

ANNALI
DI
MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

DIRETTI DAL

prof. Francesco Brioschi

IN MILANO

colla cooperazione dei professori:

Luigi Cremona *in Roma* — Eugenio Beltrami *in Roma*

Ulisse Dini *in Pisa*.

SERIE II - TOMO XXI

(dal gennaio al dicembre dell'anno 1893).

MILANO.

TIPOGRAFIA BERNARDONI DI C. REBESCHINI E C.

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NEL TOMO XXI. (SERIE II.^a)

	PAG.
Sulle curve razionali di uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni. — <i>L. Berzolari</i>	1
Sulle serie di potenze i cui coefficienti dipendono da una variabile. — <i>G. Vivanti</i>	25
Alcune formole relative alle linee tracciate sopra una superficie e loro applicazioni. — <i>G. Pirondini</i>	33
Intorno ad un teorema di aritmetica. — <i>I. Zignago</i>	47
Alcune ricerche sul gruppo delle sostituzioni e sulla configurazione delle 16 rette della superficie di quarto ordine a conica doppia. — <i>I. Pereno</i>	57
Continuazione del saggio sul gruppo delle sostituzioni fra le rette della superficie cubica (Memoria III). — <i>E. Pascal</i>	85
Sulle serie di potenze (Estratto di una lettera al dott. VIVANTI). — <i>S. Pincherle</i>	138
Studio di alcuni sistemi di rette considerati come superficie dello spazio a cinque dimensioni. — <i>G. Fano</i>	141
Sulle serie di potenze (Estratto d'una lettera al prof. S. PINCHERLE). — <i>G. Vivanti</i>	193

Sulle evolute delle superfici i cui raggi principali di curvatura son legati dalla relazione

$$r_1 - r_2 = 2 T_0 \operatorname{sen} \left(\frac{r_1 + r_2}{2 T_0} \right) \quad (T_0 = \text{cost.}^{\circ})$$

e sulle loro flessioni. — <i>B. Calò</i>	195
Curve <i>k</i> -gonali (Memoria I). — <i>F. Amodèo</i>	221
Ricerche sulle forme quaternarie quadratiche e sui gruppi poliedrici. — <i>L. Bianchi</i>	237
Sur la généralisation des fractions continues algébriques (Extrait d'une lettre à M. PINCHERLE). — <i>C. Hermite</i>	289
Sulla trasformazione dell'undecimo ordine delle funzioni ellittiche. — <i>F. Brioschi</i>	309

Sulle curve razionali di uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni.

(Di L. BERZOLARI, a Pavia.)

È noto che i combinanti del sistema lineare ∞^d determinato da $d + 1$ forme binarie di ordine n ($n > d$) coincidono con quelli del sistema lineare ∞^{n-d-1} conjugato (apolare) al primo (*). In linguaggio geometrico, di qui risulta che, se in uno spazio lineare di d dimensioni si considera una curva razionale C_n^d di ordine n , resta su essa determinata un'involuzione di ordine n e di specie $n - d - 1$ (che col sig. STAHL diremo *fondamentale*), i gruppi della quale sono definiti dalla proprietà di essere apolari a tutte le sezioni piane della curva, cioè a tutti i gruppi di n suoi punti che sono situati in un piano (**).

Quest'importante involuzione contiene tutte le proprietà della curva, e

(*) Questa proprietà, che si estende immediatamente ad un sistema di forme con un numero qualunque di variabili, è stata dimostrata, pressochè nel medesimo tempo, da vari geometri: STEPHANOS CYPARISSOS, *Mémoire sur les faisceaux de formes binaires ayant une même jacobienne* (Mém. prés. par divers savants, ecc., Paris, 12 dicembre 1881, tom. 27, pag. 17), e *Sur la théorie des formes binaires et sur l'élimination* (Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, 3.^a série, tom. 1, 1884, pag. 23); BRILL, *Ueber binäre Formen und die Gleichung sechsten Grades* (Math. Ann., Bd. 20, pag. 335, 1882); FRANZ MEYER, *Apolarität und rationale Curven*, Tübingen, 1883, pag. 39.

(**) In questo lavoro denoto con S_i uno spazio lineare di i dimensioni; in particolare chiamo piano un S_{d-1} contenuto nello spazio R_d di d dimensioni, a cui appartiene C_n^d . Dico inoltre che un S_i è osculatore ad una curva in un suo punto, quando esso ha in quel punto un contatto d'ordine i colla curva.

può essere stabilita per via più geometrica mediante la teoria delle osculanti (*), come ha mostrato con molti esempi il sig. STAHL (**). Quando sia in particolare $n = d + 1$, l'involuzione si riduce ad un unico gruppo, quello formato dai punti di contatto dei $d + 1$ piani aventi colla curva un contatto di ordine d ; ma il sig. STUDY (loc. cit.), coll'esempio della C^3_4 , ha trovato che, dato allora un punto arbitrario nello spazio, resta determinata sulla curva un'involuzione di ordine n e di prima specie (***), la quale fornisce le proprietà più notevoli della curva stessa, e contiene sempre fra' suoi gruppi, qualunque sia il punto preso, il gruppo sopra considerato.

In due recenti lavori relativi alla C^3_4 ed alla C^2_3 (****) ho dimostrato che l'involuzione precedente non è altro che l'involuzione coniugata a quella che si ottiene tagliando la curva coi piani passanti per il punto dato; ed ho inoltre fatto vedere come (sempre nel caso di $n = d + 1$) tali involuzioni determinate dai punti dello spazio siano intimamente legate con quelle forme, che il sig. GROSS (*****) ha chiamato *funzioni generatrici indirette* dei combinanti elementari relativi alla curva.

Nel presente lavoro mi occupo di una C^d_n qualunque, e in primo luogo, dopo aver accennato al significato geometrico delle funzioni generatrici *dirette*, espongo brevemente come, partendo, al modo del sig. STAHL, dalla considerazione delle osculanti, si possa costruire l'involuzione fondamentale; dimostro inoltre che questa possiede in generale un gruppo piano (ed uno solo) nell'unico caso in cui sia ad un tempo d pari ed n dispari. In seguito determino il significato geometrico di tutte le funzioni generatrici indirette, dimostrando alcuni notevoli teoremi sulle *osculanti normali*, cioè di ordine d ; poscia, ge-

(*) Per questa teoria vedansi soprattutto STUDY, *Ueber die Raumcurven vierter Ordnung, zweiter Art* (Berichte über die Verh. d. k. sächs. Gesell. d. W. zu Leipzig, 11 gennajo 1886); JOLLES, *Die Theorie der Osculanten*, ecc., Aachen, 1886, ed inoltre i lavori del sig. STAHL e miei che citerò or ora.

(**) Gli interessanti lavori del sig. STAHL su questo argomento si trovano nei volumi 101 e 104 del Giornale di CRELLE, e trattano delle curve piane degli ordini 3, 4 e 5, e delle curve gobbe degli ordini 4, 5, 6 e 7.

(***) Un caso particolare di tali involuzioni relative alla C^3_4 (quella determinata dal punto di concorso delle corde principali) era già stato prima trovato dal sig. BERTINI (Rendic. del R. Istituto Lombardo, 20 giugno 1872).

(****) *Sui combinanti dei sistemi di forme binarie*, ecc. (Annali di Matem., serie II, vol. 20, 1892, § 5); *Sulla curva del terz'ordine dotata di un punto doppio* (Rendic. del R. Istituto Lombardo, 14 luglio 1892).

(*****) GROSS, *Ueber die Combinanten binärer Formensysteme*, ecc. Inaugural-Dissertation, Stuttgart, 1887, e Math. Ann., Bd. 32, 1888

neralizzando i ricordati risultati contenuti nei lavori del sig. STUDY e miei (relativi ai casi di $h = 1$, e $d = 2$, $n = 3$; $d = 3$, $n = 4$), trovo che in generale, dato un S_{h-1} qualunque ($n \geq d \geq h \geq 1$), viene determinata sulla curva un'involuzione $[S_{h-1}]^{n-d+h-1}$ di ordine n e di specie $n - d + h - 1$, la quale, qualunque sia l' S_{h-1} da cui si parte, contiene fra' suoi gruppi tutti quelli dell'involuzione fondamentale. L'involuzione $[S_{h-1}]^{n-d+h-1}$, a cui si perviene geometricamente colla considerazione delle osculanti, e di cui ho pure assegnata un'altra costruzione molto semplice, non è che l'involuzione conjugata a quella che s'ottiene tagliando la curva coi piani passanti per il dato S_{h-1} . Uguagliando a zero l' $(h + 1)^{\text{ma}}$ funzione generatrice indiretta, in cui si siano sostituite le coordinate dell' S_{h-1} , si ottiene appunto l'equazione della detta involuzione, cioè la relazione cui devono soddisfare $n - d + h$ punti appartenenti ad uno stesso gruppo della medesima. Se invece si suppongono dati valori arbitrari ai parametri di quegli $n - d + h$ punti, la stessa equazione rappresenta, in coordinate di S_{h-1} , un certo S_{d-h} , determinato dalle osculanti normali di quei punti, presi ad $n - d + 1$ per volta.

Da ultimo determino i gruppi neutri dell'involuzione fondamentale nonchè delle involuzioni $[S_{h-1}]^{n-d+h-1}$, e stabilisco alcune proprietà dei gruppi piani di queste ultime: proprietà che sono differenti secondo che tanto d quanto n sono pari od impari.

Parecchi dei risultati precedenti si possono stabilire per via puramente geometrica, considerando (come ho fatto specialmente nei n.º 5, 6 e 12) la curva C_n^d come proiezione di una curva normale di ordine n di uno spazio ad n dimensioni: con questo metodo tutte le involuzioni, di cui sopra si è discorso, derivano da alcune semplicissime e ben note proprietà dell'ultima curva.

1. In uno spazio lineare R_d a d dimensioni le coordinate omogenee del punto corrente λ della curva C_n^d siano espresse da

$$\rho x_i = f_i(\lambda) = a_{i0} \lambda^n + \dots + a_{in} \\ (i = 1, 2, \dots, d + 1),$$

e si abbia simbolicamente

$$f_i(\lambda) = a^{n, i, \lambda} = (a_{i,1} \lambda_1 + a_{i,2} \lambda_2)^n.$$

La curva possiede (GROSS, loc. cit.) $d + 1$ funzioni generatrici dirette G' , G'_1, \dots, G'_{d-1} , G_d , una qualunque delle quali, per es. la $(r + 1)^{\text{ma}}$, si

deduce dal determinante

$$G_r = \begin{vmatrix} f_1(\lambda') & \dots & f_{d+1}(\lambda') \\ \dots & \dots & \dots \\ f_1(\lambda^{(d-r+1)}) & \dots & f_{d+1}(\lambda^{(d-r+1)}) \\ x'_1 & \dots & x'_{d+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ x^{(r)}_1 & \dots & x^{(r)}_{d+1} \end{vmatrix},$$

dividendolo per i determinanti $(\lambda' \lambda'') \dots$. Da ciò risulta senz'altro:

L'equazione $G' = 0$ dà la condizione perchè i $d + 1$ punti della curva, dei quali nell'equazione stessa figurano i parametri $\lambda', \dots, \lambda^{(d+1)}$, siano in uno stesso piano.

L'equazione

$$G'_r = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, d)$$

rappresenta, in coordinate di S_{r-1} (*), l' S_{d-r} determinato dai $d - r + 1$ punti della curva, di cui nell'equazione stessa compaiono i parametri, cioè è soddisfatta dalle coordinate locali di tutti gli S_{r-1} aventi ciascuno un punto comune coll' S_{d-r} considerato.

In particolare, l'equazione $G_d = 0$ rappresenta, in coordinate di piani, il punto λ della curva.

Rappresentando simbolicamente con α^{n_λ} il primo membro, e chiamando u_1, \dots, u_{d+1} le coordinate omogenee di un piano, si avrà quindi

$$G_d = \alpha^{n_\lambda} = \sum_1^{d+1} u_i f_i(\lambda).$$

2. La curva C^d_n ha pure (GROSS, loc. cit.) $d + 1$ funzioni generatrici indirette $\Gamma', \Gamma'_1, \dots, \Gamma'_d$, e, volendo trovarne l'interpretazione geometrica, cominciamo a considerare la Γ' , richiamandone il modo di generazione. Siano $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-d}$ le forme binarie di grado n apolari alle $d + 1$ forme f_i , e colle medesime si formi il determinante

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(\lambda') & \dots & \varphi_{n-d}(\lambda') \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(\lambda^{(n-d)}) & \dots & \varphi_{n-d}(\lambda^{(n-d)}) \end{vmatrix}.$$

(*) Circa le coordinate di un S_i e le relazioni a cui esse soddisfanno, vedasi D'OVIDIO, *Le funzioni metriche fondamentali negli spazi di quante si vogliano dimensioni e di curvatura costante* (Mem. della R. Accad. dei Lincei, serie III, vol. 1, 1877).

Dividendolo per i determinanti $(\lambda' \lambda''), \dots$, e rappresentando il quoziente come funzione dei coefficienti delle f_i (ciò che è possibile in virtù delle relazioni bilineari che, per l'apolarità, hanno luogo fra i coefficienti delle f_i e quelli delle φ_k), si ottiene la funzione che si è chiamata Γ . Ora il sistema lineare determinato dalle forme φ_k rappresenta manifestamente l'involuzione fondamentale, e l'equazione $\Gamma = 0$ dà, com'è noto, la condizione perchè i parametri $\lambda', \dots, \lambda^{(n-d)}$ siano radici di una stessa forma di quel sistema lineare, laonde:

L'equazione $\Gamma = 0$ esprime la condizione perchè gli $n - d$ punti della curva, di cui essa contiene i parametri, appartengano ad uno stesso gruppo dell'involuzione fondamentale.

3. In ciò che segue rappresenteremo col simbolo $[\lambda', \dots, \lambda^{(n-r)}]_r$ l'osculante mista dei punti $\lambda', \dots, \lambda^{(n-r)}$ della curva, ossia la curva razionale d'ordine r , il cui punto corrente λ ha per equazione

$$\alpha_\lambda \dots \alpha_{\lambda^{(n-r)}} \alpha_\lambda^r = 0.$$

Consideriamo ora l'osculante $[\lambda', \dots, \lambda^{(n-d-1)}]_{d+1}$: è noto (*), e si dimostra del resto assai facilmente, che essa contiene $d + 1$ punti *stazionari*, cioè tali che per ciascuno di essi esiste un piano (*stazionario*) avente ivi colla curva un contatto di ordine d ; si trova subito che i parametri di tali punti sono dati dall'equazione

$$0 = \Pi_\lambda^{d+1} = (a_1 a_2) \dots (a_d a_{d+1}) a_{1,\lambda} \dots a_{d+1,\lambda} \dots a_{1,\lambda^{(n-d-1)}} \dots a_{d+1,\lambda^{(n-d-1)}} a_{1,\lambda} \dots a_{d+1,\lambda}$$

laonde questi punti e gli $n - d - 1$ punti dati sono rappresentati complessivamente dalla seguente equazione in λ :

$$(\lambda \lambda') \dots (\lambda \lambda^{(n-d-1)}) \Pi_\lambda^{d+1} = 0.$$

Ora il primo membro è apolare a ciascuna delle forme f_i , epperò:

Dati $n - d - 1$ punti qualunque sopra C_n^d , i $d + 1$ punti che con essi costituiscono un gruppo dell'involuzione fondamentale hanno per parametri quelli dei punti stazionari dell'osculante mista di ordine $d + 1$ determinata dai punti considerati.

4. Indicando con $\lambda', \dots, \lambda^{(n)}$ i parametri di n punti di C_n^d formanti un gruppo dell'involuzione fondamentale, avremo identicamente, qualunque

(*) Cfr. CLIFFORD, *On the Classification of Loci*, Phil. Transactions, 1878, pag. 671; LORIA, *Intorno alle curve razionali d'ordine n dello spazio a $n - 1$ dimensioni* (Rend. del Circolo Mat. di Palermo, tom. 2. 1888, pag. 203).

siano le u_i ,

$$\alpha_{\lambda'} \dots \alpha_{\lambda^{(n)}} = 0. \quad (1)$$

Se poi μ' è il parametro di uno dei punti stazionari dell'osculante $[\lambda', \dots, \lambda^{(n-d-1)}]_{d+1}$, l'osculante normale $[\lambda', \dots, \lambda^{(n-d-1)}, \mu']_d$ sarà contenuta interamente nel relativo piano stazionario. Ora il punto corrente λ di questa curva ha per equazione

$$\alpha_{\lambda'} \dots \alpha_{\lambda^{(n-d-1)}} \alpha_{\mu'} \alpha_{\lambda}^d = 0,$$

quindi, se nel primo membro in luogo delle u_i si sostituiscono le coordinate del detto piano stazionario, esso si annulla qualunque sia λ . Si ottengono in tal modo le equazioni seguenti:

$$\begin{aligned} \alpha_{\lambda'} \dots \alpha_{\lambda^{(n-d-1)}} \alpha_{\mu'} \alpha_1^r \alpha_2^{d-r} = 0 \\ (r = 0, 1, \dots, d), \end{aligned} \quad (2)$$

le quali, in virtù dell'identità (1), equivalgono soltanto a d , e possono servire a determinare le coordinate del piano stazionario considerato. La simmetria delle (2) rispetto ai parametri $\lambda', \dots, \lambda^{(n-d-1)}, \mu'$ fornisce il teorema seguente:

Sia dato un gruppo qualunque dell'involuzione fondamentale, e di esso si considerino $n - d$ punti qualunque: questi, presi ad $n - d - 1$ per volta, determinano $n - d$ osculanti miste d'ordine $d + 1$, le quali hanno tutte un piano stazionario comune; esso tocca ciascuna nel punto avente per parametro quello del punto rimanente.

Chiamando $\mu'', \dots, \mu^{(d+1)}$ gli altri punti della curva che completano il gruppo sopra considerato dell'involuzione fondamentale, dalle (2) seguono successivamente altri $d - 1$ gruppi di equazioni, di cui uno qualunque è il seguente:

$$\begin{aligned} \alpha_{\lambda'} \dots \alpha_{\lambda^{(n-d-1)}} \alpha_{\mu'} \dots \alpha_{\mu^{(k)}} \alpha_1^r \alpha_2^{d-r-k+1} = 0 \\ (r = 0, 1, \dots, d - k + 1). \end{aligned}$$

Le sue $d - k + 2$ equazioni, in virtù della (1), equivalgono a sole $d - k + 1$, e dicono che, se di un gruppo dell'involuzione fondamentale si considerano $n - d + k - 1$ punti qualunque, essi, presi ad $n - d$ per volta, determinano ogni volta un piano nel modo indicato dal teorema precedente: *questi $\binom{n-d+k-1}{n-d}$ piani passano tutti per un medesimo S_{d-k} , quello appunto che è rappresentato dall'ultimo gruppo di equazioni.*

Raccogliendo, si può enunciare la proprietà seguente:

Dati n punti della curva costituenti un gruppo qualunque dell'involuzione fondamentale, essi, presi ad $n - d$ per volta, determinano ogni volta un piano, nel modo sopra indicato: gli $\binom{n}{d}$ piani che così in tutto si ottengono sono le facce di un ennagono completo.

I vertici di questo ennagono si possono coordinare ad uno ad uno ai punti del gruppo considerato, intendendo che ad ogni vertice venga coordinato quello fra i punti del gruppo, che, unito con altri $n - d - 2$ punti qualunque del gruppo stesso, non dà mai luogo ad un'osculante di ordine $d + 1$, di cui un piano stazionario passi per il vertice considerato (*).

5. Ai risultati precedenti si può giungere anche colla pura geometria, immaginando (**) che la C_n^d sia ottenuta proiettando in R_d da uno spazio lineare ad $n - d - 1$ dimensioni (che in tutto il seguito terremo fisso e denoteremo con Σ_{n-d-1}) una curva normale C_n^n di ordine n di uno spazio lineare R_n ad n dimensioni passante per R_d e per Σ_{n-d-1} . Secondo che n è pari od impari, la C_n^n determina (***) una polarità rispetto ad una quadrica F passante per la curva, oppure un sistema nullo Θ , e se diciamo Σ_d lo spazio che per tal modo è conjugato a Σ_{n-d-1} , le involuzioni che si ottengono tagliando C_n^n cogli S_{n-1} passanti per Σ_{n-d-1} e per Σ_d sono fra loro conjugate (Cfr. CASTELNUOVO, loc. cit., § 2.).

Di qui risulta che l'involuzione fondamentale sopra C_n^d si può ottenere tagliando C_n^n cogli S_{n-1} passanti per Σ_d e proiettando le intersezioni da Σ_{n-d-1} sopra R_d .

Un'osculante qualunque $[\lambda', \dots, \lambda^{(r)}]_{n-r}$ di C_n^n è una curva normale situata in un S_{n-r} , il quale è lo spazio comune agli S_{n-1} osculatori a C_n^n nei punti $\lambda', \dots, \lambda^{(r)}$: proiettando questa curva da Σ_{n-d-1} su R_d , si ottiene l'osculante $[\lambda', \dots, \lambda^{(r)}]_{n-r}$ di C_n^d . Presi allora $n - d$ punti di C_n^n situati in un S_{n-1} passante per Σ_d , gli S_{n-1} che osculano C_n^n in quei punti si tagliano in un S_d avente un punto comune col Σ_{n-d-1} ; la proiezione di tale S_d da Σ_{n-d-1}

(*) Cfr. STAHL, *Ueber die Fundamentalinvolutionen auf rationalen Curven* (Giornale di CRELLE, Bd. 104, 1888).

(**) VERONESE, *Behandlung der projectivischen Verhältnisse*, ecc. (Math. Ann., Bd. 19, 1881, pag. 208).

(***) CLIFFORD, loc. cit., pag. 668-669. — Vedi pure CASTELNUOVO, *Studio dell'involuzione generale sulle curve razionali*, ecc. (Atti del R. Istituto Veneto, tom. 4. serie VI. 1886, § 1).

dà quindi in R_d un S_{d-1} , che manifestamente è un piano stazionario per tutte le osculanti di ordine $d+1$ determinate dalle proiezioni degli $n-d$ punti dati, presi ad $n-d-1$ per volta.

Presi poi sopra C_n^d n punti costituenti un gruppo dell'involuzione fondamentale, i punti corrispondenti di C_n^n saranno i punti di contatto degli S_{n-1} osculatori a C_n^n , uscenti da un determinato punto A di Σ_{n-d-1} . Gli S_i che questi S_{n-1} , considerati ad $n-1$ per volta, hanno in comune, formano un n -spigolo completo avente il vertice nel punto A , e, proiettandone gli n spigoli da Σ_{n-d-1} su R_d , si hanno i vertici dell'ennagono completo di cui si parla nel numero precedente. I teoremi ivi contenuti sono dunque dimostrati.

6. Cerchiamo se fra i gruppi dell'involuzione fondamentale qualcuno abbia tutti i suoi punti in un piano. Perchè ciò possa accadere è intanto necessario che n sia dispari; in tale ipotesi sia

$$\sum_1^{d+1} u_i x_i = 0 \quad (3)$$

l'equazione di un piano: esso taglia C_n^d nei punti i cui parametri sono le radici dell'equazione

$$\sum_1^{d+1} u_i a^{n_i, \lambda} = 0.$$

Volendo determinare le u_i in modo che il primo membro sia apolare a tutte le sezioni piane di C_n^d , scriviamo dapprima le condizioni perchè esso sia apolare alle sezioni fatte coi piani fondamentali $x_1 = 0, \dots, x_d = 0$, ossia a ciascuna delle forme $a^{n_1, \lambda}, \dots, a^{n_d, \lambda}$. Ponendo

$$A_{rs} = (a_r a_s)^n,$$

di guisa che sarà

$$A_{rs} = -A_{sr},$$

ed eliminando le u_i dalla (3) e dalle d equazioni di condizione, si ottiene:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_d & x_{d+1} \\ 0 & A_{12} & \dots & A_{1,d} & A_{1,d+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{d,1} & A_{d,2} & \dots & 0 & A_{d,d+1} \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

Ora se d è impari, il coefficiente di x_{d+1} in quest'equazione è un determinante gobbo simmetrico di ordine impari ed è quindi nullo: in tal caso

pertanto il piano rappresentato dalla (4) passa per il punto $x_1 = \dots = x_d = 0$ e nell'involuzione fondamentale non esiste alcun gruppo piano. Se al contrario d è pari, il piano (4) non passa, in generale, per il punto ora nominato, quindi la sezione fatta nella curva da quel piano, essendo apolare a $d + 1$ sezioni piane linearmente indipendenti, è apolare a tutte. Si conclude dunque:

L'involuzione fondamentale possiede in generale un gruppo piano (ed uno soltanto) nell'unico caso in cui sia ad un tempo d pari ed n impari.

Alla stessa conclusione si perviene immediatamente riprendendo le considerazioni del numero precedente. Dato un S_{n-1} passante per Σ_d , gli n punti in cui esso taglia C_n^n verranno proiettati da Σ_{n-d-1} in n punti di C_n^d situati in un piano, soltanto quando l' S_{n-1} considerato passi per Σ_{n-d-1} , cioè quando gli spazi Σ_{n-d-1} e Σ_d si taglino. Ora, per note proprietà, ciò non può accadere se n è pari, poichè in tal caso quei due spazi sono conjugati rispetto alla quadrica F (*); quando n invece sia impari, quegli spazi sono conjugati nel sistema nullo Θ , epperò si tagliano, necessariamente, nel solo caso in cui l'uno, e quindi anche l'altro, sia ad un numero pari di dimensioni, quando cioè d sia pari.

7. Sulla curva C_n^d si considerino $n - d + 1$ punti qualunque $\lambda', \dots, \lambda^{(n-d+1)}$, i quali, presi ad $n - d$ per volta, determinano $n - d + 1$ osculanti normali. Fissandone una, per es. la $[\lambda', \dots, \lambda^{(n-d)}]_d$, le coordinate del suo punto corrente λ sono

$$x_i \equiv a_{i,\lambda'} \dots a_{i,\lambda^{(n-d)}} a_{i,\lambda}^d$$

$$(i = 1, 2, \dots, d + 1),$$

e però le coordinate del suo piano osculatore nel punto avente per parametro $\lambda^{(n-d+1)}$ (cioè quello del punto che si è trascurato) sono

$$u_1 \equiv (a_2^2 a_3) \dots (a_d a_{d+1}) a_{2,\lambda'} \dots a_{d+1,\lambda'} \dots a_{2,\lambda^{(n-d+1)}} \dots a_{d+1,\lambda^{(n-d+1)}},$$

.....

e la loro simmetria rispetto a $\lambda', \dots, \lambda^{(n-d+1)}$ dimostra il teorema:

Dati $n - d + 1$ punti qualunque sopra C_n^d , essi, presi ad $n - d$ per

(*) Circa le quadriche di uno spazio lineare qualunque vedansi VERONESE, loc. cit., Abschnitt III, e SEGRE, *Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni* (Mem. della R. Accad. delle Scienze di Torino, serie II, tom. 36, 1884).

volta, determinano $n - d + 1$ osculanti normali, le quali hanno un piano osculatore comune; questo oscula ciascuna nel punto che ha per parametro quello del punto rimanente.

È altresì da notare che in tal piano tutte le osculanti ora nominate hanno pure in comune l'osculante $[\lambda', \dots, \lambda^{(n-d+1)}]_{d-1}$, che è una curva normale del piano stesso.

L'equazione del piano suddetto si ottiene uguagliando a zero la funzione generatrice indiretta Γ'_1 , formata coi parametri $\lambda', \dots, \lambda^{(n-d+1)}$ dei punti sopra considerati.

Per convincersi di ciò basta tener presente il modo con cui si forma la funzione Γ'_1 , e far uso di un teorema generale dovuto al sig. STEPHANOS (*Mémoire sur les faisceaux*, ecc., loc. cit., pag. 22); ma su questo non mi fermo più oltre, poichè avrò occasione di ritornarvi nel n.º 11 per altro fine.

I ragionamenti fatti sopra si possono proseguire, considerando sulla curva $n - d + 2, n - d + 3, \dots$ punti qualunque, e si perviene così al teorema generale:

Dati $n - d + h$ punti qualunque sopra C^d_n ($n \geq d \geq h \geq 1$), prendendoli ad $n - d + 1$ per volta, essi determinano ogni volta un piano, nel modo indicato poc'anzi: gli $\binom{n-d+h}{h-1}$ piani che così si ottengono passano tutti per uno stesso S_{d-h} ; essi sono inoltre le facce di un moltispazio completo costituito di $n - d + h$ spazi S_{d-h+1} ed avente per sostegno l' S_{d-h} , cioè sono i piani che contengono, in tutti i modi possibili, $h - 1$ di questi S_{d-h+1} .

Gli S_{d-h+1} del moltispazio precedente si possono coordinare ad uno ad uno agli $n - d + h$ punti dati di C^d_n , intendendo che ad ognuno degli S_{d-h+1} si faccia corrispondere quello fra i punti dati, che, unito con altri $n - d$ qualunque, non determina mai, nel modo sopra esposto, un piano passante per l' S_{d-h+1} considerato.

L'equazione che risulta uguagliando a zero l' $(h + 1)^{\text{ma}}$ funzione generatrice indiretta Γ'_h , nella quale si siano sostituiti i parametri degli $n - d + h$ punti dati, rappresenta, in coordinate di S_{h-1} , lo spazio nominato S_{d-h} , cioè è soddisfatta dalle coordinate di tutti gli S_{h-1} aventi un punto comune coll' S_{d-h} .

La prima parte si può anche enunciare dicendo:

Dati sulla curva $n - d + h$ punti qualunque, considerandoli ad $n - d + h - 1$ per volta, essi determinano $n - d + h$ osculanti miste di ordine $d - h + 1$, le quali posseggono un S_{d-h} osculatore comune; questo oscula ciascuna nel punto avente per parametro quello del punto trascurato.

ossia dicendo che il gruppo dei punti presi $\lambda', \dots, \lambda^{(n-d+h)}$ è apolare al gruppo di n punti che si ha secando C^d_n con uno qualunque di quei piani, epperò, per l'osservazione premessa, con uno qualunque dei piani passanti per l' S_{d-h} determinato dai piani stessi. Pertanto possiamo dire:

Dati $n - d + h$ punti qualunque di C^d_n ($n \geq d \geq h \geq 1$), il gruppo da essi costituito è apolare a tutti i gruppi di n punti che si ottengono tagliando la curva coi piani passanti per l' S_{d-h} coordinato al gruppo dato di punti.

10. Dato ad arbitrio un S_{h-1} , esistono $\infty^{n-d+h-1}$ gruppi di $n - d + h$ punti della curva, il cui S_{d-h} coordinato abbia un punto comune coll' S_{h-1} . Invero se in

$$\Gamma_h = 0$$

supponiamo sostituite le coordinate del dato S_{h-1} , otteniamo un'equazione di grado $d - h + 1$ rispetto a ciascuno dei parametri $\lambda', \dots, \lambda^{(n-d+h)}$, di modo che, assegnati valori arbitrari ad $n - d + h - 1$ qualunque di essi, restano determinati $d - h + 1$ valori del rimanente: la proprietà enunciata ha allora luogo in virtù di quanto si è detto alla fine del n.º 7. Si ha pertanto il teorema generale:

Fissato in R_d uno spazio lineare qualunque S_{h-1} , resta determinata sopra C^d_n un'involuzione $[S_{h-1}]^{n-d+h-1}$ di ordine n e di specie $n - d + h - 1$, un gruppo qualunque della quale gode della proprietà che lo spazio S_{d-h} , coordinato ad un gruppo arbitrario di $n - d + h$ fra' suoi punti, ha un punto comune col dato S_{h-1} . L'equazione di tale involuzione, ossia la relazione che intercede fra $n - d + h$ punti appartenenti ad un suo gruppo, si ottiene uguagliando a zero la funzione Γ_h , nella quale si siano sostituite le coordinate del dato S_{h-1} .

Si può inoltre dimostrare che l'involuzione stessa è conjugata a quella che risulta tagliando C^d_n coi piani passanti per il dato S_{h-1} ; dal che segue che, qualunque sia questo S_{h-1} , essa contiene fra' suoi gruppi tutti quelli dell'involuzione fondamentale.

Invero, considerando un gruppo qualunque della detta involuzione e scegliendo $n - d + h$ de' suoi punti, ad essi è coordinato un S_{d-h} avente un punto comune col dato S_{h-1} , e giacente quindi con questo in un piano determinato. Tale piano, per il teorema del numero precedente, taglia C^d_n in n punti costituenti un gruppo apolare a quello degli $n - d + h$ punti considerati, e perciò apolare anche all'intero gruppo fissato dell'involuzione. Quest'ultimo è pertanto apolare a ciascuno degli $\binom{n}{d-h}$ gruppi di n punti de-

terminati, nel modo ora esposto, da piani passanti per il dato S_{h-1} . E poichè dall'essere $n \geq d \geq h$ segue

$$\binom{n}{d-h} > d-h,$$

ed i piani passanti per un S_{h-1} sono ∞^{d-h} , il gruppo considerato sarà apolare a tutte le sezioni fatte in C_n^d coi piani passanti per l' S_{h-1} .

11. Dell'ultima proprietà è utile esporre anche la seguente dimostrazione analitica, la quale deriva immediatamente da una forma notevole che si può dare alla funzione Γ'_h . Ricordo a tale scopo che la Γ'_h si costruisce applicando a $d-h+1$ qualunque fra le forme $f_i(\lambda)$ lo stesso procedimento che già si è indicato al n.º 2 per avere la Γ' , orlando poscia h volte la funzione così ottenuta, ed aggiungendo al risultato tutti i termini analoghi. Applicando allora il teorema del sig. STEPHANOS a cui si è alluso nel n.º 7 (e l'applicazione è lecita, poichè i numeri k ed m di questo Autore qui valgono rispettivamente $d-h$ ed n , epperò la condizione $m > k$ è certamente soddisfatta) otteniamo

$$\Gamma'_h = \begin{vmatrix} A_1^{(0)} & A_2^{(0)} & \dots & A_{d+1}^{(0)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_1^{(d-h)} & A_2^{(d-h)} & \dots & A_{d+1}^{(d-h)} \\ x'_1 & x'_2 & \dots & x'_{d+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(h)} & x_2^{(h)} & \dots & x_{d-1}^{(h)} \end{vmatrix},$$

dove in generale si è posto

$$A_i^{(r)} = a_{i,1}^{d-h-r} a_{i,2}^r a_{i,\lambda} \dots a_{i,\lambda}^{(n-d+h)},$$

e $(x'_1, \dots, x'_{d+1}), \dots, (x_1^{(h)}, \dots, x_{d-1}^{(h)})$ denotano le coordinate di h punti che determinano lo spazio S_{h-1} . Se per semplicità supponiamo poi che questi punti siano quelli che hanno tutte le coordinate nulle, all'infuori rispettivamente della $(d-h+2)^{ma}, \dots, (d+1)^{ma}$, la Γ'_h assume la forma assai semplice

$$\Gamma'_h = \begin{vmatrix} A_1^{(0)} & A_2^{(0)} & \dots & A_{d-h+1}^{(0)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_1^{(d-h)} & A_2^{(d-h)} & \dots & A_{d-h+1}^{(d-h)} \end{vmatrix}, \tag{7}$$

che si può altresì sviluppare come segue:

$$\Gamma'_h = (a_1 a_2) \dots (a_{d-h} a_{d-h+1}) a_{i,\lambda} \dots a_{i,\lambda^{(n-d+h)}} \dots a_{d-h+1,\lambda} \dots a_{d-h+1,\lambda^{(n-d+h)}}.$$

Ciò posto, per dimostrare la proprietà di cui si è parlato in principio, indichiamo con $\lambda', \dots, \lambda^{(n-d+h-1)}$ i parametri di $n-d+h-1$ punti arbitrari di C_n^d : ad essi, mediante l'equazione $\Gamma'_h = 0$, corrispondono $d-h+1$ punti, che coi primi formano un gruppo dell'involuzione $[S_{h-1}]_{n-d+h-1}^n$. Possiamo dunque dire che un gruppo qualunque di tale involuzione è dato dalle n radici della seguente equazione in λ :

$$(\lambda \lambda') \dots (\lambda \lambda^{(n-d+h-1)}) \Gamma'_h = 0,$$

dove in Γ'_h in luogo di $\lambda^{(n-d+h)}$ si sia posto λ . Ora, se per Γ'_h assumiamo l'ultima delle forme date sopra, riesce evidente che il primo membro dell'equazione ora scritta è apolare a ciascuna delle forme f_1, \dots, f_{d-h+1} , che sono determinate dalle intersezioni di C_n^d coi piani $x_1 = 0, \dots, x_{d-h+1} = 0$ individuanti l' S_{h-1} .

12. La considerazione della (7) permette d'indicare una costruzione assai semplice (e di cui ci serviremo nel n.° 16) dell'involuzione $[S_{h-1}]_{n-d+h-1}^n$. Siano $\lambda', \dots, \lambda^{(n-d+h-1)}$ i parametri di $n-d+h-1$ punti qualunque della curva, i quali determinano l'osculante $[\lambda', \dots, \lambda^{(n-d+h-1)}]_{d-h+1}$. Mantenendo le ipotesi e le notazioni del numero precedente, un piano qualunque passante per l' S_{h-1} è rappresentato dall'equazione

$$\sum_1^{d-h+1} u_i x_i = 0,$$

e taglia quindi la detta osculante nei punti forniti da

$$\sum_1^{d-h+1} u_i a_{i,\lambda'} \dots a_{i,\lambda^{(n-d+h-1)}} a_{i,\lambda}^{d-h+1} = 0.$$

Volendo che il detto piano abbia coll'osculante un contatto di ordine $d-h$ nel punto di parametro $\lambda^{(n-d+h)}$, avremo le $d-h+1$ equazioni di condizione

$$\sum_1^{d-h+1} A_i^{(0)} u_i = 0, \dots, \sum_1^{d-h+1} A_i^{(d-h)} u_i = 0,$$

da cui eliminando le u_i si ha appunto, nella forma (7),

$$\Gamma'_h = 0.$$

Pertanto, dati $n - d + h - 1$ punti qualunque sopra C_n^d , i punti, che con essi costituiscono un gruppo dell'involuzione determinata da un dato S_{h-1} , hanno per parametri quelli dei punti di contatto dei piani passanti per l' S_{h-1} ed aventi un contatto di ordine $d - h$ coll'osculante mista di ordine $d - h + 1$ determinata dai punti considerati.

Se poi ci riferiamo di nuovo al metodo indicato nel n.° 5, risulta dalle proprietà precedenti che l'involuzione $[S_{h-1}]_{n-d+h-1}^n$ può venir generata come segue. Entro lo spazio Σ_d si fissi uno spazio lineare qualsivoglia Σ_{d-h} di $d - h$ dimensioni, e dicasi $\Sigma_{n-d+h-1}$ il suo spazio conjugato (rispetto ad F od a Θ , secondo che n è pari od impari), che passerà per Σ_{n-d-1} . Gli S_{n-1} passanti per Σ_{d-h} determinano allora sopra C_n^n un'involuzione di ordine n e di specie $n - d + h - 1$, la quale, proiettata da Σ_{n-d-1} in R_d , diventa l'involuzione $[S_{h-1}]_{n-d+h-1}^n$. L' S_{h-1} di cui si è parlato nei numeri precedenti è l'intersezione di R_d con $\Sigma_{n-d+h-1}$.

13. L'involuzione fondamentale, come risulta da teoremi generali ben noti (*), possiede $(n - d)(d + 1)$ punti $(n - d)$ -pli, i quali, dovendo (**), coincidere coi punti $(d + 1)$ -pli dell'involuzione conjugata, non sono altro che i punti di contatto dei piani aventi con C_n^d un contatto d'ordine d . Per la stessa ragione l'involuzione determinata su C_n^d da un S_{h-1} possiede $(n - d + h)(d - h + 1)$ punti $(n - d + h)$ -pli, i quali coincidono coi punti di contatto dei piani passanti per l' S_{h-1} , ed aventi colla curva un contatto d'ordine $d - h$.

14. Data un'involuzione di ordine n e di specie k , diremo col signor WEYR (***) che k elementi formano un *gruppo neutro* della medesima quando essi, insieme con un elemento ulteriore arbitrario, determinano un gruppo dell'involuzione. Volendo trovare il significato geometrico dei gruppi neutri nelle involuzioni sin qui considerate, conviene premettere la ricerca seguente.

Dati sulla curva r punti qualunque $\lambda', \dots, \lambda^{(r)}$, essi determinano l'osculante $[\lambda', \dots, \lambda^{(r)}]_{n-r}$, la quale, quando siano soddisfatte certe condizioni, potrà

(*) Cfr. BATTAGLINI, *Sulle forme binarie di grado qualunque* (Atti della R. Accad. delle Scienze Fis. e Mat. di Napoli, 1867, vol. III, pag. 20); EM. WEYR, *Ueber Involuntionen n-ten Grades und k-ter Stufe* (Sitzungsb. dell'Accad. di Vienna, tom. 79, 17 aprile 1879, pag. 684). — Una dimostrazione più geometrica di questo e di altri risultati trovati nel citato lavoro del sig. CASTELNUOVO.

(**) Cfr. i lavori già ricordati di STEPHANOS, BRILL, MEYER e CASTELNUOVO.

(***) Loc. cit., § 10. Il concetto di gruppo neutro è stato poi generalizzato dal signor CASTELNUOVO nella Memoria citata.

Il problema proposto si risolve allora immediatamente applicando un noto risultato, del quale il sig. STAHL ha dato recentemente (*) una dimostrazione assai semplice; si ottiene così:

Quando sia $n \geq 2r > n - d + 1$, i piani contenenti le osculanti miste di r punti di una curva C_n^d formano una varietà di $d - n + 2r - 1$ dimensioni e di classe $\binom{n-r+1}{r}$, cioè sono tali che per ogni $S_{d-n+2r-2}$ ne passano $\binom{n-r+1}{r}$.

Se è invece $2r = n - d + 1$ (nel qual caso la prima condizione $n \geq 2r$ è sempre senz'altro soddisfatta), il numero delle osculanti miste di ordine $n - r$ situate in un piano è finito ed uguale a $\binom{n-r+1}{r}$.

Ponendo in generale

$$A_s = \sum_{i=1}^{i=d+1} u_i a_{i,1}^{n-s} a_{i,2}^s,$$

i punti, in cui C_n^d è tagliata da un piano arbitrario

$$\sum_1^{d+1} u_i x_i = 0,$$

hanno per parametri le radici dell'equazione

$$0 = \Phi = \sum_{s=0}^{s=n} \binom{n}{s} A_s \lambda^{n-s}.$$

La matrice precedente diviene allora

$$\left\| \begin{array}{cccccccc} A_0 & A_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & A_r \\ A_1 & A_2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & A_{r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n-r} & A_{n-r+1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & A_n \end{array} \right\|,$$

ed all'insieme de' suoi determinanti di ordine $r + 1$ il prof. BATTAGLINI (loc. cit., pag. 24) ha dato il nome di *plesso cataletticante* di ordine $n - 2r$ della

(*) STAHL, *Zur Erzeugung der rationalen Raumcurven* (Math. Ann., Bd. 40, 1892, Anhang, pag. 52).

forma Φ (cataletticante di Φ quando $n = 2r$), assegnando inoltre il significato geometrico del suo annullarsi. Dunque:

I piani di cui sopra si è parlato sono quelli che hanno la proprietà di tagliare C_n^d in gruppi di punti, pei quali è nullo il plesso cataletticante di ordine $n - 2r$ (rispettivamente il cataletticante).

Per esempio nel piano ordinario ($d = 2$) per i casi $n = 3, r = 1$; $n = 4, r = 2$; $n = 5, r = 2$, e nello spazio ordinario ($d = 3$) per i casi $n = 4, r = 1$; $n = 4, r = 2$; $n = 5, r = 2$; $n = 6, r = 3$; $n = 6, r = 2$; $n = 7, r = 3$, si ritrovano le seguenti proprietà già note.

Per una C_3^2 , esistono tre coniche osculanti ridotte ad una retta doppia, e sono le prime osculanti dei tre flessi (STAHL, *Ueber die Fundamentalinvolutionen*, ecc. Giornale di CRELLE, Bd. 104, § 1; BERZOLARI, *Sulla curva del terz'ordine*, ecc., loc. cit.).

Una C_4^2 ammette ∞^1 coniche osculanti degenerate in una retta doppia: queste rette inviluppano una curva di 3.^a classe, e tagliano C_4^2 in gruppi armonici di punti; esse non sono poi altro che le tangenti d'inflexione delle prime osculanti (STAHL, *Ueber die rationale ebene Curve vierter Ordnung*, Giornale di CRELLE, Bd. 101, § 3).

In una C_5^2 esistono sei osculanti di 3.^o ordine ridotte ad una retta tripla (STAHL, *Ueber die Fundamentalinvolutionen*, ecc., loc. cit., § 4).

Per una C_4^3 esistono quattro cubiche osculanti situate in un piano, e sono le prime osculanti dei punti stazionari; i piani delle coniche osculanti, ossia i piani osculatori delle prime osculanti, inviluppano una superficie di 3.^a classe (la superficie di STEINER di cui C_4^3 è un'assintotica), e tagliano C_4^3 in gruppi armonici di punti (STUDY, loc. cit.; STAHL, loc. cit., § 2; BERZOLARI, *Sui combinanti dei sistemi di forme binarie*, ecc., loc. cit., § 5).

Per una C_5^3 i piani contenenti le osculanti piane di 3.^o ordine, ossia i piani stazionari delle prime osculanti, formano un fascio gobbo di 6.^a classe (STAHL, loc. cit., §§ 3^a e 3^c).

In una C_6^3 i piani delle osculanti piane di 3.^o ordine, ossia i piani stazionari delle seconde osculanti miste, inviluppano una superficie di 4.^a classe; esistono inoltre dieci osculanti di 4.^o ordine situate in un piano (STAHL, loc. cit., § 5).

In una C_7^3 i piani delle osculanti piane di 4.^o ordine formano un fascio gobbo di 10.^a classe (STAHL, loc. cit., § 6).

15. Volendo determinare i gruppi neutri dell'involuzione fondamentale, si osservi che, in virtù della costruzione esposta al n.^o 3, presi sulla curva

$n - d - 3$ punti qualunque $\lambda', \dots, \lambda^{(n-d-3)}$, essi insieme con altri due punti μ, ν costituiscono un gruppo neutro dell'involuzione, quando l'osculante $[\lambda', \dots, \lambda^{(n-d-3)}, \mu, \nu]_{d+1}$ è situata in un piano. Ora questa curva è anche l'osculante mista di ordine $d + 1$ determinata dai punti μ, ν dell'osculante $[\lambda', \dots, \lambda^{(n-d-3)}]_{d+3}$ presa come curva fondamentale; perciò basterà far uso del teorema del numero precedente, ponendo $n = d + 3, r = 2$. Si ha così:

Dati sulla curva $n - d - 3$ punti qualunque $\lambda', \dots, \lambda^{(n-d-3)}$, essi fanno parte di $\frac{(d+1)(d+2)}{2}$ gruppi neutri dell'involuzione fondamentale, i quali corrispondono a quelle fra le osculanti miste d'ordine $d + 1$ della curva $[\lambda', \dots, \lambda^{(n-d-3)}]_{d+3}$, che si trovano in un piano.

16. In modo analogo si determinano i gruppi neutri di una qualunque involuzione $[S_{h-1}]_{n-d+h-1}^n$. Dati $n - d + h - 3$ punti arbitrari $\lambda', \dots, \lambda^{(n-d+h-3)}$ di C_n^d , essi insieme con altri due punti μ, ν formano un gruppo neutro di quell'involuzione, quando l'osculante $[\lambda', \dots, \lambda^{(n-d+h-3)}, \mu, \nu]_{d-h+1}$ giace in un piano passante per l' S_{h-1} fissato. E poichè tale curva si può anche riguardare come l'osculante mista di ordine $d - h + 1$ determinata dai punti μ, ν dell'osculante $[\lambda', \dots, \lambda^{(n-d+h-3)}]_{d-h+3}$ presa come curva fondamentale, basterà far uso del teorema del n.° 14, ponendo $n = d - h + 3, r = 2$. Delle due condizioni là trovate una è sempre soddisfatta, e l'altra diventa

$$d \geq h + 1,$$

e poichè si ha già $d \geq h$, l'unico caso di eccezione è quello in cui $d = h$. Esso è però compreso in quanto si è detto nel principio del n.° 14, e si ha pertanto in generale il teorema seguente:

Dato uno spazio lineare qualunque S_{h-1} , e dati sulla curva $n - d + h - 3$ punti arbitrari $\lambda', \dots, \lambda^{(n-d+h-3)}$, essi fanno parte di $\frac{(d-h+1)(d-h+2)}{2}$ gruppi neutri dell'involuzione determinata dal dato S_{h-1} : questi gruppi corrispondono a quelle fra le osculanti miste di ordine $d - h + 1$ della curva $[\lambda', \dots, \lambda^{(n-d+h-3)}]_{d-h+3}$, che giacciono in un piano passante per l' S_{h-1} .

Si noti infine che i gruppi neutri dell'involuzione fondamentale e quelli di una qualunque involuzione $[S_{h-1}]_{n-d+h-1}^n$ sono le proiezioni in R_d dei gruppi neutri dell'involuzione determinata sopra C_n^n dagli S_{h-1} passanti rispettivamente per Σ_d oppure per il Σ_{d-h} di cui si è parlato nel n.° 12. Gli uni e gli altri si possono dunque costruire nel modo indicato dal sig. CASTELNUOVO nel n.° 11, loc. cit.

17. Occupiamoci da ultimo dei gruppi dell'involuzione $[S_{h-1}]^n_{n-d+h-1}$ giacenti in un piano, ed a tale scopo premettiamo le seguenti osservazioni.

Se n è pari, i piani secanti C^d_n in gruppi di punti apolari a sè stessi inviluppano una quadrica, la cui equazione tangenziale si ottiene uguagliando a zero l'invariante quadratico della forma α^2_λ : questa quadrica, che diremo Q , ha per piani tangenti le intersezioni di R_d cogli S_{n-1} condotti per Σ_{n-d-1} , a toccare la quadrica F (vedi n.° 5).

Supponendo invece n dispari, l'inviluppo precedente è indeterminato, e (mantenendo le notazioni del n.° 6) la condizione perchè le sezioni fatte in C^d_n con due piani differenti

$$\sum_1^{d+1} u_i x_i = 0, \quad \sum_1^{d+1} v_i x_i = 0 \quad (9)$$

siano fra loro apolari è

$$v_1 \sum_1^{d+1} A_{1,i} u_i + \dots + v_{d+1} \sum_1^{d+1} A_{d+1,i} u_i = 0, \quad (10)$$

che si può scrivere anche come segue:

$$A_{12} q_{12} + A_{13} q_{13} + \dots + A_{d,d+1} q_{d,d+1} = 0, \quad (11)$$

avendo posto

$$q_{rs} = u_r v_s - u_s v_r.$$

Le q_{rs} sono le coordinate-assi dell' S_{d-2} comune ai due piani (9), e quando la (11) sia soddisfatta questo S_{d-2} è tale che due piani qualunque del fascio di cui esso è il sostegno tagliano C^d_n in due gruppi apolari di punti. La (11) è l'equazione del *complesso* degli S_{d-2} dotati di tale proprietà.

Considerando la (10), se supponiamo date le coordinate v_i , essa al variare delle u_i rappresenta un punto giacente nel piano v , e supponendo date invece le coordinate di questo punto, si potranno da essa ricavare i valori delle v_i nel solo caso in cui non sia nullo il determinante dei loro coefficienti. Essendo esso gobbo simmetrico e di ordine $d+1$, potrà essere diverso da zero soltanto quando d sia impari. In tal caso la (10) definisce un sistema nullo, che diremo N , e nel quale un punto ed un piano fra loro corrispondenti sono tali che tutti i piani passanti per il punto tagliano C^d_n in gruppi apolari a quello determinato dal piano dato. È poi anche ovvio il modo con cui questo sistema nullo si può immaginare dedotto da quello che nel n.° 5 si è chiamato Θ .

Se invece d è pari, si è dimostrato nel n.º 6 che, fra i gruppi dell'involuzione fondamentale, uno ed uno solo, in generale, ha tutti i suoi punti in un piano, che diremo π . Se per semplicità si assume π come piano avente l'equazione

$$x_{d+1} = 0,$$

sarà

$$A_{1,d+1} = 0, \dots, \quad A_{d,d+1} = 0,$$

e la condizione (10) diventa

$$v_1 \sum_1^d A_{1i} u_i + \dots + v_d \sum_1^d A_{di} u_i = 0.$$

Da essa risulta che nel caso attuale resta determinato in π un sistema nullo, che chiameremo N_π e nel quale un punto ed un S_{d-2} fra loro corrispondenti sono tali che le sezioni fatte in C_n^d da due piani qualunque, passanti l'uno per il punto e l'altro per l' S_{d-2} , sono apolari.

18. Ciò posto, sia

$$\sum_1^{d+1} \xi_i x_i = 0 \tag{12}$$

l'equazione di un piano secante C_n^d in un gruppo dell'involuzione determinata da un S_{h-1} qualunque, di guisa che i parametri dei punti del gruppo stesso saranno le radici dell'equazione

$$\sum_1^{d+1} \xi_i a_{i,\lambda}^n = 0. \tag{13}$$

Indicando poi con $u_{i,1}, u_{i,2}, \dots, u_{i,d+1}$ ($i = 1, 2, \dots, d-h+1$) le coordinate di $d-h+1$ piani che determinano l' S_{h-1} come loro comune intersezione, le forme

$$\sum_1^{d+1} u_{1,i} a_{i,\lambda}^n, \quad \sum_1^{d+1} u_{2,i} a_{i,\lambda}^n, \dots, \quad \sum_1^{d+1} u_{d-h+1,i} a_{i,\lambda}^n$$

devono essere apolari al primo membro della (13). Scrivendo le condizioni perchè ciò avvenga, si hanno $d-h+1$ relazioni, ed eliminando da esse e dalla (12) le ξ_i , risulta che le equazioni dello spazio S_{d-h} , comune agli ∞^{h-1} piani contenenti gruppi della suddetta involuzione, si ottengono uguagliando a zero i determinanti di ordine $d-h+2$ tratti dalla matrice

$$\left\| \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \dots & x_{d+1} \\ \sum_1^{d+1} u_{1,i} A_{1,i} & \sum_1^{d+1} u_{1,i} A_{2,i} & \dots & \sum_1^{d+1} u_{1,i} A_{d+1,i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_1^{d+1} u_{d-h+1,i} A_{1,i} & \sum_1^{d+1} u_{d-h+1,i} A_{2,i} & \dots & \sum_1^{d+1} u_{d-h+1,i} A_{d+1,i} \end{array} \right\|$$

Di qui, ed anche senz'altro dalle cose del numero precedente, risulta:

L'involuzione determinata sopra C_n^d da uno spazio lineare qualunque S_{h-1} possiede ∞^{h-1} gruppi piani, i cui piani hanno in comune un S_{d-h} . Se n è pari, questo S_{d-h} è lo spazio polare reciproco del dato S_{h-1} rispetto alla quadrica Q ; se n è dispari e d pure dispari, l' S_{d-h} è lo spazio polare del dato S_{h-1} nel sistema nullo N ; se infine n è dispari e d è pari, l' S_{d-h} è contenuto nel piano π , ed è lo spazio polare, nel sistema nullo N_π , della traccia di S_{h-1} sopra π .

Colgo quest'occasione per aggiungere al mio lavoro più volte citato *Sui combinanti* ecc. (questi *Annali*, serie II, tom. 20) un complemento che non mi sembra del tutto sprovvisto d'interesse, e che mi è stato suggerito dallo studio di una Nota del sig. STEPHANOS (*), della quale ho avuto cognizione soltanto dopo la pubblicazione del lavoro suddetto. Nel § 5, n.º 28 di questo ho dimostrato che i covarianti elementari delle due forme

$$5(Ww)^2 W_\lambda^3 w_\lambda + 2(Qw) Q_\lambda w_\lambda^3, \quad w_\lambda^4 \quad (1)$$

coincidono, salvo fattori costanti, coi combinanti elementari W_λ^6 e Q_λ^2 , e che perciò, in particolare, l'equazione del piano osculatore alla quartica nel suo punto λ si ottiene uguagliando a zero il jacobiano delle (1). Ora, per notissime proprietà generali (**), il discriminante di questo jacobiano si spezza in due fattori, che sono razionali nei coefficienti delle due forme, e le cui espressioni, per due forme biquadratiche qualunque, furono date dal sig. STEPHANOS nella Nota ricordata. È manifesto che di questi due fattori l'uno, che è il

(*) *Sur le système complet des combinantes de deux formes binaires biquadratiques* (Comptes rendus, tom. 97, 2 luglio 1883).

(**) Veggasi per es. SALMON, *Leçons d'Algèbre supérieure*, 2.^a ediz. francese, 1890, pag. 235; per il caso di due biquadratiche vedi pure pag. 397-398.

risultante delle (1), rappresenta l'insieme dei quattro piani stazionari della curva, l'altro la sviluppabile osculatrice della medesima (*): il primo, sotto forma leggermente diversa, trovasi già, insieme col suo significato geometrico, alla fine del § 3 del mio lavoro.

Nel caso presente, per quanto ho dimostrato nel loc. cit., n.º 28, le forme che il sig. STEPHANOS chiama α e θ sono le seguenti:

$$\alpha_\lambda^6 = -\frac{5}{4} i W_\lambda^6, \quad \theta_\lambda^2 = -\frac{1}{2} i Q_\lambda^2,$$

epperò si trova che i due fattori in cui si decompone il discriminante di α_λ^6 sono rispettivamente

$$\frac{1}{2^{10} \cdot 3^2} i^4 [3^4 \cdot 5^2 A^2 + 2^6 B^2 - 2^4 \cdot 5 AB - 2 \cdot 3 \cdot 5^5 (JJ')^4], \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2^{13} \cdot 3^2} i^6 [2^3 \cdot 5^3 A^3 + 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11 A^2 B - 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 AB^2 + 2^8 B^3 \\ - 3^3 \cdot 5^6 A (JJ')^4 - 2 \cdot 3^2 \cdot 5^7 (JJ')^2 (JJ'')^2 (JJ''')^2]. \end{aligned} \right\} (3)$$

La quantità che nella (2) è chiusa fra parentesi differisce da quella che nel § 3, loc. cit., ho chiamato D per ciò, che in questa al posto del termine $(WQ)^2 (WQ')^2 (WQ'')^2$ compare il termine $(JJ')^4$. Ma si può dimostrare facilmente che ha luogo l'identità

$$3 \cdot 5^4 (JJ')^4 - 2^6 B^2 - 2^2 \cdot 5^2 AB - 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 (WQ)^2 (WQ')^2 (WQ'')^2 = 0,$$

mediante la quale le due espressioni, salvo un fattore numerico, diventano identiche.

Uguagliando a zero la quantità che nella (3) sta racchiusa fra parentesi, si ottiene *l'equazione della superficie sviluppabile della curva, formata coi combinanti elementari della curva stessa.*

Una ricerca analoga potrebbe farsi sulla forma che nel loc. cit. ho chiamato V_λ^6 , e che, uguagliata a zero, rappresenta il complesso lineare speciale

(*) Un fatto analogo ha luogo per la forma binaria [di grado $d(n-d+1)$ nel parametro λ], che uguagliata a zero rappresenta il piano osculatore nel punto λ di una C_n^d qualunque. Il suo discriminante si spezza in due fattori, di cui l'uno rappresenta l'insieme dei $(d+1)(n-d)$ piani aventi colla curva un contatto d'ordine d , e l'altro rappresenta lo spazio di $d-1$ dimensioni e d'ordine $(d-1)(n-d+2)$ formato dagli S_{d-2} osculatori alla curva stessa.

avente per asse la tangente alla quartica nel suo punto λ . Il discriminante di V_λ^6 deve spezzarsi (*) in due fattori razionali, di cui l'uno rappresenta il complesso di 4.° grado costituito dalle rette che si appoggiano in un punto alla curva, e l'altro il complesso di 6.° grado formato dalle tangenti alla superficie sviluppabile della stessa. Anche per questo caso si può tenere la via sopra seguita, poichè nel loc. cit., n.° 29 ho dimostrato che V_λ^6 è il jacobiano del fascio di forme biquadratiche determinato sulla curva dai piani passanti per la retta, di cui s'intendono sostituite in V_λ^6 le coordinate. Tale fascio si può supporre individuato, per esempio, dal piano che dalla retta data proietta il punto di concorso delle corde principali, e dal piano passante per la retta stessa, e conjugato al precedente rispetto ad una qualunque delle quadriche studiate nel loc. cit., § 4.

Pavia, 15 novembre 1892.

(*) Cfr. Voss, *Ueber Raumcurven und Developpabeln* (Math. Ann., Bd. 13, pag. 233).

Sulle serie di potenze i cui coefficienti dipendono da una variabile.

(Di G. VIVANTI, a Mantova.)

Ci proponiamo di studiare nel presente articolo quale dipendenza esista, in alcuni casi semplici, tra il valore d'un parametro contenuto nei coefficienti d'una serie di potenze ed il raggio di convergenza della serie stessa. I risultati che esporremo mostreranno come, anche quando i coefficienti contengano il parametro considerato sotto forma razionale ed intera, il raggio di convergenza possa variare in modo discontinuo al variare continuo del parametro.

Il § 1 è dedicato allo studio di alcune serie i cui coefficienti sono funzioni razionali intere d'un parametro.

Il § 2 contiene alcune considerazioni ausiliarie relative ai determinanti composti d'infiniti elementi.

Infine nel § 3 si dimostra un teorema intorno alle serie i cui coefficienti sono serie di potenze ascendenti d'un parametro.

§ 1.

1. Si può costruire una serie di potenze avente raggio di convergenza infinito per un numero finito di valori u_1, u_2, \dots, u_n del parametro u , e raggio nullo per tutti gli altri.

Sia infatti $\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ una serie di potenze avente raggio di convergenza nullo, e pongasi $\varphi(u) = (u - u_1)(u - u_2) \dots (u - u_n)$; la serie:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i (\varphi(u))^i z^i,$$

soddisfa alle condizioni proposte.

Annali di Matematica, tomo XXI.

2. Analogamente si può costruire una serie di potenze avente raggio di convergenza finito R per un numero finito di valori u_1, u_2, \dots, u_n di u , e raggio nullo per tutti gli altri.

Sia ancora $\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ una serie di raggio nullo, e sia $\sum_{i=0}^{\infty} b_i z^i$ una serie di raggio R ; inoltre pongasi come prima $\varphi(u) = (u - u_1)(u - u_2) \dots (u - u_n)$. La serie:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left\{ b_i + a_i \left(\varphi(u) \right)^i \right\} z^i,$$

soddisfa alle condizioni proposte.

3. È notevole che si può in infiniti modi costruire una serie della natura di quella testè ottenuta, ma avente la proprietà che il grado dei suoi coefficienti rispetto ad u non supera un certo numero p non minore di n . Infatti, denotando con mn il più gran multiplo di n che non supera p , con ρ_i il minimo resto di i rispetto al modulo m quando i non è multiplo di m , e lo stesso numero m nel caso contrario, la serie:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left\{ b_i + a_i \left(\varphi(u) \right)^{\rho_i} \right\} z^i,$$

soddisfa alle condizioni proposte.

4. Può invece dimostrarsi il teorema seguente:

Se il grado dei coefficienti d'una serie di potenze rispetto ad u non supera un numero finito p , e se per $p + 1$ valori u_0, u_1, \dots, u_p di u la serie è convergente entro un cerchio di raggio R (dove R può anche essere infinito), essa è convergente entro lo stesso cerchio per qualunque valore finito di u .

Sia la serie data $\sum_{i=0}^{\infty} f_i(u) z^i$, dove:

$$f_i(u) = a_{1i} + a_{2i}u + \dots + a_{p+1,i}u^p.$$

Pongasi:

$$\begin{vmatrix} 1 & u_0 & \dots & \dots & u_0^p \\ 1 & u_1 & \dots & \dots & u_1^p \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & u_p & \dots & \dots & u_p^p \end{vmatrix} = D,$$

e si denotino con A_{ik} i minori del determinante D . Per ipotesi le serie $\sum_{i=0}^{\infty} f_i(u_0) z^i, \sum_{i=0}^{\infty} f_i(u_1) z^i, \dots, \sum_{i=0}^{\infty} f_i(u_p) z^i$ sono convergenti entro il cerchio di

raggio R , quindi lo stesso avrà luogo per la serie che si ottiene sommando i loro prodotti per $A_{1r}, A_{2r}, \dots, A_{p+1,r}$. Ma questa serie è:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left\{ A_{1r} f_i(u_0) + A_{2r} f_i(u_1) + \dots + A_{p+1,r} f_i(u_p) \right\} z^i,$$

ossia $D \sum_{i=0}^{\infty} a_{ri} z^i$. Moltiplichiamo questa serie per u^{r-1} e sommiamo pei valori di r da 1 a $p+1$; otteniamo $D \sum_{i=0}^{\infty} f_i(u) z^i$. Resta così stabilito che la serie $\sum_{i=0}^{\infty} f_i(u) z^i$ è convergente entro il cerchio di raggio R per qualunque valore finito di u .

§ 2.

5. In una Memoria recente dal titolo: *Sur les déterminants infinis et les équations différentielles linéaires* (Acta Mathematica, tom. 16, p. 217-295), HELGE VON KOCH ha riassunto i risultati già noti riguardo ai determinanti infiniti e ne ha aggiunti altri da lui ottenuti.

Egli chiama *convergente* un determinante infinito:

$$D = [A_{ik}] \quad (i, k = -\infty \dots + \infty),$$

quando il determinante:

$$D_m = [A_{ik}] \quad (i, k = -m \dots + m)$$

al crescere indefinito di m tende ad un limite determinato, che prende in tal caso come valore di D . Inoltre egli dice che il determinante D è *normale*, quando il prodotto degli elementi che si trovano sulla diagonale principale e la somma dei restanti sono assolutamente convergenti. Dimostra che un determinante normale resta convergente se agli elementi d'una riga (o d'una colonna) si sostituiscono quantità tutte aventi valore assoluto inferiore ad una quantità finita.

Si può aggiungere che tutti i determinanti ottenuti eseguendo la sostituzione nelle varie colonne hanno valore assoluto inferiore ad una quantità finita.

Si ponga infatti, come fa il KOCH:

$$A_{ii} = 1 + a_{ii}, \quad A_{ik} = a_{ik} \quad (i \neq k),$$

e si osservi che tutti i termini dello sviluppo di D_m si trovano, con segno

positivo, nel prodotto:

$$\overline{P}_m = \prod_{k=-m}^m \left(1 + \sum_{i=-m}^m |a_{ik}| \right),$$

donde segue, indicando con Δ la somma dei valori assoluti dei termini dello sviluppo di D :

$$|D| \leq \Delta \leq \prod_{k=-\infty}^{\infty} \left(1 + \sum_{i=-\infty}^{\infty} |a_{ik}| \right).$$

Si indichi ora con l'apposizione in alto dell'indice j la sostituzione delle quantità date, tutte minori in valore assoluto d'una certa quantità L , agli elementi della colonna d'indice j del determinante positivo. È chiaro che tutti i termini di $\Delta^{(j)}$ saranno minori od eguali a certi termini dello sviluppo

di $\frac{L \prod_{k=-\infty}^{\infty} \left(1 + \sum_{i=-\infty}^{\infty} |a_{ik}| \right)}{1 + \sum_{i=-\infty}^{\infty} |a_{ij}|}$, sicchè si avrà:

$$|D^{(j)}| \leq \Delta^{(j)} \leq \frac{L \prod_{k=-\infty}^{\infty} \left(1 + \sum_{i=-\infty}^{\infty} |a_{ik}| \right)}{1 + \sum_{i=-\infty}^{\infty} |a_{ij}|},$$

ed a maggior ragione:

$$|D^{(j)}| \leq \Delta^{(j)} \leq L \prod_{k=-\infty}^{\infty} \left(1 + \sum_{i=-\infty}^{\infty} |a_{ik}| \right),$$

relazione che dimostra l'asserto.

6. È evidente che la definizione di determinante normale può estendersi ai determinanti in cui mancano tutti gli elementi non aventi entrambi gli indici positivi, ossia ai determinanti racchiusi in un quadrato di cui due soli lati giacciono all'infinito.

7. Il КОСН considera pure quei determinanti che divengono normali moltiplicandone le linee per x_i ($i = -\infty \dots +\infty$) e dividendone le colonne per x_k ($k = -\infty \dots +\infty$), il che non altera il valore del determinante. Noi li diremo *normaloidi*, e chiameremo *parametri* le quantità x_i che servono a renderli normali. Un determinante normaloide soddisfa adunque alle due condizioni seguenti:

a) Il prodotto $\prod A_{ii}$ è assolutamente convergente.

b) La somma $\sum_{i,k} A_{ik} \frac{x_i}{x_k}$, estesa a tutti gli elementi non giacenti sulla diagonale principale, è assolutamente convergente.

Da quanto si è detto nell'art. 5 risulta, che se agli elementi d'una colonna si sostituiscono quantità C_r tali che $C_r x_r$ sia sempre inferiore ad un limite finito, i prodotti $|x_j| \Delta^{(j)}$, ed a maggior ragione $|x_j| |D^{(j)}|$, restano tutti inferiori ad un limite finito indipendente da j .

Analogamente può stabilirsi che, se le C_r sono tutte inferiori ad una quantità finita, lo stesso ha luogo pei determinanti $D^{(j)}$.

8. Abbiansi infinite equazioni lineari $\sum_{k=1}^{\infty} A_{ik} z_k = w_i$ ($i = 1, 2, \dots$), il determinante $D = [A_{ik}]$ sia normaloide e sieno x_i i suoi parametri. Se i prodotti $w_i x_i$ restano tutti inferiori ad un limite finito, e se con $D^{(k)}$ si denota il determinante D in cui agli elementi dell' k -esima colonna si sono sostituite le w_i , si ha: $z_k = \frac{D^{(k)}}{D}$.

Basterà far vedere che introducendo nelle equazioni questi valori di z_k esse sono soddisfatte. Per tale sostituzione il primo membro dell'equazione i -esima diviene:

$$M_i = \frac{1}{D} \sum_{k=1}^{\infty} A_{ik} D^{(k)} = \frac{1}{x_i D} \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_{ik} \frac{x_i}{x_k} x_k D^{(k)} \right).$$

Ora $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{ik} \frac{x_i}{x_k}$ è assolutamente convergente, quindi lo sarà anche $\sum_{k=1}^{\infty} A_{ik} \frac{x_i}{x_k}$; inoltre $x_k D^{(k)}$ è in valore assoluto inferiore ad un certo limite L per tutti i valori di k . Ne segue che $\sum_{k=1}^{\infty} \left(A_{ik} \frac{x_i}{x_k} x_k D^{(k)} \right)$ è assolutamente convergente. Per la stessa ragione lo è la somma $\sum_{k=1}^{\infty} \left(A_{ik} \frac{x_i}{x_k} x_k \Delta^{(k)} \right)$ ossia $x_i \sum_{k=1}^{\infty} A_{ik} \Delta^{(k)}$; quindi, se nella espressione di M_i si imagina sostituito a $D^{(k)}$ il suo sviluppo, si possono spostare a piacere i termini della somma senza che questa cessi di essere convergente. Raccogliendo adunque ciò che moltiplica w_i , w_2, \dots , si vede senza alcuna difficoltà che si ottiene $M_i = w_i$, ciò che dimostra l'esattezza delle espressioni date per le z_k .

§ 3.

9. Le cose esposte nel paragrafo precedente servono di base alla dimostrazione del seguente teorema:

Sia u_0, u_1, u_2, \dots , una successione di valori i cui moduli sieno tutti < 1 e decrescano indefinitamente. Se le serie:

$$f_i(u) = a_{i0} + a_{i1} u + a_{i2} u^2 + \dots$$

sono convergenti per $|u| \leq 1$, e se le serie:

$$\sum [f_i(u_k) + a_{k+1,i}] z^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

sono convergenti per $|z| \leq 1$; se inoltre, designando con $F_k(z)$ le funzioni rappresentate da queste serie entro il cerchio di raggio 1, i moduli dei valori presi dalle funzioni $F_0(z)$, $F_1(z)$, $F_2(z)$, ... entro il cerchio considerato sono tutti inferiori ad una certa quantità finita L ; allora la serie data è convergente entro il cerchio di raggio 1 per qualunque valore di u di modulo < 1 .

10. Il determinante:

$$D = \begin{vmatrix} 1 + 1 & u_0 & u_0^2 \dots \\ 1 & 1 + u_1 & u_1^2 \dots \\ 1 & u_2 & 1 + u_2^2 \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

è normaloide, ed i suoi parametri sono $x_i = \lambda^{i-1}$, dove λ è una quantità compresa tra $|u_0|$ ed 1.

Infatti anzitutto il prodotto degli elementi diagonali è assolutamente convergente, giacchè:

$$1 + |u_1| + |u_2|^2 + \dots < 1 + |u_1| + |u_1|^2 + \dots = \frac{1}{1 - |u_1|}.$$

In secondo luogo lo è la somma di tutti gli elementi non diagonali, opportunamente moltiplicati e divisi pei relativi parametri, e quella degli elementi diagonali diminuiti dell'unità. Tale somma può infatti scriversi così:

$$\begin{aligned} L &= \left(1 + \frac{|u_0|}{\lambda} + \frac{|u_0|^2}{\lambda^2} + \dots\right) + \lambda \left(1 + \frac{|u_1|}{\lambda} + \frac{|u_1|^2}{\lambda^2} + \dots\right) + \dots \\ &= \frac{1}{1 - \frac{|u_0|}{\lambda}} + \lambda \frac{1}{1 - \frac{|u_1|}{\lambda}} + \dots < \frac{1}{1 - \frac{|u_0|}{\lambda}} (1 + \lambda + \dots) = \frac{1}{1 - \frac{|u_0|}{\lambda}} \frac{1}{1 - \lambda}. \end{aligned}$$

Denotiamo con A_{ik} i minori del determinante D . La $f_i(u)$ essendo convergente entro un cerchio di raggio $= 1$, il suo modulo avrà entro un cerchio quanto poco si voglia minore di questo un limite superiore finito N_i , e poichè anche le a_{1i} , a_{2i} , ... hanno un limite superiore finito, lo stesso potrà dirsi di $f_i(u_k) + a_{k+1,i}$ per tutti i valori di k . Ne segue (art. 8) che dalle equazioni

lineari:

$$\begin{aligned}
 a_{1i}(1 + 1) + a_{2i}u_0 &+ a_{3i}u_0^2 &+ \dots = f_i(u_0) + a_{1i} \\
 a_{1i} &+ a_{2i}(1 + u_1) + a_{3i}u_1^2 &+ \dots = f_i(u_1) + a_{2i} \\
 a_{1i} &+ a_{2i}u_2 &+ a_{3i}(1 + u_2^2) + \dots = f_i(u_2) + a_{3i} \\
 \dots &\dots &\dots
 \end{aligned}$$

può ricavarsi:

$$D a_{ki} = A_{1k} [f_i(u_0) + a_{1i}] + A_{2k} [f_i(u_1) + a_{2i}] + \dots.$$

Formiamo ora la serie doppia seguente:

$$A_{1k} \sum_i [f_i(u_0) + a_{1i}] z^i + A_{2k} \sum_i [f_i(u_1) + a_{2i}] z^i + \dots,$$

ossia:

$$A_{1k} F_0(z) + A_{2k} F_1(z) + \dots;$$

essa rappresenta il determinante D in cui agli elementi della colonna d'indice k si sono sostituite le quantità $F_0(z), F_1(z), \dots$. Ma queste hanno entro il cerchio di raggio R i loro moduli sempre inferiori ad L , quindi (art. 7) la serie doppia per tutti i valori di k ha entro il cerchio di raggio $= 1$ valore assoluto inferiore ad una quantità finita M . Essa adunque è convergente in egual grado entro questo cerchio, e quindi, per un noto teorema di WEIERSTRASS (*Zur Functionenlehre*, Monatsb. d. Berliner Akademie, August 1880), può porsi sotto forma di serie semplice, e precisamente sotto la forma:

$$D \sum_{i=0}^{\infty} a_{ki} z^i.$$

Di più, siccome $|D \sum_i a_{ki} z^i| < M$, la serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u^{k-1} \sum_{i=0}^{\infty} a_{ki} z^i$$

per ogni valore di u di modulo < 1 è convergente in egual grado entro il cerchio di raggio 1, e quindi, pel teorema già citato, essa può prendere la forma:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_{ki} u^{k-1} \right] z^i,$$

ossia:

$$\sum_{i=0}^{\infty} f_i(u) z^i.$$

Adunque la serie $\sum_{i=0}^{\infty} f_i(u) z^i$ è convergente entro il cerchio di raggio 1 per qualunque valore di u di modulo inferiore ad 1, come si voleva stabilire.

Pavia, 20 gennaio 1893.

Alcune formole relative alle linee tracciate sopra una superficie e loro applicazioni.

(Di GEMINIANO PIRONDINI, a Parma.)

§ 1.

Siano $u = \text{cost.}^e$, $v = \text{cost.}^e$ le equazioni delle linee di curvatura di una superficie S non sviluppabile, ed L una linea qualunque tracciata sopra S , segante le linee $v = \text{cost.}^e$ sotto l'angolo i . Chiamando ρ_n il raggio della sezione normale tangente ad L , e r_u , r_v i raggi di curvatura principali della S relativi alle linee $u = \text{cost.}^e$, $v = \text{cost.}^e$, si ha

$$\frac{1}{\rho_n} = \frac{\text{sen}^2 i}{r_u} + \frac{\text{cos}^2 i}{r_v}. \quad (1)$$

Se poi θ è l'angolo sotto il quale il piano osculatore di L sega il piano tangente e ρ il raggio di curvatura di L , si ha dal teorema di MEUNIER

$$\frac{1}{\rho_n} = \frac{\text{sen } \theta}{\rho}. \quad (2)$$

Osservando quindi che $\frac{\rho}{\text{cos } \theta}$ rappresenta il raggio di curvatura geodetica di L sopra la superficie S , si ricava dalle due relazioni precedenti

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\rho^2 g} + \left(\frac{\text{sen}^2 i}{r_u} + \frac{\text{cos}^2 i}{r_v} \right)^2;$$

cioè, indicando con H il raggio di curvatura della geodetica tangente ad L ,

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\rho^2 g} + \frac{1}{H^2}.$$

La quantità $\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{H^2}$ è dunque un invariante di flessione della superficie.

Chiamando L_1 una linea tangente ad L in un punto e tracciata sulla stessa superficie S , si ha

$$\frac{1}{\rho^{2_1}} = \frac{1}{\rho^{2_{1g}}} + \frac{1}{H^2}.$$

E se fra questa equazione e la precedente eliminiamo H , si ricava:

$$\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{\rho^{2_1}} = \frac{1}{\rho^{2g}} - \frac{1}{\rho^{2_{1g}}}.$$

La quantità $\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{\rho^{2_1}}$, relativa al punto di contatto delle due linee tangenti, è dunque un invariante di flessione della superficie data.

Qualora poi la superficie sia sviluppabile, le equazioni (1), (2) divengono più semplici; supposto che le linee $v = \text{cost.}^e$ siano le generatrici rettilinee, si ha $\frac{1}{r_v} = 0$ e le equazioni (1), (2) forniscono la relazione

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\rho^{2g}} + \frac{\text{sen}^4 i}{r^{2_u}}. \quad (3)$$

§ 2.

Se la sviluppabile è cilindrica, r_u è eguale al raggio di curvatura ρ_0 della sezione retta L_0 . Osservando poi che ρ_g viene ad essere il raggio di curvatura della linea piana a cui si riduce L collo sviluppo del cilindro, si ha

$$\frac{1}{\rho_g} = \frac{di}{ds} = \text{sen } i \cdot \frac{di}{ds_0},$$

essendo s_0 l'arco di L_0 .

Avremo dunque dalla (3)

$$\frac{1}{\rho} = \text{sen}^2 i \sqrt{\frac{1}{\rho_0^2} + \left(\frac{1}{\text{sen } i} \frac{di}{ds_0}\right)^2}; \quad (4)$$

e se rammentiamo che per la torsione $\frac{1}{r}$ di una linea tracciata sopra una sviluppabile si ha l'espressione

$$\frac{1}{r} = \frac{d\theta}{ds} - \frac{\text{sen } \theta}{\rho} \cot i,$$

dove

$$\cos \theta = \frac{\rho}{\rho_g},$$

avremo

$$\frac{1}{r} = \frac{\frac{1}{\operatorname{sen} i} \left(\frac{di}{ds_0} \right)^2}{\frac{1}{\rho^2_0} + \left(\frac{1}{\operatorname{sen} i} \frac{di}{ds_0} \right)^2} \cdot \frac{d}{ds_0} \left(\frac{\operatorname{sen} i}{\rho_0} \frac{di}{ds_0} \right) - \frac{1}{\rho_0} \operatorname{sen} i \cdot \cos i. \quad (5)$$

Consideriamo ad es. le curve cilindriche nelle quali

$$\frac{\rho g}{\rho_0} \operatorname{sen}^2 i = \frac{1}{k}, \quad (6)$$

con k costante. Siccome da questa relazione si ricava

$$\frac{\operatorname{sen} i}{\rho_0} \frac{di}{ds_0} = \frac{1}{k}, \quad (7)$$

le equazioni (4), (5) ci danno

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \cdot \frac{\rho_0}{\operatorname{sen}^2 i}, \quad r = - \frac{\rho_0}{\operatorname{sen} i \cos i}.$$

Perciò: *Se in ogni punto della linea cilindrica L per la quale è soddisfatta la condizione (6), si conduce l'elica tangente l , i raggi di curvatura e quelli di torsione di tutte queste eliche l nei punti di contatto, sono rispettivamente proporzionali ed eguali ai raggi di curvatura e di torsione di L nei medesimi punti.*

La costruzione della linea L avente questa proprietà può effettuarsi col mezzo dell'equazione

$$\cot i = \frac{1}{2a} \left(a^2 e^{k \int \frac{ds_0}{\rho_0}} - e^{-k \int \frac{ds_0}{\rho_0}} \right),$$

che si deduce integrando la (7).

Se consideriamo in secondo luogo la curva L che sul cilindro è una didonia, si ha

$$\frac{1}{\rho g} = \operatorname{sen} i \frac{di}{ds_0} = \frac{1}{k},$$

con k costante. Perciò per tale linea le equazioni (4), (5) divengono

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sqrt{k^2 \rho^2_0 + (k^2 - s^2_0)^2}}{k^2 \rho_0}, \quad \frac{1}{r} = \frac{k \rho^2_0 \sqrt{k^2 - s^2_0}}{k^2 \rho^2_0 + (k^2 - s^2_0)^2} \cdot \frac{d}{ds_0} \left(\frac{k^2 - s^2_0}{k \rho_0} \right) + \frac{s_0 \sqrt{k^2 - s^2_0}}{k^2 \rho_0}.$$

Si vede quindi ad es. che la didonia cilindrica avrà curvatura assoluta co-

stante $= \frac{1}{h}$ sempre e soltanto quando la sezione retta del cilindro sia la curva rappresentata dall'equazione

$$\rho_0 = \frac{h}{k\sqrt{k^2 - h^2}} \cdot (k^2 - s^2_0).$$

§ 3.

La S sia una superficie conica e chiamiamo R le porzioni delle generatrici rettilinee comprese fra il vertice e la curva L .

Osservando allora che ρ_g rappresenta il raggio di curvatura assoluta della trasformata di L quando il cono si sviluppa in un piano, si avrà (*)

$$\rho_g = \frac{R\sqrt{1 - R'^2}}{1 - R'^2 - RR''}, \quad (8)$$

essendo le derivate di R prese rapporto all'arco. Si osservi di più che r_u è eguale al raggio di curvatura geodetica, sulla sfera che la contiene, della linea di curvatura sferica del cono, passante pel punto di L che si considera; e perciò

$$r_u = R\tau,$$

essendo τ il raggio di curvatura geodetica della curva Λ che si ottiene segnando il cono colla sfera di raggio 1 che ha il centro nel vertice.

Avremo perciò

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{R^2} \left\{ \frac{1 - R'^2 - RR''}{1 - R'^2} + \frac{(1 - R'^2)^2}{\tau^2} \right\}. \quad (9)$$

Se ad es. si considera una geodetica del cono, si ha

$$1 - R'^2 - RR'' = 0,$$

e quindi

$$\rho = \frac{R\tau}{1 - R'^2}.$$

Perciò: *Il raggio di curvatura in un punto qualunque di una geodetica d'un cono è eguale al raggio di curvatura geodetica, sulla sfera che la contiene,*

(*) Sulla trasformazione per raggi vettori reciproci. Formola (11). Giornale di Battaglini, vol. XXVII.

della linea di curvatura sferica del cono in quel punto, diviso per il quadrato del seno dell'inclinazione della geodetica sulla generatrice rettilinea del cono.

Nel caso-limite in cui il cono divenga un cilindro, si ha un teorema noto relativo alle eliche.

Se insieme all'equazione (9) si considera l'altra

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{\sqrt{1-R^2}}{R}, \quad (10)$$

che lega l'arco elementare ds di L all'arco elementare $d\sigma$ della linea sferica Λ , si giunge all'importante conclusione che è costruibile *in un sol modo* la curva dello spazio di cui sono dati in funzione dell'arco il raggio di curvatura e il raggio vettore relativo a un punto fisso qualunque.

Esempi. 1.º) Si voglia la curva determinata dalle equazioni

$$R = s \cdot \cos i, \quad \rho = as,$$

con i , a costanti. Dall'equazione (9) si ricava

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{1-R^2} \sqrt{\frac{R^2}{\rho^2} - \frac{(1-R^2-RR'')^2}{1-R'^2}}; \quad (11)$$

e questa, nel caso nostro, ci dà

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\sqrt{\cos^2 i - a^2 \operatorname{sen}^2 i}}{a \operatorname{sen}^2 i},$$

la quale dimostra che la linea sferica Λ è un piccolo cerchio.

La curva richiesta è dunque una traiettoria sotto l'angolo costante i delle generatrici di un cono circolare retto, il cui semiangolo al vertice è

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\sqrt{\cos^2 i - a^2 \operatorname{sen}^2 i}}{a \operatorname{sen}^2 i} \right).$$

2.º) Si voglia determinare la curva definita dalle equazioni

$$R = a \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{s}{a} + b \right); \quad \rho = \frac{a \operatorname{tg} \left(\frac{s}{m} + n \right)}{\sqrt{4 \operatorname{tg}^2 \left(\frac{s}{m} + n \right) + \operatorname{sen}^2 \left(\frac{s}{a} + b \right)}},$$

con a , b , m , n costanti.

Applicando la (11) si ricava

$$\tau = \operatorname{tg} \left(\frac{s}{m} + n \right);$$

ma dalla (10) si ha con un'integrazione

$$s = a\sigma + h,$$

con h costante arbitraria. Perciò τ viene dato in funzione di σ dall'equazione

$$\tau = \operatorname{tg}\left(\frac{a\sigma}{m} + k\right),$$

con k costante arbitraria.

Calcolando con questa formola il raggio di torsione r_0 della curva sferica Λ , si ottiene

$$r_0 = \frac{1 + \tau^2}{\frac{d\tau}{d\sigma}} = \frac{m}{a},$$

quantità costante. E siccome dall'equazione che dà R si ricava, in forza della (8)

$$\rho g = \frac{a}{2},$$

si vede che per ottenere la curva in discorso, basta prendere sopra una sfera di raggio 1 una curva Λ a torsione costante $\frac{a}{m}$ e avvolgere il piano di una circonferenza di raggio $\frac{a}{2}$ sopra la superficie conica che proietta Λ dal centro della sfera, colla condizione che il centro della circonferenza si trovi nel vertice del cono.

§ 4.

La formola ricordata al numero precedente

$$\rho = \frac{R\sqrt{1-R^2}}{1-R^2-RR''}, \quad (12)$$

serve a determinare la curva piana il cui raggio vettore, rispetto a un dato centro, è una funzione nota dell'arco.

In tale ipotesi l'integrazione della (12) conduce alla relazione più generale possibile fra l'arco della linea e il suo raggio vettore relativo a un polo qualsivoglia del suo piano.

Se per es. si tratta di una circonferenza di raggio k , la relazione della

quale ora si parla è la seguente

$$R = \sqrt{2k(k-a) + 2k\sqrt{k(k-2a)} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{s+m}{k}\right)},$$

con a ed m costanti arbitrarie.

S'incontra una formola del tutto analoga alla (12) quando si cerchi di stabilire l'espressione della *curvatura circolare* di una linea piana, chiamando con tal nome il rapporto all'arco elementare dell'angolo infinitesimo di due cerchi passanti per un punto fisso e tangenti alla linea data in due punti infinitamente vicini.

Sia O il punto fisso, che assumeremo come origine dei raggi vettori R ; siano OA , OB due raggi vettori consecutivi di L , M ed N i loro punti medi. Condotte le perpendicolari a questi raggi vettori nei punti M , N , queste incontrano le normali alla L in A e B nei centri A_1 , B_1 dei cerchi. Chiamando R_1 il raggio di questi cerchi, L_1 il luogo dei punti A_1 , B_1, \dots e $d\theta$ l'angolo infinitesimo sotto il quale si segano i cerchi, angolo rappresentato da A_1OB_1 , si hanno le equazioni

$$\cos(\widehat{OA_1A_1}) = \sqrt{1-R^2}, \quad R_1 = OA_1 = \frac{R}{2\sqrt{1-R^2}},$$

$$ds_1 = dR_1 + R_1 \cdot d\theta,$$

dall'ultima delle quali si ricava

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R_1} \sqrt{\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 - \left(\frac{dR_1}{ds}\right)^2}.$$

Ma fra le coordinate x , y di A e quelle x_1 , y_1 di A_1 hanno luogo le relazioni

$$x_1 = x + R_1 \cos \lambda, \quad y_1 = y + R \cos \mu,$$

essendo λ , μ gli angoli fatti cogli assi coordinati dalla normale principale di L .

Deducendosi da queste

$$\frac{ds_1}{ds} = \left(1 - \frac{R_1}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{dR_1}{ds}\right)^2,$$

si avrà

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{\rho}.$$

Ricordando infine i valori precedenti di ρ e R_1 e indicando con K il raggio

di curvatura circolare (rappresentato dal rapporto $\frac{ds}{d\theta}$) si ha

$$K = \frac{R\sqrt{1-R'^2}}{1-R'^2-RR''}. \quad (13)$$

L'analogia delle formole (12), (13) è manifesta.

Applicazioni. 1.º) L'equazione $R'' = 0$ è caratteristica della spirale logaritmica; per tale curva dunque, e solamente per essa, si ha la relazione $\rho = K$.

2.º) Avendosi dalle precedenti equazioni

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{K} = \frac{2\sqrt{1-R'^2}}{R},$$

se sarà

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{K} = \frac{2}{a},$$

con a costante, avremo

$$R = a \cdot \text{sen}\left(\frac{s}{a}\right),$$

equazione di una circonferenza.

Dunque: *Se la somma della curvatura ordinaria e della curvatura circolare di una linea piana è costante, la curvatura circolare è nulla e la linea è una circonferenza.*

3.º) Avendosi

$$\frac{1}{K^2} - \frac{1}{\rho^2} = \frac{4R''}{R},$$

se si avrà

$$\frac{1}{K^2} - \frac{1}{\rho^2} = \frac{4}{a^2},$$

con a costante, si avrà pure

$$R = \frac{1}{2h} \left(h^2 e^{\frac{s}{a}} - m e^{-\frac{s}{a}} \right),$$

con m ed h costanti.

Tale è l'equazione delle linee in cui è costante la differenza dei quadrati della curvatura circolare e della curvatura ordinaria.

Per $m = 0$ si ha l'equazione

$$R = \frac{h}{2} e^{\frac{s}{a}},$$

che rappresenta l'inversa di una sviluppante di circonferenza quando il centro di questa sia considerato come polo.

§ 5.

Siano ρ , r , R il raggio di curvatura, di torsione e della sfera osculatrice di una linea L tracciata sopra una superficie; ρ_g il raggio di curvatura geodetica; θ , ε le inclinazioni del piano osculatore e della sfera osculatrice sul piano tangente.

È noto che

$$\cos \theta = \frac{\rho}{\rho_g}. \quad (14)$$

Inoltre il coseno dell'angolo formato dalla normale principale di L colla retta che congiunge il punto che si considera di L col centro corrispondente della sfera osculatrice è dato da $\frac{\rho}{R}$.

Applicando quindi anche la (14), si trova

$$\cos \varepsilon = \frac{\rho}{R \rho_g} \left(\sqrt{\rho_g^2 - \rho^2} + r \frac{d\rho}{ds} \right), \quad (15)$$

Facendo in quest'equazione successivamente $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$, $\varepsilon = 0$, si ricava:

Le condizioni necessarie e sufficienti perchè le sfere osculatrici di una linea tracciata sopra una superficie siano ortogonali, ovvero tangenti, alla superficie sono rispettivamente che in ogni punto il raggio di curvatura geodetica ρ_g della linea sia eguale al raggio R della sfera osculatrice, ovvero che sia legato a questo dalla relazione

$$\frac{1}{\rho_g} = \frac{r}{R \rho} \cdot \frac{d\rho}{ds}. \quad (16)$$

Sia L una linea a curvatura non costante, tracciata sopra una superficie S . Quando L sia linea di curvatura di S e in ogni punto di essa si abbia $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$, per un teorema altra volta da me dimostrato (*) L è una curva sferica.

Risultando allora R costante, per il teorema precedente risulta pure costante ρ_g .

Quando sia $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$ e ρ_g costante, per il teorema precedente sarà pure R

(*) *Studi geometrici relativi specialmente alle superficie gobbe.* Giornale di Battaglini, 1885.

costante; non essendo quindi la L a curvatura costante (per dato), sarà sferica e conseguentemente linea di curvatura.

Quando infine L sia linea di curvatura e ρ_g costante, per un teorema del prof. BRIOSCHI (*), la linea detta è sferica e la sfera che la contiene è ortogonale alla superficie.

Dunque: *Se per una linea tracciata sopra una superficie, e non a curvatura costante, sono verificate due delle proprietà seguenti:*

- 1.^a che le sfere osculatrici siano ortogonali alla superficie,
- 2.^a che sia una linea di curvatura,
- 3.^a che sia a curvatura geodetica costante,

la curva data è sferica e per essa è pure verificata la rimanente proprietà.

Quando L sia una linea a curvatura costante e lungo di essa si abbia $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$, la relazione precedente

$$\rho_g = R,$$

dimostra che $\rho_g = \rho$, e che quindi L è assintotica della superficie sulla quale è descritta. Se poi la L è assintotica e lungo di essa si ha $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$, la relazione $\rho_g = R$, che ora deve essere soddisfatta, dimostra che $\rho = R$, la quale relazione non può sussistere che per le linee a curvatura costante.

Se finalmente L è assintotica e ρ è costante, si ha $\frac{d\rho}{ds} = 0$, $\rho_g = \rho$ e quindi è soddisfatta la condizione $\rho_g = R$, d'onde segue che $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$.

Perciò: *Se una linea tracciata sopra una superficie possiede due delle seguenti proprietà:*

- 1.^a che le sfere osculatrici seghino la superficie ortogonalmente,
- 2.^a che sia a curvatura costante,
- 3.^a che sia assintotica,

possiede pure la rimanente.

Quando L sia a curvatura costante e lungo di essa si abbia $\varepsilon = 0$, dalla (16) si ricava $\frac{1}{\rho_g} = 0$, il che prova che L è geodetica.

Se poi L è geodetica, e lungo di essa si ha $\varepsilon = 0$, la (16) dà $\rho =$ costante.

(*) *Intorno ad alcune proprietà delle superficie a linee di curvatura piane o sferiche.* Annali di Tortolini, 1857.

Se infine ρ è costante ed L è geodetica, la (16) è soddisfatta identicamente, il che prova che $\varepsilon = 0$.

Dunque: *Se una linea tracciata sopra una superficie possiede due delle seguenti proprietà:*

- 1.^a che le sfere osculatrici siano tangenti alla superficie,
- 2.^a che sia a curvatura costante,
- 3.^a che sia geodetica,

possiede pure la rimanente.

Quando la linea L non sia geodetica della superficie sulla quale è tracciata, dalle (14), (15) si può eliminare ρ_g e risulta

$$\cos \varepsilon = \frac{1}{R} \left(\rho \operatorname{sen} \theta + r \frac{d\rho}{ds} \cos \theta \right). \quad (17)$$

Se in quest'equazione si suppone ρ costante (nel qual caso $R = \rho$) si ottiene

$$\cos \varepsilon = \operatorname{sen} \theta, \quad \text{d'onde} \quad \varepsilon + \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Dunque: *Nelle linee a curvatura costante non piane e non geodetiche tracciate sopra una superficie qualunque, i piani osculatori e le sfere osculatrici segano la superficie sotto angoli complementari.*

Risolvendo poi l'equazione (17) rapporto a $\cos \theta$, si ottiene

$$\cos \theta = \frac{1}{R} \left(\pm \rho \operatorname{sen} \varepsilon + r \frac{d\rho}{ds} \cos \varepsilon \right).$$

Per vedere quale dei due segni dobbiamo prendere in quest'equazione, si consideri la linea nella quale ρ è costante. L'equazione precedente si riduce all'altra

$$\cos \theta = \pm \operatorname{sen} \varepsilon;$$

e onde questa non sia in contraddizione con quanto è espresso dal teorema precedente, si deve scegliere il segno superiore. Abbiamo dunque in ogni caso

$$\cos \theta = \frac{1}{R} \left(\rho \operatorname{sen} \varepsilon + r \frac{d\rho}{ds} \cos \varepsilon \right). \quad (18)$$

Questa relazione è notevole, in quanto che si ottiene dalla (17) colla permutazione degli angoli θ ed ε .

Dividendo ambi i membri della (18) per ρ , si ha

$$\frac{1}{\rho_g} = \frac{\cos \theta}{\rho} = \frac{\rho \operatorname{sen} \varepsilon + r \frac{d\rho}{ds} \cdot \cos \varepsilon}{R \rho},$$

e quindi: Considerando una linea tracciata sopra una superficie qualunque, e deformando questa per flessione in un modo arbitrario, le quantità

$$\frac{\cos \theta}{\rho}, \quad \frac{\rho \operatorname{sen} \varepsilon + r \frac{d\rho}{ds} \cos \varepsilon}{R\rho},$$

rimangono invariate.

Si ricava ancora: Una geodetica e un'assintotica di una superficie qualunque sono caratterizzate rispettivamente dalle equazioni

$$\rho \operatorname{sen} \varepsilon + r \frac{d\rho}{ds} \cos \varepsilon = 0 \quad (19)$$

$$\rho \cos \varepsilon - r \frac{d\rho}{ds} \operatorname{sen} \varepsilon = 0. \quad (20)$$

Si vede quindi che, nella deformazione per flessione di una superficie qualunque, l'equazione (19), relativa a una linea tracciata sopra di essa, è sempre soddisfatta ovvero non lo è mai; l'equazione (20) è invece soddisfatta tutto al più una sola volta per una speciale forma della superficie deformantesi.

Per una stessa linea L si facciano passare due superficie S, S_1 ; siano $(\theta, \varepsilon), (\theta_1, \varepsilon_1)$ gli angoli dianzi considerati e relativi alle superficie S ed S_1 rispettivamente. Se allora insieme alle equazioni (17), (18) si considerano le altre analoghe relative alle quantità θ_1, ε_1 , si può dire: Se, facendo passare due superficie S, S_1 per una stessa linea L , si trova verificata una delle relazioni

$$\theta_1 = \varepsilon, \quad \varepsilon_1 = \theta,$$

si troverà pure verificata l'altra.

Siccome dall'equazione (17) si ricava

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{\operatorname{sen} \theta \cos \theta \pm \operatorname{sen} \varepsilon \cos \varepsilon}{\cos^2 \varepsilon - \cos^2 \theta} \cdot \frac{1}{r}, \quad (21)$$

le curve per le quali θ ed ε sono due determinate funzioni dell'arco s di L , sono caratterizzate dalla relazione

$$\rho = a \cdot e^{\int \frac{\operatorname{sen} \theta \cos \theta \pm \operatorname{sen} \varepsilon \cos \varepsilon}{\cos^2 \varepsilon - \cos^2 \theta} \cdot \frac{ds}{r}},$$

che lega fra loro l'arco e i raggi ρ, r .

Se poi

$$\frac{\operatorname{sen} \theta \cos \theta \pm \operatorname{sen} \varepsilon \cos \varepsilon}{\cos^2 \varepsilon - \cos^2 \theta} = k, \quad (22)$$

con k costante, la curva L è caratterizzata dalla relazione

$$\rho = a \cdot e^{k \int \frac{ds}{r}}, \quad (23)$$

la quale s'incontra anche quando si cercano le linee dello spazio nelle quali il raggio della sfera osculatrice è proporzionale al raggio del cerchio osculatore.

Osservando che la relazione (22) è soddisfatta quando θ ed ϵ sono costanti e tenendo conto anche della (21), si può dire:

Se una linea tracciata sopra una superficie possiede due delle seguenti proprietà:

- 1.^a che i piani osculatori seghino la superficie sotto angolo costante,
- 2.^a che le sfere osculatrici seghino la superficie sotto angolo costante,
- 3.^a che il raggio della sfera osculatrice sia proporzionale al raggio

del cerchio osculatore,

possiede pure la rimanente.

Si ha un nuovo teorema, se nell'enunciato precedente si sostituisce alla linea data un'elica, e se alla terza condizione si sostituisce l'altra che l'elica sia circolare o cilindrico-conica.

§ 6.

Delle curve (23), le quali s'incontrano in molte questioni, si può dare una facile costruzione.

Essendo $R > \rho$, si può porre

$$\frac{\rho}{R} = \cos i,$$

ed i sarà un angolo costante. Avremo allora

$$r \rho' = \rho \cdot \operatorname{tg} i;$$

se quindi L_0 è il luogo dei centri delle sfere osculatrici di L , sarà

$$\rho_0 = \rho + r(r\rho)' = \frac{\rho}{\cos^2 i}; \quad r_0 = \frac{\rho}{r} \{\rho + r(r\rho)'\} = \frac{\rho^2}{r \cos^2 i}$$

$$\frac{ds_0}{ds} = \frac{\rho}{r} + (r\rho)' = \frac{\rho}{r \cos^2 i}.$$

Da queste equazioni si deducono facilmente le altre

$$\rho = \rho_0 \cos^2 i; \quad r = \frac{\rho_0^2}{r_0} \cos^2 i; \quad R = \rho_0 \sqrt{1 + \rho_0'^2} \cdot \cos^2 i;$$

e poichè per la curva L sussiste la relazione

$$\rho = R \cos i,$$

per la linea L_0 sussiste l'altra

$$\frac{d\rho_0}{ds_0} = \operatorname{tg} i,$$

dalla quale si ricava

$$\rho_0 = s_0 \cdot \operatorname{tg} i + a,$$

con a costante.

Quest'equazione dimostra che la trasformata di L_0 , ottenuta distendendo sopra di un piano la sua sviluppabile osculatrice, è una spirale logaritmica segante i raggi vettori uscenti dal polo sotto l'angolo $\frac{\pi}{2} - i$.

Se ora indichiamo con L_1 il luogo dei centri di curvatura di L , e con A_0, A_1, A punti corrispondenti sulle tre curve L_0, L_1, L , avremo le equazioni

$$A_0 A_1 = r \rho' = \rho_0 \operatorname{sen} i \cdot \cos i, \quad A_1 A = \rho = \rho_0 \cos^2 i,$$

le quali servono per passare dalla linea L_0 (facilmente costruibile) alla L_1 , e da questa alla L .

Nel terminare questa Nota, esporrò una costruzione assai facile delle sviluppabili che ammettono una geodetica sferica.

Se L è una linea tracciata sopra una sfera qualunque S , la linea L_0 luogo degli estremi dei quadranti geodetici tangenti ad L è, sulla sfera S , l'indicatrice delle tangenti di L . L'evoluta sferica L_1 di L è una curva geodeticamente parallela ad L_0 e distante da essa di un quadrante geodetico. Ne segue che l'evoluta sferica L_2 di L_0 è la seconda evoluta sferica di L .

Perciò: *In una linea sferica qualunque L l'indicatrice dello spigolo di regresso della sviluppabile rettificatrice è la seconda evoluta sferica L_2 di L .*

In base a questo teorema, per costruire una sviluppabile avente una geodetica tracciata sopra una sfera S , e il cui spigolo di regresso è, sopra S , una determinata linea L_2 , si costruisca un'evolvente geodetica qualunque L_1 di L_2 e poscia un'evolvente geodetica qualunque L di L_1 . Indi per i punti di L si conducano delle parallele ai raggi della sfera che vanno ai punti corrispondenti di L_2 .

Queste rette sono le generatrici della sviluppabile domandata ed L ne è la geodetica sferica.

Parma, gennaio 1893.

Intorno ad un teorema di aritmetica.

(Di ITALO ZIGNAGO, studente in matematica all'Università di Genova.)

Si ha il teorema:

Ogni progressione aritmetica, nella quale il primo termine e la ragione sono primi fra loro, contiene infiniti numeri primi.

Esso fu enunciato la prima volta da LEGENDRE nelle *Recherches d'analyse indéterminée* e precisamente nelle ultime pagine, ma già nel corso della Memoria è ammesso implicitamente.

L'Autore non dà una dimostrazione, ma indica un metodo che forse potrebbe condurre a trovarne una. Tale è l'opinione di GAUSS (*Disquisitiones arithmeticae*, 297). « Ill. LE GENDRE ipse fatetur demonstrationem theorematis... « satis difficilem videri, methodumque obiter addigitat, quae forsitan illuc con-ducere possit. » Ma GAUSS soggiunge che, per concludere qualcosa per questa via, sono necessarie, a suo modo di vedere, molte disquisizioni preliminari. Sembra che anche LEGENDRE abbia accettato questa opinione, perchè, ritornato di bel nuovo sull'argomento, scelse altra strada. Questa volta diede una dimostrazione sviluppata (*Teoria dei numeri*, tom. 11, edizione 1830). Sventuratamente si appoggia sopra un lemma non bene dimostrato. DIRICHLET tentò di completare la dimostrazione di LEGENDRE, ma trovati, come egli dice, ostacoli insormontabili, cercò altra via e riuscì a concludere (*Mathematische Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1837 e *Journal de Liouville*, 1839). La sua dimostrazione è molto abile, ma, come osserva lo stesso Autore, non è aritmetica, fondandosi su principii che spettano al calcolo infinitesimale.

In tempi più vicini a noi (anno 1838) il SYLVESTER cercò una dimostrazione aritmetica del teorema di DIRICHLET e riuscì per le progressioni che hanno il termine generale della forma $ax + 1$ e per alcuni casi numerici (*Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, vol. 108).

Definizione di alcuni simboli.

1. $M(a, b)$ significa il maggiore fra i due numeri a e b se essi sono differenti, il loro valore comune, se essi sono uguali.
2. $m(a, b)$ " il minore fra i due numeri a e b se essi sono differenti, il loro valore comune, se essi sono uguali.
3. $\overset{z=h}{\underset{z=1}{M}} u_x$ " il massimo valore che compare nella serie:
 $u_1 \ u_2 \dots \ u_n.$
4. $\overset{z=h}{\underset{z=1}{m}} u_x$ " il minimo valore che compare nella serie:
 $u_1 \ u_2 \dots \ u_n.$
5. $D(a)$ " un divisore di a .
6. $\overset{m+n}{\underset{m}{D}}(a)$ " un divisore di a che appartiene alla serie:
 $m \ m+1 \dots \ m+n.$
7. $\overset{m+n}{\underset{m}{M D}}(a)$ " il massimo fra i divisori di a , che appartengono alla serie:
 $m \ m+1 \dots \ m+n.$
8. $D(a, b)$ " un divisore comune di a e b .
 $D(a, b, c)$ " un divisore comune di a, b, c , ecc.
9. $MD(a, b)$ " il massimo divisore comune di a e b .
 $MD(a, b, c)$ " il massimo divisore comune di a, b, c , ecc.

Questi simboli sono in parte nuovi, in parte già introdotti (*Arithmetices Principia*, JOSEPH PEANO), ma poco diffusi.

Proposizione I.

Se p_1, p_2, \dots, p_s sono numeri primi disuguali, che non dividono a , fra $p_1 p_2 \dots p_s$ termini consecutivi della progressione aritmetica indefinita:

$$b \quad b+a \quad b+2a \dots,$$

almeno uno non è divisibile nè per p_1 , nè per p_2, \dots nè per p_s .

Nel caso che si abbia un solo numero primo la proposizione è dimostrata, perciò basta dimostrare che, se è vera per $s - 1$ numeri primi, è anche vera per s numeri primi.

Si scelgano ad arbitrio $p_1 p_2 \dots p_s$ termini consecutivi della progressione, sieno:

$$b + (x + 1)a \quad b + (x + 2)a \dots \quad b + (x + p_1 p_2 \dots p_s)a, \quad (1)$$

e si distribuiscano in due parti:

$$\begin{aligned} b + (x + 1)a \quad b + (x + 2)a \dots \quad b + (x + p_1 p_2 \dots p_{s-1})a \dots \\ b + (x + p_1 p_2 \dots p_{s-1} + 1)a \dots \quad b + (x + p_1 p_2 \dots p_s)a, \end{aligned}$$

attribuendo alla prima parte i primi $p_1 p_2 \dots p_{s-1}$ termini, ed alla seconda i termini successivi.

Per ipotesi la proposizione è vera per $s - 1$ numeri primi, quindi la prima parte contiene un numero, che non è divisibile nè per p_1 , nè per p_2, \dots nè per p_{s-1} .

Sia $b + (x + h)a$. La condizione che questo termine appartenga alla prima parte si può scrivere:

$$1 \leq h \leq p_1 p_2 \dots p_{s-1}. \quad (2)$$

Ora consideriamo il termine $b + (x + h + p_1 p_2 \dots p_{s-1})a$.

Esso appartiene alla seconda parte, perchè dalla (2) si ha manifestamente:

$$p_1 p_2 \dots p_{s-1} < h + p_1 p_2 \dots p_{s-1} \leq p_1 p_2 \dots p_{s-1} p_s. \quad (3)$$

E non può essere divisibile per alcuno dei numeri:

$$p_1, p_2, \dots, p_{s-1},$$

perchè, se fosse divisibile, per esempio, per p_2 , anche $b + (x + h)a$ sarebbe divisibile per p_2 .

Infine dei due numeri:

$$b + (x + h)a \quad b + (x + h + p_1 p_2 \dots p_{s-1})a,$$

uno almeno non è divisibile per p_s . Perchè se fossero entrambi divisibili per p_s , anche la loro differenza, $p_1 p_2 \dots p_{s-1}a$, ammetterebbe il divisore p_s .

Dunque: Se p_1, p_2, \dots, p_s sono numeri primi disuguali, ecc.

Proposizione II.

Se a, b, c non hanno alcun divisore comune, fra c termini consecutivi della progressione:

$$b \quad b + a \quad b + 2a \dots$$

almeno uno è primo con c .

Si scelgano ad arbitrio c termini consecutivi della progressione, sieno:

$$b + (x + 1)a \quad b + (x + 2)a \dots \quad b + (x + c)a,$$

e si distribuiscono i divisori primi di c in due classi, attribuendo alla prima quelli che dividono a , alla seconda i rimanenti. Ora si osservi che:

1) I numeri della prima classe non dividono alcun termine della progressione.

Perchè se un numero di prima classe dividesse un termine della progressione, sarebbe un divisore comune di a, b, c .

2) E, fra i c termini consecutivi scelti, uno almeno non ammette divisori di seconda classe.

Perchè detti p_1, p_2, \dots, p_s questi divisori, basta esaminare i primi p_1, p_2, \dots, p_s fra i termini scelti, per trovarne uno (Prop.^e I), che non è divisibile, nè per p_1 , nè per p_2, \dots nè per p_s .

Dunque: Se a, b, c non hanno divisori comuni, ecc.

Osservazione I. Più brevemente questa proposizione si può enunciare:

Supposto:

$$MD(a, b, c) = 1, \quad \text{è anche: } \underset{y=x+1}{\overset{y=x+c}{m}} MD(b + ay, c) = 1.$$

Corollario: Se a, b, c non hanno alcun divisore comune, e k non è minore di c , fra k termini consecutivi della progressione:

$$b \quad b + a \quad b + 2a \dots$$

uno almeno è primo con c .

Osservazione II. Più brevemente questo corollario si può enunciare:

Supposto:

$$MD(a, b, c) = 1 \quad \text{e} \quad k \geq c, \quad \text{è anche: } \underset{y=x+1}{\overset{y=x+c}{m}} MD(b + ay, c) = 1.$$

Proposizione III.

Supposto $c \leq s$, si ha identicamente:

$$\prod_{y=r}^{y=r+s-1} m \, MD(b + ay, c) = MD(b, a, c).$$

Invero se si pone:

$$\begin{aligned} b &= b' & MD(b, a, c) \\ a &= a' & MD(b, a, c) \\ c &= c' & MD(b, a, c). \end{aligned}$$

si ottiene per conseguenza:

$$c' \leq c \quad \text{e} \quad MD(b', a', c') = 1,$$

quindi sarà anche (Osserv.^e II):

$$\prod_{y=r}^{y=r+s-1} m \, MD(b' + a'y, c') = 1.$$

D'altra parte si ha:

$$\begin{aligned} & \prod_{y=r}^{y=r+s-1} m \, MD(b + ay, c) \\ &= \prod_{y=r}^{y=r+s-1} m \, MD [b' MD(b, a, c) + a' MD(b, a, c)y, c' MD(b, a, c)] \\ &= \prod_{y=r}^{y=r+s-1} m \, [MD(b, a, c) MD(b' + a'y, c')] \\ &= MD(b, a, c) \prod_{y=r}^{y=r+s-1} m \, MD(b' + a'y, c'). \end{aligned}$$

Dunque: supposto $c \leq s$, ecc.

Proposizione IV.

Supposto $k \leq a$, si ha identicamente:

$$\prod_{y=0}^{y=r+s-1} m \, \prod_{z=1}^{z=k} MD(b + ay, z) = D(b, a).$$

La proposizione è manifesta per $k = 1$, perchè in questo caso il primo membro si riduce all'unità.

Perciò basta dimostrare che, se la proposizione vale per un valore di k , vale anche per il valore successivo. Ora si ha:

$$\prod_{z=1}^{z-k} MMD(b+ay, z) = M \left[\prod_{z=1}^{z-k-1} MMD(b+ay, z), MD(b+ay, k) \right],$$

e per conseguenza:

$$\prod_{y=0}^{y=a-1} \prod_{z=1}^{z=k} MMD(b+ay, z) = \prod_{y=0}^{y=a-1} M \left[\prod_{z=1}^{z=k-1} MMD(b+ay, z), MD(b+ay, k) \right].$$

Inoltre una delle seguenti due eguaglianze avrà luogo:

$$M \left[\prod_{z=1}^{z=k-1} MMD(b+ay, z), MD(b+ay, k) \right] = \prod_{z=1}^{z-k-1} MMD(b+ay, z)$$

$$M \left[\prod_{z=1}^{z=k-1} MMD(b+ay, z), MD(b+ay, k) \right] = MD(b+ay, k),$$

e quindi avrà luogo una di queste due:

$$\prod_{y=0}^{y=a-1} M \left[\prod_{z=1}^{z=k-1} MMD(b+ay, z), MD(b+ay, k) \right] = \prod_{y=0}^{y=a-1} \prod_{z=1}^{z=k-1} MMD(b+ay, z)$$

$$\prod_{y=0}^{y=a-1} M \left[\prod_{z=1}^{z=k-1} MMD(b+ay, z), MD(b+ay, k) \right] = \prod_{y=0}^{y=a-1} MD(b+ay, k),$$

che si possono scrivere:

$$\prod_{y=0}^{y=a-1} \prod_{z=1}^{z=k} MMD(b+ay, z) = \prod_{y=0}^{y=a-1} \prod_{z=1}^{z=k-1} MMD(b+ay, z)$$

$$\prod_{y=0}^{y=a-1} \prod_{z=1}^{z=k} MMD(b+ay, z) = \prod_{y=0}^{y=a-1} MD(b+ay, k).$$

Ora in entrambe queste formole il secondo membro è un divisore comune di b ed a .

Consideriamo la 1.^a. Poichè la proposizione è ammessa pel valore $k-1$, è per ipotesi:

$$\prod_{y=0}^{y=a-1} \prod_{z=1}^{z=k-1} MMD(b+ay, z) = D(b, a).$$

Consideriamo la 2.^a. Poichè $k \leq a$, sarà (Prop.^o III):

$$\prod_{y=0}^{y=a-1} MD(b+ay, k) = MD(b, a, k),$$

e per conseguenza sarà anche:

$$\prod_{y=0}^{y=a-1} m MD(b + ay, k) = D(b, a).$$

Dunque: supposto $k \leq a$, ecc.

Proposizione V.

Si ha identicamente:

$$\prod_{z=1}^{z=k} MMD(u, z) = MD(u).$$

Dimostrazione: 1.° Uno qualunque dei numeri $MD(u, z)$ è anche uno dei numeri $D(u)$.

Invero uno qualunque dei numeri $MD(u, z)$ è manifestamente un divisore di u , inoltre non può superare k , perchè k è il massimo valore di z .

2.° Uno qualunque dei numeri $D(u)$ è anche uno dei numeri $MD(u, z)$.

Invero sia h uno qualunque dei numeri $D(u)$, poichè h divide u , si ha:

$$h = MD(u, h).$$

Inoltre è per ipotesi $h \leq k$.

Si conclude che la serie dei numeri $MD(u, z)$ e quella dei numeri $D(u)$ sono identiche, e per ciò i loro massimi sono identici.

Proposizione VI.

Si ha identicamente:

$$\prod_{y=0}^{y=a-1} \prod_{z=1}^{z=a} m MMD(b + ay, z) = MD(b, a).$$

Per la proposizione V, $\prod_{z=1}^{z=a} MMD(b + ay, z)$ è il massimo fra i divisori di $b + ay$, che non superano a , siccome poi $MD(b, a)$ è uno di questi divisori, sarà:

$$\prod_{z=1}^{z=a} MMD(b + ay, z) \cong MD(b, a),$$

e quindi si avrà in particolare:

$$m \underset{y=0}{\overset{y=a-1}{M}} \underset{z=1}{\overset{z=a}{D}}(b + ay, z) \cong MD(b, a).$$

D'altra parte, in virtù della proposizione IV, $m \underset{y=0}{\overset{y=a-1}{M}} \underset{z=1}{\overset{z=a}{D}}(b + ay, z)$ è un divisore comune di b ed a , e quindi si ha:

$$m \underset{y=0}{\overset{y=a-1}{M}} \underset{z=1}{\overset{z=a}{D}}(b + ay, z) \leq MD(b, a).$$

Queste due conclusioni sono contraddittorie a meno che non sia:

$$m \underset{y=0}{\overset{y=a-1}{M}} \underset{z=1}{\overset{z=a}{D}}(b + ay, z) = MD(b, a).$$

Proposizione VII.

Se b è minore di a e primo con a , uno dei numeri:

$$b \quad b + a \quad b + 2a \dots \quad b + (a - 1)a,$$

è un numero primo.

Dimostrazione. L'ipotesi b è primo con a si può scrivere: $MD(b, a) = 1$, od anche, in virtù della proposizione VI: $m \underset{y=0}{\overset{y=a-1}{M}} \underset{z=1}{\overset{z=a}{D}}(b + ay, z) = 1$, oppure per la proposizione V: $m \underset{y=0}{\overset{y=a-1}{M}} \underset{1}{\overset{a}{D}}(b + ay) = 1$. Si chiami $b + ay'$ un termine della serie $b, b + a, b + 2a, \dots, b + (a - 1)a$ che verifica la condizione $\underset{1}{\overset{a}{M}} \underset{1}{\overset{a}{D}}(b + ay) = \text{minimo}$. La formola $m \underset{y=0}{\overset{y=a-1}{M}} \underset{1}{\overset{a}{D}}(b + ay) = 1$ dice che qualunque divisore di $b + ay'$ è uguale ad 1 oppure è superiore ad a . Perciò $b + ay'$ non ammette divisori inferiori ad a (tranne l'unità).

Dall'altra ipotesi $b < a$ si deduce che i termini:

$$b \quad b + a \quad b + 2a \dots \quad b + (a - 1)a,$$

sono tutti minori di a^2 . Quindi sarà in particolare $b + ay' < a^2$.

Ma se un numero minore di a^2 non ammette divisori inferiori ad a (tranne l'unità), è un numero primo. Dunque $b + ay'$ è un numero primo.

Laonde: se b è primo con a e minore di a , ecc.

Proposizione VIII.

Se b è primo con a , la progressione indefinita:

$$b \quad b + a \quad b + 2a \dots$$

contiene almeno un numero primo.

Dimostrazione. Poichè b è primo con a , sarà $b < a$ oppure $b > a$. Se $b < a$ la proposizione è dimostrata (Prop.^e VII). Sia $b > a$. Scelgasi ad arbitrio un numero c primo con b e maggiore di b . Sarà ac primo con b e maggiore di b . Perciò i termini:

$$b \quad b + ac \quad b + 2ac \dots \quad b + (ac - 1)ac,$$

contengono (Prop.^e VII) almeno un numero primo.

Ma essi sono contenuti nella progressione:

$$b \quad b + a \quad b + 2a \dots$$

Dunque questa progressione contiene almeno un numero primo.

Proposizione IX.

Se b è primo con a la progressione indefinita:

$$b \quad b + a \quad b + 2a \dots$$

contiene infiniti numeri primi.

Dimostrazione. Per la proposizione VII essa contiene almeno un numero primo. Sia $b + ay$. I termini successivi:

$$b + a(y + 1) \quad b + a(y + 2) \dots$$

formano una progressione aritmetica di primo termine $b + a(y + 1)$ e di ragione a . Essendo b primo con a è anche $b + a(y + 1)$ primo con a . Quindi i termini:

$$b + a(y + 1) \quad b + a(y + 2) \dots$$

contengono (Prop.^e VIII) almeno un numero primo e perciò la progressione:

$$b \quad b + a \quad b + 2a \dots$$

contiene un secondo numero primo.

Similmente si dimostrerebbe che ne contiene un terzo, poi un quarto, ecc.

Dunque: se b è primo con a , ecc.

Genova, 21 gennaio 1893.

Alcune ricerche sul gruppo delle sostituzioni e sulla configurazione delle 16 rette della superficie di quarto ordine a conica doppia (*).

(Di ITALO PERENO, a Pavia.)

Lo scopo di questo lavoro è lo studio di alcuni aggruppamenti non ancora considerati, ricavati dalla configurazione delle 16 rette della nota superficie di 4.^o ordine a conica doppia.

L'indole e il procedimento di questo lavoro sono analoghi a quelli dei lavori sulla configurazione delle 27 rette della superficie di 3.^o ordine pubblicati recentemente dal prof. PASCAL negli *Annali di Matematica*, tom. XX.

Se consideriamo otto punti 1 2 3... 8 e le loro congiungenti a due a due, e sopprimiamo la retta (1 2), le altre 27 rette si possono fare corrispondere univocamente alle 27 rette di S_3 , ed è di questa figura (che in fondo non dà che una rappresentazione grafica dell'ordinaria notazione di SCHLAEFLI, come ha fatto notare il prof. PASCAL nel § 20 della sua Mem. II) che egli si è servito per studiare la configurazione e i gruppi ed i sottogruppi di sostituzioni relativi.

Se si sopprime anche la retta (1 3) e le altre 10 che incontrano questa, si ha una figura che, può nella stessa maniera rappresentare la configurazione delle 16 rette di S_4 , e analogamente può ritenersi come una rappresentazione grafica della nota notazione di SCHLAEFLI per le rette di S_4 .

Se invece di sopprimere la retta (1 3) si sopprime la retta (3 4) [e le 10 che incontrano (3 4)] allora la figura rimanente può servire nella stessa ma-

(*) Questo lavoro è un sunto della Memoria presentata per la Laurea alla Facoltà di Scienze della R. Università di Pavia.

niera allo studio delle rette di S_4 . Le 16 rette restano allora rappresentate colle 16 congiungenti i 4 punti 1, 2, 3, 4 coi 4 punti 5, 6, 7, 8. Se ne ricaverebbe un'altra notazione per le rette di S_4 , e che potrebbe servire come la precedente.

In questa notazione le rette sarebbero rappresentate con

$$(ij) \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, 3, 4 \\ j = 5, 6, 7, 8, \end{array}$$

e due rette:

$$(ij), \quad (i'j''),$$

si incontrano se:

$$i = 1 \quad i' = 2 \quad j = i' = j'',$$

ovvero:

$$i = 3 \quad i' = 4 \quad j = i' = j'',$$

ovvero:

$$i = 1, 2 \quad i' = 3, 4 \quad j = j''.$$

La configurazione delle 16 rette di S_4 è stata studiata da varii autori (CLEBSCH, CREMONA, ecc.) e ultimamente il dott. BERZOLARI (*) ha considerato i *multilateri gobbi* formati colle 16 rette ed i *poliedri* formati coi 40 piani tritangenti ad imitazione di quello che già precedentemente aveva fatto il BERTINI per i poliedri formati coi 45 piani tritangenti di S_3 .

Noi qui, oltre proporci di completare dal punto di vista delle sostituzioni alcuni dei risultati già noti, considereremo i *poliedri circolari* formati coi 40 piani tritangenti ad imitazione di quello che ha fatto il prof. PASCAL per la superficie cubica (**). Considereremo inoltre la configurazione *delle quintuple gobbe* allo stesso modo come il prof. PASCAL ha considerato la configurazione *delle bisestuple gobbe* di S_3 (***)).

Per la nota relazione che c'è fra il gruppo di sostituzioni delle 27 rette di S_3 e delle 16 di S_4 (****) (la quale corrisponde poi al fatto già da noi sopra ricordato che cioè le 16 rette di S_4 sono precisamente nella stessa configurazione di certe 16 rette di S_3 scelte fra le 27, o anche che i 40 piani tritangenti di S_4 formano la stessa configurazione dei 40 piani rimanenti di S_3

(*) Sulla superficie del 4.^o ordine, ecc. Annali di Matematica, tom. 13.

(**) Saggio sul gruppo delle sostituzioni, ecc. Annali di Matematica, tom. 20.

(***) Configurazione delle 36 bisestuple gobbe, ecc. Rend. Ist. Lomb., 10 novem. 1892.

(****) JORDAN, *Traité des substitutions*, pag. 320.

quando dai 45 si tolgono i 5 passanti per una retta fissa), si capisce che tutti gli aggruppamenti formati colle 16 rette debbono trovare il loro riscontro in aggruppamenti formati colle 27, come risulta immediatamente dagli ordinari concetti della Teoria delle sostituzioni (*). Così per es. le bisestuple gobbe di S_3 diventano in S_4 o una coppia di biquadruple coniugate ovvero una quintupla gobba colla sua cinquisecante.

Allora gli aggruppamenti relativi ad S_4 potrebbero ricavarsi tutti da aggruppamenti relativi ad S_3 ; ma noi abbiamo preferito ricavarli direttamente.

Colgo intanto questa occasione per ringraziare il chiarissimo prof. PASCAL, dal quale non mi mancarono mai nè consigli, nè aiuti, nè incoraggiamenti: queste poche parole gli siano prova del mio affetto e della mia più profonda riconoscenza.

§ 1. Preliminari sul gruppo delle 16 rette di S_4 .

Indichiamo coi numeri 1, 2, 3, ... 8 gli otto punti presi a fondamento della nostra rappresentazione, ed immaginiamo fisse due delle congiungenti. Questa coppia di rette, come si è già detto, possiamo sceglierla in due modi, o (1 2) (1 3) ovvero (1 2) (3 4). Nel 1.º caso le 26 rette rimanenti scisse in 10 + 16 sono:

$$\begin{aligned}
 \text{(I)} \quad & (3\ 5) (2\ 5) (3\ 7) (2\ 7) (3\ 8) (2\ 8) (3\ 6) (2\ 6) (3\ 4) (2\ 4) & (a) \\
 & (2\ 3) (1\ 5) (1\ 7) (1\ 8) (1\ 6) (1\ 4) (5\ 7) (5\ 8) \quad) & \\
 & (5\ 6) (5\ 4) (7\ 8) (7\ 6) (7\ 4) (8\ 6) (8\ 4) (4\ 6). \quad) & (b)
 \end{aligned}$$

Nel 2.º caso sono:

$$\begin{aligned}
 \text{(II)} \quad & (1\ 3) (2\ 3) (1\ 4) (2\ 4) (5\ 7) (5\ 8) (5\ 6) (7\ 8) (7\ 6) (8\ 6) & (a) \\
 & (1\ 5) (2\ 5) (1\ 7) (2\ 7) (1\ 8) (2\ 8) (1\ 6) (2\ 6) \quad) & \\
 & (3\ 5) (4\ 5) (3\ 7) (4\ 7) (3\ 8) (4\ 8) (3\ 6) (4\ 6). \quad) & (b)
 \end{aligned}$$

Noi assumeremo per lo più la prima figura per fondamento della nostra rappresentazione.

(*) Ciò può risultare ancora dalla nota riduzione, mediante una trasformazione quadratica, di una S_3 generale nella S_4 di CLEBSCH, come dimostra il prof. CREMONA, *Sulla superficie di 1.º ordin*, ecc. Rend. Istit. Lomb., 9 marzo 1871.

Cominciamo a studiare le 16 rette (*b*) in relazione colle altre dieci (*a*). Evidentemente queste 10 insieme alla retta fissa (1 3) formano cinque piani della superficie cubica (*), che sono:

$$\begin{aligned} (1\ 3)(3\ 5)(2\ 5), \quad (1\ 3)(3\ 7)(2\ 7), \quad (1\ 3)(3\ 8)(2\ 8), \\ (1\ 3)(3\ 6)(2\ 6), \quad (1\ 3)(3\ 4)(2\ 4), \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (1\ 3)(3\ 5)(2\ 5), \quad (1\ 3)(3\ 7)(2\ 7), \quad (1\ 3)(3\ 8)(2\ 8), \\ (1\ 3)(3\ 6)(2\ 6), \quad (1\ 3)(3\ 4)(2\ 4), \end{aligned}} \right\} \quad (1)$$

ed insieme con tutte e due le rette fisse formano 5 delle 315 coniche coordinate alla curva di 4.^o ordine (**), rappresentate dai quadrilateri:

$$(1\ 3\ 5\ 2), \quad (1\ 3\ 7\ 2), \quad (1\ 3\ 8\ 2), \quad (1\ 3\ 6\ 2), \quad (1\ 3\ 4\ 2).$$

Consideriamo le nostre 16 rette in relazione a quei cinque piani.

Consideriamo in ciascuno di questi le due coppie di rette formate dalla retta fissa (1 3) colle altre due. È facile verificare che rispetto a tali coppie le 16 rette si scindono in 8 + 8, di cui le prime formano una *terna dispari* colla prima coppia ed una *terna pari* colla seconda (***), e le altre fanno il contrario. Cioè rispetto a ciascuno di questi 5 piani le 16 rette si scindono in due gruppi di otto rette. Di più considerando le rette in ciascun gruppo si vede che ogni retta taglia un'altra retta dello stesso gruppo ed una sola, onde in ciascun gruppo le 8 rette si distribuiscono in 4 coppie di rette che si tagliano. Si ricava quindi che le 16 rette rispetto a ciascuno dei 5 piani si scindono in otto coppie di rette. Per i piani (1) tali coppie sono rispettivamente le seguenti:

$$\begin{aligned} (57 \cdot 17)(58 \cdot 18)(56 \cdot 16)(54 \cdot 14) \quad (23 \cdot 15)(46 \cdot 78)(84 \cdot 76)(86 \cdot 74) \\ (23 \cdot 17)(58 \cdot 46)(56 \cdot 84)(54 \cdot 86) \quad (75 \cdot 15)(18 \cdot 78)(16 \cdot 76)(14 \cdot 74) \\ (23 \cdot 18)(57 \cdot 46)(56 \cdot 74)(54 \cdot 76) \quad (85 \cdot 15)(17 \cdot 87)(16 \cdot 86)(14 \cdot 84) \\ (23 \cdot 16)(57 \cdot 84)(85 \cdot 74)(54 \cdot 78) \quad (65 \cdot 15)(17 \cdot 67)(18 \cdot 86)(14 \cdot 64) \\ (23 \cdot 14)(57 \cdot 86)(85 \cdot 76)(56 \cdot 78) \quad (45 \cdot 15)(17 \cdot 47)(18 \cdot 48)(16 \cdot 64). \end{aligned}$$

Confrontando questo quadro coll'analogo stabilito dal JORDAN (****) allo scopo di mettere in evidenza la relazione che hanno le 16 rette di S_4 coi noti 5 coni di KUMMER si vede che coincidono, onde la relazione che le 16 rette

(*) PASCAL, *Rappresentaz. geometrica*, ecc., § 27. Annali di Matem., tom. 20.

(**) PASCAL, *Sulle 315 coniche*, ecc. Rend. Acc. dei Lincei, 4 dicembre 1892.

(***) PASCAL, *Rappresentaz. geometrica*, ecc., § 7. Annali di Matem., tom. 20.

(****) JORDAN, *Substitutions*, pag. 309.

hanno coi 5 piani (1) è la stessa di quella che hanno coi noti 5 coni di KUMMER. Veniamo con ciò a riottenere sotto altra forma quel medesimo risultato ottenuto dal prof. CREMONA (*) trasformando con una trasformazione quadratica una superficie di 3.° ordine in una del quarto a conica doppia.

§ 2. Sottogruppo che lascia fisso uno dei 40 piani tritangenti di S_4 .

È noto che il gruppo delle 16 rette ha per ordine $16 \cdot 5!$ e che è *semplicemente transitivo* in tutte le rette (**). Vogliamo ora studiare tale gruppo considerando come elementi non già le 16 rette ma i 40 piani tritangenti delle superficie, anzi più precisamente il sottogruppo che lascia fisso uno di questi piani.

Un piano lo potremo rappresentare colla coppia di rette che lo determina.

Sia quindi (2 3 · 1 8) il piano che vogliamo lasciar fisso. Se cominciamo a supporre che ciascuna delle sue rette rimanga fissa, allora le sostituzioni del sottogruppo non dovendo spostare tre rette (1 2) (1 3) (2 3) che formano la *terna pari fondamentale*, si riducono alle permutazioni tra i rimanenti punti (**). Ora il punto (8) deve rimanere fisso, quindi le sostituzioni del sottogruppo si riducono alle $4!$ permutazioni fra i punti (5), (7), (4), (6).

Onde possiamo concludere che:

« Il sottogruppo che lascia fisso un piano (ciascuna delle sue rette) è isomorfo oloedricamente col gruppo simmetrico di 4 elementi. »

Ma noi vogliamo invece le sostituzioni che lasciano fissa la coppia (18)(23) pur potendo le due rette della coppia scambiarsi fra loro. Allora il loro numero diventa doppio, e per averle basta aggiungere le stesse di prima ai prodotti di esse per un'altra sostituzione σ che produca questo effetto.

Una tale sostituzione è evidentemente quella che muta le rette del sistema di ARONHOLD:

$$1\ 2 \cdot 1\ 3 \cdot 2\ 3 \cdot 8\ 7 \cdot 8\ 5 \cdot 8\ 4 \cdot 8\ 6,$$

rispettivamente nelle rette di questo altro:

$$1\ 2 \cdot 1\ 3 \cdot 1\ 8 \cdot 1\ 7 \cdot 1\ 5 \cdot 1\ 4 \cdot 1\ 6.$$

(*) Sulla superficie di 1.° ordine. Rend. Istit. Lomb., marzo 1871.

(**) JORDAN, *Substit.*, pag. 310.

(***) PASCAL, *Rappresentaz. geometrica*, ecc., § 23.

Esaminando il quadro (b) delle 16 rette (§ 1) si ha subito che per le sostituzioni del gruppo le 6 rette che congiungono a due a due i 4 punti $5 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4$ si staccano dalle altre 8. Inoltre in ciascuno dei due gruppi, ogni retta di un gruppo ne taglia un'altra dello stesso gruppo ed una sola. Possiamo dire:

« Il sottogruppo che lascia fisso uno dei 40 piani tritangenti scinde le rimanenti 14 rette (quando dalle 16 si tolgono quelle del piano) in $6 + 8$, ed è transitivo nelle sei e nelle otto con due sistemi d'imprimitività. »

Tali sistemi sono:

$$\begin{array}{l} 57 \cdot 54 \cdot 56 \quad) \\ 46 \cdot 76 \cdot 74, \quad) \end{array} \quad (1)$$

$$\begin{array}{l} 15 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 14 \quad) \\ 85 \cdot 87 \cdot 86 \cdot 84. \quad) \end{array} \quad (2)$$

Esaminando i 2 quadri (1), (2) dei sistemi d'imprimitività, vediamo che si possono formare i piani:

$$(57 \cdot 46), \quad (15 \cdot 85), \quad (57 \cdot 15),$$

di cui quelli del 1.º tipo sono 3, quelli del 2.º tipo 8, e finalmente quelli del 3.º tipo 24.

Per le cose dette precedentemente i piani di ciascuno di questi 3 tipi sono da ritenersi equivalenti fra loro. Notiamo poi che questi $3 + 8 + 24 = 31$ piani sono tutti quelli formati colle rette escluse e però non tagliano il piano fisso secondo una retta di S_4 . Invece i rimanenti 8 piani [sono i 4 formati con (23) ed i 4 formati con (18)] hanno in comune una retta (della superficie) col piano fisso. Anche questi per le cose dette sono da ritenersi fra loro equivalenti. Dunque:

« Il sottogruppo che lascia fisso un piano scinde i rimanenti 39 in $8 + 3 + 8 + 24$ di cui i primi otto hanno in comune una retta (della superficie) col piano fisso e gli altri non l'hanno (*).

Quindi una prima distinzione dei diedri formati colle coppie di piani tritangenti di S_4 può essere la seguente:

« Diedri formati da piani non aventi alcuna retta in comune, e diedri formati da piani aventi una retta in comune. »

(*) In seguito diremo senz'altro « i tali due piani hanno in comune una retta » intendendo sempre che questa retta sia una delle 16 di S_4 .

Dei primi ne esistono, come abbiamo visto, di 3 specie diverse (sono le 3 specie di diedri che già si conoscono), degli altri se ne ha una specie sola. A questo punto, come si capisce, ci si presentano due vie diverse: o continuare la ricerca degli assiemi di piani non aventi a due a due rette in comune, oppure la ricerca di quelli aventi una retta in comune. Seguendo la prima via ci incontreremmo nelle ricerche già fatte dal dott. BERZOLARI sui poliedri ordinari: noi invece seguiremo la seconda via che ci porterà allo studio di una nuova specie di poliedri non ancora studiati.

Considereremo cioè quei poliedri le cui faccie si immaginano seguirsi con un ordine stabilito, e di cui 2 faccie consecutive hanno in comune una retta, mentre non l'hanno due non consecutive. È chiaro che la ricerca di tali poliedri, che chiameremo *circolari*, si scosta da quella dei *moltilateri gobbi* già stata fatta da altri, perchè questa diventa più ampia, potendo gli spigoli di un tale poliedro formare un moltilatero in cui 2 lati non consecutivi si tagliano. Tali poliedri li distingueremo in *chiusi* ed *aperti* secondochè l'ultima faccia ha o non ha una retta in comune colla prima.

Passiamo quindi senz'altro a ricercare le principali loro proprietà.

§ 3. Gruppo di sostituzioni corrispondenti all'assieme di 2 piani passanti per una retta di S_4 . — Diedri circolari chiusi ed aperti.

Abbiamo visto nel paragrafo precedente che ogni piano ne ha 8 altri aventi con esso in comune una retta della superficie, ossia che insieme ad esso forma una coppia di piani passanti per una retta di S_4 . Ci proponiamo ora di studiare il gruppo formato da tutte quelle sostituzioni che non spostano uno di tali assiemi, ad es. quello formato dai 2 piani:

$$(18 \cdot 23) \quad (23 \cdot 15).$$

Osserviamo al solito che le sostituzioni di questo gruppo dovendo lasciare fisse le 3 rette (12), (13), (23) che formano la terna pari *fondamentale*, si riducono a permutazioni tra i rimanenti punti. Ora senza alterare il diedro, il punto 5 si può permutare con 8 ed i rimanenti tre punti 4 · 6 · 7 tra loro, onde l'ordine di tale gruppo è $2 \cdot 3!$, e le sue sostituzioni sono così rappresentate semplicemente.

Consideriamo allora gli 8 piani [sono i quattro formati con (18) ed i quattro formati con (15)] che possono, giusta la nostra definizione, dare luogo

a triedri circolari:

$$(18 \cdot 87) \quad (18 \cdot 85) \quad (18 \cdot 84) \quad (18 \cdot 86) \\ (15 \cdot 57) \quad (15 \cdot 58) \quad (15 \cdot 54) \quad (15 \cdot 56).$$

Si ha subito che i 2 piani formati con (58) si staccano dai rimanenti che sono, al pari di questi, da ritenersi equivalenti tra loro.

« Possiamo dunque dire che vi sono 2 specie di triedri circolari: la « prima specie è rappresentata dalla terna di piani:

$$(18 \cdot 23) \quad (23 \cdot 15) \quad (15 \cdot 58),$$

« e la seconda specie della terna di piani:

$$(18 \cdot 23) \quad (23 \cdot 15) \quad (15 \cdot 57).$$

« Ve ne sono rispettivamente: $\frac{160 \cdot 2}{2} = 160$ e $\frac{160 \cdot 6}{2} = 480$. »

Ricerchiamo le proprietà geometriche di queste due specie di triedri circolari.

Intanto è chiaro che entrambi sono aperti; di più nel primo di tali triedri le due rette libere (18), (58) si tagliano, quindi un tale triedro (lo diremo di 1.^a specie) darà luogo ad un tetraedro circolare chiuso; mentre nel secondo, che diremo di 2.^a specie, questo non si verifica. Dunque:

« Non esistono triedri circolari chiusi. »

« Vi sono due specie di triedri circolari aperti, 160 di 1.^a specie (ognuno « dei quali individua un piano che insieme ad esso forma un tetraedro circolare chiuso) e 480 di 2.^a specie. »

§ 4. Gruppo del triedro di 1.^a specie.

Gruppo del triedro di 2.^a specie. — Tetraedri circolari chiusi ed aperti.

Vogliamo ora ricercare i gruppi di sostituzioni corrispondenti alle due specie di triedri da noi trovate.

Ripetendo un ragionamento analogo a quello fatto nel § 2, si ha che le sostituzioni del 1.^o gruppo [cioè di quello corrispondente ad un triedro di 1.^a specie, ad es. al triedro (18 · 23) (23 · 15) (15 · 38)] si riducono alle permutazioni fra i 3 punti 4 · 6 · 7, e queste non spostano i piani del triedro,

e ad una sostituzione σ che mentre muta (1 5) in (2 3) e (2 3) in (1 5), muta anche (1 8) in (5 8) e (5 8) in (1 8), e questa inverte l'ordine dei piani del triedro stesso. Evidentemente questa sostituzione σ può essere definita come quella che muta le rette del sistema completo:

$$12 \cdot 13 \cdot 23 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 56 \cdot 54,$$

rispettivamente nelle rette di questo altro:

$$12 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 18 \cdot 16 \cdot 14 \cdot 17.$$

Come si vede il triedro è simmetrico nelle sue braccia, cioè esiste una sostituzione del gruppo che scambia l'un braccio nell'altro. Per passare allora ai tetraedri, possiamo aggiungere il quarto piano da una parte sola. Noi l'aggiungeremo a sinistra, il che ci porterà una semplificazione nelle ricerche che dovremo fare in seguito. Per la retta libera (1 8) del 1.º piano a sinistra dobbiamo quindi far passare altri piani che non abbiano altre rette in comune col triedro. Tali piani sono:

$$(18 \cdot 84) \quad (18 \cdot 86) \quad (18 \cdot 87).$$

Per ciò che si è detto sulle sostituzioni del gruppo si ha che tali piani sono equivalenti tra loro.

Ricordando poi che il piano (18 · 58) formato dalle rette libere del triedro dato, insieme al triedro stesso forma un tetraedro circolare chiuso, possiamo dire:

« Un triedro di 1.ª specie appartiene a due specie di tetraedri diversi; la 1.ª specie è rappresentata dal tetraedro:

$$(58 \cdot 18) \quad (18 \cdot 23) \quad (23 \cdot 15) \quad (15 \cdot 58), \quad (1)$$

« e la 2.ª specie è rappresentata dal tetraedro:

$$(84 \cdot 18) \quad (18 \cdot 23) \quad (23 \cdot 15) \quad (15 \cdot 58). \quad (2)$$

« Ve ne sono rispettivamente $\frac{160 \cdot 1}{4} = 40$, $\frac{160 \cdot 6}{1} = 960$. »

Come si vede le rette contenute nel primo, che è chiuso, formano un quadrilatero circolare, e come è naturale le 2 coppie di faccie opposte formano due triedri ordinari di 1.ª specie coniugati. Il secondo invece è aperto, e le rette in esso contenute non formano un moltilatero gobbo. Inoltre aggiungeremo che esso contiene un triedro di 1.ª ed un triedro di 2.ª specie, quindi

ne incontreremo certamente altri della stessa specie nello studio del gruppo del triedro di 2.^a specie che ora faremo.

Questo triedro di 2.^a specie, che vogliamo non venga spostato dalle sostituzioni del gruppo, sia ad es.:

$$(18 \cdot 23) \quad (23 \cdot 15) \quad (15 \cdot 57).$$

Allora si ha che le sostituzioni del gruppo si riducono alle permutazioni dei due punti 4, 6, e queste non spostano i piani del triedro, ed alla sostituzione:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 12 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 18 \cdot 16 \cdot 14 \cdot 17 \\ 12 \cdot 13 \cdot 23 \cdot 57 \cdot 56 \cdot 54 \cdot 58 \end{pmatrix},$$

la quale inverte l'ordine dei piani del triedro stesso.

Essendo anche questo triedro simmetrico nelle sue braccia, varrà l'osservazione fatta precedentemente. Per la retta libera (18) del 1.^o piano a sinistra faremo passare dei piani che non abbiano altre rette in comune col triedro. Tali piani sono:

$$(18 \cdot 84) \quad (18 \cdot 86) \quad (18 \cdot 87) \quad (18 \cdot 85).$$

Ora per le sostituzioni del gruppo i due primi sono equivalenti, e gli altri non sono nè equivalenti fra loro, nè ai primi.

Dunque: « Un triedro di 2.^a specie appartiene a tre specie di tetraedri « diversi, che sono rispettivamente rappresentate da:

$$(84 \cdot 18) \quad (18 \cdot 23) \quad (23 \cdot 15) \quad (15 \cdot 57) \quad (3)$$

$$(87 \cdot 18) \quad (18 \cdot 23) \quad (23 \cdot 15) \quad (15 \cdot 57) \quad (4)$$

$$(85 \cdot 18) \quad (18 \cdot 23) \quad (23 \cdot 15) \quad (15 \cdot 57). \text{ »} \quad (5)$$

Notiamo anzitutto che l'ultimo (5) a differenza degli altri due, che contengono entrambi due triedri di 2.^a specie, contenendo un triedro di 1.^a ed un triedro di 2.^a specie è della stessa specie di quello (2) già da noi trovato. Abbiamo perciò solo due nuove specie di tetraedri. Dunque:

« Vi sono tre specie di tetraedri circolari aperti (3) (4) (5), che chiameremo rispettivamente di 1.^a, 2.^a e 3.^a specie in numero di 960, 480 e 960 « rispettivamente. »

Ricerchiamo le proprietà geometriche caratteristiche di ciascuna di queste tre specie di tetraedri.

« Nel primo (3), a differenza degli altri due, le due rette libere (8 4) e « (5 7) si tagliano, onde individua il piano (5 7 · 8 4) che insieme ad esso « forma un *pentaedro chiuso*. In quanto agli altri due si ha che entrambi sono « aperti, che tanto nell'uno che nell'altro lo spigolo medio non taglia nessuna « delle due rette libere, ma nel primo (4) le rette contenute formano un *pen- « talatero aperto*, mentre nell'altro (5) questo non si verifica. Del resto come « abbiamo già notato i due tetraedri di 2.^a e 3.^a specie si differenziano per « i triedri in essi contenuti. »

§ 5. Gruppi di sostituzioni per i tetraedri circolari aperti. Pentaedri circolari chiusi ed aperti.

Vogliamo ora considerare i gruppi di sostituzioni che non spostano rispettivamente un tetraedro di 1.^a, un tetraedro di 2.^a ed un tetraedro di 3.^a specie, il che ci porterà a distinguere le diverse specie di pentaedri circolari, e le loro proprietà geometriche caratteristiche.

Anche in tale caso, come abbiamo sempre fatto fin qui dove era possibile (§ 3), cercheremo di ridurre ad un sottogruppo di quello di *monodromia* che lascia inalterato la *caratteristica pari fondamentale*. Questo si può ottenere facilmente scegliendo opportunamente il poliedro che vogliamo rimanga inalterato per le sostituzioni del gruppo. Noi prenderemo successivamente per tetraedri, i tetraedri (3) (4) (5) del paragrafo precedente, i quali, chiaramente, servono al nostro scopo.

Indichiamo per brevità con A_1, A_2, A_3 rispettivamente i 3 piani (8 4 · 1 8), (8 7 · 1 8), (8 5 · 1 8) e con B, C, D rispettivamente gli altri 3 piani (1 8 · 2 3), (2 3 · 1 5), (1 5 · 5 7). Allora le 3 diverse specie di tetraedri circolari aperti saranno rappresentate da:

$$\begin{array}{cccc} A_1 & B & C & D \\ A_2 & B & C & D \\ A_3 & B & C & D. \end{array}$$

Come sappiamo (§ 4) i tetraedri delle due prime specie sono simmetrici sia a destra che a sinistra quindi per passare da questi ai pentaedri potremo continuare ad aggiungere il quinto piano da una parte sola per es. a destra, ciò che non potremo fare per i tetraedri di 3.^a specie, pei quali bisognerà aggiungere opportunamente piani tanto da una parte che dall'altra.

Tali piani sono:

pel 1.° tetraedro:

$$E_1 \equiv (5\ 7 \cdot 1\ 7)$$

$$E_2 \equiv (5\ 7 \cdot 6\ 8)$$

$$E_3 \equiv (5\ 7 \cdot 6\ 4)$$

pel 2.° tetraedro:

$$E_4 \equiv (5\ 7 \cdot 6\ 4)$$

$$E_5 \equiv (5\ 7 \cdot 1\ 7)$$

$$E'_3 \equiv (5\ 7 \cdot 8\ 4) \quad E''_3 \equiv (5\ 7 \cdot 8\ 6)$$

pel 3.° tetraedro:

$$E_6 \equiv (5\ 7 \cdot 1\ 7)$$

$$E'_1 \equiv (5\ 7 \cdot 8\ 4) \quad E''_1 \equiv (5\ 7 \cdot 8\ 6)$$

$$E'_5 \equiv (5\ 7 \cdot 6\ 4)$$

$$E_7 \equiv (8\ 5 \cdot 7\ 4) \quad E'_7 \equiv (8\ 5 \cdot 7\ 6)$$

$$E_8 \equiv (8\ 5 \cdot 4\ 6).$$

Le sostituzioni del gruppo corrispondenti al 1.° tetraedro riducendosi alla sola permutazione $(5 \cdot 8)$, $(7 \cdot 4)$ si ha che i piani E_1 , E_2 , E_3 ci si presentano come *non equivalenti*, onde danno luogo ad altrettante specie distinte di pentaedri.

Invece per i 4 piani relativi al 2.° tetraedro si ha che i due ultimi E'_3 , E''_3 sono equivalenti tra loro, potendo noi passare dall'uno all'altro colla permutazione $(4 \cdot 6)$, la quale evidentemente non altera il tetraedro.

Così per i 7 piani relativi al terzo tetraedro si ha che E_7 ed E'_7 sono equivalenti tra loro, come lo sono pure tra loro E'_1 , E''_1 , potendo E_7 ed E_1 passare rispettivamente in E'_7 ed in E''_1 colla permutazione $(4 \cdot 6)$, permutazione che è una di quelle del gruppo.

È facile inoltre verificare che i 2 pentaedri formati con E'_3 , E''_3 sono equivalenti a quello formato con E_3 , contenendo tanto i primi che il secondo un tetraedro di 1.^a ed un tetraedro di 2.^a specie.

Per una ragione perfettamente analoga si ha pure che i due pentaedri formati con E'_1 , E''_1 sono equivalenti a quello formato con E_1 , e che il pentaedro formato con E_5 è equivalente a quello formato con E'_5 .

Rimangono perciò solo 8 specie di pentaedri circolari aperti, rispettivamente rappresentate dai pentaedri:

$$\begin{array}{ccccc}
 A_1 & B & C & D & E_1 \\
 A_1 & B & C & D & E_2 \\
 A_1 & B & C & D & E_3 \\
 A_2 & B & C & D & E_4 \\
 A_2 & B & C & D & E_5 \\
 A_3 & B & C & D & E_6 \\
 E_7 & A_3 & B & C & D \\
 E_8 & A_3 & B & C & D.
 \end{array}$$

Esaminando poi le coppie di tetraedri aperti contenute in ciascuno di questi pentaedri aperti si ha:

«		Il pentaedro di 1. ^a specie	ha	1	tetraedro di 1. ^a specie	ed	1	di 3. ^a specie
«	»	2. ^a	»	2	»	1. ^a	»	
«	»	3. ^a	»	1	»	1. ^a	»	» 1 » 2. ^a »
«	»	4. ^a	»	2	»	2. ^a	»	
«	»	5. ^a	»	1	»	2. ^a	»	» 1 » 3. ^a »
«	»	6. ^a	»	2	»	3. ^a	»	
«	»	7. ^a	»	2	»	3. ^a	»	
«	»	8. ^a	»	2	»	3. ^a	»	

Da questo quadro si ricava che eccettuati i tre ultimi, tutti gli altri pentaedri si possono fra loro differenziare per rispetto ai tetraedri in essi contenuti. Potrebbe quindi venire il dubbio che questi ultimi tre fossero della medesima specie, che cioè, pur non esistendo una sostituzione che muti ordinatamente i piani dell'uno rispettivamente in quelli dell'altro, esista invece una sostituzione che muti i piani dell'uno in quelli dell'altro, ma in ordine inverso. (Così, trattandosi dei due ultimi, potrebbe avvenire che esista una sostituzione che muti ordinatamente i piani E_7, A_3, B, C, D in D, C, B, A_3, E_8 .) Possiamo subito mostrare che questo non può avere luogo.

Ed invero nel pentaedro $E_8 A_3 B C D$ le rette libere (4 6), (5 7) si ta-

gliano, onde un tale pentaedro individua il piano (57·46) che insieme ad esso forma un *esaedro circolare chiuso*, mentre negli altri due questo non si verifica. Di più nel pentaedro $A_3 B C D E_6$ ciascuna delle due rette libere (85), (17) taglia una delle due rette che individuano la faccia media (23·15), mentre nell'altro pentaedro $E_7 A_3 B C D$ questo non avviene. È messo quindi fuori di dubbio che i tre ultimi pentaedri trovati non sono della stessa specie, ed abbiamo nello stesso tempo trovate delle proprietà geometriche caratteristiche dei medesimi.

Infine aggiungeremo:

« Vi è una sola specie di pentaedri circolari chiusi, e ve ne sono 192, « che corrispondono ai 192 pentalateri gobbi formati colle 16 rette di S_4 , e « 8160 pentaedri circolari aperti, di cui 1920 di 1.^a specie, 960 di 2.^a, 1920 « di 3.^a, 480 di 4.^a, 960 di 5.^a, 480 di 6.^a, 960 di 7.^a, 480 di 8.^a. All'in- « fuori di quelli di 3.^a, 4.^a e 7.^a specie tutti hanno 2 piani coniugati, i quali « pei pentaedri di 2.^a ed 8.^a specie formano un diedro ordinario di 1.^a specie, « per quelli di 1.^a e 6.^a specie formano un diedro ordinario di 2.^a specie, e « per il pentaedro di 5.^a specie sono due piani passanti per una stessa retta « di S_4 . Inoltre ciascuno dei pentaedri di 4.^a, 5.^a ed 8.^a specie individua un « altro piano che con esso forma un *esaedro circolare chiuso*. »

§ 6. Esaedri circolari chiusi.

Abbiamo visto nel paragrafo precedente che vi sono tre specie (4.^a, 5.^a, 8.^a) di pentaedri circolari aperti, ognuno dei quali individua un altro piano che con esso forma un *esaedro circolare chiuso*. Allora per passare agli esaedri circolari chiusi basterà aggiungere questo piano. Chiamando quindi per brevità $F_1 \equiv (87 \cdot 64)$, $F_2 \equiv (87 \cdot 17)$, $F_3 \equiv (57 \cdot 46)$ rispettivamente questi piani, avremo i 3 esaedri:

$$A_2 \quad B \quad C \quad D \quad E_4 \quad F_1 \quad (1)$$

$$A_2 \quad B \quad C \quad D \quad E_5 \quad F_2 \quad (2)$$

$$E_3 \quad A_3 \quad B \quad C \quad D \quad F_3. \quad (3)$$

Cominciamo anzitutto dal notare che gli spigoli dei poliedri (2) e (3) non formano come accade in (1) un moltilatero gobbo, quindi possiamo già affermare che il primo di questi esaedri non è equivalente agli altri due. (Ci

si presenta quindi un fatto non ancora trovato nei paragrafi precedenti, abbiamo cioè dei poliedri circolari chiusi i cui spigoli non formano dei multilateri gobbi.) Inoltre con un calcolo semplicissimo si trova, che tanto l'uno che l'altro di tali esaedri contiene 6 pentaedri, di cui due di 8.^a specie ed i rimanenti di 5.^a specie, onde possiamo concludere che sono tra loro equivalenti. Dunque:

« *Esistono solamente due specie di esaedri circolari chiusi, e sono rappresentate da:*

$$A_2 \quad B \quad C \quad D \quad E_4 \quad F_1 \quad (a)$$

$$A_2 \quad B \quad C \quad D \quad E_5 \quad F_2, \quad (b)$$

« *che diremo rispettivamente di 1.^a e 2.^a specie. Gli esaedri di 1.^a specie sono caratterizzati dalla proprietà che i loro spigoli formano un esalatero gobbo, mentre quelli di 2.^a specie non godono di questa proprietà. Della 1.^a specie ne esistono 80 (questi corrispondono agli 80 esalateri gobbi formati colle 16 rette di S_1), e della 2.^a specie 240. »*

Passiamo ora a ricercare alcune proprietà geometriche di queste due specie di esaedri.

Consideriamo in (a) le tre coppie 18 · 57, 23 · 64, 15 · 87 di spigoli opposti. Queste, per quello che si è detto, sono necessariamente tre coppie gobbe di rette. Orbene se cerchiamo di queste tre coppie, le corrispondenti coppie di *bisecanti*, queste saranno pure tre coppie gobbe di rette, e però potranno riguardarsi come tre coppie di spigoli opposti di un nuovo esaedro circolare chiuso che sarà, chiaramente, della stessa specie. Dunque in questo senso possiamo dire:

« *Ogni esaedro circolare chiuso di 1.^a specie ne individua un altro. »*

Questo non potrà evidentemente ripetersi per quello di 2.^a specie (b), le cui coppie di spigoli opposti sono due gobbe e l'altra no.

Consideriamo in ciascuno di tali esaedri le due terne di piani *non consecutivi*, si hanno 3 piani senza rette in comune, e che, come si riconosce subito, formano nel primo caso *due triedri ordinari di 3.^a specie coniugati* e nel secondo *due triedri ordinari di 5.^a specie pure coniugati*. Dunque:

« *L'esaedro circolare chiuso di 1.^a specie si può immaginare come il complesso di due triedri ordinari di 3.^a specie coniugati coi piani dell'uno intercalati fra i piani dell'altro, e quello di 2.^a specie si può immaginare come un'analogha disposizione di due triedri ordinari coniugati di 5.^a specie. »*

Esistono infatti, come è noto, 80 coppie di triedri ordinari di 3.^a specie coniugati e 240 coppie di triedri ordinari di 5.^a specie coniugati, e queste, come si sa, sono le sole due specie di triedri che ammettono un triedro coniugato (*).

§ 7. Alcune proprietà delle quadruple gobbe di 2.^a specie.

I vari raggruppamenti delle 16 rette di S_4 sono già stati studiati da vari autori, solo qui vogliamo aggiungere qualche risultato, a nostro credere, non ancora notato.

Si sa che esistono due specie di quadruple gobbe formate colle 16 rette della superficie. Una quadrupla di 1.^o specie è caratterizzata dalla proprietà che una qualunque delle 12 rette escluse incontra almeno una delle rette della quadrupla. Invece una quadrupla di 2.^a specie è caratterizzata dalla proprietà che fra le 12 rette escluse ve n'è sempre una (ed una sola), che non taglia alcuna delle rette della quadrupla, e che quindi insieme ad essa forma un assieme gobbo. Si ha cioè una quintupla, cioè uno di quegli assiami di cui studieremo poi la configurazione.

Vogliamo qui occuparci solamente della 2.^a specie di quadruple. Ci limiteremo a dimostrare alcune delle principali loro proprietà, che ci saranno poi utili in seguito.

Abbiasi la quadrupla di 2.^a specie:

$$|(1\ 5)(1\ 7)(1\ 8)(1\ 6)|.$$

È noto che rispetto ad una di queste, le rimanenti dodici rette si scindono in $1 + 6 + 4 + 1$ che sono:

$$(2\ 3) - (5\ 7)(5\ 8)(5\ 6)(7\ 8)(7\ 6)(8\ 6) - (4\ 5)(4\ 7)(4\ 8)(4\ 6) - (1\ 4),$$

di cui la prima taglia tutte quattro le rette della quadrupla (quadrisecante), le seconde ne tagliano solo due (bisecanti), le altre quattro ne tagliano solo una (unisecante) e finalmente l'ultima non ne taglia alcuna (zerosecante). Questa è appunto quella retta che colla quadrupla forma una *quintupla gobba*.

Si ha subito che le quattro rette del terzo gruppo formano pure una quadrupla di 2.^a specie, e che inoltre (2 3) ne è la zerosecante, e (1 4) la quadrisecante. Di più le sei rette del 2.^o gruppo sono pure bisecanti per questa

(*) BERZOLARI, Mem. cit., § 7.

quadrupla, e le rette (1 5), (1 7), (1 8), (1 6) ne sono le unisecanti. Possiamo quindi concludere:

« Le 4 unisecanti di una quadrupla di 2.^a specie formano pure una quadrupla di 2.^a specie. Inoltre fra le due quadruple c'è questa corrispondenza: le bisecanti della prima lo sono pure per la seconda, la quadrisecante e la zerosecante della prima sono rispettivamente la zerosecante e la quadrisecante per la seconda, e le 4 unisecanti della seconda formano la prima. »

Dunque ogni quadrupla di 2.^a specie ne individua un'altra, che diremo la coniugata, viceversa questa individua la prima.

L'insieme di due tali quadruple diremo *biquadruple di 2.^a specie* per distinguerla dall'analogia formata con quelle di 1.^a specie. Esistendo, come è noto, 80 quadruple di 2.^a specie, segue che:

« Le biquadruple di 2.^a specie sono 40. »

Osservando poi che la quadrisecante della quadrupla considerata è (2 3), e quella della sua coniugata è (1 4), e che le due rette (2 3), (1 4) si tagliano, possiamo aggiungere:

« Ogni biquadruple di 2.^a specie individua un piano tritangente di S_4 . »

Si ha quindi questa corrispondenza tra le biquadruple di 2.^a specie ed i piani tritangenti di S_4 , che sono appunto 40.

Consideriamo le otto rette:

$$(2\ 3), (1\ 4), (5\ 7), (5\ 8), (5\ 6), (7\ 8), (7\ 6), (8\ 6),$$

escluse dalla biquadruple. Si vede immediatamente che con esse si ponno formare altre quattro biquadruple di 2.^a specie, che sono:

$$\left| \begin{array}{cccc} (2\ 3) & (5\ 7) & (5\ 8) & (5\ 6) \\ (1\ 4) & (8\ 6) & (7\ 6) & (7\ 8) \end{array} \right| (a) \qquad \left| \begin{array}{cccc} (2\ 3) & (7\ 5) & (7\ 6) & (7\ 8) \\ (1\ 4) & (6\ 8) & (5\ 8) & (5\ 6) \end{array} \right| (c)$$

$$\left| \begin{array}{cccc} (2\ 3) & (8\ 7) & (8\ 5) & (8\ 6) \\ (1\ 4) & (5\ 6) & (7\ 6) & (7\ 5) \end{array} \right| (b) \qquad \left| \begin{array}{cccc} (2\ 3) & (6\ 8) & (6\ 7) & (6\ 5) \\ (1\ 4) & (7\ 5) & (8\ 5) & (7\ 8) \end{array} \right| (d)$$

Chiamando *coniugate* due biquadruple di 2.^a specie che contengono tutte le 16 rette della superficie, si ha che:

« Ogni biquadruple di 2.^a specie ha 4 biquadruple di 2.^a specie coniugate. »

E ancora:

« Esistono $\frac{40 \cdot 4}{2} = 80$ coppie di biquadruple di 2.^a specie coniugate. »

Consideriamo una di queste coppie, ad es. quella formata dalla biquadrupla considerata e dalla (a). Le quattro quadrisecanti delle quattro quadruple in essa contenute sono: (2 3), (1 4), (1 5), (5 4). Ora queste, evidentemente, formano il quadrilatero circolare chiuso:

$$(1\ 5 \cdot 2\ 3 \cdot 1\ 4 \cdot 4\ 5).$$

Dunque:

« Le quadrisecanti delle 4 quadruple contenute in una coppia di biquadruple di 2.^a specie coniugate formano un quadrilatero circolare. »

Od anche considerando i due piani (2 3 · 1 4), (1 5 · 4 5) individuati dalle due biquadruple, possiamo dire:

« Ogni coppia di biquadruple di 2.^a specie coniugate individua un diedro « ordinario di 1.^a specie. »

§ 8. Sottogruppo di sostituzioni che lasciano fissa una quintupla gobba.

Si sa che colle 16 rette di S_4 si possono formare 16 *quintuple*, cioè 16 assieme di 5 rette che a due a due non si incontrano. Ci proponiamo ora di studiare la loro configurazione.

Chiaramente tale studio corrisponde alla considerazione del gruppo che si ha prendendo per *elementi* non già le 16 *rette*, o i 40 *piani* tritangenti (come abbiamo fatto per i poliedri circolari), ma le 16 *quintuple*. Si ha allora un gruppo *isomorfo oloedricamente* con quello delle 16 rette.

Noi incominceremo senz'altro a considerare un suo sottogruppo, propriamente quello che non sposta una delle 16 quintuple: ma prima di fare questo sarà bene premettere le seguenti considerazioni.

È facile verificare che nella nostra rappresentazione *grafica* queste 16 quintuple possono essere di 3 tipi diversi (li diremo tipo I, II, III), e ce ne sono rispettivamente una, cinque e dieci. Evidentemente in ciascuno di tali tipi le cinque rette della quintupla insieme alle due fisse (1 2), (1 3) formeranno *un sistema di ARONHOLD*. Ora per il tipo I questo è del primo tipo (vedi PASCAL, Mem. I, Tav. II, fig. 11.^a), e per gli altri due del secondo tipo, e precisamente pel tipo II il triangolo è costantemente (1 · 2 · 3), mentre pel tipo III questo è variabile.

Possiamo allora rappresentare brevemente una quintupla del tipo I (che noi diremo semplicemente una quintupla I) con [1], una quintupla II col numero corrispondente al centro del fascio chiuso tra parentesi [], e finalmente

una quintupla III coi tre numeri corrispondenti ai vertici del triangolo chiusi tra parentesi (*). Con questa notazione le 16 quintuple possono essere rappresentate brevemente così:

- I. [1]
 II. [5], [7], [8], [6], [4]
 III. [5 · 7 · 8], [5 · 7 · 6], [5 · 7 · 4], [5 · 8 · 6], [5 · 8 · 4],
 [5 · 6 · 4], [7 · 8 · 6], [7 · 8 · 4], [7 · 6 · 4], [8 · 6 · 4].

Supponiamo allora che la quintupla fissa sia [1]. Allora, evidentemente, permutando i cinque punti $4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$ in tutti i modi possibili la [1] non varia, onde ricaviamo che:

« Il sottogruppo che lascia fisso una quintupla è isomorfo col gruppo « simmetrico di 5 elementi. »

È chiaro che, per le sostituzioni di questo sottogruppo, ogni quintupla II non può che tornare in una quintupla II, e così ogni quintupla III non può che tornare in una quintupla III, ossia non può mai una quintupla II passare in una III e viceversa. Dunque:

« Il sottogruppo che lascia fisso una quintupla scinde le rimanenti in « $5 + 10$. »

Osservando poi che ciascuna quintupla II ha nessuna retta comune con [1], e che invece ciascuna delle III ha sempre in comune con [1] due rette, si ha:

« Vi sono 10 quintuple che con una data hanno due rette comuni e 5 « che hanno colla stessa nessuna retta comune. »

E ancora:

« Esistono 40 coppie di quintuple aventi zero rette in comune ed 80 aventi « due rette in comune. »

Chiameremo (come già fece il prof. PASCAL nello studio della configurazione delle 36 bisestuple gobbe di S_3) assieme (terna, quaterna, ecc.) di 1.^a categoria un assieme di quintuple aventi a 2 a 2 nessuna retta in comune, e assieme di 2.^a categoria un assieme di quintuple aventi a 2 a 2, due rette in comune.

Passeremo ora senz'altro a dimostrare le principali loro proprietà.

(*) I due primi simboli non si possono confondere tra loro, perchè la quintupla I è unica ed ha per centro del fascio costantemente il punto 1, mentre una quintupla II non può mai averlo.

ASSIEMI DI 1.^a CATEGORIA.

§ 9. Coppie di quintuple. — Gruppo di sostituzioni corrispondenti.

Consideriamo una coppia di 1.^a categoria, ad es. la coppia formata dalle due quintuple [1] e [5]. Seguendo i soliti princìpi si ha che le sostituzioni del gruppo, che non la spostano, si riducono alle permutazioni fra i quattro punti $7 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4$, le quali evidentemente non muovono le due quintuple, e ad una sostituzione che permuta tra loro le quintuple stesse. Si ricava quindi che l'ordine di un tale gruppo è $2 \cdot 4!$

Di qui segue immediatamente che se le due quintuple della coppia sono fisse, allora sono anche fisse le due rette (1 5) e (2 3) che si tagliano, e però:

« Il gruppo che lascia fisso una coppia (di 1.^a categoria) di quintuple, lascia fisso una coppia di rette che si tagliano, e quindi il piano tritante corrispondente. »

Osservando poi il quadro delle 16 quintuple (§ 8) si ha che per le sostituzioni del gruppo, che stiamo considerando, le quintuple III si scindono in $6 + 4$, e che queste ultime sono equivalenti alle quattro quintuple II. Inoltre si verifica facilmente che le prime 6 hanno due rette comuni con ciascuna quintupla della coppia, e quindi 4 rette in comune colla coppia, mentre le altre 8 hanno solo 2 rette in comune colla coppia. Dunque:

« Ad ogni coppia di 1.^a categoria è correlato un piano. Rispetto ad una tale coppia le altre 14 quintuple si scindono in $8 + 6$, di cui le prime hanno due rette in comune e le altre, quattro, colla coppia considerata. »

Risulta dunque che:

« Non esistono al di là delle coppie altri assieme di quintuple aventi a due a due zero rette in comune. »

Consideriamo le sei quintuple:

$$\begin{aligned} a' &\equiv [5 \cdot 7 \cdot 8], & b' &\equiv [5 \cdot 6 \cdot 4], & a'' &\equiv [5 \cdot 7 \cdot 6], & b'' &\equiv [5 \cdot 8 \cdot 4], \\ & & & & a''' &\equiv [5 \cdot 7 \cdot 4], & b''' &\equiv [5 \cdot 8 \cdot 6], \end{aligned}$$

del 2.^o gruppo. Si vede facilmente che ciascuna di esse ne ha un'altra, ed una sola, con cui forma una coppia, quindi esse si possono riunire (ed in una sola maniera) in 3 coppie. Dunque:

« Ad una coppia di 1.^a categoria ne sono associate 3 altre che insieme ad essa costituiscono una quaderna di coppie. »

Detto $a \equiv [1]$, $b \equiv [5]$, si ha la quaderna:

$$\begin{array}{cc} a & b \\ a' & b' \\ a'' & b'' \\ a''' & b''' \end{array}$$

Esaminando questa quaderna si vede inoltre che:

« In una quaderna di coppie di 1.^a categoria due quintuple poste in una stessa orizzontale formano una coppia di 1.^a categoria, e due non poste in una stessa orizzontale ne formano una di 2.^a. »

E ancora:

« Ogni quaderna di coppie di 1.^a categoria è individuata da una qualunque delle quattro coppie in essa contenute. »

Considerando poi le otto quintuple escluse dalla quaderna si ha:

« Le otto quintuple escluse da una quaderna si distribuiscono (ed in un solo modo) in un'altra quaderna. »

Questa quaderna e la data esauriscono tutte le 16 quintuple. Due tali quaderne le diremo coniugate.

« Colle 16 quintuple si possono quindi formare 5 coppie di quaderne coniugate. »

Abbiamo con ciò il modo di costruire, mediante le 16 quintuple della configurazione, le radici dell'equazione di 5.^o grado risolvente [di ordine più basso (*)] di quella di 16.^o, da cui dipende il problema delle 16 rette della superficie.

ASSIEMI DI 2.^a CATEGORIA.

§ 10. Coppie e terne di quintuple. — Gruppi di sostituzioni corrispondenti.

Il sottogruppo studiato nel § 8 è transitivo nelle 10 quintuple che hanno colla quintupla data 2 rette in comune, quindi l'ordine del sottogruppo che lascia fisso anche una di queste 10 sarà $\frac{5!}{10}$, e però l'ordine di quello che lascia fisso il complesso delle due quintuple sarà doppio, e propriamente 4!

(*) JORDAN, *Substitutions*, pag. 309.

In quanto alle sue sostituzioni si ha, supponendo che la coppia fissa sia [1] [5 · 7 · 8], che esse si riducono alla permutazione del punto 4 con 6, e dei rimanenti tre punti 5 · 7 · 8 tra loro (e queste sostituzioni non muovono le due quintuple), e ad una sostituzione che permuta tra loro le quintuple stesse. Le quintuple II si scindono allora in 3 + 2, e le quintuple III in 6 + 3, e le prime 3 delle II sono equivalenti a queste ultime 3. Dunque rispetto ad una coppia le rimanenti 14 quintuple si scindono in 2 + 6 + 6.

Considerando poi le quintuple di ciascuno di questi gruppi, in relazione colla coppia data, si ha:

« Rispetto ad una coppia di 2.^a categoria le altre 14 quintuple si scindono in 2 + 6 + 6, di cui le prime formano coppie di 1.^a categoria con ciascuna delle date, le altre 6 formano coppie di 1.^a categoria con una delle date e di 2.^a coll'altra, e finalmente le ultime 6 formano coppie di 2.^a categoria con ciascuna delle date. »

Di qui segue che:

« Ogni coppia appartiene a 6 terne. Vi sono perciò 160 terne. »

Considerando le 2 quintuple [4] e [6] del 1.^o gruppo si vede che esse formano una coppia di 2.^a categoria. Dunque:

« Ogni coppia di 2.^a categoria ne individua un'altra. Questa è formata dalle quintuple che formano coppie di 1.^a categoria con ciascuna quintupla della coppia data. »

Passando alle terne si vede che le tre quintuple contenute in una terna hanno sempre in comune una retta.

Così per la terna:

$$[1] - [5 \cdot 7 \cdot 8] - [5 \cdot 7 \cdot 6],$$

questa retta è la (14). Dunque possiamo dire:

« Ogni terna di quintuple individua una retta, che è la retta comune alle 3 quintuple della terna. »

Considerando al solito il gruppo delle sostituzioni corrispondenti alla terna presa in esame, si ricava che:

« Rispetto ad una terna le altre quintuple si scindono in 3 + 6 + 3 + 1, le prime 3 hanno 2 rette in comune con ciascuna di quelle della terna, le seconde hanno 2 rette in comune con 2 delle quintuple della terna e zero rette coll'altra, le altre 3 hanno 2 rette in comune con una sola delle quintuple della terna e zero colle altre due, e finalmente l'ultima forma coppie di 1.^a categoria con ciascuna di quelle della terna data. »

Notiamo inoltre che le prime tre non sono equivalenti tra loro, ma per le sostituzioni del gruppo si scindono in $2 + 1$

$$[5 \cdot 8 \cdot 6] [7 \cdot 8 \cdot 6] - [5 \cdot 7 \cdot 4].$$

« *Esistono quindi 2 specie di quaterne.* »

Consideriamo le tre quintuple [8], [6], [8 · 4 · 6] del terzo gruppo. Si vede facilmente che esse formano una terna. Inoltre è facile verificare che le tre quintuple aventi con questa solo due rette in comune sono precisamente le tre quintuple della terna data. Chiamando *coniugate* due terne che sono in questa relazione, possiamo aggiungere:

« *Ogni terna di quintuple ne ha un'altra coniugata. Si possono quindi formare 80 coppie di terne coniugate.* »

§ 11. Quaterne di 1.^a e di 2.^a specie.

Gruppi di sostituzioni corrispondenti.

Abbiamo visto nel paragrafo precedente che le tre quintuple aventi due rette in comune con ciascuna di quelle della terna data non sono equivalenti tra loro, ma si scindono in $2 + 1$. Abbiamo perciò due specie di quaterne, rappresentate da:

$$[1] \cdot [5 \cdot 7 \cdot 8] \cdot [5 \cdot 7 \cdot 6] \cdot [5 \cdot 7 \cdot 4]$$

$$[1] \cdot [5 \cdot 7 \cdot 8] \cdot [5 \cdot 7 \cdot 6] \cdot [5 \cdot 8 \cdot 6],$$

che diremo rispettivamente di 1.^a e di 2.^a specie. Una terna appartenendo ad una quaterna di 1.^a specie ed a 2 di 2.^a specie, segue che:

« *Vi sono 40 quaterne di 1.^a specie, ed 80 quaterne di 2.^a specie.* »

Considerando le quattro quintuple contenute nella 2.^a di tali quaterne si vede ch'esse hanno in comune la retta (1 4), onde possiamo dire:

« *Ogni quaterna di 2.^a specie individua una retta, che è la retta comune alle 4 quintuple della quaterna.* »

Questa può essere una proprietà geometrica che differenzia le 2 specie di quaterne. Ma ce ne sono molte altre, come ora vedremo.

Evidentemente in una quaterna di 1.^a specie si impiegano 12 rette, mentre in una di 2.^a specie solo 11. Consideriamo le rette rimanenti.

Nel 1.^o caso sono:

$$(8 \ 6) \ (8 \ 4) \ (6 \ 4) \ (2 \ 3).$$

Nel 2.° caso sono:

(2 3) (4 6) (4 5) (4 7) (4 8).

Cioè nel 1.° caso abbiamo una quadrupla di 1.^a specie, e nel 2.° una quintupla, od anche una quadrupla di 2.^a specie colla sua zerosecante. Dunque:

« Le 2 specie di quaterne sono distinte anche dalle proprietà caratteristiche seguenti: le rette escluse da una quaterna di 1.^a specie formano una quadrupla di 1.^a specie, e quelle escluse da una di 2.^a specie formano una quadrupla di 2.^a specie colla sua zerosecante. »

E ancora:

« La retta individuata (come sopra) da una quaterna di 2.^a specie è la cinquesecante della quintupla da essa esclusa. »

Considerando i gruppi di sostituzioni corrispondenti rispettivamente ad una quaterna di 1.^a, e ad una di 2.^a specie, si ricava:

« Rispetto ad una quaterna di 1.^a specie, le altre 12 quintuple si scindono in 8 + 4, di cui le prime hanno zero rette in comune con una delle quintuple della quaterna e due con ciascuna delle altre 3, mentre le altre 4 hanno 2 rette in comune con una delle quintuple della quaterna e zero con ciascuna delle rimanenti. »

Come si vede tali quaterne non danno luogo a quintine. Invece:

« Rispetto ad una quaterna di 2.^a specie le altre 12 quintuple si scindono in 1 + 4 + 6 + 1, di cui la prima ha due rette in comune con ciascuna di quelle della quaterna, le altre 4 hanno nessuna retta in comune con una e due rette in comune con ciascuna delle 3 rimanenti, le altre 6 hanno due rette in comune con due delle quintuple e nessuna colle altre due, e finalmente l'ultima forma coppia di 1.^a categoria con ciascuna delle quintuple della quaterna. »

E come si vede:

« Ogni quaterna di 2.^a specie appartiene ad una quintina. »

« Vi sono quindi $\frac{80 \cdot 1}{5} = 16$ quintine. »

Considerando poi le 4 rette individuate dalle 4 terne contenute in una quaterna di 1.^a specie, si ha:

« Le 4 rette che le quintuple di una quaterna di 1.^a specie hanno in comune a tre a tre formano una quadrupla di 1.^a specie, coniugata di quella formata dalle 4 rette escluse dalla quaterna stessa. »

Evidentemente una proprietà analoga non potrà avere luogo per le qua-

terne di 2.^a specie, le 4 terne contenute nelle quali individuano una stessa retta.

Consideriamo le 4 quintuple del 2.^o gruppo.

Per la quaterna di 1.^a specie sono:

$$[8], [6], [4], [8 \cdot 6 \cdot 4].$$

Per quella di 2.^a specie sono:

$$[5], [5 \cdot 7 \cdot 4], [5 \cdot 8 \cdot 4], [5 \cdot 4 \cdot 6].$$

Come si vede nel 1.^o caso si ha una quaterna di 1.^a specie, e nel 2.^o caso una di 2.^a specie. Dunque:

« Le 4 quintuple aventi due rette in comune con una delle quintuple di una quaterna di 1.^a specie e zero rette con ciascuna delle tre rimanenti, formano una quaterna di 1.^a specie. »

« Le 4 quintuple aventi zero rette in comune con una delle quintuple di una quaterna di 2.^a specie e due rette in comune con ciascuna delle tre rimanenti formano una quaterna di 2.^a specie. »

Quindi tanto una quaterna di 1.^a specie come una di 2.^a ne ha un'altra coniugata, che è della stessa specie.

Chiamando rispettivamente *bi-quaterna di 1.^a e di 2.^a specie* l'assieme di 2 tali quaterne, abbiamo:

« Vi sono 20 *bi-quaterne di 1.^a specie* e 40 *bi-quaterne di 2.^a specie*. »

È facile poi verificare che:

« La *quadrupla di 1.^a specie esclusa da una quaterna di 1.^a specie è coniugata di quella esclusa dalla quaterna coniugata.* »

E ancora:

« Una *biquaterna di 1.^a specie esaurisce tutte le 16 rette.* »

Così:

« Le *quintuple escluse da due quaterne di 2.^a specie coniugate formano una coppia di 1.^a categoria.* »

Od anche:

« Se nella *quintupla esclusa da una quaterna di 2.^a specie si fa astrazione della retta individuata dalla quaterna coniugata, ed in quella esclusa da questa si fa astrazione della retta individuata dalla prima, si ottiene una biquadrupla di 2.^a specie (§ 7).* »

Inoltre si ha:

« Una *biquaterna di 2.^a specie esaurisce tutte le 16 rette della superficie.* »

Annali di Matematica, tomo XXI.

Consideriamo infine le otto quintuple escluse rispettivamente da una biquaterna di 1.^a e di 2.^a specie (vedi quadro § 8).

Nel 1.^o caso sono:

$$[5], [7], [4 \cdot 5 \cdot 6], [4 \cdot 6 \cdot 7], [5 \cdot 6 \cdot 8], [6 \cdot 7 \cdot 8], \\ [4 \cdot 5 \cdot 8], [4 \cdot 7 \cdot 8].$$

Nel 2.^o caso sono:

$$[7], [8], [6], [4], [7 \cdot 8 \cdot 6], [7 \cdot 8 \cdot 4], [7 \cdot 4 \cdot 6], [8 \cdot 6 \cdot 4].$$

È facile verificare che colle prime si può formare un'unica biquaterna di 1.^a specie, e colle seconde invece si possono formare 4 biquaterne di 2.^a specie. Chiamando *coniugate* 2 biquaterne che in tal modo contengono tutte le 16 quintuple, possiamo dire:

« Ogni biquaterna di 1.^a specie ne ha un'altra coniugata, ed ogni biquaterna di 2.^a specie ne ha 4 altre ad essa coniugate. »

Dunque:

« Vi sono 10 coppie di biquaterne di 1.^a specie coniugate, e 80 coppie di biquaterne di 2.^a specie coniugate. »

Considerando le 4 rette individuate dalle 4 quaterne contenute in una coppia di biquaterne di 2.^a specie coniugate, possiamo infine aggiungere:

« Ad ogni coppia di biquaterne di 2.^a specie coniugate corrisponde un quadrilatero circolare. »

§ 12. Quintine. — Gruppo di sostituzioni corrispondenti.

Sappiamo che ogni quaterna di 2.^a specie appartiene ad una quintina, e che però vi sono 16 quintine. Consideriamone una, ad es.:

$$[1] \cdot [5 \cdot 7 \cdot 8] \cdot [5 \cdot 7 \cdot 6] \cdot [5 \cdot 8 \cdot 6] \cdot [7 \cdot 8 \cdot 6].$$

Come si vede la retta (1 4) è comune a tutte cinque le quintuple, quindi:

« Ogni quintina individua una retta. »

Considerando al solito il gruppo delle sostituzioni che lasciano fisso questa quintina, si ricava:

« Rispetto ad una quintina le altre 11 quintuple si scindono in 1 + 10, di cui la prima forma coppie di 1.^a categoria con ciascuna di quelle della quintina, e le altre 10 formano coppie di 1.^a categoria con 2 soltanto delle quintuple della quintina e coppie di 2.^a categoria con ciascuna delle rimanenti. »

Continuazione del saggio sul gruppo delle sostituzioni fra le rette della superficie cubica.

(Memoria III di ERNESTO PASCAL, a Pavia.)

Per chi ha seguito l'ordine di idee sviluppate negli altri miei lavori precedenti, non occorre prefazione a questa ultima Memoria colla quale termino i miei studi sulla configurazione delle rette della superficie di 3.^o ordine.

Prendo intanto questa occasione per indicare qui la lista dei miei ultimi lavori pubblicati nei *Rendiconti dell'Accademia dei Lincei*, che, pure trattando argomenti diversi, hanno però coi lavori da me pubblicati in questo Giornale un intimo legame, e con essi, esplicano completamente il programma che mi era tracciato qualche anno fa, cominciando questi studi.

Essi sono:

Sulle 315 coniche coordinate alla curva piana generale di 4.^o ordine (4 Dicembre 1892).

Ricerche sugli aggruppamenti formati colle 315 coniche (18 Dic. 1892).

Sugli aggruppamenti tripli di coniche coordinate alla quartica piana (8 Gennaio 1893).

Su di un'estensione della configurazione delle 10 rette della superficie di 5.^o ordine a quintica doppia (22 Gennaio 1893).

Osservazioni sui gruppi di sostituzioni fra le caratteristiche dispari di genere 3 e di genere 4 (5 Febbraio 1893).

Sulla configurazione dei 120 piani tritangenti della sestica storta di genere 4 (5 Marzo 1893).

Sui piani tritangenti della sestica storta (19 Marzo 1893).

Un altro lavoro che è dello stesso indirizzo di questi, è quello del dott. PERENO pubblicato da poco tempo negli *Annali di Matematica*.

Ed infine ricorderò che un breve riassunto dei principali risultati ottenuti da me nelle Mem. II e III è già comparso in quattro Note presentate all'*Istituto Lombardo* (Novembre 1892, Gennaio 1893).

Annali di Matematica, tomo XXI.

§ 1. Introduzione allo studio delle ennuple formanti una coppia di triedri coniugati. Gruppo appartenente ad un'ennupla.

Intenderemo da ora in poi per *ennupla* uno di quelli assieme di nove rette colle quali si possono costituire 6 piani e solo sei, formanti una coppia di triedri coniugati, studiati da CREMONA nei lavori citati nella Mem. II.

Abbiamo già visto nella precedente Memoria che nella rappresentazione geometrica tali ennuple possono avere solo 3 figure diverse, che sono le tre parti della fig. I, che noi distingueremo rispettivamente colle indicazioni di tipo I, II, III; e di tali ennuple ve ne sono 120, cioè 90 del tipo I, 20 del tipo II e finalmente 10 di III. Le nove rette di ciascuna ennupla sono così combinate che, se una ne incontra un'altra, fra esse vi esisterà sempre la terza che con quelle due completa il piano, e inoltre ognuna ne incontra solo quattro altre, per modo che con quelle rette non si possono formare più che sei piani.

Osserviamo prima di tutto che il gruppo che lascia fissa una delle ennuple è lo stesso di quello che lascia fissa la coppia di triedri coniugati, e che noi abbiamo già studiato nel § 3 della Memoria precedente, e abbiamo visto che ha per ordine $2 \cdot 3! 3! 3!$, mentre poi sappiamo che il sottogruppo che lascia fisse le singole nove rette ha per ordine $3!$ ed è isomorfo col gruppo simmetrico di 3 elementi.

Però nel lavoro precedente lo studio di tal gruppo ci era capitato per incidente, e ne abbiamo quindi trattato brevemente. Ora invece lo vogliamo studiare più intimamente.

Avevamo già trovato che le 18 rette restanti si possono distribuire in sei sistemi d'imprimitività che chiamammo rispettivamente a, b, c, d, e, f , e che poi il gruppo fra questi sistemi è a sua volta imprimitivo con due sistemi d'imprimitività rappresentati rispettivamente da $a, b, c; d, e, f$.

Quindi ne ricaviamo che il gruppo totale lo possiamo immaginare con due soli sistemi d'imprimitività che sono rappresentati rispettivamente dalle 9 rette di a, b, c , e dalle nove rette di d, e, f , e tali sistemi sono disegnati nelle due parti A, B della fig. II.

Ora si vede subito che A, B sono a loro volta due ennuple perchè esse formano un assieme dello stesso tipo di I (fig. I). Onde ne deduciamo la proprietà nota che le 18 rette restanti esterne od una ennupla si riuniscono *in una sola maniera* in due altre ennuple che potremo chiamare le coniugate

alla prima, e le tre ennuple (formanti ciò che si suol chiamare una *terna*) esauriscono tutte le 27 rette.

Per le sostituzioni del gruppo che lascia inalterata la fig. I, i sistemi *A*, *B* o restano ciascuno inalterato, o si permutano fra loro.

Possiamo intanto ricavare questo risultato:

« Le due ennuple coniugate ad una del tipo I sono del medesimo tipo I e « si ottengono da quella con opportuna permutazione dei punti fondamentali. »

Ci si presenta quindi la quistione di ricercare invece di che tipo sono le ennuple coniugate ad una del tipo II o III.

Ora avendo già dimostrato che ad una ennupla ne corrispondono solo due coniugate e non più, è chiaro che se posso costruire due altre ennuple senza rette comuni, e formate solo colle rette esterne al tipo II, io potrò dire che queste sono le uniche coniugate del tipo II; e così pel tipo III.

Ma evidentemente formando la figura simile a quella del tipo II e ottenuta da quella col sostituire i punti 4, 6, 8 ai punti 3, 5, 7, e poi formando la figura del tipo III, noi abbiamo tre ennuple nelle condizioni volute, quindi possiamo dire:

« Le due ennuple coniugate ad una del tipo II sono una del tipo II e « l'altra del tipo III; e le due coniugate ad una del tipo III sono ambedue « del tipo II. »

Ogni ennupla del tipo III ha dunque per corrispondenti due del tipo II, ed effettivamente quelle sono in numero metà di queste.

Una terna di questo genere l'abbiamo rappresentata colla fig. III.

Possiamo ora rappresentare le sostituzioni del gruppo che lascia fissa la prima delle ennuple di quella terna. Potremmo ricavarle direttamente, ma possiamo anche giovarci dei risultati già trovati nel citato § 3 della Memoria precedente.

Ogni ennupla si può in *due* modi scomporre in tre terne gobbe di rette. Così la seconda ennupla della fig. III dà luogo alle due serie di terne gobbe

$$\begin{array}{l} 14 \cdot 16 \cdot 18; \quad 24 \cdot 26 \cdot 28; \quad 68 \cdot 48 \cdot 64 \quad) \\ 14 \cdot 24 \cdot 68; \quad 16 \cdot 26 \cdot 48; \quad 18 \cdot 28 \cdot 64, \quad) \end{array} \quad (A)$$

e così la terza ennupla dà analogamente

$$\begin{array}{l} 34 \cdot 36 \cdot 38; \quad 54 \cdot 56 \cdot 58; \quad 74 \cdot 76 \cdot 78 \quad) \\ 43 \cdot 45 \cdot 47; \quad 63 \cdot 65 \cdot 67; \quad 83 \cdot 85 \cdot 87, \quad) \end{array} \quad (B)$$

e si vede che le terne della seconda serie sono formate prendendo una retta da ciascuna delle terne della prima serie.

Da questo specchietto si vede che una terna della prima serie di A ha con una della prima serie di B , una relazione completamente diversa di quella che ha con una della seconda serie di B ; per es. ogni retta della prima di A incontra una delle rette della prima di B , [(14) incontra (34); (16) incontra (36); (18) incontra (38)]; ma invece paragonando la terna 14 · 16 · 18 della prima serie di A colla terna 43 · 45 · 47 si trova che queste tre incontrano tutte una medesima retta di quella terna cioè (14) e non incontrano le altre due.

A questa distinzione si collega strettamente l'altra che dà origine ad ennaedri di due diverse specie, studiati da CREMONA, ma noi non ci fermeremo su questo.

Considereremo solo le due prime linee di A , e B , e osserveremo che a ciascuna delle nove combinazioni di una delle tre prime terne con una delle tre seconde corrisponde una delle rette dell'ennupla data, come quella che completa i tre piani che si possono formare con una di quelle combinazioni; così per es. le tre rette 14 · 16 · 18 incontrano rispettivamente le altre tre 43 · 63 · 83, e le tre coppie sono poi incontrate tutte dalle rette (23).

Chiamando $a b c d e f$ rispettivamente quelle sei terne si ha che le permutazioni fra le sei terne debbono essere tali da lasciare inalterata la funzione

$$\varphi(a + b + c) + \varphi(d + e + f)$$

(φ simbolo di una funzione simmetrica), e tenendo poi conto della formazione delle terne della seconda serie di A o B mediante quelle della prima, e delle relazioni fra le singole rette di una terna di A e quelle di una terna di B , possiamo stabilire una relazione univoca fra le rette di una terna e quelle di ogni altra.

Possiamo disporre le 18 rette nel seguente quadro:

14	24	68	34	54	74	α
16	26	48	36	56	76	β
18	28	46	38	58	78	γ
a	b	c	d	e	f	

e allora le sostituzioni fra le 18 rette sono quelle che spostano il complesso delle linee e delle colonne di questo quadro. E propriamente le linee si pos-

sono permutare fra loro in modo arbitrario (in $3!$ modi); e le colonne possono sottoporsi ai seguenti cangiamenti, cioè, le tre prime possono permutarsi in modo arbitrario fra loro, le tre ultime anche in modo arbitrario e indipendente dallo spostamento delle prime, e infine il complesso delle tre ultime può permutarsi col complesso delle tre prime.

Si hanno così le $2 \cdot 3! 3! 3!$ sostituzioni.

In quanto poi alle 9 rette della ennupla data, esse si permutano in corrispondenza della permutazione delle coppie:

ad	corrispondente a	2 3
ae	"	2 5
af	"	2 7
bd	"	1 3
be	"	1 5
bf	"	1 7
cd	"	5 7
ce	"	7 3
cf	"	3 5.

Stabilito così il gruppo delle sostituzioni possiamo passare a esaminare come si dispongono tutte le altre ennuple in rapporto a quella fissa.

Possiamo utilmente introdurre una notazione che ci serva a rappresentare una speciale ennupla. Una figura come I (fig. I) è individuata quando sieno dati i punti 3, 5; 4, 6, e quindi la indicheremo con $(3, 5; 4, 6)$ (*); e così la II la indicheremo con $(3, 5, 7)$ e la III con $(3, 5, 7; 4, 6, 8)$.

Rispetto alla $(3, 5, 7)$ le ennuple del tipo I si ordinano in

$(3, 5; 4, 6)$	$(4, 6; 3, 5)$	in numero di	$9 + 9$	$\equiv (\alpha_1)$
$(3, 5; 4, 7)$	$(4, 7; 3, 5)$	"	$9 + 9$	$\equiv (\alpha_2)$
$(3, 4; 5, 6)$	"	"	36,	$\equiv (\alpha_3)$
$(3, 4; 6, 8)$	$(6, 8; 3, 4)$	"	$9 + 9$	$\equiv (\alpha_4)$,

(con tutte le altre che si ricavano da questè permutando i punti 3, 5, 7 fra loro, e i punti 4, 6, 8 fra loro).

(*) Notando che il tipo I non è simmetrico, come gli altri, nei due punti 1, 2, si vede che l'ordine con cui debbono, nella notazione, farsi succedere quelle due coppie non è indifferente.

Ora colle regole date sopra per formare le sostituzioni del gruppo possiamo far vedere che una figura (α_1) della 1.^a linea è equivalente ad una della quarta (α_4) .

Perchè se facciamo la sostituzione

$$(\alpha\beta\gamma)(ebdc\dots)(fa\dots),$$

giusta le regole esplicate sopra, si vede che la 1.^a figura diventa esattamente la quarta. Esaminando le figure delle prime tre linee in rapporto alla fondamentale si vede che una della prima linea (α_1) ha 2 rette gobbe in comune colla fondamentale; una della seconda linea (α_2) ha due piani in comune (due piani passanti per una retta) e una della terza (α_3) ha un piano in comune.

Vediamo analogamente come si ordinano le ennuple del tipo II rispetto alla fondamentale.

Oltre la (4, 6, 8) possiamo ordinare le altre in

$$(3, 5, 4) \text{ in numero di } 9, \equiv (\alpha_5)$$

$$(3, 4, 6) \quad \text{ " } \quad 9, \equiv (\alpha_6),$$

con tutte quelle che si ricavano da queste facendo le dette permutazioni dei punti.

E finalmente le ennuple del tipo III si possono distinguere in una sola categoria [oltre (3, 5, 7; 4, 6, 8)], perchè da una qualunque di esse per es.

$$(3, 5, 4; 7, 6, 8) \equiv \alpha_7,$$

colle solite permutazioni dei punti si possono ricavare tutte le altre (in numero di 9).

Ora nella stessa maniera con cui abbiamo proceduto sopra si può vedere che esistono sempre sostituzioni che mutano una figura (α_1) in una (α_6) o in una α_7 ; e una figura α_2 in una α_5 .

Quindi allora si deduce che rispetto ad una ennupla, tutte le altre si scindono in quattro categorie, cioè:

- 1) Le due coniugate.
- 2) 54 aventi due rette (formanti una coppia gobba) in comune colla data.
- 3) 27 aventi due piani comuni colla data (due piani passanti per una retta).
- 4) 36 aventi un sol piano comune colla data.

Questo teorema è noto (*), ma qui non potevamo tralasciare di ricavarlo, sia per esplicare in dettaglio metodi di cui in seguito ci serviremo sempre, sia per stabilire una maggiore completezza e uniformità in tutto il nostro lavoro.

§ 2. Coppie di ennuple con due rette comuni.
Gruppo di sostituzioni della coppia.

Ogni ennupla ne ha, come si sa, 54 altre aventi con essa due rette comuni. Quindi si potranno formare in tutto

$$\frac{120 \cdot 54}{2} = 3240$$

coppie di ennuple in tale posizione, e noi ne sceglieremo una, ed esamineremo come si comportano tutte le altre rispetto alle due della coppia.

Prima però possiamo ricercare facilmente quante ennuple passano per una data coppia gobba di rette.

Sia per es. la coppia gobba (1 3) (2 3); osservando le figure già stabilite si vede subito che non ci possono essere altre figure che quelle di tipo II contenenti questa coppia, e di esse se ne avranno tante per quante sono le combinazioni a due a due dei cinque punti restanti. Quindi possiamo dire:

« Esistono 10 ennuple contenenti una data coppia gobba. »

Fissiamo una coppia di ennuple con due rette in comune, e propriamente ci conviene scegliere quella rappresentata dalla fig. IV.

Se questa coppia deve restar fissa, dovrà restar fisso l'assieme delle due rette (1 3) (2 3), e quindi il triangolo (1 2 3). Onde, per un principio di cui già altre volte ci siamo serviti (**), le sostituzioni appartenenti alla nostra coppia saranno alcune di quelle che lasciano fissa la caratteristica pari base della rappresentazione, e quindi si ridurranno solo a opportune permutazioni dei punti fondamentali.

Ora le permutazioni fra i punti, tali da lasciar fissa la coppia rappresentata dalla fig. IV sono evidentemente solo: la trasposizione dei punti 1, 2; quella dei due punti 5, 7, dei due punti 4, 6 e infine lo scambio di 5, 7 con 4, 6. Si hanno cioè in tutto $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2 \cdot \frac{2 \cdot 3! \cdot 3! \cdot 3!}{54} = 16$ sostituzioni.

(*) Vedi per es. BERTINI, *Contribuzione, ecc.* Annali di Matem., tom. 12, § 1.

(**) Vedi Mem. I, § 8, 23; Mem. II, § 16.

Rappresentate così le sostituzioni appartenenti alla coppia, ne possiamo subito dedurre la separazione fra loro di tutte le altre ennuple, ed esaminare se due ennuple debbono reputarsi, rispetto alla coppia, equivalenti o no. Prima di tutto due ennuple rappresentate con figure di tipi diversi, non potranno certamente allora essere equivalenti.

Limitiamoci ad esaminare solo quelle 53 ennuple che hanno colla prima delle date, due rette in comune, e ricerchiamo quante di esse hanno anche colla seconda la analoga relazione.

È facile vedere che delle $\alpha_1, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_7$ del paragrafo precedente, solo le seguenti soddisfano a questa condizione:

$$\begin{array}{l}
 (5, 7; 4, 6), (4, 6; 5, 7) \\
 (5, 7; 6, 8), (6, 8; 5, 7) \\
 (5, 7; 8, 4), (8, 4; 5, 7) \\
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} (5, 7; 4, 6), (4, 6; 5, 7) \\ (5, 7; 6, 8), (6, 8; 5, 7) \\ (5, 7; 8, 4), (8, 4; 5, 7) \end{array}} \right\} \text{ di tipo } \alpha_1 \\
 \\
 (5, 8; 4, 6), (4, 6; 5, 8) \\
 (7, 8; 4, 6), (4, 6; 7, 8) \\
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} (5, 8; 4, 6), (4, 6; 5, 8) \\ (7, 8; 4, 6), (4, 6; 7, 8) \end{array}} \right\} \text{ di tipo } \alpha_4 \\
 \\
 (5, 4, 8) \\
 (5, 6, 8) \\
 (7, 4, 8) \\
 (7, 6, 8) \\
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} (5, 4, 8) \\ (5, 6, 8) \\ (7, 4, 8) \\ (7, 6, 8) \end{array}} \right\} \text{ di tipo } \alpha_6 \\
 \\
 (5, 6, 7; 4, 5, 8), (3, 8, 7; 5, 4, 6) \\
 (3, 6, 5; 4, 7, 8), (3, 8, 5; 7, 4, 6) \\
 (3, 4, 7; 6, 5, 8), (3, 8, 4; 5, 7, 6) \\
 (3, 4, 5; 6, 7, 8), (3, 6, 8; 5, 7, 4) \\
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} (5, 6, 7; 4, 5, 8), (3, 8, 7; 5, 4, 6) \\ (3, 6, 5; 4, 7, 8), (3, 8, 5; 7, 4, 6) \\ (3, 4, 7; 6, 5, 8), (3, 8, 4; 5, 7, 6) \\ (3, 4, 5; 6, 7, 8), (3, 6, 8; 5, 7, 4) \end{array}} \right\} \text{ di tipo } \alpha_7.
 \end{array}$$

E si può poi vedere subito che colle indicate sostituzioni queste ennuple si separano in 5 categorie distinte rappresentate rispettivamente da

$$\begin{array}{ll}
 c \equiv (5, 7; 4, 6) & \text{in numero di } 2 \\
 c' \equiv (5, 7; 6, 8) & \text{'' } 8 \\
 c'' \equiv (5, 4, 8) & \text{'' } 4 \\
 c''' \equiv (3, 6, 7; 4, 5, 8) & \text{'' } 4 \\
 c^{IV} \equiv (3, 8, 7; 5, 4, 6) & \text{'' } 4.
 \end{array}$$

Possiamo dunque dire:

« Rispetto ad una coppia di ennuple, aventi due rette comuni, tutte le altre che con ciascuna delle due date hanno un'analogha relazione sono in numero di 22, e si separano in cinque categorie $2 + 8 + 4 + 4 + 4$. »

§ 3. Terne di ennuple aventi a due a due una coppia di rette in comune.

Se alla coppia a, b della fig. IV aggiungiamo una delle 22 ennuple trovate nel paragrafo precedente, abbiamo una terna colla proprietà indicata.

Parrebbe a prima vista che si possano ottenere così cinque diverse specie di terne, e ciò sarebbe infatti se aggiungendo ad $a b$ una qualunque delle c si avesse sempre una terna composta simmetricamente mediante le sue tre ennuple. Ma invece si può far vedere che le terne a, b, c e a, b, c' pure contenendo tutte coppie simili, non si possono considerare però formate simmetricamente mediante le loro ennuple.

Ciò si vede subito esaminando le rette che a due a due le ennuple di ciascuna di quelle terne hanno fra loro in comune (vedi fig. V).

Per la terna $a b c$ tali rette sono rispettivamente

$$\left. \begin{array}{l} 24 \cdot 26 \\ 15 \cdot 17 \\ 13 \cdot 23 \end{array} \right\} \quad (\alpha)$$

e per la terna $a b c'$ esse sono invece

$$\left. \begin{array}{l} 26 \cdot 34 \\ 15 \cdot 17 \\ 13 \cdot 23 \end{array} \right\} \quad (\beta)$$

e si riconosce che nel primo caso la coppia di rette $13 \cdot 23$ ha rispetto alle altre due una relazione simmetrica, cioè una delle sue rette incontra le due di una delle coppie, e l'altra incontra le due dell'altra coppia; e questo non si verifica più per nessun'altra delle tre coppie di rette; quindi possiamo dire che nella terna $a b c$ la ennupla c non potrà scambiarsi nè con a nè con b , mentre poi solo a, b potranno scambiarsi fra loro.

Così analogamente nella terna a, b, c' si riconosce che la ennupla b ha una posizione distinta dalle altre due, e d'altra parte poi studiando la configurazione delle sei rette (α) e delle sei rette (β), si vede subito che questa nuova terna è diversa dalla prima.

Stabilita così la dissimetria di queste due prime terne, è evidente che per la natura della enumerazione stabilita nel paragrafo precedente, esse ci debbono ricomparire ciascuna due volte, ma diversamente orientate. Effettivamente si può riconoscere che le terne

$$a b c''', \quad a b c^{IV},$$

sono rispettivamente equivalenti alle a, b, c' , a, b, c .

In quanto alla $a b c''$ essa non può allora che essere simmetrica nei suoi tre elementi; le rette comuni fra le ennuple a due a due sono:

$$\left. \begin{array}{l} 14 \cdot 24 \\ 15 \cdot 25 \\ 13 \cdot 23 \end{array} \right\} \quad (\gamma)$$

e formano un assieme simmetrico.

Possiamo enunciare i seguenti risultati:

« Esistono tre specie diverse di terne di ennuple aventi a due a due « sempre in comune una coppia gobba di rette. Di queste tre terne, le due « prime non sono composte simmetricamente mediante i due elementi, e la « terza è invece composta simmetricamente.

« Ve ne sono:

$$\begin{array}{ll} 60 \cdot 54 \cdot 2 & \text{di 1.}^{\text{a}} \text{ specie } (a, b, c) \\ \frac{60 \cdot 54 \cdot 8}{2} & \text{di 2.}^{\text{a}} \text{ specie } (a, b, c') \\ \frac{60 \cdot 54 \cdot 4}{3} & \text{di 3.}^{\text{a}} \text{ specie } (a, b, c''). \end{array}$$

« Le proprietà caratteristiche delle tre specie sono [come è facile rico- « noscere dai quadri (α) (β) (γ)] che nella prima, colle tre coppie gobbe di « rette che le ennuple hanno in comune a due a due, si possono formare due « terne gobbe non aventi rette in comune, e ciascuna contenuta interamente « in una delle ennuple date; nella seconda colle medesime rette si possono « anche formare due terne gobbe ma non separate, bensì aventi due rette in

« comune, e infine nella terza le medesime rette formano due terne gobbe « separate, ma nessuna contenuta interamente in una delle ennuple date. »

Facilmente si possono ricavare anche questi altri risultati:

« L'ordine del gruppo di sostituzioni che lascia fissa una terna di 1.^a specie « è 8, per la terna di 2.^a specie l'ordine è 4, e invece per la terna di 3.^a specie « l'ordine è 4! . »

Potremmo ora passare a studiare le quaterne, ma preferiamo passare ad un altro genere di considerazioni.

§ 4. Coppie e terne di ennuple aventi a due a due in comune due piani.

Prima di tutto esaminiamo quante ennuple esistono le quali contengono due dati piani passanti per una retta. È già noto che ve ne sono 4; ma lo possiamo subito ritrovare col nostro metodo. Sieno i due piani (1 3 4 2) (1 5 4 2) passanti per la retta (4 2). Le ennuple allora potranno essere solo dei tipi I, II; quelle del tipo I sono:

$$(3, 5; 4, 6); \quad (3, 5; 4, 7); \quad (3, 5; 4, 8),$$

e di quelle del tipo II ce n'è una sola

$$(3, 4, 5);$$

dunque:

« Esistono solo *quattro* ennuple passanti (*) per due piani dati. »

Si può notare qui che le rette esterne a queste quattro figure sono 1 6, 1 7, 1 8, 6 4, 7 4, 8 4, cioè proprio le altre sei rette formanti i rimanenti tre piani passanti per l'asse (2 4).

Da ciò che si è detto nel § 1 risulta che le coppie di ennuple aventi in comune due piani sono di una specie sola e sono in numero di $\frac{120 \cdot 27}{2} = 60 \cdot 27$.

Consideriamo una di queste coppie e sia

$$a_1 \equiv (3, 5; 4, 6) \quad b_1 \equiv (3, 5, 4),$$

passanti per i due piani 1 3 4 2; 1 5 4 2.

(*) Mi si lascino passare ora e in avvenire queste espressioni abbreviative per significare che le ennuple contengono le tre rette che stanno in quei piani.

Le altre 26 che con b_1 hanno due piani in comune sono:

- $(3, 5; 4, 7) \quad (3, 5; 4, 8)$
 $(4, 5; 3, 6) \quad (4, 5; 3, 7) \quad (4, 5; 3, 8)$
 $(3, 4; 5, 6) \quad (3, 4; 5, 7) \quad (3, 4; 5, 8)$
 $(4, 6; 3, 5) \quad (4, 7; 3, 5) \quad (4, 8; 3, 5)$
 $(3, 6; 4, 5) \quad (3, 7; 4, 5) \quad (3, 8; 4, 5)$
 $(5, 6; 3, 4) \quad (5, 7; 3, 4) \quad (5, 8; 3, 4)$
 $(3, 5, 6) \quad (3, 5, 7) \quad (3, 5, 8)$
 $(3, 4, 6) \quad (3, 4, 7) \quad (3, 4, 8)$
 $(5, 4, 6) \quad (5, 4, 7) \quad (5, 4, 8),$

e si riconosce che solo 10 di queste hanno contemporaneamente anche due piani in comune con (α_1) , cioè:

$$\left. \begin{aligned}
 c_1 &\equiv (3, 5; 4, 7), \quad (3, 5; 4, 8) \\
 c_1' &\equiv (4, 5; 3, 6), \quad (3, 4; 5, 6), \quad (4, 6; 3, 5), \quad (3, 5, 6) \\
 c_1'' &\equiv (3, 6; 4, 5), \quad (3, 4, 6), \quad (5, 6; 3, 4), \quad (5, 4, 6).
 \end{aligned} \right\} (A)$$

Ora dico che secondochè aggiungiamo un'ennupla della prima linea, o della seconda o della terza, abbiamo terne di natura diversa.

Effettivamente basta esaminare la posizione reciproca dei piani che a due a due hanno in comune quelle ennuple. Si vede che c_1 passa per i medesimi due piani per cui passano a_1, b_1 mentre

$$\begin{aligned}
 b_1, c_1' &\text{ hanno in comune i piani } (1\ 4\ 3\ 2) \quad (1\ 5\ 3\ 2) \\
 a_1, c_1' &\quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad (1\ 5\ 6\ 2) \quad (4\ 3 \cdot 5\ 6 \cdot 7\ 8) \\
 b_1, c_1'' &\quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad (1\ 3\ 4\ 2) \quad (1\ 3\ 5\ 2) \\
 a_1, c_1'' &\quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad (1\ 3\ 4\ 2) \quad (3\ 4 \cdot 5\ 6 \cdot 7\ 8),
 \end{aligned}$$

e quindi evidentemente le terne

$$\begin{aligned}
 a_1 \quad b_1 \quad c_1 \\
 a_1 \quad b_1 \quad c_1' \\
 a_1 \quad b_1 \quad c_1'',
 \end{aligned}$$

sono di natura fra loro diversa. Nella prima le tre ennuple passano per i me-

desimi due piani; nella seconda i piani comuni sono *sei distinti* formanti una figura che adesso esamineremo, e nella terza i piani comuni sono quattro distinti, e le tre ennuple passano tutte per un medesimo piano.

Resta a far vedere che le altre ennuple comprese rispettivamente nelle stesse linee di c_1, c_1', c_1'' sono a queste equivalenti, e allora potremo dedurre che esistono solo *tre* specie di terne.

In quanto al godere delle analoghe proprietà rispetto ai piani che hanno fra loro in comune, la cosa si può verificare subito; ma questo non è sufficiente per fare la deduzione dell'equivalenza. Bisogna far vedere che esistono sostituzioni le quali, lasciando fisse a_1, b_1 , trasformino una delle c in ciascuna di quelle comprese nelle stesse linee.

In quanto alle due figure della prima linea del quadro (A), non c'è dubbio che esse sono equivalenti, perchè si ottengono l'una dall'altra collo scambio dei punti 7, 8, il quale scambio non altera a_1, b_1 . In quanto poi alle altre bisogna tener presente la formazione del gruppo delle sostituzioni che lasciano inalterati due piani passanti per una retta (*).

Si è visto nella Memoria precedente, che alcune delle rette esterne a tali due piani, si scindono in quattro sistemi d'imprimitività, che abbiamo allora chiamati b, c, d, e , e certe permutazioni fra questi sistemi insieme con tutte le $4!$ sostituzioni fra le quattro rette di un sistema, danno le sostituzioni del gruppo totale.

Ora si verifica che le sostituzioni (fra i sistemi)

$$(bd), \quad (bc)(ed), \quad (be)(cd)$$

(che lasciano fisse le due ennuple a_1, b_1) trasformano la c_1' rispettivamente in ciascuna delle altre tre comprese sulla stessa linea; mentre che le sostituzioni

$$(cdeb), \quad (ec)(db), \quad (ec)$$

trasformano la c_1'' nelle altre della stessa linea.

Quindi possiamo effettivamente dedurre l'equivalenza di cui si parlava.

A questo proposito possiamo fare un'interessante osservazione che ci farà subito riconoscere qual'è il gruppo delle sostituzioni che lasciano fissa la coppia di ennuple.

Abbiamo già visto in questo paragrafo che vi sono quattro ennuple passanti per due piani.

(*) Vedi Mem. II. § 2.

Tenendo presente la tabella colla quale, nel citato § 2 della Memoria precedente, abbiamo rappresentata la corrispondenza fra le rette dei quattro sistemi d'imprimitività b, c, d, e , riconosciamo subito che le quattro ennuple passanti per i due piani

$$(1\ 3\ 4\ 2) \quad (1\ 5\ 4\ 2),$$

son formate aggiungendo alle cinque rette di questi due piani le quattro rette di una delle quattro linee del quadro citato. Così le due ennuple a, b , corrispondono alla prima e quarta linea. Onde allora ne deduciamo subito che:

« Il gruppo che lascia fisso l'assieme di due ennuple a, b , è quel sotto-
« gruppo di quello studiato nel § 2 della Memoria precedente, che muta i
« quattro sistemi d'imprimitività con tutte le 8 sostituzioni di Γ e scambia
« semplicemente la prima colla quarta linea del quadro contenuto nel citato
« paragrafo. Tal gruppo avrà per ordine 16. »

Con questo teorema si possono a colpo d'occhio effettuare le verifiche di cui si parlava sopra.

Come conclusione di questo paragrafo possiamo dunque dire:

« Esistono tre diverse specie di terne di ennuple aventi a due a due una
« coppia di piani in comune.

« La prima specie è caratterizzata dal fatto che le tre ennuple passano per
« la medesima coppia di piani; di tale specie ve ne sono $\frac{120 \cdot 27 \cdot 2}{2 \cdot 3} = 40 \cdot 27$;
« la seconda specie è caratterizzata dalla proprietà che le tre coppie di piani
« comuni rappresentano sei piani *distinti*; di questi sei piani tre passano tutti
« per una retta, e i tre altri per una altra retta gobba colla prima, e cia-
« scuno dei piani del primo gruppo incontra poi uno solo dei piani del se-
« condo gruppo. Le tre ennuple entrano simmetricamente nella formazione
« della terna, e di tali terne ve ne sono $\frac{120 \cdot 27 \cdot 4}{2 \cdot 3} = 80 \cdot 27$.

« Finalmente la terza specie è caratterizzata dal fatto che le tre ennuple
« passano tutte per lo stesso piano fondamentale, e a due a due hanno poi
« in comune un altro piano, e si hanno tre piani passanti per ciascuna delle
« tre rette del piano fondamentale. Di terne di 3.^a specie ve ne saranno
« anche $80 \cdot 27$.

« In una terna di 1.^a specie sono impiegate 17 rette; in una di 2.^a
« 14 rette, e in una di 3.^a 15 rette; e questo criterio può servire utilmente
« per riconoscere subito la specie di una terna data. »

§ 5. Teoremi sulle terne. Quaterne.

Ricerchiamo quali sono le 12 rette esterne ad una terna di 3.^a specie. Esse sono (per la terna $a_1 b_1 c_1''$)

$$17 \cdot 27 \cdot 18 \cdot 28 \cdot 73 \cdot 74 \cdot 75 \cdot 76 \cdot 83 \cdot 84 \cdot 85 \cdot 86,$$

cioè queste 12 rette formano una doppia sestupla (*); onde:

« Le 12 rette esterne ad una terna di 3.^a specie formano una doppia sestupla. Perciò ad ognuna delle 36 bisestuple sono coordinate $\frac{80 \cdot 27}{36} = 60$ terne di 3.^a specie formate colle stesse 15 rette. »

Per una terna di 2.^a specie invece, per es. $a_1 b_1 c_1'$, si vede che le rette esterne sono le stesse di prima, più la retta (16); cioè:

« Una terna di 2.^a specie è coordinata ad una bisestupla e ad una retta esterna; quindi colle medesime 14 rette si possono formare $\frac{80 \cdot 27}{36 \cdot 15} = 4$ terne di 2.^a specie. »

Esamineremo di qui a poco come son formate queste 4 terne.

Nel paragrafo precedente abbiamo visto come, data una coppia $a_1 b_1$, tutte le altre ennuple che con queste hanno due piani in comune sono dieci distribuite in $2 + 4 + 4$, e nel quadro (A) noi abbiamo ordinate tutte queste ennuple. Ora ci occorre di esaminare le relazioni reciproche esistenti fra queste.

Chiamiamo ordinatamente $c_1' c_2' c_3' c_4'$, $c_1'' c_2'' c_3'' c_4''$ le otto ennuple delle due ultime linee del quadro (A), e $c_1 c_2$ quelle della prima linea.

Allora prima di tutto poichè $c_1 c_2$ passano per gli stessi due piani fondamentali per cui passano $a_1 b_1$, così si vede che la quaterna $a_1 b_1 c_1 c_2$ conterrà tutte terne di 1.^a specie, perchè formate con ennuple passanti per 2 piani fissi. E poichè non esistono altre ennuple che $c_1 c_2$, le quali formino terne di 1.^a specie con $a_1 b_1$, così si ha che:

« Ogni terna di 1.^a specie individua una 4.^a ennupla formante con essa una quaterna in cui tutte le terne sono di 1.^a specie e che chiameremo quaterna di 1.^a specie. »

Inoltre si può verificare che c_1, c_2 insieme con un'altra delle c hanno sempre due rette, e non due piani, in comune. Quindi:

« Da una terna di 1.^a specie non si può passare che solo alla quaterna

(*) Vedi più avanti § 6.

« di 1.^a specie e a nessuna altra quaterna. Di quaterne di 1.^a specie ve ne sono 270. »

Esaminiamo allora le c' e le c'' .

Prima di tutto si può verificare che queste a due a due hanno sempre due piani in comune, e quindi:

« Rispetto ad una terna di 2.^a o 3.^a specie vi sono sempre 7 altre ennuple esterne aventi con quelle della terna sempre due piani in comune; e si potranno formare *al massimo* sino ad assieme di 10 ennuple aventi fra loro questa relazione, e non oltre. »

Si può riconoscere che le quattro c' si separano in $2 + 2$ cioè in $c_1' c_2'$; $c_3' c_4'$ in maniera che le due prime o le due seconde insieme con a_1 o b_1 danno sempre una terna di 2.^a specie, mentre che combinando una delle due prime con una delle due seconde, e con a_1 o b_1 si ha invece una terna di 3.^a specie.

E la cosa analoga succede per le quattro c'' , cioè le terne

$$\begin{array}{ll} a_1 c_1'' c_2'', & a_1 c_3'' c_4'' \\ b_1 c_1'' c_2'', & b_1 c_3'' c_4'', \end{array}$$

sono di 3.^a specie, mentre che le altre otto

$$\begin{array}{ll} a_1 c_1'' c_3'', & b_1 c_1'' c_3'' \\ a_1 c_1'' c_4'', & b_1 c_1'' c_4'' \\ a_1 c_2'' c_3'', & b_1 c_2'' c_3'' \\ a_1 c_2'' c_4'', & b_1 c_2'' c_4'', \end{array}$$

sono di 2.^a specie.

Combinando poi una c' con una c'' e con a_1 si ha una terna di 2.^a specie, e invece con b_1 si ha una terna di 3.^a specie; ovvero reciprocamente si ha di 3.^a specie nel 1.^o caso e di 2.^a nell'altro.

Di qui ricaviamo che le due terne

$$\begin{array}{l} a_1 b_1 c_1' \\ a_1 b_1 c_1'', \end{array}$$

individuano sempre rispettivamente una quarta ennupla c_2', c_2'' , e una sola, in modo che le quaterne

$$\begin{array}{l} a_1 b_1 c_1' c_2' \\ a_1 b_1 c_1'' c_2'', \end{array}$$

contengono tutte terne rispettivamente di 2.^a o di 3.^a specie.

Riunendo questo risultato con un altro ottenuto avanti, possiamo dire:

« Ogni terna di 1.^a 2.^a o 3.^a specie individua sempre una quarta ennupla « che con essa forma una quaterna contenente terne tutte della specie di quella « data. Tali quaterne le chiameremo rispettivamente di 1.^a 2.^a 3.^a specie, e « di esse ve ne sono:

$$270, \quad 540, \quad 540. \text{ »}$$

Si può aggiungere (come risulta da una verifica sulle nostre figure) che:

« Una quaterna di 1.^a specie contiene 21 rette; una di 2.^a ne contiene « 14, e una di 3.^a 15. »

Allora risulta anche la risposta ad un quesito che ci siamo proposti sopra. Noi abbiamo dimostrato che colle stesse 14 rette si possono formare quattro terne di 2.^a specie; ora una quaterna di 2.^a specie contiene quattro terne di 2.^a e non occupa che 14 rette, dunque:

« Le quattro terne di 2.^a specie formate colle medesime 14 rette sono « quelle contenute in una quaterna, e quindi son formate combinando a tre « a tre, *quattro* ennuple speciali. »

Nel nostro caso esse sarebbero $a_1 b_1 c_1' c_2'$.

Data la coppia $a_1 b_1$ si vede che si possono formare due sole quaterne di 2.^a specie contenenti la coppia data, e due sole di 3.^a specie e sono:

$$\begin{aligned} a_1 b_1 c_1' c_2', & \quad a_1 b_1 c_3' c_4' \\ a_1 b_1 c_1'' c_2'', & \quad a_1 b_1 c_3'' c_4'', \end{aligned}$$

onde:

« Le quaterne di 2.^a o di 3.^a specie si riuniscono a due a due contenenti « una medesima coppia di ennuple. »

Ma oltre le quaterne enumerate sopra, ve ne sono delle altre.

Effettivamente alla terna $a_1 b_1 c_1'$ noi possiamo aggiungere c_3', c_4' ovvero una c'' , e in ogni caso abbiamo, per le cose dette, una quaterna contenente due terne di 2.^a specie e due terne di 3.^a specie.

Per ogni terna di 2.^a o 3.^a specie si possono formare 6 di queste quaterne, e bisognerebbe ora esaminare se queste sono tutte equivalenti fra loro, giacchè non è sufficiente l'aver dimostrato che son formate in maniera simile rispetto alle loro terne. Ma questo lo lasciamo, e indicheremo genericamente col nome di quaterna di 4.^a specie una quaterna in cui due quaterne sono di 2.^a specie e due di 3.^a. Osserviamo solo che una quaterna di 4.^a specie contiene sempre 15 rette.

Possiamo ora passare a notare alcuni teoremi. Si può osservare che:

« Tutte le ennuple di una quaterna di 3.^a specie passano per un piano « fisso. »

Inoltre formiamo una terna con tre delle c' ; troviamo sempre una terna di 2.^a specie perchè contiene solo 14 rette distinte, dunque:

« Le quattro ennuple che separatamente con una coppia data formano « sempre terne di 2.^a specie, costituiscono a loro volta una quaterna in cui « tutte le terne sono di 2.^a specie, cioè una quaterna di 2.^a specie. »

Analogamente si può verificare che:

« Le quattro ennuple che con una coppia data formano sempre terne « di 3.^a specie, costituiscono a loro volta una quaterna di 3.^a specie. »

Possiamo dare un'altra forma a questi teoremi riunendoli con alcune proprietà già trovate, e dicendo:

« Vi sono due sole quaterne di 2.^a o 3.^a specie contenenti una coppia « data di ennuple; in queste togliendo le due ennuple della coppia, le altre « quattro formano ancora una quaterna di 2.^a o 3.^a specie. »

Abbiamo visto che data una terna di 2.^a o 3.^a specie esiste una *sola* ennupla esterna formante con essa, quaterna di 2.^a o 3.^a specie; e perciò:

« Non esistono quintine in cui tutte le terne sieno di 2.^a specie ovvero « tutte di 3.^a specie. »

Potremmo dedurre tanti altri teoremi esaminando per esempio la configurazione dei piani comuni in una quaterna, poi passando a considerare le varie quintine, ecc., ma preferiamo fermarci qui e passare ad un altro genere di considerazioni.

§ 6. Configurazione delle 36 bisestuple. Preliminari.

Le 72 sestuple gobbe corrispondono ai 72 sistemi di ARONHOLD aventi una retta fissa (*), giacchè un tal sistema risulta di rette tali che a tre a tre formano terne pari, e quindi se prendiamo un sistema di ARONHOLD contenente la retta fondamentale (1 2), le altre sei rette a due a due non si incontreranno, e quindi formano una sestupla gobba.

Ogni sestupla ne avrà poi un'altra coniugata, cioè tale che ogni retta della prima incontra cinque sole rette della seconda.

(*) *Rappresentazione geometrica, ecc.* Annali di Matemat., tom. 20, § 11, 23, 27.

Tenendo presenti le diverse figure dei sistemi di ARONHOLD noi ricaviamo che le bisestuple possono rappresentarsi con figure di tre tipi diversi, e sono quelli della fig. VI. Li chiameremo rispettivamente tipo I, II, III.

Del tipo I ve n'è una sola figura; di II ve ne sono 15 e di III, 20.

Questo fatto, che cioè vi è una sola figura del tipo I, ci sarà in seguito di grande utilità perchè noi assumeremo quella come fondamentale, e ciò porterà molta semplicità nel procedimento.

Ci domandiamo prima di tutto: di che ordine è il gruppo che lascia fissa una delle bisestuple?

Ricordiamo che la somma delle caratteristiche delle 7 rette di un sistema di ARONHOLD è una caratteristica *pari*, e se tal sistema di ARONHOLD è del tipo I, allora la caratteristica pari è proprio quella scelta per fondamentale della rappresentazione geometrica, e quindi allora le sostituzioni che lasciano fisso quel sistema di ARONHOLD o che lo mutano in un altro dello stesso tipo, si riducono a semplici permutazioni fra loro dei punti rappresentativi.

Applicando questo al nostro caso, ricaviamo che le sostituzioni che lasciano fissa la bisestupla I sono permutazioni arbitrarie dei sei punti 3, 5, 7, 8, 6, 4, accompagnate dallo scambio dei due punti 1, 2.

« Il gruppo delle sostituzioni che lasciano inalterata una bisestupla ha « per ordine $2 \cdot 6!$, e nel caso in cui la bisestupla sia la I, tal gruppo è rappresentabile in una maniera semplicissima. »

Se la I resta fissa, allora il tipo II non potrà mai evidentemente trasformarsi nel tipo III, perchè allora non essendo possibili altre sostituzioni che quelle corrispondenti alle permutazioni dei punti, i tipi delle figure si conservano inalterati; e d'altra parte è chiaro che per quelle permutazioni di cui si è parlato una figura del tipo II può trasformarsi in ogni altra del medesimo tipo, e così pel tipo III. Quindi ne ricaviamo subito questo risultato:

« Rispetto ad una bisestupla le altre 35 si separano in $15 + 20$. »

Possiamo subito riconoscere quali sono le proprietà che contraddistinguono le prime 15 dalle altre 20.

« La I ha con II, quattro rette comuni, e invece con III ha sei rette « comuni (*). »

Ci sarà utile esaminare ora quando due figure II o III, ovvero una figura II e una III hanno 4 o 6 rette comuni.

(*) Questa proprietà corrisponde ad un'altra di WEBER sugli aggruppamenti di caratteristiche dispari, e da noi riportata nel § 9 della Memoria citata (teor. 3.°).

Indichiamo con (3, 5) una figura come II e con (3, 5, 7) una come III (*). Allora immaginando tutte le combinazioni possibili si ha:

(3, 5)	e	(4, 6)	hanno	4	rette comuni
(3, 5)	e	(3, 6)	"	6	"
(3, 5)	e	(3, 5, 7)	"	4	"
(3, 5)	e	(3, 6, 7)	"	6	"
(3, 5, 7)	e	(3, 5, 4)	"	6	"
(3, 5, 7)	e	(6, 7, 8)	"	4	"
(3, 5, 7)	e	(4, 6, 8)	"	6	"

Dalle cose di avanti risulta ancora:

« Esistono $\frac{36 \cdot 15}{2} = 270$ coppie di bisestuple con 4 rette comuni, e 360 « coppie di bisestuple con 6 rette comuni. »

§ 7. Coppie di bisestuple con 4 rette comuni.

Si abbia la coppia di bisestuple formata colla I (fig. VI) e colla II cioè con (3, 5). Il gruppo di sostituzioni che oltre la I [che chiameremo (*a*)] lascia fissa anche (3, 5) \equiv (*b*), per le cose dette sopra, si ridurrà a quello rappresentato dagli scambi dei punti 3, 5 fra loro, 1, 2 fra loro, e dalle permutazioni degli altri quattro punti. Quindi il suo ordine sarà $2 \cdot 2 \cdot 4!$, e se poi le due bisestuple debbono anche scambiarsi fra loro, allora l'ordine del gruppo si moltiplica ancora per 2 e si ha $8 \cdot 4!$.

Tal gruppo lascerà evidentemente inalterato il complesso delle quattro rette 1 3, 2 3, 1 5, 2 5 che sono le quattro rette che le due bisestuple hanno in comune; quindi lascerà inalterato il complesso dei due piani concorrenti (1 3 5 2) (1 5 3 2). Intanto l'ordine trovato coincide con quello del gruppo che lascia inalterati due piani concorrenti (**), perciò possiamo dedurre:

« Il gruppo delle sostituzioni che lasciano fisse due bisestuple con 4 rette « comuni, coincide con quello che lascia fissi due piani concorrenti. »

(*) Intendendo qui che i tre punti chiusi in parentesi sono quelli da congiungersi col punto 1.

(**) Memoria II, § 2.

Esaminiamo come si separano rispetto a quelle della coppia tutte le altre 34 bisestuple, e immaginiamo prima di considerare il gruppo che lascia fisse separatamente le due bisestuple.

Evidentemente allora, tenendo presente la formazione del gruppo corrispondente, tutte le bisestuple di tipo II e di cui uno dei due punti fondamentali è 3 o 5 sono fra loro equivalenti, cioè per es.

$$(3, 4), (3, 6), \dots (5, 4), (5, 6), \dots \quad (1)$$

ed esse sono otto.

Le altre come

$$(4, 6), (4, 7), \dots \quad (2)$$

sono anche fra loro equivalenti e sono sei, e non saranno permutabili colle precedenti.

Quelle di tipo III come per es.

$$(4, 6, 8), (4, 6, 7), \dots (3, 5, 7), \dots \quad (3)$$

in numero di otto sono anche equivalenti (*), e finalmente le dodici come

$$(3, 4, 6), (5, 4, 6), \dots \quad (4)$$

sono anche permutabili fra loro. Ora si può osservare che le (2) hanno quattro rette comuni con ciascuna delle bisestuple della coppia, le (4) hanno invece 6 rette comuni, mentre le (1) (3) hanno quattro rette comuni con una e sei coll'altra o viceversa, quindi se scambio fra loro gli elementi della coppia le categorie (1) (3) si scambiano fra loro, e quindi possiamo infine dire:

« Rispetto ad una coppia di bisestuple aventi 4 rette comuni, le altre 34 « si scindono in $6 + 16 + 12$, e in ciascuna di queste classi esiste la transitività fra tutte le bisestuple che vi si contengono. »

Vogliamo ora specialmente considerare le prime 6 le quali hanno ciascuna quattro rette comuni con le bisestuple della coppia.

Esse sono:

$$(4, 6) (7, 8) (4, 8) (6, 7) (4, 7) (6, 8), \quad (2)$$

e si riconosce subito per la tabella costruita nel § 6 che ad una di queste ne corrisponde sempre un'altra sola con cui essa ha quattro rette comuni; così

(*) Si noti che collo scambio di 1 con 2 si passa da (4, 6, 8) a (3, 5, 7) ecc.

a (4, 6) corrisponde (7, 8) ecc. mentre tutte le altre hanno sempre sei rette comuni con (4, 6). Queste sei in altri termini si riuniscono in tre coppie; e di qui si vede che non esistono, al di là delle quaterne, assieme di bisestuple aventi a due a due sempre quattro rette comuni.

§ 8. Terne di bisestuple. — Quaterne.

Risulta dal § 7 che esiste una sola specie di terne di bisestuple aventi a 2 a 2 quattro rette comuni, perchè il gruppo della coppia è transitivo nelle 6 della categoria (2). E risulta poi ancora che data una terna esiste una sola bisestupla esterna formante con essa una quaterna in cui tutte le bisestuple a due a due hanno sempre quattro rette comuni.

Di tali terne ve ne saranno $\frac{270 \cdot 6}{3} = 540$ e quindi $\frac{540}{4} = 135$ quaterne.

Possiamo chiedere prima di tutto: Una data bisestupla a quante quaterne appartiene?

Ogni coppia appartiene, per le cose dette, a tre quaterne, ma una bisestupla appartiene a 15 coppie, dunque apparterà a $\frac{15 \cdot 3}{3} = 15$ quaterne.

Assumiamo per terna quella formata dalle

$$1 \equiv a \quad (3, 5) \equiv b \quad (4, 6) \equiv c.$$

L'unica quaterna cui questa terna appartiene si formerà aggiungendo

$$(7, 8) \equiv d.$$

Le sostituzioni che lasceranno fisse separatamente le quattro bisestuple della quaterna saranno quelle corrispondenti alle trasposizioni delle coppie di punti

$$1, 2$$

$$3, 5$$

$$4, 6$$

$$7, 8,$$

cioè si hanno 8 sostituzioni, e se poi possono permutarsi fra loro i quattro elementi della quaterna, le sostituzioni diventano $8 \cdot 4!$.

Evidentemente intanto per le prime sostituzioni, e quindi per le altre, c'è un piano unico che resta fisso [il piano (3 5 · 4 6 · 7 8)], onde:

« Il gruppo delle sostituzioni che lasciano inalterata una quaterna è sottogruppo di quello che lascia fisso un piano. »

Ad ogni quaterna resta così coordinato un piano, e poichè le quaterne sono 135 e i piani sono 45 così:

« Ogni piano corrisponde a tre quaterne. »

E adesso possiamo proporci di studiare le tre quaterne corrispondenti ad un medesimo piano.

Esaminiamo tutte le altre 32 bisestuple in rapporto alle quattro di una quaterna.

Abbiamo già visto che rispetto alla coppia (a) (b) ve ne sono sei aventi 4 rette comuni con (a) (b), e di queste sei due sono precisamente (c) (d), e le altre hanno tutte sei rette comuni con (c) (d). Dunque:

« Esistono *solo* 4 bisestuple aventi quattro rette comuni colle due di una coppia di una quaterna, e sei rette comuni colle altre due, e non ne esistono « aventi quattro rette comuni con *una sola* o con *tre sole* bisestuple di una quaterna. »

Si hanno così $4 \cdot 6 = 24$ bisestuple diverse e che hanno sempre quattro rette comuni con due bisestuple di una quaterna, e invece sei rette colle altre due.

Le altre $32 - 24 = 8$ restanti dovranno per necessità avere 6 rette comuni con ciascuna delle bisestuple della quaterna.

E vogliamo ora esaminare la disposizione di queste otto.

Esse sono tutte naturalmente del tipo III (dovendo avere con I sei rette comuni) cioè:

$$(3, 7, 4), (3, 7, 6), (3, 8, 4), (3, 8, 6), (5, 7, 4), (5, 7, 6), \\ (5, 8, 4) (5, 8, 6).$$

Riconosciamo che rispetto a

$$(3, 7, 4) \equiv a',$$

ve ne sono tre altre che hanno quattro rette comuni fra loro e con a' , mentre le altre 4 danno sempre sei rette comuni colle precedenti, e quattro rette comuni invece fra loro.

Le prime tre sono:

$$(3, 8, 6) \equiv b' \quad (5, 8, 4) \equiv c' \quad (5, 7, 6) \equiv d'$$

e le altre quattro le chiamiamo rispettivamente

$$\begin{aligned} (3, 7, 6) &\equiv a'' & (3, 8, 4) &\equiv b'' \\ (5, 8, 6) &\equiv c'' & (5, 7, 4) &\equiv d'. \end{aligned}$$

Si vede dunque:

« Esistono solo 8 bisestuple aventi 6 rette comuni colle quattro di una quaterna, e queste 8 si riuniscono in una maniera sola in due altre quaterne « in modo che le tre quaterne

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'', \end{array}$$

« formano un assieme completamente simmetrico, cioè ogni bisestupla di questo « quadro ha sei rette comuni con una qualunque non compresa nella sua me- « desima linea, e quattro con una della sua stessa linea. »

Poichè ogni quaterna determina univocamente le due altre, così:

« Esistono $\frac{135}{3} = 45$ tali complessi di tre quaterne, cioè tanti per quanti « sono i piani. »

Sappiamo che ogni quaterna è coordinata ad un piano; possiamo far vedere che le tre quaterne di un complesso sono coordinate al medesimo piano, e così si sarà risposto ad una domanda già fatta sopra.

Esaminiamo come si fa per trovare il piano coordinato ad una quaterna data, a, b, c, d .

Ad ogni coppia sono coordinati due piani passanti per una retta, e quindi possiamo dire che ad ogni coppia è coordinata una retta. Così alla coppia $a b$ è coordinata la retta (3 5), e possiamo verificare che alla coppia $c d$ è coordinata la medesima retta. Dunque:

« Separando in $2 + 2$ le quattro bisestuple di una quaterna, le due coppie « sono coniugate alla medesima retta, e le tre rette che così si hanno formano « un piano [perchè (3 5) è precisamente una delle tre rette del piano coor- « dinato alla quaterna $a b c d$]. »

Con questo teorema si può riconoscere che le tre quaterne di uno dei complessi di cui si è parlato sopra corrispondono al medesimo piano. Effettivamente noi d'altra parte già sappiamo che ogni piano deve corrispondere a tre quaterne.

§ 9. Altri teoremi sulle coppie e sulle quaterne.

Abbiamo già detto che possiamo far corrispondere ad ogni coppia di bisestuple una retta esterna, e poichè le coppie sono 270 ne ricaviamo che ad ogni retta corrispondono 10 coppie.

Ora le due coppie complementari di una quaterna, sappiamo che corrispondono alla medesima retta, e d'altra parte, data una coppia, ve ne sono solo tre altre che con quella formano una quaterna. Quindi data una di quelle 10 coppie, fra le altre nove ve ne saranno tre e solo tre che con quella data formano tre quaterne diverse. Le altre sei coppie saranno distribuite nelle quaterne coniugate a queste tre, e vogliamo esaminare come sono distribuite.

Data la quaterna $a b c d$ abbiamo già visto che si forma il complesso di tre quaterne

$$\left. \begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{array} \right\} \quad (1)$$

e con questo sono impiegate 6 delle coppie corrispondenti alla medesima retta per es. (3 5), cioè le sei coppie

$$a b, \quad c d, \quad a' b', \quad c' d', \quad a'' b'', \quad c'' d''.$$

Anzichè ora prendere per fondamento la quaterna $a b c d$ prendiamo le altre due cui appartiene la coppia $a b$ (§ 7).

Ponendo:

$$\begin{aligned} (4, 8) &\equiv c_1 & (6, 7) &\equiv d_1 \\ (4, 7) &\equiv c_2 & (6, 8) &\equiv d_2, \end{aligned}$$

tali altre due quaterne sono:

$$\begin{array}{cccc} a & b & c_1 & d_1 \\ a & b & c_2 & d_2, \end{array}$$

e quelle rispettivamente coniugate a queste si ottengono dalle coniugate di $a b c d$ nello stesso modo con cui queste due quaterne si possono ottenere da $a b c d$, cioè permutando rispettivamente 6 con 8, ovvero 6 con 7.

Colla prima di queste permutazioni le bisestuple $a' b' c' d''$ restano inalterate, e le altre si mutano in

$$(5, 6, 4) \equiv c_1' \quad (5, 7, 8) \equiv d_1' \quad (3, 7, 8) \equiv a_1'' \quad (3, 6, 4) \equiv b_1'',$$

e colla permutazione di 6 con 7 restano inalterate $c' d' a'' b''$ e $a' b' c'' d''$ diventano rispettivamente $b_1'' a_1'' d_1' c_1'$.

Accanto al complesso (1) poniamo quindi gli altri due

$$\left. \begin{array}{cccc} a & b & c_1 & d_1 \\ a' & b' & c_1' & d_1' \\ a_1'' & b_1'' & c'' & d'' \end{array} \right\} (2)$$

$$\left. \begin{array}{cccc} a & b & c_2 & d_2 \\ b_1'' & a_1'' & c' & d' \\ a'' & b'' & d_1' & c_1' \end{array} \right\} (3)$$

e queste sono tutte le quaterne nelle quali entrano tutte le 10 coppie appartenenti alla medesima retta (3 5).

I tre specchietti (1) (2) (3) possono intendersi come *i tre soli complessi di quaterne generati dalla coppia a b*.

Ognuno di quei specchietti poi corrisponde a sua volta ad un piano passante per la retta (3 5). Questi tre piani sono evidentemente

$$(3\ 5 \cdot 4\ 6 \cdot 7\ 8)$$

$$(3\ 5 \cdot 4\ 8 \cdot 6\ 7)$$

$$(3\ 5 \cdot 4\ 7 \cdot 6\ 8),$$

cioè:

« Data una coppia di bisestuple passanti per 4 rette che a due a due danno due piani intersecantisi in una retta esterna, tutte le quaterne generate dalla coppia corrispondono a ciascuno dei tre altri piani passanti per la medesima retta esterna (ricordando che per ognuna delle 27 rette passano cinque piani). »

§ 10. Coppie di bisestuple con sei rette comuni (*associate*) (*).

Si abbia la coppia di bisestuple formata dalle due

$$I \equiv a \quad (3, 5, 7) \equiv b,$$

e vediamo quale è il gruppo di sostituzioni che lasciano fisse queste due bisestuple. Se ciascuna di esse deve restar fissa, allora, per gli stessi principii applicati sopra, si ha che solo i tre punti 3, 5, 7 possono permutarsi fra loro, e fra loro anche gli altri tre 4, 6, 8.

Inoltre possono scambiarsi fra loro i punti 1, 2, ma allora tutta la terna 3, 5, 7 deve diventare la terna 4, 6, 8, e viceversa.

(*) CREMONA le chiamò *associate*.

Quindi l'ordine del gruppo è $2 \cdot 3! 3!$, e se poi le due bisestuple si scambiano fra loro, allora l'ordine si raddoppia e si ha infine:

« L'ordine del gruppo che lascia fissa una coppia di bisestuple con 6 rette « comuni è $4 \cdot 3! 3!$. »

Vediamo come si separano in classi di elementi transitivi tutte le altre 34 bisestuple.

Facendo le varie combinazioni fra i punti, abbiamo:

(1) La bisestupla (4, 6, 8) resta fissa con quelle sostituzioni.

(2) Le sei bisestuple di tipo II

(3, 5) (3, 7) (5, 7) (4, 6) (6, 8) (8, 4),

sono fra loro equivalenti. E così anche:

(3) Le nove altre

(3, 4) (3, 6) (3, 8) (5, 4) (5, 6) (5, 8) (7, 4) (7, 6) (7, 8).

(4) Le nove di tipo III

(3, 4, 6) (3, 6, 8) \dots\dots\dots

(5) Le nove di tipo III

(3, 5, 4) (3, 5, 6) \dots\dots\dots

Si può riconoscere che l'unica della categoria (1) ha sei rette comuni con ciascuna delle due date, le (2) hanno quattro rette comuni colle date, le (5) hanno 6 rette comuni, mentre poi le (3) (4) hanno quattro rette comuni con una delle bisestuple date e sei coll'altra o viceversa.

Quindi ne ricaviamo infine allo stesso modo tenuto nel § 7 che:

« Data una coppia di bisestuple aventi 6 rette comuni, tutte le altre bisestuple rispetto a questa coppia si separano in $1 + 6 + 18 + 9$. Quelle « aventi 6 rette comuni con ciascuna delle due bisestuple sono 10 distinte in « $1 + 9$, e la prima non è equivalente ad una delle altre. »

Altrimenti:

« Ad una coppia di bisestuple *associate* (CREMONA) è coordinata una terza « bisestupla (teorema di WEBER). »

Possiamo subito vedere qual'è la distinzione geometrica fra questa bisestupla e le altre nove di cui si è parlato sopra.

Si vede che le 12 rette di questa sono divise in $6 + 6$ e le prime 6 essa le ha in comune con (a), mentre le altre le ha in comune con (b). Una tale

terna di bisestuple impiega dunque 18 rette sole. Essa è rappresentata dalla fig. VII. Le altre invece non hanno questo medesimo rapporto rispetto ad (a) (b) .

Allora lo studio del gruppo che lascia fissa la coppia (a) (b) si riduce allo studio del gruppo che lascia fissa la terna (a) (b) (c) (fig. VII), e l'ordine di tal gruppo diventa il precedente moltiplicato per 3 cioè $2 \cdot 3! 3! 3!$.

Consideriamo le nove rette restanti quando si sono tolte tutte quelle di questa terna. Esse sono tutte le congiungenti i punti 3, 5, 7 coi punti 4, 6, 8, e come si vede formano una figura come la III di fig. I, cioè un'ennupla (§ 1). Onde, chiamando terna fondamentale di bisestuple associate, l'assieme di tre bisestuple che stanno nelle stesse condizioni di (a) (b) (c) fra loro, si ha:

« Il gruppo che lascia fissa una terna fondamentale coincide con quello « che lascia fissa un'ennupla. »

(A questa deduzione si arriva osservando che gli ordini dei due gruppi sono eguali, e che il primo di essi, per l'ultima proprietà dimostrata, deve essere certamente almeno sottogruppo del secondo.)

È utile ora esaminare la separazione fra loro di tutte le bisestuple rispetto alle tre della terna, e non più rispetto alla coppia. Ora si può subito vedere che le sei della categoria (2) hanno anche con (c) 4 rette comuni, mentre le nove di (3) e (4) hanno sempre 6 rette comuni con (c) , e le nove di (5) hanno quattro rette comuni con (c) .

Perciò se le tre bisestuple della terna si possono permutare fra loro, allora le categorie (3) (4) (5) si riuniscono, e si ha:

« Rispetto ad una terna fondamentale, le altre 33 bisestuple si separano « in $6 + 27$; le prime 6 hanno sempre quattro rette comuni con ciascuna « delle tre della terna, e le altre hanno sei rette comuni con due bisestuple « della terna, e quattro colla terza.

« Non esistono bisestuple aventi 6 rette comuni con ciascuna delle tre « della terna, ovvero 6 rette con una e 4 colle altre due. »

§ 11. Terne di bisestuple associate.

Abbiamo visto che da una coppia (di cui ve n'è una specie sola § 6) si può passare a due diverse specie di terne, cioè aggiungendo l'unica bisestupla della categoria (1) (§ 10) e allora si ha quella terna che abbiamo chiamata fondamentale, oppure aggiungendo una delle 9 bisestuple della categoria (5).

Delle prime ve ne saranno tante quante sono le ennuple cioè 120, e delle seconde ve ne saranno $\frac{360 \cdot 9}{3} = 1080$.

Le chiameremo rispettivamente terne di 1.^a e di 2.^a specie.

E in quanto a quelle di 1.^a abbiamo già visto nel paragrafo precedente che ad esse non può aggiungersi un'altra bisestupla avente con ciascuna delle tre sempre sei rette comuni.

Studiamo allora una terna di 2.^a specie. Essa è rappresentata dalla fig. VIII.

Chiamiamo terna *complementare* di una di 2.^a specie quella formata costruendo le tre bisestuple coniugate a ciascuna delle tre coppie comprese nella terna. Così per es. la terna complementare di quella della fig. VIII è rappresentata dalla fig. IX, e si riconosce subito che quella terna è di 1.^a specie, onde:

« La terna complementare di una di 2.^a specie è una terna di 1.^a specie. »

Esaminando le fig. VIII si riconosce che vi sono le quattro rette

$$1\ 3, \ 1\ 5, \ 2\ 6, \ 2\ 8,$$

comuni a tutte le bisestuple della terna; quindi:

« In una terna di 2.^a specie vi sono quattro rette fondamentali comuni a tutte le bisestuple, e queste quattro rette si possono separare in due coppie « gobbe, ogni retta di una coppia incontrando tutte quelle dell'altra. »

Se la terna di 2.^a specie deve restar fissa per un assieme di sostituzioni, allora resterà fisso il complesso di quelle quattro rette, e quindi il complesso dei quattro piani

$$(1\ 3\ 6\ 2) \ (1\ 3\ 8\ 2) \ (1\ 5\ 8\ 2) \ (1\ 5\ 6\ 2),$$

formanti un tetraedro circolare (Mem. II).

« Ad ogni terna di 2.^a specie è correlato un tetraedro circolare. »

Sappiamo poi che un tetraedro circolare è correlato a sua volta ad una coppia di piani passanti per una retta, che nel nostro caso sono i piani

$$(3\ 6 \cdot 5\ 8 \cdot 4\ 7)$$

$$(5\ 6 \cdot 3\ 8 \cdot 4\ 7),$$

dunque:

« Una terna di 2.^a specie è correlata ad una coppia di piani passanti per una retta, e quindi anche è correlata ad una retta. »

Il gruppo dunque della terna di 2.^a specie sarà o lo stesso o un sottogruppo di quello che lascia fissi due piani concorrenti.

Viceversa evidentemente:

« Ad ogni retta saranno correlate $\frac{1080}{27} = 40$ terne di 2.^a specie. »

Per trovare l'ordine del gruppo che lascia fissa la terna supponiamo prima che (α) (β) (γ) debba restar fissa ciascuna, e poi le facciamo permutare fra loro in $3!$ modi. Nel 1.^o caso le sostituzioni corrispondono a sole permutazioni dei punti, e propriamente alle permutazioni di

3 con 5
6 con 8
1 con 2,

la quale ultima permutazione è però accompagnata dallo scambio di 4 con 7, e della coppia 3, 5 con 6, 8.

Quindi si vede che esistono otto sostituzioni le quali lasciano fisse separatamente α , β , γ . Dunque:

« Il gruppo della terna di 2.^a specie ha per ordine $3! \cdot 8$; e quindi, essendo questo numero minore di quello che rappresenta l'ordine del gruppo « che lascia fissi due piani passanti per una retta, si ha per ciò che si è detto « sopra che il gruppo della terna di 2.^a specie è un sottogruppo di quello che « lascia fissi due piani concorrenti. »

Possiamo ricavare un'altra proprietà della terna di 2.^a specie.

Abbiamo detto che tutte le tre bisestuple passano per quattro rette; e quindi a due a due passeranno ancora per altre tre coppie di rette. Queste tre coppie sono per la nostra figura:

6 8, 3 5
2 7, 1 4
1 7, 2 4,

e si vede che stanno in tre piani

(6 8 · 3 5 · 4 7)
(1 4 7 2)
(1 7 4 2),

passanti per una medesima retta, e propriamente per quella retta, cui, giusta le cose dette sopra può immaginarsi coordinata la terna. Dunque:

« Le tre bisestuple di una terna di 2.^a specie, oltrechè passare tutte per

« le medesime quattro rette, passano poi a due a due per tre coppie di rette « che stanno in tre piani concorrenti nella retta coniugata alla terna. »

E possiamo ora passare ad esaminare come si distribuiscono rispetto alla terna le altre 33 bisestuple.

(1) In primo luogo dobbiamo separare le tre della terna complementare $\alpha' \beta' \gamma'$. Ciascuna di queste ha 4 rette comuni con una di quelle della terna data, e sei rette comuni colle altre due.

(2) Le due di tipo II (3, 5) (6, 8) evidentemente restano fisse per le sostituzioni del gruppo, ed esse hanno sempre 4 rette comuni con ciascuna α ; β , γ . Fra loro hanno anche 4 rette comuni.

(3) Le otto (3, 4) (3, 7) (5, 4) (5, 7) (6, 4) (6, 7) (8, 4) (8, 7) sono fra loro equivalenti per quelle sostituzioni, ed esse hanno sempre 4 rette comuni con α e β ovvero con α e γ , e 6 rette comuni con γ o β rispettivamente.

(4) Le quattro (3, 6) (3, 8) (5, 6) (5, 8) sono anche fra loro equivalenti. Esse hanno 4 rette comuni con α , e 6 con β e γ .

(5) Le quattro di tipo III (4, 7, 8) (4, 7, 6) (6, 8, 3) (6, 8, 5) sono equivalenti fra loro. Hanno 6 rette comuni con α , e 4 con β e γ .

(6) Le otto (4, 3, 6) (7, 5, 8) (4, 3, 8) (7, 5, 6) (4, 5, 6) (7, 3, 8) (4, 5, 8) (7, 3, 6) hanno quattro rette comuni con α e β ovvero α e γ , e 6 con γ o β rispettivamente.

Finalmente le ultime quattro

$$(3, 5, 6) \quad (3, 5, 8) \quad (5, 4, 7) \quad (3, 4, 7),$$

hanno 6 rette comuni con ciascuna di α , β , γ .

Colle solite considerazioni altre volte fatte ne ricaviamo dunque:

« Rispetto ad una terna di 2.^a specie α , β , γ , le altre 33 bisestuple si « separano in $3 + 2 + 12 + 12 + 4$; le prime 3 formano la terna comple-
« mentare, le altre due hanno quattro rette comuni con ciascuna delle tre
« date, le altre 12 hanno sei rette comuni con una e 4 rette comuni colle
« altre due, mentre le seguenti 12 hanno viceversa 4 rette comuni con una,
« e 6 colle altre due, e finalmente le ultime quattro hanno sempre sei rette
« comuni con α , β , γ . »

Possiamo porre in vista un risultato notevole ottenuto ora, e che può correlarsi con cose già dette sopra.

Abbiamo visto che ci sono solo due bisestuple

$$(3, 5), \quad (4, 6),$$

le quali sono rappresentate dalla fig. X e hanno 4 rette comuni con ciascuna

α, β, γ . Si può riconoscere che esse hanno anche 4 rette comuni con ciascuna delle bisestuple $\alpha' \beta' \gamma'$ della terna complementare alla data (fig. IX), e fra loro hanno anche solo quattro rette comuni, cioè esse formano una coppia come quelle considerate nel § 7. Ricordando poi che rispetto ad una tal coppia vi sono solo sei altre bisestuple aventi 4 rette comuni con quelle della coppia, si ricava che queste sei bisestuple sono $\alpha \beta \gamma \alpha' \beta' \gamma'$.

Quindi ora ci si presenta un nuovo teorema sulla configurazione di queste sei bisestuple speciali che si presentano quando si considera una coppia come A, B , e che noi abbiamo già studiata in vari sensi (§ 7). Abbiamo per es. già visto che quelle sei si riuniscono in tre coppie, cioè rispetto ad una di esse ve n'è un'altra sola che abbia colla prima 4 rette comuni. Nel nostro caso queste coppie sono $\alpha \alpha', \beta \beta', \gamma \gamma'$ come si può riconoscere sulle figure.

Quindi possiamo dire:

« Le sei bisestuple che hanno quattro rette comuni con una coppia data A, B si possono raccogliere in $3 + 3$ in modo che le prime tre formino una terna di 2.^a specie, e le altre tre formino la terna complementare. »

Si riconosce subito che con quelle bisestuple $\alpha \beta \gamma \alpha' \beta' \gamma'$ si possono formare le seguenti terne di 2.^a specie

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & \beta' & \gamma' \\ \alpha' & \beta & \gamma' \\ \alpha' & \beta' & \gamma, \end{array}$$

onde:

« Ad una coppia di bisestuple aventi 4 rette comuni sono coordinate quattro terne di 2.^a specie, e naturalmente altrettante di 1.^a specie complementari a quelle. Effettivamente $270 \cdot 4 = 1080$. »

§ 12. Quaterne e quintine di bisestuple associate.

Abbiamo visto che rispetto ad una terna di 2.^a specie vi sono solo quattro altre bisestuple esterne aventi con quelle della terna sei rette comuni.

Esaminiamo la figura che formano queste quattro. Esse sono:

$$\begin{array}{ccc} (3, 5, 6) \equiv A' & (3, 5, 8) \equiv B' \\ (5, 7, 4) \equiv C' & (3, 4, 7) \equiv D', \end{array}$$

e si vede che $A' B'$ hanno sei rette comuni, come anche $C' D'$, ma tutte le altre coppie hanno poi sempre quattro rette comuni. Quindi se noi alla terna aggiungiamo A' in modo da formare una quaterna, non resterà altra bisestupla che la B' che abbia con tutte quelle della quaterna 6 rette comuni, onde intanto:

« Al di là delle quintine, non esistono altri assieme di bisestuple aventi « a due a due sempre 6 rette comuni. »

Evidentemente di quaterne se ne hanno $\frac{1080 \cdot 4}{4} = 1080$ e di quintine $\frac{1080}{5} = 216$.

È ovvio osservare che tutte le terne contenute in una quaterna o quintina sono necessariamente di 2.^a specie, avendo già dimostrato che al di fuori di una terna di 1.^a specie, non esistono altre bisestuple aventi 6 rette comuni con tutte quelle della terna (§ 10).

Poichè dunque ad ogni quaterna corrisponderà sempre un'unica bisestupla esterna che con quella forma una quintina, così lo studio delle quaterne si confonderà necessariamente con quello delle quintine.

Una quintina sarà formata dalle cinque figure (α) (β) (γ) (A') (B') .

Delle due bisestuple (A) (B) (fig. X) le quali aveano quattro rette comuni con ciascuna di quelle della terna data, si vede che la prima ha anche quattro rette comuni con $A' B'$, e la seconda ha anche quattro rette comuni con $C' D'$ e non colle altre.

Onde:

« Data una quintina vi è una sola bisestupla esterna che abbia quattro « rette comuni con tutte quelle della quintina. Ad ogni quintina corrisponde « una bisestupla esterna, e quindi ad ogni bisestupla corrisponderanno $\frac{216}{36} = 6$ « quintine diverse. »

Possiamo anche aggiungere:

« Il gruppo di sostituzioni corrispondente ad una quintina è sottogruppo « di quello di una bisestupla. »

Possiamo anche notare i seguenti teoremi:

« Ogni bisestupla appartiene a $\frac{216 \cdot 5}{36} = 30$ quintine. »

« Ogni coppia di bisestuple associate appartiene a $\frac{216 \cdot 10}{360} = 6$ quintine. »

« Ogni terna di 2.^a specie appartiene a 2 quintine. »

Esaminando le nostre cinque figure si trova che tutte contengono le due rette (1 3) (1 5); cioè:

« Ad ogni quintina è correlata una coppia gobba di rette. »

E poichè vi sono precisamente 216 coppie gobbe di rette, possiamo dire:

« Data una coppia gobba di rette è unicamente determinata la quintina « passante per essa. »

Abbiamo già detto che la bisestupla (*B*) (fig. X) mentre ha quattro rette comuni con (α) (β) (γ), ne ha invece sei con A' , B' , ed evidentemente è la sola godente di questa proprietà; onde:

« Separate in $3 + 2$ le cinque bisestuple di una quintina, esiste una sola « bisestupla che abbia quattro rette comuni con ciascuna delle prime tre, e « sei colle altre due. »

Cercando queste bisestuple corrispondenti a tutte le separazioni in $3 + 2$, si hanno allora 10 bisestuple diverse, e vogliamo studiare qual'è la configurazione di queste 10. nuove bisestuple correlate alla data quintina.

Esse sono:

1.	(6, 8)	corrispondente alle terna	α, β, γ
2.	(4, 8)	»	» α, β, A'
3.	(6, 4)	»	» α, β, B'
4.	(7, 8)	»	» α, γ, A'
5.	(6, 7)	»	» α, γ, B'
6.	(4, 7)	»	» α, A', B'
7.	(4, 6, 7)	»	» β, γ, A'
8.	(4, 7, 8)	»	» β, γ, B'
9.	(6, 7, 8)	»	» β, A', B'
10.	(4, 6, 8)	»	» $\gamma, A' B'$.

Si può riconoscere che la prima di queste bisestuple (e così per ogni altra) ha quattro rette con tre delle altre (la 6.^a, 9.^a, 10.^a) le quali poi a loro volta sono associate a due a due.

Le altre sei (2.^a, 3.^a, 4.^a, 5.^a, 7.^a, 8.^a) hanno sempre sei rette comuni colla prima, e rispetto ad una di esse per es. la 2.^a ve ne sono poi tre che hanno

anche 6 rette comuni, e sono la 3.^a, 4.^a, 7.^a, ma la prima di queste ha quattro rette comuni colle altre due, mentre queste ultime hanno sei rette comuni fra loro.

Quindi date due bisestuple con 6 rette comuni, e scelte fra le 10 di sopra (e di tali coppie fra le 10 ve ne sono $\frac{10 \cdot 6}{2} = 30$), ognuna di esse appartiene ad un'unica quaterna in cui le quattro bisestuple sono comprese fra le medesime dieci.

Con quelle 10 bisestuple si possono formare $\frac{30}{6} = 5$ quaterne diverse.

Ognuna di queste individuerà (per le cose dette sopra) una nuova bisestupla. Se consideriamo la quaterna

$$(6, 8), (4, 8), (7, 8), (4, 6, 7),$$

la quinta bisestupla è

$$(3, 5, 8),$$

cioè proprio una (la B') della quintina fondamentale.

Osserviamo ora che queste quattro bisestuple scelte sono la 1.^a 2.^a 4.^a 7.^a, cioè quelle corrispondenti alle quattro terne della quaterna

$$\alpha \beta \gamma A',$$

e quindi abbiamo il teorema:

« Data una quintina, se escludiamo una delle bisestuple, e consideriamo « le quattro bisestuple che hanno quattro rette comuni rispettivamente colle « quattro terne formate colle bisestuple restanti, esse formano una quintina « insieme alla bisestupla esclusa. »

Abbiamo detto che ad una quintina corrisponde una bisestupla esterna, e che ad ogni bisestupla corrispondono sei quintine.

Vogliamo vedere come si possono costruire queste sei quintine corrispondenti ad una stessa bisestupla.

La quintina da noi considerata $\alpha \beta \gamma A' B'$ ha per rette fondamentali (1 3), (1 5), e per bisestupla corrispondente la (3, 5).

Questa bisestupla contiene quella coppia gobba di rette, la quale non è una qualunque coppia gobba scelta nella bisestupla, ma è propriamente quella formata da una retta insieme a quella unica con essa gobba e appartenente alla sestupla coniugata. In ogni bisestupla esistono chiaramente sei di tali coppie gobbe. Nella bisestupla (3, 5) una di queste coppie gobbe è proprio

(13) (15) (vedi fig. VI), e le altre sono:

23, 25
37, 57
34, 54
36, 56
38, 58.

Si capisce che le altre cinque quintine corrispondenti alla medesima bisestupla saranno quelle che hanno per rette fondamentali queste coppie gobbe.

« Le sei quintine corrispondenti ad una bisestupla data sono quelle che hanno per rette fondamentali le sei coppie gobbe di rette coniugate della « bisestupla. »

Possiamo trovare un facile procedimento per costruire tutte le cinque quintine data una di esse.

Teniamo presente che la bisestupla coniugata a due altre di cui una è del tipo I (fig. VI) e l'altra è naturalmente del tipo III, è una medesima del tipo III ma dove si sieno semplicemente scambiati i punti 1, 2.

Ciò posto, le quattro coniugate alle coppie

(α) (β)
(α) (γ)
(α) (A')
(α) (B'),

saranno le analoghe di β γ A' B' scambiandovi i punti 1, 2, cioè saranno

(4, 6, 8) (7, 6, 8) (4, 7, 8) (4, 6, 7),

e queste con (α) formano anche una quintina che si ricaverebbe dalla data scambiando i punti 1, 2 con che α resta inalterata. Ma allora le rette fondamentali (13), (15) della quintina diventano (23) (25), quindi si ha la quintina corrispondente ad un'altra delle sei coppie gobbe contenute in (3, 5).

Questo dunque ci fa intendere qual'è il mezzo per costruire tutte le altre quintine da una di esse.

« Data una quintina corrispondente ad una bisestupla, se vogliamo costruire le altre cinque quintine corrispondenti alla medesima bisestupla, fissiamo una di quelle della quintina data (il che può farsi in cinque modi), e poi costruiamo le coniugate delle coppie formate con quella fissa e colle

« altre quattro. Le quattro coniugate, con quella fissa daranno una delle cinque
« altre quintine richieste. »

Si vede così che due quintine vengono ad avere fra loro in comune una bisestupla.

« Le sei quintine corrispondenti ad una stessa bisestupla sono conformate
« fra loro in modo che a due a due hanno sempre una sola bisestupla di
« comune. »

« Le sei quintine contengono in tutto 15 bisestuple diverse. »

**§ 13. Configurazione delle 216 quintuple gobbe di 2.^a specie.
Gruppo appartenente ad una quintupla.**

Si sa che esistono due specie di quintuple gobbe, cioè quelle contenute in una sestupla gobba e quelle (di 2.^a specie) tali che qualunque altra delle 22 rette restanti incontra almeno una delle rette della quintupla. Di queste ultime ve ne sono 216 (*).

Nella nostra rappresentazione esse possono essere date da 4 figure diverse che sono quelle della fig. XI. Del 1.^o tipo ve ne sono 6 diverse, del secondo 30, del terzo 120, e del quarto 60. In tutto se ne hanno

$$6 + 30 + 120 + 60 = 216.$$

Prendiamo per fondamento una del primo tipo e esaminiamo come si separano le altre rispetto a questa.

Evidentemente

di tipo I	ve ne sono	altre 5	che hanno	colla data	1	retta comune
» II	»	20	»	nessuna	»	»
» II	»	10	»	1	»	»
» III	»	40	»	nessuna	»	»
» III	»	60	»	1	»	»
» III	»	20	»	3	»	»
» IV	»	20 + 10	»	nessuna	»	»
» IV	»	30	»	2	»	»

(*) Vedi per es. STURM, *Fläch. 3.^{ter} Ordnung*, Cap. II.

Quindi possiamo dire:

« Si possono formare coppie di quintuple con nessuna, 1, 2, 3 rette « comuni. »

Però adesso dimostreremo un teorema interessantissimo, che cioè questa relazione esistente fra le due quintuple di una coppia non è sufficiente per stabilire l'equivalenza di due coppie: in altri termini, ci possono essere per es. due coppie di quintuple senza rette comuni e che pure non sono trasformabili l'una nell'altra.

Dobbiamo esaminare il gruppo che lascia fissa la quintupla I.

Possiamo intanto osservare che fra tutte le restanti 22 rette, ve ne sono due [(1 3) (2 3)] che incontrano *tutte* le rette della quintupla, ve ne sono cinque coppie

1 4, 2 4

1 6, 2 6

1 8, 2 8

1 7, 2 7

1 5, 2 5,

che incontrano rispettivamente solo *una* delle rette della quintupla, e finalmente le altre 10 rette incontrano sempre *tre* rette della quintupla (*).

Quindi intanto:

« Il gruppo che lascia fissa una quintupla separa le rimanenti 22 rette « in $2 + 10 + 10$, cioè in tre classi di elementi transitivi. »

L'ordine di tal gruppo intanto deve essere $\frac{72 \cdot 6!}{216} = 2 \cdot 5!$

Ora esaminando la quintupla I si trova che se si permutano fra loro in qualunque modo i cinque punti 5, 7, 8, 6, 4, e poi si permutano anche i punti 1, 2, si hanno $2 \cdot 5!$ sostituzioni diverse per le quali resta inalterata la quintupla, ma sappiamo che tante debbono essere tutte quelle del gruppo della quintupla; dunque si ha il rimarchevole risultato che:

« Le sostituzioni che lasciano fissa la quintupla I sono comprese nel sottogruppo che lascia inalterata la caratteristica pari base della rappresentazione geometrica, e quindi sono rappresentabili in modo semplicissimo mediante opportune permutazioni di punti. »

(*) Le due prime formano fra loro una coppia gobba.

Con tali sostituzioni allora i tipi delle figure si conservano inalterati, e quindi non saranno fra loro equivalenti le figure di tipo diverso.

Esaminando il quadro stabilito avanti si vede che le quintuple aventi rispettivamente 2 o 3 rette comuni colla data sono o di tipo IV o di tipo III solamente, e quindi esse saranno effettivamente tutte fra loro equivalenti. Quelle invece che hanno una sola retta comune colla data sono di tre tipi diversi e quindi si scindono in 3 categorie distinte.

In quanto alle altre c'è da fare un'osservazione.

Noi nel quadro di avanti abbiamo indicato che le quintuple di tipo IV e non aventi nessuna retta comune colla data sono $20 + 10$.

Con ciò abbiamo voluto intendere che esse rispetto alla I ci si presentano separate in due classi. Giacchè evidentemente esse sono quelle che si ottengono formando un triangolo con tre dei cinque punti 5, 7, 8, 6, 4, e poi congiungendo un altro dei punti con 1 e con 2. Ora quest'altro punto può essere o il punto 3, ovvero un altro degli stessi cinque punti. E nel primo caso si hanno solo 10 figure e nel secondo 20.

Ma siccome le sostituzioni del nostro gruppo lasciano tutte fisso il punto 3, permutando fra loro gli altri cinque punti nominati, così le prime figure non possono reputarsi equivalenti alle seconde, pure essendo del medesimo tipo di queste.

Quindi possiamo dire che:

« Le quintuple che con una data non hanno rette in comune si separano « in 4 categorie distinte. Esse sono in numero di

$$20 + 40 + 20 + 10 = 90.$$

« Le quintuple che con una data hanno una retta in comune si separano « in *tre* categorie, e propriamente in

$$5 + 10 + 60 = 75.$$

« E finalmente quelle che con una data hanno rispettivamente 2 o 3 rette comuni sono tutte fra loro rispettivamente equivalenti, e sono 30 e 20. »

Noi ci fermeremo in ispecial modo a considerare le coppie, terne, ecc. di quintuple senza rette comuni.

§ 14. Coppie di quintuple senza rette comuni.

Incominciamo coll'introdurre per comodità una notazione che ci possa far rappresentare le varie forme di quintuple.

Converremo di indicare con

$$(3), \quad (1, 3\ 5\ 7\ 8), \quad (1, 3\ 5, 7), \quad (3, 7\ 6\ 8),$$

rispettivamente le quintuple I II III IV della fig. XI.

Sappiamo che rispetto alla (3) le altre 90 non aventi rette comuni con (3) si separano in 4 categorie; aggiungendo alla data, una di ciascuna delle 4 categorie, si hanno quattro coppie distinte.

Però noi ora faremo vedere che queste quattro coppie si riducono solo a tre essenzialmente distinte.

Le quattro coppie possono essere rappresentate dalle seguenti:

$$\begin{aligned} a &\equiv (3), & b_1 &\equiv (1, 3\ 5\ 7\ 8) \\ a &\equiv (3), & b_2 &\equiv (1, 3\ 5, 7) \\ a &\equiv (3), & b_3 &\equiv (3, 6\ 7\ 8) \\ a &\equiv (3), & b_4 &\equiv (5, 6\ 7\ 8). \end{aligned}$$

Ora noi faremo vedere che la 1.^a e 4.^a sono equivalenti, cioè, pur non esistendo una sostituzione che lasci inalterata la quintupla (3) e che muti l'altra (1, 3 5 7 8) in (5, 6 7 8), esiste invece una sostituzione che muta la quintupla (3) in (5, 6 7 8) e la quintupla (1, 3 5 7 8) in (3).

Questo dipende dal fatto che nella prima di quelle coppie le due quintuple non ci compariscono simmetricamente, ma la prima ha rispetto alla seconda un rapporto diverso di quello che la seconda ha rispetto alla prima.

Questo fatto non si verifica più nella seconda e terza coppia.

Esaminiamo allora in che rapporto stanno fra loro le due quintuple di una coppia.

Nella prima coppia (a) (b_1) vi è una retta di b_1 che incontra *tutte* quelle di a (la retta 1 3); poi vi è la retta 4 6 che incontra tre rette di a , e finalmente le altre tre rette di b_1 incontrano ciascuna *una* retta di a .

Viceversa non vi è nessuna retta di a che incontri *tutte* quelle di b_1 , e ve ne sono due che ne incontrano una sola di b_1 [e sono 3 4, 3 6 che incontrano solo la (1 3)], e poi ciascuna delle altre tre incontra tre rette di b_1 .

Si vede dunque che la relazione fra a e b_1 non è invertibile.

D'altra parte si può subito riconoscere che fra a e b_4 esiste precisamente la analoga relazione *invertita*.

Inoltre nella seconda coppia vi è *una* retta di a che incontra *tutte* quelle di b_2 , e viceversa, e poi un'altra retta di a incontra una sola di b_2 e viceversa, e tre rette di a incontrano ciascuna tre rette di b_2 e viceversa; mentre che nella 3.^a coppia vi sono *due* rette di a che incontrano *tutte* quelle di b_3 e viceversa, e le altre tre rette di a incontrano tre di b_3 come le rimanenti tre di b_3 incontrano, ciascuna, tre delle rette di a .

Nella seconda e terza coppia dunque le relazioni fra le due quintuple sono invertibili; le due quintuple entrano simmetricamente nella formazione della coppia, ciò che non si verifica per la prima e quarta coppia.

Queste saranno allora necessariamente fra loro equivalenti, perchè se con una sostituzione muto b_4 in a (e tale sostituzione deve esistere perchè le singole quintuple sono tutte equivalenti fra loro; il gruppo è transitivo in tutte le quintuple), allora la a deve diventare una di quelle quintuple che con a stessa hanno la medesima relazione che la a ha con b_4 , e quindi per le cose osservate sopra, non può che diventare una quintupla come b_1 , non essendoci altre che queste godenti della indicata proprietà. Quindi la coppia $b_4 a$ si trasforma in $a b_1$ e quindi è ad essa equivalente.

Risulta dunque che:

« Esistono solo tre specie di coppie fra loro distinte. Potremo prendere « per proprietà caratteristiche delle tre coppie le seguenti:

« Nella prima specie, $a b_1$, vi è un'unica retta di b_1 che incontra tutte « quelle di a , mentre non si verifica la proprietà reciproca. Allora, per di- « stinguere, chiameremo a elemento principale della coppia, e b_1 elemento se- « condario. La coppia $b_4 a$ è anche di questa specie, ma a qui invece figura « come elemento secondario. Di tali coppie ve ne sono 4320.

« Nella seconda specie, $a b_2$, vi è *una* sola retta di a che incontra tutte « quelle di b_2 , e *reciprocamente*.

« Ve ne sono anche 4320.

« Finalmente nella terza specie, $a b_3$, vi sono *due* rette di a che incon- « trano tutte quelle di b_3 e *reciprocamente*.

« Ve ne sono 1080. »

Questi criterii evidentemente ci sono sufficienti per riconoscere subito la specie della coppia.

Ci si presenta dunque qui per la prima volta un fatto nuovo che non ci si presentava in nessuna delle altre configurazioni studiate in questa e nell'altra Memoria; il fatto cioè di una coppia di elementi che non è simmetrica nei suoi due elementi.

§ 15. Gruppi di sostituzioni appartenenti alle tre specie di coppie di quintuple.

Per una coppia di 1.^a specie ab_1 , sappiamo che le due quintuple che la compongono non sono fra loro permutabili; quindi le sostituzioni che lasciano fissa la coppia saranno quelle che lasciano fisse separatamente le due quintuple, e poichè sappiamo che quelle che lasciano fissa (a) si riducono semplicemente a opportune permutazioni di punti (§ 13), così fra queste permutazioni di punti dobbiamo scegliere solo quelle che non alterano la figura b_1 , e perciò esse si riducono solo allo scambio dei punti 4, 6, e dei tre punti 5, 7, 8.

« Il gruppo appartenente ad una coppia di 1.^a specie ha per ordine $2 \cdot 3!$ »

In quanto alle coppie di 2.^a e 3.^a specie ci è utile esaminare anche quali sono le sostituzioni che lasciano inalterate le due quintuple delle coppie; però qui queste due quintuple sono invertibili fra loro.

Vediamo subito che:

« Le sostituzioni che lasciano fisse le due quintuple a, b_2 sono le sole « permutazioni dei tre punti 4, 6, 8. L'ordine del gruppo della coppia di « 2.^a specie è $2 \cdot 3!$ »

« Le sostituzioni che lasciano fisse le due quintuple a, b_3 sono le permutazioni dei tre punti 6, 7, 8 insieme allo scambio dei punti 1, 2. L'ordine « del gruppo della coppia di 3.^a specie è $4!$ »

**§ 16. Terne di quintuple non aventi a due a due rette comuni.
Terne derivate dalle coppie di 1.^a specie.**

Cerchiamo ora di aggiungere a ciascuna coppia un'altra quintupla, in maniera da formare una terna.

Si abbia una coppia di 1.^a specie $(a)(b_1)$.

Le sole figure che con (a) non hanno rette comuni sono le (b) della fig. XII e le loro analoghe.

Alla coppia ab_1 non potrà evidentemente aggiungersi una b_3 , perchè questa avrebbe sempre la retta (1 3) già posseduta da b_1 . Possiamo aggiungere solo una nuova b_1 o b_2 o b_4 .

Tenendo presenti le cose sopra dette riguardo ai gruppi di sostituzioni delle varie coppie, abbiamo che di figure b_1 ne possiamo aggiungere solo nove divise in due classi, cioè

o una $b_1' \equiv 23 \cdot 24 \cdot 25 \cdot 26 \cdot 78$ in numero di tre

o una $b_1'' \equiv 23 \cdot 24 \cdot 25 \cdot 27 \cdot 68$ in numero di sei.

Le tre della prima linea si ottengono da quella segnata permutando in tutti i modi i 3 punti 5, 7, 8, queste sostituzioni non alterando la coppia data, come si sa (vedi § 15). E un'analogha osservazione si fa per le sei della seconda linea.

Veniamo dunque a formare due terne distinte

$$\begin{array}{ccc} (a) & (b_1) & (b_1') \\ (a) & (b_1) & (b_1''). \end{array}$$

Esaminiamo la costituzione di queste terne. La coppia $b_1 b_1'$ è di 3.^a specie, mentre $(b_1 b_1'')$ è di 2.^a specie. Le altre coppie sono evidentemente di 1.^a specie perchè formate da un (a) e da una (b_i) e a è sempre elemento principale della coppia. Dunque:

« Si formano due terne distinte; la prima ha una coppia di 3.^a specie, « e le altre due di 1.^a specie; l'elemento comune a queste due coppie di « 1.^a specie funziona in ambedue come elemento principale. La seconda ha « una coppia di 2.^a specie, e le altre due di 1.^a; e anche qui l'elemento co- « mune a queste funziona sempre come elemento principale.

« Di tali terne ve ne sono rispettivamente

$$\frac{4320 \cdot 3}{2} = 6480, \quad \frac{4320 \cdot 6}{2} = 12960. »$$

Aggiungiamo ora figure b_2 alla coppia ab_1 . Tenendo sempre presente la formazione del gruppo corrispondente ad ab_1 si vede che tutte le b_2 che non hanno rette comuni colla coppia sono otto e si separano in tre categorie e sono (adoperando la notazione del § 14):

$$\begin{array}{ll} b_2' \equiv (2, 35, 7) & \text{in numero di sei} \\ b_2'' \equiv (2, 34, 5) & \text{„ sei} \\ b_2''' \equiv (2, 34, 6) & \text{„ due.} \end{array}$$

Quindi si hanno tre terne

$$\begin{array}{l} a \quad b_1 \quad b_2' \\ a \quad b_1 \quad b_2'' \\ a \quad b_1 \quad b_2''', \end{array}$$

e si può subito riconoscere che le coppie

$$\begin{array}{l} b_1 \quad b_2' \\ b_1 \quad b_2'' \\ b_1 \quad b_2''', \end{array}$$

sono rispettivamente di 1.^a specie (b_2' elemento principale), di 2.^a specie, e di 1.^a specie (b_1 elemento principale).

« Quindi si hanno tre altre terne diverse dalle precedenti; nella prima « vi è una coppia di 2.^a specie, e due di 1.^a specie, ma in cui l'elemento comune a queste, cioè b_1 , figura sempre come elemento *secondario* delle due « coppie di 1.^a specie; nella seconda terna vi ha due coppie di 2.^a specie e una « di prima; e la terza terna ha una coppia di 2.^a specie e due di prima, ma « però l'elemento comune a queste (cioè b_1) in tali due coppie figura una volta « come elemento *principale* (nella coppia $b_1 b_2''$) e una volta come elemento « *secondario* (nella coppia ab_1). Di queste terne ve ne sono rispettivamente

$$\frac{4320 \cdot 6}{2} = 12960, \quad 4320 \cdot 6 = 25920, \quad 4320 \cdot 2 = 8640. »$$

Finalmente aggiungiamo alla coppia ab_1 una delle figure b_4 . Quelle fra le b_4 che possono aggiungersi sono solo otto e sono (secondo la solita notazione):

$$\begin{array}{l} b_4' \equiv (4, 5 \ 6 \ 7) \quad \text{in numero di sei} \\ b_4'' \equiv (4, 5 \ 7 \ 8) \quad \quad \quad \text{due.} \end{array}$$

Si hanno le due terne

$$\begin{array}{l} a \quad b_1 \quad b_4' \\ a \quad b_1 \quad b_4'', \end{array}$$

La coppia $b_1 b_4''$ è di 2.^a specie, e la terna $ab_1 b_4''$ è necessariamente simile ad una già trovata sopra, e propriamente alla terna $ab_1 b_2'''$, in cui c'è una coppia di 2.^a specie e due di prima il cui elemento comune (nel nostro caso è a) figura una volta come principale e una volta come secondario.

La coppia $b_1 b_4'$ è invece di 1.^a specie (b_1 funziona da elemento *principale*), quindi la terna $a b_1 b_4'$ è una terna non ancora incontrata.

« Esiste ancora una terna in cui tutte le coppie sono di 1.^a specie. Ogni « elemento nelle due coppie cui appartiene funziona una volta come elemento « principale e una volta come secondario. Di tali terne ve ne sono:

$$\frac{4320 \cdot 6}{3} = 8640. »$$

Con ciò è esaurito l'esame di tutte le terne contenenti almeno una coppia di 1.^a specie.

§ 17. Terne derivate dalle coppie di 2.^a e 3.^a specie.

Vediamo quali quintuple possiamo aggiungere alla coppia di 2.^a specie $a b_2$.

Se aggiungiamo una b_1 o b_4 ricadiamo necessariamente in terne già trovate nel capitolo precedente, perchè si vengono a formare le coppie $a b_1$ o $a b_4$ di 1.^a specie. Non possiamo aggiungere una b_3 perchè tutte le b_3 contengono la retta (1 3) contenute in b_2 .

Possiamo dunque solo aggiungere una b_2 . Di queste ve ne sono solo sette che possono aggiungersi e sono:

$$b_2^{IV} \equiv (2, 3 7, 5) \quad \text{in numero di una}$$

$$b_2^V \equiv (2, 3 4, 5) \quad \text{» tre}$$

$$b_2^{VI} \equiv (2, 3 7, 4) \quad \text{» tre.}$$

Le coppie $b_2 b_2^V$, $b_2 b_2^{VI}$ si riconoscono di 1.^a specie; quindi le ultime due terne non differiranno da alcune di quelle del paragrafo precedente. Siccome poi la coppia $b_2 b_2^{IV}$ è di 2.^a specie così, la prima di quelle terne è una terna nuova non ancora trovata. Dunque:

« Esistono terne in cui tutte le coppie sono di 2.^a specie. Di tali terne « ve ne sono:

$$\frac{4320}{3} = 1440. »$$

Si abbia ora la coppia di 3.^a specie $a b_3$ e vi si voglia aggiungere un'altra quintupla. Aggiungendo una figura b_1 , b_2 , b_4 si avranno certamente alcune coppie di 1.^a e 2.^a specie, e quindi si dovrà ricadere in terne già considerate. Non potrebbe aggiungersi che una b_3 ; ma tutte le b_3 contengono le rette

(1 3) (2 3), dunque non esiste una b_3 che non abbia rette comuni con quelle della coppia ab_3 .

Si vede quindi che non c'è altro caso da considerare e che tutte le terne possibili sono quelle 7 trovate, che raccogliamo brevemente qui (alterando l'ordine col quale le abbiamo trovate, per una ragione che si vedrà dopo):

1. Terne in cui tutte le coppie sono di 2.^a specie.
2. Terne in cui una coppia è di 3.^a e due di 1.^a specie. L'elemento comune a queste due ultime figura sempre come elemento principale.
3. Terne in cui tutte le coppie sono di 1.^a specie.
4. Terne in cui una coppia è di 1.^a specie e due di 2.^a.
5. Terne in cui una coppia è di 2.^a specie e due di 1.^a, e l'elemento comune a queste funziona sempre come elemento *principale*.
6. Terne in cui una coppia è di 2.^a e due di 1.^a, e l'elemento comune a queste funziona sempre come *secondario*.
7. Terne in cui una coppia è di 2.^a e due di 1.^a, e l'elemento comune a queste funziona una volta come principale e una volta come secondario.

§ 18. Quaterne di quintuple — Ricerca delle terne *principali*.

Alla terna $(a) (b_1) (b_1')$ non potranno aggiungersi quintuple dei tipi $b_1 b_2 b_3$ perchè quella terna contiene ambedue le rette (1 3) (2 3), e queste quintuple le conterrebbero daccapo. Non potranno poi aggiungersi neanche figure b_4 , perchè quella terna contiene le rette che congiungono qualunque dei cinque punti 5, 7, 8, 6, 4 o con 1 o con 2, e una figura b_4 contiene necessariamente una di queste rette.

Dunque ne ricaviamo che alla terna (1) (vedi § 17) non possono aggiungersi altre quintuple non aventi con essa rette comuni.

Chiamando quindi assieme *principale* (*) un assieme di quintuple non aventi a due a due rette comuni, e tali che al di fuori di esse non esista altra quintupla che stia con loro nelle medesime condizioni, si ha:

« La terna (2) della tabella precedente è una terna principale. »

Vediamo se possiamo aggiungere altre quintuple alla terna $(a) (b_1) (b_1')$. Anche qui non potranno essere che figure come b_4 , e di queste si può riconoscere che ve ne sono 4.

(*) Ciò è analogo alla introduzione dei *poliedri principali* di BERTINI (vedi Mem. II).

Esaminiamo prima quali sono le sostituzioni del gruppo della terna $(a) (b_1) (b_1'')$.

Essendoci una coppia di 2.^a specie, $(b_1 b_1'')$ e due di 1.^a specie, non c'è naturalmente la permutabilità fra le quintuple, ma la (a) resterà necessariamente fissa.

E perciò per i soliti principii sviluppati sopra, le sostituzioni si ridurranno a quelle permutazioni fra i punti 5, 7, 8, 4, 6 fra loro e 1, 2 fra loro che o lascian fisse $b_1 b_1''$ o le scambiano fra loro. Tali sostituzioni sono o lo scambio di 5 con 7 (il che lascia fisse $b_1 b_1''$) o lo scambio di 4 con 8 e 1 con 2 (il che scambia b_1 con b_1''). In tutto sono quattro sostituzioni.

Le figure b_4 che possono aggiungersi alla terna sono:

$$b_4''' \equiv (6, 5\ 4\ 7), \quad (6, 5\ 7\ 8)$$

$$b_4^{IV} \equiv (6, 5\ 4\ 8), \quad (6, 4\ 7\ 8),$$

e le due della prima linea, o le due della seconda sono equivalenti, perchè si ricavano l'una dall'altra cogli scambi indicati.

Otteniamo quindi due quaterne

$$(a) (b_1) (b_1'') (b_4''')$$

$$(a) (b_1) (b_1'') (b_4^{IV}).$$

Evidentemente da queste non potrà formarsi una quintina aggiungendo un'altra quintupla, perchè intanto la quintupla aggiunta non potrebbe essere, per le medesime ragioni, che una nuova b_4 , cioè un'altra di quelle sopra segnate, e d'altra parte, quelle hanno tutte le due rette (1 6) (2 6) in comune.

Esaminando le due quaterne troviamo in quanto alla loro costituzione che

la coppia	$a b_1$	è di 1. ^a specie;	[(a) è elemento principale]
" "	$a b_1''$	" 1. ^a "	[[(a) " "]
" "	$b_4''' a$	" 1. ^a "	[[(b_4''') " "]
" "	$b_1 b_4'''$	" 1. ^a "	[[(b_1) " "]
" "	$b_1 b_1''$	" 2. ^a "	
" "	$b_1'' b_4'''$	" 2. ^a "	
" "	$a b_4^{IV}$	" 1. ^a "	[[(a) " "]
" "	$b_1 b_4^{IV}$	" 1. ^a "	[[(b_1) " "]
" "	$b_1'' b_4^{IV}$	" 1. ^a "	[[(b_1'') " "].

Cioè queste due terne sono effettivamente distinte, perchè hanno formazione diversa; la prima ha due coppie di 2.^a specie con un elemento comune, e quattro di 1.^a specie, mentre la seconda ha una coppia di 2.^a specie e cinque di 1.^a specie. Si può verificare che la prima contiene una sola terna $(a) (b_1) (b_4''')$ con tutte coppie di 1.^a specie [una di quelle classificate come (3) nel § 17], e la seconda ne contiene *due* di queste terne [cioè $(a) (b_1) (b_4^{IV})$, $(a) (b_1'') (b_4^{IV})$].

Possiamo dunque dire:

« Esistono due quaterne *principali*; la prima contenente due coppie di 2.^a e le altre di 1.^a; e l'altra contenente una coppia di 2.^a e le altre di 1.^a; « la prima contiene una sola terna (3) del § 17, e la seconda ne contiene due.

« Le altre terne che contiene la prima sono:

una come la (4) del § 17 $(b_1 b_1'' b_4''')$

» (5) » $(a b_1 b_1'')$

» (7) » $(a b_1'' b_4'')$,

« e le altre terne contenute nella seconda quaterna sono:

una come la (5) del § 17 $(a b_1 b_1'')$

» (6) » $(b_1 b_1'' b_4^{IV})$,

« cioè per la prima le quattro terne contenute sono tutte diverse, e per la « seconda due sole sono simili.

« Di tali quaterne ve ne saranno rispettivamente lo stesso numero

$$12960 \cdot 2 = 25920 \quad 12960 \cdot 2 = 25920. \text{ »}$$

Ora faremo vedere quali sono le altre quaterne possibili, e in tale analisi ci gioveremo del fatto che queste due trovate sono certamente le sole (pel modo col quale le abbiamo ottenute) contenenti una terna (5) (§ 17) quindi sempre che otterremo una quaterna con una terna (5) possiamo dire che essa non è diversa dalle precedenti.

§ 19. Continuazione della ricerca delle quaterne.

Vediamo cosa possiamo aggiungere a ciascuna delle tre terne

$$a b_1 b_2', \quad a b_1 b_2'', \quad a b_1 b_2''',$$

che sono rispettivamente le terne classificate come (6) (4) (7) nel § 17.

È facile vedere che non esistono altre figure, che alcune delle b_4 , le quali non abbiano rette comuni con queste terne.

Nel primo caso queste b_4 sono solo due e sono:

$$(4, 5 6 8) \quad (6, 5 4 8),$$

fra loro equivalenti, perchè per lo scambio di 4 con 6 (scambio che non altera la terna $a b_1 b_2'$) si trasformano l'una nell'altra. Ma una di esse per es. la prima, con (a) (b_2) forma una terna (5), e quindi, pel principio invocato alla fine del § 18, non possiamo essere in presenza di una quaterna nuova.

Alla terna $a b_1 b_2''$ possiamo aggiungere solo una delle b_4 cioè:

$$(6, 4 7 8),$$

ma questa con a , b_2'' forma ancora una terna (5).

È alla terna $a b_1 b_2'''$ possiamo aggiungere le seguenti figure del tipo b_4 :

$$b_4^v \equiv (6, 5 7 8)$$

$$\beta_4 \equiv (6, 4 5 7), \quad (6, 4 7 8), \quad (6, 4 8 5),$$

di cui le tre della seconda linea sono fra loro equivalenti, perchè si possono ricavare l'una dall'altra colle permutazioni dei punti 5, 7, 8, permutazioni che lasciano inalterata la terna data.

Ma intanto anche qui la terna $b_1 b_2''' \beta_4$ è una terna (5) e quindi la quaterna che si otterrebbe non è diversa da una già trovata.

Invece la quaterna

$$a b_1 b_2''' b_4^v,$$

non contiene nessuna terna (5), e quindi è una nuova. Essa contiene due coppie di 2.^a specie ($a b_2'''$, $b_1 b_4^v$) e quattro di 1.^a; ma a differenza di quella analoga già trovata sopra, le due coppie di 2.^a non hanno elementi comuni; cioè le quattro quintuple si *scindono* in due coppie di 2.^a specie.

Anche a questa quaterna non può evidentemente aggiungersi un'altra quintupla senza rette comuni con essa.

Possiamo dire:

« Ogni terna (7) del § 17 individua un'ultima quintupla che con essa « forma una quaterna *principale* in cui vi sono due coppie di 2.^a specie *separate*, cioè senza elementi comuni, e tutte le altre coppie sono di 1.^a specie. « Tale quaterna non conterrà naturalmente terne in cui tutte le coppie sieno « di 1.^a specie cioè terne (3), mentre che le precedenti quaterne contenevano « una o due terne (3).

« Le terne contenute in questa quaterna sono tutte quattro terne come le « (7) del § 17, cioè quelle contenenti una coppia di 2.^a e due di 1.^a in cui « l'elemento comune figura come secondario e principale. Di queste quaterne « ve ne sono $\frac{8640}{4} = 2160$. »

Esaminiamo ora le quintuple esterne alla terna

$$a b_1 b_4'$$

Se aggiungiamo una figura come b_1 , b_2 o b_3 , allora abbiamo sempre quaterne già considerate, perchè contenenti terne (5) o (6) o (4) o (7). Non resta quindi che aggiungere figure b_4 , delle quali non ne esistono che solo due che fanno al nostro caso e sono:

$$(6, 4 5 8) \quad (6, 4 7 8),$$

fra loro equivalenti, perchè per lo scambio di 5 con 7 (scambio che non altera la terna) esse si permutano fra loro. Però la prima di queste con b_1 , b_4' forma una terna (5) e quindi, per l'osservazione già fatta non siamo in presenza di quaterne nuove.

Dobbiamo finalmente considerare la terna (§ 17)

$$a b_2 b_2^{IV},$$

contenente tutte coppie di 2.^a specie.

Se aggiungiamo figure b_1 o b_4 abbiamo almeno una coppia di 1.^a specie, e quindi ricadiamo in quaterne trovate già prima.

Non potrà poi aggiungersi nessuna figura b_3 , perchè queste contengono la retta (1 3) già contenuta nella terna; e infine non potrà aggiungersi neanche una figura b_2 , perchè questa conterrebbe necessariamente o la retta (1 3) o la retta (2 3), e queste due sono già contenute rispettivamente in b_2 e b_2^{IV} .

Possiamo intanto dire che la terna $a b_2 b_2^{IV}$ [che è la (1) del § 17] è una terna principale.

Possiamo anche dire:

« Oltre le quaterne non si possono costruire altri assieme di quintuple non « aventi a due a due rette in comune.

« Esistono tre sole specie di quaterne che sono quelle descritte sopra, e « sono naturalmente tutte quaterne principali.

« Esistono 7 diverse specie di terne di cui due [le (1) (2) del § 17] sono « terne principali. »

§ 20. Teoremi sulle terne e quaterne principali.

Abbiamo dimostrato che esistono due specie di terne principali e tre quaterne.

Vogliamo ora ricercare la configurazione delle rette esterne ad uno di questi assiemi principali.

Le rette esterne alla terna (1) sono:

24, 26, 28, 25, 46, 68, 84, 57, 61, 81, 41, 71.

Ora queste rette si possono in due modi raccogliere a formare dei piani.

Si possono cioè formare i quattro piani

24 · 46 · 61

26 · 68 · 81

28 · 84 · 41

25 · 57 · 71,

ovvero gli altri quattro

24 · 48 · 81

26 · 64 · 41

28 · 86 · 61

25 · 57 · 71.

Ciascuno di questi assiemi di quattro piani rappresenta, come si vede, un tetraedro di 2.^a specie di BERTINI (*), e propriamente si hanno due di quei tetraedri con una faccia comune; onde:

« Le rette esterne ad una terna principale (1) formano in due modi quattro « piani che sono poi le facce di due tetraedri di 2.^a specie di BERTINI (**), « aventi una faccia comune.

« Ad ogni terna principale (1) corrisponderà dunque una coppia di questi « tetraedri, ed effettivamente il numero di essi è doppio di quello delle terne. »

(*) *Contribuzione*, ecc. Annali di Matem., tom. 12. Vedi anche Mem. II.

(**) I tetraedri di 2.^a specie sono quelli contenenti un triedro di 3.^a specie e tre triedri di 1.^a specie.

Le rette esterne alla terna (2) sono:

68, 46, 28, 27, 57, 45, 47, 58, 14, 16, 65, 67,

e si riconosce che si possono costruire solo *tre* piani le cui rette sieno tutte comprese fra queste, e sono i piani

$$28 \cdot 86 \cdot 61$$

$$27 \cdot 76 \cdot 61$$

$$27 \cdot 74 \cdot 41,$$

formanti, come si vede, un triedro circolare aperto (vedi Mem. II). Dunque:

« Esternamente ad una terna principale (2) si possono costruire non più « che tre piani, e questi formano un triedro circolare aperto. »

Passiamo ora analogamente a considerare le rette esterne alle quaterne.

Le sette rette esterne alla prima quaterna trovata nel § 18 sono:

$$78 \cdot 48 \cdot 76 \cdot 56 \cdot 58 \cdot 14 \cdot 28,$$

colle quali si può costruire un piano e uno solo (1482), e le altre quattro rette con due di quelle del piano possono costituire due quadrilateri circolari chiusi

$$48 \cdot 28 \cdot 78 \cdot 56$$

$$48 \cdot 28 \cdot 58 \cdot 76.$$

Per la 2.^a quaterna poi dello stesso § 18 le rette esterne sono:

$$47 \cdot 75 \cdot 78 \cdot 28 \cdot 56 \cdot 76 \cdot 14.$$

Di queste due cioè 57·67 sono gobbe fra loro e con tutte le altre, e le altre cinque costituiscono un pentalatero circolare chiuso

$$14 \cdot 47 \cdot 56 \cdot 78 \cdot 28.$$

Finalmente per la 3.^a quaterna (quella trovata nel § 19) le rette esterne sono:

$$14 \cdot 25 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 45 \cdot 47 \cdot 48,$$

colle quali si possono formare solo i tre piani

$$(1452)$$

$$(1472)$$

$$(1482),$$

passanti per una medesima retta. Ora per questa retta, si sa, che passano altri due piani che sono:

$$(1\ 4\ 3\ 2)$$

$$(1\ 4\ 6\ 2),$$

e si può subito verificare che le altre quattro rette formanti questi piani cioè $4\ 3 \cdot 3\ 2 \cdot 4\ 6 \cdot 6\ 2$ sono distribuite una per parte alle quattro quintuple della quaterna.

La quaterna è $a\ b_1\ b_2''' \ b_4^v$ (§ 19), e si vede che la retta $(3\ 4)$ è contenuta in (a) , la retta $(4\ 6)$ in (b_1) , la retta $(3\ 2)$ in (b_2''') e la retta $(6\ 2)$ in b_4^v , e quindi, ricordando che le due coppie di 2.^a specie contenute nella quaterna sono quelle formate dalle quintuple $a\ b_2'''$, e $b_1\ b_4^v$, si ha che le rette, fra quelle quattro, che appartengono ad uno stesso piano sono contenute in due quintuple *opposte*, chiamando opposte rispetto alla formazione della quaterna, due quintuple formanti una delle due coppie di 2.^a specie.

Possiamo notare quindi queste rimarchevoli relazioni che ci sono fra la quaterna e le sue rette esterne, dicendo:

« Fra le sette rette esterne ad una quaterna del § 19, ve n'è una speciale che incontra tutte le altre sei, e con queste costituisce tre piani passanti naturalmente per una medesima retta; gli altri due piani poi che passano per quella retta sono formati con rette che si trovano distribuite « rispettivamente nelle due coppie di quintuple opposte della quaterna. »

Milano, Inverno del 1892-93.

Sulle serie di potenze.

Estratto di una lettera al dottore Vivanti.

(Del prof. S. PINCHERLE, a Bologna.)

La lettura della sua recente Nota pubblicata in uno degli ultimi fascicoli degli « Annali di Matematica » sotto il titolo: *Sulle serie di potenze i cui coefficienti dipendono da una variabile*, mi ha suggerito alcune riflessioni che mi permetto di comunicarle nelle seguenti righe.

Il di Lei lavoro mi ha tanto maggiormente interessato, in quanto che l'argomento in esso trattato si collega strettamente con una questione di cui mi sono occupato a più riprese: voglio dire la ricerca del campo di convergenza di una serie procedente per le funzioni di un determinato sistema. È manifesto il nesso fra le due questioni. Si abbia infatti una serie di potenze di z , a coefficienti dipendenti dal parametro u :

$$\sum \varphi_n(u) z^n, \quad (1)$$

e si indichi con $\rho(u)$ il suo raggio di convergenza; si consideri poi una serie procedente per le funzioni $\varphi_n(u)$

$$\sum c_n \varphi_n(u), \quad (2)$$

dove il limite del rapporto $c_n : c_{n-1}$ per $n = \infty$ ha per modulo il numero positivo α o, più generalmente, dove la serie di potenze $\sum c_n t^n$ converge entro il cerchio di raggio $\frac{1}{\alpha}$. La serie (2) convergerà per tutti i valori di u pei quali è $\rho(u) > \alpha$, e quindi l'equazione $\rho(u) = \alpha$ definirà, nel piano della variabile u , il contorno del campo entro cui converge la (2).

Considerando la (1) come una funzione che dirò $T(z, u)$, delle due variabili z ed u , la circonferenza di convergenza della (1) è, come è noto, caratterizzata dalla proprietà che su di essa si deve trovare almeno un punto in cui la $T(z, u)$ cessa di essere regolare. Ora, per ogni valore di u esiste-

ranno per la $T(z, u)$ delle singolarità che dipenderanno in generale da u : sia

$$f(z, u) = 0, \quad (3)$$

l'equazione che esprime questa dipendenza. Il raggio di convergenza della serie (1) per un dato u è il modulo $\rho(u)$ della radice di modulo minimo di questa equazione.

In questo genere di ricerche ho trovato molto vantaggioso il metodo grafico che ho proposto altra volta e che Ella probabilmente conosce: di innalzare cioè in ogni punto del piano della variabile u una perpendicolare su cui, a partire dal piede, si tagliano da una stessa parte delle lunghezze (ordinate) misurate dai moduli delle radici di (3). Gli estremi di queste ordinate danno una superficie che ogni perpendicolare al piano u incontra generalmente in più punti: l'ordinata minima dà il valore di $\rho(u)$.

Tornando al di Lei scritto, vi si trovano degli esempi di serie di potenze i cui coefficienti, sebbene funzioni razionali intere di un parametro, sono così formati che il raggio di convergenza della serie varia in modo discontinuo al variare continuo del parametro. Però, è importante di notare che le serie che Ella costruisce sono tali da avere il loro raggio di convergenza *generalmente* [cioè eccettuati solo dei valori del parametro in numero finito (*)] *uguale a zero*; ma una serie di raggio generalmente nullo non rappresentando alcuna funzione, rimane insoluta la domanda se sia possibile di costruire delle serie di potenze i cui coefficienti siano funzioni analitiche di un parametro, le quali serie abbiano raggio di convergenza *generalmente non nullo* e discontinuo per un certo numero di valori del parametro.

A me sembra che per gettare qualche luce su tale questione s'imponga lo studio dell'equazione (3). Per trattare un caso tanto esteso che quasi lo chiamerei normale, supponiamo che l'equazione (3) abbia la forma

$$\varphi(z)\psi(u)F(z, u) = 0, \quad (4)$$

dove φ e ψ sono funzioni intere, razionali o trascendenti, di z ed u rispettivamente, ed $F(z, u)$ è funzione intera, razionale o trascendente, di z ed u . Si denoti con α il minimo modulo delle radici di $\varphi(z)$, con u_h una radice di $\psi(u)$. Dando ad u il valore u_h , il raggio $\rho(u_h)$ di convergenza è nullo: per

(*) Importa appena di avvertire che lo stesso Suo procedimento vale a costruire una serie di potenze i cui coefficienti siano funzioni analitiche di un parametro, e che abbiano raggio di convergenza finito od infinito per un numero infinito (ma numerabile) di valori di u , e raggio nullo per tutti gli altri.

ogni altro valore \bar{u} di u , il raggio $\rho(\bar{u})$ è la minore fra le due quantità α ed il modulo minimo $\zeta(u)$ delle radici di $F(z, u) = 0$. Descritta la curva $\zeta(u) = \alpha$, da essa curva vengono separate le regioni in cui è $\zeta(u) > \alpha$ da quelle in cui $\zeta(u) < \alpha$. In queste, il raggio $\rho(u)$ è funzione continua di u : nelle altre, il raggio $\rho(u)$ è costante e uguale ad α . Vi è dunque tutt'al più discontinuità nei soli punti u_h , nei quali il raggio di convergenza si riduce a zero. Nella rappresentazione grafica accennata più sopra, fanno parte della superficie i piani paralleli al piano u , a distanze uguali ai moduli delle radici di $\varphi(z)$, e le rette perpendicolari al piano u stesso nei punti u_h . Si vede da ciò che il raggio $\rho(u)$ è una funzione generalmente continua di u , con discontinuità nei soli punti u_h , nei quali il suo valore è zero.

Nel § 4 del suo pregiato lavoro Ella enuncia il seguente teorema, il quale, mi pare appartenga ad un ordine interessante di ricerche: *Se una serie di potenze, a coefficienti razionali interi in u e di grado non superiore a p , ha per $p + 1$ valori della u il raggio R di convergenza, essa ha questo stesso raggio per qualunque valore finito di u .* Ella scorgerà facilmente che questo teorema è un caso particolare del seguente, di facilissima dimostrazione: *Siano P_1, P_2, \dots, P_p , p serie di potenze e si formino colle costanti λ_{hk} indipendenti da z , le serie*

$$Q_1 = \lambda_{11} P_1 + \lambda_{12} P_2 + \dots + \lambda_{1p} P_p,$$

$$Q_2 = \lambda_{21} P_1 + \lambda_{22} P_2 + \dots + \lambda_{2p} P_p,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$Q_p = \lambda_{p1} P_1 + \lambda_{p2} P_2 + \dots + \lambda_{pp} P_p,$$

dove il determinante $\Delta = (\lambda_{11} \lambda_{22} \dots \lambda_{pp})$ sia diverso da zero. Se queste serie hanno il raggio comune di convergenza R , la serie

$$c_1 P_1 + c_2 P_2 + \dots + c_p P_p, \quad (5)$$

dove c_1, c_2, \dots, c_p sono pure costanti indipendenti da z , converge in generale entro il cerchio di raggio R : potendo convergere in un cerchio di raggio maggiore per valori speciali delle costanti c_i .

Usando un linguaggio geometrico, si può dire che considerando le serie di potenze come punti in uno spazio ad infinite dimensioni e di cui i coefficienti delle serie sarebbero le coordinate, la (5) rappresenta uno spazio lineare S_{n-1} in questo spazio, e le serie di S_{n-1} che convergono in un cerchio di raggio maggiore di R formano uno spazio lineare S_m ($m \leq n - 2$) contenuto in S_{n-1} .

12 Giugno 1893.

Fig. I.

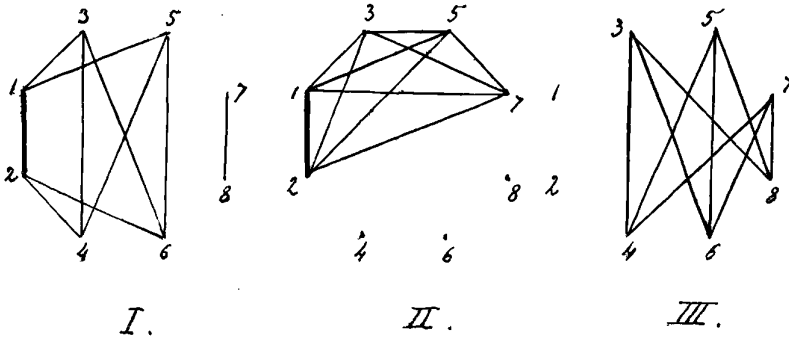


Fig. II.

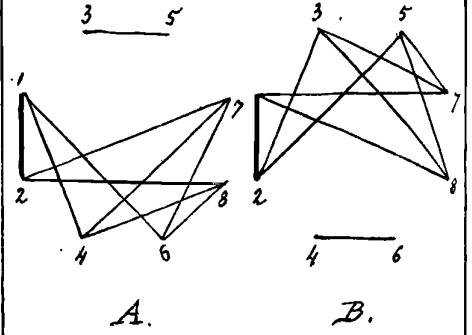


Fig. III.

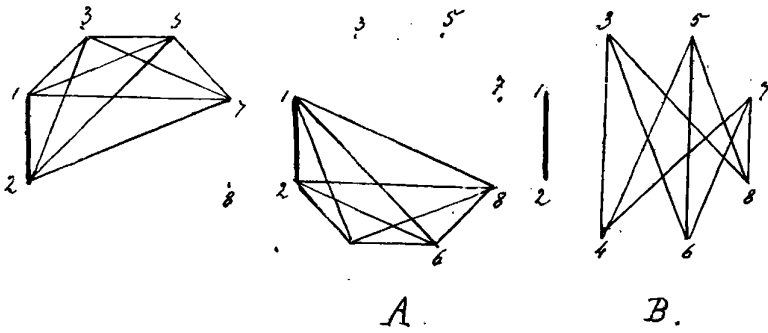


Fig. IV.

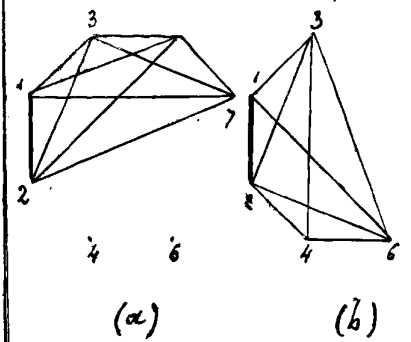


Fig. V.

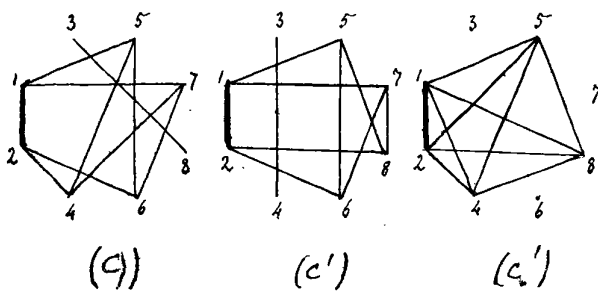


Fig. VI.

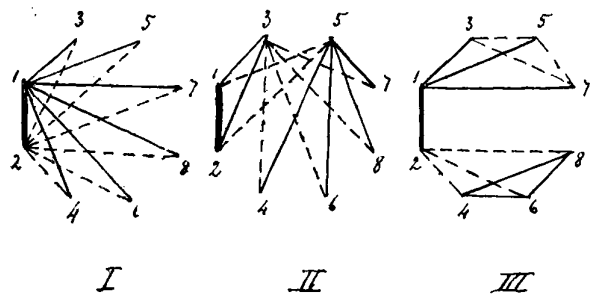


Fig. VII.

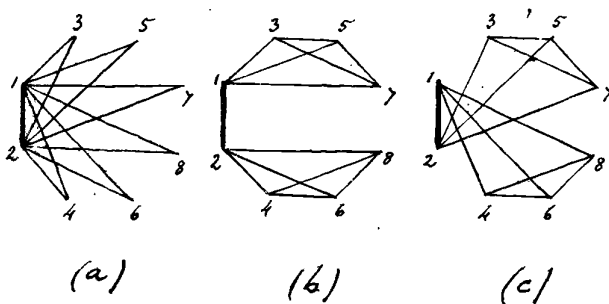


Fig. VIII.

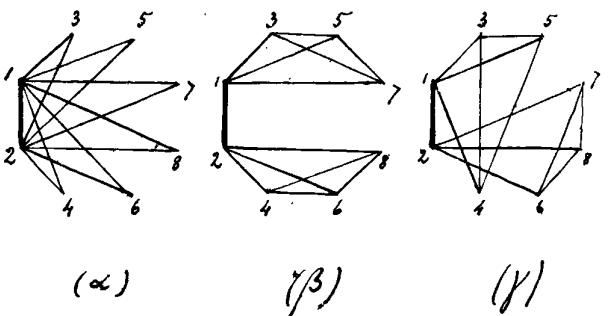


Fig. IX.

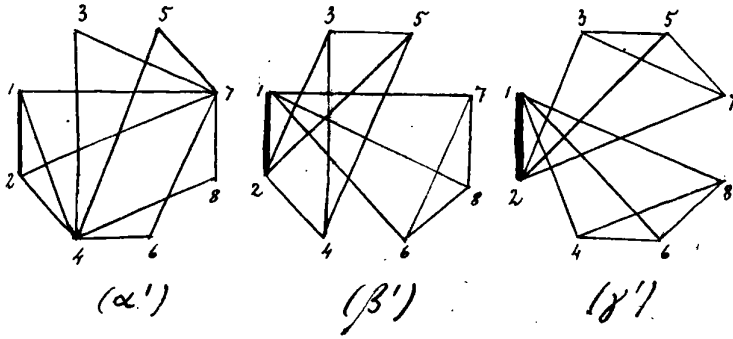


Fig. X.

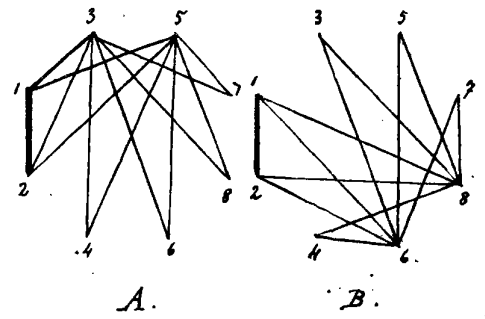


Fig. XI.

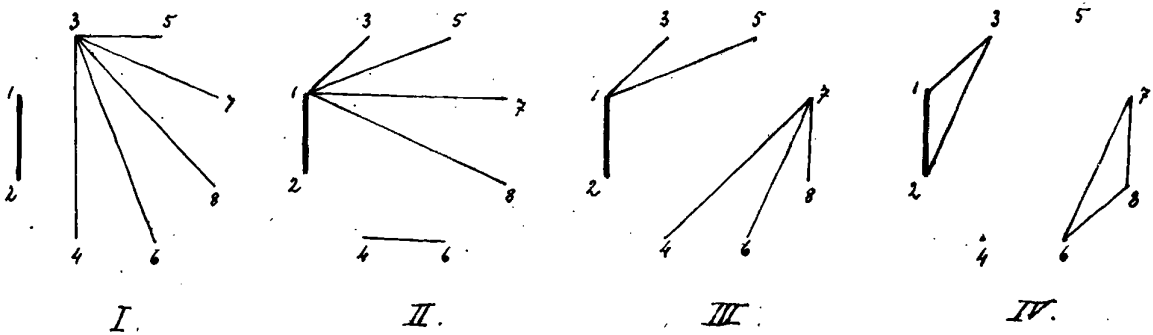
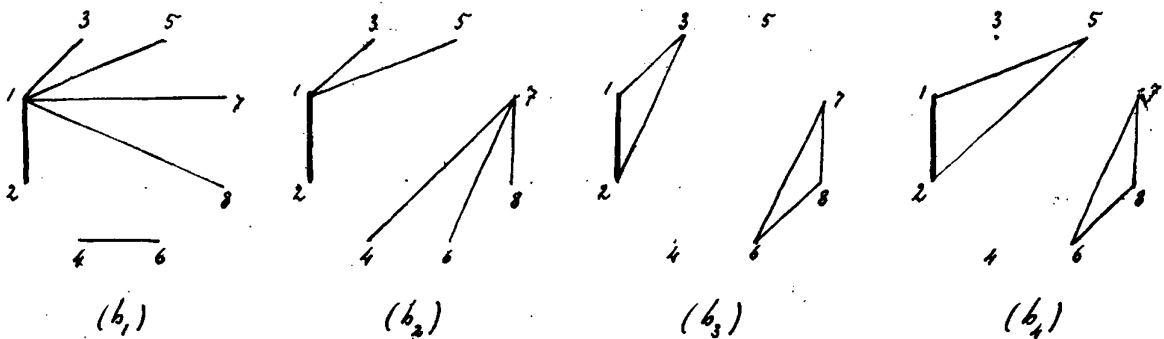


Fig. XII.



Studio di alcuni sistemi di rette considerati come superficie dello spazio a cinque dimensioni.

(Di GINO FANO, a Torino.)

§ 1. Considerazioni generali sui sistemi di rette e oggetto di questo lavoro.

1. È noto che di ogni risultato relativo ad enti contenuti in una quadrica non degenera dello spazio a cinque dimensioni si può avere un'applicazione, e spesso anche notevole e interessante, immaginando che l'elemento o punto di questa quadrica (la cui natura, nelle ricerche, si lascia di solito indeterminata) sia precisamente la *retta* dello spazio ordinario (S_3) (e quella quadrica sia perciò l'insieme di queste rette) (*).

L'idea di considerare la geometria della retta come quella appunto di una quadrica dello spazio S_5 conta ormai parecchi anni di esistenza, e si può dire col sig. SEGRE (**) ch'essa compare già « in tutti i principali lavori che « dalla *Neue Geometrie des Raumes* di PLÜCKER in poi si scrissero sulla geometria della retta (e più particolarmente in quelli, molto importanti, del « KLEIN e del Voss) ». Non è qui il luogo di passare in rassegna tutti questi lavori, poichè la cosa, per quanto interessante, ci trarrebbe troppo in lungo; ci basti quindi ricordare la classica Memoria del sig. KLEIN: *Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie* (già cit. alla nota (*)) (***) e l'altra del

(*) « *Die Liniengeometrie ist wie die Geometrie auf einer $M_4^{(2)}$ des R_5 » (cfr. KLEIN: *Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie*; Math. Ann., Bd. 5, pag. 261).*

(**) Cfr. la prefazione alla Dissertazione di Laurea: *Studio sulle quadriche in uno spazio lineare a un numero qualunque di dimensioni* (Mem. della R. Acc. delle Scienze di Torino, serie 2.^a, vol. 36).

(***) Del Voss si hanno pure molti lavori nei Math. Annalen.

Annali di Matematica, tomo XXI.

sig. SEGRE: *Sulla geometria della retta e delle sue serie quadratiche*, nella quale si può forse dire che l'idea di PLÜCKER si trova per la prima volta posta *sistematicamente* ad effetto (*).

Una delle prime e più ovvie esplicazioni di questi fecondissimi concetti è ben naturale che la si abbia nello *studio dei sistemi di rette dello spazio ordinario considerati come superficie dello spazio a cinque dimensioni*. Considerata infatti la retta di S_3 come elemento di una quadrica (non degenera) dello spazio S_5 , è chiaro che ogni sistema (o congruenza) di rette potrà (e dovrà anzi) concepirsi come una *superficie* contenuta in questa stessa quadrica; e le proprietà di questa superficie si tradurranno allora immediatamente in quelle della congruenza. Potrà la superficie essere contenuta in uno spazio S_4 , e quindi in una quadrica (M_3^2) di quest'ultimo (che potrebbe anche essere un cono di prima specie); questo caso corrisponderà a quello di una congruenza contenuta in un complesso lineare (e precisamente in un complesso lineare speciale, se quella quadrica è un cono). In uno spazio inferiore a S_4 è certo che la superficie non potrà stare (quando solo si escludano il caso notissimo della congruenza lineare (1, 1), e quelli, ancora più semplici, della stella di rette (1, 0) e del piano rigato (0, 1)).

Uno studio dei sistemi di rette partendo da un tal punto di vista non mi sembra che sia ancora stato fatto; e per questo appunto ho creduto valesse la pena di far conoscere alcuni risultati speciali (come verrà meglio precisato in seguito) a cui per questa via sono stato condotto (**).

2. Supponiamo dunque di avere nello spazio S_3 un sistema (algebrico) di rette il quale sia di ordine m , di classe n , di rango k e di genere p (***)

(*) Questo lavoro costituisce la seconda parte della Dissertazione di Laurea cit. In esso, considerando appunto la geometria della retta come quella di una quadrica a quattro dimensioni in uno spazio lineare S_5 , l'A. fa la teoria generale del complesso quadratico, della sua superficie singolare, dei suoi complessi lineari fondamentali, ecc., qualunque sia la *specie* del complesso medesimo, e ottiene così molti risultati importanti e fino allora sconosciuti. Nello stesso lavoro il sig. SEGRE si occupa anche delle congruenze quadratiche e delle rigate biquadratiche, considerandole rispettivamente come intersezioni di due quadriche in S_4 e in S_3 .

(**) I più vivi ringraziamenti devo poi tributare all'egr. prof. C. SEGRE, il quale, essendosi già occupato anni sono di quest'argomento, volle gentilmente rilasciarmi alcuni suoi appunti in proposito; appunti che mi furono spesso di ottima guida nelle ricerche.

(***) Con ciò intendiamo che fra le rette del sistema ve ne siano in generale m che passano per un punto arbitrario dello spazio, e n che giacciono in un piano del pari arbitrario; che vi siano in generale k coppie di rette formanti fascio con una retta data, e che infine le rette comuni allo stesso sistema e a un complesso lineare, in particolare

Questo sistema si potrà rappresentare con una superficie F dello spazio S_3 contenuta in (almeno) una quadrica (M_4^2) non degenera; questa superficie sarà di ordine $m + n$, e i piani dei due sistemi di quella quadrica la segheranno rispettivamente in m e in n punti. Le sezioni spaziali della superficie saranno curve di genere p . Da una retta r della M_4^2 non incidente a F^{m+n} questa superficie si proietterà su di un S_3 in un'altra superficie Φ (in generale semplice) pure di ordine $m + n$ e con un punto m^{plo} e un punto n^{plo} , proiezioni rispettivamente degli m e degli n punti di F che stanno nei due piani di M_4^2 passanti per r (*). Le corde di F incidenti a r stessa daranno poi luogo a una curva doppia di Φ , la quale in quei due punti, l'uno m^{plo} e l'altro n^{plo} , della superficie avrà rispettivamente le molteplicità $\binom{m}{2}$ e $\binom{n}{2}$ e in ogni piano passante per questi due punti ne avrà ancora altri k , sicchè il suo ordine sarà dato dalla somma $\binom{m}{2} + \binom{n}{2} + k$ (**). Avremo perciò

$$p = \binom{m+n-1}{2} - \binom{m}{2} - \binom{n}{2} - k,$$

ossia

$$p = (m-1)(n-1) - k,$$

se la superficie Φ non ha, all'infuori di quella certa curva di ordine $\binom{m}{2} + \binom{n}{2} + k$, nessun punto doppio, o ne ha solo più un numero finito. Se invece ne ha infiniti altri (e quindi la congruenza ha infinite rette doppie) (***), il valore

dunque quelle rette del sistema che si appoggiano ad una retta fissa data ad arbitrio, formino in generale una rigata di genere p . La necessità (o l'opportunità almeno) di considerare accanto all'ordine e alla classe di una congruenza di rette anche uno di questi ultimi due caratteri (caratteri che, come apparirà tosto, sono intimamente legati fra loro) fu rilevata per la prima volta da SCHUMACHER (Math. Ann., Bd. 37; cfr. anche STURM: *Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung*, vol. 2.º, pag. 1) il quale chiamava *Art* ciò che noi qui chiamiamo (e che oggi comunemente si chiama) *rango* della congruenza. Di questa stessa opportunità è fatto cenno anche negli appunti del sig. SEGRE, e in un foglio precisamente che ritengo scritto prima ancora della pubblicazione del lavoro cit. di SCHUMACHER.

(*) Questo ragionamento si può applicare anche al caso in cui la superficie F sia contenuta in uno spazio S_4 , purchè la retta r si prenda allora semplicemente incidente a questo stesso spazio.

(**) V. anche SCHUMACHER: *Classification der algebraischen Strahlensysteme*. (È questo il lavoro cit. dei Math. Ann., Bd. 37.)

(***) Questi ulteriori punti doppi di Φ non possono provenire infatti che da punti i quali siano a lor volta doppi per F (e corrispondano perciò a rette doppie della congruenza).

di p subirà una diminuzione uguale all'ordine di questa nuova linea doppia (ossia della rigata costituita dalle rette doppie della congruenza) (*) (**).

Da quanto precede segue altresì che il nostro sistema (m, n) (**), supposto privo di *linea focale*, ammetterà una *superficie focale* di ordine $\mu = 2\{m + p - 1\}$ e di classe $\nu = 2\{n + p - 1\}$ (****).

3. In questo lavoro noi ci occuperemo di sistemi di rette per cui $m + n \leq 8$; di sistemi cioè che si rappresentano con superficie di ordine non superiore all'*ottavo*. Per queste congruenze introdurremo (in generale almeno) la restrizione che esse *non abbiano infinite rette doppie*; restrizione che abbrevierà spesso, e non poco, i nostri ragionamenti, senza tuttavia troppo scemare l'importanza e la generalità (per quanto ben relative) dei risultati che otterremo. E possiamo anche dispensarci dalla considerazione dei sistemi di genere $p = 0$. Infatti dalle note proprietà delle superficie a sezioni razionali (****) discende immediatamente che ogni congruenza (m, n) di genere

(*) La relazione $p = (m - 1)(n - 1) - k$ risulta anche da una formola di CHASLES (Compt. Rend., tom. 53) sul genere di una curva tracciata sopra una quadrica. Infatti la sezione determinata nella superficie F dall' S_4 tangente alla M_4^2 in un punto qualunque della retta r si proietta da questo stesso punto in una curva di ordine $m + n$ contenuta in una quadrica di S_3 ; curva che incontra le generatrici dei due sistemi di questa quadrica rispettivamente in m e in n punti, e che ha poi a sua volta k punti doppi (oltre quelli che già avesse eventualmente la sezione considerata di F). E la formola ricordata di CHASLES dice appunto che questa curva di S_3 è allora di genere uguale a $(m - 1)(n - 1) - k$ (diminuito ancora, occorrendo, del numero di questi ultimi punti doppi).

(**) Dalla relazione $p = (m - 1)(n - 1) - k$, non potendo k , per il suo stesso significato, assumere valori negativi, segue (e *a fortiori* anche, nel caso che vi siano infinite rette doppie) $p \leq (m - 1)(n - 1)$. E il valore massimo che può raggiungere questo prodotto per una data somma $m + n$ (valore che si ha per $m = n$ o per $m = n \pm 1$ secondo che questa somma è pari o dispari) non è altro che il *genere massimo* di una curva (possiamo dire) *non piana* di ordine $m + n$ (cfr. ad es. HALPHEN: *Mémoire sur les courbes gauches algébriques*; Compt. Rend. de l'Ac. des Sc., tom. 70; NOETHER: *Zur Grundlegung der Theorie der alg. Raumcurven*; Berlin, 1883; CASTELNUOVO: *Ricerche di Geometria...*; Atti della R. Acc. di Torino, vol. 24). Questo risultato è dunque pienamente d'accordo coll'altro, che la sezione generica della superficie F deve essere una curva di ordine $m + n$ e genere p appartenente a S_3 o a S_4 .

(***) Secondo l'uso ormai invalso indicheremo con questo simbolo una congruenza di ordine m e di classe n .

(****) A queste relazioni si giunge infatti eliminando il k dalle due $\mu + 2k = 2n(m - 1)$ e $\nu + 2k = 2m(n - 1)$ per mezzo della $k = (m - 1)(n - 1) - p$. Che se poi la congruenza avesse infinite rette doppie costituenti una rigata di ordine d , in tutte tre queste equazioni bisognerebbe mutare k in $k + d$, sicchè le espressioni date per μ e ν rimarrebbero inalterate.

(*****) E più particolarmente dai risultati ottenuti dai sigg. NOETHER (Math. Ann., Bd. 3), PICARD, GUCCIA, DEL PEZZO, CASTELNUOVO, ecc.

$p = 0$ ha una linea focale (razionale) di ordine n , ed è precisamente costituita da una serie ∞^1 di fasci di raggi coi centri su questa linea e coi piani tangenti a una sviluppabile di classe m , fatta solo eccezione:

a) Per il sistema (1, 3) delle corde di una cubica sghemba e per il suo duale (3, 1) che è il sistema delle congiungenti delle coppie di punti omologhi di due piani collineari in posizione generale; sistemi che si rappresentano entrambi colla *superficie di VERONESE* (*);

b) Per la congruenza (2, 2) con infinite (un fascio di) rette doppie, che è una particolare intersezione di un complesso lineare (speciale) con un complesso quadratico; questa seconda congruenza si rappresenta colla superficie F^4 di S_4 proiezione di quella di VERONESE da un punto esterno ad essa ma contenuto nel piano di una sua conica.

In particolare dunque non avremo ad occuparci dei sistemi di primo ordine o di prima classe (d'altronde già ben conosciuti) pei quali appunto si ha sempre $p = 0$.

Dei sistemi di secondo ordine (o di seconda classe), che furono anche diffusamente studiati, accenneremo solo, occorrendo, le cose principali (**); ma non sarà forse inutile fissare già ora su di essi, per un momento, la nostra attenzione.

(*) Le proprietà principali di questa superficie (la sola F^n di S_{n+1} che non sia rigata) furono date appunto per la prima volta dal sig. VERONESE (*La superficie omaloide normale del quarto ordine*; Mem. R. Acc. dei Lincei, serie 3.^a, vol. 19). Dei sistemi di rette che questa superficie viene a rappresentare quando una quadrica qualunque (non degenera) passante per essa si assume come quadrica delle rette di S_3 (ossia come M_4^2 dei complessi lineari speciali, se come punto dello spazio S_3 si vuol assumere il complesso lineare di rette) si è occupato il sig. SEGRE nella Nota: *Considerazioni intorno alla geometria delle coniche di un piano . . .* (Atti dell'Acc. di Torino, vol. 20).

(**) Per questi sistemi è ormai classica la Memoria importantissima del sig. KUMMER: *Ueber die algebr. Strahlensysteme, in's besondere über die der ersten und zweiten Ordnung* (Abhand. der Berl. Ak. 1866; pag. 1-120), nella quale per la prima volta fu esposta una teoria completa dei sistemi di rette di primo e secondo ordine. Dopo questo lavoro molti altri ne comparvero sullo stesso argomento (limitandosi però alcuni allo studio di congruenze particolari); in Germania quelli del REYE (*Ueber die Strahlensysteme zweiter Classe und die Kummersche Fläche vierter Ordnung mit 16 Knotenpunkten*, Journ. de Crelle, vol. 86, pag. 84), dello STAHL (*Ueber Strahlensysteme zweiter Ordnung*, ibid. 95, pag. 297 e altri nei vol. 91 e 97), di STURM (Math. Ann., Bd. 36 e Gött. Nachr., 1888), di SCHUMACHER (Math. Ann., Bd. 38 e Diss. München, 8.^o), di WEILER, WAELSCH, ecc. In Italia (sorvolando su alcune ricerche del CAPORALI) sono notevoli i lavori del BERTINI (*Sulla congruenza (2, 6)₁ dotata di sola superficie focale*; Transunti R. Acc. dei Lincei, 1879-80), del LORIA (Atti della R. Acc. di Torino, vol. 19 e 21), del MASONI (Rend. Acc.

§ 2. Osservazioni sui sistemi di rette di secondo ordine.

4. È noto che una congruenza di secondo ordine (o di seconda classe) priva di linea (svilupicabile) focale ha sempre una superficie focale di quarto ordine (di quarta classe). Essendo dunque $2(2 + p - 1) = 4$, segue $p = 1$, ossia:

Una congruenza di secondo ordine (seconda classe) priva di linea (svilupicabile) focale è sempre di genere uno; si rappresenterà dunque, indicata con n la sua classe (il suo ordine), con una superficie di ordine $n + 2$ a sezioni ellittiche. Dalle proprietà note di queste congruenze (e precisamente dalla possibilità di rappresentarle univocamente sul piano) segue altresì che questa superficie dovrà sempre essere razionale; ma possiamo anche ritrovare la stessa cosa per altra via.

Infatti una congruenza di secondo ordine (ad es.) priva di linea focale può sempre riferirsi univocamente a un piano doppio (poichè da ogni punto di un piano non passante per alcun suo punto singolare escono, senza eccezioni, due raggi di essa, distinti o coincidenti); e in questa corrispondenza compare in quel piano una *curva limite* di quart'ordine, l'intersezione dello stesso piano colla superficie focale (che è precisamente il luogo dei punti da cui escono due raggi della congruenza infinitamente vicini). Questa curva non sarà certo costituita (almeno se il piano è stato preso in modo generale) da quattro rette passanti per uno stesso punto; potremo quindi *sempre* rappresentare la nostra congruenza anche sul piano semplice (*), ossia:

Le congruenze di secondo ordine prive di linea focale sono tutte rappre-

di Napoli, vol. 22), del MONTESANO, ecc., e gli stessi sistemi di secondo ordine (con sola superficie focale) furono poi ritrovati dal SEGRE (Mem. dell'Acc. di Torino, serie 2.^a, vol. 39) e dal CASTELNUOVO (Atti Ist. Veneto, serie 6.^a, tom. 5 e 6) come proiezioni delle varietà cubiche di S_4 con un numero finito e ≥ 6 di punti doppi.

Il sig. STURM si è occupato poi ancora delle congruenze di secondo ordine, alle quali ha dedicato anzi (e quasi esclusivamente) il 2.^o vol. testè comparso (e già citato) della sua *Liniengeometrie (Die Strahlencongruenzen erster und zweiter Ordnung; Leipzig, 1893)*. Nell'ultima parte di questo lavoro egli dà anche la classificazione completa delle congruenze di secondo ordine con linea focale, comprendendovi alcuni casi che erano sfuggiti a KUMMER, e che solo più tardi si erano presentati a lui stesso (STURM) e a SCHUMACHER (cfr. le Note citate nei Math. Ann.).

(*) Cfr. CLEBSCH: *Ueber den Zusammenhang einer Klasse von Flächenabbildungen...* (Math. Ann., Bd. 3); NOETHER: *Ueber die ein-zweideutigen Ebenentransformationen* (Sitzungsber. der Physik. medic. Soc. zu Erlangen, 14 jan. 1878); più tre lavori del De PAOLIS (Mem. R. Acc. dei Lincei, serie 3.^a, vol. 1 e 2).

sentabili sul piano. Questa proprietà, come ho detto poc' anzi, è già nota e da parecchio tempo; ma risultava solo dall'insieme delle varie dimostrazioni che se ne davano per i diversi casi (cfr. ad es. i lavori citati dei sig.ⁱ BERTINI e LORIA). La nuova via ci permette invece di stabilire lo stesso teorema con un ragionamento semplicissimo e unico (valevole cioè per tutti i casi).

È quasi superfluo l'aggiungere che, rappresentandosi queste congruenze con superficie *razionali* di ordine $n + 2$ a *sezioni ellittiche*, avremo tosto, per i risultati ottenuti dal sig. DEL PEZZO (*), $n + 2 \leq 9$ e quindi $n \leq 7$. Ritroviamo dunque il notissimo teorema di KUMMER (loc. cit., § 6):

*Una congruenza di secondo ordine priva di linea focale non può essere di classe superiore a 7 (**).* I casi di $n \leq 7$ esistono però tutti, com'è noto, (e anzi per $n = 6$ ne esistono due diversi); e noi pure avremo occasione di ritrovarli in seguito (escluso solo l'ultimo, per cui si avrebbe $m + n = 9$; ma anche questo si potrebbe studiare per la stessa via, senza difficoltà di sorta).

Daremo ora un breve cenno sui sistemi (m, n) per cui $m + n = 5$ (**); e ci fermeremo poi più a lungo sui casi di $m + n = 6, 7, 8$.

§ 3. Sistemi (m, n) per cui $m + n = 5$.

5. Se $m + n = 5$, si ha $p \leq 2$ e quindi i due casi di $p = 2$ e $p = 1$ (omettendo, come già si è detto, quello di $p = 0$). Nel primo caso la congruenza è certo contenuta in complesso lineare (****); nel secondo può non esserlo, e non lo è anzi certo quando non abbia infinite (un fascio di) rette doppie.

(*) *Sulle superficie dell' n.º ordine immerse nello spazio di n dimensioni* (Rend. Circ. Mat. di Palermo, vol. 1).

(**) E, dualmente, una congruenza di seconda classe priva di sviluppabile focale non può essere di ordine superiore a 7.

(***) Sul caso di $m + n = 4$, su quello cioè (notissimo) delle congruenze $(2, 2)$, crediamo inutile fermarci, anche solo brevemente.

(****) Ricordiamo che una curva (irriduttibile) di ordine $m + n = \mu$ e di genere $p < \frac{\mu}{2} + 1$ è certo *non speciale* e non può quindi appartenere a uno spazio superiore a $S_{\mu-p}$ (se fosse invece $p = \frac{\mu}{2} + 1$, la curva sarebbe speciale, e potrebbe appartenere anche a un $S_{\mu-p+1} \equiv S_{\frac{\mu}{2}}$). In particolare dunque una C^5 di genere 2 non potrà appartenere a

Si vede facilmente che ogni superficie di quinto ordine appartenente a S_4 e colle sezioni di genere due si può ottenere come intersezione di una quadrica e di una varietà cubica aventi un piano a comune. La quadrica sarà dunque un cono (di prima specie) e perciò:

Esistono congruenze (2, 3) o (3, 2) di genere due; esse sono tutte contenute in complessi lineari speciali (), e si possono segare da questi mediante complessi cubici contenenti una stella o un piano rigato il cui sostegno appartenga alla retta asse del primo complesso. La congruenza (2, 3) ad es. sarebbe costituita dalle tangenti a una superficie cubica con due punti doppi le quali si appoggiano alla retta intersezione residua della stessa superficie col piano tangente ad essa lungo la congiungente di quei due punti (**). Le proprietà principali di questa congruenza seguono immediatamente da quelle della superficie F^5 che la rappresenta, sicchè non occorre insistervi sopra più a lungo.*

6. E poche parole anche potranno bastare per il caso di $p = 1$. Ricorderò soltanto che ogni congruenza (2, 3) di genere uno non contenuta in un complesso lineare sta in un sistema lineare ∞^3 di complessi quadratici (**); contiene in generale dieci fasci di raggi e cinque serie razionali ∞^1 di rigate quadriche, in ciascuna delle quali vi è un cono quadrico, e tre altre rigate si spezzano in una coppia di fasci. Ciascuna di queste serie ha 8 punti basi formanti gruppo (auto)associato (i vertici degli altri quattro coni,

uno spazio superiore a S_3 , e una superficie di quinto ordine colle sezioni di genere 2 starà quindi certo in un S_4 . Un fatto analogo ci si presenterà nei casi di $m + n = 6, 7, 8$ per i generi rispettivamente superiori a 2, 3, 5.

Queste stesse conseguenze si potrebbero anche dedurre dai risultati che CASTELNUOVO (Atti di Torino, vol. 24) e BERTINI (stessi Atti, vol. 26) hanno ottenuti sul genere massimo di una curva di dato ordine e appartenente a un dato spazio.

(*) È evidente che una congruenza contenuta in un complesso lineare non speciale deve essere di ordine eguale alla propria classe. Una congruenza contenuta dunque in un complesso lineare, ma per la quale quest'ultima proprietà non sia verificata, si comporrà sempre di rette appoggiate a una retta fissa.

(**) È noto infatti che una superficie cubica con due punti doppi ammette lungo la congiungente di questi un piano tangente unico (che l'incontra ancora secondo un'altra retta, in generale distinta dalla prima). Della nostra congruenza non fanno parte le rette che toccano la superficie in punti di questa seconda retta (asse del complesso lineare speciale che contiene la stessa congruenza (2, 3)), e nemmeno quelle che stanno nel piano tangente cit. Queste ultime costituiscono anzi l'intersezione residua dei due complessi di cui sopra.

(***) Più generalmente, a una superficie contenuta in ∞^k quadriche (non tutte degeneri) corrisponde un sistema di rette contenuto in ∞^{k-1} complessi quadratici.

e i centri degli altri quattro fasci); tutte cinque involuppano la superficie focale della congruenza, che è di *quarto ordine* e *sesta classe*, con *quindici punti* e *dieci piani singolari*, ecc. ecc.

Aggiungerò ancora che nel sistema ∞^4 delle quadriche passanti per una F^5 di S_5 a sezioni ellittiche vi sono *cinque* sistemi (lineari) ∞^2 di conici di seconda specie aventi rispettivamente per varietà basi le M_3^3 dei piani dei cinque sistemi di coniche contenuti nella stessa superficie (*). Da questo si trae facilmente che per una quadrica qualunque non degenera di quel sistema ∞^4 passano in generale *dieci* fasci di caratteristica [(11)(11)(11)] (**) in esso contenuti (***), e che perciò *la nostra congruenza (2, 3) è contenuta in generale in dieci complessi tetraedrali (****)*.

§ 4. Sistemi (m, n) per cui $m + n = 6$.

7. Il caso di $m + n = 6$ ci conduce a congruenze del tipo (3, 3) ovvero (2, 4) [o (4, 2)]. Per queste congruenze avremo sempre $p \leq 4$; e precisamente se $p = 4$ o $p = 3$ si tratterà certo di congruenze contenute in un complesso lineare; se $p = 2$ o $p = 1$, di congruenze non contenute in complessi così fatti, a meno che non abbiano infinite rette doppie.

Se $p = 4$, la congruenza si rappresenterà con una superficie di *sesto ordine* a sezioni di genere 4, contenuta in uno spazio S_4 e anzi in una (e certo in non più di una) quadrica di questo spazio. È facile anzi riconoscere che questa stessa superficie si potrà sempre ottenere come intersezione di quella quadrica con una varietà cubica (M_3^3), e che, viceversa, l'intersezione di due varietà così fatte in S_4 è appunto, in generale, una superficie di sesto ordine

(*) Di queste varietà e delle altre analoghe (serie semplici razionali di piani) che incontreremo in seguito si è occupato il sig. SEGRE in una Nota inserita negli Atti dell'Acc. di Torino, vol. 21.

(**) Vedi la Dissertazione cit. del SEGRE.

(***) Basta osservare che nello spazio S_4 si può sempre condurre per un punto dato una (e in generale una sola) retta incidente a tre piani dati. Essendo dati perciò *cinque* piani si potranno per quel punto condurre $\binom{5}{3}$ ossia 10 rette ciascuna delle quali si appoggi a tre di quei piani. Qui lo spazio S_4 e i cinque piani sono rispettivamente il sistema ∞^4 e quelli ∞^2 , ecc.

(****) Proprietà anche questa già conosciuta. Cfr. ad es. i lavori cit. del CASTELNUOVO e dello STURM.

a sezioni di genere 4; superficie che rappresenta una congruenza $(m, 6 - m)$, e precisamente $(3, 3)$. Concludiamo dunque:

Esistono congruenze $(m, 6 - m)$ di genere 4; esse sono tutte di terzo ordine e terza classe, e si possono ottenere come intersezioni di complessi lineari con complessi cubici (stanno dunque sempre in complessi lineari) (). Viceversa, l'intersezione di un complesso lineare e di un complesso cubico è anche in generale una congruenza $(3, 3)$ di genere 4. La superficie focale di questa congruenza è di dodicesimo ordine e dodicesima classe (e identica alla sua polare reciproca).*

Queste superficie di sesto ordine, e, per conseguenza, queste congruenze $(3, 3)$, non sono in generale rappresentabili sul piano (**); ma possono diventarlo acquistando qualche opportuna singolarità. Se fra queste non vi è alcun punto di molteplicità superiore a due, potremo proiettare F^6 da uno dei suoi punti doppi, riducendoci così a una F^4 di S_3 , per la quale i casi di razionalità furono già dati tutti dal NOETHER (***). Che se poi F^6 ha un punto triplo, potremo senz'altro proiettarla in una superficie cubica di S_3 , superficie che sarà certo razionale, a meno che non si tratti del cono ellittico. Escluso pertanto questo caso (****), la F^6 con punto triplo, ossia la congruenza $(3, 3)$ con retta tripla, sarà sempre rappresentabile sul piano, e si rappresenterà precisamente con un sistema di sestiche aventi 6 punti doppi e 6 punti semplici basi; situati questi 12 punti tutti su di una cubica (*****). La congruenza contiene

(*) Anzi, la proprietà di queste congruenze $(3, 3)$ di essere contenute in un complesso lineare basta per asserire che (quando questo complesso non sia speciale) esse dovranno costituirne l'intersezione (completa) con un complesso cubico. (Cfr. KLEIN: *Ueber einen liniengeometrischen Satz*; Math. Ann., Bd. 22.)

(**) Si può verificare facilmente che, proiettando F^6 da un suo punto scelto in modo generale, si ottiene una F^5 di S_3 con conica doppia; conica che si spezza in due rette incidenti quando la quadrica passante per F^6 è un cono. In nessun caso però si potrebbero avere due rette doppie sghembe (la cui presenza appunto renderebbe la superficie razionale).

(***) *Ueber die rationalen Flächen vierter Ordnung* (Math. Ann., Bd. 33).

(****) Il quale, d'altronde, potrebbe presentarsi solo quando si fosse segata la quadrica di S_4 con una M_3^3 molto particolare (che possiamo assumere costituita da una ∞^1 ellittica di piani passanti per una medesima retta).

(*****) Dicendo che una congruenza si rappresenta sul piano con un dato sistema lineare (∞^5) di curve, intendiamo che i punti di queste varie curve sono immagini rispettivamente delle generatrici delle rigate in cui la congruenza proposta è segata dagli ∞^5 complessi lineari di rette. È insomma l'ordinaria rappresentazione delle superficie razionali sul piano, applicata alla superficie che (nel senso stabilito al n.° 1) è immagine della nostra congruenza.

allora 6 fasci di raggi e 27 rigate quadriche passanti tutte per la retta tripla, ecc. ecc.

8. Facciamo ora $p = 3$. La nostra congruenza, supposta esistente, si rappresenterà con una superficie a sezioni di genere 3, ma ancora di sesto ordine e contenuta in una (sola) quadrica dello spazio S_4 . Da quest'ultima la superficie F^6 (*) non potrà più segarsi con una varietà cubica, ma solo con una varietà di quarto ordine, l'intersezione residua essendo costituita, come si può facilmente riconoscere, da una coppia di piani con un sol punto a comune. Quella quadrica sarà dunque un cono, e questi due piani apparterranno (nel cono) ad uno stesso sistema. Viceversa, l'intersezione generale di un cono quadrico (di prima specie) di S_4 con una varietà di quarto ordine condotta per due suoi piani dello stesso sistema è appunto una superficie di sesto ordine colle sezioni di genere 3 (e iperellittiche). Questa superficie ha nel vertice del cono un punto doppio (dal quale si proietterebbe in una quadrica doppia di S_3), e rappresenta una congruenza (2, 4) o (4, 2), non già (3, 3), contenuta in un complesso lineare speciale. Concludiamo perciò:

*Ogni congruenza (3, 3) di genere 3 ha un fascio di rette doppie (ed è una particolare intersezione di un complesso lineare con un complesso cubico) (**).*

*Esistono invece congruenze (2, 4) o (4, 2) di genere 3 e non aventi infinite rette doppie, e queste sono tutte iperellittiche (***) ; stanno in complessi lineari speciali, e si possono segare da questi mediante complessi di quarto grado condotti per due stelle o rispettivamente due piani della retta asse del primo complesso. Questa retta è anche doppia per la congruenza; in ogni suo piano la congruenza (2, 4) ad es. ha un involuppo quadrico di rette, mentre ogni suo punto è allora vertice di un cono quartico (di genere due) di raggi della stessa congruenza (e con quella stessa retta per generatrice doppia). Questa congruenza (2, 4) è l'insieme delle tangenti a una superficie cubica che si appoggiano a una retta (generale) di essa (cfr. i lavori citati di KUMMER e STURM (****)).*

(*) Supposta priva di linea (e non vi potrebbe essere che una retta) doppia.

(**) Cfr. anche la nota (*) al n.º prec.

(***) Ossia le rette comuni a una di esse e ad un complesso lineare qualunque formano una rigata iperellittica; proprietà questa che è comune a tutte le congruenze di secondo ordine o seconda classe.

(****) Se questa retta avesse invece la posizione particolare che si richiedeva al n.º 5, dalla congruenza (2, 4) si staccerebbe tutto un piano di rette (il piano tangente alla superficie cubica lungo la congiungente dei suoi due punti doppi), e resterebbe così appunto una congruenza (2, 3) (di genere 2).

9. Sia ora $p = 2$. Poichè una sestica di genere 2 contenuta in una quadrica di S_3 deve sempre avere qualche punto doppio, così la superficie F^6 , se non ha una linea doppia, dovrà ora appartenere allo spazio S_5 (supposto sempre, ben inteso, che abbia a rappresentare una congruenza di rette). Questa stessa superficie, quando non sia un cono (caso che, naturalmente, possiamo fin d'ora escludere) è sempre rappresentabile sul piano (*), e contiene una serie razionale ∞^1 di coniche i cui piani formano una M_3^3 generabile con 3 fasci proiettivi di S_4 ; la superficie F^6 è anzi intersezione di questa M_3^3 con una quadrica (che possiamo supporre non degenerare) e sta, complessivamente, sopra ∞^3 quadriche (**). D'altra parte l'intersezione testè considerata è anche, nel caso più generale, una superficie di sesto ordine colle sezioni di genere 2. La congruenza rappresentata dalla superficie F^6 è poi di terzo ordine (e terza classe), perchè un piano qualunque della *quadrica delle rette* taglia M_3^3 , quindi F^6 stessa, in *tre* punti (o in infiniti).

Osserviamo ancora che i tre fasci di S_4 con cui si genera la M_3^3 di cui sopra sono segati in generale dalla quadrica delle rette in altrettanti fasci (proiettivi) di complessi lineari, e perciò la congruenza rappresentata dalla nostra superficie F^6 sarà appunto generabile con questi tre ultimi fasci (e inversamente....). Dunque:

Esistono congruenze $(m, 6 - m)$ di genere 2; e queste (quando non abbiano infinite rette doppie) sono tutte di terzo ordine e terza classe, e si possono generare con tre fasci proiettivi di complessi lineari. Viceversa, l'insieme delle rigate (quadriche) d'intersezione delle terne di complessi omologhi di tre fasci proiettivi di complessi lineari è in generale appunto una congruenza $(3, 3)$ di genere 2.

Le congruenze $(3, 3)$ di genere 2 generali sono dunque quelle stesse studiate dal sig. ROCCELLA (*Sugli enti geometrici dello spazio di rette....*; Piazza Armerina, 1882) (**).

(*) Da una sua corda generale essa si proietterebbe infatti in una superficie di quarto ordine di S_3 con retta doppia.

(**) Non ho bisogno di aggiungere che questa superficie F^6 è normale per lo spazio S_5 (nel quale noi la consideriamo). Ricordiamo anzi (e ce ne varremo più volte in seguito) che una superficie razionale di ordine n e colle sezioni di genere p è sempre normale per uno spazio non inferiore a S_{n-p+1} , e lo è precisamente per questo spazio (S_{n-p+1}) quando le sue sezioni sono (come in questo caso) curve non speciali.

(***) Si può dire anzi, in un certo senso, che la congruenza $(3, 3)$ di ROCCELLA è la più generale fra le congruenze $(3, 3)$ non contenute in complessi lineari. (E questo precisamente quando si considerino le congruenze $(3, 3)$ di genere uno e di genere zero come casi particolari di quelle di genere due.)

Il sig. ROCCELLA si è occupato anche, e a lungo, delle proprietà di queste congruenze; io mi limiterò quindi a ricordarne le più notevoli. La congruenza (3, 3) di genere 2 sta in ∞^2 complessi quadratici di rette, *tutti* generabili con due fasci proiettivi di complessi lineari (*). Essa contiene una serie razionale ∞^1 di rigate quadriche, della quale fanno parte, come quadriche degeneri, soltanto *sei* coppie di fasci di rette; le direttrici delle stesse rigate formano una nuova congruenza (3, 3), identica alla prima, e che ha comune con essa la superficie focale (inviluppo della serie ∞^1 di quadriche). Quest'ultima è di ottavo ordine e di ottava classe, e ha una curva cuspidale di dodicesimo ordine (luogo dei punti per cui i tre raggi della congruenza che ne escono sono tutti infinitamente vicini). I centri e i piani dei 12 fasci della congruenza (**) sono rispettivamente punti e piani singolari della superficie focale; questi ultimi la toccano precisamente lungo coniche, e ne osculano lo spigolo di regresso in quattro punti posti rispettivamente sopra le stesse coniche, ecc. ecc. (***)).

Abbiamo già detto che la superficie F^6 , e quindi anche le congruenze (3, 3) di cui ora ci occupiamo, sono sempre rappresentabili sul piano. Le varie rappresentazioni che se ne possono dare discendono immediatamente dai risultati che si hanno sulla rappresentazione delle superficie a sezioni iperellittiche (e in particolare a sezioni di genere 2). Questi risultati appunto ci permettono di concludere che, se la superficie F^6 ha per *direttrice minima* (****) una conica (se cioè le coniche della sua serie ∞^1 non si incontrano e non tagliano tutte una stessa retta), essa, e quindi la relativa congruenza (3, 3), si potranno rappresentare col sistema delle quartiche piane aventi un punto doppio e sei punti semplici a comune. Questo caso ci condurrà, come ora vedremo, a delle congruenze particolari molto notevoli.

(*) Perchè le loro caratteristiche contengono sempre un gruppo (almeno) di due indici. (Cfr. ad es. la Memoria cit. del SEGRE: *Sulla geometria della retta*, ecc., n.° 126.)

(**) Questi centri e questi piani sono gli stessi per tutte due le congruenze (3, 3); solo che, se nella prima congruenza ad es. una rigata quadrica si spezza nei due fasci $A(\alpha)$ e $B(\beta)$, si trova che la retta AB coincide sempre coll'intersezione $\overline{\alpha\beta}$, e la seconda congruenza contiene allora (come, del resto, è naturale) i due fasci $A(\beta)$ e $B(\alpha)$.

(***) Anche questa superficie di ottavo ordine e ottava classe è identica alla (ha cioè le stesse singolarità della) sua polare reciproca. Di essa si è occupato anche il KUMMER nella Memoria: *Ueber diejenigen Flächen welche mit ihren reciproch polaren Flächen von derselben Ordnung sind und die gleichen Singularitäten besitzen* (Monatsber. der Ak. zu Berlin, 17 Januar 1878).

(****) Cfr. CASTELNUOVO (*Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve iperellittiche*; Rend. Palermo, vol. 4).

10. La superficie di sesto ordine rappresentata dal sistema di quartiche piane testè ricordato contiene in generale 32 direttrici coniche (*), ciascuna delle quali ne taglia un'altra in due punti, 15 in un punto unico, e non taglia affatto le rimanenti (nè i loro piani si incontrano). Possiamo quindi raggruppare quelle stesse 32 coniche in 16 coppie distinte e tali che due coniche della stessa coppia abbiano sempre due punti (e quindi i loro piani una retta) a comune. Ciascuna di queste coppie di piani costituirà con F^6 la varietà della base di una certa rete di quadriche, e nel sistema lineare ∞^3 delle quadriche passanti per quella superficie vi saranno perciò in generale 16 reti diverse, in ciascuna delle quali ogni quadrica conterrà i piani di due determinate direttrici coniche della stessa superficie (**). È chiaro altresì che, se le quadriche passanti per F^6 non sono tutte degeneri, altrettanto avverrà di quelle contenute in queste 16 reti, e noi potremo perciò sempre assumere una di queste ultime come quadrica delle rette. Giungeremo così a una congruenza $(3, 3)$ con un tredicesimo punto (A) e un tredicesimo piano (α) singolare; punto e piano che si apparterranno e che saranno rispettivamente vertice di un cono e sostegno di un involuppo quadrico di rette della congruenza. Questo cono e questo involuppo non faranno parte della serie ∞^4 di rigate quadriche; ma queste ultime avranno rispettivamente per direttrici le infinite rette del fascio $A(\alpha)$.

11. Ma per la superficie F^6 e per una qualunque di quelle 16 coppie di piani passano ancora ∞^3 quadriche; noi potremo dunque imporre a una di queste di contenere anche un'altra di quelle stesse coppie, e vi sarà anzi sempre tutto un fascio di quadriche soddisfacenti a questa condizione (qualunque sia la seconda coppia assegnata). Si può riconoscere facilmente che queste stesse quadriche, oltre a quei primi 4 piani, ne dovranno contenere tutte altri 4 ben determinati (e passanti rispettivamente per altrettante rette di F^6); esse conterranno perciò, complessivamente, 8 piani fissi, ciascuno dei quali (come si vede subito) ne incontrerà altri tre in rette, tre in un punto unico, e non incontrerà affatto l'ultimo. Questa proprietà è caratteristica (nello spazio S_5) per i fasci di quadriche del tipo $[(11)(11)(11)]$; per quei fasci

(*) Queste sono rappresentate rispettivamente dal punto fondamentale doppio, dalle 15 rette che congiungono i punti fondamentali semplici a due a due, dalle 15 coniche che congiungono il punto doppio a quattro qualunque dei punti semplici, e dalla cubica che passa doppiamente per il primo e semplicemente per questi (sei) ultimi punti.

(**) Il passaggio di una quadrica (contenente già F^6) per due di questi piani i quali s'incontrino in una retta equivale infatti a una nuova condizione unica; quella ad es. di passare per un punto (arbitrario) dell'intersezione degli stessi due piani.

cioè che contengono (come sole quadriche degeneri) tre conì (distinti) di seconda specie (*) (**).

Noi potremo dunque assumere come quadrica delle rette una quadrica contenente i piani, non solo di due, ma di quattro direttrici coniche della superficie F^6 , e per questa quadrica dovrà allora passare (nel sistema ∞^3 di quelle che contengono F^6 stessa) un fascio di caratteristica [(11)(11)(11)]. Quindi:

La congruenza (3, 3) in discorso può acquistare anche un quattordicesimo punto (B) e un quattordicesimo piano (β) singolare, che pure si apparterranno e saranno ancora rispettivamente vertice di un cono e sostegno di un involuppo quadrico di rette della congruenza. Fra gli ∞^2 complessi quadratici passanti per quest'ultima vi sarà allora un complesso tetraedrale, il cui tetraedro fondamentale avrà due vertici nei punti singolari A e B , ed avrà i piani β e α per facce rispettivamente opposte a questi vertici; gli altri due vertici e le altre due facce saranno dati rispettivamente dai centri di due e dai piani di altri due fra i 12 fasci della congruenza. Dei centri degli altri otto fasci, quattro staranno nel piano α e quattro nel piano β ; i primi avranno i piani passanti per B , i secondi per A . Questa congruenza (3, 3) sarà Cremoniana, e stabilirà fra i piani α e β una corrispondenza birazionale del terzo ordine con due punti uniti (i due centri di fasci che stanno sull'intersezione $\overline{\alpha\beta}$); questa proprietà potrà anzi servire per definirla.

La congruenza (3, 3) a cui così siamo giunti è dunque quella stessa studiata da HIRST nella Nota: *On congruences of the Third Order and Class* (Proc. of the London Math. Soc., vol. 16, pag. 232), alla quale anzi rimandiamo per ulteriori proprietà della stessa (**).

(*) Infatti, poichè gli otto piani non passano tutti per uno stesso punto, nel fascio non può certo entrare nessun cono di prima specie. E di rette che taglino tutti otto quei piani non ve ne sono (si può dimostrarlo facilmente) che tre: quelle che congiungono a due a due, in modo opportuno, i sei punti per ciascuno dei quali passano quattro degli otto piani. Questi stessi piani costituiscono, da soli, la varietà base di tutta una rete di quadriche, nella quale sono contenuti tre fasci di conì di seconda specie; i conì di ciascun fascio hanno a comune l'asse (che è sempre una di quelle certe tre rette).

(**) Uno di questi conì sarà l'intersezione del fascio in discorso colla rete di conì quadrici passanti per la M_3^3 già considerata al n.º 9.

(***) Dal fatto che la corrispondenza birazionale di cui sopra riferisce fra loro propriamente i due fasci di rette $A(\alpha)$ e $B(\beta)$, e che ogni retta della congruenza (3, 3) si appoggia, com'è chiaro, a una coppia di rette omologhe di questi fasci, risulta subito (per quanto ciò non sia stato forse ancora espressamente rilevato) che la stessa congruenza

12. Abbiamo detto che per la superficie F^6 e per due qualunque di quelle 16 coppie di piani passa sempre un fascio di quadriche; noi potremo dunque imporre a una quadrica di questo fascio di contenere ancora una terza di quelle stesse coppie di piani (e la quadrica risulterà così ben determinata). Si può dimostrare che, fra le quadriche di quel fascio, i due coni (di seconda specie) che non passano per la M_3^3 su cui sta F^6 contengono ancora ciascuno quattro fra le rimanenti 14 coppie di piani, mentre quello che passa per questa varietà non ne contiene più alcuna; rimangono perciò ancora sei coppie di piani ciascuna delle quali sta sopra una quadrica (e non degenera) di quello stesso fascio (*). E si può anche verificare facilmente che le sei quadriche così ottenute sono tutte distinte. Assunta pertanto una qualunque di esse come quadrica delle rette, e osservato che per questa dovranno ora passare tre fasci di caratteristica [(11) (11) (11)] (corrispondenti ai diversi aggruppamenti di quelle tre coppie di piani a due a due), possiamo concludere:

Esiste una congruenza (3, 3) di genere 2 con 15 punti e altrettanti piani singolari. Dodici fra questi sono rispettivamente centri e piani di un egual numero di fasci di rette, mentre gli altri tre punti e piani ($A, B, C; \alpha, \beta, \gamma$; a due a due incidenti) sono rispettivamente vertici di coni e sostegni di involuppi quadrici, pure di rette della congruenza. Le quadriche della serie ∞^1 ,

(3, 3) deve esser contenuta in un complesso tetraedrale. (È noto infatti che questo complesso può sempre ritenersi generato da una retta che si muova appoggiandosi costantemente a una coppia di raggi omologhi di due fasci proiettivi di rette, e che, viceversa, l'insieme di tutte le rette che si appoggiano a coppie di raggi così scelti costituisce pur sempre un complesso tetraedrale.) La stessa proprietà sussisterà naturalmente per le congruenze (4, 3) e (5, 3) che noi pure troveremo in seguito, e delle quali questa può considerarsi come caso particolare; e sussisterà anzi, più generalmente, per ogni congruenza $(n+2, n)$ determinata collo stabilire fra due piani in posizione generale una corrispondenza birazionale di ordine n , dotata di un punto $(n-1)^{plo}$.

(*) Si trova che per la superficie F^6 , oltre agli ∞^2 coni quadrici di seconda specie che contengono la M_3^3 , passano in generale altri 16 coni (pure di seconda specie), i cui assi non incontrano la superficie stessa (e da ciascuno dei quali perciò quest'ultima si proietta in una quadrica tripla di S_3). Questi 16 assi e le 16 intersezioni delle coppie di piani considerate di sopra costituiscono due sistemi tali che ogni retta dell'uno ne incontra 6 dell'altro, e 2 rette dello stesso sistema si appoggiano sempre a 2 rette determinate dell'altro. Scelte pertanto le prime due coppie di piani, restano determinati quei due fra i 16 assi che si appoggiano alle relative intersezioni; e ciascuno di questi incontra ancora altre 4 fra quelle stesse intersezioni, ed è asse di un cono di seconda specie che contiene tutte sei (2+4) le corrispondenti coppie di piani. Invece il cono che contiene le stesse due (prime) coppie di piani e passa per la M_3^3 ha per asse l'intersezione degli S_3 delle coppie medesime, e varia al variare di una qualunque di queste coppie.

che esiste anche nel caso generale (n.° 9), passano ora tutte per quei tre vertici e toccano tutte quegli stessi tre piani. Questa congruenza sta in tre diversi complessi tetraedrali; i vertici dei tre coni e i piani dei tre involuipi, riuniti gli uni e gli altri a due a due (in modo opportuno), danno sempre una coppia di vertici e la coppia di facce a questi rispettivamente opposte di uno dei tre tetraedri fondamentali.

Ogni quadrica della serie ∞^1 testè ricordata ha qui, come si vede facilmente, una direttrice rettilinea in ciascuno dei tre fasci $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$; e le tre direttrici di una stessa quadrica sono anche rette omologhe in una determinata proiettività fra quei fasci. Dunque:

Quest'ultima congruenza (3, 3) può definirsi come l'insieme delle rette che si appoggiano alle terne di raggi omologhi di tre fasci proiettivi dati comunque dello spazio. È dunque una congruenza particolare già studiata dal ROCCELLA; quella stessa che fu poi considerata anche da HIRST (Rend. di Palermo, vol. 1, pag. 64) come una particolare congruenza Cremoniana. E noi pure abbiamo ora trovata questa congruenza come caso particolare della precedente (che era invece la congruenza Cremoniana generale di HIRST) (*).

13. Facciamo infine $p = 1$, e rivolgiamo quindi la nostra attenzione alle superficie di sesto ordine a sezioni ellittiche contenute in S_5 . L'enumerazione delle costanti ci dice che per una qualunque di queste superficie dovrà sempre passare (almeno) un fascio di quadriche; ma questa stessa proprietà la ritroveremo anche (nei casi più importanti) per altra via.

Esistono nello spazio S_5 rigate ellittiche di sesto ordine (che non sono coni (**)), e queste si vede facilmente che rappresentano sistemi di rette (3, 3) costituiti da una serie ∞^1 di fasci di raggi coi centri su di una cubica piana generale e coi piani tutti tangenti a un cono generale di terza classe. Su queste congruenze però non intendiamo fermarci.

Veniamo piuttosto alle superficie non rigate. Queste, quando non ab-

(*) Dalla generazione di questa congruenza con tre fasci proiettivi di raggi (ossia con tre fasci proiettivi di complessi lineari, tutti speciali) risulta immediatamente ch'essa dovrà stare in *tre complessi tetraedrali*; proprietà che è data in sostanza anche dal ROCCELLA (per quanto non esplicitamente). Lo stesso A. accenna anche alla rappresentazione di questa congruenza (sopra uno dei tre nuovi piani singolari) mediante quartiche di genere 2; ma riscontra la presenza di soli quattro (anzichè di sei) punti fondamentali semplici.

(**) Per le proprietà delle rigate ellittiche e, più generalmente, algebriche di cui qui e in seguito avremo a valerci, rimandiamo ai lavori del SEGRE (Atti di Torino, vol. 21 e Math. Ann., Bd. 34).

biano infiniti punti doppi, appartengono anch'esse allo spazio S_5 , sono razionali (*), e si possono ottenere come proiezioni di superficie (normali) F^6 di S_6 da punti rispettivamente esterni a queste. La superficie normale F^6 contiene tre sistemi razionali ∞^1 di coniche, i cui piani formano altrettante M_3^4 ; e se noi vogliamo che la F^6 di S_5 non venga ad avere una retta doppia, dovremo prendere il centro di proiezione fuori anche di queste tre varietà.

Supposto pertanto di aver così scelto quel centro, immaginiamo di proiettare da esso la superficie F^6 e una qualunque delle tre M_3^4 che la contengono. La proiezione di quest'ultima varietà (e sarà ancora una M_3^4) verrà ad avere una retta doppia, luogo dei punti per cui passano due suoi piani (**), e starà sopra una (sola) quadrica, e precisamente sopra un cono di seconda specie con quella stessa retta per asse. La superficie F^6 , quando abbia a rappresentare un sistema di rette, si potrà dunque certo ottenere come intersezione di quella stessa M_3^4 di S_5 con una nuova quadrica Q (che possiamo anche supporre non degenerare); e l'intersezione residua di queste due varietà sarà costituita da una coppia di piani. Viceversa, l'intersezione di una M_3^4 di S_5 (ottenuta nel modo indicato poc'anzi) con una quadrica condotta per due suoi piani è appunto, in generale, una superficie di sesto ordine a sezioni ellittiche (e non rigata). E qui possono presentarsi due casi:

a) Quei due piani della M_3^4 appartengono rispettivamente, nella quadrica, ai due diversi sistemi;

b) Gli stessi due piani appartengono a un medesimo sistema.

Nel primo caso i due piani non potranno incontrarsi, e taglieranno perciò la retta doppia di M_3^4 in punti diversi. Questi due punti staranno entrambi sulla superficie F^6 e saranno (in generale) semplici per essa; però le coniche di questa superficie giacenti rispettivamente in quei due piani non passeranno per quei punti (gli stessi piani segheranno cioè F^6 in una conica e in un punto ancora fuori di questa).

Nel secondo caso invece i due piani in discorso avranno un punto a comune, che starà naturalmente sulla retta doppia di M_3^4 . Questo stesso punto

(*) Esse ammettono infatti delle trisecanti (avendone *due* ogni loro sezione generica); e da una qualunque di queste si proiettano in superficie cubiche di S_3 (che non sono coni).

(**) Considerando infatti la M_3^4 normale come generata da due forme collineari aventi a sostegno rispettivamente due suoi piani, si vede che per un punto arbitrario dello spazio S_6 passano sempre due S_1 omologhi in quelle forme, e che l'intersezione di questi è un piano incontrante la M_3^4 in una conica. Dunque ecc.

non starà più (in generale) sulla superficie F , ma quest'ultima avrà invece un punto doppio nella seconda intersezione di quella retta (doppia) colla quadrica Q (*).

Per le tre varietà M_3^4 su cui sta una data superficie F^6 dovrà sempre presentarsi, e si capisce, lo stesso fra questi due casi. Nel caso a) la congruenza rappresentata da F^6 sarà (3, 3); nel caso b) invece sarà (2, 4) o (4, 2) (**). Le congruenze (3, 3) saranno dunque in generale affatto prive di rette doppie (o ne avranno infinite); le congruenze (2, 4) ne avranno sempre una (e in generale una sola).

14. Nel caso a) la quadrica Q , e più generalmente anzi ogni quadrica passante per la superficie F^6 , dovrà contenere i piani di sei coniche di quest'ultima, due per sistema (e precisamente quei piani che la segano in un punto ancora fuori della relativa conica). Oltre a questi sei piani si trova poi che quelle quadriche dovranno tutte contenerne altri due, determinati dalla condizione di segare in rette rispettivamente due terne di quella sestupla; e da questo si deduce subito che le quadriche passanti per la data F^6 dovranno formare un fascio di caratteristica [(11)(11)(11)]. Dunque:

Esistono congruenze (3, 3) di genere uno non aventi infinite rette doppie; queste sono anzi, in generale, affatto prive di rette doppie e, quando si escluda il caso corrispondente alla rigata ellittica, sono tutte rappresentabili sul piano e contenute in un complesso tetraedrale. Queste stesse congruenze contengono sei fasci di raggi, tre coni quadrici e altrettanti involuipi piani di seconda classe. Le loro rette danno luogo a tre diversi sistemi ∞^1 e razionali di rigate quadriche, il cui involuppo (comune) è la superficie focale della congruenza

(*) Questo ragionamento suppone implicitamente che i due piani di M_3^4 passanti per uno stesso punto della retta doppia varino tutti due al variare di questo punto, che cioè la retta stessa non sia, come potrebbe anche essere, luogo delle intersezioni di un piano fisso con tutti i rimanenti. Questo caso (eccezionale) si presenterebbe quando quella conica direttrice della M_3^4 il cui piano passa pel centro di proiezione si spezzasse in una direttrice rettilinea e in un'altra retta contenuta in uno degli infiniti piani della M_3^4 stessa. Si avrebbero allora delle congruenze particolari, il cui studio non presenterebbe difficoltà, ma non offrirebbe nemmeno un interesse speciale. Ci dispensiamo quindi dall'occuparcene, come pure non ci occuperemo di quell'altro caso particolarissimo che si avrebbe quando la quadrica Q contenesse la retta doppia della M_3^4 .

(**) Infatti un piano qualunque della M_4^2 assunta come quadrica delle rette sega la M_3^4 (quando non abbia con essa tutta una linea a comune) in quattro punti. Di questi nel primo caso sempre tre e tre soli stanno su F^6 ; nel secondo caso ne stanno su questa superficie due o quattro secondo che quest'ultimo piano appartiene o no (nella quadrica) al sistema dei primi due.

(di sesto ordine e sesta classe) con nove punti e altrettanti piani singolari, ecc. ecc.

Questa congruenza (3, 3) è quella stessa ottenuta dai sig.¹ SEGRE e CASTELNUOVO come proiezione di una varietà cubica di S_4 con nove punti doppi (*). Essa è anche Cremoniana; i piani di due qualunque dei tre involuipi quadratici sono da essa riferiti in una corrispondenza birazionale del terzo ordine, nella quale i vertici dei tre coni danno rispettivamente i due punti fondamentali doppi e un punto fondamentale semplice comune ai due piani; in ciascuno di questi ultimi poi un secondo punto fondamentale semplice è infinitamente vicino al primo. Questa stessa congruenza, appunto perchè Cremoniana, si può anche considerare come caso particolare della congruenza (3, 3) di HIRST (cfr. anche CASTELNUOVO, loc. cit. (2.^a Mem.) nota al n.° 28 (**).

15. Due parole ancora sulle congruenze (2, 4) alle quali, come abbiamo veduto, ci conduce il caso *b*). La superficie F^6 di S^5 ha in questo caso un punto doppio (***) e contiene due cubiche piane razionali passanti doppiamente per questo stesso punto; coi piani di queste due curve essa costituisce la varietà base di un sistema lineare ∞^2 di quadriche (le sole che passino per F^6) non tutte degeneri. (Vi è però in questo sistema un fascio di coni col vertice comune e nel punto doppio di quella superficie). Una qualunque (non degenera) di queste quadriche contiene i piani di sei coniche di F^6 , due per

(*) E da quanto precede risulta adesso che questa congruenza è anche la più generale fra quelle (3, 3) di genere uno rappresentabili sul piano.

(**) Un caso particolare (e molto notevole) ci è offerto dalla congruenza (3, 3) di genere uno quando essa contiene un fascio di rette doppie (e la superficie che la rappresenta è perciò proiezione della F^6 normale da un punto del piano di una sua conica). Si vede facilmente che nel fascio di rette doppie vengono allora a coincidere uno dei tre coni e uno dei tre involuipi della congruenza primitiva; rimangono perciò distinti due coni e due involuipi, i cui vertici e piani appartengono rispettivamente al piano e al centro del fascio di rette doppie; di più i vertici dei due coni stanno rispettivamente nei piani dei due involuipi. Questa congruenza (3, 3) è contenuta in un complesso quadratico di caratteristica [(22) (11)]; di questo complesso fanno parte cioè tre punti e tre piani, fra i quali però il centro e il piano del fascio doppio devono entrambi contarsi due volte (è quel caso particolare del complesso tetraedrale in cui due vertici, e quindi due facce, del tetraedro fondamentale sono venute a coincidere). Questa stessa congruenza (3, 3) si può anche considerare come caso particolare di quella studiata da HIRST nella Nota cit. (Proc. ecc., vol. 16) ai n.° 15 e seg., e corrisponderebbe precisamente al caso in cui i punti (fondamentali ed uniti) C e D sono venuti a coincidere. Considerata la cosa in questo modo, sono proprio questi due i vertici del tetraedro fondamentale che ora coincidono.

(***) La F^6 normale si sarà dunque dovuta proiettare da un punto di una sua corda.

sistema; questi sei piani e quelli delle due cubiche si incontrano a due a due in un punto e appartengono perciò, nella quadrica, a uno stesso sistema. Da ciò seguono tosto le diverse proprietà, d'altronde notissime, della congruenza (2, 4):

La congruenza (2, 4) priva di linea focale ha sempre una retta doppia, e contiene due coni cubici razionali con questa stessa retta per generatrice doppia; più sei coni quadrici, e altrettanti fasci di raggi. Le sue rette possono raggrupparsi in tre modi diversi in serie razionali ∞^1 di rigate quadriche, contenenti ciascuna due coni e due coppie di fasci e aventi otto punti basi (che formano gruppo autoassociato) e due piani tangenti fissi.

La superficie focale della congruenza è di quarto ordine e ottava classe, con 14 punti e 6 piani singolari, ecc. ecc.

Per la congruenza (2, 4) si può condurre una semplice infinità di complessi quadratici, della quale fanno parte anche tre complessi tetraedrali (); i vertici dei due coni cubici sono tali per tutti tre i tetraedri fondamentali; le altre coppie di vertici sono date dai sei coni quadrici della congruenza.*

§ 5. Sistemi (m, n) per cui $m + n = 7$.

16. Supponendo ora $m + n = 7$, troveremo congruenze del tipo (3, 4) e (2, 5), o rispettivamente (4, 3) e (5, 2). Per queste sarà sempre $p \leq 6$; e anzi, se escludiamo quelle contenute in un complesso lineare, complesso che in questo caso è necessariamente speciale (**), potremo anche ritenere $p \leq 3$. Daremo dunque a p successivamente i valori 3, 2, 1, e esamineremo le superficie di settimo ordine appartenenti a S_5 colle sezioni di questi varii generi.

E sia anzitutto $p = 3$. Per ogni superficie di settimo ordine dello spazio S_5 e colle sezioni di genere tre passano (come ci dice l'enumerazione delle co-

(*) Questa proprietà (anche già nota) segue per noi dal fatto che le quadriche passanti per F^6 e per i piani di due sue coniche dello stesso sistema i quali si incontrino formano un fascio che (se non è composto tutto di coni) ha la caratteristica [(11) (11) (11)]. E di questi fasci per una quadrica non degenera del sistema ∞^2 se ne possono condurre appunto tre (corrispondentemente ai tre sistemi di coniche di F^6).

(**) Fra le congruenze $(m, 7 - m)$ di genere $p > 0$ contenute in un complesso lineare speciale notiamo quelle (3, 4) e (4, 3) di genere 6 e quelle (2, 5) e (5, 2) di genere 2 prive di rette doppie; altre ancora discendono da queste come casi particolari per l'acquisto di infinite rette doppie.

stanti) almeno ∞^2 quadriche, e di più è anche certo che non possono passarne. La varietà base di questa rete, se quelle quadriche non sono tutte degeneri, sarà costituita dalla stessa superficie F^7 insieme a un certo piano π che la segnerà in una curva γ di terz'ordine (*), come risulta immediatamente dal fatto che ogni C_3^7 di S_4 ammette una trisecante unica (che costituisce con essa la curva base di una rete di quadriche). Viceversa, l'intersezione (residua) generale di tre quadriche di S_5 con un piano a comune è appunto una superficie di settimo ordine colle sezioni di genere 3, e questa superficie è incontrata da quel piano secondo una cubica (in generale ellittica) luogo dei punti in cui le tre quadriche (e quindi tutte quelle della rete da esse individuata) hanno uno stesso S_3 tangente. Il sistema di rette rappresentato da questa superficie è sempre (3, 4) o (4, 3); la superficie stessa è segata in tre punti dai piani del sistema di π .

Possiamo aggiungere che dal piano della sua cubica la superficie F^7 si proietta univocamente sopra un altro piano qualsiasi non incidente al primo; le sue sezioni spaziali danno luogo a quartiche (di genere 3) con 7 intersezioni variabili, e passanti perciò per 9 punti fissi, immagini di altrettante rette di F^7 medesima (incidenti a π e quindi a γ); la cubica di questi nove punti è immagine della stessa curva γ (**). Quindi:

Esistono congruenze $(m, 7 - m)$ di genere tre non contenute in complessi lineari (speciali); esse sono tutte di terzo ordine (o terza classe) e si possono ottenere come intersezioni di due complessi quadratici aventi una stella (o un piano rigato) a comune; il centro della stella (o il piano di rette) è vertice (sostegno) di un cono (involuppo) cubico generale di rette della congruenza. Questa è sempre rappresentabile sul piano (col sistema delle quartiche passanti per nove punti fissi); e contiene in generale nove fasci di raggi, ciascuno dei quali ha un raggio a comune col cono o involuppo cubico. La

(*) Questa curva di terz'ordine si spezzerebbe in tre rette concorrenti nel caso (che non fa per noi) del cono di genere 3.

(**) Questa superficie di settimo ordine a sezioni di genere tre è quella che il CASTELNUOVO (*Sulle superficie algebriche le cui sezioni sono curve di genere tre*; Atti di Torino, vol. 25) chiama di *prima specie* (n.º 4). La superficie di *seconda specie* (n.º 10) non rappresenta invece alcun sistema di rette, perchè contiene una serie ∞^1 di cubiche ellittiche i cui piani formano una M_3^3 contenuta a sua volta in soli ∞^2 coni quadrici (e queste sono anche le sole quadriche passanti per quella superficie). Un fatto analogo si presenta anche per la F^7 a sezioni iperellittiche (la quale contiene una serie ∞^1 di coniche).

sua superficie focale è di decimo ordine e dodicesima classe (o viceversa) e ha 10 punti e 9 piani (o, inversamente, 10 piani e 9 punti) singolari, ecc. ecc.

17. Sia ora $p = 2$. Una superficie di settimo ordine appartenente a S_6 e colle sezioni di genere due può essere rigata, ma questo caso non ci conduce ad alcuna congruenza di rette (*); se invece non è rigata (e non ha una linea doppia) ammette delle trisecanti (avendone la sua sezione generica), e si può quindi proiettare in una F^4 (non rigata, ossia non conica) di S_3 . È dunque razionale, e si può ottenere a sua volta come proiezione di una F^7 (normale) di S_6 .

La F^7 normale di S_6 a sezioni di genere due contiene una serie razionale ∞^1 di coniche, i cui piani formano una M_3^4 normale per lo stesso suo spazio. Volendo proiettare quella superficie, come noi qui intendiamo di fare, da un punto esterno anche a questa M_3^4 , si conclude facilmente (cfr. anche n.º 13) che la F^7 ottenuta in S_5 , quando abbia a rappresentare un sistema di rette, dovrà essere intersezione della M_3^4 proiezione (dallo stesso punto) di quella varietà normale con una quadrica (non degenera) condotta per uno dei suoi piani. Viceversa, quest'intersezione è anche, in generale, una superficie di settimo ordine colle sezioni di genere due. Ricordiamo pure che questa M_3^4 di S_5 ha una retta doppia, luogo dei punti per cui passano due suoi piani, e sta in un cono quadrico di seconda specie con questa stessa retta per asse; la superficie F^7 sarà perciò contenuta in tutto un fascio di quadriche (del quale farà parte quel cono). La M_3^4 potrà poi presentare tre casi distinti, secondo che la retta doppia è intersezione di due suoi piani, oppure luogo delle intersezioni di un piano fisso con ciascuno dei rimanenti, o infine luogo dei punti comuni a coppie di piani variabili (secondo cioè che dall'uno all'altro dei suoi punti non varia nessuno dei due piani, oppure uno solo, o tutti due) (**). In tutti tre questi casi però la superficie F^7 viene ad avere un punto doppio (***), e

(*) Una rigata di settimo ordine e genere 2 appartenente a S_6 o è un cono (normale per S_6) oppure ha una direttrice rettilinea doppia. In questo secondo caso è essa stessa normale, e i piani delle coppie di generatrici incontrantisi sopra questa direttrice formano una M_3^3 comune a tutte le quadriche (e non vi sono che coni di 2.ª specie) passanti per essa rigata.

(**) Il primo di questi tre casi può presentarsi soltanto quando la M_3^4 è un cono; allora anche tutte le coniche di F passano per il vertice di questo cono, e si cade nella nota rappresentazione con sestiche piane aventi a comune un punto quadruplo e due punti doppi infinitamente vicini a questo. Questa particolare M_3^4 non poteva invece presentarsi nel caso della F^6 (generale) a sezioni ellittiche (n.º 13).

(***) Sarà quindi proiezione della F^7 normale di S_6 da un punto di una sua corda.

la congruenza da essa rappresentata è sempre di terz' ordine (o terza classe). Concludiamo dunque:

Esistono congruenze $(m, 7 - m)$ di genere due (non contenute in complessi lineari speciali), e anche queste sono tutte del tipo $(3, 4)$ o $(4, 3)$ e rappresentabili sul piano; ciascuna di esse ha una retta doppia, ed è contenuta in un complesso quadratico (in generale unico) generabile con due fasci proiettivi di complessi lineari. Le due congruenze $(3, 4)$ e $(4, 3)$ sono l'una reciproca dell'altra; contengono entrambe una serie ragionevole ∞^4 di rigate quadriche, della quale fanno parte cinque coppie di fasci di raggi e poi ancora rispettivamente un cono quadrico o un involuppo piano di seconda classe. La superficie focale è di ottavo ordine e decima classe (o viceversa); ecc.

Restringendo ora le nostre considerazioni al caso di una superficie F^7 con una conica per direttrice minima (*), possiamo aggiungere:

*Per il vertice del cono (nel piano dell'involuppo) passa (giace) ancora un raggio della congruenza esterno a questo cono (involuppo). Oltre alle ∞^4 rigate quadriche già ricordate, la congruenza ne contiene in generale altre 16; essa contiene anche 16 serie razionali ∞^4 di rigate cubiche, che corrispondono in certo qual modo a queste 16 quadriche; ecc. ecc. (**).*

18. È notevole il caso in cui le intersezioni della superficie normale F^7 con quella sua corda da un punto della quale essa si è proiettata stanno in pari tempo su due diverse sue direttrici cubiche (cfr. la nota in fine al n.° 17). Allora la F^7 di S_6 viene a contenere due cubiche piane razionali collo stesso suo punto doppio, e i piani di queste due curve staranno anche, naturalmente, sopra ogni quadrica passante per essa. Altrettanto avrà luogo dei piani di quelle due direttrici coniche (ben determinate) che segano rispettivamente le due cubiche in una coppia di punti, e con poche altre semplicissime considerazioni si può tosto concludere che le quadriche passanti per F^7 formano in questo caso un fascio di caratteristica [(11)(11)(11)] (la cui M_3^4 base contiene appunto 8 piani: quei primi quattro, e altri quattro, pure ben determinati). Dunque:

(*) È rappresentata quindi da un sistema di quartiche piane con un punto doppio e cinque punti semplici basi.

(**) La superficie F^7 di cui ora più particolarmente ci occupiamo contiene appunto, in generale, 16 direttrici coniche e altrettanti fasci (sistemi lineari ∞^4) di direttrici cubiche. Le cubiche di ciascun fascio tagliano sempre in due punti una determinata fra le 16 coniche, ne tagliano altre dieci in un punto solo, e non incontrano affatto le rimanenti. Esse incontrano poi in due punti le cubiche di altri cinque fasci, e in un punto solo tutte le rimanenti.

Esiste una congruenza ad es. (4, 3) (*) di genere due la quale (pur continuando a godere delle proprietà già enunciate) contiene ancora due coni quadrici e due involuppi piani di terza classe. I piani α e β dei due involuppi contengono entrambi la retta doppia della congruenza, la quale è anzi doppia per ciascuno di questi ultimi; le curve involuppate risultano perciò di quarto ordine (e con tre cuspidi). I vertici A e B dei due coni quadrici stanno rispettivamente nei piani α e β dei due involuppi, e giacciono poi entrambi nel piano δ dell'involuppo quadrico (che esiste anche nel caso generale); però quest'involuppo non ha a comune che una sola retta con ciascuno dei due coni (**). Ciascuno dei piani α e β contiene i centri di quattro fra i dieci fasci della congruenza, e vi è poi un nono fascio (C) il cui centro sta sull'intersezione $\overline{\alpha\beta}$. Il decimo fascio (quello che con quest'ultimo forma una rigata quadrica degenera della serie ∞^1) ha il centro fuori dell'uno e dell'altro di quei due piani, ma il suo piano passa invece per i vertici dei due coni quadrici (è dunque il piano ABC); ecc. ecc.

Questa congruenza (4, 3) è contenuta in un complesso tetraedrale, il cui tetraedro fondamentale ha per facce i piani α , β , δ e ABC e per vertici rispettivamente opposti i punti B , A , C , $\overline{\alpha\beta\delta}$. Essa è anche Cremoniana, e stabilisce fra i piani α e β una corrispondenza birazionale del terzo ordine nella quale il punto C è (solo) punto unito. È dunque un caso particolare della congruenza (5, 3) di HIRST (loc. cit. Proc. ecc., vol. 16), e precisamente un caso intermedio fra quest'ultima e la congruenza (3, 3) (che si ottiene invece quando sull'intersezione $\overline{\alpha\beta}$ vi sono due punti uniti).

19. Facciamo infine $p = 1$; e, sorvolando sul caso, molto meno interessante, di una congruenza $(m, 7 - m)$ rappresentata da una rigata ellittica, veniamo a dire qualcosa su quegli altri sistemi di rette che si rappresentano con superficie (di settimo ordine, a sezioni ellittiche) non rigate e razionali.

Queste superficie sono normali per lo spazio S_7 , e contengono due serie razionali ∞^1 di coniche i cui piani formano altrettante M_3^5 , normali pure per S_7 . Volendo che la F^7 di S_5 non abbia infiniti punti doppi, dovremo proiet-

(*) Preferiamo — e la ragione ne apparirà subito — enunciare le proprietà di questa congruenza, anziché quelle della sua duale (3, 4).

(**) Ciascuno dei fasci $A(\delta)$ e $B(\delta)$ contiene tre rette della congruenza; di queste una è sempre comune al cono (A o B) e all'involuppo (δ), ed è in tutti due i casi la AB ; un'altra appartiene al solo cono, e la terza (che è rispettivamente l'intersezione $\overline{\alpha\delta}$ o $\overline{\beta\delta}$) appartiene al solo involuppo.

tare la F^7 normale da una retta non incidente ad alcuna di quelle M_3^5 . Ma per una retta arbitraria di S_7 non incidente a una varietà così fatta passa sempre un S_5 incontrante la varietà stessa in una rigata R^4 , e da quella retta questa rigata si proietta in altra, appartenente a S_3 , e avente, nel caso più generale, una cubica doppia incontrata da ogni generatrice in due punti; ciascuna delle nostre M_3^5 (di S_5) avrà dunque a sua volta una cubica doppia, tagliata da ogni suo piano in due punti, e luogo dei punti per cui passano due suoi piani (*); lo spazio S_3 di questa cubica la segherà in una rigata quartica (**). D'altra parte la F^7 che dovrebbe rappresentare la nostra congruenza deve anche essere contenuta in (almeno) una quadrica non degenera; e siccome di varietà così fatte per la M_3^5 non ne passano (***), così quella stessa superficie si dovrà poter segare da una qualunque delle due M_3^5 con una certa quadrica Q . L'intersezione residua sarà naturalmente costituita da una terna di piani. Viceversa, l'intersezione (residua) di una M_3^5 (∞^1 razionale di piani) di S_5 con una quadrica condotta per tre suoi piani è appunto, in generale, una superficie di settimo ordine a sezioni ellittiche (non rigata e razionale). E anche qui possono presentarsi due casi:

a) Dei tre piani in discorso, due appartengono nella quadrica Q a uno stesso sistema e il terzo appartiene invece al sistema opposto;

b) I tre piani appartengono tutti allo stesso sistema.

È quasi superfluo l'aggiungere che nelle due M_3^5 su cui sta una data F^7 dovrà sempre presentarsi lo stesso fra questi due casi; ed è pur chiaro che questi stessi casi corrisponderanno rispettivamente alle congruenze (3, 4) e (4, 3), oppure (2, 5) e (5, 2).

(*) A questo stesso risultato si potrebbe anche giungere osservando che un S_4 condotto (nel modo più generale) per un piano qualunque della M_3^5 di S_5 deve segare ancora quest'ultima varietà in una rigata R^4 incontrata dal primo piano in una generatrice e in due punti ancora fuori di questa; questi due punti saranno certo doppi per la M_3^5 , e di più, nello stesso S_4 , vi sarà un terzo punto doppio per la stessa varietà; quello che è tale per la rigata R^4 . La M_3^5 ha dunque due punti doppi in ogni suo piano, e in ogni S_4 passante per un tal piano ne ha ancora un terzo (e in generale non altri); ha dunque in generale una cubica doppia, incontrata da ogni suo piano in due punti.

Come conseguenza di questo fatto notiamo che una rigata razionale di quinto ordine di S_4 ha in generale tre punti doppi.

(**) Noi ci limitiamo qui a considerare il caso della cubica doppia irriducibile; ma, se questa anche si spezzasse, si potrebbe sempre fare uno studio analogo, e senza incontrare difficoltà di sorta. Sorvoliamo quindi (tranne un'osservazione alla fine del n.º 21) anche sul caso in cui la cubica doppia sia sostituita da una retta tripla.

(***) Infatti ogni quadrica passante eventualmente per questa varietà dovrebbe contenere tutto l' S_3 della sua rigata quartica, e sarebbe quindi un cono (almeno di 2.^a specie).

20. Cominciamo col caso *a*). Se la quadrica Q non contiene la cubica doppia di una qualunque delle due M_3^5 (*), essa dovrà incontrarla in *sei* punti; e di questi si vede facilmente che *uno* (ed uno solo) sarà doppio per la superficie F^7 (**) (***). Segue da ciò che questa superficie dovrà contenere una cubica piana razionale γ collo stesso suo punto doppio; e, di più, siccome la congruenza da essa rappresentata deve (e lo sappiamo già) risultare (3, 4) o (4, 3), e non (2, 5) o (5, 2), dovrà il piano di quella cubica contenere, oltre la curva stessa, un altro punto di F . (Infatti un S_3 qualunque condotto per questo piano sega in generale la superficie F , oltre che in γ , in altri due punti; e se questi fossero tutti due esterni a quel primo piano, dovrebbero stare su di uno stesso secondo piano della quadrica Q , il quale avrebbe perciò comuni con F cinque punti (e non infiniti); cosa che dobbiamo escludere) (****).

La quadrica Q con cui si è segata la superficie F (e così pure ogni altra quadrica passante eventualmente per quest'ultima) conterrà certo il piano della cubica γ e quelli di *sei* coniche della stessa superficie, *tre* per sistema. Se queste coniche le chiamiamo ad es. μ_0, μ_1, μ_2 e ν_0, ν_1, ν_2 , si può riconoscere facilmente che i piani di quattro fra esse, ad es. $\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2$, e quello della cubica γ si segano a due a due in un punto unico, e che i piani di μ_0 e ν_0 segano in rette rispettivamente le terne $(\gamma)(\nu_1)(\nu_2)$ e $(\gamma)(\mu_1)(\mu_2)$ (*****). Queste sei coniche sono anzi le stesse per *ogni* quadrica (se più ve ne sono) passante per F . D'altra parte quei cinque piani che si segano a due a due in un punto *individuano* una quadrica (e non degenera) che li contiene e che passa di conseguenza anche per gli altri due (quelli delle coniche μ_0 e ν_0) e per la superficie F . Dunque:

(*) Se la contenesse, questa curva risulterebbe doppia anche per la superficie F^7 .

(**) Infatti i tre piani comuni alla M_3^5 e alla quadrica Q segano la cubica in due punti ciascuno; i due piani dello stesso sistema, dovendo incontrarsi (e non potendosi incontrare che sulla cubica) assorbono solo *tre* fra le *sei* intersezioni (due delle quali sono però ancora punti semplici di F); altre *due* intersezioni (che sono del pari punti semplici di F) le contiene il terzo piano; la sesta (e questa sola) sarà necessariamente un punto doppio di F . Per quest'ultima intersezione passano infatti sulla superficie due coniche di uno stesso sistema (e anzi due coniche di ciascuno dei due sistemi).

(***) E le due M_3^5 conducono a trovare per F^7 lo stesso punto doppio, perchè, inversamente, un punto doppio per questa superficie è tale anche per quelle due varietà.

(****) Per avere dunque una F^7 di S_5 che rappresenti una congruenza (3, 4) o (4, 3) bisogna proiettare la F^7 normale da una retta contenuta nell' S_4 determinato da una sua cubica e da un suo punto esterno a questa (ma non contenuta nell' S_3 di quella cubica). Non è difficile accorgersi che questa condizione è anche sufficiente.

(*****) Con $(\gamma), (\nu_1), \dots$ indichiamo qui (per brevità) i piani che contengono rispettivamente le varie curve γ, ν_1, \dots

Esistono congruenze (3, 4) o (4, 3) di genere uno non contenute in complessi lineari speciali e rappresentabili sul piano; esse hanno una retta doppia, e non stanno in generale in alcun complesso quadratico. La congruenza (3, 4) (la (4, 3) ha le proprietà duali) contiene un cono cubico razionale la cui generatrice doppia è la stessa sua retta doppia; pel vertice C del cono passa anche un raggio di essa esterno al cono medesimo. La congruenza contiene ancora quattro coni quadrici e due involuppi di seconda classe; dal vertice di ogni cono esce ancora, fuori di questo, un altro raggio della congruenza, e nel piano di ciascun involuppo stanno altri due raggi della stessa. Di fasci di raggi la congruenza ne contiene tre, uno dei quali ha un raggio a comune con ciascuno degli altri due e col cono cubico. La superficie focale di questa congruenza è di sesto ordine e ottava classe, con 8 punti e 5 piani singolari, ecc. ecc.

La congruenza in discorso è anch'essa Cremoniana e stabilisce fra i piani dei due involuppi una corrispondenza birazionale del quarto ordine nella quale il punto C è fondamentale doppio comune ai due piani, e in ciascuno di questi due punti fondamentali semplici sono infinitamente vicini a C stesso. Questa congruenza è quella appunto ottenuta dai sig.ⁱ SEGRE e CASTELNUOVO come proiezione di una varietà cubica di S_4 con otto punti doppi; congruenza che, come ora vediamo, è la più generale fra quelle (3, 4) di genere uno rappresentabili sul piano.

21. Nel caso b) i tre piani che con F^7 costituiscono l'intersezione della quadrica Q con una qualunque delle due M_3^5 devono a due a due incontrarsi (*); e da questo si trae facilmente che la superficie F^7 dovrà avere tre punti doppi, e che il piano di questi dovrà segarla in una quartica razionale passante doppiamente per gli stessi tre punti (**). Questi punti sono anche doppi per altrettante cubiche piane di F medesima incontrantisi a due a due

(*) E tre piani così disposti si possono trovare solo quando la rigata R^4 di S_3 contenuta nella M_3^5 e avente la stessa sua cubica doppia ammette una direttrice rettilinea. Allora però di queste terne ne esistono infinite.

(**) Infatti, se la F^7 di S_3 ha tre punti doppi, la F^7 normale si sarà dovuta proiettare da una retta incidente a tre (e tre sole) sue corde; e l' S_4 di queste corde, contenendo già sei punti di essa superficie (di cui cinque qualunque indipendenti), non potrà segarla che in una quartica razionale. Viceversa, la condizione che la retta asse di proiezione stia nell' S_4 di una quartica (razionale) della superficie normale F^7 è anche sufficiente perchè la superficie proiezione di quest'ultima in S_3 rappresenti una congruenza (2, 5) o (5, 2), purchè soltanto (cfr. la nota seg.) le tre corde della quartica (e della superficie) incidenti a quella retta non stiano con essa in un piano (la retta stessa non stia cioè in un piano trisecante di quella curva e superficie).

in un punto. Ogni quadrica passante per F deve contenere i piani di queste quattro curve, e quindi anche gli altri quattro determinati dal segare in rette quei primi a tre a tre; viceversa, per questi otto piani passano ∞^3 quadriche, e fra queste ve ne sono ∞^1 che contengono tutta la superficie F . Si ritrovano così le note congruenze (2, 5) e (5, 2), le quali hanno tre rette doppie e sono contenute ciascuna in un complesso tetraedrale; si vede ancora che la congruenza (2, 5) ad es. contiene un cono quartico e tre coni cubici, tutti razionali (i cui vertici determinano appunto il tetraedro fondamentale del complesso), più sei coni quadrici e tre fasci di raggi, ecc. ecc. (*).

§ 6. Sistemi (m, n) per cui $m + n = 8$.

22. Sia ora $m + n = 8$; avremo congruenze del tipo $(m, 8 - m)$ rappresentate da superficie di ottavo ordine e colle sezioni, quindi, di genere $p \leq 9$. La congruenza sarà contenuta in un complesso lineare ogni qual volta la superficie F^8 apparterrà allo spazio S_4 ; ma è facile riconoscere che, se il complesso non è speciale (e se la congruenza non ha infinite rette doppie) questo fatto potrà presentarsi soltanto per la congruenza (4, 4) di genere 9 che è l'intersezione generale dello stesso complesso lineare con un complesso di quarto grado (**). Ogni altra congruenza $(m, 8 - m)$ contenuta in un complesso lineare e non avente infinite rette doppie deve perciò avere le sue rette tutte incidenti a una retta fissa (asse del complesso lineare, in questo caso speciale); si hanno così varii casi semplicissimi (***) sui quali crediamo inutile insistere.

(*) I tre punti doppi della superficie F potrebbero venire a coincidere in un solo punto triplo; ma allora le ∞^1 quadriche passanti per quella sarebbero tutte coni col vertice in questo punto, e la superficie stessa non rappresenterebbe più una congruenza di rette. Questo caso si presenterebbe se le due M_3^5 di S_5 avessero una retta tripla, nè ciò deve far meraviglia, perchè la quadrica Q dovrebbe in tal caso contenere tre piani di una qualunque di esse uscenti da uno stesso punto; e siccome questi piani non starebbero in generale in uno stesso S_4 , così quella quadrica sarebbe necessariamente degenerare.

(**) Vi sono bensì delle altre congruenze (4, 4) contenute in un complesso lineare non speciale, per es. quelle Cremoniane studiate da HIRST (anche per un ordine e una classe qualsiasi fra loro uguali) nella Nota: *On Cremonian Congruences* (Proc., ecc., vol. 14); ma queste hanno tutte infinite rette doppie (o anche multiple di ordine superiore).

(***) Congruenza (3, 5) o (5, 3) di genere 8; congruenza (2, 6) o (6, 2) di genere 5; (congruenza (1, 7) o (7, 1) di genere zero).

Veniamo invece alle congruenze $(m, 8 - m)$ non contenute in complessi lineari, e rappresentate perciò da superficie di ottavo ordine appartenenti a S_5 . Per queste congruenze si avrà $p \leq 5$; cominciamo quindi dallo studio del caso estremo $p = 5$.

23. La superficie F^8 di S_5 a sezioni di genere 5 è sempre contenuta, come ci dice l'enumerazione delle costanti, in (almeno) ∞^2 quadriche; essa è dunque l'intersezione di tre quadriche di S_5 . Viceversa, quest'intersezione è appunto, nel caso più generale, una superficie così fatta. Il sistema di rette rappresentato da questa stessa superficie (*) è $(4, 4)$, perchè un piano qualunque di una di quelle quadriche è segato in generale dalle rimanenti secondo coniche di un fascio, e quindi in curve passanti per quattro punti fissi (che stanno appunto su F^8). Dunque:

*Esistono congruenze $(m, 8 - m)$ di genere cinque e non contenute in complessi lineari; esse sono tutte di quarto ordine e quarta classe, e si possono ottenere come intersezioni di due complessi quadratici di rette (**). Queste congruenze furono già chiamate anche biquadratiche; hanno superficie focale di sedicesimo ordine e sedicesima classe.*

24. Sia ora $p = 4$. La superficie F^8 è certo normale anche in questo caso (come nel precedente) perchè sono tali le sue sezioni (C_4^8 di S_4) (***). L'enumerazione delle costanti ci dice che per questa superficie passano certo ∞^1 quadriche; e non può neanche passarne un numero maggiore, a meno che la superficie stessa non sia una particolare intersezione di tre quadriche (e abbia perciò una retta doppia), oppure sia contenuta in una M_3^3 (∞^1 razionale normale di piani) — come succederebbe se avesse le sezioni iperellittiche —; casi questi che tutti due escludiamo (****). La superficie F^8 può tuttavia segarsi dalla M_3^4 base del fascio di quadriche che la contiene mediante una varietà cubica M_4^3 (*****); e l'intersezione residua di queste due varietà sarà una su-

(*) Questa superficie potrebbe anche essere un cono (speciale) di genere 5; ma allora ogni quadrica passante per essa sarebbe pure un cono, e collo stesso suo vertice.

(**) E, viceversa, quest'intersezione è appunto in generale una congruenza $(4, 4)$ di genere 5.

(***) E non è certo rigata, a meno che non sia un cono.

(****) E in questo secondo caso per la superficie non passerebbero anzi, com'è noto, che sole quadriche degeneri.

(*****) Infatti di queste varietà per la superficie F^8 ne passano almeno ∞^{15} , mentre per la M_3^4 non ne passano che ∞^{11} . Questo si vede, per la M_3^4 , riducendosi al numero delle varietà cubiche di S_4 o S_3 che passano per l'intersezione generale di due quadriche di questi stessi spazi, o, se vogliamo, anche al numero delle curve piane di terz'ordine

superficie di quarto ordine, in generale irriduttibile, che apparterrà allo spazio S_5 (*) e avrà perciò le sezioni razionali. Viceversa, scelto ad arbitrio in S_5 un fascio di quadriche passanti per una superficie così fatta, è chiaro che una varietà cubica (M_4^3) passante per questa stessa superficie ma non per la M_3^4 base di quel fascio segnerà ancora quest'ultima varietà in una superficie di ottavo ordine e colle sezioni precisamente di genere 4 (**).

Ora è noto che una superficie di quarto ordine appartenente a S_5 può presentare due casi diversi; può essere una rigata razionale normale (***) oppure una *superficie di Veronese* (non rigata, contenente ∞^2 coniche); e non è difficile riconoscere che il sistema di rette da essa rappresentato è sempre (2, 2) nel primo caso, e sempre (1, 3) o (3, 1) nel secondo (****). La nostra superficie F^8 potrà dunque rappresentare tanto un sistema (4, 4) quanto un sistema (3, 5) o (5, 3); e rappresenterà precisamente l'uno o l'altro secondo che la F^4 ottenuta nel modo indicato poc' anzi sarà rigata o non rigata. Questi sistemi saranno sempre contenuti in complessi quadratici di rette e possiamo anche vedere facilmente a che specie questi ultimi debbano appartenere. Basterà perciò esaminare quale sia la caratteristica di un fascio di quadriche passanti per una superficie F^4 di S_5 .

che passano per quattro punti fissi. Quanto poi alla superficie F^8 , basta ricorrere al solito metodo dell'enumerazione delle costanti (ricordando che le M_4^3 di S_5 sono ∞^{55}).

(*) Se questa superficie fosse contenuta in un S_4 , non potrebbe essere altro che l'intersezione di questo stesso spazio colla M_3^4 di cui sopra; cosa che, data anche come possibile, si potrebbe facilmente evitare (scegliendo opportunamente la varietà M_4^3).

(**) Infatti la M_3^4 base di quel fascio non ha in generale infiniti punti doppi (e si può verificarlo facilmente, ricorrendo per es. alla rappresentazione analitica delle F^4 in discorso); possiamo quindi segarla, con un S_4 opportuno, in una superficie *generale* del quart'ordine (a sezioni ellittiche), e per questa risulta subito, dalla rappresentazione piana ad es., che una M_4^3 condotta per una sua quartica razionale la sega ancora in una C^8 , in generale irriduttibile, di genere 4.

(***) Con una semplice infinità di direttrici coniche, oppure con una direttrice rettilinea (e nessun'altra direttrice di ordine < 3). Cfr. C. SEGRE: *Sulle rigate razionali...* (Atti della R. Acc. di Torino, vol. 19).

(****) Ciò proviene dal fatto che ogni quadrica passante per una rigata R^4 di S_5 e per un piano avente con essa tre e tre soli punti a comune deve contenere tutto l' S_3 della direttrice cubica della rigata che passa per gli stessi tre punti, ed è perciò un cono (almeno) di seconda specie. Similmente una quadrica passante per una superficie di VERONESE e per un piano che incontri questa in due (soli) punti deve contenere tutto l' S_3 di questo stesso piano e della conica passante per quei due punti. I sistemi di rette rappresentati dalla superficie di VERONESE furono del resto già ricordati al n.º 3, e per essi abbiamo anche rimandato a un lavoro del SEGRE (Atti di Torino, vol. 20).

25. E cominciamo dal caso della rigata. Ogni corda di questa è asse di un determinato cono quadrico di seconda specie contenente la stessa superficie (*); e questi varii coni formano un sistema (algebrico) ∞^4 , che è però facile riconoscere non essere un sistema lineare. Ogni fascio di quadriche passanti per la rigata R^4 contiene *due* e in generale due soli fra quei coni; e contiene poi ancora (sempre nel caso più generale) due coni di prima specie; ha quindi la caratteristica [(11)(11) 11]. I due coni di prima specie corrispondono precisamente ai due elementi doppi dell'involuzione quadratica di piani che le quadriche del fascio determinano nella M_3^3 che contiene la rigata R^4 . In particolare, se quest'involuzione è *parabolica*, se cioè la M_3^4 base del fascio contiene *un* piano di questa M_3^3 (nel qual caso essa contiene anche altri *tre* piani determinati), quei due coni vengono a coincidere, e il fascio si riduce alla caratteristica [(11)(11) 2]. Che se poi la rigata non ha direttrici rettilinee, può anche darsi che, in luogo degli stessi due coni, ne compaia un terzo ancora di seconda specie (passante per quella certa M_3^3); allora si ha la caratteristica [(11)(11)(11)] e la M_3^4 base contiene i piani di *due* coniche di R^4 (più altri *sei* piani determinati, quattro dei quali contengono rispettivamente altrettante generatrici di R^4 stessa). Per la rigata con direttrice rettilinea quest'ultimo caso potrebbe presentarsi solo coincidendo quei due primi coni di seconda specie; ciò condurrebbe alla caratteristica [(22)(11)].

(*) Non sarà forse inutile l'osservare qui che, data ad arbitrio nello spazio S_3 una rigata R^4 , ogni punto P di questo spazio è vertice di (almeno) un cono quadrico passante per essa rigata. Se il punto P è esterno alla M_3^3 formata dai piani delle ∞^1 direttrici coniche (o, quando esiste una direttrice rettilinea, dai piani determinati da questa colle singole generatrici), allora quel cono è unico e di seconda specie, e ha per asse l'*unica* corda di R^4 passante per P stesso. Se invece il punto P sta in uno di quegli ∞^1 piani (ma sempre fuori della rigata) esso è vertice di un intero fascio di coni (di prima specie) passanti per R^4 (e per quel certo piano); in questo fascio vi è un cono di terza specie avente lo stesso piano per asse, più, nel caso delle ∞^1 direttrici coniche, un cono di seconda specie passante per quella certa M_3^3 (nel caso della direttrice rettilinea è il cono di terza specie che contiene quest'ultima varietà). Questo fascio, o, meglio, la sua sezione con un S_1 non passante pel vertice comune, avrebbe nei due casi rispettivamente le caratteristiche [(22) 1] e [(32)]; la F^4 base del fascio sezione avrebbe una retta doppia, e sarebbe, naturalmente, anch'essa rigata. (Sono questi anzi i soli *due* casi in cui questa superficie base contiene infinite rette; cfr. ad es. C. SEGRE: *Etude des différentes surfaces du 4.^{me} ordre à conique double ou cuspidale*... Math. Ann., Bd. 24, n.º 58). Infine, se il punto P sta sulla rigata R^4 , ciascuna delle ∞^2 corde di questa uscenti da esso è asse di un cono quadrico di seconda specie passante per la stessa rigata; e nel sistema lineare ∞^2 di questi coni (sistema che ha per base una M_3^3) vi è anche un cono di terza specie.

Quanto poi alla superficie di VERONESE (*), si vede facilmente che ogni quadrica passante per essa contiene i piani di infinite sue coniche; e poichè di queste coniche ne passano precisamente due per ogni suo punto, così in ogni fascio formato con quelle quadriche la M_3^4 base dovrà contenere i piani di quattro (in generale distinte) fra quelle stesse coniche (e quindi gli altri quattro che segano questi a tre a tre secondo rette). Questo fascio avrà dunque in generale la caratteristica [(11)(11)(11)], e conterrà tre coni di seconda specie i cui assi congiungeranno a coppie le sei intersezioni di quelle quattro coniche a due a due. Come caso particolare, se due di quelle coniche (e quindi i loro piani) si fanno avvicinare indefinitamente, si ha la caratteristica [(22)(11)]; e se una terza conica viene ancora a coincidere colle prime due, si ha la [(33)]. Facendo invece coincidere le prime due e le due rimanenti, oppure tutte quattro, si hanno rispettivamente i casi [(211)(11)] e [(321)].

26. Applicando ora quanto precede ai sistemi di rette, abbiamo:

Esistono congruenze (4, 4) e (3, 5) o (5, 3), di genere quattro, non aventi infinite rette doppie; e queste sono tutte contenute in complessi quadratici di rette.

La congruenza (4, 4) è contenuta, nel caso più generale, in un complesso quadratico di caratteristica [(11)(11)11], e si può segare da questo con un complesso cubico, l'intersezione residua dei due complessi essendo costituita da una congruenza (2, 2) — uno dei due sistemi di tangenti a un cono quadratico che si appoggiano a una conica fissa non passante pel vertice di questo cono (**). — Però quel complesso quadratico può avere anche la caratteristica [(11)(11)2]; della sua *superficie singolare* fanno parte allora *due piani e due punti* (involuppi) sull'intersezione di quelli; i due punti sono vertici di *coni quadratici* di rette della congruenza, mentre i due piani sono sostegni rispettivamente di *un fascio di rette* e di *un involuppo generale di terza classe* (***). *La presenza di quest'involuppo mostra che la congruenza è in questo caso rappresentabile sul piano; essa si rappresenta infatti sul piano stesso dell'invi-*

(*) Ogni corda di questa superficie è asse di un cono di seconda specie passante per essa, e ogni suo piano tangente lo è di un cono di terza specie; quest'ultimo caso si può anzi far scaturire dal precedente, supponendo che la corda considerata si riduca ad essere una tangente. Per la superficie di VERONESE non passano altri coni all'infuori di quelli ora menzionati.

(**) Cfr. KUMMER: loc. cit., § 5. Questa stessa congruenza è anche considerata nell'ultimo trattato dello STURM (pag. 347).

(***) Oppure, dualmente, i due piani sono sostegni di involuppi quadratici, e i due punti sono rispettivamente centro di un fascio e vertice di un cono cubico. Si hanno quindi due casi diversi di congruenza (4, 4) contenuta in un complesso quadratico di caratteristica [(11)(11)2].

luppo con un sistema di quintiche passanti doppiamente pei vertici dei due coni quadrici (*). La stessa congruenza (4, 4) può anche esser contenuta in un complesso tetraedrale; allora dai quattro vertici del tetraedro fondamentale escono rispettivamente un cono cubico, due coni quadrici, e un fascio di rette della congruenza; mentre le facce rispettivamente opposte a questi vertici sono sostegni di involuppi rispettivamente duali a questi coni (**).

La congruenza (3, 5) è invece contenuta in generale in un complesso tetraedrale (**), e si può segare da questo con un complesso cubico, l'intersezione residua essendo costituita da una congruenza (3, 1) determinata da due piani collineari in posizione generale. Dai vertici del tetraedro fondamentale escono coni cubici di raggi della congruenza, e le facce dello stesso tetraedro sono sostegni di fasci di rette del sistema; i quattro coni hanno a due a due un raggio a comune. — La congruenza (5, 3) ha proprietà duali. Tra due facce qualunque del tetraedro fondamentale essa stabilisce una corrispondenza (2, 2), in cui alle rette dell'un piano corrispondono nell'altro curve di terzo ordine, e ai vari punti di ogni retta corrispondono sulla cubica omologa le coppie di una certa serie lineare g_2^1 (****). Siccome questa serie contiene quattro coppie costituite da punti infinitamente vicini (****), così vi saranno

(*) Questa rappresentazione è quella stessa che si otterrebbe proiettando la superficie F^8 (e la proiezione ne risulterebbe appunto univoca) dal piano della sua cubica (di quella curva cioè che corrisponde all'involuppo di terza classe). Il sistema di quintiche a cui si giunge ha nove punti basi semplici (oltre ai due punti doppi), immagini di altrettante rette di F^8 (incidenti alla cubica) e di altrettanti fasci di rette della congruenza (fra i quali non è compreso quello considerato di sopra). Questi punti dovranno anzi stare tutti su di una quartica di genere 1 passante doppiamente per i due punti basi doppi; quartica che sarà la rappresentante piana della cubica di F^8 (ossia dell'involuppo di terza classe contenuto nella congruenza in discorso).

(**) In questo caso ancora otto fra i punti basi semplici della rappresentazione piana devono stare su di una cubica passante (semplicemente) pei punti basi doppi; questa cubica rappresenterebbe il cono di terzo ordine ora comparso. Con una trasformazione quadratica avente per punti fondamentali i due punti basi doppi e il nono punto semplice questa cubica e la quartica di cui alla nota prec. si mutano l'una nell'altra.

(***) Possiamo anzi dire che è sempre contenuta in un complesso tetraedrale, o in altro ottenuto da questo facendo coincidere qualcuno dei vertici del tetraedro fondamentale.

(****) Queste coppie formano infatti una serie razionale, e da un punto qualunque della cubica è anche individuata la coppia che lo contiene; ciò perchè dei due punti che corrispondono nel primo piano a quest'ultimo uno solo cade in generale sulla retta considerata. (Se vi cadessero tutti due, quel punto sarebbe, in generale, doppio per la cubica).

(*****) È bene osservare che la cubica di cui sopra è, in generale, ellittica, come direttrice di una rigata di quinto ordine alla quale, sulla superficie F^8 che rappresenta la congruenza, corrisponde appunto una curva di (quinto ordine e) genere 1.

su quella retta *quattro* punti per cui i due raggi della congruenza che ne escono e non stanno nel relativo piano (ossia nella faccia del tetraedro in cui la stessa retta si è considerata) sono infinitamente vicini. La congruenza può dunque riferirsi al piano doppio con curva limite di quart'ordine, e si potrà quindi anche rappresentare, *in generale* (*), sul piano semplice.

Ma un'altra osservazione, del pari semplicissima, ci conduce subito a concludere che quest'ultima rappresentazione è sempre possibile. Infatti, nella nota rappresentazione del complesso tetraedrale sullo spazio punteggiato (**), la nostra congruenza (5, 3) dà luogo a una superficie di terzo ordine che, come si vede facilmente, è non rigata, e quindi certo razionale. Questa superficie passa (semplicemente) per i quattro vertici del tetraedro fondamentale, e alle ∞^5 rigate (di ottavo ordine e genere 4) in cui la stessa congruenza è segata dai varii complessi lineari di S_3 corrispondono le ∞^5 sestiche (pure di genere 4) secondo cui quella superficie è incontrata dalle quadriche passanti per quegli stessi quattro vertici. Da questo segue altresì che *la rappresentazione piana della congruenza (5, 3) ci è data dal sistema delle sestiche con sei punti doppi e quattro punti semplici basi*. A questi ultimi corrispondono i quattro fasci di raggi; invece i quattro involuppi cubici sono rappresentati dalle curve piane di terzo ordine passanti per i sei punti doppi e per i punti semplici a tre a tre (***) .

La superficie focale della congruenza (5, 3) è di sedicesimo ordine e dodicesima classe. Ciascuna faccia del tetraedro fondamentale la sega nella curva

(*) L'unica eccezione la si avrebbe quando quella curva di quarto ordine si spezzasse in quattro rette passanti per uno stesso punto (cfr. i lav. già cit. al n.º 4).

(**) V. REYE: *Geometrie der Lage*, vol. 2 (Leipzig, 1886; e vol. 3 dell'ed. ultima, 1892); WEILER: *Ueber eine Abbildung des Tetraedralen Complexes auf den Punktraum* (Zeitschrift für Math. und Physik, vol. 22); LORIA: *Intorno alla geometria del complesso tetraedrale* (Atti della R. Acc. di Torino, vol. 19); STURM: *Die Gebilde ersten und zweiten Grades...*; vol. I (Leipzig, 1892).

(***) Le cose dette di sopra ci mostrano anche che la congruenza (5, 3) in discorso si può sempre generare con due superficie cubiche collineari passanti pei *quattro* punti uniti della collineazione in cui esse sono riferite. E questa congruenza sarà costituita precisamente dalle congiungenti delle coppie di punti omologhi di quella corrispondenza. Se le due superficie non contengono che *tre* fra i punti uniti, oppure soltanto *due*, o *uno* solo, o *nessuno*, si hanno rispettivamente congruenze (6, 3), (7, 3), (8, 3), (9, 3), tutte di genere *quattro*. Quest'ultima ha, nelle quattro facce del tetraedro fondamentale, altrettanti involuppi di sesta classe (e genere 1) che contengono gli spigoli dello stesso tetraedro (a tre a tre) come rette triple. — E manifesta l'analogia di queste cinque congruenze colle (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2) e (6, 2)₁ — (6, 2)₂ di STURM (cfr. la nota ult. alla fine del n.º 37) — tutte contenute, al pari delle prime, in complessi tetraedrali.

di terza classe (e sesto ordine) involupata dalle rette della congruenza in essa contenute, e nella curva di quarto ordine luogo dei punti per cui le due rette della congruenza esterne alla faccia stessa sono infinitamente vicine; e la tocca poi ancora lungo una cubica, luogo dei punti che, nella corrispondenza (2, 2) tra questa faccia e un'altra, sono omologhi ai punti della comune intersezione delle due facce, considerati come appartenenti a quell'altra.

27. Veniamo alle congruenze $(m, 8 - m)$ di genere *tre*.

Una superficie di ottavo ordine appartenente a S_5 e colle sezioni di genere 3 può essere rigata, dando luogo ai due casi del cono di genere 3, normale per S_6 , e della rigata normale con direttrice rettilinea doppia (e quindi iperellittica). Nessuno di questi due casi conduce a un sistema di rette dello spazio ordinario, trattandosi di superficie non contenute in alcuna quadrica non degenera (dello spazio S_5).

Delle superficie non rigate a sezioni di genere 3 non sono ancora stati assegnati con certezza *tutti* i diversi casi possibili. Ci occuperemo quindi di quei soli sistemi di rette che si rappresentano con superficie studiate dal sig. CASTELNUOVO (nel lav. cit. degli Atti di Torino, vol. 25), e precisamente 1.° con superficie a *sezioni iperellittiche*; 2.° con superficie di *prima specie*; 3.° con superficie di *seconda specie* (*). Queste superficie sono tutte normali per lo spazio S_6 .

28. La superficie F^8 di S_5 a sezioni iperellittiche di genere 3 (loc. cit. 12) è rappresentabile sul piano e contiene una semplice infinità razionale di coniche, i cui piani formano (in generale) una M_3^4 con retta doppia (cfr. anche quanto si è detto ai n.° 13 e 17). Questa M_3^4 sta sopra un (solo) cono quadrico di seconda specie avente la sua retta doppia per asse; la F^8 sarà quindi, nel nostro caso, intersezione di questa stessa varietà con una nuova quadrica (che possiamo supporre non degenera). Viceversa, l'intersezione generale di una M_3^4 così fatta con una quadrica è appunto una superficie di ottavo ordine, colle sezioni iperellittiche di genere 3, e con due punti doppi, per ciascuno dei quali passano due coniche della stessa superficie (dalla congiungente di quei due punti quest'ultima si proietterebbe in una quadrica doppia di S_3). Ogni piano di quella quadrica segnerà la varietà M_3^4 (e quindi

(*) Sono queste appunto (negli spazi superiori a S_3) le superficie (non rigate) che contengono un sistema ∞^2 di quartiche seganti sopra una qualsiasi sezione spaziale la serie canonica g_4^2 . Nel caso delle sezioni iperellittiche ciascuna di queste quartiche si spezza però in una coppia di coniche (e la g_4^2 risulta quindi, come appunto deve risultare, composta mediante la g_2^1).

la superficie F^8) in 4 punti; la congruenza rappresentata da questa superficie sarà dunque (4, 4). Concludiamo perciò:

Esistono congruenze $(m, 8 - m)$ di genere tre, iperellittiche (), e rappresentabili sul piano; esse sono tutte di quarto ordine e quarta classe, e stanno in complessi quadratici generabili con fasci proiettivi di complessi lineari. Queste stesse congruenze hanno due rette doppie, e contengono (come si vede facilmente) una serie razionale ∞^1 di rigate sestiche (di genere 2) con queste stesse rette per generatrici doppie. Ciascuna di queste rigate sta in una determinata congruenza lineare; ha quindi due direttrici rettilinee (che possono anche essere infinitamente vicine).*

29. La F^8 normale di S_6 di prima specie contiene un fascio di quartiche ellittiche passanti per uno stesso suo punto; e gli spazi S_3 di queste quartiche formano una M_4^3 generabile con tre fasci proiettivi di S_5 . Noi ci limiteremo a considerare il caso (più interessante) in cui questa superficie si proietti da un punto di quella M_4^3 , da un punto cioè dell' S_3 di una sua quartica.

La superficie F^8 di S_5 che otterremo avrà in tal caso due punti doppi, e questi saranno tali anche per una quartica piana di genere 1 in essa contenuta. La M_4^3 si proietterà in un cono quadrico di seconda specie passante per questa stessa superficie, sicchè quest'ultima (quando abbia a rappresentare un sistema di rette) dovrà stare sopra una seconda quadrica (non degenerare) e quindi ancora su tutto un fascio di quadriche. La M_3^4 base del fascio conterrà anch'essa il piano di quella quartica di genere 1, e la superficie F^8 potrà segarsi da essa con una varietà cubica (M_4^3 di S_5) che la taglierà ancora in quello stesso piano più, in generale, una rigata cubica appartenente a uno spazio S_4 . Quest'ultimo spazio non conterrà quel piano, ma l'incontrerà secondo una retta che sarà corda della rigata cubica (e sarà precisamente la congiungente dei due punti doppi di F^8). La proposizione è invertibile, ossia, facendo passare in S_5 per una rigata cubica normale e per un piano che l'incontri in due punti un fascio di quadriche (M_4^2) e una varietà cubica (M_4^3), si ha come intersezione residua di queste stesse varietà (in generale) una superficie di ottavo ordine a sezioni di genere 3, che dal piano stesso è segata in una curva di quarto ordine, e per la quale i due punti comuni al piano e alla rigata risultano anche doppi (**).

(*) Incontrate cioè da ogni complesso lineare secondo una rigata iperellittica.

(**) Per l'intersezione complessiva (superficie di dodicesimo ordine) questi due punti devono infatti risultare *quadrupli*, perchè in ciascuno di essi le quadriche del fascio e la varietà M_4^3 ammettono tutte uno stesso S_4 tangente.

Poichè la F^8 normale si proietta univocamente su di un piano dall' S_3 di una sua quartica, la F^8 di S_3 dovrà proiettarsi pure univocamente dal piano della sua quartica ellittica. La congruenza da essa rappresentata sarà perciò (3, 5) o (5, 3), e noi potremo concludere:

Esiste una congruenza (3, 5) o (5, 3) di genere tre, non iperellittica, e contenuta in un complesso quadratico generabile con fasci proiettivi di complessi lineari; congruenza che ha due rette doppie, e contiene otto fasci di raggi e 28 rigate quadriche, più nei due casi rispettivamente un cono quartico o un involuppo piano di quarta classe e genere uno, con quelle stesse due rette doppie. Questa congruenza si può ottenere come intersezione del complesso quadratico che la contiene con un complesso cubico, ecc. ecc.

30. Della superficie F^8 normale di seconda specie è noto (loc. cit. 7) ch'essa può sempre ottenersi come intersezione di una quadrica con un cono di quart'ordine proiettante una superficie di Veronese da un punto esterno al suo S_3 . Segue da ciò che la F^8 di S_3 proiezione della superficie precedente dovrà stare sul cono che proietta una F^4 di S_4 a sezioni razionali e non rigata da un punto esterno al suo S_4 (*); e sarà precisamente l'intersezione di questo stesso cono con una quadrica (per noi non degenera) di S_5 . (Per quel cono quartico non passa infatti in generale nessuna quadrica, e non passano poi in nessun caso quadriche non degeneri). Si può verificare facilmente che, se questa superficie sta su più di una e quindi su infinite quadriche, dovrà anche stare sopra una doppia infinità di queste (se, ben inteso, vogliamo sempre che rappresenti un sistema di rette) e avrà in tal caso una conica doppia (sarà insomma una particolare intersezione di tre quadriche, riducendosi le sue sezioni al genere 3 per il fatto di avere ciascuna due punti doppi). Nel caso più generale però questa superficie starà sopra una sola quadrica, e non avrà affatto punti doppi. Il sistema di rette da essa rappresentato è certamente (4, 4); e perciò:

Esiste anche una congruenza (4, 4) di genere tre non iperellittica; essa contiene tuttavia (cfr. CASTELNUOVO, loc. cit.) un sistema ∞^4 di rigate iperellittiche di ottavo ordine (e genere 3). È in generale rappresentabile sul

(*) Il punto da cui si proietta la superficie normale F^8 può infatti supporre esterno anche al cono quartico che proietta la superficie di VERONESE. Se così non fosse, la F^8 di S_3 (quando non si riducesse a una F^4 doppia) verrebbe certo a stare in una M_3^3 (conica) e non sarebbe quindi contenuta che negli ∞^2 coni quadriche passanti per quest'ultima varietà.

piano (*), ma non ha rette doppie, e non è contenuta in nessun complesso quadratico.

31. Facciamo ora un altro passo, e diciamo qualcosa sulle congruenze $(m, 8 - m)$ di genere due. — E osserviamo anzitutto che una superficie di ottavo ordine e colle sezioni di genere 2 può essere rigata, ed è in tal caso normale per uno degli spazii S_7 o S_6 .

Se è normale per S_7 è certamente un cono, e non può dunque rappresentare (finchè appartiene a S_5) nessuna congruenza di rette.

Se è normale per S_6 , ha una direttrice rettilinea doppia, e, se non ha generatrici doppie, i piani delle sue coppie di generatrici incontrantisi sopra quella direttrice formano una M_3^4 con retta doppia (contenuta in un cono quadrico di seconda specie). Non è difficile accorgersi che la rigata R^8 può essere intersezione di questa M_3^4 con una nuova quadrica (non degenera) tangente ad essa in tutti i punti di una sua direttrice rettilinea; essa può quindi rappresentare una congruenza $(4, 4)$ di genere due con tutto un fascio di rette doppie (**).

32. Veniamo alle superficie non rigate e razionali.

Queste superficie (supposte sempre di ottavo ordine e colle sezioni di genere 2) sono normali per lo spazio S_7 e contengono una serie razionale ∞^1 di coniche i cui piani formano, sulla superficie normale, una M_3^5 . Da una retta qualunque dello spazio S_7 , che vogliamo però supporre non incidente a questa M_3^5 , la varietà stessa si proietta in altra di ugual ordine e dimensione appartenente a S_5 e contenente la F^8 proiezione (dalla stessa retta) della superficie normale di cui sopra. Da considerazioni già svolte altrove (n.º 19)

(*) In un solo caso questa rappresentazione non è più possibile (cfr. loc. cit. 9): quando la superficie F^8 contiene una serie ∞^1 ellittica di coniche con un punto a comune (e quindi la congruenza $(4, 4)$ una serie analoga di rigate quadriche passanti per una stessa retta). Superficie e congruenza si possono però allora rappresentare sul cono ellittico.

(**) Questa congruenza, oltre al fascio accennato di sopra, avrebbe due altre rette doppie — una contenuta nel piano dello stesso fascio, l'altra passante pel suo centro — e starebbe in un complesso quadratico generabile con due fasci proiettivi di complessi lineari. Più particolarmente, possiamo dire che la stessa congruenza dovrà comporsi di una serie ∞^1 di fasci di raggi, coi centri su di una quartica di genere 2 contenuta nel piano del fascio doppio e passante doppiamente pel centro di questo fascio; due fasci della serie ∞^1 coi centri allineati su quest'ultimo punto avranno sempre un raggio a comune. Dualmente, i piani degli ∞^1 fasci invilupperanno un cono di quarta classe e genere 2 col centro del fascio doppio per vertice e il piano di esso per piano bitangente (tangente cioè lungo due generatrici, in generale distinte); ecc.

risulta che questa M_3^5 di S_5 dovrà avere una curva doppia di terz'ordine (che noi supporremo irriducibile) luogo dei punti per cui passano due suoi piani; la stessa curva sarà anzi incontrata da ciascuno di questi piani in due punti. La superficie F^8 , quando abbia a rappresentare un sistema di rette di S_3 , dovrà essere intersezione di questa M_3^5 con una quadrica Q (non degenera), e queste due varietà dovranno poi ancora incontrarsi secondo una coppia di piani. Viceversa, una quadrica passante per due piani di una M_3^5 così costituita la sega ancora, in generale, in una superficie di ottavo ordine colle sezioni di genere due. E anche qui possono presentarsi due casi:

- a) Quei due piani della M_3^5 non si incontrano.
- b) Gli stessi due piani si incontrano.

Nel primo caso la superficie F^8 ha in generale due punti doppi, e i due piani che completano l'intersezione della M_3^5 colla quadrica Q la segano ciascuno in una conica e in due punti ancora fuori di questa. Nel secondo caso invece F^8 ha in generale tre punti doppi, e gli stessi due piani non la incontrano (fuori della relativa conica) che in un sol punto; il punto comune ad essi non sta (in generale) su quella superficie. Quanto poi al sistema di rette che così viene rappresentato, è chiaro ch'esso sarà (4, 4) nel primo caso, (3, 5) o (5, 3) nel secondo. Concludiamo perciò:

Le congruenze $(m, 8 - m)$ di genere due rappresentabili sul piano possono essere tanto (4, 4), quanto (3, 5) o (5, 3).

La congruenza (4, 4) ha due rette doppie, e contiene un cono quadrico e un involuppo piano di seconda classe; il vertice del cono e il piano dell'involuppo non si appartengono. Pel vertice del cono passano ancora due raggi della congruenza non contenuti in esso cono, e altrettanti ne giacciono nel piano dell'involuppo senza tuttavia appartenere a quest'ultimo.

La congruenza (3, 5) invece ha (in generale) tre rette doppie, e contiene due coni quadrici, dai cui vertici escono ancora rispettivamente due rette di essa non contenute in questi coni; la congiungente dei due vertici non è in generale raggio della congruenza.

La superficie focale è di decimo ordine e decima classe nel primo caso; nel secondo, è di ottavo ordine e dodicesima classe (o viceversa, se si tratta della congruenza (5, 3)). Altre proprietà di queste congruenze si dedurrebbero facilmente da quelle delle superficie che le rappresentano; ma per brevità ci asteniamo anche dall'enunciarle.

33. Un caso particolare (e notevole) di congruenza (5, 3) di genere 2 l'abbiamo nella congruenza *Cremoniana* di HIRST (Proc., ecc., vol. 16) che

si determina quando fra due piani qualunque dello spazio si stabilisce una corrispondenza birazionale del terzo ordine priva di punti uniti. — La superficie F^8 considerata di sopra può infatti rappresentarsi, quando non abbia direttrici di ordine < 2 , con un sistema di quartiche piane aventi un punto doppio e quattro punti semplici basi; e contiene allora *otto* direttrici coniche (segantisi a coppie in *un* punto), otto fasci di direttrici cubiche, e altrettante reti di direttrici quartiche. Queste otto reti possono accoppiarsi a due a due in modo che le quartiche di ciascuna di esse taglino quelle dell'altra in *tre* punti (mentre le rimanenti ne sono incontrate in soli *due* punti). Proiettando la F^8 normale (ciò che si è detto in questo n.º vale tanto per essa, quanto per la sua proiezione generale in S_5) da una retta che non l'incontri, ma sia contenuta nel piano delle tre intersezioni di due sue direttrici quartiche, otteniamo una F^8 di S_5 con due quartiche piane, e con un punto triplo che è tale anche per queste stesse curve; e si può riconoscere facilmente che la superficie così ottenuta rappresenta una congruenza (3, 5) o (5, 3) contenuta in un complesso tetraedrale. Si può anzi dimostrare che è questo il solo caso in cui i tre punti doppi che la superficie F^8 ha nel caso più generale vengono a coincidere in un (solo) punto triplo (ammesso, ben inteso, che la F^8 stessa debba sempre rappresentare una congruenza (3, 5) o (5, 3)) (*). Concludiamo perciò:

La congruenza (3, 5) o (5, 3) di genere due, rappresentata da un sistema di quartiche piane, può avere una retta tripla (in luogo di tre rette doppie distinte) ed è allora contenuta in un complesso tetraedrale. La congruenza (5, 3) ad es. contiene in questo caso due coni quadrici (A e B) e due involuppi di quarta classe (α e β), oltre ai due involuppi di seconda classe (γ e δ) e agli otto fasci di raggi che vi sono anche nel caso generale. — La sua

(*) Si giunge a questo risultato osservando che dal suo punto triplo (P) la superficie F^8 dovrebbe proiettarsi in una F^5 di S_4 (rappresentata dal sistema delle quartiche piane con un punto doppio e 7 punti semplici basi); essa dovrebbe dunque stare nel cono (di quinto ordine, a 3 dimensioni) che proietta quest'ultima superficie dallo stesso punto P , e sarebbe precisamente intersezione di questo cono con una quadrica (non degenera) passante per due piani di esso col solo punto P a comune. Da questo si trae che la sezione spaziale generica di F^8 deve proiettarsi nell'intersezione residua di F^5 con una quadrica passante per due sue rette sghembe (quelle che stanno rispettivamente in quei certi due piani del cono); e perciò l'insieme di queste due rette deve dar luogo (nella rappresentazione piana) a una curva (riduttibile) di quarto ordine con quattro punti doppi (il punto base doppio comune alle rappresentazioni di F^8 e di F^5 , e i tre punti semplici che si devono aggiungere alla prima delle due per averne la seconda); dunque ecc.

retta tripla è precisamente l'intersezione dei due piani α e β , ed è tripla per ciascuno dei relativi involuppi (sicchè questi risultano razionali, e le curve involupate sono di sesto ordine). Gli stessi piani α e β contengono rispettivamente i vertici A e B dei due coni quadrici; e la congiungente di questi due punti è anche intersezione dei due piani γ e δ . Il tetraedro fondamentale del complesso (tetraedrale) che contiene questa congruenza ha per facce i quattro piani α , β , γ , δ ; due suoi vertici cadono quindi rispettivamente nei punti A e B ; ecc., ecc.

È questa appunto, com'ognun vede, la congruenza accennata di HIRST; i due piani da essa riferiti in una corrispondenza birazionale del terzo ordine sono quelli che abbiamo chiamati α e β . Che questa congruenza sia contenuta in un complesso tetraedrale si vede anche direttamente, ed è stato pure accennato nella nota ultima al n.° 11.

34. Le superficie di ottavo ordine a sezioni ellittiche possono essere rigate; ma, sorvolando anche qui su questo caso (*), ci limiteremo a dare un cenno sulle congruenze rappresentate da superficie non rigate e razionali. Queste sono tutte normali per lo spazio S_3 e possono essere, com'è noto, di due specie diverse (cfr. ad es. il lav. cit. del sig. DEL PEZZO; Rend. di Palermo, vol. 1).

Cominciamo dalla F^8 di prima specie. Questa contiene una serie razionale ∞^1 di coniche i cui piani formano, sulla superficie normale, una M_3^6 pure normale. Da un piano arbitrario (che vogliamo solo supporre non incidente ad essa) questa M_3^6 si proietta in una varietà di ugual ordine e dimensione appartenente a S_3 , che ha, nel caso più generale, una curva doppia di sesto ordine incontrata da ogni suo piano in tre punti (**); questa curva potrebbe

(*) Il quale, d'altronde, condurrebbe solo a congruenze costituite da una serie ∞^1 di fasci di raggi coi centri su di una curva ellittica. — Una rigata ellittica di ottavo ordine rappresentante una congruenza di rette si avrebbe per es. segnando una M_3^5 (∞^1 razionale di piani) con una quadrica (non degenera) passante per due suoi piani e tangente ad essa in tutti i punti di una sua direttrice rettilinea (supposta esistente). La congruenza così rappresentata sarebbe (3, 5) o (5, 3) oppure (4, 4) secondo che quei due piani si incontrano o no —.

(**) Infatti da un S_4 condotto per un suo piano π questa M_3^6 è segata ancora, in generale, in una rigata razionale di quinto ordine con tre punti doppi (per ciascuno dei quali passano due generatrici di quest'ultima, e quindi due piani distinti di M_3^6); rigata che poi a sua volta è incontrata dal piano π , oltre che in una generatrice, in tre altri punti, per ciascuno dei quali passerà dunque, oltre a π stesso, un secondo piano della M_3^6 . Ogni piano di questa varietà contiene dunque tre punti doppi di essa, e ogni S_4 condotto per un tal piano ne contiene, fuori di questo, altri tre (in tutto dunque sei). La curva doppia di M_3^6 è perciò appunto di sesto ordine.

anche spezzarsi in due o più parti, ma noi, per non dilungarci troppo, ci limiteremo a considerare il caso in cui essa è irriduttibile.

Non essendo questa M_3^6 contenuta in alcuna quadrica (almeno non degenere) la superficie F^8 , quando abbia a rappresentare un sistema di rette, sarà certo intersezione di quella stessa varietà con una quadrica (non degenere) Q passante per quattro suoi piani. Viceversa, quest'intersezione è appunto, in generale, una superficie di ottavo ordine a sezioni ellittiche, e di prima specie se la M_3^6 ha una direttrice rettilinea (*). E qui devono ritenersi a priori come possibili tre casi diversi:

a) Dei quattro piani, due si incontrano e gli altri due pure; ma uno qualunque fra i due primi e uno di questi ultimi non si incontrano.

b) Tre dei quattro piani si incontrano a due a due, ma nessuno di essi incontra il quarto.

c) I quattro piani si incontrano tutti a due a due (**).

Si può riconoscere senza difficoltà che la superficie F^8 avrà in questi tre casi rispettivamente 2, 3 e 6 punti doppi e rappresenterà rispettivamente un sistema (4, 4), un sistema (3, 5) o (5, 3), e un sistema (2, 6) o (6, 2). Esamineremo ora separatamente ciascuno di questi casi (***) .

35. Scelti ad arbitrio nella M_3^6 di S_5 due piani che si incontrino e due altri che pure si incontrino, ma non taglino invece i due primi (cosa che, nel caso della sestica doppia irriduttibile e della M_3^6 non conica, sarà sempre possibile, e in infiniti modi) esiste sempre una quadrica passante per questi quattro piani, ma che si spezza nei due S_4 da essi determinati. Perchè questi stessi piani stiano sopra una quadrica non degenera (e quindi su tutto un fascio di quadriche) (****) è necessario e sufficiente che dall' S_3 comune a

(*) Si vede facilmente che questa direttrice non incontrerà in generale la curva doppia della varietà M_3^6 .

(**) Questi tre casi corrispondono ai tre modi diversi in cui quei quattro piani di M_3^6 possono ripartirsi fra i due sistemi di piani della quadrica Q .

(***) Qui, a differenza di quanto si è visto finora, si presenta la questione della possibilità di questi diversi casi; della possibilità cioè di trovare nella M_3^6 quattro piani disposti nel modo indicato di sopra, e di condurre poi per questi stessi piani una quadrica non degenera (cosa che invece finora, trattandosi di soli due o tre piani, si è sempre potuta ottenere, in modo ovvio, e in infiniti modi). Di questa possibilità dovremo dunque occuparci nei nostri ragionamenti.

(****) Fascio che avrà la caratteristica [(1111) (11)] contenendo, oltre la coppia di S_4 testè accennata, un (solo) cono di seconda specie, il cui asse sarebbe la congiungente delle intersezioni delle due coppie di piani.

quei due S_4 essi vengano segati in rette che siano generatrici di una medesima quadrica (*). E questo, senza ch'io mi dilunghi a mostrarlo, si può ottenerlo facilmente, scegliendo in modo opportuno il (imponendo cioè alcune condizioni, tutte compatibili, al) piano da cui si proietta la M_3^6 normale; la F^8 di prima specie, proiettata in S_5 , potrà quindi rappresentare effettivamente un sistema di rette (4, 4).

Abbiamo già detto che la superficie F^8 di S_5 avrà in questo caso due punti doppi; questi saranno anche tali rispettivamente per altrettante sue cubiche piane (razionali), e i piani di queste due curve conterranno ancora ciascuno altri due punti della superficie (**). Gli stessi due piani avranno certo un punto a comune, quello in cui s'incontrano le loro due curve; ma è facile accorgersi ch'essi dovranno segarsi secondo un'intera retta, sicchè i due punti di F^8 contenuti in uno qualunque dei due piani e fuori della relativa cubica staranno sempre sull'altra cubica (saranno cioè le rimanenti due intersezioni di quest'ultima colla retta comune ai due piani). Questi stessi quattro punti staranno anche rispettivamente sulle quattro coniche di F^8 i cui piani appartengono alla quadrica Q (***). Dunque:

Esiste una congruenza (4, 4) di genere uno contenente un cono cubico e un involuppo piano di terza classe (entrambi razionali), due coni e due involuppi quadrici, e un fascio di raggi. Il primo cono e il primo involuppo hanno rispettivamente due rette doppie, che sono tali anche per la congruenza; il vertice dell'uno sta nel piano dell'altro, e il fascio determinato da questi due elementi contiene cinque rette della congruenza, una delle quali è comune appunto a quel cono e a quell'involuppo cubico, mentre delle altre quattro due appartengono al solo cono (e rispettivamente ai due coni quadrici) e due al solo involuppo (e rispettivamente pure ai due involuppi quadrici). Il piano dell'involuppo cubico contiene dunque i vertici dei tre coni, e il vertice del cono cubico è a sua volta intersezione dei piani dei tre involuppi; il fascio

(*) Che sia necessario, è chiaro; che sia sufficiente, lo si vede anche subito, osservando che per quei quattro piani passano in tal caso le due quadriche degeneri di cui alla nota prec.^o, e quindi anche infinite altre quadriche, nessuna delle quali però può essere degenera.

(**) Ciò perchè un S_3 condotto per uno di questi piani deve segare F^8 ancora in tre punti fuori della cubica in esso piano contenuta, mentre d'altra parte uno solo di quei punti può essere esterno a questo stesso piano (se ve ne fosse più d'uno, la congruenza non sarebbe più (4, 4)).

(***) E ciascuno di questi piani segnerà la superficie F^8 in due punti ancora fuori della propria conica (e posti sempre sull'una o sull'altra delle due cubiche piane).

di rette della congruenza ha poi il suo centro sulla retta d'intersezione dei piani dei due involuppi quadrici, e il suo piano passa per i vertici dei due coni quadrici. — La congruenza contiene una serie ∞^1 di rigate quadriche, della quale fanno parte i due coni e i due involuppi (e per la quale sono punti basi il centro del fascio e il vertice del cono cubico, e piani tangenti fissi quello del fascio stesso e quello dell'involuppo cubico); queste quadriche involuppano la superficie focale della congruenza, che è di ottavo ordine e ottava classe. Le direttrici di queste stesse quadriche formano una congruenza (4, 4) identica alla precedente e colla stessa superficie focale e gli stessi punti e piani singolari, solo che il centro e il piano del fascio di rette di ciascuna congruenza sono per l'altra rispettivamente vertice del cono cubico e sostegno dell'involuppo di terza classe; ecc. ecc.

36. Nel caso *b*), supposto possibile, la superficie F^8 dovrebbe avere tre punti doppi, e contenere perciò tre cubiche piane (razionali) passanti doppiamente ciascuna per uno di questi punti; nel piano di ciascuna cubica dovrebbe poi stare ancora un altro punto di quella superficie. Se dunque la superficie normale F^8 può proiettarsi in S_5 in modo da rappresentare un sistema di rette (3, 5) o (5, 3), la proiezione dovrà certamente farsi da un piano incidente secondo rette agli S_4 determinati da tre sue cubiche e rispettivamente da altrettanti suoi punti esterni a queste. Di piani così fatti ne esistono, e infiniti; però, volendo noi che questo piano non incontri la superficie F^8 , bisognerà che quei tre punti stiano a due a due, quindi tutti tre, sopra una stessa conica di quella superficie. Viceversa, proiettando la F^8 normale di prima specie da un piano così scelto (*), si ottiene una F^8 di S_5 con tre punti doppi, che sono tali rispettivamente anche per altrettante sue cubiche piane, ecc. ecc. e questa superficie si vede subito (ricorrendo per es. all'enumerazione delle costanti) che sta certo in una quadrica di S_5 (e non degenera). Da ciò si trae senz'altro che:

Esiste una congruenza (3, 5) ad es. di genere uno, con 7 punti singolari, che sono rispettivamente vertici di tre coni cubici razionali e di tre coni quadrici e centro di un fascio di raggi, e 2 piani singolari, quello dello stesso fascio e un altro che è sostegno di un involuppo di seconda classe. Dal vertice di uno qualunque dei sei coni esce ancora un raggio della congruenza che non appartiene allo stesso cono; e il piano dell'involuppo contiene ancora,

(*) Piano che si appoggerà alle tre rette secondo cui quegli S_4 si segano a due a due. E questa condizione sarà, in generale, anche sufficiente.

fuori di questo, *tre* raggi del sistema. La congruenza ha poi tre rette doppie, che sono tali rispettivamente per i suoi tre coni cubici; contiene una serie razionale ∞^1 di rigate quadriche della quale fanno parte i suoi tre coni e l'involuppo quadrico; ecc. ecc.

Questa congruenza (3, 5) fu ottenuta appunto dai sig.¹ SEGRE e CASTELNUOVO (insieme ad altra che ritroveremo noi pure fra poco) come proiezione di una varietà cubica di S_4 con 7 punti doppi. Sono di questa natura le due congruenze indicate dal sig. CASTELNUOVO colle lettere **A** e **B**.

37. Due parole infine sul caso *c*). In questo caso (sempre supposto possibile) l'intersezione residua della quadrica Q colla varietà M_3^6 dovrebbe essere costituita da un gruppo di quattro piani incontrantisi tutti a due a due (in sei punti). Da ciò, dato che la M_3^6 ha qui una direttrice rettilinea, si trae facilmente che quei quattro piani devono essere segati in rette da uno stesso quinto piano, e che perciò le loro sei intersezioni devono stare anche tutte in quest'ultimo piano (ed essere vertici di un quadrilatero completo). Segue ancora da questo che la sestica doppia di M_3^6 dovrà stare in uno spazio S_3 (incontrante la M_3^6 in una rigata razionale del quinto ordine) e che i 6 punti doppi di F^8 dovranno esser dati dalle intersezioni di questa stessa sestica con un certo piano del suo S_3 . E questo ci porta ancora a concludere che la F^8 normale si sarà dovuta proiettare da un piano contenuto nell' S_5 di una sua quintica razionale. — Viceversa, da un piano π così scelto questa superficie normale si proietta (in generale) in una F^8 di S_5 che contiene una quintica piana razionale, ed ha per punti doppi gli stessi (sei) punti doppi di questa; ciascuno di questi punti è poi ancora doppio per una cubica piana contenuta nella superficie. Ogni quadrica passante per quest'ultima contiene i piani di quelle 7 curve, e d'altra parte per i piani ad es. della quintica e di quattro fra le sei cubiche passa sempre una quadrica (e non degenerare, se il piano π è stato scelto, dentro l' S_5 della quintica, in modo generale); quadrica che contiene tutta la superficie F^8 (e quindi anche i piani delle rimanenti due cubiche). Ritroviamo così la notissima congruenza $(2, 6)_2$ con 12 punti e un piano singolare, e con 6 raggi doppi passanti per uno stesso punto (vertice di un cono quintico razionale), ecc. ecc. (*) (**).

(*) La stessa superficie potrebbe naturalmente rappresentare anche la congruenza duale $(6, 2)_2$ con sei raggi doppi contenuti in un medesimo piano.

(**) Lo STURM nel suo ultimo lavoro già più volte cit. indica invece questa congruenza col simbolo $(2, 6)_1$ e riserva la notazione $(2, 6)_2$ per l'altra congruenza di se-

38. Veniamo ora alle congruenze rappresentate da superficie F^8 di seconda specie. — Queste superficie contengono, com'è noto, due serie razionali ∞^1 di coniche, per ciascuna delle quali i varii piani formano una M_3^6 ; noi potremmo quindi ripetere per esse quanto già si è detto al n.° 34 per le F^8 di prima specie, e applicare a uno qualunque dei loro due sistemi di coniche quanto lì si è veduto per l'unico sistema che allora si aveva a considerare. Anche qui s'incontreranno gli stessi tre casi *a*), *b*), *c*); ma per le due M_3^6 su cui sta una data F^8 dovrà sempre presentarsi lo stesso fra questi (*).

Quanto al caso *a*), ci limiteremo a dire che si può ripetere ancora, con poche modificazioni, lo stesso ragionamento già accennato al n.° 35, e dedurne in conseguenza che anche questa seconda superficie F^8 può rappresentare un sistema di rette (4, 4). La quadrica Q conterrà naturalmente quattro piani di ciascuna delle due M_3^6 ; e ciascuno di questi otto piani segherà F in una conica e in due punti ancora fuori di questa. Da ciò si trae facilmente che le due coppie di piani incidenti dell'una M_3^6 contenute nella quadrica Q dovranno tagliare in rette rispettivamente le due coppie analoghe dell'altra; o, più esattamente, due piani dell'una varietà (sempre fra quei certi quattro) i quali si incontrino segheranno bensì in un punto unico due piani pure incidenti dell'altra, ma dovranno incontrare in rette i rimanenti due. Nessun altro piano di Q può contenere tutta una curva della superficie F^8 perchè le curve di questa di ordine immediatamente superiore alle coniche sono di quarto ordine (e razionali) e non possono perciò proiettarsi qui in curve piane (avendo la superficie soli due punti doppi). Dunque:

Esiste un'altra congruenza (4, 4) di genere uno con quattro punti e quattro piani singolari, ma nella quale questi punti e piani sono tutti vertici o rispettivamente sostegni di coni o involuppi quadrici di rette; a ciascun

condo ordine e sesta classe con sola superficie focale (quella che è contenuta in un complesso tetraedrale). Prescindendo anche dalle ragioni che hanno indotto l'insigne scienziato a proporre questo cambiamento, è bene osservare che in questo modo le congruenze $(2, 6)_1$ e $(2, 6)_2$ verrebbero proprio a corrispondere alle due superficie (di ottavo ordine, a sezioni ellittiche) di prima e seconda specie (anzichè di seconda e prima; cfr. DEL PEZZO; loc. cit.); corrispondenza questa che è desiderabile avere, data specialmente l'intima connessione, l'assoluta identità anzi che esiste, almeno da un certo punto di vista, fra lo studio delle congruenze di secondo ordine con sola superficie focale e quello delle superficie non rigate e razionali a sezioni ellittiche.

(*) Una proprietà notevole e comune a tutte le congruenze rappresentate da superficie di ottavo ordine di seconda specie è quella di contenere soltanto rigate (algebriche) di ordine pari.

punto o piano appartengono ancora due altri raggi della congruenza. Quest'ultima ha poi due rette doppie, che sono tali rispettivamente per due serie razionali ∞^1 di rigate quartiche (ciascuna delle quali ha a sua volta due direttrici rettilinee doppie), e contiene anche due serie pure razionali e ∞^1 di rigate quadriche, di ciascuna delle quali fanno parte due coni e due involuppi (mentre i vertici degli altri due coni e i piani degli altri due involuppi ne sono rispettivamente punti basi e piani tangenti fissi); i vertici dei coni di una serie qualunque stanno sull'intersezione dei piani dei due involuppi dell'altra. — Le direttrici delle rigate di una serie qualsiasi formano una seconda congruenza (4, 4) identica alla precedente e cogli stessi punti e piani singolari (anzi cogli stessi coni e involuppi); le due congruenze hanno pure a comune la superficie focale, che è di ottavo ordine e di ottava classe.

39. Nel caso *b*), supposto possibile, la quadrica Q dovrà contenere di ciascuna delle due M_3^6 passanti per F^8 (cfr. anche n.° 36) un piano il quale seghi questa superficie in una conica e in *tre* punti ancora fuori di questa. Supponiamo dunque di aver proiettata la superficie (normale) F^8 e le relative due M_3^6 in uno spazio S_5 , per modo che un piano di una di queste due varietà contenga di F , oltre la relativa conica, tre altri punti (*). Questo piano sarà segato in rette da tre piani determinati dell'altra M_3^6 ; e per questi quattro piani e per un altro qualunque di questa seconda M_3^6 noi potremo sempre condurre una quadrica (in generale non degenera) che segnerà la stessa M_3^6 in una superficie di ottavo ordine a sezioni ellittiche e priva di rette, quindi di seconda specie. Questa superficie rappresenterà appunto un sistema di rette (3, 5) o (5, 3).

Sulla stessa superficie vi saranno due coniche (di sistema opposto) i cui piani conteranno ciascuno *tre* altri punti di essa. L' S_4 di questi due piani dovrà segare ancora F^8 in una quartica passante per quei sei punti; quartica che (come si vede facilmente) non potrà spezzarsi in due coniche e sarà quindi certo una curva piana, con tre punti doppi (che saranno tali anche per la superficie). Il piano di questa quartica conterrà ancora (fuori della curva) il punto comune a quelle due coniche, e segnerà in rette i piani di queste. Concludiamo perciò:

Esiste un'altra congruenza (3, 5) di genere uno e con tre rette doppie,

(*) E per questo basterà che il piano da cui si è fatta la proiezione stia in un S_5 contenente una conica di F^8 stessa e tre altri punti di questa superficie (che supponiamo scelti in modo generale).

in questo caso concorrenti. Anch'essa ha 7 punti e 2 piani singolari; questi ultimi contengono rispettivamente due involuppi quadrici di rette della congruenza; i 7 punti sono vertici rispettivamente di un cono quartico razionale (le cui generatrici doppie sono le stesse tre rette doppie della congruenza) e di sei cono quadrici. Da ciascuno di questi punti singolari esce ancora, fuori del relativo cono, un raggio della congruenza; in ciascuno dei due piani singolari ne stanno, fuori del relativo involuppo, altri tre. La congruenza contiene due serie razionali ∞^1 di rigate quadriche, ecc. ecc.

Anche questa congruenza fu ottenuta dai sig.¹ SEGRE e CASTELNUOVO come proiezione di una varietà cubica di S_4 con 7 punti doppi (*). La superficie focale di questa congruenza (di sesto ordine e decima classe) è tale anche per due sistemi (3, 5) della prima specie (n.° 36) costituiti rispettivamente dalle direttrici delle due serie ∞^1 di rigate quadriche poc'anzi nominate. Il sig. CASTELNUOVO osserva ancora che questa seconda congruenza (3, 5) è *Cremoniana*, e stabilisce fra i piani dei due involuppi quadrici una corrispondenza birazionale del quinto ordine, in cui il vertice del cono quartico è punto fondamentale triplo comune ai due piani, i vertici dei cono quadrici sono punti fondamentali doppi, e i tre punti fondamentali semplici sono in ciascun piano infinitamente vicini al punto triplo.

40. Nel caso *c*) infine sappiamo già che la superficie F^8 dovrebbe avere sei punti doppi. Supposto pertanto che questa superficie possa effettivamente rappresentare una congruenza (2, 6) o (6, 2), si consideri la quadrica (passante per essa) che rappresenterebbe l'insieme di tutte le rette di S_3 , e con questa il relativo S_4 tangente in uno di quei sei punti (P). Questo spazio segherà quella quadrica in un cono che noi potremo considerare ad es. come luogo di una serie ∞^1 di piani appartenenti al sistema di quelli che segano F in soli due punti; ed essendo il vertice P di questo cono già un punto doppio di F , è chiaro che uno qualunque di quei piani o non incontrerà più F medesima, o avrà comuni con essa infiniti punti. Ma quell' S_4 deve segare F in una curva, complessivamente, di ottavo ordine (contenuta in questo stesso cono); questa curva dovrà dunque spezzarsi in due o più parti, contenute rispettivamente in altrettanti di quei piani; e si vede facilmente che dovrà sempre spezzarsi in

(*) Ora resta stabilito che le congruenze (3, 5) di genere uno rappresentabili sul piano possono presentare due e due soli casi diversi; quei casi appunto che furono ottenuti e studiati dagli stessi sig.¹ SEGRE e CASTELNUOVO.

due quartiche piane, razionali e irriducibili, con tre punti doppi ciascuna (*). Uno di questi punti doppi dovrà cadere, tanto per l'una quanto per l'altra, in P stesso (**); gli altri saranno poi anch'essi punti doppi di F , sicchè i piani delle due quartiche dovranno congiungere lo stesso P rispettivamente a due altre coppie di tali punti, e ciascuna quartica dovrà passare doppiamente per i tre punti doppi di F che stanno nel suo piano. Da ciò si trae facilmente che la superficie F^8 di S_5 conterrà 4 quartiche piane razionali, i cui piani s'incontreranno a due a due nei suoi sei punti doppi; e che ogni quartica dovrà passare doppiamente per quei tre fra questi punti che stanno nel suo piano. Per avere dunque una F^8 (priva di rette) che rappresenti una congruenza (2, 6) o (6, 2), data la cosa come possibile, bisognerà certo proiettare la F^8 normale di seconda specie da un piano incidente alle 6 corde in cui si segano a due a due gli S_4 di 4 sue quartiche (piano che sarebbe appunto l'intersezione degli S_7 determinati da questi stessi S_4 a due a due).

Viceversa, così facendo, si trova precisamente una F^8 di S_5 con quattro quartiche piane e sei punti doppi nella posizione accennata di sopra. I piani di queste quattro curve stanno su ogni quadrica passante per F^8 , e d'altra parte essi, cogli altri quattro che li segano a tre a tre in rette, costituiscono la varietà base di un sistema lineare ∞^2 di quadriche, nel quale (come si vede subito) vi è tutto un fascio (di caratteristica [(11)(11)(11)]) passante per F . Dunque:

Esiste un'altra congruenza (2, 6) di genere uno, con sei rette doppie e 12 punti singolari, che sono rispettivamente vertici di quattro coni quartici (razionali) e di otto coni quadrici. Questa congruenza è contenuta in un complesso tetraedrale, il cui tetraedro fondamentale ha per vertici quelli stessi dei coni quartici e per spigoli le sei rette doppie; essa non contiene però fasci di raggi (e non ha quindi piani singolari); ecc. ecc.

Ritroviamo dunque la nota congruenza (2, 6), studiata dai sig.ⁱ KUMMER, REYE, STAHL, BERTINI, LORIA, e ultimamente ancora dal sig. STURM (cfr. anche la nota ultima al n.° 37).

(*) Un ragionamento analogo avrebbe potuto servirci anche per giungere alla prima congruenza (2, 6) (cfr. n.° 37). Le considerazioni qui svolte sono, in parte almeno, la traduzione di quelle già applicate dal sig. KUMMER (loc. cit.) ai sistemi di rette di secondo ordine.

(**) Ciò perchè quelle due curve dovrebbero tagliarsi in due punti, e d'altra parte il punto P è il solo che sia comune ai loro piani.

I risultati principali che si sono ottenuti in questo lavoro potrebbero dunque riassumersi così:

Il solo sistema (3, 3) (*) contenuto in un complesso lineare e non avente infinite rette doppie è di genere *quattro* e risulta appunto dall'intersezione di un complesso lineare con un complesso cubico. Le altre congruenze (3, 3) non aventi infinite rette doppie sono di genere ≤ 2 ; la più generale fra esse è quella di ROCCELLA (di genere *due*) con 12 punti e 12 piani singolari; ma questi punti e piani possono portarsi a 13, 14 o anche 15; nel secondo caso si ha la congruenza *Cremoniana* di HIRST; nel terzo caso si ha una particolare congruenza *Cremoniana* già considerata anche dal ROCCELLA.

I sistemi di rette $(m, 7 - m)$ non contenuti in complessi lineari speciali sono di genere ≤ 3 . Quelli di genere *tre* sono del tipo (3, 4) o (4, 3) e si possono sempre ottenere come intersezioni di due complessi quadratici (aventi una stella o un piano di rette a comune). Quelli di genere *due* sono pure di terzo ordine o terza classe, e in questa seconda ipotesi può anche presentarsi il caso di una congruenza [(4, 3)] *Cremoniana*.

Prescindendo dal sistema (4, 4) di genere *nove* che è intersezione generale di un complesso lineare con un complesso di quarto grado, nessun'altra congruenza $(m, 8 - m)$ non avente infinite rette doppie può stare in un complesso lineare non speciale. E di congruenze $(m, 8 - m)$ non contenute affatto in complessi lineari ne esistono solo per i generi non superiori a *cinque*.

Unica congruenza $(m, 8 - m)$ di genere *cinque* è quella (4, 4), intersezione generale di due complessi quadratici.

Esistono congruenze (4, 4) e anche (3, 5) o (5, 3) di genere *quattro*; le prime sono contenute in complessi quadratici di caratteristica, nel caso più generale, [(11)(11) 11]; le altre in complessi tetraedrali (o in casi particolari di questi). Queste ultime sono sempre rappresentabili sul piano, e appaiono (salvo errore) in particolar modo notevoli e interessanti.

Di congruenze $(m, 8 - m)$ di genere $p = 3$ ne esistono pure, tanto per $m = 4$, quanto per $m = 3$ o 5. Nel primo caso la congruenza può anche essere iperellittica.

Gli stessi due casi possono presentarsi per $p = 2$; e se $m = 5$ la con-

(*) Si tratta sempre, ben inteso, di congruenze con sola superficie focale.

gruenza $[(5, 3)]$ può anche essere *Cremoniana*. Si ha così la congruenza determinata da due piani riferiti in una corrispondenza birazionale del terzo ordine, e messi nella posizione più generale.

Infine per $p = 1$ abbiamo ritrovate le note congruenze di secondo ordine (o di seconda classe) con sola superficie focale, e quelle di terzo ordine che i sig.ⁱ SEGRE e CASTELNUOVO hanno ottenute come proiezioni di opportune varietà cubiche di S_4 . Abbiamo anche osservato che queste ultime sono (con qualche restrizione) le più generali fra le congruenze $(3, n)$ di genere *uno*.

Per $m + n = 8$ abbiamo anche trovate due diverse congruenze $(4, 4)$, sempre di genere *uno*, con *quattro* punti e *quattro* piani singolari ciascuna.

Torino, febbraio 1893.

Sulle serie di potenze.

(Estratto d'una lettera al prof. S. Pincherle.)

(Di G. VIVANTI, a Mantova.)

1. Come Ella nota giustamente, tutte le serie da me costruite hanno raggio *generalmente* nullo. L'esempio che segue, benchè molto più generale, ha coi precedenti questo di comune, che la discontinuità del raggio di convergenza ha luogo precisamente in punti in cui questo diviene nullo. Esso consiste in una serie di potenze di z , i cui coefficienti sono funzioni analitiche di u esistenti soltanto in un certo campo (nel cerchio di raggio 1 col centro nell'origine), e che ha la proprietà che il suo raggio di convergenza è ≥ 1 per tutti i valori di u contenuti in quel cerchio, il contorno incluso, mentre per ogni altro valore di u deve ritenersi nullo, cessando d'esistere i coefficienti della serie.

È facile dimostrare (veggasi una mia breve Nota nella *Rivista di Matematica*, giugno-luglio 1893), che può costruirsi in infiniti modi una serie di potenze $\sum_{i=0}^{\infty} a_i u^i$ dotata delle seguenti proprietà:

a) Essa converge in tutto il cerchio di raggio 1, il contorno incluso.

b) Il suo valore assoluto in quel cerchio, sempre compreso il contorno, ha un limite superiore finito L .

c) La funzione analitica, di cui essa è un elemento, ha sulla circonferenza di raggio 1 un insieme condensato di punti singolari, di guisa che tutti i punti della circonferenza sono punti singolari della funzione, e questa non è *continuabile* esteriormente.

Costruiamo un'infinità di serie di tal natura:

$$f_h(u) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{hi} u^i, \quad (h = 0, 1, \dots)$$

e sieno L_h i limiti superiori corrispondenti. La serie:

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{f_h(u)}{L_h} z^h,$$

esiste pei valori di u tali che $|u| \leq 1$, ed ha per tutti questi valori raggi di convergenza non inferiori ad 1.

2. Alla Sua domanda, se sia possibile costruire serie di potenze aventi raggio di convergenza non generalmente nullo e discontinuo per certi valori di u , deve risponderci affermativamente. Lo prova il seguente esempio.

Sieno:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i(u) z^i, \quad \sum_{i=0}^{\infty} b_i(u) z^i$$

due serie di potenze, e sieno i loro raggi di convergenza:

$$R = f(u), \quad R' = g(u).$$

Adottando il metodo grafico da Lei proposto, le proiezioni sul piano u delle linee d'intersezione delle superficie rappresentative di R , R' divideranno questo piano in regioni, in alcune delle quali (reg. A) è $f(u) < g(u)$, mentre nelle altre (reg. B) è $f(u) > g(u)$. Sia ora $\varphi(u)$ una funzione intera, soggetta alla sola condizione che alcuni dei suoi posti-zero c_i , in numero finito od infinito (per es. c_{h_1}, c_{h_2}, \dots), cadano nell'interno delle regioni B . Allora la serie:

$$\sum_{i=0}^{\infty} [a_i(u) + \varphi(u) b_i(u)] z^i$$

avrà per raggio di convergenza $f(u)$ nelle regioni A e nei punti c_{h_1}, c_{h_2}, \dots , $g(u)$ in ogni altro punto. Adunque nei punti c_{h_1}, c_{h_2}, \dots avrà luogo una discontinuità.

Un caso particolare semplicissimo è quello in cui le a_i, b_i si riducono a costanti ed è $R > R'$. Allora nei punti c_1, c_2, \dots il raggio di convergenza è R , in ogni altro punto esso è R' .

3. Finalmente Le farò notare che possono effettivamente costruirsi serie di potenze i cui coefficienti sieno funzioni analitiche di u e il cui raggio di convergenza sia indipendente da u ossia costante. Per es. la serie:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{\nu}} z^i$$

ha raggio di convergenza 1 per tutti i valori di u .

Mantova, 21 giugno 1893.

Sulle evolute delle superfici i cui raggi principali di curvatura son legati dalla relazione

$$r_1 - r_2 = 2 T_0 \operatorname{sen} \left(\frac{r_1 + r_2}{2 T_0} \right) \quad (T_0 = \text{cost.}^e)$$

e sulle loro flessioni.

(Di BENEDETTO CALÒ, a Pisa.)

INTRODUZIONE.

Resulta dai teoremi generali sull'esistenza degli integrali dell'equazioni a derivate parziali del 2.° ordine che: *Assegnata la forma che deve assumere una linea qualunque di una data superficie, supposta flessibile ed inestendibile, dopo una flessione della superficie stessa, la superficie deformata resta pienamente determinata, purchè per questa la linea assegnata non debba risultare linea assintotica* (*).

La forma che si assegna per la linea deformata C' non è interamente arbitraria, perchè, supposta possibile la deformazione richiesta della superficie data S nella S' per modo che C' sia la linea deformata di una certa linea C di S , per l'applicabilità di S su S' è stabilita fra C , C' una corrispondenza di punto a punto tale che in punti corrispondenti si hanno valori uguali dell'arco e di più la curvatura assoluta di C' è in ogni suo punto maggiore o eguale alla curvatura geodetica di C nel punto corrispondente computata in valore assoluto.

Inversamente, se è possibile stabilire fra C , C' una corrispondenza tale che queste condizioni restino soddisfatte, si può eseguire la deformazione ri-

(*) DARBOUX: *Théorie des surfaces*. Parte III, libro VII, cap. V, 1890. — WEINGARTEN: *Ueber die Deformationen einer biegsamen unausdehnbaren Fläche* (Crelle, tom. 100). — BIANCHI L.: *Lezioni di geometria differenziale* tenute nella R. Università di Pisa negli anni Accad. 1891-1892, 1892-1893.

chiesta solo in due modi distinti; questo ha luogo perchè due sono i sistemi di normali alla C' ciascuno dei quali si può assumere come sistema delle normali ad una superficie deformata di S lungo C' ; ed effettivamente ciascuna delle due superfici così ottenute contiene C' come linea deformata di C (*).

Come caso particolare del teorema enunciato si ha il noto teorema di JELLET: *Non si può deformare per flessione continua una qualunque superficie volendo che tutti i punti di una sua linea arbitraria, purchè non assintotica, rimangano fissi.*

Trattandosi di una superficie a curvatura negativa, resta a considerare il caso che per semplice flessione di S si voglia ridurre una linea C data su S a linea assintotica per la superficie deformata S' , è chiaro che da questa condizione la forma della linea deformata C' resta pienamente determinata, poichè se $\frac{1}{\rho}$, $\frac{1}{T}$ sono le due curvature di C' in un suo punto qualunque e se $\frac{1}{\rho g}$, K sono rispettivamente la curvatura geodetica di C e la curvatura della superficie S nel punto corrispondente, dovremo avere:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho g}, \quad \frac{1}{T^2} = -K;$$

il problema proposto presenta indeterminazione in quanto gli sviluppi in serie che danno l'integrale dell'equazione dell'applicabilità e da cui dovrebbe esser definita la superficie deformata, sono in parte arbitrarii; quindi, ammettendo di poter dare alla parte arbitraria di questi sviluppi infinite determinazioni per modo che essi risultino convergenti, varrà il teorema: *È possibile in infiniti modi deformare per semplice flessione una superficie a curvatura negativa in guisa che una sua linea qualunque si riduca assintotica per la superficie deformata. E come caso particolare: È possibile in infiniti modi flettere una superficie a curvatura negativa in guisa che una sua linea assintotica rimanga rigida durante la flessione (**).*

Verificare per una classe speciale di superfici a curvatura negativa fra loro applicabili tutti i teoremi sopra enunciati e dare le formole che risolvono i problemi di deformazione corrispondenti per questa classe di superfici, è lo scopo del presente scritto. Una tale verifica è stata fatta già dal RAZZABONI (***) per la classe delle evolute delle superfici ad area minima, evolute che sono

(*) Vedi BIANCHI, loc. cit.

(**) Vedi DARBOUX, loc. cit. — WEINGARTEN, loc. cit.

(***) RAZZABONI A.: *Sulle flessioni dell'evoluta del catenoide* (Giorn. di Battaglini, 1890).

tutte applicabili sull'evoluta del catenoide; ma queste superfici, essendo a curvatura positiva, non danno modo di trattare i casi di deformazione concernenti le linee assintotiche.

Allo studio di questi casi si prestano l'evolte delle superfici i cui raggi principali di curvatura son legati dalla relazione

$$r_1 - r_2 = 2 T_0 \operatorname{sen} \left(\frac{r_1 + r_2}{2 T_0} \right) \quad (T_0 = \text{cost.}^e);$$

queste evolte sono tutte applicabili l'una sull'altra e sopra una stessa superficie di rotazione a curvatura negativa (*); tutti i teoremi sopra enunciati si verificano per queste superfici assai semplicemente e tutti i problemi di deformazione relativi si riducono alle quadrature.

§ 1.

Indicheremo per brevità con W le superfici che soddisfanno alla condizione

$$r_1 - r_2 = 2 T_0 \operatorname{sen} \left(\frac{r_1 + r_2}{2 T_0} \right), \quad (1)$$

e con S la superficie di rotazione su cui sono applicabili tutte le loro evolte; e prenderemo come punto di partenza la costruzione data da DARBOUX (**), colla quale si posson generare tutte le superficie applicabili su S e che consiste in ciò: Considerata una superficie di traslazione S_0 , che abbia per curve di traslazione due curve C_0, C'_0 a torsione costante uguale e di segno contrario rispettivamente $\frac{1}{T_0}, -\frac{1}{T_0}$, e per ogni suo punto tirata la retta intersezione dei due piani osculatori delle due curve di traslazione che passano per il punto stesso, si ottiene una congruenza Σ di rette normali ad una stessa superficie W , i cui raggi principali di curvatura soddisfanno alla relazione (1); quindi nelle falde focali della congruenza Σ abbiamo delle superfici applicabili su S ; inversamente, ogni superficie applicabile su S si può ottenere collo stesso processo, purchè siano scelte convenientemente le due curve di traslazione di S_0 , delle quali rimane arbitraria la flessione e la posizione reciproca nello spazio.

(*) Vedi BIANCHI L., loc. cit.

(**) Op. cit. Parte III, libro VII, cap. IX; vedi anche BIANCHI L., loc. cit.

Annali di Matematica, tomo XXI.

Segue da questo metodo di generazione che, volendo determinare una superficie applicabile su S la quale soddisfi a certe condizioni, basterà determinare due curve a torsione costante uguale e di segno contrario, rispettivamente $\frac{1}{T_0}$, $-\frac{1}{T_0}$, che abbiano inoltre proprietà dipendenti dalle condizioni imposte alla superficie: è seguendo questo principio che si posson risolvere come abbiamo accennato le questioni proposte nell'Introduzione.

§ 2.

Sulle due falde focali della congruenza Σ costruita nel paragrafo precedente si corrispondono le linee assintotiche e corrispondono al doppio sistema di linee di traslazione di S_0 ; S_0 è inoltre la superficie media di Σ (*). Riferendoci ad un sistema di assi cartesiani ortogonali, indichiamo con x_0^u, y_0^u, z_0^u le coordinate di un punto corrente sulla curva di traslazione C_0 , e con $b_0 \equiv (\cos \lambda_0, \cos \mu_0, \cos \nu_0)$ la sua binormale; siano poi x_0^v, y_0^v, z_0^v ; $b'_0 \equiv (\cos \lambda'_0, \cos \mu'_0, \cos \nu'_0)$ gli elementi analoghi per l'altra curva C'_0 ; sia $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ un punto qualunque di S_0 e $P_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 \equiv (x_2, y_2, z_2)$ rispettivamente i due punti corrispondenti a P_0 sulle due falde focali S_1, S_2 . Per P_0 conduciamo il piano Π_0 normale al raggio r di Σ che passa per P_0 e quindi unisce P_1, P_2 ; Π_0 conterrà le due direzioni b_0, b'_0 (vedi paragrafo precedente); fissato su Π_0 un certo senso come senso positivo degli angoli, indichiamo con σ in grandezza e segno l'angolo, compreso in grandezza fra 0 e π , di cui la direzione b_0 deve ruotare per sovrapporsi a b'_0 ; prenderemo per direzione positiva di r quella che ha i coseni

$$\left. \begin{aligned} l &= \frac{1}{\operatorname{sen} \sigma} \begin{vmatrix} \cos \mu_0 & \cos \nu_0 \\ \cos \mu'_0 & \cos \nu'_0 \end{vmatrix}, & m &= \frac{1}{\operatorname{sen} \sigma} \begin{vmatrix} \cos \nu_0 & \cos \lambda_0 \\ \cos \nu'_0 & \cos \lambda'_0 \end{vmatrix}, \\ n &= \frac{1}{\operatorname{sen} \sigma} \begin{vmatrix} \cos \lambda_0 & \cos \mu_0 \\ \cos \lambda'_0 & \cos \mu'_0 \end{vmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

I due punti P_1, P_2 si ottengono riportando a partire da P_0 sulla direzione r rispettivamente e sull'opposta un segmento eguale in grandezza e

(*) BIANCHI, loc. cit.

segno a $T_0 \text{sen } \sigma$, onde l'equazioni delle due falde S_1, S_2 sono rispettivamente

$$\left. \begin{aligned} x_1 = x_0 + T_0 \begin{vmatrix} \cos \mu_0 & \cos \nu_0 \\ \cos \mu'_0 & \cos \nu'_0 \end{vmatrix}, & \quad y_1 = y_0 + T_0 \begin{vmatrix} \cos \nu_0 & \cos \lambda_0 \\ \cos \nu'_0 & \cos \lambda'_0 \end{vmatrix}, \\ z_1 = z_0 + T_0 \begin{vmatrix} \cos \lambda_0 & \cos \mu_0 \\ \cos \lambda'_0 & \cos \mu'_0 \end{vmatrix}, & \end{aligned} \right\} (2)$$

$$\left. \begin{aligned} x_2 = x_0 - T_0 \begin{vmatrix} \cos \mu_0 & \cos \nu_0 \\ \cos \mu'_0 & \cos \nu'_0 \end{vmatrix}, & \quad y_2 = y_0 - T_0 \begin{vmatrix} \cos \nu_0 & \cos \lambda_0 \\ \cos \nu'_0 & \cos \lambda'_0 \end{vmatrix}, \\ z_2 = z_0 - T_0 \begin{vmatrix} \cos \lambda_0 & \cos \mu_0 \\ \cos \lambda'_0 & \cos \mu'_0 \end{vmatrix}. & \end{aligned} \right\} (2')$$

Si verifica inoltre facilmente che le normali ad S_1, S_2 rispettivamente in due punti P_1, P_2 corrispondenti, cioè situati sullo stesso raggio della congruenza Σ , sono parallele alle due bisettrici rispettivamente interna ed esterna dell'angolo formato nel corrispondente punto P_0 di S_0 dalle direzioni positive di b_0, b'_0 .

L'elemento lineare della superficie di rotazione S su cui sono applicabili S_1, S_2 è della forma seguente:

$$ds^2 = 4 T_0^2 \left(\cos^4 \frac{\sigma}{2} d\sigma^2 + \text{sen}^2 \frac{\sigma}{2} d\beta^2 \right); \quad (3)$$

le linee $\sigma = \text{cost.}^\circ$ sono i paralleli e σ è il parametro sopra introdotto; le linee $\beta = \text{cost.}^\circ$ sono i meridiani e β è la longitudine.

La curvatura K di S è data da

$$K = - \frac{1}{16 T_0^2 \cos^4 \frac{\sigma}{2}}; \quad (4)$$

se poi r_1, r_2 sono i raggi principali di curvatura di W computati positivi o negativi secondochè la direzione positiva scelta su r coincide con quella che da W va ai rispettivi centri di curvatura o coll'opposta, avremo (*):

$$r_1 = T_0(\sigma + \text{sen } \sigma), \quad r_2 = T_0(\sigma - \text{sen } \sigma). \quad (5)$$

(*) BIANCHI, loc. cit.

§ 3.

Stabiliamo ora due formole di cui avremo bisogno in seguito.

Consideriamo una superficie qualunque Σ_1 e la sua complementare Σ_2 rispetto ad un sistema qualunque di geodetiche g scelto su Σ_1 ; Σ_1, Σ_2 siano cioè le due falde dell'evoluta di una certa superficie Σ ; indichiamo con r_1, r_2 i due raggi principali di curvatura di Σ computati secondo il solito in grandezza e segno; da Σ_1 si otterrà l'evolvente Σ riportando a partire da ciascun punto di Σ_1 sopra la tangente alla geodetica g in una certa direzione r un segmento eguale in grandezza e segno ad r_1 , mentre Σ_2 si otterrà riportando nella stessa direzione un segmento eguale in grandezza e segno ad $r_1 - r_2$; su Σ_1 le traiettorie ortogonali delle g saranno le $r_1 = \text{cost.}^e$; sul piano tangente a Σ_1 fissiamo come senso positivo delle rotazioni quello percorso dalla direzione positiva h della tangente alla $r_1 = \text{cost.}^e$ per sovrapporsi, attraversando l'angolo retto, alla direzione r ; finalmente sulla normale N a Σ_1 fisseremo una direzione tale che la terna (h, r, N) sia direttamente congruente alla terna degli assi x, y, z . Ciò posto, sia C una linea qualunque di Σ_1 e sia φ l'angolo di cui deve ruotare nel senso positivo sul piano tangente la tangente a C per sovrapporsi alla direzione r . Indicando allora con s l'arco di C contato a partire da un suo punto fisso, si ricava facilmente che lungo la linea C, r_1 sarà una funzione di s che verifica la relazione

$$\frac{dr_1}{ds} + \cos \varphi = 0. \quad (1)$$

Se indichiamo poi con $\frac{1}{\rho}$ la flessione di C e con θ l'angolo di cui deve ruotare positivamente nel piano normale a C la normale principale di C per sovrapporsi alla normale N alla superficie ed esprimiamo analiticamente che in ciascun punto P_1 di C la normale a Σ_1 è perpendicolare alla normale a Σ_2 nel punto corrispondente P_2 , cosa che avviene, come è noto, per tutte le coppie di punti corrispondenti di Σ_1, Σ_2 , avremo l'altra formola

$$(r_1 - r_2) \left(\frac{d\varphi}{ds} + \frac{\text{sen } \theta}{\rho} \right) - \text{sen } \varphi = 0; \quad (2)$$

di più, per il modo come è stato fissato l'angolo θ , si ha per la curvatura geodetica di C , in grandezza e segno,

$$\frac{1}{\rho g} = \frac{\text{sen } \theta}{\rho}.$$

§ 4.

Nel caso della superficie S di cui ora trattiamo, o di una superficie applicabile su S , valgono le formole (5) del § 2, quindi, assumendo per geodetiche g i meridiani (o le linee deformate dei meridiani), le (1), (2) del paragrafo precedente assumono la forma

$$\left. \begin{aligned} T_0(1 + \cos\sigma) \frac{d\sigma}{ds} + \cos\varphi &= 0 \\ 2 T_0 \operatorname{sen}\sigma \left(\frac{d\varphi}{ds} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{\rho} \right) - \operatorname{sen}\varphi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Se la linea C è un'assintotica di S , le formole che varranno lungo di essa saranno

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{T^2} &= \frac{1}{16 T_0^2 \cos^4 \frac{\sigma}{2}}, & T_0(1 + \cos\sigma) \frac{d\sigma}{ds} + \cos\varphi &= 0, \\ 2 T_0 \operatorname{sen}\sigma \left(\frac{d\varphi}{ds} \pm \frac{1}{\rho} \right) - \operatorname{sen}\varphi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Se C è una geodetica di S , si ha $\operatorname{sen}\theta = 0$ e dalle (1) si ricava:

$$\operatorname{sen} \frac{\sigma}{2} \operatorname{sen}\varphi = a \quad (a = \operatorname{cost.}^{\circ} \text{ arbitraria}). \quad (3)$$

Come si osserva facilmente, quest'equazione esprime il teorema ben noto di CLAIRAUT relativo alle geodetiche di una superficie applicabile sopra una superficie di rotazione; infatti $\operatorname{sen} \frac{\sigma}{2}$ è proporzionale al raggio del parallelo di S passante per ciascun punto di C (vedi § 5). Per una geodetica reale dovrà essere $a \leq 1$ in valore assoluto.

§ 5.

Per farci un'idea della forma della superficie di rotazione S , poniamo $\operatorname{sen} \frac{\sigma}{2} = k$, $\beta = 2v$, e trascuriamo il fattore costante $16 T_0^2$ che risulta nell'elemento ds^2 dato dalla formola (3) del § 2; potremo allora scrivere:

$$ds^2 = (1 - k^2) dk^2 + k^2 dv^2,$$

e così ci limiteremo a considerare una superficie simile a quella primitiva.

Questo elemento conviene alle superfici di rotazione che hanno la curva meridiana rappresentata dall'equazioni:

$$\rho = mk, \quad z = \int \sqrt{1 - m^2 - k^2} dk,$$

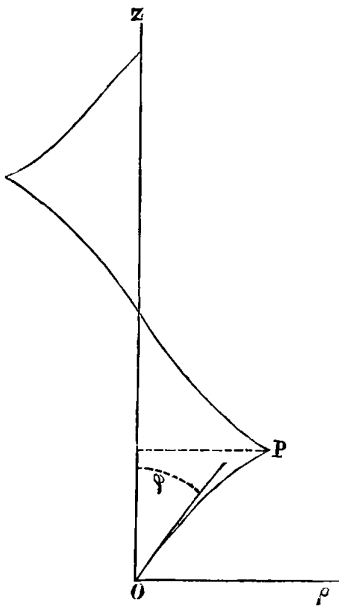
essendo ρ la distanza dall'asse z di rotazione ed m una costante. Per $m = 1$ quest'equazioni danno $z = \frac{i\rho^2}{2}$ ossia una parabola immaginaria; supposto $m \neq 1$ ed eseguita la quadratura col porre:

$$\frac{k}{\sqrt{1 - m^2}} = \operatorname{sen} x,$$

avremo:

$$\rho = m\sqrt{1 - m^2} \cdot \operatorname{sen} x, \quad z = \frac{1 - m^2}{2} (x + \operatorname{sen} x \cdot \cos x). \quad (1)$$

Si deduce da queste equazioni che la curva meridiana passa per l'origine delle coordinate O , e indicando con φ l'angolo che nell'origine la curva fa coll'asse z , abbiamo $m = \operatorname{sen} \varphi$. Essa risulta d'infiniti rami fra loro uguali; onde basterà considerarne uno, quello che si ottiene mentre x varia da 0 a 2π .



La curva partendo dall'origine coll'inclinazione φ sull'asse z rimane concava verso l'asse ρ finchè l'inclinazione sull'asse z non ha raggiunto in P il valore $\frac{\pi}{2}$, ciò che accade per

$$x = \frac{\pi}{2}, \quad \rho = m\sqrt{1 - m^2}, \quad z = \frac{1 - m^2}{4} \pi;$$

crescendo ancora x da $\frac{\pi}{2}$ a π , si genera un altro pezzo della curva simmetrico del primo rispetto alla retta passante per P parallela all'asse ρ ; crescendo ancora x da π a 2π , ρ diviene negativo mentre z cresce rimanendo positiva e la curva, dopo avere attraversato l'asse z , percorre un tratto identico a quello già percorso.

I punti per cui $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$ sono punti di regresso per la curva meridiana, i quali generano paralleli di regresso della superficie di rotazione S .

Per $x = 0, \pi, 2\pi, \dots$ si hanno tanti flessi della curva, a cui corrispondono sulla superficie S altrettanti punti conici. Questa superficie ammette infinite varietà per i varii valori che si possono attribuire ad m , ossia all'angolo finito φ ; facendo tendere m allo zero, la superficie tenderà a confondersi coll'asse z .

§ 6.

Il primo problema di cui dobbiamo occuparci è il seguente: *Determinare, se è possibile, la superficie S' deformata per semplice flessione della superficie S supposta flessibile ed inestendibile, quando sia nota la linea C' deformata di una data linea C di S e si supponga che C' non debba risultare assintotica per S' .*

Prendiamo su C' un certo punto come origine degli archi e stabiliamo fra i punti di C e di C' una corrispondenza biunivoca per modo che si corrispondano due punti quando corrispondono a valori uguali dell'arco. Supponiamo che in ogni punto di C' la sua prima curvatura $\frac{1}{\rho}$ sia superiore o almeno uguale alla curvatura geodetica $\frac{1}{\rho g}$ di C nel punto corrispondente presa in valore assoluto; e supponiamo noto l'angolo φ che in ogni suo punto la linea C fa coi meridiani della S e definito come è stato convenuto nel § 3; sia poi σ quella funzione dell'arco s di C che già abbiamo considerato e che soddisfa alla prima delle relazioni (1) del § 4; varrà inoltre la relazione

$$2T_0 \operatorname{sen} \sigma \left(\frac{d\varphi}{ds} + \frac{1}{\rho g} \right) - \operatorname{sen} \varphi = 0,$$

la quale ci darà subito $\frac{1}{\rho g}$ come funzione nota di s . Ciò posto, potremo determinare per ogni punto di C' un angolo θ che verifichi la relazione

$$\frac{\operatorname{sen} \theta}{\rho} = \frac{1}{\rho g}.$$

Per la corrispondenza stabilita fra i punti di C e C' , l'arco di C' potrà ancora indicarsi con s e le quantità σ, φ, θ si potranno considerare funzioni di s note in tutti i punti di C' .

Conduciamo ora per ciascun punto $P \equiv (x, y, z)$ di C' una direzione N sul piano normale a C' che faccia colla direzione positiva della normale prin-

cipale a C' l'angolo θ ; per ogni punto P di C' conduciamo inoltre il piano Π normale alla direzione N corrispondente; questo piano conterrà la tangente L a C' , e un'altra direzione M perpendicolare alle direzioni L, N e uscente da P , tale che la terna (L, M, N) sia direttamente congruente alla terna degli assi (x, y, z) ; fissiamo come senso positivo degli angoli su Π quello percorso da L per sovrapporsi ad M attraverso l'angolo retto. Per P sul piano Π tracciamo una direzione r tale che sia φ l'angolo di cui deve ruotare nel senso positivo la tangente L a C' per sovrapporsi ad r ; riportiamo ora a partire da P su questa direzione un segmento eguale in grandezza e segno a $T_0 \text{sen } \sigma$; giungeremo ad un punto $P_0 \equiv (x_0^s, y_0^s, z_0^s)$, che col variare di s descriverà una curva C_0^s . Per ogni punto P_0 di C_0^s facciamo passare un piano Π_0 normale ad r ; su Π_0 tracciamo a partire da P_0 la direzione N' parallela ad N ed ugualmente diretta; fissiamo su Π_0 come senso positivo degli angoli quello che per un osservatore disposto sulla direzione negativa di r accade, come accade per un osservatore disposto sulla direzione positiva dell'asse z la rotazione dell'asse x per sovrapporsi all'asse y attraversando l'angolo retto; ciò posto, tracciamo su Π_0 a partire da P_0 due direzioni

$$b_0 \equiv (\cos \lambda_0, \cos \mu_0, \cos \nu_0), \quad b'_0 \equiv (\cos \lambda'_0, \cos \mu'_0, \cos \nu'_0),$$

che abbiano per bisettrice del loro angolo la direzione N' e tali che l'angolo compreso in grandezza fra o e π di cui b_0 deve ruotare per sovrapporsi a b'_0 sia eguale in grandezza e segno a σ ; eseguendo analiticamente le costruzioni indicate, è chiaro che giungeremo ad esprimere i coseni delle due direzioni b_0, b'_0 in funzione delle quantità note σ, θ, φ , ossia in funzione nota dell'arco s di C' ; di più i coseni della direzione r saranno:

$$l = -\frac{1}{\text{sen } \sigma} \begin{vmatrix} \cos \mu_0 & \cos \nu_0 \\ \cos \mu'_0 & \cos \nu'_0 \end{vmatrix}, \quad m = -\frac{1}{\text{sen } \sigma} \begin{vmatrix} \cos \nu_0 & \cos \lambda_0 \\ \cos \nu'_0 & \cos \lambda'_0 \end{vmatrix},$$

$$n = -\frac{1}{\text{sen } \sigma} \begin{vmatrix} \cos \lambda_0 & \cos \mu_0 \\ \cos \lambda'_0 & \cos \mu'_0 \end{vmatrix};$$

ed allora l'equazioni della curva C_0^s saranno:

$$\left. \begin{aligned} x_0^s &= x - T_0 \begin{vmatrix} \cos \mu_0 & \cos \nu_0 \\ \cos \mu'_0 & \cos \nu'_0 \end{vmatrix}, & y_0^s &= y - T_0 \begin{vmatrix} \cos \nu_0 & \cos \lambda_0 \\ \cos \nu'_0 & \cos \lambda'_0 \end{vmatrix}, \\ z_0^s &= z - T_0 \begin{vmatrix} \cos \lambda_0 & \cos \mu_0 \\ \cos \lambda'_0 & \cos \mu'_0 \end{vmatrix}. \end{aligned} \right\} (2)$$

Ora costruiamo due curve C_0, C'_0 a torsione costante uguale e contraria, rispettivamente $\frac{1}{T_0}, -\frac{1}{T_0}$, ed aventi per binormali rispettivamente b_0, b'_0 , direzioni che variano con s ; l'equazioni delle due curve saranno rispettivamente:

$$\left. \begin{aligned} x_0^u &= T_0 \int (\cos \nu_0 \cdot d \cos \mu_0 - \cos \mu_0 \cdot d \cos \nu_0), \\ y_0^u &= T_0 \int (\cos \lambda_0 \cdot d \cos \nu_0 - \cos \nu_0 \cdot d \cos \lambda_0), \\ z_0^u &= T_0 \int (\cos \mu_0 \cdot d \cos \lambda_0 - \cos \lambda_0 \cdot d \cos \mu_0), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} x_0^v &= -T_0 \int (\cos \nu'_0 \cdot d \cos \mu'_0 - \cos \mu'_0 \cdot d \cos \nu'_0), \\ y_0^v &= -T_0 \int (\cos \lambda'_0 \cdot d \cos \nu'_0 - \cos \nu'_0 \cdot d \cos \lambda'_0), \\ z_0^v &= -T_0 \int (\cos \mu'_0 \cdot d \cos \lambda'_0 - \cos \lambda'_0 \cdot d \cos \mu'_0); \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

quindi le due curve saranno pienamente determinate a meno di una traslazione nello spazio; indichiamo con u l'arco di C_0 e con v quello di C'_0 .

Consideriamo la superficie di traslazione S_0 generata dalla traslazione di una di queste due linee lungo l'altra; avremo per le coordinate x_0, y_0, z_0 di un suo punto generico P_0 l'espressioni:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= T_0 \left\{ \int (\cos \nu_0 \cdot d \cos \mu_0 - \cos \mu_0 \cdot d \cos \nu_0) - \int (\cos \nu'_0 \cdot d \cos \mu'_0 - \cos \mu'_0 \cdot d \cos \nu'_0) \right\}, \\ y_0 &= T_0 \left\{ \int (\cos \lambda_0 \cdot d \cos \nu_0 - \cos \nu_0 \cdot d \cos \lambda_0) - \int (\cos \lambda'_0 \cdot d \cos \nu'_0 - \cos \nu'_0 \cdot d \cos \lambda'_0) \right\}, \\ z_0 &= T_0 \left\{ \int (\cos \mu_0 \cdot d \cos \lambda_0 - \cos \lambda_0 \cdot d \cos \mu_0) - \int (\cos \mu'_0 \cdot d \cos \lambda'_0 - \cos \lambda'_0 \cdot d \cos \mu'_0) \right\}; \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

finchè u, v variano l'uno indipendentemente dall'altro, il punto P_0 descrive la superficie S_0 ; ma se immaginiamo che u, v varino col variare di s , il punto P_0 descriverà una certa linea di S_0 ; questa linea, come facilmente si verifica, è, a meno di traslazioni nello spazio, la curva C_0^s di equazioni (2). Applichiamo alla superficie S_0 la solita costruzione di DARBOUX conducendo per ciascun punto di S_0 la retta intersezione dei piani osculatori delle due linee di traslazione che vi passano; la congruenza Σ di raggi così ottenuta

sarà (vedi § 1) normale ad una superficie W , i cui raggi principali di curvatura son legati dalla relazione

$$r_1 - r_2 = 2 T_0 \operatorname{sen} \left(\frac{r_1 + r_2}{2 T_0} \right);$$

una delle falde focali, che indicheremo con S' , avrà l'equazioni:

$$\left. \begin{aligned} x_1 = x_0 + T_0 \begin{vmatrix} \cos \mu_0 & \cos \nu_0 \\ \cos \mu'_0 & \cos \nu'_0 \end{vmatrix}, & \quad y_1 = y_0 + T_0 \begin{vmatrix} \cos \nu_0 & \cos \lambda_0 \\ \cos \nu'_0 & \cos \lambda'_0 \end{vmatrix}, \\ z_1 = z_0 + T_0 \begin{vmatrix} \cos \lambda_0 & \cos \mu_0 \\ \cos \lambda'_0 & \cos \mu'_0 \end{vmatrix}, & \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

(dove ora u, v variano l'uno indipendentemente dall'altro) e sarà applicabile su S ; di più per il modo come abbiamo determinato le due linee C_0, C'_0 , essa conterrà evidentemente la curva C' ; resta ora da mostrare che esiste una flessione di S in S' tale che la curva C deformatosi si distende sulla C' ; ciò si verifica subito, poichè le due superficie S, S' sono applicabili l'una sull'altra in ∞^1 modi e per ognuna di queste applicazioni le linee $\sigma = \text{cost.}^e$, ossia i paralleli di S , si distendono sulle linee $\sigma = \text{cost.}^e$ di S' ; di più fra le due curve C, C' , per la costruzione eseguita, si trova già stabilita una corrispondenza di punto a punto tale che in punti corrispondenti si hanno valori uguali per ciascuna delle quantità s, σ, φ ; ne segue che una volta fissato che dopo l'applicazione di S su S' un punto di C cada sul corrispondente di C' , la linea C si distenderà su C' . Così è dimostrata la possibilità della deformazione richiesta; e poichè θ è stato determinato solo a mezzo del suo seno, risulta pure che due sono le deformazioni di S che verificano le condizioni imposte; in pari tempo le formole (6) ci danno per sole quadrature le coordinate dei punti della superficie deformata.

§ 7.

Occupiamoci ora del problema seguente:

Supposto di considerare sopra una superficie S_1 applicabile su S una linea assintotica C , vogliamo vedere se è possibile deformare per semplice flessione la S_1 , mantenendo rigida la linea C . Perciò osserviamo che costruita la congruenza Σ formata dalle tangenti alle geodetiche g di S_1 deformate dei meridiani di S e determinata la superficie media S_0 , alla linea C di S_1 cor-

risponderà in S_0 una linea C_0 a torsione costante $\frac{1}{T_0}$, che sarà una delle linee di traslazione di S_0 e sarà ottenuta dalla linea C riportando a partire dai punti di C sulle tangenti alle geodetiche g in una determinata direzione dei segmenti eguali in grandezza e segno a $T_0 \text{sen } \sigma$, essendo σ la solita funzione dell'arco s di C che più volte abbiamo considerato; quindi se ricordiamo che per una flessione di S_1 la quantità σ rimane sempre la stessa funzione dell'arco s di C , e lo stesso avviene per l'angolo φ che C fa colle geodetiche g di S_1 , avremo che, supposto possibile di flettere la S_1 , mantenendo rigida la C , durante una tale flessione della S_1 anche la S_0 si deformerà, ma la linea C_0 dovrà mantenersi rigida; l'altra curva C'_0 di traslazione per S_0 si deformerà soddisfacendo in ogni suo stato alle due condizioni seguenti: 1.° di avere la torsione eguale e contraria a quella di C_0 ; 2.° che nel punto P_0 in cui incontra C_0 abbia per la binormale una direzione fissa.

Malgrado queste condizioni, è chiaro che la curva C'_0 potrà subire delle mutazioni, sia di forma, non essendo imposta per la sua prima curvatura restrizione alcuna, sia di posizione, essendo permessa una sua rotazione intorno alla binormale nel punto P_0 .

D'altra parte, se, rimanendo fissa la curva C_0 , immaginiamo che la C'_0 si deformi in modo arbitrario, pur soddisfacendo sempre alle due condizioni sopra indicate, e, costruita per ogni stato della C'_0 la superficie S_0 di traslazione che ha le due curve C_0, C'_0 per curve di traslazione, se ne deduciamo colla solita costruzione di DARBOUX la congruenza Σ che ha per raggi le intersezioni dei piani osculatori delle due linee di traslazione passanti per ciascun punto di S_0 , la congruenza ottenuta sarà una congruenza normale ad una superficie W i cui raggi principali di curvatura r_1, r_2 son legati dalla relazione

$$r_1 - r_2 = 2 T_0 \text{sen} \left(\frac{r_1 + r_2}{2 T_0} \right),$$

e ciascuna falda S_1, S'_1 della superficie focale è applicabile su S ; di più, per le condizioni imposte alle linee di traslazione di S_0 , una delle falde focali, per es. S_1 , contiene la curva C come assintotica; si hanno così infinite superfici aventi la curva C come assintotica comune ed applicabili l'una sull'altra e sulla superficie S in un numero ∞^1 di modi; vogliamo dimostrare che fra le ∞^1 applicabilità di due qualunque di queste superficie fra loro ve n'è sempre una per cui la linea assintotica C corrisponde a sè stessa. Ed infatti, considerate due superficie distinte applicabili su S aventi a comune l'assintotica C e corrispondenti a due diversi stati di C'_0 , nell'applicarsi del-

l'una sull'altra le linee $\sigma = \text{cost.}^e$, deformate dei paralleli dell'una, si andranno a distendere sulle linee $\sigma = \text{cost.}^e$, deformate dei paralleli dell'altra; e chiaramente si corrisponderanno le coppie di linee $\sigma = \text{cost.}^e$ uscenti da ciascun punto P di C , poichè lungo ciascuna di esse σ avrà quel valore che ha in P ; quindi fissato che nell'applicabilità un punto P di C debba corrispondere a sè stesso, tutti gli altri punti di C corrisponderanno a sè stessi; onde corrispondentemente alla deformazione continua della curva C'_0 , si ottiene una flessione continua della superficie S , per modo che la linea assintotica C rimarrà rigida; possiamo dunque enunciare il seguente:

Teorema. — *Si può in infiniti modi deformare per semplice flessione una superficie applicabile sopra una superficie di rotazione di elemento lineare*

$$ds^2 = 4T_0^2 \left(\cos^4 \frac{\sigma}{2} d\sigma^2 + \sin^2 \frac{\sigma}{2} d\beta^2 \right),$$

quando si ponga la condizione che una data linea assintotica debba mantenersi rigida durante la deformazione —.

Tutte queste deformazioni dipendono da una funzione arbitraria, la flessione della curva C'_0 ; se osserviamo inoltre che le curve a torsione costante sono note mediante sole quadrature, possiamo ancora aggiungere che *tutte le superfici deformate si possono ottenere con sole quadrature.*

§ 8.

Dalle considerazioni del paragrafo precedente risulta che se C è una linea assintotica di una superficie applicabile su S , essa è assintotica d'infinito altre superfici applicabili su S ; ma ora possiamo domandarci: *Data una linea C ad arbitrio, è possibile far passare per essa delle superfici applicabili su S e che abbiano C per linea assintotica?* Abbiamo già trovato come condizione necessaria perchè ciò si verifichi la seguente: chiamando $\frac{1}{\rho}$, $\frac{1}{T}$, s rispettivamente la 1.^a e 2.^a curvatura e l'arco di C , devono coesistere le tre relazioni (vedi § 4):

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{T^2} &= \frac{1}{16 T_0^2 \cos^4 \frac{\sigma}{2}}, \\ T_0(1 + \cos \sigma) \frac{d\sigma}{ds} + \cos \varphi &= 0, \\ 2 T_0 \sin \sigma \cdot \left(\frac{d\varphi}{ds} \pm \frac{1}{\rho} \right) - \sin \varphi &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

le quali portano, per eliminazione delle funzioni φ , σ , ad una relazione differenziale fra ρ , T della forma:

$$F\left(\rho, T, \frac{dT}{ds}, \frac{d^2T}{ds^2}\right) = 0. \quad (2)$$

Ora inversamente dimostriamo che questa condizione è anche sufficiente, per modo che se la linea C soddisfa alla relazione (2), per essa si possono far passare infinite superficie applicabili su S che la contengano come linea assintotica.

Supposto che la (2) sia identicamente soddisfatta dalla curva C , potremo determinare due funzioni φ , σ che soddisfino all'equazioni (1), nell'ultima delle quali possiamo limitarci a considerare il segno *più*, poichè per passare all'altro caso basta mutare φ in $-\varphi$.

Chiamiamo α , β , γ ; ξ , η , ζ ; λ , μ , ν rispettivamente gli angoli della tangente, normale principale e binormale di C cogli assi; per ogni punto $P \equiv (x, y, z)$ di C conduciamo sul piano osculatore di C una direzione r tale che sia φ l'angolo di cui deve ruotare nel senso positivo la tangente a C per sovrapporsi alla direzione r (prenderemo come senso positivo degli angoli su Π quello in cui ruota la tangente a C per sovrapporsi alla normale principale attraversando l'angolo retto); riportiamo a partire da P su questa direzione un segmento eguale in grandezza e segno a $T_0 \sin \sigma$; giungeremo ad un punto $P_0 \equiv (x_0^u, y_0^u, z_0^u)$ che col variare di s descriverà una certa curva C_0 . Per ogni punto P_0 di C_0 facciamo passare un piano Π_0 normale ad r ; su Π_0 tracciamo a partire da P_0 la direzione N' parallela alla binormale di C in P , e altre due direzioni:

$$b_0 \equiv (\cos \lambda_0, \cos \mu_0, \cos \nu_0), \quad b'_0 \equiv (\cos \lambda'_0, \cos \mu'_0, \cos \nu'_0),$$

che abbiano per bisettrice del loro angolo la direzione N' e tali che uno degli angoli di cui b_0 deve ruotare per sovrapporsi a b'_0 sia eguale in grandezza e segno a σ ; avendo fissato su Π_0 il senso positivo degli angoli in guisa che i coseni della direzione r siano espressi come segue:

$$l = -\frac{1}{\sin \sigma} \begin{vmatrix} \cos \mu_0 & \cos \nu_0 \\ \cos \mu'_0 & \cos \nu'_0 \end{vmatrix}, \quad m = -\frac{1}{\sin \sigma} \begin{vmatrix} \cos \nu_0 & \cos \lambda_0 \\ \cos \nu'_0 & \cos \lambda'_0 \end{vmatrix},$$

$$n = -\frac{1}{\sin \sigma} \begin{vmatrix} \cos \lambda_0 & \cos \mu_0 \\ \cos \lambda'_0 & \cos \mu'_0 \end{vmatrix};$$

ciò posto, l'equazioni della curva C_0 saranno:

$$\left. \begin{aligned} x_0^u &= x - T_0 \begin{vmatrix} \cos \mu_0 & \cos \nu_0 \\ \cos \mu'_0 & \cos \nu'_0 \end{vmatrix}, & y_0^u &= y - T_0 \begin{vmatrix} \cos \nu_0 & \cos \lambda_0 \\ \cos \nu'_0 & \cos \lambda'_0 \end{vmatrix}, \\ z_0^u &= z - T_0 \begin{vmatrix} \cos \lambda_0 & \cos \mu_0 \\ \cos \lambda'_0 & \cos \mu'_0 \end{vmatrix}; \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

inoltre avremo per i coseni direttori di b_0, b'_0 rispettivamente:

$$\left. \begin{aligned} \cos \lambda_0 &= \cos \frac{\sigma}{2} \cos \lambda + \operatorname{sen} \frac{\sigma}{2} (\operatorname{sen} \varphi \cdot \cos \alpha - \cos \varphi \cdot \cos \xi), \\ \cos \mu_0 &= \cos \frac{\sigma}{2} \cos \mu + \operatorname{sen} \frac{\sigma}{2} (\operatorname{sen} \varphi \cdot \cos \beta - \cos \varphi \cdot \cos \eta), \\ \cos \nu_0 &= \cos \frac{\sigma}{2} \cos \nu + \operatorname{sen} \frac{\sigma}{2} (\operatorname{sen} \varphi \cdot \cos \gamma - \cos \varphi \cdot \cos \zeta), \\ \cos \lambda'_0 &= \cos \frac{\sigma}{2} \cos \lambda - \operatorname{sen} \frac{\sigma}{2} (\operatorname{sen} \varphi \cdot \cos \alpha - \cos \varphi \cdot \cos \xi), \\ \cos \mu'_0 &= \cos \frac{\sigma}{2} \cos \mu - \operatorname{sen} \frac{\sigma}{2} (\operatorname{sen} \varphi \cdot \cos \beta - \cos \varphi \cdot \cos \eta), \\ \cos \nu'_0 &= \cos \frac{\sigma}{2} \cos \nu - \operatorname{sen} \frac{\sigma}{2} (\operatorname{sen} \varphi \cdot \cos \gamma - \cos \varphi \cdot \cos \zeta). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Ora dimostriamo: 1.° che la direzione b'_0 di coseni (5) è costante per tutti i punti di C_0 ; 2.° che la curva C_0 è una curva a torsione costante $\frac{1}{T_0}$.

Per verificare la prima di queste proprietà, basterà dimostrare che, per una variazione infinitesima del parametro s , si ha:

$$\frac{d \cos \lambda'_0}{ds} = 0, \quad \frac{d \cos \mu'_0}{ds} = 0, \quad \frac{d \cos \nu'_0}{ds} = 0. \quad (6)$$

Eseguendo le derivazioni col tener conto delle (5) e ricordando poi che si hanno le identità (1), avremo che le relazioni precedenti sono verificate, purchè dalla prima delle (1) si estraiga la radice nel seguente modo:

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{4 T_0 \cos^2 \frac{\sigma}{2}};$$

quindi b'_0 è una direzione costante lungo C_0 .

Per dimostrare la seconda proprietà, consideriamo la curva a torsione

costante $\frac{1}{T_0}$ che ha per equazioni:

$$\left. \begin{aligned} \xi_0 &= T_0 \int (\cos \nu_0 \cdot d \cos \mu_0 - \cos \mu_0 \cdot d \cos \nu_0), \\ \eta_0 &= T_0 \int (\cos \lambda_0 \cdot d \cos \nu_0 - \cos \nu_0 \cdot d \cos \lambda_0), \\ \zeta_0 &= T_0 \int (\cos \mu_0 \cdot d \cos \lambda_0 - \cos \lambda_0 \cdot d \cos \mu_0), \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

e dimostriamo che questa coincide, a meno di traslazioni nello spazio, colla curva C_0 di equazioni (3); perciò basterà dimostrare che per una variazione di s si ha:

$$dx_0^u = d\xi_0, \quad dy_0^u = d\eta_0, \quad dz_0^u = d\zeta_0,$$

le quali relazioni, come facilmente si vede tenendo conto delle (3), (4), (5), (6), (7), sono altrettante identità, se è verificata la relazione:

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{4 T_0 \cos^2 \frac{\sigma}{2}},$$

che per ipotesi è un'identità; onde resta dimostrato che C_0 è una curva a torsione costante $\frac{1}{T_0}$.

Ciò posto, consideriamo la superficie di traslazione S_0 che ha per linee di traslazione la linea C_0 ed una linea C'_0 a torsione costante uguale e contraria a quella di C_0 , ed in tale posizione che nel punto d'incontro con C_0 abbia b'_0 per direzione della binormale; costruiamo poi col processo di DARBOUX la congruenza di raggi Σ ; una delle falde focali, che indicheremo con S' , avrà l'equazioni:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + T_0 \begin{vmatrix} \cos \mu_0 & \cos \nu_0 \\ \cos \mu'_0 & \cos \nu'_0 \end{vmatrix}, & y_1 &= y_0 + T_0 \begin{vmatrix} \cos \nu_0 & \cos \lambda_0 \\ \cos \nu'_0 & \cos \lambda'_0 \end{vmatrix}, \\ z_1 &= z_0 + T_0 \begin{vmatrix} \cos \lambda_0 & \cos \mu_0 \\ \cos \lambda'_0 & \cos \mu'_0 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

e sarà applicabile su S ; di più, per il modo come abbiamo determinato le due linee C_0 , C'_0 , essa conterrà evidentemente la curva C come assintotica; e così resta dimostrato il teorema enunciato; di più dalla formola:

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{4 T_0 \cos^2 \frac{\sigma}{2}},$$

si deduce che ai due sistemi di linee a torsione costante su S_0 corrispondono anche per il segno della torsione i due sistemi di linee assintotiche su S' ; abbiamo ancora che una superficie applicabile su S è individuata da due linee assintotiche uscenti da un suo punto, ossia appartenenti a sistema diverso; infatti così rimane individuata la superficie media della congruenza Σ corrispondente.

§ 9.

Rimane da considerare la questione seguente: *È possibile deformare per semplice flessione la superficie S , in guisa che la linea C' deformata di una sua curva C qualunque risulti assintotica per la superficie deformata?*

Già nell'Introduzione abbiamo osservato che la forma della linea deformata C' rimane pienamente individuata da questa condizione; resta ora da verificare la possibilità della deformazione richiesta. Perciò supponiamo noto l'angolo φ che in ogni suo punto la linea C fa coi meridiani della S e definito in grandezza e segno come è stato convenuto nel § 3; sia poi σ la solita funzione dell'arco s di C , ed $\frac{1}{\rho g}$ la curvatura geodetica di C ; avremo allora le due relazioni:

$$\left. \begin{aligned} T_0(1 + \cos \sigma) \frac{d\sigma}{ds} + \cos \varphi &= 0, \\ 2 T_0 \operatorname{sen} \sigma \left(\frac{d\varphi}{ds} + \frac{1}{\rho g} \right) - \operatorname{sen} \varphi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Ora, per ipotesi, è possibile stabilire fra le due curve C , C' una corrispondenza di punto a punto per modo che a punti corrispondenti spettino valori uguali dell'arco, e, chiamando $\frac{1}{\rho}$, $\frac{1}{T}$ le curvatures prima e seconda di C , sian verificate le relazioni:

$$\frac{1}{\rho g} = \frac{1}{\rho}, \quad \frac{1}{4 T_0 \cos^2 \frac{\sigma}{2}} = \frac{1}{T}; \quad (2)$$

l'arco di C' potrà, come l'arco di C , indicarsi con s , e le quantità σ , φ si potranno considerare funzioni di s note in tutti i punti di C' , fra le quali, a causa delle (1), (2), dovranno coesistere le relazioni:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{T'} &= \frac{1}{4 T_0 \cos^2 \frac{\sigma}{2}}, \\ T_0(1 + \cos \sigma) \frac{d\sigma}{ds} + \cos \varphi &= 0, \\ 2 T_0 \operatorname{sen} \sigma \left(\frac{d\varphi}{ds} + \frac{1}{\rho} \right) - \operatorname{sen} \varphi &= 0; \end{aligned} \right\}$$

vi saranno quindi (vedi § 8) infinite superfici applicabili su S ed aventi C' per assintotica unita; di più, con un ragionamento simile a quello fatto nei §§ 6, 7, si riconosce che ciascuna di queste superfici può esser considerata come ottenuta da una deformazione della S per modo che la linea C sia venuta a distendersi sulla C' ; così resta verificato il teorema enunciato nell'Introduzione; di più per le superficie considerate le deformazioni richieste si attuano con sole quadrature.

§ 10.

Come applicazione dei risultati precedenti si voglia deformare la superficie S in guisa che una sua linea geodetica C , che non sia per ora un meridiano, si rettifichi e divenga precisamente l'asse z .

Questa deformazione, se è possibile, è una di quelle che trasformano una linea C di S in una linea C' assintotica per la superficie deformata; è quindi necessario e sufficiente per la sua possibilità (vedi paragrafo precedente) che, essendo $\frac{1}{\rho}$, $\frac{1}{T}$ le due curvature prima e seconda di C' , $\frac{1}{\rho g}$ la curvatura geodetica di C e σ la solita funzione dell'arco s di C , si possa stabilire fra C , C' una corrispondenza di punto a punto, in modo che in due punti corrispondenti si abbia lo stesso valore dell'arco e di più sia:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho g}, \quad \frac{1}{T'} = \frac{1}{4 T_0 \cos^2 \frac{\sigma}{2}};$$

nel caso nostro $\frac{1}{\rho g} = 0$, perchè C è una geodetica; e la linea C' , essendo una retta, darà:

$$\frac{1}{\rho} = 0, \quad \frac{1}{T'} = \text{indeterminata};$$

dunque la prima delle due relazioni precedenti è sempre identicamente sod-

disfatta; in quanto alla seconda osserviamo che, essendo la torsione di C' indeterminata, possiamo convenire di attribuirle il valore $\frac{1}{4 T_0 \cos^2 \frac{\sigma}{2}}$, assumendo

un determinato sistema di piani passanti per z come piani osculatori di z nei vari suoi punti; dunque la deformazione richiesta si potrà eseguire in infiniti modi.

Ora, essendo C una geodetica di S , lungo di essa avrà luogo la relazione:

$$\operatorname{sen} \frac{\sigma}{2} \operatorname{sen} \varphi = a, \quad (1)$$

essendo a una certa costante (vedi § 4); inoltre avremo lungo C' :

$$\left. \begin{aligned} x = 0, \quad y = 0, \quad \cos \alpha = \cos \beta = 0, \quad \cos \gamma = 1, \quad \cos \zeta = \cos \nu = 0 \\ \frac{1}{\rho} = 0, \quad \frac{1}{T'} = \frac{1}{4 T_0 \cos^2 \frac{\sigma}{2}}; \end{aligned} \right\} (2)$$

quindi le (4), (5) del § 8 ci danno:

$$\left. \begin{aligned} \cos \lambda_0 &= \cos \frac{\sigma}{2} \cos \lambda - \operatorname{sen} \frac{\sigma}{2} \cos \varphi \cos \xi, \\ \cos \mu_0 &= \cos \frac{\sigma}{2} \cos \mu - \operatorname{sen} \frac{\sigma}{2} \cos \varphi \cos \eta, \\ \cos \nu_0 &= \operatorname{sen} \frac{\sigma}{2} \operatorname{sen} \varphi, \end{aligned} \right\} (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \lambda'_0 &= \cos \frac{\sigma}{2} \cos \lambda + \operatorname{sen} \frac{\sigma}{2} \cos \varphi \cos \xi, \\ \cos \mu'_0 &= \cos \frac{\sigma}{2} \cos \mu + \operatorname{sen} \frac{\sigma}{2} \cos \varphi \cos \eta, \\ \cos \nu'_0 &= -\operatorname{sen} \frac{\sigma}{2} \operatorname{sen} \varphi; \end{aligned} \right\} (4)$$

quindi l'equazioni:

$$\left. \begin{aligned} x_0^u &= -T_0 \begin{vmatrix} \cos \mu_0 & \cos \nu_0 \\ \cos \mu'_0 & \cos \nu'_0 \end{vmatrix}, \quad y_0^u = -T_0 \begin{vmatrix} \cos \nu_0 & \cos \lambda_0 \\ \cos \nu'_0 & \cos \lambda'_0 \end{vmatrix}, \\ z_0^u &= z - T_0 \begin{vmatrix} \cos \lambda_0 & \cos \mu_0 \\ \cos \lambda'_0 & \cos \mu'_0 \end{vmatrix}, \end{aligned} \right\} (5)$$

ove per $\cos \lambda_0, \cos \mu_0, \cos \nu_0; \cos \lambda'_0, \cos \mu'_0, \cos \nu'_0$ si pongano l'espressioni pre-

cedenti, rappresenteranno la linea C_0 a torsione costante $\frac{1}{T_0}$ corrispondente a C' nella superficie media S_0 della congruenza Σ che si tratta di costruire per avere la deformata richiesta della S ; lungo la linea C_0 le formole (3) daranno i coseni direttori della binormale a C_0 e le (4) i coseni di una direzione fissa; ora dall'ultima delle (3), tenendo conto della (1) si ha $\cos \nu_0 = a$, da cui risulta che C_0 è un'elica cilindrica, e poichè è a torsione costante, sarà un'elica circolare coll'asse parallelo all'asse z , quindi potremo scrivere le sue equazioni sotto la forma:

$$x_0^u = a + r \cos \omega, \quad y_0^u = b + r \sin \omega, \quad z_0^u = m \omega, \quad (6)$$

essendo ω un parametro variabile, r il raggio dell'elica ed a, b, m delle costanti. Avremo per l'arco di quest'elica l'espressione:

$$du = \pm \sqrt{r^2 + m^2} d\omega,$$

e potremo scegliere il segno superiore fissando che u cresca con ω ; allora avremo come coseni direttori della binormale a C_0

$$\cos \lambda_0 = \frac{m \sin \omega}{\sqrt{r^2 + m^2}}, \quad \cos \mu_0 = \frac{-m \cos \omega}{\sqrt{r^2 + m^2}}, \quad \cos \nu_0 = \frac{r}{\sqrt{r^2 + m^2}}, \quad (7)$$

e come torsione di C_0

$$\frac{1}{T_0} = -\frac{m}{r^2 + m^2};$$

quindi, ricordando che $\cos \nu_0 = a$, potremo dalle due relazioni

$$\frac{1}{T_0} = -\frac{m}{r^2 + m^2}, \quad a = \frac{r}{\sqrt{r^2 + m^2}}, \quad (8)$$

determinare r ed m ; avremo:

$$r = T_0 a \sqrt{1 - a^2}, \quad m = -T_0 (1 - a^2); \quad (9)$$

restano ora da determinare le altre costanti $a, b, \cos \lambda'_0, \cos \mu'_0, \cos \nu'_0$; intanto dall'ultima delle (4) abbiamo:

$$\cos \nu'_0 = -\cos \nu_0 = -\frac{r}{\sqrt{r^2 + m^2}}; \quad (10)$$

inoltre osserviamo che l'equazioni (5) devono coincidere colle (6), quindi, tenendo conto delle (7), (10), dovremo avere, qualunque sia ω ,

$$\begin{aligned} a + r \cos \omega &= T_0 \frac{r}{\sqrt{r^2 + m^2}} \left(\frac{-m \cos \omega}{\sqrt{r^2 + m^2}} + \cos \mu'_0 \right), \\ b + r \sin \omega &= -T_0 \frac{r}{\sqrt{r^2 + m^2}} \left(\frac{m \sin \omega}{\sqrt{r^2 + m^2}} + \cos \lambda'_0 \right); \end{aligned}$$

ne seguono le relazioni:

$$a = \frac{T_0 r}{\sqrt{r^2 + m^2}} \cos \mu'_0, \quad b = \frac{-T_0 r}{\sqrt{r^2 + m^2}} \cos \lambda'_0, \quad (11)$$

quadrando e sommando queste relazioni, col tener conto che

$$\cos^2 \lambda'_0 + \cos^2 \mu'_0 = 1 - \cos^2 \nu'_0 = \frac{m^2}{r^2 + m^2},$$

abbiamo:

$$a^2 + b^2 = \frac{T_0^2 r^2 m^2}{(r^2 + m^2)^2},$$

ossia, per la prima delle (8),

$$a^2 + b^2 = r^2;$$

ne concludiamo che il cilindro contenente l'elica C_0 deve avere per una delle sue generatrici l'asse z ; dunque, supponendo per semplicità che l'asse dell'elica sia situato sul piano xz , avremo $a = r$, $b = 0$ e potremo scrivere l'equazione dell'elica stessa nel modo seguente:

$$x_0^u = r(1 + \cos \omega), \quad y_0^u = r \operatorname{sen} \omega, \quad z_0^u = m \omega, \quad (12)$$

di più le (11) ci daranno subito i valori di $\cos \lambda'_0$, $\cos \mu'_0$; avremo, cioè,

$$\cos \lambda'_0 = 0, \quad \cos \mu'_0 = -\frac{m}{\sqrt{r^2 + m^2}}, \quad \cos \nu'_0 = -\frac{r}{\sqrt{r^2 + m^2}}; \quad (13)$$

così la curva C_0 risulta perfettamente determinata; l'altra curva C'_0 di traslazione per S_0 e a torsione costante $-\frac{1}{T_0}$, resterà arbitraria di forma essendo arbitraria la sua flessione, ed in quanto alla sua posizione rispetto alla C_0 basterà che lungo la C_0 la direzione fissa della binormale a C'_0 abbia per coseni direttori l'espressioni (13).

Supposto dunque di scegliere per C'_0 una curva che verifichi queste condizioni e applicata la costruzione di DARBOUX alla superficie di traslazione S_0 che vi corrisponde, una delle falde focali della congruenza Σ ottenuta, cioè quella che ha per equazioni:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= r(1 + \cos \omega) + x_0^v + T_0 \begin{vmatrix} \frac{-m \cos \omega}{\sqrt{r^2 + m^2}} & \frac{r}{\sqrt{r^2 + m^2}} \\ \cos \mu'_0 & \cos \nu'_0 \end{vmatrix}, \\ y_1 &= r \operatorname{sen} \omega + y_0^v + T_0 \begin{vmatrix} \frac{r}{\sqrt{r^2 + m^2}} & \frac{m \operatorname{sen} \omega}{\sqrt{r^2 + m^2}} \\ \cos \nu'_0 & \cos \lambda'_0 \end{vmatrix}, \\ z_1 &= m \omega + z_0^v + T_0 \begin{vmatrix} \frac{m \operatorname{sen} \omega}{\sqrt{r^2 + m^2}} & \frac{-m \cos \omega}{\sqrt{r^2 + m^2}} \\ \cos \lambda'_0 & \cos \mu'_0 \end{vmatrix}, \end{aligned} \right\}$$

conterrà la retta z come linea deformata della geodetica C di S ; avendo indicato con x_0^v, y_0^v, z_0^v le coordinate di un punto corrente su C_0 e con $\cos\lambda'_0, \cos\mu'_0, \cos\nu'_0$ i coseni direttori della sua binormale.

Vogliamo ora determinare la forma della curva assintotica C'' che corrisponde nell'altra falda focale S_2 di Σ alla geodetica rettificata di S_1 ; essa sarà data immediatamente dalle formole:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_0^u - T_0 \begin{vmatrix} \cos\mu_0 & \cos\nu_0 \\ \cos\mu'_0 & \cos\nu'_0 \end{vmatrix}, & y_2 &= y_0^u - T_0 \begin{vmatrix} \cos\nu_0 & \cos\lambda_0 \\ \cos\nu'_0 & \cos\lambda'_0 \end{vmatrix}, \\ z_2 &= z_0^u - T_0 \begin{vmatrix} \cos\lambda_0 & \cos\mu_0 \\ \cos\lambda'_0 & \cos\mu'_0 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

ove si sostituiscono i valori dati dalle formole (7), (12), (13); abbiamo allora, tenendo conto della prima delle (8),

$$x_2 = 2r(1 + \cos\omega), \quad y_2 = 2r\sin\omega, \quad z_2 = m(\omega - \sin\omega). \quad (14)$$

Questa è ancora una curva tracciata sopra un cilindro circolare Γ' avente l'asse z come una delle sue generatrici, che indicheremo con g ; lungo l'asse z questo cilindro tocca l'altro cilindro Γ su cui è descritta l'elica C_0 ed è di raggio doppio; se indichiamo con γ l'angolo che fa C' colle generatrici di Γ' , avremo:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{2r}{m(1 - \cos\omega)};$$

onde la curva taglia ortogonalmente le generatrici stesse nei punti di C'' situati sulla generatrice g' opposta a g ; e l'angolo γ è minimo in grandezza nei punti in cui C'' incontra la generatrice g ; variando ω da 0 a 2π , da 2π a $4\pi, \dots$, la curva C'' si avvolge in infiniti giri attorno al cilindro Γ' .

Supponiamo ora che la seconda falda S_2 sia di rotazione intorno all'asse z ; in tal caso la prima falda S_1 si troverà ridotta, come caso limite, all'asse di rotazione z e la superficie media S_0 dovrà essa pure essere una superficie di rotazione collo stesso asse. Deducendo dunque dalla S_0 la congruenza Σ colla solita costruzione di DARBOUX, ad ogni linea di S_0 dovrà corrispondere nella falda S_1 della superficie focale una linea retta; in particolare ciò accadrà per le linee di traslazione di S_0 ; ne segue, per quanto abbiamo trovato precedentemente, che queste due linee C_0, C'_0 devono essere due eliche circolari a torsione uguale e contraria aventi ciascuna in ogni sua posizione l'asse z come generatrice del cilindro che la contiene; la superficie S_0 si potrà dunque considerare come ottenuta, sia dalla rotazione di una delle due eliche intorno alla

generatrice z del cilindro che la contiene, sia dalla traslazione della stessa elica lungo l'altra; le due eliche dovranno dunque essere dello stesso raggio.

Il risultato ora ottenuto rispetto alla superficie S_0 è un caso particolare del risultato ottenuto da Voss (*) per la classe di superfici aventi la doppia proprietà di essere superfici di rotazione e di traslazione insieme; Voss ha trovato che tutte queste superfici risultano sia dalla rotazione di un'elica circolare attorno ad un asse parallelo al suo, sia dalla traslazione della stessa elica lungo un'altra elica circolare.

Se prendiamo come una delle due eliche di traslazione di S_0 quella rappresentata dall'equazione (12), l'altra elica potrà rappresentarsi coll'equazioni:

$$x_0^v = -r(1 + \cos \omega'), \quad y_0^v = r \operatorname{sen} \omega', \quad z_0^v = m \omega', \quad (15)$$

immaginandola in posizione simmetrica alla curva C_0 rispetto al piano yz ; essa avrà per coseni direttori della binormale

$$\cos \lambda'_0 = \pm \frac{m \operatorname{sen} \omega'}{\sqrt{r^2 + m^2}}, \quad \cos \mu'_0 = \pm \frac{m \cos \omega'}{\sqrt{r^2 + m^2}}, \quad \cos \nu'_0 = \mp \frac{r}{\sqrt{r^2 + m^2}};$$

e incontrerà C_0 nell'origine per $\omega' = \omega = \pi$; onde, se vogliamo che in questo punto i coseni direttori della sua binormale coincidano con quelli dati dalle (13), dovremo scegliere i segni superiori e scrivere:

$$\cos \lambda'_0 = \frac{m \operatorname{sen} \omega'}{\sqrt{r^2 + m^2}}, \quad \cos \mu'_0 = \frac{m \cos \omega'}{\sqrt{r^2 + m^2}}, \quad \cos \nu'_0 = -\frac{r}{\sqrt{r^2 + m^2}}. \quad (16)$$

Se nelle formole:

$$x_2 = x_0^u + x_0^v - T_0 \begin{vmatrix} \cos \mu_0 & \cos \nu_0 \\ \cos \mu'_0 & \cos \nu'_0 \end{vmatrix}, \quad y_2 = y_0^u + y_0^v - T_0 \begin{vmatrix} \cos \nu_0 & \cos \lambda_0 \\ \cos \nu'_0 & \cos \lambda'_0 \end{vmatrix},$$

$$z_2 = z_0^u + z_0^v - T_0 \begin{vmatrix} \cos \lambda_0 & \cos \mu_0 \\ \cos \lambda'_0 & \cos \mu'_0 \end{vmatrix},$$

che danno la falda S_2 , sostituiamo i valori dati dalle formole (7), (12), (15), (16), avremo:

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= 2r(\cos \omega - \cos \omega'), \\ y_2 &= 2r(\operatorname{sen} \omega + \operatorname{sen} \omega'), \\ z_2 &= m\{(\omega + \omega') + \operatorname{sen}(\omega + \omega')\}, \end{aligned} \right\}$$

(*) *Mathematische Annalen*, tom. 19, pag. 11-15.

le quali saranno l'equazioni della superficie di rotazione S_2 , che abbiamo sempre chiamato con S , riferita al doppio sistema delle linee assintotiche; prendendo come linee coordinate i meridiani $q = \text{cost.}^e$ e i paralleli $p = \text{cost.}^e$, l'equazioni di S saranno:

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= 4r \operatorname{sen} p \cdot \operatorname{sen} q, \\ y_2 &= 4r \operatorname{sen} p \cdot \cos q, \\ z_2 &= 2m(p + \operatorname{sen} p \cdot \cos p), \end{aligned} \right\}$$

che avremmo potuto ricavare anche dalle formole (1) del § 5.

In questa superficie le linee assintotiche son curve tracciate su cilindri circolari contenenti l'asse di rotazione di S come generatrice e che toccano i paralleli di regresso della superficie; ciò si verifica subito osservando che S può considerarsi ottenuta dalla rotazione della curva C'' di equazioni (14) intorno alla generatrice g , asse di rotazione di S ; i punti di C'' situati sulla generatrice g' generano i paralleli di regresso della S , mentre i punti di C'' situati sulla generatrice g rimangono fissi e sono i punti conici di S ; l'altro sistema di assintotiche sarà generato dalla rotazione intorno all'asse z della curva simmetrica della (14) rispetto al piano yz .

§ 11.

Si voglia ora deformare la S in modo che un suo meridiano C risulti rettificato nella superficie deformata; anche questa deformazione sarà una di quelle che trasformano una linea C di S in una linea C' assintotica per la superficie deformata, e collo stesso ragionamento già fatto nel caso precedente troveremo che tale deformazione è possibile in infiniti modi.

Nel caso che trattiamo si osserva subito che supposta effettuata la deformazione richiesta di S in S' , la curva C_0 corrispondente a C' sulla superficie media S_0 sarà la stessa retta C' ; ora la torsione di una retta è indeterminata e come già abbiamo osservato possiamo fissare per essa quel valore che più ci piace, ossia possiamo fissare a nostro arbitrio un sistema di piani passanti per la retta, i quali rappresentino i piani osculatori nei varii punti della retta; nel caso nostro dovremo quindi concepire la retta C_0 , in quanto è una curva di traslazione della superficie media S_0 , come una curva a torsione costante $= \frac{1}{T_0}$, e quindi il sistema di piani osculatori sarà ottenuto dal ruotare di un

piano Π intorno a C_0 in modo da fare sempre con un piano fisso Π_0 passante per la retta un angolo proporzionale alla distanza del punto P di C_0 , a cui corrisponde Π come piano osculatore di C_0 , dal punto P_0 corrispondente a Π_0 ; il sistema delle normali a questi piani Π nei punti corrispondenti P di C_0 , prese in un certo senso, sarà il sistema delle binormali alla retta C_0 intesa come una curva gobba.

Segue da tutto ciò che la superficie media S_0 dovrà ridursi ad una superficie cilindrica, di cui tutte le curve a torsione costante $\frac{1}{T_0}$ congruenti per traslazione a C_0 saranno le rette generatrici; mentre una delle altre curve di traslazione C'_0 a torsione costante $-\frac{1}{T_0}$ potrà considerarsi come curva direttrice; di più, dovendo corrispondere alla retta C_0 di S_0 la retta stessa in S' , la curva C'_0 nel punto in cui incontra C_0 dovrà avere la sua binormale perpendicolare a C_0 ; inversamente, presa una superficie cilindrica S_0 che abbia per direttrice una curva C'_0 a torsione costante $-\frac{1}{T_0}$ e tale che una sua generatrice g nel punto M in cui incontra C'_0 sia perpendicolare alla binormale della curva stessa, se concepiamo ognuna delle generatrici come una curva a torsione costante $\frac{1}{T_0}$, nel modo che sopra abbiamo indicato, e di più fissiamo per ognuna delle generatrici il sistema delle binormali in modo che ciascuna di esse si possa ottenere dalle altre mediante una traslazione lungo la direttrice; eseguendo sulla superficie cilindrica S_0 così definita la solita costruzione di DARBOUX, prendendo, cioè, per ogni suo punto la retta intersezione dei piani osculatori della generatrice rettilinea che passa per quel punto e della curva di traslazione congruente a C'_0 , otterremo una congruenza Σ , di cui una falda focale conterrà la retta g come linea deformata di un meridiano della S . Le infinite deformazioni domandate si potranno ottenere mettendo a partito tutte le varie curve C'_0 a torsione costante $-\frac{1}{T_0}$, e per ciascuna di esse fissando in modo arbitrario la superficie cilindrica S_0 contenente C'_0 come direttrice, purchè almeno in un punto di C'_0 la generatrice di S_0 risulti normale alla binormale di C'_0 .

16 luglio 1893.

Curve k -gonali.

(Memoria I di FEDERICO AMODEO, a Napoli.)

Mi occuperò dello studio di quelle curve C_p^m di ordine m e di genere p , che hanno come *serie minima* una serie lineare g_k^1 ($k > 1$); cioè di quelle curve che posseggono una serie lineare ∞^1 di grado k , senza avere una serie lineare ∞^1 di grado minore (*). Son chiamate *iperellittiche* le curve che posseggono almeno una g_2^1 , sianò esse di moduli generali o particolari; sono state chiamate *trigonali* quelle che posseggono una sola g_3^1 speciale (KÜPPER: *Ueber die Curve C_p^m von n^{ter} Ordnung und dem Geschlecht $p > 1$, auf welchem die einfachen specialschaaren g_2^1 g_3^1 vorkommen*, Prag. Abh. (7) III, 1889); qui estenderò il nome di *curve trigonali* a tutte quelle che posseggono almeno una g_3^1 , e chiamerò *curve k -gonali* le curve che hanno almeno una serie lineare g_k^1 come serie minima.

Così vengo a classificare le curve in ∞ famiglie che hanno proprietà comuni in tanta abbondanza che lo studio di una famiglia porta di conseguenza la conoscenza delle principali proprietà di tutte le altre; e lo studio delle curve della stessa famiglia si può anche ridurre a quello di poche soltanto.

Distinguerò in queste curve, nei primi tre paragrafi di questa 1.^a Memoria, quelle che sono generali nel loro genere da quelle che non lo sono, chiamando le prime *curve k -gonali generali*, le seconde *curve k -gonali singolari*; però in seguito abbandonerò siffatta distinzione a meno che non affermi espressamente il contrario.

(*) Si noti che, escludendo il caso di $k = 1$, non parlerò delle *curve razionali*, che sono caratterizzate dall'aver sempre una g_1^1 lineare, e che da sè sole formano una famiglia che potrebbe anche essere la prima di tutte le famiglie di curve che qui si considerano.

Mostrerò il legame che havvi fra la serie minima g_k^1 esistente su queste curve C_p^m e le curve minime aggiunte alle C_p^m piane, e mi intratterò a considerare le curve che hanno la minima curva aggiunta compatibile con la esistenza della g_k^1 , ed il massimo genere nel loro ordine. Un quadro di queste ultime curve che io chiamerò *tipiche* termina questa 1.^a Memoria. È notevole l'ordine sempre più basso che queste curve hanno relativamente al loro genere per k crescente; per cui esse costituiscono (per $k \geq 3$) una rappresentazione delle curve k -gonali molto più semplice di quella assegnata dal noto teorema (*) del sig. SEGRE (*Courbes et surfaces réglées algébriques*, Math. Ann., Bd. 30, pag. 220). Solo pel caso iperellittico che era già esaminato dai sigg. BRILL e NOETHER (Math. Ann., Bd. 7, pag. 287) questo teorema dava la rappresentazione più semplice.

Vengon fuori da questo studio alcune interessanti osservazioni: che le curve che ora si chiamano generali nel loro genere sono appunto quelle che presentano maggiori particolarità ed eccezioni, onde sarebbe più naturale ritenerle per curve particolari in queste famiglie di curve che stiamo per studiare; che le qualità che hanno le due curve iperellittiche generali nel loro genere (la C_3^3 e C_2^4) sono appunto quelle che si riflettono in tutte le curve k -gonali tipiche, che intanto (eccetto la C_3^4 trigonale) sono tutte particolari nel loro genere; che la distinzione di serie minime in speciali e non speciali non ha qui alcuna importanza, poichè, come facilmente può da sè verificare il lettore, le curve razionali e la C_3^3 che sono le sole ad avere serie minima non speciale obbediscono alla medesima legge di tutte le altre curve k -gonali.

Molti sono i lavori che trattano delle curve iperellittiche (e sarebbe troppo lungo citarli) due soli trattano delle *curve trigonali*, cioè quello già citato del sig. KÜPPER, e quello del sig. BOBEK (*Ueber Dreischaurcurven*, Wien Ber., Bd. 98, pag. 142-173, 1889). Non mi pare che ne siano stati pubblicati altri su questo argomento.

Avrò qualche volta bisogno di citare la Nota pubblicata nei Rend. dei Lincei, *Curve aggiunte minime* (vol. 2₁₀, pag. 460-467, 1893); per brevità la indicherò con (C. a. m.).

Non mi sono astenuto dal dire qualche cosa già nota per non difformare l'organismo dell'argomento.

(*) Ogni curva di genere p dotata di una g_k^1 può essere trasformata in una curva piana di ordine $p+2$ con un punto $(p+2-k)$ uplo; la g_k^1 essendo allora data dalle rette passanti per questo punto.

§ 1. Curve k -gonali generali.

a) Se sopra una curva C_p di genere p esiste una serie lineare g_n^r , questa sarà speciale solamente quando sia $n - r < p$; ed inoltre se la curva è di moduli generali, la condizione necessaria e sufficiente perchè esista una g_n^r speciale è

$$(r + 1)(n - r) - rp \geq 0,$$

(BRILL e NOETHER, Math. Annalen, Bd. 7, § 9) e ne esistono precisamente $\infty^{(r+1)(n-r)-rp}$. Le curve k -gonali generali devono dunque soddisfare alle due condizioni:

$$p \leq 2k - 2, \quad p > 2k - 4,$$

la prima delle quali è la condizione perchè possa esistere la serie g_k^1 lineare speciale, la seconda è la condizione perchè sulla curva non esista la g_{k-1}^1 . Cosicchè:

Le curve di genere $2k - 3$, $2k - 2$ sono sempre curve k -gonali generali; le prime contengono ∞^1 g_k^1 lineari speciali, le seconde ne contengono un numero finito.

b) È stato dal sig. CASTELNUOVO (Rend. dei Lincei, pag. 130-134, 1889) anche determinato il numero delle g_n^r esistenti sulla curva C_p generale nel suo genere, quando questo numero è finito: esso è eguale a

$$\frac{1! 2! \dots r! 1! 2! \dots (p - 1 + r - n)! p!}{1! 2! \dots (p + 2r - n)!};$$

per le g_k^1 questo numero diventa:

$$\frac{p!}{(p - k + 1)! (p - k + 2)!},$$

(BRILL e NOETHER, Math. Ann., Bd. 7, § 11) e quindi si ha il teorema:

Le curve k -gonali di genere $2k - 2$ hanno $\frac{(2k - 2)!}{(k + 1)! (k + 2)!}$ serie lineari speciali g_k^1 .

Così in particolare le curve, generali nel loro genere,

di genere 2 hanno una sola g_2^1 , che sulla C_2^4 è segata dalle rette che passano pel punto doppio;

quelle di genere 4 hanno 2 g_3^1 l'una residua dell'altra rispetto alla serie canonica g_3^3 segata dalle curve aggiunte C^{m-3} , che sulla C_4^5

con 2 punti doppi sono segate dalle rette che passano per ciascun punto doppio, ovvero sulla C^6 di S_3 , intersezione di una quadrica con una superficie di 3.° ordine, sono quelle segate dai due sistemi di generatrici della quadrica;

quelle di gen. 6 hanno 5 g_4^1 ed altrettante g_6^2 residue rispetto alla serie canonica g_{10}^5 segata dalle curve agg. C^{m-3} ; e nella C_6^6 con 4 punti doppi sono segate dai fasci di raggi che hanno per centri i 4 punti doppi, e dal fascio di coniche passanti per gli stessi punti doppi;

quelle di gen. 8 hanno 14 g_5^1 ed altrettante g_8^3 residue rispetto alla serie g_{14}^7 segata dalle C^{m-3} agg.;

quelle di gen. 10 hanno 42 g_6^1 ed altrettante g_{12}^4 residue rispetto alla serie g_{18}^9 segata dalle C^{m-3} agg.;

quelle di gen. 12 hanno 132 g_7^1 ed altrettante g_{15}^5 residue rispetto alla serie g_{22}^{11} segata dalle C^{m-3} agg.;

quelle di gen. 14 hanno 429 g_8^1 ed altrettante g_{18}^6 residue rispetto alla serie g_{26}^{13} segata dalle C^{m-3} agg.;

ecc. ecc.

quelle di gen. $2k - 2$ hanno $\frac{2k - 2}{(k + 1)!(k + 2)!} g_k^1$ ed altrettante $g_{3(k-2)}^{k-2}$ residue rispetto alla serie g_{4k-6}^{2k-3} segata dalle C^{m-3} agg.

§ 2. Rappresentazione piana delle curve k -gonali generali.

Abbiam visto che queste curve (eccezion fatta per le curve iperellittiche) hanno sempre più di una serie lineare g_k^1 : prendiamo nel piano due punti S, S' e riferiamo i gruppi di una g_k^1 ai raggi del fascio (S) , e quelli di un'altra g_k^1 ai raggi del fascio (S') , e consideriamo come omologhi due raggi di questi fasci che corrispondono a due gruppi delle serie che hanno un elemento comune. Si stabilisce con ciò fra i due fasci $(S), (S')$ una corrispondenza simmetrica (k, k) , e quindi essi generano una curva di ordine $2k$ che hanno in S, S' due punti k -upli. Ma osserviamo che per la formola di RIEMANN

$$r = (m - 1)(n - 1) - p,$$

che dà il numero delle coppie comuni a due serie g_m^1, g_n^1 esistenti su una curva di genere p , queste due serie g_k^1 hanno, secondo che la curva è di genere $2k - 3$ o $2k - 2$, rispettivamente

$$(k - 2)^2, \quad (k - 2)^2 - 1,$$

coppie comuni, numeri che per $k > 3$ sono sempre > 1 , nè le serie in generale possono avere altro che coppie comuni; dunque noi possiamo anche riferire i due fasci (S) (S') ai gruppi delle due serie in modo che il raggio SS' corrisponda ad una coppia comune, allora l'ordine della curva generata da essi è $2k - 2$, ed ha in S ed S' due punti $(k - 2)$ upli. La curva avrà, oltre questi punti $(k - 2)$ upli, anche altri punti multipli.

I casi di eccezione per $k = 2$, $k = 3$ hanno rappresentazione note.

Riassumendo si ha:

Le curve k -gonali generali (per $k > 3$) sono rappresentate rispettivamente dalle curve piane C_{2k-3}^{2k-2} , C_{2k-2}^{2k-2} (secondo che hanno un numero infinito o finito di g_k^1) provviste di due punti $(k - 2)$ upli.

È facile vedere, tenendo conto del § 3 della (C. a. m.), che queste curve hanno per curve aggiunte minime delle C^{m-1} ; che il numero ρ corrispondente a queste curve aggiunte può variare fra 0 e $k - 3$ (*); e che inoltre la dimensione del sistema formato da tutte le curve aggiunte C^{m-1} è per le suddette curve rispettivamente eguale a ρ , $\rho + 1$.

§ 3. Curve k -gonali singolari. Moduli.

Se il genere della curva C_p è $> 2k - 2$, la curva se è di moduli generali non può contenere una serie lineare g_k^1 ; quindi:

Se una curva di genere $p > 2k - 2$ contiene una serie g_k^1 essa è certamente singolare nel suo genere.

Ed è notevole che queste curve possono anche avere ∞g_k^1 , quantunque ce ne siano di genere inferiore che ne hanno in numero finito: un esempio ci vien dato dalla curva di ordine 6 priva di punti doppi, la C_{10}^6 ; essa è curva pentagonale singolare ed ha $\infty^1 g_5^1$, che sono segate dai fasci di rette che hanno i centri sulla curva.

Inoltre sono singolari le curve che pure avendo il genere $p = 2k - 2$ hanno un numero infinito di serie lineari g_k^1 invece di averne un numero finito. Un esempio è dato dalla curva C_5^5 priva di punti doppi che contiene $\infty^1 g_4^1$ invece di averne in numero finito. Quindi:

Le curve k -gonali singolari sono quelle che hanno il genere $p > 2k - 2$, e quelle che avendo il genere $p = 2k - 2$ hanno ∞g_k^1 .

(*) Il numero ρ rappresenta quante, fra le condizioni lineari cui debbono soddisfare le curve agg., sono dipendenti linearmente dalle rimanenti.

La determinazione dei moduli di queste curve è immediata: il numero degli elementi di diramazione della g_k^1 esistente sulla curva è $2(p + k - 1)$ ed i moduli sono dati dai birapporti che tre di questi elementi formano con gli altri, quindi i moduli sono $2(p + k) - 5$, allorché il numero delle g_k^1 esistenti sulla curva è finito. Chè se poi questo numero è infinito, è possibile trovare un elemento di diramazione (e se ne potranno avere in numero finito) in cui coincidono non due ma tre elementi di un gruppo, ed allora gli elementi di diramazione distinti sono invece $2(p + k) - 3$, e quindi i birapporti sono invece in numero di $2(p + k - 3)$.

Per le curve k -gonali generali si ritrova da queste formole che il numero dei loro moduli è $3p - 3$.

Cosicchè si ha in particolare che (tenendo conto della eccezione fatta dalle curve ellittiche):

le curve iperellittiche hanno	1	o	$2p - 1$	moduli
" trigonalì	" $2p$	o	$2p + 1$	"
" 4-gonali	" $2p + 2$	o	$2p + 3$	"
" 5-gonali	" $2p + 4$	o	$2p + 5$	"

ecc. ecc.

le curve k -gonali	" $2p + 2k - 6$	o	$2p + 2k - 5$	"
----------------------	-----------------	---	---------------	---

secondo che esse hanno un numero infinito o finito di serie g_k^1 .

Vedremo più innanzi, § 6, come si possano facilmente determinare questi birapporti nelle curve k -gonali tipiche.

§ 4. Curve aggiunte minime nelle curve k -gonali.

Nella (C. a. m.) abbiám dimostrato che data una curva piana C_p^m di ordine m e di genere p , e supposto che il passaggio delle curve aggiunte di ordine $m - 3 - \alpha$ per i punti multipli di C_p^m importi che delle condizioni lineari che essi rappresentano ρ siano dipendenti linearmente dalle altre rimanenti (oppure che la curva C_p^m sia proiezione di una curva normale di ordine $m\alpha$, di genere p di uno spazio $S_{\rho + \frac{\alpha(\alpha+3)}{2}}$) la dimensione del sistema for-

mato da tutte le curve aggiunte $C^{m-3-\alpha}$ è

$$R = p - 1 - \left(m\alpha - \frac{\alpha(\alpha + 3)}{2} \right) + \rho,$$

ove deve essere:

$$0 \leq \rho \leq \frac{\alpha}{2} (m - 3 - \alpha),$$

e che infine se la curva C_p^m non deve avere curve agg. di ord. $m - 3 - (\alpha + 1)$, il suo genere deve essere:

$$\rho \leq m(\alpha + 1) - \frac{(\alpha + 1)(\alpha + 4)}{2}.$$

Ora qui vogliamo dimostrare che se una curva è k -gonale, essa non può avere curve agg. di ordine inferiore ad un determinato numero e quindi che il genere delle curve k -gonali di dato ordine ha un massimo. È già noto ciò che riguarda le curve iperellittiche e trigonali, qui accenneremo brevemente ad esse.

a) $k = 2$. Le curve che appartengono alla prima famiglia (curve iperellittiche) non possono avere curve agg. di ordine $m - 4$; chè altrimenti una di queste con ogni retta del piano che passa per un punto a della curva C_p^m formerebbe una C^{m-3} agg., la quale passando per a dovrebbe passare anche pel coniugato a' della g_2^1 esistente su questa curva, e quindi ne avverrebbe che tutte le rette del piano che passano per a dovrebbero passare pel punto a' , e ciò è assurdo. Sicchè si hanno i due noti teoremi:

Le curve aggiunte minime delle curve iperellittiche sono le C^{m-3} .

Le curve iperellittiche debbono avere il genere $p \leq m - 2$.

b) $k = 3$. Che le curve di questa famiglia possano avere curve agg. C^{m-4} lo proveremo col mostrare le curve che ne sono provviste. Se una curva di questa famiglia ha almeno una C^{m-4} (per es. la C_5^8 per $\rho = 2$, la C_6^{10} per $\rho = 3$, ecc., ne hanno una sola), questa curva aggiunta con una qualunque retta del piano formerebbe una C^{m-3} agg. e quindi, se la retta passa per due punti a_1, a_2 di una terna della g_3^1 non appartenente alla C^{m-4} , essa deve passare anche pel punto coniugato a_3 : cosicchè *i gruppi della g_3^1 sono collineari*.

Se una curva di questa famiglia possiede ∞ C^{m-4} (per es. la C_5^5 con 1 p. d. ne ha ∞^1 , la C_{10}^9 con $\rho = 1$ ne ha ∞^3 , ecc.) ogni curva C^{m-4} che passa per un punto a_1 della curva C_p^m con ogni retta arbitraria che passa per a_2 deve costituire una C^{m-3} agg., la quale passando per a_1, a_2 deve pure passare

per a_3 , e poichè la retta in generale non passa per a_3 , deve passarci la C^{m-4} . Allo stesso modo si vede che la C^{m-4} deve pure passare per a_2 . Quindi:

Se la curva trigonale ha ∞ curve agg. C^{m-4} la g_3^4 esistente su questa deve essere segata da un fascio di curve C^{m-4} agg.

Le curve trigonali non possono avere curve agg. di ordine $m-5$; perchè se ne avessero una, questa con una retta arbitraria del piano formerebbe una C^{m-4} agg. e quindi ogni retta del fascio (a_1) dovrebbe passare per a_2 e a_3 ; e ciò è assurdo. Dunque:

Le curve aggiunte minime delle curve trigonali sono le C^{m-4} .

Le curve trigonali debbono avere il genere $p \leq 2m-5$.

c) Passiamo ora al caso generale. Che le curve k -gonali possano avere curve agg. di ordine $m-3-(k-2)$ lo proveremo in seguito mostrandone la esistenza.

Supponiamo che una curva k -gonale ne avesse ∞ ; per un punto a_1 della curva C_p^m preso fuori dei punti multipli ne passerà almeno una, e questa con una arbitraria C^{k-2} del piano che non passi per i punti multipli della C_p^m , nè per a_1 , e passi per $k-2$ punti del gruppo della g_k^4 individuato dal punto a_1 , costituisce una C^{m-3} agg., che, passando per $k-1$ punti del gruppo, deve passare pel k^{mo} punto, e siccome per questo punto non ci passa la C^{k-2} , deve passarci la $C^{m-3-(k-2)}$ agg. Potendo il k^{mo} punto essere uno qualunque del gruppo, ne risulta che la curva $C^{m-3-(k-2)}$ agg. che passa per a_1 passa per tutti gli altri punti del gruppo. Cioè:

Le serie g_k^4 è in questo caso segata da un fascio di $C^{m-3-(k-2)}$ agg.

Inoltre questi gruppi debbono essere collineari e ciò anche quando esista una sola $C^{m-3-(k-2)}$. Infatti, consideriamo un gruppo della g_k^4 non appartenente alla (o a una determinata) $C^{m-3-(k-2)}$, e sia questo gruppo $a_1 a_2 a_3 \dots a_{k-1} a_k$. Per $a_3 \dots a_{k-1}$ conduciamo $k-3$ rette arbitrarie, ciascuna delle quali non contenga altro punto del gruppo; queste insieme alla retta $a_1 a_2$ ed alla $C^{m-3-(k-2)}$ considerata formano una C^{m-3} agg., che deve passare per a_k , poichè già passa per i $k-1$ punti citati; ma per a_k non ci passa la $C^{m-3-(k-2)}$, nè le $k-3$ rette suddette, dunque deve passarci la retta $a_1 a_2$. E siccome possiamo chiamare a_k uno qualunque dei punti del gruppo diverso da $a_1 a_2$, ne risulta che tutti questi punti stanno per diritto. Sicchè:

Se la curva k -gonale possiede almeno una curva agg. $C^{m-3-(k-2)}$ i gruppi della g_k^4 sono collineari.

Infine, le curve k -gonali non possono avere curve aggiunte di ordine $m-3-(k-1)$; poichè se esse avessero almeno una curva $C^{m-3-(k-1)}$ agg.,

questa con una retta del piano arbitraria costituirebbe una $C^{m-3-(k-2)}$ agg., e quindi ogni retta del piano che passa per un punto a_1 di un gruppo G_k della g_k^1 esterno alla $C^{m-3-(k-1)}$ dovrebbe passare pure per gli altri punti coniugati del gruppo, e ciò è assurdo. Dunque:

Le curve aggiunte minime delle curve k -gonali sono le $C^{m-3-(k-2)}$.

Le curve k -gonali debbono avere il genere $p \leq (k-1)m - \frac{(k-1)(k+2)}{2}$.

I limiti che abbiamo trovati per il genere delle curve k -gonali ci permettono di assegnare un limite inferiore per l'ordine delle curve k -gonali. Poichè deve essere necessariamente $2k-3 \leq (k-1)m - \frac{(k-1)(k+2)}{2}$, da cui si ricava $m \geq \frac{k+6}{2} - \frac{1}{k-1}$.

Se però le curve k -gonali hanno curve agg. dell'ordine minimo, è evidente che l'ordine della curva dovrà essere necessariamente $\geq k+1$.

d) Si può anche notare che una caratteristica delle curve k -gonali piane è la seguente:

Le serie lineari determinate su esse dai sistemi lineari di curve di ordine $\leq k-2$ del piano della curva sono speciali, mentre non sono speciali le serie determinate su di esse dalle curve del piano di ordine $\geq k-1$.

e) Tenendo conto di quanto è detto nel § 3 della (C. a. m.) si ha il seguente teorema:

Se il numero dei punti doppi di una curva piana semplice di ordine m è $< \frac{1}{2}(m-k)(m-k-1)$ la curva non è k -gonale.

Così per es. la curva piana semplice di ordine 10 con meno di 10 punti doppi, non può essere *pentagonale*; la curva di ordine 6 priva di punti doppi (generale nel suo ordine) non può essere 4-gonale, ecc. ecc.

In generale: *Le curve di ordine $k+2$, generali nel loro ordine, non possono essere k -gonali.*

Di questo teorema è caso particolare il notissimo teorema che riguarda la quartica priva di punti doppi.

È facile anche verificare che *le curve k -gonali generali non possono mai avere curve aggiunte dell'ordine minimo, qualunque sia il loro ordine.*

§ 5. Involuppi delle serie g_k^1 .

a) Il genere della curva k -gonale sia:

$$p = (k-1)m - \frac{1}{2}(k-1)(k+2) - \epsilon, \quad (1)$$

con l'ordine

$$m \geq \frac{k+6}{2} - \frac{1}{k-1},$$

e supponiamo dapprima che la curva C_p^m non abbia curve agg. di ordine $m-3-(k-2)$. Sostituendo a p il suo valore nella formola $\nu = 2(p+k-1)$, che dà il numero dei punti di diramazione della g_k^1 , si ha:

$$\nu = 2(k-1)m - k(k-1) - 2\theta.$$

Si proietti la g_k^1 da un punto O del piano e nel fascio di centro O stabiliamo una corrispondenza in cui siano omologhi due raggi che proiettano due punti di un gruppo della g_k^1 . Ad un raggio di O , corrispondono $(k-1)m$ altri raggi di O , quindi la corrispondenza che è razionale e simmetrica, è di indice $(k-1)m$, e perciò ha $2(k-1)m$ coincidenze. Una coincidenza è data o da uno degli ν punti di diramazione della g_k^1 o da una retta che congiunge due punti di uno stesso gruppo, la quale conta per due nel numero delle coincidenze; se queste rette sono in numero di y , si ha la relazione:

$$2y + \nu = 2(k-1)m,$$

quindi:

$$y = \frac{k(k-1)}{2} + \theta.$$

Si ha dunque:

L'involuppo delle rette che congiungono a due a due i punti di uno stesso gruppo di una serie g_k^1 , esistente sopra una curva k -gonale priva di curve aggiunte di ordine minimo, è di classe

$$\frac{k(k-1)}{2} + \theta \quad (*).$$

Se vi fossero z punti coniugati coincidenti in uno stesso punto multiplo

(*) È facile trovare il limite superiore di θ .

di C_p^m e in diversi rami di questo sarebbe $y - z$ il numero delle rette che stiamo considerando.

b) Se poi la curva C_p^m possiede curve agg. $C^{m-3-(k-2)}$, i gruppi della g_k^4 sono collineari e quindi ogni retta dell'involuppo Γ che passa per O , contenendo k punti del gruppo, conta per $k(k-1)$ coincidenze della corrispondenza individuata in O , e quindi si ha la relazione:

$$k(k-1)y + \nu = 2(k-1)m,$$

cioè

$$y = 1 + \frac{2\theta}{k(k-1)},$$

e poichè y deve essere un numero intero deve aversi

$$\theta = t \frac{k \cdot k - 1}{2},$$

essendo t un numero essenzialmente intero e positivo.

Già sappiamo (§ 3 della C. a. m.) che il genere che può avere una curva che ha curve agg. di ordine $m-3-(k-2)$, è, per opportuni valori di ρ ,

$$p \cong \frac{m(k-2)}{2} + 1,$$

paragonando questo con la (1) si ha pure che deve essere:

$$\theta \leq \frac{k}{2}(m-k-1),$$

e quindi:

$$t \leq \frac{m-k-1}{k-1}.$$

Dunque:

Il genere delle curve C_p^m k -gonali, che sono provviste di curve aggiunte di ordine minimo, non può essere arbitrariamente scelto fra i limiti conosciuti: esso può essere solamente dato da

$$p = (k-1)m - \frac{1}{2}(k-1)(k+2) - \frac{k(k-1)}{2}t,$$

per $t = 0, 1, 2, \dots, \frac{m-k-1}{k-1}$, ed allora nella curva C_p^m k -gonale l'involuppo delle rette che segano la g_k^4 è di classe $y = 1 + t$.

c) Per queste curve C_p^m la g_N^R canonica segata dalle $C^{m-3-(k-2)}$ avrà (§ 1, C. a. m.):

$$N = k[(m - k - 1) - (k - 1)t]$$

$$R = (m - k - 1) - \frac{k(k-1)}{2}t + \rho.$$

Siccome però ogni curva $C^{m-3-(k-2)}$, che passa per un punto a_1 della C_p^m , passa per gli altri $k - 1$ punti del gruppo individuato da a_1 , ne risulta che la dimensione delle curve $C^{m-3-(k-2)}$ non può essere maggiore di $\frac{N}{k}$ cioè di

$$(m - k - 1) - (k - 1)t,$$

chè altrimenti le curve aggiunte segherebbero in un numero di punti maggiore di N . Nè (quando il sistema delle curve $C^{m-3-(k-2)}$ agg. non ha punti fissi sulla C_p^m fuori dei punti multipli, al qual caso qui ci limitiamo) la dimensione R può essere minore di questo numero, poichè se la dimensione fosse

$$R_1 = (m - k - 1) - (k - 1)t - \beta,$$

avverrebbe che ogni $C^{m-3-(k-2)}$ tirata per R_1 punti arbitrarii segherebbe la curva C_p^m in kR_1 punti, e resterebbero ancora $k\beta$ punti disponibili, ed allora per altri $\beta - 1$ punti passerebbero ∞ curve $C^{m-3-(k-2)}$ e perciò la dimensione delle curve $C^{m-3-(k-2)}$ sarebbe maggiore di R_1 , contro l'ipotesi, a meno che i $k\beta$ punti non fossero punti fissi, ciò che abbiamo già escluso.

Paragonando si ha:

$$(m - k - 1) - (k - 1)t = (m - k - 1) - \frac{k(k-1)}{2}t + \rho,$$

e quindi si trova che deve essere:

$$\rho = \frac{1}{2}(k - 1)(k - 2)t.$$

Possiamo quindi concludere col seguente teorema:

Allorquando le curve $C^{m-3-(k-2)}$ agg. alla curva C_p^m di genere

$$p = (k - 1)m - \frac{1}{2}(k - 1)(k + 2) - \frac{1}{2}k(k - 1)t,$$

e per le quali il numero $\rho = \frac{1}{2}(k - 1)(k - 2)t$, non segano la curva C_p^m in punti fissi fuori dei punti multipli, la dimensione delle curve aggiunte è $R = (m - k - 1) - (k - 1)t$ e il sistema di queste curve determina sulla C_p^m

una serie lineare completa g_{kR}^R ; la quale è composta mediante i gruppi della g_k^1 che la curva possiede.

Queste curve k -gonali sono rappresentabili mediante curve razionali normali di uno S_R considerate come k -uple, con $(k-1)[2m-k-kt]$ punti di diramazione.

Questo teorema, del quale è noto il caso particolare riguardante le curve iperellittiche, mostra quanta stretta analogia vi esista tra la famiglia delle curve iperellittiche e le altre infinite famiglie di curve *trigonali*, *4-gonali*, *5-gonali*, ecc. ecc. provviste di curve agg. di ordine minimo. Il loro studio e le loro proprietà si riducono sempre a quelle notissime delle curve razionali normali di uno S_R .

Se le stesse curve C_p^m con lo stesso genere p e lo stesso numero p non hanno la serie g_k^1 , esse sono rappresentabili mediante una curva di genere p , di ordine kR dello stesso spazio S_R (vedi § 5 della C. a. m.).

§ 6. Curve k -gonali di genere massimo nel loro ordine.

a) Allorquando il genere di una curva k -gonale di un determinato ordine è massimo si ha $t=0$, e quindi l'inviluppo delle rette che segano sulla curva la g_k^1 è un fascio di raggi, e poichè ogni retta deve segare la curva in k punti variabili, i rimanenti $m-k$ punti di intersezione della retta con la curva C_p^m devono essere riuniti in un solo e perciò la curva deve avere un punto $(m-k)$ uplo. Se l'ordine della curva raggiunge il minimo, cioè è $=k+1$, il centro del fascio sarà un punto semplice della curva, e quindi la curva avrà ∞^1 serie lineari g_k^1 ; per $m > k+1$ ve ne dovrà essere una sola.

Viceversa una curva di ordine m , che abbia un punto $(m-k)$ uplo (per $m \geq k+1$) deve essere precisamente di genere

$$p = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - \frac{(m-k)(m-k-1)}{2} = (k-1)m - \frac{1}{2}(k-1)(k+2),$$

e tutte le rette che passano per questo punto segano su essa una g_k^1 e la curva è k -gonale. La geometria di queste curve che diremo *curve k -gonali tipiche* equivale a quella di una retta k -upla con $(k-1)(2m-k)$ punti di diramazione.

b) Le curve agg. $C^{m-3-(k-2)}$ che queste curve debbono avere sono dell'ordine eguale alla molteplicità del punto che debbono avere nel punto

$(m - k)$ uplo della curva e quindi sono formate dalle rette del fascio prese a $m - k - 1$ a $m - k - 1$. La serie canonica da esse segata è una $g_{k(m-k-1)}^{m-k-1}$, composta mediante la g_k . Fa eccezione il caso di $m = k + 1$, che abbiamo già considerato sopra.

c) Si può dunque concludere che:

Per ogni valore dell'ordine $m \geq k + 1$, vi è sempre una curva k -gonale tipica, il cui generè è

$$p = (k - 1)m - \frac{1}{2}(k - 1)(k + 2).$$

Fatta eccezione per le curve iperellittiche, le altre famiglie di curve k -gonali non hanno in ogni genere una curva tipica.

Le curve k -gonali tipiche più semplici sono: la curva $C_{\frac{k(k-1)}{2}}^{k+1}$ che è priva di punti doppi ed ha ∞^1 serie lineari g_k segate dai fasci di raggi che hanno per centro un punto della curva; la curva $C_{\frac{(k-1)(k+2)}{2}}^{k+2}$ che ha un sol punto doppio ed una sola g_k lineare.

d) QUADRO DELLE CURVE k -GONALI TIPICHE.

Serie canonica	∞g_k^1	g_k^1	g_{2k}^2	g_{3k}^3	g_{4k}^4	g_{5k}^5	g_{6k}^6	g_{7k}^7	g_{8k}^8	g_{9k}^9	g_{10k}^{10}	g_{11k}^{11}	g_{12k}^{12}	g_{13k}^{13}	g_{14k}^{14}	g_{15k}^{15}	
Punto multiplo	0	1 p. doppio	1 p. triplo	1 p. 4uplo	1 p. 5uplo	1 p. 6uplo	1 p. 7uplo	1 p. 8uplo	1 p. 9uplo	1 p. 10uplo	1 p. 11uplo	1 p. 12uplo	1 p. 13uplo	1 p. 14uplo	1 p. 15uplo	1 p. 16uplo	
Curve iperellit. ^o	C	C^4	C^5 ₈	C^6 ₄	C^7 ₅	C^8	C^9 ₇	C^{10} ₈	C^{11}	C^{12} ₁₀	C^{13} ₁₁	C^{14} ₁₂	C^{15} ₁₃	C^{16} ₁₄	C^{17} ₁₅	C^{18} ₁₆	ecc.
Curve 3-gonali	C^4 ₈	C^5 ₅	C^6 ₇	C^7 ₉	C^8 ₁₁	C^{13} ₁₈	C^{10} ₁₅	C^{11} ₁₇	C^{12} ₁₉	C^{13} ₂₁	C^{14} ₂₃	C^{15} ₂₅	C^{16} ₂₇	C^{17} ₂₉	C^{18} ₃₁	C^{19} ₃₃	ecc.
Curve 4-gonali	C^5 ₆	C^6 ₉	C^7 ₁₂	C^8 ₁₅	C^9 ₁₈	C^{10} ₂₁	C^{11} ₂₄	C^{12} ₂₇	C^{13} ₃₀	C^{14} ₃₃	C^{15} ₃₆	C^{16} ₃₉	C^{17} ₄₂	C^{18} ₄₅	C^{19} ₄₈	C^{20} ₅₁	ecc.
Curve 5-gonali	C^6 ₁₀	C^7 ₁₄	C^8 ₁₈	C^9 ₂₂	C^{10} ₂₆	C^{11} ₃₀	C^{12} ₃₄	C^{13} ₃₈	C^{14} ₄₂	C^{15} ₄₆	C^{16} ₅₀	C^{17} ₅₄	C^{18} ₅₈	C^{19} ₆₂	C^{20} ₆₆	C^{21} ₇₀	ecc.
Curve 6-gonali	C	C ₂₀	C	C^{10} ₃₀	C^{11} ₃₅	C^{12} ₄₀	C^{13} ₄₅	C^{14} ₅₀	C^{15} ₅₅	C^{16} ₆₀	C^{17} ₆₅	C^{18} ₇₀	C^{19} ₇₅	C^{20} ₈₀	C^{21} ₈₅	C^{22} ₉₀	ecc.
Curve 7-gonali	C^8 ₂₁	C^9 ₂₇	C^{10} ₃₃	C^{11} ₃₉	C^{12} ₄₅	C^{13} ₅₁	C^{14} ₅₇	C^{15} ₆₃	C^{16} ₆₉	C^{17} ₇₅	C^{18} ₈₁	C^{19} ₈₇	C^{20} ₉₃	C^{21} ₉₉	C^{22} ₁₀₅	C^{23} ₁₁₁	ecc.
Curve 8-gonali	C^9 ₂₈	C^{10} ₃₅	C^{11} ₄₂	C^{12} ₄₉	C^{13} ₅₄	C^{14} ₆₃	C^{15} ₇₀	C^{16} ₇₇	C^{17} ₈₄	C^{18} ₉₁	C^{19} ₉₈	C^{20} ₁₀₅	C^{21} ₁₁₂	C^{22} ₁₁₉	C^{23} ₁₂₆	C^{24} ₁₃₃	ecc.
Curve 9-gonali	C^{10} ₃₆	C^{11} ₄₄	C^{12} ₅₂	C^{13} ₆₀	C^{14} ₆₈	C^{15} ₇₆	C^{16} ₈₄	C^{17} ₉₂	C^{18} ₁₀₀	C^{19} ₁₀₈	C^{20} ₁₁₆	C^{21} ₁₂₄	C^{22} ₁₃₂	C^{23} ₁₄₀	C^{24} ₁₄₈	C^{25} ₁₅₆	ecc.
Curve 10-gonali	C^{11} ₄₅	C^{12} ₅₄	C^{13} ₆₃	C^{14} ₇₂	C^{15} ₈₁	C^{16} ₉₀	C^{17} ₉₉	C^{18} ₁₀₈	C^{19} ₁₁₇	C^{20} ₁₂₆	C^{21} ₁₃₅	C^{22} ₁₄₄	C^{23} ₁₅₃	C^{24} ₁₆₂	C^{25} ₁₇₁	C^{26} ₁₈₀	ecc.
Curve 11-gonali	C^{12} ₅₅	C^{13} ₆₅	C^{14} ₇₅	C^{15} ₈₅	C^{16} ₉₅	C^{17} ₁₀₅	C^{18} ₁₁₅	C^{19} ₁₂₅	C^{20} ₁₃₅	C^{21} ₁₄₅	C^{22} ₁₅₅	C^{23} ₁₆₅	C^{24} ₁₇₅	C^{25} ₁₈₅	C^{26} ₁₉₅	C^{27} ₂₀₅	ecc.
Curve 12-gonali	C^{13} ₆₆	C^{14} ₇₇	C^{15} ₈₈	C^{16} ₉₉	C^{17} ₁₁₀	C^{18} ₁₂₁	C^{19} ₁₃₂	C^{20} ₁₄₃	C^{21} ₁₅₄	C^{22} ₁₆₅	C^{23} ₁₇₆	C^{24} ₁₈₇	C^{25} ₁₉₈	C^{26} ₂₀₉	C^{27} ₂₂₀	C^{28} ₂₃₁	ecc.
Curve 13-gonali	C^{14} ₇₈	C^{15} ₉₀	C^{16} ₁₀₂	C^{17} ₁₁₄	C^{18} ₁₂₆	C^{19} ₁₃₈	C^{20} ₁₅₀	C^{21} ₁₆₂	C^{22} ₁₇₄	C^{23} ₁₈₆	C^{24} ₁₉₈	C^{25} ₂₁₀	C^{26} ₂₂₂	C^{27} ₂₃₄	C^{28} ₂₄₆	C^{29} ₂₅₈	ecc.
Curve 14-gonali	C^{15} ₉₁	C^{16} ₁₀₄	C^{17} ₁₁₇	C^{18} ₁₃₀	C^{19} ₁₄₃	C^{20} ₁₅₆	C^{21} ₁₆₉	C^{22} ₁₈₂	C^{23} ₁₉₅	C^{24} ₂₀₈	C^{25} ₂₂₁	C^{26} ₂₃₄	C^{27} ₂₄₇	C^{28} ₂₆₀	C^{29} ₂₇₃	C^{30} ₂₈₆	ecc.
Curve 15-gonali ecc. ecc.	C^{16} ₁₀₅	C^{17} ₁₁₉	C^{18} ₁₃₃	C^{19} ₁₄₇	C^{20} ₁₆₁	C^{21} ₁₇₅	C^{22} ₁₈₉	C^{23} ₂₀₃	C^{24} ₂₁₇	C^{25} ₂₃₁	C^{26} ₂₄₅	C^{27} ₂₅₉	C^{28} ₂₇₃	C^{29} ₂₈₇	C^{30} ₃₀₁	C^{31} ₃₁₅	ecc.

A modo: Curve h -gonali.

Oltre delle curve k -gonali riunite in questo quadro non vi sono altre curve k -gonali, che, essendo dello stesso ordine e dello stesso genere, non abbiano i punti multipli riuniti in un solo punto $(m - k)$ uplo, poichè se una tal curva ci fosse l'involuppo delle rette che segano la g_k^4 sarebbe di classe maggiore di uno.

È da notare che fra le curve k -gonali tipiche si trovano solo tre curve generali nel loro genere e sono la C_1^3 C_2^4 delle curve iperellittiche, e la C_3^4 delle curve trigonali, che si comportano come tutte le infinite altre curve k -gonali che stanno nella stessa colonna.

I moduli di queste curve sono assegnati allorquando sono assegnati i birapporti che tre delle $2(p + k - 1)$ tangenti, che dal punto $(m - k)$ uplo si possono condurre alla curva, formano con tutte le altre.

Napoli, giugno 1893.

Ricerche sulle forme quaternarie quadratiche e sui gruppi poliedrici.

(Di LUIGI BIANCHI, a Pisa.)

Nei miei due ultimi lavori: *Sui gruppi di sostituzioni lineari a coefficienti complessi*, inseriti nei vol. i 42, 43 dei « *Mathematische Annalen* », ho indicato come alla teoria di questi gruppi si collega lo studio aritmetico delle forme quadratiche quaternarie, riducibili con trasformazione lineare reale al tipo

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_4^2.$$

È questa un'estensione del notevole principio stabilito dal sig. POINCARÉ (*), mediante il quale al gruppo aritmetico riproduttivo di una forma aritmetica ternaria indefinita (**), si può porre in corrispondenza isomorfa un gruppo propriamente discontinuo di sostituzioni lineari sopra una variabile z

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

a coefficienti *reali*. Così col gruppo aritmetico riproduttivo di una forma quaternaria del tipo indicato sta in corrispondenza isomorfa un gruppo discontinuo di sostituzioni lineari a coefficienti complessi. D'altra parte questo secondo gruppo dà luogo, secondo i principii fondamentali stabiliti dallo stesso POINCARÉ nel 3.º vol. degli « *Acta Mathematica* », ad una divisione regolare dello spazio non-euclideo in poliedri simmetrici o congruenti: esso è, come diremo, un *gruppo poliedrico*. Per tal modo al gruppo aritmetico riproduttivo di ogni

(*) *Les fonctions fuchsienues et l'arithmétique*, Journal de Mathématiques, serie 4.^a tom. 3.º, 1887.

(**) Per forma *aritmetica* intendiamo una forma a coefficienti razionali interi; *gruppo aritmetico riproduttivo* della forma diciamo il gruppo formato da quelle sostituzioni lineari omogenee a coefficienti razionali interi, che cangiano la forma in sè medesima.

forma quaternaria quadratica (del tipo considerato) corrisponde una divisione regolare dello spazio non-euclideo; ciascun poliedro della divisione si dirà brevemente un *poliedro fondamentale della forma*.

Quando si voglia costruire una teoria aritmetica di siffatte forme, s'intende quale importanza avrà il problema:

Assegnata una forma aritmetica quaternaria (), costruirne il poliedro fondamentale.*

La risoluzione di questo problema ci porrebbe infatti in grado di rispondere alle due questioni fondamentali della teoria dell'equivalenza e cioè: 1.^a date due forme quaternarie, di egual discriminante, giudicare se sono equivalenti o no; 2.^a per due forme quaternarie equivalenti trovare tutte le sostituzioni che trasformano l'una nell'altra.

Scopo appunto del presente lavoro è la trattazione del problema fondamentale enunciato. Lo studio di una classe particolare di gruppi poliedrici ci porrà in grado di trattare sistematicamente il problema per le forme quaternarie del tipo

$$x_1^2 + x_2^2 + \mu(x_3^2 - \nu x_4^2),$$

essendo μ, ν numeri razionali interi. Con eguale successo si potrebbero trattare le forme del tipo

$$x_1^2 + Dx_2^2 + \mu(x_3^2 - \nu x_4^2),$$

e dell'altro:

$$\mu(\nu x_1^2 + Dx_2^2) + \nu x_3^2 - x_4^2,$$

dove μ, ν, D sono razionali interi arbitrarii.

Ma la limitazione della ricerca nel senso indicato mi è stata consigliata dal desiderio di non dare soverchia estensione al presente lavoro e dalla considerazione che gli esempi trattati, i quali ci condurranno alla determinazione completa del gruppo aritmetico riproduttivo per 7 forme quaternarie speciali, erano sufficienti per caratterizzare il metodo. Del resto tanto nel presente lavoro, come nei precedenti, si trovano gli elementi necessari per un'ulteriore trattazione del soggetto, che sembra egualmente interessante per la teoria dei numeri come per l'analisi. Così, seguendo il metodo del presente lavoro e

(*) Qui, ed in seguito, sottintendiamo sempre che la forma sia riducibile con trasformazione lineare reale al tipo

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_4^2,$$

per il che è necessario e sufficiente che il suo discriminante sia negativo.

utilizzando i risultati da me ottenuti nei vol. i 40, 42 dei « *Mathem. Annalen* », si può determinare completamente il gruppo aritmetico riproduttivo delle forme quaternarie:

$$x_1^2 + Dx_2^2 - x_3x_4,$$

per tutti quei valori di D , che danno luogo ai gruppi ivi considerati.

§ 1. Considerazioni geometriche fondamentali (*).

Sia data una forma *aritmetica* quaternaria

$$f = \sum_{r,s} a_{rs} x_r x_s \quad (r, s = 1, 2, 3, 4), \quad (1)$$

(i cui coefficienti a_{rs} siano adunque razionali interi), riducibile con trasformazione lineare reale al tipo

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_4^2,$$

cioè a discriminante negativo.

Interpretando le variabili x_1, x_2, x_3, x_4 come coordinate omogenee di un punto dello spazio, riferito ad un tetraedro fondamentale: *l'equazione $f=0$ ci rappresenterà una quadrica reale a generatrici immaginarie.*

Consideriamo ora una sostituzione:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= b_{11}x'_1 + b_{12}x'_2 + b_{13}x'_3 + b_{14}x'_4 \\ x_2 &= b_{21}x'_1 + b_{22}x'_2 + b_{23}x'_3 + b_{24}x'_4 \\ x_3 &= b_{31}x'_1 + b_{32}x'_2 + b_{33}x'_3 + b_{34}x'_4 \\ x_4 &= b_{41}x'_1 + b_{42}x'_2 + b_{43}x'_3 + b_{44}x'_4 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

del gruppo aritmetico riproduttivo di f , supponiamo cioè che i coefficienti b di questa sostituzione, che trasforma f in sè stessa, siano razionali interi.

Il determinante B delle b :

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix}$$

(*) Per le considerazioni di questo e del paragrafo seguente basterà consultare: KLEIN, *Ueber die sogenannte nicht-Euklidische Geometrie*. *Mathem. Annalen*, Bd. 4. — CLEBSCH-LINDEMANN, *Vorlesungen über Geometrie*. Bd. 2, pag. 494 ss.

deve necessariamente eguagliare l'unità positiva o negativa; le collineazioni della quadrica $f=0$ in sè stessa con $B=+1$ si distinguono essenzialmente da quelle con $B=-1$.

Nelle prime le due serie di generatrici (immaginarie) della quadrica restano singolarmente invariate, laddove per le seconde si scambiano fra loro. Diremo le collineazioni con $B=+1$ di *1.^a specie*, quelle con $B=-1$ di *2.^a specie*. È chiaro che, entro il gruppo riproduttivo di f , le collineazioni di *1.^a specie* formano un sottogruppo eccezionale d'indice 2.

In ogni collineazione di *1.^a specie* del gruppo considerato vi sono sempre due e due soli punti reali della quadrica $f=0$, in generale distinti, che rimangono fissi. La retta r congiungente questi due punti e la sua polare reciproca r' rispetto alla quadrica rimangono pure fisse. Se tutti i punti della retta r restano fissi, la collineazione dicesi *ellittica* ed invece *iperbolica* quando restano fissi tutti i punti di r' (*). Se non ha luogo nè l'un caso nè l'altro, la collineazione prende in generale il nome di *lossodromica*.

Quando i due punti fissi di $f=0$, sinora supposti distinti, vengono a coincidere, la retta r diventa una tangente della quadrica e tutti i suoi punti rimangono fissi; allora la collineazione dicesi *parabolica*. Si vede subito che se la collineazione (2) di *1.^a specie* riproduttiva di f è parabolica, le coordinate del punto fisso su $f=0$ si calcolano razionalmente per le a e per le b : nel caso nostro possono dunque senz'altro assumersi eguali a numeri interi.

Ne segue: *Nel gruppo aritmetico riproduttivo di una forma quaternaria f non possono presentarsi collineazioni paraboliche, se non quando la forma f è suscettibile di rappresentare lo zero.*

Fra le collineazioni di *2.^a specie* riproduttive della forma f interessano specialmente quelle a periodo 2 cioè le *omologie armoniche*, nelle quali tutti i punti di un piano e inoltre il suo polo rispetto alla quadrica $f=0$ rimangono fissi. Esse debbono distinguersi in due categorie, a seconda che il polo P è esterno o interno alla quadrica. Nel 1.^o caso rimangono fissi sulla quadrica infiniti punti reali, situati sulla conica che ne segna il contorno apparente rispetto al punto P , nel 2.^o caso nessun punto, mentre un solo punto interno, il punto P , rimane fisso.

(*) Può darsi che restino fissi e i punti di r e quelli di r' ; allora la sostituzione ripetuta due volte dà l'identità, ed è *ellittica a periodo 2*.

§ 2. Interpretazione nello spazio non-euclideo.

Prendiamo ora la $f=0$ a quadrica fondamentale (assoluto) di una determinazione metrica non-euclidea (iperbolica); i punti interni alla quadrica rappresentano i punti reali e a distanza finita dello spazio non-euclideo, i punti sulla quadrica rappresentano i punti all'infinito, mentre ai punti esterni corrispondono solo punti *ideali* dello spazio non-euclideo.

Le collineazioni di 1.^a specie della quadrica in sè medesima rappresentano, per lo spazio non-euclideo, puri movimenti, quelle di 2.^a specie movimenti combinati con riflessioni. In particolare le collineazioni di 2.^a specie a periodo 2 sono *pure riflessioni* (Spiegelungen), che si distinguono, come sopra, in due categorie, secondochè il piano di riflessione contiene o no punti effettivi dello spazio non-euclideo.

Se consideriamo il gruppo aritmetico riproduttivo della forma f , i piani di riflessione corrispondenti, solcano, infiniti in numero, lo spazio non-euclideo. E nei casi più semplici è possibile limitare, nell'interno della quadrica $f=0$, con un numero finito di piani di riflessione un poliedro, che nessun altro piano di riflessione attraversa. Facendo subire a questo poliedro, sopra ciascuna sua faccia, una riflessione (nel senso non-euclideo) e medesimamente operando sui nuovi poliedri ottenuti indefinitamente, si riempie una ed una sola volta l'intero spazio non-euclideo con poliedri, tutti limitati da piani di riflessione, alternatamente simmetrici e congruenti. Le loro faccie, complessivamente considerate, danno tutti i piani di riflessione esistenti nel gruppo. Fra i vertici di ciascuno di questi poliedri si distinguono quelli situati sulla quadrica $f=0$, cioè all'infinito nello spazio non-euclideo; li diremo *vertici singolari*. I vertici singolari mancano affatto se il gruppo non contiene sostituzioni paraboliche.

Consideriamo uno di questi poliedri P ; le riflessioni sulle sue faccie combinate fra loro danno luogo, come sostituzioni generatrici, ad un gruppo Γ che è evidentemente un sottogruppo del gruppo aritmetico G riproduttivo della forma f . È facile vedere che: Γ è in ogni caso sottogruppo eccezionale d'indice finito n in G . Esso è eccezionale perchè, trasformando un'omologia armonica con una collineazione qualsiasi, si ottiene sempre una nuova omologia armonica; il suo indice n eguaglia l'ordine, necessariamente finito, del gruppo di collineazioni che riportano il poliedro P in sè medesimo. Questo gruppo finito, astrattamente considerato, coincide con uno dei ben noti gruppi dei poliedri regolari, della piramide regolare o del diedro.

Quando sia data effettivamente una forma aritmetica quaternaria f e se ne voglia determinare il poliedro fondamentale, tutta la difficoltà della ricerca sta adunque nel trovare e classificare i diversi tipi di riflessioni esistenti nel suo gruppo riproduttivo e nel limitare con piani di riflessione uno dei poliedri P , di cui sopra è discorso.

Le considerazioni precedenti bastano, mi sembra, a render ragione del nesso che esiste fra la teoria aritmetica delle forme quaternarie e quelle dei gruppi poliedrici (*). Ma il metodo che terremo nel presente lavoro sarà più particolare e diretto specialmente a trattare quelle speciali forme quaternarie di cui è parola nella Prefazione.

§ 3. Le sostituzioni lineari sopra una variabile e le loro corrispondenti quaternarie.

Convieni anzi tutto che sviluppiamo le formole, mediante le quali ad una sostituzione riproduttrice della forma quaternaria f si può far corrispondere una sostituzione lineare sulla variabile complessa z :

$$z = \frac{\alpha z' + \beta}{\gamma z' + \delta}, \quad (3)$$

dove supporremo senz'altro, come è lecito:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Adopererò a questo scopo il processo, di cui già mi sono servito nel vol. 42 dei « Mathem. Annalen », con una leggiera modificazione di forma.

Scindendo z nel quoziente di due variabili omogenee

$$z = \frac{\xi}{\eta},$$

e similmente ponendo:

$$z' = \frac{\xi'}{\eta'},$$

scriviamo la (3) sotto forma omogenea

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \alpha\xi' + \beta\eta', \\ \eta &= \gamma\xi' + \delta\eta', \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

(*) Sostituendo alla forma quaternaria una ternaria indefinita e alle considerazioni dello spazio quelle del piano non-euclideo, si perviene al principio di POINCARÉ, come venne illustrato dal FRICKE nel vol. 38 dei Mathem. Annalen: *Ueber eine besondere Classe discontinuierlicher Gruppen* etc. In un secondo lavoro, che farà seguito al presente, tratterò delle forme ternarie riprendendo e generalizzando le ricerche del FRICKE.

sicchè si abbia contemporaneamente sulle variabili coniugate $\xi_0 \eta_0$ la sostituzione coniugata (*):

$$\left. \begin{aligned} \xi_0 &= \alpha_0 \xi'_0 + \beta_0 \eta'_0 \\ \eta_0 &= \gamma_0 \xi'_0 + \delta_0 \eta'_0. \end{aligned} \right\} \quad (4^*)$$

Indicando ora con u_1, u_2, u_3, u_4 quattro indeterminate *reali*, consideriamo la forma quadratica di HERMITE a variabili coniugate:

$$F = (u_1 + u_4)\xi\xi_0 + (u_2 + iu_3)\xi\eta_0 + (u_2 - iu_3)\xi_0\eta + (u_4 - u_1)\eta\eta_0.$$

A questa applicando la sostituzione (4) (4*), si otterrà una nuova forma F' della medesima specie, che indicheremo con

$$F' = (u'_1 + u'_4)\xi'\xi'_0 + (u'_2 + iu'_3)\xi'\eta'_0 + (u'_2 - iu'_3)\xi'_0\eta' + (u'_4 - u'_1)\eta'\eta'_0,$$

e i coefficienti di F' saranno legati a quelli di F dalle relazioni di trasformazione:

$$\left. \begin{aligned} u'_1 + u'_4 &= \alpha\alpha_0(u_1 + u_4) + \alpha\gamma_0(u_2 + iu_3) + \alpha_0\gamma(u_2 - iu_3) + \gamma\gamma_0(u_4 - u_1) \\ u'_2 + iu'_3 &= \alpha\beta_0(u_1 + u_4) + \alpha\delta_0(u_2 + iu_3) + \beta_0\gamma(u_2 - iu_3) + \gamma\delta_0(u_4 - u_1) \\ u'_2 - iu'_3 &= \alpha_0\beta(u_1 + u_4) + \alpha_0\delta(u_2 - iu_3) + \beta\gamma_0(u_2 + iu_3) + \gamma_0\delta(u_4 - u_1) \\ u'_4 - u'_1 &= \beta\beta_0(u_1 + u_4) + \beta\delta_0(u_2 + iu_3) + \beta_0\delta(u_2 - iu_3) + \delta\delta_0(u_4 - u_1), \end{aligned} \right\}$$

che risolte rapporto a u'_1, u'_2, u'_3, u'_4 danno:

$$\left. \begin{aligned} u'_1 &= \frac{1}{2}(\alpha\alpha_0 - \beta\beta_0 - \gamma\gamma_0 + \delta\delta_0)u_1 + \frac{1}{2}(\alpha\gamma_0 + \alpha_0\gamma - \beta\delta_0 - \beta_0\delta)u_2 + \\ &\quad + \frac{i}{2}(\alpha\gamma_0 - \alpha_0\gamma + \beta_0\delta - \beta\delta_0)u_3 + \frac{1}{2}(\alpha\alpha_0 - \beta\beta_0 + \gamma\gamma_0 - \delta\delta_0)u_4 \\ u'_2 &= \frac{1}{2}(\alpha\beta_0 + \alpha_0\beta - \gamma\delta_0 - \gamma_0\delta)u_1 + \frac{1}{2}(\alpha\delta_0 + \alpha_0\delta + \beta\gamma_0 + \beta_0\gamma)u_2 + \\ &\quad + \frac{i}{2}(\alpha\delta_0 - \alpha_0\delta + \beta\gamma_0 - \beta_0\gamma)u_3 + \frac{1}{2}(\alpha\beta_0 + \alpha_0\beta + \gamma\delta_0 + \gamma_0\delta)u_4 \\ u'_3 &= \frac{i}{2}(\alpha_0\beta - \alpha\beta_0 + \gamma\delta_0 - \gamma_0\delta)u_1 + \frac{i}{2}(\alpha_0\delta - \alpha\delta_0 + \beta\gamma_0 - \beta_0\gamma)u_2 + \\ &\quad + \frac{1}{2}(\alpha\delta_0 + \alpha_0\delta - \beta\gamma_0 - \beta_0\gamma)u_3 + \frac{i}{2}(\alpha_0\beta - \alpha\beta_0 + \gamma_0\delta - \gamma\delta_0)u_4 \\ u'_4 &= \frac{1}{2}(\alpha\alpha_0 + \beta\beta_0 - \gamma\gamma_0 - \delta\delta_0)u_1 + \frac{1}{2}(\alpha\gamma_0 + \alpha_0\gamma + \beta\delta_0 + \beta_0\delta)u_2 + \\ &\quad + \frac{i}{2}(\alpha\gamma_0 - \alpha_0\gamma + \beta\delta_0 - \beta_0\delta)u_3 + \frac{1}{2}(\alpha\alpha_0 + \beta\beta_0 + \gamma\gamma_0 + \delta\delta_0)u_4. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

(*) Nel corso di questo lavoro, seguendo una notazione di HERMITE, indicheremo con A_0 la coniugata di una quantità complessa A .

I discriminanti:

$$(u_2 + iu_3)(u_2 - iu_3) + (u_1 - u_4)(u_1 + u_4) \\ (u'_2 + iu'_3)(u'_2 - iu'_3) + (u'_1 - u'_4)(u'_1 + u'_4),$$

delle due forme F, F' sono eguali, cioè, sussistendo fra le variabili u, u' le relazioni lineari omogenee (5) a coefficienti reali, si ha identicamente:

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_4^2 = u_1'^2 + u_2'^2 + u_3'^2 - u_4'^2.$$

Così ad ogni sostituzione lineare s sopra una variabile complessa

$$z' = \frac{\delta z - \beta}{-\gamma z + \alpha}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1, \quad (s)$$

possiamo far corrispondere la sostituzione quaternaria S a coefficienti reali data dalla (5). Il determinante della S , come facilmente si verifica, è eguale a $+1$ (*). La corrispondenza così stabilita fra le s e le S è univoca, poichè, risalendo dalla S alla s , resta solo l'ambiguità di un cangiamento simultaneo di segno in $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, cangiamento che non muta nè la s nè la S . Inoltre al prodotto di due s corrispondendo il prodotto delle due S corrispondenti, si vede che ad ogni gruppo di sostituzioni s corrisponde un gruppo oloedricamente isomorfo di sostituzioni S e inversamente.

§ 4. Gruppo algebrico riproduttivo della forma:

$$f = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_4^2.$$

Dimostriamo ora che: *Dando alle costanti complesse $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tutti i possibili valori che rendono*

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

nelle corrispondenti sostituzioni S , date dalla (5), associate con quelle che se ne ottengono mutando contemporaneamente il segno ai 16 coefficienti, si ha il gruppo completo algebrico delle sostituzioni a coefficienti reali, e a determi-

(*) Per conviccersene, senza calcolo, basta considerare che il valore del determinante è certo $+1$ o -1 ; ma per $\alpha = \delta = 1, \beta = \gamma = 0$ esso è $= +1$, dunque, per ragione di continuità, è sempre $= +1$.

nante + 1, riproduttrici della forma:

$$f = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_4^2.$$

Per ciò cominciamo dal dimostrare che, interpretando nuovamente u_1, u_2, u_3, u_4 come coordinate omogenee di un punto dello spazio, si può sempre con una conveniente sostituzione S della forma (5) trasportare il punto $(0, 0, 0, 1)$ nel punto arbitrario (v_1, v_2, v_3, v_4) , purchè queste coordinate soddisfino la diseuguaglianza

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - v_4^2 < 0,$$

e quindi coll'inversa S^{-1} il punto arbitrario (v_1, v_2, v_3, v_4) , interno alla quadrica $f=0$, in $(0, 0, 0, 1)$. Infatti, sussistendo la diseuguaglianza superiore, possiamo moltiplicare v_1, v_2, v_3, v_4 per un tal fattore di proporzionalità che si abbia:

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - v_4^2 = -1,$$

cioè:

$$(v_4 - v_1)(v_4 + v_1) = 1 + v_2^2 + v_3^2,$$

e inoltre i due fattori $v_4 - v_1, v_4 + v_1$ risultino positivi. Ciò posto, se determiniamo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in guisa da soddisfare le quattro condizioni seguenti:

$$\left. \begin{aligned} \alpha\alpha_0 + \gamma\gamma_0 = v_4 + v_1, & \quad \beta\beta_0 + \delta\delta_0 = v_4 - v_1 = \frac{1 + v_2^2 + v_3^2}{v_4 + v_1} \\ \alpha\beta_0 + \gamma\delta_0 = v_2 + iv_3, & \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1, \end{aligned} \right\} (6)$$

i coefficienti di u_4 nei secondi membri della (5) saranno appunto

$$v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4,$$

e la collineazione (5) trasporterà il punto $(0, 0, 0, 1)$ in (v_1, v_2, v_3, v_4) , come si voleva. Ora alle (6) si può soddisfare in infiniti modi, per es. semplicemente ponendo:

$$\alpha = \sqrt{v_1 + v_4}, \quad \beta = \frac{v_2 - iv_3}{\sqrt{v_1 + v_4}}, \quad \gamma = 0, \quad \delta = \frac{1}{\sqrt{v_1 + v_4}}.$$

Ciò premesso, sia T una collineazione qualunque del gruppo algebrico riproduttivo di f e sia (v_1, v_2, v_3, v_4) il punto in cui $(0, 0, 0, 1)$ viene trasportato da T ; avremo:

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - v_4^2 = -1.$$

Combinando T con una conveniente S della forma (5) possiamo, per quanto precede, ottenere che il prodotto TS lasci immobile il punto $(0, 0, 0, 1)$. Basterà dunque provare che tutte le T , che lasciano immobile $(0, 0, 0, 1)$,

coincidono con una S o se ne deducono, cangiando i segni ai 16 coefficienti. Se

$$\left. \begin{aligned} u'_1 &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3 + a_{14}u_4 \\ u'_2 &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + a_{23}u_3 + a_{24}u_4 \\ u'_3 &= a_{31}u_1 + a_{32}u_2 + a_{33}u_3 + a_{34}u_4 \\ u'_4 &= a_{41}u_1 + a_{42}u_2 + a_{43}u_3 + a_{44}u_4 \end{aligned} \right\} \quad (T)$$

è una tale sostituzione T , avremo:

$$\begin{aligned} a_{14} = a_{24} = a_{34} = a_{41} = a_{42} = a_{43} = 0 \\ a_{44} = \pm 1, \end{aligned}$$

e noi, cangiando ove occorra tutti i segni delle a , supporremo senz'altro:

$$a_{44} = +1.$$

La T si riduce adunque ad un'ordinaria sostituzione ortogonale sulle tre variabili u_1, u_2, u_3 . Ora per una tale sostituzione il teorema risulta facilmente provato dalla nota formola del CAYLEY per le rotazioni della sfera complessa in sè medesima, o dello spazio attorno a un centro fisso. Questa formola si scrive:

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{-b_0\tau + a_0} \quad (*), \quad (7)$$

essendo τ la variabile complessa sulla sfera e indicando a, b due costanti complesse legate alle coniugate a_0, b_0 dalla relazione:

$$aa_0 + bb_0 = 1. \quad (7^*)$$

Le coordinate cartesiane ortogonali ξ, η, ζ di un punto della sfera si esprimono per τ, τ_0 colle formole:

$$\xi = \frac{\tau + \tau_0}{\tau\tau_0 + 1}, \quad \eta = \frac{1}{i} \frac{\tau - \tau_0}{\tau\tau_0 + 1}, \quad \zeta = \frac{\tau\tau_0 - 1}{\tau\tau_0 + 1}.$$

Indicandole, per comodità della verifica, con y_2, y_3, y_1 , cioè ponendo:

$$y_1 = \frac{\tau\tau_0 - 1}{\tau\tau_0 + 1}, \quad y_2 = \frac{\tau + \tau_0}{\tau\tau_0 + 1}, \quad y_3 = \frac{1}{i} \frac{\tau - \tau_0}{\tau\tau_0 + 1},$$

e similmente:

$$y'_1 = \frac{\tau'\tau'_0 - 1}{\tau'\tau'_0 + 1}, \quad y'_2 = \frac{\tau' + \tau'_0}{\tau'\tau'_0 + 1}, \quad y'_3 = \frac{1}{i} \frac{\tau' - \tau'_0}{\tau'\tau'_0 + 1},$$

(*) Veggasi per es. KLEIN: *Vorlesungen über das Ikosaeder*, pag. 34.

saranno y'_1, y'_2, y'_3 legate a y_1, y_2, y_3 dalla più generale sostituzione ortogonale. Osservando la (7) e (7*), si trova subito per la forma di questa sostituzione:

$$\left. \begin{aligned} y'_1 &= (aa_0 - bb_0)y_1 + (ab_0 + a_0b)y_2 + i(ab_0 - a_0b)y_3 \\ y'_2 &= -(ab + a_0b_0)y_1 + \frac{1}{2}(a^2 + a_0^2 - b^2 - b_0^2)y_2 + \frac{i}{2}(a^2 - a_0^2 + b^2 - b_0^2)y_3 \\ y'_3 &= i(ab - a_0b_0)y_1 + \frac{i}{2}(a_0^2 - a^2 + b^2 - b_0^2)y_2 + \frac{1}{2}(a^2 + a_0^2 + b^2 + b_0^2)y_3. \end{aligned} \right\}$$

Ora la sostituzione quaternaria S , data dalla (5), si riduce appunto a questa ternaria col porre:

$$\alpha = a, \quad \beta = -b_0, \quad \gamma = b, \quad \delta = a_0;$$

per tal modo il teorema è completamente dimostrato.

§ 5. Continuazione.

Avendo così stabilito come ad ogni collineazione di 1.^a specie, riproduttiva della forma quaternaria $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_4^2$, corrisponda una sostituzione lineare sulla variabile complessa:

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1, \quad (8)$$

è ben facile completare la ricerca coll'esame delle collineazioni di 2.^a specie. Se riprendiamo infatti la forma di HERMITE (§ 3):

$$F = (u_1 + u_4)\xi\xi_0 + (u_2 + iu_3)\xi\eta_0 + (u_2 - iu_3)\xi_0\eta + (u_4 - u_1)\eta\eta_0,$$

e vi applichiamo la sostituzione:

$$\xi = \xi'_0, \quad \eta = \eta'_0,$$

nella forma F' trasformata avremo:

$$u'_1 = u_1, \quad u'_2 = u_2, \quad u'_3 = -u_3, \quad u'_4 = u_4,$$

il che dà una collineazione di 2.^a specie che cangia in sè medesima:

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_4^2.$$

Sulla variabile complessa $z = \frac{\xi}{\eta}$ vi corrisponde semplicemente la sosti-

tuzione:

$$z' = z_0.$$

Ed ora, combinando colla (8) abbiamo il risultato:

Le collineazioni di 2.^a specie riproduttive della forma $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_4^2$ corrispondono alle sostituzioni lineari (di 2.^a specie):

$$z' = \frac{\alpha z_0 + \beta}{\gamma z_0 + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1. \quad (8^*)$$

Si otterrà evidentemente l'espressione effettiva di queste collineazioni cambiando in quella della S , data dalla formola (5) § 3, i segni dei coefficienti di u_3 .

È importante osservare quando accade che la collineazione di 2.^a specie, corrispondente alla (8*), è un'omologia armonica (§ 1). Per ciò è necessario e sufficiente che la (8*) coincida colla propria inversa cioè abbia la forma:

$$z' = \frac{\alpha z_0 + i\beta_1}{i\gamma_1 z_0 + \alpha_0}, \quad \alpha\alpha_0 + \beta_1\gamma_1 = 1, \quad (9)$$

ovvero l'altra:

$$z' = \frac{\alpha z_0 + \beta_1}{\gamma_1 z_0 - \alpha_0}, \quad \alpha\alpha_0 + \beta_1\gamma_1 = -1, \quad (9^*)$$

indicando ogni volta β_1, γ_1 costanti reali (*).

Ora se ricordiamo la rappresentazione conforme di POINCARÉ dello spazio non-euclideo al disopra del piano $\xi\eta$ (Acta Math., Bd. 3), sul quale sono distesi i valori della variabile complessa:

$$z = \xi + i\eta,$$

vediamo che ad una sostituzione di 2.^a specie della forma (9) corrisponde, per lo spazio rappresentativo, un'inversione per raggi vettori reciproci rispetto alla sfera:

$$\left(\xi + \frac{\alpha_2}{\gamma_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\alpha_1}{\gamma_1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{\gamma_1^2},$$

la quale si dirà per ciò una *sfera di riflessione* (**).

(*) Cfr. KLEIN-FRICKE: *Elliptische Modulfunctionen*, pag. 196 ss.

(**) Ciò suppone per altro $\gamma_1 \geq 0$. Se $\gamma_1 = 0$ la sfera degenera nel piano:

$$2\alpha_1\eta - 2\alpha_2\xi = \beta_1,$$

normale al piano $\xi\eta$ e la trasformazione dello spazio consiste in un'ordinaria riflessione su questo piano (piano di riflessione).

Questa sfera, col centro sul piano ξ_7 , rappresenta un piano dello spazio non-euclideo, che è il piano effettivo di riflessione per la collineazione corrispondente; questa appartiene dunque alla 1.^a categoria. Similmente la (9*) dà una riflessione sopra una sfera immaginaria e la collineazione corrispondente appartiene alla 2.^a categoria (§ 1).

Da queste considerazioni generali, che valgono per tutte le collineazioni del gruppo *algebrico* riproduttivo della forma $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_4^2$ scendiamo ora a considerare in questo gruppo (continuo) un sottogruppo G discontinuo, privo cioè di sostituzioni infinitesimali. Il gruppo corrispondente di sostituzioni lineari di 1.^a e 2.^a specie (8), (8*) sarà pure privo di sostituzioni infinitesimali e, per quanto POINCARÉ ha dimostrato (loc. cit.), considerato come gruppo di movimenti dello spazio non-euclideo, sarà *propriamente discontinuo*. Si potrà quindi parlare del *poliedro fondamentale o generatore* del gruppo e cercarne la forma effettiva, definito che sia aritmeticamente il gruppo.

Il caso più importante a cui possono applicarsi le considerazioni precedenti è quello in cui sia data una forma *aritmetica* quaternaria:

$$\psi = \sum a_{rs} x_r x_s,$$

riducibile con collineazione reale T al tipo:

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_4^2,$$

e se ne consideri il gruppo Γ aritmetico riproduttivo. Questo, trasformato con T , dà un gruppo *discontinuo* $T\Gamma T^{-1}$ di collineazioni che riproducono la forma:

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_4^2.$$

Così troviamo nuovamente che al gruppo aritmetico riproduttivo di ψ corrisponde un gruppo discontinuo di movimenti dello spazio non-euclideo ed abbiamo il mezzo di convertire effettivamente questo gruppo quaternario in un gruppo poliedrico di sostituzioni lineari sulla variabile z .

§ 6. Definizione dei gruppi $\Gamma_{(\mu, \nu)}$, $\overline{\Gamma}_{(\mu, \nu)}$.

Appoggiandoci sui risultati generali ottenuti ai paragrafi precedenti, andiamo ora a considerare una classe particolare di gruppi discontinui di sostituzioni lineari, dai quali potremo poi dedurre i gruppi riproduttivi di una classe corrispondente di forme quaternarie.

Indicando con a, b, c, d numeri interi complessi del campo $(1, i)$ di GAUSS cioè della forma $m + ni$ (m, n razionali interi) e con μ, ν due numeri fissi, razionali interi e positivi, che per ora supponiamo soltanto non siano quadrati perfetti (salvo il caso $\mu = 1$), formiamo le sostituzioni della forma:

$$z' = \frac{(a + b\sqrt{\nu})z + \sqrt{\mu}(c + d\sqrt{\nu})}{\sqrt{\mu}(-c_0 + d_0\sqrt{\nu})z + a_0 - b_0\sqrt{\nu}} \quad (*) \quad (s)$$

dove a, b, c, d percorrono tutti gli interi di GAUSS che rendono il determinante della s eguale a ± 1 ; questi numeri a, b, c, d debbono in conseguenza soddisfare le due condizioni:

$$\left. \begin{aligned} aa_0 - \nu bb_0 + \mu(cc_0 - \nu dd_0) &= \pm 1 \\ a_0b - ab_0 + \mu(c_0d - cd_0) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Si constaterà subito che queste sostituzioni s formano un gruppo; di più questo gruppo è evidentemente discontinuo, come privo di sostituzioni infinitesimali (**).

Se alle s associamo le nuove sostituzioni della forma:

$$z' = \frac{\sqrt{\mu}(a + b\sqrt{\nu})z + (c + d\sqrt{\nu})}{(-c_0 + d_0\sqrt{\nu})z + \sqrt{\mu}(a_0 - b_0\sqrt{\nu})}, \quad (u)$$

il cui determinante è nuovamente ± 1 , siccome il prodotto di due u dà una s e il prodotto di una u per una s dà una u , vediamo che le s, u formano complessivamente un gruppo, che contiene quello delle s come sottogruppo eccezionale d'indice 2. Indicheremo questo gruppo col simbolo $\Gamma_{(\mu, \nu)}$.

Per altro nel caso $\mu = 1$, e in questo soltanto, le u non differiscono dalle s ; allora con $\Gamma_{(1, \nu)}$ intenderemo il gruppo delle sole s .

(*) Si osserverà l'analogia di costruzione di questi gruppi con quelli che il sig. FRICKE ha considerato, nel campo reale, in diversi lavori nei Math. Annalen. I gruppi che direttamente corrispondono alla definizione di FRICKE (cfr. specialmente Bd. 42, pag. 588), sono quelli di cui tratta il mio ultimo lavoro citato. Essi conducono alle forme quaternarie del tipo:

$$\mu(\nu x_1^2 + D x_2^2) + \nu x_3^2 - x_4^2,$$

a cui è accennato nella prefazione.

(**) Questa circostanza così importante segue qui semplicemente dal fatto che il campo di GAUSS non contiene numeri interi infinitesimi. Lo stesso vale se a, b, c, d percorrono gli interi di un qualsiasi corpo quadratico immaginario. A questi gruppi più generali sono senz'altro applicabili le considerazioni del testo ed è solo per ragioni di brevità che ci limitiamo a trattare il caso indicato.

Ora vogliamo subito osservare un fatto di singolare importanza per lo studio dei nostri gruppi $\Gamma_{(\mu, \nu)}$, che ci consiglia di non procedere ad un ulteriore loro ampliamento, come sarebbe tuttavia possibile (*). Esso consiste nella proprietà:

Le sostituzioni ellittiche dei gruppi $\Gamma_{(\mu, \nu)}$ sono tutte a periodo 2.

Perchè una sostituzione:

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

sia ellittica occorre infatti che $\alpha + \delta$ sia reale e in valore assoluto < 2 . Ora tanto per le s che per le u ciò è possibile solo con

$$\alpha + \delta = 0,$$

e la sostituzione corrispondente è quindi a periodo 2.

Ampliamo ora il gruppo $\Gamma_{(\mu, \nu)}$ associandovi la riflessione:

$$z' = z_0,$$

che è evidentemente permutabile col gruppo. Avremo così le nuove sostituzioni (di 2.^a specie) a determinante ± 1 :

$$z' = \frac{(a + b\sqrt{\nu})z_0 + \sqrt{\mu}(c + d\sqrt{\nu})}{\sqrt{\mu}(-c_0 + d_0\sqrt{\nu})z_0 + (a_0 - b_0\sqrt{\nu})} \quad (s_0)$$

$$z' = \frac{\sqrt{\mu}(a + b\sqrt{\nu})z_0 + c + d\sqrt{\nu}}{(-c_0 + d_0\sqrt{\nu})z_0 + \sqrt{\mu}(a_0 - b_0\sqrt{\nu})} \quad (u_0)$$

Il gruppo così ampliato verrà indicato con

$$\overline{\Gamma}_{(\mu, \nu)};$$

esso contiene $\Gamma_{(\mu, \nu)}$ quale sottogruppo eccezionale d'indice 2.

(*) Basterebbe associare alle s , u le nuove sostituzioni della forma:

$$z' = \frac{(a + b\sqrt{\nu})z + \sqrt{\mu}(c + d\sqrt{\nu})}{i\sqrt{\mu}(-c_0 + d_0\sqrt{\nu})z + i(a_0 - b_0\sqrt{\nu})} \quad (s')$$

$$z' = \frac{\sqrt{\mu}(a + b\sqrt{\nu}) + (c + d\sqrt{\nu})}{i(-c_0 + d_0\sqrt{\nu}) + i\sqrt{\mu}(a_0 - b_0\sqrt{\nu})}; \quad (u')$$

nei gruppi così ampliati si presentano sostituzioni ellittiche dei periodi 2 e 4.

§ 7. Le riflessioni nei gruppi $\Gamma_{(\mu, \nu)}$.

La prima ricerca che dobbiamo fare è quella di classificare le riflessioni esistenti nei gruppi $\overline{\Gamma}_{(\mu, \nu)}$ e le loro sfere (eventualmente i piani) di riflessione poichè è appunto con queste sfere che cercheremo, ove sia possibile, di limitare il poliedro generatore del gruppo.

Dalla formola (9) § 5, ricordando che nelle s_0, u_0 il determinante può essere $+1$ o -1 (*), troviamo che le riflessioni di $\overline{\Gamma}_{(\mu, \nu)}$ si classificano nei quattro tipi seguenti:

$$\text{Tipo I} \left\{ \begin{array}{l} \text{Sostituzione} \quad z' = \frac{(b_1 + ib_2)\sqrt{\nu}z_0 + \sqrt{\mu}(d_1\sqrt{\nu} + c_1)}{\sqrt{\mu}(d_1\sqrt{\nu} - c_1)z_0 - (b_1 - ib_2)\sqrt{\nu}} \\ \nu(b_1^2 + b_2^2 + \mu d_1^2) - \mu c_1^2 = 1 \quad (A) \\ \text{Sfera di riflessione} \\ \left(\xi - \frac{b_1\sqrt{\nu}}{\sqrt{\mu}(d_1\sqrt{\nu} - c_1)} \right)^2 + \left(\eta - \frac{b_2\sqrt{\nu}}{\sqrt{\mu}(d_1\sqrt{\nu} - c_1)} \right)^2 + \zeta^2 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\mu}(d_1\sqrt{\nu} - c_1)} \right\}^2 \end{array} \right.$$

$$\text{Tipo II} \left\{ \begin{array}{l} \text{Sostituzione} \quad z' = \frac{(a_1 + ia_2)z_0 + i\sqrt{\mu}(c_1 + d_1\sqrt{\nu})}{i\sqrt{\mu}(c_1 - d_1\sqrt{\nu})z_0 + (a_1 - ia_2)} \\ a_1^2 + a_2^2 + \mu(c_1^2 - \nu d_1^2) = 1 \quad (B) \\ \text{Sfera di riflessione} \\ \left(\xi + \frac{a_2}{\sqrt{\mu}(d_1\sqrt{\nu} - c_1)} \right)^2 + \left(\eta - \frac{a_1}{\sqrt{\mu}(d_1\sqrt{\nu} - c_1)} \right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{\mu}(d_1\sqrt{\nu} - c_1)} \right)^2 \end{array} \right.$$

$$\text{Tipo III} \left\{ \begin{array}{l} \text{Sostituzione} \quad z' = \frac{(b_1 + ib_2)\sqrt{\mu\nu}z_0 + (d_1\sqrt{\nu} + c_1)}{(d_1\sqrt{\nu} - c_1)z_0 - (b_1 - ib_2)\sqrt{\mu\nu}} \\ \mu\nu(b_1^2 + b_2^2) + \nu d_1^2 - c_1^2 = 1 \quad (C) \\ \text{Sfera di riflessione} \\ \left(\xi - \frac{b_1\sqrt{\mu\nu}}{d_1\sqrt{\nu} - c_1} \right)^2 + \left(\eta - \frac{b_2\sqrt{\mu\nu}}{d_1\sqrt{\nu} - c_1} \right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{d_1\sqrt{\nu} - c_1} \right)^2 \end{array} \right.$$

(*) In questo 2.º caso si riduce a $+1$, moltiplicando i quattro coefficienti per i .

$$\text{Tipo IV} \left\{ \begin{array}{l} \text{Sostituzione} \quad z' = \frac{(a_1 + ia_2)\sqrt{\mu}z_0 + i(c_1 + d_1\sqrt{\nu})}{i(c_1 - d_1\sqrt{\nu})z_0 + (a_1 - ia_2)\sqrt{\mu}} \\ \mu(a_1^2 + a_2^2) + c_1^2 - \nu d_1^2 = 1 \quad (D) \\ \text{Sfera di riflessione} \\ \left(\xi + \frac{a_2\sqrt{\mu}}{d_1\sqrt{\nu} - c_1} \right)^2 + \left(\eta - \frac{a_1\sqrt{\mu}}{d_1\sqrt{\nu} - c_1} \right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{d_1\sqrt{\nu} - c_1} \right)^2. \end{array} \right.$$

In queste formole $a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, d_1$ indicano ogni volta numeri razionali interi assoggettati a soddisfare le rispettive eguaglianze (A), (B), (C), (D). Le sostituzioni dei primi due tipi appartengono alle s_0 , quelle dei due secondi alle u_0 . È poi da osservarsi che mentre le riflessioni dei tipi II e IV esistono sempre, mancano invece quelle del tipo I se $-\mu$ è non residuo quadratico di ν e quelle del tipo III se -1 è non residuo di ν .

Quando sia $\mu = 1$ le s_0 coincidono colle u_0 ed abbiamo in $\overline{\Gamma}_{(\mu, \nu)}$ le sole riflessioni dei tipi I, II.

Ricerchiamo ora se esistono piani di riflessione, per il che è necessario che si abbia:

$$c_1 = 0, \quad d_1 = 0.$$

Ciò è possibile solo per le riflessioni del tipo II, ove si prenda:

$$a_1 = \pm 1, \quad a_2 = 0,$$

ovvero:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \pm 1;$$

le corrispondenti riflessioni:

$$z' = z_0, \quad z' = -z_0,$$

avvengono sui rispettivi piani:

$$\eta = 0, \quad \xi = 0.$$

Dunque: Nei gruppi $\overline{\Gamma}_{(\mu, \nu)}$ si presentano i due soli piani di riflessione: $\eta = 0, \xi = 0$.

In ciò si suppone per altro escluso il caso

$$\mu = 1, \quad \nu = 1,$$

caso che pure possiamo considerare e tratteremo in modo speciale al § 12.

Ricerchiamo ancora fra le sfere di riflessione dei gruppi $\overline{\Gamma}_{(\mu, \nu)}$ quelle che hanno il centro nell'origine. Vediamo che ciò ha luogo soltanto per le sfere

dei tipi III o IV di equazione:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{d_1 \sqrt{\nu} - c_1} \right)^2,$$

dove c_1, d_1 sono soluzioni intere dell'equazione:

$$\nu d_1^2 - c_1^2 = 1,$$

o dell'altra:

$$c_1^2 - \nu d_1^2 = 1.$$

Se T, U indicano le più piccole soluzioni intere positive della prima equazione, o della seconda (equazione di PELL) nel caso che la prima sia insolubile, è chiaro che avremo un'infinità di queste sfere, i cui raggi formano una progressione geometrica colla ragione

$$T - U\sqrt{\nu}.$$

Fra le sfere, che assumeremo a limitare il poliedro fondamentale del gruppo $\overline{\Gamma}_{(\mu, \nu)}$, figureranno sempre i due piani di riflessione:

$$1) \quad \eta = 0, \quad 2) \quad \xi = 0$$

e le due sfere consecutive col centro nell'origine:

$$3) \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

$$4) \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = (T - U\sqrt{\nu})^2.$$

Dallo spazio compreso fra le due sfere, nel triedro positivo degli assi coordinati, toglieremo poi le regioni interne alle sfere di riflessione che lo attraversano sì da ottenere un poliedro tutto situato al disopra del piano $\xi\eta$, salvo agli eventuali vertici singolari coi quali può scendere fino a questo piano. Nei casi concreti dovremo ogni volta servirci di considerazioni ausiliarie, che la pratica suggerisce, e che si fondano sulle osservazioni seguenti.

Se due sfere di riflessione si tagliano, la sostituzione che nasce dal combinare le due riflessioni è ellittica, ed il gruppo essendo discontinuo, essa ha un periodo intero n ; l'angolo sotto cui si tagliano le due sfere è $= \frac{\pi}{n}$. Nel caso nostro può quindi essere soltanto $n = 2$. Se le due sfere di riflessione si toccano, la combinazione delle due riflessioni è una sostituzione parabolica; dunque: *Se due sfere di riflessione del gruppo $\overline{\Gamma}_{(\mu, \nu)}$ s'incontrano, esse si tagliano ortogonalmente ovvero sono tangenti; l'ultimo caso può presentarsi soltanto nei gruppi $\overline{\Gamma}_{(\mu, \nu)}$, contenenti sostituzioni paraboliche.*

§ 8. Le forme quaternarie: $x_1^2 + x_2^2 + \mu(x_3^2 - \nu x_4^2)$.

Poniamo subito i nostri gruppi $\overline{\Gamma}_{(\mu, \nu)}$ in relazione coi gruppi riproduttivi di una classe di forme quaternarie colle considerazioni seguenti. (Cfr. § 3.)

Essendo:

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1,$$

una qualunque sostituzione di $\Gamma_{(\mu, \nu)}$ e indicando con x_1, x_2, x_3, x_4 quattro indeterminate reali, applichiamo alla forma quadratica di HERMITE:

$$F = \sqrt{\mu}(x_3 + x_4\sqrt{\nu})\xi\xi_0 + (x_1 + ix_2)\xi\eta_0 + (x_1 + ix_2)\xi_0\eta + \sqrt{\mu}(-x_3 + x_4\sqrt{\nu})\eta\eta_0$$

la sostituzione:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \alpha\xi' + \beta\eta' \\ \eta &= \gamma\xi' + \delta\eta'. \end{aligned} \right\}$$

Essa si cangierà in una forma F' della medesima specie:

$$F' = \sqrt{\mu}(x'_3 + x'_4\sqrt{\nu})\xi'\xi'_0 + (x'_1 + ix'_2)\xi'\eta'_0 + (x'_1 - ix'_2)\xi'_0\eta' + \sqrt{\mu}(-x'_3 + x'_4\sqrt{\nu})\eta'\eta'_0,$$

e i determinanti delle due forme essendo eguali avremo:

$$x_1^2 + x_2^2 + \mu(x_3^2 - \nu x_4^2) = x_1'^2 + x_2'^2 + \mu(x_3'^2 - \nu x_4'^2),$$

mentre x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 saranno legate a x_1, x_2, x_3, x_4 da una sostituzione lineare omogenea a determinante +1. Se la sostituzione $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ appartiene al tipo s , per la corrispondente sostituzione quaternaria S troviamo:

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= \frac{1}{2} \left\{ (a^2 + a_0^2) - \nu(b^2 + b_0^2) - \mu(c^2 + c_0^2) + \mu\nu(d^2 + d_0^2) \right\} x_1 + \\ &+ \frac{i}{2} \left\{ a^2 - a_0^2 + \nu(b_0^2 - b^2) + \mu(c_0^2 - c^2) + \mu\nu(d^2 - d_0^2) \right\} x_2 + \\ &+ \mu \left\{ (ac_0 + a_0c) + \nu(bd_0 + b_0d) \right\} x_3 + \mu\nu \left\{ (ad_0 + a_0d) + (bc_0 + b_0c) \right\} x_4 \\ x'_2 &= \frac{i}{2} \left\{ (a_0^2 - a^2) + \nu(b^2 - b_0^2) + \mu(c_0^2 - c^2) + \mu\nu(d^2 - d_0^2) \right\} x_1 + \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ (a^2 + a_0^2) - \nu(b^2 + b_0^2) + \mu(c^2 + c_0^2) - \mu\nu(d^2 + d_0^2) \right\} x_2 + \\ &+ i\mu \left\{ (a_0c - ac_0) + \nu(b_0d - bd_0) \right\} x_3 + i\mu\nu \left\{ (a_0d - ad_0) + (b_0c - bc_0) \right\} x_4 \end{aligned} \right\} (S)$$

$$\left. \begin{aligned}
 x'_3 &= \left\{ -(ac + a_0c_0) + \nu(bd + b_0d_0) \right\} x_1 + i \left\{ (a_0c_0 - ac) + \nu(bd - b_0d_0) \right\} x_2 + \\
 &\quad + \left\{ aa_0 + \nu bb_0 - \mu cc_0 - \mu\nu dd_0 \right\} x_3 + \nu \left\{ (ab_0 + a_0b) - \mu(cd_0 + c_0d) \right\} x_4 \\
 x'_4 &= \left\{ (ad + a_0d_0) - (bc + b_0c_0) \right\} x_1 + i \left\{ (ad - a_0d_0) + (b_0c_0 - bc) \right\} x_2 + \\
 &\quad + \left\{ (ab_0 + a_0b) + \mu(cd_0 + c_0d) \right\} x_3 + \left\{ aa_0 + \nu bb_0 + \mu cc_0 + \mu\nu dd_0 \right\} x_4.
 \end{aligned} \right\} (S)$$

Se invece la $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$ appartiene al tipo u , per la sostituzione quaternaria corrispondente, che indicheremo con U , troviamo:

$$\left. \begin{aligned}
 x'_1 &= \frac{1}{2} \left\{ \mu(a^2 + a_0^2) - \mu\nu(b^2 + b_0^2) - (c^2 + c_0^2) + \nu(d^2 + d_0^2) \right\} x_1 + \\
 &\quad + \frac{i}{2} \left\{ \mu(a^2 - a_0^2) + \mu\nu(b_0^2 - b^2) + (c_0^2 - c^2) + \nu(d^2 - d_0^2) \right\} x_2 + \\
 &\quad + \mu \left\{ ac_0 + a_0c \right\} + \nu \left\{ b_0d_0 + b_0d \right\} x_3 + \mu\nu \left\{ ad_0 + a_0d \right\} + \left\{ bc_0 + b_0c \right\} x_4 \\
 x'_2 &= \frac{i}{2} \left\{ \mu(a_0^2 - a^2) + \mu\nu(b^2 - b_0^2) + (c_0^2 - c^2) + \nu(d^2 - d_0^2) \right\} x_1 + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \mu(a^2 + a_0^2) - \mu\nu(b^2 + b_0^2) + (c^2 + c_0^2) - \nu(d^2 + d_0^2) \right\} x_2 + \\
 &\quad + i\mu \left\{ a_0c - ac_0 \right\} + \nu \left\{ b_0d - b_0d_0 \right\} x_3 + i\mu\nu \left\{ a_0d - ad_0 \right\} + \left\{ b_0c - bc_0 \right\} x_4 \\
 x'_3 &= \left\{ -(ac + a_0c_0) + \nu(bd + b_0d_0) \right\} x_1 + i \left\{ (a_0c_0 - ac) + \nu(bd - b_0d_0) \right\} x_2 + \\
 &\quad + \left\{ \mu aa_0 + \mu\nu bb_0 - cc_0 - \nu dd_0 \right\} x_3 + \left\{ \mu\nu(ab_0 + a_0b) - \nu(cd_0 + c_0d) \right\} x_4 \\
 x'_4 &= \left\{ (ad + a_0d_0) - (bc + b_0c_0) \right\} x_1 + i \left\{ (ad - a_0d_0) + \nu(b_0c_0 - bc) \right\} x_2 + \\
 &\quad + \left\{ (cd_0 + c_0d) + \mu(ab_0 + a_0b) \right\} x_3 + \left\{ \mu aa_0 + \mu\nu bb_0 + cc_0 + \nu dd_0 \right\} x_4.
 \end{aligned} \right\} (U)$$

Considerando altresì le sostituzioni quaternarie S_0, U_0 corrispondenti alle sostituzioni di 2.^a specie:

$$z' = \frac{\alpha z_0 + \beta}{\gamma z_0 + \delta}$$

del gruppo $\overline{\Gamma}(\mu, \nu)$, per le osservazioni al § 5, vediamo che *le loro espressioni*

si deducono da quelle di S , U semplicemente cangiando i segni dei coefficienti di x'_2 .

Ora è da osservarsi che se a, b, c, d indicano non più interi di GAUSS, ma costanti complesse qualunque, le sostituzioni S, U non sono più algebricamente distinte, deducendosi le U dalle S col mutare rispettivamente

$$a, b, c, d$$

in

$$a\sqrt{\mu}, b\sqrt{\mu}, \frac{c}{\sqrt{\mu}}, \frac{d}{\sqrt{\mu}}.$$

Ma, essendo a, b, c, d interi complessi, vediamo che le sostituzioni quaternarie S, U, S_0, U_0 del gruppo riproduttivo della forma quaternaria

$$x_1^2 + x_2^2 + \mu(x_3^2 - \nu x_4^2),$$

sono a coefficienti reali ed interi; inoltre in ciascuna di queste sostituzioni

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

i numeri interi che non sono sulla diagonale principale sono tutti *pari* e conseguentemente quelli sulla diagonale *dispari*. Insomma S, U, S_0, U_0 appartengono a quel sottogruppo aritmetico riproduttivo della forma:

$$x_1^2 + x_2^2 + \mu(x_3^2 - \nu x_4^2),$$

le cui sostituzioni sono congrue coll'identità

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \pmod{2}.$$

Ora la questione principale da risolversi è quella se le S, U, S_0, U_0 esauriscono o meno il sottogruppo indicato. Intanto osserviamo che nelle S, U, S_0, U_0 l'ultimo coefficiente a_{44} è sempre positivo, mentre fra le sostituzioni indicate vi ha per esempio la seguente:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix},$$

il cui quarto coefficiente è negativo. Ma, prescindendo da un cangiamento simultaneo di segno nei 16 coefficienti, noi indicheremo con

$$G_{(\mu, \nu)}$$

il sottogruppo aritmetico riproduttivo della forma quaternaria $x_1^2 + x_2^2 + \mu(x_3^2 - \nu x_4^2)$, delle cui sostituzioni, congrue coll'identità (mod. 2), sono conservate solo quelle col coefficiente a_{44} positivo (*). Indicando poi con

$$G'_{(\mu, \nu)}$$

il gruppo delle S, U, S_0, U_0 , oloedricamente isomorfo con $\overline{\Gamma}_{(\mu, \nu)}$ la questione proposta si enuncia: *Il gruppo $G'_{(\mu, \nu)}$ coincide con $G_{(\mu, \nu)}$ o ne è puramente un sottogruppo?*

§ 9. Le omologie armoniche in $G'_{(\mu, \nu)}$.

La via che terremo per risolvere nei casi concreti la questione enunciata è la seguente. Paragoneremo le omologie armoniche (di 1.^a categoria) esistenti in $G'_{(\mu, \nu)}$ con quelle di $G_{(\mu, \nu)}$, e (limitandoci per semplicità al caso di μ, ν numeri primi) dimostreremo che esse coincidono perfettamente, onde seguirà che se $\overline{\Gamma}_{(\mu, \nu)}$ è generabile con un numero finito di pure riflessioni e quindi $G'_{(\mu, \nu)}$ con omologie armoniche, sarà $G'_{(\mu, \nu)}$ un sottogruppo eccezionale d'indice finito in $G_{(\mu, \nu)}$. Per trovare il valore di questo indice basta esaminare il poliedro generatore P di $\overline{\Gamma}_{(\mu, \nu)}$, limitato da sole sfere di riflessione, e ricercare le sostituzioni, necessariamente in numero finito, che lo cangiano in sè medesimo. Trasformando poi queste in sostituzioni quaternarie, al modo del § 8, dovremo esaminare quali di esse appartengono a $G_{(\mu, \nu)}$. Per tal modo non solo determineremo l'indice cercato, ma potremo anche risalire da $G_{(\mu, \nu)}$ al gruppo totale aritmetico riproduttivo della forma. È chiaro infatti che *in questo gruppo totale non solo $G_{(\mu, \nu)}$, ma ben anche $G'_{(\mu, \nu)}$ è un sottogruppo eccezionale.*

(*) Esse formano nel gruppo delle sostituzioni

$$\equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \pmod{2} \text{ un sottogruppo (eccezionale) d'indice 2.}$$

Cominciamo, per la nostra ricerca, a costruire le omologie armoniche esistenti in $G'_{(\mu, \nu)}$. Esse si distinguono *aritmeticamente* in quattro tipi corrispondenti alle riflessioni dei gruppi $\overline{\Gamma}_{(\mu, \nu)}$ classificate al § 7, e se ne deducono nel modo esaminato al § 8. Troviamo così per queste omologie il quadro seguente:

Tipo I

$$\left| \begin{array}{cccc} 1 - 2\nu b_1^2, & + 2\nu b_1 b_2, & 2\mu b_1 d_1, & 2\mu\nu b_1 c_1 \\ + 2\nu b_1 b_2, & 1 - 2\nu b_2^2, & - 2\mu\nu b_2 d_1, & - 2\mu\nu b_2 c_1 \\ 2\nu b_1 d_1, & - 2\nu b_2 d_1, & 1 - 2\mu\nu d_1^2, & - 2\mu\nu c_1 d_1 \\ - 2b_1 c_1, & + 2b_2 c_1, & 2\mu c_1 d_1, & 1 + 2\mu c_1^2 \end{array} \right|, \quad z' = \frac{(b_1 + i b_2)\sqrt{\nu} z_0 + \sqrt{\mu}(d_1\sqrt{\nu} + c_1)}{\sqrt{\mu}(d_1\sqrt{\nu} - c_1)z_0 - (b_1 - i b_2)\sqrt{\nu}}$$

$$\nu(b_1^2 + b_2^2 + \mu d_1^2) - \mu c_1^2 = 1 \quad (a)$$

Tipo II

$$\left| \begin{array}{cccc} 1 - 2a_2^2, & - 2a_1 a_2, & 2\mu a_2 c_1, & 2\mu\nu a_2 d_1 \\ - 2a_1 a_2, & 1 - 2a_1^2, & + 2\mu a_1 c_1, & + 2\mu\nu a_1 d_1 \\ 2a_2 c_1, & + 2a_1 c_1, & 1 - 2\mu c_1^2, & - 2\mu\nu c_1 d_1 \\ - 2a_2 d_1, & - 2a_1 d_1, & 2\mu c_1 d_1, & 1 + 2\mu\nu d_1^2 \end{array} \right|, \quad z' = \frac{(a_1 + i a_2)z_0 + i\sqrt{\mu}(c_1 + d_1\sqrt{\nu})}{i\sqrt{\mu}(c_1 - d_1\sqrt{\nu})z_0 + (a_1 - i a_2)}$$

$$a_1^2 + a_2^2 + \mu(c_1^2 - \nu d_1^2) = 1 \quad (b)$$

Tipo III

$$\left| \begin{array}{cccc} 1 - 2\mu\nu b_1^2, & + 2\mu\nu b_1 b_2, & 2\mu\nu b_1 d_1, & 2\mu\nu b_1 c_1 \\ + 2\mu\nu b_1 b_2, & 1 - 2\mu\nu b_2^2, & - 2\mu\nu b_2 d_1, & - 2\mu\nu b_2 c_1 \\ 2\nu b_1 d_1, & - 2\nu b_2 d_1, & 1 - 2\nu d_1^2, & - 2\nu c_1 d_1 \\ - 2b_1 c_1, & + 2b_2 c_1, & 2c_1 d_1, & 1 + 2c_1^2 \end{array} \right|, \quad z' = \frac{(b_1 + i b_2)\sqrt{\mu\nu} z_0 + (d_1\sqrt{\nu} + c_1)}{(d_1\sqrt{\nu} - c_1)z_0 - (b_1 - i b_2)\sqrt{\mu\nu}}$$

$$\mu\nu(b_1^2 + b_2^2) + \nu d_1^2 - c_1^2 = 1 \quad (c)$$

Tipo IV

$$\left| \begin{array}{cccc} 1 - 2\mu a_2^2, & - 2\mu a_1 a_2, & 2\mu a_2 c_1, & 2\mu\nu a_2 d_1 \\ - 2\mu a_1 a_2, & 1 - 2\mu a_1^2, & + 2\mu a_1 c_1, & + 2\mu\nu a_1 d_1 \\ 2a_2 c_1, & + 2a_1 c_1, & 1 - 2c_1^2, & - 2\nu c_1 d_1 \\ - 2a_2 d_1, & - 2a_1 d_1, & 2c_1 d_1, & 1 + 2\nu d_1^2 \end{array} \right|, \quad z' = \frac{(a_1 + i a_2)\sqrt{\mu} z_0 + i(c_1 + d_1\sqrt{\nu})}{i(c_1 - d_1\sqrt{\nu})z_0 + (a_1 - i a_2)\sqrt{\mu}}$$

$$\mu(a_1^2 + a_2^2) + c_1^2 - \nu d_1^2 = 1, \quad (d)$$

dove, per maggior chiarezza, abbiamo scritto di fronte allo schema di ogni

sostituzione quaternaria la riflessione corrispondente in $\overline{\Gamma}_{(\mu, \nu)}$ colla relativa equazione cui debbono soddisfare i numeri razionali interi $a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, d_1$.

Ora importa ripetere che queste omologie armoniche, aritmeticamente distinte, formano *algebricamente* un solo tipo, pel quale può ad esempio assumersi il tipo II.

§ 10. Le omologie armoniche in $G_{(\mu, \nu)}$.

Andiamo ora a dimostrare il teorema, di cui le considerazioni al principio del paragrafo precedente hanno mostrato l'importanza fondamentale: *Se μ, ν sono numeri primi, il gruppo $G_{(\mu, \nu)}$ non contiene altre omologie armoniche all'infuori di quelle esistenti nel suo sottogruppo $G'_{(\mu, \nu)}$.*

Certamente ad ogni omologia armonica in $G_{(\mu, \nu)}$ potremo dare, per i teoremi ai §§ 4, 5, la forma *algebraica* di una sostituzione del tipo II nel quadro superiore con a_1, a_2, c_1, d_1 costanti reali, che verificano l'equazione:

$$a_1^2 + a_2^2 + \mu c_1^2 - \mu \nu d_1^2 = 1; \quad (10)$$

perchè essa appartenga effettivamente a $G_{(\mu, \nu)}$ sarà necessario e sufficiente che i 10 numeri

$$a_1^2, a_2^2, a_1 a_2, \mu c_1^2, \mu \nu d_1^2, a_1 c_1, a_2 c_1, a_1 d_1, a_2 d_1, \mu c_1 d_1$$

risultino razionali interi. Indicando con m_1^2 il più grande fattore quadrato contenuto in a_1^2 , poniamo:

$$a_1 = m_1 \sqrt{r},$$

dove dunque m_1, r sono interi e di più il secondo positivo e privo di fattori quadrati. Ponendo similmente

$$a_2 = m_2 \sqrt{r'},$$

poichè il prodotto a_1, a_2 deve essere intero, quindi $\sqrt{r r'}$ razionale, mentre r, r' contengono solo fattori primi alla prima potenza, sarà necessariamente

$$r' = r.$$

Con notazioni analoghe rispetto agli interi

$$\mu c_1^2, \quad \mu \nu d_1^2,$$

poniamo:

$$a_1 = m_1 \sqrt{r}, \quad a_2 = m_2 \sqrt{r}, \quad c_1 \sqrt{\mu} = p_1 \sqrt{s}, \quad d_1 \sqrt{\mu \nu} = q_1 \sqrt{u},$$

dove p_1, q_1 sono interi come m_1, m_2 ed s, u sono, come r , interi positivi, privi di fattori quadrati. Per le condizioni sopra enunciate i tre numeri

$$\alpha = \frac{\sqrt{rs}}{\sqrt{\mu}}, \quad \beta = \frac{\sqrt{ru}}{\sqrt{\mu\nu}}, \quad \gamma = \frac{\sqrt{su}}{\sqrt{\nu}},$$

debbono essere razionali; inoltre, poichè a causa della (10) si ha:

$$r(m_1^2 + m_2^2) + sp_1^2 - uq_1^2 = 1,$$

i tre interi r, s, u non possono avere un fattore comune. Ora perchè $\alpha = \frac{\sqrt{rs}}{\sqrt{\mu}}$ sia razionale, deve necessariamente μ dividere r o s e non può dividerli simultaneamente chè in caso contrario, r, s non avendo fattori quadrati, rimarrebbe in α l'irrazionalità $\sqrt{\mu}$. Ciò posto, escludendo dapprima il caso che sia $\mu = \nu$, abbiamo da distinguere i due casi seguenti:

1.º caso μ divide s , non r . Allora perchè α sia razionale dobbiamo avere

$$s = \mu r,$$

e perchè lo sia β , dovrà μ (differente da ν) che non divide r , dividere u ; poniamo:

$$u = \mu u',$$

con u' intero. Ulteriormente perchè

$$\beta = \frac{\sqrt{ru'}}{\sqrt{\nu}},$$

sia razionale, essendo r primo con u' e ν un numero primo, dovremo avere

$$r = 1, \quad u' = \nu, \tag{a}$$

ovvero:

$$r = \nu, \quad u' = 1. \tag{b}$$

Nel caso (a) i numeri

$$a_1, \quad a_2, \quad c_1, \quad d_1,$$

sono interi e l'omologia armonica coincide con una del tipo II in $G'_{(\mu, \nu)}$. Nel caso (b) si ha:

$$a_1 = m_1 \sqrt{\nu}, \quad a_2 = m_2 \sqrt{\nu}, \quad c_1 = p_1 \sqrt{\nu}, \quad d_1 = \frac{q_1}{\sqrt{\nu}},$$

essendo gli interi m_1, m_2, p_1, q_1 legati dalla relazione

$$\nu(m_1^2 + m_2^2) + \mu\nu p_1^2 - \mu q_1^2 = 1,$$

ed abbiamo un'omologia armonica del tipo I in $G'_{(\mu, \nu)}$.

2.º caso μ divide r , non s , indi

$$r = \mu s,$$

ed essendo $\gamma = \frac{\sqrt{su}}{\sqrt{\nu}}$ razionale, mentre s, u sono primi fra loro avremo:

$$s = \nu, \quad u = 1, \quad (c)$$

ovvero:

$$s = 1, \quad u = \nu. \quad (d)$$

Nel caso (c) troviamo un'omologia del tipo III in $G'_{(\mu, \nu)}$, nel caso (d) un'omologia del tipo IV.

Esaminando ora rapidamente il caso escluso

$$\mu = \nu,$$

troviamo che qui deve essere sempre

$$u = r.$$

Il numero $\nu = \mu$ deve, come sopra, dividere uno ed uno solo dei due numeri r, s . Se divide s , è

$$s = \nu r,$$

e però

$$s = \nu, \quad u = r = 1,$$

indi

$$a_1 = m_1, \quad a_2 = m_2, \quad c_1 = p_1, \quad d_1 = \frac{q_1}{\nu}.$$

Ma, dovendo essere

$$a_1 d_1 = \frac{m_1 q_1}{\nu}, \quad a_2 d_1 = \frac{m_2 q_1}{\nu}$$

interi, il numero ν o divide q_1 ed abbiamo un'omologia del tipo II in $G'_{(\mu, \nu)}$ o divide simultaneamente m_1, m_2 e ne abbiamo una del tipo III.

Se ν divide r si trova:

$$s = 1, \quad u = r = \nu,$$

e l'omologia appartiene al tipo IV in $G'_{(\mu, \nu)}$. Il tipo I rimane qui, come è naturale, escluso. Così il teorema enunciato è dimostrato in tutti i casi.

§ 11. Estensione al caso $\mu = 1$ con ν numero composto.

Il teorema dimostrato nel paragrafo precedente si può facilmente estendere ai gruppi $G_{(1, \nu)}$ nel caso di ν numero composto, supposto sempre privo di fattori quadrati; bisogna per ciò procedere ad un conveniente ampliamento del gruppo $\overline{\Gamma}_{(1, \nu)}$, che qui andiamo ad indicare.

Se riprendiamo la ricerca del paragrafo precedente, vediamo che si dovrà porre:

$$a_1 = m_1 \sqrt{r}, \quad a_2 = m_2 \sqrt{r}, \quad c_1 = p_1 \sqrt{r}, \quad \sqrt{\nu} d_1 = q_1 \sqrt{s},$$

essendo m_1, m_2, p_1, d_1 interi e r, s due interi positivi, senza fattori quadrati, e primi fra loro. Ora dovendo essere:

$$\frac{\sqrt{rs}}{\sqrt{\nu}},$$

razionale, sarà necessariamente

$$rs = \nu.$$

Viceversa se

$$rs = \nu$$

è una qualunque decomposizione di ν in due fattori, prendendo:

$$a_1 = m_1 \sqrt{r}, \quad a_2 = m_2 \sqrt{r}, \quad c_1 = p_1 \sqrt{r}, \quad d_1 = \frac{q_1}{\sqrt{r}},$$

ove gli interi m_1, m_2, p_1, q_1 sono legati dalla relazione

$$r(m_1^2 + m_2^2 + p_1^2) - sq_1^2 = 1,$$

l'omologia armonica

$$\left| \begin{array}{cccc} 1 - 2rm_2^2, & -2rm_1m_2, & 2rm_2p_1, & 2\nu m_2q_1 \\ -2a_1a_2, & 1 - 2rm_1^2, & +2rm_1p_1, & +2\nu m_1q_1 \\ 2rm_2p_1, & +2rm_1p_1, & 1 - 2rc_1^2, & -2\nu p_1q_1 \\ -2m_2q_1, & 2m_1q_1, & 2p_1q_1, & 1 + 2sq_1^2 \end{array} \right|$$

appartiene a $G_{(\mu, \nu)}$. Naturalmente l'esistenza di queste omologie in $G_{(\mu, \nu)}$ è subordinata alla condizione che $-s$ sia residuo quadratico di r .

Questo risultato ci conduce ad ampliare il primitivo gruppo $\overline{\Gamma}_{(1, \nu)}$ nel modo seguente. Si considerino tutte le sostituzioni di 1.^a o 2.^a specie, a de-

terminante $+1$, della forma:

$$\begin{pmatrix} a\sqrt{r} + b\sqrt{s}, & c\sqrt{r} + d\sqrt{s} \\ -c_0\sqrt{r} + d_0\sqrt{s}, & a_0\sqrt{r} - b_0\sqrt{s} \end{pmatrix}, \quad (A)$$

essendo

$$rs = \nu$$

una qualunque decomposizione di ν in due fattori.

Se n è il numero dei fattori (distinti) in ν , le sostituzioni dei 2^n tipi (A), ove r, s percorrono le 2^n combinazioni ammissibili, formano un gruppo. Invero il prodotto di due sostituzioni, corrispondenti alle decomposizioni

$$\nu = rs, \quad \nu = r's',$$

ha nuovamente la stessa forma ed appartiene a quella decomposizione

$$\nu = r''s'',$$

in cui r'' contiene i fattori primi di r, r' non comuni a questi due numeri. Per evitare confusioni, indicheremo con $\overline{\Gamma}_{(1, \nu)}$ il gruppo così ampliato, mentre con $\overline{\Gamma}_{(1, \nu)}$ seguiranno ad indicare il gruppo primitivo, composto delle sostituzioni che corrispondono alle decomposizioni estreme

$$r = s, \quad s = \nu; \quad r = \nu, \quad s = 1.$$

Anche in $\overline{\Gamma}_{(1, \nu)}$ figurano soltanto fra le sostituzioni ellittiche sostituzioni a periodo 2; trasformando le sostituzioni di $\overline{\Gamma}_{(1, \nu)}$ in quaternarie, troviamo che queste appartengono ancora tutte a $G_{(1, \nu)}$. Esse formano in $G_{(1, \nu)}$ un sottogruppo che indicheremo con $G'_{(1, \nu)}$, il quale possiede tutte le omologie armoniche di $G_{(1, \nu)}$. Infine notiamo che le riflessioni di $\overline{\Gamma}_{(1, \nu)}$ hanno la forma

$$z' = \frac{(b_1 + ib_2)\sqrt{s}z_0 + (c_1\sqrt{r} + d_1\sqrt{s})}{(-c_1\sqrt{r} + d_1\sqrt{s})z_0 - (b_1 - ib_2)\sqrt{s}},$$

con b_1, b_2, c_1, d_1 razionali interi legati dalla relazione

$$s(b_1^2 + b_2^2 + d_1^2) - rc_1^2 = 1;$$

la corrispondente sfera di riflessione ha per equazione:

$$\left(\xi - \frac{b_1\sqrt{s}}{d_1\sqrt{s} - c_1\sqrt{r}}\right)^2 + \left(\eta - \frac{b_2\sqrt{s}}{d_1\sqrt{s} - c_1\sqrt{r}}\right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{d_1\sqrt{s} - c_1\sqrt{r}}\right)^2,$$

e fra i piani di riflessione figurano al solito soltanto i due

$$\eta = 0, \quad \xi = 0.$$

§ 12. Il poliedro fondamentale di $\overline{\Gamma}_{(1,1)}$.

Cominciamo le nostre ricerche particolari dal caso

$$\mu = 1, \quad \nu = 1,$$

ove nel gruppo $\Gamma_{(1,1)}$ formato dalle sostituzioni della forma

$$z' = \frac{(a+b)z + (c+d)}{(c_0-d_0)z + (a_0-b_0)}, \quad \det.^{\text{to}} = \pm 1,$$

abbiamo semplicemente il gruppo

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1,$$

in cui $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ percorrono gli interi di GAUSS, che soddisfano inoltre le congruenze

$$\alpha \equiv \delta, \quad \beta \equiv \gamma \pmod{2}.$$

Nel gruppo ampliato $\overline{\Gamma}_{(1,1)}$ esistono le riflessioni

$$z' = \frac{(b_1 + i b_2)z_0 + \beta_1}{\gamma_1 z_0 - (b_1 - i b_2)},$$

con $b_1, b_2, \beta_1, \gamma_1$ razionali interi legati dalla equazione:

$$b_1^2 + b_2^2 + \beta_1 \gamma_1 = 1,$$

e insieme dalla congruenza

$$\beta_1 \equiv \gamma_1 \pmod{2}.$$

In questo caso abbiamo infiniti piani di riflessione corrispondenti a $\gamma_1 = 0$; le loro equazioni sono:

$$\xi = m, \quad \eta = n,$$

con m, n interi arbitrari. Per $\gamma_1 \geq 0$ abbiamo la sfera di riflessione

$$\left(\xi - \frac{b_1}{\gamma_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{b_2}{\gamma_1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{\gamma_1^2}.$$

Ora consideriamo il prisma indefinito a base quadrata che si stende, al disopra del piano $\zeta = 0$, fra i quattro piani di riflessione

$$1) \quad \eta = 0, \quad 2) \quad \xi = 0, \quad 3) \quad \eta = 1, \quad 4) \quad \xi = 1$$

e togliamone le regioni interne alle due sfere di riflessione

$$5) \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1, \quad 6) \quad (\xi - 1)^2 + (\eta - 1)^2 + \zeta^2 = 1.$$

Avremo così costruito un poliedro P [fig. 1.^a (*)] tutto limitato da piani e sfere di riflessione con 6 faccie e 5 vertici:

$V_1 \equiv (0, 0, 1)$	intersezione delle faccie	1) 2) 5)
$V_2 \equiv (1, 1, 1)$	" "	3) 4) 6)
$V_3 \equiv (1, 0, 0)$	" "	1) 4) 5) 6)
$V_4 \equiv (0, 1, 0)$	" "	2) 3) 5) 6)
$V_5 \equiv (0, 0, \infty)$	" "	1) 2) 3) 4),

dei quali i tre ultimi sono singolari.

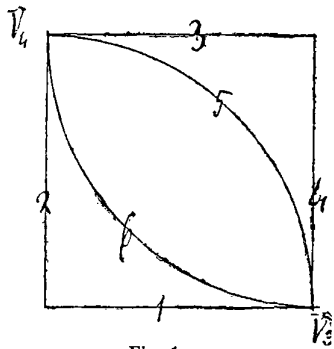


Fig. 1.^a.

In questo caso si vede subito che *il poliedro P non è attraversato da alcuna altra sfera (piano) di riflessione.*

Conforme alle indicazioni generali del § 9 dobbiamo ora ricercare le sostituzioni di 1.^a e 2.^a specie, che cangiano P in sè medesimo. Basta tener presente che ogni tale sostituzione deve lasciar fissi i due vertici *non singolari* V_1, V_2 o scambiarli fra loro, per risolvere semplicemente la questione.

Cominciando infatti dal ricercare le sostituzioni riproduttive di P che lasciano fissi V_1, V_2 , osserviamo che fra di esse figura la riflessione sul piano $\xi - \eta = 0$, che ha per espressione analitica:

$$z' = iz_0,$$

ovvero, riducendola al determinante 1:

$$z' = \frac{1+i}{\frac{\sqrt{2}}{1+i}} z_0.$$

Una sostituzione *di 1.^a specie* che, sovrapponendo P a sè stesso, lasci immobili V_1, V_2 deve permutare fra loro le tre faccie del triedro rettangolo

(*) In questa, come in tutte le figure seguenti, si osservano le traccie sul piano $\xi\eta$ delle faccie del poliedro.

col vertice in V_2 ed è quindi necessariamente *ellittica a periodo 3*; essa lascia immobili tutti i punti del circolo condotto per V_1, V_2 normalmente al piano $\xi\eta$ e però i suoi due punti fissi sul piano complesso $\xi + i\eta$ sono gli indici dei valori

$$\frac{(1+i)(\sqrt{3}+1)}{2}, \quad -\frac{(1+i)(\sqrt{3}-1)}{2}$$

della variabile z . Con queste osservazioni si trova subito per la sua espressione effettiva:

$$z' = \frac{z+i}{z-i} = \frac{\frac{1+i}{2}z - \frac{1-i}{2}}{\frac{1+i}{2}z + \frac{1-i}{2}}, \quad (b)$$

e si verifica che essa produce l'effetto voluto, scambiando ciclicamente le faccie del poliedro così:

$$(1, 5, 2) (\dot{3}, 4, 6),$$

onde sui vertici singolari produce la sostituzione circolare

$$(V_3, V_4, V_5).$$

Il gruppo delle 6 sostituzioni

$$1, b, b^2; \quad a, ab, ab^2,$$

è quindi il gruppo completo riproduttivo del poliedro P , che lascia fissi V_1, V_2 . D'altronde è evidente che la rotazione di π attorno alla normale al piano $\xi\eta$ nel punto $\frac{1+i}{2}$ (asse del prisma) riproduce P scambiando V_1, V_2 ; la sua espressione analitica è:

$$z' = -z + (1+i). \quad (c)$$

Vi sono adunque solo 12 sostituzioni riproduttrici di P e cioè le 6 di 1.^a specie

$$1, b, b^2, c, cb, cb^2,$$

e le 6 di 2.^a specie

$$a, ab, ab^2, ac, acb, acb^2;$$

esse formano un gruppo (ampliato) del diedro ($n=3$). Costruendo le espressioni di queste 12 sostituzioni, si osserva che nessuna di esse appartiene a $\overline{\Gamma}_{(1,1)}$. Ne segue:

Il poliedro costruito P è il poliedro fondamentale del gruppo $\overline{\Gamma}_{(1,1)}$, che si genera con pure riflessioni.

§ 13. Il gruppo riproduttivo della forma:

$$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2.$$

Ed ora abbiamo, secondo il § 9, tutti gli elementi necessari per risalire al gruppo aritmetico riproduttivo della forma quaternaria

$$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2.$$

Innanzitutto osserviamo che alle tre sostituzioni (a), (b), (c), col gruppo delle quali $\overline{\Gamma}_{(1,1)}$ è ampliabile, si può dare la forma algebrica delle sostituzioni di $\overline{\Gamma}_{(1,1)}$ salvo che a, b, c, d non sono più per queste sostituzioni numeri interi. Ma se passiamo alle sostituzioni quaternarie corrispondenti del gruppo (algebrico) riproduttivo di $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$, applicando le formole del § 8, troviamo per le sostituzioni quaternarie (a), (b), (c) le forme seguenti:

$$a) \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad b) \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad c) \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Queste sostituzioni appartengono al gruppo aritmetico riproduttivo di

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2;$$

ma fra le 12 sostituzioni del gruppo, che esse generano, solo l'identità appartiene a $G_{(1,1)}$, come si vede col calcolo effettivo (*). Ne concludiamo:

Il sottogruppo aritmetico $G_{(1,1)}$ riproduttivo della forma:

$$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2,$$

le cui sostituzioni sono congrue coll'identità (mod. 2), coincide con $G'_{(1,1)}$ cioè è oleodricamente isomorfo con $\overline{\Gamma}_{(1,1)}$. Nel gruppo totale aritmetico riproduttivo di f esso è contenuto quale sottogruppo eccezionale d'indice 12.

A scanso di equivoci ricordiamo che qui, come sempre in seguito, conserviamo le sole sostituzioni coll'ultimo coefficiente a_{44} positivo.

Possiamo dare in fine le sostituzioni quaternarie elementari sia di $G_{(1,1)}$, sia del gruppo totale. Le prime si ottengono costruendo le 6 omologie armo-

(*) Tale verifica, come quelle dei successivi paragrafi, si compie con somma facilità riducendo le sostituzioni generatrici e le loro combinazioni rispetto al modulo 2.

niche di $G_{(1,1)}$ che corrispondono alle riflessioni sulle faccie del poliedro P ed hanno le espressioni seguenti:

$$\begin{array}{l}
 1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad 2) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad 3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & +2 & +2 \\ 0 & +2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \\
 4) \begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \quad 5) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad 6) \begin{vmatrix} -1 & +2 & 0 & -2 \\ +2 & -1 & 0 & +2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 3 \end{vmatrix}.
 \end{array}$$

Basta ora associarvi le tre quaternarie $a)$, $b)$, $c)$ per avere un sistema di sostituzioni generatrici del gruppo aritmetico totale. E in fine, volendo conservare nei gruppi anche le sostituzioni con a_{44} negativo basterà alle 9 precedenti associare la 10.^a

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Avendo trattato così diffusamente l'esempio attuale, potremo procedere più speditamente nei seguenti, ove basterà riunire gli elementi necessari per la determinazione del gruppo aritmetico riproduttivo della forma quaternaria corrispondente.

§ 14. Il gruppo $\bar{\Gamma}_{(1,2)}$ e la forma:

$$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_4^2.$$

L'equazione

$$2d_1^2 - c_1^2 = 1$$

ammettendo la minima soluzione in interi positivi

$$d_1 = 1, \quad c_1 = 1,$$

cominceremo dal considerare lo spazio compreso, al disopra del piano $\zeta = 0$, fra i due piani di riflessione

$$1) \quad \eta = 0, \quad 2) \quad \xi = 0$$

e le due sfere di riflessione

$$3) \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1, \quad \text{Tipo II}$$

$$4) \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = (\sqrt{2} - 1)^2, \quad \text{Tipo I,}$$

dal quale toglieremo le regioni interne alle tre nuove sfere di riflessione

$$5) \quad (\xi - \sqrt{2})^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1, \quad \text{Tipo I}$$

$$6) \quad \xi^2 + (\eta - \sqrt{2})^2 + \zeta^2 = 1, \quad \text{Tipo I}$$

$$7) \quad \{ \xi - (\sqrt{2} - 1) \}^2 + \{ \eta - (\sqrt{2} - 1) \}^2 + \zeta^2 = (\sqrt{2} - 1)^2, \quad \text{Tipo II.}$$

Il poliedro P così limitato (fig. 2.^a) ha 7 vertici dei quali tre singolari

$$V_1 \equiv (\sqrt{2} - 1, 0, 0) \quad \text{intersezione delle faccie 1) 4) 5) 7)}$$

$$V_2 \equiv (0, \sqrt{2} - 1, 0) \quad \text{ " " 2) 4) 6) 7)}$$

$$V_3 \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \quad \text{ " " 3) 5) 6) 7);}$$

le tre faccie 1) 2) 3) sono quadrangolari con un angolo nullo e tre retti, le tre 4) 5) 6) triangoli con due angoli nulli ed uno retto, in fine la faccia 7) un triangolo con angoli nulli (*).

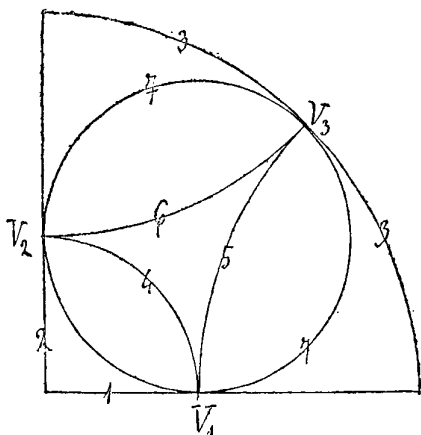


Fig. 2.^a.

Con considerazioni aritmetiche e geometriche del tutto simili a quelle che ho sviluppato nell'ultimo dei miei lavori citati (Mathem. Ann., Bd. 43, pag. 124 ss.) si dimostra che *il poliedro P non è attraversato da alcuna sfera di riflessione di $\overline{\Gamma}_{(1, 2)}$.*

Per trovare tutte le sostituzioni che trasformano P in sè medesimo, osserviamo che nessuna di queste (salvo l'identità) può lasciar fissi i tre vertici singolari V_1, V_2, V_3 , giacchè essa coinci-

(*) Tutte le circostanze qui notate (necessarie ad osservarsi per la ricerca delle sostituzioni riproduttrici del poliedro) si leggono facilmente nella figura. Considerando infatti il circolo (o retta) traccia sul piano $\xi\eta$ di una qualunque delle faccie, dentro di esso i circoli della figura, che lo tagliano ad angolo retto, segnano un poligono ad archi di circolo che è la proiezione stereografica della faccia corrispondente.

derebbe con una riflessione sulla sfera 7), che è una faccia del poliedro. Al massimo sono dunque possibili 6 di queste sostituzioni ed esse esistono in effetto, come andiamo a verificare. In primo luogo la riflessione sul piano $\xi - \eta = 0$:

$$z' = iz_0 = \frac{1+i}{1-i} \frac{z_0}{\sqrt{2}}, \quad (a)$$

riproduce P lasciando fisso V_3 e scambiando V_1 con V_2 . Poi la riflessione

$$z' = \frac{-z_0}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{z_0}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (b)$$

sulla sfera

$$(\xi + 1)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 2$$

cambia pure P in sè stesso permutando le faccie (2, 3), (4, 5) e i vertici (V_2, V_3), mentre le faccie 1) 6) 7) e il vertice V_1 restano immobili. Combinando (a) con (b), si hanno le 6 sostituzioni

$$1, a, b, ab, ba, aba;$$

fra queste la sola identità appartiene a $\overline{\Gamma}_{(1,2)}$, onde: *Il poliedro P (fig. 2.^a) è il poliedro fondamentale di $\overline{\Gamma}_{(1,2)}$, che si genera colle riflessioni sulle sue faccie.*

Per le forme quaternarie delle sostituzioni a), b) troviamo:

$$a) \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad b) \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Esse appartengono al gruppo aritmetico riproduttivo della forma:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_4^2,$$

ma nel gruppo di 6 sostituzioni generato da a), b) la sola identità appartiene a $G_{(1,2)}$. Ne concludiamo: *Il sottogruppo $G_{(1,2)}$ riproduttivo della forma:*

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_4^2$$

è oloedricamente isomorfo con $\overline{\Gamma}_{(1,2)}$. Esso è sottogruppo eccezionale d'indice 6 nel gruppo aritmetico totale.

Per generare l'intero gruppo basta associare le quaternarie $a)$, $b)$ alle 7 seguenti generatrici di $G_{(1,2)}$:

$$\begin{aligned}
 & 1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad 2) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad 3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad 4) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}, \\
 & 5) \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}, \quad 6) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \end{vmatrix}, \quad 7) \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & -2 & 4 \\ -2 & -2 & -1 & 4 \\ -2 & -2 & -2 & 5 \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

§ 15. Il gruppo $\bar{\Gamma}_{(1,5)}$ e la forma:

$$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 5x_4^2.$$

L'equazione

$$5d_1^2 - c_1^2 = 1,$$

ammettendo la minima soluzione

$$c_1 = 2, \quad d_1 = 1,$$

dallo spazio compreso, nella regione delle ζ positive, fra i due piani di riflessione

$$1) \quad \eta = 0, \quad 2) \quad \xi = 0$$

e le due sfere di riflessione

$$3) \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1, \quad \text{Tipo II}$$

$$4) \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = (\sqrt{5} - 2)^2, \quad \text{Tipo I,}$$

togliamo le regioni interne alle 8 sfere di riflessione seguenti:

$$5) \quad \left\{ \xi - (\sqrt{5} - 2) \right\}^2 + \left\{ \eta - (\sqrt{5} - 2) \right\}^2 + \zeta^2 = (\sqrt{5} - 2)^2, \quad \text{Tipo II}$$

$$6) \quad \left\{ \xi - \frac{\sqrt{5}}{2} \right\}^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{2} \right)^2, \quad \text{Tipo I}$$

$$7) \quad \xi^2 + \left\{ \eta - \frac{\sqrt{5}}{2} \right\}^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{2} \right)^2, \quad \text{Tipo I}$$

$$8) \left\{ \xi - \frac{\sqrt{5}}{3} \right\}^2 + \left\{ \eta - \frac{\sqrt{5}}{3} \right\}^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{3} \right)^2, \text{ Tipo I}$$

$$9) \left\{ \xi - \frac{\sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} \right\}^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{3 + \sqrt{5}} \right)^2, \text{ Tipo I}$$

$$10) \xi^2 + \left\{ \eta - \frac{\sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} \right\}^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{3 + \sqrt{5}} \right)^2, \text{ Tipo I}$$

$$11) \left\{ \xi - \frac{2}{1 + \sqrt{5}} \right\}^2 + \left\{ \eta - \frac{1}{1 + \sqrt{5}} \right\}^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{1 + \sqrt{5}} \right)^2, \text{ Tipo II}$$

$$12) \left\{ \xi - \frac{1}{1 + \sqrt{5}} \right\}^2 + \left\{ \eta - \frac{2}{1 + \sqrt{5}} \right\}^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{1 + \sqrt{5}} \right)^2, \text{ Tipo II.}$$

Definiamo così un poliedro P (fig.^a 3.^a) non attraversato da alcuna altra sfera di riflessione del gruppo.

Fra le sue faccie le 6

1) 2) 3) 5) 11) 12),

sono pentagoni con 3 angoli retti e 2 nulli e le rimanenti 6

4) 6) 7) 8) 9) 10)

triangoli con un angolo retto e 2 nulli. Esso ha 6 vertici singolari

$$V_1 \equiv (\sqrt{5} - 2, 0, 0), \quad V_2 \equiv (0, \sqrt{5} - 2, 0)$$

$$V_3 \equiv \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}, 0, 0 \right), \quad V_4 \equiv \left(0, \frac{\sqrt{5} - 1}{2}, 0 \right)$$

$$V_5 \equiv \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0 \right), \quad V_6 \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0 \right)$$

e fra gli altri otto vertici si distinguono i due che indicheremo con V_7, V_8 :

$$V_7 \equiv (0, 0, 1), \quad V_8 \equiv \left(\frac{\sqrt{5}}{4 + \sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}}{4 + \sqrt{5}}, \frac{1}{4 + \sqrt{5}} \right),$$

intersezione delle tre rispettive faccie pentagonali

1) 2) 3) per V_7

5) 11) 12) per V_8 ,

mentre in ciascuno dei rimanenti 6 concorrono due faccie pentagonali ed una

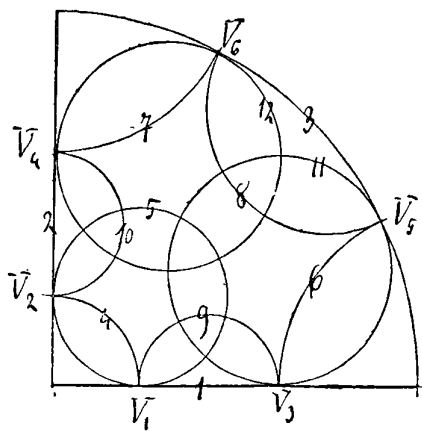


Fig. 3.^a

triangolare. Ogni sostituzione che cangi P in sè medesimo deve lasciar fissi V_7, V_8 ovvero scambiarli fra loro. Intanto osserviamo la solita riflessione

$$z' = \frac{\frac{1+i}{\sqrt{2}}}{\frac{1-i}{\sqrt{2}}} z_0, \quad (a)$$

che riproduce P , lasciando fissi V_7, V_8 . Una sostituzione di 1.^a specie, riproduttrice di P , che lasci immobili V_7, V_8 è necessariamente ellittica a periodo 3 (cfr. § 12) e pei suoi punti fissi nel piano $\xi\eta$, dalle coordinate di V_7, V_8 , superiormente assegnate, troviamo:

$$\frac{(1+i)(\sqrt{3}-1)}{2}, \quad -\frac{(1+i)(\sqrt{3}+1)}{2},$$

onde per l'espressione analitica della sostituzione:

$$z' = \frac{iz+1}{-iz+1} = \frac{\frac{1+i}{2}z + \frac{1-i}{2}}{-\frac{1+i}{2}z + \frac{1-i}{2}}. \quad (b)$$

Questa cangia effettivamente P in sè stesso, producendo sulle faccie gli scambi circolari

$$(1, 3, 2) \quad (5, 11, 12) \quad (4, 6, 7) \quad (8, 10, 9).$$

Se costruiamo poi la sostituzione ellittica a periodo 2 coi punti fissi V_3, V_4

$$z' = \frac{z - \frac{(1+i)(\sqrt{5}-1)}{2}}{\frac{(1-i)(\sqrt{5}+1)}{2}z - 1}, \quad (c)$$

vediamo che essa riproduce P scambiando le faccie

$$(1, 11) \quad (2, 12) \quad (3, 5) \quad (4, 8) \quad (6, 9) \quad (7, 10)$$

e in conseguenza i due vertici V_7, V_8 .

Il gruppo completo riproduttivo di P si compone quindi delle 12 sostituzioni:

$$1, \quad b, \quad b^2, \quad c, \quad cb, \quad cb^2 \\ a, \quad ab, \quad ab^2, \quad ac, \quad acb, \quad acb^2;$$

fra queste la sola identità appartiene a $\overline{\Gamma}_{(1,5)}$.

Dando ad (a), (b), (c) la forma quaternaria, troviamo:

$$a) \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad b) \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad c) \begin{vmatrix} -1 & 2 & +1 & -5 \\ 2 & -1 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

Queste appartengono bensì al gruppo aritmetico riproduttivo della forma

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 5x_4^2,$$

ma fra le 12 loro combinazioni la sola identità appartiene a $G_{(1,5)}$. Anche in questo caso adunque: *Il sottogruppo $G_{(1,5)}$ è oloedricamente isomorfo con $\overline{\Gamma}_{(1,5)}$; esso è contenuto nel gruppo totale aritmetico riproduttivo della forma*

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 5x_4^2,$$

come sottogruppo eccezionale d'indice 12.

Tralasciamo qui, come negli esempi seguenti, di scrivere le sostituzioni generatrici di questo gruppo totale.

§ 16. il gruppo $\overline{\Gamma}_{(1,6)}$ e la forma:

$$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 6x_4^2.$$

Trattiamo anche un esempio con ν numero composto, scegliendo

$$\mu = 1, \quad \nu = 6.$$

Il gruppo $\overline{\Gamma}_{(1,6)}$ (§ 11) contiene le sostituzioni di 1.^a e 2.^a specie a determinante +1 di una delle quattro forme:

$$\begin{pmatrix} a + b\sqrt{6}, & c + d\sqrt{6} \\ -c_0 + d_0\sqrt{6}, & a_0 - b_0\sqrt{6} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a\sqrt{2} + b\sqrt{3}, & c\sqrt{2} + b\sqrt{3} \\ -c_0\sqrt{2} + d_0\sqrt{3}, & a_0\sqrt{2} - b_0\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a\sqrt{3} + b\sqrt{2}, & c\sqrt{3} + d\sqrt{2} \\ -c_0\sqrt{3} + d_0\sqrt{2}, & a_0\sqrt{3} - b_0\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a\sqrt{6} + b, & c\sqrt{6} + d \\ -c_0\sqrt{6} + d, & a\sqrt{6} - b \end{pmatrix}.$$

Nel 1.^o tipo mancano le riflessioni a causa di $\left(\frac{-1}{3}\right) = -1$; restano i tre tipi

di sfere di riflessione

$$\left. \begin{aligned} \left(\xi - \frac{b_1 \sqrt{3}}{d_1 \sqrt{3} - c_1 \sqrt{2}} \right)^2 + \left(\eta - \frac{b_2 \sqrt{3}}{d_1 \sqrt{3} - c_1 \sqrt{2}} \right)^2 + \zeta^2 &= \left(\frac{1}{d_1 \sqrt{3} - c_1 \sqrt{2}} \right)^2 \\ 3(b_1^2 + b_2^2 + d_1^2) - 2c_1^2 &= 1 \end{aligned} \right\} (\alpha)$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\xi - \frac{b_1 \sqrt{2}}{d_1 \sqrt{2} - c_1 \sqrt{3}} \right)^2 + \left(\eta - \frac{b_2 \sqrt{2}}{d_1 \sqrt{2} - c_1 \sqrt{3}} \right)^2 + \zeta^2 &= \left(\frac{1}{d_1 \sqrt{2} - c_1 \sqrt{3}} \right)^2 \\ 2(b_1^2 + b_2^2 + d_1^2) - 3c_1^2 &= 1 \end{aligned} \right\} (\beta)$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\xi + \frac{b_1}{d_1 - c_1 \sqrt{6}} \right)^2 + \left(\eta - \frac{b_2}{d_1 - c_1 \sqrt{6}} \right)^2 + \zeta^2 &= \left(\frac{1}{d_1 - c_1 \sqrt{6}} \right)^2 \\ b_1^2 + b_2^2 + d_1^2 - 6c_1^2 &= 1. \end{aligned} \right\} (\gamma)$$

Dallo spazio compreso, al disopra del piano $\zeta = 0$, dai due piani di riflessione

$$1) \quad \eta = 0, \quad 2) \quad \xi = 0$$

e le due sfere di riflessione concentriche consecutive

$$3) \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1, \quad \text{Tipo } \gamma)$$

$$4) \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2, \quad \text{Tipo } \alpha),$$

togliamo le regioni interne alle altre 6 sfere di riflessione

$$5) \quad \left(\xi - \sqrt{\frac{3}{2}} \right)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2, \quad \text{Tipo } \alpha)$$

$$6) \quad \xi^2 + \left(\eta - \sqrt{\frac{3}{2}} \right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2, \quad \text{Tipo } \alpha)$$

$$7) \quad \left(\xi - \sqrt{\frac{2}{3}} \right)^2 + \left(\eta - \sqrt{\frac{2}{3}} \right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2, \quad \text{Tipo } \beta)$$

$$8) \quad \left\{ \xi - \sqrt{2} (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \right\}^2 + \eta^2 + \zeta^2 = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2, \quad \text{Tipo } \beta)$$

$$9) \quad \xi^2 + \left\{ \eta - \sqrt{2} (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \right\}^2 + \zeta^2 = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2, \quad \text{Tipo } \beta)$$

$$10) \quad \left(\xi - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2} + \sqrt{3}} \right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2} + \sqrt{3}} \right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{2\sqrt{2} + \sqrt{3}} \right)^2, \quad \text{Tipo } \alpha).$$

Il poliedro P così formato (fig. 4.^a) ha tre faccie pentagonali

1) 2) 3)

con angoli retti, tre quadrangolari

4) 5) 6)

con angoli di $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, 0, tre quadrangolari

7) 8) 9)

con angoli di $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, 0, 0 e l'ultima 10) triangolare con angoli nulli; tre dei suoi vertici, indicati con V_1 , V_2 , V_3 nella figura, sono singolari. Nessuna sfera di riflessione lo attraversa. Per trovare le sostituzioni che lo trasformano in sè medesimo, si osservi che la faccia 10) deve sovrapporsi a sè stessa e il vertice 1) 2) 3), intersezione delle tre faccie pentagonali, deve rimanere fisso. Abbiamo in primo luogo la solita riflessione

$$z' = iz_0 = \frac{1+i}{1-i} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} z_0, \quad (a)$$

che riproduce P , sicchè basta ora ricercare le sostituzioni di 1.^a specie. Una tale sostituzione, lasciando fisso il vertice del triedro trirettangolo formato dalle faccie pentagone, deve essere ellittica a periodo 3; il suo circolo fisso sarà il circolo condotto pel detto vertice ortogonalmente al piano $\xi\eta$

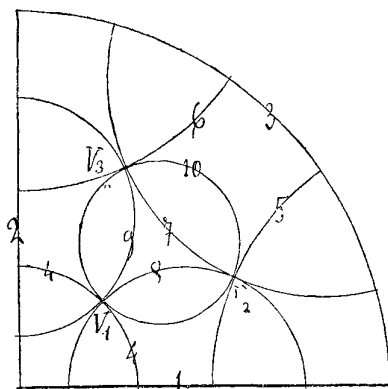


Fig. 4.^a

e alla faccia 10). Troviamo in conseguenza che i due punti fissi della sostituzione ellittica sul piano $\xi\eta$ sono:

$$z = \frac{(1+i)(\sqrt{3}-1)}{2}, \quad z = -\frac{(1+i)(\sqrt{3}+1)}{2}$$

e la sua espressione analitica è quindi, come al § 15,

$$z' = \frac{\frac{1+i}{2}z + \frac{1-i}{2}}{-\frac{1+i}{2}z + \frac{1-i}{2}}. \quad (b)$$

Essa sovrappone P a sè stesso lasciando fissa la faccia 10) e producendo sulle altre gli scambi circolari

$$(1, 3, 2) \quad (4, 5, 6) \quad (7, 9, 8).$$

Il gruppo completo riproduttivo di P consta delle 6 sostituzioni

$$1, \quad b, \quad b^2, \quad a, \quad ab, \quad ab^2,$$

fra le quali la sola identità appartiene a $\overline{\Gamma}_{(1,6)}$. Questo gruppo si genera adunque colle 10 riflessioni sulle faccie di P , che ne è il poliedro fondamentale.

Costruendo ora le sostituzioni quaternarie a) b), troviamo:

$$a) \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad b) \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

queste appartengono al gruppo totale aritmetico riproduttivo di

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 6x_4^2,$$

ma fra le 6 loro combinazioni la sola identità appartiene a $G_{(1,6)}$. Dunque: *Il sottogruppo $G_{(1,6)}$ è oloedricamente isomorfo con $\overline{\Gamma}_{(1,6)}$ ed è contenuto quale sottogruppo eccezionale d'indice 6 nel gruppo totale aritmetico riproduttivo della forma:*

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 6x_4^2.$$

§ 17. Il gruppo $\overline{\Gamma}_{(2,2)}$ e la forma:

$$f = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_4^2.$$

Osserviamo che nel caso attuale dei quattro tipi di sfere di riflessione § 7 manca il tipo I. Dallo spazio compreso fra i due piani

$$1) \quad \eta = 0, \quad 2) \quad \xi = 0$$

e le due sfere consecutive di riflessione

$$3) \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1, \quad \text{Tipo IV}$$

$$4) \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = (\sqrt{2} - 1)^2, \quad \text{Tipo III,}$$

nella regione delle ζ positive togliamo le porzioni interne alle 5 sfere di ri-

flessione seguenti:

$$5) \left\{ \xi - (2 - \sqrt{2}) \right\}^2 + \eta^2 + \zeta^2 = (\sqrt{2} - 1)^2, \text{ Tipo IV}$$

$$6) \xi^2 + \left\{ \eta - (2 - \sqrt{2}) \right\}^2 + \zeta^2 = (\sqrt{2} - 1)^2, \text{ Tipo IV}$$

$$7) (\xi - 1)^2 + \left(\eta - \frac{1}{2} \right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{2} \right)^2, \text{ Tipo II}$$

$$8) \left(\xi - \frac{1}{2} \right)^2 + (\eta - 1)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{2} \right)^2, \text{ Tipo II}$$

$$9) \left(\xi - \frac{2}{3 + \sqrt{2}} \right)^2 + \left(\eta - \frac{2}{3 + \sqrt{2}} \right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{3 + \sqrt{2}} \right)^2, \text{ Tipo III.}$$

Il poliedro P così limitato (fig. 5.^a), non attraversato da alcuna altra sfera di riflessione di $\bar{\Gamma}_{(2,2)}$, ha tutte le sue faccie quadrangolari. Però queste si separano in due categorie e cioè:

1) 2) 4) 7) 8) 9) con angoli di: $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0$

3) 5) 6) con angoli di: $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0, 0$.

Fra gli 11 vertici si distinguono i due:

$V_1 \equiv (0, 0, \sqrt{2} - 1)$ intersezione di 1) 2) 4)

$V_2 \equiv \left(\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2} + 1}, \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2} + 1}, \frac{1}{3\sqrt{2} + 1} \right)$ intersezione di 7) 8) 9),

nei quali concorrono tre faccie di 1.^a categoria formando un triedro triretangolo e tre vertici singolari V_3, V_4, V_5 , mentre nei rimanenti 6 concorrono ogni volta due faccie di 1.^a ed una di 2.^a categoria. Ne segue che se P si sovrappone a sè stesso, dovranno V_1, V_2 restar fissi o scambiarsi fra loro. Dopo queste osservazioni si trova facilmente che il gruppo riproduttivo di P si compone di 12 sostituzioni generate dalle tre elementari:

$$a) z' = \frac{1+i}{\sqrt{2}} z_0, \quad b) z' = \frac{1+i}{2} z - \frac{1-i}{2} (\sqrt{2}-1), \quad c) z' = \frac{i\sqrt{2}z + \frac{1-i}{2}}{\frac{1+i}{2}z - i\sqrt{2}}$$

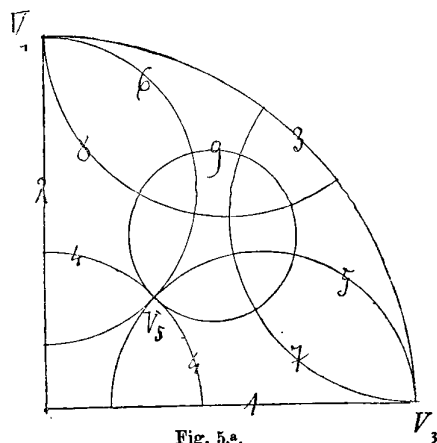


Fig. 5.a.

Le $b)$ $c)$ sono ellittiche a periodo 3 la prima, a periodo 2 la seconda. Nessuna delle 12 sostituzioni generate (l'identità esclusa) appartiene a $\overline{\Gamma}_{(2,2)}$.

Ponendo poi $a)$ $b)$ $c)$ sotto forma quaternaria troviamo:

$$a) \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad b) \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}, \quad c) \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Qui per la prima volta si presenta la circostanza che delle nuove sostituzioni quaternarie, colle quali ampliamo il primitivo gruppo $G'_{(2,2)}$, una, la $b)$, non appartiene al gruppo aritmetico totale. Delle 12 sostituzioni composte con $a)$, $b)$, $c)$ solo le quattro

$$1, \quad a, \quad c, \quad ac,$$

hanno coefficienti interi e di queste la prima soltanto appartiene a $G_{(2,2)}$. Così: Il gruppo $G_{(2,2)}$ è oloedricamente isomorfo con $\overline{\Gamma}_{(2,2)}$ ed è contenuto come sottogruppo eccezionale d'indice 4 nel gruppo aritmetico totale riproduttivo della forma.

§ 18. Il gruppo $\overline{\Gamma}_{(2,3)}$ e la forma:

$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 6x_4^2.$$

Delle sfere di riflessione al § 7 manca qui il tipo III.

Consideriamo lo spazio compreso fra i due piani di riflessione

$$1) \quad \eta = 0, \quad 2) \quad \xi = 0$$

e le due sfere concentriche consecutive

$$3) \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1, \quad \text{Tipo IV}$$

$$4) \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = (2 - \sqrt{3})^2, \quad \text{Tipo IV,}$$

nella regione delle ζ positive e togliamone le porzioni interne alle otto sfere di riflessione

$$5) \quad \left(\xi - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2, \quad \text{Tipo I}$$

$$6) \quad \xi^2 + \left(\eta - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2, \quad \text{Tipo I}$$

- 7) $\left(\xi - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 + \left(\eta - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$, Tipo IV
- 8) $\left\{\xi - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}(2 + \sqrt{3})}\right\}^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}(2 + \sqrt{3})}\right\}^2$, Tipo I
- 9) $\xi^2 + \left\{\eta - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}(2 + \sqrt{3})}\right\}^2 + \zeta^2 = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}(2 + \sqrt{3})}\right\}^2$, Tipo I
- 10) $\left(\xi - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}\right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}\right)^2$, Tipo II
- 11) $\left\{\xi - \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}\right\}^2 + \left\{\eta - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1}\right\}^2 + \zeta^2 = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}\right\}^2$, Tipo II
- 12) $\left\{\xi - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})}\right\}^2 + \left\{\eta - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})}\right\}^2 + \zeta^2 = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})}\right\}^2$, Tipo IV.

Così è limitato un poliedro P (fig. 6.^a) che nessuna altra sfera di riflessione di $\bar{\Gamma}_{(2,3)}$ attraversa.

Le 12 faccie del poliedro si ripartiscono nelle quattro faccie pentagone

3) 4) 7) 12)

con angoli retti, nelle quattro faccie pentagone

1) 2) 10) 11)

con 4 angoli retti ed uno nullo e nelle quattro faccie quadrangole

5) 6) 8) 9)

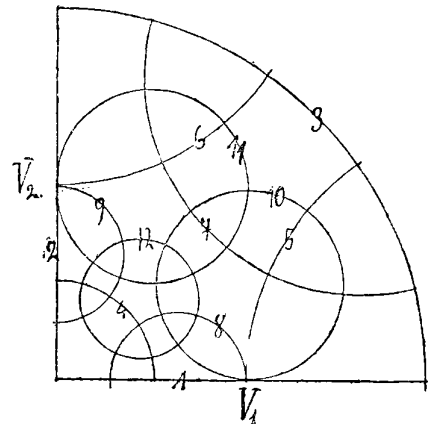


Fig. 6.^a

con 3 angoli retti ed uno nullo. Fra i 18 vertici di P due soltanto:

$$V_1 \equiv \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1, 0, 0\right), \quad V_2 \equiv \left(0, \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}, 0\right),$$

sono singolari. In ogni sovrapposizione di P a sè medesimo dovranno V_1, V_2 restare immobili o scambiarsi fra loro. Ora fra le riflessioni che cangiano P

in sè stesso abbiamo in primo luogo la riflessione

$$z' = \frac{\frac{1+i}{\sqrt{2}}}{\frac{1-i}{\sqrt{2}}} z_0, \quad (a)$$

che permuta V_1, V_2 , indi la riflessione

$$z' = \frac{(1+i)z_0 - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}z_0 - (1-i)}, \quad (b)$$

sulla sfera

$$\left(\xi - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)^2,$$

che lascia fissi V_1, V_2 e in fine la terza riflessione

$$z' = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}} z_0, \quad (c)$$

sulla sfera

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2 - \sqrt{3},$$

che lascia ancora fissi V_1, V_2 . Queste tre riflessioni, essendo due a due permutabili, danno luogo al gruppo di 8 sostituzioni

$$1, a, b, c, ab, ac, bc, abc$$

riproduttrici di P . È facile vedere che non ne esistono altre poichè, nel caso opposto, ve ne sarebbe pure una nuova di 1.^a specie che lascierebbe fissi V_1, V_2 , ma siccome le quattro faccie che concorrono in uno di questi vertici si separano in due coppie di specie diversa, dovrebbe una tale sostituzione essere ellittica a periodo 2 e coincidere per conseguenza con bc . Fra le 8 sostituzioni sopra scritte la sola identità appartiene a $\overline{\Gamma}_{(2,3)}$, che ammette dunque il poliedro costruito per poliedro fondamentale. Se in fine costruiamo le so-

stituzioni quaternarie corrispondenti ad a) b) c) troviamo:

$$a) \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad b) \begin{vmatrix} -1 & +2 & 2 & -6 \\ +2 & -1 & -2 & +6 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 6 \end{vmatrix}, \quad c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Tutte tre appartengono al gruppo aritmetico riproduttivo della forma, ma nessuna delle loro combinazioni (salvo l'identità) appartiene a $G_{(2,3)}$. Dunque:

Il gruppo $G_{(2,3)}$ è oloedricamente isomorfo con $\overline{\Gamma}_{(2,3)}$; esso è contenuto nel gruppo totale aritmetico riproduttivo della forma:

$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 6x_4^2,$$

quale sottogruppo eccezionale d'indice 8.

§ 19. Il gruppo $\overline{\Gamma}_{(3,2)}$ e la forma:

$$x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 6x_4^2.$$

Negli esempi che abbiamo trattato fin qui la forma quaternaria, di cui si voleva determinare il gruppo riproduttivo, era suscettibile di rappresentare lo zero e il poliedro fondamentale corrispondente presentava in conseguenza vertici singolari.

Trattiamo da ultimo un esempio in cui la forma quaternaria non può rappresentare lo zero e quindi il poliedro fondamentale ha, nello spazio non-euclideo, tutti i suoi vertici a distanza finita. *Ciò accade per la forma:*

$$x_1^2 + x_2^2 + \mu(x_3^2 - \nu x_4^2),$$

se -1 e ν sono contemporaneamente non residui quadratici di μ e noi scegliamo per nostro esempio

$$\mu = 3, \quad \nu = 2.$$

Scegliendo convenientemente le sfere di riflessione nei quattro tipi (§ 7), noi definiamo l'attuale poliedro così. Dallo spazio compreso, al di sopra del piano $\zeta = 0$, fra i due piani di riflessione

$$1) \quad \eta = 0, \quad 2) \quad \xi = 0$$

e le due sfere consecutive

$$3) \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1, \quad \text{Tipo IV}$$

$$4) \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = (\sqrt{2} - 1)^2, \quad \text{Tipo III,}$$

togliamo le regioni interne alle 10 sfere di riflessione seguenti:

$$5) \quad \left(\xi - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 + \left(\eta - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2, \quad \text{Tipo I}$$

$$6) \quad \xi^2 + \left(\eta - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2, \quad \text{Tipo IV}$$

$$7) \quad \left(\xi - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2, \quad \text{Tipo IV}$$

$$8) \quad \left(\xi - \frac{2(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{3}}\right)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}}\right)^2, \quad \text{Tipo II}$$

$$9) \quad \xi^2 + \left(\eta - \frac{2(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{3}}\right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}}\right)^2, \quad \text{Tipo II}$$

$$10) \quad \left\{\xi - \frac{\sqrt{3}}{2+3\sqrt{2}}\right\}^2 + \left\{\eta - \frac{2\sqrt{3}}{2+3\sqrt{2}}\right\}^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{2+3\sqrt{2}}\right)^2, \quad \text{Tipo IV}$$

$$11) \quad \left\{\xi - \frac{2\sqrt{3}}{2+3\sqrt{2}}\right\}^2 + \left\{\eta - \frac{\sqrt{3}}{2+3\sqrt{2}}\right\}^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{2+3\sqrt{2}}\right)^2, \quad \text{Tipo IV}$$

$$12) \quad \left\{\xi - \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}}\right\}^2 + \left\{\eta - \frac{(\sqrt{2}-1)\sqrt{3}}{2}\right\}^2 + \zeta^2 = \left\{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{3}}\right\}^2, \quad \text{Tipo II}$$

$$13) \quad \left\{\xi - \frac{(\sqrt{2}-1)\sqrt{3}}{2}\right\}^2 + \left\{\eta - \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}}\right\}^2 + \zeta^2 = \left\{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{3}}\right\}^2, \quad \text{Tipo II}$$

$$14) \quad \left\{\xi - \frac{2\sqrt{3}}{3+4\sqrt{2}}\right\}^2 + \left\{\eta - \frac{2\sqrt{3}}{3+4\sqrt{2}}\right\}^2 + \zeta^2 = \left\{\frac{1}{3+4\sqrt{2}}\right\}^2, \quad \text{Tipo IV.}$$

Il poliedro P così definito (fig. 7.^a) ha due faccie esagonali 4) 5) e le rimanenti 12 pentagone con angoli diedri ed angoli piani tutti retti; di più, come ora si riscontrerà, i due esagoni 4) 5) sono regolari nel senso non-euclideo. *Nessuna sfera di riflessione del gruppo $\overline{\Gamma}_{(3,2)}$ lo attraversa.*

Le sostituzioni che cangiano P in sè medesimo o dovranno lasciar fisse le faccie esagonali 4) 5) o scambiarle fra loro. Cerchiamo in primo luogo

quelle che le lasciano ferme, fra le quali figura al solito la riflessione

$$z' = iz_0 = \frac{1+i}{\frac{\sqrt{2}}{1-i}} z_0. \tag{a}$$

Una fra queste sostituzioni che sia di 1.^a specie dovrà avere per punti fissi nel piano ξ_η i due punti pei quali passa il fascio di circoli ortogonali a 4) 5) cioè i due punti

$$z = \frac{(1+i)(\sqrt{2}-1)}{2} (\sqrt{3} \pm 1)$$

e il suo periodo dovrà essere 2 o 3 o 6, le faccie che essa riporta in sè medesima essendo esagonali. Proviamo subito quella a periodo 6, di cui le altre sono potenze; essa ha per espressione effettiva

$$z' = \frac{\frac{(1+i)\sqrt{3}}{2} z + \frac{(1-i)(\sqrt{2}-1)}{2}}{\frac{(1+i)(\sqrt{2}+1)}{2} z + \frac{(1-i)\sqrt{3}}{2}}$$

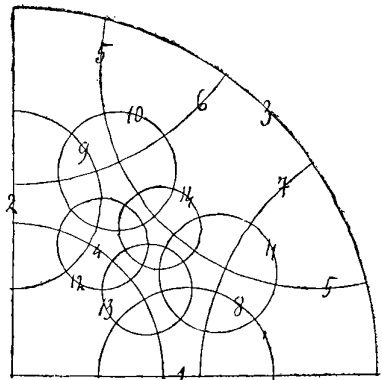


Fig. 7.a.

e produce l'effetto voluto, scambiando ciclicamente le faccie così:

$$(1, 8, 13, 12, 9, 2) \quad (3, 7, 11, 14, 10, 6).$$

Di qui segue intanto come si era enunciato: *Le faccie 4) 5) sono esagoni regolari nel senso non-euclideo.*

Siccome la a trasforma b in b^{-1} così il gruppo generato da a, b contiene le 12 sostituzioni seguenti:

$$1, b, b^2, b^3, b^4, b^5, \\ a, ab, ab^2, ab^3, ab^4, ab^5,$$

nè possono esistere altre sostituzioni riproduttrici di P che lascino ferme le faccie 4) 5). Però vi sono altre 12 sostituzioni che cangiano P in sè stesso permutando 4) con 5); queste si ottengono combinando le 12 precedenti colla seguente ellittica a periodo 2

$$z' = \frac{(\sqrt{2}-i)z - \sqrt{3}}{\sqrt{3}z - (\sqrt{2}-i)}, \quad \det.^{te} = 2(1+i\sqrt{2}), \tag{c}$$

che produce gli scambi

$$(1, 3) \quad (2, 7) \quad (4, 5) \quad (6, 8) \quad (9, 11) \quad (10, 13) \quad (12, 14).$$

Il gruppo riproduttivo di P consta quindi di 24 sostituzioni, fra le quali però la sola identità appartiene a $\overline{\Gamma}_{(3,2)}$ (*). Dunque questo gruppo è generabile con pure riflessioni cioè colle 14 riflessioni sulle faccie del poliedro costruito P , che ne è il poliedro fondamentale.

Costruendo ora le espressioni quaternarie di $a) b) c)$ troviamo (**):

$$a) \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad b) \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}, \quad c) \begin{vmatrix} -\sqrt{3} & 0 & 0 & -2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & \sqrt{3} \end{vmatrix},$$

onde si vede che soltanto le 12 sostituzioni generate da $a) b)$ appartengono al gruppo riproduttivo del poliedro P .

Ma un'altra circostanza, nuova negli esempi trattati, si presenta qui: la terza potenza b^3 della b è già congrua coll'identità (mod. 2) e però: *Il gruppo $G_{(3,2)}$ non coincide con $G'_{(3,2)}$, ma lo contiene quale sottogruppo eccezionale d'indice 2, ottenendosi le sue sostituzioni da quelle di $G'_{(3,2)}$ col moltiplicare queste ultime per 1, b^3 .*

Ne segue ulteriormente:

Il gruppo totale aritmetico riproduttivo della forma:

$$x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 6x_4^2$$

contiene $G_{(3,2)}$ quale sottogruppo eccezionale d'indice 6.

Termineremo col dare all'attuale poliedro P , con una semplice trasformazione, una forma notevole.

(*) Debbo qui segnalare un'omissione nel mio ultimo lavoro dei *Mathem. Annalen*, Bd. 3, ove pel gruppo ivi designato con $\overline{K}_{(2,3)}$ si trova un poliedro P' che è trasformabile nell'attuale. Solo ivi è erroneamente asserito che non esistono sostituzioni riproduttive di P' (pag. 132) che scambino fra loro le due faccie esagonali.

(**) Per costruire la quaternaria $c)$ basta fare nella quaternaria S

$$a = -i, \quad b = 1, \quad c = -1, \quad d = 0,$$

ma avvertendo che il modulo del determinante è qui $= 2\sqrt{3}$ bisogna poi dividere ciascuno dei 16 coefficienti ottenuti per $2\sqrt{3}$, il che dà l'espressione per $c)$ riportata nel testo.

Facciamo un'inversione per raggi vettori reciproci rispetto ad una sfera col centro nel punto

$$z = (1 + i) \frac{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{3} - 1)}{2};$$

le due faccie 4) 5) si cangieranno in due sfere concentriche col centro nel punto O trasformato di

$$z = (1 + i) \frac{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{3} + 1)}{2}$$

e la sostituzione $b)$ diventerà un'ordinaria rotazione di $\frac{\pi}{3}$ attorno alla normale

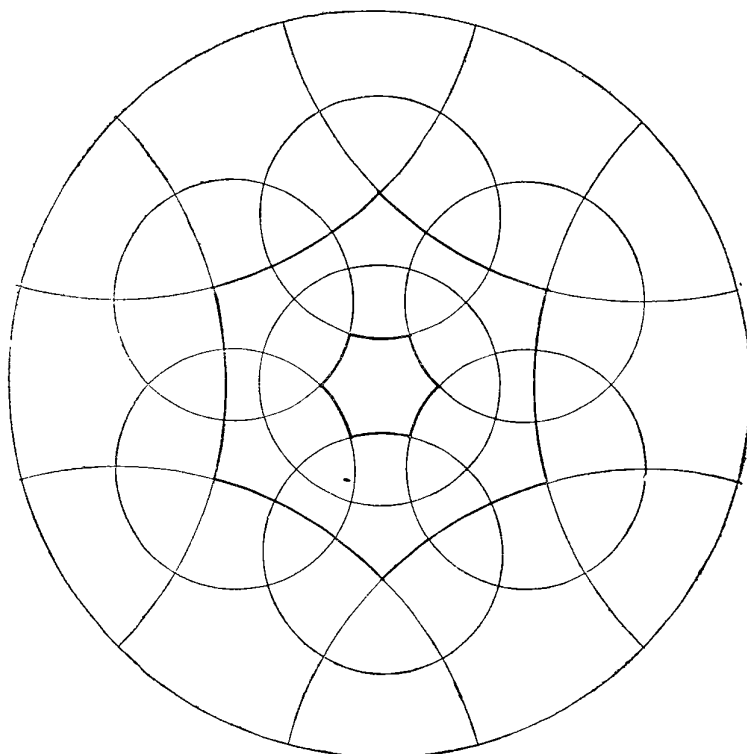


Fig. 8.^a.

in O al piano $\xi\eta$. Ne segue che le 6 faccie ortogonali a 4), come le 6 ortogonali a 5) si cangiano in sfere di raggio eguale coi centri distribuiti nei 6 vertici di un esagono regolare. Si ottiene così un poliedro le tracce delle cui faccie sul piano $\xi\eta$ si osservano nella fig. 8.^a. Esso non è del resto che

un caso particolare di un solido dello spazio non-euclideo, con angoli diedri e con angoli piani tutti retti, racchiuso da $2n + 2$ faccie ($n \geq 5$) di cui due faccie sono poligoni regolari (nel senso non-euclideo) di n lati e le altre $2n$ sono pentagonali. Per $n = 5$ si ottiene il *dodecaedro regolare* con diedri retti di cui tratta una mia recente Nota nei *Rendiconti dell'Accademia dei Lincei*.

I coefficienti delle sostituzioni nei gruppi corrispondenti ai solidi menzionati sono numeri formati colla radice n^{ma} dell'unità e con certe irrazionalità quadratiche.

Pisa, agosto 1893.

Sur la généralisation des fractions continues algébriques.

(Par M. CH. HERMITE, membre de l'Institut, à Paris.)

[Extrait d'une lettre à M. Pincherle (*).]

. Le problème que j'ai en vue est le suivant: Etant donné n séries S_1, S_2, \dots, S_n procédant suivant les puissances d'une variable x , déterminer les polynômes X_1, X_2, \dots, X_n des degrés $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ de manière à avoir

$$S_1 X_1 + S_2 X_2 + \dots + S_n X_n = S x^{\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n + n - 1},$$

où S est une série de même nature que S_1, S_2 , etc. La question ainsi posée est entièrement déterminée, et une remarque de calcul intégral en donne la complète solution dans le cas particulier où les séries sont de simples exponentielles. C'est ce que je vais montrer, je me proposerai ensuite de faire sortir, en vue du cas général, les enseignements que contient cette solution.

Soit

$$J = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{zx} dz}{(z - \zeta_1)^{\mu_1 + 1} (z - \zeta_2)^{\mu_2 + 1} \dots (z - \zeta_n)^{\mu_n + 1}},$$

l'intégrale étant prise le long d'une ligne fermée C qui comprend à son intérieur toutes les constantes $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$. Cette quantité s'obtient d'après le théorème de CAUCHY, au moyen des résidus de la fonction placée sous le signe d'intégration dont le calcul est facile. En considérant le pôle $z = \zeta_1$, pour fixer les idées, je pose $z = \zeta_1 + \varepsilon$, puis en développant suivant les puissances

(*) « Sono lieto di presentare al Direttore degli *Annali* le seguenti interessantissime « ricerche dell'illustre prof. HERMITE, colle quali viene ad essere appagato il desiderio « da me espresso nell'introduzione alla mia Memoria: *Sulla generalizzazione delle fra- « zioni continue algebriche*, pubblicata nella Serie 2.^a, tom. 19 di questi *Annali*, che i « risultati ottenuti in questo campo dall'esimio analista abbiano a venire in breve alla « luce. »

croissantes de ε ,

$$\frac{1}{(\zeta_1 - \zeta_2 + \varepsilon)^{\mu_2+1} \cdots (\zeta_1 - \zeta_n + \varepsilon)^{\mu_n+1}} = A + A_1 \varepsilon + \cdots + A_{\mu_1} \varepsilon^{\mu_1} + \cdots$$

On a aussi

$$e^{(\zeta_1 + \varepsilon)x} = e^{\zeta_1 x} \left(1 + \frac{\varepsilon x}{1} + \cdots + \frac{\varepsilon^{\mu_1} x^{\mu_1}}{1 \cdot 2 \cdots \mu_1} + \cdots \right)$$

cela étant la valeur cherchée, abstraction faite du facteur $2i\pi$, sera le coefficient de ε^{μ_1} dans le produit des deux séries. C'est un polynôme entier en x de degré μ_1 ; je le désigne par X_1 , en posant

$$X_1 = A + A_1 \frac{x}{1} + A_2 \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \cdots + A_{\mu_1} \frac{x^{\mu_1}}{1 \cdot 2 \cdots \mu_1}.$$

Les autres résidus s'obtiennent de même, et l'on conclut l'expression suivante

$$J = X_1 e^{\zeta_1 x} + X_2 e^{\zeta_2 x} + \cdots + X_n e^{\zeta_n x},$$

où X_i est du degré μ_i en x . Développons maintenant l'intégrale suivant les puissances croissantes de x , et soit

$$J = J_0 + J_1 \frac{x}{1} + J_2 \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \cdots + J_p \frac{x^p}{1 \cdot 2 \cdots p} + \cdots,$$

on aura

$$J_\mu = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{z^\mu dz}{(z - \zeta_1)^{\mu_1+1} \cdots (z - \zeta_n)^{\mu_n+1}}.$$

L'intégrale d'une fraction rationnelle prise le long d'un contour qui renferme tous les pôles est nulle lorsque le degré du dénominateur surpasse le degré du numérateur de deux unités, nous pourrions donc écrire en désignant par S une série entière en x ,

$$J = Sx^{\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n + n - 1}.$$

Ce résultat établit la propriété caractéristique des polynômes X_1, X_2, \dots, X_n qui est l'objet de notre attention; leur étude en faisant connaître les relations qui les lient pour diverses valeurs des exposants $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ ouvre la voie à la généralisation de la théorie des fractions continues algébriques; voici à cet égard un premier point.

Je considère les cas particuliers où l'un des exposants est nul, pour fixer les idées je suppose $\mu_1 = 0$, et j'écris

$$J_1 = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{e^{zx} dz}{(z - \zeta_1)(z - \zeta_2)^{\mu_2+1} \cdots (z - \zeta_n)^{\mu_n+1}}.$$

En désignant par ζ l'une quelconque des quantités $\zeta_2, \zeta_3, \dots, \zeta_n$ et par $\mu + 1$ l'exposant du facteur $z - \zeta$, je remarque qu'un moyen de la décomposition en fractions simples, on obtient facilement l'égalité:

$$\frac{1}{(z - \zeta_1)(z - \zeta)^{\mu+1}} = \frac{M}{(z - \zeta_1)(z - \zeta)} - \frac{M_1}{(z - \zeta)^2} - \dots - \frac{M_\mu}{(z - \zeta)^{\mu+1}}$$

où l'on a

$$M = M_1 = \frac{1}{(\zeta_1 - \zeta)^\mu}, \quad M_2 = \frac{1}{(\zeta_1 - \zeta)^{\mu-1}}, \dots \quad M_\mu = \frac{1}{\zeta_1 - \zeta}.$$

Soit encore $G(z) = (z - \zeta_2)^{\mu_2+1} \dots (z - \zeta_n)^{\mu_n+1}$, en omettant le facteur $(z - \zeta)^{\mu+1}$, on en conclut l'expression suivante:

$$J_1 = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{M e^{z\alpha} dz}{(z - \zeta_1)(z - \zeta)G(z)} - \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{M_1 e^{z\alpha} dz}{(z - \zeta)^2 G(z)} - \dots \\ \dots - \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{M_\mu e^{z\alpha} dz}{(z - \zeta)^{\mu+1} G(z)}.$$

C'est une formule de réduction qui donne de proche en proche la valeur cherchée. Le premier terme en effet est une intégrale J_2 dans laquelle μ et μ_1 sont nuls, et les suivants ne contiennent plus ζ_1 . Ils s'expriment au moyen des polynômes X'_i , en nombre de $n - 2$, qui se rapportent à l'approximation maximum de la quantité

$$X'_2 e^{\zeta_2 \alpha} + X'_3 e^{\zeta_3 \alpha} + \dots + X'_n e^{\zeta_n \alpha}.$$

En regardant comme des éléments connus ces polynômes, ainsi que ceux qui concernent les fonctions linéaires d'un nombre moindre d'exponentielles, l'application répétée de la formule conduira en dernier lieu à l'intégrale

$$J_{n-1} = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{e^{z\alpha} dz}{(z - \zeta_1)(z - \zeta_2) \dots (z - \zeta_n)^{\mu_n+1}}.$$

Soit pour un moment

$$F'(z) = (z - \zeta_1)(z - \zeta_2) \dots (z - \zeta_n),$$

nous aurons

$$J_{n-1} = \frac{e^{\zeta_1 \alpha}}{(\zeta_1 - \zeta_n)^{\mu_n} F'(\zeta_1)} + \frac{e^{\zeta_2 \alpha}}{(\zeta_2 - \zeta_n)^{\mu_n} F'(\zeta_2)} + \dots + X_n e^{\zeta_n \alpha},$$

où X_n est le résidu correspondant au pôle $z = \zeta_n$ de la fonction $\frac{e^{z\alpha}}{(z - \zeta_n)^{\mu_n+1} F'(z)}$.

Mais on obtient une expression plus explicite en remarquant que J_n contient

Posons, pour abrégier, $F_1(z) = \frac{f'(z) F(z)}{f(z)}$, et soit d'abord $z = \zeta$, on trouve facilement

$$F_1(\zeta) = \mu F'(\zeta)$$

où μ désigne l'exposant de $z - \zeta$ dans $f(z)$; nous en concluons immédiatement

$$c = \frac{1}{(\mu + 1) F'(\zeta)}.$$

Je fais ensuite $z = \zeta_i$, ζ_i étant différent de ζ ; il vient ainsi:

$$1 = (\zeta_i - \zeta) \Phi(\zeta_i) + c \mu_i F'(\zeta_i),$$

d'où l'on tire, en écrivant pour plus de clarté $\Phi(z, \zeta)$ au lieu de $\Phi(z)$ afin de mettre en évidence la quantité ζ ,

$$\Phi(\zeta_i, \zeta) = \frac{1}{\zeta_i - \zeta} [1 - c \mu_i F'(\zeta_i)] = \frac{1}{\zeta_i - \zeta} \left[1 - \frac{\mu_i F'(\zeta_i)}{(\mu + 1) F'(\zeta)} \right].$$

On remarquera que cette valeur est indépendante de x , mais il n'en est pas de même de $\Phi(\zeta, \zeta)$ qui nous reste à obtenir. Prenons pour cela la dérivée de l'équation

$$1 = (z - \zeta) \Phi(z, \zeta) - c x F(z) + c \left[\frac{F(z)}{z - \zeta} + F_1(z) \right]$$

et supposons $z = \zeta$, on a ainsi,

$$0 = \Phi(\zeta, \zeta) - c x F'(\zeta) + c \left[\frac{1}{2} F''(\zeta) + F_1'(\zeta) \right]$$

ce qui donne l'expression du premier degré en x :

$$\Phi(\zeta, \zeta) = \frac{x}{\mu + 1} - \frac{F''(\zeta) + 2 F_1'(\zeta)}{2(\mu + 1) F'(\zeta)}.$$

Après avoir ainsi déterminé le polynôme $\Phi(z, \zeta)$ de manière à satisfaire à la relation considérée, nous en concluons en intégrant le long de contour C ,

$$\int_C \frac{e^{ux} dz}{(z - \zeta) f(z) F(z)} = \int_C \frac{e^{zx} \Phi(z, \zeta) dz}{f(z) F(z)};$$

voici les conséquences de ce résultat.

Désignons par J_ζ et J_ζ^1 les intégrales

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{zx} dz}{(z - \zeta) f(z)}, \quad \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{zx} dz}{(z - \zeta) f(z) F(z)},$$

qui sont de formes semblables, la première donnant la seconde en augmentant d'une unité les nombres $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$. En décomposant $\frac{\Phi(z, \zeta)}{F(z)}$ en fractions simples, la formule élémentaire

$$\frac{\Phi(z, \zeta)}{F(z)} = \sum \frac{\Phi(\zeta_i, \zeta)}{(z - \zeta_i) F'(\zeta_i)} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

conduit à l'égalité

$$J_\zeta^1 = \sum \frac{\Phi(\zeta_i, \zeta)}{F'(\zeta_i)} J_{\zeta_i}.$$

Attribuons maintenant à ζ les valeurs $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$, on en tire les relations de récurrence auxquelles je me suis proposé de parvenir, qui expriment $J_{\zeta_1}^1, J_{\zeta_2}^1, \dots, J_{\zeta_n}^1$ en fonction linéaire des quantités analogues $J_{\zeta_1}, J_{\zeta_2}, \dots, J_{\zeta_n}$. Qu'on change ensuite dans ces relations les nombres $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, en les augmentant d'une unité, et l'on aura pareillement au moyen de $J_{\zeta_1}^1, J_{\zeta_2}^1, \dots, J_{\zeta_n}^1$, les n intégrales

$$J_\zeta^2 = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{e^{z\omega} dz}{(z - \zeta) f(z) F^2(z)}.$$

Et il est clair qu'en continuant ainsi de proche en proche on arrivera à la détermination, pour une valeur quelconque de l'entier ν , de

$$J_\zeta^\nu = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{e^{z\omega} dz}{(z - \zeta) f(z) F^\nu(z)}.$$

Enfin nous remarquerons la formule,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{e^{z\omega} dz}{f(z) F^{\nu+1}(z)} = \sum \frac{1}{F'(\zeta)} J_\zeta.$$

$$(\zeta = \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n).$$

Supposons en particulier les nombres $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ égaux à zéro, on a alors $J_{\zeta_i} = e^{\zeta_i \omega}$, $f(z) = 1$, et nous obtenons, par un algorithme régulier, l'expression de l'intégrale

$$J = \frac{1}{2i\pi} \int_{(c)} \frac{e^{z\omega} dz}{F^{\nu+1}(z)},$$

où les polynômes multiplicateurs des exponentielles sont tous de même degré égal à ν .

L'exemple le plus simple de nos relations récurrentes s'offre pour $n = 2$; un calcul facile nous donne dans ce cas :

$$(\mu_1 + 1)(\zeta_1 - \zeta_2)^2 J_{\zeta_1}^1 = [(\zeta_1 - \zeta_2)x - \mu_1 - \mu_2 - 1] J_{\zeta_1} + (\mu_1 + \mu_2 + 1) J_{\zeta_2},$$

$$(\mu_2 + 1)(\zeta_1 - \zeta_2)^2 J_{\zeta_2}^1 = (\mu_1 + \mu_2 + 1) J_{\zeta_1} - [(\zeta_1 - \zeta_2)x + \mu_1 + \mu_2 + 1] J_{\zeta_2}.$$

On est ainsi amené à un nouveau mode de calcul, entièrement différent de l'algorithme élémentaire de la théorie des fractions continues, pour obtenir les polynômes entiers qui donnent l'approximation maximum de l'expression $X_1 e^{\zeta_1 x} + X_2 e^{\zeta_2 x}$, lorsque leurs degrés diffèrent d'une unité. Nous allons montrer que le nouveau système d'opérations ne s'applique pas seulement aux exponentielles $e^{\zeta_1 x}$, $e^{\zeta_2 x}$, et qu'il s'étend de lui-même à deux séries quelconques ordonnées suivant les puissances d'une variable.

Posons

$$S = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \dots,$$

$$S' = \alpha' + \beta' x + \gamma' x^2 + \dots,$$

nous déterminerons deux binômes de premier degré A et B , et deux constantes α , b , de manière à avoir

$$SA + S'a = S_1 x^2,$$

$$Sb + S'B = S'_1 x^2,$$

en représentant par S_i et S'_i deux nouvelles séries de même forme que les proposées. Soit ensuite

$$S_i A_i + S'_i a_i = S_2 x^2,$$

$$S_i b_i + S'_i B_i = S'_2 x^2,$$

et continuons le même système de relations de manière à déduire de S et S' successivement les séries

$$S_1, S_2, \dots, S_{n+1},$$

$$S'_1, S'_2, \dots, S'_{n+1}.$$

On aura en dernier lieu

$$S_n A_n + S'_n a_n = S_{n+1} x^2,$$

$$S_n b_n + S'_n B_n = S'_{n+1} x^2,$$

les quantités A_i , B_i étant des binômes du premier degré, a_i et b_i des constantes. Éliminons S_1 , S'_1 , S_2 , S'_2 , ... S_n , S'_n , on obtient facilement les relations suivantes

$$SP + S'P' = S_{n+1} x^{2n+2},$$

$$SQ + S'Q' = S'_{n+1} x^{2n+2},$$

où P, P', Q, Q' sont des polynômes entiers en x , des degrés $n + 1, n, n, n + 1$. Ajoutons les après les avoir multipliées par des constantes p, q choisies de manière à faire disparaître le terme indépendant de x dans la série $pS_{n+1} + qS'_{n+1}$, et soit:

$$Pp + Qq = X, \quad P'p + Q'q = X_1.$$

On voit que le développement de la fonction linéaire $SX + S'X_1$ commencera par un terme en x^{2n+3} ; nous avons donc, au moyen des polynômes X et X_1 , de même degré égal à $n + 1$, l'ordre d'approximation le plus élevé de cette fonction, tel que le donnerait la théorie des fractions continues.

Nous pouvons aller plus loin et chercher encore les polynômes de degrés inégaux μ et μ_1 , pour lesquels l'ordre d'approximation est représenté par la puissance $x^{\mu+\mu_1+1}$. Je supposerai le degré de X supérieur de m unités au degré de X_1 . En désignant alors par E la partie entière arrêtée au terme en x^{m-1} du développement de $\frac{S'}{S}$, de sorte qu'on ait

$$SE - S' = S_0 x^m,$$

j'appliquerai l'algorithme qu'on vient de voir à S_0 et S . On formera ainsi les égalités

$$SP + S_0 P' = S_{n+1} x^{2n+2},$$

$$SQ + S_0 Q' = S'_{n+1} x^{2n+2},$$

et nous en concluons en introduisant S au lieu de S_0

$$S(Px^m + P'E) - S P' - S_{n+1} x^{m+2n+2},$$

$$S(Qx^m + Q'E) - S' Q' = S_{n+1}^0 x^{m+2n+2}.$$

Ajoutons encore membre à membre après avoir multiplié par des constantes p et q de manière à introduire le facteur x dans la série $S_{n+1}p + S'_{n+1}q$, et posons

$$X = (Pp + Qq)x^m + (P'p + Q'q)E,$$

$$X_1 = -P'p - Q'q,$$

$$S'_{n+1}x = S_{n+1}p + S_{n+1}^0 q.$$

Ces polynômes sont, le premier du degré $\mu = m + n + 1$, le second du degré $\mu_1 = n + 1$, et la relation

$$SX + S'X_1 = S'_{n+1}x^{m+2n+3} = S'_{n+1}x^{\mu+\mu_1+1},$$

montre qu'ils donnent l'ordre voulu d'approximation maximum. Je remar-

querrai encore que si l'on élimine successivement S et S' entre les deux égalités précédentes, on en tire

$$\begin{aligned} S(PQ' - QP') &= (S_{n+1}Q' - S'_{n+1}Q)x^{2n+2}, \\ S'(PQ' - QP') &= (S'_{n+1}P - S_{n+1}P')x^{2n+2}. \end{aligned}$$

Il en résulte que le déterminant $PQ' - QP'$ est divisible par x^{2n+2} , sous la condition qu'on doit admettre, que S et S' ne contiennent pas en même temps le facteur x . Nous avons par suite

$$PQ' - QP' - cx^{2n+2},$$

en désignant par c une constante, puisque le premier membre est du degré $2n + 2$. Ces polynômes ont déjà été considérés par M. PADÉ qui les a introduits dans la théorie des fractions continues algébriques, et en a fait une étude approfondie dans une thèse de doctorat présentée à la Faculté des Sciences de Paris. Nous allons bientôt en trouver une application en cherchant à étendre cette théorie à la fonction linéaire

$$SX + S'X_1 + S''X_2,$$

question difficile dont j'essayerai de donner la solution.

Il s'agit alors de trouver pour X, X_1, X_2 des polynômes de degrés μ, μ_1, μ_2 , tels qu'on ait, en représentant par S_1 une série entière en x , comme S, S' et S'' :

$$SX + S'X_1 + S''X_2 = S_1x^{\mu+\mu_1+\mu_2+2}.$$

Cette condition fait dépendre leurs coefficients de la résolution d'un système d'équations homogènes du premier degré au nombre de $\mu + \mu_1 + \mu_2 + 2$, qui les déterminent sauf un facteur commun. Mon but est de donner un algorithme qui conduise au résultat cherché sans avoir d'équations à résoudre.

Je me fonderai pour cela sur la première remarque que j'ai faite en considérant le cas où les trois séries sont des exponentielles. Elle conduit à supposer d'abord que l'un des polynômes multiplicateurs se réduit à une constante. Nous avons vu en effet qu'on prenant pour auxiliaires les éléments de la théorie des fractions continues, on est ramené au cas fort simple et dont la solution est immédiate, où deux de ces polynômes sont indépendants de la variable.

Supposons X_2 constant, X et X_1 devant être des degrés m et n . J'emploierai la partie entière, que je désigne par E , du développement de $\frac{S'}{S}$

jusqu'au terme en x^m , puis parmi les fractions convergentes qui se tirent de $\frac{S'}{S}$, le groupe de celles où les dénominateurs sont de même degré égal à m , les degrés des numérateurs étant la série des entiers de zéro à n . Représentons les par $\frac{N_i}{D_i}$, N_i étant de degré i et D_i de degré m pour $i = 0, 1, 2, \dots, n$; on aura les relations suivantes où s_0, s_1, \dots, s_n sont des séries entières: en premier lieu

$$SE - S'' = S_1 x^{m+1},$$

puis,

$$SD_0 - S' N_0 = s_0 x^{m+1},$$

$$SD_1 - S' N_1 = s_1 x^{m+2},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$SD_n - S' N_n = s_n x^{m+n+1}.$$

Cela posé, déterminons la constante α_0 de manière à faire disparaître le terme constant dans $S_1 - s_0 \alpha_0$, et soit en conséquence

$$S_1 - s_0 \alpha_0 = S_2 x.$$

Opérons de même sur S_2 et s_1 , et posons

$$S_2 - s_1 \alpha_1 = S_3 x,$$

nous continuerons pareillement jusqu'à parvenir à l'égalité

$$S_{n+1} - s_n \alpha_n = S_{n+2} x,$$

et on verra facilement qu'on a ainsi

$$S_1 - s_0 \alpha_0 - s_1 \alpha_1 x - \dots - s_n \alpha_n x^n = S_{n+2} x^{n+1}.$$

Posons ensuite

$$X = E - D_0 \alpha_0 - D_1 \alpha_1 - \dots - D_n \alpha_n,$$

$$X_1 = N_0 \alpha_0 + N_1 \alpha_1 + \dots + N_n \alpha_n,$$

ces deux polynômes dont le premier est du degré m et le second du degré n donnent le résultat cherché, comme le montre la relation

$$SX + S' X_1 - S'' = S_{n+2} x^{m+n+2},$$

qui découle immédiatement des égalités précédentes (*).

(*) Cette question a été le sujet des recherches de M. TCHEBICHEF qui en a donné la solution par une méthode entièrement différente de celle que j'ai suivie dans le tom. 30 des *Mémoires de l'Académie des Sciences de S.^t Petersbourg*; une traduction française du travail de l'illustre géomètre *Sur les expressions approchées, linéaires par rapport à deux polynômes*, a paru dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*, tom. 1, pag. 289. Année 1877.

Ce point obtenu, je reviens encore au cas où les séries sont des exponentielles, et en supposant $n - 3$, aux relations récurrentes qui donnent les quantités désignées par J'_{ζ_1} , J'_{ζ_2} , J'_{ζ_3} au moyen de J_{ζ_1} , J_{ζ_2} , J_{ζ_3} . Posons pour simplifier

$$\alpha = \zeta_2 - \zeta_3, \quad \beta = \zeta_2 - \zeta_1, \quad \gamma = \zeta_1 - \zeta_2,$$

on conclut aisément des formules générales

$$\begin{aligned} (\mu_1 + 1)\alpha\beta^2\gamma^2 J'_{\zeta_1} &= [(\mu_2 + \mu_3 + 1)\beta - (\mu_1 + \mu_3 + 1)\gamma - \beta\gamma x] J_{\zeta_1} \\ &+ [(\mu_1 + 1)\beta^2 - \mu_2\alpha\beta] J_{\zeta_2} \\ &+ [(\mu_1 + 1)\gamma^2 - \mu_3\alpha\gamma] J_{\zeta_3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mu_2 + 1)\alpha^2\beta\gamma^2 J'_{\zeta_2} &= [(\mu_2 + 1)\alpha^2 - \mu_1\alpha\beta] J_{\zeta_1} \\ &+ [(\mu_2 + \mu_3 + 1)\gamma - (\mu_1 + \mu_2 + 1)\alpha - \alpha\gamma x] J_{\zeta_2} \\ &+ [(\mu_2 + 1)\gamma^2 - \mu_3\beta\gamma] J_{\zeta_3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mu_3 + 1)\alpha^2\beta^2\gamma J'_{\zeta_3} &= [(\mu_3 + 1)\alpha^2 - \mu_1\alpha\gamma] J_{\zeta_1} \\ &+ [(\mu_3 + 1)\beta^2 - \mu_2\beta\gamma] J_{\zeta_2} \\ &+ [(\mu_1 + \mu_3 + 1)\alpha - (\mu_2 + \mu_3 + 1)\beta - \alpha\beta x] J_{\zeta_3}. \end{aligned}$$

La principale remarque à faire sur ces résultats, c'est que les quantités J_{ζ_1} , J_{ζ_2} , J_{ζ_3} y représentent de trois manières pour trois systèmes différentes de polynômes, le même ordre d'approximation maximum de la fonction

$$X_1 e^{\zeta_1 x} + X_2 e^{\zeta_2 x} + X_3 e^{\zeta_3 x}$$

et qu'il en est de même pour J'_{ζ_1} , J'_{ζ_2} , J'_{ζ_3} , l'ordre se trouvant alors augmenté de trois unités. D'après cela je considère pareillement pour le cas général les trois relations

$$\begin{aligned} SP + S'P' + S''P'' &= S_1 x^n, \\ SQ + S'Q' + S''Q'' &= S'_1 x^n, \\ SR + S'R' + S''R'' &= S''_1 x^n, \end{aligned}$$

où les degrés des polynômes multiplicateurs étant donnés dans le tableau suivant

$$\begin{array}{ccc} m & m' - 1 & m'' - 1 \\ m - 1 & m' & m'' - 1 \\ m - 1 & m' - 1 & m'', \end{array}$$

on a $n = m + m' + m''$. Nous obtenons donc dans chaque égalité l'approximation maximum, et je conviendrais de donner au système des coefficients la désignation de polynômes associés d'ordres (m, m', m'') . Déterminons maintenant trois binômes de premier degré A, B, C et six constantes, a, a_1, b, b_1, c, c_1 , de manière à avoir

$$\begin{aligned} S_1 A + S'_1 a + S''_1 a_1 &= S_2 x^3 \\ S_1 b + S'_1 B + S''_1 b_1 &= S'_2 x^3 \\ S_1 c + S'_1 c_1 + S''_1 C &= S''_2 x^3, \end{aligned}$$

en indiquant par S_2, S'_2, S''_2 des séries entières en x . Il est évidemment possible de satisfaire à de telles conditions, chaque égalité renfermant sous forme homogène quatre indéterminées qui permettent d'annuler le terme indépendant ainsi que les coefficients de x et x^2 . Cela étant, on trouve en éliminant S_1, S'_1, S''_1 , les équations suivantes,

$$\begin{aligned} S(PA + Qa + Ra_1) + S'(P'A + Q'a + R'a_1) \\ + S''(P''A + Q''a + R''a_1) &= S_2 x^{n+3} \\ S(Pb + QB + Rb_1) + S'(P'b + Q'B + R'b_1) \\ + S''(P''b + Q''B + R''b_1) &= S'_2 x^{n+3} \\ S(Pc + Qc_1 + RC) + S'(P'c + Q'c_1 + R'C) \\ + S''(P''c + Q''c_1 + R''C) &= S''_2 x^{n+3}, \end{aligned}$$

où les degrés des coefficients de S, S', S'' sont

$$\begin{array}{ccc} m + 1, & m', & m'' \\ m, & m' + 1, & m'' \\ m, & m', & m'' + 1. \end{array}$$

Nous avons obtenu par conséquents les polynômes associés d'ordres $(m + 1, m' + 1, m'' + 1)$ au moyen des polynômes associés d'ordres (m, m', m'') , par une loi de formation que nous continuerons en posant les nouvelles égalité:

$$\begin{aligned} S_2 A' + S'_2 a' + S''_2 a'_1 &= S_3 x^3, \\ S_2 b' + S'_2 B' + S''_2 b'_1 &= S'_3 x^3, \\ S_2 c' + S'_2 c'_1 + S''_2 C' &= S''_3 x^3. \end{aligned}$$

On en conclura les polynômes d'ordres $(m + 2, m' + 2, m'' + 2)$, et de proche

en proche, en poursuivant les mêmes calculs, nous parviendrons par un algorithme régulier aux polynômes associés des ordres $(m + p, m' + p, m'' + p)$ où p est un entier arbitraire.

Nous avons maintenant les éléments nécessaires pour la solution de la question générale de l'approximation maximum de la fonction

$$SX + S'X_1 + S''X_2.$$

en admettant que X, X_1, X_2 soient de degrés μ, μ_1, μ_2 . Je suppose pour fixer les idées que μ_2 soit le plus petit de ces trois nombres, je ferai

$$\mu - \mu_2 = m, \quad \mu_1 - \mu_2 = m',$$

m et m' étant positifs et pouvant être nuls, et j'appliquerai l'algorithme précédent aux quantités que je vais définir.

Soit $\frac{P}{P'}$ et $\frac{Q}{Q'}$ des fractions convergentes tirées de $\frac{S'}{S}$ et telles que les degrés de P et Q soient $m + 1$ et m , ceux de P' et Q' , m' et $m' + 1$. Les deux premières S_1 et S'_1 résulteront des égalités suivantes

$$SP - S'P' = S_1 x^{m+m'+2}$$

$$SQ - S'Q' = S'_1 x^{m+m'+2},$$

et la troisième S''_1 sera donnée par la relation que nous savons former, où R et R' sont des polynômes de degrés m et m' , à savoir

$$SR + S'R' - S'' = S''_1 x^{m+m'+2}.$$

Cela étant, nous obtiendrons les polynômes associés d'ordres $(m + 2, m' + 2, 1)$, $(m + 3, m' + 3, 2)$, etc. par le calcul de $S_2, S'_2, S''_2; S_3, S'_3, S''_3$, etc. et ces mêmes opérations continuées jusqu'à ce qu'on parvienne à $S_{\mu_2}, S'_{\mu_2}, S''_{\mu_2}$ donneront en dernier lieu les polynômes d'ordres $(m + \mu_2, m' + \mu_2, \mu_2)$, c'est à dire (μ, μ_1, μ_2) ; c'est le résultat auquel il s'agissait d'arriver.

La méthode que je viens d'exquisser repose principalement sur l'emploi des polynômes associés; j'ajouterai à leur égard les remarques suivantes qui se tirent des équations de définition,

$$SP + S'P' + S''P'' = S_1 x^n,$$

$$SQ + S'Q' + S''Q'' = S'_1 x^n,$$

$$SR + S'R' + S''R'' = S''_1 x^n.$$

En les résolvant par rapport à S, S', S'' et désignant par D le déterminant

$$\begin{vmatrix} P & P' & P'' \\ Q & Q' & Q'' \\ R & R' & R'' \end{vmatrix},$$

on obtient d'abord la relation

$$D = cx^n,$$

où c est une constante.

Je les ajoute après les avoir multipliées par des indéterminées p, q, r dont je dispose de manière à avoir

$$S_1 p + S'_1 q + S''_1 r = sx^2,$$

et je pose

$$X = Pp + Qq + Rr$$

$$X_1 = P'p + Q'q + R'r$$

$$X_2 = P''p + Q''q + R''r,$$

ce qui nous donne

$$SX + S'X_1 + S''X_2 = sx^{m+2},$$

et par conséquent l'ordre d'approximation maximum, avec les degrés m, m', m'' des trois polynômes.

La recherche de cette approximation maximum peut encore être considérée sous un second point de vue bien distinct de celui au quel je me suis placé jusqu'ici. Au lieu de séries ordonnées suivant les puissances croissantes d'une variable, j'envisagerai n développements de la forme

$$\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{x^3} + \dots,$$

et en les désignant par S_1, S_2, \dots, S_n , je me proposerai d'obtenir des polynômes X_1, X_2, \dots, X_n de degrés $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ tels que la fonction linéaire

$$S_1 X_1 + S_2 X_2 + \dots + S_n X_n,$$

ne contienne aucun des termes en $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \dots, \frac{1}{x^{\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n + n}}$.

Soit pour abrégé $m = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n$, représentons aussi par E le groupe des termes entiers en x dans cette fonction, on aura l'égalité suivante

$$S_1 X_1 + S_2 X_2 + \dots + S_n X_n - E = \frac{\varepsilon}{x^{m+n}} + \frac{\varepsilon'}{x^{m+n+1}} + \dots$$

et nous remarquerons que les polynômes multiplicateurs, ainsi que la partie entière E , se trouvent d'après la condition posée, complètement déterminés, sauf une constante qui entre en facteur commun. Le calcul intégral offre un exemple intéressant de ce mode nouveau d'approximation que j'ai déjà indiqué (*Journal de Crelle*, tom. 79) et que je rappellerai succinctement. Il se tire de cette nouvelle expression, semblable à celle que j'ai considérée en commençant,

$$J = \int_x^\infty \frac{(z-x)^\nu dz}{(z-\zeta_1)^{\mu_1+1} (z-\zeta_2)^{\mu_2+1} \cdots (z-\zeta_n)^{\mu_n+1}},$$

mais où l'intégrale est rectiligne lorsque les exposants $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, ayant pour valeur commune μ , on a $\nu = \mu$. Si nous posons encore

$$F(z) = (z-\zeta_1)(z-\zeta_2) \cdots (z-\zeta_n),$$

on aura plus simplement

$$J = \int_x^\infty \frac{(z-x)^\mu dz}{F^{\mu+1}(z)},$$

c'est l'intégrale d'une fonction rationnelle, et l'on trouve facilement

$$J = X_1 \log \frac{x-\zeta_1}{x-\zeta_n} + X_2 \log \frac{x-\zeta_2}{x-\zeta_n} + \cdots + X_{n-1} \log \frac{x-\zeta_{n-1}}{x-\zeta_n} - E.$$

Dans cette formule, X_1, X_2, \dots, X_{n-1} sont des polynômes du degré μ , l'un quelconque d'entre eux X_i étant le résidu de la fraction rationnelle $\frac{(z-x)^\mu}{F^{\mu+1}(z)}$ qui correspond au pôle ζ_i . Soit enfin en développant suivant les puissances décroissantes de z ,

$$\frac{(z-x)^\mu}{F^{\mu+1}(z)} = \frac{\alpha}{z^{(n-1)\mu+n}} + \frac{\beta}{z^{(n-1)\mu+n+1}} + \cdots,$$

on en tire la série

$$J = \frac{\alpha'}{x^{(n-1)\mu+n-1}} + \frac{\beta'}{x^{(n-1)\mu+n}} + \cdots,$$

dont le premier terme montre que le système de ces $n-1$ polynômes conduit en effet à l'approximation maximum.

Ce résultat m'avait donné l'espoir que la considération des deux intégrales

$$\int_C \frac{e^{zx} dz}{f(z) F(z)}, \quad \int_x^\infty \frac{(z-x)^\nu dz}{f(z) F(z)},$$

où j'ai posé

$$f(z) = (z - \zeta_1)^{\mu_1} (z - \zeta_2)^{\mu_2} \cdots (z - \zeta_n)^{\mu_n},$$

me servirait également pour éclairer la question des deux modes d'approximation que j'avais en vue. Mais si l'étude en est toute semblable, les conclusions à tirer sont bien différentes, ainsi qu'on va le voir.

En employant les dénominations dont j'ai déjà fait usage, j'ai d'abord remarqué qu'on peut déterminer le polynôme $\Phi(z)$ du degré $n - 1$ et une constante c , de manière à avoir

$$\int \frac{(z-x)^\nu dz}{(z-\zeta)f(z)F(z)} = \int \frac{(z-x)^{\nu-1} \Phi(z) dz}{f(z)F(z)} - \frac{c(z-x)^\nu}{(z-\zeta)f(z)}.$$

Nous en tirons en effet cette égalité

$$z-x = (z-\zeta)\Phi(z) - \nu c F(z) + c(z-x) \left[\frac{F'(z)}{z-\zeta} + F_1(z) \right],$$

et en raisonnant comme nous l'avons déjà fait, on en conclut d'abord

$$c = \frac{1}{(\mu+1)F'(\zeta)},$$

puis, si l'on écrit $\Phi(z, \zeta)$ au lieu de $\Phi(z)$, les valeurs suivantes:

$$\begin{aligned} \Phi(\zeta_i, \zeta) &= \frac{\zeta_i - x}{\zeta_i - \zeta} \left[1 - \frac{i F'(\zeta_i)}{\mu + 1 F'(\zeta)} \right], \\ \Phi(\zeta, \zeta) &= \frac{\nu}{\mu + 1} - \frac{\zeta_i - x}{(\mu - 1) F'(\zeta)} \left[\frac{1}{2} F''(\zeta) + F'(\zeta) \right], \end{aligned}$$

qui contiennent l'une et l'autre la variable x au premier degré. Cela posé, l'intégration nous donne en admettant que l'exposant ν soit inférieur au degré de $(z-\zeta)f(z)$

$$\int_x^\infty \frac{(z-x)^\nu dz}{(z-\zeta)f(z)F(z)} = \int_x^\infty \frac{(z-x)^{\nu-1} \Phi(z) dz}{f(z)F(z)}.$$

Remplaçons maintenant $\frac{\Phi(z)}{F(z)}$ par la somme

$$\sum \frac{\Phi(\zeta_i, \zeta)}{(z-\zeta_i)F'(\zeta_i)},$$

et posons

$$J_\zeta = \int_x^\infty \frac{(z-x)^{\nu-1} dz}{(z-\zeta)f(z)}, \quad J'_\zeta = \int_x^\infty \frac{(z-x)^\nu dz}{(z-\zeta)f(z)F(z)},$$

on obtient pour les valeurs $\zeta = \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$, les relations

$$J'_\zeta = \sum \frac{\Phi(\zeta_i, \zeta)}{F'(\zeta_i)} J_{\zeta_i}, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Après avoir remarqué que l'on a encore en général

$$\int_x^\infty \frac{(z-x)^{\nu-1} dz}{f(z) F(z)} = \sum \frac{1}{F'(\zeta_i)} J_{\zeta_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

je vais considérer le cas particulier où $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ sont égaux à μ et ν à $\mu + 1$, ce qui donne

$$J_{\zeta} = \int_x^\infty \frac{(z-x)^\mu dz}{(z-\zeta) F^\mu(z)}, \quad J'_{\zeta} = \int_x^\infty \frac{(z-x)^{\mu+1} dz}{(z-\zeta) F^{\mu+1}(z)}$$

On passe de la première intégrale à la seconde par le changement de μ en $\mu + 1$, nous voyons par suite qu'en supposant en premier lieu $\mu = 1$, les relations trouvées conduisent par un algorithme régulier à la détermination pour toute valeur entière de μ des quantités J_{ζ} , et par conséquent des polynômes X_1, X_2, \dots, X_{n-1} dans l'égalité

$$\int_x^\infty \frac{(z-x)^\mu dz}{F^{\mu+1}(z)} = X_1 \log \frac{x-\zeta_1}{x-\zeta_n} + \dots + X_{n-1} \log \frac{x-\zeta_{n-1}}{\zeta_{n-1}-\zeta_n} - E.$$

Pour ne pas trop m'étendre je ne jetterai qu'un rapide coup-d'oeil sur cet algorithme; je me contenterai de remarquer que la partie transcendante de J_{ζ} se présente sous la forme suivante,

$$X'_1(x-\zeta_1) \log \frac{x-\zeta_1}{x-\zeta} + X'_2(x-\zeta_2) \log \frac{x-\zeta_2}{x-\zeta} + \dots + X'_n(x-\zeta_n) \log \frac{x-\zeta_n}{x-\zeta},$$

où X'_1, X'_2, \dots, X'_n sont des polynômes de degré $\mu - 1$. J'observerai encore qu'en développant suivant les puissances descendantes de x , nous trouvons,

$$J_{\zeta} = \frac{\alpha}{x^{n-1/\mu}} + \dots$$

On est donc encore amené avec le système de ces coefficients à une approximation maximum, mais qui se rapporte à une autre expression que la proposée. Les polynômes auxiliaires auxquels donne naissance le nouvel algorithme, sont ainsi d'une nature toute différente de ceux auxquels nous avons précédemment donné le nom d'associés. Devant les grandes difficultés qui s'offrent maintenant pour saisir dans ces circonstances le moyen de passer du cas particulier que nous venons de considérer au cas général où les logarithmes sont remplacés par des séries quelconques, j'ai dû poursuivre dans une autre direction la recherche que j'ai entreprise; voici en peu de mots ce que j'ai obtenu.

Soit S et S' deux séries de la forme $\frac{g}{x} + \frac{g'}{x^2} + \frac{g''}{x^3} + \dots$, je désignerai par $P, P'; Q, Q'; R, R'$, des polynômes dont les degrés sont donnés par ce tableau,

$$\begin{array}{cc} m, & m' \\ m+1, & m' \\ m, & m'+1, \end{array}$$

et tels qu'en posant $n = m + m' + 2$, on ait les égalités suivantes qui sont caractéristiques de l'approximation maximum, à savoir,

$$\begin{aligned} SP + S'P' - E &= \frac{\alpha}{x^n} + \frac{\alpha'}{x^{n+1}} + \dots, \\ SQ + S'Q' - E' &= \frac{\beta}{x^{n+1}} + \frac{\beta'}{x^{n+2}} + \dots, \\ SR + S'R' - E'' &= \frac{\gamma}{x^{n+1}} + \frac{\gamma'}{x^{n+2}} + \dots \end{aligned}$$

Cela posé, je forme ces combinaisons linéaires ou A et B sont des binômes du premier degré, a, a', b, b' , des constantes,

$$\begin{aligned} (SP + S'P' - E)A + (SQ + S'Q' - E')a + (SR + S'R' - E'')a' &= \\ = \left(\frac{\alpha}{x^n} + \frac{\alpha'}{x^{n+1}} + \dots\right)A + \left(\frac{\beta}{x^{n+1}} + \frac{\beta'}{x^{n+2}} + \dots\right)a + \left(\frac{\gamma}{x^{n+1}} + \frac{\gamma'}{x^{n+2}} + \dots\right)a' \\ (SP + S'P' - E)b + (SQ + S'Q' - E')B + (SR + S'R' - E'')b' &= \\ = \left(\frac{\alpha}{x^n} + \frac{\alpha'}{x^{n+1}} + \dots\right)b + \left(\frac{\beta}{x^{n+1}} + \frac{\beta'}{x^{n+2}} + \dots\right)B + \left(\frac{\gamma}{x^{n+1}} + \frac{\gamma'}{x^{n+2}} + \dots\right)b' \\ (SQ + S'Q' - E')c + (SR + S'R' - E'')c' &= \\ = \left(\frac{\beta}{x^{n+1}} + \frac{\beta'}{x^{n+2}} + \dots\right)c + \left(\frac{\gamma}{x^{n+1}} + \frac{\gamma'}{x^{n+2}} + \dots\right)c'. \end{aligned}$$

J'observe maintenant qu'au moyen des coefficients indéterminés contenus dans A, B et des constantes a, a', b, b' , on peut faire disparaître dans les seconds membres des deux premières égalités, les termes en $\frac{1}{x^n}, \frac{1}{x^{n+1}}, \frac{1}{x^{n+2}}$ et enfin au moyen de c et c' dans la troisième le seul terme en $\frac{1}{x^{n+1}}$. Soit donc

$$\begin{aligned} P_1 &= PA + Qa + Ra', & P'_1 &= P'A + Q'a + R'a', \\ Q_1 &= Pb + QB + Rb', & Q'_1 &= P'b + Q'B + R'b', \\ R_1 &= Pc + Qc', & R'_1 &= P'c + Q'c', \end{aligned}$$

nous aurons les nouvelles égalités toutes semblables aux précédentes,

$$SP_1 + S'P'_1 - E_1 = \frac{\alpha_1}{x^{n+3}} + \frac{\alpha'_1}{x^{n+4}} + \dots$$

$$SQ_1 + S'Q'_1 - E'_1 = \frac{\beta_2}{x^{n+3}} + \frac{\beta'_1}{x^{n+4}} + \dots$$

$$SR_1 + S'R'_1 - E''_1 = \frac{\gamma_1}{x^{n+2}} + \frac{\gamma'_1}{x^{n+3}} + \dots$$

Chacune d'elle correspond encore à un ordre d'approximation maximum, les degrés des coefficients étant

$$m + 1, \quad m' + 1$$

$$m + 2, \quad m' + 1$$

$$m + 1, \quad m' + 2,$$

et l'on voit que par la relation de récurrence on parviendra de proche en proche à trois fonctions linéaires dont l'ordre d'approximation sera de même le plus élevé possible, avec des coefficients des degrés

$$m + n, \quad m' + n$$

$$m + n + 1, \quad m' + n$$

$$m + n, \quad m' + n + 1,$$

n étant un entier quelconque. Supposons en particulier $m = 0$, $m' = 0$, nous aurons la solution de la question que nous avons vue, dans les trois cas où les degrés des polynômes facteurs de S et S' seront

$$n, \quad n$$

$$n + 1, \quad n$$

$$n, \quad n + 1.$$

Voici un autre résultat. Je pars des relations

$$SP + S'P' - E = \frac{\alpha}{x^n} + \frac{\alpha'}{x^{n+1}} + \dots,$$

$$SP_1 + S'P'_1 - E_1 = \frac{\alpha_1}{x^{n+1}} + \frac{\alpha'_1}{x^{n+2}} + \dots,$$

$$SP_2 + S'P'_2 - E_2 = \frac{\alpha_2}{x^{n+2}} + \frac{\alpha'_2}{x^{n+3}} + \dots,$$

dans les quelles P, P_1, P_2 sont des degrés $m, m + 1, m + 2, P', P'_1, P'_2$ du même degré m' et où j'ai fait $n = m + m'$. Ajoutons les membre à membre après avoir multiplié la première par une constante c , les deux autres par des binômes du premier degré A_1 et A_2 . Posons maintenant cette première condition que dans le coefficient de S' , c'est-à-dire, $P'c + P'_1A_1 + P'_2A_2$, le terme du degré le plus élevé disparaisse. Il restera encore quatre arbitraires, et il sera possible d'annuler dans l'expression

$$\left(\frac{\alpha}{x^n} + \frac{\alpha'}{x^{n+1}} + \dots\right)c + \left(\frac{\alpha_1}{x^{n+1}} + \frac{\alpha'_1}{x^{n+2}} + \dots\right)A_1 + \left(\frac{\alpha_2}{x^{n+2}} + \frac{\alpha'_2}{x^{n+3}} + \dots\right)A_2,$$

les coefficients des termes en $\frac{1}{x^n}, \frac{1}{x^{n+2}}, \frac{1}{x^{n+2}}$. Soit donc,

$$P_3 = Pc + P_1A_1 + P_2A_2,$$

$$P'_3 = P'c + P'_1A_1 + P'_2A_2,$$

$$E_3 = Ec + E_1A_1 + E_2A_2,$$

nous pourrons écrire,

$$SP'_3 + S'P_3 - E_3 = \frac{\alpha_3}{x^{n+3}} + \frac{\alpha'_3}{x^{n+4}} + \dots,$$

P_3 étant du degré $m + 3$ et P'_3 du degré m' . C'est une nouvelle relation de même forme que les précédentes, et nous avons ainsi une relation de récurrence semblable à celle de la théorie des fractions continues pour obtenir de proche en proche l'approximation maximum pour le cas où les coefficients de S et S' sont des degrés $m + p$, et m', p étant un entier arbitraire. Supposons en particulier $m' = 0$, le premier sera du degré p , le second une constante, en admettant qu'un sache obtenir ce polynôme et cette constante, l'algorithme donnera les multiplicateurs de S et S' qui sont de degrés $n + p$ et p .

Flanville (Lorraine), 12 octobre 1893.

Sulla trasformazione dell'undecimo ordine delle funzioni ellittiche.

(Di F. BRIOSCHI, a Milano.)

1.° In una Memoria pubblicata in questi *Annali* (Serie II.^a, tomo 12, Anno 1883) col titolo: *Sulla teoria delle funzioni ellittiche*, io dimostrava che considerando cinque quantità y_1, y_4, y_9, y_5, y_3 per le quali sussistano le dieci relazioni:

$$y^3_r y_{4r} + y^3_{4r} y_{9r} + y^3_{9r} y_{5r} = 0, \quad y^2_r y_{4r} y_{3r} - y^2_{9r} y_{5r} y_{4r} - y^2_{5r} y_r y_{3r} = 0$$

per $r = 1, 4, 9, 5, 3$ (mod. 11), relazioni già note pei lavori del sig. KLEIN (*), ed indicando con f la forma cubica di quelle cinque quantità:

$$f = y^3_1 y_3 + y^2_4 y_1 + y^2_9 y_5 + y^2_5 y_4 + y^2_3 y_9 = (y^2_r y_{3r})$$

si avevano i seguenti risultati.

Posto:

$$l = y_1 y_4 y_9 y_5 y_3$$

erano per le relazioni superiori:

$$(y^3_r y_{4r} y_{5r}) = l, \quad (y^3_r y^2_{9r}) = -2l,$$

quindi l'hessiano h della forma f :

$$h = 3 y_1 y_4 y_9 y_5 y_3 + (y^3_r y^2_{9r}) - (y^3_r y_{4r} y_{5r}) = 0$$

ed anche eguali a zero le sue derivate rispetto ad y_1, y_4, \dots, y_3 .

(*) *Ueber die Transformation elfter Ordnung der elliptischen Functionen.* Math. Annalen, Band 15.

Che inoltre considerando le tre forme degli ordini 4.°, 6.°, 11.°,

$$m = (y^2_r y_{4r} y_{9r}), \quad n = (y^3_r y^2_{4r} y_{9r}), \quad p = (y''_r)$$

fra le cinque forme f, l, m, n, p , sussistevano le tre relazioni:

$$m^2 n + 22 l^2 m - 11 f l n + 2 f^3 l = 0$$

$$11 n^2 - 4 m^3 - 4 f l m - 2 f^2 n = 0$$

$$l p + 44 l^2 n + m^4 - 6 f l m^2 - 6 f^2 l^2 = 0,$$

dalla prima delle quali deducendo il valore di n in funzione di f, l, m , cioè:

$$n = 2l \frac{11lm + f^3}{11fl - m^2}$$

ottennevasi dalla seconda:

$$m^5 - 21flm^3 + 88f^2l^2m - l(\overline{11}l^3 + f^5) = 0$$

e dall'ultima:

$$p = \frac{1}{11fl - m^2} [4fm^4 - 28f^2lm^2 + (3 \cdot \overline{11}l^3 + f^5)m - 22f^3l^2].$$

Pongasi in queste equazioni:

$$f = 1, \quad l = \frac{z^4}{11}, \quad m = -\frac{vz^2}{11},$$

dalla seconda si ha:

$$v(v^4 - 21v^2 + 88) = -Z$$

essendo:

$$Z = \frac{z^{12} + \overline{11}^3}{z^6}$$

ed indicando con Y la espressione:

$$Y = \frac{z^{12} - \overline{11}^3}{z^6},$$

si dedurrà:

$$Y = (v^2 - 11)\sqrt{\Phi(v)}$$

e

$$\Phi(v) = v^6 - 20v^4 + 56v^2 - 44.$$

Sieno:

$$R = v(v^4 - 21v^2 + 88) + (v^2 - 11)\sqrt{\Phi(v)}$$

$$S = -v(v^4 - 21v^2 + 88) + (v^2 - 11)\sqrt{\Phi(v)}$$

pei valori di Y, Z saranno:

$$R = -\frac{2 \cdot \overline{11}^3}{2^6}, \quad S = 2z^6, \quad RS = -4 \cdot \overline{11}^3 \quad (1)$$

e per queste si hanno i seguenti valori di n e di p :

$$\overline{11}^2 \cdot n = v\sqrt{\Phi} - (v^4 - 10v^2 - 22)$$

$$11 \frac{p}{l} = -4v\sqrt{\Phi} - (7v^4 - 26v^2 + 22).$$

2.° Nella citata Memoria ho anche dimostrato che indicando con g_2, g_3 i noti invarianti e con $\delta = g_2^3 - 27g_3^2$, avevasi (pag. 68):

$$-12 \frac{g_2}{\delta^{\frac{1}{3}}} = p - 238fm^2 - 1678f^2l + 11 \cdot 664 \cdot ln$$

e sostituendo in questa per f, l, \dots, p i valori superiori si giunge alla:

$$12 \frac{g_2}{\delta^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{1}{l} = 61v^4 - 368v^2 + 11 \cdot 32 - 60v\sqrt{\Phi} = P.$$

Ora pel valore di l si ha:

$$l^3 = \frac{z^{12}}{11} = \frac{4}{R^2},$$

quindi:

$$12 \frac{g_2}{\delta^{\frac{1}{3}}} = \frac{Pz^4}{11}, \quad \frac{g_2^3}{\delta} = \frac{1}{3^3 \cdot 4^2} \frac{P^3}{R^2} \quad (2)$$

ed in conseguenza:

$$8 \cdot 27 \cdot \frac{g_3}{\delta^{\frac{1}{2}}} = -\frac{Qz^6}{11}, \quad 27 \frac{g_3^2}{\delta} = \frac{1}{3^3 \cdot 4^2} \frac{Q^2}{R^2}, \quad (3)$$

essendo:

$$Q = 7(95v^6 - 1104 \cdot v^4 + 11 \cdot 192 \cdot v^2 - 8 \cdot \overline{11}^2) - 18v(37v^2 - 88)\sqrt{\Phi(v)}$$

e

$$P^3 - Q^2 = 3^3 \cdot 4^2 \cdot R^2 \quad (*).$$

(*) Vedi KLEIN: *Vorlesungen über die elliptischen Modulfunctionen* von Dr. FRICKE. Zweiter Band, pag. 440 (1892). — KIEPERT: *Zur Transformation der elliptischen Functionen*. Math. Annalen, Bd. 32, pag. 98 (1887). La quantità η delle formole del sig. KIEPERT è eguale a $v^2 - 8$.

3.° Oltre a quest'ultima relazione, i valori dei polinomi P , Q , R , S soddisfano identicamente alla:

$$\frac{1}{4}(\overline{11}^5 S^2 - R^2) - 90 \cdot \overline{11}^6 + 40 \cdot \overline{11}^4 P - 15 \cdot \overline{11}^3 Q + 2 \cdot \overline{11}^2 P^2 - PQ = 0,$$

nella quale sostituendo alle P , Q , R , S i loro valori in z , g_2 , g_3 dati dalla (1), (2), (3), si giunge alla:

$$z^{24} + 11 \left(-90 z^{12} + 40 \cdot 12 \frac{g_2}{\delta^{\frac{1}{3}}} z^8 + 15 \cdot 8 \cdot 27 \cdot \frac{g_3}{\delta^{\frac{1}{2}}} z^6 + 2 \cdot 12^2 \frac{g_2^2}{\delta^{\frac{2}{3}}} z^4 \right) + \\ + 12 \cdot 8 \cdot 27 \cdot \frac{g_2 g_3}{\delta^{\frac{5}{6}}} z^2 - 11 = 0,$$

ossia alla nota equazione modulare.

4.° Indicando con P' , Q' , ... le derivate dei polinomi P , Q , ... rispetto a v , si ottengono le relazioni seguenti:

$$\left. \begin{aligned} (5v^2 - 8)P &= \frac{3}{2} P' \sqrt{\Phi} + Q \\ (5v^2 - 8)Q &= Q' \sqrt{\Phi} + P^2 \\ (5v^2 - 8)R &= R' \sqrt{\Phi}, \quad (5v^2 - 8)S = -S' \sqrt{\Phi} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

e da queste le

$$3P'R - 2R'P = -2 \frac{QR}{\sqrt{\Phi}}, \quad Q'R - QR' = -\frac{P^2 Q}{\sqrt{\Phi}}. \quad (5)$$

Si indichi con D il simbolo di operazione:

$$D = 12 g_3 \frac{d}{dg_2} + \frac{2}{3} g_2^2 \frac{d}{dg_3},$$

pel quale:

$$D(g_2) = 12 g_3, \quad D(g_3) = \frac{2}{3} g_2^2, \quad D(\delta) = 0.$$

Operando col simbolo D sopra l'una, o sopra l'altra delle due equazioni (2), (3):

$$\frac{g_2^3}{\delta} = \frac{1}{3^3 \cdot 4^2} \frac{P^3}{R^2}, \quad 27 \frac{g_3^2}{\delta} = \frac{1}{3^3 \cdot 4^2} \frac{Q^2}{R^2},$$

si giunge per le relazioni (5) alla:

$$D(v) = -2^{\frac{1}{3}} \delta^{\frac{1}{6}} \frac{\sqrt{\Phi}}{R^{\frac{1}{3}}}$$

o pel valore (1) di R :

$$11 D(v) = \delta^{\frac{1}{6}} \sqrt{\Phi} \cdot z^2.$$

Ora essendo:

$$D(R) = R' D(v),$$

si avrà per la terza delle relazioni (4):

$$11 \frac{D(R)}{R} = \delta^{\frac{1}{6}} (5v^3 - 8) z^2$$

ed infine per la (1):

$$11 \frac{D(z)}{z} = -\frac{1}{6} \delta^{\frac{1}{6}} (5v^2 - 8) z^2.$$

Se quindi indichiamo con

$$T(x) = x^5 + 5a_1 x^4 + 10a_2 x^3 + 10a_3 x^2 + 5a_4 x + a_5 = 0,$$

la equazione di cui le radici sono:

$$\wp\left(\frac{2\omega}{11}\right), \quad \wp\left(\frac{4\omega}{11}\right), \quad \wp\left(\frac{6\omega}{11}\right), \quad \wp\left(\frac{8\omega}{11}\right), \quad \wp\left(\frac{10\omega}{11}\right),$$

sarà:

$$a_1 = -\frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} \delta^{\frac{1}{6}} (5v^2 - 8) z^2 \quad (6)$$

o ponendo $y = 12a_1$, sarà:

$$y = \delta^{\frac{1}{6}} (x_1 - x_2 v^2) z^2 \quad \left(x_1 = \frac{8}{5}, \quad x_2 = 1\right) \quad (*).$$

5.° È noto che dal valore superiore (6) di a_1 si deducono quelli di a_2, a_3, \dots mediante una successiva applicazione del simbolo di operazione D . Si hanno cioè per a_2, a_3, \dots i valori:

$$5 \cdot 8 \cdot a_2 = 11 D(a_1) + 5 \cdot 6 \cdot a_1^2 - \frac{17}{6} g_2$$

$$7 \cdot 6 \cdot a_3 = 11 D(a_2) + 5 \cdot 6 \cdot a_1 a_2 - \frac{23}{3} g_2 a_1 + 2g_3$$

e così via; e da questi ottengonsi i valori degli invarianti della trasformazione γ_2, γ_3 (**).

(*) Dr. FRICKE: *Vorlesungen*, etc., Bd. 2, pag. 442.

(**) Vedi una mia comunicazione all'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Francia: *Sur une classe d'équations modulaires*. Gennaio 1891.

Con breve calcolazione si ottengono così le formole:

$$\gamma_2 - \overline{11}^2 g_2 = 10 \delta^{\frac{1}{3}} v \sqrt{\Phi} \cdot z^4, \quad \gamma_3 + \overline{11}^3 g_3 = \frac{\delta^{\frac{1}{2}}}{6} v (37 v^2 - 88) \sqrt{\Phi} \cdot z^6,$$

dalle quali indicando con M, N i valori di P, Q nei quali si muti segno al radicale $\sqrt{\Phi}$, e quindi sia:

$$M^3 - N^2 = 3^3 \cdot 4^2 \cdot S^2 = 3^3 \cdot 4^3 \cdot z^{12},$$

si hanno le:

$$\gamma_2 = \frac{\delta^{\frac{1}{3}} z^4}{3 \cdot 4} M, \quad \gamma_3 = \frac{\delta^{\frac{1}{2}} z^6}{8 \cdot 27} N,$$

da cui:

$$\gamma_2^3 - 27 \gamma_3^2 = \Delta = \delta z^{24},$$

ed infine:

$$\frac{\gamma_2^3}{\Delta} = \frac{1}{3^3 \cdot 4^2} \frac{M^3}{S^2}, \quad 27 \frac{\gamma_3^2}{\Delta} = \frac{1}{3^3 \cdot 4^2} \frac{N^2}{S^2}.$$

6.° La equazione modulare del dodicesimo grado in a , od in y [equazione (6)] ha la proprietà comune a tutte le equazioni della stessa specie (*) di essere rappresentabile cioè sotto la forma:

$$F(y) + \delta f(y) = 0, \quad (7)$$

essendo $F(y)$ un polinomio del grado 12.° del quale sono noti i coefficienti ed $f(y)$ un polinomio del 6.° grado a coefficienti indeterminati.

Posto:

$$v^2 - \frac{8}{5} = \rho,$$

si avrà:

$$y = -\delta^{\frac{1}{6}} \rho z^2;$$

ed essendo:

$$\begin{aligned} F(y) = & y^{12} - 6 \cdot 11 \cdot 12 \cdot g_2 y^{10} + 11 \cdot 40 \cdot 216 \cdot g_3 y^9 - 11 \cdot 135 \cdot \overline{12}^2 \cdot g_2^2 y^8 + \\ & + 11 \cdot 288 \cdot 12 g_2 \cdot 216 g_3 y^7 - 11 \cdot 420 \cdot \overline{12}^3 g_2^3 y^6 + 11 \cdot 432 \cdot \overline{12}^2 g_2^2 \cdot 216 g_3 \cdot y^5 - \\ & - 11 \cdot 315 \cdot \overline{12}^4 g_2^4 y^4 + 11 \cdot 160 \cdot \overline{12}^3 g_2^3 \cdot 216 g_3 y^3 - 11 \cdot 54 \cdot \overline{12}^5 g_2^5 y^2 + \\ & + 120 \cdot \overline{12}^4 g_2^4 \cdot 216 g_3 y - 11 \cdot \overline{12}^6 g_2^6, \end{aligned}$$

(*) *Sulle equazioni modulari.* Rendiconti della R. Accademia dei Lincei. Ottobre 1893.

sostituendo per y il valore superiore e per g_2, g_3 quelli dati dalle relazioni (2) (3), si avrà:

$$F(y) = \delta^2 z^{24} \left[\rho^{12} - \frac{6}{11} P \rho^{10} + \frac{40}{11^2} Q \rho^9 - \frac{135}{11^3} P^2 \rho^8 + \frac{288}{11^4} P Q \rho^7 - \right. \\ \left. - \frac{420}{11^5} P^3 \rho^6 + \frac{432}{11^6} P^2 Q \rho^5 - \frac{315}{11^7} P^4 \rho^4 + \frac{160}{11^8} P^3 Q \rho^3 - \right. \\ \left. - \frac{54}{11^9} P^5 \rho^2 + \frac{120}{11^{11}} P^4 Q \rho - \frac{1}{11^{11}} P^6 \right],$$

ossia:

$$F(y) = \delta^2 z^{24} A(v).$$

Ora indicando $f(y)$ con

$$f(y) = \alpha_0 y^6 + 12 g_2 \cdot \alpha_1 y^4 + 216 g_3 \cdot \alpha_2 y^3 + 12^2 \cdot g_2^2 \cdot \alpha_3 y^2 + \\ + 12 \cdot 216 \cdot g_2 g_3 \cdot \alpha_4 y + 12^3 \cdot g_2^3 \alpha_5 + \delta \alpha_6,$$

nella quale $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_6$ sono coefficienti numerici a determinarsi, si otterrà:

$$f(y) = \delta z^{12} \left[\alpha_0 \rho^6 + \frac{\alpha_1}{11} P \rho^4 + \frac{\alpha_2}{11} Q \rho^3 + \frac{\alpha_3}{11} P^2 \rho^2 + \frac{\alpha_4}{11} P Q \rho + \right. \\ \left. + \frac{\alpha_5}{11} P^3 + \frac{\alpha_6}{4 \cdot 11^6} R^2 \right],$$

ossia:

$$f(y) = \delta z^{12} B(v).$$

La equazione (7) condurrà quindi alla equazione identica:

$$A(v) + \frac{1}{4 \cdot 11^6} R^2 B(v) = 0$$

e da questa eguagliando a zero i coefficienti delle potenze di v si dedurranno i valori dei coefficienti $\alpha_0, \alpha_1, \dots$

Dicembre 1893.

FINE DEL TOMO XXI.^o (SERIE II.^a)