 284.

4101. *Weyrauch*. Erddrucktrajektorien. Z. A. I. (2) 11. 533; 635. — *B. Safir*. 534.

Fehler.

4102. *J. Adamczik*. Der pythagoräische Lehrsatz als Bedingungsleichung. Z. V. 36. 97.

4103. *E. Doležal*. Das Grubennivellierinstrument von Cséti und seine Modifikation nach Prof. Doležal. Ö. Z. B. H. 54. 199; 213; 225; 243; 257; 276; 283.

4104. *O. Eggert*. Die mittleren Fehler der Unbekannten bei Näherungsausgleichungen. Z. V. 36. 409.

4105. *O. Eggert*. Die Fehlerfortpflanzung in Polygonzügen. Z. V. 36. 4.

4106. *O. Eggert*. Die Genauigkeit der Nonienablesung. Z. V. 36. 635.

4107. *Ferber*. Polygonzugsausgleichung nach der Meth. der kl. Quadrate mit im voraus angenommenen mittleren Fehlern. Z. V. 36. 618; 649.

4108. *R. Fuchs*. Ein einfaches graphisches Ausgleichungsverfahren. Z. V. 35. 122.

4109. *M. Gansbauer*. Basismessung durch den Simplontunnel mit Invardrähten. Z. Ö. I. A. V. 59. 463.

4110. *Gollmer*. Ein einfaches Verfahren zur Fehlerbestimmung von Telegraphenkabeln. D. M. 15. 169.

4111. *E. Hammer*. Zum Schreiben von Normalgleichungen. Z. V. 35. 249.

4112. *E. Hammer*. Diagramm der idealen Genauigkeit des mit dem mittleren Richtungsfehler $\pm m$ über n fehlerfrei gegebene Punkte rückwärts eingeschrittenen Neupunkts. Z. V. 35. 382.

4113. *G. Heyde*. Untersuchung einer Kreisteilung. Z. V. 36. 543.

4114. *Kohenner*. Die Untersuchung der Achsenfehler des Hängezeuges. Z. V. 35. 703.

4115. *König*. Ungleichheit der Ziel-schärfe im Gesichtsfelde. Z. V. 35. 201.

4116. *Kummer*. Mitteilung von Beobachtungsergebnissen über die Schätzungs- und Kotierungs-genauigkeit an Maßstäben und Kartierungsinstrumenten. Z. V. 36. 531; 561; 593.

4117. *W. Laska*. Eine einfache Begründung der Methode der kleinsten Quadrate. Z. V. 36. 516.

4118. *Lüdemann*. Schätzen von Entfernungen. Z. V. 35. 626. — *v. Zschock*. 733.

4119. *K. Lüdemann*. Über die Genauigkeit von Flächenberechnungen mit der Quadratmillimeterglastafel. Z. V. 36. 373.

4120. *Pelletan*. Compensation d'une triangulation. A. D. M. P. (10) 10. 195.

4121. *A. Schreiber*. Genauigkeitsversuche mit einem Bohneschen Aneroide. Z. V. 35. 529; 561.

4122. *A. Schreiber*. Genauigkeitsversuche mit einem Bohneschen Aneroide auf Eisenbahnfahrten. Z. V. 36. 449; 481.

4123. *F. Schulze*. Über die Größe des mittleren Punktfehlers bei den drei Methoden des Einscheidens. Z. V. 35. 585; 601.

4124. *F. Schulze*. Größe des mittleren Punktfehlers in dem Satze des Minimums. Z. V. 36. 385.

4125. *Strehl*. Über Fehlerausgleichung. C. Z. O. M. 27. 289.

4126. *R. Vogeler*. Der Maximalfehler und die amtlichen Fehlergrenzen; ferner Vergleichung einer Reihe zufälliger Ereignisse mit dem Fehlergesetz. Z. V. 36. 129.

4127. *S. Wellisch*. Über die Prinzipien der Ausgleichsrechnung. Z. V. 36. 579.

4128. *S. Wellisch*. Beziehung zwischen den Methoden der Ausgleichung bedingter u. vermittelnder Beobachtungen. Z. V. 35. 249.

Festigkeit.

4129. *F. Adutt*. Die Dimensionierung von Platten und Plattenbalken. Z. Ö. I. A. V. 58. 558.

4130. *F. Adutt*. Wohn- u. Geschäftshaus Wien VII Mariahilferstr. 58. B. E. B. 6. 236.

4131. *A. H. C.* The strength of rings. E. 104. 451; 614. *B. Wells*, *R. H. Collingham*. 476. — *C. C. Moyle*. 503. — *G. T. Pardoe*. 518. — *R. W. Bailey*. 552. — *F. R. S. Rice*. 604.

4132. *A. v. Babo*. Column strength and the Quebec bridge failure. E. N. 58. 341.

4133. *C. Bach*. Versuche mit Eisenbetonbalken. M. F. I. 39. 1; 45—47. 1.

4134. *C. Bach*. Versuche mit einbetonierten Thacker-Eisen. M. F. I. 39. 51.

4135. *C. Bach*. Druckversuche mit umschnürtem Beton. B. E. B. 5. 14; 38.

4136. *C. Bach*. Versuche über die Drehfestigkeit von Körpern mit trapez-

förmigem und dreieckigem Querschnitt. Z. V. D. J. 50. 481; M. F. I. 33. 71.

4137. *C. Bach*. Zur Widerstandsfähigkeit ebener Wandungen von Dampfkesseln und Dampfgefäßen. Z. V. D. I. 50. 1940.

4138 *C. Bach*. Versuche über die Formänderung und die Widerstandsfähigkeit von Hohlzylindern mit und ohne Rippen. Z. V. D. I. 61. 1700.

4139. *C. Bach*. Die Bildung von Rissen in Kesselblechen. Z. V. D. I. 50. 1; M. F. I. 33. 43.

4140. *G. Barkhausen*. Theorie der Verbundbauten in Eisenbeton und ihre Anwendung. O. F. E. (2) 43. 224; 250.

4141. *F. W. Barrows*. Patterns for flanged pipe filling. Am. M. 30. B. 400.

4142. *J. Bartholomew*. Compression carried by lattice members of columns. E. N. 58. 366.

4143. *M. Bazali*. Berechnung einer Straßenbrücke aus Eisenbeton. E. K. K. 1. 230; 245.

4144. *J. Behrmann*. Einiges über exzentrisch beanspruchte Säulen. B. E. B. 6. 25.

4145. *T. Bielakoff*. Zur Dimensionierung der Eisenbetonplattenbalken. B. E. B. 6. 99.

4146. *W. G. Bligh*. On the section of weirs. E. 102. 166; 237; 260; 302; 313; 339.

4147. *H. Böhme*. Berechnung und Konstruktion eines Fachwerklaufkrantägers. E. K. K. 1. 145; 166; 177; 195.

4148. *R. Bonnin*. General theory of horizontally curved beams. E. N. 58. 155.

4149. *J. B. Bosch*. Berechnung von mit Walzträgern armierten Eisenbetonplatten. S. D. B. 17. 266.

4150. *Brabandt*. Über den Einfluß des Grobschlagzusatzes im Beton auf die Druckfestigkeit. C. B. B. 27. 537.

4151. „Bridge Engineer“. The strength of bridges. E. 101. 305.

4152. *J. A. Brown*. The strength of rings. Am. M. 29. A. 520.

4153. *C. B. Buerger*. The design of reinforced concrete chimneys. E. N. 57. 21.

4154. *Bz.* Die Prüfung von Zement- und anderen Bausteinen künstlicher Art. B. M. K. 11. 69.

4155. *F. E. Cardullo*. On the analysis of columns. E. N. 56. 262; 464. — *I. P. Church*, L. Ross 336.

4156. *A. P. Carman* and *M. L. Carr*. Resistance of tubes to collapse. Am. M. 29 B. 763.

4157. *P. Caufourier*. Calcul des hourdis en béton armé. G. C. 48. 376.

4158. *P. Caufourier*. The calculation of ferro-concrete slabs. Eg. 81. 736.

4159. *Chaudesaigues*. Méthode de calcul des pièces et système en ciment armé. N. A. C. (2) 4. 26; 43; 92; 103; 126; 134; 154; 167; 183.

4160. *F. Chaudy*. Sur le calcul des pièces métalliques chargées de bout dont les âmes sont à treillis. M. I. C. 60. B. 111.

4161. *A. Considère*. Le béton fretté et ses applications. G. C. 50. 246; 260; 289; 298.

4162. *R. Deifel*. Druckereigebäude d. Herrn R. M. Rohrer in Brünn. B. E. B. 6. 10.

4163. *R. Deifel*. Bau Mühle Neumann, Biala. B. E. B. 6. 302.

4164. *Dinglinger*. Neue Versuche mit kupfernen Feuerbuchsen. A. G. B. 58. 101.

4165. *C. Drach*. Zur Dimensionierung der beiderseits armierten Balken. B. E. B. 5. 203.

4166. *S. C. Drach*. Beitrag zur Berechnung der Hauptunterzüge von Eisenbetonbalkendecken. Z. Ö. I. A. V. 59. 11.

4167. *R. Edler*. Studien über die Berechnung der Augen von Gelenkstangen, Kettenlaschen, Schubstangenköpfen u. dgl. M. T. G. W. (2) 16. 192.

4168. *H. Ehrlich*. Straßenbrücke II. Klasse aus armiertem Beton. B. E. B. 6. 174.

4169. *F. v. Emperger*. Die Eisenverbindungen im Beton. B. E. B. 6. 78.

4170. *F. v. Emperger*. Knickversuch mit einer ausbetonierten Eisensäule. Z. Ö. I. A. V. 59. 749.

4171. *F. v. Emperger*. Drei Versuche mit Eisensäulen. B. E. B. 6. 101.

4172. *Engesser*. Zum Einsturz der Brücke über den St. Lorenzstrom in Quebec. C. B. B. 27. 609.

4173. „Engineer“. The design of reinforced concrete columns. E. N. 55. 473.

4174. „Entropy“. Table for dimensioning dovetail slides and gibs. Am. M. 29. A. 842.

4175. *G. Espitallier*. Nouvelle méthode du calcul des ouvrages en béton armé. G. C. 48. 161.

4176. *F. v. E.* Eine rationelle Bestimmung der Abmessungen von Balken. B. E. B. 5. 48.

4177. *F. v. E.* Belastungsprobe einer Betoneisendecke in der Skrivaner Zuckerfabrik. B. E. B. 5. 88.

4178. *R. Feret*. A propos de la relation entre la résistance à la compression des mortiers hydrauliques et leur volumes élémentaires. B. M. K. 12. 350.

4179. *F. v. F.* Die Bruchursachen der betoneisernen geraden Träger. B. E.B. 5. 35.

4180. *Fölzer und Doorentz.* Statische Berechnung eines Hochbehälters „System Barkhausen“ von 500 cbm Inhalt auf 20 m hohem Standgerüst. E.K.K. 1. 88.

4181. *A. Francke.* Knicksicherheit bei entsprechender Zunahme des Trägheitsmomentes des Stabquerschnittes. Z. A.I. (2) 12. 471.

4182. *Frank.* Der Einsturz des Reservoirs in Madrid. B. E.B. 6. 106.

4183. *H. Fröhlich.* Das Widerstandsmoment des Eisenbetonquerschnitts und seine Anwendung im Gewölbebau. B. E.B. 5. 13; 43.

4184. *G. A. R.* Calculation of the strength of a crane drum. Am.M. 29. A. 710.

4185. *Garan.* Note sur les résultats des épreuves des tabliers métalliques de la ligne de Quillan à Rivesaltes. A. P.Ch. (8) 21. 198.

4186. *A. Gessner.* Über die Beanspruchung freiaufhängender Träger durch Stoß mit Berücksichtigung der Schlagbiegeprobe für Gußeisen. Z. Ö.I.A.V. 58. 665.

4187. *T. Gesztessy.* Fundierung und Grundwasserabdichtung für den Erweiterungsbau der Bank für Handel und Industrie zu Berlin. B. E.B. 6. 194.

4188. *L. Geusen.* Die Eindeckung der Fabrikdächer in Eisenbeton. B. E. B. 6. 176; 198.

4189. *E. Godfrey.* The design of concrete-steel beams and slabs. E.N. 55. 290.

4190. *E. Godfrey.* The design of reinforced concrete columns and footings. E.N. 56. 30. — *W. H. Sadler.* 233.

4191. *P. Göldel.* Die Considère'schen und Schüle'schen Versuchsergebnisse von armiertem Beton als Grundlage für eine Eisenbetontheorie. E.K.K. 1. 263.

4192. *P. Göldel.* Beitrag zur Berechnung doppelt armierter Betonplatten. S. D. B. 17. 274.

4193. *P. Göldel.* Bestimmung der Belastungsgrenzen, für welche bei Eisenbetonplatten besondere Eiseneinlagen zur Aufhebung der Scherspannungen nicht erforderlich sind. M. Z. B. E. 3. 82.

4194. *R. Goetske.* Zur Berechnung von Kabeln bei elektrischen Anlagen. E. B. B. 5. 435.

4195. *J. Goodman.* The strength and elasticity of white metal. Eg. 82. 376.

4196. *J. A. G. Goulet.* The strenght of a cast-iron beam reinforced by steel plate. Am.M. 30. A. 21.

4197. *M. Grübler.* Versuche über die Festigkeit rotierender Scheiben. Z. V. D. I. 50. 294.

4198. *M. Grübler.* Vergleichende Festigkeitsversuche an Körpern aus Zementmörtel. M. F. I. 40. 21; Z. V. D. I. 51. 176.

4199. *G. Hagemann.* Biegungsfestigkeit und Deformation. E.K.K. 1. 117.

4200. *E. Haimovici.* Wie kann die Anwendung des Eisenbetons in der Eisenbahnverwaltung wesentlich gefördert werden. B. E. B. 6. 20.

4201. *A. Hainisch.* Schubfestigkeit von Bausteinen. M. T. G. W. (2) 16. 152.

4202. *G. W. Hanna.* Economic design of reinforced concrete. E. N. 57. 203. — N. N. 686.

4203. *Harel de la Noé.* Consolidation du pont du Guildo. A. P. Ch. (8) 26. 138.

4204. *C. L. J. Hartmann.* Riß im vollen Blech eines Schiffsdampfkessels. Z. B. D. 11. 76.

4205. *J. Hausmann.* Eisenbahnüberführungen in Eisenbeton. M. Z. B. E. 4. 85; 89; 93.

4206. *J. Hawkesworth.* The design of reinforced concrete beams and the location of maximum moment in a footing. E. N. 56. 209.

4207. *K. Heintzel.* Die Formel von Considère zu Berechnung der Eisenbetonpfeiler mit spiralförmiger Eiseneinlage und die Versuche von Wayss und Freytag. B. E. B. 5. 232. — A. Considère. 233.

4208. *A. Hempelmann.* Versuche über Torsion rechteckiger prismatischer Stäbe. P. J. 322. 772; 790; 810; 819.

4209. *F. Hennicke.* Die Beanspruchung von Platten. Z. L. H. 13. 131; 135.

4210. *F. Hennicke.* Verlegung von Rohrleitungen in hohlen Säulen. Z. L. H. 13. 103.

4211. *A. Hertwig.* Betrachtungen über I-profile. Z. V. D. I. 50. 1098.

4212. *A. Hertwig.* Die Entwicklung einiger Prinzipien in der Statik der Baukonstruktion und die Vorlesungen über Statik der Baukonstruktion und Festigkeitslehre von G. C. Mehrrens. Z. A. I. (2) 11. 493.

4213. *Herzog.* Note sur l'emploi de caissons en béton armé pour la fondation des murs de quais à l'aide des procédés pneumatiques. A. P. Ch. (8) 30. 95.

4214. *Hofmann.* Zur Berechnung der Stärke eisenbewehrter Betonplatten. S. D. B. 16. 359.

4215. *Hollender.* Einfache Ableitung der Eulerschen Knickformel. Z. V. D. I. 50. 537.

4216. *W. O. Hornsnail*. The design of electric generators. Eg. 81. 606.
4217. *Hundt*. Ersatz des Holzansbaus im Wilhelmsschacht II des K. Steinkohlenbergwerks König durch Eisenbetonausbau. Z. B. H. S. 54. 315.
4218. *J. Isaachsen*. Die Beanspruchung von Drahtseilen. Z. V. D. I. 51. 652.
4219. *G. Janka*. Über die an der k. k. forstl. Versuchsanstalt Mariabrunn gewonnenen Resultate der Holzfestigkeitsprüfungen. Z. Ö. I. A. V. 59. 565; 587.
4220. *Járay*. Plattenbalken mit schlaffer Armierung. T. B. 38. 1.
4221. *Jopke*. Vereinfachung der Berechnung von Eisenbetonrippen. E. K. K. 1. 154.
4222. *Kammerer*. Versuche mit Riemen- und Seiltrieben. Z. V. D. I. 51. 1085.
4223. *G. Kaufmann*. Versuche über die Festigkeit von Schlackenbeton. B. E. B. 6. 226.
4224. *G. Kaufmann*. Zur Berechnung der Plattenbalken aus Eisenbeton. B. E. B. 5. 207. — *E. Probst*. 264.
4225. *M. S. Ketchum, T. C. J. Baily*. The strenght of corrugated sheeting. E. N. 58. 525. — *G. H. Blakeley*. 643.
4226. *F. Kiefernagel*. Berechnung der freitragenden Wellblechdächer. E. K. K. 1. 161.
4227. *A. Kleinlogel*. Zug- und Biegeversuche mit Eisenbeton. M. Z. B. E. 3. 87; 89.
4228. *O. Knaudt*. Über die Abweichung von der kreisrunden Form der Flammenrohre mit äußerem Druck. Z. B. D. 10. 193; 207.
4229. *W. H. Kniskern*. Diagrams for the design and analysis of reinforced concrete beams. E. N. 57. 385.
4230. *Kögler*. Über die Ermittlung der Eiseneinlagen in Gewölbe. B. E. B. 6. 182.
4231. *M. Koenen*. Querverstärkung gedrückter Eisenbetonkörper und ihre wissenschaftliche Begründung. C. B. B. 27. 109.
4232. *M. Koenen*. Mitteilungen über die Ergebnisse der Probelastung durchgehender (kontinuierlicher) mit den untersuchenden Trägern zusammenhängender Eisenbetonplatten. M. Z. B. E. 4. 49; 54.
4233. *F. K. Koney*. Economy of material in framed structures. Am. M. 29. B. 270; 611.
4234. *K. Kramár*. Ermittlung der Gewichte von Lokomotivkesseln. Ö. F. E. (2) 43. 12.
4235. *J. Kübler*. Zur Theorie der Knickfestigkeit. Z. A. I. (2) 11. 189. — *Hasse*. 191.
4236. *C. E. Labard*. An electrically controlled single-lever testing machine and some torsion tests. Eg. 84. 474; 505.
4237. *J. Labes*. Wie kann die Anwendung des Eisenbetons in der Eisenbahnverwaltung wesentlich gefördert werden. C. B. B. 26. 327. — *M. Koenen*. 27. 520.
4238. *A. Larsen*. Festigkeitsberechnung eines Querschottes für einen Tankdampfer. S. B. 8. 789.
4239. *O. Leuprecht*. Beitrag zur Berechnung steifer Rahmenkonstruktionen. B. E. B. 6. 233; 258.
4240. *H. Lieb*. Berechnung einer 8-seitigen Turmpyramide. E. K. K. 1. 225; 241.
4241. *O. Lippmann*. Berechnungen des Mechanikers. D. M. 15. 31; 93; 151; 281.
4242. *R. T. Logeman*. The design of plate girder web splices. E. N. 56. 227.
4243. *C. H. Logue*. Strength of bevel gears. Am. M. 30. B. 556.
4244. „*Lucigen*“. Punching and shearing-machine frame calculations. Am. M. 30. A. 803.
4245. *H. Luksch*. Dichtigkeitsprüfungen bei Rohrnetzen von Acetylenzentralen. Ac. 10. 103; 151.
4246. *A. Lüdicke*. Zerreißerichtungen für Gespinnte und Gewebe und Zerreißeversuche. Z. F. T. 6. 131; 145.
4247. *D. B. Luten*. Empirical formulae for reinforced arches. E. N. 55. 718.
4248. *D. B. Luten*. A knotty problem in stress-analysis: dangerous „safe stresses“ in a reinforced concrete bridge. E. N. 56. 336. — *J. N. Prenovich, J. L. Campbell*. 440.
4249. *M. Marcichowski*. Beitrag zu den Versuchen mit Eisenbeton. B. E. B. 5. 128.
4250. *H. Masereeuw*. Tunnel im Rangierbahnhof der Holländ. Eisenbahngesellschaft in Watergraafsmeer bei Amsterdam. B. E. B. 6. 62; 89; 118.
4251. *J. Melan*. Hilfstafel und Näherungsformeln zur Berechnung doppelt armerter Betonbalken und Plattenbalken. T. B. 38. 121.
4252. *J. Melan*. Über Berechnungsnormen für Tragwerte von Betoneisen. B. E. B. 6. 50; 81.
4253. *Mesnager*. Note sur l'influence de la barbotine lors de la reprise des constructions en beton de ciment armé interrompues. A. P. Ch. (8) 27. 181.
4254. *A. M. Meyers*. The proportioning of latticing in columns. E. N. 58. 366.

4255. *H. T. Millar*. Diagram for finding the strength of bevel gears. Am. M. 30. A. 838.
4256. *Möller*. Untersuchungen an Plattenträgern aus Eisenbeton. V.V.G. 86. 163; 249.
4257. *E. Mörsch*. Die Tabellenwerke der Eisenbetonkonstruktionen. M.Z.B.E. 4. 43; 47; 51. — *Ramisch*. 78.
4258. *C. T. Morris*. The lacing of compression members. E.N. 58. 487. — *W. C. Thomson*. 643.
4259. *K. A. Müllenhoff*. Some features of modern european gas holder design. E.N. 55. 240.
4260. *B. Nast*. Gebäudeverankerungen gegen Bergschäden. B.E.B. 6. 113.
4261. *M. Nicolitch*. A diagram for T-shaped beams of reinforced concrete. E.N. 58. 123.
4262. *Nitzsche*. Belastungsgleichwerte für die Achslasten des Lastenzuges der preuß. Vorschr. für die Berechnung eiserner Brücken von 1. V. 03. E.K.K. 1. 209.
4263. *A. Nowak*. Der Eisenbahnbetonbau bei den neuen durch die k. k. Eisenbahnbandirektion hergestellten Bahnlinien der österreichischen Monarchie. B.E.B. 6. 5; 31; 67; 92.
4264. *J. B. Peddle*. The math. analysis of the strength of belting. Am. M. 29. A. 326.
4265. *N. Peters*. Berechnung der Schornsteine. Z.V.D.I. 50. 1639.
4266. *H. Pilgrim*. Berechnung der Betoneisenkonstruktionen. Z.A.I. (2) 11. 299.
4267. *W. Pinegin*. Versuche über den Zusammenhang von Biegungsfestigkeit und Zugfestigkeit bei Gußeisen. Z.V.D.I. 50. 2029; M.F.I. 48. 43.
4268. *F. Postwanschitz*. Beitrag zur Frage des rechnerischen Nachweises der Betonzugspannung für auf Biegung beanspruchte Tragwerke in Betoneisen. B.E.B. 6. 157.
4269. *P. Prache*. Fondations isolantes Anthoni-Prache contre bruits et trépidations. M.I.C. 58. B. 346.
4270. *L. Prandtl*. Knicksicherheit von Gitterstäben. Z.V.D.I. 51. 1867. 2087. — *F. Engesser*. 2087.
4271. *H. S. Prichard*. The proportioning of steel railway bridge member. E.N. 58. 301.
4272. *C. Probst*. Ausführungen mit Siegwartbalken. B.E.B. 6. 69; 94.
4273. *G. Ramisch*. Beitrag zur Berechnung von exzentrisch belasteten Eisenbetonpeilern. S.D.B. 17. 299.
4274. *G. Ramisch*. Beitrag zur Berechnung von Betonplatten mit Eisenanlagen. Z.Ö.I.A.V. 58. 594.
4275. *G. Ramisch*. Mitteilung von Formeln zur direkten Berechnung von Eisenbetonplatten. S.D.B. 17. 275.
4276. *G. Ramisch*. Entwicklung der Formeln zur direkten Berechnung von Eisenbetonplatten. V.V.G. 86. 601.
4277. *G. Ramisch*. Berechnung von gleichmäßig belasteten flachen Massivbögen. E.K.K. 1. 21; 30.
4278. *E. Reich*. Beitrag zur Berechnung zylindrischer Reservoire. B.E.B. 6. 257.
4279. *J. Reischle*. Leistungsfähigkeit von Sicherheitsventilen gewöhnlicher Bauart. Z.B.D. 11. 11.
4280. *E. Röggl*. Über die Materialbeanspruchung im rotierenden Körper. Z.Ö.I.A.V. 59. 171.
4281. *K. Rössle*. Eisenbetonkonstruktionen am Neubau der Wiener Handels- und Gewerbekammer. B.E.B. 6. 85.
4282. *B. Rueb*. Kastenförmiger Rahmen in Eisenbeton. M.Z.B.E. 4. 81.
4283. *R. Saliger*. Die Druckfestigkeit des umschnürten Betons. M.Z.B.E. 4. 63.
4284. *R. Saliger*. Zur Berechnung doppelt und großprofilig armerter Betonträger. B.E.B. 5. 49. — *E. Elwitz*. 49. — *A. Beesl*. 76.
4285. *P. Schiffler*. Statische Berechnung eines Laufkranträgers. E.K.K. 1. 212.
4286. *M. G. Schinke* und *B. Löser*. Eine Eisenbetonstudie. B.E.B. 6. 151; 179.
4287. *W. A. Scoble*. The strength of shafts. Eg. 84. 361. — *C. A. Smith*. 423.
4288. *A. E. Seaton*. The use of high tensile steel in component structures. Eg. 83. 872.
4289. *J. S. Sewell*. The design of continuous beams in reinforced concrete. E.N. 56. 426.
4290. *H. Siegwart*. Verfahren und Maschine zur Erzeugung von armierten Zementmasten und -Röhren. B.E.B. 6. 121; 153.
4291. *S. Singer*. Rippenverstärkungen. Z.Ö.I.A.V. 59. 885.
4292. *S. E. Slocum*. A simple method for the calculation of the bending strength of curved pieces. E.N. 55. 604.
4293. *J. Smith* und *Ulffers*. Die Festigkeitsbeanspruchungen in Schiffsverbänden. S.B. 8. 873; 910.
4294. *A. Sommerfeld*. Die Knicksicherheit der Stege von Walzwerkprofilen. Z.V.D.I. 50. 1104.

4295. *Sor.* Nochmals die Eisenbetonplatten. B.E.B. 5. 76. — *Bosch* 156.
4296. *Sor.* Berechnung von Säulen aus umschnürtem Beton. B.E.B. 5. 96.
4297. *H. Stähler.* Wasserhochbehälter für 550 cbm Inhalt mit eisernem Standgerüst. P.M.C. 39. 139; 146.
4298. *O. Stern.* Künstliche Befestigung des Baubodens mittels „schwebender“ Pilotage. B.E.B. 6. 1.
4299. *R. T. Stewart.* Collapsing pressure of Bessemer steel lap-welded tubes 3:10 inches in diameter. Am. M. 29. B. 44.
4300. *Strahl.* Die Beanspruchung der Kupplung einer Dampflokomotive. A. G.B. 61. 170.
4301. *F. Straube.* Der Bruch eines Kesselbodens bei der Wasserdruckprobe. Z.D.W. 31. 114.
4302. *R. Striebeck.* Prüfverfahren für gehärteten Stahl unter Berücksichtigung der Kugelform. Z.V.D. 351. 1445; 1500; 1542.
4303. *S. E. Thompson.* Forms for concrete construction. E.N. 57. 97.
4304. *M. R. v. Thullie.* Neuere Versuche mit Eisenbeton. B.E.B. 6. 185; 210; 289.
4305. *M. R. v. Thullie.* Neue französische Versuche mit umschnürtem Beton. B.E.B. 6. 124; 150.
4306. *M. R. v. Thullie.* Neue Versuche mit betoneisernen Säulen in Lemberg. B.E.B. 6. 17; 43.
4307. *C. E. Tirrell.* The design of 75-ft reinforced concrete girders for the mammoth garage, White Plains. N.Y. E.N. 58. 633.
4308. *Turley.* Die direkte Bestimmung von Eisenbetonquerschnitten mit doppelter Eiseneinlage. B.E.B. 6. 53.
4309. *C. A. P. Turnes.* Deformed bars or plain bars in reinforced concrete. E. N. 58. 230.
4310. *J. A. Vaughan.* The factor of safety of winding ropes. E. 102. 189; 212.
4311. *L. Vianello.* Knickfestigkeit eines dreiarmigen, ebenen Systems. Z. V.D.I. 50. 1753.
4312. *Victor.* Vom Eisenbahnoberbau. Z.V.D.I. 50. 1555.
4313. *C. Vlachos.* Berechnung der Eisenbetonbauten unter Berücksichtigung der Zugspannungen des Betons. B.E.B. 6. 313.
4314. *E. Wagner.* Continuous beams or shafts having three supports. E.N. 56. 370. — *E. Godfrey* 510.
4315. *Weidmann.* Vergleichende Kostenberechnung der Eisenarmierung aus biegungsfestem Profileisen und Stabeisen für Verbundbalken von größerer Stützweite. B.E.B. 6. 202.
4316. *P. Weiske.* Fortschritte in der Theorie des Eisenbetons seit 1904. P.J. 322. 113; 132; 152.
4317. *Weiske.* Die Haftfestigkeit zwischen Beton und Eisen im Eisenbetonlager. P.J. 322. 298.
4318. *P. Weiske.* Berechnung der Eisenbetonplattenbalken. M.Z.B.E. 3. 7.
4319. *P. Weiske.* Dimensionierung von Plattenbalken auf Grundlage der preußischen Normen. B.E.B. 5. 46.
4320. *P. Weiske.* Neue amtliche Bestimmungen für Eisenbetonbauten. P.J. 322. 481.
4321. *A. L. Westcott.* Calculation of the strength of a crane drum by graphical construction. Am. M. 29. A. 519.
4322. *E. H. Wood.* The arms of gearwheels. Am. M. 30. A. 873.
4323. *R. Wuczkowski.* Formeln zur direkten Ermittlung der Querschnittsdimensionen bei Eisenbetonplatten. B. E.B. 6. 235.
4324. *R. Wuczkowski.* Geschäftshaus des Architekten C. Hofmeier Wien I Kärntnerstr. 27. B.E.B. 6. 150; 166.
4325. *R. Wuczkowski.* Das Modelltheater. B.E.B. 5. 26; 57.
4326. *H. Zimmermann.* Knickfestigkeit eines Stabes mit elastischer Querstützung. C.B.B. 26. 251.
4327. *S. Zipkes.* Die Scher- und Schubfestigkeit des Eisenbetons. B.E.B. 5. 15; 40; 70; 96. — *Mörsch* 289.
4328. *W. Zschutschke.* Die Berechnung der Aufzugsdrahtseile. P.M.C. 39. 6.
4329. *N. N.* Emploi du beton armé. N.A.C. (2) 4. 57; 72.
4330. *N. N.* Instructions relatives à l'emploi du béton armé. A.P.Ch. (8) 24. 271.
4331. *N. N.* Untersuchungen von armiertem Beton auf reine Zugfestigkeit und auf Biegung unter Berücksichtigung der Vorgänge beim Entlasten. S.B.Z. 48. 309.
4332. *N. N.* The strength of cast iron beams. Am. M. 29. B. 652.
4333. *N. N.* Column formulas in relation to the practical column. E.N. 57. 15.
4334. *N. N.* Berechnung einfacher Hohlstützen. T.B.B. 19. 102.
4335. *N. N.* Bestimmungen für die Ausführung von Konstruktionen aus Eisenbeton bei Hochbauten. S.B.B. 27. 301.
4336. *N. N.* Berechnung des Rollenkipplagers einer eisernen Straßenbrücke. E.K.K. 1. 181.

4337. *N. N.* The Quebec bridge disaster. *Eg.* 84. 401. — *F. Keelhoff* 423.

4338. *N. N.* Vernietungen für Dampfkessel und Dampfgefäße. *P. M. C.* 39. 174; 182.

4339. *N. N.* Zweiflammenrohrdampfkessel mit Überhitzer. *P. M. C.* 39. 10.

4340. *N. N.* Die Zylindertrockenmaschine. *P. M. C.* 39. 170.

4341. *N. N.* The resistance of tubes to collapse. *Eg.* 83. 19.

4342. *N. N.* Rohrprüfung. *Z. D. M.* 29. 288.

Flächen.

4343. *R. Fuchs.* Theorie des Karteneingangs. *Z. V.* 36. 289.

4344. *E. Hammer.* Einige Bemerkungen über die Krümmungshalbmesser an Erdellipsoid. *Z. V.* 35. 434.

4345. *W. Láška.* Theorie des Karteneinganges. *Z. V.* 35. 113.

Funktionen.

4396. *Roether.* Einiges über die Funktion $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. *Z. V.* 35. 481.

Geometrie.

4347. *F. Rosenkranz.* Vorschule des Uhrmachers. *A. J. U.* 32. 180; 214; 283; 325; 356.

Geschichte der Technik.

4348. *T. Beck.* Leonardo da Vinci's Codice atlantico. *Z. V. D. I.* 50. 524; 562; 645; 777.

4349. *E. Hammer.* Eine halbamtliche Anleitung zur Feldmessung aus dem Anfang des 17. Jahrhunderts. *Z. V.* 36. 545.

4350. *F. Hammer.* Zu Reymers „Geodesia Ranzoniana“. *Z. V.* 35. 352.

4351. *Hillegaart.* Alte Grundstückteilungen und Meßinstrumente. *Z. V.* 35. 401.

Gewölbe.

4352. *Davidesco.* Examen critique des formules employées pour déterminer l'épaisseur à la clef des voûtes en maçonnerie. *A. P. Ch.* (8) 21. 247.

4353. *G. Elwitz.* Die Untersuchung des elastischen Gewölbes. *Z. B. W.* 56. 437; 611.

4354. *F. Jivasek.* Berechnung von eingespannten Gewölben. *M. Z. B. E.* 4. 86.

4355. *C. J. Kriemler.* Die nachträgliche Prüfung einer rechnerisch ermittelten Gewölbedrucklinie auf ihre Annäherung an die Wahrheit. *Z. A. I.* (2) 12. 67.

4356. *Mesnager.* Expériences sur une semi-articulation pour voûtes en béton armé. *A. P. Ch.* (8) 26. 180.

4357. *E. Mörsch.* Berechnung von eingespannten Gewölben. *S. B. Z.* 47. 83; 89.

4358. *L. Oelenheinz.* Gewölbelehre und -Genealogie. *S. D. B.* 16. 205.

4359. *G. Ramisch.* Berechnung von flachen Kreisbogengewölben aus Eisenbeton. *E. K. K.* 1. 37.

Gleichungen.

4360. *A. Wedemeyer.* Auflösung quadratischer Gleichungen. *Z. V.* 35. 437.

Graphischer Kalkül.

4361. *E. Dafinger.* Graphodynamische Untersuchung einer Heusinger-Joy-Steuerung. *P. J.* 322. 81; 97; 135; 166; 214; 232; 247; 263.

4362. *E. Haimovici.* Graphische Darstellung der Formeln zur Querschnittsdimensionierung und Spannungsermittlung bei auf Biegung beanspruchten Eisenbetonkonstruktionen mit einfacher und doppelter Armierung. *M. Z. B. E.* 3. 58; 4. 77.

4363. *E. Hammer.* Mechanische Addition der zu gegebenen Argumentzahlen gehörigen Werte einer Funktion. *Z. V.* 35. 257.

4364. *R. E. Hellmund.* Graphical treatment of higher harmonics. *E. W.* 47. 1338.

4365. *A. E. Kennelly.* A graphic method of determining the ratio of speed-voltage variation in Shunt motors. *E. W.* 47. 1298.

4366. *K. Kramář.* Graphische Ermittlung der Gesteungskosten elektrischer Energie. *E. T. M.* 24. 1035.

4367. *A. A. Radtke.* Graphical method of determining power factor from wattmeter readings. *E. W.* 50. 629.

4368. *J. Rieger.* Détermination graphique des effets dans une poutre en matière homogène et plus spécialement en béton armé. *G. B.* 52. 323.

Harmonische Analyse.

4369. *K. H. Haga.* Eine neue Methode zur Zerlegung einer periodischen Kurve in ihre Harmonischen. *E. T. M.* 24. 762.

4370. *J. Harrison.* A graphic method of harmonic analysis. *Eg.* 81. 201.

4371. *H. Varrecka.* Analyse von Wechselstromkurven. *E. Z.* 28. 482.

Hydromechanik.

4372. *J. Adam.* Der Ausfluß von heißem Wasser. Z.V.D.I. 50. 1143; 1269.
4373. *J. Adam.* Über den Ausfluß von heißem Wasser. M.F.I. 35. 361.
4374. *A. P. Anderson.* A diagram for computing the flow of water over weirs. E.N. 65. 157.
4375. *D. M. Andrews.* The computation of height of backwater above dams. E.N. 56. 454. — *J. H. Harlow* 574.
4376. *C. C. Babb.* An experiment to determine N in Kutters formula. E.N. 55. 122.
4377. *K. Bänninger.* Studien und Versuche über Umsetzung von Geschwindigkeit in Druck bei Flüssigkeiten unter Berücksichtigung der Diffusoren bei Zentrifugelpumpen. Z.G.T. 3. 12. — *R. Biel* 71; 101.
4378. *H. Baer.* Versuche über hydraulische Stoßverluste. P.J. 322. 177.
4379. *A. Balog.* Zur Berechnung der Zentrifugelpumpen. Z.G.T. 4. 329.
4380. *D. Bánki.* Stufenzahl der Zentrifugelpumpen. Z.G.T. 3. 457.
4381. *W. Bauersfeld.* Zur Lorenzschens Theorie der Kreisräder. Z.G.T. 4. 265.
4382. *W. Bauersfeld.* Die wirtschaftliche Berechnung der Hochdruckturbinenleitungen. Z.G.T. 4. 417.
4383. *R. Baumann.* Versuche zur Bestimmung der Ausflußziffer bei Pumpenventilen. Z.V.D.I. 50. 2103.
4384. *E. Becker.* Strömungsvorgänge in ringförmigen Spalten. Z.V.D.I. 51. 1133.
4385. *F. Becker.* Strömungsvorgänge in ringförmigen Spalten und ihre Beziehungen zum Poiseuilleschen Gesetz. M.F.I. 48. 1.
4386. *K. Beneke.* Die Ökonomie der Duplexpumpe als Kesselspeisepumpe. Z.D.M. 29. 469.
4387. *H. Berg.* Die Wirkungsweise federbelasteter Pumpenventile und ihre Berechnung. M.F.I. 30. 1.
4388. *P. A. Bergès.* La limitation automatique du débit dans les bornes-fontaines et robinets. G.C. 48. 255; 274; 287; 373; 396; 434; 450.
4389. *Bergmans.* Das Auftreten von Axialdrücken bei Hochdruckkreiselumpen. Z.V.D.I. 50. 1719.
4390. *R. Biel.* Über den Druckhöhenverlust bei der Fortleitung tropfbarer und gasförmiger Flüssigkeiten. M.F.I. 44. 1.
4391. *R. Biel.* Die Wirkungsweise der Kreiselpumpen und Ventilatoren. M.F.I. 42. 1.
4392. *V. Blaess.* Zur Theorie der Zentrifugelpumpen und Ventilatoren. Z.G.T. 4. 470; 486; 499; 517; 530; 547.
4393. *T. G. Bocking.* Masonry dams. E. 104. 310.
4394. *C. J. Bodaszewski.* Strömung reibender Flüssigkeiten in Rohrleitungen. Z.Ö.I.A.V. 58. 326.
4395. *E. Bodenseher.* Das Projekt der Verteilung des Wassers der I. und II. Kaiser Franz Josefs-Hochquellenleitung im Wiener Gemeindegebiet. Z.Ö.I.A.V. 59. 437; 457.
4396. *A. Budau.* Über Kolbenhebewerke für Schiffe. Z.Ö.I.A.V. 59. 73; 89.
4397. *A. Budau.* Doppelkammerschleuse mit Inertiewassersparwerk. Z. Ö.I.A.V. 58. 517. 529.
4398. *G. Busse.* Allgemeine Gleichung für Zentrifugelpumpen. Z.G.T. 4. 478.
4399. *R. Camerer.* Leistungsversuche an der Wasserkraftanlage von M. Löw-Beer in Sagan. Z.V.D.I. 50. 1221.
4400. *R. Camerer.* Einheitliche Bezeichnungen im Turbinenbau. Z.V.D.I. 50. 1993.
4401. *R. Camerer.* Regulierwiderstand bei Funkscher Turbinenregulierung. Z. V.D.I. 50. 2030.
4402. *Camerer.* Experimentelle Bestimmung des günstigsten Drehpunktes von Turbinendreh-schaufeln. Z.V.D.I. 50. 54.
4403. *G. Chrystal.* Seiches. Eg. 83. 783.
4404. *G. S. Coleman.* A short method of recomputing score discharges for a changed value of n in Kutters Formula. E.N. 58. 553.
4405. *F. L. Corthell.* Conditions hydrauliques des grandes voies navigables du globe. M.I.C. 59. B. 87.
4406. *Danckwerts.* Vom Stoß des Wassers nebst Anhang über die Wirkung der Bühnen. Z.A.I. (2) 11. 119.
4407. *Dariès.* Note sur les compteurs d'eau. R.D.M. 21. 221.
4408. *Dt.* Über Wassermessungen in fließenden Gewässern und künstlichen Gerinnen. T.B.B. 20. 249.
4409. *Dt.* Bestimmung der Exzentrizität bei höheren Sieltoren. T.B.B. 19. 293.
4410. *H. Ehlert.* Zur Wünschelrutensfrage. J.G.W. 49. 402.
4411. *E. Eickhoff.* Neue Turbinentheorie. Z.G.T. 4. 67. — *H. Lorenz.* 67.
4412. *E. Eickhoff.* Eine Veranschaulichung der Vorgänge in den Turbinen und Kreiselpumpen. Z.G.T. 3. 460; 478;

450; 527; 4. 25; 38; 257. — *V. Kaplan*. 4. 234.

4413. *E. L.* Aufgabe. Z.K.F.G. 10. 17.

4414. *Fargue*. Les équations des lois empiriques de l'hydraulique fluviale. A.P.Ch. (8) 27. 121.

4415. *Flamant*. Sur la propagation des ondes liquides dans un tuyau élastique. R.D.M. 18. 101.

4416. *A. Fliegner*. Beiträge zur Dynamik der elastischen Flüssigkeiten. S. B.Z. 47. 30; 41; 103.

4417. *P. Forchheimer*. Die Verjüngung der Rohrweite bei Hochdruckleitungen. Z.V.D.I. 50. 1954.

4418. *P. Forchheimer*. Über das Fortschreiten von Hochwasseranschwellungen in Flußläufen. Z.Ö.I.A.V. 59. 325.

4419. *Forestier*. Canalisation de 3,30 de diamètre à l'usine hydroélectrique de Ture et Morge. B.E.B. 5. 218.

4420. *J. Friedel*. Die Wellenbildung der Schiffe. W.T.B. 69. 295.

4421. *C. Goldstein*. Die kleinste mögliche Umlaufzahl von Pumpwerken. Z.V. D.I. 50. 253.

4422. *Goupil*. Notice sur les principaux travaux concernant le coup de bélier. A.P.Ch. (8) 25. 199.

4423. *W. Grun*. Die Wirkung von Leitvorrichtungen bei Zentrifugalpumpen und Gebläsen. Z.V.D.I. 51. 543.

4424. *H. E. Gruner*. Die Ausnutzung von Hochwasser bei Wasserkraftanlagen. Z.V.D.I. 50. 1821.

4425. *G. Hagemann*. Spannung und Geschwindigkeitswirkung in einer Düse mit 3 Öffnungen. Z.G.T. 4. 408.

4426. *W. Hampel*. Einige auf die Wasserbewegung einflußnehmende Faktoren. T.B. 38. 115.

4427. *F. W. Hanna*. The effect of changes in canal cross sections upon the rate of flow. E.N. 57. 630; 58. 334; 545.

4428. *L. F. Harza*. The kinetic energy of flowing water. E.N. 57. 272.

4429. *A. Henochberg*. Selbsttätige Wassermengenmesser. J.G.W. 49. 686.

4430. *E. Henry*. Équilibre des appareils flottants ou immergés renfermant de l'air comprimé. G.C. 51. 53.

4431. *Heyd*. Die Kanalisation für Oppau i. d. Rhpf. G.I. 29. 521.

4432. *A. Hofmann*. Zur Berechnung des Staues infolge von Brückenbauten. S.D.B. 16. 206. — *S. Freytag*. 383.

4433. *Huet*. Notice sur l'usine élévatrice à vapeur de Briare. A.T.Ch. (8) 26. 151.

4434. *Imhoff*. Eine einfache Art aller-

hand Kanalquerschnitte rasch zu berechnen. G.I. 30. 197.

4435. *A. Jarolimek*. Über den freien Ausfluß von Flüssigkeiten an Mündungen bei unvollkommener Konstruktion. Z.Ö. I.A.V. 59. 571.

4436. *F. Jebens*. Über Trogschleusen auf Walzen. A.G.B. 58. 89.

4437. *A. W. Johns*. The resistance of ships. Eg. 83. 563.

4438. *Kahle*. Die Einwirkung von Seen im Zuge eines Flußlaufes auf den Abflußvorgang. C.B.B. 26. 138.

4439. *V. Kaplan*. Bemerkungen über die praktische Verwendbarkeit der Lorenzschens Turbinentheorie und Vorschläge zur Klarstellung der Wasserbewegung in Kreisrädern. Z.G.T. 4. 69; 189; 205; 211. — *P. Riebensahm*. 158; 212.

4440. *H. Kayser* u. *W. Geißler*. Herstellung von Kanalisationsdükern in Charlottenburg. T.G. 10. 6; 21.

4441. *H. Keller*. Regen- und Abflusmengen bei großen Regengüssen. C.B.B. 27. 321; 328.

4442. *L. Klein*. Über freigehende Pumpenventile. P.J. 322. 353; 373; 385.

4443. *Kobes*. Theorie und Berechnung der Vollturbinen und Kreiselpumpen. Z.V.D.I. 50. 579.

4444. *K. Kobes*. Die Druckverhältnisse in einer um eine horizontale Achse rotierenden Wassermasse und der axiale Schub bei Francisturbinen mit liegender Welle. Z.Ö.I.A.V. 58. 129.

4445. *K. Kobes*. Studien über den Druck auf den Spurzapfen der Francisturbinen mit lotrechter Welle. Z.Ö.I.A.V. 58. 17; 33; 49; 65.

4446. *K. Kobes*. Der Druck auf den Spurzapfen der Jouvalturbinen. Z.Ö.I. A.V. 58. 247; 271.

4447. *F. Koenig*. Entstehung und Speisung der Grundwasser. J.G.W. 49. 1038; 1058; 1077.

4448. *W. Köppen*. Über Wellenberuhigung ohne Hafendämme. C.B.B. 27. 333.

4449. *K. Körner*. Die Schaufelung von Francisturbinen. Z.V.D.I. 51. 1704.

4450. *Krameyer*. Über Erhöhung des Druckes in Wasserleitungen. D.B.Z. 40. 564.

4451. *Krawinkel*. Über städtische Entwässerungskanäle. G.I. 29. 485; 501.

4452. *P. Kresnik*. Einfache Formeln für die Zeitdauer des Füllens und Entleerens von Kammerschleusen mit Sparbecken und Beziehung auf die Wassersparnis. Z.Ö.I.A.V. 58. 84.

4453. *F. Kretzschmar*. Bestimmungen des Displacements und Displacement-schwerpunktes bei Schiffen mit Längstrimmung. S.B. 8. 688.
4454. *H. Krey*. Schiffswiderstand auf Kanälen und seine Beziehungen zur Gestalt des Kanalquerschnitts und der Schiffsform. Z.B.W. 56. 505.
4455. *G. Kull*. Die Geschwindigkeit des Treibkolbens bei hydraulischen Hebe-maschinen. P.J. 321. 286.
4456. *Kuc*. Die Wirkungsweise der Kreiselpumpen. Z.V.D.I. 51. 1274.
4457. *E. Kuc*. Wirkungsgrade von Zentrifugalpumpen. Z.G.T. 4. 85. 102.
4458. *Kuc*. Wirkungsgrade von Zentrifugalpumpen. Z.V.D.I. 51. 342. — *L. Schütt*. 344.
4459. *B. Landsberger*. Die zweckmäßigste Schleusenlänge für die Kanalisierung der Mosel. C.B.B. 27. 149; 171.
4460. *F. Langer*. Die Umformdüse. Z.G.T. 4. 496.
4461. *O. Linders*. Einheitliche Bezeichnung im Turbinenbau. Z.G.T. 4. 122. — *R. Camerer*. 145.
4462. *H. Lingh*. Anlage von Tal-sperren mit Stauseen im Frankenwalde. S.D.B. 16. 164; 171; 188; 195.
4463. *R. Löwy*. Beiträge zur Charakteristik der Francisturbine. E.T.M. 24. 333.
4464. *H. Lorenz*. Folgerungen aus den neuen Grundlagen der Turbinen-theorie. Z.G.T. 3. 105.
4465. *H. Lorenz*. Zur neuen Theorie der Kreisräder. Z.G.T. 4. 53; 87; 145. — *F. Prášil*. 72; 144.
4466. *H. Lorenz*. Beitrag zur Theorie des Schiffswiderstands. Z.V.D.I. 51. 1824.
4467. *H. Lorenz*. Theorie und Berechnung der Schiffspropeller. J.S.G.B. 7. 367.
4468. *H. Lorenz*. Die Änderung der Umlaufzahl und des Wirkungsgrades von Schiffsschrauben mit der Fahrgeschwindigkeit. M.F.I. 40. 51.
4469. *H. Lorenz*. Vergleichsversuche an Schiffsschrauben. M.F.I. 40. 41.
4470. *H. Lorenz*. Theorie und Berechnung der Zentrifugalventilatoren und -Pumpen. Z.G.T. 3. 309.
4471. *R. Lorenz*. Die Spiralgehäuse von Turbinen und Kreiselpumpen. Z.G.T. 4. 181; 202.
4472. *W. J. Luke*. Construction and launch of the Lusitania. Eg. 83. 409; 433.
4473. *E. Maillet*. Mémoire sur le vidage des systèmes de réservoirs. A.P.Ch. (8) 21. 110.
4474. *A. Martens*. Die Meßdose als Kraftmesser in der Materialprüfmaschine. M.F.I. 38. 1.
4475. *R. F. Mc Kay*. The effect of water injection on crude-oil engines. Eg. 81. 686.
4476. *Meter*. Schnellstromwarmwasser-heizung. Z.L.H. 13. 93.
4477. *F. V. Meyer*. Eine einfache Formel für die Berechnung von Entwässerungs-kanälen. G.I. 30. 835.
4478. *E. Mezger*. Die Dampfkraft als Ursache der Grundwasserbildung. G.I. 29. 569.
4479. *Missong*. Fortschritte im Bau von Absperrorganen und die durch sie bewirkte Verhütung von Betriebsunfällen. Z.V.D.I. 50. 499.
4480. *C. Monteil*. Débit d'un orifice circulaire. A.P.Ch. (8) 27. 139.
4481. *G. Mühlshlegel*. Regulier-versuche an den Turbinen des Elektrizitäts-werkes Gersthofen a. Lech. M.F.I. 41. 55.
4482. *E. C. Murphy*. On a suggested method for extrapolating values of stream discharge. E.N. 58. 202.
4483. *J. Novák* u. *E. G. Fischinger*. Glatter Diffuser bei Zentrifugalpumpen. Z.G.T. 4. 364; 401.
4484. *N. Olsen*. Diagramm für Breiten-Metazentrum. S.B. 8. 161.
4485. *Parenty*. Mémoire descriptif sur la construction d'un appareil à en-register les vitesses et à totaliser les dé-bits des conduites forcées et des canaux découverts. A.P.Ch. (8) 21. 170.
4486. *Parenty*. Mémoire sur un ré-gulateur de débit, système Parenty. A.P.Ch. (8) 26. 240.
4487. *Paulus*. Der Einfluß der Wasser-tiefe auf die Geschwindigkeit von Tor-pedobootzerstörern. Z.V.D.I. 50. 333.
4488. *J. Pelinka*. Beitrag zur Berechnung der wirtschaftlich günstigsten Rohrdurchmesser bei Pumpwerkswasserleitun-gen. Z.Ö.I.A.V. 59. 901.
4489. *J. M. K. Pennink*. Über die Be-wegung, von Grundwasser. J.G.W. 50. 69; Z.Ö.I.A.V. 59. 506; 523.
4490. *B. Phelps*. A method for testing and comparing sewage sprinklers. E.N. 56. 410.
4491. *F. Prášil*. Die Bestimmung der Kranzprofile und der Schaufelformen für Turbinen und Kreiselpumpen. S.B.Z. 48. 277; 289; 298.
4492. *Prietze*. Die zweckmäßigste Schleusenart bei einer Flußkanalisierung. C.B.B. 28. 367.

4493. *Prüsmann*. Ergänzung zur „Vergleichung von Schleusen und mechanischen Hebewerken“. Z.B.W. 56. 361.

4494. *Reichle*. Wasserversorgung des Selz-Wiesbachgebiets. T.G. 9. 349.

4495. *G. Rosset*. Méthodes de détermination de l'eau liquide mécaniquement entraînée par la vapeur des chaudières. G.C. 52. 123.

4496. *Rüster*. Ein neuer Wasserstandsregler. Z.B.D. 10. 107.

4497. *A. Rybicka*. Die Regulierung der Traun auf Kleinwasser. W.A.B.Z. 72. 8.

4498. *C. P. Schäfer*. Wasserkrän für 10 cbm Leistung in der Minute. O.F.E. (2) 43. 179.

4499. *O. Schaefer*. Theorie eines hydraulischen Maschinenreglers. P.J. 322. 612; 628; 645; 659; 677; 696.

4500. *H. Schuler*. Einige Betrachtungen über den Bau von Geröllsperrern. S.B.Z. 48. 285.

4501. *D. C. Serber*. The stability of sea walls. E.N. 56. 198.

4502. *E. Sonne*. Grundlagen für die Berechnung der Wasserleitungen. Z.V. D.I. 51. 1615.

4503. *A. Ståding*. Ermittlung der Abflüßmengen in teilweise gefüllten Rohrleitungen, Kanälen, Bächen und Flüssen. G.I. 30. 830.

4504. *Stengler*. Über das Walchensee-Kraftprojekt. S.D.B. 17. 177.

4505. *J. C. Stevens*. A method of estimating stream discharge from a limited number of gagings. E.N. 58. 52.

4506. *R. T. Stewart*. Collapsing pressures of Bessemer steel lapwelded tubes 3 : 10 inches in diameter. Am.M. 29. A. 834.

4507. *C. Strebel*. Schmiervorrichtungen für Schiffsmaschinen. Z.V.D.I. 50. 1701; 1739.

4508. *R. Tavernier*. Considérations théoriques sur les jaugeages des cours d'eau à fond mobile. A.P.Ch. (8) 28. 53.

4509. *G. Thiem*. Lagerungszustände und Durchlässigkeit der Geschiebe. J.G. W. 50. 377.

4510. *M. Vicari*. Die mechanische Berechnung von Gefällsleitungen. T.G. 10. 269.

4511. *M. Vicari*. Beitrag zur Berechnung städtischer Kanalnetze nach der neueren Theorie. T.G. 10. 33.

4512. *Vidal et Kaufmann*. Refoulement des produits de dragages en conduites fermées. A.P.Ch. (8) 30. 5.

4513. *W. Wagenbach*. Beiträge zur Berechnung und Konstruktion der Wasserturbinen. Z.G.T. 4. 273; 292; 300.

4514. *R. Wagner*. Versuche mit Schiffsschrauben und deren praktische Ergebnisse. J.S.G.B. 7. 264.

4515. *R. Wenck* u. *F. H. Haase*. Warmwasserumlaufheizung für Kleinwohnungen und für Gewächshäuser. Z. L.H. 13. 14; 19; 35; 43; 47; 75.

4516. *A. Williamson*. Sand filtration of water supplies. Eg. 84. 577; 708.

4517. *M. Yassukowitch*. Graphische Untersuchungen bei den Wasserversorgungsanlagen. J.G.W. 49. 911.

4518. *N. N.* Vorteilhaftestes Querprofil von Zuleitungsgräben. T.B.B. 19. 238.

4519. *N. N.* The Dhukwa dam. E. 103. 492.

4520. *N. N.* Venturi meters at Rio de Janeiro. Eg. 83. 236.

Inhalte.

4521. *K. Allitsch*. Zur Herstellung des Flächenprofils auf zeichnerischem Wege. C.B.B. 27. 217.

4522. *K. Allitsch*. Zur Ermittlung von Flächenprofil, Grunderwerb und Böschungsausmaß für allgemeine Vorarbeiten im Eisenbahnbau. C.B.B. 26. 118.

4523. *G. I. Bilderbeck*. Tables for proportioning beams. E.N. 57. 217.

4524. *O. G. Bunsen*. Formulas for computing railway cross-section tables. E.N. 56. 690.

4525. *C. W. Crockett*. Preliminary earthwork estimation with the slide rule. E.N. 56. 504. — *H. G. Couling* 548.

4526. *W. E. Davis*. A method of scaling earthwork quantities from a profile. E.N. 57. 245.

4527. *J. Diviš*. Ingenieur Henrys Aufbereitungsversuche mit Kohlen und sein System des hydraulischen Antriebes von Aufbereitungsapparaten. Ö.Z.B.H. 55. 305.

4528. *A. L. Dubney*. A simple earthwork-formula and tables. E.N. 58. 126.

4529. *L. A. Freudenberger*. Estimate of armature diameter. E.W. 49. 144. — *J. L. Heinrich*. 308.

4530. *J. Kuhn*. Elementare Ermittlung des Integrals $\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha \cos \alpha \, d\alpha$. C.G.U. 25. 151.

4531. *F. Lavis*. On computing areas of cross-sections. E.N. 56. 232. — *F. L. Humphrey*. 283.

4532. *E. Linsel*. Die Bogenstreckung und die Streckenbiegung, angewendet zur Geviertung und zur Bestimmung des Schwerpunktes von Kreisteilen. Z.Ö.I. A.V. 58. 117.

4533. *H. Luckin.* How to find the diameter of a cable composed of a number of small wires. T.E. 59. 1034.

4534. *D. Roether u. K. Lüdemann.* Neue Tafel zur Berechnung von Kreissegmenten. Z.V. 36. 665.

4535. *G. Salemi Pace.* Essais à la compression et à la traction des mortiers de ciment Portland et sables divers pour la choix du sable normal italien. B.M. K. 12. 262; 283.

4536. *Schnabel.* Lösung zur Linien-schnittaufgabe. Z.V. 35. 248.

4537. *E. D. Sloan.* A method of computing excavation and embankement. E.N. 55. 723.

4538. *J. C. Trautwine.* Diagrams for earthwork computation. E.N. 58. 174.

4539. *A. O. True.* A method of dividing a semicircle into an equal zone and segment. E.N. 57. 44. — *C. L. Bogert.* 73.

4540. *C. R. Underbill.* Multiple wire windings. E.W. 50. 1206.

4541. *A. Wedemeyer.* Zur Inhaltsbestimmung eines Kreisabschnittes. Z.V. 35. 216.

4542. *A. Wessely.* Berechnung des Kubikinhalts von Gewölben mit schiefer Stirnanzug. Z.Ö.I.A.V. 58. 169.

4543. *Wilcke.* Inhaltsberechnung von Fässern. Z.A.I. (2) 11. 179.

4544. *A. Willert.* Die Berechnung keramischer Massen. C.G.U. 24. 378.

4545. *L. Zimmermann.* Grenzverlegung. Z.V. 35. 244.

Integralrechnung.

4546. *J. D. Adams.* A specimen of mathematical reasoning in a circle. E.N. 55. 20.

Kartenprojektionen.

4547. *C. Koppe.* Die Weiterentwicklung der Geländedarstellung durch Horizontalkurven auf wissenschaftlich-praktischer Grundlage im techn. u. allgem. Landesinteresse. Z.A.I. (2) 12. 211.

Kettenlinien.

4548. *Schuster.* Längenmessung der Brücke über den Firth of Forth in Schottland. Z.A.I. (2) 12. 505.

Kinematik.

4549. *C. Alford.* Compound indexing for cutting spiral gears. Am.M. 30. B. 751.

4550. *L. J. Auerbacher.* Wiring for directcurrent and alternatingcurrent motors. E.W. 50. 1106.

4551. *L. Baudiss.* Beiträge zur zeichnerischen Ausmittlung von Steuerungsgetrieben. P.J. 322. 417; 436; 449; 465.

4552. *F. J. Bostock.* Designing spiral gears. Am.M. 29. A. 106.

4553. *F. J. Bostock.* Calculations respecting epicyclic wheel trains. Am.M. 30. A. 692.

4554. *A. Breitrück.* Universalrevolverdrehbank. P.M.C. 39. 98.

4555. *R. A. Bruce.* Worm contact. Eg. 81. 132; E. 101. 99; 123; Am.M. 29. B. 623; 664.

4556. *R. A. Bruce.* Worm gear design. Am.M. 29. B. 144; 670. — *A. M. Sosa.* 179.

4557. *P. S. Bushnell.* Ball bearing design. Am.M. 29. B. 51.

4558. *J. Butterworth.* Measurements of gear teeth. Am.M. 30. B. 421.

4559. *J. Butterworth.* Spiral gears with shafts at right angles. Am.M. 29. B. 772.

4560. *E. L. Coster.* The math. analysis of the Walschaert valve gear. A.E. R.I. 80. 426.

4561. *R. Crain.* Schraubenräder mit geradlinigen Eingriffsflächen. W.S.T. 1. 81; 141; 247; 301; 351.

4562. *C. Dietzschold.* Aus dem Reiche der Mechanik. A.J.U. 32. 198; 228.

4563. *C. Dietzschold.* Die Zapfenlagerung. A.J.U. 31. 121; 153.

4564. *J. Edgar.* Planetary gears. Am.M. 29. B. 188. — „Nemo“ 251. — *F. N. Nealy.* 422.

4565. *J. Edgar.* Worm milling. Am.M. 29. A. 176.

4566. *R. Edler.* Weitere Beiträge zur Untersuchung der Kräfteverteilung am Rechen der Siemensblockwerke. P.J. 322. 321.

4567. *M. Eusslin.* Die Trägheitskräfte einer Schubstange. P.J. 322. 693; 609; 625.

4568. *O. Fechner.* Rad- und Triebberechnung. L.U.Z. 13. 89.

4569. *A. Finkelstein.* Stufenrädertriebe mit doppeltwirkender Schwinge. W.S.T. 1. 42.

4570. *H. Fischer.* Seidenglanzprägung auf Baumwollgeweben. Z.F.T. 6. 271. 295.

4571. *E. H. Fish.* Complete graphical solution of spiral gears. Am.M. 29. B. 694.

4572. *C. L. Goodrich and F. A. Stanley.* The camming of automatic screw machines. Am.M. 30. B. 355; 470.

4573. *Gravenhorst*. Das gezogene und das ziehende Rad. Z.A.I. (2) 11. 423; 517.
4574. *F. Greger*. Bestreuungsdiagramme von Rotationstischen. Z.K.F.G. 10. 62.
4575. *W. Groffe*. Die Kreisabwicklung. P.J. 322. 545.
4576. *F. R. Honey*. An analysis of the cutting-off machine. Am.M. 29. A. 611.
4577. *W. O. Hornsnail*. The design of cams. E. 102. 56; 100.
4578. *F. Hülle*. Schnellstahl und Schnellbetrieb im Werkzeugmaschinenbau. W.S.T. 1. 360; 408; 469; 572.
4579. *Hunnius*. Eine Berechnungsweise für Schneckengetriebe. P.M.C. 40. 6.
4580. *A. Johnen*. Über Geschwindigkeitsdiagramme von Werkzeugmaschinen. Z.W. 10. 395. — N.N. 11. 73.
4581. *M. Kroll*. Kegelräderröbelvorrichtung. Z.W. 11. 148.
4582. *R. Kruschinski*. Planetengetriebe als Mittel zur Erzielung großer Übersetzungen. Z.W. 10. 40. — *G. Schlesinger* 111.
4583. *G. Kull*. Zur Untersuchung der Eingriffsverhältnisse des Schneckengetriebes. P.J. 321. 721.
4584. *E. Linsel*. Das Zwischenrad bei Räderübersetzung. D.M. 15. 102.
4585. *E. Linsel*. Herstellung von Schnecken. Z.W. 10. 4.
4586. *E. Linsel*. Die kleinste Zähnesumme der Drehbankwechselräder. D.M. 15. 19.
4587. *E. H. Lockwood*. A geometrical problem. Am.M. 29. B. 189; 414; 643.
4588. *C. H. Logue*. A standard of short involute gear teeth. Am.M. 30. A. 804.
4589. *C. H. Logue*. Design of helical and herringbone gears. Am.M. 30. B. 573.
4590. *T. M. Lowthian*. A variable-speed and feed mechanism. Am.M. 30. B. 548.
4591. *S. M. Lowthian*. Elliptical gears. Am.M. 30. B. 98.
4592. *M. B. F.* Laying out and machining elliptical gears. Am.M. 30. A. 478. — *J. D. W.* 784.
4593. *H. B. McCabe*. Spiral gears. Am.M. 29. B. 463; 498.
4594. *C. J. Mellin*. Walschaert valve gear. A.E.R.J. 80. 22.
4595. *H. Nolet*. Beitrag zur genauen Konstruktion der Zeunerschen und Miller-Reuleauxschen Schieberdiagramme. P.J. 322. 689.
4596. *d'Ocagne*. Remarque sur la construction du rayon de gyration. A. P.Ch. (8) 22. 281.
4597. *Ollivier*. Tour à chariot et à filer. P.E.M. (5) 5. 1.
4598. *W. Owen*. Calculations respecting epicyclic wheel trains. Am.M. 30. B. 194. — *S. Mills*. 631.
4599. *W. Owen*. The solution of bevel-gear epicyclic trains. Am.M. 30. B. 582.
4600. *W. Owen*. List of cone and gear ratios for variable-speed drives. Am.M. 29. A. 536.
4601. *W. Owen*. Gear ratios for motor drives. Am.M. 30. A. 454.
4602. *J. R. Peirce*. Modern abrasive materials and their use in shop practice. E.N. 57. 625.
4603. *R. Proell*. Zwangläufige Ventilsteuerung mit Flachregler. Z.V.D.I. 51. 132.
4604. *Résal*. Rapport sur l'autoloc, dispositif de blocage automatique et instantané. A.D.M.P. (10) 12. 577.
4605. *W. Schladitz*. Eigenartige Zahnradvorgelege. P.M.C. 40. 153; 161; 167; 175; 191; 198.
4606. *H. Schütz*. Beiträge zur Bewegungslehre der ebenen statisch bestimmten Fachwerksträger. Z.A.I. (2) 11. 153.
4607. *R. Seemann*. Berechnung von Umlaufködern mit Doppelantrieb. D.M.Z. 1907. 181; 191; 200.
4608. *R. Seemann*. Zahnradübersetzungen. D.M.Z. 1906. 181.
4609. *R. Shaw*. The Lewis formula applied to bevel gears. Am.M. 30. B. 155.
4610. *R. Sibley*. Some special forms of inside and outside gears. Am.M. 29. A. 195.
4611. *P. Sichling*. Fahrzeitenberechnung. O.F.E. (2) 43. 56.
4612. *A. M. Sosa*. Worm gear design. Am.M. 29. A. 708.
4613. *W. Steck*. Spiralfräsen auf Universalfräsmaschinen. W.S.T. 1. 555.
4614. *A. Strom*. Planetary gears. Am.M. 29. A. 830.
4615. *C. C. Stutz*. Interference in involute gears. Am.M. 30. B. 506.
4616. *J. E. Swert*. Planetary gearing solution. Am.M. 30. B. 86.
4617. *A. P. Trotter*. Acceleration and accelerometers. Eg. 81. 327.
4618. *G. Wagner*. Apparat zur stroboskopischen Aufzeichnung von Pendelogrammen. M.F.I. 33. 1.

4619. *H. F. Wiebe* u. *A. Leman*. Untersuchungen über die Proportionalität der Schreibzeuge bei Indikatoren. M.F.I. 34. 59.

4620. *N. N. Newmeans* kinematic apparatus for the study of mechanism. Eg. 82. 861.

4621. *N. N. Ramsey* crank mechanism. E.W. 48. 252

4622. *N. N.* Vereinfachte Berechnung von Zahnradern. P.M.C. 40. 129.

4623. *N. N.* Spur wheels with circular teeth. E. 103. 545.

4624. *N. N.* Transmissionsketten. P.M.C. 40. 138.

4625. *N. N.* Energy expended on car-wheel acceleration. Eg. 81. 295.

4626. *N. N.* Apparat pour l'étude des freins continus, système Kapteyn. P.E.M. (5) 5. 167.

Kreis.

4627. *F. Lederer*. Kreisbogen aus zwei Tangenten und einem Punkte. Z.V. 36. 192.

4628. *T. O. Olmker*. Calculating the radius of an arc for a given span and rise. Am. M. 30. B. 166.

Kurven.

4629. *G. L. Bilderbeck*. Projecting a tangent from a curve to pass through a fixed point. E.N. 55. 130. — *G. F. Syme*. 300. — *A. Class*. 301.

4630. *T. G. Bocking*. Setting out curves. E. 103. 490; 584.

4631. „Brachistochrone“. Drawing an arc tangent to another arc and to its diameter at a given point. Am. M. 30. B. 307. — *H. V. Purman*. 561.

4632. *C. Bräuning*. Über Gleisbogen. C.B.B. 27. 83.

4633. *E. Brauer*. Über die Polytrope. Z.V.D.I. 51. 710.

4634. *M. v. Braumüller*. Bestimmung des Bogen-Anfangs bzw. -Endes in bestehenden Eisenbahngleisen. Z.Ö.I.A.V. 59. 431.

4635. *E. O. Brower*. Another method of computing railroad cross-sections. E.N. 56. 173.

4636. *C. Dietzschold*. Gruppenglieder und Getriebe, das Augenblicksgetriebe. A.J.U. 32. 266; 278; 295.

4637. *C. Dietzschold*. Die Verzahnungen. A.J.U. 32. 308; 358; 375.

4638. *Farid-Boulad*. Application de la méthode des points alignés au tracé des paraboles de degré quelconque. A. P. Ch. (8) 22. 255.

4639. *R. Goldberg*. Die Übergangskurve in Theorie und Praxis. Z.Ö.I.A.V. 59. 499. — *A. Wessely*. 500.

4640. *F. R. Honey*. Plotting circular arcs of large radius, Am. M. 29. A. 164.

4641. *F. R. Honey*. A method of constructing an ellipse and measuring the curved length. E.N. 57. 388.

4642. *O. D. Johns*. A problem in railroad alinent. E.N. 57. 163. — *C. W. C. Filkins*, *P. E. Foss*. 296.

4643. *A. Lambert*. Gerade und gekrümmte Weichenstraßen mit Weichen 1:11. O.F.E. 44. 95.

4644. *E. Lang*. Weichenverbindung zwischen zwei nicht aus einem gemeinsamen Mittelpunkt beschriebenen Kreisbogengeleise. C.B.B. 27. 439.

4645. *W. J. Mozart*. A railway curve problem. E.N. 58. 391.

4646. *Puchstein*. Gegenkrümmungen in Bahngleisen. C.B.B. 26. 414.

4647. *T. A. Ross*. A simplified method of laying out transition curves. E.N. 56. 502.

4648. *A. Sadler*. Passing a tangent from a curve through a given point. E.N. 56. 19.

4649. *Sauermilch*. Berechnung und Absteckung langer Übergangsbogen. O.F.E. (2) 43. 96.

4650. *A. Schreiber*. Der Kurvenmesser. Z.V. 36. 950.

4651. *A. Swartz*. A graphical method for laying out a five-centered arch. E.N. 55. 520. — *J. Jones*. 609.

4652. *R. Watorek*. Übergangsbogen. O.F.E. 44. 186; 205.

4653. *W. C. Whitney*. Vertical curves. E.N. 57. 71.

4654. *Wilcke*. Zweckmäßigste Richtung bei Bahnübergängen. O.F.E. (2) 43. 14.

4655. *L. v. Willmann*. Kreisbogenanschlüsse bei Übergangsbögen. Z.A.I. (2) 12. 363.

Magnetismus.

4656. *C. Arldt*. Magnetische Erscheinungen an Bord. J.S.G.B. 8. 130.

4657. *C. Arldt*. Die Einwirkung der durch den eisernen Schiffskörper fließenden Flächenströme auf das Kompaßfeld. E.Z. 27. 1085.

4658. *C. Arldt*. Die magnet. Wirkungen stromdurchflossener ebener Flächen und die Einwirkung der durch den eisernen Schiffskörper fließenden Ströme auf das Kompaßfeld. E.Z. 27. 70; 91; 397; 555; — *Berndt*. 396. — *F. Emde*. 554.

4659. *A. Baker and J. T. Irwin.* The analysis of the magnetic leakages in induction motors. T.E. 58. 926.
4660. *P. Bary.* Striction électromagnétique ou „pinch phenomenon“. E.E. 52. 433.
4661. *M. O. Bolser.* Magnetic hysteresis phenomena. E.W. 50. 603.
4662. *W. G. Cady.* Ein magnetischer Deklinograph mit selbsttätiger Aufzeichnung. D.M. 15. 133.
4663. *W. Cramp.* Magnetic leakage and its effect in electrical design. T.E. 58. 524; 599.
4664. *R. Edler.* Beitrag zur magnetischen Eisenprüfung nach der Ringmethode. M.T.G.W. (2) 16. 67.
4665. *F. Fmdt.* Zur Berechnung der Elektromagnete. E.T.M. 24. 945; 973; 993.
4666. *J. A. Fleming.* The magnetic oscillations as radiators in wireless telegraphy. T.E. 60. 406; 440.
4667. *V. A. Fynn.* The magnetic field in the single-phase induction motor. T.E. 58. 66.
4668. *R. Gans.* A standard magnetic field. T.E. 60. 168.
4669. *R. Gans.* Kritische Betrachtungen und Ergänzungen zur Theorie des Ferromagnetismus. E.Z. 28. 527; 844; 1050. — *G. Benischke.* 1049.
4670. *F. Gumlich.* Über die Größe der Koerzitivkraft bei stetiger und bei sprunghafter Magnetisierung. E.Z. 27. 988. — *Rücker.* 28. 256.
4671. *K. E. Guthe and L. W. Austin.* Experiments on the Heusler magnetic alloys. T.E. 58. 211; 257.
4672. *K. Hausmann.* Der Magnettheodolith von Eschenhagen—Tesdaorf. Z.I. 26. 2.
4673. *R. E. Hellmund.* Verteilung des magnetischen Feldes in Induktionsmotoren. E.Z. 27. 1171.
4674. *R. E. Hellmund.* Magnetizing currents in polyphase induction motors. E.W. 48. 329.
4675. *Heyden.* Eine Polwage. C.Z.O.M. 27. 217.
4676. *G. Kapp.* On a method of plotting the hysteresis loop for iron with an application to a transformer. T.E. 59. 522.
4677. *W. Kummer.* Vergleichende Berechnung des Magnetisierungsstromes von Mehrphasen- und Einphasenwicklungen auf Grund des Feldstärkevektordiagrammes von Görge und der Drehfeldzerlegung in Harmonische. E.Z. 28. 645.
4678. *C. Léonard et L. Weber.* Sur l'application de l'aimantation dissymétrique du fer en courant alternatif. E.E. 48. 81.
4679. *D. L. Lindquist.* Alternating-current magnets. E.W. 47. 1295.
4680. *D. L. Lindquist.* Polyphase magnets. E.W. 48. 128.
4681. *D. L. Lindquist.* Characteristic performance in polyphase magnets. E.W. 48. 564.
4682. *G. A. Lister.* The heating coefficient of magnet coils. T.E. 58. 410; 448.
4683. *A. S. McAllister.* Magnetic field in the single phase induction motor. E.W. 48. 326.
4684. *J. C. Messerschmidt.* Die Hauptstation für Erdbebenforschung in München. S.D.B. 17. 345.
4685. *E. Müllendorff.* Erfahrungsformel für die Hysteresiskurve. E.Z. 28. 361.
4686. *C. P. Nachod.* The design of plunger magnets. E.W. 50. 563.
4687. *R. Rüdtenberg.* Über die Verteilung der magnet. Induktion in Dynamoankern und die Berechnung von Hysteresis- und Wirbelstromverlusten. E.Z. 27. 109.
4688. *W. Schenkel.* Expériences faites sur une lampe à vapeur de mercure dans un champ magnétique. E.E. 48. 321.
4689. *A. Schmidt.* Die magnetischen Variationsinstrumente des Seddiner Observatoriums. Z.I. 27. 139.
4690. *E. T. Simon.* Über die Wirkung des Magnetfeldes bei der Erregung ungedämpfter Schwingungen mit Hilfe des Lichtbogens. E.Z. 28. 1232.
4691. *J. v. Studniarski.* Über die Verteilung der magnet. Kraftlinien im Anker einer Gleichstrommaschine. M.F.I. 32. 51.
4692. *G. v. Studniarski.* Die Verteilung der magnetischen Kraftlinien im Anker einer Gleichstrommaschine. Z.V.D.I. 50. 1783.
4693. *J. K. Sumec.* Elektromagnetische Richtungsregeln. E, T.M. 24. 601.
4694. *J. K. Sumec.* Potiers Dreieck bei Berücksichtigung der Magnetströmung. E.T.M. 24. 687.
4695. *E. L. Weber.* The hysteresis exponent experimentally determined. E.W. 48. 609.
4696. *F. A. Willard.* Method of design for magnet windings. E.W. 47. 823.
4697. *G. W. Worrall.* Magnetic oscillations in alternators. T.E. 60. 556.

4698. *J. E. Young*. Measurements of inductance and impedance. T.E. 58. 398; 438.

4699. *J. Zacharias*. Magnetism of alloys. E.W. 47. 486.

Mechanik.

4700. *H. Lorenz*. Die neuere Entwicklung der Mechanik und ihre Bedeutung für den Schiffsbau. J.S.G.B. 7. 162.

4701. *H. Lorenz*. Die Mechanik in ihrer Bedeutung für den Maschinenbau. Z.V.D.I. 50. 651.

4702. *S. A. Reeve*. The true principles of mechanics. E. 104. 411; 604. — *R. H. Smith*. 477.

Messen.

4703. *K. Blass*. Absteckungsverfahren für gerade Linien unter Verwendung des Theodolits. Z.V. 35. 429.

4704. *A. Cappilleri*. Zur Theorie der Lattenmessung. Z.V. 36. 33.

4705. *A. Coutureau*. Tachéométrie. J.G. (6) 8. 83; 89; 104.

4706. *Detering*. Messungsproben aus ägyptischen Dreiecken. Z.V. 37. 769. — *Rodder*. 873.

4707. *Deubel*. Die Schrägmessung mit Latten. Z.V. 35. 60.

4708. *F. Emde*. Technisches und absolutes Maß. E.Z. 27. 302.

4709. *L. A. Fisher*. Method of comparing standard measure bars. Am. M. 29. B. 647.

4710. *F. Goethe*. Der Schichteninterpolator. Z.Ö.I.A.V. 59. 30.

4711. *G. Meysen*. Schrägmessung mit Latten. Z.V. 36. 896.

4712. *E. Röhlsberger*. Die Verwendung der Präzisionstachymetrie bei den Katastervermessungen im Berner Oberland. Z.V. 35. 233.

4713. *R. Schumann*. Über den Vergleich zwischen mehreren Gleichungen eines Maßstabes. Z.V. 36. 369.

Meßwerkzeuge.

4714. *H. Barcroft*. Two scales as a vernier. Am. M. 29. A. 297.

4715. *T. Dokulil*. Das Topometer der Firma J. A. Sinclair u. G. London. D.M. 15. 229; 244.

4716. *R. Fürstenau*. Das Roentgen-tiefenmesser. D.M. 15. 145.

4717. *K. Lüdemann*. Untersuchung eines Repetitionstheodoliten. Z.V. 36. 245.

Mittelwerte.

4718. *S. Gottlob*. Der Mittelwert der Sinusfunktion zwischen 0 und π . M.T.G.W. (2) 17. 92.

Momente.

4719. *L. Andree*. Die gemeine Parabel als Hilfsmittel zur Bestimmung von Maximalmomenten. P.J. 321. 657.

4720. *H. Rennerfelt*. Notes on roller bearings. E.W. 49. 1100.

4721. *Schaper*. Nachprüfung der Berechnung von Trägheitsmomenten. C.B.B. 26. 459.

4722. *C. Wise*. A new formula for moment of inertia. Am. M. 30. A. 551.

4723. *W. Zahutschke*. Einfache Formeln für das Trägheits- und Widerstandsmoment des kreisringförmigen Querschnittes. P.M.C. 39. 95.

Nährungsmethoden.

4724. *H. Andrews*. Solving right triangles of flat slope. E.N. 56. 173.

4725. *H. E. Eckles*. A convenient method of finding square and cube roots. E.N. 55. 660.

4726. *F. L. Fuller*. Solving right triangles of flat slope. E.N. 55. 501.

4727. *C. P. Howard*. The Stephens' six chord spiral and terminal curve having a radius twice that of the main curve. E.N. 56. 269.

4728. *J. Kuhn*. Elementare Ermittlung der Integrale

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha \, d\alpha \text{ und } \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos \alpha \, d\alpha.$$

C.G.U. 24. 262.

4729. *J. Kuhn*. Elementare Ermittlung der Integrale

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin^2 \alpha \, d\alpha \text{ und } \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos^2 \alpha \, d\alpha.$$

C.G.U. 24. 369.

4730. *J. Kuhn*. Elementare Ermittlung der Integrale

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d\alpha}{\sin^2 \alpha} \text{ und } \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}.$$

C.G.U. 24. 372.

4731. *A. Ludin*. Bequemes Hilfsmittel bei mechanischer Winkelmessung. C.B.B. 27. 267.

4732. *Lüdemann*. Die Auswertung des Ausdrucks $s = \sqrt{x^2 + y^2}$ und die Pythagorasrechen-tafel von Dr. Grünert. Z.V. 35. 697.

4733. *J. Melan.* Näherungsmethoden für die Querschnittbemessung einfach und doppelt armerter Betonbalken und Plattenbalken. B.E.B. 6. 98.

4734. *M. d'Ocagne.* Sur un nouveau procédé de rectification approchée des arcs de cercle. A.P.Ch. (8) 26. 231.

4735. *Puller.* Kreisbogenberechnungen. Z. V. 35. 644.

4736. *M. Rusch.* Näherungsformeln. C.G.U. 25. 148.

4737. *Werkmeister.* Über die Benutzung von Näherungsmethoden bei Berechnung tachymetrischer Messungen. Z.V. 35. 513.

Nomographie.

4738. *J. Clark.* Théorie générale des abaques d'alignement de tout ordre. R.D.M. 21. 321; 576.

4739. *A. Egerer.* Nomogramme mit binären Skalen. Z. V. 36. 927.

4740. *A. Gramberg.* Graphische Tafeln zur Berechnung von Warmwasserheizungen, Lüftungen und Schornsteinen. G.I. 30. 437.

4741. *A. Grébel.* Abaques pour le calcul des conduites de gaz d'air et d'eau. G.C. 50. 407.

4742. *F. Krull.* Nomogramme pour le calcul des ressorts hélicoïdaux cylindriques. G.C. 50. 394.

4743. *F. Krull.* Abaque pour le calcul des dimensions des ressorts hélicoïdaux cylindriques. R.D.M. 19. 354.

4744. *W. W. Massie.* Diagram of electric wave-lengths. T.E. 57. 826.

4745. *L. E. Picolet.* A floor beam scale in parallel coordinates. E.N. 55. 612.

4746. *R. Proell.* Rechentafel für Federberechnungen. Z. V.D.I. 50. 1076.

4747. *W. Schmidt.* Graphische Sonnenhöhentafeln. Z.I. 27. 105.

4748. *R. Soreau.* Nouveaux types d'abaques: la capacité et la valeur en nomographie. M.I.C. 59 A. 821.

4749. *E. Soreau.* Représentation du fonctionnement théorique des gazogènes au coke. M.I.C. 60 A. 692.

4750. *J. S. Teller.* Three scale logarithmic computing papers for solving formulas. E.N. 58. 682.

4751. *J. Younger.* Logarithmic chart for computing costs. Am. M. 30 B. 91.

Numerisches Rechnen.

4752. *H. E. Brown.* Cross multiplication as a time saver. Am. M. 30 A. 791.

4753. *Dittmar.* Einiges über Vornahme von Rechnungen im äußern Dienst. Z. V. 35. 641.

4754. *F. A. Halsey.* The addition of binary fractions. Am. M. 29 A. 628.

4755. *J. G. D. Mack.* Arithmetic computations; methods of performing and checking; cast out nines. Am. M. 29 A. 397.

4756. *W. F. Zimmermann.* Proving addition, subtraction, multiplication and division. Am. M. 29 A. 94. — *J. W. Manson.* 185.

4757. *N. N.* On accuracy in measurement and calculation. E. 104. 241.

Optik.

4758. *R. Abendroth.* Über Beleuchtungsverhältnisse einer Saalwand bei Annahme rechteckiger Oberlichtöffnungen. M.T.G.W. (2) 16. 163.

4759. *F. Ballner.* Die hygienische Beurteilung des hängenden Gasglühlichtes. J.G.W. 49. 277; 301.

4760. *W. Bechstein.* Photometer mit proportionaler Teilung und dezimal erweitertem Meßbereich. Z.I. 27. 178.

4761. *J. R. Benton.* The distribution of illumination in the neighbourhood of two lamps. E.W. 47. 916.

4762. *J. R. Benton.* The distribution of illumination in the neighbourhood of a row of lamps. E.W. 48. 805.

4763. *A. Beringer* u. *J. A. Schuster.* Vergleichende Untersuchungen an Kohlenfadenlampen und an Osmiumlampen. M.T.G.W. (2) 17. 28.

4764. *L. Bloch.* Beleuchtungsberechnungen. E.Z. 27. 1129; 1162.

4765. *L. Bloch.* Die Verwertung von Beleuchtungsmessungen. J.G.W. 50. 149.

4766. *L. Bloch.* Vorschläge zur einheitlichen Beurteilung und Verfahren zur Berechnung der Straßenbeleuchtung. E.Z. 27. 493.

4767. *L. Bloch.* Das Kugelphotometer in Theorie und Praxis. E.Z. 27. 63.

4768. *A. Brass.* Über die Doppelbrechung. C.Z.O.M. 27. 192; 232.

4769. *A. Brass.* Die Zusammensetzung von Linsensystemen. C.Z.O.M. 27. 31; 43; 60; 74; 89; 103; 148.

4770. *E. Brodhun.* Meßbare Lichtschwächung durch rotierende Prismen und ruhenden Sektor. Z.I. 27. 8.

4771. *M. Corsepius.* Eine Ausführungsform des Ulbrichtschen Kugelphotometers. E.Z. 27. 468.

4772. *S. R. Dodds.* The synchroscope. E.W. 50. 331.

4773. *I. Dokulil*. Rationelle Teilung einer Distanzlatte für ein mit einem Fadenmikrometer versehenes Fernrohr. D.M. 19. 25; 40.
4774. *T. Dokulil*. Das Universal-Tachymeter Láska-Rost. D.M. 14. 99; 114.
4775. *J. S. Dow*. A form of cosine Flicker photometer. T.E. 60. 291.
4776. *J. S. Dow*. The theory of Flicker photometers. T.E. 58. 609; 647.
4777. *L. V. Drysdale*. The mechanical equivalent of light. Eg. 84. 528.
4778. *A. Foulhouze et L. Guedeney*. Note sur les lampes à arc différentielles à courant certain et leurs principaux montages. E.E. 48. 18; 50.
4779. *H. Fowler*. Lighting of railway premises: indoor and outdoor. Eg. 82. 846; 881.
4780. *S. Franklin and W. Esty*. Photometry. E.W. 48. 216.
4781. *G. Frey*. Die verschiedenen Prismensysteme der im Handel befindlichen Prismenfernrohre. C.Z.O.M. 28. 227.
4782. *Fuljahn*. Das Verschärfen von Fernrohren. C.Z.O.M. 28. 255.
4783. *A. Gleichen*. Über die wichtigsten Fehler des monochromatischen Strahlenganges durch zentrierte Systeme und die Mittel zu ihrer Hebung. D.M. 14. 135; 153; 161; 175; 187.
4784. *A. Gleichen*. Ein Instrument zum Zeichnen des gebrochenen Strahles. D.M. 14. 220.
4785. *A. Gleichen*. Über die Messung des stereoskopischen Sehvermögens. D.M. 14. 231.
4786. *A. Gram*. Über Temperatur und Lichtemission von Kohle, Osmium und Wolfram. E.T.M. 25. 295.
4787. *F. Haber*. Das Gasrefraktometer. J.G.W. 50. 1068.
4788. *A. Haerpfer*. Einfache Darstellung der optischen Theorie des Porroschen Fernrohres. Z.V. 35. 298.
4789. *J. Hartmann*. Der Spektrokomparator. Z.I. 26. 205.
4790. *H. Heimann*. Zur Berechnung der hemisphärischen Intensität körperlicher Lichtquellen. E.Z. 27. 380.
4791. *J. Herzog und C. Feldmann*. Mittlere Licht- u. Beleuchtungsstärken. E.Z. 28. 93.
4792. *R. Hiecke*. Untersuchungen an elektrischen Lichtbogen. E.T.M. 24. 198. — *Uppenborn*. 290.
4793. *i*. Über Licht- und Wärmestrahlung in Theorie und Praxis. C.Z.O.M. 27. 175; 189; 204; 218; 248; 265; 278; 290; 308; 320.
4794. *X. Imfeld*. Das Stereorama. S.B.Z. 47. 242.
4795. *A. E. Kennelly*. A brief theory of the reduction in the service life of frosted incandescent lamps. E.W. 49. 987.
4796. *A. Kerber*. Zur Theorie der schiefen Büschel. Z.I. 26. 218.
4797. *G. König*. Parabelspiegel mit elektrischem Glühlicht. E.Z. 28. 47.
4798. *H. Krüss*. Die Starklichtphotometrie. J.G.W. 49. 109; 137.
4799. *H. Krüss*. Vergleiche zwischen dem hängenden und dem aufrecht stehenden Gasglühlicht. J.G.W. 50. 845.
4800. *H. Krüss*. Beitrag zur Berechnung der Straßenbeleuchtung. J.G.W. 49. 821.
4801. *H. u. P. Krüss*. Photometriestative für hängendes Gasglühlicht. J.G.W. 50. 1017.
4802. *P. Krüss*. Spektroskop mit veränderlicher Dispersion. Z.I. 26. 139.
4803. *F. Laporte*. Les étalons lumineux et les décisions de la commission internationale de photométrie. E.E. 53. 445.
4804. *M. Lauriol*. Zur Photometrie verschiedenefarbigen Lichtes. J.G.W. 50. 895.
4805. *A. Libesny*. Neues aus der Beleuchtungstechnik. E.T.M. 24. 437; 456.
4806. *O. Lippmann*. Die Anfertigung von Perspektivskizzen. D.M. 14. 200.
4807. *H. C. Lomb*. Über die Messung stark gekrümmter Linsen mit dem Appeschen Sphärometer. D.M.Z. 1907.15.
4808. *F. C. Lukas*. Zur Methodik der Linsenberechnung. C.Z.O.M. 28. 187.
4809. *K. Martin*. Über lichtstarke Prismengläser. C.Z.O.M. 27. 133.
4810. *E. v. Mecenseffy*. Untersuchungen über das Ansteigen der Sitzreihen in Versammlungsräumen. D.B.Z. 40. 619; 647; 652; 664.
4811. *B. Monusch*. Versuche mit Hilfsapparaten zur Bestimmung der mittleren sphärischen und der mittleren hemisphärischen Lichtstärke. E.E. 27. 66; 695; 803. — *R. Ulbricht*. 803.
4812. *J. T. Morris, F. Stroude and R. M. Ellis*. Experiments with osram, wolfram, zircon and other lamps. T.E. 59. 634; 624.
4813. *M. S.* Vergleichswerte der gebräuchlichsten Lichteinheiten. J.G.W. 50. 1123.
4814. *A. Neumann*. Eine neue Blendeneinrichtung für Satzobjektive. D.M.Z. 1906. 114.

4815. *K. Norden*. Beleuchtungsberechnungen für Hg-Lampen. E.Z. 28. 757.
4816. *A. v. Obermayer*. Zum 100. Geburtstage von J. M. Petzval. Z. Ö.I.A.V. 59. 270; 285.
4817. *C. C. Paterson*. Investigations on light standards and the present condition of the high voltage glow lamp. T. E. 58. 560; 611; 639.
4818. *W. Ramsay* and *J. F. Spencer*. Atomic desintegration by ultraviolet light. T. E. 58. 377.
4819. *Rubit*. Die Blendenbestimmung bei photographischen Objekten mittels mathematischer Induktion. C.Z.O.M. 28. 313.
4820. *J. Sahulka*. Erklärung der Entstehung ungedämpfter Schwingungen in einem Dudell-Poulsenschen Lichtbogen. E.T.M. 25. 91.
4821. *K. Satori*. Untersuchungen auf dem Gebiete der Photometrie. E.T.M. 24. 248.
4822. *K. Satori*. Einige Untersuchungen an einem Weberschen Photometer. E.T.M. 24. 859. — *C. Weber*. 25. 291.
4823. *Schellens*. Über die Zentrierung des Strahlenknotenpunktes beim Bauernfeindschen Prisma und die Anwendung auf das Doppelprisma. Z.V. 35. 457.
4824. *W. Schenkel*. The mercury vapour lamp in a magnetic field. T. E. 58. 139.
4825. *A. Sée*. Verres empêchant le passage des rayons solaires. G.C. 50. 305.
4826. *F. Staebke*. Über den Zusammenhang von Koma und Sinusbedingung bei sphärisch nicht korrigierten Systemen. Z.I. 27. 241.
4827. *F. Staebke*. Zur Darstellung der Verzeichnungsfehler photographischer Objektive. Z.I. 27. 173.
4828. *R. Steinheil*. Randaufliegende Fernrohrobjektive. Z.I. 26. 84.
4829. *C. J. Steinmetz*. Transformation of electric power into light. T. E. 58. 497.
4830. *Strehl*. Einfluß der Koma auf Bildschärfe und Messung. C.Z.O.M. 27. 57.
4831. *Strehl*. Tradition und Wahrheit. C.Z.O.M. 27. 71.
4832. *Strehl*. Mein Standpunkt. C.Z.O.M. 27. 147.
4833. *Strehlow*. Strahlenbrechung durch Glasscheiben. Z.V. 35. 390.
4834. *Tolle*. Die Sichtbarmachung der Spannungen in geraden und krummen Stäben nach Hönigsberg. Z.V.D.I. 51. 710.
4835. *R. Ulbricht*. Zur Anwendung des Kugelphotometers. E.Z. 28. 777.
4836. *R. Ulbricht*. Die hemisphärische Lichtintensität und das Kugelphotometer. E.Z. 27. 50.
4837. *F. Uppenborn*. Über die Bestimmung der mittleren Horizontallichtstärke von Glühlampen. M.V.E.M. 6. 63; E.Z. 28. 139.
4838. *F. Uppenborn*. Über Berechnung und Messung der Straßenbeleuchtung. M.V.E.M. 5. 236.
4839. *W. C. Upson*. Observations of the electric arc. T. E. 60. 58; 90.
4840. *E. Wandersieb*. Über die Verzeichnungsfehler photographischer Objektive. Z.I. 27. 33; 75.
4841. *L. W. Wild*. Some causes of error in photometry. T. E. 57. 529. — *A. P. Trotter*. 627.
4842. *J. Wilsing*. Über die Bildebene bei Spektographen-Objektiven. Z.I. 26. 101.
4843. *J. Wilsing*. Über die zweckmäßigste Wahl der Strahlen gleicher Brennweite bei astronomischen Objektiven. Z.I. 26. 41.
4844. *A. A. Wohlauer*. The uniform illumination of horizontal planes. E.W. 50. 1207.
4845. *A. A. Wohlauer*. The economy of the tungsten lamp. E.W. 50. 453.
4846. *N. N.* Gemeinfaßliche Darstellung der Linsentheorie. C.Z.O.M. 28. 201; 215; 231; 251; 255; 297; 311; 325; 341.
4847. *N. N.* Die Lichtemission der Elemente. C.Z.O.M. 27. 57; 71.
4848. *N. N.* The mechanics of luminosity. Eg. 81. 124.
4849. *N. N.* Optische Resonanz. C.Z.O.M. 27. 29.
4850. *N. N.* The fundamental principle of artificial illumination. E.N. 58. 97.
4851. *N. N.* Die Bezeichnung der photometrischen Größen und Einheiten. J.G.W. 50. 870.

Photogrammetrie.

4852. *E. Dolezal*. Photogrammetrische Punktebestimmung von einem Standpunkte. Z.V. 36. 209.
4853. *K. Fuchs*. Die Verschwenkungskorrektur in der Stereophotogrammetrie. Z.V. 36. 73.
4854. *K. Fuchs*. Das Reziprokendreieck. Z.V. 36. 107.
4855. *E. Stiehl*. Das Meßbildverfahren im Dienste der Denkmalpflege. Z.B.W. 56. 77.

Physik.

4856. *Bermbach*. Elektronen und Radium. Z.V.D.I. 51. 510.
4857. *P. Besson*. Le quatrième état de la matière. M.I.C. 59. B. 699.
4858. *N. Campbell*. The number of electrons in an atom. T.E. 60. 806.
4859. *G. Chesneau*. Principes théoriques des méthodes d'analyse minérale fondées sur les réactions chimiques. A.D.M.P. (10) 9. 139; 373.
4860. *V. Duelschawers-Dery*. Réflexions sur l'énergétique. R.D.M. 19. 413.
4861. *Gr.* Neuere Forschungen über Radioaktivität. C.Z.O.M. 27. 1; 17.
4862. *G. Jaeger*. Die kinetische Theorie der Materie. Z.Ö.I.A.V. 59. 581.
4863. *J. Johnson*. Tests of the adhesion of steel to concrete in beams. E.N. 58. 169.
4864. *Lord Kelvin*. On the motions of ether produced by collisions of atoms or molecules containing or not containing electrons. T.E. 59. 714.
4865. *C. Schaefer*. Die Gesetzmäßigkeiten der Spektren und der Bau der Atome. Z.V.D.I. 50. 937.
4866. *R. Schenck*. Die neueren Anschauungen über die Ursachen der besonderen Eigenschaften der Metalle. M.U.H. 4. 161.
4867. *W. Schloesser u. C. Grimm*. Über die Prüfung gasanalytischer Geräte. Z.C.A.K. 2. 201; 225. — *H. Goebel*. 377.
4868. *P. Villard*. Les rayons cathodiques et l'aurore boréale. B.S.E. 106. 560.
4869. *N. N.* The corpuscular theory of matter. Eg. 81. 317; 349; 389; 420; 454; 490.

Planimeter.

4870. *Heer*. Zur Prüfung des Polarplanimeters. Z.V. 35. 679.
4871. *A. L. Menzin*. The tractigraph, an improved form of hatched planimeter. E.N. 56. 131. — *H. Frytz*. 57. 381.
4872. *J. G. Wheatley*. The polar planimeter and some of its special applications. Am. M. 29. B. 75; 106.
4873. *L. Zimmermann*. Konstruktion eines Flächenmessers von Semmler. Z.V. 35. 386.
4874. *N. N.* Le planimètre hachette. G.C. 48. 29.

Polygone.

4875. *L. Andrée*. Die Parallelschrägen eines Trapezes. P.J. 321. 815.

4876. *W. C. Benitz*. Computation table for regular polygons. Am. M. 30. A. 732.
4877. *G. E. Flanagan*. The closing angle of an irregular figure. Am. M. 29. B. 249.
4878. *Puller*. Ableitung der Seite des regelmäßigen $2n$ -eckes aus derjenigen des n -eckes. Z.V. 35. 678.
4879. *P. Reutzel*. Beiträge zur Koordinatenberechnung. Z.V. 36. 188.
4880. *Suckow*. Die Wiederherstellung verlorener Polygonzüge. Z.V. 35. 66.
4881. *Suckow*. Fortschreibungsmessungen in der Provinz Schleswig-Holstein. Z.V. 35. 127.
4882. *Wülke*. Berechnung der fehlenden Stücke eines Vierecks aus $ab\alpha\beta\gamma$. Z.V. 36. 713. — Hammer 936.

Projektion.

4883. *J. Adamczik*. Über reingeometrische Kartenprojektionen. Z.V. 36. 153.
4884. *J. Adamczik*. Über flächentreue Kegelprojektionen. Z.V. 36. 249.
4885. *P. Palmer*. Dimetric projections. Am. M. 29. B. 207.

Rechenapparate.

4886. *T. H. Blakesley*. Logarithmic lazy-tongs and lattice-works. T.E. 59. 25.
4887. *H. Bourquin*. Das Thomas-Arithmometer. C.Z.O.M. 27. 261; 275.
4888. *W. Cox*. A time and cost computer. A.E.R.J. 81. 243.
4889. *V. Fischer*. Über die Berechnung der Stufenscheiben von Drehbänken mit Hilfe eines logarithmisch geteilten Maßstabes. Z.W. 11. 222.
4890. *J. Grodman*. The adaption of the slide rule for use in wireless telegraphy calculations. T.E. 58. 962.
4891. *Hammer*. Einige Wünsche zur Rechenmaschine Gauß. Z.V. 35. 499.
4892. *Hammer*. Die Additamententafel. Z.V. 35. 801.
4893. *Hohenner*. Berechnung der Additamente mit dem Rechenschieber. Z.V. 35. 463.
4894. *G. Kesel*. Keselscher Universal-Rechenapparat. C.Z.O.M. 28. 327.
4895. *Kummer*. Punktausgleichung mit Rechenschieber. Z.V. 36. 77.
4896. *K. Lenz*. Die Rechenmaschinen. V.V.G. 85. 111.
4897. *K. Lenz*. Les machines à calculer. R.D.M. 18. 568.
4898. *E. Lévy*. Le cercle Halden. J.G. (6) 9. 23.
4899. *Lubbe*. Über das Verzeichnen

der Höhen in schaubildlichen Darstellungen mit Hilfe des Rechenschiebers. D.B.Z. 40. 490.

4900. *K. Lüdemann*. Erweiterung der pythagoräischen Rechenscheibe von Roether. Z.V. 36. 513.

4901. *K. Lüdemann*. Über logarithmische Rechenscheiben. Z.V. 36. 241.

4902. *E. Martiny*. Ein neues Rechenverfahren für Rechenstäbe. D.M.Z. 1906. 143.

4903. *F. Mbg.* Die Burroughs Addiermaschine. P.J. 322. 553.

4904. *W. L. Miggett*. A cost-estimating slide-rule. Am.M. 29. B. 802.

4905. *O. Mueller*. Die mechanischen Hilfsmittel der Rechenkunst Einst und Jetzt. T. 11. 58.

4906. *C. P. Nachod*. The slide rule as a substitute for the wire table. E.W. 47. 459.

4907. *L. G. Richardson*. Slide rule wrinkles. Am.M. 29. B. 42.

4908. *M. Rietz*. Verbesserter Rechenschieber. F.J.L. 2. 166.

4909. *F. Schneider*. Die Rechenmaschine Famos. F.J.L. 3. 167.

4910. *J. W. G. Schulz*. Die Hamansche Rechenmaschine „Gauß“. Z.I. 26. 50.

4911. *W. Semmler*. Die Rechenmaschine „Gauß“ und ihr Gebrauch. Z.V. 35. 10; 33.

4912. *N. N.* Cercle à calcul, système Halden. G.C. 50. 182.

4913. *N. N.* Callenders slide rule for determining the size of cables. T.E. 60. 453.

Reibung.

4914. *R. S. Ball jun.* The laws of friction. Eg. 81. 354; 425. — *W. E. Wimperis*. 425. — *F. A. Giffin*. 723.

4915. *J. W. Bramwell*. Efficiency of screws. Am.M. 29. B. 645.

4916. *A. H. Burnand*. Measurement of friction in gas-engines. Eg. 82. 60.

4917. *R. Camerer*. Ölreibung in Röhren. Z.G.T. 4. 461.

4918. *W. F. M. Goss*. Power transmission by friction driving. Am.M. 30. B. 969.

4919. *H. Hess*. The design and use of ball bearings. Am.M. 30. B. 294.

4920. *A. Martens*. Die Stulpenreibung und der Genauigkeitsgrad der Kraftmessung mittels der hydraulischen Presse. Z.V.D.I. 51. 1184.

4921. *J. R. Nichols*. Test of „Compo“ cork insert friction plates. Am.M. 29. A. 754.

4922. *J. T. Nicolson*. Friction and lubrication. E. 104. 550; 633.

Rektifikation.

4923. *W. O. Moody*. Length of a curved line. A.E.R.J. 81. 309. — *J. E. Gardner*. 355.

Schwerpunkte.

4924. *G. R. Henderson*. Center of gravity of a locomotive. A.E.R.J. 80. 425.

Statik.

4925. *C. Abeles*. Statische Untersuchung einiger im Eisenbetonbau häufig vorkommender Aufgaben. B.E.B. 6. 128; 154.

4926. *E. Aragon*. Calcul d'une ferme en arc à 2 articulations. G.C. 50. 351; 374.

4927. *A. Baumann*. Ein neues Verfahren zur graphischen Bestimmung der Stabkräfte in Fachwerkslaufkranbrücken. P.J. 321. 545; 562.

4928. *Bielefeld*. Keile und Nuten. Z.V.D.I. 50. 1634.

4929. *L. Bloch*. Graphische Untersuchung des Plattenbalkens aus Eisenbeton. B.E.B. 5. 157.

4930. *L. Blondek*. Neue Konstruktion von Stützmauerprofilen. Z.Ö.I.A.V. 59. 883.

4931. *K. Borschke*. Grundlagen zu einer Theorie der Bettungsziffer. O.F.E. 44. 265.

4932. *P. Caufourier*. Stabilité des voûtelettes constituant le platelage des ponts métalliques. G.C. 51. 391.

4933. *L. Cosyn*. Note sur les rivures dissymétriques des poutres en treillis. N.A.C. (2) 3. 104.

4934. *O. Denecke*. Der Lokomotivrahmen als starrer Balken auf federnden Stützen. A.G.B. 59. 141.

4935. *Denicke*. Neuere Eisenbahnbrücken in Amerika. C.B.B. 26. 298.

4936. *W. Dietz*. Die Straßenbrücke über den Rhein zwischen Ruhrort und Homberg. Z.V.D.I. 51. 725; 885; 933; 1250.

4937. *A. Dumas*. Nouveau pont en maçonnerie sur la Loire à Orléans. G.C. 49. 337.

4938. *E.* Statische Berechnung für eine Flutbrücke. E.K.K. 1. 54.

4939. *F. v. Emperger*. Welche statische Bedeutung hat die Einbetonierung einer Eisensäule. B.E.B. 6. 172.

4940. *F. Engesser*. Über die Berechnung statisch unbestimmter Systeme. C.B.B. 27. 606.

4941. *F. v. E.* Der Wettbewerb des Eisenbetons mit dem reinen Eisenbau. B.E.B. 5. 86.

4942. *F. v. E.* Gitterträgerbrücken System Visintini. B.E.B. 5. 220.

4943. *F. v. E.* Die Armatur von Kunststeinstufen. B.E.B. 5. 150.
4944. *F. Gebauer.* Eisenbetonträger für große Spannweite. System Vierendeel. B.E.B. 6. 252; 280; 312.
4945. *Gottschalk.* Getreidesilo von 7000 m³ Fassung. B.E.B. 5. 62.
4946. *A. Guthof.* Bestimmung des Auflagerdruckes für die mittlere Stütze zweier durch Eisenbahnverkehr belasteter Träger, deren gemeinsame Auflager in einem Punkte zusammenfallen. E.K.K. 1. 43.
4947. *E. Haimovici.* Neue Leipziger Baumwollspinnerei in Leipzig-Lindenau. B.E.B. 6. 262; 283.
4948. *J. Haller.* Statische Berechnung von Hängewerken (armierte Balken) für bewegliche Belastung. E.K.K. 1. 124.
4949. *A. Hawranek.* Die Marchbrücke in Ung. Hradisch. Z.Ö.I.A.V. 58. 541; 553; 565.
4950. *R. Heim.* Gewölbegurten für große Lasten. B.E.B. 5. 28.
4951. *F. Henmcke.* Stabilitätsberechnung eines Schornsteins. Z.L.H. 13. 9; 115. — *Rennert.* 115.
4952. *A. Hertwig.* Die Entwicklung einiger Prinzipien in der Statik der Baukonstruktion und die Vorlesungen über Statik der Baukonstruktion und Festigkeitslehre von G. C. Mehrrens. Z.A.I. (2) 11. 493; 12. 372; 374. — *J. Weingarten.* 12. 107. — *Mehrtens.* 12. 367; 371. — *Mohr.* 368.
4953. *C. Hildebrand.* Über die günstige Stützenlage bei gleichmäßig belasteten Kragträgern. E.K.K. 1. 201.
4954. *K. Jordan.* Die Klappbrücken auf der Drahtseilstrecke der Mendelbahn. E.B.B. 4. 574.
4955. *R. Kafka.* Über reziproke Methoden zu den mittels Seil und Kräftepolygon lösbaren Aufgaben. Z.Ö.I.A.V. 59. 602.
4956. *G. Kaufmann.* Kontinuierliche Balken und statisch unbestimmte Systeme im Eisenbetonbau. B.E.B. 5. 125; 154; 175.
4957. *A. Kiefer.* Notiz über Kräftepaare. S.B.Z. 47. 162.
4958. *A. Kiefer.* Über den horizontalen Balken. S.B.Z. 47. 218.
4959. *J. E. Kirkham.* Equivalent uniform liveloads for railroad bridge trusses. E.N. 56. 278.
4960. *F. Lawaczek.* Beitrag zur Theorie und Konstruktion der Wage mit besonderer Berücksichtigung der *n*-fach übersetzten Hebelwage. P.J. 321. 664; 680; 694; 711; 727; 744.
4961. *G. Leinekugel Le Cocq.* Pont à transbordeur sur le port-vieux à Marseille. G.C. 48. 265; 284.
4962. *Linck.* Zur Frage der Standsicherheit von Staumauern. C.B.B. 26. 267.
4963. *F. Malj.* Beitrag zur Theorie der Schnellwage. D.M.Z. 1907. 53.
4964. *Mattern.* Neue Gesichtspunkte für die Beurteilung der Standsicherheit von Sperrmauern. C.B.B. 26. 129. — *Link, T. Schaeffer.* 432.
4965. *F. P. Mc Kibben.* The distribution of loads on stringers of highway bridges carrying electric cars. E.N. 55. 422.
4966. *J. Melan.* Die Beton-Eisen-Brücke Chauderon-Montbenon in Lausanne. Z.Ö.I.A.V. 58. 333.
4967. *R. Müller.* Die neue Eisenbahnbrücke über den Neckar bei Heidelberg. D.B.Z. 41. 378; 385; 402; 407; 418.
4968. *S. Müller.* Beiträge zur Theorie hölzerner Tragwerke des Hochbaues I. Z.B.W. 56. 677.
4969. *S. Müller.* Zur Berechnung mehrfach statisch unbestimmter Tragwerke. C.B.B. 27. 23; 255. — *L. Geusen.* 255.
4970. *H. Müller-Breslau.* Zur Frage der Standsicherheit von Fabrikschornsteinen. C.B.B. 27. 449.
4971. *H. Müller-Breslau.* Über die Berechnung von Schiffsbrücken mit Gelenken. Z.B.W. 56. 153.
4972. *Necker.* Statische Berechnung eines Gittermastes. E.K.K. 1. 41.
4973. *Nitzsche.* Belastungsgleichwerte. C.B.B. 27. 318.
4974. *Nitzsche.* Beispiel für die statische Untersuchung eines über 4 Stützen durchgehenden Blechträgers mit einem überstehenden Ende. E.K.K. 1. 274.
4975. *K. Örtling.* Bestimmung der Mittelkraft. Z.G.U. 22. 16.
4976. *E. O. Patton.* Über diagonallose Träger (Bauart Vierendeel). C.B.B. 27. 558.
4977. *F. v. Perko.* Die evangelische Kirche in Innsbruck. B.E.B. 8. 36.
4978. *J. Pleißner.* Versuche zur Ermittlung der Boden- und Seitenwanddrücke in Getreidesilos. Z.V.D.I. 50. 976; 1010.
4979. *R.* Berechnung flacher, gleichmäßig belasteter Bögen aus Eisenbeton. T.B.B. 20. 402.
4980. *G. Ramisch.* Statische Untersuchung eines einfach gekrümmten stabförmigen Verbundkörpers. V.V.G. 85. 351.

4981. *A. Schmidt*. Berechnung eines kontinuierlichen Schottes auf vorwiegend graphischem Wege. S.B. 8. 345.

4982. *O. Schmiedel*. Die statische Untersuchung der in Gleiskurven liegenden Eisenbahnbrücken. E.K.K. 1. 74.

4983. *O. Schmiedel*. Statische Berechnung der Querhalle der Perronüberdachung auf Bahnhof Stralsund. P.M.C. 39. 42; 54; 59.

4984. *K. Schreiber*. Die inneren Kräfte eines Dachbinders. Z.A.I. (2) 12. 465.

4985. *A. Sharp*. The drawing of force diagrams for framed structures. Eg. 82. 275.

4986. *M. Sieb*. Das Hochreservoir mit Enteisungsanlage der Gardinenfabrik Plauen. B.E.B. 6. 306.

4987. *O. A. Thelin*. A diagram for calculating moments of inertia. Am.M. 30. B. 218.

4988. *A. Verbeek*. Zur Bestimmung der Trägheitsmomente von Wagebalken. C.Z. O.M. 27. 231.

4989. *Vianello*. Untersuchung des durchgehenden Trägers mit 2 Öffnungen. E.K.K. 1. 97.

4990. *V. Waniek*. Statische Untersuchung der Stauwand für das obere Weichselreservoir. W.A.B.Z. 72. 77.

4991 a. *H. Zuckschwerdt*. Über Konstruktion und Berechnung von Kaimauern mit Hinterlast. Z.A.I. (2) 12. 359.

4991 b. *N. N.* Variation of pressure in bearings due to eccentric loading. Am.M. 29. A. 250.

4992. *N. N.* Berechnung einer Dachkonstruktion. P.M.C. 39. 69.

4993. *N. N.* Signalbrücke der Belg. Staatsbahnen in Brüssel-Nord. P.M.C. 40. 136; 145.

Stereometrie.

4994. *F. Osmond* u. *G. Cartaud*. Die Krystallographie des Fe. M.U.H. 3. 522.

Tafeln.

4995. *J. Edgar*. The spiral gear problem simplified: table of secants. Am.M. 29. B. 96.

4996. *E. J. Lees*. Tables of proportions of differential back-gears. Am.M. 29. A. 295.

4997. *K. Maltersdorff*. Tafel zur Berechnung von Parabelhöhen. C.B.B. 26. 366. — *H. Gamann*. 27. 220.

4998. *S. L. H.* Multipliers for finding diameters in circular pitch. Am.M. 29. B. 385.

Technik.

4999. *N. N.* The principles of similitude. Eg. 83. 619.

(Schluß folgt.)

